

ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики**

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 1

**ТОПОЛОГИЯ, АНАЛИЗ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ**



**Тбилиси
2003**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

А. А. Болибрух (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 1

**ТОПОЛОГИЯ, АНАЛИЗ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ**

**Материалы международной конференции,
посвященной шестидесятилетию
профессора А. С. Мищенко**

**28–31 августа 2001
Москва**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Расщепление вдоль подмногообразий и $\mathbb{L}$ -спектры (А. Бак, Ю. В. Муранов)	3
Интегрируемые геодезические потоки на римановых многообразиях (А. В. Болсинов)	19
Гомотопическая теория расслоений со слоем матричная алгебра (А. В. Ершов)	33
D_∞ -Дифференциалы и A_∞ -структуры в спектральных последовательностях (С. В. Лапин)	56
Асимптотические гомоморфизмы и расширения C^* -алгебр (В. М. Мануйлов)	92
Характеристические классы полупростых алгебр (И. М. Никонов)	102
Операторная K -теория и функтор N_0 . Некоторые приложения (А. А. Павлов)	108
О конструкциях характеристических классов в некоммутативной геометрии (Ф. Ю. Попеленский, Ю. П. Соловьев)	147
Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений (А. И. Штерн)	161
Условные ожидания конечного индекса и свойства модулей, полученных при помощи действия групп (Е. В. Троицкий)	177

РАСЩЕПЛЕНИЕ ВДОЛЬ ПОДМНОГООБРАЗИЙ И $\mathbb{L}$ -СПЕКТРЫ

© 2003 г. А. БАК, Ю. В. МУРАНОВ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Группы препятствий к расщеплению и $\mathbb{L}$ -спектры	6
3. Спектральные последовательности в теории перестроек	13
Список литературы	17

Проблема расщепления гомотопической эквивалентности вдоль подмногообразия тесно связана с перестройками подмногообразий и точной последовательностью теории перестроек. В данном обзоре описаны возможности и методы применения $\mathbb{L}$ -спектров для исследования проблемы расщепления (простой) гомотопической эквивалентности многообразий вдоль подмногообразия. Данный подход естественным образом приводит к коммутативным диаграммам точных последовательностей, которые имеют важное значение в вычислительных задачах теории перестроек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим n -мерное связное замкнутое топологическое многообразие X^n с фундаментальной группой $\pi = \pi_1(X)$ и гомоморфизмом ориентации $w : \pi \rightarrow \{\pm 1\}$. Основной вопрос геометрической топологии состоит в описании всех возможных замкнутых (гладких, кусочно-линейных) топологических многообразий, которые (просто) гомотопически эквивалентны X (см. [33, 35, 36]).

Для этого вводится в рассмотрение структурное множество классов эквивалентности (простых) гомотопических эквивалентностей $h : M \rightarrow X$, сохраняющих ориентацию, где M — замкнутое связное n -многообразие соответствующей категории (O, PL, TOP) . Мы остановимся подробно на рассмотрении категории топологических многообразий (TOP) и простых гомотопических эквивалентностей (см. [35, 36]).

Две простых гомотопических эквивалентности $f_i : M_i \rightarrow X$ ($i = 0, 1$) эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм многообразий $g : M_0 \rightarrow M_1$, для которого отображения $f_1 g$ и f_0 гомотопны. Множество классов эквивалентности обозначается $\mathcal{S}_n^s(X)$ и входит в точную последовательность теории перестроек [35]

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma X, G/TOP] \xrightarrow{\sigma_{n+1}} L_{n+1}(\pi, w) \longrightarrow \mathcal{S}_n^s(X) \longrightarrow [X, G/TOP] \xrightarrow{\sigma_n} L_n(\pi, w). \quad (1.1)$$

Аналогичная точная последовательность имеет место и для случая гладких или кусочно-линейных структур на многообразии X [36]. Элементы множества $[X, G/TOP]$ называются нормальными инвариантами. Для $n \geq 5$ это множество совпадает с классами конкордантности нормальных топологических отображений $(f, b) : M \rightarrow X$ [33, 35]. По определению n -мерное топологическое нормальное отображение $(f, b) : M \rightarrow X$ состоит из:

- (i) n -мерного топологического многообразия M , заданного вместе с нормальным топологическим блочным расслоением

$$\begin{aligned} \nu_M &= \nu_{M \subset S^{n+k}} : M \rightarrow B TOP(k), \\ \rho_M : S^{n+k} &\rightarrow S^{n+k} / \overline{S^{n+k} - E(\nu_M)} = T(\nu_M); \end{aligned}$$

- (ii) n -мерного топологического многообразия X , заданного вместе с топологическим нормальным блочным расслоением

$$\nu_X : X \rightarrow BTOP(k), \quad \rho_X : S^{n+k} \rightarrow T(\nu_X);$$

- (iii) отображения $f : M \rightarrow X$ степени 1;
 (iv) отображения $b : \nu_M \rightarrow \nu_X$ топологических блочных расслоений, накрывающего f , для которого

$$T(b)_*(\rho_M) = \rho_X \in \pi_{n+k}(T(\nu_X)).$$

Группы препятствий к перестройкам $L_n(\pi, w)$ [36] функториально зависят от пары (π, w) и размерности многообразия $n \bmod 4$. Группы препятствий к перестройкам одинаковы для любой из категорий (O, PL, TOP) . Отображение σ задает препятствие к перестройке нормального отображения до простой гомотопической эквивалентности, т.е. $\sigma(f, b) = 0$, если класс нормального кобордизма (f, b) содержит простую гомотопическую эквивалентность, и обратно, если $\sigma(f, b) = 0$ и $n \geq 5$, то класс конкордантности (f, b) содержит простую гомотопическую эквивалентность [35, 36].

Таким образом для описания множества $\mathcal{S}_n^s(X)$ необходимо знать множество нормальных инвариантов, группы препятствий к перестройкам $L_n(\pi, w) = L_n^s(\pi, w)$ и отображение σ (ассембли-отображение). Подходы к решению каждой из этих задач совершенно различны. В настоящее время развиты эффективные методы вычисления L -групп (см. [19, 20, 28, 30, 37]), использующие глубокие результаты теории чисел и алгебраической K -теории. Для описания нормальных инвариантов и ассембли-отображения используются методы алгебраической и геометрической топологии (см. [4–6, 13, 26, 35, 36]), но получение окончательных результатов о множестве $\mathcal{S}_n^s(X)$ в общем случае далеко от завершения. При этом исследование ассембли-отображения связано с гипотезой Новикова о высших сигнатурах, с вопросом о реализации элементов L -групп нормальными отображениями замкнутых многообразий и рядом других классических проблем теории перестроек (см. [4–6, 13, 26]).

Пусть в многообразии X задано подмногообразие $Y \subset X$ коразмерности q . Тогда точная последовательность (1.1) теории перестроек может быть включена в различные коммутативные диаграммы точных последовательностей, в которые входят группы препятствий, отличные от групп препятствий к перестройкам. Полученные связи дают много дополнительной информации и весьма полезны как с алгебраической, так и с геометрической точки зрения, так как большинство объектов и отображений имеют явное геометрическое описание. Основное место в этом рассмотрении занимает проблема расщепления простой гомотопической эквивалентности $f : M \rightarrow X$ вдоль подмногообразия Y .

По определению [35, 36], простая гомотопическая эквивалентность $f : M \rightarrow X$ расщепляется вдоль подмногообразия Y , если отображение f гомотопно трансверсальному к Y отображению g с $N = g^{-1}(Y)$ такому, что отображения

$$g|_N : N \rightarrow Y, \quad g|_{(M \setminus N)} : M \setminus N \rightarrow X \setminus Y$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями. Первым простым следствием введенного определения является тот очевидный факт, что гомеоморфизм расщепляется вдоль любого подмногообразия. Обратно, если отображение f не расщепляется вдоль некоторого подмногообразия, то оно не гомотопно гомеоморфизму. Для исследования проблемы расщепления во многих конкретных случаях существуют достаточно развитая алгебраическая техника (см. [7, 33, 35, 36]), которая позволяет получать конкретные результаты.

Обозначим через ∂U границу трубчатой окрестности U подмногообразия Y в многообразии X и через

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

— квадрат фундаментальных групп с ориентацией, в котором все отображения индуцированы естественными отображениями многообразий. Квадрат F является универсально-отталкивающим

квадратом групп по теореме Ван Кампена. Согласно [35, 36] существуют группы $LS_{n-q}(F)$ препятствий к расщеплению, которые функториально зависят от квадрата F и $n - q \bmod 4$. Таким образом, для простой гомотопической эквивалентности $f : M \rightarrow X$ определено препятствие $\Theta(f) \in LS_{n-q}(F)$, которое равно нулю, если отображение f расщепляется вдоль Y , и обратно, если $\Theta(f) = 0$ и $n - q \geq 5$, то f расщепляется вдоль Y .

Если горизонтальные отображения в квадрате F являются изоморфизмами $A \cong C, B \cong D$, то группы $LS_*(F)$ обозначаются через $LN_*(A \rightarrow B)$ (см. [36]). В случае односторонних подмногообразий (коразмерность $q = 1$) группы $LN_*(A \rightarrow B)$ называются группами Браудера—Ливси [22] и применяются во многих задачах геометрической топологии (см. [7, 22, 23, 27]).

Для нормального отображения $(f, b) : M \rightarrow X$ определены также группы препятствий $LP_{n-q}(F)$ (см. [33, 35, 36]) к перестройкам пары многообразий (M, N) до получения простой гомотопической эквивалентности пар. Эти группы также зависят функториально от квадрата F и $n - q \bmod 4$. При $q \geq 3$ группы $LS_{n-q}(F)$ препятствий к перестройке подмногообразия внутри многообразия M совпадают с абстрактными группами препятствий к перестройкам $L_{n-q}(\pi_1(Y))$, а группы препятствий к перестройкам пары многообразий $LP_{n-q}(F)$ естественно изоморфны прямой сумме $L_{n-q}(\pi_1(Y)) \oplus L_n(\pi_1(X))$ (см. [33, 36]). Таким образом, наиболее интересным и содержательным является рассмотрение многообразия с подмногообразием коразмерности 1 или 2.

При этом точная последовательность теории перестроек может быть включена в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_n^s(X) & \longrightarrow & [X, G/TOP] & \xrightarrow{\sigma} & L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow v_\xi & & \downarrow \simeq \\
 \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) & \xrightarrow{p} & L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow q & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \longrightarrow
 \end{array} \quad (1.3)$$

строки которой являются точными последовательностями.

Коммутативная диаграмма (1.3) устанавливает глубокие связи между различными группами препятствий и точной последовательностью теории перестроек. Все отображения в этой диаграмме имеют геометрическое описание. Отображение $LP_{n-q}(F) \xrightarrow{p} L_n(\pi_1(X))$ является пренебрегающим отображением. Мы рассматриваем нормальное отображение пары многообразий только как нормальное отображение в объемлющее многообразие X . Аналогично определено отображение $LP_{n-q}(F) \xrightarrow{q} L_{n-q}(\pi_1(Y))$, только в этом случае мы рассматриваем ограничение нормального отображения на трансверсальный прообраз Y . Каждое нормальное отображение из $[X, G/TOP]$ (см. [33, 35]) определяет нормальное отображение пар $(M, N) \rightarrow (X, Y)$ и, таким образом, задает отображение v_ξ . По определению, композиция pv_ξ совпадает с отображением σ в точной последовательности (1.1) теории перестроек. Каждая простая гомотопическая эквивалентность $f : M \rightarrow X$ задает нормальное отображение (f, b) (см. [33, 35, 36]) и, следовательно, нормальное отображение пар. Таким образом мы получаем отображение $LS_{n-q}(F) \rightarrow LP_{n-q}(F)$. Элементами множества $\mathcal{S}_n^s(X)$ являются классы эквивалентности простых гомотопических эквивалентностей $f : M \rightarrow X$. Сопоставляя f препятствие к расщеплению вдоль подмногообразия Y , получаем отображение $\mathcal{S}_n^s(X) \rightarrow LS_{n-q}(F)$. Отображение $L_{n+1}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{S}_n^s(X)$ геометрически является действием и задается следующим образом [36]. Реализуем элемент $x \in L_{n+1}(\pi_1(X))$ нормальным отображением $F : Z \rightarrow X \times [0, 1]$ многообразий с границами, так что (см. [36]) $\partial_0(Z) = F^{-1}(X \times 0)$, $\partial_1(Z) = F^{-1}(X \times 1)$ и ограничение $F|_{\partial_0(Z)}$ есть заданная простая гомотопическая эквивалентность $(f : M \rightarrow X) \in \mathcal{S}_n^s(X)$. Тогда класс ограничения на верхнюю границу

$$\{F|_{\partial_1(Z)} : \partial_1(Z) \rightarrow X \times 1\} \in \mathcal{S}_n^s(X)$$

отображения F является простой гомотопической эквивалентностью, которую мы рассматриваем как результат действия элемента x на $(f : M \rightarrow X)$. Отображение

$$L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))$$

является отображением из относительной точной последовательности L -групп для вложения многообразий $(X \setminus Y) \rightarrow X$ одной размерности [36].

Более глубокие связи между различными алгебраическими объектами, возникающими при классификации геометрических структур на паре многообразий, можно получить, используя алгебраические походы, базирующиеся на использовании спектров в теории перестроек (см. [3, 7–9, 12, 21, 24, 29, 36]).

2. Группы препятствий к расщеплению и $\mathbb{L}$ -спектры

В этом параграфе будем предполагать, что все группы снабжены гомоморфизмом ориентации, а гомоморфизмы группы коммутируют с гомоморфизмами ориентации, если не оговорено противное. Группы препятствий к перестройкам и такие естественные отображения между ними, как индуцирование и трансфер, реализуются на уровне спектров [29, 35, 36]. В частности, L -функтор из категории $F(\mathbf{2}^n, \mathcal{G}pd)$ (см. [36]) в категорию абелевых групп пропускается через категорию спектров.

Вначале напомним необходимые определения [14, 29, 35, 36].

Спектр E состоит из семейства клеточных пространств $(E_n, *)$, $n \in \mathbb{Z}$, заданных вместе с семейством клеточных отображений $(\varepsilon_n : SE_n \rightarrow E_{n+1})$, где SE_n обозначает надстройку пространства E_n .

Для каждого из отображений ε_n определено сопряженное отображение $(\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1})$ (см. [14]).

Спектр E называется Ω -спектром, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ сопряженные отображения являются слабыми гомотопическими эквивалентностями [14].

Пусть $f : \pi \rightarrow \pi'$ — гомоморфизм ориентированных групп. Тогда определены Ω -спектры $\mathbb{L}(\pi)$, $\mathbb{L}(\pi')$, $\mathbb{L}(f)$ и корасслоение

$$\mathbb{L}(\pi) \longrightarrow \mathbb{L}(\pi') \longrightarrow \mathbb{L}(f). \quad (2.1)$$

Точная гомотопическая последовательность корасслоения (2.1) изоморфна относительной точной последовательности

$$\dots \longrightarrow L_n(\pi) \longrightarrow L_n(\pi') \longrightarrow L_n(f) \longrightarrow L_{n-1}(\pi) \longrightarrow \dots \quad (2.2)$$

отображения f (см. [29, 36]).

Пусть F — коммутативный квадрат (1.2) ориентированных групп. Непосредственно из определения L -групп в [36] и существования корасслоения (2.1) уже следует существование спектра $\mathbb{L}(F)$ (см. [14]), входящего в гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{L}(A) & \longrightarrow & \mathbb{L}(C) & \longrightarrow & \mathbb{L}(A \rightarrow C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}(B) & \longrightarrow & \mathbb{L}(D) & \longrightarrow & \mathbb{L}(B \rightarrow D) ; \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & \mathbb{L}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & \mathbb{L}(F) \end{array} \quad (2.3)$$

строки и столбцы которой являются корасслоениями.

Другое важное отображение, естественно возникающее в теории перестроек, — трансфер. Рассмотрим расслоение $p : X \rightarrow Y$ со слоем m -многообразием M^m над n -многообразием X . Отображение трансфера (см. [31, 32, 36]) $p^* : L_n(\pi_1(Y)) \rightarrow L_{n+m}(\pi_1(X))$ также реализуется на уровне спектров отображением

$$p^! : \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \longrightarrow \Omega^m \mathbb{L}(\pi_1(X)).$$

В частности, для (D^q, S^{q-1}) расслоения $p : (X, \partial X) \rightarrow Y$ с нулевым сечением, где D^q — стандартный q -мерный диск, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{p^!} & \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)) \\ p_1^! \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{q-1} \mathbb{L}(\pi_1(\partial X)) & \xlongequal{\quad} & \Omega^{q-1} \mathbb{L}(\pi_1(\partial X)) \end{array} . \quad (2.4)$$

Рассмотрим дисковое расслоение $p : (X^n, \partial X^n) \rightarrow Y$ с $q = 1$ или $q = 2$. Наличие нулевого сечения позволяет рассматривать Y как подмногообразие X коразмерности q . Квадрат (1.2) фундаментальных групп F в этом случае будет иметь вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Таким образом, группы препятствий к расщеплению для пары (X, Y) в этом случае изоморфны $LN_{n-q}(A \rightarrow B)$.

Определим спектр $\mathbb{L}N(A \rightarrow B)$ как гомотопический кослой отображения спектров

$$\Omega(p^!) : \Omega \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \longrightarrow \Omega^{q+1} \mathbb{L}(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)),$$

а спектр $\mathbb{L}P(\Psi)$ как гомотопический кослой отображения

$$\Omega(p_1^!) : \Omega \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \longrightarrow \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(X)).$$

В диаграмме (2.4) отображение $p^!$ реализует на уровне спектров отображение трансфера, а отображение

$$\Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)) \longrightarrow \Omega^{q-1} \mathbb{L}(\pi_1(\partial X))$$

реализует на уровне спектров граничное отображение из относительной точной последовательности L -групп для отображения $\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$. Из определения групп $LN_{n-q}(A \rightarrow B)$ и групп $LP_{n-q}(\Psi)$ (см. [33, 35, 36]) теперь следует, что для полученных спектров имеют место изоморфизмы

$$\pi_n(\mathbb{L}N(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X))) \cong LN_n(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X))$$

и $\pi_n(\mathbb{L}P(\Psi)) \cong LP_n(\Psi)$ для любого n .

Диаграмма (2.4) и определение спектров $\mathbb{L}N(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X))$ и $\mathbb{L}P(\Psi)$ для задачи расщепления с квадратом (2.5) дают гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \Omega \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^{q+1} \mathbb{L}(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \mathbb{L}N(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbb{L}(\partial X) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(\Psi) \end{array}, \quad (2.6)$$

в которой правое вертикальное отображение определено согласно [14].

Напомним, что в гомотопической категории спектров понятия универсально-отталкивающего квадрата и универсально-притягивающего квадрата совпадают. В дальнейшем такие квадраты спектров мы будем называть универсальными. Для универсальности квадрата спектров необходимо и достаточно, чтобы гомотопические слои (кослои) параллельных отображений были естественно гомотопически эквивалентны (см. [14]). Каждый универсальный квадрат спектров дает коммутативную диаграмму точных последовательностей (иногда называемую косой Левина). Для этого надо выписать гомотопические длинные точные последовательности отображений квадрата и отождествить соответствующие гомотопические группы слоев (кослоев) параллельных отображений.

Применим указанную процедуру к правому квадрату диаграммы (2.6), который универсален, поскольку гомотопические слои горизонтальных отображений совпадают. Гомотопический слой правого вертикального отображения гомотопически эквивалентен слою среднего вертикального

отображения, равного $\Omega^{q+1}\mathbb{L}(\pi_1(X))$. Рассмотрение гомотопических длинных точных последовательностей отображений правого квадрата диаграммы (2.6) дает коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{n+q}(A) & \longrightarrow & L_{n+q}(B) & \longrightarrow & LN_{n-1}(A \rightarrow B) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & LP_n(\Psi) & & L_{n+q}(A \rightarrow B) & & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 \longrightarrow & LN_n(A \rightarrow B) & \longrightarrow & L_n(B^-) & \longrightarrow & L_{n+q-1}(A) & \longrightarrow
 \end{array} \quad , \quad (2.7)$$

в которой гомоморфизм $A \rightarrow B$ обозначает гомоморфизм ориентированных групп $\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$, а B^- обозначает ориентированную группу $\pi_1(Y)$. Последнее обстоятельство необходимо учитывать, поскольку в квадрате фундаментальных групп (2.5) ориентации правой и левой групп B могут быть различными. Так, например, они заведомо различны для случая одностороннего подмногообразия коразмерности 1, в частности, для групп Браудера—Ливси (см., напр., [1, 7, 8, 16]). В качестве простого примера можно рассмотреть случай пары $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$, где $\mathbb{R}P^n$ — n -мерное действительное проективное пространство.

В коммутативной диаграмме (2.7) все последовательности вида

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet & & \\
 & \nearrow & & & \searrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \bullet & & \bullet & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

являются точными. Отсюда с помощью диаграммного поиска можно показать, что верхняя и нижняя строки диаграммы (2.7) являются цепными комплексами с изоморфными гомологиями. Как мы увидим в дальнейшем, на основе этой диаграммы, записанной на уровне спектров, строятся различные спектральные последовательности в теории перестроек (см. [3, 18, 24, 25]).

Если $Y \subset X$ является односторонним подмногообразием и горизонтальные отображения в квадрате Ψ — изоморфизмы, то группы $LN_*(A \rightarrow B)$ являются группами Браудера—Ливси. Для групп Браудера—Ливси диаграмма (2.7) была впервые построена алгебраически в [15] для квадратичных расширений колец в виде двух цепных комплексов. Затем в [34] была дана алгебраическая конструкция диаграммы (2.7) для квадратичных расширений антиструктур. В этом случае диаграмма (2.7) эффективно применяется для вычисления групп препятствий и естественных отображений в L -теории (см. [7, 11, 28, 30]). Кроме того, использование диаграммы (2.7) позволяет получить глубокие геометрические результаты о реализуемости элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий (см. [17, 18, 23, 27]). Более подробно мы остановимся на этом в следующем параграфе при обсуждении спектральных последовательностей в теории перестроек.

Вернемся теперь к общему случаю проблемы расщепления простой гомотопической эквивалентности $f : M \rightarrow X$ вдоль подмногообразия $Y \subset X$ коразмерности q . Определен квадрат F фундаментальных групп (1.2), и мы можем построить коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{p^!} & \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(Y)) \xrightarrow{\alpha} \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \\
 & \searrow & \downarrow \delta \qquad \qquad \downarrow \delta_1 \\
 & & \Omega^{q-1} \mathbb{L}(\pi_1(\partial U)) \xrightarrow{\beta} \Omega^{q-1} \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y))
 \end{array} \quad , \quad (2.8)$$

в которой левый треугольник следует из диаграммы (2.6), а правый квадрат получается из диаграммы (2.3).

Определим спектры

$$\begin{aligned}
 LS(F) &= \text{гомотопический кослой} \left[\Omega(\alpha p^!) : \Omega \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Omega^{q+1} \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \right], \\
 LP(F) &= \text{гомотопический кослой} \left[\Omega(\beta p^!) : \Omega \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y)) \right],
 \end{aligned}$$

где α , β и $p^!$ — отображения из диаграммы (2.8) (см. [21, 35, 36]).

Теперь можно записать гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \mathbb{L}S(F) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^q\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(F) \end{array}, \quad (2.9)$$

в которой горизонтальные строки являются корасслоениями, а правый квадрат является универсальным. Пусть $LS_n(F)$ и $LP_n(F)$ — группы препятствий к расщеплению и группы препятствий к перестройкам пары многообразий для (X, Y) соответственно. Тогда (см., напр., [21]) имеют место изоморфизмы

$$\pi_n(\mathbb{L}S(F)) \cong LS_n(F), \quad \pi_n(\mathbb{L}P(F)) \cong LP_n(F).$$

Последнее следует из функториальности отображений на уровне спектров и 5-леммы.

Гомотопические длинные точные последовательности универсального квадрата из диаграммы (2.9) дают диаграмму точных последовательностей [6, с. 264]:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(C) & \longrightarrow & L_{n+1}(D) & \xrightarrow{\Theta} & LS_{n-q}(F) & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ & & LP_{n-q+1}(F) & & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ \longrightarrow & LS_{n-q+1}(F) & \longrightarrow & L_{n-q+1}(B) & \longrightarrow & L_n(C) & \end{array}, \quad (2.10)$$

где $A = \pi_1(\partial U)$, $B = \pi_1(Y)$, $C = \pi_1(X \setminus Y)$, $D = \pi_1(X)$.

Отметим, что отображение Θ в диаграмме (2.10) совпадает с композицией

$$L_{n+1}(\pi_1(X)) \longrightarrow \mathcal{S}_n^s(X) \longrightarrow LS_{n-q}(F)$$

из диаграммы (1.3). Отсюда, в частности, следует, что если $\Theta(x) \neq 0$ для некоторого элемента $x \in L_{n+1}(\pi_1(X))$, то элемент x действует нетривиально на множестве гомотопических триангуляций $\mathcal{S}_n^s(X)$.

Пусть (X, Y) — пара многообразий с универсальным квадратом F (1.2) для задачи расщепления вдоль подмногообразия Y . Тогда пара многообразий (U, Y) естественно отображается в пару (X, Y) . Обозначим через

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \end{pmatrix}$$

квадрат фундаментальных групп в задаче расщепления простой гомотопической эквивалентности $f : M \rightarrow U$ вдоль подмногообразия Y (см. [36]).

Отображение пар многообразий индуцирует отображение квадратов фундаментальных групп $\Psi \rightarrow F$ (см. [35, 36]). Напомним, что группы $LS_*(\Psi)$ обозначаются через $LN_*(A \rightarrow B)$, где ориентация на группе B соответствует ориентации правой группы в квадрате Ψ [36].

Отображение $\Psi \rightarrow F$ индуцирует отображение верхней строки диаграммы (2.6) в верхнюю строку диаграммы (2.9), и мы получаем универсальный квадрат спектров (см. [8])

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{q+1}\mathbb{L}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}\mathbb{L}(C \rightarrow D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}N(A \rightarrow B) & \longrightarrow & \mathbb{L}S(F) \end{array}.$$

Для данного квадрата коммутативная диаграмма точных последовательностей гомотопических групп имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{n+1}(B) & \longrightarrow & L_{n+q+1}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_{n+q+1}(F) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & L_{n+q+2}(A \rightarrow B) & & & LS_n(F) & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 \longrightarrow & L_{n+q+1}(F) & \longrightarrow & LN_n(A \rightarrow B) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow
 \end{array} \quad (2.11)$$

Таким образом, мы получили диаграмму точных последовательностей [6, с. 146].

Отображение $\Psi \rightarrow F$ индуцирует отображение нижней строки диаграммы (2.6) в нижнюю строку диаграммы (2.9), и мы получаем универсальный квадрат спектров (см. [9, 10])

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^q \mathbb{L}(A) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(\Psi) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^q \mathbb{L}(C) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(F)
 \end{array} .$$

Для данного квадрата спектров коммутативная диаграмма точных последовательностей гомотопических групп имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{n+q+1}(A \rightarrow C) & \longrightarrow & LP_n(\Psi) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & L_{n+q}(A) & & & LP_n(F) & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 \longrightarrow & L_{n+1}(B) & \longrightarrow & L_{n+q}(C) & \longrightarrow & L_{n+q}(A \rightarrow C) & \longrightarrow
 \end{array} \quad (2.12)$$

Следует отметить, что для пары Браудера—Ливси группы $LP_n(\Psi)$ изоморфны относительным группам $L_{n+1}(p^*)$, где

$$p^* : L_n(\pi_1(Y)) \longrightarrow L_n(\pi_1(\partial U))$$

— отображение трансфера (см. [9, 34]). Таким образом, если $p : A \rightarrow B$ — левое отображение в квадрате Ψ , то для одностороннего подмногообразия $Y \subset X$ ($q = 1$) имеет место точная последовательность (см. [9])

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1}(A \rightarrow C) \longrightarrow L_n(p^*) \longrightarrow LP_{n-1}(F) \longrightarrow L_n(A \rightarrow C) \longrightarrow \cdots .$$

Дополнительные связи между различными группами препятствий к перестройкам и расщеплениям возникают в случае, когда правый столбец квадрата F задает задачу расщепления с квадратом фундаментальных групп

$$\Phi = \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & D \end{pmatrix}$$

и имеется естественный морфизм $r : F \rightarrow \Phi$ (см. [3, 8–10, 12]).

Квадраты такого вида естественно возникают во многих геометрических задачах (см. [1–3, 16]) и называются *геометрическими диаграммами*. Отметим также, что в случае геометрической диаграммы имеется естественное отображение квадратов фундаментальных групп $\Psi \rightarrow \Phi$, заданное композицией $\Psi \rightarrow F \rightarrow \Phi$.

Отображение r индуцирует отображение диаграмм (2.8), заданных для квадратов F и Φ соответственно. Повторяя рассуждения, которые мы использовали для отображений, индуцированных отображением $\Psi \rightarrow F$, мы получим следующие универсальные квадраты спектров:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}S(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}N(C \rightarrow D) & \longrightarrow & \mathbb{L}(D) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(\Phi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}(B) & \longrightarrow & \mathbb{L}(D) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}S(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}N(C \rightarrow D) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(\Phi) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \Omega\mathbb{L}N^{\text{rel}}(F) & \longrightarrow & \Omega\mathbb{L}(B \rightarrow D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}N(A \rightarrow B) & \longrightarrow & \mathbb{L}S(F) \end{array},$$

где спектр $\mathbb{L}N^{\text{rel}}(F)$ является кослом естественного отображения спектров

$$\mathbb{L}N(A \rightarrow B) \longrightarrow \mathbb{L}N(C \rightarrow D),$$

индуцированного отображением $\Psi \rightarrow \Phi$.

Для каждого из полученных универсальных квадратов мы можем выписать коммутативную диаграмму точных последовательностей (см. [3, 8–10, 12]). Таким образом, мы получаем следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B \rightarrow D) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow & LN_{n+q}(C \rightarrow D) & \longrightarrow \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & LS_n(F) & & & L_n(D) & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \longrightarrow & LN_{n+q+1}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_n(B \rightarrow D) & \longrightarrow \end{array}, \quad (2.13)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+q}(C) & \longrightarrow & LP_n(\Phi) & \longrightarrow & L_n(B \rightarrow D) & \longrightarrow \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & LP_n(F) & & & L_n(D) & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \longrightarrow & L_{n+1}(B \rightarrow D) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow & L_{n+q-1}(C) & \longrightarrow \end{array}, \quad (2.14)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B \rightarrow D) & \longrightarrow & LP_n(F) & \longrightarrow & L_{n+q}(D) & \longrightarrow \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & LS_n(F) & & & LP_n(\Phi) & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \longrightarrow & L_{n+q+1}(D) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_n(B \rightarrow D) & \longrightarrow \end{array}, \quad (2.15)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_n(B \rightarrow D) & \longrightarrow & L_{n+q}(F) \longrightarrow \\
& \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \searrow \\
& & & LN_n^{\text{rel}} & & & LS_{n-1}(F) \\
& \searrow & & \nearrow & \searrow & & \nearrow \\
& \longrightarrow & L_{n+q+1}(F) & \longrightarrow & LN_{n-1}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & LN_{n-1}(C \rightarrow D) \longrightarrow
\end{array}, \quad (2.16)$$

где $LN_n^{\text{rel}} = LN_n^{\text{rel}}(F)$ — относительные группы препятствий к расщеплению, входящие в точную последовательность

$$\dots \longrightarrow LN_n(A \rightarrow B) \longrightarrow LN_n(C \rightarrow D) \longrightarrow LN_n^{\text{rel}}(F) \longrightarrow LN_{n-1}(A \rightarrow B) \longrightarrow \dots$$

Отметим, что для геометрической диаграммы групп в случае одностороннего подмногообразия ($q = 1$) имеет место изоморфизм $LP_n(\Phi) \cong L_{n+1}(j^*)$, где $j^* : L_n(D) \rightarrow L_n(C)$ — отображение трансфера (см. [9, 34]). Коммутативные диаграммы (2.10)–(2.16) дают много информации о различных группах в теории перестроек и естественных отображениях между ними. В частности, они являются весьма эффективным инструментом вычислений.

Теперь остановимся на реализации других групп и отображений из диаграммы (1.3) на уровне спектров. В [33, с. 571] вводится множество $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ s -триангуляций пары многообразий (X, Y) , где ξ обозначает нормальное расслоение подмногообразия Y в многообразии X . Это множество состоит из классов конкордантности расщепленных вдоль Y отображений $f : (M, N) \rightarrow (X, Y)$, для которых $N = f^{-1}(Y)$. Множество $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ входит в точную последовательность

$$\dots \longrightarrow \mathcal{S}_n(X, Y, \xi) \longrightarrow [X, G/TOP] \xrightarrow{v_\xi} LP_{n-q}(F) \longrightarrow \dots, \quad (2.17)$$

которая может быть построена на алгебраическом уровне (см. [33, 35]). В частности, множество $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ имеет групповую структуру.

В [33, предложение 7.2.6] описаны свойства групп $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ и их связи с различными группами препятствий для пары многообразий (X, Y) . Эти связи можно получить, используя реализации точной последовательности (2.17) на уровне спектров.

Пусть $\mathbf{L}_\bullet$ обозначает односвязное накрытие Ω -спектра $\mathbf{L}_\bullet(\mathbb{Z})$ [35]. Согласно [35], имеет место гомотопическая эквивалентность $\mathbf{L}_0 \simeq G/TOP$. Для любого топологического пространства X с $\pi_1(X) = \pi$ определена алгебраически точная последовательность теории перестроек [35]

$$\dots \longrightarrow L_{n+1}(\pi) \longrightarrow \mathbb{S}_{n+1}(X) \longrightarrow H_n(X, \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow L_n(\pi) \longrightarrow \dots. \quad (2.18)$$

При этом соответствующая часть последовательности (2.18) естественно изоморфна точной последовательности (1.1), когда X является топологическим многообразием. Точная последовательность (2.18) является гомотопической длинной точной последовательностью корасслоения спектров [35, 36]:

$$X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \longrightarrow \mathbb{L}(\pi).$$

Если обозначить гомотопический слой полученного отображения спектров через $\mathbf{S}$, то для топологического многообразия X получим

$$\pi_n(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) = H_n(X, \mathbf{L}_\bullet) = [X, G/TOP], \quad \pi_n(\mathbf{S}) = \mathcal{S}_n^s(X).$$

Согласно [21] имеет место коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \xrightarrow{\Omega^q \mathbf{A}} & \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(X)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))
\end{array}, \quad (2.19)$$

в котором $\mathbf{A}$ — ассембли отображение. Длинные точные последовательности горизонтальных отображений этого квадрата дают следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_n^s(X) & \longrightarrow & [X, G/TOP] & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \longrightarrow \cdots
 \end{array} \quad (2.20)$$

Диаграмма (2.20) является частью диаграммы (1.3) и реализуется на уровне спектров. Рассмотрим также следующий коммутативный квадрат спектров, который следует из диаграммы (2.19) (см. [21]):

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^q \mathbf{S} & \longrightarrow & \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{L}S(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}P(F)
 \end{array} \quad (2.21)$$

Определим спектр $\Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi)$ как гомотопический слой отображения $\Omega^q \mathbf{S}(X) \rightarrow \mathbb{L}S(F)$ из диаграммы (2.21).

В диаграмме (2.21) кослои горизонтальных отображений гомотопически эквивалентны, как следует из коммутативной диаграммы (1.3), т.е. квадрат (2.21) универсален, а кослои вертикальных отображений гомотопически эквивалентны. Следовательно, имеют место изоморфизмы

$$\pi_n(\mathbf{S}(X, Y, \xi)) = \mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$$

и группы $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ входят в точную последовательность

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{S}_n(X, Y, \xi) \longrightarrow \mathcal{S}_n^s(X) \longrightarrow LS_{n-q}(F) \longrightarrow \cdots$$

Диаграмма гомотопических длинных точных последовательностей для квадрата (2.21) имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{n+1}(D) & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & S_{n-1}(X, Y, \xi) & \longrightarrow \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 & & S_n^s(X) & & LP_{n-q}(F) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \longrightarrow & S_n(X, Y, \xi) & \longrightarrow & [X, G/TOP] & \longrightarrow & L_n(D) & \longrightarrow
 \end{array} \quad (2.22)$$

Коммутативная диаграмма (2.22) совпадает с диаграммой [33, с. 284].

3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ПЕРЕСТРОЕК

Рассмотрим топологическое многообразие X размерности $n \geq 5$. Пусть фундаментальная группа $\pi_1(X) = B$ многообразия X имеет подгруппу $A \subset B$ индекса 2. Рассмотрим отображение $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}P^m$ многообразия X в m -мерное действительное проективное пространство высокой размерности. Пусть χ индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп с ядром A . Обозначим через Y трансверсальный прообраз $\chi^{-1}(\mathbb{R}P^{m-1})$, являющийся односторонним подмногообразием в X . Деформируя отображение χ , мы можем предположить, что вложение $Y \subset X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Таким образом, пара (X, Y) является парой Браудера—Ливси, и определены задача расщепления вдоль Y и коммутативная диаграмма (2.7) точных последовательностей с $q = 1$.

Интерес к диаграмме (2.7) в случае односторонних подмногообразий обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, все группы и отображения в этой диаграмме имеют алгебраическое описание на уровне колец с антиструктурами (см. [7, 23, 34, 37]). В настоящее время имеются достаточно полные результаты по описанию групп и отображений для случая конечных 2-групп (см., напр., [11, 30, 37]). Во-вторых, возможность построения характеристического подмногообразия $Y \subset X$ по любой подгруппе индекса 2 дает возможность получить глубокие результаты по

проблеме реализации элементов групп препятствий к перестройкам нормальными отображениями замкнутых многообразий. К основным работам в этом направлении можно отнести [7, 17, 18, 23, 27]. Отметим только следующий результат работы [23].

Пусть $A \rightarrow B$ — вложение индекса 2 и $\Theta : L_{n+2}(B) \rightarrow LN_n(A \rightarrow B)$ — отображение из диаграммы (2.7). Если $\Theta(x) \neq 0$ для $x \in L_{n+2}(B)$, то элемент x не реализуется нормальными отображениями замкнутых многообразий. Кроме того, он действует нетривиально на любой элемент множества $S_n^s(X)$ для любого связного многообразия X с $\pi_1(X) = B$.

Отображение Θ называется *инвариантом Браудера—Ливси*. Обобщения этого инварианта и переход к итерированным инвариантам Браудера—Ливси описан в [16–18, 27].

В [18] построена спектральная последовательность в теории перестроек, базирующаяся на реализации диаграммы (2.7) на уровне спектров. Дифференциалы в этой спектральной последовательности тесно связаны с итерированными инвариантами Браудера—Ливси и вопросом о реализации элементов групп препятствий к перестройкам нормальными отображениями замкнутых многообразий.

Построение спектральной последовательности в [18] проводится для пар Браудера—Ливси по диаграмме (2.7). С алгебраической точки зрения диаграмма (2.7) в этом случае строится для вложения $A \rightarrow B$ индекса 2 ориентированных групп. Для построения основную роль играет реализация диаграммы (2.7) на уровне спектров. Поскольку аналогичная реализация имеет место и для коразмерности 2 (см. квадрат спектров диаграммы (2.6)), можно провести построение спектральной последовательности в общем случае (см. [3]). Напомним, что в категории спектров определен функтор надстройки Σ . Это функтор из категории спектров в категорию спектров задан для любого спектра $\mathbb{E} = \{\mathbb{E}_n\}$ условием $(\Sigma\mathbb{E})_n = \mathbb{E}_{n+1}$.

Пусть Ψ — квадрат фундаментальных групп (2.5) в задаче расщепления вдоль подмногообразия Y коразмерности $q = 1, 2$. Обозначим ориентированную левую группу B через B^- . Запишем универсальный квадрат спектров в диаграмме (2.6), задающий диаграмму (2.7), в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{L}(B) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \Sigma^q \mathbb{L}P(\Psi) & & \mathbb{L}(A \rightarrow B) \\ \searrow & & \nearrow \\ & \Sigma^q \mathbb{L}(B^-) & \end{array} \quad (3.1)$$

Пусть Ψ^- — универсальный отталкивающий квадрат групп с измененной на группе B ориентацией:

$$\Psi^- = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B^- \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Если (X, Y) была парой Браудера—Ливси, дающей квадрат спектров (3.1), то квадрат (3.2) естественно возникает для проблемы расщепления простой гомотопической эквивалентности $f_1 : M_1 \rightarrow Y$ вдоль одностороннего подмногообразия Y_1 для пары Браудера—Ливси (Y, Y_1) (см. [17]). В качестве примера можно рассмотреть тройку многообразий $\mathbb{R}P^{n-2} \subset \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$. Теперь мы можем

построить диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{L}(B) & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 \Sigma^q \mathbb{L}P(\Psi) & & & & \mathbb{L}(A \rightarrow B) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^q \mathbb{L}(B^-) & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 \Sigma^{2q} \mathbb{L}P(\Psi^-) & & & & \Sigma^q \mathbb{L}(A \rightarrow B^-) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^{2q} \mathbb{L}(B) & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 \Sigma^{3q} \mathbb{L}P(\Psi^-) & & & & \Sigma^{2q} \mathbb{L}(A \rightarrow B) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^{3q} \mathbb{L}(B^-) & & \\
 & & \dots & &
 \end{array} \quad (3.3)$$

В диаграмму (3.3) входят поочередно со сдвигом размерности универсальные квадраты спектров (3.1), построенные для квадратов фундаментальных групп Ψ и Ψ^- . Диаграмма (3.3) естественно продолжается вниз; используя функтор петель Ω , ее можно продолжить вверх. Введем следующие обозначения (см. [18, 25]):

$$\begin{array}{ll}
 X_{0,0} = \mathbb{L}(B), & X_{1,1} = \Sigma^q \mathbb{L}(B^-), \\
 X_{2,2} = \Sigma^{2q} \mathbb{L}(B), & X_{3,3} = \Sigma^{3q} \mathbb{L}(B^-), \\
 \dots, & \dots, \\
 X_{1,0} = \Sigma^q \mathbb{L}P(\Psi), & X_{2,1} = \Sigma^{2q} \mathbb{L}P(\Psi^-), \\
 X_{3,2} = \Sigma^{3q} \mathbb{L}P(\Psi), & X_{4,3} = \Sigma^{4q} \mathbb{L}P(\Psi^-), \\
 \dots, & \dots, \\
 X_{0,1} = \mathbb{L}(A \rightarrow B), & X_{1,2} = \Sigma^q \mathbb{L}(A \rightarrow B^\xi), \\
 X_{2,3} = \Sigma^{2q} \mathbb{L}(A \rightarrow B), & X_{3,4} = \Sigma^{3q} \mathbb{L}(A \rightarrow B^\xi).
 \end{array}$$

Диаграмма (3.3) может быть бесконечно продолжена влево следующим образом. Спектр $X_{k,k-2}$ строится по известным спектрам и отображениям

$$X_{k-1,k-2} \longrightarrow X_{k-1,k-1} \longleftarrow X_{k,k-1}$$

так, чтобы квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 X_{k,k-2} & \longrightarrow & X_{k-1,k-2} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_{k,k-1} & \longrightarrow & X_{k-1,k-1}
 \end{array}$$

был гомотопически универсально-притягивающим квадратом. Аналогичная конструкция с использованием гомотопически универсально-отталкивающих квадратов используется для построения

спектра $X_{k,k+2}$ [18]. Мы получили бесконечную гомотопически коммутативную диаграмму спектров, состоящую из универсальных квадратов спектров

Спектральная последовательность в теории перестроек строится на основе фильтрации (см. [4])

$$\cdots \longrightarrow X_{3,0} \longrightarrow X_{2,0} \longrightarrow X_{1,0} \longrightarrow X_{0,0} \longrightarrow X_{-1,0} \longrightarrow \cdots, \quad (3.5)$$

входящей в диаграмму (3.4). По определению [4] полагаем

$$E_1^{p,s} = \pi_{s-p}(X_{p,0}, X_{p+1,0}) = \pi_{s-p}(X_{p,i}, X_{p+1,i}) \quad \forall i.$$

Из универсальности квадратов диаграммы (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} E_1^{p,s} &= \pi_{s-p}(X_{p,p}, X_{p+1,p}) = \pi_{s-p}(X_{p-1,p}) = \pi_{s-p}(\Sigma^{(p+1)q+1} \mathbb{L}S(\Psi^{(-)^p})) \\ &= \pi_{s-(q+1)(p+1)} \mathbb{L}S(\Psi^{(-)^p}). \end{aligned}$$

Тогда дифференциал

$$d_1^{p,s} : E_1^{p,s} \rightarrow E_1^{p+1,s}$$

задается естественной композицией

$$\pi_{s-p}(X_{p,p}, X_{p+1,p}) \xrightarrow{\cong} \pi_{s-p}(X_{p,p+1}, X_{p+1,p+1}) \longrightarrow \pi_{s-p-1}(X_{p+1,p+1}, X_{p+2,p})$$

отображений гомотопических групп.

В случае односторонних подмногообразий ($q = 1$) имеет место изоморфизм

$$E_1^{p,s} = LN_{s+2}(A \rightarrow B)$$

(см. [18]). В этом случае [18] дифференциал $d_1^{p,s}$ совпадает с композицией

$$LN_{s-2p-2}(A \rightarrow B^{(-)^p}) \longrightarrow LN_{s-2p-2}(B^{(-)^{p+1}}) \longrightarrow LN_{s-2p}(A \rightarrow B^{(-)^{p+1}})$$

отображений из диаграммы (2.7) для квадратов Ψ и Ψ^- , которая описана в алгебраических терминах в работе [18].

При $q = 2$ первый член спектральной последовательности $E_1^{p,s}$ зависит от p (см. [25]), и имеет место изоморфизм

$$E_1^{p,s} = LS_{s+p+1}(\Psi^{(-)^p}) = LN_{s+p+1}(A \rightarrow B^{(-)^p}).$$

При этом первый дифференциал по-прежнему является композицией отображений из диаграммы (2.7)

$$d_1^{p,s} : LS_{s+p+1}(\Psi^{(-)^p}) \longrightarrow L_{s+p+1}(B^{(\xi)^{p+1}}) \longrightarrow LS_{s+p-2}(\Psi^{(-)^{p+1}})$$

для квадрата $\Psi^{(-)p}$ и для квадрата $\Psi^{(-)p+1}$.

Приведем основные результаты работ [17, 18] о связи спектральной последовательности в теории перестроек с реализацией элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий. Для этого рассмотрим ограниченную фильтрацию для (3.5) в случае пар Браудера—Ливси:

$$X_{\infty,0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{3,0} \longrightarrow X_{2,0} \longrightarrow X_{1,0} \longrightarrow X_{0,0} = \mathbb{L}(B). \quad (3.6)$$

Обозначим через D естественное отображение

$$L_n(B) = \pi_n(\mathbb{L}(B)) \longrightarrow \pi_n(X_{0,0}, X_{\infty,0}).$$

Тогда из [17, 18] следует, что если $D(x) \neq 0$, то элемент x не реализуется нормальными отображениями замкнутых многообразий. Другой класс элементов $x \in L_n(B)$ определяется двумя условиями

$$\begin{aligned} x &\in \text{Im} [\pi_n(X_{\infty,0}) \rightarrow \pi_n(X_{0,0})], \\ x &\notin \text{Ker} [\pi_n(X_{0,0}) \rightarrow \pi_n(X_{0,\infty})]; \end{aligned}$$

эти элементы называются элементами второго типа (см. [17, 18]). Из результатов [17] следует, что элементы второго типа не реализуются нормальными отображениями замкнутых многообразий.

С алгебраической точки зрения построение спектральной последовательности можно провести для квадратичных расширений антиструктур и L -групп с декорациями. Такое построение проведено в [24]. Сами декорации также можно рассматривать как относительные L -группы. Спектральная последовательность в этом случае устроена достаточно просто (см. [25]).

Спектральные последовательности в теории перестроек изучены очень мало. В работе [18] приведен пример нетривиального второго дифференциала, но в настоящее время не известно, существует ли спектральная последовательность с нетривиальными дифференциалами более высоких порядков. Известно также, что для $q = 1$ и многообразий с конечной абелевой фундаментальной 2-группой все дифференциалы кроме первого тривиальны (см. [18]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметьев П. М. Расщепление гомотопических эквивалентностей вдоль одностороннего подмногообразия коразмерности 1// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1987. — 51. — С. 211–241.
2. Ахметьев П. М., Муранов Ю. В. Препятствия к расщеплению многообразий с бесконечной фундаментальной группой// Мат. заметки. — 1996. — 60. — С. 163–175.
3. Малешин Й., Муранов Ю. В., Реповиш Д. Группы препятствий к расщеплению в коразмерности 2// Мат. заметки. — 2001. — 69. — С. 52–73.
4. Мищенко А. С. Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. I. Рациональные инварианты// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1970. — 34. — С. 501–514.
5. Мищенко А. С. Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. II. Простой гомотопический тип// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1971. — 35. — С. 655–666.
6. Мищенко А. С. Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. III. Высшие сигнатуры// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1971. — 35. — С. 1316–1355.
7. Муранов Ю. В. Задача расщепления// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1996. — 212. — С. 123–146.
8. Муранов Ю. В. Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур// Изв. РАН, сер. мат. — 1995. — 59. — С. 107–132.
9. Муранов Ю. В., Реповиш Д. Группы препятствий к перестройкам и расщеплениям для пары многообразий// Мат. сб. — 1997. — 188. — С. 127–142.
10. Муранов Ю. В., Реповиш Д. Сферические расслоения и L -группы// Усп. мат. наук. — 1999. — 54. — С. 179
11. Муранов Ю. В., Харшиладзе А. Ф. Группы Браудера—Ливси абелевых 2-групп// Мат. сб. — 1990. — 181. — С. 1061–1098.
12. Муранов Ю. В., Хэмблтон И. Проективные группы препятствий к расщеплению вдоль односторонних подмногообразий// Мат. сб. — 1999. — 190. — С. 65–86.
13. Новиков С. П. Алгебраическая конструкция и свойства эрмитовых аналогов K -теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Применения к дифференциальной топологии

- и теории характеристических классов. I, II// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1970. — 34. — С. 253–288, 475–500.
14. *Свитцер Р. М.* Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
 15. *Харшиладзе А. Ф.* Эрмитова K -теория и квадратичные расширения колец// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1980. — 41. — С. 3–36.
 16. *Харшиладзе А. Ф.* Обобщенный инвариант Браудера—Ливси// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1987. — 51. — С. 379–400.
 17. *Харшиладзе А. Ф.* Перестройки многообразий с конечными фундаментальными группами// Усп. мат. наук. — 1987. — 42. — С. 55–85.
 18. *Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф.* Спектральная последовательность в теории перестроек// Мат. сб. — 1992. — 183. — С. 3–14.
 19. *Bak A.* The computation of surgery groups of finite groups with abelian 2-hyperelementary subgroups// Lect. Notes Math. — 1976. — 551. — С. 384–409.
 20. *Bak A.* K -Theory of Forms. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1981.
 21. *Bak A., Muranov Yu. V.* On the normal invariant and assembly map of a manifold pair// в печати.
 22. *Browder W., Livesay G. R.* Fixed point free involutions on homotopy spheres// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — 73. — С. 242–245.
 23. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Pseudo-free actions. I// В кн.: Algebraic topology (Aarhus, 1978)/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1979. — 763. — С. 395–447.
 24. *Cavicchioli A., Muranov Yu. V., Repovš D.* Algebraic properties of decorated splitting obstruction groups// Boll. U.M.I. (8). — 2001. — 4B. — С. 647–675.
 25. *Cavicchioli A., Muranov Yu. V., Repovš D.* Spectral sequences in K -theory for a twisted quadratic extension// Yokohama Math. J. — 1998. — 46. — С. 1–13.
 26. *Ferry S. C., Ranicki A. A., Rosenberg J.* (eds.). Novikov conjectures, index theorems, and rigidity. Vol. 1/ London Math. Soc. Lect. Notes. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — 226.
 27. *Hambleton I.* Projective surgery obstructions on closed manifolds// В кн.: Algebraic K -Theory, Part II (Oberwolfach, 1980)/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1982. — 967. — С. 101–131.
 28. *Hambleton I., Madsen I.* On the computation of the projective surgery obstruction groups// K -Theory. — 1993. — 7. — С. 537–574.
 29. *Hambleton I., Ranicki A., Taylor L.* Round L -theory// J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — 47. — С. 131–154.
 30. *Hambleton I., Taylor L., Williams B.* An introduction to maps between surgery obstruction groups// В кн.: Algebraic Topology (Aarhus, 1982)/ Lect. Notes Math. — Berlin—New York: Springer-Verlag, 1984. — 1051. — С. 49–127.
 31. *Lück W., Ranicki A. A.* Surgery obstructions of fibre bundles// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — 81. — С. 139–189.
 32. *Lück W., Ranicki A. A.* Surgery transfer// Lect. Notes Math. — 1988. — 1361. — С. 167–246.
 33. *Ranicki A. A.* Exact sequences in the algebraic theory of surgery. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1981.
 34. *Ranicki A. A.* The L -theory of twisted quadratic extensions// Can. J. Math. — 1987. — 39. — С. 345–364.
 35. *Ranicki A. A.* Algebraic L -theory and topological manifolds. — Cambridge Univ. Press, 1992.
 36. *Wall C. T. C.* Surgery on compact manifolds. — London—New York: Academic Press, 1970.
 37. *Wall C. T. C.* Classification of Hermitian forms. VI. Group rings// Ann. Math. (2). — 1976. — 103. — С. 1–80.

Anthony Bak

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld

E-mail: bak@mathematik.uni-bielefeld.de

Юрий Владимирович Муранов

Витебский государственный технологический университет

E-mail: mur@vstu.unibel.by, ymuranov@mail.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2003 г. А. В. БОЛСИНОВ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Геодезические на римановых многообразиях	19
2. Интегрируемые геодезические потоки	20
3. Постановка задачи	21
4. Топологические препятствия к интегрируемости. Случай двумерных поверхностей	21
5. Топологические препятствия в случае неодносвязных многообразий	22
6. Топологическая энтропия и интегрируемость геодезических потоков	23
7. Контрпримеры	24
8. Классические примеры интегрируемых потоков	26
9. Геодезические потоки на однородных пространствах и некоммутативная интегрируемость	28
Список литературы	31

1. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Мы начнем с основных определений, чтобы на элементарном уровне сформулировать задачи, о которых пойдет речь ниже.

Первое понятие — это *геодезическая линия на многообразии*. Чтобы его определить, рассмотрим следующую задачу. Представим себе точку, движущуюся по двумерной поверхности, лежащей в трехмерном пространстве. По какой траектории она будет двигаться в том случае, когда на нее не действуют никакие внешние силы? Классическая механика дает следующий ответ: точка будет двигаться с постоянной по величине скоростью таким образом, чтобы ее ускорение (как вектор трехмерного пространства) было перпендикулярно поверхности. Траектория точки называется геодезической линией на поверхности. Несложно убедиться, что такое движение описывается системой двух дифференциальных уравнений второго порядка. Менее очевидный факт заключается в том, что геодезические не меняются при изгибаниях поверхности, т.е. при таких преобразованиях, которые не затрагивают внутреннюю геометрию поверхности, или, на языке дифференциальной геометрии, индуцированную риманову метрику.

Другой подход к определению геодезических с самого начала использует только внутреннюю геометрию поверхности. Поставим следующую задачу. На поверхности даны две точки. Требуется найти кратчайшую кривую на поверхности, их соединяющую. Такая кривая (если она существует) и будет геодезической. В общем случае ее может не существовать или, наоборот, их может оказаться несколько. Однако если точки достаточно близки, то искомая кривая всегда существует и единственна. Тем самым геодезические могут быть охарактеризованы как локально кратчайшие кривые на поверхности. Такая интерпретация позволяет определить понятие геодезической линии на произвольном многообразии с римановой метрикой.

Впрочем, и первый подход может быть успешно использован в общем случае. Геодезические — это траектории точек, движущихся по многообразию по инерции. Другими словами, требуется, чтобы ускорение точки было равно нулю. Нужно лишь пояснить, что в качестве ускорения следует рассматривать *ковариантную* производную вектора скорости (напомним, что такая производная естественно определена на каждом римановом многообразии).

Как и в простейшем случае, мы увидим, что геодезические описываются системой дифференциальных уравнений второго порядка, которую нам будет удобно переписать в гамильтоновой форме. Пусть M — гладкое многообразие с римановой метрикой $g = (g_{ij})$. Рассмотрим произвольную систему локальных координат $x^1, \dots, x^n$ и перейдем стандартным образом от скоростей $\dot{x}^i$ к импульсам p_j по формуле $p_j = g_{ij}\dot{x}^i$. Тогда в новых координатах x^i, p_i ($i = 1, \dots, n$) уравнения геодезических примут вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (1)$$

где гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} p_i p_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

интерпретируется как кинетическая энергия. Здесь g^{ij} — коэффициенты тензора, обратного к метрическому.

Эта система уравнений определена глобально на кокасательном расслоении T^*M (со стандартной симплектической формой $\omega = \sum dp_i \wedge dx^i$), является гамильтоновой и называется *геодезическим потоком* риманова многообразия (M, g) . Более строго, геодезическим потоком называется определяемая этой системой дифференциальных уравнений однопараметрическая группа диффеоморфизмов.

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ

Нас будет интересовать вопрос о глобальном поведении геодезических на замкнутых римановых многообразиях. А именно, мы хотим выделить случай так называемых интегрируемых геодезических потоков. Прежде чем дать строгое определение, рассмотрим несколько примеров.

Рассмотрим двумерную сферу; геодезические на ней устроены простейшим образом — это экваторы. Все они замкнуты и имеют одинаковую длину. Таким образом, динамика геодезического потока очень проста.

Второй пример — геодезические на поверхности вращения. В типичном случае поведение геодезической таково: она движется по поверхности вокруг оси вращения и одновременно осциллирует вдоль этой оси. Если геодезическая незамкнута, то она замечает всюду плотно некоторую кольцевидную область на поверхности. В этом случае динамика также вполне регулярна и является «суперпозицией» вращения и осцилляции.

Аналогичную картину мы увидим и в случае геодезических на трехосном эллипсоиде. Этот случай сложнее. Здесь возникает два различных типа кольцевидных областей, внутри которых движутся геодезические. Но в целом поведение геодезических остается регулярным.

Возьмем теперь произвольную замкнутую поверхность, не обладающую никакими специальными симметриями (например, слегка изомнем стандартную двумерную сферу). Мы увидим, что поведение геодезических потеряет свою регулярность и станет хаотическим.

Регулярным поведением характеризуются интегрируемые геодезические потоки, которые формально определяются следующим образом.

Определение 1. Геодезический поток (1) называется *вполне интегрируемым по Лиувиллю*, если он допускает n гладких функций $f_1(x, p), \dots, f_n(x, p)$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

- 1) $f_i(x, p)$ — интеграл геодезического потока, т.е. функция, постоянная вдоль каждой геодезической $(x(t), p(t))$;
- 2) функции $f_1, \dots, f_n$ попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона на T^*M , т.е.

$$\{f_i, f_j\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f_j}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f_j}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f_i}{\partial p_{\alpha}} \right) = 0;$$

- 3) функции $f_1, \dots, f_n$ функционально независимы на T^*M .

Замечание. Третье условие нуждается в комментарии. Функциональная независимость интегралов может подразумеваться в трех различных смыслах. Дифференциалы функций $f_1, \dots, f_n$ должны быть линейно независимы на

- а) всюду плотном открытом множестве,
- б) всюду плотном открытом множестве полной меры,
- в) всюду за исключением некоторого кусочно-гладкого полиэдра.

Вместо этих условий можно предполагать, что все функции являются вещественно аналитическими. Тогда достаточно потребовать их функциональной независимости хотя бы в одной точке (такую ситуацию мы будем называть аналитической интегрируемостью).

Регулярность динамики в случае интегрируемости вытекает из следующей классической теоремы Лиувилля.

Теорема 1. Пусть $X^n = \{f_1 = c_1, \dots, f_n = c_n\}$ — совместная поверхность уровня первых интегралов гамильтоновой системы. Если эта поверхность регулярна (т.е. дифференциалы функций $f_1, \dots, f_n$ на ней независимы), компактна и связна, то она диффеоморфна n -мерному тору, причем динамика системы на этом торе является условно периодической, т.е. линеаризуется в некоторых подходящих угловых координатах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$\varphi_1(t) = \omega_1 t, \quad \dots, \quad \varphi_n(t) = \omega_n t.$$

Таким образом, за исключением некоторого сингулярного множества фазовое пространство системы оказывается расслоенным на инвариантные торы с условно периодической динамикой. Динамика на сингулярном множестве может, впрочем, оказаться весьма сложной (см. ниже).

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общий вопрос, о котором пойдет речь, может быть сформулирован очень просто: *Какие замкнутые гладкие многообразия допускают римановы метрики с интегрируемыми геодезическими потоками?*

Другими словами, мы хотим разделить все многообразия на два класса в зависимости от того, существуют или не существуют на них интегрируемые геодезические потоки.

Вопрос этот достаточно сложный, и полного ответа на него ожидать пока не приходится. На сегодняшний день по существу имеется только два подхода к этой проблеме.

Положительный ответ на вопрос о существовании интегрируемого геодезического потока строго индивидуален: можно взять какое-нибудь конкретное многообразие (или некоторый специальный класс многообразий) и построить на нем пример метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Никакого другого способа, кроме явного построения, пока нет. Тем самым задача сводится к поиску новых конструкций интегрируемых систем в специальном частном случае геодезических потоков.

Отрицательный ответ связан с обнаружением топологических препятствий к интегрируемости. Задача состоит в том, чтобы найти какое-нибудь топологическое свойство многообразия, которое мешает интегрируемости. Все многообразия с этим свойством относятся тогда ко второму классу.

В процессе анализа этой задачи выяснилось, что важным является характер первых интегралов. Например, можно рассматривать C^∞ -гладкие, аналитические или полиномиальные по импульсам интегралы. В последнем случае можно фиксировать или ограничить сверху их степени. Кроме того, иногда приходится накладывать топологические ограничения на структуру сингулярного множества. Каждый раз возникает новая задача или новый результат, наиболее интересные из которых мы постараемся упомянуть ниже.

4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К ИНТЕГРИРУЕМОСТИ. СЛУЧАЙ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Первые результаты о топологических препятствиях к интегрируемости относятся к случаю двумерных поверхностей.

Теорема 2 (В. В. Козлов [12]). *Двумерные поверхности рода $g > 1$ не допускают аналитически интегрируемых геодезических потоков.*

Первоначальное доказательство существенно использовало некоторые тонкие свойства аналитических функций. Однако впоследствии было обнаружено, что условие аналитичности можно существенно ослабить (см. [20]). Однако неясно, можно ли вообще отказаться от дополнительных условий на первые интегралы.

Вопрос 1. Существуют ли на двумерной поверхности рода $g > 1$ интегрируемые геодезические потоки с C^∞ -гладкими интегралами?

Приведем еще один результат, касающийся того же класса поверхностей.

Теорема 3 (В. Н. Колокольцов [13]). *Двумерные поверхности рода $g > 1$ не допускают геодезических потоков, интегрируемых при помощи полиномиального по импульсам интеграла (коэффициенты этого полинома являются гладкими функциями, никакой аналитичности для них не предполагается).*

Идея доказательства этой теоремы совершенно иная, нежели теоремы Козлова. По полиномиальному интегралу строится некоторая голоморфная дифференциальная форма на конфигурационном пространстве, затем анализируются ее нули и полюсы, что дает в результате возможность оценить род поверхности.

Вопрос 2. Имеется ли многомерный аналог теоремы Колокольцова? Другими словами, существуют ли топологические препятствия полиномиальной интегрируемости?

Если ограничиться рассмотрением линейных и квадратичных по импульсам интегралов, то задача упрощается; по-видимому, можно получить полный список многообразий с «квадратично интегрируемыми» геодезическими потоками. Дело в том, что при некоторых дополнительных предположениях такие потоки допускают разделение переменных на конфигурационном пространстве. Однако разделяющиеся переменные будут иметь определенные особенности, и задача сведется к изучению топологии многообразий, допускающих системы координат со специальным типом особенностей. Такой подход используется в работе К. Киохары [28], но окончательный ответ до сих пор не получен.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ В СЛУЧАЕ НЕОДНОСВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Следующим принципиальным результатом является теорема Тайманова.

Теорема 4 (И. А. Тайманов [20, 21]). *Если геодезический поток на многообразии M аналитически интегрируем, то справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Фундаментальная группа многообразия почти коммутативна (т.е. содержит коммутативную подгруппу конечного индекса).*
- 2) *Если $\dim H_1(M, \mathbb{Q}) = d$, то $H^*(M, \mathbb{Q})$ содержит подкольцо, изоморфное кольцу рациональных когомологий d -мерного тора.*
- 3) *Если $\dim H_1(M, \mathbb{Q}) = n = \dim M$, то кольца рациональных когомологий многообразия M и n -мерного тора изоморфны.*

Идея доказательства носит чисто топологический характер, поэтому условие аналитичности не является существенным. И. А. Тайманов доказал этот результат в предположении геометрической простоты рассматриваемого геодезического потока. Это фактически означает, что структура особого множества, на котором первые интегралы потока зависимы, устроено не слишком сложно с топологической точки зрения. Говоря точнее, к этому сингулярному множеству нужно добавить еще кое-что, чтобы дополнение оказалось тривиальным расслоением на торы Лиувилля над несвязным объединением дисков. Кроме того, условие геометрической простоты учитывает характер проекции этого «дополненного» сингулярного множества из кокасательного расслоения на конфигурационное многообразие (см. [20]).

6. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В 1991 Г. Патернайн предложил еще один подход к поиску топологических препятствий к интегрируемости геодезических потоков, основанный на использовании топологической энтропии [31, 32].

Топологическая энтропия является характеристикой динамической системы на компактном многообразии, измеряющей в определенном смысле меру ее хаотичности. Поскольку интегрируемые гамильтоновы системы имеют, как правило, нулевую топологическую энтропию, можно действовать следующим образом. Сначала можно попытаться оценить топологическую энтропию геодезического потока на данном многообразии чисто топологическими средствами. Часто это можно сделать, даже не имея никакой информации о римановой метрике: если топология многообразия достаточно сложна (см. примеры ниже), то топологическая энтропия любого геодезического потока будет автоматически положительной. Вторая часть задачи заключается в доказательстве того факта, что интегрируемость геодезического потока действительно влечет обращение в нуль топологической энтропии (возможно, при некоторых дополнительных условиях на характер первых интегралов).

Напомним определение топологической энтропии. Пусть на компактном многообразии X задана гладкая динамическая система F^t , рассматриваемая как однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Аппроксимируем эту систему с точностью до $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, T]$, используя лишь конечное число решений. Другими словами, мы хотим выбрать конечное число точек $x_1, \dots, x_{N(\varepsilon, T)}$ так, чтобы для любой другой точки $y \in X$ существовала бы x_i такая, что

$$\text{dist}(F^t(y), F^t(x_i)) < \varepsilon$$

для любого $t \in [0, T]$. Здесь в качестве расстояния dist берется любое расстояние, задающее топологию на X . Предположим теперь, что $N(\varepsilon, T)$ — минимальное число таких точек, и рассмотрим его асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$.

Определение 2. Топологической энтропией потока F^t называется число

$$h_{\text{top}}(F^t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\varepsilon, T)}{T}.$$

В качестве первого результата, показывающего связь топологической энтропии геодезического потока с топологией многообразия, приведем следующую теорему.

Теорема 5 (Е. И. Динабург [10]). *Если рост фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M экспоненциальный, то энтропия геодезического потока положительна для любой гладкой метрики на M . В частности, энтропия любого геодезического потока на двумерной поверхности рода $g > 1$ положительна.*

Поясним, что под энтропией топологического потока понимается энтропия его ограничения на компактную изоэнергетическую поверхность $Q^{2n-1} = \{H(x, p) = 1\} \subset T^*M^n$, $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2$.

Важно, что энтропийный подход эффективно работает и в случае односвязных многообразий, когда теоремы Козлова и Тайманова неприменимы.

Теорема 6 (Г. Патернайн [31, 32]). *Если односвязное многообразие не является рационально эллиптическим, то топологическая энтропия геодезического потока положительна.*

Рациональная эллиптичность означает, что рациональные гомотопические группы многообразия $\pi_n(M) \otimes \mathbb{Q}$ тривиальны начиная с некоторого N . Следующий результат не только гарантирует положительность топологической энтропии для большого класса гладких многообразий, но позволяет оценить ее снизу.

Теорема 7 (И. К. Бабенко [1]). *Топологическая энтропия геодезического потока на односвязном римановом многообразии (M, g) допускает следующую оценку:*

$$h_{\text{top}}(g) \geq D^h(M, g)^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\text{rk } \pi_n(M))}{n},$$

где $D^h(M, g)$ — гомологический диаметр риманова многообразия (M, g) .

Отметим, что предел $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\operatorname{rk} \pi_n(M))}{n}$ равен нулю лишь в случае рационально эллиптического многообразия, в противном случае это всегда положительное число. Гомологический диаметр многообразия зависит от выбора метрики g и, таким образом, является геометрической характеристикой многообразия (точное определение см. в [1]).

Для использования топологической энтропии в качестве препятствия к интегрируемости нужно доказать, что интегрируемые геодезические потоки имеют нулевую топологическую энтропию. При довольно сильных дополнительных предположениях это утверждение действительно справедливо.

Теорема 8 (Г. Патернайн). *Пусть (M, g) — гладкое компактное риманово многообразие, геодезический поток на котором интегрируем при помощи невырожденных первых интегралов. Тогда топологическая энтропия этого потока равна нулю.*

Невырожденность интегралов понимается в следующем смысле. Рассмотрим сначала случай, когда x — особая точка не только для гамильтониана, но и для всех остальных интегралов системы. Тогда требуется, чтобы существовал такой интеграл f , для которого x невырождена в обычном смысле теории Морса, т.е. $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) \neq 0$. Если же некоторые интегралы имеют в точке x ненулевой дифференциал, то по действию этих интегралов можно произвести локальную симплектическую редукцию, после чего мы оказываемся в предыдущей ситуации. Точка x называется невырожденной для исходной системы, если она будет таковой для редуцированной. Интегралы гамильтоновой системы называются невырожденными, если каждая точка симплектического многообразия невырождена.

Заметим, однако, что предположение о невырожденности является очень сильным и в многомерном случае выполняется довольно редко. Например, вырождения происходят даже в таком относительно простом и естественном случае, каким является геодезический поток на n -мерном эллипсоиде ($n \geq 3$). Одна из причин заключается в существовании вырожденных особенностей общего положения, которые нельзя устранить малым шевелением.

7. КОНТРПРИМЕРЫ

Оказывается, что полностью отказаться от дополнительных условий на характер первых интегралов нельзя. Другими словами, в общем случае положительность энтропии не является препятствием к интегрируемости.

Первый интересный пример «экзотического» интегрируемого потока был построен Л. Батлером.

Теорема 9 (Л. Батлер [26]). *Существует трехмерное риманово (вещественно аналитическое) NIL-многообразие (M^3, g) такое, что*

- 1) *геодезический поток метрики g на M^3 вполне интегрируем по Лиувиллю при помощи C^∞ -гладких первых интегралов (более того, два из трех интегралов являются аналитическими функциями);*
- 2) *фундаментальная группа $\pi_1(M)$ не является почти коммутативной и имеет полиномиальный рост;*
- 3) *топологическая энтропия геодезического потока равна нулю.*

Таким образом, Л. Батлер показал, что в гладкой ситуации утверждение теоремы Тайманова (теорема 4) неверно. Кроме того, это первый пример ситуации, когда вещественно аналитический поток интегрируем, но его интегралы не могут быть вещественно аналитическими функциями.

Топологическая структура многообразия M^3 в примере Батлера довольно проста. Это расслоение $M^3 \xrightarrow{T^2} S^1$ над окружностью со слоем тор и матрицей монодромии $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Другими словами, чтобы построить M^3 , нужно взять прямое произведение $T^2 \times [0, 2\pi]$ и склеить его основания $T^2 \times \{0\}$ и $T^2 \times \{2\pi\}$ по линейному отображению, задаваемому в некоторых угловых координатах матрицей A .

Используя идею Л. Батлера, год спустя И. А. Тайманов и автор построили пример трехмерного многообразия с интегрируемым геодезическим потоком, имеющим положительную топологическую энтропию.

Теорема 10 (А. В. Болсинов, И. А. Тайманов [25]). *Существует трехмерное риманово (вещественно аналитическое) SOL-многообразие (M^3, g) такое, что*

- 1) *геодезический поток метрики g на M^3 вполне интегрируем по Лиувиллю при помощи C^∞ -гладких первых интегралов (более того, два из трех интегралов являются аналитическими функциями);*
- 2) *фундаментальная группа $\pi_1(M)$ не является почти коммутативной и имеет экспоненциальный рост;*
- 3) *топологическая энтропия геодезического потока положительна.*

В этом примере многообразие M^3 имеет почти ту же структуру, что и в примере Батлера: достаточно заменить матрицу A целочисленной гиперболической матрицей, например, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Риманова метрика g на M^3 описывается следующим образом. Пусть x, y, z — локальные координаты на M , где $z \bmod 2\pi$ — координата на базе S^1 , а $x \bmod 2\pi, y \bmod 2\pi$ — угловые координаты на слое T^2 . Тогда

$$ds^2 = d\tilde{s}_z^2 + dz^2,$$

где

$$d\tilde{s}_z^2 = a_{11}(z)dx^2 + 2a_{12}(z)dx dy + a_{22}(z)dy^2$$

— плоская метрика на слое T_z^2 над точкой $z \in S^1$. Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} выбираются таким образом, чтобы метрика оказалась гладкой на всем многообразии M .

Поскольку коэффициенты этой метрики не зависят от переменных x и y , соответствующие импульсы p_x, p_y являются коммутирующими первыми интегралами. Единственная проблема заключается в том, что p_x и p_y не определены глобально на M^3 из-за нетривиальности монодромии расслоения на торы. Однако можно построить другие функции $F_1 = F_1(p_x, p_y)$ и $F_2 = F_2(p_x, p_y)$, на которые монодромия не влияет. В качестве таких функций нужно взять инварианты действия группы $\mathbb{Z}$, порожденного линейным преобразованием $B^{-1\top}$ на двумерном пространстве $\mathbb{R}^2(p_x, p_y)$. Интересно отметить, что структура орбит этого действия такова, что лишь один из инвариантов является аналитической функцией. Второй может быть выбран C^∞ -гладким, но не аналитическим.

Функции F_1 и F_2 (вместе с гамильтонианом) гарантируют полную интегрируемость геодезического потока на (M, g) .

Положительность топологической энтропии легко следует из теоремы Динабурга, но может быть объяснена и непосредственно. Дело в том, что геодезический поток допускает естественное инвариантное многообразие N , образованное геодезическими вида $x(t) = \text{const}, y(t) = \text{const}, z(t) = t$. Легко видеть, что объединение таких геодезических является подмногообразием в T^*M , диффеоморфным базе M . Геодезический поток ϕ^t , ограниченный на N , сохраняет T^2 -слои. При этом отображение последования за время $t = 2\pi$ переводит каждый слой в себя $\phi^{t=2\pi} : T^2 \rightarrow T^2$ и совпадает с гиперболическим автоморфизмом тора, заданным матрицей B . Хорошо известно (это один из базовых примеров), что топологическая энтропия такого автоморфизма положительна и равна логарифму наибольшего собственного значения матрицы B (см., напр., [11]). Таким образом, геодезический поток допускает подсистему с положительной топологической энтропией и, следовательно, сам обладает этим свойством.

Конструкции теорем 9, 10 естественно обобщаются на случай произвольной размерности [5, 26, 27].

Отметим, что топологическая структура сингулярного множества в этих примерах достаточно проста. Оно представляет собой конечный полиэдр, каждый страт которого является не просто гладким, а даже вещественно-аналитическим многообразием. Неаналитическим является характер приближения торов Лиувилля к этому сингулярному множеству.

Стоит объяснить, почему интегралы не являются геометрически простыми в смысле Тайманова [20]. Дело в том, что база слоения на торы Лиувилля не является односвязной. Чтобы ее сделать таковой (как требуется в определении геометрической простоты) нужно провести дополнительные разрезы, что невозможно сделать «геометрически простым» образом: в каждом кокасательном пространстве разрез будет состоять из бесконечного числа плоскостей.

Приведенные выше примеры вызывают следующие естественные вопросы.

Вопрос 3. Какие дополнительные условия на характер первых интегралов гарантируют обнуление топологической энтропии интегрируемого геодезического потока?

Вопрос 4. Является ли аналитичность таким условием? Другими словами, является ли топологическая энтропия препятствием для аналитической интегрируемости?

Вопрос 5. Можно ли произвольную (сколь угодно хаотическую систему) сделать подсистемой интегрируемой системы большей размерности?

8. КЛАССИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПОТОКОВ

В этом параграфе мы обсудим проблему описания многообразий, допускающих интегрируемые геодезические потоки, с «позитивной» точки зрения. Наша цель — привести по возможности полный список известных примеров и поговорить о способах их построения.

Классическими примерами поверхностей с интегрируемыми геодезическими потоками являются двумерная сфера $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ постоянной кривизны и плоский тор. Геодезические на двумерной сфере — это экваторы (т.е. сечения плоскостями, проходящими через центр). Поскольку все геодезические замкнуты, здесь вместо двух имеется три независимых интеграла. В качестве «базиса» можно рассмотреть линейные интегралы, соответствующие инфинитезимальным вращениям сферы. Например, интеграл, соответствующий вращению вокруг оси Ox_3 , имеет вид

$$f_3(x, p) = p(\xi_3(x)),$$

где $p \in T_x^*S^2$, а $\xi_3 = \partial/\partial\varphi$ — векторное поле, соответствующее стандартной сферической координате φ на сфере: $\xi_3(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)$. В терминах касательного расслоения эти три интеграла допускают следующее естественное представление в виде одного векторного интеграла:

$$F(x, \dot{x}) = (f_1, f_2, f_3) = [x, \dot{x}],$$

где $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и $\dot{x} \in T_x S^2$ рассматриваются как векторы трехмерного евклидова пространства. Геометрический смысл вектора F понятен: это вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежит геодезическая, и по длине равный вектору скорости. Указанные три интеграла не коммутируют между собой, но в качестве двух коммутирующих можно взять любой из них и гамильтониан геодезического потока $H = \frac{1}{2}(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)$.

В случае плоской метрики $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$ на торе геодезическими являются его прямолинейные обмотки $x_i(t) = c_i t$ ($i = 1, 2$), где $x_1 \bmod 2\pi$, $x_2 \bmod 2\pi$ — стандартные угловые координаты. Первыми интегралами являются соответствующие моменты p_1 и p_2 . Эти интегралы коммутируют, а гамильтониан геодезического потока выражается через них очевидным образом: $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$.

Следующими двумя классическими примерами являются метрики вращения и метрики Лиувилля.

Теорема 11 (Клеро). *Геодезический поток на поверхности вращения допускает нетривиальный линейный интеграл и поэтому интегрируем.*

Интеграл Клеро имеет тот же самый вид, что и интеграл f_3 в случае сферы (если мы рассматриваем поверхность вращения относительно оси Ox_3). Он допускает также следующее геометрическое описание. Пусть ψ — угол между геодезической и параллелью на поверхности вращения, r — расстояние до оси вращения. Тогда интеграл Клеро имеет вид $r \cos \psi$.

Существование такого интеграла является отражением следующего более общего классического факта (теорема Нетер): пусть риманова метрика g_{ij} допускает однопараметрическую группу изометрий $\phi^s : M \rightarrow M$. Тогда соответствующая гамильтонова система имеет линейный интеграл вида $f_\xi(x, p) = p(\xi(x))$, где $\xi(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \phi^s(x)$ — векторное поле, соответствующее однопараметрической группе ϕ^s (т.е. соответствующая инфинитезимальная изометрия). Более общим образом, если метрика допускает некоторую группу изометрий G , то соответствующий геодезический поток имеет алгебру первых интегралов, изоморфную алгебре Ли группы G .

Теорема 12 (Лиувилль). *Геодезический поток метрики вида*

$$ds^2 = (f(x_1) + g(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2) \quad (2)$$

допускает нетривиальный квадратичный интеграл вида

$$F(x, p) = \frac{g(x_2)p_1^2 - f(x_1)p_2^2}{f(x_1) + g(x_2)} \quad (3)$$

и потому интегрируем.

Эта формула имеет, вообще говоря, локальный характер. Легко построить пример метрики на замкнутой двумерной поверхности, которая в каждой точке допускает представление (2) в некоторых локальных координатах, но в целом на поверхности интегралы, задаваемые формулой (3), не сшиваются в единый глобально определенный интеграл, и поэтому геодезический поток неинтегрируем. Один из таких примеров — метрика постоянной отрицательной кривизны на поверхности рода $g > 1$. Локально ее геодезический поток допускает квадратичный интеграл (говоря точнее, имеются три независимых линейных интеграла, из которых можно скомбинировать квадратичные). Однако глобально таких интегралов, очевидно, не существует.

Глобальный характер формулам (2) и (3) можно придать в случае четырех простейших двумерных поверхностей: тора, сферы, проективной плоскости и бутылки Клейна. Тор представляет собой простейший случай, когда в качестве x_1 и x_2 можно взять стандартные периодические координаты, а в качестве f и g — периодические функции с теми же периодами. В случае сферы лиувиллевы координаты x_1 и x_2 будут иметь особенности. Классический пример — геодезический поток на трехосном эллипсоиде: метрика принимает лиувиллев вид в эллиптических координатах, которые имеют особенности в четырех омбилических точках. Грубо говоря, все другие примеры лиувиллевых метрик на замкнутых двумерных поверхностях M^2 получаются из простейшей лиувиллевой метрики на торе T^2 при помощи накрытий $T^2 \rightarrow M^2$ с точками ветвления специального вида. Подробно теория интегрируемых геодезических потоков на двумерных поверхностях обсуждается в [6, 7].

Многомерным обобщением геодезических потоков двумерных лиувиллевых метрик являются системы Штеккеля. Эти системы допускают разделение переменных на конфигурационном пространстве. Примеры: многомерные эллипсоид и сфера Пуассона. В многомерной ситуации, однако, пока нет исчерпывающего глобального описания геодезических потоков, являющихся системами Штеккеля. Гипотеза состоит в том, что, как и в двумерном случае, многообразия с такими потоками допускают разветвленное накрытие n -мерным тором с определенным типом ветвления. Грубо говоря, штеккелевы координаты должны иметь особенности того же типа, что и модельные особенности, возникающие в случае многомерных эллиптических координат.

Вопрос 6. Имеется классификация интегрируемых геодезических потоков с линейными и квадратичными интегралами на двумерных поверхностях. Вопрос об интегралах больших степеней остается полностью открытым. Например, не известно, существуют ли на торе геодезические потоки с интегралами степени больше двух (не допускающие интегралов меньшей степени). Для сферы есть явные примеры интегрируемых потоков с интегралами степени 3 и 4 [6], связанные с классическими интегрируемыми случаями Ковалевской и Горячева в динамике твердого тела. Новые примеры с такими же свойствами были построены Е. Н. Селивановой [34, 35]. Кроме того недавно появилась работа К. Киохары [29], в которой доказано существование интегрируемых геодезических потоков на сфере с полиномиальным интегралом произвольной степени.

Вопрос 7. Существуют ли интегрируемые потоки на сфере и торе, интегралы которых не являются полиномиальными?

Вопрос 8. Как устроены интегралы геодезических потоков на сфере для метрик с замкнутыми геодезическими?

Вопрос 9. Какие многообразия допускают квадратично интегрируемые геодезические потоки?

Вопрос 10. Существуют примеры квадратично интегрируемых геодезических потоков, не являющихся системами Штеккеля. Какие многообразия допускают штеккелевы метрики?

Вопрос 11. Имеется еще один интересный класс многообразий (вероятно, более узкий, чем класс многообразий с метриками Штеккеля). Это многообразия, допускающие пару геодезически эквивалентных римановых метрик g и $\hat{g}$, т.е. метрик с одинаковыми геодезическими (геодезические при этом рассматриваются без учета параметризации). Пусть g и $\hat{g}$ находятся в общем положении в следующем смысле: существует хотя бы одна точка, в которой оператор $g\hat{g}^{-1}$ имеет простой спектр. Тогда геодезические потоки обеих метрик интегрируемы. Весьма элегантное объяснение этого факта содержится в работе П. Й. Топалова и В. С. Матвеева [14]. Задача состоит в описании всех таких многообразий.

Учитывая теоремы Козлова, Колокольцова и Тайманова, можно сказать, что в случае размерности два ответ на поставленный выше общий вопрос получен: ровно четыре двумерные поверхности допускают интегрируемые геодезические потоки; это сфера, проективная плоскость, тор и бутылка Клейна. Подчеркнем еще раз, что данный результат доказан при одном из перечисленных выше дополнительных предположений на характер первых интегралов (либо аналитичность, либо полиномиальность по импульсам, либо геометрическая простота).

В многомерном случае (даже в размерности 3) вопрос остается открытым.

9. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И НЕКОММУТАТИВНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Поскольку интегрируемость всегда является отражением некоторой симметрии (возможно скрытой), в многомерном случае при построении примеров как правило используются метрики, обладающие богатой группой симметрий. Впрочем, в окончательной конструкции эти симметрии могут исчезнуть.

Теорема 13 (А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [16]). *Для любой компактной группы Ли существует семейство левоинвариантных метрик с интегрируемым геодезическим потоком.*

Теорема 14 (А. Тимм [36], А. С. Мищенко [15]). *Геодезический поток на компактном симметрическом пространстве вполне интегрируем по Лиувиллю.*

В этой теореме на симметрическом пространстве G/H рассматривается естественная метрика, отвечающая биинвариантной метрике на соответствующей компактной группе G .

Впоследствии эти результаты были развиты А. В. Браиловым [9] и И. В. Микитюком [18]. В частности, А. В. Браилов перенес конструкцию теоремы 13 на случай симметрических пространств и построил на них семейство новых метрик с интегрируемыми геодезическими потоками. И. В. Микитюк описал класс однородных пространств, на которых любая G -инвариантная гамильтонова система интегрируема.

Были найдены отдельные примеры однородных многообразий, не являющихся симметрическими, с интегрируемыми геодезическими потоками (А. Тимм [36], И. В. Микитюк, А. М. Степин [30], Г. Патернайн, Р. Спатцер [33]). Сюда же можно отнести примеры Батлера [26, 27], Тайманова и автора [5, 25].

Исключительные примеры неоднородных многообразий (двойные частные групп Ли) с интегрируемыми геодезическими потоками были найдены в работах Г. Патернайна, Р. Спатцера [33] и Я. В. Базайкина [2].

Многие из перечисленных результатов могут быть естественным образом интерпретированы с точки зрения общей концепции некоммутативной интегрируемости, разработанной А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [17].

Определение 3. Гамильтонова система называется *вполне интегрируемой в некоммутативном смысле*, если она обладает полной некоммутативной алгеброй первых интегралов. Полнота означает, что совместные поверхности уровня (общего положения) первых интегралов являются изотропными.

В аналитической форме это условие может быть переформулировано следующим образом. Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра первых интегралов некоторой гамильтоновой системы v на симплектическом многообразии (M, ω) . Употребляя термин «алгебра», мы имеем в виду алгебру относительно естественной

скобки Пуассона. Предположение о том, что первые интегралы образуют алгебру, совершенно естественно, поскольку скобка двух интегралов снова является интегралом. Определим для алгебры $\mathcal{F}$ две характеристики: *дифференциальную размерность* $\text{ddim } \mathcal{F}$ и *дифференциальный индекс* $\text{dind } \mathcal{F}$. Дифференциальная размерность — это число функционально независимых функций в $\mathcal{F}$, т.е. размерность линейного подпространства, порожденного дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$ в точке общего положения. Чтобы определить дифференциальный индекс, рассмотрим в точке общего положения матрицу из скобок Пуассона $a_{ij} = \{f_i, f_j\}$, где $f_1, \dots, f_l$ ($l = \text{ddim } \mathcal{F}$) — функционально независимые интегралы. Тогда $\text{dind } \mathcal{F} = \text{corank}(a_{ij})$.

В этих терминах условие некоммутативной интегрируемости формулируется так:

$$\text{ddim } \mathcal{F} + \text{dind } \mathcal{F} = \dim M = 2n. \quad (4)$$

В частном случае, когда имеется n коммутирующих интегралов, мы получаем

$$\text{ddim } \mathcal{F} = \text{dind } \mathcal{F} = n.$$

При выполнении условия некоммутативной интегрируемости (4) качественная картина траекторий системы будет точно такой же, как и в случае классической интегрируемости по Лиувиллю, с единственным отличием: размерность инвариантных торов будет меньше половины размерности фазового пространства, а именно, будет равна $\text{dind } \mathcal{F}$. Это утверждение, являющееся некоммутативным аналогом теоремы Лиувилля, было доказано А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [17] для случая, когда алгебра $\mathcal{F}$ конечномерна. Такая ситуация встречается очень часто и отвечает гамильтоновым системам, инвариантным относительно действия конечномерной группы Ли. Общий случай был рассмотрен А. В. Браиловым [8]. При нескольких других предположениях аналог теоремы Лиувилля для систем с некоммутирующими интегралами был доказан Н. Н. Нехорошевым [19].

Для геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах техника некоммутативного интегрирования работает следующим образом. Начнем с компактной группы Ли G , снабженной биинвариантной метрикой g . Эта метрика инвариантна относительно левых и правых сдвигов на группе, а следовательно, допускает группу изометрий $G \times G$. Отсюда немедленно следует существование конечномерной алгебры первых интегралов геодезического потока, изоморфной $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G . Первый экземпляр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ соответствует левоинвариантным векторным полям на группе G , второй — правоинвариантным. Эта алгебра полна в некоммутативном смысле, ее дифференциальная размерность равна $2 \dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g}$, а дифференциальный индекс совпадает с обычным индексом алгебры $\text{ind } \mathfrak{g}$. Таким образом, геодезический поток биинвариантной метрики оказывается интегрируемым в некоммутативном смысле. На самом деле он будет интегрируем и в классическом коммутативном смысле. Чтобы это показать, расширим алгебру первых интегралов, включив в нее все левоинвариантные и правоинвариантные функции полиномиальные по импульсам (а не только линейные): $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$. Алгебра левоинвариантных функций $\mathcal{F}_1$ (так же как и $\mathcal{F}_2$) изоморфна алгебре функций на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Если в последней можно выбрать полное коммутативное семейство функций, то задача решена: используя это семейство, мы построим полные коммутативные подмножества $A_1 \subset \mathcal{F}_1$ и $A_2 \subset \mathcal{F}_2$, объединение которых дает полный коммутативный набор интегралов геодезического потока. Именно такое коммутативное семейство на $\mathfrak{g}^*$ было построено А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко с использованием предложенного ими метода сдвига аргумента. Если теперь множество A_1 содержит квадратичные по импульсам функции, то их можно интерпретировать как гамильтонианы левоинвариантных геодезических потоков. Метод сдвига аргумента как раз и дает многопараметрическое семейство таких квадратичных интегрируемых гамильтонианов, что доказывает теорему 13. Заметим, кстати, что взяв сумму $h_1 + h_2$ интегрируемого левоинвариантного гамильтониана $h_1 \in A_1$ и аналогичного правоинвариантного гамильтониана $h_2 \in A_2$, мы снова получим интегрируемую систему на T^*G , которая уже не будет допускать никакой естественной симметрии.

В случае симметрических пространств G/H с естественной метрикой мы снова имеем конечномерную алгебру линейных первых интегралов, отвечающих действию группы G (относительно которого, напомним, рассматриваемая метрика инвариантна!). Впрочем, теперь ее дифференциальная размерность и дифференциальный индекс устроены сложнее. Тем не менее она удовлетворяет условиям некоммутативной полноты.

Чтобы доказать коммутативную интегрируемость, эту алгебру снова можно рассмотреть как алгебру $\mathcal{F}_1$ функций на $\mathfrak{g}^*$, но теперь вместо всего пространства $\mathfrak{g}^*$ следует рассмотреть его подмножество, совпадающее с образом $T^*(G/H)$ при отображении момента $\mu : T^*(G/H) \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Как правило, этот образ состоит из сингулярных орбит коприсоединенного представления, и задача сводится к построению полного коммутативного набора функций на сингулярных орбитах. Это снова можно сделать, пользуясь методом сдвига аргумента (см. [9, 15, 18]) или методом цепочек подалгебр (см. [36]). Как и в предыдущем случае, метрику на G/H можно пошевелить с сохранением интегрируемости, если в построенном коммутативном семействе оказались квадратичные функции (см. [9]).

В случае, когда пространство G/H не является симметрическим, условие полноты алгебры нетеровских интегралов $\mathcal{F}_1$ чаще всего нарушается, за исключением некоторых случаев, которые классифицированы в [18].

Оказывается, однако, что алгебру нетеровских интегралов $\mathcal{F}_1$ можно естественным образом дополнить в случае произвольного однородного пространства G/H компактной группы Ли G . К ней следует добавить алгебру $\mathcal{F}_2$ всех G -инвариантных функций на $T^*(G/H)$. Легко проверяется, что алгебра $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ всегда полна в некоммутативном смысле. Таким образом, если мы имеем гамильтониан, коммутирующий со всеми функциями из $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, то соответствующая ему гамильтонова система будет вполне интегрируемой в некоммутативном смысле. Такие гамильтонианы существуют, и один из них — это гамильтониан геодезического потока G -инвариантной метрики на G/H , полученной из биинвариантной метрики на группе. Таким образом, однородное пространство компактной группы Ли G всегда допускает геодезический поток (см. [4]), интегрируемый в некоммутативном смысле. Более того, аналогичная конструкция работает для произвольного двойного частного $K \backslash G/H$.

Хотя некоммутативная интегрируемость с качественной точки зрения является более исключительным случаем, чем коммутативная, иногда полезно иметь полный набор *коммутирующих* интегралов. Всегда ли это возможно? Отметим, что локально из некоммутативной интегрируемости следует классическая коммутативная интегрируемость. Это несложное следствие теоремы Дарбу для скобок Пуассона. В глобальной же ситуации вопрос остается не выясненным до конца. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 15 (см. [24]). *Всякая некоммутативно интегрируемая гамильтонова система является коммутативно интегрируемой в классе C^∞ -гладких интегралов.*

Таким образом, изложенная выше схема некоммутативной интегрируемости приводит к следующему общему результату.

Теорема 16 (А. В. Болсинов, Б. Йованович [4, 24]). *Пусть G — компактная группа Ли. Рассмотрим произвольное однородное пространство этой группы G/H с естественной метрикой, индуцированной биинвариантной метрикой на группе. Геодезический поток этой метрики на G/H интегрируем в некоммутативном смысле при помощи полиномиальных интегралов (и, следовательно, в классическом коммутативном смысле при помощи гладких интегралов). Тот же самый результат верен для любого двойного частного $K \backslash G/H$.*

Результат теоремы 15 (следовательно, и коммутативную часть теоремы 16) нельзя признать вполне удовлетворительным, поскольку метод доказательства на самом деле дает интегралы, особенности которых устроены весьма сложно: множество особых точек — это дополнение к объединению бесконечного числа попарно непересекающихся шаров, всюду плотно заполняющих многообразие.

Вопрос 12 (гипотеза Мищенко—Фоменко). Верно ли, что из некоммутативной интегрируемости гамильтоновой системы следует ее классическая коммутативная интегрируемость в том же классе первых интегралов (например, аналитических, алгебраических или полиномиальных)?

В частном случае, когда алгебра $\mathfrak{g}$ первых интегралов конечномерна, вопрос немедленно сводится к построению полного набора коммутирующих полиномов (или аналитических функций) на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. В гипотезе Мищенко—Фоменко утверждается, что для любой

конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой набор существует. Для многих алгебр Ли он может быть построен явно. Различные методы конструирования функций в инволюции на (ко)алгебрах подробно обсуждаются в [22, 23] (в [22] приведен список известных алгебр Ли, для которых гипотеза справедлива).

Если никаких ограничений на алгебру Ли первых интегралов не накладывать, то в качестве частного случая мы получим следующий естественный вопрос: всякое ли аналитическое (алгебраическое) симплектическое многообразие M обладает набором из $n = \dim M$ независимых коммутирующих аналитических (алгебраических) функций?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко И. К. Топологическая энтропия геодезических потоков на односвязных многообразиях и смежные вопросы// Изв. РАН, сер. мат. — 1997. — 61, № 3. — С. 57–74.
2. Базайкин Я. В. Двойные частные групп Ли с интегрируемым геодезическим потоком// Сиб. мат. ж. — 2000. — 41, № 3. — С. 513–530.
3. Болсинов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1991. — 55, № 1. — С. 69–89.
4. Болсинов А. В., Йованович Б. Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах// Мат. сб. — 2001. — 192, № 7. — С. 21–40.
5. Болсинов А. В., Тайманов И. А. Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов// Тр. МИРАН. — 2000. — 231. — С. 46–63.
6. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
7. Болсинов А. В., Матвеев В. С., Фоменко А. Т. Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия// Мат. сб. — 1998. — 189, № 5. — С. 5–30.
8. Браилов А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами// Докл. АН СССР. — 1983. — 271, № 2. — С. 273–276.
9. Браилов А. В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1986. — 50, № 4. — С. 661–674.
10. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1971. — 35, № 2. — С. 324–366.
11. Каток А., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
12. Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем// Докл. АН СССР. — 1979. — 249, № 6. — С. 1299–1302.
13. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1982. — 46, № 5. — С. 994–1010.
14. Матвеев В. С., Топалов П. Й. Траекторная эквивалентность и соответствующие интегралы// Регул. и хаотич. динамика. — 1998. — 3, № 2. — С. 30–45.
15. Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах// Мат. заметки. — 1982. — 31, № 2. — С. 257–262.
16. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1978. — 42, № 2. — С. 396–415.
17. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем// Функци. анализ и его прилож. — 1978. — 12, № 2. — С. 46–56.
18. Микитюк И. В. Однородные пространства с интегрируемыми G -инвариантными гамильтоновыми потоками// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1983. — 47, № 6. — С. 1248–1262.
19. Нехорошев Н. Н. Переменные действие—угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1972. — 26, № 1. — С. 181–198.
20. Тайманов И. А. Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1987. — 51, № 2. — С. 429–435.
21. Тайманов И. А. Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками// Тр. МИРАН. — 1994. — 205. — С. 150–163.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.
23. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

24. *Bolsinov A. V., Jovanović B.* Integrability, moment map and geodesic flows/ Preprintserie der Mathematischen Fakultät, Universität Freiburg. — 2001. — № 01-09. (arXiv: [math-ph/0109031](https://arxiv.org/abs/math-ph/0109031)).
25. *Bolsinov A. V., Taimanov I. A.* Integrable geodesic flows with positive topological entropy// *Invent. Math.* — 2000. — 140. — С. 639–650.
26. *Butler L.* A new class of homogeneous manifolds with Liouville-integrable geodesic flows// *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.* — 1999. — 21, № 4. — С. 127–131.
27. *Butler L.* Integrable geodesic flows on n -step nilmanifolds// *J. Geom. Phys.* (в печати).
28. *Kiyohara K.* Two classes of Riemann manifolds whose geodesic flows are integrable// *Mem. Am. Math. Soc.* — 1997. — 130, № 619. — С. 1–143.
29. *Kiyohara K.* Two-dimensional geodesic flows having first integrals of higher degree// *Math. Ann.* — 2001. — 320. — С. 487–505.
30. *Mykityuk I. V., Stepin A. M.* Classification of almost spherical pairs of compact simple Lie groups// В сб.: *Poisson geometry/ Banach Center Publ.* — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2000. — 51. — С. 231–241.
31. *Paternain G. P.* Entropy and completely integrable Hamiltonian systems// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1991. — 113, № 3. — С. 871–873.
32. *Paternain G. P.* On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows// *Ergodic Theory Dyn. Syst.* — 1992. — 12. — С. 109–121.
33. *Paternain G. P., Spatzier R. J.* New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows// *Adv. Math.* — 1994. — 108. — С. 346–366.
34. *Selivanova E. N.* New examples of integrable conservative systems on S^2 and the case of Goryachev–Chaplygin// *Commun. Math. Phys.* — 1999. — 207. — С. 641–663.
35. *Selivanova E. N.* New families of conservative systems on S^2 possessing an integral of fourth degree in momenta// *Ann. Global Anal. Geom. Math.* — 1999. — 17. — С. 201–219.
36. *Thimm A.* Integrable geodesic flows on homogeneous spaces// *Ergodic Theory Dyn. Syst.* — 1981. — 1. — С. 495–517.

А. В. Болсинов

Московский государственный университет

E-mail: bolsinov@mech.math.msu.su

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЛОЕНИЙ СО СЛОЕМ МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

© 2003 г. **А. В. ЕРШОВ**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Расслоения алгебр и матричные грассманианы	33
1.1. Основные определения	33
1.2. Матричные грассманианы	35
1.3. Гомотопические группы матричных грассманианов	36
1.4. Универсальность канонических расслоений над матричными грассманианами	39
2. Гомотопические функторы, связанные с расслоениями алгебр	43
2.1. Гомотопический функтор, связанный с плавающими расслоениями алгебр	43
2.2. Гомотопический функтор, связанный с расслоениями алгебр	50
2.3. Связь функтора $\widetilde{AB}^1$ с $\widetilde{KSU}$ -теорией	52
Список литературы	55

1. РАССЛОЕНИЯ АЛГЕБР И МАТРИЧНЫЕ ГРАССМАНИАНЫ

1.1. Основные определения. Пусть X — конечный CW -комплекс. Обозначим через $\widetilde{M}_n$ тривиальное расслоение (над X) со слоем $M_n(\mathbb{C})$ — алгеброй $(n \times n)$ -матриц над $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Пусть A_k ($k > 1$) — локально-тривиальное расслоение над X со слоем матричная алгебра $M_k(\mathbb{C})$. Предположим, что существует отображение расслоений

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{\mu} & \widetilde{M}_{kl} \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

такое, что для всякой точки $x \in X$ слой $(A_k)_x \cong M_k(\mathbb{C})$ вкладывается в слой $(\widetilde{M}_{kl})_x \cong M_{kl}(\mathbb{C})$ как центральная простая подалгебра. Назовем тройку $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ *расслоением алгебр* (РА) над X . Если, кроме того, k и l взаимно просты (наибольший общий делитель $(k, l) = 1$), то тройку $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ назовем *плавающим расслоением алгебр* (ПРА).

Замечание 1.2. Некоторым объяснением последнего названия может служить свойство таких расслоений, описанное в следствии 2.4.

Замечание 1.3. Из теории центральных простых алгебр известно, что централизатор $Z_A(B)$ центральной простой подалгебры B в центральной простой алгебре A (над полем $\mathbb{K}$) снова является центральной простой подалгеброй, причем $A = B \otimes_{\mathbb{K}} Z_A(B)$. В силу непрерывности операции взятия централизатора это определяет дополнительное подрасслоение $\nu(B_l)$ в $\widetilde{M}_{kl}$ (здесь B_l — локально-тривиальное расслоение со слоем $M_l(\mathbb{C})$, а ν — его очевидное вложение в $\widetilde{M}_{kl}$). При этом $A_k \otimes B_l = \widetilde{M}_{kl}$. Обратно, из пары расслоений (A_k, B_l) над X со слоями $M_k(\mathbb{C})$ и $M_l(\mathbb{C})$ соответственно и такой, что $A_k \otimes B_l \cong \widetilde{M}_{kl}$, можно получить тройку $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$, где μ — вложение $A_k \hookrightarrow A_k \otimes B_l \cong \widetilde{M}_{kl}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99–01–01202).

$\widetilde{M}_{kl}$. Таким образом, структура матричной алгебры в слоях расслоений алгебр играет ту же роль, что и метрика в обычной теории векторных расслоений с операцией прямой суммы (эта аналогия усиливается еще и тем, что, подобно операции взятия ортогонального дополнения, операция взятия централизатора инволютивна, так как для центральных простых алгебр имеет место равенство $Z_A(Z_A(B)) = B$).

Определение 1.4. *Изоморфизм между расслоениями алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ и $(C_k, \nu, \widetilde{M}_{kl})$ — это пара отображений расслоений $f : A_k \rightarrow C_k$, $g : \widetilde{M}_{kl} \rightarrow \widetilde{M}_{kl}$, являющихся послойными изоморфизмами алгебр, такая, что квадрат*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_{kl} & \xrightarrow{g} & \widetilde{M}_{kl} \\ \mu \uparrow & & \uparrow \nu \\ A_k & \xrightarrow{f} & C_k \end{array}$$

коммутативен.

Равносильное определение (ср. замечание 1.3): изоморфизм пары (A_k, B_l) в (C_k, D_l) — это пара изоморфизмов расслоений $f : A_k \rightarrow C_k$, $g : B_l \rightarrow D_l$. Действительно, такая пара (f, g) однозначно продолжается до автоморфизма $f \otimes g$ тривиального расслоения $\widetilde{M}_{kl} \cong A_k \otimes B_l \cong C_k \otimes D_l$.

Определение 1.5. Расслоение алгебр (при $(k, l) = 1$ — плавающее расслоение алгебр) вида $(\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl})$ называется *тривиальным*, если (при некотором выборе тривиализаций на $\widetilde{M}_k$, $\widetilde{M}_{kl}$) отображение $\tau : \widetilde{M}_k \rightarrow \widetilde{M}_{kl}$ имеет вид

$$X \times M_k(\mathbb{C}) \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C}), \quad (x, T) \mapsto (x, T \otimes E_l),$$

для всякой точки $x \in X$, где E_l — единичная $(l \times l)$ -матрица и через $T \otimes E_l$ обозначено кронекерово произведение матриц. Другими словами, расслоение $\widetilde{M}_k$ вкладывается в $\widetilde{M}_{kl}$ в качестве постоянной подалгебры.

Естественным образом определяется отображение двух расслоений алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ над X (которое существует только в случае $k|m$, $l|n$) как пара (f, g) , состоящая из отображений расслоений $f : A_k \hookrightarrow B_m$, $g : \widetilde{M}_{kl} \hookrightarrow \widetilde{M}_{mn}$, являющихся послойными гомоморфизмами (т.е. вложениями) алгебр и такая, что получающийся квадрат отображений коммутативен.

Замечание 1.6. Заметим, что можно построить параллельную теорию расслоений, рассматривая вместо матричных алгебр проективные пространства. Здесь мы ограничимся тем, что дадим аналог определения 1.1 для таких расслоений.

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{C}P}^{kl-1}$ тривиальное расслоение над X со слоем $\mathbb{C}P^{kl-1}$.

Определение 1.7. Пусть P^{k-1} , Q^{l-1} — локально-тривиальные расслоения над X со слоями $\mathbb{C}P^{k-1}$, $\mathbb{C}P^{l-1}$ соответственно. Предположим, что существует отображение расслоений

$$\begin{array}{ccc} P^{k-1} \times_X Q^{l-1} & \xrightarrow{\lambda} & \widetilde{\mathbb{C}P}^{kl-1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

(здесь $P^{k-1} \times_X Q^{l-1}$ — произведение расслоений над X) такое, что для всякой точки $x \in X$ ограничение отображения λ на слой $(P^{k-1} \times_X Q^{l-1})_x \cong \mathbb{C}P^{k-1} \times \mathbb{C}P^{l-1}$ есть вложение Сегре последнего в слой $(\widetilde{\mathbb{C}P}^{kl-1})_x \cong \mathbb{C}P^{kl-1}$. Тогда расслоение $P^{k-1} \times_X Q^{l-1}$ назовем *расслоением произведений Сегре*, а в случае $(k, l) = 1$ — *плавающим расслоением произведений Сегре*.

Связь определений 1.1 и 1.7 легко вытекает из изоморфизма $\text{Aut}(M_k(\mathbb{C})) \cong \text{Aut}(\mathbb{C}P^{k-1})$ и замечания 1.3.

1.2. Матричные грассманианы. Из теоремы Сколема—Нетер вытекает следующий результат.

Предложение 1.8. *Существует однородное пространство $\text{Gr}'_{k,kl}$, параметризующее подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфные фиксированной матричной алгебре $M_k(\mathbb{C})$. Более точно, оно представляется следующим образом:*

$$\text{Gr}'_{k,kl} = \text{PGL}(kl)/\text{PGL}(k) \otimes \text{PGL}(l),$$

где $\text{PGL}(k) \otimes \text{PGL}(l)$ как многообразие есть декартово произведение $\text{PGL}(k) \times \text{PGL}(l)$, которое вложено в $\text{PGL}(kl)$ с помощью кронекерова произведения матриц, представляющих элементы групп $\text{PGL}(k)$ и $\text{PGL}(l)$.

Пространство $\text{Gr}'_{k,kl}$ естественно назвать *матричным грассманианом*.

Аналогично тому, как это делается в теории векторных расслоений, над $\text{Gr}'_{k,kl}$ определим *каноническое расслоение алгебр* (в случае $(k, l) = 1$ — *каноническое плавающее расслоение алгебр*) $(\mathcal{A}'_k, \mu', \widetilde{\mathcal{M}}'_{kl})$ (здесь $\widetilde{\mathcal{M}}'_{kl} := \text{Gr}'_{k,kl} \times M_{kl}(\mathbb{C})$) следующим образом: слой $(\mathcal{A}'_k)_x$ над точкой $x \in \text{Gr}'_{k,kl}$ есть подалгебра в $M_{kl}(\mathbb{C}) = (\widetilde{\mathcal{M}}'_{kl})_x$, параметризуемая этой точкой. Вместо тройки $(\mathcal{A}'_k, \mu', \widetilde{\mathcal{M}}'_{kl})$, согласно сказанному в п. 1.1, можно рассматривать пару расслоений $(\mathcal{A}'_k, \mathcal{B}'_l)$, где $\mathcal{B}'_l$ — дополнительное к $\mathcal{A}'_k$ подрасслоение (при этом $\mathcal{A}'_k \otimes \mathcal{B}'_l = \widetilde{\mathcal{M}}'_{kl}$).

Грассманиан $\text{Gr}'_{k,kl}$ является базой следующих двух главных расслоений:

$$\begin{array}{ccc} \text{PGL}(k) \otimes \text{PGL}(l) & \hookrightarrow & \text{PGL}(kl) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Gr}'_{k,kl} \end{array}, \quad (1.1)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{PGL}(k) & \xrightarrow{\cdots \otimes E_l} & \text{PGL}(kl)/E_k \otimes \text{PGL}(l) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Gr}'_{k,kl} \end{array}. \quad (1.2)$$

Их можно интерпретировать как расслоения реперов следующим образом. Назовем *n-репером* в матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$ упорядоченный набор линейно независимых матриц $\{\alpha_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ таких, что $\alpha_{ij}\alpha_{kl} = \delta_{jk}\alpha_{il}$; в частности, репером является множество матричных единиц $\{e_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ (e_{ij} — матрица, единственным ненулевым элементом которой является 1 на пересечении i -й строки и j -го столбца). Отображение $e_{ij} \mapsto \alpha_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, продолжается до автоморфизма матричной алгебры $M_n(\mathbb{C})$, тождественного на центре, поэтому, согласно теореме Сколема—Нетер, существует элемент $g \in \text{GL}(n)$ такой, что $\alpha_{ij} = g e_{ij} g^{-1}$ при $1 \leq i, j \leq n$. Таким образом, группа $\text{PGL}(n)$ действует на множестве реперов транзитивно. Стабилизатор репера совпадает с единичным элементом в $\text{PGL}(n)$, поэтому множество реперов в $M_n(\mathbb{C})$ можно отождествить с группой $\text{PGL}(n)$, которая рассматривается как главное однородное пространство над собой.

Определим теперь *k-реперы* в $M_{kl}(\mathbb{C})$. Назовем *k-репером* в $M_{kl}(\mathbb{C})$ набор линейно независимых матриц $\{\alpha_{ij} : 1 \leq i, j \leq k\}$ таких, что $\alpha_{ij}\alpha_{mn} = \delta_{jm}\alpha_{in}$. По теореме Сколема—Нетер любые два таких репера сопряжены с помощью элемента из $\text{Aut } M_{kl}(\mathbb{C})$. Очевидно, что множество *k-реперов* в $M_{kl}(\mathbb{C})$ образует однородное пространство $\text{PGL}(kl)/E_k \otimes \text{PGL}(l)$. Это дает интерпретацию главного расслоения (1.2) как расслоения *k-реперов* в алгебре $M_{kl}(\mathbb{C})$. Заметим, что расслоение $\mathcal{A}'_k$ ассоциировано с данным главным расслоением относительно представления $\text{Aut}(M_k(\mathbb{C})) \cong \text{PGL}(k)$.

Пара, состоящая из *k-репера* $\{\alpha_{ij} : 1 \leq i, j \leq k\}$ в $M_k(\mathbb{C})$ и *l-репера* $\{\beta_{mn} : 1 \leq m, n \leq l\}$ в $M_l(\mathbb{C})$, определяет *kl-репер* $\{\alpha_{ij} \otimes \beta_{mn} : 1 \leq i, j \leq k; 1 \leq m, n \leq l\}$ в $M_{kl}(\mathbb{C}) \cong M_k(\mathbb{C}) \otimes M_l(\mathbb{C})$. Действительно, пусть $\alpha_{ij} \otimes \beta_{mn} := \gamma_{im,jn}$. Тогда

$$(\alpha_{ij} \otimes \beta_{mn})(\alpha_{pq} \otimes \beta_{rs}) = \delta_{jp}\alpha_{iq} \otimes \delta_{nr}\beta_{ms} = \delta_{jp}\delta_{nr}\alpha_{iq} \otimes \beta_{ms} = \delta_{jn,pr}\alpha_{iq} \otimes \beta_{ms},$$

что можно переписать в виде

$$\gamma_{im,jn}\gamma_{pr,qs} = \delta_{jn,pr}\gamma_{im,qs}.$$

Таким образом, разложению алгебры $M_{kl}(\mathbb{C})$ в тензорное произведение отвечает отображение пространств реперов $\text{PGL}(k) \otimes \text{PGL}(l) \hookrightarrow \text{PGL}(kl)$. Последнее позволяет получить интерпретацию расслоения (1.1) в терминах реперов.

Грассманиан $\text{Gr}'_{k,kl}$ — некомпактное многообразие, так как однородное многообразие G/H алгебраической группы G является полным тогда и только тогда, когда подгруппа H содержит борелевскую подгруппу группы G . Его можно заменить на гомотопически эквивалентное компактное многообразие следующим образом. Пусть $M_k(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cdots \otimes E_l} M_{kl}(\mathbb{C})$ — стандартное вложение алгебры $M_k(\mathbb{C})$ в алгебру $M_{kl}(\mathbb{C})$. Назовем подалгебру A_k в $M_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфную $M_k(\mathbb{C})$, *унитарной*, если существует элемент $g \in \text{U}(kl) \subset \text{GL}(kl)$ такой, что $g(M_k(\mathbb{C}) \otimes E_l)g^{-1} = A_k$, т.е. если A_k сопряжена в $M_{kl}(\mathbb{C})$ со стандартно вложенной подалгеброй при помощи унитарного преобразования. Множество унитарных подалгебр в $M_{kl}(\mathbb{C})$ отвечает подпространству

$$\text{Gr}_{k,kl} := \text{PU}(kl)/\text{PU}(k) \otimes \text{PU}(l) \subset \text{Gr}'_{k,kl},$$

где $\text{PU}(n)$ — проективная унитарная группа — фактор-группа унитарной группы по центру. Легко видеть, что этот грассманиан компактен и гомотопически эквивалентен $\text{Gr}'_{k,kl}$. Главное расслоение

$$\begin{array}{ccc} \text{PU}(k) & \xrightarrow{\cdots \otimes E_l} & \text{PU}(kl)/E_k \otimes \text{PU}(l) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Gr}_{k,kl} \end{array}, \quad (1.3)$$

аналогичное (1.2), можно интерпретировать как расслоение реперов, унитарных относительно эрмитова скалярного произведения $\text{tr}(X\bar{Y}^t)$. Ассоциированное с ним расслоение алгебр $(\mathcal{A}_k, \mu, \widehat{\mathcal{M}}_{kl})$ будем называть *каноническим*.

1.3. Гомотопические группы матричных грассманианов. Грассманианы $\text{Gr}_{k,kl}$ связаны серией вложений

$$\text{Gr}_{k,kl} \hookrightarrow \text{Gr}_{m,mn}, \quad (1.4)$$

индуцированных вложениями алгебр ($\Rightarrow k|m, l|n$). В этом пункте вычисляются стабильные гомотопические группы матричных грассманианов и их поведение при вложениях (1.4).

Уже на примере этих вычислений будет видно, что случай грассманианов $\text{Gr}_{k,kl}$ при условии $(k, l) = 1$, отвечающих плавающим расслоениям алгебр, является выделенным, а именно, только при отображениях таких грассманианов гомотопические группы стабилизируются (см. следствие 1.12); в общем же случае происходит локализация гомотопических групп при переходе к прямому пределу. Это является причиной того, что содержательная топологическая теория получается только для плавающих расслоений алгебр.

Предложение 1.9. *Гомотопические группы пространства $\text{Gr}_{k,kl}$ в размерностях $\leq 2 \min\{k, l\}$ следующие:*

$$\begin{aligned} \pi_2(\text{Gr}_{k,kl}) &\cong \mathbb{Z}/(k, l)\mathbb{Z}; & \pi_{2r}(\text{Gr}_{k,kl}) &\cong \mathbb{Z}, & 2 \leq r \leq \min\{k, l\}; \\ \pi_{2r-1}(\text{Gr}_{k,kl}) &\cong \mathbb{Z}/(k, l)\mathbb{Z}, & 1 \leq r \leq \min\{k, l\}. \end{aligned}$$

Замечание 1.10. Гомотопические группы $\pi_r(\text{Gr}_{k,kl})$, $r \leq 2 \min\{k, l\}$, ниже называются «стабильными».

Доказательство. Рассмотрим гомотопическую последовательность расслоения

$$\begin{array}{ccc} \text{PU}(k) \otimes \text{PU}(l) & \longrightarrow & \text{PU}(kl) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Gr}_{k,kl} \end{array}.$$

При $2 \leq r \leq \min\{k, l\}$ имеем:

$$0 \longrightarrow \pi_{2r}(\text{Gr}_{k,kl}) \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_{2r-1}(\text{Gr}_{k,kl}) \longrightarrow 0.$$

Из определения вложения $\text{PU}(k) \otimes \text{PU}(l) \hookrightarrow \text{PU}(kl)$ видно, как действует отображение 2:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto l\alpha + k\beta.$$

Теперь из точности гомотопической последовательности легко вытекает требуемый результат при $r \geq 2$ и, кроме того, описание отображения 1:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \gamma \mapsto \left(\frac{k}{(l, k)} \gamma, -\frac{l}{(l, k)} \gamma \right).$$

При $r = 1$ имеем:

$$0 \longrightarrow \pi_2(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \longrightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \longrightarrow 0.$$

Из точности данной последовательности следует, что

$$\pi_2(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \cong \mathbb{Z}/(k, l)\mathbb{Z}, \quad \pi_1(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \cong \mathbb{Z}/(k, l)\mathbb{Z}.$$

Предложение доказано. $\square$

Опишем теперь поведение стабильных гомотопических групп при отображениях грассманианов (1.4).

Предложение 1.11. *При вложении грассманианов $\mathrm{Gr}_{k,kl} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{m,mn}$, индуцированном вложением алгебр ($\Rightarrow k|m, l|n$), стабильные четномерные группы $\pi_{2r}(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \rightarrow \pi_{2r}(\mathrm{Gr}_{m,mn})$ отображаются следующим образом:*

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \gamma \mapsto \frac{(m, n)}{(k, l)} \gamma, \quad 2 \leq r \leq \min\{k, l\};$$

при $r = 1$ отображение $\pi_2(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \rightarrow \pi_2(\mathrm{Gr}_{m,mn})$ — вложение

$$\mathbb{Z}/(k, l)\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}.$$

Для нечетномерных стабильных групп порядок образа группы $\pi_{2r-1}(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \cong \mathbb{Z}/(k, l)\mathbb{Z}$ в группе $\pi_{2r-1}(\mathrm{Gr}_{m,mn}) \cong \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}$ равен порядку элемента $\left[\frac{mn}{kl} \right] := \frac{mn}{kl} \bmod (m, n)$ в группе $\mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}$ (т.е. наименьшему натуральному r такому, что $(m, n) | r \frac{mn}{kl}$).

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму расслоений:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{PU}(m) \otimes \mathrm{PU}(n) & \longrightarrow & \mathrm{PU}(mn) \\ & \nearrow & & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{PU}(k) \otimes \mathrm{PU}(l) & \longrightarrow & \mathrm{PU}(kl) & & \mathrm{Gr}_{m,mn} \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \mathrm{Gr}_{k,kl} & & \end{array} \quad (1.5)$$

Опишем, как действуют отображения в (1.5). Левая диагональная стрелка:

$$(A, B) \mapsto (E_{m/k} \otimes A, B \otimes E_{n/l}), \quad A \in \mathrm{U}(k), \quad B \in \mathrm{U}(l)$$

(см. предложение 1.8). Правая диагональная стрелка:

$$C \mapsto E_{m/k} \otimes (C \otimes E_{n/l}) = (E_{m/k} \otimes C) \otimes E_{n/l}, \quad C \in \mathrm{U}(kl).$$

Нижняя и верхняя горизонтальные стрелки — кронекерово умножение матриц, представляющих элементы проективных групп:

$$(A, B) \mapsto A \otimes B.$$

Коммутативность легко следует из того, что для любых двух матриц $A \in \mathrm{U}(k)$, $B \in \mathrm{U}(l)$ имеем

$$(E_{m/k} \otimes A) \otimes (B \otimes E_{n/l}) = E_{m/k} \otimes ((A \otimes B) \otimes E_{n/l}) = (E_{m/k} \otimes (A \otimes B)) \otimes E_{n/l}.$$

Диаграмма (1.5) индуцирует морфизм гомотопических последовательностей расслоений.

При $2 \leq r \leq \min\{k, l\}$ имеем:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_{2r}(\mathrm{Gr}_{m,mn}) & \xrightarrow{1'} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{2'} & \mathbb{Z} \xrightarrow{3'} \pi_{2r-1}(\mathrm{Gr}_{m,mn}) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow 4 & & \uparrow 5 & & \uparrow 6 & & \uparrow 7 \\
 0 & \longrightarrow & \pi_{2r}(\mathrm{Gr}_{k,kl}) & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \pi_{2r-1}(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (1.6)$$

Из доказательства предложения 1.9 имеем описания вложений 1 и 1':

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \gamma \mapsto \left(\frac{k}{(l,k)}\gamma, -\frac{l}{(l,k)}\gamma \right), \\
 \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \nu \mapsto \left(\frac{m}{(n,m)}\nu, -\frac{n}{(n,m)}\nu \right)
 \end{aligned}$$

соответственно, а также 2 и 2':

$$(\alpha, \beta) \mapsto l\alpha + k\beta, \quad (\lambda, \mu) \mapsto n\lambda + m\mu.$$

Отображения 3 и 3' являются редукциями по модулю (k, l) и (m, n) соответственно. Из описания диагональных стрелок в (1.5) получаем отображения 5, 6 в (1.6):

$$(\alpha, \beta) \mapsto \left(\frac{m}{k}\alpha, \frac{n}{l}\beta \right), \quad \tau \mapsto \frac{mn}{kl}\tau$$

соответственно. Из всего этого и коммутативности диаграммы (1.6) легко вытекает требуемый результат при $r \geq 2$.

При $r = 1$ имеем:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_2(\mathrm{Gr}_{m,mn}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Gr}_{m,mn}) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow 4 & & \uparrow 5 & & \uparrow 6 & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \pi_2(\mathrm{Gr}_{k,kl}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (1.7)$$

Из описания диагональных стрелок в (1.5) и коммутативности диаграммы (1.7) легко вытекает, что стрелки 4, 5, 6 — вложения групп. Здесь использован следующий простой факт: отображение $\mathrm{PU}(k) \xrightarrow{\cdots \otimes E_l} \mathrm{PU}(kl)$ индуцирует вложение

$$\pi_1(\mathrm{PU}(k)) \hookrightarrow \pi_1(\mathrm{PU}(kl)), \quad \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z}.$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 1.12. При условии $(k, l) = (m, n) = 1$ отображение $\mathrm{Gr}_{k,kl} \rightarrow \mathrm{Gr}_{m,mn}$ индуцирует изоморфизмы $\pi_r(\mathrm{Gr}_{k,kl}) \xrightarrow{\cong} \pi_r(\mathrm{Gr}_{m,mn})$ при $r \leq 2 \min\{k, l\}$, а следовательно, является гомотопической эквивалентностью в указанных размерностях.

Опишем теперь (стабильные) гомотопические группы тотальных пространств расслоений реперов и их поведение при отображениях. С помощью рассмотрения гомотопических последовательностей соответствующих расслоений легко доказывается следующее предложение.

Предложение 1.13.

$$\pi_{2r}(\mathrm{PU}(kl)/E_k \otimes \mathrm{PU}(l)) = 0, \quad \pi_{2r-1}(\mathrm{PU}(kl)/E_k \otimes \mathrm{PU}(l)) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \quad 1 \leq r \leq l.$$

Отображение гомотопических последовательностей расслоений, отвечающих диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{PU}(n) & \xrightarrow{E_m \otimes \dots} & \text{PU}(mn) \\
 & \nearrow & & & \downarrow \\
 \text{PU}(l) & \xrightarrow{E_k \otimes \dots} & \text{PU}(kl) & \nearrow & \text{PU}(mn)/E_m \otimes \text{PU}(n) \\
 & \downarrow & & \nearrow \alpha & \\
 & \text{PU}(kl)/E_k \otimes \text{PU}(l) & & &
 \end{array} \quad , \quad (1.8)$$

позволяет изучить поведение стабильных гомотопических групп пространств расслоений реперов при отображениях. Соответствующий результат сформулируем в одном частном случае, который будет использован в дальнейшем.

Предложение 1.14. При $r \leq k^{n-m}$ гомоморфизм (см. (1.8))

$$\alpha_* : \pi_{2r-1}(\text{PU}(k^n)/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{n-m})) \rightarrow \pi_{2r-1}(\text{PU}(k^{n+1})/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{n-m+1}))$$

есть

$$\mathbb{Z}/k^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k^m\mathbb{Z}, \quad \beta(\text{mod } k^m\mathbb{Z}) \mapsto k\beta(\text{mod } k^m\mathbb{Z}),$$

т.е. имеет ядро, изоморфное $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Поэтому отображение стабильных гомотопических групп, индуцированное отображением

$$\text{PU}(k^n)/(E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{n-m})) \hookrightarrow \text{PU}(k^{n+m})/(E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^n)), \quad (1.9)$$

нулевое.

1.4. Универсальность канонических расслоений над матричными грассманианами. Естественно ожидать, что канонические расслоения алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ над матричными грассманианами $\text{Gr}_{k,kl}$ являются универсальными для расслоений алгебр вида $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ над конечными CW -комплексам достаточно малой размерности.

Аналогия с классической теорией векторных расслоений особенно полна для плавающих расслоений алгебр (предложение 1.19). В другом крайнем случае — грассманианов вида Gr_{k^m, k^n} — ниже доказывается, что прямой предел $\varinjlim_n \text{Gr}_{k^m, k^n}$ гомотопически эквивалентен $\text{BPU}(k^m)$ — классифицирующему пространству проективной унитарной группы $\text{PU}(k^m)$, при этом переход к пределу по n в терминах расслоений алгебр отвечает «забыванию» μ , т.е. функтору $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^n}) \mapsto A_{k^m}$, где A_{k^m} рассматривается как локально-тривиальное расслоение со структурной группой $\text{PU}(k^m)$ (следствие 1.18). Это показывает, что изучение таких расслоений алгебр сводится (по крайней мере в стабильном смысле) к изучению локально-тривиальных расслоений со структурной группой $\text{PU}(k^m)$. Это эквивалентно тому, что любое локально-тривиальное расслоение A_{k^m} (над конечным CW -комплексом) со слоем $M_{k^m}(\mathbb{C})$ можно вложить в тривиальное расслоение со слоем $M_{k^n}(\mathbb{C})$ для достаточно большого n (причем так, чтобы вложение было бы послойным гомоморфизмом алгебр, как в определении расслоения алгебр) и при этом, по существу, единственным образом (предложение 1.17). Расслоения же A_k , которые вкладываются в тривиальное расслоение $\widetilde{M}_{kl}$ при выполнении условия $(k, l) = 1$ (т.е. входят в состав плавающих расслоений алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$), имеют весьма специальный вид, как это будет выяснено в дальнейшем (лемма 2.7).

Итак, пусть $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ — некоторое расслоение алгебр над конечным CW -комплексом X . Для рассматриваемых нами задач без ограничения общности можно предположить, что $m \leq n - m$. Очевидно, что для данного расслоения алгебр мы имеем семейство классифицирующих отображений X в Gr_{k^m, k^n} , определенных для фиксированной тривиализации ψ_n расслоения $\widetilde{M}_{k^n} \cong X \times M_{k^n}(\mathbb{C})$ с точностью до действия $\text{PU}(k^n)$ на грассманиане. Обозначим через $\varphi(\psi_n)$ классифицирующее отображение для $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$, построенное по данной тривиализации. Очевидно, что при гомотопии классифицирующего отображения класс изоморфизма обратного образа канонического расслоения

$(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ не меняется. Однако $\varphi(\psi_n)$ при разных ψ_n могут быть, вообще говоря, не гомотопными отображениями X в Gr_{k^m, k^n} . Тем не менее мы докажем, что композиции двух таких отображений $\varphi(\psi_n), \varphi(\psi'_n) : X \rightarrow \text{Gr}_{k^m, k^n}$ с вложением $\text{Gr}_{k^m, k^n} \hookrightarrow \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta}}$ будут гомотопны, если δ достаточно велико.

Предложение 1.15. Пусть $(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ — некоторое расслоение алгебр над конечным CW-комплексом X , $\dim X \leq 2k^m$ (напомним что $m \leq n - m$). Пусть $\pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ — индуцированное проекцией $X \times I \xrightarrow{\pi} X$ расслоение алгебр над $X \times I$ и

$$\varphi(\psi_n) : X \times \{0\} \rightarrow \text{Gr}_{k^m, k^n}, \quad \varphi(\psi'_n) : X \times \{1\} \rightarrow \text{Gr}_{k^m, k^n}$$

— некоторые классифицирующие отображения для

$$\pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})|_{X \times \{0\}} \cong (A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n}), \quad \pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})|_{X \times \{1\}} \cong (A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$$

соответственно. Тогда для достаточно большого δ , зависящего от $\dim X$, существует отображение $\Phi : X \times I \rightarrow \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta}}$ такое, что

$$\begin{aligned} \Phi|_{X \times \{0\}} &= \chi_\delta \circ \varphi(\psi_n) : X \times \{0\} \xrightarrow{\varphi(\psi_n)} \text{Gr}_{k^m, k^n} \xrightarrow{\chi_\delta} \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta}}, \\ \Phi|_{X \times \{1\}} &= \chi_\delta \circ \varphi(\psi'_n) : X \times \{1\} \xrightarrow{\varphi(\psi'_n)} \text{Gr}_{k^m, k^n} \xrightarrow{\chi_\delta} \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta}} \end{aligned}$$

и

$$\Phi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta}}) \cong \pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta}}),$$

где $(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta}})$ — расслоение алгебр над X , являющееся «продолжением» исходного $(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ (см. ниже), $\chi_\delta : \text{Gr}_{k^m, k^n} \hookrightarrow \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta}}$ — отображение, индуцированное вложением алгебр.

Доказательство. Пусть $(X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})^{(r)}$ — r -мерный клеточный остов относительного клеточного пространства $(X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})$. Предположим, что уже построено отображение

$$\Phi^{(r)} : (X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})^{(r)} \rightarrow \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta_r}}$$

с нужными свойствами и изоморфизм

$$\Phi^{(r)*}(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta_r}}) \cong \pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta_r}})|_{(X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})^{(r)}}.$$

Пусть e_{r+1} — относительная клетка в $X \times I$ (она имеет вид $e_r \times I$, где e_r — клетка в X). Ограничение $\pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta_r}})$ на e_{r+1} тривиально (см. определение 1.5). Мы имеем отображения

- (i) $\pi^*(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta_r}})|_{e_{r+1}} \cong (e_{r+1} \times M_{k^m}(\mathbb{C}), \tau, e_{r+1} \times M_{k^{n+\delta_r}}(\mathbb{C}))$,
- (ii) $\Phi^{(r)} : \partial e_{r+1} \rightarrow \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta_r}}$ (при этом на $e_r \times \{0\}$ и $e_r \times \{1\}$ $\Phi^{(r)}$ совпадает с $\varphi(\psi_{n+\delta_r})$ и $\varphi(\psi'_{n+\delta_r})$ соответственно),
- (iii) $\Phi^{(r)*}(A_k^m, \mu, \widetilde{M}_{k^{n+\delta_r}})|_{\partial e_{r+1}} \cong (\partial e_{r+1} \times M_{k^m}(\mathbb{C}), \tau, \partial e_{r+1} \times M_{k^{n+\delta_r}}(\mathbb{C}))$.

Таким образом, отображение $\Phi^{(r)}$ можно поднять до отображения Ξ в пространство расслоения реперов (см. (1.3)), сопоставляющего каждой точке $x \in \partial e_{r+1}$ репер в $M_{k^m}(\mathbb{C})$, соответствующий этой точке при отождествлении (iii):

$$\begin{array}{ccc} \partial e_{r+1} & \xrightarrow{\Xi} & \text{PU}(k^{n+\delta_r})/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{n-m+\delta_r}) \\ & \searrow \Phi^{(r)} & \downarrow \\ & & \text{Gr}_{k^m, k^{n+\delta_r}} \end{array}.$$

Если r четно, $r = 2s$, то, поскольку $\pi_{2s}(\text{PU}(k^{n+\delta_r})/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{n-m+\delta_r})) = 0$ (предложение 1.13), отображение Ξ продолжается на всю клетку и, стало быть, можно распространить отображение $\Phi^{(r)}$ на весь $(r+1)$ -остов.

Если же r нечетно, $r = 2s + 1$, то, поскольку $\pi_{2s+1}(\mathrm{PU}(k^{n+\delta_r})/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{n-m+\delta_r})) \cong \mathbb{Z}/k^m\mathbb{Z}$, нужно воспользоваться тем, что при отображении $\tilde{\chi}_m$ в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{PU}(k^{n+\delta_r})/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{n-m+\delta_r}) & \xrightarrow{\tilde{\chi}_m} & \mathrm{PU}(k^{n+\delta_r+m})/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{n+\delta_r}) & \\ & \nwarrow \Xi & \downarrow & \downarrow & \\ \partial e_{r+1} & \xrightarrow[\Phi^{(r)}]{} & \mathrm{Gr}_{k^m, k^{n+\delta_r}} & \xrightarrow{\chi_m} & \mathrm{Gr}_{k^m, k^{n+\delta_r+m}} \end{array}$$

образ $\pi_{2s+1}(\mathrm{PU}(k^{n+\delta_r})/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{n-m+\delta_r}))$ в $\pi_{2s+1}(\mathrm{PU}(k^{n+\delta_r+m})/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{n+\delta_r}))$ есть 0 (см. (1.9)), поэтому отображение $\tilde{\chi}_m \circ \Xi : \partial e_{r+1} \rightarrow \mathrm{PU}(k^{n+\delta_r+m})/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{n+\delta_r})$ продолжается на всю клетку e_{r+1} и, следовательно, $\chi_m \circ \Phi^{(r)}$ продолжается на весь $(r+1)$ -мерный остов как отображение в $\mathrm{Gr}_{k^m, k^{n+\delta_r+m}}$. Нужный результат следует отсюда по индукции. $\square$

Для всякого $N \geq n$ расслоение алгебр $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^N})$ очевидным образом определяет расслоение алгебр $(A_{k^m}, \nu, \widetilde{M}_{k^N})$ (ν есть композиция μ и очевидного вложения тривиального расслоения со слоем $M_{k^N}(\mathbb{C})$ в тривиальное расслоение со слоем $M_{k^N}(\mathbb{C})$ в качестве постоянной подалгебры). Полученное таким образом расслоение алгебр назовем *продолжением* исходного; на множестве расслоений алгебр можно ввести соответствующее отношение эквивалентности (два расслоения $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^N})$ и $(B_{k^r}, \nu, \widetilde{M}_{k^s})$ эквивалентны $\Leftrightarrow A_{k^m} \cong B_{k^r} (\Rightarrow m = r)$ и их продолжения для некоторого $N \geq \max(n, s)$ изоморфны как расслоения алгебр. Для краткости при дальнейшем изложении назовем это отношением *M-эквивалентности*.

Следствие 1.16. *Пространство $\varinjlim_n \mathrm{Gr}_{k^m, k^n}$ классифицирует расслоения алгебр над конечными CW-комплексами с определенным выше отношением M-эквивалентности.*

Предложение 1.17. *Пусть A_{k^m} — произвольное расслоение со слоем $M_{k^m}(\mathbb{C})$ и структурной группой $\mathrm{PU}(k^m)$ над конечным CW-комплексом X . Тогда существует n такое, что A_{k^m} — подрасслоение подалгебр в тривиальном расслоении $X \times M_{k^n}(\mathbb{C})$, т.е. получается забыванием μ из некоторого расслоения алгебр.*

Доказательство. Пусть $\lambda_{k^m}(k^r) : \mathrm{Gr}_{k^m, k^r} \rightarrow \mathrm{BPU}(k^m)$ — классифицирующее отображение для A_{k^m} из канонического расслоения алгебр $(\mathcal{A}_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^r})$ над Gr_{k^m, k^r} как расслоения со структурной группой $\mathrm{PU}(k^m)$. Тогда имеем коммутативную диаграмму расслоений

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{PU}(k^m) & \xrightarrow{\quad} & * & \\ \nearrow \simeq & & \searrow & \downarrow & \\ \mathrm{PU}(k^m) & \longrightarrow & \mathrm{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{r-m}) & \longrightarrow & \mathrm{BPU}(k^m) . \\ & \downarrow & \nearrow \lambda_{k^m}(k^r) & & \\ & \mathrm{Gr}_{k^m, k^r} & & & \end{array} \quad (1.10)$$

Можно считать, что $m \leq r - m$. Поскольку из (1.10) следует, что расслоение с тотальным пространством $\mathrm{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{r-m})$ индуцировано из расслоения путей, отображение $\lambda_{k^m}(k^r)$ можно превратить в расслоение

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{r-m}) & \xrightarrow{\mu_{k^m}(k^r)} & \mathrm{Gr}_{k^m, k^r} \\ & & \downarrow \lambda_{k^m}(k^r) \\ & & \mathrm{BPU}(k^m) \end{array} \quad (1.11)$$

со слоем $\mathrm{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \mathrm{PU}(k^{r-m})$.

В (1.11), как и в (1.10), можно переходить к пределу по r :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{PU}(k^{r+1})/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{r+1-m}) & \xrightarrow{\mu_{k^m}(k^{r+1})} & \text{Gr}_{k^m, k^{r+1}} \\
 & \nearrow \nu_k & & & \downarrow \lambda_{k^m}(k^{r+1}) \\
 \text{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{r-m}) & \xrightarrow{\mu_{k^m}(k^r)} & \text{Gr}_{k^m, k^r} & & \text{BPU}(k^m) \\
 & \searrow \lambda_{k^m}(k^r) & & \nearrow \simeq & \\
 & & \text{BPU}(k^m) & &
 \end{array} \quad (1.12)$$

Пусть теперь $X \xrightarrow{\varphi} \text{BPU}(k^m)$ — классифицирующее отображение для A_{k^m} (заметим что A_{k^m} — простое расслоение, так как $\pi_1(\text{BPU}(k^m)) = 0$). Без ограничения общности можно предположить, что $\dim X \leq 2k^{r-m}$. Первое препятствие к подъему φ до отображения в Gr_{k^m, k^r} лежит в $H^{2s}(X; \pi_{2s-1}(\text{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{r-m})))$ для некоторого s . Тогда в силу функториальности первое препятствие к подъему φ до отображения в $\text{Gr}_{k^m, k^{r+1}}$ лежит в $H^{2s}(X; \nu_{k*} \pi_{2s-1}(\text{PU}(k^r)/E_{k^m} \otimes \text{PU}(k^{r-m})))$. Из предложения 1.14 известно, что ν_{k*} — не вложение, поэтому на некотором конечном шаге препятствия исчезают, т.е. отображение φ поднимается до отображения в Gr_{k^m, k^n} при достаточно большом n . Доказательство завершает индукция по s . $\square$

Обозначим через λ_{k^m} прямой предел отображений $\varinjlim_n \lambda_{k^m}(k^n) : \varinjlim_n \text{Gr}_{k^m, k^n} \rightarrow \text{BPU}(k^m)$, определенных в доказательстве предложения (см. (1.10)).

Следствие 1.18. Пространства $\varinjlim_n \text{Gr}_{k^m, k^n}$ и $\text{BPU}(k^m)$ гомотопически эквивалентны, причем гомотопическую эквивалентность задает прямой предел λ_{k^m} классифицирующих отображений расслоений A_{k^m} , входящих в состав канонических расслоений алгебр $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ над Gr_{k^m, k^n} , как расслоений со структурной группой $\text{PU}(k^m)$.

Доказательство. Утверждение вытекает из диаграммы гомотопических последовательностей, отвечающей отображению расслоений (1.12). $\square$

Таким образом, изучение расслоений алгебр вида $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{k^n})$ с отношением M -эквивалентности эквивалентно изучению главных расслоений со структурной группой $\text{PU}(k^m)$.

Предложение 1.19. Пусть X — конечный CW -комплекс, $\dim X \leq 2 \min\{k, l\}$, $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ — плавающее расслоение алгебр над X , т.е. $(k, l) = 1$. Тогда существует и гомотопически единственно такое отображение $\varphi : X \rightarrow \text{Gr}_{k, kl}$, что $\varphi^*(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \cong (A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ (т.е. φ — классифицирующее отображение для $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$).

Доказательство. Существование классифицирующего отображения очевидно из определения расслоения алгебр. Предположим, что имеется два таких отображения $\varphi(\psi_l), \varphi(\psi'_l)$ (обозначения из предложения 1.15), и докажем, что они гомотопны. Иными словами, нам нужно найти такое отображение $\Phi : X \times I \rightarrow \text{Gr}_{k, kl}$, что

$$\Phi|_{X \times \{0\}} = \varphi(\psi_l), \quad \Phi|_{X \times \{1\}} = \varphi(\psi'_l).$$

Пусть $\pi : X \times I \rightarrow X$ — проекция; тогда $\Phi^*(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \cong \pi^*(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$. Будем строить гомотопию индукцией по размерности r клеточного остова относительного клеточного пространства $(X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})$. Предположим, что уже построено отображение

$$\Phi^{(r)} : (X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})^{(r)} \rightarrow \text{Gr}_{k, kl}$$

с нужными свойствами $\Phi^{(r)}|_{X \times \{0\}} = \varphi(\psi_l), \Phi^{(r)}|_{X \times \{1\}} = \varphi(\psi'_l)$ и изоморфизм

$$\Phi^{(r)*}(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \cong \pi^*(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})|_{(X \times I, X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\})^{(r)}}.$$

Пусть e_{r+1} — относительная клетка в $X \times I$ (она имеет вид $e_r \times I$, где e_r — клетка в X). Если r нечетно, $r = 2s + 1$, то, поскольку $\pi_{2s+1}(\text{Gr}_{k, kl}) = 0$ (см. предложение 1.9), отображение $\Phi^{(r)}$

продолжается с $\partial e_{r+1} = S^{2s+1}$ на всю клетку e_{r+1} и, следовательно, с r -мерного остова на $r+1$ -мерный остов.

Если r четно, $r = 2s$, то будем рассуждать следующим образом. Ограничение $\pi^*(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ на e_{r+1} — тривиальное плавающее расслоение алгебр. Мы имеем отображения

- (i) $\pi^*(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})|_{e_{r+1}} \cong (e_{r+1} \times M_k(\mathbb{C}), \tau, e_{r+1} \times M_{kl}(\mathbb{C}))$,
- (ii) $\Phi^{(r)} : \partial e_{r+1} \rightarrow \text{Gr}_{k,kl}$ (при этом на $e_r \times \{0\}$ и $e_r \times \{1\}$ $\Phi^{(r)}$ совпадает с $\varphi(\psi_l)$ и $\varphi(\psi'_l)$ соответственно),
- (iii) $\Phi^{(r)*}(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})|_{\partial e_{r+1}} \cong (\partial e_{r+1} \times M_k(\mathbb{C}), \tau, \partial e_{r+1} \times M_{kl}(\mathbb{C}))$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \partial e_{r+1} & \xrightarrow{\Psi} & \text{PU}(kl)/E_k \otimes \text{PU}(l) \\ & \searrow \Phi^{(r)} & \downarrow \\ & & \text{Gr}_{k,kl} \end{array} \quad (1.13)$$

Таким образом, отображение $\Phi^{(r)}$ можно поднять до отображения Ψ в пространство расслоения реперов (1.13); при этом Ψ сопоставляет каждой точке $x \in \partial e_{r+1}$ репер, соответствующий этой точке при отождествлении (iii). Так как четно ($r = 2s$) и $\pi_{2s}(\text{PU}(kl)/E_k \otimes \text{PU}(l)) = 0$ (см. предложение 1.13), то Ψ продолжается на всю клетку и, стало быть, можно распространить отображение $\Phi^{(r)}$ на весь $(r+1)$ -остов. Требуемый результат следует отсюда по индукции. $\square$

2. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ФУНКТОРЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАССЛОЕНИЯМИ АЛГЕБР

2.1. Гомотопический функтор, связанный с плавающими расслоениями алгебр. В данном параграфе строится аналог K -теории, связанный с плавающими расслоениями алгебр. В частности, на множестве классов изоморфизмов плавающих расслоений алгебр над X определяется отношение стабильной эквивалентности (определение 2.2).

Отметим, что для плавающего расслоения алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ вложение μ играет существенную роль. Можно привести пример плавающего расслоения алгебр (над некоторым конечным CW -комплексом) вида $(\widetilde{M}_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ (т.е. с тривиальным расслоением A_k), которое тем не менее даже стабильно не эквивалентно (в смысле определения 2.2) тривиальному плавающему расслоению алгебр.

Кроме того, в этом пункте будет получено условие вложимости расслоения A_k со слоем $M_k(\mathbb{C})$ в тривиальное расслоение $\widetilde{M}_{kl}$ при $(k, l) = 1$ (лемма 2.7).

Предложение 2.1. Для всех последовательностей пар $\{k_j, l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющих соотношениям

- (i) $k_j, l_j \rightarrow \infty$,
- (ii) $k_j | k_{j+1}, l_j | l_{j+1}$,
- (iii) $(k_j, l_j) = 1$

при любом j , соответствующие пространства $\varinjlim_j \text{Gr}_{k_j, k_j l_j}$ гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Во-первых, общие стабильные части $\text{Gr}_{k,kl}$ и $\text{Gr}_{m,mn}$ при $(k, l) = (m, n) = (kt, ln) = 1$ (а следовательно $(m, l) = (n, k) = 1$) гомотопически эквивалентны. В самом деле, в этом случае, согласно следствию 1.12, отображения λ, κ в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & \text{Gr}_{km,klmn} & \\ \nearrow \lambda & & \nwarrow \kappa \\ \text{Gr}_{k,kl} & & \text{Gr}_{m,mn} \end{array} \quad (2.1)$$

индуцируют изоморфизм стабильных гомотопических групп. Также очевидно, что

$$\begin{aligned}\lambda^*(\mathcal{A}_{km}, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{klmn}) &\cong (\mathcal{A}_k, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl}) \otimes (\widetilde{\mathcal{M}}_m, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{mn}), \\ \kappa^*(\mathcal{A}_{km}, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{klmn}) &\cong (\mathcal{A}_m, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{mn}) \otimes (\widetilde{\mathcal{M}}_k, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl}),\end{aligned}$$

где $(\widetilde{\mathcal{M}}_k, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl})$, $(\widetilde{\mathcal{M}}_m, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{mn})$ — тривиальные ПРА (см. определение 1.5). Во-вторых, допустим, что $(km, ln) > 1$. Возьмем достаточно большие t, u такие, что $(t, u) = 1$ и $(t, l) = (u, k) = (t, n) = (u, m) = 1$. Тогда $(kt, lu) = 1 = (tm, nu)$ и, снова согласно следствию 1.12, отображения

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Gr}_{kt, kltu} & & \text{Gr}_{mt, mntu} & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \text{Gr}_{k, kl} & & \text{Gr}_{t, tu} & & \text{Gr}_{m, mn} \end{array} \quad (2.2)$$

индуцируют изоморфизм стабильных гомотопических групп. При переходе к пределу $\varinjlim_j \text{Gr}_{k_j, k_j l_j}$ для любой последовательности $\{k_j, l_j\}$, удовлетворяющей условиям (i)–(iii), гомотопические группы стабилизируются. $\square$

В дальнейшем окажется, что этот единственный гомотопический тип, который обозначим $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k, kl}$, есть BSU (теорема 2.10).

Определим теперь отношение стабильной эквивалентности на множестве классов изоморфных плавающих расслоений алгебр. Напомним, что определение тривиального расслоения алгебр было дано в определении 1.5.

Определение 2.2. Два плавающих расслоения алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{\mathcal{M}}_{mn})$ назовем *стабильно эквивалентными*, если существует последовательность пар натуральных чисел $\{t_i, u_i\}$, $1 \leq i \leq s$, такая, что

- (i) $\{t_1, u_1\} = \{k, l\}$, $\{t_s, u_s\} = \{m, n\}$,
- (ii) $(t_i t_{i+1}, u_i u_{i+1}) = 1$ при $s > 1$, $1 \leq i \leq s - 1$,

и отвечающая ей последовательность плавающих расслоений алгебр $(A_{t_i}, \mu_i, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_i u_i})$ такая, что

- (1) $(A_{t_1}, \mu_1, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_1 u_1}) = (A_k, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl})$, $(A_{t_s}, \mu_s, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_s u_s}) = (B_m, \nu, \widetilde{\mathcal{M}}_{mn})$;
- (2) $(A_{t_i}, \mu_i, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_i u_i}) \otimes (\widetilde{\mathcal{M}}_{t_{i+1}}, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_{i+1} u_{i+1}}) \cong (A_{t_{i+1}}, \mu_{i+1}, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_{i+1} u_{i+1}}) \otimes (\widetilde{\mathcal{M}}_{t_i}, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_i u_i})$ при $s > 1$, $1 \leq i \leq s - 1$, где $(\widetilde{\mathcal{M}}_{t_i}, \tau, \widetilde{\mathcal{M}}_{t_i u_i})$ — тривиальное ПРА.

Данное определение мотивируется следующим предложением.

Предложение 2.3. Пространство $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k, kl}$ является классифицирующим пространством

для классов стабильной эквивалентности ПРА над конечными CW-комплексами X . При этом любое ПРА над X является прообразом универсального ПРА $\varinjlim_{(k,l)=1} (A_k, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl})$ над $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k, kl}$ относительно некоторого отображения X в $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k, kl}$, определенного с точностью до гомотопии.

Доказательство. Утверждение легко вытекает из предложения 1.19 и анализа диаграмм (2.1), (2.2). Например, пусть $(A_k, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl})$, $(B_m, \nu, \widetilde{\mathcal{M}}_{mn})$ — плавающие расслоения алгебр над X , $(k, l) = (m, n) = 1$ и $\dim X \leq 2 \min\{k, l, m, n\}$. Пусть $\varphi_A : X \rightarrow \text{Gr}_{k, kl}$ и $\varphi_B : X \rightarrow \text{Gr}_{m, mn}$ — соответствующие классифицирующие отображения, которые существуют и единственны с точностью до гомотопии согласно предложению 1.19. Пусть композиции отображений

$$X \xrightarrow{\varphi_A} \text{Gr}_{k, kl} \xrightarrow{\alpha} \varinjlim_{(t,u)=1} \text{Gr}_{t, tu}, \quad X \xrightarrow{\varphi_B} \text{Gr}_{m, mn} \xrightarrow{\beta} \varinjlim_{(t,u)=1} \text{Gr}_{t, tu}$$

гомотопны. При условии $(km, ln) = 1$ обратимся к диаграмме (2.1). Ясно, что в силу условий на $\dim X$ уже отображения $\lambda \circ \varphi_A$ и $\kappa \circ \varphi_B$ гомотопны. Заметим, что

$$\begin{aligned}\lambda^*(A_{km}, \mu, \widetilde{M}_{klmn}) &\cong (A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \otimes (\widetilde{M}_m, \tau, \widetilde{M}_{mn}), \\ \kappa^*(A_{km}, \mu, \widetilde{M}_{klmn}) &\cong (A_m, \mu, \widetilde{M}_{mn}) \otimes (\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl}).\end{aligned}$$

Поэтому $\lambda \circ \varphi_A$ и $\kappa \circ \varphi_B$ — классифицирующие отображения для $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \otimes (\widetilde{M}_m, \tau, \widetilde{M}_{mn})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn}) \otimes (\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl})$ соответственно. Следовательно,

$$(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \otimes (\widetilde{M}_m, \tau, \widetilde{M}_{mn}) \cong (B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn}) \otimes (\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl}),$$

т.е. $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \sim (B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$.

Обратно, пусть $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \sim (B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$. В силу условия $\dim X \leq 2 \min\{k, l, m, n\}$ и предыдущего предложения очевидно, что

$$(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) \otimes (\widetilde{M}_m, \tau, \widetilde{M}_{mn}) \cong (B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn}) \otimes (\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl}).$$

Тогда композиции $\lambda \circ \varphi_A : X \rightarrow \text{Gr}_{km,klmn}$ и $\kappa \circ \varphi_B : X \rightarrow \text{Gr}_{km,klmn}$ гомотопны в силу предложения 1.19.

Для доказательства предложения в общем случае, без предположения $(kl, mn) = 1$, нужно с помощью диаграммы (2.2) заменить исходные расслоения на такие стабильно им эквивалентные, ранги которых уже удовлетворяют этому условию. $\square$

Из доказательств предложений 2.1 и 2.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4. Для произвольной пары $\{k, l\}$ такой, что

- (i) $(k, l) = 1$,
- (ii) $2 \min\{k, l\} \geq \dim X$,

всякий класс эквивалентности ПРА над X имеет представитель вида $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$.

Последнее свойство позволяет ввести на классах эквивалентности ПРА над X структуру абелевой группы. А именно, пусть $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ — ПРА над X . Если $(km, ln) = 1$, то ясно, что $(A_k \otimes B_m, \mu \otimes \nu, \widetilde{M}_{klmn})$ — ПРА. В противном случае заменим (как в конце предыдущего предложения) $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ на другой представитель того же класса $(B_{m'}, \nu', \widetilde{M}_{m'n'})$ такой, что $(km', ln') = 1$. Очевидно, что класс эквивалентности произведения не зависит от выбора представителя $(B_{m'}, \nu', \widetilde{M}_{m'n'})$. Единичным элементом этой группы является класс тривиальных ПРА $(\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl})$, обратным к классу $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ — класс расслоения $(B_l, \nu, \widetilde{M}_{kl})$, где B_l — дополнительное к A_k подрасслоение (объединение централизаторов слоев), а ν — очевидное вложение этого подрасслоения в тривиальное. Обратный образ ПРА есть ПРА.

Суммируем основные результаты, полученные к этому моменту.

Теорема 2.5. Классы стабильной эквивалентности ПРА с операцией, индуцированной тензорным произведением расслоений, определяют контравариантный функтор на категории конечных CW -комплексов со значением в категории абелевых групп. Представляющей H -группой этого функтора является $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}$.

Функтор, определенный в предыдущей теореме, обозначим $\widetilde{\text{AB}}^1$.

Определение 2.6. Основой расслоения алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ назовем расслоение A_k , рассматриваемое как расслоение со структурной группой $\text{Aut } M_k(\mathbb{C}) \cong \text{PGL}(k)$.

Лемма 2.7. Пусть X — конечный CW -комплекс, $\dim X \leq 2 \min\{k, m\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) A_k — основа некоторого ПРА над X ;
- (ii) для произвольного m , удовлетворяющего условию $2m \geq \dim X$, существует расслоение B_m со слоем $M_m(\mathbb{C})$ такое, что $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$;

(iii) для некоторого m такого, что $(k, m) = 1$, имеем $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$.

Более того, по паре расслоений A_k и B_m над X такой, что $(k, m) = 1$ и $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$, однозначно восстанавливается класс стабильной эквивалентности ПРА над X , который имеет (для произвольного достаточно большого n такого, что $(km, n) = 1$) в качестве представителей ПРА вида $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kn})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ (для некоторых μ, ν).

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из предыдущего следствия, а (ii) $\Rightarrow$ (iii) тривиальна. Остается доказать импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i) и последнее утверждение.

Пусть $\lambda_k : \text{Gr}_{k, kn} \rightarrow \text{BPU}(k)$ — классифицирующее отображение основы A_k канонического РА над $\text{Gr}_{k, kn}$ как $\text{PU}(k)$ -расслоения (ср. (1.10)). Отображение λ_k индуцирует морфизм расслоения

$$\begin{array}{ccc} \text{PU}(k) & \xrightarrow{\cdots \otimes E_n} & \text{PU}(kn)/E_k \otimes \text{PU}(n) \\ & & \downarrow \\ & & \text{PU}(kn)/\text{PU}(k) \otimes \text{PU}(n) = \text{Gr}_{k, kn} \end{array}$$

в универсальное $\text{PU}(k)$ -расслоение над $\text{BPU}(k)$; из соответствующей диаграммы гомотопических последовательностей расслоений вытекает, что

$$\lambda_{k*} : \pi_{2r}(\text{Gr}_{k, kn}) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_{2r}(\text{BPU}(k)) = \mathbb{Z}$$

есть умножение на k при $2 \leq r \leq \min\{k, n\}$ (если $r = 1$, то $\pi_2(\text{Gr}_{k, kn}) = 0$, а $\pi_2(\text{BPU}(k)) = \pi_1(\text{PU}(k)) = \mu_k$ — группа корней степени k из 1).

Отображение λ_k можно превратить в расслоение

$$\begin{array}{ccc} \text{PU}(kn)/E_k \otimes \text{PU}(n) & \longrightarrow & \text{Gr}_{k, kn} \\ & \nearrow \tilde{\varphi}_{A_k} & \downarrow \lambda_k \\ X & \xrightarrow{\varphi_{A_k}} & \text{BPU}(k) \end{array} \quad (2.3)$$

Если $\varphi_{A_k} : X \rightarrow \text{BPU}(k)$ — классифицирующее отображение для расслоения A_k (как $\text{PU}(k)$ -расслоения), то A_k — основа плавающего расслоения тогда и только тогда, когда φ_{A_k} поднимается до отображения $\tilde{\varphi}_{A_k}$ в $\text{Gr}_{k, kn}$ (см. (2.3)). Кроме того, слоем расслоения λ_k является пространство k -реперов в $M_{kn}(\mathbb{C})$, которое для краткости обозначим $F_{k, kn}$. Напомним (см. предложение 1.13), что

$$\pi_{2r}(F_{k, kn}) = 0, \quad \pi_{2r-1}(F_{k, kn}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{BPU}(km) & & \\ & \swarrow \psi & \uparrow \lambda_{km} & \nwarrow \chi & \\ \text{BPU}(k) & \xleftarrow{\lambda_k} \text{Gr}_{k, kn} & \xrightarrow{\gamma_k} \text{Gr}_{km, kmn^2} & \xleftarrow{\gamma_m} \text{Gr}_{m, mn} & \xrightarrow{\lambda_m} \text{BPU}(m) \\ & \searrow \varphi_k & & \searrow \varphi_m & \\ & & X & & \end{array}$$

где $(km, n) = (k, m) = 1$, $\dim X \leq 2 \min\{k, m, n\}$. В ней отображения γ_k, γ_m индуцированы вложениями алгебр (это гомотопические эквивалентности в стабильных размерностях; см. предложение 1.12), ψ и χ индуцированы отображениями $\text{PU}(k) \xrightarrow{\cdots \otimes E_m} \text{PU}(km)$, $\text{PU}(m) \xrightarrow{\cdots \otimes E_k} \text{PU}(km)$ соответственно; φ_k и φ_m — классифицирующие отображения для расслоений A_k и B_m из условия. По предположению внешний ромб гомотопически коммутативен: $\psi\varphi_k \simeq \chi\varphi_m$. Кроме того, очевидно, что $\psi\lambda_k \simeq \lambda_{km}\gamma_k$, $\chi\lambda_m \simeq \lambda_{km}\gamma_m$. Для доказательства достаточно построить общий подъем отображений φ_k, φ_m в Gr (см. замечание относительно γ_k и γ_m выше) и доказать его единственность.

Воспользуемся индукцией по размерности клеточного остова пространства X . Пусть заданы гомотопные подъемы $\tilde{\varphi}_k^{2r} : X^{(2r)} \rightarrow \text{Gr}$, $\tilde{\varphi}_m^{2r} : X^{(2r)} \rightarrow \text{Gr}$ отображений φ_k, φ_m на $2r$ -мерном остове, $\tilde{\varphi}_k^{2r} \simeq \tilde{\varphi}_m^{2r}$. Пусть $(\tilde{\varphi}_k^{2r+1})', (\tilde{\varphi}_m^{2r+1})'$ — произвольные подъемы φ_k, φ_m , продолжающие $\tilde{\varphi}_k^{2r}, \tilde{\varphi}_m^{2r}$ на $(2r+1)$ -мерный остов $X^{(2r+1)}$. Их можно рассматривать как подъемы на $X^{(2r+1)}$ отображения $\psi\varphi_k \simeq \chi\varphi_m$. Рассмотрим различающую коцепь

$$d((\tilde{\varphi}_k^{2r+1})', (\tilde{\varphi}_m^{2r+1})') \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \pi_{2r+1}(F_{km, kmn^2})) = \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/km\mathbb{Z}).$$

Отображения ψ, χ индуцируют вложения групп коцепей

$$\begin{aligned} \psi_* : \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/km\mathbb{Z}), \\ \chi_* : \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/km\mathbb{Z}); \end{aligned}$$

кроме того, так как по условию $(k, m) = 1$, имеем

$$\mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/km\mathbb{Z}) = \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \oplus \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}),$$

причем различающие коцепи для различных подъемов φ_k, φ_m лежат соответственно в $\mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ и $\mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Известно, что для произвольной коцепи $d_1 \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ и $(\tilde{\varphi}_k^{2r+1})'$, описанного выше, существует продолжение $\tilde{\varphi}_k^{2r+1}$ подъема $\tilde{\varphi}_k^{2r}$ отображения φ_k такое, что $d(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}, (\tilde{\varphi}_k^{2r+1})') = -d_1$; аналогично для $(\tilde{\varphi}_m^{2r+1})'$ и $d_2 \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Пусть теперь $d((\tilde{\varphi}_k^{2r+1})', (\tilde{\varphi}_m^{2r+1})') = d_1 - d_2$, где $d_1 \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $d_2 \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Тогда

$$\begin{aligned} d(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}, (\tilde{\varphi}_k^{2r+1})') + d((\tilde{\varphi}_k^{2r+1})', (\tilde{\varphi}_m^{2r+1})') + d((\tilde{\varphi}_m^{2r+1})', \tilde{\varphi}_m^{2r+1}) = \\ = d(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}, \tilde{\varphi}_m^{2r+1}) = -d_1 + d_1 - d_2 + d_2 = 0. \end{aligned}$$

Иными словами, можно заменить $(\tilde{\varphi}_k^{2r+1})'$ на другой подъем отображения φ_k на $(2r+1)$ -мерном остове, а $(\tilde{\varphi}_m^{2r+1})'$ — на другой подъем отображения φ_m на $(2r+1)$ -мерном остове, продолжающие соответствующие подъемы φ_k^{2r} и φ_m^{2r} так, чтобы полученные подъемы были гомотопны как отображения $X^{(2r+1)}$ в Gr . Очевидно, что отображения $\tilde{\varphi}_k^{2r+1}$ и $\tilde{\varphi}_m^{2r+1}$, удовлетворяющие этому условию, гомотопически единственны.

Продолжим теперь $\tilde{\varphi}_k^{2r+1}, \tilde{\varphi}_m^{2r+1}$ на $(2r+2)$ -мерный остов. Известно, что $\delta d(f, g) = c(f) - c(g)$, где $c(f)$ и $c(g)$ — препятствующие коциклы к продолжению f и g . Поэтому

$$0 = \delta d(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}, \tilde{\varphi}_m^{2r+1}) = c(\tilde{\varphi}_m^{2r+1}) - c(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}).$$

Но $\tilde{\varphi}_m^{2r+1}$ — подъем отображения φ_m , следовательно $c(\tilde{\varphi}_m^{2r+1}) \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$; аналогично, $c(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}) \in \mathcal{C}^{2r+1}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Таким образом, $c(\tilde{\varphi}_m^{2r+1}) = c(\tilde{\varphi}_k^{2r+1}) = 0$. На этом шаге препятствия к гомотопии двух подъемов не возникают. $\square$

Лемма 2.8. Пусть A_k — основа некоторого плавающего расслоения алгебр. Тогда ее структурная группа есть $\text{SU}(k) \hookrightarrow \text{PU}(k)$.

Доказательство. Имеем накрытие

$$\begin{array}{ccc} \mu_n & \longrightarrow & \text{SU}(n) \\ & & \downarrow \\ & & \text{PU}(n), \end{array}$$

где μ_n — группа корней степени n из 1. Пусть $(k, l) = 1$. Тогда при вложении $\text{SU}(k) \times \text{SU}(l) \xrightarrow{\otimes} \text{SU}(kl)$ центр $\text{SU}(k) \times \text{SU}(l)$, изоморфный $\mu_k \times \mu_l = \mu_{kl}$, изоморфно отображается в центр $\text{SU}(kl)$.

Поэтому получаем коммутативную диаграмму расслоений

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{PU}(k) & \longrightarrow & \text{PU}(kl)/(E_k \otimes \text{PU}(l)) \\
 & \nearrow & & \nearrow & \downarrow \\
 \text{SU}(k) & \longrightarrow & \text{SU}(kl)/(E_k \otimes \text{SU}(l)) & & \text{PU}(kl)/(\text{PU}(k) \otimes \text{PU}(l)), \\
 & & \downarrow & \nearrow \varphi & \\
 & & \text{SU}(kl)/(\text{SU}(k) \otimes \text{SU}(l)), & &
 \end{array}$$

в которой отображение φ является изоморфизмом.

Другой способ доказательства заключается в использовании того факта, что $\pi_2(\text{Gr}_{k,kl}) = 0$ при $(k, l) = 1$. Поэтому 1-коцикл, определяющий $\text{PU}(k)$ -расслоение A_k на $\text{Gr}_{k,kl}$, поднимается до $\text{SU}(k)$ -коцикла. $\square$

Следствие 2.9. *Основа A_k произвольного плавающего расслоения алгебр имеет вид $\text{End } \xi_k$ для векторного $\text{SU}(k)$ -расслоения ξ_k ранга k . Расслоение ξ_k однозначно восстанавливается по A_k .*

Доказательство. Нужно доказать гомотопическую однозначность поднятия λ до $\tilde{\lambda}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{K}(\mu_k; 1) & \longrightarrow & \text{BSU}(k) \\
 & \nearrow \tilde{\lambda} & \downarrow \\
 \text{Gr}_{k,kl} & \xrightarrow{\lambda} & \text{BPU}(k).
 \end{array} \quad (2.4)$$

Препятствие к построению гомотопии между двумя сечениями $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{\lambda}_1$ расслоения (2.4) лежит в $H^1(\text{Gr}_{k,kl}; \pi_1(\text{K}(\mu_k; 1))) = H^1(\text{Gr}_{k,kl}; \mu_k) = 0$. $\square$

Рассмотрим еще одну задачу, в которой появляются плавающие расслоения алгебр. Пусть X — конечный CW -комплекс, $\{k, l\}$ — пара натуральных чисел ≥ 2 таких, что $2 \min\{k, l\} \geq \dim X$ и $(k, l) = 1$. Пусть A_{kl} — локально-тривиальное расслоение над X со слоем $M_{kl}(\mathbb{C})$. Кроме того, предположим для простоты, что структурная группа расслоения A_{kl} редуцируется к $\text{SL}(kl; \mathbb{C})$ (эквивалентно, к $\text{SU}(kl)$). Оказывается, что тогда над X существуют такие расслоения B_k и C_l со слоями $M_k(\mathbb{C})$ и $M_l(\mathbb{C})$ соответственно, что их структурные группы также редуцируются к соответствующим специальным группам и $A_{kl} \cong B_k \otimes C_l$. Более того, такие пары (B_k, C_l) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами стабильной эквивалентности ПРА над X .

Для доказательства рассмотрим расслоение

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Gr}_{k,kl} & \hookrightarrow & \text{BSU}(k) \times \text{BSU}(l) \\
 & & \downarrow \vartheta \\
 & & \text{BSU}(kl)
 \end{array},$$

в котором отображение ϑ индуцировано тензорным произведением универсальных расслоений. Из теории препятствий теперь очевидно, что произвольное отображение $X \rightarrow \text{BSU}(kl)$ поднимается в тотальное пространство рассматриваемого расслоения, а из точности последовательности

$$0 \longrightarrow [X, \text{Gr}_{k,kl}] \longrightarrow [X, \text{BSU}(k) \times \text{BSU}(l)] \xrightarrow{\vartheta_*} [X, \text{BSU}(kl)] \longrightarrow 0$$

следует последнее утверждение (отметим, что инъективность первого отображения следует из того, что ПРА тривиально тогда и только тогда, когда его основа и дополнительное (в смысле $\otimes$) к ней подрасслоение оба тривиальны как локально-тривиальные расслоения со слоями $M_k(\mathbb{C})$ и $M_l(\mathbb{C})$ соответственно).

В следующей теореме доказывается, что стабильный матричный грассманиан $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}$, отвечающий ПРА, с гомотопической точки зрения есть хорошо известное пространство BSU .

Теорема 2.10. Пространства $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}$ и BSU гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Возьмем два различных простых числа p, q . Очевидно, что $\text{Gr}_{p,pq} = \text{Gr}_{q,pq}$. Рассмотрим гомотопически коммутативные диаграммы отображений:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \psi_{p^2} \\ \text{Gr}_{p^2,(pq)^2} & \xrightarrow{\lambda_{p^2}} & \text{BSU}(p^2) \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi_p \\ \text{Gr}_{p,pq} & \xrightarrow{\lambda_p} & \text{BSU}(p) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \psi_{q^2} \\ \text{Gr}_{p^2,(pq)^2} & \xrightarrow{\lambda_{q^2}} & \text{BSU}(q^2) \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi_q \\ \text{Gr}_{p,pq} & \xrightarrow{\lambda_q} & \text{BSU}(q), \end{array}$$

где $\lambda_{p^k}, \lambda_{q^k}$ — классифицирующие отображения для основ канонических расслоений алгебр $\mathcal{A}_{p^k}$ и $\mathcal{A}_{q^k}$ соответственно, отображение φ индуцировано вложением алгебр, а ψ_{p^k} и ψ_{q^k} — отображениями

$$\text{SU}(p^k) \xrightarrow{\cdots \otimes E_p} \text{SU}(p^{k+1}), \quad \text{SU}(q^k) \xrightarrow{\cdots \otimes E_q} \text{SU}(q^{k+1})$$

соответственно.

Простые вычисления с гомотопическими группами (см. доказательство леммы 2.7) показывают, что

$$\lambda_{p^\infty} = \varinjlim_k \lambda_{p^k} : \varinjlim_k \text{Gr}_{p^k,(pq)^k} \rightarrow \varinjlim_k (\text{BSU}(p^k), \psi_{p^k})$$

— отображение в локализацию $\text{BSU}[\frac{1}{p}]$ (аналогично для q). Мы получаем расслоенный квадрат (см. [7])

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_k \text{Gr}_{p^k,(pq)^k} & \xrightarrow{\lambda_{q^\infty}} & \text{BSU}[\frac{1}{q}] \\ \lambda_{p^\infty} \downarrow & & \downarrow g \\ \text{BSU}[\frac{1}{p}] & \xrightarrow{f} & \text{BSU}[\frac{1}{pq}] \end{array},$$

где f, g — также отображения в локализацию (отвечающие отображениям $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{pq}]$ и $\mathbb{Z}[\frac{1}{q}] \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{pq}]$ соответственно). Пространство

$$\varinjlim_k \text{Gr}_{p^k,(pq)^k} = \text{BSU}[\frac{1}{p}] \times_{\text{BSU}[\frac{1}{pq}]}^h \text{BSU}[\frac{1}{q}]$$

однозначно определено гомотопическими классами f и g (см. [6]). Осталось воспользоваться предложением 2.1. $\square$

Ниже будет построена биекция между множествами $\widetilde{\text{AB}}^1(X)$ классов эквивалентности ПРА и $\widetilde{\text{KSU}}(X)$ классов обычной стабильной эквивалентности SU -расслоений над конечным CW -комплексом X и тем самым будет получено другое доказательство гомотопической эквивалентности $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl} \simeq \text{BSU}$.

Замечание 2.11. Рассмотрим вопрос, лежащий в стороне от основной темы данной работы, но, возможно, представляющий интерес с точки зрения алгебры: какие центральные простые алгебры являются аналогами ПРА, т.е. для каких центральных простых алгебр верен аналог свойства (iii) из леммы 2.7? Пусть, например, A_n — центральная простая алгебра размерности $\dim_{\mathbb{K}} A_n = n^2$ над числовым полем $\mathbb{K}$; тогда $A_n = M_l(D)$, где D — некоторое тело над полем $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} D = m^2$ и $n = lm$. Пусть $A_{lm} \sim B_{tu}$, где $(lm, tu) = 1$, $B_{tu} = M_t(D')$, $\dim_{\mathbb{K}} D' = u^2$ (знак « $\sim$ » здесь обозначает эквивалентность Брауэра центральных простых алгебр A_{lm} и B_{tu}). Из теории группы Брауэра (см. [5]) известно, что тогда $D = D' = \mathbb{K}$, $A_{lm} = M_l(\mathbb{K})$, $B_{tu} = M_t(\mathbb{K})$, т.е. центральная простая алгебра над $\mathbb{K}$ является «плавающей» если и только если она является матричной алгеброй над $\mathbb{K}$.

Следовательно, классы эквивалентности ПРА соответствуют тривиальному элементу группы Брауэра — классу эквивалентности матричных алгебр над полем (по крайней мере в случае числового поля).

2.2. Гомотопический функтор, связанный с расслоениями алгебр. В этом пункте будет показано (замечания 2.13 и 2.14), что матричный грассманиан $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}$, отвечающий ПРА, со-

держится в полном матричном грассманиане $\varinjlim_{k,l} \text{Gr}_{k,kl} \simeq \text{BPU}$ в качестве «целочисленной части»

(прямой предел берется по всем парам $\{k, l\}$ не обязательно взаимно простых чисел). С этой точки зрения условие $(k, l) = 1$ в определении ПРА можно рассматривать как способ борьбы с локализацией классифицирующего пространства.

Пусть X — конечный CW -комплекс, $k \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Расслоения A_{k^m} над X со слоями $M_{k^m}(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$, относительно операции $\otimes$ образуют полугруппу с единицей (единицей служит тривиальное одномерное расслоение со слоем $M_{k^0}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$). Каждое такое расслоение A_{k^m} имеет стабильно обратное расслоение со слоем $M_{k^n}(\mathbb{C})$ для некоторого n . Действительно, поскольку, согласно предложению 1.17, всякое A_{k^m} является подрасслоением в тривиальном расслоении $\widetilde{M}_{k^N}$ для достаточно большого N , достаточно взять дополнительное к нему подрасслоение в тривиальном расслоении (объединение централизаторов слоев).

На множестве расслоений рассматриваемого вида (для фиксированного k) введем следующее отношение эквивалентности:

$$A_{k^m} \sim B_{k^n} \Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{N} \text{ такие, что } A_{k^m} \otimes \widetilde{M}_{k^r} \cong B_{k^n} \otimes \widetilde{M}_{k^s} \quad (2.5)$$

(здесь $\widetilde{M}_{k^r}, \widetilde{M}_{k^s}$ — тривиальные расслоения, $m + r = n + s$). Очевидно что операция $\otimes$ индуцирует структуру группы на множестве классов эквивалентности расслоений со слоями $M_{k^m}(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$; при этом единичным элементом будет класс тривиального расслоения, обратным к данному — класс дополнительного расслоения и т. д. Обозначим эту группу через $\widetilde{\text{AB}}^k(X)$.

Рассмотрим прямой предел $\varinjlim_n \text{PU}(k^n)$ относительно следующих отображений:

$$\text{PU}(k^n) \hookrightarrow \text{PU}(k^{n+1}), \quad A \mapsto A \otimes E_k.$$

Обозначим его $\mathcal{PU}(k)$. Пусть $\text{BPU}(k) = \varinjlim_n \text{BPU}(k^n)$ — соответствующее классифицирующее пространство.

Предложение 2.12. Пусть X — компактное пространство. Тогда $\widetilde{\text{AB}}^k(X) = [X, \text{BPU}(k)]$ — изоморфизм абелевых групп. (Структура H -пространства на $\text{BPU}(k)$ индуцирована операцией $\otimes$ на расслоениях).

Доказательство очевидно.

Вычислим гомотопические группы $\text{BPU}(k)$ (или, эквивалентно, $\widetilde{\text{AB}}^k(S^n)$, $n > 0$). Для этого опишем вначале центр групп $\text{SU}(k^n)$. Ясно, что его элементы — скалярные матрицы λE_{k^n} с определителем 1, т.е. $\lambda^{k^n} = 1$. Поэтому центр $\text{SU}(k^n)$ канонически изоморфен группе μ_{k^n} корней степени k^n из 1. При отображении

$$\text{SU}(k^n) \xrightarrow{\cdots \otimes E_k} \text{SU}(k^{n+1}), \quad A \mapsto A \otimes E_k,$$

центр μ_{k^n} группы $SU(k^n)$ отображается в центр $\mu_{k^{n+1}}$ группы $SU(k^{n+1})$, как и положено корням из 1. Это следует из формулы $\det(A \otimes E_k) = (\det A)^k$. Мы имеем отображение накрытий

$$\begin{array}{ccccc} & \mu_{k^{n+1}} & \longrightarrow & SU(k^{n+1}) & \\ & \nearrow & & \downarrow & \\ \mu_{k^n} & \longrightarrow & SU(k^n) & \longrightarrow & PU(k^{n+1}), \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & PU(k^n) & & \end{array}$$

из которого, с учетом односвязности $SU(k^n)$, вытекает, что

$$\pi_1(\varinjlim_n PU(k^n)) = \pi_1(PU(k)) = \varinjlim_n \mu_{k^n} \cong \varinjlim_n \mathbb{Z}/k^n \mathbb{Z}.$$

Остальные гомотопические группы $PU(k)$ вычисляются совсем просто. Результат таков:

$$\pi_r(PU(k)) = \begin{cases} \varinjlim_n \mu_{k^n} & \text{при } r = 1, \\ \mathbb{Z} \left[\frac{1}{k} \right] & \text{при } r = 2s + 1, s \geq 1, \\ 0 & \text{при четном } r. \end{cases}$$

Группы $\pi_r(BPU(k))$ получаются сдвигом на 1. Таким образом,

$$\widetilde{AB}^k(S^2) = \varinjlim_n \mu_{k^n}; \quad \widetilde{AB}^k(S^{2r}) = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{k} \right] \quad \text{при } r > 1; \quad \widetilde{AB}^k(S^{2r+1}) = 0.$$

Замечание 2.13. Для каждого натурального $k \geq 2$ имеем отображение $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl} \rightarrow BPU(k)$, являющееся прямым пределом

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \psi_{k,2} \\ Gr_{k^2,(kl)^2} & \xrightarrow{\bar{\lambda}_{k^2}} & BPU(k^2) \\ & \uparrow & \uparrow \psi_k \\ Gr_{k,kl} & \xrightarrow{\bar{\lambda}_k} & BPU(k) \end{array}$$

(ср. доказательство теоремы 2.10, а также предложение 2.1), где $\bar{\lambda}_k$ — классифицирующее отображение основы $\mathcal{A}_k$ канонического ПРА $(\mathcal{A}_k, \mu, \widetilde{\mathcal{M}}_{kl})$ как $PU(k)$ -расслоения (которое является композицией $\lambda_k : Gr_{k,kl} \rightarrow BSU(k)$ и отображения $BSU(k) \rightarrow BPU(k)$, индуцированного факторизацией по центру $SU(k) \rightarrow PU(k)$). Опишем функтор, индуцируемый данным отображением на расслоениях. Согласно следствию 2.4, для данного класса ПРА над конечным CW -комплексом X существует представитель вида $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{(kl)^m})$, где m достаточно велико. Применим теперь функтор забывания μ , сопоставляющий данному ПРА $(A_{k^m}, \mu, \widetilde{M}_{(kl)^m})$ локально-тривиальное расслоение A_{k^m} . Легко видеть, что это определяет морфизм функторов $\widetilde{AB}^1(X) \rightarrow \widetilde{AB}^k(X)$ (в частности, стабильно эквивалентные ПРА (определение 2.2) отображаются в стабильно эквивалентные расслоения в смысле отношения эквивалентности (2.5)). Очевидно, что ядром этого отображения является подгруппа k -кручения в $\widetilde{AB}^1(X)$ (в частности, отношение стабильной эквивалентности на ПРА (определение 2.2) тоньше, чем отношение 2.5).

Имеем морфизмы функторов

$$\widetilde{AB}^k(\dots) \longrightarrow \widetilde{AB}^{kl}(\dots) \longleftarrow \widetilde{AB}^l(\dots),$$

индуцированные отображениями пространств

$$BPU(k) \longrightarrow BPU(kl) \longleftarrow BPU(l).$$

Обозначим через VPU соответствующий прямой предел $\varinjlim_k VPU(k)$. Очевидно, что $\pi_2(VPU) = \bigcup_k \mu(k)$ — группа корней конечной степени из 1, $\pi_{2s}(VPU) \cong \mathbb{Q}$ при $s > 1$, нечетномерные гомотопические группы пространства VPU равны 0.

Пусть $\widetilde{AB}(\dots) = \varinjlim_k \widetilde{AB}^k(\dots)$; тогда $\widetilde{AB}(\dots) = [\dots, VPU]$, т.е. пространство VPU представляет группу классов эквивалентности расслоений k -алгебр для произвольного $k \in \mathbb{N}$ (напомним, что эквивалентность следующая: $A_k \sim A_l \iff \exists m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong A_l \otimes \widetilde{M}_n$).

Замечание 2.14. Из замечания 2.13 следует, что пространство $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl}$ содержится в пространстве VPU в качестве «целочисленной части», при этом вложению $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl} \hookrightarrow VPU$ (которое есть композиция отображения в локализацию $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl} \hookrightarrow BSU$ по всем простым числам с канонической проекцией $BSU \rightarrow VPU$) отвечает морфизм функторов $\widetilde{AB}^1(\dots) \rightarrow \widetilde{AB}(\dots)$, а ядром отображения $\widetilde{AB}^1(X) \rightarrow \widetilde{AB}(X)$ является подгруппа кручения в $\widetilde{AB}^1(X)$.

Заметим, что отношение эквивалентности (2.5) не сохраняет размерности. Следовательно, оно подобно тому, которое приводит к приведенной K -теории; вместо него можно рассматривать отношение эквивалентности, аналогичное используемому при построении неприведенной K -теории:

$$A_{k^m} \sim B_{k^n} \iff m = n \text{ и } \exists l \text{ такое, что } A_{k^m} \otimes \widetilde{M}_{k^l} \cong B_{k^m} \otimes \widetilde{M}_{k^l}.$$

Обозначим соответствующий функтор $\widetilde{AB}^k(\dots)$. Очевидно, что в этом случае классифицирующим пространством является $\widetilde{AB}^k(\text{pt}) \times VPU(k)$. Группу $\widetilde{AB}(\text{pt})$ нетрудно описать. Рассмотрим моноид $\mathbb{N}$ с операцией умножения; его группа Гротендика (в другой терминологии симметризация) есть мультипликативная группа положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+^*$. Существует изоморфизм групп $\mathbb{Q}_+^* \cong \bigoplus_{P \text{ простое}} \mathbb{Z}$ (сумма по всем простым числам), задаваемый формулой

$$\mathbb{Q}_+^* \ni q = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot \dots \mapsto (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \bigoplus_{P \text{ простое}} \mathbb{Z}.$$

Группа $\widetilde{AB}^k(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}$ отождествляется (при морфизме функторов $\widetilde{AB}^k(\dots) \rightarrow \widetilde{AB}(\dots)$) с мультипликативной подгруппой, порожденной k в $\mathbb{Q}_+^*$.

2.3. Связь функтора $\widetilde{AB}^1$ с $\widehat{KSU}$ -теорией. Пусть X — конечный CW -комплекс, $\dim X \leq 2k$, ξ_k — k -мерное комплексное $SU(k)$ -расслоение над X . Рассмотрим пару

$$\xi_k \otimes [k] - [k(k-1)], \quad (\xi_k \oplus [m-k]) \otimes [m] - [m(m-1)]$$

(здесь $[n]$ — тривиальное расслоение ранга n над X) виртуальных расслоений виртуальных размерностей k и m соответственно, где $(k, m) = 1$ и $m > k$. Обозначим через $\xi_k^\bullet$, $(\xi_k \oplus [m-k])^\bullet$ геометрические представители классов стабильной эквивалентности этих расслоений размерностей k и m соответственно, которые существуют и единственны с точностью до изоморфизма в силу условия на $\dim X$.

Предложение 2.15. $(\text{End } \xi_k^\bullet) \otimes \widetilde{M}_m \cong (\text{End}(\xi_k \oplus [m-k])^\bullet) \otimes \widetilde{M}_k$.

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что имеет место следующий изоморфизм: $\xi_k^\bullet \otimes [m] \cong (\xi_k \oplus [m-k])^\bullet \otimes [k]$. $\square$

Используя лемму 2.7, получаем, что по паре $\xi_k^\bullet$, $(\xi_k \oplus [m-k])^\bullet$ при $(k, m) = 1$ однозначно восстанавливается некоторый класс стабильной эквивалентности ПРА над X . Легко видеть, что он не зависит от выбора представителя $\widehat{KSU}$ -эквивалентности расслоения ξ_k . Поэтому имеет место

Предложение 2.16. *Корректно определено отображение множеств*

$$\phi : \widetilde{\text{KSU}}(X) \longrightarrow \widetilde{\text{AB}}^1(X), \quad \xi_k \longmapsto (A_k, B_m),$$

где $A_k = \text{End } \xi_k^\bullet$, $B_m = \text{End}(\xi_k \oplus [m - k])^\bullet$, $(k, m) = 1$, $\dim X \leq 2 \min\{k, m\}$.

Для ϕ нетрудно построить обратное отображение $\psi : \widetilde{\text{AB}}^1(X) \longrightarrow \widetilde{\text{KSU}}(X)$. Действительно, пусть (ξ_k, ξ_m) — пара, состоящая из $\text{SU}(k)$ и $\text{SU}(m)$ -расслоений $((k, m) = 1)$, причем $\xi_k \otimes [m] \cong \xi_m \otimes [k]$. Возьмем l и n такие, что $kl + mn = 1$. Тогда в группе $\text{KSU}(X)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \xi_k &= kl\xi_k + mn\xi_k = kl\xi_k + kn\xi_m = k(l\xi_k + n\xi_m), \\ \xi_m &= m(l\xi_k + n\xi_m) \end{aligned}$$

(здесь классы стабильной эквивалентности расслоений обозначены теми же символами, что и их представители), т.е. $\xi_k = k\eta$, $\xi_m = m\eta$ для одномерного виртуального SU -расслоения η ($\eta = l\xi_k + n\xi_m$). Очевидно, что сопоставление $(A_k, B_m) \longmapsto \eta$ (где $A_k = \text{End } \xi_k$, $B_m = \text{End } \xi_m$) определяет требуемое отображение ψ , обратное ϕ . Тем самым мы снова получили доказательство гомотопической эквивалентности $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}$ и BSU .

Обозначим через $\text{BSU}_\otimes$ пространство BSU со структурой H -пространства, индуцированной тензорным произведением виртуальных SU -расслоений виртуальной размерности 1 (см. [1]). Отметим, что согласно [8], оно является даже бесконечнократным пространством петель.

Теорема 2.17. *H -пространство $\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}$ с операцией, индуцированной тензорным произведением ПРА, изоморфно $\text{BSU}_\otimes$ как H -пространство.*

Доказательство. Пусть ξ и η — виртуальные SU -расслоения виртуальной размерности 1 над X , ξ_k, ξ_m — геометрические представители классов стабильной эквивалентности расслоений $k\xi, m\xi$ соответственно (в предположении что числа k и m достаточно велики); аналогично определим η_l и η_n . Предположим, что $(kl, mn) = 1$. Тогда очевидно, что $\xi_k \otimes \eta_l$ — геометрический представитель (размерности kl) класса KSU -эквивалентности расслоения $kl\xi \otimes \eta$; аналогично для пары $\xi_m \otimes \eta_n$ и $mn\xi \otimes \eta$. Легко видеть, что

$$\text{End}(\xi_k \otimes \eta_l) \otimes \widetilde{M}_{mn} \cong \text{End}(\xi_m \otimes \eta_n) \otimes \widetilde{M}_{kl};$$

согласно лемме 2.7, по этим данным однозначно восстанавливается некоторый класс стабильной эквивалентности ПРА. Тот факт, что он равен произведению классов, отвечающих парам $\text{End } \xi_k$, $\text{End } \xi_m$ и $\text{End } \eta_l$, $\text{End } \eta_n$, следует снова из леммы 2.7. $\square$

Таким образом, группа $\widetilde{\text{AB}}^1(X)$ изоморфна мультипликативной группе (в терминологии теории формальных групп) кольца $\widetilde{\text{KSU}}(X)$, т.е. группе (так как X — конечный CW -комплекс) с операцией $\xi \circ \eta = \xi + \eta + \xi\eta$ ($\xi, \eta \in \widetilde{\text{KSU}}(X)$).

С помощью ПРА структура H -группы $\text{BSU}_\otimes$ может быть описана в более геометрических терминах. Рассмотрим, например, нахождение обратного элемента. Напомним, что для произвольного ПРА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ можно определить дополнительное ПРА $(B_l, \nu, \widetilde{M}_{kl})$, основа B_l которого — объединение централизаторов слоев подрасслоения A_k в $\widetilde{M}_{kl}$, а ν — соответствующее вложение. Класс эквивалентности дополнительного ПРА является обратным элементом для класса исходного ПРА. Это показывает, что структура матричной алгебры в слоях изучаемых расслоений играет ту же роль, что и метрика в слоях векторных расслоений, рассматриваемых с операцией $\oplus$ (напомним, что класс стабильно обратного расслоения можно получить, вложив векторное расслоение в тривиальное и взяв там ортогональное дополнение к его слоям).

Воспользуемся теперь установленной связью между функторами $\widetilde{\text{AB}}^1$ и $\widetilde{\text{KSU}}$ для изучения характеристических классов плавающих расслоений алгебр.

Определение 2.18. Классами Чженя $\tilde{c}_i((A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}))$ плавающего расслоений алгебр $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ будем называть «обычные» классы Чженя произвольного SU-расслоения из класса стабильной эквивалентности, отвечающего классу данного ПРА, т.е. SU(k)-расслоения ξ_k , такого что $A_k \cong \text{End } \xi_k^\bullet$, $B_m \cong \text{End}(\xi_k \oplus [m - k])^\bullet$, где $(k, m) = 1$ и ПРА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ стабильно эквивалентны. Аналогичным образом определяются классы Ньютона (отвечающие симметрическим многочленам — суммам степеней) $\tilde{s}_i((A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}))$ при $i \geq 1$. Кроме того, положим $\tilde{s}_0(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}) = 1$ для любого ПРА (отметим, что поскольку первый класс Чженя для SU-расслоений равен нулю, то же верно и для ПРА; аналогичное утверждение верно и для первого класса Ньютона).

Мы будем писать $\tilde{c}_i(A_k)$ вместо $\tilde{c}_i((A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl}))$ и аналогично для классов Ньютона.

Введенные характеристические классы по своему определению корректно определены на классах эквивалентности ПРА. Таким образом, классы $\tilde{c}_i$ и $\tilde{s}_i$ являются стабильными характеристическими классами ПРА. Очевидно, что

$$H^*\left(\varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,kl}; \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \dots].$$

Замечание 2.19. К данному выше определению классов Ньютона (в частности, к $\tilde{s}_0(A_k) = 1$) можно прийти следующим образом. Пусть, как и в начале этого параграфа, $\xi_k^\bullet$ — SU(k)-расслоение такое, что $\text{End } \xi_k^\bullet \cong A_k$. Тогда для l , удовлетворяющего условиям $(k, l) = 1$ и $2l \geq \dim X$, существует SU(l)-расслоение $\eta_l^\bullet$, для которого $\xi_k^\bullet \otimes [l] \cong \eta_l^\bullet \otimes [k]$ (ср. лемму 2.7). Тогда (здесь s_i — «обычные» классы Ньютона) $s_i(\xi_k^\bullet \otimes [l]) = s_i(\eta_l^\bullet \otimes [k])$, или $ls_i(\xi_k^\bullet) = ks_i(\eta_l^\bullet)$. Отсюда видно, что (далее мы пользуемся отсутствием кручения в когомологиях классифицирующего пространства)

$$\xi_k^\bullet \mapsto \frac{s_i(\xi_k^\bullet)}{k} = \tilde{s}_i(\text{End } \xi_k^\bullet) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z}), \quad i \geq 0,$$

является корректно определенным характеристическим классом на множестве классов эквивалентности ПРА и совпадает с введенным выше (напомним, что согласно классическому определению, $s_0(\xi_k^\bullet) = \dim \xi_k^\bullet = k$).

Замечание 2.20. Из определения 2.18 следует, что формулы, связывающие классы Чженя $\tilde{c}_i$ и Ньютона $\tilde{s}_i$ те же, что и в классическом случае:

$$s_k - s_{k-1}c_1 + \dots + (-1)^k kc_k = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.6)$$

Опишем теперь, как получается формула, связывающая характеристические классы тензорного произведения двух ПРА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ с классами сомножителей (над CW -комплексом X , $\dim X \leq 2 \min\{k, l, m, n\}$). Пусть $\xi_k^\bullet, \eta_m^\bullet$ — SU-расслоения такие, что $A_k \cong \text{End } \xi_k^\bullet$ и $B_m \cong \text{End } \eta_m^\bullet$. Согласно доказанному, $\xi_k^\bullet$ и $\eta_m^\bullet$ — геометрические представители классов эквивалентности расслоений $(\xi_k \otimes [k] - [k(k-1)])$ и $(\eta_m \otimes [m] - [m(m-1)])$ для некоторых SU-расслоений ξ_k, η_m . Обозначим классы Ньютона расслоений ξ_k, η_m через $(k, s_2, s_3, \dots)$ и $(m, s'_2, s'_3, \dots)$ соответственно. Тогда нетрудно видеть, что расслоения $\xi_k^\bullet, \eta_m^\bullet$ имеют следующие классы Ньютона: $(k, ks_2, ks_3, \dots)$ и $(m, ms'_2, ms'_3, \dots)$. Напомним [4], что для векторных расслоений ξ, η существует формула

$$s_r(\xi \otimes \eta) = \sum_{\substack{i+j=r \\ i,j \geq 0}} \frac{r!}{i!j!} s_i(\xi) s_j(\eta), \quad (2.7)$$

где $s_0(\xi) = \dim \xi$. Тензорное произведение расслоений вида $\xi_k^\bullet, \eta_m^\bullet$ является расслоением того же вида; следовательно,

$$\xi_k^\bullet \otimes \eta_m^\bullet = \zeta_{km}^\bullet \cong \zeta_{km} \otimes [km] - [km(km-1)]$$

для некоторого SU(km)-расслоения ζ_{km} . Обозначим $s_r'' = s_r(\zeta_{km})$. Тогда, используя (2.7), при $r \geq 1$ получаем:

$$s_r'' = s_r + \sum_{\substack{i+j=r \\ i,j \geq 1}} \frac{r!}{i!j!} s_i s'_j + s'_r,$$

где использован факт отсутствия кручения в $H^*(\varinjlim_{(k,l)=1} \mathrm{Gr}_{k,kl}; \mathbb{Z}) = H^*(\mathrm{BSU}; \mathbb{Z})$. Следовательно,

$$\tilde{s}_r(A_k \otimes B_m) = \tilde{s}_r(A_k) + \sum_{\substack{i+j=r \\ i,j \geq 0}} \frac{r!}{i!j!} \tilde{s}_i(A_k) \tilde{s}_j(B_m) + \tilde{s}_r(B_m) = \sum_{\substack{i+j=r \\ i,j \geq 0}} \frac{r!}{i!j!} \tilde{s}_i(A_k) \tilde{s}_j(B_m),$$

поскольку $\tilde{s}_0(A_k) = 1 = \tilde{s}_0(B_m)$ (последнее однородное выражение для $\tilde{s}_r$ верно уже для произвольного $r \geq 0$).

Используя формулы Ньютона (2.6) и замечание 2.20, можно получить аналогичные формулы для классов Чженя. Например,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2(A_k \otimes B_m) &= \tilde{c}_2(A_k) + \tilde{c}_2(B_m), \\ \tilde{c}_3(A_k \otimes B_m) &= \tilde{c}_3(A_k) + \tilde{c}_3(B_m), \\ \tilde{c}_4(A_k \otimes B_m) &= \tilde{c}_4(A_k) - 5\tilde{c}_2(A_k)\tilde{c}_2(B_m) + \tilde{c}_4(B_m), \\ \tilde{c}_5(A_k \otimes B_m) &= \tilde{c}_5(A_k) - 11\tilde{c}_3(A_k)\tilde{c}_2(B_m) - 11\tilde{c}_2(A_k)\tilde{c}_3(B_m) + \tilde{c}_5(B_m), \end{aligned}$$

и т. д.

Из последних формул можно также получить выражения для классов Чженя расслоения, стабильно обратного к данному ПРА.

Отметим, что данная работа является значительно более полным изложением рассматриваемой теории по сравнению со статьями [2, 3].

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору Е. В. Троицкому за постоянное внимание к работе и профессору А. С. Мищенко за полезные обсуждения результатов. Также автор благодарит Институт Макса Планка (Бонн), где настоящая работа была завершена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамс Дж. Ф. Бесконечнократные пространства петель. — М.: Мир, 1982.
2. Ершов А. В. О гомотопических свойствах расслоений со структурной группой автоморфизмов матричных алгебр// Вестн. Моск. ун-та, сер. мат., мех. — 1999. — 6. — С. 56–58.
3. Ершов А. В. О K -теории расслоений на матричные алгебры// Усп. мат. наук. — 2000. — 55, № 2. — С. 137–138.
4. Каруби М. K -теория. Введение. — М.: Мир, 1981.
5. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.
6. Постников М. М. Локализация топологических пространств// Усп. мат. наук. — 1977. — 32, № 6. — С. 117–181.
7. Сулливан Д. Геометрическая топология. — М.: Мир, 1975.
8. Segal G. Categories and cohomology theories// Topology. — 1974. — 13. — С. 293–312.

D_∞ -ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И A_∞ -СТРУКТУРЫ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

© 2003 г. С. В. ЛАПИН

СОДЕРЖАНИЕ

1. Дифференциальные возмущения дифференциальных модулей	57
2. D_∞ -Дифференциалы и D_∞ -модули	61
3. Дифференциальные возмущения дифференциальных (ко)алгебр	66
4. D_∞ -(Ко)алгебры	70
5. D_∞ -Модули и спектральные последовательности	72
6. $(DA)_\infty$ -(Ко)алгебры	74
7. $(DA)_\infty$ -(Ко)алгебры и спектральные последовательности	80
8. D_∞ -(Ко)модули над D_∞ -(ко)алгебрами	82
9. $(DA)_\infty$ -(Ко)модули над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами	84
10. $(DA)_\infty$ -(Ко)модули над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами и спектральные последовательности	88
Список литературы	90

Дж. Сташефф [31] при изучении гомотопических свойств топологических моноидов ввел понятие A_∞ -пространства, которое является гомотопическим аналогом топологического пространства с непрерывным ассоциативным умножением. Основное свойство структуры A_∞ -пространства заключается в том, что на любом топологическом пространстве, гомотопически эквивалентном A_∞ -пространству, можно ввести структуру A_∞ -пространства. Начиная с этого результата Сташеффа интерес к изучению и поиску гомотопически инвариантных алгебраических структур на топологических пространствах неуклонно растет. На этом пути в работе Дж. Мэй [28] сформулировал такие понятия как топологическая E_∞ -операда и E_∞ -пространство, которые являются в настоящее время основными средствами изучения гомотопических свойств бесконечнократных пространств петель.

Идея рассматривать гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах оказалась эффективной и в дифференциальной гомологической алгебре. В указанной выше работе [31] Дж. Сташеффом было введено понятие дифференциальной A_∞ -алгебры, которое является гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной дифференциальной алгебры. В [6] В. А. Смирновым было введено понятие дифференциальной E_∞ -алгебры, являющееся гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной и коммутативной дифференциальной алгебры. В последнее время методы теории дифференциальных A_∞ -алгебр и E_∞ -алгебр стали ключевыми инструментами исследования предельного члена спектральной последовательности Адамса и гомотопических групп топологических пространств [7–12].

С другой стороны, в [19] при изучении гомотопических свойств цепных комплексов расслоений В. Гугенхеймом было введено понятие дифференциального возмущения цепного комплекса. Основное свойство дифференциальных возмущений цепных комплексов заключается в том, что если к дифференциалу цепного комплекса применить дифференциальное возмущение, то на гомологиях этого цепного комплекса при выполнении условий стабилизации возникает некоторый дифференциал, индуцированный этим возмущением. Понятие дифференциального возмущения цепного комплекса позволило по-новому взглянуть на цепные комплексы расслоений и унифицировать методы решения проблемы прямого выражения гомологий пространства расслоения через гомологии базы и слоя этого расслоения [1, 15–18, 24, 25, 30]. Далее в работах В. Гугенхейма, Л. Ламбе и

Дж. Сташеффа [20–23, 27] было введено понятие дифференциального возмущения ассоциативной дифференциальной алгебры и установлена связь между дифференциальными возмущениями и гомотопической инвариантностью структуры дифференциальной A_∞ -алгебры.

Настоящая работа посвящена введению понятия D_∞ -дифференциала и применению этого понятия к изучению структуры дифференциальной A_∞ -алгебры на мультипликативных спектральных последовательностях. Понятие D_∞ -дифференциала является, с одной стороны, гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциала цепного комплекса, а с другой стороны — обобщением понятия дифференциального возмущения цепного комплекса в нестабильной ситуации. В предлагаемой работе сделан обзор основных понятий, конструкций и результатов из статей [2–4], в которых доказана гомотопическая инвариантность D_∞ -дифференциалов, проведено сравнение D_∞ -дифференциалов с дифференциальными возмущениями цепных комплексов, а также установлена связь D_∞ -дифференциалов с дифференциалами мультипликативных спектральных последовательностей. В качестве следствия указанной связи описывается предложенный в [3] метод построения структуры A_∞ -коалгебры на коалгебре Милнора, двойственной к алгебре Стиррода, непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса. Отметим, что впервые эта структура была построена В. А. Смирновым в [9] при помощи метода вторичных операций в гомологиях операды E . Далее в обзоре описывается предложенный в [4] метод построения структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях произвольного спектра. Главным свойством этой структуры является то, что гомологии ко- B -конструкции A_∞ -комодуля гомологий произвольного спектра над A_∞ -коалгеброй Милнора изоморфны предельному члену спектральной последовательности Адамса для вычисления p -примарных компонент гомотопических групп этого спектра.

Во всех разделах этой работы все модули и отображения модулей являются, если не оговорены дополнительные требования, K -модулями и K -линейными отображениями K -модулей соответственно, где K — произвольное коммутативное кольцо с единицей.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ

В этом разделе рассматриваются определения, конструкции и утверждения, связанные с понятием дифференциального возмущения дифференциального модуля [19–23, 27].

Напомним сначала, что дифференциальным модулем (X, d) называется произвольный модуль X , снабженный отображением модулей $d : X \rightarrow X$, называемым дифференциалом модуля X , для которого выполнено условие $d^2 = 0$.

Отображением дифференциальных модулей $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ называется отображение модулей $f : X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $df = fd$.

Дифференциальной гомотопией между отображениями $f, g : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение модулей $h : X \rightarrow Y$, для которого выполняется равенство

$$dh + hd = f - g.$$

При помощи понятия дифференциальной гомотопии между отображениями дифференциальных модулей стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности дифференциальных модулей.

Определение 1.1. Дифференциальным возмущением заданного дифференциального модуля (X, d) называется отображение модулей $t : X \rightarrow X$, для которого пара $(X, d + t)$ является дифференциальным модулем, т.е. для отображения $d + t : X \rightarrow X$ выполнено условие $(d + t)^2 = 0$.

Легко видеть, что каждое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) удовлетворяет условию $dt + td = -t^2$.

Обсудим основные гомотопические свойства дифференциальных возмущений дифференциальных модулей. Пусть заданы произвольные дифференциальные модули (X, d) и (Y, d) . Кроме того, пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\xi : Y \rightarrow X$, $\eta : X \rightarrow Y$ и дифференциальная гомотопия $h : X \rightarrow X$, для которых выполнены следующие условия:

$$\eta\xi = 1_Y, \quad dh + hd = \xi\eta - 1_X.$$

Рассмотренную ситуацию обычно записывают в виде $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и называют *сильной деформационной ретракцией дифференциальных модулей*. При выполнении дополнительных условий

$$\eta h = 0, \quad h\xi = 0, \quad hh = 0$$

сильную деформационную ретракцию $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ называют *SDR-ситуацией дифференциальных модулей*.

Итак, пусть имеется SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и задано дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) . Рассмотрим свободную ассоциативную K -алгебру A , порожденную формальными переменными h, t, d . Ясно, что элементами алгебры A являются многочлены $\alpha(h, t, d)$ от некоммутирующих переменных h, t, d . Введем на алгебре A убывающую фильтрацию

$$A = A^0 \supset A^1 \supset \dots \supset A^n \supset A^{n+1} \supset \dots,$$

полагая $A^n = \{\alpha(h, t, d) \in A \mid \deg_t \alpha(h, t, d) \geq n\}$, где $\deg_t \alpha(h, t, d)$ — степень многочлена $\alpha(h, t, d)$ по переменной t . Для модулей X и Y рассмотрим модули $\text{Hom}_K(X, X)$, $\text{Hom}_K(X, Y)$ и $\text{Hom}_K(Y, X)$. Операция композиции отображений задает на $\text{Hom}_K(X, X)$ структуру ассоциативной K -алгебры. Определим гомоморфизм K -модульных алгебр $P : A \rightarrow \text{Hom}_K(X, X)$, полагая на образующих

$$P(h) = h : X \rightarrow X, \quad P(t) = t : X \rightarrow X, \quad P(d) = d : X \rightarrow X.$$

Введенная убывающая фильтрация алгебры A индуцирует убывающую фильтрацию

$$I = I^0 \supset I^1 \supset \dots \supset I^n \supset I^{n+1} \supset \dots$$

K -алгебры $I = \text{Im}(P : A \rightarrow \text{Hom}_K(X, X))$, где $I^n = \text{Im}(P : A^n \rightarrow \text{Hom}_K(X, X))$. Отметим, что $dt + td \in I^2$, поскольку $dt + td = -t^2$. Наряду с алгеброй I рассмотрим модули

$$\eta \circ I \subset \text{Hom}_K(X, Y), \quad I \circ \xi \subset \text{Hom}_K(Y, X),$$

далее обозначаемые также через I , и введем на них убывающие фильтрации, полагая соответственно $I^n = \eta \circ I^n$ и $I^n = I^n \circ \xi$. Для элементов из I будем употреблять запись $\alpha \equiv \beta \pmod{I^n}$, если $\alpha - \beta \in I^n$.

Рассмотрим в алгебре I элементы $t_i : X \rightarrow X$, $i \geq 1$, определяемые формулами

$$t_1 = t, \quad t_{i+1} = (th)^i t, \quad i \geq 1.$$

Поведение дифференциальных возмущений в условиях, определяемых SDR-ситуацией дифференциальных модулей, описывается в следующем утверждении.

Теорема 1.1. Пусть заданы произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$$

и некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$, т.е. введен новый дифференциал $D = d + t : X \rightarrow X$. Тогда для отображений

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} &= \partial_n + \eta t_n \xi = d + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi : Y \rightarrow Y, \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + h t_n \xi = \xi + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi : Y \rightarrow X, \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \eta t_n h = \eta + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h : X \rightarrow Y, \\ h_{n+1} &= h_n + h t_n h = h + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h : X \rightarrow X \end{aligned} \tag{1.1}$$

выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \partial_n \partial_n &\equiv 0 \pmod{I^n}, & D\xi_n &\equiv \xi_n \partial_n \pmod{I^n}, & \partial_n \eta_n &\equiv \eta_n D \pmod{I^n}, \\ Dh_n + h_n D &\equiv \xi_n \eta_n - 1_X \pmod{I^n}, \\ \eta_n \xi_n &= 1_Y, & \eta_n h_n &= 0, & h_n \xi_n &= 0, & h_n h_n &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, если имеется SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных модулей и задано некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$, т.е. введен новый дифференциал $D = d + t : X \rightarrow X$, то для каждого $n \geq 1$ указанное дифференциальное возмущение индуцирует ситуацию $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n)$, которую будем называть *SDR-ситуацией по модулю I^n* и обозначать

$$(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \pmod{I^n}.$$

В частности, дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) для каждого целого числа $n \geq 1$ индуцирует отображение

$$\tilde{t}(n) = \eta(t_1 + \dots + t_n)\xi : Y \rightarrow Y,$$

которое, вообще говоря, не является настоящим дифференциальным возмущением дифференциального модуля (Y, d) , а является для (Y, d) только дифференциальным возмущением по модулю I^n , т.е. выполнено условие

$$(d + \tilde{t}(n))^2 \equiv 0 \pmod{I^n}.$$

Формулы (1.1) удобно представлять себе как машину для выработки из заданной SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и заданного дифференциального возмущения t дифференциального модуля (X, d) последовательности SDR-ситуаций $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \pmod{I^n}$ и, в частности, последовательности дифференциальных возмущений $\tilde{t}(n)$ по модулю I^n . Эту машину далее будем называть машиной дифференциальных возмущений или, более кратко, просто машиной возмущений.

Рассмотрим один важный пример применения машины возмущений. Пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ — гомологический модуль произвольного дифференциального модуля (X, d) , заданного над полем. Если рассматривать модуль $H(X)$ как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим SDR-ситуацию дифференциальных модулей

$$(\eta : X \rightrightarrows H(X) : \xi, h).$$

Пусть теперь задано произвольное дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) . Применяя к этому дифференциальному возмущению и к SDR-ситуации

$$(\eta : X \rightrightarrows H(X) : \xi, h)$$

машину возмущений, получим последовательность SDR-ситуаций

$$(\eta_n : X \rightrightarrows H(X) : \xi_n, h) \pmod{I^n}.$$

В частности, для каждого $n \geq 1$ определен эндоморфизм

$$\partial_n = \tilde{t}(n) : H(X) \rightarrow H(X),$$

удовлетворяющий условию $\partial_n \partial_n \equiv 0 \pmod{I^n}$. Эндоморфизм $\partial_n = \tilde{t}(n)$, $n \geq 1$, вообще говоря, не является настоящим дифференциалом K -модуля $H(X)$, а является, так сказать, «дифференциалом для $H(X)$ по модулю I^n », т.е. является дифференциалом фактор-модуля $H(X)/I^n(H(X))$.

Отметим, что соотношения $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$, которые должны быть выполнены для SDR-ситуации $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ в условиях теоремы 1.1, не являются ограничительными. В самом деле, если для произвольной сильной деформационной ретракции $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ определить новую гомотопию $h' : X \rightarrow X$ по формуле $h' = h''dh''$, где $h'' = (\xi\eta - 1_X)h(\xi\eta - 1_X)$, то получим дифференциальную SDR-ситуацию $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h')$. Более того, в [26] было показано, что имеется аналог машины возмущений для произвольных взаимно обратных гомотопических эквивалентностей $\eta : X \rightarrow Y$, $\xi : Y \rightarrow X$ дифференциальных модулей.

Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности $\tilde{t}(n)$ дифференциальных возмущений по модулю I^n , $n \geq 1$, вырабатываемых машиной возмущений для заданной SDR-ситуации $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h')$ и заданного дифференциального возмущения $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) .

Говорят, что вырабатываемая машиной возмущений *последовательность дифференциальных SDR-ситуаций* $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \bmod (I^n)$, $n \geq 1$, *сходится*, если для каждого элемента $x \in X$ найдется такой номер $k \geq 1$, зависящий от x , что для всех $n > k$ выполнены равенства

$$\partial_n(x) = \partial_k(x), \quad \eta_n(x) = \eta_k(x), \quad h_n(x) = h_k(x), \quad \xi_n(y) = \xi_k(y),$$

где $y = \eta(x)$. Легко видеть, что если вырабатываемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \bmod (I^n)$ сходится, то определено дифференциальное возмущение

$$\tilde{t}_\infty = \lim_n \tilde{t}(n) = \eta \left(\sum_{i \geq 1} t_i \right) \xi : Y \rightarrow Y,$$

и для дифференциальных модулей $(X, d + t)$ и $(Y, d + \tilde{t}_\infty)$ возникает предельная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta_\infty : X \rightrightarrows Y : \xi_\infty, h_\infty)$, где

$$\xi_\infty = \lim_n \xi_n = \xi + h \left(\sum_{i \geq 1} t_i \right) \xi, \quad \eta_\infty = \lim_n \eta_n = \eta + \eta \left(\sum_{i \geq 1} t_i \right) h, \quad h_\infty = \lim_n h_n = h \left(\sum_{i \geq 1} t_i \right) h.$$

Легко также видеть, что если рассматриваемая последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \bmod (I^n)$ не сходится, то указанные формулы для отображений ξ_∞ , η_∞ , h_∞ , $\tilde{t}_\infty$ теряют смысл и, следовательно, не определяют никакой предельной SDR-ситуации дифференциальных модулей и никакого предельного дифференциального возмущения.

Для того чтобы привести примеры сходимости последовательностей, вырабатываемых машиной возмущений, рассмотрим понятие *дифференциального модуля с фильтрацией*. Напомним, что *возрастающей фильтрацией* $\{X^n\}$ дифференциального модуля (X, d) называется система его подмодулей

$$0 = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \dots \subseteq X, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n = X,$$

для которых выполнено условие сохранения фильтрации $d(X^n) \subseteq X^n$, $n \geq 0$. *Отображением $f : X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ соответственно называется отображение дифференциальных модулей $f : X \rightarrow Y$, для которого выполняется условие сохранения фильтрации $f(X^n) \subseteq Y^n$, $n \geq 0$. Дифференциальной гомотопией между отображениями $f, g : X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ соответственно называется дифференциальная гомотопия $h : X \rightarrow Y$ между отображениями f и g , удовлетворяющая условию сохранения фильтрации $h(X^n) \subseteq Y^n$, $n \geq 0$.*

Пусть заданы дифференциальные модули (X, d) и (Y, d) с возрастающими фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ соответственно и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$. Указанная SDR-ситуация называется *SDR-ситуацией дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями*, если отображения $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$ и $h : X \rightarrow Y$ сохраняют заданные фильтрации.

Теорема 1.2. *Пусть заданы SDR-ситуация дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) , для которого выполнено условие $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 0$. Тогда вырабатываемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \bmod (I^n)$ сходится к предельной SDR-ситуации $(\eta_\infty : X \rightrightarrows Y : \xi_\infty, h_\infty)$ дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями.*

Пусть над произвольным полем задан дифференциальный модуль (X, d) с некоторой возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$. Легко видеть, что система подмодулей $H(X)^n = \text{Im}(H(X^n) \rightarrow H(X))$, $n \geq 0$, где отображение $H(X^n) \rightarrow H(X)$ индуцировано вложением $X^n \subseteq X$, является возрастающей фильтрацией дифференциального модуля $(H(X), d = 0)$. Таким образом, если над полем задан

дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией, то всегда возникает SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows H(X) : \xi, h)$ дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями.

Следствие 1.1. Пусть над произвольным полем задан произвольный дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$ и пусть задано некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) , удовлетворяющее условию $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 0$. Тогда машина дифференциальных возмущений, примененная к SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\eta : X \rightrightarrows H(X) : \xi, h)$, определяет предельную SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\eta_\infty : X \rightrightarrows H(X) : \xi_\infty, h_\infty)$, для которой предельное дифференциальное возмущение $\partial_\infty = \tilde{t}_\infty : H(X) \rightarrow H(X)$ является дифференциалом гомологического модуля $H(X)$.

Другими словами, если над произвольным полем задан дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, то введение на модуле X нового дифференциала $D = d + t$, где $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, влечет за собой появление на гомологическом модуле $H(X)$ дифференциала $\partial_\infty : H(X) \rightarrow H(X)$.

В заключение данного раздела отметим, что все рассмотренные выше понятия, конструкции и утверждения имеют очевидные аналоги для произвольных дифференциальных градуированных модулей.

2. D_∞ -ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И D_∞ -МОДУЛИ

В этом разделе рассматриваются определения, конструкции и результаты из [2], связанные с понятием D_∞ -дифференциала и D_∞ -модуля. Сначала разбирается один пример работы машины дифференциальных возмущений, который послужил мотивацией введения понятия D_∞ -дифференциала. После этого определяются D_∞ -модули над произвольным коммутативным кольцом с единицей и рассматриваются их свойства. Далее формулируется основная теорема данного раздела о гомотопической инвариантности структуры D_∞ -модуля и рассматривается гомологический вариант этой теоремы. В заключение раздела показано, что в случае нестабильных D_∞ -модулей можно рассматривать D_∞ -дифференциалы как обобщенные дифференциальные возмущения дифференциальных модулей.

Пусть заданы произвольные SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных модулей и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) . Применяя к этой SDR-ситуации и дифференциальному возмущению t машину дифференциальных возмущений, получим последовательность $\tilde{t}(n) = \eta(t_1 + \dots + t_n)\xi$ дифференциальных возмущений по модулю I^n . Рассмотрим семейство отображений $\{d^i : Y \rightarrow Y \mid i \geq 0\}$, определяемых формулами $d^0 = d$ и $d^i = \eta(t_i)\xi$ при $i \geq 1$. Ясно, что для отображения ∂_{n+1} из теоремы 1.2 и для отображения $\tilde{t}(n)$ имеют место равенства

$$\partial_{n+1} = d^0 + d^1 + \dots + d^n, \quad \tilde{t}(n) = d^1 + \dots + d^n.$$

Отображения $d^i : Y \rightarrow Y$, $i \geq 0$, для каждого целого числа $n \geq 0$ связаны между собой соотношением

$$\sum_{i+j \leq n} d^i d^j \equiv 0 \pmod{I^n}.$$

Это соотношение можно уточнить, если рассматриваемое дифференциальное возмущение t само является дифференциалом. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.1. Пусть заданы SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) , которое само является дифференциалом модуля X , т.е. для t выполнено условие $t^2 = 0$. Тогда для каждого целого числа $k \geq 0$ отображения d^i связаны между собой соотношением

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0.$$

Утверждение предложения 2.1 о работе машины возмущений для дифференциальных возмущений, которые сами являются дифференциалами, мотивирует введение следующего понятия.

Определение 2.1. D_∞ -дифференциалом модуля X называется семейство отображений $\{d^i : X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0. \quad (2.1)$$

D_∞ -модулем (X, d^i) называется произвольный модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым D_∞ -дифференциалом $\{d^i : X \rightarrow X\}$ этого модуля.

Рассмотрим соотношения (2.1) для малых значений k . При $k = 0$ соотношение (2.1) записывается в виде $d^0 d^0 = 0$. Это означает, что пара (X, d^0) является дифференциальным модулем.

При $k = 1$ соотношение (2.1) принимает вид $d^1 d^0 + d^0 d^1 = 0$. Это означает, что отображения d^0 и d^1 являются антикоммутирующими. Отсюда следует, что композиция $d^1 d^1 : X \rightarrow X$ является отображением дифференциального модуля (X, d^0) .

При $k = 2$ соотношение (2.1) записывается в виде $d^0 d^2 + d^2 d^0 = 0 - d^1 d^1$. Это означает, что отображение $d^2 : X \rightarrow X$ является гомотопией между нулевым отображением и отображением дифференциальных модулей $d^1 d^1 : (X, d^0) \rightarrow (X, d^0)$. Таким образом, отображение $d^1 : X \rightarrow X$ является дифференциалом с точностью до гомотопии.

Простейшими нетривиальными примерами D_∞ -модулей служат модули, которые снабжены двумя антикоммутирующими дифференциалами. Ясно, что в этом случае один из дифференциалов является дифференциальным возмущением другого.

Рассмотрим примеры D_∞ -модулей, которые возникают из конструкции дифференциального модуля с фильтрацией. Пусть над полем задан дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $n \geq 0$. Обозначим через Y^n подмодуль модуля X^n , для которого $X^n = Y^n \oplus X^{n-1}$. Легко видеть, что

$$X^n = Y^n \oplus Y^{n-1} \oplus \dots \oplus Y^0, \quad X = \bigoplus_{n \geq 0} Y^n.$$

При помощи условия $d(X^n) \subseteq X^n$, определим отображение $d_n^i : Y^n \rightarrow Y^{n-i}$, $i \geq 0$, как компоненту дифференциала

$$d : Y^n \rightarrow X^n = Y^n \oplus \dots \oplus Y^{n-i} \oplus \dots \oplus Y^0.$$

Семейство отображений

$$\left\{ d^i = \bigoplus_{n \geq 0} d_n^i : X \rightarrow X \mid i \geq 0 \right\}$$

является D_∞ -дифференциалом модуля X , поскольку условие $d^2 = 0$ в рассматриваемом случае эквивалентно соотношению (2.1).

Определение 2.2. Морфизмом D_∞ -модулей $f : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ называется семейство отображений $f = \{f^i : X \rightarrow Y \mid i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ соотношению

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j. \quad (2.2)$$

Рассмотрим соотношения (2.2) для малых значений k . При $k = 0$ соотношение (2.2) имеет вид $f^0 d^0 = d^0 f^0$. Это означает, что определено отображение дифференциальных модулей $f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$.

При $k = 1$ соотношение (2.2) записывается в виде $f^0 d^1 - d^1 f^0 = d^0 f^1 - f^1 d^0$. Это означает, что отображение $f^1 : X \rightarrow Y$ служит гомотопией между отображением $f^0 d^1 - d^1 f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ и нулевым отображением. Другими словами, отображение f^0 относительно d^1 является с точностью до гомотопии отображением дифференциальных модулей.

Пусть заданы морфизмы D_∞ -модулей $f = \{f^i\} : X \rightarrow Y$ и $g = \{g^i\} : Y \rightarrow Z$. Определим композицию gf морфизмов f и g , полагая

$$(gf)^i = \sum_{s+t=i} g^s f^t : X \rightarrow Z.$$

Тождественным морфизмом $1_X = \{1_X^i\}$ для D_∞ -модуля (X, d^i) является семейство отображений $1_X = \{1_X^i : X \rightarrow X\}$, где $1_X^i = 0$, $i > 0$, а $1_X^0 = \text{id}_X$ — тождественное отображение модуля X . Таким образом, D_∞ -модули и их морфизмы образуют категорию.

Рассмотрим вопрос о характеристизации изоморфизма $f = \{f^i\} : X \rightarrow Y$ в категории D_∞ -модулей его компонентой $f^0 : X \rightarrow Y$.

Предложение 2.2. Пусть задан произвольный морфизм $f = \{f^i\} : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ категории D_∞ -модулей, у которого отображение $f^0 : X \rightarrow Y$ является изоморфизмом модулей. Тогда морфизм D_∞ -модулей $f = \{f^i\}$ является изоморфизмом в категории D_∞ -модулей, обратным к которому в этой категории служит изоморфизм $g = \{g^i\} : (Y, d^i) \rightarrow (X, d^i)$, где $g^0 : Y \rightarrow X$ — изоморфизм модулей, обратный к изоморфизму модулей $f^0 : X \rightarrow Y$, а компоненты $g^i : Y \rightarrow X$, $i \geq 1$, задаются формулами

$$g^i = - \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} g^0 f^{i_1} g^0 \dots g^0 f^{i_k} g^0, \quad i \geq 1.$$

Таким образом, морфизм $f = \{f^i\}$ категории D_∞ -модулей является изоморфизмом этой категории тогда и только тогда, когда его компонента f^0 является изоморфизмом модулей.

Определение 2.3. Гомотопией между заданными морфизмами D_∞ -модулей $f = \{f^i\}, g = \{g^i\} : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ называется семейство отображений модулей $h = \{h^i : X \rightarrow Y \mid i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ соотношению

$$\sum_{i+j=k} d^j h^i + h^j d^i = f^k - g^k. \quad (2.3)$$

При $k = 0$ соотношение (2.3) имеет вид $d^0 h^0 + h^0 d^0 = f^0 - g^0$. Это означает, что отображение модулей $h^0 : X \rightarrow Y$ является гомотопией между отображениями дифференциальных модулей $f^0, g^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$.

Отношение между морфизмами D_∞ -модулей вида $(X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$, определяемое наличием гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности D_∞ -модулей.

Обсудим основные гомотопические свойства D_∞ -модулей. Пусть заданы D_∞ -модули (X, d^i) и (Y, d^i) . Кроме того, пусть заданы морфизмы D_∞ -модулей $\eta = \{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{\xi^i\} = \xi$ и гомотопия $\{h^i : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)\}$ между морфизмами D_∞ -модулей, для которых выполнены следующие условия:

$$\sum_{s+t=i} \eta^s \xi^t = (1_Y)^i, \quad \sum_{s+t=i} d^s h^t + h^s d^t = \sum_{s+t=i} \xi^s \eta^t - (1_X)^i, \quad i \geq 0.$$

Эту ситуацию будем записывать в виде $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и называть *сильной деформационной ретракцией D_∞ -модулей*. При выполнении дополнительных условий

$$\sum_{s+t=i} \eta^s h^t = 0, \quad \sum_{s+t=i} h^s \xi^t = 0, \quad \sum_{s+t=i} h^s h^t = 0, \quad i \geq 0,$$

указанную сильную деформационную ретракцию D_∞ -модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ будем называть *SDR-ситуацией D_∞ -модулей*.

Поведение D_∞ -дифференциалов при гомотопических эквивалентностях дифференциальных модулей типа сильных деформационных ретракций описывается в следующем утверждении.

Теорема 2.1. Пусть заданы произвольные D_∞ -модуль (X, d^i) и дифференциальный модуль (Y, d) . Кроме того, пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство отображений модулей $\{d_*^i : Y \rightarrow Y\}$, определяемых формулами

$$d_*^0 = d, \quad d_*^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (2.4)$$

является D_∞ -дифференциалом модуля Y . Более того, определена сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей $(\{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, где семейства отображений модулей $\{\xi^i : Y \rightarrow X\}$, $\{\eta^i : X \rightarrow Y\}$ и $\{h^i : X \rightarrow X\}$ задаются следующими формулами:

$$\xi^0 = \xi, \quad \xi^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (2.5)$$

$$\eta^0 = \eta, \quad \eta^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (2.6)$$

$$h^0 = h, \quad h^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1. \quad (2.7)$$

Отметим, что если в условиях теоремы 2.1 сильная деформационная ретракция $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ является SDR-ситуацией дифференциальных модулей, то теорему 2.1 можно уточнить. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть заданы произвольные D_∞ -модуль (X, d^i) и дифференциальный модуль (Y, d) . Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на модуле Y структуру D_∞ -модуля $\{d_*^i : Y \rightarrow Y\}$ и определяют SDR-ситуацию D_∞ -модулей

$$(\{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\}).$$

Пусть над произвольным полем задан D_∞ -модуль (X, d^i) . Тогда, как было отмечено в разделе 1, определена SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : X \rightrightarrows H(X) : \xi, h)$, где $H(X) = \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^0$. Применяя к этой дифференциальной SDR-ситуации теорему 2.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. Пусть над полем задан произвольный D_∞ -модуль (X, d^i) и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^0) . Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на гомологическом модуле $H(X)$ структуру D_∞ -модуля $\{d_*^i : H(X) \rightarrow H(X)\}$, где $d_*^0 = 0$, и определяют SDR-ситуацию D_∞ -модулей

$$(\{\eta^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (H(X), d_*^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\}).$$

Гомотопические свойства морфизма D_∞ -модулей $\{f^i\} : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ полностью определяются гомотопическими свойствами его начальной компоненты $f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.3. Морфизм D_∞ -модулей $\{f^i\} : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ определяет сильную деформационную ретракцию D_∞ -модулей

$$(\{f^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{g^i\}, \{s^i\})$$

тогда и только тогда, когда отображение $f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ дифференциальных модулей определяет сильную деформационную ретракцию

$$(\{f^0\} : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d^0) : \{g^0\}, \{s^0\})$$

дифференциальных модулей.

Обсудим вопрос о единственности D_∞ -дифференциала $\{d_*^i\}$, определяемого на дифференциальном модуле (Y, d) теоремой 2.1.

Предложение 2.4. Пусть заданы произвольные сильные деформационные ретракции D_∞ -модулей

$$(\{\bar{\eta}^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, \bar{d}^i) : \{\bar{\xi}^i\}, \{\bar{h}^i\}), \quad (\{\bar{\bar{\eta}}^i\} : (X, d^i) \rightrightarrows (Y, \bar{\bar{d}}^i) : \{\bar{\bar{\xi}}^i\}, \{\bar{\bar{h}}^i\}),$$

для которых выполнены условия

$$\bar{\eta}^0 = \bar{\bar{\eta}}^0, \quad \bar{d}^0 = \bar{\bar{d}}^0, \quad \bar{\xi}^0 = \bar{\bar{\xi}}^0, \quad \bar{h}^0 = \bar{\bar{h}}^0.$$

Тогда D_∞ -модули $(Y, \bar{d}^i)$ и $(Y, \bar{\bar{d}}^i)$ изоморфны в категории D_∞ -модулей.

Рассмотрим аналог теоремы 2.1 для произвольных гомотопических эквивалентностей дифференциальных модулей. Пусть заданы взаимно обратные гомотопические эквивалентности дифференциальных модулей $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$ и соответствующие им гомотопии $h : X \rightarrow X$ и $t : Y \rightarrow Y$ между отображениями дифференциальных модулей, для которых выполнены соотношения

$$dh + hd = \xi\eta - 1_X, \quad dt + td = \eta\xi - 1_Y.$$

Указанная ситуация записывается в виде $(t, \eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и называется *гомотопической эквивалентностью дифференциальных модулей*.

Аналогично, пусть заданы взаимно обратные гомотопические эквивалентности D_∞ -модулей $\{\eta^i\} : X \rightrightarrows Y : \{\xi^i\}$ и соответствующие им гомотопии $\{h^i\} : X \rightarrow X$ и $\{t^i\} : Y \rightarrow Y$ между морфизмами D_∞ -модулей, для которых выполнены соотношения

$$\sum_{p+q=i} d^p h^q + h^p d^q = \sum_{p+q=i} \xi^p \eta^q - (1_X)^i, \quad \sum_{p+q=i} d^p t^q + t^p d^q = \sum_{p+q=i} \eta^p \xi^q - (1_Y)^i, \quad i \geq 0.$$

Эту ситуацию будем записывать в виде $(\{t^i\}, \{\eta^i\} : X \rightrightarrows Y : \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и называть *гомотопической эквивалентностью D_∞ -модулей*.

Поведение D_∞ -дифференциалов при произвольных гомотопических эквивалентностях дифференциальных модулей описывается в следующем утверждении.

Теорема 2.3. Пусть заданы произвольные D_∞ -модули (X, d^i) и (Y, d) и произвольная гомотопическая эквивалентность дифференциальных модулей $(t, \eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$. Тогда на модуле Y имеется D_∞ -дифференциал $\{d_*^i : Y \rightarrow Y\}$, где $d_*^0 = d$, и определена гомотопическая эквивалентность D_∞ -модулей $(\{t^i\}, \{\eta^i\} : X \rightrightarrows Y : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, для которой выполнены начальные условия

$$t^0 = t, \quad \eta^0 = \eta, \quad \xi^0 = \xi, \quad h^0 = h + \xi t \eta - \xi \eta h.$$

Рассмотрим отдельно тот случай, когда к заданной SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$, где модуль X снабжен D_∞ -дифференциалом $\{d^i : X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$, можно применить машину дифференциальных возмущений. Для того, чтобы описать эти случаи и сравнить результат работы машины дифференциальных возмущений с утверждением теоремы 2.2, введем понятие стабильного D_∞ -модуля.

Определение 2.4. D_∞ -модуль (X, d^i) будем называть *стабильным*, если для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $k \geq 1$, зависящий от элемента x , для которого выполнено следующее условие: $d^i(x) = 0$, $i > k$.

Ясно, что если D_∞ -модуль является стабильным, то в этом случае корректно определены отображения модулей

$$D = \sum_{i=0}^{\infty} d^i : X \rightarrow X, \quad t = \sum_{i=1}^{\infty} d^i : X \rightarrow X.$$

В силу соотношений (2.1) отображение $D = d^0 + t$ является дифференциалом модуля X . Таким образом, отображение t является дифференциальным возмущением дифференциального модуля (X, d^0) . Отметим, что отображение t , вообще говоря, не является дифференциалом модуля X .

Таким образом, каждый стабильный D_∞ -модуль (X, d^i) определяет дифференциальный модуль (X, d^0) вместе с дифференциальным возмущением $t = (d^1 + \dots + d^i + \dots) : X \rightarrow X$ этого дифференциального модуля. Если же D_∞ -модуль (X, d^i) не является стабильным, то указанная выше формула для дифференциального возмущения t теряет смысл.

Пусть заданы произвольный стабильный D_∞ -модуль (X, d^i) и произвольная SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Применяя к этой SDR-ситуации дифференциальных модулей и к дифференциальному возмущению $t = (d^1 + \dots + d^i + \dots) : X \rightarrow X$ машину дифференциальных возмущений, получим указанную в начале этого параграфа последовательность отображений $\tilde{d}^i = \eta(t_i)\xi : Y \rightarrow Y$, где $t_i = (th)^{i-1}t$, $i \geq 1$, для которых справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4. Пусть над полем заданы произвольный стабильный D_∞ -модуль (X, d^i) и произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда вырабатываемые машиной дифференциальных возмущений отображения $\tilde{d}^i = \eta(t_i)\xi : Y \rightarrow Y$, $i \geq 0$, связаны с D_∞ -дифференциалом $\{d^i\}$ стабильного D_∞ -модуля (X, d^i) следующими формулами:

$$\tilde{d}^0 = d, \quad \tilde{d}^i = \eta \left(\sum_{\substack{s_1 \geq 1 \\ \vdots \\ s_i \geq 1}} d^{s_1} \underbrace{(hd^{s_2}) \dots (hd^{s_i})}_{i-1} \right) \xi, \quad i \geq 1. \quad (2.8)$$

Сравнивая теоремы 2.2 и 2.4, получаем, что отображения $d_*^i : Y \rightarrow Y$, $i \geq 0$, определяемые формулой (2.4), и отображения $\tilde{d}^i : Y \rightarrow Y$, $i \geq 0$, задаваемые формулой (2.8), связаны между собой соотношением

$$(d_*^0 + d_*^1 + \dots + d_*^i + \dots) = (\tilde{d}^0 + \tilde{d}^1 + \dots + \tilde{d}^i + \dots),$$

где $d_*^0 = \tilde{d}^0 = d$. Следовательно, для любого стабильного D_∞ -модуля (X, d^i) и любой SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ машина дифференциальных возмущений и теорема 2.2 вырабатывают одно и то же дифференциальное возмущение

$$\tilde{t}_\infty = (d_*^1 + \dots + d_*^i + \dots) = (\tilde{d}^1 + \dots + \tilde{d}^i + \dots) : Y \rightarrow Y$$

дифференциального модуля (Y, d) . Однако вырабатывают они это дифференциальное возмущение существенно разными способами. В самом деле, непосредственно из формул (2.4) и (2.8) видно, что для любого целого числа $i \geq 1$ отображения $d_*^i : Y \rightarrow Y$ и $\tilde{d}^i : Y \rightarrow Y$ являются разными отображениями.

Если же рассматривать нестабильный D_∞ -модуль (X, d^i) и SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$, то машина дифференциальных возмущений к ним неприменима, поскольку формула для дифференциального возмущения $\tilde{t}_\infty$ теряет смысл.

Таким образом, можно рассматривать теорему 2.2 как аналог машины дифференциальных возмущений в нестабильной ситуации, а D_∞ -дифференциалы — как обобщенные дифференциальные возмущения.

В заключение отметим, что введенные в этом параграфе понятия, конструкции и утверждения имеют очевидные аналоги для градуированных D_∞ -модулей.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ (КО)АЛГЕБР

В этом разделе рассматриваются определения, конструкции и утверждения из [20–22], связанные с понятием дифференциального возмущения дифференциальной (ко)алгебры.

Напомним сначала, что *дифференциальной алгеброй* (X, d, π) называется дифференциальный $\mathbf{Z}$ -градуированный модуль (X, d) , где $d : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, снабженный умножением $\pi : X \otimes X \rightarrow X$, являющимся отображением дифференциальных градуированных модулей, причем выполнено условие ассоциативности $\pi(\pi \otimes 1) = \pi(1 \otimes \pi)$.

Отображением дифференциальных алгебр $f : (X, d, \pi) \rightarrow (Y, d, \pi)$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$, для которого выполнено условие $f\pi = \pi(f \otimes f)$.

Гомотопией между отображениями $f, g : (X, d, \pi) \rightarrow (Y, d, \pi)$ *дифференциальных алгебр* называется гомотопия $h : X \rightarrow Y$ между отображениями дифференциальных градуированных модулей $f, g : (X, d) \rightarrow (Y, d)$, для которой выполнено условие $h\pi = \pi(h \otimes f + g \otimes h)$.

Определение 3.1. *Дифференциальным возмущением дифференциальной алгебры* (X, d, π) называется дифференциальное возмущение $t : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$ дифференциального модуля (X, d) , удовлетворяющее условию $t\pi = \pi(1 \otimes t + t \otimes 1)$.

Обсудим основные гомотопические свойства дифференциальных возмущений дифференциальных алгебр. Пусть заданы дифференциальные алгебры X, Y и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$, где отображения $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$ являются отображениями дифференциальных алгебр, а гомотопия $h : X \rightarrow X$ является гомотопией между отображениями $\xi\eta$ и 1_X дифференциальных алгебр. Указанную SDR-ситуацию $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ будем называть *SDR-ситуацией дифференциальных алгебр*. Итак, пусть имеется SDR-ситуация дифференциальных алгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и задано некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной алгебры (X, d, π) . Рассмотрим в градуированной алгебре $\text{Hom}_K(X \otimes X; X \otimes X)$ градуированную подалгебру J , порожденную элементами $t \otimes 1, 1 \otimes t, h \otimes 1, 1 \otimes h, d \otimes 1, 1 \otimes d$. Ясно, что элементами алгебры J являются многочлены от некоммутирующих переменных $t \otimes 1, 1 \otimes t, h \otimes 1, 1 \otimes h, d \otimes 1, 1 \otimes d$. Введем на алгебре J убывающую фильтрацию

$$J = J^0 \supset J^1 \supset \dots \supset J^n \supset J^{n+1} \supset \dots,$$

где J^n — это идеал в J , состоящий из всех многочленов, степень которых по переменной $(t \otimes 1)$ или по переменной $(1 \otimes t)$ больше либо равна n . Наряду с градуированной алгеброй J рассмотрим еще градуированные модули

$$\begin{aligned} \pi \circ J &\subset \text{Hom}(X \otimes X; X), \\ \pi \circ J \circ (\xi \otimes \xi) &\subset \text{Hom}(Y \otimes Y; X), \\ \pi \circ (\eta \otimes \eta) \circ J &\subset \text{Hom}(X \otimes X; Y), \end{aligned}$$

далее обозначаемы также через J , и введем на них убывающие фильтрации $\{J^n\}$, $n \geq 0$, полагая соответственно

$$J^n = \pi \circ J^n, \quad J^n = \pi \circ J^n \circ (\xi \otimes \xi), \quad J^n = \pi \circ (\eta \otimes \eta) \circ J^n.$$

Для машины дифференциальных возмущений (см. теорему 1.1), применяемой к SDR-ситуации дифференциальных алгебр, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть заданы произвольная SDR-ситуация дифференциальных алгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной*

алгебры (X, d, π) . Тогда для отображений

$$\begin{aligned}\partial_{n+1} &= \partial_n + \eta t_n \xi = d + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi : Y \rightarrow Y, \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + h t_n \xi = \xi + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi : Y \rightarrow X, \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \eta t_n h = \eta + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h : X \rightarrow Y, \\ h_{n+1} &= h_n + h t_n h = h + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h : X \rightarrow X\end{aligned}$$

из теоремы 1.1 выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1} \pi &= \pi(\partial_{n+1} \otimes 1 + 1 \otimes \partial_{n+1}), \\ \xi_{n+1} \pi &= \pi(\xi_{n+1} \otimes \xi_{n+1}) \mod (J^n), \\ \eta_{n+1} \pi &= \pi(\eta_{n+1} \otimes \eta_{n+1}) \mod (J^n), \\ h_{n+1} \pi &= \pi(h_{n+1} \otimes \xi \eta + 1 \otimes h_{n+1}) \mod (J^n).\end{aligned}$$

Таким образом, заданные SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных алгебр и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной алгебры X индуцируют последовательность дифференциальных SDR-ситуаций $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \mod (I^n)$, каждая из которых является SDR-ситуацией дифференциальных алгебр по модулю J^{n-1} , $n \geq 1$.

Теорема 3.2. Пусть заданы произвольная SDR-ситуация дифференциальных алгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной алгебры (X, d, π) . Если определяемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \mod (I^n)$ сходится, то $(Y, d + \tilde{t}_\infty, \pi)$ является дифференциальной алгеброй, а предельная SDR-ситуация $(\eta_\infty : X \rightrightarrows Y : \xi_\infty, h_\infty)$ дифференциальных модулей является SDR-ситуацией дифференциальных алгебр.

Основные примеры сходимости работы машины дифференциальных возмущений для дифференциальных алгебр доставляют дифференциальные алгебры с фильтрациями. Напомним, что возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $n \geq 0$, дифференциальной алгебры (X, d, π) называется возрастающая фильтрация $\{X^n\}$, $n \geq 0$, дифференциального модуля (X, d) , для которой выполнено условие сохранения фильтрации $\pi(X^n \otimes X^m) \subseteq X^{n+m}$.

Пусть заданы произвольные дифференциальные алгебры X и Y с возрастающими фильтрациями и некоторая SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных алгебр. Указанная SDR-ситуация называется SDR-ситуацией дифференциальных алгебр с возрастающими фильтрациями, если отображения $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$ и $h : X \rightarrow X$ сохраняют заданные фильтрации.

Следствие 3.1. Пусть заданы произвольная SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных алгебр с возрастающими фильтрациями и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной алгебры (X, d, π) , для которого выполнено условие $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 0$. Тогда определяемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \mod (I^n)$, каждая из которых является SDR-ситуацией дифференциальных алгебр по модулю J^{n-1} , сходится к предельной SDR-ситуации $(\eta_\infty : X \rightrightarrows Y : \xi_\infty, h_\infty)$ дифференциальных алгебр с возрастающими фильтрациями.

Рассмотрим дифференциальные возмущения дифференциальных коалгебр. Напомним сначала, что дифференциальной коалгеброй (X, d, ∇) называется дифференциальный градуированный модуль (X, d) , где $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, $d : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, снабженный коумножением $\nabla : X \rightarrow X \otimes X$, являющимся отображением дифференциальных градуированных модулей, причем выполнено условие ассоциативности $(\nabla \otimes 1)\nabla = (1 \otimes \nabla)\nabla$.

Отображением дифференциальных коалгебр $f : (X, d, \nabla) \rightarrow (Y, d, \nabla)$ называется отображение $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных градуированных модулей, для которого выполнено условие $\nabla f = (f \otimes f)\nabla$.

Гомотопией между отображениями $f, g : (X, d, \nabla) \rightarrow (Y, d, \nabla)$ дифференциальных коалгебр называется гомотопия $h : X \rightarrow Y$ между отображениями дифференциальных градуированных модулей $f, g : (X, d) \rightarrow (Y, d)$, для которой выполнено условие $\nabla h = (h \otimes f + g \otimes h)\nabla$.

Определение 3.2. Дифференциальным возмущением дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) называется дифференциальное возмущение $t : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$ дифференциального модуля (X, d) , удовлетворяющее условию $\nabla t = (1 \otimes t + t \otimes 1)\nabla$.

Обсудим основные гомотопические свойства дифференциальных возмущений дифференциальных коалгебр. Пусть заданы дифференциальные коалгебры X, Y и дифференциальная SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$, где отображения $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$ являются отображениями дифференциальных коалгебр, а гомотопия $h : X \rightarrow X$ является гомотопией между отображениями $\xi\eta$ и 1_X дифференциальных коалгебр. Указанную SDR-ситуацию $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ будем называть *SDR-ситуацией дифференциальных коалгебр*.

Итак, пусть заданы произвольная SDR-ситуация дифференциальных коалгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) . Рассмотрим градуированную алгебру $\text{Hom}_K(X \otimes X; X \otimes X)$, операция умножения в которой является операцией композиции отображений. Для этой градуированной алгебры выше была определена градуированная подалгебра J с убывающей фильтрацией $\{J^n\}$. Рассмотрим градуированные модули

$$\begin{aligned} J \circ \nabla &\subset \text{Hom}(X; X \otimes X), \\ J \circ (\xi \otimes \xi) \circ \nabla &\subset \text{Hom}(Y; X \otimes X), \\ (\eta \otimes \eta) \circ J \circ \nabla &\subset \text{Hom}(X; Y \otimes Y), \end{aligned}$$

далее обозначаемые через R , и введем на них убывающие фильтрации $\{R^n\}$, $n \geq 0$, полагая соответственно

$$R^n = J^n \circ \nabla, \quad R^n = J^n \circ (\xi \otimes \xi) \circ \nabla, \quad R^n = (\eta \otimes \eta) \circ J^n \circ \nabla.$$

Для машины дифференциальных возмущений (см. теорему 1.1), применяемой к SDR-ситуации дифференциальных коалгебр, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть заданы произвольная SDR-ситуация дифференциальных коалгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) . Тогда для отображений

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} &= \partial_n + \eta t_n \xi = d + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi : Y \rightarrow Y, \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + h t_n \xi = \xi + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi : Y \rightarrow X, \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \eta t_n h = \eta + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h : X \rightarrow Y, \\ h_{n+1} &= h_n + h t_n h = h + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h : X \rightarrow X \end{aligned}$$

из теоремы 1.1 выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}\nabla \partial_{n+1} &= (\partial_{n+1} \otimes 1 + 1 \otimes \partial_{n+1}) \nabla, \\ \nabla \xi_{n+1} &= (\xi_{n+1} \otimes \xi_{n+1}) \nabla \mod (R^n), \\ \nabla \eta_{n+1} &= (\eta_{n+1} \otimes \eta_{n+1}) \nabla \mod (R^n), \\ \nabla h_{n+1} &= (h_{n+1} \otimes \xi \eta + 1 \otimes h_{n+1}) \nabla \mod (R^n).\end{aligned}$$

Таким образом, заданные SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных коалгебр и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной коалгебры X индуцируют последовательность дифференциальных SDR-ситуаций $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \mod (I^n)$, каждая из которых является SDR-ситуацией дифференциальных коалгебр по модулю R^{n-1} , $n \geq 1$.

Теорема 3.4. Пусть заданы произвольная SDR-ситуация дифференциальных коалгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ и некоторое дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) . Если определяемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \mod (I^n)$ сходится, то $(Y, d + \tilde{t}_\infty, \nabla)$ является дифференциальной коалгеброй, а предельная SDR-ситуация $(\eta_\infty : X \rightrightarrows Y : \xi_\infty, h_\infty)$ дифференциальных модулей является SDR-ситуацией дифференциальных коалгебр.

Основные примеры сходимости работы машины дифференциальных возмущений для дифференциальных коалгебр появляются при рассмотрении дифференциальных коалгебр с фильтрациями. Напомним, что возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $n \geq 0$, дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) называется возрастающая фильтрация $\{X^n\}$, $n \geq 0$, дифференциального модуля (X, d) , для которой выполнено условие сохранения фильтрации $\nabla(X^n) \subseteq \bigoplus (X^k \otimes X^{n-k})$, $0 \leq k \leq n$.

Пусть заданы произвольные дифференциальные коалгебры X и Y с возрастающими фильтрациями и пусть некоторая SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных коалгебр. Указанная SDR-ситуация называется SDR-ситуацией дифференциальных коалгебр с возрастающими фильтрациями, если отображения $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$ и $h : X \rightarrow X$ сохраняют заданные фильтрации.

Следствие 3.2. Пусть заданы произвольная SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ дифференциальных коалгебр с возрастающими фильтрациями и дифференциальное возмущение $t : X \rightarrow X$ дифференциальной коалгебры (X, d, ∇) , для которого выполнено условие $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 0$. Тогда определяемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей $(\eta_n : X \rightrightarrows Y : \xi_n, h_n) \mod (I^n)$, каждая из которых является SDR-ситуацией дифференциальных коалгебр по модулю R^{n-1} , сходится к предельной SDR-ситуации $(\eta_\infty : X \rightrightarrows Y : \xi_\infty, h_\infty)$ дифференциальных коалгебр с возрастающими фильтрациями.

4. D_∞ -(КО)АЛГЕБРЫ

В этом параграфе рассматривается понятие D_∞ -(ко)алгебры (см. [3]), которое является D_∞ -аналогом понятия дифференциальной (ко)алгебры, и описываются основные гомотопические свойства D_∞ -(ко)алгебр.

Определение 4.1. Градуированная ассоциативная алгебра (X, π) называется D_∞ -алгеброй, если модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, снабжен таким D_∞ -дифференциалом $\{d^i : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}\}$, что каждая компонента d^i этого D_∞ -дифференциала является дифференцированием алгебры (X, π) , т.е. для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$d^i \pi = \pi(d^i \otimes 1 + 1 \otimes d^i).$$

Например, тройка (X, d^0, π) является дифференциальной алгеброй, поскольку выполнены соотношения $d^0 d^0 = 0$ и $\pi(d^0 \otimes 1 + 1 \otimes d^0) = d^0 \pi$.

Определение 4.2. Морфизмом D_∞ -алгебр $f = \{f^i\} : (X, d^i, \pi) \rightarrow (Y, d^i, \pi)$ называется такой морфизм D_∞ -модулей $f = \{f^i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet\}$, что для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$f^i \pi = \sum_{k+m=i} \pi(f^k \otimes f^m).$$

Например, отображение $f^0 : (X, d^0, \pi) \rightarrow (Y, d^0, \pi)$ является отображением дифференциальных алгебр, поскольку выполнены условия $f^0 \pi = \pi(f^0 \otimes f^0)$ и $d^s f^0 = f^0 d^s$.

Определение 4.3. Гомотопией между заданными морфизмами D_∞ -алгебр $f = \{f^i\}, g = \{g^i\} : X \rightarrow Y$ называется такая гомотопия $h = \{h^i : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}\}$ между морфизмами D_∞ -модулей $f = \{f^i\}, g = \{g^i\}$, что для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$h^i \pi = \sum_{k+m=i} \pi(h^k \otimes f^m + g^k \otimes h^m).$$

Например, отображение $h^0 : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ является гомотопией между отображениями $f^0, g^0 : (X, d^0, \pi) \rightarrow (Y, d^0, \pi)$ дифференциальных алгебр, так как выполнены условия

$$d^0 h^0 + h^0 d^0 = f^0 - g^0, \quad h^0 \pi = \pi(h^0 \otimes f^0 + g^0 \otimes h^0).$$

Опишем гомотопические свойства D_∞ -алгебр. Пусть заданы произвольные D_∞ -алгебры X, Y и SDR-ситуация D_∞ -модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$, где морфизмы η и ξ являются морфизмами D_∞ -алгебр, а гомотопия h является гомотопией между морфизмами D_∞ -алгебр $\xi\eta$ и 1_X . Рассмотренная SDR-ситуация D_∞ -модулей называется *SDR-ситуацией D_∞ -алгебр*.

Теорема 4.1. Пусть заданы D_∞ -алгебра (X, d^i, π) , дифференциальная алгебра (Y, d, π) и произвольная SDR-ситуация $(\eta : (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных алгебр. Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на алгебре (Y, π) структуру D_∞ -алгебры (Y, d_*^i, π) , где $d_*^0 = d$, и определяют SDR-ситуацию D_∞ -алгебр

$$(\{\eta^i\} : (X, d^i, \pi) \rightrightarrows (Y, d_*^i, \pi) : \{\xi^i\}, \{h^i\}).$$

Определение 4.4. Градуированная ассоциативная коалгебра (X, ∇) называется D_∞ -коалгеброй, если градуированный K -модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, снабжен таким D_∞ -дифференциалом $\{d^{i+s} : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}\}$, что каждая компонента d^i этого D_∞ -дифференциала является дифференцированием коалгебры (X, ∇) , т.е. для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$\nabla d^{i+s} = (d^{i+s} \otimes 1 + 1 \otimes d^{i+s}) \nabla.$$

Например, тройка (X, d^0, ∇) является дифференциальной коалгеброй, так как выполнены условия $d^0 d^0 = 0$ и $(d^0 \otimes 1 + 1 \otimes d^0) \nabla = \nabla d^0$.

Определение 4.5. Морфизмом D_∞ -коалгебр $\{f^i\} : (X, d^i, \nabla) \rightarrow (Y, d^i, \nabla)$ называется такой морфизм D_∞ -модулей $f = \{f^i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet\}$, что для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$\nabla f^i = \sum_{k+m=i} (f^k \otimes f^m) \nabla.$$

Например, отображение $f^0 : (X, d^0, \nabla) \rightarrow (Y, d^0, \nabla)$ является отображением дифференциальных коалгебр, поскольку выполнены условия $d^0 f^0 = f^0 d^0$ и $\nabla f^0 = (f^0 \otimes f^0) \nabla$.

Определение 4.6. Гомотопией между заданными морфизмами D_∞ -коалгебр $f = \{f^i\}, g = \{g^i\} : X \rightarrow Y$ называется такая гомотопия $h = \{h^i : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}\}$ между морфизмами D_∞ -модулей $f = \{f^i\}$ и $g = \{g^i\}$, что для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$\nabla h^i = \sum_{k+m=i} (h^k \otimes f^m + g^k \otimes h^m) \nabla.$$

Например, отображение $h^0 : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ является гомотопией между отображениями $f^0, g^0 : (X, d^0, \nabla) \rightarrow (Y, d^0, \nabla)$ дифференциальных коалгебр, поскольку выполнены условия

$$d^0 h^0 + h^0 d^0 = f^0 - g^0, \quad \nabla h^0 = (h^0 \otimes f^0 + g^0 \otimes h^0) \nabla.$$

Опишем гомотопические свойства D_∞ -коалгебр. Пусть заданы произвольные D_∞ -коалгебры X, Y и SDR-ситуация D_∞ -модулей $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$, где морфизмы η и ξ являются морфизмами D_∞ -коалгебр, а гомотопия h является гомотопией между морфизмами D_∞ -коалгебр $\xi\eta$ и 1_X . Рассмотренная SDR-ситуация D_∞ -модулей называется *SDR-ситуацией D_∞ -коалгебр*.

Теорема 4.2. Пусть заданы D_∞ -коалгебра (X, d^i, ∇) , дифференциальная коалгебра (Y, d, ∇) и произвольная SDR-ситуация $(\eta : (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных коалгебр. Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на градуированной коалгебре (Y, ∇) структуру D_∞ -коалгебры (Y, d^i_*, ∇) , где $d^0_* = d$, и определяют SDR-ситуацию D_∞ -коалгебр

$$(\{\eta^i\} : (X, d^i, \nabla) \rightrightarrows (Y, d^i_*, \nabla) : \{\xi^i\}, \{h^i\}).$$

Определение 4.7. D_∞ -алгебру (X, d^i, π) будем называть *стабильной*, если D_∞ -модуль (X, d^i) является стабильным. Аналогично, D_∞ -коалгебру (X, d^i, ∇) будем называть *стабильной*, если D_∞ -модуль (X, d^i) является стабильным.

Произвольная стабильная D_∞ -алгебра (X, d^i, π) определяет дифференциальную алгебру (X, D, π) , где D — это суммарный дифференциал D_∞ -модуля (X, d^i) . Аналогично, каждая стабильная D_∞ -коалгебра (X, d^i, ∇) определяет дифференциальную коалгебру (X, D, ∇) .

5. D_∞ -Модули и СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этом разделе рассматривается установленная в [2] связь между спектральными последовательностями и D_∞ -модулями над полями. Для каждого заданного над полем D_∞ -модуля рассмотрена его спектральная последовательность и описана связь дифференциалов этой спектральной последовательности с D_∞ -дифференциалом исходного D_∞ -модуля. Далее показано, что каждая заданная над полем спектральная последовательность является спектральной последовательностью стабильного D_∞ -модуля. Для стабильного D_∞ -модуля установлена сходимость спектральной последовательности этого стабильного D_∞ -модуля к его гомологиям.

Введем сначала понятие $D_\infty^{(s)}$ -модуля, обобщающее понятие D_∞ -модуля, которое будет нужно для изучения спектральных последовательностей.

Определение 5.1. D_∞ -модуль (X, d^i) называется $D_\infty^{(s)}$ -модулем, если найдется целое число $s \geq 0$, для которого выполнено условие $d^i = 0$, $i < s$. Морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей считаются морфизмы D_∞ -модулей. Для $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^i) будем употреблять запись (X, d^{i+s}) , где $i \geq 0$.

Для каждого фиксированного числа $s \geq 0$ категория $D_\infty^{(s+1)}$ -модулей является полной подкатегорией категории $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

Легко видеть, что для произвольного $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля (X, d^{i+s}) , где s — фиксированное неотрицательное целое число, соотношения (2.5) при $k = 2s$ имеют вид $d^s d^s = 0$, т.е. определен дифференциальный модуль (X, d^s) .

Заметим, что для $D_\infty^{(s)}$ -модулей, поскольку они являются D_∞ -модулями, имеется определенное в разделе 2 отношение гомотопической эквивалентности. Однако для $D_\infty^{(s)}$ -модулей имеется более приспособленное к ним понятие гомотопической эквивалентности. Определим между $D_\infty^{(s)}$ -модулями отношение гомотопической эквивалентности, которое при $s = 0$ совпадает с отношением гомотопической эквивалентности для D_∞ -модулей.

Определение 5.2. Семейство $h = \{h^{i-s} : X \rightarrow Y \mid i \geq 0\}$ назовем *гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей* $f = \{f^i\}$, $g = \{g^i\} : (X, d^{i+s}) \rightarrow (Y, d^{i+s})$, если для каждого целого числа $k \geq 0$ выполнено соотношение

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{j-s} d^{i+s} = f^k - g^k.$$

При $k = 0$ это соотношение имеет вид $d^s h^{-s} + h^{-s} d^s = f^0 - g^0$. Это означает, что отображение модулей $h^{-s} : X \rightarrow Y$ является гомотопией между отображениями $f^0, g^0 : (X, d^s) \rightarrow (Y, d^s)$ дифференциальных модулей.

Отношение между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей, определяемое наличием гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

Отметим, что если $D_\infty^{(s+1)}$ -модули гомотопически эквивалентны как $D_\infty^{(s)}$ -модули, то они гомотопически эквивалентны. С другой стороны, если $D_\infty^{(s+1)}$ -модули гомотопически эквивалентны, то они, вообще говоря, не являются гомотопически эквивалентными как $D_\infty^{(s)}$ -модули.

Пусть над полем задан произвольный $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) . Тогда определена SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows H(X) : \xi, h)$ дифференциальных модулей, где гомологический модуль $H(X) = \text{Ker } d^s / \text{Im } d^s$ рассматривается как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом. Аналогично тому, как это было сделано в теоремах 2.1 и 2.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть над полем задан произвольный $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) и пусть $H(X) = \text{Ker } d^s / \text{Im } d^s$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s) . Тогда пара семейств отображений модулей $\{d_*^{i+s} : H(X) \rightarrow H(X)\}$ и $\{f^i : H(X) \rightarrow X\}$, определяемых формулами

$$d_*^s = 0, \quad d_*^{i+s} = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (5.1)$$

$$f^0 = \xi, \quad f^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (5.2)$$

задают на гомологическом модуле $H(X)$ структуру $D_\infty^{(s)}$ -модуля и определяют гомотопическую эквивалентность $D_\infty^{(s)}$ -модулей $f = \{f^i\} : (H(X), d_*^{i+s}) \rightarrow (X, d^{i+s})$. Обратная гомотопическая эквивалентность $D_\infty^{(s)}$ -модулей $g = \{g^i : X \rightarrow H(X)\}$, для которой выполнено условие $gf = 1_{H(X)}$, и гомотопия $\{h^{i-s} : X \rightarrow X\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей fg и 1_X задаются следующими формулами:

$$g^0 = \eta, \quad g^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (5.3)$$

$$h^{-s} = h, \quad h^{i-s} = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1. \quad (5.4)$$

Так как для $D_\infty^{(s)}$ -модуля $(H(X), d_*^{i+s})$ выполнено условие $d_*^s = 0$, то гомологический модуль $H(X)$ является $D_\infty^{(s+1)}$ -модулем $(H(X), d_*^{i+(s+1)})$. В частности, определен дифференциальный модуль $(H(X), d_*^{s+1})$, к которому можно снова применить теорему 5.1. Это наблюдение приводит к следующему утверждению.

Предложение 5.1. Для произвольного D_∞ -модуля (X, d^i) , заданного над произвольным полем, имеется спектральная последовательность $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$, $E_s = (X_s, d_s^{i+s})$, $i \geq 0$, предельный член которой является тривиальным D_∞ -модулем $E_\infty = (X_\infty, d_\infty^i = 0)$. Для каждого $s \geq 0$ члены E_s и E_{s+1} этой спектральной последовательности, рассматриваемые как $D_\infty^{(s)}$ -модули, гомотопически эквивалентны. Имеющийся в члене E_s спектральной последовательности D_∞ -дифференциал $\{d_s^{i+s}\}$, $i \geq 0$, находимый по формулам (5.1), связан с дифференциалом $d_s : E_s \rightarrow E_s$ этой спектральной последовательности соотношением $d_s = d_s^s$.

Итак, каждый заданный над полем D_∞ -модуль определяет некоторую спектральную последовательность. С другой стороны, следующее утверждение показывает, что каждая заданная над полем спектральная последовательность является спектральной последовательностью некоторого стабильного D_∞ -модуля.

Предложение 5.2. Пусть над произвольным полем задана произвольная спектральная последовательность $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$. Тогда на каждом члене E_s , $s \geq 0$, этой спектральной последовательности имеется структура стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля $\{d_s^{i+s} : E_s \rightarrow E_s\}$, которая связана с дифференциалом спектральной последовательности $d_s : E_s \rightarrow E_s$ соотношением $d_s^s = d_s$. Если для D_∞ -модуля (E_0, d_0^i) рассмотреть его спектральную последовательность $\{E_s, \tilde{d}_s^{i+s}\}$, $s \geq 0$, $i \geq 0$, то $D_\infty^{(s)}$ -модули $(E_s, \tilde{d}_s^{i+s})$ и (E_s, d_s^{i+s}) являются изоморфными для каждого $s \geq 0$.

Предложение 5.3. Пусть над полем задан D_∞ -модуль (X, d^i) , а $\{E_s, d_s\}$ — спектральная последовательность, определяемая D_∞ -модулем (X, d^i) . Тогда стабильный D_∞ -модуль (E_0, d_0^i) , определяемый спектральной последовательностью $\{E_s, d_s\}$, гомотопически эквивалентен исходному D_∞ -модулю (X, d^i) .

Следствие 5.1. Над полем каждый D_∞ -модуль гомотопически эквивалентен некоторому стабильному D_∞ -модулю.

Таким образом, над произвольным полем гомотопическая категория D_∞ -модулей эквивалентна гомотопической категории спектральных последовательностей.

Рассмотрим спектральную последовательность, определяемую D_∞ -модулем, для стабильных D_∞ -модулей. Напомним, что $D_\infty^{(s)}$ -дифференциал стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) определяет на модуле X дифференциал $D_s : X \rightarrow X$, задаваемый формулой $D_s = (d^s + d^{s+1} + \dots + d^{s+i} + \dots)$.

Определение 5.3. Гомологическим модулем $H(X)$ стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) называется модуль гомологий модуля X относительно суммарного дифференциала $D_s : X \rightarrow X$.

Теорема 5.2. Пусть над полем задан стабильный D_∞ -модуль (X, d^i) . Тогда спектральная последовательность $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\{E_s, d_s\}$, где $E_s = (X_s, d_s^{i+s})$, $i \geq 0$, $d_s = d_s^s$, определяемая D_∞ -модулем (X, d^i) , сходится к $H(X)$. Все члены E_s этой спектральной последовательности, если их рассматривать как дифференциальные модули с суммарными дифференциалами $D_s : E_s \rightarrow E_s$, гомотопически эквивалентны между собой и гомотопически эквивалентны дифференциальному модулю $(H(X), d = 0)$.

Следствие 5.2. Пусть над произвольным полем задана произвольная спектральная последовательность $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$. Тогда на каждом члене E_s этой спектральной последовательности имеется такой дифференциал $D_s : E_s \rightarrow E_s$, что соответствующий ему модуль гомологий $H(E_s, D_s) = \text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ изоморфен предельному члену E_∞ заданной спектральной последовательности $\{E_s, d_s\}$.

6. $(DA)_\infty$ -(КО)АЛГЕБРЫ

Здесь рассматриваются определения, конструкции и утверждения из [3], связанные с понятием $(DA)_\infty$ -(ко)алгебры, которое является D_∞ -аналогом понятия дифференциальной A_∞ -(ко)алгебры. Далее описываются основные гомотопические свойства $(DA)_\infty$ -(ко)алгебр.

Пусть заданы произвольные градуированные D_∞ -модули X и Y , причем компоненты D_∞ -дифференциалов имеют степени (-1) . На градуированном модуле $X \otimes Y$ введем D_∞ -дифференциал

$$\{d^{i+s} : (X \otimes Y)_\bullet \rightarrow (X \otimes Y)_{\bullet-1} \mid i \geq 0\},$$

полагая $d^i = d^i \otimes 1 + 1 \otimes d^i$ со стандартным соглашением о знаках при вычислениях. В частности, для каждого градуированного D_∞ -модуля X и каждого $n \geq 1$ определен градуированный D_∞ -модуль $X^{\otimes n}$.

Определение 6.1. Градуированный D_∞ -модуль (X, d^i) , рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей

$$\left\{ \pi_n^i : X^{\otimes(n+2)} \longrightarrow X \mid \pi_n^i((X^{\otimes(n+2)})_\bullet) \subseteq X_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\},$$

называется $(DA)_\infty$ -алгеброй, если для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{i+j=k} d^i \pi_0^j = \sum_{i+j=k} \pi_0^i d^j,$$

$$\sum_{i+j=k} d^i \pi_{n+1}^j + (-1)^n \pi_{n+1}^i d^j = \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{t(m+1)+n} \pi_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_m^j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять π_m^j .

Легко видеть, что семейство $\pi_0 = \{\pi_0^i : (X^{\otimes 2})_\bullet \rightarrow X_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом D_∞ -модулей, а дифференциальный модуль (X, d^0) , рассматриваемый вместе с семейством отображений $\{\pi_n^0 : X^{\otimes(n+2)} \rightarrow X \mid n \geq 0\}$, является дифференциальной A_∞ -алгеброй.

Простейшими примерами $(DA)_\infty$ -алгебр служат рассмотренные в разделе 4 D_∞ -алгебры (X, d^i, π) . В самом деле, полагая $\pi_0^0 = \pi$ и $\pi_n^i = 0$, при $(n, i) \neq (0, 0)$, получим $(DA)_\infty$ -алгебру (X, d^i, π^i) .

Определение 6.2. Морфизмом $f : X \rightarrow Y$ $(DA)_\infty$ -алгебр X и Y называется такое семейство отображений модулей

$$f = \left\{ f_n^i : X^{\otimes(n+1)} \rightarrow Y \mid f_n^i((X^{\otimes(n+1)})_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\}$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{i+j=k} d^i f_0^j = \sum_{i+j=k} f_0^i d^j,$$

$$\sum_{i+j=k} d^i f_{n+1}^j + (-1)^n f_{n+1}^i d^j = \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{t(m+1)+n} f_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_m^j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) +$$

$$+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{n_2+n_4+\cdots} \pi_m^i (f_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{n_{m+2}}^{j_{m+2}}),$$

где $n_1 + \cdots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \cdots + j_{m+2} = j$ и сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять π_m^j .

Легко видеть, что семейство отображений $f_0 = \{f_0^i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом D_∞ -модулей, а семейство отображений $\{f_n^0 : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}\}$ является морфизмом дифференциальных A_∞ -алгебр $(X, d^0, \pi_n^0) \rightarrow (Y, d^0, \pi_n^0)$.

Композиция $gf = \{(gf)_n^i\} : (X, d^i, \pi_n^i) \rightarrow (Z, d^i, \pi_n^i)$ морфизмов $(DA)_\infty$ -алгебр $f = \{f_n^i\} : X \rightarrow Y$ и $g = \{g_n^i\} : Y \rightarrow Z$ определяется следующей формулой:

$$(gf)_n^k = \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n g_m^i (f_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{n_{m+1}}^{j_{m+1}}), \quad n \geq 0, \quad k \geq 0,$$

где $j_1 + \cdots + j_{m+1} = j$, $n_1 + \cdots + n_{m+1} = n - m$.

Тождественным морфизмом для $(DA)_\infty$ -алгебры (X, d^i, π_n^i) является семейство отображений $1_X = \{(1_X)_n^i : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}\}$, где $(1_X)_0^0$ — тождественное отображение градуированного модуля X и $(1_X)_n^i = 0$ в остальных случаях. Таким образом, $(DA)_\infty$ -алгебры и их морфизмы образуют категорию.

Определение 6.3. Гомотопией между морфизмами $(DA)_\infty$ -алгебр $f, g : X \rightarrow Y$ называется такое семейство отображений модулей

$$h = \left\{ h_n^i : X^{\otimes(n+1)} \rightarrow Y \mid h_n^i((X^{\otimes(n+1)})_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\},$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$, $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} dh_0^j + h_0^i d^j &= f_0^k - g_0^k, \\ \sum_{i+j=k} d^i h_{n+1}^j + (-1)^{n+1} h_{n+1}^i d^j &= f_{n+1}^k - g_{n+1}^k + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{t(m+1)+n+1} h_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_m^j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{m+1+\varepsilon(t)} \pi_m^i (g_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes g_{n_{t-1}}^{j_{t-1}} \otimes h_{n_t}^{j_t} \otimes f_{n_{t+1}}^{j_{t+1}} \otimes \cdots \otimes f_{n_{m+2}}^{j_{m+2}}), \end{aligned}$$

где суммы берутся также по всем местам t , на которых могут стоять соответственно π_m^j и $h_{n_t}^{j_t}$; $n_1 + \cdots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \cdots + j_{m+2} = j$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \cdots + n_{2[\frac{t}{2}]} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+1} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+3} + \cdots + n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Легко видеть, что семейство $h_0 = \{h_0^i : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1} \mid i \geq 0\}$ является гомотопией между морфизмами D_∞ -модулей $\{f_0^i\}, \{g_0^i\} : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$, а семейство $\{h_n^0 : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}\}$ является гомотопией между морфизмами дифференциальных A_∞ -алгебр $\{f_n^0\}, \{g_n^0\} : (X, d^0, \pi_n^0) \rightarrow (Y, d^0, \pi_n^0)$.

Рассмотрим понятие B -конструкции $(DA)_\infty$ -алгебры. Пусть задана произвольная $(DA)_\infty$ -алгебра (X, d^i, π_n^i) . Обозначим через $(T(SX), \nabla)$ тензорную коалгебру от надстройки SX над градуированным модулем X . Образующие модуля $T(SX)$ обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in X$, и имеют размерность, которая равна сумме размерностей элементов x_i плюс n . Коумножение $\nabla : T(SX) \rightarrow T(SX) \otimes T(SX)$ градуированной коалгебры $T(SX)$ задается на образующих следующей формулой:

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = [\] \otimes [x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^{n-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_n] + [x_1, \dots, x_n] \otimes [\],$$

где символом $[\]$ обозначена образующая K -модуля $(SX)_0 = K$. Рассмотрим отображение модулей $\beta : T(SX)_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, которое на образующих задается следующим правилом:

$$\beta[x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Введем D_∞ -дифференциал $\{d^i : T(SX)_\bullet \rightarrow T(SX)_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$ на градуированной коалгебре $(T(SX), \nabla)$, однозначно определяемый тем условием, что каждая компонента d^i является дифференцированием коалгебры $(T(SX), \nabla)$, и условием справедливости соотношения

$$\beta d^i = -d^i \beta + \sum_{n \geq 0} \pi_n^i (\beta \otimes \cdots \otimes \beta) \nabla^{(n)}, \quad i \geq 0.$$

Таким образом, для произвольной $(DA)_\infty$ -алгебры (X, d^i, π_n^i) определена соответствующая ей D_∞ -коалгебра $(T(SX), d^i, \nabla)$.

Определение 6.4. D_∞ -коалгебра $(T(SX), d^i, \nabla)$ называется B -конструкцией $(DA)_\infty$ -алгебры (X, d^i, π_n^i) и обозначается $B(X)$.

Введение структуры $(DA)_\infty$ -алгебры (X, d^i, π_n^i) на градуированном модуле X эквивалентно введению на коалгебре $(T(SX), \nabla)$ структуры D_∞ -коалгебры $(T(SX), d^i, \nabla)$, где для каждого $i \geq 0$ компонента $\pi_n^i : (X^{\otimes(n+2)})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ отождествляется с отображением $d^i : (SX)_{\bullet+n+2}^{\otimes(n+2)} \rightarrow (SX)_{\bullet+n+1}$, $n \geq 0$, а компонента $d^i : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$ отождествляется с гомоморфизмом $d^i : (SX)_{\bullet+1} \rightarrow (SX)_\bullet$.

Пусть задан произвольный морфизм $(DA)_\infty$ -алгебр $f : X \rightarrow Y$. Тогда семейство отображений $\{f_n^i : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}\}$ определяет морфизм D_∞ -коалгебр $B(f) = \{B(f)^i\} : B(X) \rightarrow B(Y)$, который однозначно задается условием справедливости следующего соотношения:

$$\beta B(f)^i = \sum_{n \geq 0} f_n^i(\beta \otimes \cdots \otimes \beta) \nabla^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Задание морфизма D_∞ -коалгебр $g = \{g^i\} : B(X) \rightarrow B(Y)$ равносильно заданию морфизма $(DA)_\infty$ -алгебр $f = \{f_n^i\} : X \rightarrow Y$, где для каждого индекса $i \geq 0$ компонента $f_n^i : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ отождествляется с соответствующим отображением $g^i : (SX)_{\bullet+n+1}^{\otimes(n+1)} \rightarrow (SY)_{\bullet+n+1}$.

Пусть задана произвольная гомотопия $h = \{h_n^i : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}\}$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -алгебр $f, g : X \rightarrow Y$. Семейство отображений $\{h_n^i\}$ определяет гомотопию $B(h) = \{B(h)^i : B(X)_\bullet \rightarrow B(Y)_{\bullet+1}\}$ между морфизмами D_∞ -коалгебр $B(f), B(g) : B(X) \rightarrow B(Y)$, которая однозначно задается условием справедливости следующего соотношения:

$$\beta B(h)^i = - \sum_{n \geq 0} h_n^i(\beta \otimes \cdots \otimes \beta) \nabla^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Пусть задана произвольная гомотопия $t = \{t^i\} : B(X)_\bullet \rightarrow B(Y)_{\bullet+1}$ между морфизмами D_∞ -коалгебр $p, q : B(X) \rightarrow B(Y)$. Тогда, как было сказано выше, морфизмы p и q определяют некоторые морфизмы $(DA)_\infty$ -алгебр $f, g : X \rightarrow Y$. Ясно, что задание гомотопии t эквивалентно заданию гомотопии $h = \{h_n^i : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}\}$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -алгебр $f, g : X \rightarrow Y$, где для каждого $i \geq 0$ компонента $h_n^i : (X^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ отождествляется с соответствующим отображением $t^i : (SX)_{\bullet+n+1}^{\otimes(n+1)} \rightarrow (SY)_{\bullet+n+1}$.

Обсудим гомотопические свойства $(DA)_\infty$ -алгебр. Пусть заданы морфизмы $(DA)_\infty$ -алгебр $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h : X \rightarrow X$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем называть *SDR-ситуацией* $(DA)_\infty$ -алгебр.

При помощи понятия B -конструкции $(DA)_\infty$ -алгебры доказывается следующее утверждение, описывающее поведение структуры $(DA)_\infty$ -алгебры при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей.

Теорема 6.1. Пусть заданы произвольные $(DA)_\infty$ -алгебра X и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда на градуированном модуле Y имеется структура $(DA)_\infty$ -алгебры и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty$ -алгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ с начальными условиями $d^0 = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^0 = h$.

Определение 6.5. Градуированный D_∞ -модуль (X, d^i) , рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей

$$\left\{ \nabla_n^i : X \rightarrow X^{\otimes(n+2)} \mid \nabla_n^i(X_\bullet) \subseteq (X^{\otimes(n+2)})_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\},$$

называется $(DA)_\infty$ -коалгеброй, если для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\sum_{i+j=k} d^i \nabla_0^j = \sum_{i+j=k} \nabla_0^i d^j,$$

$$\sum_{i+j=k} d^i \nabla_{n+1}^j + (-1)^n \nabla_{n+1}^i d^j = \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(m+1)(n+t+1)} (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \nabla_m^i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \nabla_{n-m}^j$$

где сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять ∇_m^i .

Легко видеть, что семейство гомоморфизмов $\nabla_0 = \{\nabla_0^i : X_\bullet \rightarrow (X^{\otimes 2})_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом D_∞ -модулей, а дифференциальный модуль (X, d^0) , рассматриваемый вместе с набором гомоморфизмов $\{\nabla_n^0 : X \rightarrow X^{\otimes(n+2)} \mid n \geq 0\}$, является дифференциальной A_∞ -коалгеброй.

Определение 6.6. Пусть заданы $(DA)_\infty$ -коалгебры (X, d^i, ∇_n^i) и (Y, d^i, ∇_n^i) . Морфизмом $(DA)_\infty$ -коалгебр $f : X \rightarrow Y$ называется такое семейство отображений модулей

$$f = \left\{ f_n^i : X \rightarrow Y^{\otimes(n+1)} \mid f_n^i(X_\bullet) \subseteq (Y^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\},$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^i f_0^j &= \sum_{i+j=k} f_0^i d^j, \\ \sum_{i+j=k} d^i f_{n+1}^j + (-1)^n f_{n+1}^i d^j &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(m+1)(n+t)} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \nabla_m^i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) f_{n-m}^j + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{mn+n_2+n_4+\dots} (f_{n_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes f_{n_{m+2}}^{i_{m+2}}) \nabla_m^j, \end{aligned}$$

где $n_1 + \dots + n_{m+2} = n - m$, $i_1 + \dots + i_{m+2} = i$ и сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять ∇_m^i .

Например, семейство отображений модулей $f_0 = \{f_0^i : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом D_∞ -модулей, а семейство $\{f_n^0 : X \rightarrow Y^{\otimes(n+1)} \mid n \geq 0\}$ является морфизмом $(X, d^0, \nabla_n^0) \rightarrow (Y, d^0, \nabla_n^0)$ дифференциальных A_∞ -коалгебр.

Определение 6.7. Гомотопией между морфизмами $(DA)_\infty$ -коалгебр $f = \{f_n^i\}$, $g = \{g_n^i\} : (X, d^i, \nabla_n^i) \rightarrow (Y, d^i, \nabla_n^i)$ называется такое семейство отображений модулей

$$h = \left\{ h_n^i : X \rightarrow Y^{\otimes(n+1)} \mid h_n^i(X_\bullet) \subseteq (Y^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\},$$

что для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^i h_0^j + h_0^i d^j &= f_0^k - g_0^k, \\ \sum_{i+j=k} d^i h_{n+1}^j + (-1)^{n+1} h_{n+1}^i d^j &= (-1)^{n+1} (f_{n+1}^k - g_{n+1}^k) + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(m+1)(n+t)} (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \nabla_m^i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) h_{n-m}^j + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(m+1)n+\varepsilon(t)} (g_{n_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes g_{n_{t-1}}^{i_{t-1}} \otimes h_{n_t}^{i_t} \otimes f_{n_{t+1}}^{i_{t+1}} \otimes \dots \otimes f_{n_{m+2}}^{i_{m+2}}) \nabla_m^j, \end{aligned}$$

где суммы берутся также по всем местам t , на которых могут стоять ∇_m^i и $h_{n_t}^{i_t}$ соответственно; $n_1 + \dots + n_{m+2} = n - m$, $i_1 + \dots + i_{m+2} = i$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \dots + n_{2[\frac{t-1}{2}]} + n_{2[\frac{t}{2}]+1} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+3} + \dots + n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Например, семейство отображений $h_0 = \{h_0^i : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}\}$ является гомотопией между морфизмами D_∞ -модулей $\{f_0^i\}$, $\{g_0^i\} : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$, а семейство $\{h_n^0 : X_\bullet \rightarrow (Y^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n+1}\}$ является гомотопией между морфизмами дифференциальных A_∞ -коалгебр $\{f_n^0\}$, $\{g_n^0\} : (X, d^0, \nabla_n^0) \rightarrow (Y, d^0, \nabla_n^0)$.

Введем понятие ко- B -конструкции для $(DA)_\infty$ -коалгебры. Пусть задана произвольная $(DA)_\infty$ -коалгебра (X, d^i, ∇_n^i) . Обозначим через $(T(S^{-1}X), \pi)$ тензорную алгебру от денадстройки $S^{-1}X$ над градуированным K -модулем X . Образующие модуля $T(S^{-1}X)$ обозначаются через $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in X$, и имеют размерность, которая равна сумме размерностей элементов x_i минус n . Умножение $\pi : T(S^{-1}X) \otimes T(S^{-1}X) \rightarrow T(S^{-1}X)$ градуированной алгебры $T(S^{-1}X)$ задается на образующих формулой

$$\pi([x_1, \dots, x_n] \otimes [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]) = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}].$$

Рассмотрим отображение модулей $\alpha : X \rightarrow T(S^{-1}X)$, определяемое формулой $\alpha(x) = [x]$. Введем D_∞ -дифференциал $\{d^i : T(S^{-1}X)_\bullet \rightarrow T(S^{-1}X)_{\bullet-1}\}$ на градуированной алгебре $(T(S^{-1}X), \pi)$, однозначно определяемый тем условием, что каждая компонента d^i является дифференцированием алгебры $(T(S^{-1}X), \pi)$, и условием справедливости соотношения

$$d^i \alpha = -\alpha d^i + \sum_{n \geq 0} \pi^{(n)}(\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha) \nabla_n^i,$$

где $\pi^{(0)} = \pi$, $\pi^{(n)} = \pi(\pi^{(n-1)} \otimes 1)$, $n \geq 1$.

Таким образом, для каждой $(DA)_\infty$ -коалгебры (X, d^i, ∇_n^i) построена соответствующая ей D_∞ -алгебра $(T(S^{-1}X), d^i, \pi)$.

Определение 6.8. D_∞ -алгебра $(T(S^{-1}X), d^i, \pi)$ называется *ко-В-конструкцией* $(DA)_\infty$ -коалгебры (X, d^i, ∇_n^i) и обозначается $F(X)$.

Ясно, что задание структуры $(DA)_\infty$ -коалгебры (X, d^i, ∇_n^i) на градуированном модуле X эквивалентно введению на градуированной алгебре $(T(S^{-1}X), \pi)$ структуры D_∞ -коалгебры $(T(S^{-1}X), d^i, \pi)$.

Пусть задан произвольный морфизм $(DA)_\infty$ -коалгебр $f = \{f_n^i\} : X \rightarrow Y$. Тогда семейство отображений модулей $\{f_n^i : X_\bullet \rightarrow (Y^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n}\}$ задает морфизм D_∞ -алгебр $F(f) = \{F(f)^i\} : F(X) \rightarrow F(Y)$, однозначно определяемый условием

$$F(f)^i \alpha = \sum_{n \geq 0} \pi^{(n-1)}(\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha) f_n^i,$$

где $\pi^{(-1)}$ — тождественное отображение.

Ясно, что задание морфизма D_∞ -алгебр $F(X) \rightarrow F(Y)$ равносильно заданию некоторого морфизма $(DA)_\infty$ -коалгебр $(X, d^i, \nabla_n^i) \rightarrow (Y, d^i, \nabla_n^i)$.

Пусть задана произвольная гомотопия $h = \{h_n^i : X_\bullet \rightarrow (Y^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n+1}\}$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -коалгебр $f, g : X \rightarrow Y$. Тогда семейство отображений модулей $\{h_n^i\}$ задает гомотопию $F(h) = \{F(h)^i : F(X)_\bullet \rightarrow F(Y)_{\bullet+1}\}$ между морфизмами D_∞ -алгебр $F(f)$ и $F(g)$, однозначно определяемую условием

$$F(h)^i \alpha = - \sum_{n \geq 0} \pi^{(n-1)}(\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha) h_n^i,$$

где $\pi^{(-1)}$ — тождественное отображение.

Пусть задана произвольная гомотопия $t : F(X) \rightarrow F(Y)$ между морфизмами D_∞ -алгебр $p, q : F(X) \rightarrow F(Y)$. Тогда, как было сказано выше, морфизмы p и q определяют некоторые морфизмы $(DA)_\infty$ -коалгебр $f, g : X \rightarrow Y$. Ясно, что задание гомотопии t эквивалентно заданию некоторой гомотопии $h : X \rightarrow Y$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -коалгебр f и g .

Обсудим гомотопические свойства $(DA)_\infty$ -коалгебр. Пусть заданы произвольные морфизмы $(DA)_\infty$ -коалгебр $\eta : X \rightrightarrows Y : \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h : X \rightarrow X$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -коалгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем называть *SDR-ситуацией* $(DA)_\infty$ -коалгебр.

При помощи понятия ко-В-конструкции $(DA)_\infty$ -коалгебры доказывается следующее утверждение, описывающее поведение структуры $(DA)_\infty$ -коалгебры при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей.

Теорема 6.2. Пусть заданы произвольные $(DA)_\infty$ -коалгебра X и SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta : (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$. Тогда на градуированном модуле Y имеется структура $(DA)_\infty$ -коалгебры и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty$ -коалгебр $(\eta : X \rightrightarrows Y : \xi, h)$ с начальными условиями $d^0 = d$, $\eta_0^0 = \eta$, $\xi_0^0 = \xi$, $h_0^0 = h$.

Определение 6.9. $(DA)_\infty$ -алгебра X называется *стабильной*, если $B(X)$ является стабильной D_∞ -коалгеброй. Аналогично, $(DA)_\infty$ -коалгебра X называется *стабильной*, если $F(X)$ является стабильной D_∞ -алгеброй.

Отметим, что если $(DA)_\infty$ -алгебра X является стабильной, то $(DA)_\infty$ -алгебра Y , получаемая в теореме 6.1, также является стабильной. Аналогично для $(DA)_\infty$ -коалгебр в теореме 6.2.

Ясно, что произвольная стабильная $(DA)_\infty$ -алгебра X определяет суммарную A_∞ -алгебру (X, D, π_n) , где отображение $\pi_n : (X^{\otimes n+2})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ задается формулой

$$\pi_n = (\pi_n^0 + \pi_n^1 + \cdots + \pi_n^i + \cdots),$$

а $D : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$ — суммарный дифференциал D_∞ -модуля X . Аналогично, каждая стабильная $(DA)_\infty$ -коалгебра X определяет суммарную A_∞ -коалгебру (X, D, ∇_n) .

Напомним, что в силу свойства гомотопической инвариантности структуры A_∞ -алгебры, каждая заданная над полем A_∞ -алгебра (X, d, π_n) определяет свою A_∞ -алгебру гомологий $(H(X), d = 0, \pi_n)$. Аналогично, каждая заданная над полем A_∞ -коалгебра (X, d, ∇_n) определяет свою A_∞ -коалгебру гомологий $(H(X), d = 0, \nabla_n)$.

Определение 6.10. A_∞ -алгеброй гомологий $H(X)$ стабильной заданной над полем $(DA)_\infty$ -алгебры (X, d^i, π_n^i) называется A_∞ -алгебра гомологий ее суммарной A_∞ -алгебры (X, D, π_n) . Аналогично, A_∞ -коалгеброй гомологий $H(X)$ стабильной заданной над полем $(DA)_\infty$ -коалгебры (X, d^i, ∇_n^i) называется A_∞ -коалгебра гомологий ее суммарной A_∞ -коалгебры (X, D, ∇_n) .

7. $(DA)_\infty$ -(КО)АЛГЕБРЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В настоящем разделе рассматривается установленная в [3] связь между $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами и (ко)мультипликативными спектральными последовательностями над полями. Далее описывается метод построения структуры A_∞ -коалгебры на коалгебре Милнора непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса.

Напомним сначала, что мультипликативной спектральной последовательностью называется последовательность дифференциальных алгебр $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, $s \geq 1$, где $E_{s+1} = H(E_s) = \text{Ker } d_s / \text{Im } d_s$, а умножение $\pi^{(s+1)}$ в члене E_{s+1} индуцировано умножением $\pi^{(s)}$ в члене E_s .

Стоит отметить, что если мультипликативная спектральная последовательность $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ задана над полем, то определен предельный член $(E_\infty, d_\infty = 0, \pi^{(\infty)})$ этой спектральной последовательности, являющийся градуированной алгеброй.

Теорема 7.1. Пусть над полем задана произвольная мультипликативная спектральная последовательность $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, где $1 \leq s \leq \infty$. Тогда на каждом члене E_s , $1 \leq s \leq \infty$, этой спектральной последовательности имеется структура стабильной $(DA)_\infty$ -алгебры $(E_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^i)$, для которой выполнены начальные условия $d_s^s = d_s$ и $(\pi^{(s)})_0^0 = \pi^{(s)}$. Более того, A_∞ -алгебра гомологий $H(E_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^i)$ для каждого $s \geq 1$ изоморфна A_∞ -алгебре $(E_\infty, D = 0, \pi_n^{(\infty)})$, которая является суммарной A_∞ -алгеброй для $(DA)_\infty$ -алгебры $(E_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\pi^{(\infty)})_n^i)$.

Теорему 7.1 можно уточнить, если начальный член рассматриваемой спектральной последовательности является свободной алгеброй. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.2. Пусть над полем задана произвольная мультипликативная спектральная последовательность $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, $1 \leq s \leq \infty$, у которой начальный член $(E_1, d_1, \pi^{(1)})$ является свободной алгеброй. Тогда на этом начальном члене имеется структура D_∞ -алгебры $(E_1, d_1^{i+1}, \pi^{(1)})$, где $d_1^1 = d_1$, для которой, если ее рассматривать как $(DA)_\infty$ -алгебру, A_∞ -алгебра гомологий $H(E_1, d_1^{i+1}, \pi^{(1)})$ изоморфна предельной градуированной A_∞ -алгебре $(E_\infty, \pi_n^{(\infty)})$.

Напомним, что (ко)мультипликативной спектральной последовательностью называется последовательность дифференциальных коалгебр $\{(E_s, d_s, \nabla^{(s)})\}$, где $E_{s+1} = H(E_s) = \text{Ker } d_s / \text{Im } d_s$, а коумножение $\nabla^{(s+1)}$ в члене E_{s+1} индуцировано коумножением $\nabla^{(s)}$ в члене E_s .

Как и в мультипликативном случае, подчеркнем, что для каждой рассматриваемой над полем (ко)мультипликативной спектральной последовательности $\{(E_s, d_s, \nabla^{(s)})\}$ определен предельный член $(E_\infty, d_\infty = 0, \nabla^{(\infty)})$, являющийся градуированной коалгеброй.

Теорема 7.3. Пусть над полем задана произвольная (ко)мультипликативная спектральная последовательность $\{(E_s, d_s, \nabla^{(s)})\}$, $1 \leq s \leq \infty$. Тогда на каждом члене E_s , $1 \leq s \leq \infty$, этой спектральной последовательности имеется структура стабильной $(DA)_\infty$ -коалгебры $(E_s, d_s^{i+s}, (\nabla^{(s)})_n^i)$, для которой выполнены начальные условия $d_s^s = d_s$ и $(\nabla^{(s)})_0^0 = \nabla^{(s)}$. Более того, A_∞ -коалгебра гомологий $H(E_s, d_s^{i+s}, (\nabla^{(s)})_n^i)$ для любого $s \geq 1$ изоморфна A_∞ -коалгебре $(E_\infty, D = 0, \nabla_n^{(\infty)})$, которая является суммарной A_∞ -коалгеброй для предельной $(DA)_\infty$ -коалгебры $(E_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\nabla^{(\infty)})_n^i)$.

Рассмотрим применение теоремы 7.2 к спектральной последовательности Адамса [14]. Напомним, что спектральная последовательность Адамса является заданной над полем $\mathbf{Z}_p$, $p \geq 2$, мультипликативной спектральной последовательностью $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, $s \geq 1$, предельный член которой присоединен к p -примарным компонентам стабильных гомотопических групп сфер.

Для того чтобы описать начальный член $(E_1, d_1, \pi^{(1)})$ спектральной последовательности Адамса напомним конструкцию коалгебры Милнора $\mathcal{K}_p$ над полем $\mathbf{Z}_p$, $p \geq 2$, которая является двойственной к алгебре Стинрода стабильных когомологических операций над $\mathbf{Z}_p$ [29].

Коалгеброй Милнора $\mathcal{K}_2 = \{(\mathcal{K}_2)_n \mid n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$ называется градуированная алгебра Хопфа над полем $\mathbf{Z}_2$, которая как градуированная алгебра является алгеброй многочленов $\mathbf{Z}_2[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots]$, где $\xi_0 = 1$ и $\dim(\xi_i) = 2^i - 1$, $i \geq 0$. Коумножение ∇ коалгебры $\mathcal{K}_2$ на мультипликативных образующих ξ_k алгебры $\mathcal{K}_2$ задается формулой

$$\nabla(\xi_k) = \sum_{i=0}^k (\xi_{k-i})^{2^i} \otimes \xi_i, \quad k \geq 0.$$

Коалгеброй Милнора $\mathcal{K}_p = \{(\mathcal{K}_p)_n \mid n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$, $p > 2$, называется градуированная алгебра Хопфа над полем $\mathbf{Z}_p$, которая как градуированная алгебра является тензорным произведением $E(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots) \otimes \mathbf{Z}_p[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots]$ внешней алгебры $E(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots)$ на алгебру многочленов $\mathbf{Z}_p[\xi_1, \dots, \xi_i, \dots]$, где $\xi_0 = 1$ и $\dim(\tau_i) = 2p^i - 1$, $\dim(\xi_i) = 2(p^i - 1)$, $i \geq 0$. Коумножение ∇ коалгебры $\mathcal{K}_p$ на мультипликативных образующих ξ_k и τ_k алгебры $\mathcal{K}_p$ задается следующими формулами:

$$\nabla(\xi_k) = \sum_{i=0}^k (\xi_{k-i})^{p^i} \otimes \xi_i, \quad \nabla(\tau_k) = \tau_k \otimes 1 + \sum_{i=0}^k (\xi_{k-i})^{p^i} \otimes \tau_i, \quad k \geq 0.$$

Напомним, что членом $(E_1, d_1, \pi^{(1)})$ спектральной последовательности Адамса, предельный член которой присоединен к p -примарным компонентам стабильных гомотопических групп сфер, является ко- B -конструкция $F(\mathcal{K}_p)$ коалгебры Милнора $(\mathcal{K}_p, d = 0, \nabla)$, где $p \geq 2$.

Так как спектральная последовательность Адамса задана над полем, мультипликативна и ее начальный член $F(\mathcal{K}_p)$ является свободной алгеброй, спектральная последовательность Адамса удовлетворяет условиям теоремы 7.2. Учитывая, что задание на градуированной тензорной алгебре $(T(S^{-1}\mathcal{K}_p), \pi)$ структуры D_∞ -коалгебры $(T(S^{-1}\mathcal{K}_p), d^{i+1}, \pi)$ эквивалентно введению структуры $(DA)_\infty$ -коалгебры $(\mathcal{K}_p, d^{i+1}, \nabla_n^i)$ на градуированном $\mathbf{Z}_p$ -модуле $\mathcal{K}_p$, получаем следующее утверждение.

Теорема 7.4. Пусть $\{(E_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ — спектральная последовательность Адамса, предельный член которой присоединен к p -примарным компонентам стабильных гомотопических групп сфер. Тогда дифференциалы $\{d_s\}$, $s \geq 1$, этой спектральной последовательности определяют на коалгебре Милнора $(\mathcal{K}_p, \nabla)$ структуру стабильной $(DA)_\infty$ -коалгебры $(\mathcal{K}_p, d^{i+1}, \nabla_n^i)$, где $\nabla_0^0 = \nabla$ и $d^{i+1} = 0$ при $i \geq 0$, для которой A_∞ -алгебра гомологий $H(F(\mathcal{K}_p), d^{i+1}, \pi)$ изоморфна как градуированная A_∞ -алгебра предельному члену $(E_\infty, \pi_n^{(\infty)})$ рассматриваемой спектральной последовательности Адамса.

8. D_∞ -(Ко)модули над D_∞ -(ко)алгебрами

В этом разделе рассматриваются определения, конструкции и утверждения из [4], связанные с понятием D_∞ -(ко)модуля над D_∞ -(ко)алгеброй, которое является D_∞ -аналогом понятия дифференциального (ко)модуля над дифференциальной (ко)алгеброй. Далее описываются основные гомотопические свойства D_∞ -модулей над D_∞ -(ко)алгебрами.

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Напомним, что *левым дифференциальным модулем над дифференциальной K -алгеброй* (A, d, π) называется дифференциальный градуированный K -модуль (X, d) , $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, $d : X_n \rightarrow X_{n-1}$, снабженный отображением дифференциальных градуированных K -модулей $\mu : A \otimes X \rightarrow X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$. Аналогично определяется правый дифференциальный модуль над дифференциальной алгеброй.

Отображением $f : X \rightarrow X'$ левого дифференциального модуля X над дифференциальной алгеброй A в левый дифференциальный модуль X' над дифференциальной алгеброй A' называется пара отображений $f = (\check{f}, \hat{f})$, где $\hat{f} : X \rightarrow X'$ — отображение дифференциальных модулей, $\check{f} : A \rightarrow A'$ — отображение дифференциальных K -алгебр, для которых выполнено условие $\mu'(\check{f} \otimes \hat{f}) = \hat{f}\mu$. Аналогично определяется отображение правых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами.

Гомотопией $h : X \rightarrow X'$ между отображениями $f, g : X \rightarrow X'$ из левого дифференциального модуля X над дифференциальной алгеброй A в левый дифференциальный модуль X' над дифференциальной алгеброй A' называется пара гомотопий $h = (\check{h}, \hat{h})$, где $\hat{h} : X \rightarrow X'$ — гомотопия между отображениями $\hat{f}, \hat{g} : X \rightarrow X'$ дифференциальных K -модулей, $\check{h} : A \rightarrow A'$ — гомотопия между отображениями $\check{f}, \check{g} : A \rightarrow A'$ дифференциальных K -алгебр, для которых выполнено условие $\hat{h}\mu = \mu'(\check{h} \otimes \hat{f} + \check{g} \otimes \hat{h})$. Аналогично определяется гомотопия между отображениями правых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами.

Пусть заданы левые дифференциальные модули X и X' над дифференциальными алгебрами A и A' соответственно, отображения $\eta : X \rightarrow X'$, $\xi : X' \rightarrow X$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами и гомотопия $h : X \rightarrow X$ между отображениями дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами, для которых выполнены условия $\eta\xi = 1$, $dh + hd = \xi\eta - 1$, $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$ и называть *SDR-ситуацией левых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами*. Аналогично определяется SDR-ситуация правых дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами.

Ясно, что SDR-ситуация $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами определяет SDR-ситуацию $(\hat{\eta} : X \rightrightarrows X' : \hat{\xi}, \hat{h})$ дифференциальных K -модулей и SDR-ситуацию $(\check{\eta} : A \rightrightarrows A' : \check{\xi}, \check{h})$ дифференциальных алгебр.

Определение 8.1. *Левым D_∞ -модулем над D_∞ -алгеброй (A, d^i, π)* называется левый градуированный модуль (X, μ) над градуированной алгеброй (A, π) , снабженный D_∞ -дифференциалом $\{d^i : X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}\}$, компоненты которого для каждого $i \geq 0$ удовлетворяют условию

$$d^i \mu = \mu(d^i \otimes 1 + 1 \otimes d^i).$$

Аналогично определяется понятие правого D_∞ -модуля над D_∞ -алгеброй.

Например, тройка (X, d^0, μ) является дифференциальным модулем над дифференциальной алгеброй (A, d^0, π) , поскольку выполнены соотношения $d^0 d^0 = 0$, $d^0 \mu = \mu(d^0 \otimes 1 + 1 \otimes d^0)$ и $d^0 \pi = \pi(d^0 \otimes 1 + 1 \otimes d^0)$.

Определение 8.2. *Морфизмом $f : X \rightarrow X'$ из левого D_∞ -модуля X над D_∞ -алгеброй A в левый D_∞ -модуль X' над D_∞ -алгеброй A'* называется пара морфизмов $f = (\check{f}, \hat{f})$, где $\hat{f} = \{\hat{f}^i : X \rightarrow X'\}$ — морфизм D_∞ -модулей, $\check{f} = \{\check{f}^i : A \rightarrow A'\}$ — морфизм D_∞ -алгебр, такая, что для каждого $i \geq 0$ выполнено условие

$$\hat{f}^i \mu = \sum_{k+m=i} \mu'(\check{f}^k \otimes \hat{f}^m).$$

Аналогично определяется понятие морфизма правых D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами.

Ясно, что пара $f^0 = (\check{f}^0, \hat{f}^0) : X \rightarrow X'$ является отображением из дифференциального модуля (X, d^0, μ) над дифференциальной алгеброй (A, d^0, π) в дифференциальный модуль (X', d^0, μ') над дифференциальной алгеброй (A', d^0, π') , поскольку выполнены условия $d^0 \hat{f}^0 = \hat{f}^0 d^0$, $d^s \check{f}^0 = \check{f}^0 d^s$, $\hat{f}^0 \mu = \mu'(\check{f}^0 \otimes \hat{f}^0)$ и $\check{f}^0 \pi = \pi'(\check{f}^0 \otimes \hat{f}^0)$.

Определение 8.3. Гомотопией $h : X \rightarrow X'$ между заданными морфизмами $f, g : X \rightarrow X'$ из левого D_∞ -модуля X над D_∞ -алгеброй A в левый D_∞ -модуль X' над D_∞ -алгеброй A' называется пара гомотопий $h = (\check{h}, \hat{h})$, где $\hat{h} = \{\hat{h}^i : X \rightarrow X'\}$ — гомотопия между морфизмами D_∞ -модулей $\hat{f} = \{\hat{f}^i\}$ и $\hat{g} = \{\hat{g}^i\}$, $\check{h} = \{\check{h}^i : A \rightarrow A'\}$ — гомотопия между морфизмами D_∞ -алгебр $\check{f} = \{\check{f}^i\}$ и $\check{g} = \{\check{g}^i\}$, для которой выполнено условие

$$\hat{h}^i \mu = \sum_{k+m=i} \mu'(\check{h}^k \otimes \hat{f}^m + \check{g}^k \otimes \hat{h}^m).$$

Аналогично определяется гомотопия между морфизмами правых D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами.

Легко видеть, что пара гомотопий $h^0 = (\check{h}^0, \hat{h}^0)$ является гомотопией между отображениями $f^0 = (\check{f}^0, \hat{f}^0)$ и $g^0 = (\check{g}^0, \hat{g}^0)$ из дифференциального модуля (X, d^0, μ) над дифференциальной алгеброй (A, d^0, π) в дифференциальный модуль (X', d^0, μ') над дифференциальной алгеброй (A', d^0, π') .

Обсудим гомотопические свойства D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами. Пусть заданы левые D_∞ -модули X и X' над D_∞ -алгебрами A и A' соответственно, морфизмы D_∞ -модулей $\eta : X \rightarrow X'$, $\xi : X' \rightarrow X$ над D_∞ -алгебрами и гомотопия $h : X \rightarrow X$ между морфизмами D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами, для которых выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} \eta^i \xi^j &= 1_X^k, & \sum_{i+j=k} d^i h^j + h^i d^j &= \sum_{i+j=k} \xi^i \eta^j - 1_X^k, & k \geq 0, \\ \sum_{i+j=k} \eta^i h^j &= 0, & \sum_{i+j=k} h^i \xi^j &= 0, & \sum_{i+j=k} h^i h^j &= 0, & k \geq 0, \end{aligned}$$

где $\eta^i = (\check{\eta}^i, \hat{\eta}^i)$, $\xi^i = (\check{\xi}^i, \hat{\xi}^i)$, $h^{i-s} = (\check{h}^i, \hat{h}^i)$.

Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$ и называть *SDR-ситуацией левых D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами*. Аналогично определяется SDR-ситуация правых D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами.

Ясно, что SDR-ситуация D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$ определяет SDR-ситуацию D_∞ -модулей $(\hat{\eta} : X \rightrightarrows X' : \hat{\xi}, \hat{h})$, а также SDR-ситуацию D_∞ -алгебр $(\check{\eta} : A \rightrightarrows A' : \check{\xi}, \check{h})$.

Теорема 8.1. Пусть заданы дифференциальный модуль X' над дифференциальной алгеброй A' , D_∞ -модуль X над D_∞ -алгеброй A и произвольная SDR-ситуация $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (X', d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей над дифференциальными алгебрами. Тогда формулы (2.4)–(2.7), примененные к SDR-ситуации $(\hat{\eta} : (X, d^0) \rightrightarrows (X', d) : \hat{\xi}, \hat{h})$ дифференциальных модулей и к SDR-ситуации $(\check{\eta} : (A, d^0) \rightrightarrows (A', d) : \check{\xi}, \check{h})$ дифференциальных алгебр, определяют на градуированном модуле (X', μ') над градуированной алгеброй (A', π') структуру D_∞ -модуля (X', d^i, μ') над D_∞ -алгеброй (A', d^i, π') и задают SDR-ситуацию D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами $(\{\eta^i\} : X \rightrightarrows X' : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, где $d^0 = d$, $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^0 = h$.

Двойственным образом определяются понятия D_∞ -комодуля над D_∞ -коалгеброй, морфизма D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами, гомотопии между морфизмами D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами и SDR-ситуации D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами. Аналогом теоремы 8.1 для D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами является следующее утверждение.

Теорема 8.2. Пусть заданы дифференциальный комодуль (X', d, τ') над дифференциальной коалгеброй (L', d, ∇') , D_∞ -комодуль (X, d^i, τ) над D_∞ -коалгеброй (L, d^i, ∇) и произвольная SDR-ситуация $(\eta : (X, d^0) \rightrightarrows (X', d) : \xi, h)$ дифференциальных комодулей над дифференциальными коалгебрами. Тогда формулы (2.4)–(2.7), примененные к SDR-ситуации $(\hat{\eta} : (X, d^0) \rightrightarrows (X', d) : \hat{\xi}, \hat{h})$ дифференциальных модулей и к SDR-ситуации $(\check{\eta} : (X, d^0) \rightrightarrows (X', d) : \check{\xi}, \check{h})$ дифференциальных коалгебр, определяют на градуированном комодуле (X', τ') над градуированной алгеброй

(L', ∇') структуру D_∞ -комодуля (X', d^i, τ') над D_∞ -коалгеброй (L', d^i, ∇') и задают SDR-ситуацию D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами $(\{\eta^i\} : X \rightrightarrows X' : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, где $d^0 = d$, $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

Определение 8.4. D_∞ -модуль X над D_∞ -алгеброй A будем называть *стабильным*, если D_∞ -алгебра A и D_∞ -модуль X над K являются стабильными. Аналогично, D_∞ -комодуль X над D_∞ -коалгеброй L называется *стабильным*, если D_∞ -коалгебра L и D_∞ -модуль X над K являются стабильными.

Легко видеть, что если задан стабильный D_∞ -модуль (X, d^i, μ) над D_∞ -алгеброй (A, d^i, π) , то определен дифференциальный модуль (X, D, μ) над дифференциальной алгеброй (A, D, π) , где дифференциал D является суммарным дифференциалом для D_∞ -модуля (X, d^i) и для D_∞ -модуля (A, d^i) соответственно.

9. $(DA)_\infty$ -(Ко)модули над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами

В этом разделе рассматриваются определения, конструкции и утверждения из [4], связанные с понятием $(DA)_\infty$ -(ко)модуля над $(DA)_\infty$ -(ко)алгеброй, которое является D_∞ -аналогом дифференциального A_∞ -(ко)модуля над дифференциальной A_∞ -(ко)алгеброй. Далее рассматриваются гомотопические свойства $(DA)_\infty$ -(ко)модулей над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами.

Определение 9.1. *Левым $(DA)_\infty$ -модулем (X, d^i, μ^i) над $(DA)_\infty$ -алгеброй (A, d^i, π_n^i) , где $s \geq 1$, называется градуированный D_∞ -модуль (X, d^i) , рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей*

$$\left\{ \mu_n^i : A^{\otimes(n+1)} \otimes X \rightarrow X \mid \mu_n^i((A^{\otimes(n+1)} \otimes X)_\bullet) \subseteq X_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\}$$

таким, что для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^i \mu_0^j &= \sum_{i+j=k} \mu_0^i d^j, \\ \sum_{i+j=k} d^i \mu_{n+1}^j + (-1)^n \mu_{n+1}^i d^j &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{t(m+1)+n} \mu_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_m^j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{nm} \mu_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \mu_m^j), \end{aligned}$$

где сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять π_m^j . Аналогично определяется конструкция правого $(DA)_\infty$ -модуля над $(DA)_\infty$ -алгеброй.

Легко видеть, что семейство отображений $\mu_0 = \{\mu_0^i : (A \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом D_∞ -модулей, а дифференциальный модуль (X, d^0) , рассматриваемый вместе с набором отображений $\{\mu_n^0 : A^{\otimes(n+1)} \otimes X \rightarrow X \mid n \geq 0\}$, является дифференциальным A_∞ -модулем над дифференциальной A_∞ -алгеброй (A, d^0, π_n^0) .

Простыми примерами $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами служат рассмотренные в разделе 8 D_∞ -модули (X, d^i, μ) над D_∞ -алгебрами (A, d^i, π) . В самом деле, полагая $\mu_0^0 = \mu$, $\pi_0^0 = \pi$ и $\mu_n^i = 0$, $\pi_n^i = 0$, при $(n, i) \neq (0, 0)$, получим $(DA)_\infty$ -модуль (X, d^i, μ_n^i) над $(DA)_\infty$ -алгеброй (A, d^i, π_n^i) .

Определение 9.2. Морфизмом $f : X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A в левый $(DA)_\infty$ -модуль X' над $(DA)_\infty$ -алгеброй A' называется пара $f = (\check{f}, \hat{f})$ семейств отображений модулей

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \left\{ \hat{f}_n^i : A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X' \mid \hat{f}_n^i((A^{\otimes n} \otimes X)_\bullet) \subseteq X'_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\}, \\ \check{f} &= \left\{ \check{f}_n^i : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A' \mid \check{f}_n^i((A^{\otimes(n+1)})_\bullet) \subseteq A'_{\bullet+n}, \quad n \geq 0, i \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

такая, что семейство $\check{f} = \{\check{f}_n^i\}$ является морфизмом $(DA)_\infty$ -алгебр и для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^i \hat{f}_0^j &= \sum_{i+j=k} \hat{f}_0^i d^j, \\ \sum_{i+j=k} d^i \hat{f}_{n+1}^j + (-1)^n \hat{f}_{n+1}^i d^j &= \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{t(m+1)+n} \hat{f}_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_m^j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(n+1)m+1} \hat{f}_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \mu_m^j) + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{n_2+n_4+\dots} \mu_m^i (\check{f}_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{f}_{n_{m+2}}^{j_{m+2}}), \end{aligned}$$

где $n_1 + \cdots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \cdots + j_{m+2} = j$ и сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять π_m^j . Аналогично определяются морфизмы правых $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами.

Легко видеть, что семейство $\hat{f}_0 = \{\hat{f}_0^i : X_\bullet \rightarrow X'_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом D_∞ -модулей, а пара семейств отображений $\{\hat{f}_n^0 : A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X' \mid n \geq 0\}$ и $\{\check{f}_n^0 : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A' \mid n \geq 0\}$ является морфизмом из A_∞ -модуля (X, d^0, μ_n^0) над A_∞ -алгеброй (A, d^0, π_n^0) в A_∞ -модуль (X', d^0, μ_n^0) над A_∞ -алгеброй (A', d^0, π_n^0) .

Определение 9.3. Гомотопией $h : X \rightarrow X'$ между морфизмами $f, g : X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A в левый $(DA)_\infty$ -модуль X' над $(DA)_\infty$ -алгеброй A' называется пара $h = (\hat{h}, \check{h})$ семейств отображений модулей

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \left\{ \hat{h}_n^i : A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X' \mid \hat{h}_n^i((A^{\otimes n} \otimes X)_\bullet) \subseteq X'_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\}, \\ \check{h} &= \left\{ \check{h}_n^i : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A' \mid \check{h}_n^{-n+i-s}((A^{\otimes(n+1)})_\bullet) \subseteq A'_{\bullet+n+1}, \quad n \geq 0, \quad i \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

такая, что семейство отображений $\check{h} = \{\check{h}_n^i\} : A \rightarrow A'$ является гомотопией между морфизмами $(DA)_\infty$ -алгебр $\check{f}, \check{g} : A \rightarrow A'$ и для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^i \hat{h}_0^j + \hat{h}_0^i d^j &= \hat{f}_0^k - \hat{g}_0^k, \\ \sum_{i+j=k} d^i \hat{h}_{n+1}^j + (-1)^{n+1} \hat{h}_{n+1}^i d^j &= \hat{f}_{n+1}^k - \hat{g}_{n+1}^k + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{t(m+1)+n+1} \hat{h}_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_m^j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) + \\ &+ \sum_{i+j=k} (-1)^{m(n+1)} \hat{h}_{n-m}^i (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \mu_m^j) + \\ &+ \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{m+1+\varepsilon(t)} \mu_m^i (\check{g}_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \check{g}_{n_{t-1}}^{j_{t-1}} \otimes \check{h}_{n_t}^{j_t} \otimes \check{f}_{n_{t+1}}^{j_{t+1}} \otimes \cdots \otimes \check{f}_{n_{m+1}}^{j_{m+1}} \otimes \hat{f}_{n_{m+2}}^{j_{m+2}}) + \\ &+ \sum_{i+j=k} (-1)^{n_2+n_4+\dots} \mu_m^i (\check{g}_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \check{g}_{n_{m+1}}^{j_{m+1}} \otimes \hat{h}_{n_{m+2}}^{j_{m+2}}), \end{aligned}$$

где суммы берутся также по всем местам t , на которых могут стоять соответственно π_m^j и $h_{n_t}^{j_t}$, $n_1 + \cdots + n_{m+2} = n - m$, $j_1 + \cdots + j_{m+2} = j$,

$$\varepsilon(t) = n_2 + n_4 + \cdots + n_{2[\frac{t}{2}]} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+1} + n_{2[\frac{t+1}{2}]+3} + \cdots + n_{2[\frac{m+1}{2}]+1}.$$

Аналогично определяется гомотопия между морфизмами правых $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами.

Ясно, что семейство отображений $\hat{h}_0 = \{\hat{h}_0^i : X_\bullet \rightarrow X'_{\bullet+1} \mid i \geq 0\}$ является гомотопией между морфизмами D_∞ -модулей $\hat{f}_0 = \{\hat{f}_0^i\}, \hat{g}_0 = \{\hat{g}_0^i\} : X \rightarrow X'$, а пара семейств отображений $\{\hat{h}_n^0 : A^{\otimes n} \otimes X \rightarrow X'\}$ и $\{\check{h}_n^0 : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A'\}$ является гомотопией между морфизмами $(\{\hat{f}_n^0\}, \{\check{f}_n^0\})$ и $(\{\hat{g}_n^0\}, \{\check{g}_n^0\})$ из A_∞ -модуля (X, d^0, μ_n^0) над A_∞ -алгеброй (A, d^0, π_n^0) в A_∞ -модуль (X', d^0, μ_n^0) над A_∞ -алгеброй (A', d^0, π_n^0) .

Введем понятие B -конструкции $(DA)_\infty$ -модуля над $(DA)_\infty$ -алгеброй. Пусть задан произвольный левый $(DA)_\infty$ -модуль X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A . Обозначим через $(T(SA) \otimes X, \tau)$, где $\tau = \nabla \otimes 1$, градуированный левый комодуль над указанной в разделе 6 градуированной коалгеброй $(T(SA), \nabla)$. Образующие K -модуля $T(SA) \otimes X$ записываются в виде $[a_1, \dots, a_n]x_{n+1}$ и имеют размерность, равную сумме размерностей элементов $a_1, \dots, a_n, x_{n+1}$ плюс n . Рассмотрим отображение K -модулей $\hat{\beta} : (T(SA) \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$, которое задается следующим правилом:

$$\hat{\beta}[a_1, \dots, a_n]x_{n+1} = \begin{cases} x_{n+1}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

На градуированном модуле $T(SA) \otimes X$ введем $(DA)_\infty$ -дифференциал

$$\left\{ d^i : (T(SA) \otimes X)_\bullet \rightarrow (T(SA) \otimes X)_{\bullet-1} \mid i \geq 0 \right\},$$

который однозначно определяется тем условием, что каждая компонента d^i удовлетворяет соотношению $\tau d^i = (d^i \otimes 1 + 1 \otimes d^i)\tau$, где $(T(SA), d^i, \nabla) = B(A)$, и равенством

$$\hat{\beta} d^i = d^i \hat{\beta} - \sum_{n \geq 0} \mu_n^i (\beta \otimes \dots \otimes \beta \otimes \hat{\beta}) \tau^{(n)},$$

где $\tau^{(0)} = \tau$, $\tau^{(n)} = (1 \otimes \tau^{(n-1)})\tau$, $n \geq 1$. Таким образом, для произвольного левого $(DA)_\infty$ -модуля (X, d^i, μ_n^i) над $(DA)_\infty$ -алгеброй (A, d^i, π_n^i) определен левый D_∞ -комодуль $(T(SA) \otimes X, d^i, \tau)$ над D_∞ -коалгеброй $B(A)$.

Определение 9.4. Левый D_∞ -комодуль $(T(SA) \otimes X, d^i, \tau)$ над D_∞ -коалгеброй $B(A) = (T(SA), d^i, \nabla)$ называется B -конструкцией левого $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A и обозначается $B(A, X)$. Аналогично определяется правый D_∞ -комодуль $B(X, A)$ над D_∞ -коалгеброй $B(A)$ в случае правого $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A .

Пусть заданы произвольные градуированные K -модули X и A . Легко видеть, что задание структуры $(DA)_\infty$ -модуля (X, d^i, μ_n^i) над $(DA)_\infty$ -алгеброй (A, d^i, π_n^i) эквивалентно введению на градуированном комодуле $(T(SA) \otimes X, \tau)$ над градуированной коалгеброй $(T(SA), \nabla)$ структуры D_∞ -комодуля $(T(SA) \otimes X, d^i, \tau)$ над D_∞ -коалгеброй $(T(SA), d^i, \nabla)$, где компонента $\mu_n^i : (A^{(n+1)} \otimes X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ отождествляется с отображением K -модулей $d^i : ((SA)^{\otimes(n+1)} \otimes X)_{\bullet+n+1} \rightarrow X_{\bullet+n}$, а компонента $\pi_n^i : (A^{\otimes(n+2)})_\bullet \rightarrow A_{\bullet+n}$ отождествляется с отображением K -модулей $d^i : ((SA)^{\otimes(n+2)})_{\bullet+n+2} \rightarrow (SA)_{\bullet+n+1}$.

Пусть задан произвольный морфизм $f = (\check{f}, \hat{f}) : X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A в левый $(DA)_\infty$ -модуль X' над $(DA)_\infty$ -алгеброй A' . Тогда определен морфизм D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами $B(f) = (B(\check{f}), B(\hat{f})) : B(A, X) \rightarrow B(A', X')$, который однозначно задается тем требованием, что $B(\check{f}) : B(A) \rightarrow B(A')$ является морфизмом D_∞ -коалгебр, и условием справедливости соотношения

$$\hat{\beta} B(\hat{f})^i = \sum_{n \geq 0} \hat{f}_n^i (\beta \otimes \dots \otimes \beta \otimes \hat{\beta}) \tau^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Легко видеть, что задание морфизма левых D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами $g = (\check{g}, \hat{g}) : B(A, X) \rightarrow B(A', X')$ эквивалентно заданию морфизма $(DA)_\infty$ -модулей $f = (\check{f}, \hat{f}) : X \rightarrow X'$, где компонента $\hat{f}^i : (A^{\otimes n} \otimes X)_\bullet \rightarrow X'_{\bullet+n}$ отождествляется с отображением $\hat{g}^i : ((SA)^{\otimes n} \otimes X)_{\bullet+n} \rightarrow X'_{\bullet+n}$,

а компонента $\check{f}_n^i : (A^{\otimes(n+1)})_\bullet \rightarrow A'_{\bullet+n}$ отождествляется с отображением $\check{g}^i : ((SA)^{\otimes(n+1)})_{\bullet+n+1} \rightarrow (SA)_{\bullet+n+1}$.

Пусть задана произвольная гомотопия $h = (\check{h}, \hat{h}) : X \rightarrow X'$ между морфизмами $(\check{f}, \hat{f}), (\check{g}, \hat{g}) : X \rightarrow X'$ из левого $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A в левый $(DA)_\infty$ -модуль X' над $(DA)_\infty$ -алгеброй A' . Тогда определена гомотопия $B(h) = (B(\check{h}), B(\hat{h})) : B(A, X) \rightarrow B(A', X')$ между морфизмами D_∞ -комодулей над D_∞ -коалгебрами, которая однозначно задается тем требованием, что $B(\check{h}) : B(A) \rightarrow B(A')$ является гомотопией между морфизмами D_∞ -коалгебр, и условием справедливости соотношения

$$\hat{B}B(\hat{h})^i = \sum_{n \geq 0} \hat{h}_n^i (\beta \otimes \dots \beta \otimes \hat{\beta}) \tau^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Ясно, что задание гомотопии между морфизмами левых D_∞ -модулей над D_∞ -алгебрами эквивалентно заданию соответствующей гомотопии между морфизмами $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами.

Обсудим гомотопические свойства $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами. Пусть заданы морфизмы $\eta = (\check{\eta}, \hat{\eta}) : X \rightrightarrows X' : (\check{\xi}, \hat{\xi}) = \xi$ некоторых $(DA)_\infty$ -модулей X и X' над $(DA)_\infty$ -алгебрами A и A' соответственно, для которых выполнено условие $\eta\xi = (1_{X'}, 1_{A'})$, и пусть задана некоторая гомотопия $h = (\check{h}, \hat{h}) : X \rightarrow X$ между морфизмами $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами $(1_X, 1_A)$ и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем называть *SDR-ситуацией $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами* и записывать в виде $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$.

При помощи B -конструкции $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами доказывается следующее утверждение.

Теорема 9.1. Пусть заданы произвольный $(DA)_\infty$ -модуль X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A и произвольные SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\check{\eta} : A \rightrightarrows A' : \check{\xi}, \tilde{h})$ и $(\bar{\eta} : X \rightrightarrows X' : \bar{\xi}, \bar{h})$. Тогда на A' имеется структура $(DA)_\infty$ -алгебры, на X' имеется структура $(DA)_\infty$ -модуля над $(DA)_\infty$ -алгеброй A' и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty$ -модулей над $(DA)_\infty$ -алгебрами $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d_{A'}^0 = d$, $\xi_0^0 = \check{\xi}$, $\check{\eta}_0^0 = \check{\eta}$, $\hat{h}_0^0 = \hat{h}$ и $d_{X'}^0 = d$, $\hat{\xi}_0^0 = \bar{\xi}$, $\hat{\eta}_0^0 = \bar{\eta}$, $\hat{h}_0^0 = \bar{h}$.

Аналогично определяются категория $(DA)_\infty$ -комодулей над $(DA)_\infty$ -коалгебрами, гомотопия между морфизмами $(DA)_\infty$ -комодулей над $(DA)_\infty$ -коалгебрами, SDR-ситуация $(DA)_\infty$ -комодулей над $(DA)_\infty$ -коалгебрами, а также ко- B -конструкция $F(L, X)$ для $(DA)_\infty$ -комодуля X над $(DA)_\infty$ -коалгеброй L .

Аналогом теоремы 9.1 для $(DA)_\infty$ -комодулей над $(DA)_\infty$ -коалгебрами является следующее утверждение.

Теорема 9.2. Пусть заданы произвольный $(DA)_\infty$ -комодуль X над $(DA)_\infty$ -коалгеброй L и произвольные SDR-ситуации дифференциальных модулей $(\check{\eta} : L \rightrightarrows L' : \check{\xi}, \tilde{h})$ и $(\bar{\eta} : X \rightrightarrows X' : \bar{\xi}, \bar{h})$. Тогда на L' имеется структура $(DA)_\infty$ -коалгебры, на X' имеется структура $(DA)_\infty$ -комодуля над $(DA)_\infty$ -коалгеброй L' и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty$ -комодулей над $(DA)_\infty$ -коалгебрами $(\eta : X \rightrightarrows X' : \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d_{L'}^0 = d$, $\xi_0^0 = \check{\xi}$, $\check{\eta}_0^0 = \check{\eta}$, $\hat{h}_0^0 = \hat{h}$ и $d_{X'}^0 = d$, $\hat{\xi}_0^0 = \bar{\xi}$, $\hat{\eta}_0^0 = \bar{\eta}$, $\hat{h}_0^0 = \bar{h}$.

Определение 9.5. Левый $(DA)_\infty$ -модуль X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A называется *стабильным*, если $B(A, X)$ является стабильным левым $(DA)_\infty$ -комодулем над $(DA)_\infty$ -коалгеброй $B(A)$. Левый $(DA)_\infty$ -комодуль X над $(DA)_\infty$ -коалгеброй L называется *стабильным*, если $F(L, X)$ является стабильным левым $(DA)_\infty$ -модулем над $(DA)_\infty$ -алгеброй $F(L)$.

Аналогично определяется понятие стабильности для правых $(DA)_\infty$ -(ко)модулей над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами.

Отметим, что если $(DA)_\infty$ -модуль X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A является стабильным, то $(DA)_\infty$ -модуль X' над $(DA)_\infty$ -алгеброй A' из теоремы 9.1 также является стабильным. Аналогичное утверждение справедливо для $(DA)_\infty$ -комодулей над $(DA)_\infty$ -коалгебрами в теореме 9.2.

Легко видеть, что стабильный $(DA)_\infty$ -модуль X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A определяет суммарный A_∞ -модуль (X, D, μ_n) над суммарной A_∞ -алгеброй (A, D, π_n) , где $\mu_n : (A^{\otimes n+1} \otimes X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ задается формулой

$$\mu_n = (\mu_n^0 + \mu_n^1 + \dots + \mu_n^i + \dots),$$

а D — суммарный дифференциал для D_∞ -модулей A и X соответственно. Аналогично, произвольный стабильный $(DA)_\infty$ -комодуль X над $(DA)_\infty$ -коалгеброй L определяет суммарный A_∞ -комодуль (X, D, τ_n) над суммарной A_∞ -коалгеброй (L, D, ∇_n) .

Напомним, что для заданного над произвольным полем A_∞ -модуля X над A_∞ -алгеброй A определен A_∞ -модуль гомологий $H(X)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(A)$. Аналогично, для заданного над произвольным полем A_∞ -комодуля X над A_∞ -коалгеброй L определен A_∞ -комодуль гомологий $H(X)$ над A_∞ -коалгеброй гомологий $H(L)$.

Определение 9.6. A_∞ -Модулем гомологий $H(X)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(A)$ для заданного над полем стабильного $(DA)_\infty$ -модуля X над $(DA)_\infty$ -алгеброй A называется A_∞ -модуль гомологий суммарного A_∞ -модуля (X, D, μ_n) над A_∞ -алгеброй гомологий суммарной A_∞ -алгебры (X, D, π_n) .

Аналогично определяется A_∞ -комодуль гомологий над A_∞ -коалгеброй гомологий для заданного над полем стабильного $(DA)_\infty$ -комодуля над $(DA)_\infty$ -коалгеброй.

10. $(DA)_\infty$ -(Ко)модули над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами и спектральные последовательности

В этом разделе рассматривается установленная в [4] связь между $(DA)_\infty$ -(ко)модулями над $(DA)_\infty$ -(ко)алгебрами и спектральными последовательностями над полями. Далее описывается метод построения структуры A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора на гомологиях любого спектра непосредственно из дифференциалов спектральной последовательности Адамса этого спектра.

Введем следующую терминологию. *Спектральной алгеброй* будем называть произвольную мультипликативную спектральную последовательность. *Левым спектральным модулем* $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над *спектральной алгеброй* $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ будем называть любую спектральную последовательность $\{(E_s, d_s)\}$, $s \geq 1$, для которой каждый дифференциальный модуль (E_s, d_s) , является левым дифференциальным модулем $(E_s, d_s, \mu^{(s)})$ над дифференциальной алгеброй $(A_s, d_s, \pi^{(s)})$ и структурное отображение $\mu^{(s+1)}$ в члене E_{s+1} индуцировано структурным отображением $\mu^{(s)}$ в члене E_s . Аналогично вводится понятие правого спектрального модуля над спектральной алгеброй.

Отметим, что если спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ задан над полем, то всегда определен предельный член $(E_\infty, d_\infty = 0, \mu^{(\infty)})$ этого спектрального модуля, являющийся градуированным модулем над градуированной алгеброй $(A_\infty, d_\infty = 0, \pi^{(\infty)})$.

Теорема 10.1. Пусть над полем задан произвольный левый спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$. Тогда на каждом члене E_s , $1 \leq s \leq \infty$, этого спектрального модуля имеется структура стабильного левого $(DA)_\infty$ -модуля $(E_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^i)$ над $(DA)_\infty$ -алгеброй $(A_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^i)$, для которого выполнены начальные условия $d_s^s = d_s$, $(\pi^{(s)})_0^0 = \pi^{(s)}$, $(\mu^{(s)})_0^0 = \mu^{(s)}$. Более того, A_∞ -модуль гомологий $H(E_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^i)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(A_s, d_s^{i+s}, (\pi^{(s)})_n^i)$ для каждого $s \geq 1$ изоморфен суммарному A_∞ -модулю $(E_\infty, D = 0, \mu_n^{(\infty)})$ над A_∞ -алгеброй $(A_\infty, D = 0, \pi_n^{(\infty)})$, определяемому стабильным предельным $(DA)_\infty$ -модулем $(E_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\mu^{(\infty)})_n^i)$ над $(DA)_\infty$ -алгеброй $(A_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\pi^{(\infty)})_n^i)$.

Теорему 10.1 можно уточнить, если начальный член рассматриваемого спектрального модуля над спектральной алгеброй является свободным модулем над свободной алгеброй. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 10.2. Пусть над полем задан произвольный левый спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, $1 \leq s \leq \infty$, у которого начальный

член $(E_1, d_1, \mu^{(1)})$ является свободным модулем над свободной алгеброй $(A_1, d_1, \pi^{(1)})$. Тогда на этом начальном члене имеется структура левого стабильного D_∞ -модуля $(E_1, d_1^{i+1}, \mu^{(1)})$ над D_∞ -алгеброй $(A_1, d_1^{i+1}, \pi^{(1)})$, где $d_1^1 = d_1$, для которого, если его рассматривать как левый $(DA)_\infty$ -модуль над $(DA)_\infty$ -алгеброй, левый A_∞ -модуль гомологий $H(E_1)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(A_1)$ изоморфен предельному левому A_∞ -модулю $(E_\infty, \mu_n^{(\infty)})$ над предельной A_∞ -алгеброй $(A_\infty, \pi_n^{(\infty)})$.

Спектральной коалгеброй назовем произвольную (ко)мультипликативную спектральную последовательность. Левым спектральным комодулем $\{(E_s, d_s, \tau^{(s)})\}$ над спектральной коалгеброй $\{(L_s, d_s, \nabla^{(s)})\}$ будем называть произвольную спектральную последовательность $\{(E_s, d_s)\}$, $s \geq 1$, для которой каждый дифференциальный модуль (E_s, d_s) , является левым дифференциальным комодулем $(E_s, d_s, \tau^{(s)})$ над дифференциальной коалгеброй $(L_s, d_s, \nabla^{(s)})$ и структурное отображение $\tau^{(s+1)}$ в члене E_{s+1} индуцировано структурным отображением $\tau^{(s)}$ в члене E_s . Аналогично вводится понятие правого спектрального комодуля над спектральной коалгеброй.

Теорема 10.3. Пусть над полем задан произвольный спектральный комодуль $\{(E_s, d_s, \tau^{(s)})\}$ над спектральной коалгеброй $\{(L_s, d_s, \nabla^{(s)})\}$. Тогда на каждом члене E_s , $1 \leq s \leq \infty$, этого спектрального комодуля имеется структура стабильного $(DA)_\infty$ -комодуля $(E_s, d_s^{i+s}, (\tau^{(s)})_n^i)$ над $(DA)_\infty$ -коалгеброй $(L_s, d_s^{i+s}, (\nabla^{(s)})_n^i)$, для которого выполнены начальные условия $d_s^s = d_s$, $(\nabla^{(s)})_0^0 = \nabla^{(s)}$, $(\tau^{(s)})_0^0 = \tau^{(s)}$. Более того, A_∞ -комодуль гомологий $H(E_s, d_s^{i+s}, (\tau^{(s)})_n^i)$ над A_∞ -коалгеброй гомологий $H(L_s, d_s^{i+s}, (\nabla^{(s)})_n^i)$ для каждого $s \geq 1$ изоморфен суммарному A_∞ -комодулю $(E_\infty, D = 0, \tau_n^{(\infty)})$ над суммарной A_∞ -коалгеброй $(L_\infty, D = 0, \nabla_n^{(\infty)})$, который определяется стабильным левым $(DA)_\infty$ -комодулем $(E_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\tau^{(\infty)})_n^i)$ над $(DA)_\infty$ -коалгеброй $(L_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\nabla^{(\infty)})_n^i)$.

Рассмотрим применение теоремы 10.2 к спектральной последовательности Адамса (см. [5]), вычисляющей p -примарные компоненты гомотопических групп произвольных спектров.

Пусть $H(p) = \{K(\mathbf{Z}_p, n)\}$ — спектр Эйленберга—Маклейна, где $p \geq 2$ — произвольное фиксированное простое число. Спектр $H(p)$ стандартным способом определяет теорию гомологий $H(-; \mathbf{Z}_p)$ на категории спектров, которая задаваемую следующим правилом:

$$H_n(X; \mathbf{Z}_p) = \pi_n(H(p) \wedge X) = \operatorname{dir} \lim_q H_{n+q}(X_q; \mathbf{Z}_p),$$

где $X = \{X_n\}$ — произвольный спектр, а $H_{n+q}(X_q; \mathbf{Z}_p)$ — группы сингулярных гомологий пространства X_q с коэффициентами в $\mathbf{Z}_p$. Хорошо известно, что для любого спектра X гомологии этого спектра $H(X; \mathbf{Z}_p)$ являются левым комодулем над рассмотренной в разделе 7 коалгеброй Милнора $\mathcal{K}_p = H(H(p); \mathbf{Z}_p)$ стабильных коопераций в теории гомологий $H(-; \mathbf{Z}_p)$.

Напомним, что для спектра $H(p)$ и произвольного спектра X имеется спектральная последовательность Адамса, представляющая собой левый спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$, для которого предельный левый модуль $(E_\infty, \mu^{(\infty)})$ над алгеброй $(A_\infty, \pi^{(\infty)})$ присоединен к левому модулю p -примарных компонент гомотопических групп $\pi_\bullet(X)$ спектра X над алгеброй p -примарных компонент гомотопических групп $\pi_\bullet(S^0)$ сферического спектра S^0 . Отметим (см. [13]), что гомотопические группы $\pi_\bullet(X)$ произвольного спектра X имеют совпадающие левую и правую модульные структуры над алгеброй $\pi_\bullet(S^0)$. Для указанной выше спектральной последовательности Адамса ее начальным членом является ко- B -конструкция $F(\mathcal{K}_p, H(X; \mathbf{Z}_p))$, рассматриваемая вместе со структурой левого модуля над алгеброй $F(\mathcal{K}_p)$.

Так как спектральная последовательность Адамса для спектров $H(p)$ и X задана над полем $\mathbf{Z}_p$, является левым спектральным модулем над спектральной алгеброй и ее начальный член $F(\mathcal{K}_p, H(X; \mathbf{Z}_p))$ является левым свободным модулем над свободной алгеброй $F(\mathcal{K}_p)$, то для этой спектральной последовательности выполнены условия теоремы 10.2. Учитывая, что задание на модуле $T(S^{-1}\mathcal{K}_p) \otimes H(X; \mathbf{Z}_p)$ над алгеброй $T(S^{-1}\mathcal{K}_p)$ структуры D_∞ -модуля над D_∞ -алгеброй эквивалентно введению на $H(X; \mathbf{Z}_p)$ структуры левого $(DA)_\infty$ -комодуля $(H(X; \mathbf{Z}_p), d^{i+1}, \tau_n^i)$ над $(DA)_\infty$ -коалгеброй $(\mathcal{K}_p, d^{i+1}, \nabla_n^i)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 10.4. Пусть спектральный модуль $\{(E_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ над спектральной алгеброй $\{(A_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ является спектральной последовательностью Адамса для спектров $H(p)$ и X . Тогда дифференциалы этого спектрального модуля определяют на комодуле $(H(X; \mathbf{Z}_p), \tau)$ над коалгеброй Милнора (K_p, ∇) структуру стабильного $(DA)_\infty$ -комодуля $(H(X; \mathbf{Z}_p), d^{i+1}, \tau_n^i)$ над $(DA)_\infty$ -коалгеброй Милнора $(K_p, d^{i+1}, \nabla_n^i)$, где $d^{i+1} = 0$, $i \geq 0$, $\tau_0^0 = \tau$, $\nabla_0^0 = \nabla$. Левый A_∞ -модуль гомологий $H(F(K_p, H(X; \mathbf{Z}_p)), d^{i+1}, \mu)$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(F(K_p), d^{i+1}, \pi)$ изоморфен левому предельному A_∞ -модулю $(E_\infty, \mu_n^{(\infty)})$ над предельной A_∞ -алгеброй $(A_\infty, \pi_n^{(\infty)})$ рассматриваемой спектральной последовательности Адамса.

Если взять суммарные A_∞ -структуры для стабильных $(DA)_\infty$ -структур из теоремы 10.4, то получим, что модуль гомологий $H(X; \mathbf{Z}_p)$ любого спектра X имеет структуру A_∞ -комодуля над A_∞ -коалгеброй Милнора K_p , для которой A_∞ -модуль гомологий $H(F(K_p, H(X; \mathbf{Z}_p)))$ над A_∞ -алгеброй гомологий $H(F(K_p))$ является предельным членом рассмотренной выше спектральной последовательности Адамса для вычисления p -примарных компонент гомотопических групп спектра X .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берикашвили Н. А. Дифференциалы спектральной последовательности/ Тр. Тбилисс. мат. ин-та им. А. М. Размадзе. — 1976. — 51. — 105 с.
2. Лапин С. В. Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули// Мат. сб. — 2001. — 192, № 11. — С. 55–76.
3. Лапин С. В. D_∞ -дифференциальные A_∞ -алгебры и спектральные последовательности// Мат. сб. (в печати)
4. Лапин С. В. $(DA)_\infty$ -модули над $(DA)_\infty$ -алгебрами и спектральные последовательности// Изв. РАН, сер. мат. (в печати).
5. Свитцер Р. М. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
6. Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологических пространств// Мат. сб. — 1981. — 115 (157), № 1. — С. 146–158.
7. Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1985. 49, № 6. — С. 1302–1321.
8. Смирнов В. А. Когомологии алгебры Стиррода// Мат. заметки. — 1992. 52, № 2. — С. 120–126.
9. Смирнов В. А. Вторичные операции в гомологиях операды E // Изв. РАН, сер. мат. — 1992. 56, № 2. — С. 449–468.
10. Смирнов В. А. Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций// Изв. РАН, сер. мат. — 1994. — 58, № 4. — С. 80–96.
11. Смирнов В. А. E_∞ -структуры на гомотопических группах// Мат. заметки. — 1997. — 61, № 1. — С. 152–156.
12. Смирнов В. А. Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий// Изв. РАН, сер. мат. — 1998. — 62, № 3. — С. 121–154.
13. Уайтхед Дж. Новейшие достижения в теории гомотопий. — М.: Мир, 1974.
14. Adams J. F. On the structure and applications of the Steenrod algebra// Comment. Math. Helv. — 1958. — 32. — С. 180–214.
15. Brown E. Twisted tensor products// Ann. Math. — 1959. — 69, № 1. — С. 223–240.
16. Eilenberg S., Moore J. Adjoint functors and triples// Ill. J. Math. — 1965. — 9. — С. 381–398.
17. Eilenberg S., Moore J. Homology and fibrations// Comment. Math. Helv. — 1966. — 40. — С. 199–236.
18. Gugenheim V. K. A. M. On the theorem of E. H. Brown// Ill. J. Math. — 1960. — 4. — С. 292–311.
19. Gugenheim V. K. A. M. On a chain complex of a fibration// Ill. J. Math. — 1972. — 3. — С. 398–414.
20. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A. Perturbation theory in differential homological algebra. I// Ill. J. Math. — 1989. — 33, № 4. — С. 566–582.
21. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Algebraic aspects of Chen's twisting cochain// Ill. J. Math. — 1990. — 34. — С. 485–502.
22. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II// Ill. J. Math. — 1991. — 35, № 3. — С. 357–373.
23. Gugenheim V. K. A. M., Stasheff J. D. On perturbations and A_∞ -structures// Bull. Soc. Math. Belg. — 1986. — 38. — С. 237–246.

24. *Hirsch G.* Sur les groupes d'homology des espaces fibres// Bull. Soc. Math. Belg. — 1953. — 6. — С. 79–106.
25. *Hirsch G.* Sur la definition d'operation cohomologiques d'ouder superieur an moyen d'une suite spectral// Bull. Soc. Math. France. — 1959. — 87. — С. 361–382.
26. *Huebschmann J., Kadeishvili T.* Small models for chain algebras// Math. Z. — 1991. — 207. — С. 245–280.
27. *Lambe L. A., Stasheff J. D.* Applications of perturbation theory to iterated fibrations// Manuscr. Math. — 1987. — 58. — С. 363–376.
28. *May J. P.* The geometry of iterated loop spaces/ Lect. Notes Math. — 1972. — 271.
29. *Milnor J.* The Steenrod and its dual// Ann. Math. — 1958. — 67. — С. 150–171.
30. *Munkholm H. J.* The Eilenberg–Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps// J. Pure Appl. Algebra. — 1974. — 5. — С. 1–50.
31. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H -spaces, I, II// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — 108, № 2. — С. 275–312.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ И РАСШИРЕНИЯ C^* -АЛГЕБР

© 2003 г. В. М. МАНУЙЛОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	92
1. Асимптотические гомоморфизмы C^* -алгебр	92
2. Расширения C^* -алгебр	95
3. Отображения, связывающие асимптотические гомоморфизмы и расширения	97
Список литературы	100

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего обзора является (весьма) краткое введение в две теории в категории C^* -алгебр — теорию асимптотических гомоморфизмов и теорию расширений — и изложение результатов, показывающих связь между этими теориями. В разделе 1 кратко излагается теория асимптотических гомоморфизмов, созданная А. Конном и Н. Хигсоном [10]. В разделе 2 приводятся основные сведения из теории расширений C^* -алгебр и обсуждаются различные подходы к определению отношения эквивалентности для расширений. Раздел 3 является обзором недавних совместных работ К. Томсена и автора о связи двух теорий, в которых было показано, что имеется взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами асимптотических гомоморфизмов надстроженных C^* -алгебр и классов эквивалентности расширений.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ C^* -АЛГЕБР

Перед тем, как дать формальное определение асимптотического гомоморфизма, рассмотрим пример Войкулеску почти коммутирующих унитарных матриц [21].

Пример 1.1. Для любой конечной размерности $n > 2$ введем обозначение $\lambda_n = e^{2\pi i/n}$ и определим унитарные матрицы $u_n, v_n \in U_n$

$$u_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & & & & 0 \\ & \lambda_n^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}, \quad v_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную операторную норму в пространстве M_n комплексных $(n \times n)$ -матриц. Легко видеть, что величина $\|u_n v_n - v_n u_n\| = |\lambda_n - 1|$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отвечая на вопрос П. Халмоша, Д. Войкулеску показал, что вблизи от пары (u_n, v_n) не существует пар унитарных матриц, которые в точности коммутируют. Его доказательство имеет топологическую природу. Пусть $t \in [0, 1]$, а $u, v \in U_n$ удовлетворяют оценке $\|uv - vu\| < 2$. Рассмотрим функцию

$$F(t) = \det(t \cdot 1 + (1 - t)uvu^{-1}v^{-1}).$$

Функция $F(t)$ нигде не обращается в нуль в силу неравенства $\|1 - uvu^{-1}v^{-1}\| < 2$ и, очевидно, имеет место равенство $F(0) = F(1)$; поэтому F корректно определяет отображение окружности S^1

в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть $w(u, v) \in \mathbb{Z}$ — число вращения этого отображения. Если матрицы u и v в точности коммутируют, то, очевидно, $w(u, v) = 0$, однако простое вычисление показывает, что $w(u_n, v_n) = 1$.

Поскольку C^* -алгебра $C(\mathbb{T}^2)$ непрерывных функций на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ порождена двумя унитарными образующими, $e^{2\pi i x}$ и $e^{2\pi i y}$, соответствие $e^{2\pi i x} \mapsto u_n$, $e^{2\pi i y} \mapsto v_n$ может быть продолжено до последовательности отображений на плотной подалгебре в $C(\mathbb{T}^2)$ с помощью формулы

$$\sum_{k,l} a_{kl} e^{2\pi i(kx+ly)} \mapsto \sum_{k,l} a_{kl} u_n^k v_n^l.$$

Такая последовательность отображений асимптотически ведет себя как гомоморфизм из C^* -алгебры $C(\mathbb{T}^2)$ в C^* -алгебру $\mathcal{K}^+$ компактных операторов с присоединенной единицей (мы считаем, что унитарная группа U_n вкладывается в унитарную группу алгебры $\mathcal{K}^+$ по формуле $U_n \ni u \mapsto u \oplus 1_\infty \in \mathcal{K}^+$). Отметим, что вместо дискретного параметра можно использовать непрерывный благодаря наблюдению А. С. Мищенко [18], который показал, что существует такой путь (u_t, v_t) , соединяющий пару $(u_n \oplus 1, v_n \oplus 1)$ с парой (u_{n+1}, v_{n+1}) в $U_{n+1} \times U_{n+1}$, что норма коммутатора $\|[u_t, v_t]\|$ не превосходит $|\lambda_n - 1|$ вдоль всего пути.

Этот пример мотивирует следующее определение, предложенное А. Конном и Н. Хигсоном. Пусть A, B — C^* -алгебры.

Определение 1.2 (см. [10]). *Асимптотическим гомоморфизмом из A в B называется семейство отображений $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ со следующими свойствами:*

- (i) для любого $a \in A$ отображение $[0, \infty) \rightarrow B$, определенное формулой $t \mapsto \varphi_t(a)$, является непрерывным;
- (ii) для любых $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ имеют место предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a^*) - \varphi_t(a)^*\| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a + \lambda b) - \varphi_t(a) - \lambda \varphi_t(b)\| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(ab) - \varphi_t(a)\varphi_t(b)\| &= 0. \end{aligned}$$

Два асимптотических гомоморфизма $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)}, (\psi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ эквивалентны, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a) - \psi_t(a)\| = 0$ для любого $a \in A$.

Пусть $C_b([0, \infty); B)$ — C^* -алгебра ограниченных непрерывных B -значных функций на полупрямой $[0, \infty)$, а $C_0([0, \infty); B)$ — ее идеал, состоящий из функций, стремящихся к нулю в бесконечности. Тогда асимптотический гомоморфизм определяет настоящий $*$ -гомоморфизм из A в фактор- C^* -алгебру $C_b([0, \infty); B)/C_0([0, \infty); B)$ (отметим, что, хотя асимптотические гомоморфизмы можно рассматривать как настоящие $*$ -гомоморфизмы в эту огромную C^* -алгебру, эта точка зрения менее продуктивна). Используя ту или иную версию теоремы непрерывного выбора Майкла [7, 14, 17] (см. теорему 3.2 ниже), можно убедиться в том, что каждый асимптотический гомоморфизм эквивалентен *равномерно-непрерывному* асимптотическому гомоморфизму. В дальнейшем мы не различаем эквивалентные асимптотические гомоморфизмы и считаем, что все асимптотические гомоморфизмы равномерно-непрерывны.

Пусть $s : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — такая непрерывная функция, что $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \infty$. Тогда асимптотический гомоморфизм $(\varphi_{s(t)})_{t \in [0, \infty)}$ называется *репараметризацией* асимптотического гомоморфизма $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)}$. Представляется естественным не различать репараметризации одного и того же асимптотического гомоморфизма. Более того, удобнее работать с еще более слабым понятием эквивалентности — гомотопической эквивалентностью. Пусть $B[0, 1]$ — C^* -алгебра непрерывных B -значных функций на отрезке $[0, 1]$ и пусть $ev_0, ev_1 : B[0, 1] \rightarrow B$ — гомоморфизмы «вычисления» в концах отрезка. Два асимптотических гомоморфизма $(\varphi_t^0)_{t \in [0, \infty)}, (\varphi_t^1)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ *гомотопны*, если существует такой асимптотический гомоморфизм $(\Phi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B[0, 1]$, что $ev_i \circ \Phi_t = \varphi_t^i$ для $i = 0, 1$.

Отметим, что асимптотические гомоморфизмы существенно менее жестки, чем настоящие $*$ -гомоморфизмы. Действительно, пример Войкулеску пар унитарных матриц показывает, что существуют гомотопически нетривиальные асимптотические гомоморфизмы из $C(\mathbb{T}^2)$ в $\mathcal{K}^+$. В то же

время легко видеть, что любой настоящий $*$ -гомоморфизм из $C(\mathbb{T}^2)$ в $\mathcal{K}^+$ гомотопически тривиален. В самом деле, любой такой гомоморфизм определен своими значениями на образующих — функциях $e^{2\pi i x}$ и $e^{2\pi i y}$, т.е. двумя коммутирующими унитарными операторами в алгебре $\mathcal{K}^+$. Как известно, в соответствующем гильбертовом пространстве существует базис, по отношению к которому оба коммутирующих оператора диагональны. Поскольку любое число $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, можно соединить с 1 путем на окружности $|\lambda| = 1$, оба унитарных оператора можно соединить с единичным оператором в унитарной группе алгебры $\mathcal{K}^+$.

Хотя композиция асимптотического гомоморфизма и настоящего $*$ -гомоморфизма очевидно является асимптотическим гомоморфизмом, композиция двух асимптотических гомоморфизмов $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ и $(\psi_t)_{t \in [0, \infty)} : B \rightarrow C$ вовсе не обязана быть асимптотическим гомоморфизмом. Тем не менее, если C^* -алгебры A и B сепарабельны, то семейство отображений $(\psi_{s(t)} \circ \varphi_t)_{t \in [0, \infty)}$ является асимптотическим гомоморфизмом, если функция $s(t)$ стремится к бесконечности достаточно быстро (тогда семейство отображений φ_t изменяется настолько медленно, что семейство $\psi_{s(t)}$ не чувствует его изменения), и, таким образом, композиция корректно определена с точностью до гомотопии.

Асимптотические гомоморфизмы можно также тензорно умножать друг на друга. Например, если $C_0(X)$ — коммутативная C^* -алгебра и $(\beta_t)_{t \in [0, \infty)} : C_0(X) \rightarrow \mathcal{K}$ и $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ — асимптотические гомоморфизмы, то $(\beta_t \otimes \varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : C_0(X) \otimes A \rightarrow B \otimes \mathcal{K}$ — также асимптотический гомоморфизм. Мы будем использовать эту конструкцию в специальном случае, когда $X = (0, 1)^2$ — открытый квадрат. Так как $C_0((0, 1)^2)$ является подалгеброй (без единицы) алгебры $C(\mathbb{T}^2)$, семейство отображений, описанное в примере 1.1, можно ограничить до асимптотического гомоморфизма $(\beta_t)_{t \in [0, \infty)} : C_0((0, 1)^2) \rightarrow \mathcal{K}$, который мы называем *асимптотическим гомоморфизмом Ботта*. Тензорное произведение с (β_t) определяет так называемый *гомоморфизм Ботта в $\mathcal{K}$ -теории*.

Обозначим через $[[A, B]]$ множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из A в B . Пусть C^* -алгебра B *стабильна*, т.е. изоморфна самой себе, тензорно умноженной на C^* -алгебру компактных операторов, $B \cong B \otimes \mathcal{K}$. Зафиксируем вложение $B \oplus B \subset B$, индуцированное вложением $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. Операция взятия прямых сумм асимптотических гомоморфизмов превращает $[[A, B]]$ в абелеву группу с нулевым гомоморфизмом в качестве тривиального элемента (гомотопический класс прямой суммы не зависит от конкретного выбора вложения $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$). Обозначим через SA C^* -алгебру непрерывных A -значных функций на отрезке $[0, 1]$, равных нулю на концах отрезка. C^* -алгебра вида SA называется *надстройкой*. Через $S^n A = S(S^{n-1} A) \cong C_0((0, 1)^n) \otimes A$ мы будем обозначать итерированную надстройку над алгеброй A .

Если B стабильна, а A является надстройкой, то полугруппа $[[A, B]]$ оказывается группой, и обратный элемент определяется заменой ориентации интервала $[0, 1]$. На категории сепарабельных C^* -алгебр бифунктор $(A, B) \mapsto [[SA, B \otimes \mathcal{K}]]$ совпадает (с точностью до градуировки) с E -функтором Конна—Хигсона [10, 11]. В частности, этот бифунктор периодичен по Ботту, т.е. группы $[[S^3 A, B \otimes \mathcal{K}]]$, $[[SA, S^2 B \otimes \mathcal{K}]]$ и $[[SA, B \otimes \mathcal{K}]]$ совпадают. Отметим, что изоморфизм $[[S^3 A, B \otimes \mathcal{K}]] \cong [[SA, B \otimes \mathcal{K}]]$ или, в более общем случае, гомоморфизм

$$\text{Bott} : [[A, B \otimes \mathcal{K}]] \rightarrow [[S^2 A, B \otimes \mathcal{K}]]$$

индуцирован отображением $\varphi \mapsto \varphi \otimes \beta$, где $\varphi = (\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B \otimes \mathcal{K}$, а $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, \infty)} : C_0((0, 1)^2) \rightarrow \mathcal{K}$ — асимптотический гомоморфизм Ботта (мы пользуемся здесь изоморфизмами $S^2 A \cong C_0((0, 1)^2) \otimes A$ и $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$).

Заменяя в определении 1.2 непрерывный параметр $t \in [0, \infty)$ на дискретный, $n \in \mathbb{N}$, получим определение *дискретного асимптотического гомоморфизма*. При этом условие (i) определения не имеет смысла, и дискретная версия асимптотических гомоморфизмов является более общей, чем непрерывная. Очевидно, что беря значения φ_t в целых точках $t \in \mathbb{N}$, можно из непрерывного асимптотического гомоморфизма получить дискретный, однако обратное неверно. Чтобы избежать этого, А. С. Мищенко [3] предложил рассматривать дискретные асимптотические гомоморфизмы $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} : A \rightarrow B$ с дополнительным свойством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{n+1}(a) - \varphi_n(a)\| = 0 \quad (1.1)$$

для любого $a \in A$.

Такой дискретный асимптотический гомоморфизм $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ определяет непрерывный асимптотический гомоморфизм. Действительно, достаточно просто соединить соседние отображения φ_n и φ_{n+1} линейным путем. Следующая простая лемма показывает, что обратное утверждение (с учетом свойства (1.1)) также верно.

Лемма 1.3 (см. [15]). Пусть A — сепарабельная C^* -алгебра, $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Тогда существует такая последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \|\varphi_t(a) - \varphi_{t_n}(a)\| = 0$ для любого $a \in A$.

Доказательство. Возьмем такую возрастающую последовательность $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конечных подмногожеств в алгебре A , что их объединение плотно в A , и пусть $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда на каждом отрезке $[n, n+1]$ можно найти конечное число таких точек t_i , что $\sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|\varphi_t(a) - \varphi_{t_i}(a)\| < \varepsilon_n$ для всех $a \in F_n$. Объединяя все эти точки, получаем искомую последовательность. $\square$

Дискретизацией асимптотического гомоморфизма $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)}$ называется дискретный асимптотический гомоморфизм $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющий равенству $\phi_n = \varphi_{t_n}$, где последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям леммы 1.3. Легко видеть, что различные дискретизации одного и того же асимптотического гомоморфизма гомотопны друг другу.

2. РАСШИРЕНИЯ C^* -АЛГЕБР

Последовательность

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

C^* -алгебр и их $*$ -гомоморфизмов называется *короткой точной* последовательностью, если ядро каждого следующего $*$ -гомоморфизма в (2.1) совпадает с образом предыдущего. Проще говоря, это значит, что B есть идеал в E , а соответствующая фактор-алгебра есть A . Когда C^* -алгебры A и B заданы, короткая точная последовательность (2.1) называется *расширением* алгебры A алгеброй B . Важнейшей проблемой, связанной с расширениями, является их классификация. В случае, когда $B = \mathcal{K}$ и A коммутативна, расширения классифицируются теорией Брауна—Дугласа—Филлмора [8] — замечательным объединением аналитических и топологических методов. KK -Теория Каспарова классифицирует расширения *ядерных* C^* -алгебр стабильными [1], но в общем случае расширения стабильными C^* -алгебрами не классифицированы.

При изучении расширений часто работают с их инвариантами Басби [9]. Чтобы объяснить, что это такое, напомним сначала понятие алгебры мультипликаторов. Наиболее удобным языком для этого является язык гильбертовых C^* -модулей [5, 13, 19]. Пусть B — C^* -алгебра, $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ — банахово пространство, одновременно являющееся (правым) B -модулем, снабженным полуторалинейным B -значным внутренним (скалярным) произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow B$, удовлетворяющим следующим условиям для любых $x, y \in \mathcal{M}$, $b \in B$:

- (i) $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b$;
- (ii) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$;
- (iii) $\langle x, x \rangle \in B$ является положительным элементом;
- (iv) $\|x\|_{\mathcal{M}} = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$.

Два основных примера гильбертовых C^* -модулей — это сама алгебра B (с внутренним произведением $\langle a, b \rangle = a^*b$, где $a, b \in B$) и стандартный модуль $l_2(B) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B$, состоящий из таких последовательностей $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $b_n \in B$, что ряд $\sum_n b_n^* b_n$ сходится по норме в алгебре B (с внутренним произведением $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_n a_n^* b_n$, где $(a_n), (b_n) \in \mathcal{M}$).

Линейный оператор $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ называется B -линейным, если $T(xb) = T(x)b$ для любых $x \in \mathcal{M}$, $b \in B$. B -линейный оператор T допускает сопряженный, если существует B -линейный оператор $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, удовлетворяющий равенству $\langle T(m), n \rangle = \langle m, S(n) \rangle$ при любых $m, n \in \mathcal{M}$.

Множество $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ всех операторов, допускающих сопряженные, обладает естественной структурой C^* -алгебры. Оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ называется *элементарным* оператором, если он имеет вид $Tx = z\langle y, x \rangle$ для некоторых $y, z \in \mathcal{M}$. C^* -Алгеброй «компактных» операторов на $\mathcal{M}$ называется замкнутая линейная оболочка $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ множества элементарных операторов. Имеют место изоморфизмы $\mathcal{K}(B) \cong B$ и $\mathcal{K}(l_2(B)) \cong B \otimes \mathcal{K}$.

C^* -Алгебра мультипликаторов $M(B)$ C^* -алгебры B может быть определена как $\mathcal{L}(B)$. Легко проверяется, что $M(B)$ содержит $B = \mathcal{K}(B)$ в качестве идеала. Соответствующая фактор- C^* -алгебра называется алгеброй *короны* или обобщенной алгеброй Калкина и обозначается $Q(B) = M(B)/B$. Строгая топология на $M(B)$ задается полунормами $\|m\|_{b,1} = \|mb\|$ и $\|m\|_{b,2} = \|bm\|$ для $b \in B$; алгебра $M(B)$ является пополнением алгебры B в этой топологии. Напомним, что идеал B в E является существенным, если из условий $e \cdot B = 0$ и $B \cdot e = 0$, где $e \in E$, следует, что $e = 0$. Известно, что алгебра мультипликаторов является максимальной C^* -алгеброй, содержащей B в качестве существенного идеала [20].

Если B — идеал в C^* -алгебре E , то левое умножение на элемент $e \in E$ определяет (допускающий сопряженный) B -линейный оператор на B и, следовательно, задает $*$ -гомоморфизм $\mu : E \rightarrow M(B)$. Так как $\mu(B) \subset B$, μ порождает $*$ -гомоморфизм $\tau : A = E/B \rightarrow Q(B)$. Этот $*$ -гомоморфизм называется *инвариантом Басби* для расширения (2.1). Обратно, имея инвариант Басби ($*$ -гомоморфизм $A \rightarrow Q(B)$), можно восстановить расширение. Пусть $q : M(B) \rightarrow Q(B)$ обозначает фактор-отображение. Тогда $*$ -гомоморфизму $\tau : A \rightarrow Q(B)$ ставится в соответствие расширение $E = \{(a, m) \in A \times M(B) : q(m) = \tau(a)\}$.

Для классификации расширений нам следует определить, какие расширения считать тривиальными и какой смысл придать отношению эквивалентности. И для того, и для другого существует масса возможностей. Начнем с обсуждения нескольких разумных вариантов определения тривиальности. Расширение $\lambda : A \rightarrow Q(B)$ следует считать «тривиальным», если это

- 0) *нулевое* расширение, т.е. если $\lambda = 0$;
- 1) *расщепимое* расширение, т.е. если λ допускает $*$ -гомоморфизм в качестве поднятия (это значит, что существует такой $*$ -гомоморфизм $f : A \rightarrow M(B)$, что $q \circ f = \lambda$. В терминах короткой точной последовательности $0 \rightarrow B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \rightarrow 0$ расщепимость означает существование такого $*$ -гомоморфизма $s : A \rightarrow E$, что $p \circ s$ — тождественное отображение алгебры A);
- 2) *асимптотически расщепимое* расширение, т.е. если λ допускает асимптотический гомоморфизм в качестве поднятия (это значит, что существует такой асимптотический гомоморфизм $(f_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow M(B)$, что $q \circ f_t = \lambda$ для каждого t);
- 3) *дискретно асимптотически расщепимое* расширение, т.е. если λ допускает дискретный асимптотический гомоморфизм $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в качестве поднятия (это почти то же самое, что и предыдущее, но параметр дискретен и нет никакой связи между f_n и f_{n+1}).

Имеется также несколько естественных определений эквивалентности расширений. Пусть $\tau_0, \tau_1 : A \rightarrow Q(B)$.

- a) *Унитарная эквивалентность*: $\tau_0 \approx \tau_1$, если существует такой унитарный элемент $U \in M(B)$, что $q(U)^* \tau_0 q(U) = \tau_1$. Такое определение эквивалентности наиболее естественно, но при этом пространство классов унитарной эквивалентности не является хаусдорфовым.
- b) *Аппроксимативная унитарная эквивалентность*: $\tau_0 \approx \tau_1$, если существует последовательность $U_n \in M(B)$ таких унитарных элементов, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|q(U_n)^* \tau_0 q(U_n) - \tau_1(a)\| = 0$ для любого $a \in A$ (в другой версии аппроксимативной унитарной эквивалентности используются непрерывные семейства унитарных элементов вместо последовательностей).
- c) *Гомотопическая эквивалентность*: $\tau_0 \approx \tau_1$, если существует такой $*$ -гомоморфизм $T : A \rightarrow Q(B)[0, 1]$, что $ev_i \circ T = \tau_i$ для $i = 0, 1$.
- d) *Слабая гомотопическая эквивалентность*: $\tau_0 \approx \tau_1$, если существует такой $*$ -гомоморфизм $T : A \rightarrow Q(B[0, 1])$, что $ev_i \circ T = \tau_i$ для $i = 0, 1$ (хотя C^* -алгебра $Q(B[0, 1])$ больше, чем $Q(B)[0, 1]$, отображения «вычисления» по-прежнему корректно определены).

Чтобы проиллюстрировать разницу между двумя последними понятиями, вспомним, что в случае, когда $B = \mathcal{K}$ (и $M(B) = B(H)$), алгебра $M(B)[0, 1]$ состоит из всех непрерывных по норме

$B(H)$ -значных функций на отрезке, в то время как алгебра $M(B[0, 1])$ намного больше и состоит из всех ограниченных $B(H)$ -значных функций, непрерывных в $*$ -сильной топологии, а соответствующие алгебры короны являются их фактор-алгебрами по одному и тому же идеалу $\mathcal{K}[0, 1]$.

Если C^* -алгебра B стабильна, то вложение $B \oplus B \subset B$ определяет вложение $Q(B) \oplus Q(B) \subset Q(B)$. Это позволяет определить прямую сумму расширений.

Два расширения $\tau_0, \tau_1 : A \rightarrow Q(B)$ называются *стабильно эквивалентными*, если существуют два таких «тривиальных» расширения $\lambda_0, \lambda_1 : A \rightarrow Q(B)$, что $\tau_0 \oplus \lambda_0 \approx \tau_1 \oplus \lambda_1$.

Заметим, что любой из вариантов «тривиальности» позволяет корректно определить *бесконечную* прямую сумму $\lambda \oplus \lambda \oplus \dots$ для любого «тривиального» расширения λ . Действительно, даже для самого слабого варианта — дискретно асимптотически расщепимого расширения λ с дискретным асимптотическим поднятием $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — можно взять отображение $\bigoplus_n f_n : A \rightarrow M(B \otimes \mathcal{K}) \cong$

$M(B)$, которое является $*$ -гомоморфизмом по модулю идеала B . Отсюда, в частности, следует, что в определении стабильной эквивалентности можно использовать одно и то же расширение $\lambda = (\lambda_0 \oplus \lambda_1) \oplus (\lambda_0 \oplus \lambda_1) \oplus \dots$ вместо двух различных λ_0 и λ_1 .

Отметим также, что в случае слабой гомотопической эквивалентности эта эквивалентность совпадает со стабильной эквивалентностью, когда «тривиальность» понимается в смысле определений 0, 1, 2 (см. [1]). Это вытекает из гомотопической тривиальности «тривиальных» расширений. Рассмотрим, например, расщепимое расширение λ и его поднятие $f : A \rightarrow M(B)$. Поскольку C^* -алгебра B стабильна, C^* -алгебра мультипликаторов $M(B)$ содержит копию $B(H)$. Мы можем отождествить подлежащее гильбертово пространство с пространством $L^2[0, 1]$ квадратично интегрируемых функций. Существует такое $*$ -сильнонепрерывное семейство $P(t)$, $t \in (0, 1]$, проекторов на отрезок $[0, t]$ и такое $*$ -сильнонепрерывное семейство $U(t)$ изометрий, что $U(t)U^*(t) = P(t)$. Легкое упражнение показывает, что путь $*$ -гомоморфизмов $F : A \rightarrow M(B)$, заданный формулой

$$F_t(a) = \begin{cases} U(t)f(a)U^*(t) & \text{при } t \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } t = 0, \end{cases},$$

где $a \in A$, строго непрерывен на всем отрезке $[0, 1]$ и определяет слабую гомотопию между λ и нулевым расширением. Отметим также, что это рассуждение проходит только для слабой гомотопии. Для обычной гомотопии нам не известно даже, гомотопны ли расширения τ и $\tau \oplus 0$.

Обозначим через $\text{Ext}(A, B)$ множество классов стабильно эквивалентных расширений алгебры A алгеброй B , а варианты определений эквивалентности и «тривиальности» будем указывать индексами; например, $\text{Ext}_{1a}(A, B)$ будет означать, что мы рассматриваем в качестве «тривиальных» расщепимые расширения, а в качестве эквивалентности — унитарную эквивалентность. Будем писать просто Ext (без индексов), когда выбор определений тривиальности и эквивалентности не имеет значения (но всегда будем исключать случаи $0a$, $0b$, $1a$, $1b$). Хотя $\text{Ext}(A, B)$ всегда является полугруппой (если B стабильна), вообще говоря, группой оно не обязано быть, даже если алгебра A — надстройка. Пример такой C^* -алгебры A , что $\text{Ext}_{0a}(SA, B)$ — не группа, был найден Э. Кирхбергом [12]. С другой стороны, легко видеть, что полугруппы $\text{Ext}_{*c}(SA, B)$ и $\text{Ext}_{*d}(SA, B)$ являются группами для любых индексов $*$ (при этом операция взятия обратного элемента получается с помощью замены ориентации на отрезке $[0, 1]$ в надстройке). В общем случае можно рассмотреть в полугруппе $\text{Ext}(A, B)$ множество обратимых элементов $\text{Ext}^{-1}(A, B)$, которое заведомо является группой.

Хотя различные определения стабильной эквивалентности дают различные функторы, обычно (см. след. раздел) они совпадают, когда алгебра A является надстройкой.

3. ОТОБРАЖЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ И РАСШИРЕНИЯ

В этом разделе мы опишем два отображения, одно из которых — отображение Конна—Хигсона [10], а другое было построено в [3, 15]. Начнем с двух классических утверждений.

Пусть B — идеал в C^* -алгебре E . Напомним, что аппроксимативная единица $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$ — это такое непрерывное семейство элементов $u_t \in B$, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_t b - b\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|b u_t - b\| = 0$ для любого $b \in B$. Мы будем дополнительно предполагать, что все u_t являются самосопряженными и $0 \leq u_t \leq$

1. Аппроксимативная единица $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$ называется *квазицентральной*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|eu_t - u_te\| = 0$ для любого $e \in E$.

Теорема 3.1 (см. [6]). *Если B — идеал в сепарабельной C^* -алгебре E , то квазицентральная аппроксимативная единица существует.*

Квазицентральные аппроксимативные единицы существуют и в несколько более общей ситуации. Достаточно требовать, чтобы фактор-алгебра E/B была сепарабельной, а B — σ -унитальной (т.е. B обладает счетной аппроксимативной единицей, или, эквивалентно, строго положительным элементом).

Для иллюстрации этого понятия рассмотрим C^* -алгебру Теплица $\mathcal{T}$ в $B(H)$, порожденную оператором одностороннего сдвига (мы отождествляем H с $l_2(\mathbb{N})$). Эта C^* -алгебра содержит $\mathcal{K}$ в качестве идеала, соответствующая фактор- C^* -алгебра есть алгебра $C_0(0, 1)$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, обращающихся в нуль в концах отрезка, и алгебра Теплица задает расширение

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C_0(0, 1) \longrightarrow 0.$$

В качестве примера квазицентральной аппроксимативной единицы можно взять при целых значениях параметра операторы

$$u_n = \text{diag} \left\{ \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots \right\},$$

а затем соединить их кусочно-линейным путем u_t . Очевидно, u_t асимптотически коммутирует с оператором одностороннего сдвига и, следовательно, с любым элементом алгебры $\mathcal{T}$.

Второй классический результат относится к фактор-отображениям. Это — вариант теоремы Майкла о непрерывном выборе, принадлежащий Т. Лорингу [14] (см. также [7]). Он часто применяется к фактор-отображениям C^* -алгебры мультипликаторов на алгебры короны.

Теорема 3.2. *Для любого сюръективного $*$ -гомоморфизма $p : E \rightarrow A$ существует такое непрерывное однородное (но не обязательно линейное) отображение $s : A \rightarrow E$, что $p \circ s = \text{id}_A$.*

Теперь мы готовы описать конструкцию Конна—Хигсона [10], преобразующую расширения в асимптотические гомоморфизмы. Чтобы не путаться с различными вариантами определений стабильной эквивалентности расширений, начнем со следующего результата.

Теорема 3.3 (см. [16]). *Пусть A — сепарабельная C^* -алгебра, B — σ -унитальная C^* -алгебра. Тогда все $\text{Ext}_{**}(SA, B)$ (кроме случаев, когда $**$ есть $0a$, $0b$, $1a$ или $1b$) совпадают и являются группами, т.е. $\text{Ext}_{**}(SA, B) = \text{Ext}_{**}^{-1}(SA, B)$.*

С этого момента мы будем предполагать, что алгебра A сепарабельна, а B — σ -унитальна.

Пусть $\tau : A \rightarrow Q(B)$ — расширение. Обозначим через $s : Q(B) \rightarrow M(B)$ непрерывное отображение, указанное в теореме 3.2. Пусть $E \subset M(B)$ — C^* -алгебра, порожденная алгеброй B и множеством $(s \circ \tau)(A)$. Тогда для $B \subset E$ существует квазицентральная аппроксимативная единица $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$. Так как $0 \leq u_t \leq 1$ для каждого t , элемент $f(u_t) \in B$ корректно определен для любой функции $f \in C_0(0, 1)$. Поскольку $f(0) = 0$, для любого $b \in B$ выполнены равенства $\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t)b = \lim_{t \rightarrow \infty} bf(u_t) = 0$. Кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(u_t)e - ef(u_t)\| = 0$ для любого $e \in E$.

Асимптотический гомоморфизм из надстройки SA достаточно определить на элементарных тензорах вида $f \otimes a \in SA$. Положим $\varphi_t(f \otimes a) = f(u_t) \cdot (s \circ \tau)(a) \in B$. Легкое упражнение показывает, что $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : SA \rightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Это дает нам конструкцию, перерабатывающую расширения в асимптотические гомоморфизмы. Эта конструкция Конна—Хигсона задает гомоморфизм полугрупп

$$CH : \text{Ext}(A, B) \longrightarrow [[SA, B]],$$

который является гомоморфизмом групп, когда алгебра A — надстройка.

Отображение в обратном направлении — из асимптотических гомоморфизмов в расширения — также можно определить [3, 15], но такое отображение также надстраивает алгебру A .

Пусть $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Возьмем его дискретизацию $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Для определенности положим $\varphi_n(a) = 0$ для любого $a \in A$, в случае, когда n отрицательно. Рассмотрим гильбертов C^* -модуль $l_2(B) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} B$ (здесь удобнее работать с гильбертовым C^* -модулем, состоящим из двусторонних последовательностей вместо односторонних; он изоморфен стандартному, аналогично тому, как это обстоит для классического гильбертова пространства l_2). Операторы в $\mathcal{L}(l_2(B))$ можно записывать с помощью бесконечных матриц по отношению к разложению $l_2(B) = \bigoplus_n B$, как и в случае обычного гильбертова пространства. Будем использовать стандартные матричные обозначения: элементарная матрица $e_{i,j}$ обозначает оператор $e_{i,j} : l_2(B) \rightarrow l_2(B)$ частичной изометрии из j -й копии модуля $B \subset l_2(B)$ на i -ю копию B , тождественный на B . Положим $T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{n,n-1}$, т.е. T — оператор двустороннего сдвига в $l_2(B)$. Поскольку алгебра $C(S^1)$ непрерывных функций на окружности порождена одним элементом — функцией $e^{2\pi i x}$, достаточно определить гомоморфизм из $C(S^1) \otimes A$ на элементарных тензорах вида $e^{2\pi i k x} \otimes a$, где $a \in A$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$f(e^{2\pi i k x} \otimes a) = T^k \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(a) e_{n,n} \right).$$

Из свойств асимптотического гомоморфизма (φ_n) и из (1.1) следует, что f является $*$ -гомоморфизмом по модулю «компактных» операторов гильбертова C^* -модуля $l_2(B)$. Но, поскольку B стабильна, $\mathcal{K}(l_2(B)) \cong B$, значит, отображение $q \circ f : C(S^1) \otimes A \rightarrow Q(B)$ есть $*$ -гомоморфизм, где $q : \mathcal{L}(l_2(B)) \cong M(B) \rightarrow Q(B)$ — фактор-отображение. Отметим, что надстройка SA является идеалом в $C(S^1) \otimes A$, и мы можем ограничить $*$ -гомоморфизм $q \circ f$ на SA , чтобы получить $*$ -гомоморфизм $\tau : SA \rightarrow Q(B)$. Можно проверить, что класс стабильной эквивалентности τ не зависит ни от выбора дискретизации, ни от выбора асимптотического гомоморфизма (φ_t) в его классе гомотопической эквивалентности, поэтому мы получаем гомоморфизм полугрупп

$$E : [[A, B]] \rightarrow \text{Ext}(SA, B),$$

являющийся гомоморфизмом групп, когда алгебра A уже была надстройкой.

Функторы расширений и асимптотических гомоморфизмов вместе с их морфизмами представлены на диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}(A, B) & \xrightarrow{CH} & \text{Ext}(SA, B) & \xrightarrow{CH} & \text{Ext}(S^2 A, B) & \xrightarrow{CH} & \text{Ext}(S^3 A, B) & \xrightarrow{CH} & \cdots \\ & \searrow E & \nearrow E & \searrow E & \nearrow E & \searrow E & \nearrow E & \searrow E & \cdots \\ [[A, B]] & & [[SA, B]] & & [[S^2 A, B]] & & [[S^3 A, B]] & & \cdots \end{array} \quad (3.1)$$

Для сравнения двух строк функторов вспомним о гомоморфизме Ботта

$$\text{Bott} : [[A, B]] \longrightarrow [[S^2 A, B]],$$

описанном в разделе 1. Хотя, вообще говоря, это отображение далеко от взаимно однозначного, оно является изоморфизмом, когда алгебра A является надстройкой [10] (более того, C^* -алгебры SA и $S^3 A$ изоморфны друг другу в категории, объектами которой служат классы эквивалентности по Морите сепарабельных C^* -алгебр, а морфизмами — асимптотические гомоморфизмы [10]).

Рассмотрим треугольник

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ext}(S^2 A, B) & \\ E \nearrow & & \searrow CH \\ [[SA, B]] & \xrightarrow[\text{Bott}]{\approx} & [[S^3 A, B]] \end{array} \quad (3.2)$$

из диаграммы (3.1).

Теорема 3.4 (см. [4]). *Диаграмма (3.2) коммутативна, т.е. $CH \circ E = \text{Bott}$.*

Из теоремы 3.4 вытекает, что группа $[[SA, B]]$ есть прямое слагаемое в $\text{Ext}(S^2A, B)$. Если бы мы могли определить отображение Ботта для расширений, то из теоремы 3.4 вместе с аналогичным (симметричным) утверждением $E \circ CH = \text{Bott}$ следовали бы изоморфизмы $[[S^2A, B]] \cong \text{Ext}(SA, B)$ и $[[SA, B]] \cong \text{Ext}(S^2A, B)$. Однако сложность здесь в том, что, если тензорно перемножить расширение $\tau : A \rightarrow Q(B)$ и асимптотический гомоморфизм Ботта $(\beta_t)_{t \in [0, \infty)} : C_0((0, 1)^2) \rightarrow \mathcal{K}$, то в результате получится отображение из S^2A в $Q(B) \otimes \mathcal{K}$, являющееся лишь асимптотическим гомоморфизмом. Поскольку имеется естественное вложение $Q(B) \otimes \mathcal{K} \subset Q(B \otimes \mathcal{K}) \cong Q(B)$, мы получаем асимптотический гомоморфизм $S^2A \rightarrow Q(B)$. Поэтому хорошо было бы иметь конструкцию, позволяющую перерабатывать асимптотические гомоморфизмы в настоящие. Мы знаем, что в общем случае это невозможно (мы видели, что гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов в $\mathcal{K}$ больше, чем гомотопических классов настоящих гомоморфизмов), однако случай C^* -алгебр короны — особый!

Пусть $(\varphi_t)_{t \in [0, \infty)} : A \rightarrow Q(B)$ — асимптотический гомоморфизм, а $E \subset M(B) — C^* -алгебра, порожденная множеством $(s \circ \varphi_t)(A)$, где $s : Q(B) \rightarrow M(B)$ непрерывное поднятие (см. теорему 3.2). Пусть $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — дискретная квазицентральная аппроксимативная единица для идеала B в E с дополнительным свойством$

$$u_{n+1}u_n = u_n. \quad (3.3)$$

Это свойство может быть обеспечено, если мы возьмем $u_n = f_n(b)$, где $b \in B$ — строго положительный элемент, а $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — подходящие функции. Теперь можно применить вариант трюка Войкулеску с трехдиагональными проекторами [22]. Определим в гильбертовом C^* -модуле

$$l_2(B) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B \text{ оператор}$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1})^{1/2} e_{1,n}$$

(мы здесь предполагаем, что $u_0 = 0$). Тогда легко видеть, что $UU^* = e_{11}$ — проектор на первое слагаемое в $l_2(B)$. Но это значит, что $P = U^*U$ также является проектором в $M(B \otimes \mathcal{K})$. Возьмем дискретизацию $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ асимптотического гомоморфизма (φ_t) и определим для каждого $a \in A$ диагональный оператор $\Phi(a)$ формулой $\Phi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(a) e_{n,n} \in M(B \otimes \mathcal{K})$. Из свойства (3.3) следует, что матрица проектора P *трехдиагональна*; легко проверить, что $[P, \Phi(a)] \in B \otimes \mathcal{K}$ для любого $a \in A$ и что отображение $a \mapsto P\Phi(a)$ является $*$ -гомоморфизмом по модулю «компактных» операторов, т.е. по модулю идеала $B \otimes \mathcal{K}$, так что мы можем определить расширение $\tau : A \rightarrow Q(B)$ равенством $\tau_\varphi(a) = q(P\Phi(a))$.

Теорема 3.5 (см. [2, 16]). *Пусть A — надстройка. Тогда асимптотический гомоморфизм $(\varphi_t) \oplus 0$ и $*$ -гомоморфизм $\tau_\varphi \oplus 0$ гомотопны.*

Приведем теперь наш основной результат о взаимоотношении между асимптотическими гомоморфизмами и расширениями C^* -алгебр.

Теорема 3.6 (см. [16]). *Группы $[[SA, B]]$ и $\text{Ext}(S^2A, B)$ (соотв. $[[S^2A, B]]$ и $\text{Ext}(SA, B)$) функционально изоморфны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каспаров Г. Г. Операторный K -функтор и расширения C^* -алгебр // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1980. — 44. — С. 571–636.
2. Мануйлов В. М. Об асимптотических гомоморфизмах в алгебры Калкина // Функц. анализ и его прилож. — 2001. — 35, № 2. — С. 81–84.
3. Мануйлов В. М., Мищенко А. С. Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп // Мат. сб. — 1998. — 189, № 10. — С. 53–72.
4. Мануйлов В. М., Томсен К. Асимптотически расщепимые расширения и E -теория // Алгебра и анализ. — 2000. — 12, № 5. — С. 142–157.
5. Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. C^* -гильбертовы модули. — М.: Факториал, 2001.
6. Arveson W. Notes on extensions of C^* -algebras // Duke Math. J. — 1977. — 44. — С. 329–355.

7. *Bartle R. G., Graves L. M.* Mappings between function spaces// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1952. — 72. — С. 400–413.
8. *Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A.* Extensions of C^* -algebras and K -homology// *Ann. Math.* — 1977. — 105. — С. 265–324.
9. *Busby R.* Double centralizers and extensions of C^* -algebras// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1968. — 132. — С. 79–99.
10. *Connes A., Higson N.* Déformations, morphismes asymptotiques et K -théorie bivariante// *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I, Math.* — 1990. — 311. — С. 101–106.
11. *Dădărlat M., Loring T. A.* K -homology, asymptotic representations and unsuspended E -theory// *J. Funct. Anal.* — 126. — С. 367–383.
12. *Kirchberg E.* On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^* -algebras// *Invent. Math.* — 112. — С. 449–489.
13. *Lance E. C.* Hilbert C^* -modules — a toolkit for operator algebraists/ *London Math. Soc. Lect. Note Ser.* — Cambridge Univ. Press, 1995. — 210.
14. *Loring T.* Almost multiplicative maps between C^* -algebras// В кн.: *Operator algebras and quantum field theory.* — Intern. Press, 1997. — С. 111–122.
15. *Manuilov V., Thomsen K.* Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms// *Adv. Math.* — 2000. — 154. — С. 258–279.
16. *Manuilov V., Thomsen K.* The Connes–Higson construction is an isomorphism/ Preprint, 2000.
17. *Michael E.* Continuous selections. I// *Ann. Math.* — 1956. — 63. — С. 361–382.
18. *Mishchenko A. S., Noor M.* Asymptotic representations of discrete groups// В кн.: *Lie groups and Lie algebras. Their representations, generalizations and applications/ Mathematics and its applications.* — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. — 433. — С. 299–312.
19. *Paschke W. L.* Inner product modules over B^* -algebras// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1973. — 182. — С. 443–468.
20. *Pedersen G. K.* C^* -algebras and their automorphism groups. — London—New York—San Francisco: Academic Press, 1979.
21. *Voiculescu D.* Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants// *Acta Sci. Math. (Szeged).* — 1983. — 45. — С. 429–431.
22. *Voiculescu D.* A note on quasidiagonal C^* -algebras and homotopy// *Duke Math. J.* — 1991. — 62. — С. 267–271.

В. М. Мануйлов

Московский государственный университет

E-mail: manuilov@mech.math.msu.su

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР

© 2003 г. И. М. НИКОНОВ

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Дифференциальным исчислением над алгеброй A называется дифференциальная градуированная алгебра $\Omega^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n$ такая, что $\Omega^0 = A$. Для любой ассоциативной алгебры строится универсальное дифференциальное исчисление $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$:

$$\Omega_{\text{univ}}^0(A) = A, \quad \Omega_{\text{univ}}^n(A) = \bigcap_{i=0}^n \ker m_i \subset A^{\otimes n+1},$$

где отображение $m_i : A^{\otimes n+1} \rightarrow A^{\otimes n}$ задается формулой

$$m_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Формулы для умножения и дифференциала имеют следующий вид:

$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \cdot b_0 \otimes \cdots \otimes b_m = a_0 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes \cdots \otimes b_m, \quad (1)$$

$$d(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \quad (2)$$

Дифференциальное исчисление $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$ обладает следующим универсальным свойством.

Утверждение 1. Пусть Ω^* — некоторое дифференциальное исчисление над алгеброй A . Тогда существует единственный морфизм дифференциальных исчислений $\psi : \Omega_{\text{univ}}^*(A) \rightarrow \Omega^*$, т.е. гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр, такой, что отображение $\psi_0 : \Omega_{\text{univ}}^0(A) \rightarrow \Omega^0$ есть тождественное отображение алгебры $A = \Omega_{\text{univ}}^0(A) = \Omega^0$.

Пусть Ω^* — некоторое дифференциальное исчисление над A и E — конечно-порожденный проективный правый A -модуль. Тогда ковариантным дифференцированием, или *связностью*, на модуле E называется $\mathbb{k}$ -линейное отображение $\nabla : E \rightarrow E \otimes_A \Omega^1$, обладающее свойством

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da \quad \text{для всех } s \in E, \quad a \in A.$$

На любом конечно-порожденном проективном модуле E , который операторы вложения $j : E \rightarrow A^{\oplus n}$ и проектирования $p : A^{\oplus n} \rightarrow E$ выделяют как прямое слагаемое в свободном модуле $A^{\oplus n}$, можно задать *грасманову связность* с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\nabla_0} & E \otimes_A \Omega^1 \\ j \downarrow & & \uparrow p \otimes \text{id} \\ A^{\oplus n} & \xrightarrow{d^n} & (\Omega^1)^{\oplus n} = A^{\oplus n} \otimes_A \Omega^1 \end{array} \quad (3)$$

Тогда любая другая связность имеет вид $\nabla = \nabla_0 + \phi$, $\phi \in \text{Hom}_A(E, E \otimes_A \Omega^1)$.

Ковариантное дифференцирование продолжается до отображения

$$\nabla : E \otimes_A \Omega^* \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+1}$$

с помощью формулы

$$\nabla(s \otimes \omega) = (\nabla s)\omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in E$, $\omega \in \Omega^*$. Отображение

$$R = \nabla^2 : E \otimes_A \Omega^* \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+2}$$

называется *кривизной* связности ∇ . Оно оказывается эндоморфизмом конечно-порожденного проективного правого Ω^* -модуля $E \otimes_A \Omega^*$, т.е. для всех $\phi \in E \otimes_A \Omega^*$, $\omega \in \Omega^*$ выполняется соотношение $R(\phi\omega) = R(\phi)\omega$.

Определение 1. *Характеристическими классами* модуля E со значениями в дифференциальном исчислении Ω^* называются элементы

$$c_n(E, \Omega^*) = [\text{Tr } R^n] \in H^{2n}(\tilde{\Omega}^*),$$

где $\tilde{\Omega}^* = \Omega^* / [\Omega^*, \Omega^*]$ — комплекс, получающийся из Ω^* после факторизации по линейному пространству, порожденному (градуированными) коммутаторами.

Утверждение 2 (см. [1]). 1) *Характеристические классы $c_n(E, \Omega^*)$ определены корректно, т.е. не зависят от связности и способа вычисления следа.*

2) *Для любых конечно-порожденных проективных правых модулей E и F имеет место соотношение*

$$c_n(E \oplus F, \Omega^*) = c_n(E, \Omega^*) + c_n(F, \Omega^*);$$

3) *$c_n(A, \Omega^*) = 0$ для любого n .*

Замечание 1. Пусть $P \in \text{End}_A(A^{\oplus n})$, $P^2 = P$ — проектор на свободном правом модуле $A^{\oplus n}$, имеющий вид $Pe_i = \sum_j p_{ij}e_j$ в фиксированном базисе модуля e_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда $E = \text{Im } P$ — проективный модуль. В данном случае, вычисляя в явном виде кривизну грассмановой связности и ее след, получаем, что m -й характеристический есть проекция элемента

$$z_m = \left(- \sum_{i,j,k=1}^n p_{ij} dp_{jk} dp_{ki} \right)^m \in \Omega^{2m} \quad (4)$$

на пространство когомологий $H^*(\tilde{\Omega}^{2m})$.

Замечание 2. Из свойства универсальности исчисления $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$ следует, что

$$c_n(E, \Omega^*) = \psi_* c_n(E, \Omega_{\text{univ}}^*(A)),$$

где отображение $\psi_* : H^*(\Omega_{\text{univ}}^*(A)) \rightarrow H^*(\tilde{\Omega}^*)$ индуцировано каноническим морфизмом дифференциальных исчислений $\psi : \Omega_{\text{univ}}^*(A) \rightarrow \Omega^*$. В частности, если $c_n(E, \Omega_{\text{univ}}^*(A)) = 0$, то $c_n(E, \Omega^*) = 0$ для любого дифференциального исчисления Ω^* . Мы будем называть классы $c_n(E) = c_n(E, \Omega_{\text{univ}}^*(A))$ *универсальными характеристическими классами* модуля E .

С этого момента мы будем считать, что A является полупростой алгеброй, т.е. представляется в виде прямой суммы матричных алгебр:

$$A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(\mathbb{k}).$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании нетривиальных характеристических классов ее конечно-порожденных проективных модулей. В силу полупростоты алгебры A любой ее конечно-порожденный модуль E проективен и имеет вид $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$, где для каждого i μ_i — целое неотрицательное число, а E_i — неприводимый модуль, соответствующий i -й матричной компоненте. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^N M_{n_i}(\mathbb{k})$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$ — конечномерный A -модуль. Тогда, если модуль E пропорционален свободному ($E = \lambda A$), т.е. существует, вообще говоря, рациональное, число λ такое, что $\mu_i = \lambda n_i$, $i = 1, \dots, N$, то все характеристические классы $c_n(E)$ равны нулю. В противном случае $c_n(E) \neq 0$ для всех n .

Доказательство. Пусть $E = \lambda A$. Тогда по свойству аддитивности характеристических классов имеем $c_n(E) = \lambda c_n(A) = 0$, поскольку $c_n(A) = 0$ для всех n .

Прежде чем доказывать вторую часть теоремы, для большей наглядности введем следующую графическую интерпретацию дифференциальных форм на алгебре A .

Пусть $e_{ij}^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$, $i, j = 1, \dots, n_k$, — стандартный базис алгебры A . Умножение в алгебре A в этом базисе имеет вид

$$e_{ij}^{(k)} e_{pq}^{(l)} = \delta_{kl} \delta_{jp} e_{iq}^{(k)}. \quad (5)$$

Тогда пространство $A^{\otimes n+1}$ имеет базис вида

$$e(k_0, i_0, j_0; k_1, i_1, j_1; \dots; k_n, i_n, j_n) = e_{i_0 j_0}^{(k_0)} \otimes e_{i_1 j_1}^{(k_1)} \otimes \dots \otimes e_{i_n j_n}^{(k_n)}.$$

Мы будем использовать следующее графическое обозначение для элементов базиса в виде размеченных путей:

$$e(k_0, i_0, j_0; k_1, i_1, j_1; \dots; k_n, i_n, j_n) = \xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \xrightarrow{i_1 \quad k_1 \quad j_1} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n}.$$

Произведение и дифференциал в графическом обозначении приобретают вид

$$\begin{aligned} & \left(\xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} \right) \cdot \left(\xrightarrow{p_0 \quad l_0 \quad q_0} \dots \xrightarrow{p_m \quad l_m \quad q_m} \right) = \\ & = \delta_{k_n l_0} \delta_{j_n p_0} \xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad q_0} \xrightarrow{p_1 \quad l_1 \quad q_1} \dots \xrightarrow{p_m \quad l_m \quad q_m}, \\ & d \left(\xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} \right) = \\ & = \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^{n_k} \xrightarrow{i \quad k \quad j} \xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} + \\ & + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^{n_k} \xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_l \quad k_l \quad j_l} \xrightarrow{i \quad k \quad j} \xrightarrow{i_{l+1} \quad k_{l+1} \quad j_{l+1}} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} + \\ & + (-1)^n \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^{n_k} \xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} \xrightarrow{i \quad k \quad j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формулы (5) получаем, что подпространство $\Omega_{\text{univ}}^n(A) \subset A^{\otimes n+1}$ совпадает со множеством линейных комбинаций путей вида

$$\xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \xrightarrow{\gamma_1 \quad k_1 \quad j_1} \xrightarrow{\gamma_2 \quad k_2 \quad j_2} \dots \xrightarrow{\gamma_n \quad k_n \quad j_n},$$

где на ребро γ_l может иметь один из следующих видов:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{i_l \quad j_{l+1}}, \quad i_l = 1, \dots, n_{k_l}, \quad j = 1, \dots, n_{k_{l+1}}, \quad \text{если } k_l \neq k_{l+1}, \\ & \xrightarrow{i_l \quad j_{l+1}}, \quad i_l, j_{l+1} = 1, \dots, n_{k_l}, \quad i_l \neq j_{l+1}, \quad \text{если } k_l = k_{l+1}, \\ & \xrightarrow{i_l} - \xrightarrow{1}, \quad i_l = 2, \dots, n_{k_l}, \quad \text{если } k_l = k_{l+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, все пути такими ребрами образуют базис пространства $\Omega_{\text{univ}}^n(A)$.

В соответствии с (6) коммутаторы образуют элементы двух типов:

1) незамкнутые пути

$$\xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} = \left[\xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad i}, \xrightarrow{i \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_n} \right],$$

когда $k_0 \neq k_n$ или $i_0 \neq j_n$;

2) сумма замкнутых путей, определяющих один цикл:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{i \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_l \quad k_l \quad j_l} \dots \xrightarrow{j_n \quad k_n \quad i} \rightarrow + \\ & + (-1)^{l(n-l)+1} \xrightarrow{j \quad k_l \quad i_l} \dots \xrightarrow{i_n \quad k_n \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_l \quad k_l \quad j} \rightarrow = \\ & = \left[\xrightarrow{i \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_l \quad k_l \quad j}, \xrightarrow{j \quad k_l \quad j_l} \dots \xrightarrow{j_n \quad k_n \quad i} \right], \end{aligned}$$

когда $k_0 = k_n$.

Поэтому $\tilde{\Omega}_{\text{univ}}^n(A)$ можно рассматривать как пространство, линейно порожденное размеченными циклами длины n с выделенным началом обхода, причем сдвиг начала обхода в соседнюю вершину изменяет знак цикла на $(-1)^n$.

Заметим, что первое и последнее слагаемое в формуле дифференциала (7) образуют коммутатор, так что для вычисления дифференциала в комплексе $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$ достаточно рассматривать только среднее слагаемое.

Вычислим теперь характеристические классы модуля $E = \sum \mu_i E_i$. В случае, когда $E = E_i$ — простой модуль, он выделяется как прямое слагаемое в свободном модуле A с помощью проектора $P = e_{11}^{(i)}$ — оператора умножения слева на элемент $e_{11}^{(i)}$. Согласно формуле (4) имеем $c_n(E_i) = [z_n^{(i)}]$, где

$$z_n^{(i)} = \left(- \sum_{k \neq i} \sum_{j=1}^{n_k} \xrightarrow{1 \quad i \quad 1} \xrightarrow{j \quad k \quad j} \xrightarrow{1 \quad i \quad 1} - \sum_{j=2}^{n_i} \xrightarrow{1 \quad i \quad 1} \xrightarrow{j \quad i \quad j} \xrightarrow{1 \quad i \quad 1} \right)^n. \quad (9)$$

В общем случае $c_n(E) = \sum_i \mu_i c_n(E_i)$.

Пусть $E \neq \lambda A$ не пропорционален свободному модулю. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $\mu_1 n_2 \neq \mu_2 n_1$. Рассмотрим линейный функционал ϕ на пространстве $A^{\otimes 2n+1}$ такой, что

$$\phi \left(\xrightarrow{i_0 \quad k_0 \quad j_0} \dots \xrightarrow{i_{2n} \quad k_{2n} \quad j_{2n}} \right) = \begin{cases} 1, & k_0 = k_{2l} = 1, \quad k_{2l-1} = 2, \quad l = \overline{1, n}, \\ & j_l = i_{l+2}, \quad l = \overline{0, 2n-2}, \\ & j_{2n} = i_0, \quad j_{2n-1} = i_1, \\ -1, & k_0 = k_{2l} = 2, \quad k_{2l-1} = 1, \quad l = \overline{1, n}, \\ & j_l = i_{l+2}, \quad l = \overline{0, 2n-2}, \\ & j_{2n} = i_0, \quad j_{2n-1} = i_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

Другими словами, $\phi = 1$ на путях вида

$$\xrightarrow{i \quad 1} \xrightarrow{\gamma_1 \quad 2} \xrightarrow{\gamma_2 \quad 1} \dots \xrightarrow{\gamma_n \quad 1},$$

где в каждом отрезке длины два

$$\xrightarrow{\alpha \quad i} \xrightarrow{j \quad \beta} \xrightarrow{p \quad q} \xrightarrow{\alpha},$$

в склеенном из пути цикле индексы i и q совпадают. Аналогично, $\phi = -1$ на путях

$$\xrightarrow{i \quad 2} \xrightarrow{\gamma_1 \quad 1} \xrightarrow{\gamma_2 \quad 2} \dots \xrightarrow{\gamma_n \quad 2}$$

с тем же условием согласованности на их отрезки.

Так как $\Omega_{\text{univ}}^{2n}(A) \subset A^{\otimes 2n+1}$, ϕ задает линейный функционал на пространстве $2n$ -мерных форм. Покажем, что ϕ на самом деле определяет функционал на пространстве $H^{2n}(\tilde{\Omega}_{\text{univ}}^*)$. Для начала проверим, что ϕ обнуляется на коммутаторах. Во-первых, $\phi = 0$ на всяком незамкнутом пути по определению. Во втором случае ненулевое значение функционала могут давать только коммутаторы

вида

$$\begin{aligned} & \left[\xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{2l}} \xrightarrow{1 \cdot j} \xrightarrow{j \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_{2l+1}} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n}} \xrightarrow{1 \cdot i} \right], \\ & \left[\xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{2l-1}} \xrightarrow{2 \cdot j} \xrightarrow{j \cdot 2} \xrightarrow{\gamma_{2l}} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n}} \xrightarrow{1 \cdot i} \right], \\ & \left[\xrightarrow{i \cdot 2} \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{2l}} \xrightarrow{2 \cdot j} \xrightarrow{j \cdot 2} \xrightarrow{\gamma_{2l+1}} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n}} \xrightarrow{2 \cdot i} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый вариант. Равенство

$$\phi \left(\xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n}} \xrightarrow{1 \cdot j} \right) = 1$$

эквивалентно равенству

$$\phi \left(\xrightarrow{j \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_{2l}} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n}} \xrightarrow{1 \cdot \gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{2l-1}} \xrightarrow{1} \right) = 1,$$

поскольку условие согласованности относится к циклу, получающемуся после склейки пути. Поэтому значение функционала на первом коммутаторе равно $1 + (-1)^{2l(2n-2l)+1} = 0$. В остальных случаях сокращение вкладов путей проверяется аналогично. Следовательно, $[\Omega_{\text{univ}}^*(A), \Omega_{\text{univ}}^*(A)]^{2n}$ содержится в ядре функционала ϕ .

Пусть

$$\omega = \xrightarrow{i \cdot k_0} \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n-1}} \xrightarrow{k_{2n-1} \cdot i} \in \Omega_{\text{univ}}^{2n-1}(A)$$

— одна из базисных форм, т.е. путь с ребрами γ_l вида (8). Покажем, что $\phi(d\omega) = 0$. Так как дифференциал $d\omega$ есть некоторая альтернированная сумма, достаточно проверить, что функционал обнуляется на каждом слагаемом. Рассмотрим, например, слагаемое, соответствующее разбиению первого внутреннего ребра ($l = 0$):

$$\theta = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{n_k} \xrightarrow{i \cdot k_0} \xrightarrow{j_0 \cdot j} \xrightarrow{j \cdot k} \xrightarrow{j \cdot i_1} \xrightarrow{k_1 \cdot \gamma_2} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n-1}} \xrightarrow{k_{2n-1} \cdot i}.$$

Если $\phi(\omega_1) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \omega &= \xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_1} \xrightarrow{1 \cdot \gamma_2} \xrightarrow{2 \cdot \gamma_3} \xrightarrow{1 \dots 1} \xrightarrow{\gamma_{2n-2}} \xrightarrow{2 \cdot \gamma_{2n-1}} \xrightarrow{1 \cdot i} \\ & \left(\text{или } \omega = \xrightarrow{i \cdot 2} \xrightarrow{\gamma_1} \xrightarrow{2 \cdot \gamma_2} \xrightarrow{1 \cdot \gamma_3} \xrightarrow{2 \dots 2} \xrightarrow{\gamma_{2n-2}} \xrightarrow{1 \cdot \gamma_{2n-1}} \xrightarrow{2 \cdot i} \right). \end{aligned}$$

Если $\gamma_1 = \xrightarrow{j_0 \cdot i_1}$ и $j_0 \neq i_1$, то $\phi(\theta) = 0$, так как θ содержит отрезок $\xrightarrow{j_0 \cdot j} \xrightarrow{j \cdot k} \xrightarrow{j \cdot i_1}$. Если же $j_0 = i_1$, то γ_1 должно иметь вид $\xrightarrow{i \cdot i} - \xrightarrow{1 \cdot 1}$, следовательно

$$\begin{aligned} \omega &= \xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{1 \cdot i} \xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_2} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n-1}} \xrightarrow{1 \cdot i} - \xrightarrow{i \cdot 1} \xrightarrow{1 \cdot 1} \xrightarrow{1 \cdot 1} \xrightarrow{\gamma_2} \dots \xrightarrow{\gamma_{2n-1}} \xrightarrow{1 \cdot i} = \\ &= \omega_1 - \omega_2 \end{aligned}$$

так что $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Поскольку комбинации путей θ_1 и θ_2 отличаются только по двум индексам, причем условие согласованности на них автоматически выполнено, имеем $\phi(\theta_1) = \phi(\theta_2)$ и $\phi(\theta) = 0$. Следовательно, $\phi(d\omega) = 0$. Таким образом, ϕ равно нулю на подпространстве $d\Omega_{\text{univ}}^{2n-1}(A)$.

Итак, ϕ является функционалом на $H^{2n}(\Omega_{\text{univ}}^*(A))$. Вычислим ϕ на n -м характеристическом классе $c_n(E)$:

$$\phi(c_n(E)) = \sum_{i=1}^N \mu_i \phi(c_n(E_i)) = \sum_{i=1}^N \mu_i \phi(z_n^{(i)}) = (-1)^n (\mu_1 n_2 - \mu_2 n_1) \neq 0,$$

так как

$$\begin{aligned}
 \phi(z_n^{(1)}) &= (-1)^n \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{n_2} \phi \left(\xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \xrightarrow{j_1 \quad 2 \quad j_1} \xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \dots \xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \xrightarrow{j_n \quad 2 \quad j_n} \xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \right) \\
 &= (-1)^n \sum_{j=1}^{n_2} \phi \left(\xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \xrightarrow{j \quad 2 \quad j} \xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \dots \xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \xrightarrow{j \quad 2 \quad j} \xrightarrow{1 \quad 1 \quad 1} \right) = \\
 &= (-1)^n n_2.
 \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\phi(z_n^{(2)}) = (-1)^{n+1} n_1$ и $\phi(z_n^{(i)}) = 0$ для остальных i . Таким образом, мы показали, что характеристический класс $c_n(E)$ является ненулевым элементом в $H^{2n}(\Omega_{\text{univ}}^*(A))$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть G — конечная группа, $A = \mathbb{k}[G]$ — ее групповая алгебра над полем $\mathbb{k}$ характеристики 0. Тогда любой конечномерный A -модуль, не являющийся свободным, имеет нетривиальные универсальные характеристические классы.

Доказательство. По теореме Машке алгебра A является полупростой. Она имеет одномерный неприводимый модуль $E_1 = \mathbb{k} \sum_{g \in G} g \subset A$, соответствующий тривиальному представлению группы G . Кратность представления E_1 в разложении регулярного представления на неприводимые равна $\dim_{\mathbb{k}} E_1 = 1$. Поэтому, если модуль $E = \sum_i \mu_i E_i$ пропорционален свободному, т.е. $E = \lambda A$, то $\lambda = \mu_1$ — целое неотрицательное число и E является свободным модулем. Следовательно, любой несвободный модуль не пропорционален свободному и, согласно доказанной теореме, имеет нетривиальные характеристические классы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karoubi M. K-théorie et cohomologies cycliques// Astérisque. — Paris: Soc. Math. France, 1987. — 149.

ОПЕРАТОРНАЯ K -ТЕОРИЯ И ФУНКТОР N_0 . НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2003 г. А. А. ПАВЛОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	109
Глава 1. Сведения из абстрактной теории операторных алгебр и гильбертовых модулей над ними	109
1.1. C^* -алгебры	109
1.1.1. Определения и примеры	109
1.1.2. Спектр. Спектральный радиус. $*$ -Гомоморфизмы	110
1.1.3. Коммутативные C^* -алгебры	110
1.1.4. Функциональное исчисление в C^* -алгебрах	111
1.1.5. Положительные элементы и положительные функционалы	111
1.1.6. Представления C^* -алгебр	112
1.1.7. Тензорные произведения C^* -алгебр	113
1.2. Алгебры фон Неймана	113
1.2.1. Определение и основные свойства	114
1.2.2. Абстрактные алгебры фон Неймана	114
1.2.3. Нормальные функционалы и нормальные $*$ -гомоморфизмы	115
1.2.4. Функция относительной размерности. Типы факторов	116
1.2.5. Свойства факторов	117
1.3. C^* -гильбертовы модули	118
1.3.1. Основные определения	118
1.3.2. Операторы в гильбертовых модулях	119
1.3.3. Ортогональная и топологическая дополняемость C^* -гильбертовых модулей. Теорема о стабилизации	120
Глава 2. Операторная K -теория	121
2.1. Функтор K_0 и его свойства	121
2.1.1. Множество унитарных элементов C^* -алгебры	121
2.1.2. Отношения эквивалентности на множестве проекторов C^* -алгебры	122
2.1.3. Определение функтора K_0	122
2.1.4. Свойства K_0	123
2.2. Функтор K_1 и его свойства	126
2.2.1. Определение функтора K_1	126
2.2.2. Свойства K_1	127
2.3. K -теория как пример теории гомологий	128
2.3.1. Длинная точная последовательность в K -теории	128
2.3.2. Периодичность Ботта.	128
2.3.3. Теории (ко)гомологий. Аксиоматический подход	129
Глава 3. Функтор N_0 на категории алгебр фон Неймана и его приложения	131
3.1. Функтор N_0 и его связь с операторной K -теорией	131
3.1.1. Определение и свойства функтора N_0	131
3.1.2. Функциональное описание групп $N_0(A)$	132

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01202, под-проект № 01-01-06157) и гранта Президента РФ (проект № 00-15-99263).

3.1.3. Группа $N_0(A)_{\text{fin}}$	133
3.2. Топология на $N_0(A)$, индуцированная равномерной топологией	135
3.2.1. Нормированные полугруппы	135
3.2.2. Симметризации нормированных полугрупп	136
3.2.3. Структура нормированной группы на $N_0(A)$	136
3.3. Обобщенный характер Чженя и W^* -числа Лефшеца	137
3.3.1. Банаховы циклические гомологии	137
3.3.2. Обобщенный характер Чженя	139
3.3.3. Обобщенные числа Лефшеца	142
Список литературы	143

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта статья содержит общее введение в K -теорию C^* -алгебр, а также подробное описание результатов работ [16, 17, 66, 67], в которых был определен функтор N_0 из категории алгебр фон Неймана в категорию абелевых групп, изучены его свойства (в частности, связь этого функтора с функтором K_0) и указаны некоторые приложения функтора N_0 в некоммутативной геометрии. Кроме того, в первой главе (которая в основном носит вспомогательный характер) приведены некоторые сведения из теории C^* -алгебр, алгебр фон Неймана и C^* -гильбертовых модулей.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Е. В. Троицкому, а также профессору А. С. Мищенко и д.ф.-м.н. В. М. Мануйлову за многочисленные плодотворные обсуждения.

ГЛАВА 1

СВЕДЕНИЯ ИЗ АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР И ГИЛЬБЕРТОВЫХ МОДУЛЕЙ НАД НИМИ

1.1. C^* -АЛГЕБРЫ

Основы теории абстрактных некоммутативных равномерно-замкнутых операторных алгебр были заложены в работе И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [3]. В этой работе было показано, что любая C^* -алгебра может быть представлена как C^* -подалгебра алгебры $B(H)$ ограниченных линейных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве H . Ключевую роль в доказательстве этой теоремы сыграла конструкция Гельфанда—Наймарка, позволяющая строить представления по положительным функционалам. Эта конструкция, усовершенствованная И. Сигалом [77], получила название ГНС-конструкции. Общая спектральная теория для элементов C^* -алгебр также была развита в [3].

Коммутативные C^* -алгебры были изучены в работах И. М. Гельфанда (по поводу библиографии см. [15]). В частности, теорема 1.1.1 доказана в [2].

Подробную информацию по теме настоящего параграфа можно найти, например, в монографиях [1, 4, 10, 24, 68, 73]. Мы ограничимся лишь кратким изложением основных понятий.

1.1.1. Определения и примеры. Под алгеброй мы будем понимать всегда комплексную алгебру. Заданная на алгебре A норма $\|\cdot\|$ называется *субмультипликативной*, если $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$. В этом случае пара $(A, \|\cdot\|)$ называется *нормированной алгеброй*.

Инволютивную алгебру мы будем называть также $*$ -алгеброй. C^* -алгеброй называется полная нормированная $*$ -алгебра A , в которой для каждого элемента $a \in A$ выполняется следующее соотношение (C^* -свойство):

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Отметим, что это соотношение в сочетании со свойством субмультипликативности для нормы автоматически дает $\|a^*\| = \|a\|$.

На произвольной $*$ -алгебре существует не более одной нормы, превращающей ее в C^* -алгебру.

Пример 1.1.1. Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $B(H)$ алгебру всех линейных ограниченных операторов в H . Относительно обычной операции сопряжения и операторной нормы $B(H)$ является C^* -алгеброй. Более того, всякая равномерно-замкнутая и самосопряженная подалгебра алгебры $B(H)$ (например, алгебра $K(H)$ всех компактных операторов в H) также является C^* -алгеброй.

Пример 1.1.2. Пусть X — локально-компактное пространство и $C_0(X)$ — инволютивная алгебра непрерывных функций на X , обращающихся в нуль на бесконечности. Тогда, снабженная супремум-нормой, $C_0(X)$ становится коммутативной C^* -алгеброй.

C^* -алгебра с присоединенной единицей $\tilde{A}$ для произвольной C^* -алгебры A определяется следующим образом. На векторном пространстве $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$ можно определить умножение $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ и инволюцию $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$, относительно которых $\tilde{A}$ становится унитарной $*$ -алгеброй с единицей $(0, 1)$. Тогда норма

$$\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\| : b \in A, \|b\| \leq 1\}$$

задает на $\tilde{A}$ структуру C^* -алгебры, причем C^* -алгебру A можно отождествить с двусторонним идеалом в $\tilde{A}$, образованным множеством пар вида $(a, 0)$, $a \in A$. В случае, когда C^* -алгебра A содержит единицу, $\tilde{A}$ изоморфна прямой сумме $A \oplus \mathbb{C}$ C^* -алгебр.

Будем говорить, что элемент $a \in A$ *нормальный*, если $a^*a = aa^*$; *самосопряженный*, если $a = a^*$; *унитарный*, если $a^*a = aa^* = 1$.

Предложение 1.1.1. Произвольный элемент $a \in A$ записывается единственным образом в виде $a = a_1 + ia_2$, где $a_1, a_2 \in A$ — самосопряженные элементы.

1.1.2. Спектр. Спектральный радиус. $*$ -Гомоморфизмы. Пусть A — C^* -алгебра с единицей. *Спектром* $\text{sp}(a)$ элемента $a \in A$ называется множество комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1$ необратим. Если C^* -алгебра A не содержит единицы, то спектром элемента $a \in A$ называется его спектр в C^* -алгебре $\tilde{A}$. Спектр является непустым компактным подмножеством комплексной плоскости, лежащим в круге радиуса $\|a\|$. *Спектральным радиусом* элемента a называется число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{sp}(a)\}$.

Предложение 1.1.2 (см. [1, 10]). Пусть A — C^* -алгебра с единицей и $a \in A$. Тогда

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Предложение 1.1.3 (см. [1, 10]). Пусть A — C^* -алгебра с единицей и элемент $a \in A$. Тогда

- (i) если a нормальный элемент, то $r(a) = \|a\|$;
- (ii) если a унитарный элемент, то $\text{sp}(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

$*$ -Гомоморфизмом C^* -алгебр называется гомоморфизм алгебр, сохраняющий инволюцию. Отметим, что в этом определении отсутствуют какие-либо условия непрерывности. Причина заключается в том, что, как показывает следующее предложение, морфизмы C^* -алгебр автоматически непрерывны.

Предложение 1.1.4 (см. [1, 4]). Норма произвольного $*$ -гомоморфизма C^* -алгебр не превосходит единицы.

1.1.3. Коммутативные C^* -алгебры. Характером коммутативной C^* -алгебры A называется произвольный ненулевой гомоморфизм (алгебр) из A в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\Omega(A)$ множество характеров A . Непосредственно проверяется следующее предложение.

Предложение 1.1.5. $\Omega(A)$ является подмножеством единичного шара сопряженного пространства A^* .

Из этого предложения, учитывая теорему Банаха—Алаоглу, получаем

Следствие 1.1.1. $\Omega(A)$ является хаусдорфовым локально-компактным пространством относительно слабой* топологии.

Сопоставим каждому элементу $a \in A$ функцию

$$\hat{a} : \Omega(A) \rightarrow \mathbf{C}, \quad \tau \mapsto \tau(a).$$

Легко видеть, что $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$. Отображение

$$A \rightarrow C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a} \quad (1.1.1)$$

называется *преобразованием Гельфанда*.

Теорема 1.1.1 (И. М. Гельфанд [2]). Преобразование (1.1.1) является изоморфизмом C^* -алгебр.

1.1.4. Функциональное исчисление в C^* -алгебрах.

Теорема 1.1.2 (см. [4]). Пусть A — C^* -алгебра с единицей, $a \in A$ — нормальный элемент. Тогда существует единственный $*$ -гомоморфизм $\varphi : C(\text{sp}(a)) \rightarrow A$ такой, что $\varphi(1) = 1$, $\varphi(j) = a$, где j обозначает функцию $\lambda \mapsto \lambda$ на $\text{sp}(a)$. Этот $*$ -гомоморфизм изометричен.

Пусть $f \in C(\text{sp}(a))$. Обозначим элемент $\varphi(f)$ из теоремы 1.1.2 через $f(a)$. Тогда утверждение теоремы можно записать следующим образом:

- (a) $(\lambda f + g)(a) = \lambda f(a) + g(a)$;
- (b) $(fg)(a) = f(a)g(a)$;
- (c) $\overline{f(a)} = f(a)^*$;
- (d) $\|f(a)\| = \|f\|$;
- (e) $1(a) = 1$, $j(a) = a$

для любых $f, g \in C(\text{sp}(a))$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Кроме того, справедливо следующее свойство (теорема о спектре отображения):

- (f) $f(\text{sp}(a)) = \text{sp}(f(a))$ для любой функции $f \in C(\text{sp}(a))$.

С использованием функционального исчисления легко доказываются следующие результаты.

Предложение 1.1.6. Пусть A — C^* -алгебра с единицей и $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда $\text{sp}(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$.

Предложение 1.1.7. Произвольный элемент a унитарной C^* -алгебры может быть представлен в виде линейной комбинации (над $\mathbf{C}$) четырех унитарных.

1.1.5. Положительные элементы и положительные функционалы.

Предложение 1.1.8 (см. [4, 68]). Для самосопряженного элемента $a \in A$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $a = b^*b$ для некоторого $b \in A$;
- (ii) $\text{sp}(a) \subset [0, +\infty)$;
- (iii) $a = h^2$ для некоторого самосопряженного $h \in A$.

Самосопряженный элемент $a \in A$ называется *положительным* (обозначается $a \geq 0$), если для него выполнено одно из условий предложения 1.1.8. Множество A_+ положительных элементов C^* -алгебры A является равномерно-замкнутым выпуклым конусом, причем $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.

Для самосопряженных элементов $a, b \in A$ запись $a \geq b$ означает, что $a - b \geq 0$. Отношение $\geq$ задает на множестве самосопряженных элементов A_{sa} C^* -алгебры A структуру частично упорядоченного множества.

Предложение 1.1.9 (см. [1]). Пусть a — самосопряженный элемент C^* -алгебры A . Тогда можно, причем единственным образом, определить элементы a_+ и a_- из A такие, что

- (a) $a_+ \geq 0$ и $a_- \geq 0$;

- (b) $a = a_+ - a_-$;
 (c) $a_+ a_- = 0$.

Разложение (b) элемента a , удовлетворяющее условиям (a), (c), называется *ортогональным разложением*.

Аппроксимативной единицей C^* -алгебры A называется направленность положительных элементов $e_i \in A$ такая, что $\|e_i\| \leq 1$, $e_i \geq e_j$ при $i \geq j$ и $\lim_i \|a - ae_i\| = 0$ для любого $a \in A$. Каждая C^* -алгебра обладает аппроксимативной единицей. Использование аппроксимативных единиц позволяет доказать следующее предложение.

Предложение 1.1.10 (см. [1, 68]). *Произвольный замкнутый двусторонний идеал в C^* -алгебре самосопряжен.*

Следствие 1.1.2. *Образ произвольного $*$ -гомоморфизма между C^* -алгебрами также является C^* -алгеброй.*

Следствие 1.1.3. *Произвольный инъективный $*$ -гомоморфизм C^* -алгебр является изометрией.*

Для доказательства следствия 1.1.3 надо учесть также предложение 1.1.4.

Линейный функционал f на C^* -алгебре A называется *положительным*, если $f(a) \geq 0$ для любого $a \in A_+$.

Предложение 1.1.11 (см. [1, 4]). *Пусть f — положительный линейный функционал на A . Тогда*

- (i) $f(a^*) = \overline{f(a)}$;
 (ii) $|f(a^*b)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b)$

для всех $a, b \in A$.

Положительные линейные функционалы автоматически являются непрерывными. Верно даже более сильное утверждение.

Предложение 1.1.12 (см. [1, 68]). *Пусть f — линейный функционал на C^* -алгебре A . Следующие условия эквивалентны:*

- (i) f положителен;
 (ii) f непрерывен и $\|f\| = \lim_i f(e_i^2)$ для некоторой аппроксимативной единицы $\{e_i\}$ C^* -алгебры A .

Следствие 1.1.4. *Пусть f — линейный функционал на унитарной C^* -алгебре A . Следующие условия эквивалентны:*

- (i) f положителен;
 (ii) f непрерывен и $\|f\| = f(1)$.

Ясно, что сумма положительных линейных функционалов является положительным линейным функционалом. Положительный линейный функционал, норма которого равна единице, называется *состоянием*.

1.1.6. Представления C^* -алгебр. *Представлением C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H называется $*$ -гомоморфизм из A в C^* -алгебру $B(H)$. При этом вектор $h \in H$ называется *циклическим* для представления $\rho : A \rightarrow B(H)$, если множество векторов вида $\rho(a)h$, $a \in A$, плотно в H (представление ρ в этом случае также называется *циклическим*). Представление $\rho : A \rightarrow B(H)$ называется *невыврожденным*, если линейная оболочка множества векторов вида $\rho(a)x$, $a \in A$, $x \in H$, плотна в H . Представление, ядро которого тривиально, называется *точным*.*

Для произвольного представления ρ мы можем рассмотреть ортогональное дополнение H' к инвариантному подпространству $H^{(0)} := \{x \in H : \rho(A)x = 0\}$, которое, очевидно, тоже будет инвариантным. Тогда новое представление $\rho' : A \rightarrow B(H')$ будет невыврожденным. Таким образом, любое представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве однозначно разлагается в прямую

сумму невырожденного и нулевого подпредставлений. Более того, можно показать, что любое невырожденное представление разлагается в прямую сумму циклических подпредставлений.

Каждому положительному линейному функционалу f на C^* -алгебре A соответствует единственное (с точностью до унитарной эквивалентности) циклическое представление ρ_f (с циклическим вектором x_f) алгебры A в гильбертовом пространстве $(H_f, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ такое, что $f(a) = \langle \rho_f(a)x_f, x_f \rangle$ для всех $a \in A$. Построение такого представления называется *ГНС-конструкцией*.

Универсальным представлением C^* -алгебры A называется прямая сумма по всем положительным линейным функционалам f на A ассоциированных с этими функционалами представлений ρ_f .

Теорема (И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк [3]). *Всякая C^* -алгебра допускает точное представление в гильбертовом пространстве. А именно, ее универсальное представление является точным.*

1.1.7. Тензорные произведения C^* -алгебр. Пусть $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ — банаховы пространства. Норма $\|\cdot\|$ на алгебраическом тензорном произведении $X_1 \otimes X_2$ называется *кросснормой*, если $\|x_1 \otimes x_2\| = \|x_1\|_1 \|x_2\|_2$ для всех $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Отметим, что среди всех кросснорм есть наибольшая $\|\cdot\|_1 \hat{\otimes} \|\cdot\|_2$ и наименьшая $\|\cdot\|_1 \underset{\vee}{\otimes} \|\cdot\|_2$ нормы (см. [8, 24]). Пополнения $X_1 \hat{\otimes} X_2$ и $X_1 \underset{\vee}{\otimes} X_2$ алгебраического тензорного произведения $X_1 \otimes X_2$ по этим нормам называются соответственно *проективным* и *слабым* тензорным произведением банаховых пространств X_1, X_2 .

Если $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ — гильбертовы пространства, то в пространстве $H_1 \otimes H_2$ существует единственное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такое, что $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 \langle x_2, y_2 \rangle_2$ для всех $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$. Пополнение $H_1 \hat{\otimes} H_2$ пространства $H_1 \otimes H_2$ по кросснорме, порожденной скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, называется *гильбертовым тензорным произведением* пространств H_1, H_2 .

Теорема 1.1.3 (см. [10]). *Пусть ρ_1, ρ_2 — точные представления C^* -алгебр A_1, A_2 в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно. Тогда существует единственный $*$ -гомоморфизм $\pi : A_1 \otimes A_2 \rightarrow B(H_1 \hat{\otimes} H_2)$ такой, что $\pi(a_1 \otimes a_2) = \rho_1(a_1) \hat{\otimes} \rho_2(a_2)$. Кроме того, $*$ -гомоморфизм π инъективен.*

Рассмотрим в качестве ρ_1, ρ_2 универсальные представления C^* -алгебр A_1, A_2 . Определим на $*$ -алгебре $A_1 \otimes A_2$ норму $\|\cdot\|_*$, относительно которой инъективный $*$ -гомоморфизм π из теоремы 1.1.3 будет изометрией. Ясно, что $\|a_1 \otimes a_2\|_* = \|a_1\|_1 \|a_2\|_2$ для всех $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. Пополнение алгебры $A_1 \otimes A_2$ по C^* -норме $\|\cdot\|_*$ называется *пространственным тензорным произведением* C^* -алгебр A_1 и A_2 .

Вообще говоря, на $A_1 \otimes A_2$ могут существовать и другие C^* -нормы. Обозначим через Γ множество всех C^* -норм на $A_1 \otimes A_2$. Положим $\|c\|_{\max} = \sup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(c)$ для всех $c \in A_1 \otimes A_2$. Очевидно, что $\|\cdot\|_{\max}$ является максимальной C^* -нормой на $A_1 \otimes A_2$.

С другой стороны, можно показать (см., напр., [10]), что норма $\|\cdot\|_*$ является минимальной C^* -нормой на алгебраическом тензорном произведении $A_1 \otimes A_2$. C^* -алгебра A_1 называется *ядерной* (Э. Лэнс, [53]), если для любой C^* -алгебры A_2 нормы $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_{\max}$ на $A_1 \otimes A_2$ совпадают.

Пример 1.1.3. К ядерным относятся конечномерные C^* -алгебры, коммутативные C^* -алгебры, C^* -алгебры компактных операторов в произвольных гильбертовых пространствах. Однако C^* -алгебры линейных ограниченных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах не являются ядерными (см. [24, 26, 54]).

1.2. АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА

Начало изучению слабозамкнутых алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве, было положено в 1929 г. в работе Дж. фон Неймана [63]. В этой же работе доказана теорема о бикоммутанте. Основы классической теории слабозамкнутых алгебр с инволюцией (которые теперь называются алгебрами фон Неймана) были заложены в серии работ [59–62].

Оригинальное изложение теории относительной размерности факторов содержится в [59] (см. также [15]). По поводу общей теории алгебр фон Неймана см., например, [1, 39, 42, 68, 73].

1.2.1. Определение и основные свойства. Пусть H — гильбертово пространство. Сначала мы определим следующие локально-выпуклые топологии на $B(H)$:

- (I) направленность a_i из $B(H)$ сходится к элементу $a \in B(H)$ в *сильной операторной топологии*, если $\|a_i x - ax\| \rightarrow 0$ для всех $x \in H$;
- (II) направленность a_i из $B(H)$ сходится к элементу $a \in B(H)$ в *слабой операторной топологии*, если $\langle a_i x, y \rangle \rightarrow \langle ax, y \rangle$ для всех $x, y \in H$;
- (III) направленность a_i из $B(H)$ сходится к элементу $a \in B(H)$ в *σ -сильной операторной топологии*, если $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_i x_j - ax_j\| \rightarrow 0$ для всех $x_j \in H$ таких, что $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$;
- (IV) направленность a_i из $B(H)$ сходится к элементу $a \in B(H)$ в *σ -слабой операторной топологии*, если $\sum_{j=1}^{\infty} \langle (a_i - a)x_j, y_j \rangle \rightarrow 0$ для всех $x_j, y_j \in H$ таких, что $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^2 < \infty$.

Сильная и σ -сильная топологии совпадают на единичном шаре банахова пространства $B(H)$. Подобным образом, слабая и σ -слабая топологии совпадают на единичном шаре банахова пространства $B(H)$. При этом умножение на $B(H)$ является непрерывным в любой из топологий (I)–(IV) по каждой из переменных (но не по совокупности переменных, если H бесконечномерно). Отображение $a \mapsto a^*$ непрерывно в топологиях (II), (IV), но в случае бесконечномерного H это отображение не будет непрерывным в топологиях (I), (III).

Для подмножества M в $B(H)$ положим

$$M' = \{a \in B(H) : ab = ba \text{ для всех } b \in M\}.$$

Множество M' называется *коммутантом* множества M . Очевидно, M' является банаховой алгеброй операторов, содержащей единичный оператор. Если M самосопряжено, то M' оказывается C^* -подалгеброй в $B(H)$, замкнутой в каждой из топологий (I)–(IV).

Самосопряженная подалгебра $A \subset B(H)$ называется *невыврожденной*, если линейная оболочка множества векторов вида ax , $a \in A$, $x \in H$, плотна в H . Невыврожденность произвольной $*$ -подалгебры в $B(H)$, содержащей единичный оператор, очевидна.

Одним из основных результатов в теории алгебр фон Неймана является следующая теорема.

Теорема (теорема фон Неймана о бикоммутанте [63]). Пусть A — невыврожденная $*$ -подалгебра в $B(H)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $A'' = A$;
- 2) A замкнута в сильной операторной топологии;
- 3) A замкнута в слабой операторной топологии;
- 4) A замкнута в σ -сильной операторной топологии;
- 5) A замкнута в σ -слабой операторной топологии.

Невыврожденная $*$ -подалгебра в $B(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она удовлетворяет одному из эквивалентных условий теоремы о бикоммутанте.

Пример 1.2.1. Алгебра $B(H)$ является алгеброй фон Неймана для любого гильбертова пространства H .

Ясно, что любая (ненулевая) алгебра фон Неймана содержит единичный оператор. Кроме того, поскольку каждая из топологий (I)–(IV) слабее равномерной топологии, любая алгебра фон Неймана автоматически является C^* -алгеброй.

Предложение 1.2.1 (см., напр., [42]). Пусть A — алгебра фон Неймана и a — нормальный элемент в A . Тогда все спектральные проекторы элемента a принадлежат A . Более того, для произвольного $b \in A$ с полярным разложением $b = uh$ элементы u , h принадлежат A .

1.2.2. Абстрактные алгебры фон Неймана. Пусть H — гильбертово пространство, $A \subset B(H)$ — алгебра фон Неймана и f — произвольный линейный функционал на A .

Предложение 1.2.2 (см. [10]). Следующие условия эквивалентны:

- 1) f слабонепрерывен;

2) f сильнонепрерывен;

3) существуют векторы $x_i, y_i \in H$, $i = 1, \dots, n$, такие, что $f(a) = \sum_{i=1}^n \langle x_i, a(y_i) \rangle$.

Предложение 1.2.3 (см. [1]). Следующие условия эквивалентны:

1) f σ -слабонепрерывен;

2) f σ -сильнонепрерывен;

3) существуют векторы $x_i, y_i \in H$, $i = 1, 2, 3, \dots$, такие, что $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < \infty$ и

$$f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, a(y_i) \rangle.$$

Пространство A_* всех σ -слабонепрерывных линейных функционалов на A называется *преддвойственным пространством* алгебры фон Неймана A .

Предложение 1.2.4 (см. [1, 68]). Преддвойственное пространство A_* алгебры фон Неймана A по отношению к норме из A^* является банаховым пространством. Банахово пространство A является сопряженным к A_* относительно билинейной формы $(a, f) \in A \times A_* \mapsto f(a)$. Более того, σ -слабая топология на A совпадает со слабой* топологией банахова пространства $(A_*)^*$.

Учитывая теорему Банаха—Алаоглу, получаем

Следствие 1.2.1. Единичный шар алгебры фон Неймана является σ -слабокомпактным множеством.

Следующий результат (обратный к предложению 1.2.4) является абстрактной характеристикой алгебр фон Неймана.

Теорема (Сакаи, [72]). Пусть для некоторого банахова пространства X C^* -алгебра A совпадает (с точностью до изометрического изоморфизма банаховых пространств) с X^* . Тогда A $*$ -изоморфна некоторой алгебре фон Неймана, причем $A_* = X$.

Абстрактно определенные алгебры фон Неймана называют W^* -алгебрами (хотя иногда термины «алгебра фон Неймана» и « W^* -алгебра» используют как синонимы).

Пример 1.2.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Тогда $L^\infty(X) = (L^1(X))^*$, т.е. $L^\infty(X)$ является коммутативной W^* -алгеброй. Более того, любая коммутативная W^* -алгебра может быть представлена в таком виде (см. [78–80]).

1.2.3. Нормальные функционалы и нормальные $*$ -гомоморфизмы. Пусть A — алгебра фон Неймана. Направленность $\{a_i\} \subset A_+$ называется *возрастающей*, если $a_i \leq a_j$ при $i \leq j$. Направленность $\{a_i\}$ такая, что все $\|a_i\| \leq C$ (для некоторой константы C) называется *ограниченной*. Элемент $a \in A_+$ называется *точной верхней гранью* направленности $\{a_i\} \subset A_+$ (обозначается $a = \sup_i a_i$), если a принадлежит множеству $M = \{b \in A_+ : a_i \leq b \text{ для любого } i\}$ и $a \leq b$ для всех $b \in M$. Ясно, что если направленность $\{a_i\} \subset A_+$ имеет точную верхнюю грань, то она ограничена. Оказывается, что для возрастающих направленностей справедливо обратное утверждение.

Предложение 1.2.5 (см. [1, 68]). Произвольная ограниченная возрастающая направленность $\{a_i\} \subset A_+$ имеет точную верхнюю грань $a \in A_+$ и σ -сильно сходится к a .

Положительный линейный функционал f на A называется *нормальным*, если для любой ограниченной возрастающей направленности $\{a_i\} \subset A_+$ выполняется равенство $f(\sup_i a_i) = \sup_i f(a_i)$.

Предложение 1.2.6 (см. [1, 68]). Для положительного линейного функционала f на A следующие условия эквивалентны:

1) f — нормальный функционал;

2) f непрерывен в σ -слабой топологии.

Пусть A, B — алгебры фон Неймана. $*$ -Гомоморфизм φ из A в B называется *нормальным*, если для любой возрастающей направленности $\{a_i\} \subset A_+$ с точной верхней гранью $a \in A_+$ элемент $\varphi(a)$ есть точная верхняя грань направленности $\{\varphi(a_i)\}$.

Теорема 1.2.1 (см. [1, 68]). Пусть φ — нормальный $*$ -гомоморфизм между алгебрами фон Неймана A и B . Тогда φ непрерывен и в σ -сильной, и в σ -слабой топологиях алгебр A и B . Кроме того, множество $\text{Ker}(\varphi)$ слабозамкнуто в A , а множество $\varphi(A)$ слабозамкнуто в B .

Так как произвольный $*$ -изоморфизм между алгебрами фон Неймана, очевидно, является нормальным, получаем следующий результат.

Следствие 1.2.2. Пусть φ — произвольный сюръективный $*$ -гомоморфизм между алгебрами фон Неймана A и B . Тогда φ непрерывен и в σ -сильной, и в σ -слабой топологиях алгебр A и B .

1.2.4. Функция относительной размерности. Типы факторов. Центром Z_A алгебры A называется совокупность всех элементов A , перестановочных с любым элементом из A , т.е. $Z_A = A \cap A'$. Если алгебра A унитарна, то Z_A содержит алгебру скаляров $\mathbf{C}1 = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbf{C}\}$.

Если A — алгебра фон Неймана, то Z_A также является (коммутативной) алгеброй фон Неймана. Алгебра фон Неймана называется *фактором*, если $Z_A = \mathbf{C}1$. Для того, чтобы алгебра A была фактором, необходимо и достаточно, чтобы алгебра A' была фактором.

Пример 1.2.3. Алгебра фон Неймана $B(H)$ является фактором для произвольного гильбертового пространства H .

Пусть H — ненулевое гильбертово пространство, $A \subset B(H)$ — фактор. Замкнутое подпространство $L \subset H$ называется *присоединенным к фактору A* (обозначается $L\eta A$), если проектор P_L на это подпространство принадлежит A .

Замкнутые подпространства L и N называются *эквивалентными относительно A* (обозначается $L \sim N (\dots A)$), если в факторе A существует частичная изометрия с начальной областью L и конечной N . В этом случае говорят, что L и N имеют одинаковую *относительную размерность* (относительно A). Такая терминология мотивируется тем, что если $L \sim N (\dots A)$, то L и N имеют одинаковую размерность (напомним, что размерностью гильбертова пространства называется мощность произвольной полной ортонормированной системы векторов этого пространства); обратное утверждение, очевидно, не верно. Если $L \sim N (\dots A)$, то $P_L = ui^*$ и $P_N = u^*u$ для некоторого $u \in A$, поэтому подпространства L, N являются присоединенными к A .

Пусть L, N — замкнутые подпространства, присоединенные к фактору A . Говорят, что подпространство L *не больше* подпространства N относительно A , и пишут $L \preceq N (\dots A)$, если L эквивалентно части подпространства N . Говорят, что подпространство L *меньше* подпространства N относительно A , и пишут $L \prec N (\dots A)$, если $L \preceq N (\dots A)$ и L не эквивалентно N .

Предложение 1.2.7. Отношение $\preceq$ задает линейный порядок на множестве всех замкнутых подпространств пространства H .

Подпространство $L\eta A$ называется *бесконечным*, если оно эквивалентно некоторому своему собственному подпространству. В противном случае подпространство L называется *конечным*.

Определение 1.2.1. Вещественнозначная функция $D(L)$, определенная на всех замкнутых подпространствах $L\eta A$, называется *функцией относительной размерности*, если она обладает следующими свойствами:

- (i) $D(L) = 0$, если $L = 0$; она конечна и положительна, если L конечно и $L \neq 0$; она равна ∞ , если L бесконечно;
- (ii) если $L \sim N$, то $D(L) = D(N)$;
- (iii) если $L \perp N$, то $D(L \oplus N) = D(L) + D(N)$.

Теорема 1.2.2 (см. [59]). Функция относительной размерности существует. Она единственна с точностью до (конечного) постоянного положительного множителя.

Предложение 1.2.8 (см. [59]). Если $D(L)$ — функция относительной размерности и $L\eta A$, $N\eta A$, то условия $L \prec N$, $L \sim N$, $L \succ N$ эквивалентны условиям $D(L) < D(N)$, $D(L) = D(N)$, $D(L) > D(N)$ соответственно.

Обозначим через Δ область значений функции относительной размерности $D(L)$. Непосредственно из условий (i)–(iii), определяющих относительную размерность, выводятся следующие свойства множества Δ .

- Лемма 1.2.1.** 1) $\Delta \subset [0, \infty]$;
 2) $0 \in \Delta$, Δ содержит наибольший элемент $\bar{\alpha} = D(H)$, $\bar{\alpha} > 0$;
 3) если $\alpha, \beta \in \Delta$ и $\alpha > \beta$, то $\alpha - \beta \in \Delta$;
 4) если $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \Delta$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leq \bar{\alpha}$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \in \Delta$.

Доказательство следующей теоремы основано на использовании леммы 1.2.1.

Теорема 1.2.3 (см. [59]). Область изменения относительной размерности есть одно из следующих множеств (ε , $\bar{\alpha}$ — положительные конечные числа):

- (I_n) совокупность всех чисел $k\varepsilon$, $k = 1, 2, \dots, n$;
 (I_∞) совокупность всех $k\varepsilon$, $k = 1, 2, \dots, \infty$;
 (II_1) отрезок $[0, \bar{\alpha}]$;
 (II_∞) отрезок $[0, \infty]$;
 (III) числа $0, \infty$.

Фактор A называется фактором типа (I_n), (I_∞), (II_1), (II_∞), (III), если для множества Δ имеет место случай, таким образом обозначенный. Факторы (I_n), (II_1) называются *конечными*, (I_∞), (II_∞) — *бесконечными*, а (III) называется *чисто бесконечным* фактором. Кроме того, факторы (I_n), (I_∞) называют *дискретными*, а (II_1), (II_∞) — *непрерывными*.

Отметим, что тип (III) соответствует случаю, когда в H нет конечных ненулевых подпространств. Далее рассматривается случай, когда в H имеются конечные ненулевые подпространства. Если при этом в множестве Δ есть наименьший положительный элемент ε , то при $\bar{\alpha} < \infty$ имеет место тип (I_n), а при $\bar{\alpha} = \infty$ — тип (I_∞). Наконец, если в множестве Δ нет наименьшего положительного элемента, то при $\bar{\alpha} < \infty$ имеет место тип (II_1), а при $\bar{\alpha} = \infty$ — тип (II_∞).

Ясно, что функцию $D(L)$ можно нормировать так, чтобы в случаях (I_n), (I_∞) было $\varepsilon = 1$, а в случае (II_1) было $\bar{\alpha} = 1$.

1.2.5. Свойства факторов.

Предложение 1.2.9 (см. [15, 59]). Типы факторов (I_n)–(III) из теоремы 1.2.3, а также функция относительной размерности $D(L)$ (с точностью до нормировки), инвариантны относительно *-изоморфизмов алгебр фон Неймана.

Полная классификация дискретных факторов имеет следующий вид.

Теорема 1.2.4 (см. [15, 59]). Фактор A тогда и только тогда имеет тип (I), когда он *-изоморфен фактору $B(H)$ для некоторого гильбертова пространства H , причем A имеет тип (I_n) тогда и только тогда, когда пространство H конечномерно и $\dim H = n$. Тип (I_∞), таким образом, соответствует случаю бесконечномерного пространства H .

Говорят, что факторы A, B коммутируют, если $A \subset B'$ (ясно, что в этом случае также $B \subset A'$). Если A, B — заданные факторы, обозначим наименьшую алгебру фон Неймана, содержащую A, B , через $R(A, B)$.

Следующий результат является частным случаем [59, 11.1.3, 11.2.2].

Лемма 1.2.2. Если факторы A, B коммутируют и B есть фактор типа (I), то $R(A, B)$ является фактором.

Теорема 1.2.5 (см. [59]). Пусть A, B — два коммутирующих фактора, причем B имеет тип (I). Тогда $R(A, B)$ имеет тот же тип (I)–(III), что и A . Более того,

- (i) если A имеет тип (I_n) , $n = 1, 2, \dots, \infty$, а B имеет тип (I_m) , $m = 1, 2, \dots, \infty$, то $R(A, B)$ имеет тип $(I_{n \cdot m})$;
- (ii) если A принадлежит типу (II_n) , $n = 1, \infty$, а B — типу (I_m) , $m = 1, 2, \dots, \infty$, то $R(A, B)$ принадлежит типу (II_r) , где $r = 1$, если n и m оба конечны, и $r = \infty$, если n или m бесконечно.

Пусть A — фактор, $M_r(A)$ — множество $(r \times r)$ -матриц с элементами из A , $r = 1, 2, \dots$. Обозначим через $\mathcal{A}$ подмножество в $M_r(A)$, состоящее из матриц, у которых элемент, стоящий в первой строке и первом столбце, пробегает весь фактор A , а остальные элементы нулевые. Ясно, что $\mathcal{A}$ и $M_r(A)$ — алгебры фон Неймана, причем $\mathcal{A}$ *-изоморфна алгебре фон Неймана A . Непосредственно проверяется, что $R(\mathcal{A}, M_r(\mathbf{C})) = M_r(A)$. Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 1.2.3. Пусть A — фактор. Тогда $M_r(A)$ также является фактором, причем типы (I_n) –(III) из теоремы 1.2.3 факторов A и $M_r(A)$ совпадают. Более того, если A имеет тип (I_n) , то $M_r(A)$ имеет тип $(I_{n \cdot r})$, $n = 1, 2, \dots$.

Понятие ограниченной бесконечной матрицы (см. [15, I, § 5, п. 15]) позволяет свести изучение факторов класса (II_∞) к изучению факторов класса (II_1) .

Теорема 1.2.6 (см., напр., [15]). Произвольный фактор типа (II_∞) *-изоморфен алгебре всех ограниченных бесконечных матриц с элементами из некоторого фиксированного фактора типа (II_1) .

В заключение этого пункта отметим, что факторы любого из типов (I_n) –(III) существуют. Первые примеры факторов типа (II_1) и (III) были построены в работах [59] и [62] соответственно.

1.3. C^* -ГИЛЬБЕРТОВЫ МОДУЛИ

Основы теории гильбертовых модулей над произвольными C^* -алгебрами были заложены в работах У. Пэшке [64] и М. Риффеля [70], хотя коммутативный случай рассматривался значительно раньше И. Капланским [48]. Важные результаты о дуальных гильбертовых модулях были получены в [65]. Теорема Каспарова о стабилизации содержится в [52]. Начало исследованию гильбертовых модулей над алгебрами фон Неймана было положено уже в первой статье У. Пэшке [64]. Там же, в частности, получен аналог полярного разложения для элементов автодуальных гильбертовых W^* -модулей.

На протяжении этого параграфа мы будем руководствоваться, прежде всего, монографией [9], а также работами [11, 41, 43, 44, 52, 55, 57, 64].

1.3.1. Основные определения. Пусть A — C^* -алгебра. Предгильбертовым A -модулем называется (правый) A -модуль $\mathcal{M}$, снабженный полуторалинейной (над $\mathbf{C}$) формой $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow A$, обладающей следующими свойствами:

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathcal{M}$;
- (ii) $\langle x, x \rangle = 0$ только в случае, когда $x = 0$;
- (iii) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$;
- (iv) $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$, $a \in A$.

Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется A -значным скалярным произведением.

Пусть $\mathcal{M}$ — предгильбертов A -модуль, $x \in \mathcal{M}$. Положим $\|x\|_{\mathcal{M}} := \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$. Мы будем опускать индекс $\mathcal{M}$ там, где это не приведет к путанице норм.

Предложение 1.3.1 (см. [64]). Функция $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ является нормой на $\mathcal{M}$ и обладает следующими свойствами:

- (i) $\|xa\|_{\mathcal{M}} \leq \|x\|_{\mathcal{M}}\|a\|$ для всех $x \in \mathcal{M}$, $a \in A$;
- (ii) $\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \|y\|_{\mathcal{M}}^2 \langle x, x \rangle$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$;
- (iii) $\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\|_{\mathcal{M}}\|y\|_{\mathcal{M}}$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$.

Предгильбертов A -модуль $\mathcal{M}$, полный по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, называется C^* -гильбертовым модулем.

Пример 1.3.1. Гильбертово пространство можно понимать как гильбертов модуль над C^* -алгеброй $A = \mathbb{C}$ (комплексные числа).

Пример 1.3.2. Произвольную C^* -алгебру A можно рассматривать как гильбертов модуль над собой, в котором действие задается умножением справа, а скалярное произведение определяется формулой $\langle a, b \rangle = a^*b$, где $a, b \in A$.

Пример 1.3.3. Пусть $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ — семейство C^* -гильбертовых модулей. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество в (алгебраической) прямой сумме $\bigoplus_i \mathcal{M}_i$, состоящее из последовательностей (x_i) , $x_i \in \mathcal{M}_i$, таких, что ряд $\sum_i \langle x_i, x_i \rangle$ сходится по норме в C^* -алгебре A . Тогда правый A -модуль $\mathcal{M}$ является C^* -гильбертовым модулем относительно скалярного произведения $\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_i \langle x_i, y_i \rangle$. C^* -Гильбертов модуль $\mathcal{M}$ называется *прямой суммой* C^* -гильбертовых модулей $\mathcal{M}_i$.

Обозначим прямую сумму счетного числа экземпляров C^* -гильбертова модуля $\mathcal{N}$ через $l_2(\mathcal{N})$. C^* -Гильбертов модуль $l_2(A)$ называется *стандартным* гильбертовым модулем над A . Если C^* -алгебра A унитарна, то стандартный гильбертов модуль обладает *каноническим базисом* $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ (единица стоит на i -м месте).

1.3.2. Операторы в гильбертовых модулях. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы модули над C^* -алгеброй A . Ограниченные $\mathbb{C}$ -линейные A -гомоморфизмы из модуля $\mathcal{M}$ в модуль $\mathcal{N}$ мы будем называть *операторами*, действующими из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$, и множество всех таких операторов будем обозначать через $\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Пусть $T \in \text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Мы будем говорить, что оператор T *допускает сопряженный*, если существует оператор $T^* \in \text{Hom}_A(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ такой, что

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{для всех } x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N},$$

и будем обозначать множество всех операторов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$, допускающих сопряженный, через $\text{Hom}_A^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Если $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, то $\text{End}_A(\mathcal{M}) = \text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является банаховой алгеброй, а $\text{End}_A^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}_A^*(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является C^* -алгеброй.

Часто бывает полезно следующее утверждение.

Лемма 1.3.1. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы модули над C^* -алгеброй A , а $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ и $T^* : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ — такие отображения, что $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ для всех $x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}$. Тогда $T \in \text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ и $T^* \in \text{Hom}_A(\mathcal{N}, \mathcal{M})$. Следовательно, $T \in \text{Hom}_A^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Следующий пример показывает, что существуют операторы в C^* -гильбертовых модулях, не допускающие сопряженного.

Пример 1.3.4. Пусть $A = L^\infty[0, 1]$, $\mathcal{M} = l_2(A)$, а $\{e_i\}$ — канонический базис в $\mathcal{M}$. Каждому оператору из $\text{End}(l_2(A))$ соответствует его матрица $T = (t_{ij})$ в каноническом базисе, где $t_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$. Рассмотрим функции $f_n \in A$, равные единице на отрезке $[1/2^{n+1}, 1/2^n]$ и нулю в остальных точках. Определим матрицу $T = (t_{ij})$ следующим образом: $t_{1j} = f_j$, $j = 1, 2, \dots$ и $t_{ij} = 0$ при $i > 1$. Ясно, что матрица T задает оператор на $\mathcal{M}$. Если у этого оператора существует сопряженный (скажем, с матрицей $S = (s_{ij})$), то $s_{ij} = t_{ji}^*$. Поэтому $Se_1 = (f_1, f_2, f_3, \dots)$. Осталось заметить, что ряд $\sum_n f_n^* f_n = \sum_n f_n$ не сходится по норме в A , т.е. Se_1 не принадлежит $l_2(A)$.

Предложение 1.3.2 (см. [64]). Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы A -модули. Для линейного отображения $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) T ограничен и $T(xa) = T(x)a$ для всех $x \in \mathcal{M}, a \in A$;
- (ii) существует константа C такая, что $\langle Tx, Tx \rangle \leq C \langle x, x \rangle$ для всех $x \in \mathcal{M}$.

Более того, в случае выполнения одного из указанных условий, имеем

$$\|T\| = \inf\{C^{1/2} : \langle Tx, Tx \rangle \leq C \langle x, x \rangle \text{ для всех } x \in \mathcal{M}\}.$$

Пусть $x, y \in \mathcal{M}$. Определим отображение

$$\theta_{x,y} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad z \mapsto x \langle y, z \rangle.$$

Лемма 1.3.2. Пусть $x, y \in \mathcal{M}$. Тогда $\theta_{x,y} \in \text{End}_A^*(\mathcal{M})$, причем $\theta_{x,y}^* = \theta_{y,x}$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

- (i) $T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y}$ для всех $T \in \text{End}_A(\mathcal{M})$;
- (ii) $\theta_{x,y}T = \theta_{x,T^*y}$ для всех $T \in \text{End}_A^*(\mathcal{M})$.

Обозначим через $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ замыкание в $\text{End}_A^*(\mathcal{M})$ линейной оболочки операторов вида $\theta_{x,y}$, $x, y \in \mathcal{M}$. Непосредственно из леммы 1.3.2 получаем, что $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ является C^* -подалгеброй и двусторонним идеалом в $\text{End}_A^*(\mathcal{M})$. C^* -Алгебра $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ называется C^* -алгеброй компактных операторов гильбертова модуля $\mathcal{M}$.

1.3.3. Ортогональная и топологическая дополняемость C^* -гильбертовых модулей. Теорема о стабилизации. Для замкнутого подмодуля $\mathcal{N}$ C^* -гильбертова модуля $\mathcal{M}$ можно определить ортогональное дополнение $\mathcal{N}^\perp$ как множество таких $x \in \mathcal{M}$, что $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $y \in \mathcal{N}$. Тогда $\mathcal{N}^\perp$ также является замкнутым подмодулем в $\mathcal{M}$. Однако равенство $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$ может не выполняться, как показывает следующий пример.

Пример 1.3.5. Пусть $A = C[0, 1]$, $\mathcal{M} = A$ и $\mathcal{N} = C_0(0, 1)$ — множество функций из A , обращающихся в нуль на концах отрезка. Тогда, очевидно, $\mathcal{N}^\perp = 0$.

Замкнутый подмодуль $\mathcal{N}$ C^* -гильбертова модуля $\mathcal{M}$ называется ортогонально дополняемым в $\mathcal{M}$, если $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$. Замкнутый подмодуль $\mathcal{N}$ C^* -гильбертова модуля $\mathcal{M}$ называется (топологически) дополняемым в $\mathcal{M}$, если существует замкнутый подмодуль $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ такой, что $\mathcal{N} + \mathcal{L} = \mathcal{M}$ и $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \{0\}$ (обозначение $\mathcal{M} = \mathcal{N} \widetilde{\oplus} \mathcal{L}$).

Теорема 1.3.1 (см. [11]). Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы A -модули и $T \in \text{Hom}_A^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ — оператор с замкнутым образом. Тогда

- (i) $\text{Ker } T$ является ортогонально дополняемым подмодулем в $\mathcal{M}$;
- (ii) $\text{Im } T$ является ортогонально дополняемым подмодулем в $\mathcal{N}$.

Следствие 1.3.1 (см. [11]). Пусть $\mathcal{M}$ — (алгебраически) конечно-порожденный гильбертов подмодуль в гильбертовом модуле $\mathcal{N}$ над C^* -алгеброй с единицей. Тогда $\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

Отметим, что для конечно-порожденного проективного модуля $\mathcal{M}$ следствие 1.3.1 получено в [41] другим способом.

C^* -Гильбертов модуль $\mathcal{M}$ называется полным, если замыкание $\langle \mathcal{M}, \mathcal{M} \rangle$ линейной оболочки элементов вида $\langle x, x \rangle$, $x \in \mathcal{M}$, совпадает с A . C^* -Гильбертов модуль $\mathcal{M}$ называется ортогонально дополняемым, если для любого C^* -гильбертова модуля $\mathcal{M}_1$, содержащего $\mathcal{M}$, существует разложение вида $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

Пусть $\mathcal{M}' := \text{Hom}_A(\mathcal{M}, A)$. Структуры векторного пространства и правого A -модуля на $\mathcal{M}'$ задаются формулами $(\lambda f)(y) = \lambda f(y)$ и $(fa)(y) = a^* f(y)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in A$, $y \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{M}'$) соответственно. Банахов A -модуль $\mathcal{M}'$ называется дуальным к C^* -гильбертову модулю $\mathcal{M}$. Имеет место изометрическое модульное вложение банаховых A -модулей

$$\wedge : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}', \quad x^\wedge(\cdot) = \langle x, \cdot \rangle.$$

C^* -Гильбертов модуль $\mathcal{M}$ называется автодуальным, если $\wedge(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'$.

Теорема 1.3.2 (см. [43, 44, 57]). Для полного гильбертова модуля $\mathcal{M}$ над унитарной C^* -алгеброй A следующие условия эквивалентны:

- (i) гильбертов A -модуль $\mathcal{M}$ автодуален;
- (ii) гильбертов A -модуль $\mathcal{M}$ ортогонально дополняем;
- (iii) каждый оператор на $\mathcal{M}$ допускает сопряженный, т.е. $\text{End}_A(\mathcal{M}) = \text{End}_A^*(\mathcal{M})$.

C^* -Гильбертов модуль $\mathcal{M}$ называется счетно-порожденным, если имеется счетный набор элементов $x_i \in \mathcal{M}$ таких, что их конечные A -линейные комбинации плотны в $\mathcal{M}$.

Теорема (теорема Каспарова о стабилизации [52]). Пусть A — C^* -алгебра, $\mathcal{M}$ — счетно-порожденный гильбертов A -модуль. Тогда $\mathcal{M} \oplus l_2(A) \cong l_2(A)$.

ГЛАВА 2

ОПЕРАТОРНАЯ K -ТЕОРИЯ

Топологическая K -теория, или, что то же самое (см., напр., [13, глава 2, § 2]), операторная K -теория для коммутативных C^* -алгебр, была построена М. Атьей и Ф. Хирцебрухом в [27] на основе понятия векторного расслоения.

В [49] было дано определение $K_1(A)$, которое позволило построить теорию гомологий K_* на категории банаховых алгебр, в частности, C^* -алгебр. Рассмотрению основных свойств этой операторной K -теории посвящена настоящая глава.

Упомянем о некоторых важных обобщениях K -теории (подробное рассмотрение которых выходит за рамки настоящего обзора). В серии работ Л. Брауна, Р. Дугласа и П. Филлмора [29–31] были изучены расширения C^* -алгебр вида

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow E \rightarrow C(X) \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{K}$ — C^* -алгебра компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, а $C(X)$ — C^* -алгебра непрерывных функций на компактном метризуемом пространстве X . Полученная таким образом Ext -теория является теорией гомологий, двойственной к топологической K -теории. Полученное в [7] распространение этих результатов на случай расширений вида

$$0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0,$$

где A — сепарабельная C^* -алгебра, а B — C^* -алгебра, обладающая счетной аппроксимативной единицей, привело к построению бифунктора $KK(A, B)$, контравариантного по первому аргументу и ковариантного по второму, такого, что $KK(\mathbf{C}, B) = K_0(B)$. Аксиомы гомотопической эквивалентности и точности для функторов $h_*^A(\cdot) = KK(A, \cdot)$ и $h_B^*(\cdot) = KK(\cdot, B)$ доказаны в [7]. При некоторых дополнительных предположениях теории гомологий h_*^A и когомологий h_B^* являются σ -аддитивными (см. [71]). Другой подход к построению KK -теории, который позволяет рассматривать элементы $KK(A, B)$ как обобщенные гомоморфизмы из A в B , предложен в [38].

Дальнейшее развитие эти идеи получили в работе [36] А. Конна и Н. Хигсона, в которой был определен бифунктор $E(A, B)$ как множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из $SA \otimes \mathcal{K}$ в $SB \otimes \mathcal{K}$. Этот бифунктор является стабильным и полуточным по каждому аргументу и, следовательно, для него имеет место периодичность Ботта (ср. [37]). Кроме того, существует естественное отображение $KK(A, B) \rightarrow E(A, B)$, которое является изоморфизмом для ядерных алгебр [36].

Нашими основными источниками на протяжении этой главы будут [10, 28, 35, 42, 49, 56, 71, 76, 84].

2.1. ФУНКТОР K_0 И ЕГО СВОЙСТВА

2.1.1. Множество унитарных элементов C^* -алгебры. Пусть A — унитарная C^* -алгебра, $M \subset A$ — подмножество. Элементы $a, b \in M$ называются *гомотопными в M* (обозначаем $a \sim_h b$ в M), если $a = f(0)$, $b = f(1)$ для некоторой непрерывной функции $f : [0, 1] \rightarrow M$. Мы будем опускать ссылку на M , если из контекста будет ясно, о каком множестве идет речь.

Обозначим через $\mathcal{U}(A)$ группу унитарных элементов в A , а через $\mathcal{U}(A)_0$ — компоненту линейной связности единицы в $\mathcal{U}(A)$. Отметим, что $\mathcal{U}(A)_0$ является одновременно открытым и замкнутым подмножеством топологического пространства $\mathcal{U}(A)$.

Предложение 2.1.1 (см. [10, 56]). Пусть $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, $u \in \mathcal{U}(A)$ и $\text{sp}(u) \neq \mathbf{T}$. Тогда $u \in \mathcal{U}(A)_0$.

Следствие 2.1.1. Если $u, v \in \mathcal{U}(A)$ и $\|u - v\| < 2$, то $u \sim_h v$.

Теорема 2.1.1 (см. [10, 56]). $\mathcal{U}(A)_0$ является нормальной подгруппой группы $\mathcal{U}(A)$. Кроме того, элемент u из A принадлежит $\mathcal{U}(A)_0$ тогда и только тогда, когда $u = e^{ih_1} e^{ih_2} \dots e^{ih_n}$ для некоторых самосопряженных элементов $h_1, h_2, \dots, h_n$ из A .

Предложение 2.1.2. Пусть A, B — C^* -алгебры и $\varphi : A \rightarrow B$ — сюръективный $*$ -гомоморфизм. Тогда $\varphi(\mathcal{U}(A)_0) = \mathcal{U}(B)_0$, причем для каждого u из $\mathcal{U}(B)$ существует v из $\mathcal{U}(M_2(A))_0$ такой, что

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Отношения эквивалентности на множестве проекторов C^* -алгебры. Пусть A — C^* -алгебра. Обозначим через $P(A)$ множество проекторов в A (здесь и далее под проектором всегда понимается самосопряженный проектор).

Введем на множестве $P(A)$ следующие отношения эквивалентности:

- проекторы $p, q \in P(A)$ называются *эквивалентными по Мюррею—фон Нейману* (обозначение $p \sim q$), если $p = v^*v$, $q = vv^*$ для некоторого элемента $v \in A$;
- проекторы $p, q \in P(A)$ называются *унитарно эквивалентными* (обозначение $p \sim_u q$), если $p = uqu^*$ для некоторого унитарного элемента $u \in \tilde{A}$.

Предложение 2.1.3. Пусть p, q — проекторы в унитарной C^* -алгебре A . Следующие условия эквивалентны:

- 1) $p \sim_u q$;
- 2) $p \sim q$ и $1 - p \sim 1 - q$.

Часто бывает полезно следующее утверждение.

Лемма 2.1.1. Пусть p, q — проекторы в C^* -алгебре A , причем $\|p - q\| < 1$. Тогда $p \sim_h q$.

Предложение 2.1.4 (см. [56]). Проекторы p, q из C^* -алгебры A гомотопны в $P(A)$ тогда и только тогда, когда существует унитарный элемент u из $\mathcal{U}(\tilde{A})_0$ такой, что $p = uqu^*$.

Обсудим три типа отношений эквивалентности $\sim_h$, $\sim_u$ и $\sim$ на множестве проекторов C^* -алгебры A .

Предложение 2.1.5 (см. [56, 84]). Пусть $p, q \in P(A)$.

- (i) Если $p \sim_h q$, то $p \sim_u q$.
- (ii) Если $p \sim_u q$, то $p \sim q$.

Можно проверить (см., напр., [56, example 2.2.9]), что отношения эквивалентности $\sim_h$, $\sim_u$, $\sim$ попарно различны. Тем не менее эти три типа эквивалентности совпадают после перехода к матричным алгебрам.

Предложение 2.1.6 (см. [56]). Пусть $p, q \in P(A)$.

- (i) Если $p \sim q$, то $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в $M_2(A)$.
- (ii) Если $p \sim_u q$, то $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в $P(M_2(A))$.

2.1.3. Определение функтора K_0 . Пусть A — C^* -алгебра, а $M_r(A)$ — множество $(r \times r)$ -матриц с элементами из A . Положим

$$M_\infty(A) = \bigcup_{r=1}^{\infty} M_r(A).$$

Кроме того, пусть $P_r(A)$ множество проекторов в $M_r(A)$, а $P_\infty(A)$ — множество проекторов в $M_\infty(A)$. Если C^* -алгебра A унитарна, то единичную $(n \times n)$ -матрицу обозначим через 1_n . Нулевую $(n \times n)$ -матрицу обозначим через 0_n .

Элементы $p, q \in P_\infty(A)$ называются *эквивалентными по Мюррею—фон Нейману* (обозначаем $p \sim q$), если $p = v^*v$, $q = vv^*$ для некоторого элемента $v \in M_\infty(A)$.

Рассмотрим прямую сумму элементов $p, q \in P_\infty(A)$:

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.1.2. Пусть p, q, p', q' — проекторы из $P_\infty(A)$. Тогда

- (i) $p \sim p \oplus 0_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$;
- (ii) если $p \sim p'$ и $q \sim q'$, то $p \oplus q \sim p' \oplus q'$;
- (iii) $p \oplus q \sim q \oplus p$;
- (iv) если $pq = 0$, то элемент $p + q$ является проектором, причем $p + q \sim p \oplus q$.

Пусть A — унитарная C^* -алгебра. Проекторы p, q из $P_\infty(A)$ называются *стабильно эквивалентными* (обозначение $p \simeq q$), если $p \oplus 1_n \sim q \oplus 1_n$ для некоторого натурального n . Обозначим через $[p]$ класс стабильной эквивалентности проектора $p \in P_\infty(A)$.

Относительно операции прямой суммы множество фактор-классов $\mathcal{P}(A) = P_\infty(A)/\simeq$ является абелевой полугруппой с сокращением (т.е. условие $[p \oplus r] = [q \oplus r]$ влечет $[p] = [q]$ для всех $[p], [q], [r] \in \mathcal{P}(A)$). Напомним, что это свойство имеет место тогда и только тогда, когда стандартный гомоморфизм

$$s : \mathcal{P}(A) \rightarrow S(\mathcal{P}(A)), \quad [p] \mapsto [p] - [0]$$

из абелевой полугруппы $\mathcal{P}(A)$ в ее симметризацию $S(\mathcal{P}(A))$ инъективен [56, 3.1.1] (см. также [5]).

Определение 2.1.1. Для произвольной унитарной C^* -алгебры A группа $K_0(A)$ определяется как симметризация $S(\mathcal{P}(A))$ абелева моноида $\mathcal{P}(A)$.

Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — унитарный $*$ -гомоморфизм между унитарными C^* -алгебрами. Для произвольной матрицы $a = (a_{ij}) \in M_r(A)$ положим $\varphi(a) = (\varphi(a_{ij})) \in M_r(B)$. Ясно, что $\varphi : M_r(A) \rightarrow M_r(B)$ также является унитарным $*$ -гомоморфизмом, причем $\varphi(p) \simeq \varphi(q)$ для всех $p, q \in P_\infty(A)$ таких, что $p \simeq q$. Таким образом, можно корректно определить гомоморфизм $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ по формуле $\varphi_*([p] - [q]) = [\varphi(p)] - [\varphi(q)]$.

Если $\varphi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$ — унитарные $*$ -гомоморфизмы между унитарными C^* -алгебрами, то $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$ и $(\text{Id}_A)_* = \text{Id}_{K_0(A)}$. Другими словами, соответствие

$$A \mapsto K_0(A), \quad \varphi \mapsto \varphi_*$$

задает ковариантный функтор K_0 из категории унитарных C^* -алгебр в категорию абелевых групп. Этот функтор можно продолжить на категорию всех C^* -алгебр следующим образом. Пусть A — C^* -алгебра без единицы. Рассмотрим расщепимую точную последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

и определим $K_0(A)$ как ядро гомоморфизма $\pi_* : K_0(\tilde{A}) \rightarrow K_0(\mathbf{C})$. Для каждой C^* -алгебры A (с единицей или без единицы) имеет место точная последовательность групп

$$0 \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{\pi_*} K_0(\mathbf{C}) \longrightarrow 0.$$

Здесь отображение $K_0(A) \rightarrow K_0(\tilde{A})$ есть i_* , если A унитарна, и отображение вложения, если A не унитарна. Таким образом, равенство $K_0(A) = \text{Ker}\{\pi_* : K_0(\tilde{A}) \rightarrow K_0(\mathbf{C})\}$ справедливо для произвольных C^* -алгебр (с единицей или без единицы).

Пусть теперь $\varphi : A \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизм между произвольными C^* -алгебрами и $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ — единственный унитарный $*$ -гомоморфизм, продолжающий φ . Определим гомоморфизм $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ как ограничение гомоморфизма $\tilde{\varphi}_* : K_0(\tilde{A}) \rightarrow K_0(\tilde{B})$ на группу $K_0(A)$. Непосредственная проверка показывает, что эта конструкция задает ковариантный функтор K_0 из категории всех C^* -алгебр в категорию абелевых групп.

Пример 2.1.1. Пусть A — фактор. Тогда $K_0(A) = 0$, если A бесконечный или чисто бесконечный фактор. $K_0(A) = \mathbf{Z}$, если A конечный фактор типа (I) и $K_0(A) = \mathbf{R}$, если A конечный фактор типа (II) (см. [42, § 3.7], [56, 69, 84]).

2.1.4. Свойства K_0 . Доказательства теорем этого пункта можно найти, например, в [10, 28, 56, 84].

Пусть A_1, A_2 — C^* -алгебры. Легко видеть, что относительно покомпонентных операций и нормы $\|(a_1, a_2)\| = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|\}$ прямая сумма $A = A_1 \oplus A_2$ также будет C^* -алгеброй. Обозначим через π_k , $k = 1, 2$, проекции $A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_k$.

Теорема 2.1.2 (аддитивность K_0). *Отображение*

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : K_0(A_1 \oplus A_2) \rightarrow K_0(A_1) \oplus K_0(A_2)$$

является изоморфизмом групп.

Теорема 2.1.3 (эквивалентность Мориты для K_0). *Пусть A — C^* -алгебра и*

$$i : a \mapsto \text{diag}(a, 0)$$

— каноническое вложение $A \hookrightarrow M_r(A)$. Тогда индуцированное отображение

$$i_* : K_0(A) \rightarrow K_0(M_r(A))$$

является изоморфизмом.

Пусть A, B — C^* -алгебры.

Обозначим через $A[0, 1]$ множество непрерывных отображений из отрезка $[0, 1]$ в A . Отметим, что $A[0, 1]$ является C^* -алгеброй относительно поточечных операций и нормы $\|f\| = \sup\{\|f(t)\| : t \in [0, 1]\}$.

$*$ -Гомоморфизмы $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ называются *гомотопными* (обозначаем $\varphi \sim_h \psi$), если существует $*$ -гомоморфизм $\Phi : A \rightarrow B[0, 1]$ такой, что $(\Phi(a))(0) = \varphi(a)$ и $(\Phi(a))(1) = \psi(a)$ для всех $a \in A$.

$*$ -Гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow B$ называется *эквивалентностью*, если существует $*$ -гомоморфизм $\psi : B \rightarrow A$ такой, что $\psi \circ \varphi \sim_h \text{Id}_A$ и $\varphi \circ \psi \sim_h \text{Id}_B$. В этом случае C^* -алгебры A, B называются *эквивалентными*.

C^* -Алгебра A называется *стягиваемой*, если тождественный $*$ -гомоморфизм Id_A гомотопен нулевому $*$ -гомоморфизму. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда C^* -алгебра A эквивалентна нулевой C^* -алгебре.

Используя лемму 2.1.1, несложно доказать следующий результат.

Теорема 2.1.4 (гомотопическая инвариантность K_0). *Пусть $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ — гомотопные $*$ -гомоморфизмы между C^* -алгебрами A, B . Тогда индуцированные гомоморфизмы $\varphi_*, \psi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ совпадают.*

Следствие 2.1.2. *Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — эквивалентность. Тогда отображение $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ является изоморфизмом групп. В частности, $K_0(A) = 0$ для стягиваемой C^* -алгебры A .*

Теорема 2.1.5 (слабая точность K_0). *Каждая короткая точная последовательность C^* -алгебр*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность абелевых групп

$$K_0(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_0(A) \xrightarrow{\psi_*} K_0(B).$$

Для расщепляющихся точных последовательностей C^* -алгебр утверждение предыдущей теоремы можно усилить.

Теорема 2.1.6. *Каждая короткая точная последовательность C^* -алгебр*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

для которой существует $$ -гомоморфизм $\lambda : B \rightarrow A$ такой, что $\lambda \circ \psi = \text{Id}_B$, индуцирует точную последовательность абелевых групп*

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_0(A) \xrightarrow{\psi_*} K_0(B) \longrightarrow 0$$

такую, что $\lambda_ \circ \psi_* = \text{Id}_{K_0(B)}$.*

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория. Последовательность $\{A_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$, где A_n — объекты $\mathcal{C}$, а $\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ — морфизмы в $\mathcal{C}$, называется *индуктивной последовательностью*. Для $m > n$ рассмотрим следующие морфизмы в $\mathcal{C}$:

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \circ \varphi_n : A_n \rightarrow A_m.$$

Определение 2.1.2. Индуктивным пределом индуктивной последовательности $\{A_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в категории $\mathcal{C}$ называется система $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$, состоящая из объекта A категории $\mathcal{C}$ и последовательности $\mu_n : A_n \rightarrow A$ морфизмов в $\mathcal{C}$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

- (i) $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \mu_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$;
- (ii) если $(B, \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty)$ — система, состоящая из объекта B категории $\mathcal{C}$ и последовательности $\lambda_n : A_n \rightarrow B$ морфизмов в $\mathcal{C}$ таких, что $\lambda_{n+1} \circ \varphi_n = \lambda_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то существует единственный морфизм $\lambda : A \rightarrow B$, удовлетворяющий условию $\lambda \circ \mu_n = \lambda_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Индуктивный предел последовательности $\{A_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ обозначается через $\varinjlim (A_n, \varphi_n)$.

Пример 2.1.2. Пусть B — C^* -алгебра, $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность C^* -подалгебр в B , а i_n — вложения $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ и обозначим через j_n вложения $A_n \rightarrow A$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда система $(A, \{j_n\}_{n=1}^\infty)$ является индуктивным пределом последовательности $\{A_n, i_n\}_{n=1}^\infty$. В частности, для последовательности $\{A_n = M_n(\mathbf{C})\}_{n=1}^\infty$ индуктивный предел A совпадает с C^* -алгеброй $\mathcal{K}$ компактных операторов в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Предложение 2.1.7 (см. [56]). Каждая индуктивная последовательность $\{A_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в категории C^* -алгебр имеет индуктивный предел $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$. Кроме того,

- 1) $A = \bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)$;
- 2) $\|\mu_n(a)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и $a \in A_n$;
- 3) если $(B, \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty)$ и $\lambda : A \rightarrow B$ такие же, как в определении 2.1.2(ii), то
 - (а) $\text{Ker}(\mu_n) \subset \text{Ker}(\lambda_n)$ для всех $n = 1, 2, \dots$;
 - (б) $*$ -гомоморфизм λ инъективен тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\lambda_n) \subset \text{Ker}(\mu_n)$ для всех $n = 1, 2, \dots$;
 - (в) $*$ -гомоморфизм λ сюръективен тогда и только тогда, когда $B = \bigcup_{n=1}^\infty \lambda_n(A_n)$.

Для категории абелевых групп справедливо аналогичное утверждение.

Предложение 2.1.8. Каждая индуктивная последовательность $\{G_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в категории абелевых групп имеет индуктивный предел $(G, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$. Кроме того,

- 1) $G = \bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(G_n)$;
- 2) $\text{Ker}(\mu_n) = \bigcup_{m=n+1}^\infty \text{Ker}(\varphi_{m,n})$ для всех $n = 1, 2, \dots$;
- 3) если $(B, \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty)$ и $\lambda : G \rightarrow B$ такие же, как в определении 2.1.2(ii), то
 - (а) гомоморфизм λ инъективен тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\lambda_n) = \text{Ker}(\mu_n)$ для всех $n = 1, 2, \dots$;
 - (б) гомоморфизм λ сюръективен тогда и только тогда, когда $B = \bigcup_{n=1}^\infty \lambda_n(G_n)$.

Теорема 2.1.7 (непрерывность K_0). Пусть $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$ — индуктивный предел индуктивной последовательности $\{A_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в категории C^* -алгебр и пусть $(G, \{\psi_n\}_{n=1}^\infty)$ — индуктивный предел индуктивной последовательности $(K_0(A_n), \varphi_{n*})$ в категории абелевых групп. Тогда существует изоморфизм групп $\alpha : G \rightarrow K_0(A)$ такой, что $\alpha \circ \psi_n = \mu_{n*}$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того,

- 1) $K_0(A) = \bigcup_{n=1}^\infty \mu_{n*}(K_0(A_n))$;
- 2) $\text{Ker}(\mu_{n*}) = \bigcup_{m=n+1}^\infty \text{Ker}((\varphi_{m,n})_*)$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Учитывая пример 2.1.2 и теорему 2.1.3, получаем следующий результат.

Следствие 2.1.3. $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$.

C^* -Алгебры A и B называются *стабильно изоморфными*, если $A \otimes \mathcal{K} \simeq B \otimes \mathcal{K}$.

Отметим, что $K_0(M_r(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K}) = K_0(M_r(\mathbb{C}))$ для всех $r = 1, 2, \dots$ в силу следствия 2.1.3 и примера 2.1.1. На самом деле это равенство является частным случаем следующего важного свойства функтора K_0 .

Теорема 2.1.8 (стабильность K_0). Пусть A — C^* -алгебра и пусть $p \in \mathcal{K}$ — произвольный одномерный проектор. Обозначим через φ $*$ -гомоморфизм

$$A \rightarrow A \otimes \mathcal{K}, \quad a \mapsto a \otimes p.$$

Тогда $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(A \otimes \mathcal{K})$ является изоморфизмом групп. В частности, если A и B — стабильно изоморфные C^* -алгебры, то $K_0(A) \simeq K_0(B)$.

2.2. ФУНКТОР K_1 И ЕГО СВОЙСТВА

2.2.1. Определение функтора K_1 . Пусть A, B — C^* -алгебры и пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизм. Рассмотрим замкнутые идеалы

$$CA = \{f \in A[0, 1] : f(1) = 0\}, \quad SA = \{f \in A[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

в C^* -алгебре $A[0, 1]$, которые называются соответственно *конусом* и *надстройкой* над A . Определим гомоморфизм надстройки $S(\varphi) : SA \rightarrow SB$ по формуле $S(\varphi)(f) = \varphi \circ f$. Ясно, что соответствие

$$A \mapsto SA, \quad \varphi \mapsto S(\varphi)$$

задает ковариантный функтор надстройки S на категории C^* -алгебр.

Определение 2.2.1. Функтор K_1 из категории C^* -алгебр в категорию абелевых групп определяется как композиция $K_0 \circ S$ функтора K_0 и функтора надстройки S .

Обозначим через $GL(B)$ множество обратимых элементов унитарной C^* -алгебры B . Пусть $GL_r(\tilde{A}) = GL(M_r(\tilde{A}))$ и $\mathcal{U}_r(\tilde{A}) = \mathcal{U}(M_r(\tilde{A}))$. Кроме того, положим

$$GL_\infty(\tilde{A}) = \varinjlim (GL_r(\tilde{A}), j_r), \quad \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) = \varinjlim (\mathcal{U}_r(\tilde{A}), i_r),$$

где

$$i_r : \mathcal{U}_r(\tilde{A}) \rightarrow \mathcal{U}_{r+1}(\tilde{A}), \quad x \mapsto \text{diag}(x, 1), \quad j_r = i_r|_{GL_r(\tilde{A})}.$$

Компоненту линейной связности единицы в топологической группе G обозначим через G_0 .

Предложение 2.2.1 (см. [84]). Группы $GL_r(\tilde{A})/GL_r(\tilde{A})_0$ и $\mathcal{U}_r(\tilde{A})/\mathcal{U}_r(\tilde{A})_0$ изоморфны для всех $r = 1, 2, \dots, \infty$. Кроме того, если C^* -алгебра A унитарна, то

$$GL_r(\tilde{A})/GL_r(\tilde{A})_0 \simeq GL_r(A)/GL_r(A)_0, \quad \mathcal{U}_r(\tilde{A})/\mathcal{U}_r(\tilde{A})_0 \simeq \mathcal{U}_r(A)/\mathcal{U}_r(A)_0.$$

Теорема 2.2.1 (см. [28, 84]). Для каждой C^* -алгебры A существует изоморфизм

$$\theta_A : \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})/\mathcal{U}_\infty(\tilde{A})_0 \rightarrow K_1(A)$$

такой, что для произвольного $*$ -гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ C^* -алгебр диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})/\mathcal{U}_\infty(\tilde{A})_0 & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathcal{U}_\infty(\tilde{B})/\mathcal{U}_\infty(\tilde{B})_0 \\ \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\ K_1(A) & \xrightarrow{S(\varphi)_*} & K_1(B) \end{array}$$

коммутативна (здесь через φ_* обозначен индуцированный гомоморфизм фактор-групп).

Следствие 2.2.1. Пусть A — унитарная C^* -алгебра такая, что $\mathcal{U}_r(A) = \mathcal{U}_r(A)_0$ для всех $r = 1, 2, \dots$. Тогда $K_1(A) = 0$.

Пример 2.2.1. $K_1(A) = 0$ для произвольной алгебры фон Неймана A . Действительно, из предложения 1.2.1 следует, что алгебры фон Неймана замкнуты относительно борелевского исчисления. Поэтому, в силу теоремы 2.1.1, $\mathcal{U}_r(A) = \mathcal{U}_r(A)_0$ для всех $r = 1, 2, \dots$.

2.2.2. Свойства K_1 . Доказательство результатов этого пункта можно найти, например, в [56, 84].

Теорема 2.2.2 (аддитивность K_1). Пусть A_1, A_2 — C^* -алгебры. Обозначим через $\pi_k, k = 1, 2$ проекции $A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_k$. Тогда отображение

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : K_1(A_1 \oplus A_2) \rightarrow K_1(A_1) \oplus K_1(A_2)$$

является изоморфизмом групп.

Теорема 2.2.3 (эквивалентность Мориты для K_1). Пусть A — C^* -алгебра и $i : a \mapsto \text{diag}(a, 0)$ — каноническое вложение $A \hookrightarrow M_r(A)$. Тогда индуцированное отображение

$$i_* : K_1(A) \rightarrow K_1(M_r(A))$$

является изоморфизмом.

Теорема 2.2.4 (гомотопическая инвариантность K_1). Пусть $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ — гомотопные $*$ -гомоморфизмы между C^* -алгебрами A, B . Тогда индуцированные гомоморфизмы $\varphi_*, \psi_* : K_1(A) \rightarrow K_1(B)$ совпадают. В частности, $K_1(A) \simeq K_1(B)$, если A и B эквивалентны, и $K_1(A) = 0$, если A — стягиваемая C^* -алгебра.

Теорема 2.2.5 (слабая точность K_1). Каждая короткая точная последовательность C^* -алгебр

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность абелевых групп

$$K_1(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_1(A) \xrightarrow{\psi_*} K_1(B).$$

Для расщепляющихся точных последовательностей C^* -алгебр имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2.2.6. Каждая короткая точная последовательность C^* -алгебр

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

для которой существует $*$ -гомоморфизм $\lambda : B \rightarrow A$ такой, что $\lambda \circ \psi = \text{Id}_B$, индуцирует точную последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow K_1(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_1(A) \xrightarrow{\psi_*} K_1(B) \longrightarrow 0$$

такую, что $\lambda_* \circ \psi_* = \text{Id}_{K_1(B)}$.

Теорема 2.2.7 (непрерывность K_1). Пусть $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$ — индуктивный предел индуктивной последовательности $\{A_n, \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в категории C^* -алгебр и $(G, \{\psi_n\}_{n=1}^\infty)$ — индуктивный предел индуктивной последовательности $(K_1(A_n), \varphi_{n*})$ в категории абелевых групп. Тогда существует изоморфизм групп $\alpha : G \rightarrow K_1(A)$ такой, что $\alpha \circ \psi_n = \mu_{n*}$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того,

- 1) $K_1(A) = \bigcup_{n=1}^\infty \mu_{n*}(K_1(A_n))$;
- 2) $\text{Ker}(\mu_{n*}) = \bigcup_{m=n+1}^\infty \text{Ker}((\varphi_{m,n})_*)$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Для произвольной C^* -алгебры A тензорное произведение $A \otimes K$ является индуктивным пределом в категории C^* -алгебр последовательности матричных алгебр $M_n(A)$. Поэтому, в силу теорем 2.2.7, 2.2.3, получаем следующий результат.

Теорема 2.2.8 (стабильность K_1). Для произвольной C^* -алгебры A имеем $K_1(A) \simeq K_1(A \otimes K)$. В частности, если A и B — стабильно изоморфные C^* -алгебры, то $K_1(A) \simeq K_1(B)$.

2.3. K -ТЕОРИЯ КАК ПРИМЕР ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

2.3.1. Длинная точная последовательность в K -теории. Пусть A — C^* -алгебра. Определим скалярное отображение s формулой

$$s : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{A}, \quad (a, \lambda) \longmapsto (0, \lambda).$$

Для каждой короткой точной последовательности C^* -алгебр

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \quad (2.3.1)$$

можно определить связывающий гомоморфизм $\delta : K_1(B) \rightarrow K_0(I)$, который, в свою очередь, позволит построить длинную точную последовательность в операторной K -теории (теорема 2.3.1). Определение связывающего гомоморфизма основывается на следующих двух леммах.

Лемма 2.3.1. Пусть заданы короткая точная последовательность (2.3.1) C^* -алгебр и элемент u из $\mathcal{U}_n(\tilde{B})$.

(i) Существуют унитарный элемент v из $\mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ и проектор p из $P_{2n}(\tilde{I})$ такие, что

$$\psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \varphi(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*, \quad s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Если v и p — элементы из п. (i), а $w \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ и $q \in P_{2n}(\tilde{I})$ удовлетворяют условиям

$$\psi(w) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \varphi(q) = w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*,$$

то $s(q) = \text{diag}(1_n, 0_n)$ и $p \sim_u q$ в $P_{2n}(\tilde{I})$.

Определим $\nu : \mathcal{U}_\infty(\tilde{B}) \rightarrow K_0(I)$ формулой $\nu(u) = [p] - [s(p)]$, где $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, а $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ соответствует u по лемме 2.3.1(i). Согласно лемме 2.3.1(ii) отображение ν корректно определено.

Лемма 2.3.2. Отображение $\nu : \mathcal{U}_\infty(\tilde{B}) \rightarrow K_0(I)$ обладает следующими свойствами:

- (i) $\nu(u_1 \oplus u_2) = \nu(u_1) + \nu(u_2)$ для всех $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{B})$;
- (ii) $\nu(1) = 0$;
- (iii) если $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$ и $u_1 \sim_h u_2$, то $\nu(u_1) = \nu(u_2)$;
- (iv) $\nu(\psi(u)) = 0$ для всех $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$;
- (v) $\varphi_*(\nu(u)) = 0$ для всех $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{B})$.

Доказательство лемм 2.3.1, 2.3.2 основано, прежде всего, на использовании предложения 2.1.2 (см., напр., [56]).

Согласно лемме 2.3.2, существует гомоморфизм $\delta : K_1(B) \rightarrow K_0(I)$ такой, что $\delta([u]_1) = \nu(u)$ для каждого u из $\mathcal{U}_\infty(\tilde{B})$, где через $[u]_1$ обозначен фактор-класс элемента u в группе $\mathcal{U}_\infty(\tilde{B})/\mathcal{U}_\infty(\tilde{B})_0 \simeq K_1(B)$.

Теорема 2.3.1. Для каждой короткой точной последовательности (2.3.1) C^* -алгебр имеет место следующая точная последовательность K -групп:

$$K_1(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_1(A) \xrightarrow{\psi_*} K_1(B) \xrightarrow{\delta} K_0(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_0(A) \xrightarrow{\psi_*} K_0(B).$$

2.3.2. Периодичность Ботта. Пусть A — C^* -алгебра с единицей и пусть $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Для каждого натурального числа n и для каждого проектора p из $P_n(A)$ определим петлю f_p следующим образом:

$$f_p : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{U}_n(A), \quad f_p(z) = zp + (1_n - p).$$

Отождествляя $M_n(\tilde{S}A)$ со множеством функций f из $C(\mathbf{T}, M_n(A))$ таких, что $f(1) \in M_n(\mathbf{C}1_A)$, получаем, что f_p лежит в $\mathcal{U}_n(\tilde{S}A)$.

Непосредственно проверяется следующая лемма.

- Лемма 2.3.3.** (i) $f_{p \oplus q} = f_p \oplus f_q$ для всех p, q из $P_\infty(A)$;
(ii) $f_0 = 1$;

(iii) если проекторы p, q гомотопны в $P_n(A)$, то петли f_p, f_q гомотопны в $\mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$.

Таким образом, корректно определен гомоморфизм (отображение Ботта)

$$\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$$

такой, что $\beta_A([p]) = [f_p]_1$ для каждого p из $P_\infty(A)$, где через $[f_p]_1$ обозначен фактор-класс элемента f_p в $K_1(SA)$. Легко проверить, что отображение Ботта является естественным преобразованием из функтора K_0 в функтор $K_1 \circ S$, т.е. для каждого унитарного $*$ -гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ между унитарными C^* -алгебрами имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_0(B) \\ \beta_A \downarrow & & \downarrow \beta_B \\ K_1(SA) & \xrightarrow{S(\varphi)_*} & K_1(SB) \end{array} .$$

Пусть теперь A — C^* -алгебра без единицы. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(\tilde{A}) & \longrightarrow & K_0(\mathbf{C}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \beta_{\tilde{A}} \downarrow & & \downarrow \beta_{\mathbf{C}} \\ 0 & \longrightarrow & K_1(SA) & \longrightarrow & K_1(S\tilde{A}) & \longrightarrow & K_1(S\mathbf{C}) \longrightarrow 0 \end{array} ,$$

строки которой являются точными расщепимыми последовательностями, причем (правый) квадрат коммутативен в силу естественности отображения Ботта. Поэтому существует единственный гомоморфизм $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$, замыкающий диаграмму до коммутативной. Прямым вычислением можно получить следующую явную формулу для этого гомоморфизма:

$$\beta_A([p] - [q]) = [f_p f_q^*]_1, \quad p, q \in P_\infty(A).$$

Как и в унитарном случае, β_A является естественным преобразованием из функтора K_0 в функтор $K_1 \circ S$.

Теорема 2.3.2 (см., напр., [10, 56, 84]). *Отображение Ботта $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ является изоморфизмом для произвольной C^* -алгебры A .*

Для каждого целого $n \geq 2$ определим индуктивно функтор K_n из категории C^* -алгебр в категорию абелевых групп формулой $K_n = K_{n-1} \circ S$.

Следствие 2.3.1. *Для произвольной C^* -алгебры A и любого целого $n \geq 0$ имеем*

$$K_{n+2}(A) \cong K_n(A).$$

Учитывая теорему 2.3.1, получаем еще один результат.

Следствие 2.3.2. *Для каждой короткой точной последовательности (2.3.1) C^* -алгебр имеет место следующая точная последовательность K -групп:*

$$\begin{array}{ccccc} K_1(I) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_1(A) & \xrightarrow{\psi_*} & K_1(B) \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ K_0(B) & \xleftarrow{\psi_*} & K_0(A) & \xleftarrow{\varphi_*} & K_0(I). \end{array}$$

2.3.3. Теории (ко)гомологий. Аксиоматический подход. На протяжении этого пункта нашим основным источником будет работа [76] (см. также [28, 84]).

Определение 2.3.1. *Теория гомологий* — это последовательность $\{h_n\}$ ковариантных функторов из категории C^* -алгебр в категорию абелевых групп, удовлетворяющая следующим аксиомам.

Аксиома гомотопической эквивалентности. Пусть A, B — C^* -алгебры и $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ — гомотопные $*$ -гомоморфизмы. Тогда

$$\varphi_* = \psi_* : h_n(A) \rightarrow h_n(B) \quad \text{для всех } n.$$

Аксиома точности. Для каждой короткой точной последовательности (2.3.1) существует семейство $\delta = \{\delta_n\}$ гомоморфизмов $\delta_n : h_n(B) \rightarrow h_{n-1}(I)$ такое, что имеет место длинная точная последовательность

$$\cdots \longrightarrow h_n(I) \xrightarrow{\varphi_*} h_n(A) \xrightarrow{\psi_*} h_n(B) \xrightarrow{\delta_n} h_{n-1}(I) \longrightarrow \cdots,$$

причем семейство гомоморфизмов δ естественно по отношению к морфизмам коротких точных последовательностей.

Теория гомологий $\{h_n\}$ называется σ -аддитивной, если для нее выполнено следующее условие.

Аксиома σ -аддитивности. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — C^* -алгебры и $A = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_k$. Обозначим через $i_k : A_k \rightarrow A$ очевидные вложения. Тогда гомоморфизмы групп $i_{k*} : h_n(A_k) \rightarrow h_n(A)$ индуцируют изоморфизм

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} h_n(A_k) \longrightarrow h_n(A)$$

для всех n .

Теорию гомологий можно определять также на некоторой «допустимой» категории $\mathcal{C}$, например, сепарабельных или сепарабельных ядерных C^* -алгебр. Аксиомы для теории когомологий получаются из аксиом для теории гомологий, как обычно, путем обращения стрелок и рассмотрения двойственных объектов (см. [76]).

Пример 2.3.1. Как следует из результатов настоящей главы, операторная K -теория является 2-периодической теорией гомологий на категории C^* -алгебр. Отметим, что аксиомы гомотопической эквивалентности и точности для K -теории доказаны в диссертации М. Каруби [49]. Кроме того, несложно показать, что из свойств аддитивности и непрерывности функтора K_* следует его σ -аддитивность.

Пусть $\{h_n\}$ — теория гомологий. Установим некоторые свойства этой теории, которые являются следствием из аксиом.

Предложение 2.3.1 (см. [76]). Пусть A_1, A_2 — C^* -алгебры. Обозначим через $i_k, k = 1, 2$, вложения $A_k \rightarrow A_1 \oplus A_2$. Тогда отображение

$$(i_1, i_2)_* : h_n(A_1) \oplus h_n(A_2) \rightarrow h_n(A_1 \oplus A_2)$$

является изоморфизмом групп.

Предложение 2.3.2 (см. [76]). Отображение надстройки $\sigma_A : h_n(A) \rightarrow h_{n-1}(SA)$, возникающее из короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

является изоморфизмом групп.

Пусть $f_1 : A_1 \rightarrow B$ и $f_2 : A_2 \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизмы C^* -алгебр. Пул-бэком A_1 и A_2 вдоль f_1 и f_2 называется C^* -алгебра

$$P = \{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 : f_1(a_1) = f_2(a_2)\}.$$

Обозначим через $g_k, k = 1, 2$ проекции $(a_1, a_2) \mapsto a_k$ из P на A_k . Очевидно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g_1} & A_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

причем пул-бэк является универсальным объектом среди диаграмм такого вида в следующем смысле.

Лемма 2.3.4. Пусть P' — произвольная C^* -алгебра и пусть $*$ -гомоморфизмы $g'_k : P' \rightarrow A_k$ удовлетворяют условию $f_2 \circ g'_2 = f_1 \circ g'_1$. Тогда существует единственный $*$ -гомоморфизм $r : P' \rightarrow P$ такой, что $g'_1 = g_1 \circ r$ и $g'_2 = g_2 \circ r$.

Предложение 2.3.3 (см. [76]). Если $*$ -гомоморфизм f_1 (или f_2) сюръективен, то имеет место следующая точная последовательность Майера—Вьеториса:

$$\dots \longrightarrow h_n(P) \xrightarrow{(g_{1*}, g_{2*})} h_n(A_1) \oplus h_n(A_2) \xrightarrow{(-f_{1*} + f_{2*})} h_n(B) \longrightarrow h_{n-1}(P) \longrightarrow \dots$$

Предложение 2.3.4 (см. [76]). Пусть $\{h_n\}$ — σ -аддитивная теория гомологий и пусть $(A, \{\mu_i\}_{i=1}^\infty)$ — индуктивный предел индуктивной последовательности $\{A_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ в категории C^* -алгебр. Тогда отображения $\mu_{i*} : h_n(A_i) \rightarrow h_n(A)$ индуцируют изоморфизм $\varinjlim h_n(A_i) \rightarrow h_n(A)$.

ГЛАВА 3

ФУНКТОР N_0 НА КАТЕГОРИИ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В работах Е. В. Троицкого [21, 82] были определены числа Лефшеца (первого типа) для унитарных эндоморфизмов W^* -эллиптических комплексов, которые являются элементами представления некоторой компактной группы. При этом, если через A обозначить W^* -алгебру, над которой рассматривается эллиптический комплекс, то числа Лефшеца будут принимать значения в группе $K_0(A) \otimes \mathbb{C}$. Функтор N_0 естественным образом возникает при решении задачи об определении (обобщенных) чисел Лефшеца уже для произвольных унитарных эндоморфизмов W^* -эллиптических комплексов.

Говоря нестрого, группы $N_0(A)$ можно рассматривать как K -теорию, но только построенную не по множеству проекторов, а по множеству нормальных элементов индуктивного предела $M_\infty(A)$. Как и следовало ожидать, между N -группами и операторной K -теорией существует тесная связь. В частности, каждый элемент из $N_0(A)$ может быть представлен как аддитивная $K_0(A)$ -значная функция (мера) с компактным носителем, определенная на некотором семействе борелевских подмножеств комплексной плоскости.

В данной главе излагаются результаты работ [16, 17, 66, 67].

3.1. ФУНКТОР N_0 И ЕГО СВЯЗЬ С ОПЕРАТОРНОЙ K -ТЕОРИЕЙ

3.1.1. Определение и свойства функтора N_0 . Пусть A — алгебра фон Неймана. Обозначим через $M_\infty(A)_\nu$ множество нормальных элементов в $M_\infty(A)$, а через $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ — семейство всех борелевских подмножеств комплексной плоскости. Пусть $P_a(E)$ — спектральный проектор элемента $a \in M_\infty(A)_\nu$, соответствующий множеству $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Отметим, что $P_a(E) \in M_\infty(A)_\nu$, так как алгебры фон Неймана замкнуты относительно борелевского исчисления.

Назовем борелевское множество $E \subset \mathbb{C}$ *допустимым*, если нуль не принадлежит замыканию этого множества. Пусть $\mathcal{B}_*(\mathbb{C})$ — семейство всех допустимых борелевских подмножеств комплексной плоскости.

Напомним, что запись $p \simeq q$ используется для обозначения стабильной эквивалентности проекторов $p, q \in M_\infty(A)$.

Назовем элементы $a, b \in M_\infty(A)_\nu$ *стабильно эквивалентными* (обозначение $a \simeq b$), если $P_a(E) \simeq P_b(E)$ для всех $E \in \mathcal{B}_*(\mathbb{C})$. Отметим, что на проекторах это отношение эквивалентности совпадает с обычной стабильной эквивалентностью.

Лемма 3.1.1. Пусть a, b, a', b' — нормальные элементы из $M_\infty(A)$. Тогда

- (i) $a \simeq a \oplus 0_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$;
- (ii) если $a \simeq a'$ и $b \simeq b'$, то $a \oplus b \simeq a' \oplus b'$;

(iii) $a \oplus b \simeq b \oplus a$.

Обозначим через $[a]$ класс стабильной эквивалентности элемента $a \in M_\infty(A)_\nu$. Относительно операции прямой суммы множество фактор-классов $\mathcal{N}(A) = M_\infty(A)_\nu / \simeq$ является абелевой полугруппой с сокращением.

Определение 3.1.1. Для произвольной алгебры фон Неймана A группа $N_0(A)$ определяется как симметризация $S(\mathcal{N}(A))$ абелева моноида $\mathcal{N}(A)$.

Следующие два предложения немедленно следуют из определений.

Предложение 3.1.1. $K_0(A)$ является подгруппой группы $N_0(A)$.

Предложение 3.1.2. Если группа $K_0(A)$ тривиальна, то группа $N_0(A)$ также тривиальна. В частности, $N_0(A) = 0$, если A бесконечный или чисто бесконечный фактор (см. пример 2.1.1).

Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — унитарный σ -сильнонепрерывный $*$ -гомоморфизм между алгебрами фон Неймана. Для произвольных нормальных элементов $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$ из $M_r(A)$ положим $\varphi_*([a] - [b]) = [\varphi(a)] - [\varphi(b)]$, где $\varphi(a) = (\varphi(a_{ij}))$ и $\varphi(b) = (\varphi(b_{ij}))$.

Теорема 3.1.1 (см. [17, 67]). *Отображение $\varphi_* : N_0(A) \rightarrow N_0(B)$ является корректно определенным гомоморфизмом групп.*

Следующие два утверждения доказываются аналогично теоремам 2.1.2, 2.1.3.

Теорема 3.1.2. Пусть A_1, A_2 — алгебры фон Неймана. Обозначим через π_k , $k = 1, 2$ проекции $A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_k$. Тогда отображение

$$\pi_{1*} \oplus \pi_{2*} : N_0(A_1 \oplus A_2) \rightarrow N_0(A_1) \oplus N_0(A_2)$$

является изоморфизмом групп.

Теорема 3.1.3 (эквивалентность Мориты для N_0). Пусть A — алгебра фон Неймана и пусть $i : a \mapsto \text{diag}(a, 0)$ — каноническое вложение $A \hookrightarrow M_r(A)$. Тогда индуцированное отображение $i_* : N_0(A) \rightarrow N_0(M_r(A))$ является изоморфизмом.

3.1.2. Функциональное описание групп $N_0(A)$. В настоящем пункте будет показано, что каждый элемент группы $N_0(A)$ может быть представлен как аддитивная $K_0(A)$ -значная мера с компактным носителем, определенная на семействе всех допустимых борелевских подмножеств комплексной плоскости. Это описание позволит, в частности, частично ответить (см. следствие 3.1.1) на следующий вопрос: верно ли, что для каждого σ -сильнонепрерывного унитарного $*$ -гомоморфизма между алгебрами фон Неймана, для которого индуцированное отображение K -групп является изоморфизмом, индуцированное отображение N -групп также является изоморфизмом?

Перейдем к точным формулировкам. Скажем, что отображение $f : \mathcal{B}_*(\mathbf{C}) \rightarrow K_0(A)$ имеет компактный носитель, если найдется компакт $X \subset \mathbf{C}$ такой, что $f(E) = 0$ для всех $E \in \mathcal{B}_*(\mathbf{C})$, для которых $E \cap X = \emptyset$. Обозначим через

$$\mathcal{M}_{c;A} = \mathcal{M}_c(\mathcal{B}_*(\mathbf{C}), K_0(A))$$

множество отображений $f : \mathcal{B}_*(\mathbf{C}) \rightarrow K_0(A)$ с компактным носителем таких, что

$$f\left(\bigsqcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n f(E_k) \quad \text{для всех } E_k \in \mathcal{B}_*(\mathbf{C}), k = 1, \dots, n.$$

Относительно операции

$$(f + g)(E) = f(E) + g(E) \quad (f, g \in \mathcal{M}_{c;A}, E \in \mathcal{B}_*(\mathbf{C}))$$

множество $\mathcal{M}_{c;A}$ является абелевой группой.

Теорема 3.1.4 (см. [17]). *Отображение*

$$\psi : N_0(A) \rightarrow \mathcal{M}_{c;A}, \quad \psi([a] - [b])(E) = [P_a(E)] - [P_b(E)] \quad (3.1.1)$$

корректно определено и является инъективным гомоморфизмом групп.

Для произвольного σ -сильнонепрерывного унитарного $*$ -гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ алгебр фон Неймана определим отображение

$$\varphi_{\#} : \mathcal{M}_{c;A} \rightarrow \mathcal{M}_{c;B}, \quad \varphi_{\#}(f)(E) = \varphi_*(f(E)). \quad (3.1.2)$$

Легко видеть, что $\varphi_{\#}$ является корректно определенным гомоморфизмом групп.

Предложение 3.1.3. (ср. [17]) *Имеет место следующая коммутативная диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} N_0(A) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M}_c(\mathcal{B}_*(\mathbf{C}), K_0(A)) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_{\#} \\ N_0(B) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M}_c(\mathcal{B}_*(\mathbf{C}), K_0(B)) \end{array},$$

где гомоморфизмы ψ , $\varphi_{\#}$ задаются формулами (3.1.1), (3.1.2) соответственно.

Из теоремы 3.1.4 и предложения 3.1.3 немедленно получаем

Следствие 3.1.1. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ является σ -сильнонепрерывным унитарным $*$ -гомоморфизмом алгебр фон Неймана и пусть, кроме того, гомоморфизм $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ инъективен. Тогда гомоморфизм $\varphi_* : N_0(A) \rightarrow N_0(B)$ также инъективен.

3.1.3. Группа $N_0(A)_{\text{fin}}$. Пусть $M_{\infty}(A)_{\text{fin}} \subset M_{\infty}(A)_{\nu}$ — множество нормальных элементов с конечным спектром и пусть $\mathcal{N}(A)_{\text{fin}} = \{[a] : a \in M_{\infty}(A)_{\text{fin}}\}$. Тогда $\mathcal{N}(A)_{\text{fin}} \subset \mathcal{N}(A)$ — абелева подполугруппа. Обозначим через $N_0(A)_{\text{fin}}$ симметризацию этой полугруппы. Отметим, что любой элемент группы $N_0(A)_{\text{fin}}$ можно записать в виде $\left[\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i p_i \right] - \left[\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i q_i \right]$, где $\lambda_i \in \mathbf{C}$ и p_i, q_i — некоторые (возможно нулевые) проекторы в $M_{\infty}(A)$.

Обозначим через

$$\mathcal{M}_{\text{fin};A} = \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbf{C} \setminus \{0\}, K_0(A))$$

множество отображений из $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ в $K_0(A)$, которые равны нулю всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Относительно поточечного сложения отображений это множество является абелевой группой. Для $f \in \mathcal{M}_{\text{fin};A}$ положим $\Lambda_f = \{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : f(\lambda) \neq 0\}$.

Предложение 3.1.4 (см. [17]). *Отображение*

$$j : \mathcal{M}_{\text{fin};A} \rightarrow \mathcal{M}_{c;A}, \quad j(f)(E) = \sum_{\lambda \in E} f(\lambda) \quad (3.1.3)$$

корректно определено и является инъективным гомоморфизмом групп.

Теорема 3.1.5 (см. [17]). *Отображение*

$$\phi : N_0(A)_{\text{fin}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{fin};A}, \quad (\phi([a] - [b]))(\lambda) = [P_a(\{\lambda\})] - [P_b(\{\lambda\})] \quad (3.1.4)$$

корректно определено и является изоморфизмом групп.

Следствие 3.1.2. Группа $N_0(M_r(\mathbf{C}))$ изоморфна группе $\mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \mathbf{Z})$.

Предложение 3.1.5 (ср. [17]). *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} N_0(A)_{\text{fin}} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathcal{B}_*(\mathbf{C}), K_0(A)) \\ \downarrow & & \downarrow j \\ N_0(A) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M}_c(\mathcal{B}_*(\mathbf{C}), K_0(A)) \end{array},$$

в которой гомоморфизмы ψ , j , ϕ задаются формулами (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) соответственно.

Положим

$$h_{\lambda, \mu; p} = [p(\lambda + \mu)] - [p\lambda \oplus p\mu], \quad g_{\lambda; p}^{(n)} = [\lambda p^{\oplus n}] - [n\lambda p],$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ и $p \in P_\infty(A)$. Тогда элементы $h_{\lambda, \mu; p}$ и $g_{\lambda; p}^{(n)}$ принадлежат группе $N_0(A)_{\text{fin}}$. Обозначим через H подгруппу в $N_0(A)_{\text{fin}}$, порожденную множеством элементов

$$\{h_{\lambda, \mu; p} : \lambda, \mu \in \mathbf{C}, p \in P_\infty(A)\},$$

а через G — подгруппу в $N_0(A)_{\text{fin}}$, порожденную множеством элементов

$$\{g_{\lambda; p}^{(n)} : n \in \mathbf{N}, \lambda \in \mathbf{C}, p \in P_\infty(A)\}.$$

Лемма 3.1.2 (см. [67]). *Группа G является подгруппой в H .*

Рассмотрим отображение

$$h : N_0(A)_{\text{fin}} \rightarrow K_0(A) \otimes \mathbf{C}, \quad (3.1.5)$$

которое определяется следующим образом:

$$h([a] - [b]) = \sum_{i=1}^n [P_a(\lambda_i)] \otimes \lambda_i - \sum_{j=1}^m [P_b(\mu_j)] \otimes \mu_j,$$

где $a, b \in M_\infty(A)_{\text{fin}}$ и $\text{sp}(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\text{sp}(b) = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$.

Предложение 3.1.6 (см. [67]). *Отображение h является сюръективным гомоморфизмом групп. Кроме того, ядро этого отображения совпадает с группой H .*

Отметим теперь некоторую связь чисто топологической природы между группами $N_0(A)$ и $N_0(A)_{\text{fin}}$. Пусть на множестве $M_\infty(A)_\nu$ задана топология нормы. Рассмотрим отображение

$$\pi : M_\infty(A)_\nu \times M_\infty(A)_\nu \rightarrow N_0(A), \quad (a, b) \mapsto [a] - [b]$$

и обозначим через τ_π топологию на множестве $N_0(A)$, индуцированную этим отображением. Пусть элемент a принадлежит $M_\infty(A)_\nu$. Для каждого целого положительного n зададимся покрытием $\{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}$ спектра a дизъюнктными борелевскими множествами такими, что диаметр каждого из этих множеств не превосходит $1/n$, и числами $\lambda_k^{(n)} \in E_k^{(n)}$. Далее, образуем последовательность интегральных сумм $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} P_a(E_k^{(n)}) \lambda_k^{(n)},$$

которая в силу спектральной теоремы будет сходиться к элементу a в равномерной топологии. Последовательность $\{[a_n]\}_{n=1}^\infty \in N_0(A)_{\text{fin}}$, таким образом, будет сходиться к элементу $[a] \in N_0(A)$ в топологии τ_π .

Рассмотрим теперь фактор-отображение

$$\text{pr} : N_0(A) \rightarrow N_0(A) / \text{Ker } h$$

и обозначим через $\tau_{\text{pr} \circ \pi}$ топологию на множестве $N_0(A) / \text{Ker } h$, индуцированную композицией $\text{pr} \circ \pi$. Тогда последовательность элементов $[a_n] + \text{Ker } h \in N_0(A)_{\text{fin}} / \text{Ker } h$ будет сходиться к элементу $[a] + \text{Ker } h \in N_0(A) / \text{Ker } h$ в топологии $\tau_{\text{pr} \circ \pi}$. Наконец, отметим, что в силу предложения 3.1.6 группы $N_0(A) / \text{Ker } h$ и $K_0(A) \otimes \mathbf{C}$ изоморфны. Итак, нами доказан следующий результат.

- Теорема 3.1.6.** (i) $N_0(A)_{\text{fin}}$ является плотным подпространством топологического пространства $(N_0(A), \tau_\pi)$.
(ii) $K_0(A) \otimes \mathbf{C}$ является плотным подпространством топологического пространства $(N_0(A) / \text{Ker } h, \tau_{\text{pr} \circ \pi})$.

3.2. Топология на $N_0(A)$, индуцированная равномерной топологией

Классическая процедура Гротендика позволяет в чисто алгебраической ситуации строить группы (симметризации) по заданным абелевым полугруппам. Однако в некоторых задачах некоммутативной геометрии естественным образом возникают полугруппы, которые дополнительно обладают как достаточно хорошей топологической, так и более богатой алгебраической (похожей на модульную) структурами. Полугруппы такого типа (которые мы назвали нормированными полугруппами) и их симметризации рассматриваются в следующих двух пунктах. После этого, в качестве наиболее интересного для нас примера нормированной полугруппы, изучается абелева полугруппа $\mathcal{N}(A)$.

3.2.1. Нормированные полугруппы. Пусть N — абелева полугруппа и пусть задано действие $\mathbf{C} \times N \rightarrow N$, $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{C}, a \in N), \quad (3.2.1)$$

$$\lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2 \quad (\lambda \in \mathbf{C}, a_1, a_2 \in N), \quad (3.2.2)$$

$$1a = a, \quad 0a = 0 \quad (a \in N). \quad (3.2.3)$$

Тогда N называется *модулем* над $\mathbf{C}$. *Нормой* на модуле N называется отображение $\| \cdot \| : N \rightarrow [0, +\infty)$ такое, что

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (a, b \in N), \quad (3.2.4)$$

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| \quad (\lambda \in \mathbf{C}, a \in N), \quad (3.2.5)$$

$$\|a\| = 0 \iff a = 0. \quad (3.2.6)$$

Полугруппа N с заданными на ней структурой $\mathbf{C}$ -модуля и нормой называется *нормированной (абелевой) полугруппой*.

Пусть N — нормированная полугруппа. Для каждой точки $a \in N$ определим шар с центром в a радиуса r ($r > 0$) как множество $O_r(a) = \{a + b : b \in N, \|b\| < r\}$. Пусть $\Gamma = \{O_r(a) : a \in N, r > 0\}$ и пусть τ есть семейство, состоящее из пустого множества и всевозможных сумм множеств из Γ .

Предложение 3.2.1. Система множеств τ задает топологию с базой Γ на множестве N .

Назовем топологию τ *равномерной топологией* на N .

Предложение 3.2.2. (N, τ) является топологической полугруппой.

Теперь мы хотим подробнее остановиться на рассмотрении наиболее интересного для нас класса нормированных абелевых полугрупп, выделяемого следующим дополнительным условием на норму:

$$\|a + b\| \geq \max\{\|a\|, \|b\|\} \quad (a, b \in N, \|a\| \neq \|b\|). \quad (3.2.7)$$

Назовем точку $a \in N$ *локальным минимумом* относительно множества $\Phi \subset N$, если $a \in \Phi$ и $\|a\| \leq \|b\|$ для любого $b \in \Phi$. Точка $a \in N$ называется *сильным локальным минимумом*, если эта точка есть локальный минимум относительно шара $O_{\|a\|}(a)$.

Предложение 3.2.3. Нормированная абелева полугруппа удовлетворяет условию (3.2.7) тогда и только тогда, когда каждая точка этой полугруппы является сильным локальным минимумом.

Пример 3.2.1. Пусть $N = \mathbf{R}_+ \oplus \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел. Относительно $\mathbf{C}$ -действия $(\lambda, (t_1, t_2)) \mapsto (|\lambda|t_1, |\lambda|t_2)$ и нормы $\|(t_1, t_2)\| = t_1 + t_2$ ($t_1, t_2 \in \mathbf{R}_+$) полугруппа N является нормированной полугруппой, для которой, очевидно, выполняется условие (3.2.7).

С другой стороны, для произвольной точки $(u_1, u_2) \in N$ окрестность $O_r((u_1, u_2))$ представляет собой треугольник $T_r = \{(t_1, t_2) : t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 < r\}$ ($r > 0$), параллельно сдвинутый на вектор (u_1, u_2) . В частности, из этого описания непосредственно видно, что каждая точка полугруппы N является сильным локальным минимумом.

3.2.2. Симметризации нормированных полугрупп. Пусть H — абелева группа, на которой заданы действие $\mathbf{C} \times H \rightarrow H$, $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$, удовлетворяющее условиям (3.2.1)–(3.2.3), и отображение $\|\cdot\| : H \rightarrow [0, +\infty)$, для которого выполнены аксиомы (3.2.4)–(3.2.6), а также аксиома

$$\| - a \| = \| a \| \quad (a \in H). \quad (3.2.8)$$

Тогда H называется *нормированной (абелевой) группой*. Легко видеть, что формула

$$\rho(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\|$$

задает инвариантную (относительно сдвигов) метрику на H .

На протяжении этого пункта мы будем предполагать, что N является абелевой полугруппой с сокращением.

Рассмотрим симметризацию $G = S(N)$ абелева моноида N . Элементы группы G будем записывать в виде $g = \langle (a, b) \rangle$ ($a, b \in N$), где $\langle (a, b) \rangle = \{(a_0, b_0) \in N \times N : (a_0, b_0) \sim (a, b)\}$. (Напомним, что $(a_0, b_0) \sim (a, b)$ тогда и только тогда, когда $a_0 + b = a + b_0$.)

Пусть N является модулем над $\mathbf{C}$. Тогда формула

$$\lambda \langle (a, b) \rangle = \langle (\lambda a, \lambda b) \rangle \quad (\lambda \in \mathbf{C}, a, b \in N)$$

задает корректное продолжение $\mathbf{C}$ -действия с N на G . Выполнение аксиом (3.2.1)–(3.2.3) проверяется непосредственно.

Перейдем к рассмотрению случая, когда N — нормированная абелева полугруппа. Для каждого $g = \langle (a, b) \rangle \in G$ положим

$$\|g\| = \inf\{\|(a_0, b_0)\| : (a_0, b_0) \sim (a, b)\}, \quad (3.2.9)$$

где $\|(a_0, b_0)\| = \max\{\|a_0\|, \|b_0\|\}$.

Теорема 3.2.1 (см. [16]). *Отображение $G \rightarrow [0, +\infty)$, $g \mapsto \|g\|$, задаваемое формулой (3.2.9), удовлетворяет аксиомам (3.2.4), (3.2.5), (3.2.8) из определения нормы.*

Теорема 3.2.2 (см. [16]). *Пусть τ — равномерная топология на N . Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *преднорма (3.2.9) на G удовлетворяет аксиоме точности (3.2.6);*
- (ii) *топологическое пространство (N, τ) хаусдорфово.*

Предложение 3.2.4 (см. [16]). *Пусть нормированная полугруппа N удовлетворяет условию (3.2.7). Тогда ограничение преднормы (3.2.9) с G на N совпадает с исходной нормой на полугруппе.*

3.2.3. Структура нормированной группы на $N_0(A)$. Прежде всего отметим, что $\|a \oplus b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$ для всех $a, b \in M_\infty(A)_\nu$, так как норма произвольного нормального элемента из $M_\infty(A)$ совпадает со спектральным радиусом этого элемента. В частности, $\|a \oplus b\| \leq \|a\| + \|b\|$ для всех $a, b \in M_\infty(A)_\nu$.

Теорема 3.2.3 (см. [16]). *$\mathcal{N}(A)$ является нормированной абелевой полугруппой относительно $\mathbf{C}$ -действия*

$$\mathbf{C} \times \mathcal{N}(A) \rightarrow \mathcal{N}(A), \quad (\lambda, [a]) \mapsto [\lambda a]$$

и нормы

$$\|[a]\| = \inf\{\|c\| : c \simeq a, c \in M_\infty(A)_\nu\}, \quad [a] \in \mathcal{N}(A).$$

Пусть τ — равномерная топология на $\mathcal{N}(A)$.

Теорема 3.2.4 (см. [16]). *Топологическое пространство $(\mathcal{N}(A), \tau)$ хаусдорфово.*

Доказательство условия (3.2.7) для полугруппы $\mathcal{N}(A)$ опирается на несколько вспомогательных результатов (леммы 3.2.1, 3.2.2).

Итак, пусть $a \in M_\infty(A)_\nu$ и пусть $O \subset \text{sp}(a)$ — открытое в индуцированной топологии множество. Возьмем точку $\lambda_0 \notin O$. Для каждого $E \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$ положим

$$Q(E) = \begin{cases} P_a(E \setminus O) & \text{if } \lambda_0 \notin E, \\ P_a(E \setminus O) + P_a(O) & \text{if } \lambda_0 \in E. \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Лемма 3.2.1. Семейство самосопряженных проекторов $Q(E)$, задаваемое формулой (3.2.10), является проекторнозначной мерой на компакте $X = (\text{sp}(a) \setminus O) \cup \{\lambda_0\}$.

Назовем борелевское множество $E_0 \subset \mathbf{C}$ строго стабильно тривиальным (относительно нормального элемента $a \in M_\infty(A)$), если $P_a(E) \simeq 0$ для любого борелевского подмножества $E \subset E_0$.

Лемма 3.2.2. Пусть $a \in M_\infty(A)_\nu$ и пусть $O \subset \text{sp}(a)$ — открытое в индуцированной топологии строго стабильно тривиальное (относительно элемента a) множество. Пусть, кроме того, задана некоторая точка $\lambda_0 \notin O$. Тогда существует элемент $b \in M_\infty(A)_\nu$ такой, что $b \simeq a$ и $\text{sp}(b) = (\text{sp}(a) \setminus O) \cup \{\lambda_0\}$.

Теорема 3.2.5 (см. [16]). Нормированная полугруппа $\mathcal{N}(A)$ удовлетворяет условию (3.2.7).

Отметим, что результаты этого параграфа позволяют, в частности, определить структуру метрического пространства на симметризации $N_0(A)$ абелева моноида $\mathcal{N}(A)$.

3.3. ОБОБЩЕННЫЙ ХАРАКТЕР ЧЖЕНЯ И W^* -ЧИСЛА ЛЕФШЕЦА

3.3.1. Банаховы циклические гомологии. Циклические когомологии и гомологии были независимо открыты (в чисто алгебраическом контексте) А. Конном [34] и Б. Л. Цыганом [25]. В этих же работах были построены точные последовательности, которые связывали циклические когомологии (А. Конн) и гомологии (Б. Л. Цыган) с уже достаточно хорошо изученными к тому времени (ко)гомологиями Хохшильда. С другой стороны, А. Конн показал [33], что циклические когомологии могут рассматриваться как частный случай функтора Ext на некоторой категории «циклических векторных пространств». Через несколько лет в работах А. Я. Хелемского [45, 46] были получены естественные банаховы аналоги вышеупомянутых результатов А. Конна и Б. Л. Цыгана.

Отметим, что наше определение банаховых циклических гомологий несколько отличается от того, что содержится в [45, 46]. В данном пункте приводятся некоторые сведения о циклических [19, 25, 34, 35, 58] и банаховых циклических [45, 46] гомологиях, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть A — ассоциативная унитарная комплексная алгебра. Рассмотрим комплексное векторное пространство $C_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$, где $A^{\otimes(n+1)} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{n+1}$. Тогда циклический оператор

$\tau_n : C_n(A) \rightarrow C_n(A)$ определяется на образующих по формуле

$$\tau_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

и продолжается на все пространство $C_n(A)$ по линейности. Обозначим через

$$CC_n(A) = A^{\otimes(n+1)} / \text{Im}(1 - \tau_n)$$

ядро эндоморфизма $1 - \tau_n : C_n(A) \rightarrow C_n(A)$. Далее, определим граничный оператор $b_n : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ как линейное отображение, задаваемое на образующих формулой

$$b_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}.$$

Отметим, что

$$b = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i, \quad (3.3.1)$$

где линейные отображения $d_i : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A^{\otimes n}$ определяются формулами

$$d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}.$$

Семейство линейных пространств $CC_*(A) = \{CC_n(A), b_n\}$ образует цепной комплекс (см., напр., [19]). Гомологии этого комплекса называются циклическими гомологиями алгебры A и обозначаются через $HC_n(A) = H_n(CC_*(A))$, $n \geq 0$.

Рассмотрим теперь нормированные пространства X, Y и элементы $x \in X, y \in Y$. Представитель класса эквивалентности $x \otimes y \in X \otimes Y$ обозначается через $x \square y$. Положим

$$\left\| \sum_i x_i \square y_i \right\| := \sum_i \|x_i\| \|y_i\| \quad (x_i \in X, y_i \in Y).$$

Тогда *проективная норма* класса эквивалентности $\xi \in X \otimes Y$ определяется следующим образом:

$$\|\xi\| = \inf \left\{ \left\| \sum_i x_i \square y_i \right\| : x_i \in X, y_i \in Y \text{ и } \sum_i x_i \square y_i \in \xi \right\}.$$

Далее предполагается, что на всех тензорных произведениях нормированных пространств введена проективная норма.

Пусть A — унитарная банахова алгебра. Учитывая предыдущие соглашения, положим

$$\mathcal{CC}_n(A) = A^{\otimes(n+1)} / \overline{\text{Im}(1 - \tau_n)}.$$

Отметим, что $\mathcal{CC}_n(A)$ является банаховым пространством. Для $\xi \in A^{\otimes(n+1)}$ обозначим через $[\xi]_{\mathcal{CC}_n(A)}$ фактор-класс элемента ξ в $\mathcal{CC}_n(A)$, и через $[\xi]_{\mathcal{CC}_n(A)}$ — фактор-класс элемента ξ в $\mathcal{CC}_n(A)$. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 3.3.1. *Граничный оператор $b_n : A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A^{\otimes n}$ является непрерывным отображением.*

Определим отображение $\beta_n : \mathcal{CC}_n(A) \rightarrow \mathcal{CC}_{n-1}(A)$ следующей формулой:

$$\beta_n([x]_{\mathcal{CC}_n(A)}) = [b_n(x)]_{\mathcal{CC}_{n-1}(A)}.$$

Учитывая лемму 3.3.1, получаем, что семейство $\mathcal{CC}_*(A) = \{\mathcal{CC}_n(A), \beta_n\}$ является цепным комплексом. Фактор-пространство $\mathcal{HC}_n(A) = \text{Ker } \beta_n / \overline{\text{Im } \beta_{n+1}}$ назовем *n-мерной группой банаховых циклических гомологий* алгебры A . Отметим, что $\mathcal{HC}_n(A)$ является банаховым пространством для каждого $n \geq 0$.

Введем в рассмотрение линейный эпиморфизм $\pi_n : \mathcal{CC}_n(A) \rightarrow \mathcal{CC}_n(A)$, где

$$\pi_n([\xi]_{\mathcal{CC}_n(A)}) = [\xi]_{\mathcal{CC}_n(A)}, \quad \xi \in A^{\otimes(n+1)}.$$

Очевидно, что семейство отображений $\{\pi_n\} : \mathcal{CC}_*(A) \rightarrow \mathcal{CC}_*(A)$ представляет собой цепной гомоморфизм, т.е. $\pi_{n-1}b_n = \beta_n\pi_n$ для всех $n \geq 1$. Следовательно, $\pi_n(\text{Ker } b_n) \subset \text{Ker } \beta_n$ и $\pi_n(\overline{\text{Im } b_{n+1}}) \subset \overline{\text{Im } \beta_{n+1}}$. Таким образом,

$$\pi_* : \mathcal{HC}_*(A) \rightarrow \mathcal{HC}_*(A) \tag{3.3.2}$$

является корректно определенным отображением пространств гомологий.

Напомним (см. [19, 58]), что *следовое отображение* $\text{Tr} : M_r(A)^{\otimes(n+1)} \rightarrow A^{\otimes(n+1)}$ определяется следующим образом:

$$\text{Tr}(\xi^{(0)} \otimes \xi^{(1)} \otimes \dots \otimes \xi^{(n)}) = \sum_{i_0, \dots, i_n=1}^r \xi_{i_0 i_1}^{(0)} \otimes \xi_{i_1 i_2}^{(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{i_n i_0}^{(n)},$$

где $\xi^{(k)} = (\xi_{i,j}^{(k)})_{i,j=1}^r \in M_r(A)$. Отметим, что следовое отображение $\text{Tr} : \mathcal{CC}_*(M_r(A)) \rightarrow \mathcal{CC}_*(A)$ является морфизмом цепных комплексов. Кроме того, индуцированное отображение

$$\text{Tr}_* : \mathcal{HC}_*(M_r(A)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{HC}_*(A)$$

является изоморфизмом циклических гомологий (см., напр., [58]).

Для $\xi \in M_r(A)^{\otimes(n+1)}$ мы будем обозначать через $\langle \xi \rangle_{\mathcal{HC}} = \langle \xi \rangle_{\mathcal{HC}_*(M_r(A))}$ класс ξ в циклических гомологиях и через $\langle \xi \rangle_{\mathcal{HC}} = \langle \xi \rangle_{\mathcal{HC}_*(M_r(A))}$ — класс ξ в банаховых циклических гомологиях.

Пусть p — проектор в $M_r(A)$. Тогда

$$b_{2l}(p^{\otimes(2l+1)}) = \sum_{k=0}^{2l} d_k(p^{\otimes(2l+1)}) = \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k p^{\otimes 2l} = p^{\otimes 2l}.$$

С другой стороны, $[p^{\otimes 2l}]_{CC_*(M_r(A))} = (-1)^{(2l-1)}[p^{\otimes 2l}]_{CC_*(M_r(A))}$, так что $[p^{\otimes 2l}]_{CC_*(M_r(A))} = 0$. Следовательно, $p^{\otimes (2l+1)}$ является циклом. *Характер Чжэня*

$$\text{Ch}_{2l}^0 : K_0(A) \rightarrow HC_{2l}(A)$$

определяется следующим образом:

$$\text{Ch}_{2l}^0([p]) = \text{Tr}_* \langle (-1)^l p^{\otimes (2l+1)} \rangle_{HC}.$$

Теорема 3.3.1 (см. [58]). *Характер Чжэня является корректно определенным гомоморфизмом групп.*

Непосредственно проверяется следующий результат.

Лемма 3.3.2. *Следовое отображение $\text{Tr} : M_r(A)^{\otimes (n+1)} \rightarrow A^{\otimes (n+1)}$ является непрерывным.*

Из леммы 3.3.2 следует, что отображение

$$\text{Tr} : CC_*(M_r(A)) \rightarrow CC_*(A), \quad [\xi]_{CC_*(M_r(A))} \mapsto [\text{Tr}(\xi)]_{CC_*(A)} \quad (3.3.3)$$

корректно определено. Кроме того, прямая проверка показывает, что следовое отображение (3.3.3) является морфизмом цепных комплексов. Откуда, снова применяя лемму 3.3.2, получаем, что индуцированный гомоморфизм

$$\text{Tr}_* : HC_*(M_r(A)) \rightarrow HC_*(A)$$

банаховых циклических гомологий корректно определен.

3.3.2. Обобщенный характер Чжэня. Фиксируем $l \geq 0$. Определим отображение

$$T : M_\infty(A)_\nu \rightarrow HC_{2l}(A)$$

в банаховы циклические гомологии (четной градуировки) посредством следующей конструкции. Пусть элемент a принадлежит $M_\infty(A)_\nu$. Тогда $a \in M_r(A)$ для некоторого $r \geq 1$. Для каждого целого положительного n зададимся покрытием $\mathcal{E}^{(n)} = \{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}$ спектра a дизъюнктными борелевскими множествами такими, что диаметр каждого из этих множеств не превосходит $1/n$. Кроме того, можно считать, что $\{E_k^{(m)}\}_{k=1}^{k_m}$ является подпокрытием покрытия $\{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}$ при $m \geq n$. Следовательно,

$$E_k^{(n)} = \bigsqcup_{j=1}^{j(k)} E_{k,j}^{(m)},$$

где $E_{k,j}^{(m)}$ являются некоторыми элементами покрытия $\mathcal{E}^{(m)}$. Таким образом,

$$\mathcal{E}^{(m)} = \{E_{k,j}^{(m)}\}_{k=1; j=1}^{k_n; j(k)}, \quad \sum_{k=1}^{k_n} j(k) = k_m.$$

Для любого $\lambda_k^{(n)} \in E_k^{(n)}$ введем в рассмотрение последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ из $M_r(A)$, где

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} P_a(E_k^{(n)}) \lambda_k^{(n)}.$$

Из спектральной теоремы следует, что $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в равномерной топологии к a . Далее, для каждого a_n определим элемент

$$\tilde{a}_n = \sum_{k=1}^{k_n} P_a(E_k^{(n)})^{\otimes (2l+1)} \lambda_k^{(n)} \in M_r(A)^{\otimes (2l+1)}.$$

Даны натуральные числа n, m ($m \geq n$). Используя введенные обозначения, получаем

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} P_a \left(\bigsqcup_{j=1}^{j(k)} E_{k,j}^{(m)} \right) \lambda_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j}^{(m)} \right) \lambda_k^{(n)},$$

$$a_m = \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j}^{(m)} \right) \lambda_{k,j}^{(m)},$$

где $\lambda_{k,j}^{(m)} \in E_{k,j}^{(m)}$. Отсюда следует, что

$$a_n - a_m = \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j}^{(m)} \right) \left(\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k,j}^{(m)} \right). \quad (3.3.4)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \sum_{k=1}^{k_n} P_a \left(E_k^{(n)} \right)^{\otimes(2l+1)} \lambda_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} P_a \left(\bigsqcup_{j=1}^{j(k)} E_{k,j}^{(m)} \right)^{\otimes(2l+1)} \lambda_k^{(n)} = \\ &= \sum_{k=1}^{k_n} \left(\sum_{j_0=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j_0}^{(m)} \right) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{j_{2l}=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j_{2l}}^{(m)} \right) \right) \lambda_k^{(n)} = \\ &= \sum_{k=1}^{k_n} \left(\sum_{j_0=1}^{j(k)} \cdots \sum_{j_{2l}=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j_0}^{(m)} \right) \otimes \cdots \otimes P_a \left(E_{k,j_{2l}}^{(m)} \right) \right) \lambda_k^{(n)}, \\ \tilde{a}_m &= \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j}^{(m)} \right)^{\otimes(2l+1)} \lambda_{k,j}^{(m)}. \end{aligned}$$

Для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\sum_{j_0, \dots, j_{2l}=1}^{\overline{j(k)}} := \sum_{\{1 \leq j_0 \leq \dots \leq j_{2l} \leq j(k) : \exists j_p \neq j_q\}}$$

для суммы по $j_0, \dots, j_{2l}$ от 1 до $j(k)$, где не все индексы совпадают.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n - \tilde{a}_m &= \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{j(k)} P_a \left(E_{k,j}^{(m)} \right)^{\otimes(2l+1)} \left(\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k,j}^{(m)} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_n} \left(\sum_{j_0, \dots, j_{2l}=1}^{\overline{j(k)}} P_a \left(E_{k,j_0}^{(m)} \right) \otimes \cdots \otimes P_a \left(E_{k,j_{2l}}^{(m)} \right) \right) \lambda_k^{(n)} = \alpha_{n,m} + \gamma_{n,m}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

где через $\alpha_{n,m}$ ($\gamma_{n,m}$) обозначено первое (соответственно, второе) слагаемое в выражении (3.3.5).

Построение обобщенного характера Чжэня основано, прежде всего, на следующей теореме.

Теорема 3.3.2 (см. [67]). Пусть $\{p_i\}_{i=1}^N \in M_r(A)$ — семейство попарно ортогональных проекторов и пусть $\eta = \sum_{j_0, \dots, j_{2l}=1}^N p_{j_0} \otimes \cdots \otimes p_{j_{2l}}$. Тогда элемент η принадлежит ядру граничного оператора β_{2l} . Кроме того, $\langle \eta \rangle_{\mathcal{H}_{2l}(M_r(A))} = 0$.

Вернемся теперь к рассмотрению выражений (3.3.4), (3.3.5). Согласно предыдущей теореме, $\langle \gamma_{n,m} \rangle_{\mathcal{H}\mathcal{C}} = 0$ и $\langle \tilde{a}_n - \tilde{a}_m \rangle_{\mathcal{H}\mathcal{C}} = \langle \alpha_{n,m} \rangle_{\mathcal{H}\mathcal{C}}$.

Отметим, что элементы $a_n - a_m$ и $\alpha_{n,m}$ являются нормальными. Кроме того, множества $\text{sp}(a_n - a_m) \setminus \{0\}$ и $\text{sp}(\alpha_{n,m}) \setminus \{0\}$ совпадают с множеством $\{\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k,j}^{(m)}\}_{k=1; j=1}^{k_n; j(k)}$. Следовательно, спектральные радиусы указанных элементов также совпадают. Таким образом, $\|\alpha_{n,m}\| = \|a_n - a_m\|$.

Поэтому

$$\|\langle \tilde{a}_n - \tilde{a}_m \rangle_{\mathcal{HC}}\| = \|\langle \alpha_{n,m} \rangle_{\mathcal{HC}}\| \leq \|\alpha_{n,m}\| = \|a_n - a_m\|. \quad (3.3.6)$$

Согласно лемме 3.3.2 и неравенству (3.3.6) последовательность $\{\text{Tr}_*(\langle \tilde{a}_n \rangle_{\mathcal{HC}})\}_{n=1}^\infty$ является фундаментальной. Следовательно, она сходится к некоторому элементу $T(a; \{a_n\}) \in \mathcal{HC}_{2l}(A)$.

На самом деле предел $T(a; \{a_n\})$ не зависит от выбора последовательности $\{a_n\}$. Пусть $\mathcal{E}^{(n)} = \{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}$ и $\mathcal{F}^{(n)} = \{F_j^{(n)}\}_{j=1}^{j_n}$ — покрытия спектра a дизъюнктными борелевскими множествами, диаметр каждого из которых не превосходит $1/n$, и пусть $c_n = \sum_{j=1}^{j_n} P_a(F_j^{(n)}) \mu_j^{(n)}$ для произвольных $\mu_j^{(n)} \in F_j^{(n)}$.

Теорема 3.3.3 (см. [67]). *Элементы $T(a; \{a_n\})$ и $T(a; \{c_n\})$ совпадают. Таким образом, отображение*

$$T : M_\infty(A)_\nu \rightarrow \mathcal{HC}_{2l}(A), \quad a \mapsto T(a; \{a_n\}) = T(a)$$

корректно определено.

Предложение 3.3.1 (см. [67]). *Пусть элементы $a, b \in M_\infty(A)_\nu$ стабильно эквивалентны. Тогда $T(a) = T(b)$.*

Определим обобщенный характер Чженя как отображение

$$\text{Ch}_{2l}^0 : N_0(A) \rightarrow \mathcal{HC}_{2l}(A), \quad [a] - [b] \mapsto (-1)^l (T(a) - T(b)).$$

В силу предложения 3.3.1 обобщенный характер Чженя корректно определен. Следующий результат доказывается непосредственной проверкой.

Предложение 3.3.2. *Обобщенный характер Чженя является гомоморфизмом групп.*

Теорема 3.3.4 (см. [67]). *Для любого $l \geq 0$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \longrightarrow & N_0(A) \\ \text{Ch}_0^{2l} \downarrow & & \downarrow \text{ch}_0^{2l} \\ HC_{2l}(A) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{HC}_{2l}(A) \end{array},$$

где π_* задается формулой (3.3.2).

Теорема 3.3.5 (см. [67]). *Для любого $l \geq 0$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} N_0(A)_{\text{fin}} & \xrightarrow{h} & K_0(A) \otimes \mathbb{C} \\ \text{Ch}_0^{2l} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\text{Ch}}_0^{2l} \\ \mathcal{HC}_{2l}(A) & \xleftarrow{\pi_*} & HC_{2l}(A) \end{array}$$

где h определяется формулой (3.1.5) и $\widetilde{\text{Ch}}_{2l}^0([p] \otimes \lambda) = \text{Ch}_{2l}^0([p])\lambda$.

Отметим, что в силу теоремы 3.3.5 обобщенный характер Чженя индуцирует отображение из фактор-группы $N_0(A)/\text{Ker } h$ в банаховы циклические гомологии четной градуировки.

3.3.3. Обобщенные числа Лефшеца.

Прежде всего напомним некоторые понятия из [19].

Пусть A — алгебра фон Неймана, G — компактная группа Ли и X — компактное G -многообразие. Через $\mathcal{P}(A)$ обозначим категорию конечно-порожденных проективных модулей над A .

Множество всех G - A -расслоений над X является абелевой полугруппой по отношению к операции прямой суммы. Симметризация этой полугруппы обозначается через $K_G(X; A)$. Положим $K^G(A) := K_G(\text{pt}; A)$. В этой ситуации имеет место изоморфизм

$$K^G(A) \cong K_0(A) \otimes R(G), \quad (3.3.7)$$

где $R(G)$ — кольцо представлений G .

Пусть $\{E^i\}$ — последовательность G - A -расслоений над X и пусть $\{d_i : \Gamma(E^i) \rightarrow \Gamma(E^{i-1})\}$ — эквивариантные псевдодифференциальные операторы в сечениях этих расслоений, σ_i — их символы. Указанная последовательность (E, d) расслоений и операторов называется *эллиптическим G - A -комплексом*, если выполнены следующие условия:

- (i) $d_i d_{i+1} = 0$,
- (ii) последовательность символов

$$0 \longrightarrow \pi^* E^n \xrightarrow{\sigma_n} \pi^* E^{n-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_1} \pi^* E^0 \longrightarrow 0$$

точна вне некоторой компактной окрестности нулевого сечения $X \subset T^*X$. Здесь $\pi : T^*X \rightarrow X$ — естественная проекция.

Индекс эллиптического оператора $F = d + d^* : \Gamma(E_{\text{ev}}) \rightarrow \Gamma(E_{\text{od}})$ является элементом группы $K^G(A)$. Кроме того, для любого $g \in G$ посредством вычисления характера можно определить отображение $g : R(G) \rightarrow \mathbb{C}$. Отсюда, используя изоморфизм (3.3.7), получаем отображение

$$g : K^G(A) \rightarrow K_0(A) \otimes \mathbb{C}.$$

Число Лефшеца первого типа определяется следующим образом:

$$L_1(E, g) = g(\text{index}(F)) \in K_0(A) \otimes \mathbb{C}.$$

Отметим, что эти числа Лефшеца, как и классические, связаны с неподвижными точками отображения g (см. [21, 82]).

Рассмотрим A -эллиптический комплекс (E, d) и его унитарный эндоморфизм U . Кроме того, будем предполагать, что $U = U_g$ для некоторого представления U_g компактной группы Ли G .

Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертов A -модуль и пусть $G \rightarrow \text{End}_A(\mathcal{M})$ — сильнонепрерывное представление группы G в $\mathcal{M}$. Указанное представление называется *унитарным*, если $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $g \in G$, $x, y \in \mathcal{M}$. Гильбертов A -модуль вместе с унитарным действием группы G называется *гильбертовым G - A -модулем*. *Системой образующих* для $\mathcal{M}$ называется такое множество $\{x\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{M}$, что конечные суммы $\left\{ \sum_k x_k a_k : a_k \in A \right\}$ плотны в $\mathcal{M}$.

Теорема 3.3.6 (см. [12]). Пусть $\mathcal{M}$ — счетно-порожденный гильбертов G - A -модуль и пусть $\{V_\pi\}$ — полный набор попарно неизоморфных унитарных конечномерных неприводимых представлений для G . Тогда имеет место G - A -изоморфизм

$$\mathcal{M} \cong \bigoplus_{\pi} \text{Hom}_G(V_\pi, \mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi.$$

В пространстве $\text{Hom}_G(V_\pi, \mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$ алгебра A действует на первый сомножитель, группа G — на второй.

Если G - A -модуль $\mathcal{M}$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, то $\mathcal{M}_\pi := \text{Hom}_G(V_\pi, \mathcal{M})$ также принадлежит $\mathcal{P}(A)$. Более того, в сумме $\bigoplus_{\pi} \mathcal{M}_\pi \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$ только конечное число слагаемых отлично от нуля (см. [19]).

В частности, для $\mathcal{M} = A^n$ получаем следующую формулу:

$$A^n \cong \bigoplus_{k=1}^M Q_k \otimes V_k,$$

где $V_k \cong \mathbf{C}^{L_k}$ и $Q_k \in \mathcal{P}(A)$. Следовательно,

$$U_g \left(\sum_{k=1}^M x_k \otimes v_k \right) = \sum_{k=1}^M x_k \otimes u_g^k v_k = \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^{L_k} x_k \otimes e^{i\varphi_s^k} v_k^s f_s. \quad (3.3.8)$$

Здесь $f_1, \dots, f_{L_k}$ — базис в пространстве V_k , относительно которого оператор u_g^k имеет диагональный вид, $v_k = \sum v_k^s f_s$. Положим

$$\tau(U_g) = \sum_{k=1}^M \text{Ch}_{2l}^0[Q_k] \cdot \text{Tr}(u_g^k) \in HC_{2l}(A).$$

Следующий результат доказан в работе [22].

Лемма 3.3.3. *Для A -фредгольмова оператора $F = d + d^* : \Gamma(E_{\text{ev}}) \rightarrow \Gamma(E_{\text{od}})$ имеет место разложение*

$$F : M_0 \oplus \widetilde{N}_0 \rightarrow M_1 \oplus \widetilde{N}_1, \quad F : M_0 \cong M_1 \quad (3.3.9)$$

такое, что

$$\widetilde{N}_0 = \bigoplus_{j=0}^T N_{2j}, \quad \widetilde{N}_1 = \bigoplus_{j=1}^T N_{2j-1}, \quad N_m \subset \Gamma(E_m),$$

где N_m — проективные U -инвариантные гильбертовы A -модули.

Число Лефшеца второго типа определяется следующим образом:

$$L_{2l}(E, U_g) = \sum_j (-1)^j \tau(U_g|N_j) \in HC_{2l}(A).$$

Это определение корректно, т.е. оно не зависит от выбора разложений в лемме 3.3.3 (см. [19]).

Более полную информацию о W^* -числах Лефшеца можно найти в [19, 21, 22, 82, 83].

Пусть теперь U — произвольный унитарный эндоморфизм A -эллиптического комплекса (E, d) .

Определим обобщенное число Лефшеца $\mathcal{L}_1$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_1(E, U) = \sum_j (-1)^j [U|N_j] \in N_0(A).$$

Отметим, что обобщенные числа Лефшеца корректно определены. Это следует из тех же соображений, что и для чисел Лефшеца второго типа (см. [19, 5.2.21]).

Теорема 3.3.7 (см. [67]). *Пусть U является унитарным эндоморфизмом A -эллиптического комплекса (E, d) . Кроме того, предположим, что $U = U_g$ для некоторого представления U_g компактной группы Ли G . Тогда $\mathcal{L}_1(E, U_g)$ принадлежит группе $N_0(A)_{\text{fin}}$ и $h(\mathcal{L}_1(E, U_g)) = L_1(E, U_g)$, где h задается формулой (3.1.5).*

Теорема 3.3.8 (см. [67]). *Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы и пусть отображение π_* определено формулой (3.3.2). Тогда*

$$\pi_*(L_{2l}(E, U_g)) = \text{Ch}_{2l}^0(\mathcal{L}_1(E, U_g)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
2. Гельфанд И. М. Нормированные кольца// Мат. сб. — 1941. — 9. — С. 3–24.
3. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1943. — 12. — С. 147–213.
4. Диксмье Ж. C^* -Алгебры и их представления. — М.: Мир, 1974.
5. Каруби М. К-Теория. Введение. — М.: Мир, 1981.
6. Каспаров Г. Г. Топологические инварианты эллиптических операторов. I. К-Гомологии// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1975. — 39, № 4. — С. 796–838.

7. Каспаров Г. Г. Операторный K -функтор и расширения C^* -алгебр// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1980. — 44, № 3. — С. 571–636.
8. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.
9. Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. C^* -Гильбертовы модули. — М.: Факториал, 2001.
10. Мерфи Дж. C^* -Алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.
11. Мищенко А. С. Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения в K -теории// Усп. мат. наук. — 1979. — 34, № 6. — С. 67–79.
12. Мищенко А. С. Представления компактных групп в гильбертовых модулях над C^* -алгебрами// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1984. — 166. — С. 161–176.
13. Мищенко А. С. Векторные расслоения и их применения. — М.: Наука, 1984.
14. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1979. — 43. — С. 831–859.
15. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
16. Павлов А. А. Нормированные группы и их применение в некоммутативной дифференциальной геометрии// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2000. — 266. — С. 234–244.
17. Павлов А. А. Функтор N_0 над категорией алгебр фон Неймана и его связь с операторной K -теорией// Вестн. Моск. ун-та, сер. мат., мех. — 2000. — 4. — С. 55–58.
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1979.
19. Соловьев Ю. П., Троицкий Е. В. C^* -Алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. — М.: Факториал, 1996.
20. Троицкий Е. В. Стягиваемость полной общей линейной группы C^* -гильбертова модуля $l_2(A)$ // Функц. анализ и его прилож. — 1986. — 20, № 4. — С. 58–64.
21. Троицкий Е. В. Эквивариантный индекс C^* -эллиптических операторов// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1986. — 50, № 4. — С. 849–865.
22. Троицкий Е. В., Франк М. Числа Лефшеца и геометрия операторов в W^* -модулях// Функц. анализ и его прилож. — 1996. — 30, № 4. — С. 45–57.
23. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — М.: МГУ, 1986.
24. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.
25. Цыган Б. Л. Гомологии матричных алгебр Ли над кольцами и гомологии Хохшильда// Усп. мат. наук. — 1983. — 38. — С. 217–218.
26. Штерн А. И. Ядерные C^* -алгебры и смежные вопросы// Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНТИ, 1985. — 26. — С. 107–126.
27. Atiyah M. F., Hirzebruch F. Vector bundles and homogeneous spaces// Proc. Symp. Pure Math. — Am. Math. Soc., 1961. — 3. — С. 7–38.
28. Blackadar B. K -Theory for operator algebras. — New York: Springer-Verlag, 1986.
29. Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Extensions of C^* -algebras, operators with compact self-commutators, and K -homology// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — 79, № 5. — С. 973–978.
30. Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras// Lect. Notes Math. — 1973. — 345. — С. 58–128.
31. Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Extensions of C^* -algebras and K -homology// Ann. Math. — 1977. — 105. — С. 265–324.
32. Busby R. C. Double centralizers and extensions of C^* -algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — 132. — С. 79–99.
33. Connes A. Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I, Math. — 1983. — 296. — С. 953–958.
34. Connes A. Noncommutative differential geometry// Publ. Math. IHES. — 1985. — 62. — С. 41–144.
35. Connes A. Noncommutative geometry. — Academic Press, 1994.
36. Connes A., Higson N. Déformations, morphismes asymptotiques et K -théorie bivariante// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I, Math. — 1990. — 311. — С. 101–106.
37. Cuntz J. K -Theory and C^* -algebras// Proc. conf. on K -theory (Bielfield, 1982)/ Springer Lect. Notes Math. — 1984. — 1046. — С. 55–79.
38. Cuntz J. A new look at KK -theory// K -Theory. — 1987. — 1. — С. 31–51.
39. Dixmier J. Von Neumann algebras. — Amsterdam: North-Holland, 1981.
40. Douglas R. G. C^* -Algebra extensions and K -homology. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1980.

41. *Dupré M. J., Fillmore P. A.* Triviality theorems for Hilbert modules// В кн.: Topics in modern operator theory. 5th Int. conf. on operator theory. Timisoara and Herculan (Romania), 1980. — Basel–Boston–Stuttgart: Birkhäuser, 1981. — С. 71–79.
42. *Evans D. E., Kawahigashi Y.* Quantum symmetries on operator algebras. — Oxford: Clarendon Press, 1998.
43. *Frank M.* Self-duality and C^* -reflexivity of Hilbert C^* -modules// Zeitschr. Anal. Anw. — 1990. — 9. — С. 165–176.
44. *Frank M.* Geometrical aspects of Hilbert C^* -modules// Positivity. — 1999. — 3. — С. 215–243.
45. *Helemskii A. Ya.* Banach cyclic (co)homology and the Connes–Tzygan exact sequence// J. London Math. Soc. — 1992. — 46, № 2. — С. 449–462.
46. *Helemskii A. Ya.* Banach cyclic (co)homology in terms of Banach derived functors// St. Petersburg Math. J. — 1992. — 3, № 5. — С. 1149–1164.
47. *Kaminker J., Schochet C.* $\text{Ext}(X)$ from a homological point of view// Lect. Notes Math. — 1973. — 345. — С. 129–140.
48. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras// Am. J. Math. — 1953. — 75. — С. 839–858.
49. *Karoubi M.* Algèbres de Clifford et K -théorie// Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., Sér. 4. — 1968. — 1, № 2. — С. 161–270.
50. *Karoubi M.* Homologie cyclique et K -théorie algébrique, I// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1. — 1983. — 297, № 8. — С. 447–450.
51. *Karoubi M., Villamayor O.* Foncteurs K^n en algèbre et en topologie// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. — 1969. — 269. — С. 416–419.
52. *Kasparov G. G.* Hilbert C^* -modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu// J. Operator Theory. — 1980. — 4. — С. 133–150.
53. *Lance E. C.* On nuclear C^* -algebras// J. Funct. Anal. — 1973. — 12. — С. 157–176.
54. *Lance E. C.* Tensor products and nuclear C^* -algebras// В кн.: Operator algebras and applications. Part I/ Proc. Symp. Pure Math. — 1982. — 38. — С. 379–399.
55. *Lance E. C.* Hilbert C^* -modules — a toolkit for operator algebraists/ London Math. Soc. Lect. Notes Ser. — Cambridge: Univ. Press, 1995. — 210.
56. *Laustsen N., Larsen F., Rordam M.* An introduction to K -theory for C^* -algebras/ London Math. Soc. Student Texts. — Cambridge: Univ. Press, 2000. — 49.
57. *Lin H.* Injective Hilbert C^* -modules// Pac. J. Math. — 1992. — 154. — С. 131–164.
58. *Loday J.-L.* Cyclic homology. — Springer-Verlag, 1992.
59. *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators// Ann. Math. — 1936. — 37. — С. 116–229.
60. *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1937. — 41. — С. 208–248.
61. *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators. IV// Ann. Math. — 1943. — 44. — С. 716–808.
62. *von Neumann J.* On rings of operators. III// Ann. Math. — 1940. — 41. — С. 94–161.
63. *von Neumann J.* Zur Algebra der funktional Operationen und Theorie der normalen Operatoren// Math. Ann. — 1929 — 102, № 3. — С. 370–427.
64. *Paschke W. L.* Inner product modules over B^* -algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — 182. — С. 443–468.
65. *Paschke W. L.* The double B -dual of an inner product module over a C^* -algebra B // Can. J. Math. — 1974. — 26, № 5. — С. 1272–1280.
66. *Pavlov A. A.* Generalized Lefschetz numbers of unitary endomorphisms of W^* -elliptic complexes// Int. conf. Dedic. to the 80th anniversary of V. A. Rokhlin/ Abstracts. — 1999. — С. 56–58.
67. *Pavlov A. A.* The generalized Chern character and Lefschetz numbers in W^* -modules// Acta Appl. Math. — 2001. — 68. — С. 137–157.
68. *Pedersen G. K.* C^* -Algebras and their automorphism groups. — London–New York–San Francisco: Academic Press, 1979.
69. *Raeburn I.* K -Theory and K -homology relative to a II_∞ -factor// Proc. Am. Math. Soc. — 1978. — 71, № 2. — С. 294–298.
70. *Rieffel M. A.* Induced representations of C^* -algebras// Adv. Math. — 1974. — 13. — С. 176–257.
71. *Rosenberg J., Schochet C.* The classification of extensions of C^* -algebras// Bull. Am. Math. Soc. (New Ser.). — 1981. — 4. — С. 105–110.
72. *Sakai S.* A characterization of W^* -algebras// Pac. J. Math. — 1956. — 6. — С. 763–773.
73. *Sakai S.* C^* -Algebras and W^* -algebras. — Berlin–New York: Springer, 1971.

- 74. *Schochet C.* Topological methods for C^* -algebras. I. Spectral sequences// *Pac. J. Math.* — 1981. — 96. — С. 193–211.
- 75. *Schochet C.* Topological methods for C^* -algebras. II. Geometric resolutions and the Kuřineth formula// *Pac. J. Math.* — 1982. — 98. — С. 443–458.
- 76. *Schochet C.* Topological methods for C^* -algebras. III. Axiomatic homology// *Pac. J. Math.* — 1984. — 114. — С. 399–445.
- 77. *Segal I. E.* Irreducible representations of operator algebras// *Bull. Am. Math. Soc.* — 1947. — 61. — С. 69–105.
- 78. *Segal I. E.* Equivalence of measure spaces// *Am. J. Math.* — 1951. — 73. — С. 275–313.
- 79. *Segal I. E.* Decomposition of operator algebras. I// *Mem. Am. Math. Soc.* — 1951. — 9. — С. 1–67.
- 80. *Segal I. E.* Decomposition of operator algebras. II// *Mem. Am. Math. Soc.* — 1951. — 9. — С. 1–66.
- 81. *Schröder H.* K -Theory for real C^* -algebras and applications. — Harlow: Longman, 1993.
- 82. *Troitsky E. V.* Lefschetz numbers of C^* -complexes// *Springer Lect. Notes Math.* — 1991. — 1474. — С. 193–206.
- 83. *Troitsky E. V.* Orthogonal complements and endomorphisms of Hilbert modules and C^* -elliptic complexes// В кн.: *Novikov conjectures, index theorems and rigidity. Vol. II/ London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* — 1995. — 227. — С. 309–331.
- 84. *Wegge-Olsen N. E.* K -Theory and C^* -algebras. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.

А. А. Павлов

Московский государственный университет

E-mail: pavlov@higeom.math.msu.su

О КОНСТРУКЦИЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ В НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2003 г. **Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ, Ю. П. СОЛОВЬЕВ**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Характеристические классы векторных расслоений	148
2. Характеристические классы проективных модулей над ассоциативными алгебрами . . .	150
3. Конструкция Жураева—Мищенко—Соловьева	154
4. $\mathbf{Z}/2$ -Градуированные пары Ли—Картана	157
Приложение. След эндоморфизма проективного модуля	159
Список литературы	160

Настоящая работа посвящена обзору и сравнению нескольких конструкций характеристических классов, которые используются в некоммутативной геометрии. Впервые характеристические классы появились как характеристические классы векторных расслоений: для комплексных расслоений определены классы Чженя, а для вещественных — классы Понтрягина и классы Штифеля—Уитни. Эти классы принадлежат когомологиям базы расслоения. Основы соответствующей теории были заложены в работах [6, 12, 19, 21]. В настоящее время имеется несколько способов определять характеристические классы (см., напр., [4, 5, 10]). Кроме того, существуют варианты характеристических классов со значениями в некоторых экстраординарных теориях когомологий, например в кобордизмах (см. [7, 8])

Характеристические классы Чженя гладких комплексных векторных расслоений могут быть построены методами дифференциальной геометрии (см. [5, 11]). Этот способ основан на конструкции Чженя—Вейля, основные элементы которой приведены в первой части этой работы. При этом оказывается, что определение характеристических классов использует не само многообразие, а алгебру гладких функций на нем, не само расслоение, а только пространство его гладких сечений и т. д. Это наблюдение позволяет перенести определение характеристических классов на случай абстрактных алгебр, не являющихся алгебрами гладких функций на каком-либо многообразии и, вообще говоря, некоммутативных. В качестве аналога расслоений в этом случае используются конечно-порожденные проективные модули над кольцом. Основанием этому служит известная теорема Серра—Суона (см. [3, 20]), которая утверждает эквивалентность категории конечномерных векторных расслоений над многообразием M и категории конечно-порожденных проективных модулей над алгеброй функций на M . Эквивалентность осуществляется сопоставлением с расслоением пространства его сечений.

Теория характеристических классов для некоммутативных алгебр была развита в работах А. Конна, М. Каруби, Б. Л. Фейгина, Б. Л. Цыгана, Ю. Й. Жураева, Ю. П. Соловьева и А. С. Мищенко (см. [1, 2, 9, 13–18]). Для построения характеристических классов в рамках теории Чженя—Вейля необходимо определить связность на проективном модуле. При этом разумно потребовать, чтобы для алгебр функций на многообразии теория приводила к обычным классам Чженя комплексных расслоений. Оказывается, что некоммутативные аналоги равносильных определений 0.1 и 0.2 приводят к разным результатам.

Определение 0.1. Связностью на векторном расслоении $\mathcal{E}$ называется $\mathbf{C}$ -линейное отображение

$$D : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}) \otimes_{C^\infty(M, \mathbf{C})} \Omega^1(M, \mathbf{C}),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$D(s \cdot f) = D(s) \cdot f + s \otimes_A df$$

для всех $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ и $s \in \Gamma(\mathcal{E})$.

Определение 0.2. *Связностью* на расслоении $\mathcal{E}$ над многообразием M называется отображение $\nabla_X : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$, заданное для всех векторных полей на M и удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$,
- 2) $\nabla_X(sf) = \nabla_X(s) \cdot f + s \cdot Xf$,

где f, g — функции на M , X, Y — векторные поля, s — сечение расслоения $\mathcal{E}$ и через Xf обозначена производная f вдоль векторного поля X .

Определение 0.1 приводит к понятию квазирезольвенты (дифференциального исчисления) алгебры — аналога комплекса де Рама. Вообще говоря, квазирезольвента определена не единственным образом. Характеристические классы принадлежат когомологиям комплекса, полученного из квазирезольвенты факторизацией по некоторым элементам. Соответствующая конструкция приводится в разделе 2 настоящей работы.

Определение 0.2 требует определения аналога алгебры Ли векторных полей на многообразии. Подход, изложенный в разделе 3, использует для этой цели алгебру Ли дифференцирований алгебры A . Характеристические классы в этом случае принадлежат когомологиям алгебры дифференцирований. В разделе 4 в качестве такого аналога используется вообще говоря произвольная алгебра Ли A , но при этом требуется существование отображений $A \times L \rightarrow L$ и $L \times A \rightarrow A$, аналогичных $C^\infty(M) \times \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M)$ — умножению векторного поля на функцию — и $\text{Vect}(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ — вычислению производной функции вдоль векторного поля. Мы строим теорию для пар (A, L) , снабженных $\mathbb{Z}/2$ -градуировкой. Характеристические классы лежат в когомологиях алгебры Ли L . В отличие от предыдущих двух разделов, мы предлагаем теорию, которая применима к $\mathbb{Z}/2$ -градуированным модулям.

Мы акцентируем внимание на точной аналогии, которая существует между теорией характеристических классов Чжена комплексных векторных расслоений и теорией характеристических классов в некоммутативной геометрии.

Через $|x|$ всегда будет обозначаться градуировка элемента x . Во всех разделах, кроме того, в котором рассматриваются пары Ли—Картана, градуировка целочисленная, т.е. $|x| \in \mathbb{Z}$. В разделе 4, посвященном парам Ли—Картана, рассматриваются $\mathbb{Z}/2$ -градуированные объекты, т.е. в этом случае $|x| \in \mathbb{Z}/2$.

1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Основная цель этого раздела — наметить схему, которой мы будем придерживаться в трех следующих разделах, посвященных конструкциям характеристических классов. Доказательства будут почти всегда пропущены, поскольку они являются дословным повторением доказательств аналогичных утверждений из следующего раздела; этому также способствуют выбранные обозначения. Кроме того, доказательства можно найти, например, в [5].

Зафиксируем гладкое компактное многообразие M . Через A обозначим кольцо $C^\infty(M, \mathbb{C})$ гладких комплекснозначных функций на M . Через $\Omega^*(M, \mathbb{C})$ будем обозначать комплексификацию алгебры внешних дифференциальных форм многообразия M . Пусть $\mathcal{E}$ — некоторое комплексное векторное расслоение над M . Пространство его гладких сечений обозначим через E . Как известно, модуль E над кольцом A является конечно-порожденным и проективным.

Определение 1.1. *Связностью* на векторном расслоении $\mathcal{E}$ называется $\mathbb{C}$ -линейное отображение

$$D : E \rightarrow E \otimes_A \Omega^1(M, \mathbb{C}),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$D(s \cdot a) = D(s) \cdot a + s \otimes_A da$$

для всех $a \in A$ и $s \in E$.

Пример 1.1. Рассмотрим тривиальное расслоение над M , т.е. пусть $\mathcal{E} = M \times \mathbb{C}^n$, а проекция расслоения — проекция произведения на первый сомножитель. Тогда пространство гладких сечений такого расслоения — это пространство гладких функций на M со значениями в $\mathbb{C}^n$, т.е. $E = A \otimes \mathbb{C}^n = A^n$. В то же время $E \otimes_A \Omega^1(M, \mathbb{C}) = (\Omega^1(M, \mathbb{C}))^n$. Зададим отображение $D : A^n \rightarrow (\Omega^1(M, \mathbb{C}))^n$ формулой $D(f_1, \dots, f_n) = (df_1, \dots, df_n)$, где $f_k \in A$ и d — внешний дифференциал. Легко проверить, что D является связностью на тривиальном расслоении $\mathcal{E}$.

Множество всех связностей на расслоении не обладает какой-либо естественной структурой линейного пространства. Тем не менее, если D_1 и D_2 — две связности на одном и том же расслоении, то для любой гладкой комплекснозначной функции f на M линейная комбинация $fD_1 + (1 - f)D_2$ также будет связностью на том же расслоении.

Предложение 1.1. На расслоении $\mathcal{E}$ всегда существует связность.

Для доказательства этого утверждения заметим следующее. Всякое расслоение $\mathcal{E}'$ вкладывается в тривиальное расслоение $\mathcal{E} = M \times \mathbb{C}^n$ подходящей размерности и выделяется в нем послойным проектором P . Послойный оператор P переводит сечения расслоения $\mathcal{E}$ в сечения подрасслоения $\mathcal{E}'$, поэтому можно считать, что P является оператором в E — пространстве сечений расслоения $\mathcal{E}$. Легко проверить, что P является проектором в E и что $\text{im } P = E'$. Остается воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 1.1. Пусть отображение $D' : E' \rightarrow E' \otimes_A \Omega^1(M, \mathbb{C})$ задано формулой $D' = P \circ D$. Тогда D' является связностью на расслоении $\mathcal{E}'$.

Доказательство состоит в непосредственной проверке требуемых свойств.

Предложение 1.2. Отображение D единственным образом продолжается до $\mathbb{C}$ -линейного отображения

$$D : E \otimes_A \Omega^*(M) \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+1}(M),$$

для которого

$$D(x \cdot \theta) = D(x) \cdot \theta + (-1)^{|x|} x \cdot d\theta,$$

где $x \in E \otimes_A \Omega^*(M)$, $\theta \in \Omega^*(M)$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.4.

Определение 1.2. Кривизной связности называется отображение

$$R = D \circ D : E \otimes_A \Omega^*(M) \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+2}(M). \quad (1)$$

Предложение 1.3. Отображение (1) является гомоморфизмом правых $\Omega^*(M)$ -модулей.

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.5.

Рассмотрим степени R^q ; тогда определены элементы $\text{tr } R^q \in \Omega^{2q}(M)$ (определение следа см. в приложении). Заметим, что элементы $\text{tr } R^q$ построены по связности D на расслоении E .

Теорема 1.1. (а) Элемент $\text{tr } R^q$ является коциклом степени $2q$ комплекса $\Omega^*(M)$.

(б) Если R' — кривизна другой связности на том же векторном расслоении $\mathcal{E}$, то элементы $\text{tr } R^q$ и $\text{tr } R'^q$ отличаются на кограницу.

Таким образом, корректно определен класс когомологий де Рама $[\frac{1}{q!} \text{tr } R^q] \in H^{2q}(M)$, который мы будем обозначать через $\text{Ch}_q(\mathcal{E})$. Можно показать, что с точностью до множителя $\frac{1}{(2\pi i)^q}$ этот характеристический класс совпадает с однородной компонентой степени $2q$ характера Чженя расслоения $\mathcal{E}$.

Чтобы быть более точными, приведем соответствующие формулы:

$$\text{Ch}_1(E) = \frac{1}{2\pi i} c_1(E),$$

$$\text{Ch}_2(E) = \frac{1}{2!(2\pi i)^2} (c_1^2(E) - 2c_2(E)),$$

$$\text{Ch}_3(E) = \frac{1}{3!(2\pi i)^3} (c_1^3(E) - 3c_1(E)c_2(E) + 3c_3(E))$$

и т. д.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ НАД АССОЦИАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ

В этом разделе мы определим характеристические классы правых конечно-порожденных проективных модулей над кольцом A . В основном мы будем следовать работе [16].

Определение 2.1. Пусть R — поле характеристики 0. Зафиксируем ассоциативную алгебру A с единицей над полем R . Дифференциальной квазирезольвентой алгебры A будем называть дифференциальную градуированную алгебру $\Omega^*(A)$ над R , обладающую следующими свойствами:

- 1) $\Omega^0(A) = A$,
- 2) $d(\omega_1\omega_2) = (d\omega_1)\omega_2 + (-1)^{|\omega_1|}\omega_1(d\omega_2)$,
- 3) $d^2 = 0$.

Из того, что $\Omega^*(A)$ является градуированной алгеброй, следует, в частности, что $\Omega^i(A)$ — бимодули над алгеброй A .

Пример 2.1. Пусть M — гладкое компактное многообразие. Положим $R = \mathbb{C}$, $A = C^\infty(M, \mathbb{C})$, $\Omega^*(A) = \Omega^*(M) \otimes \mathbb{C}$. Все необходимые свойства выполняются очевидным образом. Кроме того, в данном случае справедливо равенство $\omega_1\omega_2 = (-1)^{|\omega_1||\omega_2|}\omega_2\omega_1$. В общем случае оно не выполняется.

Важным примером дифференциальной квазирезольвенты служит *универсальная* дифференциальная квазирезольвента $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$. Она определяется следующим образом. Пусть $\Omega_{\text{univ}}^0(A) = A$, $\Omega_{\text{univ}}^1(A) = \ker m : A \otimes_{\mathbb{C}} A \rightarrow A$, где m — умножение в алгебре A . Заметим, что $\Omega_{\text{univ}}^1(A)$ является A -бимодулем. Для $n \geq 2$ положим $\Omega_{\text{univ}}^n(A) = \Omega_{\text{univ}}^1(A) \otimes_A \dots \otimes_A \Omega_{\text{univ}}^1(A)$, причем сомножитель $\Omega_{\text{univ}}^1(A)$ берется n раз. Очевидно, что $\Omega_{\text{univ}}^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega_{\text{univ}}^n(A)$ является градуированной алгеброй.

Остается определить дифференциал $d : \Omega_{\text{univ}}^n(A) \rightarrow \Omega_{\text{univ}}^{n+1}(A)$. Для $n = 0$ положим $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Легко проверить, что выполняется тождество Лейбница $d(a_1 a_2) = d(a_1) a_2 - a_1 d(a_2)$, где $a_1, a_2 \in A$. На остальных элементах $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$ дифференциал d определяется следующим образом. Произвольный элемент $\omega \in \Omega_{\text{univ}}^1(A)$ можно представить в виде конечной суммы $\omega = \sum b_i da_i$, где $a_i, b_i \in A$ и $\sum b_i a_i = 0$. В самом деле, по определению $\omega = \sum b_i \otimes a_i$, где $a_i, b_i \in A$ и $\sum b_i a_i = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega &= \sum b_i \otimes a_i - \left(\sum b_i a_i \right) \otimes 1 = \sum b_i \otimes a_i - \sum (b_i a_i \otimes 1) = \\ &= \sum b_i (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) = \sum b_i da_i, \end{aligned}$$

что и требовалось. Заметим, что такое представление неоднозначно.

Зададим дифференциал на элементе $\omega = \sum b_i da_i \in \Omega_{\text{univ}}^1(A)$ формулой $d\omega = \sum db_i da_i \in \Omega_{\text{univ}}^2(A)$. На остальных элементах $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$ дифференциал задается с помощью формулы Лейбница

$$d(\omega_1\omega_2) = (d\omega_1)\omega_2 + (-1)^{|\omega_1|}\omega_1 d\omega_2.$$

Нетрудно проверить, что d определен корректно.

Квазирезольвента $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$ называется универсальной, так как справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. Пусть $\Omega^*(A)$ — некоторая дифференциальная квазирезольвента алгебры A . Тогда существует единственный гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр $I : \Omega_{\text{univ}}^*(A) \rightarrow \Omega^*(A)$, тождественный на $\Omega_{\text{univ}}^0(A) = \Omega^0(A) = A$.

Доказательство. Для определенности будем через d_{univ} обозначать дифференциал в $\Omega_{\text{univ}}^*(A)$, а через d — в $\Omega^*(A)$. По условию $I(a) = a$. Так как I должен быть гомоморфизмом дифференциально-градуированных алгебр, т.е., в частности, $d \circ I = I \circ d_{\text{univ}}$, то для $\omega = \sum b_{i_1} d_{\text{univ}} a_{i_1} \otimes_A \dots \otimes_A b_{i_k} d_{\text{univ}} a_{i_k}$ должно выполняться равенство

$$I(\omega) = \sum b_{i_1} da_{i_1} \otimes_A \dots \otimes_A b_{i_k} da_{i_k}.$$

Тем самым гомоморфизм I определен единственным образом. Для доказательства существования следует определить I этой формулой и проверить корректность такого определения. $\square$

Связность, кривизну связности, характеристические классы мы будем определять для проективных модулей над кольцом A . Так кольцо A некоммутативно, то для определенности будем рассматривать правые модули над A .

Зафиксируем некоторую квазирезольвенту $\Omega^*(A)$ алгебры A .

Определение 2.2. Связностью на конечно-порожденном проективном правом A -модуле E называется R -линейное отображение $D : E \rightarrow E \otimes_A \Omega^1(A)$, обладающее тем свойством, что для всех $s \in E$, $a \in A$, выполняется формула

$$D(sa) = D(s)a + s \otimes_A da.$$

Замечание. Интересно, что если квазирезольвента алгебры A универсальная, то из существования связности на произвольном правом A -модуле E следует его проективность. При этом о конечной порожденности модуля E ничего не утверждается. В самом деле, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2. Пусть правый модуль E над кольцом A снабжен отображением $D : E \rightarrow E \otimes_A \Omega_{\text{univ}}^1(A)$, для которого выполняется формула $D(sa) = D(s)a + s \otimes_A da$. Тогда модуль E — проективный.

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность правых A -модулей

$$0 \longrightarrow E \otimes_A \Omega_{\text{univ}}^1(A) \xrightarrow{j} E \otimes_{\mathbb{C}} A \xrightarrow{m} E \longrightarrow 0,$$

в которой гомоморфизм j определяется формулой $j(s \otimes_A df) = s \otimes a - sa \otimes 1$, а гомоморфизм m — формулой $m(s \otimes a) = sa$. Покажем, что E выделяется прямым слагаемым в $E \otimes_{\mathbb{C}} A$. Для этого достаточно построить расщепление этой короткой точной последовательности. Рассмотрим отображение $S : E \rightarrow E \otimes_{\mathbb{C}} A$, заданное формулой

$$S(s) = s \otimes 1 + j(Ds).$$

Проверим, что S — гомоморфизм правых A -модулей. В самом деле,

$$\begin{aligned} S(sf) - S(s)f &= sf \otimes 1 + j(D(sf)) - [s \otimes 1 + j(Ds)]f = \\ &= sf \otimes 1 + j(D(s)f + s \otimes df) - s \otimes f - jD(s)f = \\ &= sf \otimes 1 - s \otimes f + j(s \otimes df) + j(D(s)f) - (jD(s))f = 0. \end{aligned}$$

Наконец, легко проверить, что $mS = \text{id}_E$, поэтому S задает искомое расщепление. $\square$

Пример 2.2. Пусть модуль E свободен, т.е. $E = A^n$. Тогда $E \otimes_A \Omega^*(A) = A^n \otimes_A \Omega^*(A) = (\Omega^*(A))^n$. Пользуясь этим изоморфизмом, определим отображение $D_0 : E \rightarrow E \otimes_A \Omega^*(A)$ формулой $D_0(f_1, \dots, f_n) = (df_1, \dots, df_n)$, где $f_1, \dots, f_n \in A$. Легко проверить, что D_0 является связностью на E .

Множество всех связностей на модуле E не обладает какой-либо естественной структурой линейного пространства. Тем не менее, если D_1 и D_2 — две связности на одном и том же модуле E , то для любого элемента $f \in A$ линейная комбинация $fD_1 + (1-f)D_2$ также будет связностью на том же модуле. Кроме того, если D_1 и D_2 — две связности на одном и том же модуле E , то $D_1 - D_2$ является гомоморфизмом правых A -модулей $E \rightarrow E \otimes_A \Omega^1(A)$. В частности, это означает, что любая связность на свободном модуле имеет вид $D_0 + \Gamma$, где Γ — гомоморфизм $A^n \rightarrow (\Omega^1(A))^n$ правых A -модулей. Заметим, что Γ можно отождествить с квадратной матрицей ранга n , элементы которой принадлежат $\Omega^1(A)$.

Предложение 2.3. На правом конечно-порожденном модуле E всегда можно задать связность.

Доказательство. Так как всякий конечно-порожденный проективный модуль выделяется проектором в свободном A -модуле подходящего ранга, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть E — правый конечно-порожденный проективный A -модуль, снабженный связностью D . Пусть E' — подмодуль E , который выделяется проектором $P \in \text{End}_A(E)$, $P^2 = P$, $E' = \text{im } P$. Тогда $D' = P \circ D$ является связностью на E' .

Доказательство. Пусть $s' \in E'$, $f \in A$. Так как $s' \in E'$, то $s' = Ps$ для некоторого $s \in E$. Проверим, что $D'(s'f) = D'(s')f + s' \otimes df$. В самом деле,

$$D'(s'f) = PD(s'f) = P(D(s')f + s' \otimes df) = P(D(s'))f + Ps' \otimes df = D'(s')f + s' \otimes df,$$

поскольку $P(s') = PP(s) = P(s) = s'$. □

Предложение 2.3 доказано. □

Связность вида PD_0 называется *грассмановой* связностью.

Добавим к нашим данным, которые состоят из ассоциативной алгебры A и ее квазирезольвенты $\Omega^*(A)$, конечно-порожденный проективный правый A -модуль E и связность D .

Предложение 2.4. *Отображение D единственным образом продолжается до R -линейного отображения*

$$D : E \otimes_A \Omega^*(A) \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+1}(A),$$

для которого

$$D(x \cdot \theta) = D(x) \cdot \theta + (-1)^{|x|} x \cdot d\theta,$$

где $x \in E \otimes_A \Omega^*(A)$, $\theta \in \Omega^*(A)$.

Доказательство. Определим последовательность R -линейных гомоморфизмов

$$D^{(j)} : E \otimes_A \Omega^j(A) \rightarrow E \otimes_A \Omega^{j+1}(A),$$

где $j \geq 0$, следующим образом. Положим $D^{(0)} = D$, а для $j \geq 1$ и $s \in E, \omega \in \Omega^j(A)$ определим $D^{(j)}$ формулой

$$D^{(j)}(s \otimes_A \omega) = (Ds)\omega + s \otimes_A d\omega.$$

Корректность такого определения легко проверить:

$$\begin{aligned} D^{(j)}(sa \otimes_A \omega) &= (Ds)a\omega + s \otimes_A (da)\omega + sa \otimes_A d\omega = \\ &= (Ds)a\omega + s \otimes_A d(a\omega) = D^{(j)}(s \otimes_A a\omega). \end{aligned}$$

На остальные элементы $E \otimes_A \Omega^j(A)$ отображение $D^{(j)}$ продолжим по линейности.

Пусть $x \in E \otimes_A \Omega^i(A)$, $\omega \in \Omega^j(A)$. Имеет место следующая формула:

$$D^{(i+j)}(x\omega) = D^{(i)}(x)\omega + (-1)^i x d\omega.$$

Ее достаточно проверить для $x = s \otimes_A \theta$, где $s \in E$, $\theta \in \Omega^i(A)$. Имеем

$$\begin{aligned} D^{(i+j)}((s \otimes_A \theta)\omega) &= D^{(i+j)}(s \otimes_A \theta\omega) = \\ &= (Ds)\theta\omega + s \otimes_A d(\theta\omega) = (Ds)\theta\omega + s \otimes_A (d\theta)\omega + (-1)^i s \otimes_A \theta d\omega = \\ &= D^{(i)}(s \otimes_A \theta)\omega + (-1)^i (s \otimes_A \theta) d\omega = (D^{(i)}x)\omega + (-1)^i x d\omega. \end{aligned}$$

Будем обозначать все $D^{(j)}$ через D ; это не вызовет недоразумений. □

Кривизной связности D на модуле E называется композиция

$$R = D^2 : E \otimes_A \Omega^*(A) \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+2}(A). \quad (2)$$

Предложение 2.5. *Отображение (2) является гомоморфизмом правых $\Omega^*(A)$ -модулей, т.е. всех для $x \in E \otimes_A \Omega^*(A)$ и $\omega \in \Omega^*(A)$ выполняется равенство*

$$R(x\omega) = R(x)\omega.$$

Доказательство. Пусть $x \in E \otimes_A \Omega^i(A)$ и $\omega \in \Omega^j(A)$; сделаем следующее несложное вычисление:

$$\begin{aligned} D^2(x\omega) &= D(Dx \cdot \omega + (-1)^i x \cdot d\omega) = \\ &= D^2x \cdot \omega + (-1)^{i+1} Dx \cdot d\omega + (-1)^i (Dx \cdot d\omega + (-1)^i x \cdot d^2\omega) = D^2x \cdot \omega. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем эндоморфизм R правого $\Omega^*(A)$ -модуля $E \otimes_A \Omega^*(A)$. Легко показать, что $E \otimes_A \Omega^*(A)$ проективен как $\Omega^*(A)$ -модуль. Тем самым имеет смысл говорить о следах степеней

эндоморфизма R , т.е. об элементах $\operatorname{tr} R^q \in \bar{\Omega}^*(A)$. Определение следа и кольца $\bar{\Omega}^*(A)$ приведено в приложении. $\square$

Теорема 2.1. Пусть на конечно-порожденном проективном правом A -модуле E задана связность D с кривизной R . Тогда элемент $\operatorname{tr} R^q$ является коциклом в комплексе $\bar{\Omega}^*(A)$.

Доказательство. Прежде всего рассмотрим случай, когда связность на модуле E является грассмановой, т.е. имеет вид PD_0 , где P — проектор в свободном модуле A^n подходящего ранга и $E = \operatorname{im} P$. Можно рассматривать P как матрицу с элементами из A . Пользуясь изоморфизмом $A^n \otimes_A \Omega^1(A) = (\Omega^1(A))^n$, связность D будем записывать в виде $D = P \circ d$. Вычислим продолжение связности D до гомоморфизма $D : E \otimes_A \Omega^*(A) \rightarrow E \otimes_A \Omega^{*+1}(A)$. По определению, для $s \in E$ и $\omega \in \Omega^*(A)$

$$D(s \otimes_A \omega) = Ds \otimes_A \omega + s \otimes_A d\omega = Pds \otimes_A \omega + Ps \otimes_A d\omega = Pd(s \otimes_A \omega).$$

Вычислим кривизну грассмановой связности:

$$\begin{aligned} R(s \otimes_A \omega) &= D(Pd(s \otimes_A \omega)) = Pd(Pd(s \otimes_A \Omega^*(A))) = \\ &= P(dP)d(s \otimes_A \omega) + PPd^2(s \otimes_A \omega) = \\ &= P(dP)d(s \otimes_A \omega). \end{aligned}$$

Заметим, что $s \otimes_A \omega \in E \otimes_A \Omega^*(A)$, поэтому $s \otimes_A \omega = P(s \otimes_A \omega)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d(s \otimes_A \omega) &= (dP)(s \otimes_A \omega) + Pd(s \otimes_A \omega), \\ R(s \otimes_A \omega) &= P(dP)(dP)(s \otimes_A \omega) + P(dP)Pd(s \otimes_A \omega). \end{aligned}$$

Покажем, что $P(dP)P = 0$. В самом деле, $P^2 = P$, поэтому $(dP)P + P(dP) = dP$. Применяя к обеим частям этого равенства P , получим $P(dP)P + PP(dP) = P(dP)$. Отсюда $P(dP)P = 0$ и

$$R(s \otimes_A \omega) = P(dP)(dP)(s \otimes_A \omega).$$

Перейдем к вычислению R^q . Так как

$$\begin{aligned} P(dP)(dP)P &= P(dP)(d(P^2) - P(dP)) = \\ &= P(dP)(dP) - P(dP)P(dP) = P(dP)(dP), \end{aligned}$$

легко убедиться в справедливости равенств $R^q = P(dP)^{2q}$ и $d(R^q) = (dP)^{2q+1}$.

Теперь можно показать, что $d(\operatorname{tr} R^q) = 0$. Рассмотрим гомоморфизм $Q = 2P - 1$. Для него выполняются равенства $Q^2 = 1$ и $QdP = -(dP)Q$. Тогда

$$(dP)^{2q+1} = Q^2(dP)^{2q+1} = -Q(dP)^{2q+1}Q.$$

Отсюда получаем равенство следов $d(\operatorname{tr} R^q) = -\operatorname{tr} Q(dP)^{2q+1}Q$, а так как операторы под знаком следа можно циклически переставлять, то

$$d(\operatorname{tr} R^q) = -\operatorname{tr} Q(dP)^{2q+1}Q = -\operatorname{tr} Q^2(dP)^{2q+1} = -d(\operatorname{tr} R^q).$$

Следовательно, $d(\operatorname{tr} R^q) = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда модуль E является свободным. Как мы знаем, произвольная связность на свободном модуле имеет вид $D = D_0 + \Gamma = d + \Gamma$. Для кривизны такой связности легко получить следующую формулу, где $x \in E \otimes_A \Omega^*(A)$:

$$\begin{aligned} R(x) &= D(dx + \Gamma x) = (d + \Gamma)(dx + \Gamma x) = ddx + \Gamma(dx) + d(\Gamma x) + \Gamma^2 x = \\ &= \Gamma(dx) + (d\Gamma)x - \Gamma(dx) + \Gamma^2 x = (d\Gamma + \Gamma^2)x. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $dR = d\Gamma \cdot \Gamma - \Gamma \cdot d\Gamma = R\Gamma - \Gamma R$. По индукции легко показать, что $d(R^q) = R^q \cdot \Gamma - \Gamma \cdot R^q$. Следовательно,

$$d(\operatorname{tr} R^q) = \operatorname{tr} dR^q = \operatorname{tr}(R^q \cdot \Gamma - \Gamma \cdot R^q) = 0.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда модуль E и связность D на нем произвольны. Пусть модуль E' таков, что $E \oplus E' = A^n$; снабдим его грассмановой связностью D' . Тогда $D \oplus D'$, как легко проверить, является связностью на A^n . Обозначим кривизны этих трех связностей соответственно

R , R' и R'' . Легко проверить, что $R \oplus R' = R''$. В силу свойств следа $\operatorname{tr} R^q + \operatorname{tr} R'^q = \operatorname{tr} R''^q$. Как только что было показано, элементы $\operatorname{tr} R'^q$ и $\operatorname{tr} R''^q$ являются циклами в $\bar{\Omega}^*(A)$; следовательно, и $\operatorname{tr} R^q$ является циклом, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 2.2. *Когомологический класс коцикла $\operatorname{tr} R^q$ в когомологиях комплекса $\bar{\Omega}^*(A)$ не зависит от выбора связности на модуле E .*

Рассмотрим дифференциально-градуированную алгебру $L^* = \bigoplus L^i$, где $L^0 = R[t]$ — кольцо многочленов от переменной t , $L^1 = R[t]dt$, а остальные $L^i = 0$. Дифференциал $d : L^0 \rightarrow L^1$ определим обычной формулой $d(P(t)) = P'(t)dt$, где $P'(t)$ — формальная производная многочлена $P(t)$. Определим отображение $H_0 : L \rightarrow R$ следующим образом. Положим $H_0|_{L^0} = 0$ и $H_0(P(t)dt) = \int_0^1 P(t) dt$.

Легко проверить, что $(dH_0 + H_0d)(P(t)) = P(1) - P(0)$ и $(dH_0 + H_0d)(P(t)dt) = 0$. Определим отображение $H : L^* \otimes_R \Omega^*(A) \rightarrow \bar{\Omega}^*(A)$ формулой $H(\theta \otimes \omega) = H_0(\theta)\omega$, где $\theta \in L^*$ и $\omega \in \Omega^*(A)$. Произведение $L^* \otimes_R \Omega^*(A)$ рассматривается как тензорное произведение градуированных алгебр. Если $x \in L^* \otimes_R \Omega^*(A)$ представляется в виде $\theta \otimes \omega$, где $\theta \in L^0$, то будем считать, что $x(1) = \theta(1)\omega$ и $x(0) = \theta(0)\omega$. Если же $x = \theta \otimes \omega$, где $\theta \in L^1$, то будем считать, что $x(1) = x(0) = 0$. Тогда, как легко проверить,

$$(dH + Hd)x = x(1) - x(0).$$

Отображение H определяет отображение $\bar{H} : L^* \otimes \bar{\Omega}^*(A) \rightarrow \bar{\Omega}^*(A)$ с аналогичным свойством

$$(d\bar{H} + \bar{H}d)x = x(1) - x(0),$$

где $x \in L^* \otimes \bar{\Omega}^*(A)$.

Имеет место следующее наблюдение, которое пригодится нам чуть ниже. Пусть x — коцикл комплекса $L^* \otimes \bar{\Omega}^*(A)$. Тогда $x(1) - x(0)$ — кограница комплекса $\bar{\Omega}^*(A)$. В самом деле, $x(1) - x(0) = (d\bar{H} + \bar{H}d)x = d\bar{H}(x)$.

Теперь мы можем доказать, что когомологический класс элемента $\operatorname{tr} R^q$ не зависит от выбора связности на модуле E .

Пусть E' — такой модуль, что $E \oplus E'$ — свободный модуль. Зафиксируем на E' какую-либо связность D' . Обозначим ее кривизну через R' . Ясно, что $D'' = D \oplus D'$ является связностью на модуле $E \oplus E'$, причем кривизна этой связности равна $R'' = R \oplus R'$. Из свойств следа вытекает, что $\operatorname{tr} R^q = \operatorname{tr} R''^q - \operatorname{tr} R'^q$. В силу этого равенства для того, чтобы доказать, что когомологический класс $\operatorname{tr} R^q$ не зависит от выбора D , достаточно проверить, что от выбора связности D не зависит класс $\operatorname{tr} R''^q$, так как $\operatorname{tr} R'^q$ не зависит от D по построению.

Мы покажем, что класс $\operatorname{tr} R''^q$ равен нулю для любой связности D'' на свободном модуле $A^n = E \oplus E'$. Пусть $D'' = d + \Gamma$. Рассмотрим свободный модуль $(A[t])^n$ над $A[t]$. Пусть $\Gamma' = t\Gamma$. Отображение $d + t\Gamma$ является связностью на $(A[t])^n$, если в качестве квазирезольвенты для $A[t]$ взять $L^* \otimes_R \Omega^*(A)$. Рассмотрим $\bar{R} = d\Gamma' + \Gamma'^2 \in L^* \otimes_R \bar{\Omega}^*(A)$. Тогда $\eta = \operatorname{tr} \bar{R}^q$ является коциклом в $L^* \otimes_R \bar{\Omega}^*(A)$, причем, как легко проверить, $\eta(1) = \operatorname{tr} R''^q$ и $\eta(0) = 0$. Поэтому в силу сделанного выше наблюдения, $\operatorname{tr} R''^q = \eta(1) - \eta(0)$ является кограницей комплекса $\bar{\Omega}^*(A)$, что и требовалось.

Для конечно-порожденного проективного правого A -модуля E положим $\operatorname{Ch}_q(E) = \frac{1}{q}[\operatorname{tr} R^q] \in H(\bar{\Omega}^*(A))$, где R — кривизна некоторой связности на E . Из последних двух теорем следует, что характеристический класс $\operatorname{Ch}_q(E)$ определен корректно и не зависит от выбора связности на модуле E .

3. КОНСТРУКЦИЯ ЖУРАЕВА—МИЩЕНКО—СОЛОВЬЕВА

В этом разделе мы рассмотрим конструкцию характеристических классов, предложенную в работах [1, 2] (опущенные доказательства см. там же). От предыдущей конструкции она отличается другим подходом к определению связности. В втором разделе мы определили связность как R -линейное отображение

$$D : E \rightarrow E \otimes_A \Omega^1(A),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$D(s \cdot f) = D(s) \cdot f + s \otimes_A df$$

для всех $f \in A$ и $s \in E$.

В случае, когда A — алгебра комплекснозначных функций на гладком компактном многообразии M , а E — пространство сечений комплексного расслоения $\mathcal{E}$ над M , можно использовать другое, равносильное определение.

Связностью на расслоении $\mathcal{E}$ над многообразием M называется отображение $\nabla_X : E \rightarrow E$, заданное для всех векторных полей на M и удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$,
- 2) $\nabla_X(sf) = \nabla_X(s) \cdot f + s \cdot Xf$,

где f, g — функции на M , X, Y — векторные поля, s — сечение расслоения $\mathcal{E}$ и через Xf обозначена производная f вдоль векторного поля X .

Чтобы перенести это определение на некоммутативный случай, необходимо определить аналог алгебры Ли векторных полей на многообразии. В этом разделе мы воспользуемся следующим известным фактом. Множество гладких векторных полей $\text{Vect}(M)$ совпадает с пространством всех дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$, т.е. таких линейных отображений $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, для которых $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$.

Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с единицей, заданная над полем R характеристики нуль, Z — подалгебра, лежащая в центре A , D — подалгебра алгебры Ли дифференцирований алгебры A , замкнутая относительно действия Z . Действие Z на D определяется формулой $(hX)(f) = h(X(f))$, где $f \in A$, $X \in D$, $h \in A \subset A$. Ясно, что относительно этого действия D является модулем над Z .

Определение 3.1. *Связностью* на правом конечно-порожденном проективном A -модуле E называется R -линейное отображение

$$\nabla : E \rightarrow \text{Hom}_Z(D, E),$$

удовлетворяющее формуле Лейбница

$$\nabla_X(sf) = \nabla_X(s)f + s \cdot Xf,$$

для всех $s \in E$, $X \in D$, $f \in A$. Здесь и далее через $\nabla_X(s)$ будем обозначать $\nabla(s)(X) \in E$.

Пример 3.1. Пусть M — гладкое компактное многообразие, $A = C^\infty(M, \mathbb{C})$ — алгебра комплекснозначных гладких функций на M , $Z = C^\infty(M)$ — ее подалгебра вещественнозначных функций и D — алгебра Ли гладких векторных полей на M . Пусть $\mathcal{E}$ — комплексное векторное расслоение над M . Тогда связность на расслоении $\mathcal{E}$ является связностью в нашем определении на E — пространстве сечений расслоения $\mathcal{E}$.

Пример 3.2. Пусть E — свободный модуль, т.е. $E = A^n$. Положим по определению $\nabla_X^0(f_1, \dots, f_n) = (Xf_1, \dots, Xf_n)$. Легко проверить, что ∇^0 является связностью на A^n .

Предложение 3.1. *На всяком конечно-порожденном проективном правом A -модуле E существует связность.*

Это утверждение доказывается с помощью следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть ∇ — связность на правом конечно-порожденном модуле E и P — эндоморфизм E такой, что $P^2 = P$. Тогда $P \circ \nabla$ является связностью на модуле $\text{im } P = P(E)$.*

Определим кривизну R связности ∇ формулой

$$R(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]}s,$$

где $X, Y \in D$ и $s \in E$.

Определим аналог комплекса де Рама для нашего случая. Пусть для Z -модуля V задано действие алгебры D и гомоморфизм Z - и D -модулей $\tau : A \rightarrow V$. Потребуем выполнения дополнительно следующих равенств:

$$X(fv) = (Xf)v + f(Xv), \quad (fX)v = f(Xv), \quad \tau(ab) = \tau(ba)$$

для всех $X \in D$, $f \in Z$, $a, b \in A$ и $v \in V$. Определим комплекс $\Omega^*(D, V)$ дифференциальных форм со значениями в V следующим образом. Прежде всего, через $\Lambda_Z^n(D)$ обозначим фактор n -й внешней степени алгебры Ли D по всевозможным соотношениям вида

$$f(X_1 \wedge \dots \wedge X_k \wedge \dots \wedge X_n) = (X_1 \wedge \dots \wedge fX_k \wedge \dots \wedge X_n).$$

Легко видеть, что $\Lambda_Z^n(D)$ является Z -модулем. Положим по определению $\Omega^0(D, V) = V$, $\Omega^n(D, V) = \text{Hom}_Z(\Lambda_Z^n(D), V)$ при $n \geq 1$. Элементы $\Omega^n(D, V)$ будем называть n -формами со значениями в V .

Определим теперь дифференциал $d : \Omega^n(D, V) \rightarrow \Omega^{n+1}(D, V)$. Пусть $\omega \in \Omega^n(D, V)$ и $X_1, \dots, X_{n+1} \in D$. Положим

$$\begin{aligned} d\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i X_i \omega(X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge X_{n+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge X_{n+1}). \end{aligned}$$

Легко проверить, что определенное таким образом отображение $d\omega$ принадлежит $\Omega^{n+1}(D, V)$. Несложное, но довольно громоздкое вычисление показывает, что $d \circ d = 0$. Когомологии комплекса $\Omega^*(D, V)$ относительно этого дифференциала, т.е. $\ker d / \text{im } d$, будем обозначать через $H_Z^k(D, V)$.

Если модуль V является алгеброй, то на прямой сумме $\Omega^*(D, V) = \bigoplus \Omega^n(D, V)$ можно задать операцию внешнего умножения форм, относительно которой $\Omega^*(D, V)$ превращается в ассоциативную алгебру. Внешнее произведение форм $\omega_1 \in \Omega^n(D, V)$ и $\omega_2 \in \Omega^m(D, V)$ определим формулой

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{n+m}) &= \\ &= \sum_{\sigma \in S(n, m)} (-1)^\sigma \omega_1(X_{\sigma 1} \wedge \dots \wedge X_{\sigma n}) \cdot \omega_2(X_{\sigma(n+1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(n+m)}), \end{aligned}$$

где сумма берется по всем (n, m) -перетасовкам σ .

Если умножение в V согласовано с действием алгебры Ли D , т.е. $X(v_1 v_2) = (Xv_1)v_2 + v_1(Xv_2)$, как, например, в случае, когда $V = A$, то дифференциал d является градуированным дифференцированием относительно умножения форм:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{|\omega_1|} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Основное свойство кривизны R содержится в следующем утверждении, которое доказывается непосредственной проверкой требуемых свойств.

Предложение 3.2. Для любой связности на конечно-порожденном проективном модуле E ее кривизна R является 2-формой со значениями в кольце $\text{End}_A(E)$.

В частности, для всех $X, Y \in D$, $s \in E$, $f \in A$ выполняется равенство $R(X, Y)(sf) = (R(X, Y)(s))f$. Следовательно, определены элементы $R^{\wedge q} = R \wedge \dots \wedge R \in \Omega^{2q}(D, \text{End}_A(E))$.

Пусть $\tau : A \rightarrow V$ — отображение со свойствами, перечисленными выше. Тогда оно продолжается до отображения следа $\text{End}_A(E) \rightarrow V$, которое будем обозначать той же буквой τ . Таким образом, заданы элементы $\tau(R^{\wedge q}) \in \Omega^{2q}(D, V)$.

Теорема 3.1. (а) Элемент $\tau(R^{\wedge q})$ является коциклом степени $2q$ комплекса $\Omega^*(D, V)$.

(б) Если R' — кривизна другой связности на том же модуле E , то $\tau(R'^{\wedge q}) - \tau(R^{\wedge q})$ является кограницей в комплексе $\Omega^*(D, V)$.

Доказательство аналогично доказательству теорем 2.1 и 2.2.

Таким образом, когомологический класс $[\tau(R^{\wedge q})]$ определен корректно и не зависит от выбора связности на модуле E . Обозначим класс $[\tau(R^{\wedge q})]$ через $\text{Ch}_q(E)$.

Следующий пример показывает, как эти классы связаны с характеристическими классами Чженя векторных расслоений. Пусть, как в первом примере этого раздела, M — гладкое компактное многообразие, $A = C^\infty(M, \mathbb{C})$ — алгебра комплекснозначных гладких функций на M , $Z = C^\infty(M)$ — ее подалгебра вещественнозначных функций и D — алгебра Ли гладких векторных полей на M .

Можно показать, что группы когомологий $H_{\mathbb{Z}}^m(D, A)$ изоморфны когомологиям де Рама $H^m(M, \mathbb{C})$ многообразия M с коэффициентами в $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{E}$ — комплексное векторное расслоение над M , E — пространство сечений $\mathcal{E}$. Тогда определены характеристические классы $\text{Ch}_q(E)$, в силу указанного изоморфизма принадлежащие $H^m(M, \mathbb{C})$. Связь $\text{Ch}_q(E)$ с характеристическими классами Чженя $c_k(\mathcal{E})$ расслоения $\mathcal{E}$ выражается формулой

$$\text{Ch}_q(E) = Q_q(2\pi i c_1(\mathcal{E}), \dots, (2\pi i)^q c_q(\mathcal{E})).$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [1, 2].

4. $\mathbf{Z}/2$ -ГРАДУИРОВАННЫЕ ПАРЫ ЛИ—КАРТАНА

В этом разделе в основу конструкции характеристических классов мы положим определение связности, в котором вместо подалгебры D алгебры дифференцирований алгебры A используется алгебра Ли L , связанная с алгеброй A двумя отображениями, обладающими рядом свойств. Пусть A — коммутативная алгебра с единицей, L — алгебра Ли, заданные над полем R нулевой характеристики. Пусть R -линейные отображения

$$A \otimes_R L \rightarrow L, \quad L \otimes_R A \rightarrow A$$

задают соответственно действия алгебры A на L и действие L на A со следующими свойствами:

- 1) $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$;
- 2) $(fg)X = f(gX)$, $1_A X = X$;
- 3) $X(fg) = (Xf) \cdot g + f \cdot Xg$; $f(Xg) = (fX)g$, $[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$.

В этом случае будем говорить, что задана *пара Ли—Картана* (A, L) .

Свойство 1), в частности, означает, что A является модулем над алгеброй Ли L , а свойство 2) означает, что L является модулем над A .

Пример, дающий мотивацию этому определению, следующий. Пусть M — гладкое многообразие, $A = C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M и $L = \text{Vect}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на M . Действие алгебры A на L состоит в умножении векторного поля на функцию, а действие L на A состоит во взятии производной функции вдоль векторного поля.

Определим характеристические классы в несколько более общей ситуации — для $\mathbf{Z}/2$ -градуированных пар Ли—Картана. Напомним, что в этом разделе через $|a|$ будет обозначаться $\mathbf{Z}/2$ -градуировка элемента a , т.е. $|a| = 0$, если элемент a четный, и $|a| = 1$, если a — нечетный.

Определение 4.1. Будем говорить, что задана *$\mathbf{Z}/2$ -градуированная пара Ли—Картана*, если даны супералгебра A с единицей и супералгебра Ли L для которых выполняются следующие свойства:

- 1) алгебра A суперкоммутативна, т.е. для всех $f, g \in A$ $fg = (-1)^{|f||g|}gf$;
- 2) L является градуированным модулем над A ;
- 3) A является градуированным модулем над L ;
- 4) для всех $f, g \in A$, $X \in L$ выполняется равенство $f(Xg) = (fX)g$;
- 5) для $f \in A$ и $X, Y \in L$ выполняется равенство $[X, fY] = (Xf)Y + (-1)^{|X||f|}f[X, Y]$.

Это определение можно переформулировать следующим образом. Суперкоммутативная (супер)алгебра A с единицей и супералгебра Ли L образуют $\mathbf{Z}/2$ -градуированную пару Ли—Картана, если заданы отображения $A \otimes_R L \rightarrow L$ и $L \otimes_R A \rightarrow A$ такие, что для всех $f, g \in A$, $X, Y \in L$ выполняются равенства:

- 1) $f(gX) = (fg)X$, $1_A X = X$;
- 2) $X(fg) = (Xf)g + (-1)^{|X||f|}f(Xg)$, $[X, Y]f = X(Yf) - (-1)^{|X||Y|}Y(Xf)$;
- 3) $f(Xg) = (fX)g$, $[X, fY] = (Xf)Y + (-1)^{|X||f|}f[X, Y]$.

Определение 4.2. Будем говорить, что на конечно-порожденном проективном правом $\mathbf{Z}/2$ -градуированном A -модуле E задана *связность*, если для всех $X \in L$ задано R -линейное отображение $\nabla_X : E \rightarrow E$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$ для всех $f, g \in A$, $X, Y \in L$;

2) $\nabla_X(sf) = (\nabla_X s)f + (-1)^{|X||s|}s(Xf)$ для $s \in E$, $f \in A$.

Замечание. В силу суперкоммутативности алгебры A можно рассматривать правый A -модуль E как левый A -модуль. Для этого нужно считать, что $sf = (-1)^{|s||f|}fs$ для $s \in E$, $f \in A$.

Пример 4.1. Пусть модуль E — свободный, т.е. $E = A^n$. Тогда формула $\nabla_X^0(f_1, \dots, f_n) = (Xf_1, \dots, Xf_n)$ задает связность на E .

Предложение 4.1. На всяком конечно-порожденном проективном правом A -модуле E существует связность.

Это утверждение доказывается с помощью следующего утверждения.

Лемма 4.1. Пусть ∇ — связность на правом конечно-порожденном модуле E и P — эндоморфизм E такой, что $P^2 = P$. Тогда $P \circ \nabla$ является связностью на модуле $\text{im } P = P(E)$.

Определение 4.3. Кривизной связности ∇ на модуле E называется отображение $R(X, Y) : E \rightarrow E$, где $X, Y \in L$, заданное формулой

$$R(X, Y)s = \nabla_X(\nabla_Y s) - (-1)^{|X||Y|}\nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X, Y]}s.$$

Легко проверить, что кривизна ∇^0 нулевая.

Предложение 4.2. Отображение $R(X, Y) : E \rightarrow E$ является гомоморфизмом правых A -модулей для всех $X, Y \in L$.

Доказательство состоит в стандартном вычислении.

Теперь определим ряд объектов дифференциально-геометрической природы. Первым таким объектом будет комплекс дифференциальных форм со значениями в E . Положим $\Lambda^0(L, E) = E$, $\Lambda^1(L, E) = \text{Hom}_R(L, E)$. Пусть $L^p(L, E)$ состоит из всевозможных R -линейных отображений $L^{\otimes k} \rightarrow E$. Определим $\Lambda^p(L, E)$ как подмодуль $L^p(L, E)$, состоящий из отображений $\omega : L^{\times p} \rightarrow E$, для которых справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_p) &= (-1)^{1+|X_i||X_j|}\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_p), \\ \omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_p) &= (-1)^{|f|(|X_1|+\dots+|X_{i-1}|)}f\omega(X_1, \dots, X_p) = \\ &= (-1)^{|f|(|X_i|+\dots+|X_p|)}\omega(X_1, \dots, X_p)f.\end{aligned}$$

Если на модуле E задана связность с нулевым кручением, то можно задать дифференциал $\delta : \Lambda^p(L, E) \rightarrow \Lambda^{p+1}(L, E)$. Пусть $\omega \in \Lambda^p(L, E)$. Тогда значение $\delta\omega$ на элементах $X_1, \dots, X_{p+1}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}(\delta\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+\varepsilon(i,j)}\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1+|X_i|(|X_2|+\dots+|X_{i-1}|)}\nabla_{X_i}\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}),\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon(i, j) = i + j + (|X_i| + |X_j|)(|X_2| + \dots + |X_{i-1}|) + |X_j|(|X_{i+1}| + \dots + |X_{j-1}|).$$

Несложное, но довольно громоздкое вычисление показывает, что если связность плоская, то $\delta \circ \delta = 0$.

В том случае, когда E является кольцом, например когда $E = A$, можно определить внешнее произведение двух форм $\omega \in \Lambda^p(L, E)$ и $\theta \in \Lambda^q(L, E)$. Значение формы $\omega \wedge \theta$ на элементах $X_1, \dots, X_{p+q}$ задается формулой

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{p+q}) &= \\ &= \sum_{\sigma \in S(p,q)} (-1)^\sigma (-1)^{\sum_{i < j} |X_i||X_j|\chi_\sigma(i,j)} (-1)^{|\theta|(|X_{\sigma(1)}|+\dots+|X_{\sigma(p)}|)}\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \cdot \theta(X_{p+1}, \dots, X_{p+q}),\end{aligned}$$

где $S(p, q)$ — подгруппа симметрической группы S_{p+q} , состоящая всех (p, q) -перетасовок. Функция $\chi_\sigma(i, j)$ определяется для всех пар (i, j) , где $1 \leq i < j \leq p + q$, следующим образом: $\chi_\sigma(i, j) = 1$, если $\sigma(i) > \sigma(j)$, и $\chi_\sigma(i, j) = 0$ в противном случае. Возникновение этой функции объясняется очень просто: если при перетасовке σ символы X_i и X_j поменялись местами, то появляется дополнительный множитель $(-1)^{|X_i||X_j|}$.

Нетрудно проверить, что такое умножение ассоциативно:

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3,$$

и что справедлива формула Лейбница

$$\delta(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\delta\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{|\omega_1|} \omega_1 \wedge (\delta\omega_2).$$

Предложение 4.3. Кривизна R задает дифференциальную форму со значениями в $\text{End}_A E$, т.е. $R \in \Lambda^2(L, \text{End}_A E)$.

В силу предложения 4.2 для доказательства достаточно проверить, что отображение

$$R(X, Y) : s \mapsto \nabla_X \nabla_Y s - (-1)^{|X||Y|} \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s$$

обладает следующими свойствами:

$$R(X, Y) = -(-1)^{|X||Y|} R(Y, X), \quad R(X, fY) = (-1)^{|X||f|} f R(X, Y).$$

Проверка проводится непосредственным вычислением.

Таким образом, определены элементы

$$R^{\wedge q} = R \wedge \dots \wedge R \in \Lambda^{2q}(L, \text{End}_A(E)).$$

Пусть $\text{tr} : \text{End}_A \rightarrow \bar{A}$ — след. Тогда имеются элементы $\text{tr}(R^{\wedge q}) \in \Lambda^{2q}(L, \bar{A})$.

Теорема 4.1. (а) Элемент $\text{tr}(R^{\wedge q})$ является коциклом степени $2q$ комплекса $\Lambda^*(L, \bar{A})$.

(б) Если R' — кривизна другой связности на том же модуле E , то $\text{tr}(R'^{\wedge q}) - \text{tr}(R^{\wedge q})$ является кограницей в комплексе $\Lambda^*(L, \bar{A})$.

Таким образом, когомологический класс $[\text{tr}(R^{\wedge q})]$ определен корректно и не зависит от выбора связности на модуле E . Обозначим класс $[\text{tr}(R^{\wedge q})]$ через $\text{Ch}_q(E)$; он принадлежит когомологиям $H(\Lambda^*(L, \bar{A}))$.

ПРИЛОЖЕНИЕ. СЛЕД ЭНДОМОРФИЗМА ПРОЕКТИВНОГО МОДУЛЯ

Пусть K — некоторое кольцо с единицей (вообще говоря, некоммутативное). Пусть F — правый конечно-порожденный проективный K -модуль. В этом приложении мы определим след K -эндоморфизма модуля F .

Через F^* будем обозначать двойственный к F модуль $\text{Hom}_K(F, K)$, состоящий из всех K -линейных гомоморфизмов $f : F \rightarrow K$. Для произвольного правого K -модуля G определим отображение $I(G) : G \otimes_K F^* \rightarrow \text{Hom}_K(F, G)$ так, чтобы оно элементу $g \otimes_K f \in G \otimes F^*$ ставило в соответствие гомоморфизм, который $x \in F$ переводит в $g \cdot f(x) \in G$.

Предложение. Для конечно-порожденного проективного K -модуля F и любого правого K -модуля G отображение $I(G)$ является изоморфизмом.

Для $F = K$ это утверждение очевидно. Также легко проверяется, что оно справедливо и для $F = K^n$. Теперь утверждение нетрудно проверить и для произвольного конечно-порожденного проективного F , так как он выделяется прямым слагаемым в подходящем K^n .

Обозначим через $[K, K]$ подгруппу, порожденную коммутаторами $\lambda\mu - \mu\lambda$ (если кольцо K градуировано, то коммутаторы тоже следует рассматривать градуированные: $\lambda\mu - (-1)^{|\lambda||\mu|} \mu\lambda$). Пусть $\bar{K} = K/[K, K]$. Формула $d[\lambda, \mu] = [d\lambda, \mu] + (-1)^{|\lambda|} [\lambda, d\mu]$ показывает, что если в кольце K был задан дифференциал, удовлетворяющий формуле Лейбница, то он может быть определен и в $\bar{K}$.

Формула $x \otimes_K f \mapsto f(x)$ определяет отображение $\theta : F \otimes_K F^* \rightarrow \bar{K}$. Композицию $\theta \circ I(F) : \text{Hom}_K(F, F) \rightarrow F \otimes_K F^* \rightarrow \bar{K}$ будем обозначать tr и называть следом.

Следующие свойства объясняют, почему отображение tr является обобщением следа линейного оператора.

- 1) Если $F = K^n$ и эндоморфизм A задается матрицей (a_{ij}) , то $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii} \bmod [K, K]$.
- 2) Если F и G — два конечно-порожденных проективных K -модуля, а $A : F \rightarrow G$ и $B : G \rightarrow F$ — K -гомоморфизмы, то $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.
- 3) Если $C : F \rightarrow G$ — изоморфизм двух конечно-порожденных проективных K -модулей и $A : F \rightarrow F$ — произвольный K -эндоморфизм, то $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} CAC^{-1}$.
- 4) Если $F = F_1 \oplus F_2$ и $A : F \rightarrow F$ разлагается в прямую сумму $A = A_1 \oplus A_2$, то $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A_1 + \operatorname{tr} A_2$.
- 5) Пусть F выделяется в K^n прямым слагаемым с помощью проектора p , а эндоморфизм A модуля F задается матрицей M такой, что $pM = Mp = M$. Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} M$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K -теории// Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 91–92.
2. Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K -теории// Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, мат., мех. — 1986. — 1. С. 75–76.
3. Каруби М. K -Теория. Введение// Proc. Nat. Acad. Sci. — 1935. — 21. — С. .
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М: Наука, 1981.
5. Милнор Дж., Стасеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.
6. Понтрягин Л. С. Характеристические циклы дифференцируемых многообразий// Мат. сб. — 1947. — 21. — С. 233–284.
7. Свитцер Р. М. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
8. Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. — М.: Мир, 1973.
9. Фейгин Б. Л., Цыган Б. Л. Аддитивная K -теория и кристалльные когомологии// Функц. анализ и его прилож. — 1985. — 19, № 2. — С. 52–62.
10. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.
11. Bott R., Chern S. S. Hermitian vector bundles and the equidistributions of the zeroes of their holomorphic sections// Acta Math. — 1965. — 114. — С. 71–112.
12. Chern S. S. On the multiplication in the characteristic ring of sphere bundle// Ann. Math. — 1948. — 49. — С. 362–372.
13. Connes A. C^* -Algebres et geometrie differentielle// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. — 1980. — 290. — С. 599–604.
14. Connes A. Noncommutative differential geometry// Publ. IHES, Paris. — 1985. — 62. — С. 41–144.
15. Feigin B. L., Tsygan B. L. Additive K -theory// Lect. Notes Math. — 1985. — 1289. — С. 67–209.
16. Karoubi M. Homologie cyclique et K -théorie// Asterisque. — Paris, 1983. — 149.
17. Karoubi M. Homologie cyclique et K -théorie algebrique. I// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1. — 1983. — 297. — С. 447–450.
18. Karoubi M. Homologie cyclique et K -théorie algebrique. II// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1. — 1983. — 297. — С. 513–516.
19. Stiefel E. Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten// Commun. Math. Helv. — 1936. — 8. — С. 3–51.
20. Swan R. Vector bundles and projective modules// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — 105. — С. 264–277.
21. Whitney H. Sphere spaces// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1935. — 21. — С. 462–468.

Ф. Ю. Попеленский

Ю. П. Соловьев

Московский государственный университет

ДЕФОРМАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СЕРИИ ЭРМИТОВО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ В КЛАССЕ ЧИСТЫХ ПСЕВДОПРЕДСТАВЛЕНИЙ

© 2003 г. **А. И. ШТЕРН**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	161
1. Квазипредставления, псевдопредставления и чистые псевдопредставления	163
1.1. Определения и основные свойства	163
1.2. Определение псевдопредставления	167
1.3. Псевдохарактеры	168
1.4. Псевдохарактеры Гишарде—Вигнера	169
1.5. Деформация неприводимых унитарных представлений группы $SU(1,1)$ в классе чистых псевдопредставлений	169
2. Голоморфная дискретная серия унитарных представлений эрмитово симметрической группы и деформация этих представлений в классе чистых квазипредставлений	171
2.1. Предварительные сведения	171
2.2. Инвариантные конусы и полугруппы Ольшанского	172
2.3. Построение неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии простой эрмитово симметрической группы с конечным центром	172
2.4. Построение неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии универсальной накрывающей группы простой эрмитово симметрической группы с конечным центром	173
2.5. Доказательство основной теоремы для неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии простой эрмитово симметрической группы с конечным центром	173
2.6. Заключительные замечания	174
Список литературы	174

В работе показано, что неприводимые унитарные представления голоморфной дискретной серии простых эрмитово симметрических групп Ли, которые не могут быть непрерывно деформированы в классе унитарных представлений, можно непрерывно деформировать в классе чистых унитарных псевдопредставлений. Для удобства читателя приведен краткий обзор основных определений и фактов, связанных с явлениями квазисимметрии и псевдосимметрии и с реализацией представлений голоморфной дискретной серии простых эрмитово симметрических групп Ли.

ВВЕДЕНИЕ

Квазигомоморфизм T полугруппы S в равномерную полугруппу Σ — это такое отображение $T: S \rightarrow \Sigma$, что элементы $T(s_1 s_2)$ и $T(s_1)T(s_2)$, $s_1, s_2 \in S$, равномерно близки. Как уже неоднократно указывалось, изучение таких отображений представляет естественный интерес, связанный с объединением идей симметрии и близости (и соответствующая задача была поставлена в связи с результатами [28, 29] еще в книге Улама [5]). Кроме того, оно имеет и некоторый физический

смысл, который можно описать следующим образом. Если у группы G , являющейся группой симметрий описания некоторой физической системы, существуют квазипредставления (т.е. квазигомоморфизмы в группу обратимых непрерывных линейных операторов в некотором топологическом векторном пространстве), для которых величина окружения U определяется точностью измерений и для которых не существует «достаточно близких» обычных представлений группы G в том же топологическом векторном пространстве, то интерпретация эксперимента может оказаться более сложной, чем в случае, когда близкое представление действительно существует, и это может потребовать тщательного различения истинных симметрий (связанных с «законами природы») и квазисимметрий.

Условия существования гомоморфизмов, близких к данному квазигомоморфизму группы или полугруппы, изучаются с различных точек зрения уже около 50 лет (см. [1, 5, 6, 10–16, 18, 20, 21, 24, 25, 27–29, 31–35, 43–48] и приведенную там библиографию). Примеры квазипредставлений, не допускающих близких представлений, известны с 1932 года [39] и, в явном виде, с 1972 года [30] и рассматривались, в частности, в [6, 12–16, 18, 19, 33, 43–48].

В настоящей статье приведен краткий обзор основных определений и фактов, связанных с явлениями квазисимметрии и псевдосимметрии, позволяющий уяснить роль и место так называемых чистых псевдопредставлений в задачах, связанных с квазипредставлениями. Помимо результатов общего характера в статье рассматриваются чистые псевдопредставления эрмитово симметрических полупростых групп Ли с конечным центром.

Напомним, что простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр ее универсальной накрывающей группы бесконечен (см. [7]; там же приведен полный список всех простых эрмитово симметрических групп Ли). Кроме того, напомним, что для данного $\varepsilon \geq 0$ отображение $\pi: G \rightarrow L(H)$ группы G в пространство линейных операторов в гильбертовом пространстве H называется *унитарным (ε -)псевдопредставлением* группы G в пространстве H , если оператор $\pi(g)$ унитарен для любого $g \in G$ и $\|\pi(gh) - \pi(g)\pi(h)\| \leq \varepsilon$ для любых $g, h \in G$ [14]. Псевдопредставление π называется *чистым*, если ограничение π на любую аменабельную подгруппу H группы G является обычным унитарным представлением группы H . Это условие является весьма ограничительным, так как псевдопредставление может не удовлетворять этому условию даже на подгруппах, порожденных одним элементом (см. [43]).

Оказывается, что неприводимые унитарные представления простых эрмитово симметрических групп Ли (в том числе описанные в [41]) неприводимые унитарные представления дискретной серии для таких групп Ли, которые не могут быть непрерывно деформированы в классе унитарных представлений, могут быть непрерывно деформированы в классе чистых унитарных псевдопредставлений. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть G — простая эрмитово симметрическая группа Ли. Для любого неприводимого унитарного представления σ группы G в некотором гильбертовом пространстве H существует однопараметрическое семейство $t \mapsto \pi_t^\sigma$, $t \in \mathbb{R}$, попарно неэквивалентных сильнонепрерывных чистых неприводимых унитарных ε_t -псевдопредставлений группы G в том же пространстве H , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) $\varepsilon_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$,
- 2) норма $\|\pi_t^\sigma(g) - \sigma(g)\|$ стремится к нулю для любого $g \in G$.

Таким образом, оказывается, что включение в рассмотрение даже чрезвычайно узкого класса псевдопредставлений с особенно регулярным поведением — а именно, чистых псевдопредставлений, — существенно меняет топологические свойства расширенного с их помощью дуального объекта простых эрмитово симметрических групп Ли.

В настоящей статье мы ограничимся доказательством этого утверждения в случае, когда представление σ принадлежит голоморфной дискретной серии представлений группы G .

Текст организован следующим образом. В разделе 1, носящем вводный характер, напоминаются общие свойства квазипредставлений, псевдопредставлений и чистых псевдопредставлений и выписываются явные формулы, относящиеся к модельному случаю $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ или, что эквивалентно,

к случаю изоморфной группы $SU(1, 1)$. В разделе 2 мы напоминаем структуру неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии простых эрмитово симметрических групп Ли и доказывается основная теорема.

Результаты о деформации неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии группы $SU(1, 1)$ опубликованы ранее без доказательств в [19].

1. КВАЗИПРЕДСТАВЛЕНИЯ, ПСЕВДОПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЧИСТЫЕ ПСЕВДОПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1.1. Определения и основные свойства.

Определение 1 (см. [14]). Пусть S — полугруппа, E — топологическое векторное пространство. Отображение T полугруппы S в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, *U -квазипредставлением*, где U — данное равностепенно-непрерывное семейство в $L(E)$) полугруппы S в E , если семейство $U(T)$, определяемое равенством

$$U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2), s_1, s_2 \in S\},$$

равностепенно-непрерывно (соответственно, если $U(T)$ содержится в U).

В нормированном пространстве ε -квазипредставление ($\varepsilon \geq 0$) есть U -квазипредставление с $U = \{T, S\}$, $T, S \in L(E)$, $\|T - S\| < \varepsilon$.

Очевидно, любое ε -квазипредставление является квазипредставлением, а 0-квазипредставление есть обычное представление.

Один из наиболее общих вопросов, связанных с ε -квазипредставлениями, состоит в изучении условий, обеспечивающих существование обычного представления полугруппы, близкого к данному квазипредставлению, и изучение свойств множества этих представлений, если оно непусто. В [21, 25, 27, 34] изучался вопрос о существовании близких представлений для случая, когда полугруппа S есть компактная группа (в [24] рассматриваются одномерные отображения, близкие к аддитивным; структура этих отображений изучена в [13, 14]). Кроме того, в [34] рассматривался также случай ε -квазипредставлений аменабельных локально-компактных групп, однако, как отмечено в [6], это исследование содержит неточность, связанную с тем, что если к непрерывной функции двух переменных (пробегающих аменабельную группу) применить инвариантное среднее по одному из этих переменных, то может получиться разрывная функция другого переменного (и даже функция, не являющаяся борелевской, см. [42]); напомним, что пробел в доказательстве соответствующего утверждения в классе сильнонепрерывных квазипредставлений может быть заполнен с помощью результата статьи [33] (см. [14]).

Определение 2 (см. [43]). Пусть G — аменабельная локально-компактная группа, B — банахово пространство. Группа G называется *устойчиво представимой в банаховом пространстве B* , если для любых $\delta > 0$ и $C > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что если T — сильнонепрерывное ε -квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям

$$\|T(g)\| \leq C, \quad \|T(g)^{-1}\| \leq C$$

для всех $g \in G$, то существует такое представление R группы G в B^* , что $\|T(g)^* - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$ и матричные элементы $g \mapsto (R(g)F)(x)$, $g \in G$, непрерывны при $F \in B^*$, $x \in B$.

Напомним следующие результаты.

Теорема 1 (см. [43]). *Любая аменабельная локально-компактная группа устойчиво представима в любом банаховом пространстве.*

Следствие 1 (см. [43]). *Пусть G — группа, B — банахово пространство. Для любого $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого δ -квазипредставления T группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющего условиям*

$$\|T(g)\| \leq C, \quad \|T(g)^{-1}\| \leq C$$

для всех $g \in G$, существует (ограниченное) ε -квазипредставление R группы G в B , удовлетворяющее условиям $R(e) = 1$ и $\|T(g) - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

Если G — топологическая группа и отображение T сильнонепрерывно, то (при надлежащем выборе ε) квазипредставление R можно выбрать также сильнонепрерывным.

Таким образом, при исследовании ограниченных квазипредставлений можно по существу ограничиться случаем квазипредставлений T , удовлетворяющих условию $T(e) = 1$.

Определение 3. Квазипредставления R и T группы G в (здесь и далее — в нормированных) пространствах E_R и E_T соответственно называются ε -эквивалентными, если существует такое непрерывное отображение A группы G в множество непрерывно обратимых непрерывных линейных операторов из E_R в E_T , что для норм $\|\cdot\|_R$ и $\|\cdot\|_T$ в E_R и E_T соответственно соотношения

$$\|(A(g_1) - A(g_2))x\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \|(A^{-1}(g_1) - A^{-1}(g_2))x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

выполняются для всех $g_1, g_2 \in G$ и $x \in E$, причем $A(g)R(g) = T(g)A(g)$ для всех $g \in G$.

Очевидно, что эквивалентность есть 0-эквивалентность. Вообще говоря, ε -эквивалентность не есть отношение эквивалентности, и построение отношения эквивалентности, связанного с ε -эквивалентностью при $\varepsilon > 0$, требует дополнительных усилий. Соответствующее отношение эквивалентности весьма любопытно [43], но мы не будем на этом останавливаться.

Даже для обычных представлений данной группы G вопрос о том, существует ли такое $\varepsilon > 0$, что из ε -эквивалентности следует обычная эквивалентность, имеет различные ответы в зависимости от того, является ли группа G аменабельной.

Предложение 1 (см. [43]). Пусть G — аменабельная локально-компактная группа, T и S — такие сильнонепрерывные представления этой группы в сопряженном банаховом пространстве E , что T и S ограничены и представления T и S ε -эквивалентны, причем для всех $g \in G$ выполняются неравенства $\|A(g)\| \leq M$, $\|A(g)^{-1}\| \leq M$. Пусть представление S удовлетворяет условию $\|S(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$. Тогда представления T и S эквивалентны с помощью такого непрерывного линейного оператора B в пространстве E , что $\|B - A(g)\| \leq \varepsilon CM$ для всех $g \in G$, и $\|B\| \leq M$.

Разумеется, наиболее важными для дальнейшего результатами являются утверждения об аппроксимации ограниченных квазипредставлений. Чтобы лучше уяснить их центральную роль в рассматриваемом круге задач, мы приведем ряд результатов об аппроксимации неограниченных квазипредставлений.

В частности, мы отметим следующий факт, описывающий структуру квазипредставлений, замыкания орбит которых содержат нулевой элемент.

Теорема 2 (см. [43]). Пусть E — топологическое векторное пространство, G — группа, T — квазипредставление группы G непрерывными линейными операторами в пространстве E . Предположим, что операторы квазипредставления T обратимы и что существует такой элемент $x \in E$, что замыкание $\overline{O_{T^{-1}}(x)}$ соответствующей T^{-1} -орбиты $O_{T^{-1}}(x) = \{T(g)^{-1}x, g \in G\}$ элемента $x \in E$ содержит нулевой элемент пространства E . Тогда замкнутая линейная оболочка F орбиты $O_{T^{-1}}(x)$ инвариантна относительно T , а ограничение отображения T на F есть обычное представление группы G .

Замечание 1. Если E конечномерно, то условие обратимости операторов квазипредставления группы выполняется автоматически, если множество

$$U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2), s_1, s_2 \in S\}$$

достаточно мало. Таким образом, в конечномерных пространствах утверждение теоремы 2 выполняется для любого квазипредставления, у которого замыкание орбиты некоторого вектора содержит нулевой вектор. Это утверждение является более общим, чем результаты в [10, 11, 20, 34], относящиеся к одномерным и конечномерным представлениям.

Если при условиях теоремы 2 пространство F имеет замкнутое дополнение, то оператор $T(g)$ можно представить в соответствующей блочно-треугольной форме. Оказывается (при некоторых дополнительных предположениях, которые выполняются автоматически в конечномерном случае), что отображение T обладает дополнительной структурой.

Теорема 3 (см. [43]). Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть пространство F имеет замкнутое дополнение W , так что $E = F \dot{\rightarrow} +W$ — топологическая прямая сумма. Запишем оператор $T(g)$ в блочной форме:

$$T(g) \begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(g)f + \mu(g)w \\ \nu(g)w \end{pmatrix}, \quad f \in F, \quad w \in W, \quad g \in G, \quad (1)$$

где λ , μ и ν — некоторые операторнозначные отображения, причем (см. теорему 2) отображение λ есть представление, одна из орбит которого содержит в замыкании нулевой вектор. Предположим, что существует такая сеть g_α в G , что $\lambda(g_\alpha^{-1})$ стремится к нулю равномерно на ограниченных множествах в F . Тогда сильный предел $\lim_\alpha \lambda(g_\alpha^{-1})\mu(g_\alpha)n$ существует для любого вектора n в пространстве W , принадлежащего образу какого-либо оператора вида

$$\operatorname{Im}(\nu(k)\nu(h) - \nu(kh)), \quad k, h \in G.$$

Кроме того, предположим, что линейная оболочка L образов операторов вида

$$\operatorname{Im}(\nu(k)\nu(h) - \nu(kh)), \quad k, h \in G,$$

замкнута в пространстве W и дополняема, и пусть N — непрерывный проектор на L в подпространстве W . Пусть M — существующий согласно предыдущему предел сети $\lim_\alpha \lambda(g_\alpha^{-1})\mu(g_\alpha)N$ в сильной операторной топологии. Тогда операторная матрица

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $TR = RTR$, R — (непрерывный) проектор, и если $S = 1 - R$, то отображение $g \mapsto ST(g)|_{\operatorname{Im} S}$, $g \in G$, есть представление группы G .

Если $N \neq 0$, то образ оператора R инвариантен относительно T и не содержится в F ; на этом образе выполняется равенство

$$\mu(g) = \lambda(g)M - M\nu(g)$$

для всех $g \in G$. В частности, если L совпадает с подпространством W , т.е. $N = 1_W$, то

$$\begin{pmatrix} 1_F & -M \\ 0 & 1_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(g) & \mu(g) \\ 0 & \nu(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_F & -M \\ 0 & 1_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(g) & 0 \\ 0 & \nu(g) \end{pmatrix};$$

таким образом, в этом случае отображение T является прямой суммой λ и ν .

Если же $N \neq 1_F$, то образ оператора $S = 1 - R$ не содержится в F , и в линейной оболочке пространств F и $\operatorname{Im} S$, а потому и в замыкании K этой линейной оболочки, отображение T действует как некоторое обычное представление группы G . Отображение $T|_K$ есть нетривиальное расширение подпредставления λ .

Таким образом, либо отображение T есть прямая сумма представления и некоторого квазипредставления в дополнительном к F подпространстве, либо не только $\lambda = T|_F$ является обычным представлением, но и ограничение отображения T на подпространство, строго содержащее F , также определяет обычное представление (которое может быть зацеплением с λ).

Очевидно, что для конечномерных квазипредставлений условия теоремы 3 выполнены автоматически (т.е. пространство F имеет замкнутое дополнение, и из построения отображения λ и конечномерности представления следует, что построенная ранее сеть g_α в G удовлетворяет тому условию, что $\lambda(g_\alpha^{-1})$ стремится к нулю равномерно на ограниченных множествах в F ; кроме того, также вследствие конечномерности, линейная оболочка L образов операторов вида

$$\operatorname{Im}(\nu(k)\nu(h) - \nu(kh)), \quad k, h \in G,$$

замкнута в пространстве W и дополняема). Таким образом, справедливо

Следствие 2 (см. [43]). Пусть E — конечномерное векторное пространство, G — группа, T — квазипредставление группы G в пространстве E . Предположим, что существует такой элемент $x \in G$, что замыкание $\overline{O_{T^{-1}}(x)}$ его T^{-1} -орбиты $O_{T^{-1}}(x) = \{T(g)^{-1}x, g \in G\}$ элемента $x \in E$ содержит нулевой элемент пространства E . Тогда замкнутая линейная оболочка F

орбиты $O_{T^{-1}}(x)$ инвариантна относительно T , а ограничение отображения T на F есть обычное представление группы G . Пусть W — дополнительное подпространство для F . Запишем оператор $T(g)$ в блочной форме (см. (1)):

$$T(g) \begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(g)f + \mu(g)w \\ \nu(g)w \end{pmatrix}, \quad f \in F, \quad w \in W, \quad g \in G,$$

где λ , μ и ν — некоторые матричнозначные отображения. Предположим, что отображение ν не является представлением (в противном случае μ есть λ, ν -квазицикл). Пусть L — (по условию, ненулевая) линейная оболочка образов операторов вида $\text{Im}(\nu(k)\nu(h) - \nu(kh))$, $k, h \in G$, и пусть N — проектор в W на L . Если $N = 1_W$, то оператор T подобен прямой сумме отображения ν и представления λ группы G . Если $N \neq 1_W$, и если M — (сильный) предел сети $\lim_{\alpha} \lambda(g_{\alpha}^{-1})\mu(g_{\alpha})N$, то оператор $R = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ 0 & N \end{pmatrix}$ есть проектор, удовлетворяющий условию $TR = RTR$; если $S = 1 - R$, то $\text{Im } S$ не содержится в F , а отображение $g \mapsto ST(g)|_{\text{Im } S}$, $g \in G$, есть представление группы G .

Следствие 2 является уточнением результатов статей [10, 11, 20, 34], так как либо любой квазигомоморфизм T группы в алгебру с делением над полем вещественных чисел ограничен, либо замыкание T -орбиты любого элемента содержит нуль.

Следующие теоремы относятся к не обязательно ограниченным квазипредставлениям аменабельных групп.

Теорема 4 (см. [17]). Пусть G — аменабельная дискретная группа и T — (вообще говоря, неограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E , $\delta < 1/2$. Предположим дополнительно, что $T(e) = 1_E$ и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ для всех $g \in G$. Существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, где $\varepsilon = f(\delta)$ с $f(t) = 1/(2 - 4t)$, $t \in [0, 1/2)$.

Введем следующие обозначения. Если E — сопряженное банахово пространство, то обозначим через E_* некоторое банахово пространство, к которому сопряжено пространство E . Кроме того, если G — аменабельная локально-компактная группа, то обозначим через I некоторое двусторонне инвариантное среднее на $L^{\infty}(G)$ (если подынтегральная функция зависит от нескольких переменных, то в индексе указывается переменная, по которой берется среднее). Если $M: G \rightarrow L(E)$ — ограниченная функция со значениями в множестве непрерывных линейных операторов в пространстве E , то определим непрерывный линейный оператор $I(M)$ в пространстве E формулой $I(M) = \pi J(M)$, где π — канонический проектор в пространстве E^{**} , образ которого совпадает с образом канонического вложения E в E^{**} , а $J(M)$ — оператор из E в E^{**} , определенный формулой

$$(J(M)x)(f) = I_g(f(M(g)x)), \quad x \in E, \quad f \in E_*.$$

Лемма 1 (см. [17]). Пусть G — группа, T — ее неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве $E = E_T$.

1) Квазипредставление T имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.

2) Для любых $g, h \in G$ и $x \in E$ T -орбита вектора $(T(gh) - T(g)T(h))x$ ограничена. В частности, если все ненулевые T -орбиты неограничены, то T — обычное представление.

3) Пусть L — векторное подпространство E , образованное всеми элементами $x \in E$ такими, что орбита $O_T(x) = \{T(g)x, g \in G\}$ ограничена. Снабдим L нормой

$$\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\|, \quad x \in E, \quad \text{где } \|\cdot\| = \|\cdot\|_E.$$

Тогда тождественное отображение $j: L \rightarrow E$ непрерывно и L полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Векторное подпространство $L \subset E$ инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, и соотношения

$$\|T(g)x\|_L \leq \|x\|_L + \varepsilon\|x\|,$$

$$\|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L \leq \varepsilon\|T(l)x\| + 2\varepsilon\|x\|, \quad g, k, l \in G, \quad x \in E,$$

выполняются для всех $g, k, l \in G$; в частности, $\|T(k)T(l) - T(kl)\|_L \leq 3\varepsilon$ для всех $k, l \in G$.

4) Пусть S — квазипредставление группы G , являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T , т.е. отображение $S - T: G \rightarrow L(E)$ имеет ограниченный образ. Тогда образ оператора $S(g) - T(g)$ содержится в подпространстве $L \subset E$ для любого $g \in G$. В частности, если все ненулевые T -орбиты в E неограничены (и T — обычное представление, см. утверждение 2)), то T жестко в том смысле, что если ограниченное возмущение S квазипредставления T является квазипредставлением, то S совпадает с самим T .

Теорема 5 (см. [17]). Пусть G — аменабельная локально-компактная группа и T — (вообще говоря, неограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E . Предположим дополнительно, что существует (обычное) непрерывное представление S_L группы G в L , для которого оператор $J_L = I(S_L(h^{-1})T(h)|_L)$ корректно определен, непрерывен и непрерывно обратим. Тогда существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$ и некоторого C .

Замечание. Пусть G — аменабельная локально-компактная группа и δ -квазипредставление T в банаховом пространстве E сопряжено к (вообще говоря, неограниченному) δ -квазипредставлению группы G в банаховом пространстве E_* , где $\delta < 1/60$. Предположим дополнительно, что квазипредставление, действующее в подпространстве L , непрерывно, а L изоморфно сопряженному банахову пространству (см. утверждение 3) леммы 1); это условие выполняется автоматически, если L замкнуто в E , а E рефлексивно. Тогда существует (обычное) непрерывное представление S_L группы G в L , для которого оператор $J_L = I(S_L(h^{-1})T(h)|_L)$ корректно определен, непрерывен и непрерывно обратим, и существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, где $\varepsilon = f(\delta)$ с $f(t) = 2t(1+3t)/(1-2(1+3t)(4+8(1+t)^2)t)$, $t \in [0, 1/60)$.

При изучении квазипредставлений неаменабельных групп может случиться, что ε -квазипредставление с малым ε не имеет близкого представления, и приходится пользоваться менее наглядными понятиями, к обсуждению которых мы переходим.

1.2. Определение псевдопредставления. Теперь мы в состоянии ввести основное определение статьи — определение псевдопредставления, которое мы дадим лишь в случае банаховых пространств.

Определение 4. ε -Квазипредставление T группы S в F -пространстве E называется ε - δ -псевдопредставлением, если для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n, g)$ в $L(E^*)$, что $\|A(n, g) - 1_{E^*}\| \leq \delta$, $\|A(n, g)^{-1} - 1_{E^*}\| \leq \delta$ и $T(g^n)^* = A(n, g)T(g)^{*n}A(n, g)^{-1}$ для всех $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 5. Пусть G — группа, B — банахово пространство. Группа G называется *устойчиво псевдопредставимой* в банаховом пространстве B , если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $C > 0$ существует такое $\sigma > 0$, что если T — σ -квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $\|T(g)\| \leq C$, $\|T(g)^{-1}\| \leq C$ для всех $g \in G$, то существует такое ε - δ -псевдопредставление R группы G в B^* , что $\|T(g)^* - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6 (см. [43]). Любая группа устойчиво псевдопредставима в любом банаховом пространстве.

В [43] приведен пример, показывающий, что допущение нетривиальных операторов $A(n, g)$ существенно в определении 5. Тем более важны случаи, когда $A(n, g) = 1_{E^*}$ для всех $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 6. ε -0-Псевдопредставление называется *чистым* ε -псевдопредставлением, т.е. ε -квазипредставление T группы S в F -пространстве E называется *чистым* ε -псевдопредставлением, если для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение $T(g^n)^* = T(g)^{*n}$.

Таким образом, чистые представления образуют весьма узкий и специальный класс псевдопредставлений, алгебраические свойства которых напоминают свойства обычных представлений.

1.3. Псевдохарактеры. Мы введем в этом разделе чрезвычайно важный класс числовых функций на группе. В частности, функции этого класса позволят нам строить одномерные чистые псевдопредставления данной группы.

Определение 7. Вещественная функция f на группе G называется (*вещественным*) *квазихарактером* на этой группе, если множество $\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\}$ ограничено. Квазихарактер f называется *псевдохарактером*, если $f(g^n) = nf(g)$ для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 7 (см. [43]). Пусть S — полугруппа, f — вещественный квазихарактер на S .

а) Для любого $s \in S$ существует предел

$$\varphi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f(s^n), \quad (2)$$

и если $|f(st) - f(s) - f(t)| \leq C$ для всех $s, t \in S$, то $|f(s) - \varphi(s)| \leq C$ для всех $s \in S$ и $|\varphi(st) - \varphi(s) - \varphi(t)| \leq 4C$ для всех $s, t \in S$.

б) Если R — односторонне аменабельная подполугруппа в S , то ограничение φ на R есть аддитивный характер R , т.е. $\varphi(st) = \varphi(s) + \varphi(t)$ для всех $s, t \in R$. Кроме того, величина $\varphi(s)$, $s \in S$, может быть определена как общее значение всех инвариантных средних на ограниченной функции $t \mapsto f(ts) - f(t)$, $t \in R$.

в) $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для всех $x, y \in S$.

г) Если S — группа, N — нормальный делитель в S , ψ — канонический эпиморфизм S на S/N и псевдохарактер φ обращается в нуль на N , то существует такой псевдохарактер χ группы S/N , что $\varphi = \chi \circ \psi$. Если S — локально-компактная группа, N замкнут и φ непрерывен, то ψ непрерывен.

Теория псевдохарактеров, развитие которой началось в 1983 г. (см. [12], а также изложение материала сообщения [12] в [6]), оказалась глубоко связанной с теорией группы двумерных ограниченных когомологий с вещественными коэффициентами для дискретных групп [18, 46–48].

Теорема 8 (см. [18]). Пусть G — локально-компактная группа. Если ψ — ограниченный непрерывный 2-коцикл на G , то формула

$$(g_1, r_1)(g_2, r_2) = (g_1 g_2, r_1 + r_2 + \psi(g_1, g_2)), \quad g_1, g_2 \in G, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

определяет центральное расширение H группы G с помощью $\mathbb{R}$ и отображение $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое соотношением

$$(g, r) \mapsto r, \quad (g, r) \in H,$$

является (непрерывным) квазихарактером на H . Соответствующий непрерывный псевдохарактер φ на H , определяемый формулой (2), задается формулой

$$\varphi(g, r) = r + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \psi(g, g^k), \quad (g, r) \in H.$$

Обратно, пусть s — непрерывное сечение канонической проекции $\pi: H \rightarrow G$. Пусть f — непрерывный вещественный псевдохарактер на H и ψ — вещественная непрерывная 2-коцепь на S , определенная формулой

$$\psi(x, y) = f(s(x)s(y)) - f(s(x)) - f(s(y)), \quad x, y \in G.$$

Тогда функция ψ есть ограниченный коцикл, и псевдохарактер f нетривиален (не является обычным характером) тогда и только тогда, когда коцикл φ нетривиален (не гомологичен нулю).

Замечание 2. Как известно, одномерное центральное расширение $H = G \rtimes \mathbb{R}$ данной группы G , определяемое некоторым коциклом ψ , расщепимо тогда и только тогда, когда ψ является кограницей. Для ограниченного коцикла ψ это условие выполняется тогда и только тогда, когда ψ есть кограница некоторой вещественной непрерывной функции f на группе G , которая, таким образом, является квазихарактером и поэтому ограничено когомологична некоторому псевдохарактеру θ на G . Рассмотрим θ как псевдохарактер на H . Непосредственное вычисление показывает, что условие

расщепимости равносильно тому, что разность $f - \varphi$, где φ определен формулой (3), есть кограница, определяемая ограниченной 1-коцепью (ограниченной вещественной непрерывной функцией на H), или тому, что $\theta - \varphi$ есть обычный непрерывный вещественный характер. Таким образом, ψ -расширение расщепимо тогда и только тогда, когда φ есть сумма непрерывного псевдохарактера на H , определяемого некоторым псевдохарактером на G , и некоторого обычного вещественного характера на H .

1.4. Псевдохарактеры Гишарде—Вигнера. Пусть T — произвольный полупростой некомпактный фактор группы S , для которого центр соответствующей односвязной группы Ли бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим; см., напр., [7]). Пусть K_T — аналитическая подгруппа группы T , отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли T . Осуществим изоморфное отождествление центра Z_{K_T} аналитической группы K_T с полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра). Рассмотрим разложение Ивасава $p = k(t)an$, $t \in T$, связанное с группой K_T . Отображение $t \mapsto k(t)$, переводящее каждый элемент $t \in T$ в «компактную» компоненту $k(t) \in K_T$ его разложения, является непрерывным. Рассмотрим композицию отображения $t \mapsto k(t)$ и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K_T$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_{K_T}$. Эта композиция определяет некоторый квазихарактер на T . (В связи с тем, что конструкция теоремы 8 сопоставляет этому квазихарактеру коцикл, построенный А. Гишарде и Д. Вигнером в [26], мы будем называть псевдохарактер, соответствующий этому квазихарактеру, *псевдохарактером Гишарде—Вигнера*.) Доказательство того, что эта композиция есть квазихарактер, приведено в [46]; оно довольно громоздко (в отличие от почти очевидного модельного примера, связанного с группой $SL(2, \mathbb{R})$, в котором ограниченность коцикла Гишарде—Вигнера следует из ограниченности аргумента логарифма непрерывной величины, принимающей значения в открытой правой полуплоскости; ср. [47]). С другой стороны, доказательство в [46] одновременно устанавливает, что коциклы Гишарде—Вигнера ограничены на любой простой группе Ли, на которой они существуют, поскольку ограниченный вещественный коцикл, связанный с только что построенным квазихарактером, совпадает с коциклом Гишарде—Вигнера.

Необходимые понятия введены, и мы можем обсудить модельный пример унитарной группы вещественных матриц второго порядка или изоморфной ей группы $SU(1, 1)$ (см. [19]).

1.5. Деформация неприводимых унитарных представлений группы $SU(1, 1)$ в классе чистых псевдопредставлений. Примем обозначения, использованные в [40]. Пусть $\tilde{G}$ — универсальная накрывающая группа группы $SU(1, 1)$. Мы воспользуемся ее стандартной параметризацией: $\tilde{G} = \{(\gamma, \omega) \mid \gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| < 1, \omega \in \mathbb{R}\}$; групповая операция имеет вид $(\gamma, \omega)(\gamma', \omega') = (\gamma'', \omega'')$, $(\gamma, \omega), (\gamma', \omega'), (\gamma'', \omega'') \in \tilde{G}$, где

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\gamma + \gamma' \exp(-2i\omega'))(1 + \bar{\gamma}\gamma' \exp(-2i\omega))^{-1}, \\ \omega'' &= \omega + \omega' + \frac{1}{2i} \ln \left\{ (1 + \bar{\gamma}\gamma' \exp(-2i\omega))(1 + \gamma\bar{\gamma}' \exp(2i\omega))^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\ln$ понимается в смысле главного значения.

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор. Определим действие группы $\tilde{G}$ на $\mathbb{T}$ формулой

$$\exp(i\theta) \cdot g = \exp(2i\omega) \left(\frac{\exp(i\theta) + \gamma}{\exp(i\theta)\bar{\gamma} + 1} \right).$$

Напомним определение представлений основной серии группы $\tilde{G}$ [40, (2.2.9)]. Для любых $\rho \in \mathbb{R}$ и $h \in (-1/2, 1/2]$ положим

$$\begin{aligned} (\exp(i\theta)) &= \exp(-2i\omega h) \left(\frac{1 + \exp(i\theta)\bar{\gamma}}{1 + \exp(-i\theta)\gamma} \right)^h \left| \exp(i\theta)\bar{\beta} + \bar{\alpha} \right|^{-1-2i\rho} f(\exp(i\theta) \cdot g), \\ f &\in H = L^2(\mathbb{T}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha = (\exp(i\omega))(1 - |\gamma|^2) - 1/2$ и $\beta = (\exp(i\omega))\gamma(1 - |\gamma|^2) - 1/2$ являются матричными элементами образа g_0 элемента $g \in \tilde{G}$ в $SU(1, 1)$, а именно, $g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Формула (5) определяет неприводимое

(за исключением случая $\rho = 0$ и $h = 1/2$) унитарное представление группы $\tilde{G}$ в гильбертовом пространстве H . Из формулы (4) непосредственно следует, что отображение $g \mapsto \omega$ определяет непрерывный квазихарактер на G .

Для построения искомой деформации неприводимых унитарных представлений основной серии группы $SU(1, 1)$ используем нетривиальный псевдохарактер χ на группе $\tilde{G}$ [44], определенный (в соответствии с (2)) формулой

$$\chi((\gamma, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \omega_n, \quad \text{где } (\gamma, \omega)^n = (\gamma_n, \omega_n) \in \tilde{G} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Явное выражение для псевдохарактера χ приведено в [20]. В частности, там показано, что функция χ удовлетворяет условиям

$$|\chi((\gamma, \omega)(\gamma', \omega')) - \chi((\gamma, \omega)) - \chi((\gamma', \omega'))| < \pi/2$$

для любых $(\gamma, \omega), (\gamma', \omega') \in \tilde{G}$, причем ограничение функции χ на любую аменабельную подгруппу в $\tilde{G}$ является непрерывным гомоморфизмом этой подгруппы в группу $\mathbb{R}$ согласно теореме 7 б). По этой причине формула $\psi_t(g) = \exp(it\chi(g))$, $g \in \tilde{G}$, определяет функцию $\psi_t: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{T}$, удовлетворяющую условию

$$|\psi_t(gg') - \psi_t(g)\psi_t(g')| \leq \sup_{|\phi| < \pi/2} |\exp(it\phi) - 1|, \quad g, g' \in \tilde{G}.$$

При $|t| < 2$ это приводит к неравенству

$$|\psi_t(gg') - \psi_t(g)\psi_t(g')| < |\exp(it\pi/2) - 1|, \quad g, g' \in \tilde{G}.$$

Отсюда следует, что при данном $\rho \in \mathbb{R}$ формула

$$\pi_h^\rho(g) = \psi_{2h}(g)U_h(g, \rho), \quad g \in \tilde{G}, \quad (6)$$

определяет чистое псевдопредставление группы $\tilde{G}$ унитарными операторами в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ для любого $h \in \mathbb{R}$. По построению, ограничение этого псевдопредставления на любую аменабельную подгруппу является обычным (сильнонепрерывным) представлением этой группы. Неприводимость семейства $\pi_h^\rho(g)$, $g \in \tilde{G}$, следует из неприводимости представлений основной серии [40]. Центр Z группы $\tilde{G}$ образован элементами вида $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, и, согласно (6), они переходят в единичный оператор: $\pi_h^\rho((0, n\pi)) = 1_{L^2(\mathbb{T})}$. Для любого $g \in \tilde{G}$ подгруппа A_g , порожденная g и Z , аменабельна, поскольку она разрешима по построению. Поэтому ограничение чистого псевдопредставления π_h^ρ на эту подгруппу есть обычное унитарное представление группы A_g . Следовательно, $\pi_h^\rho(g(0, n\pi)) = \pi_h^\rho(g)$ для любого $g \in \tilde{G}$. Таким образом, π_h^ρ постоянна на смежных классах по центру. Отсюда непосредственно следует, что при факторизации отображение π_h^ρ определяет чистое псевдопредставление фактор-группы группы $\tilde{G}$ по ее центру и, в частности, чистое псевдопредставление группы $SU(1, 1)$. Ограничение каждого из построенных чистых псевдопредставлений группы $SU(1, 1)$ на максимальную компактную подгруппу диагональных матриц $K \subset SU(1, 1)$ является обычным представлением (ввиду аменабельности компактных групп) и содержит ненулевой K -инвариантный вектор. Из формул (4) и (5) следует, что соответствующие матричные элементы различны при различных $h \in \mathbb{R}$; следовательно, чистые псевдопредставления π_h^ρ попарно неэквивалентны. Утверждения 1) и 2) теоремы проверяются непосредственно; тем самым формула $h \mapsto \pi_h^\rho$, $h \in \mathbb{R}$, определяет искомую деформацию представлений основной серии π^ρ , отвечающих $h = 0$.

Итак, смысл построения состоит в «погашении» «избыточного» характера центра универсальной накрывающей группы с помощью правильно подобранной экспоненты псевдохарактера Гишарде—Вигнера. По этой причине деформация неприводимых унитарных представлений второй части основной серии (отвечающих значению $h = 1/2$) строится совершенно аналогичным образом. Кроме того, тем же приемом получается деформация представлений дополнительной серии. Наконец, аналогичные формулы $\pi_t^{\pm, h}(g) = \psi_t(g)U^\pm(g, h)$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $\pm h > 0$, $g \in \tilde{G}$, определяют деформацию представлений дискретной серии группы $SU(1, 1)$, отвечающих знаку $\pm$ и полужелому числу $\pm\nu$, если $t = h \mp \nu \in \mathbb{R}$, а ν — положительное полуцелое число.

Переходим к основному результату настоящей статьи. Нам потребуются некоторые факты о структуре унитарных представлений голоморфной дискретной серии для полупростых групп Ли с конечным центром.

2. Голоморфная дискретная серия унитарных представлений эрмитово симметрической группы и деформация этих представлений в классе чистых квазипредставлений

2.1. Предварительные сведения. Напомним некоторые определения (см. [22, 23, 38]).

Конечномерная алгебра V (вещественная или комплексная) называется *йордановой* алгеброй, если

$$xy = yx, \quad x(x^2y) = x^2(xy)$$

для всех $x, y \in V$. Пусть $L(x)$, $x \in V$, — линейный оператор в V , определенный формулой

$$L(x)y = xy, \quad y \in V,$$

и пусть

$$\tau(x, y) = \operatorname{tr} L(xy), \quad x, y \in V;$$

тогда τ — симметричная билинейная форма на V . Предположим, что V проста (т.е. не имеет нетривиальных идеалов). Вещественная йорданова алгебра V называется *евклидовой*, если τ — положительно определенная форма. В этом случае V непременно имеет единичный элемент; обозначим его e . Введем еще обозначения

$$\{x, y, z\} = (xy)z + x(yz) - y(xz), \quad x, y, z \in V,$$

для тройного произведения и

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2), \quad x \in V,$$

для так называемого *квадратичного представления* P .

Пусть

$$\Omega = \{x^2 \mid x \text{ обратим в } V\}.$$

Это — открытый выпуклый самодуальный конус в V . Пусть $L \subset GL(V)$ — компонента единицы группы автоморфизмов конуса Ω . Эта группа редуктивна. Стационарная подгруппа $K \subset L$ единичного элемента e является максимальной компактной подгруппой в L ; она совпадает с компонентой единицы в группе автоморфизмов алгебры V .

Пусть $V_{\mathbb{C}}$ — комплексификация V . Пусть $T_{\Omega} = V + i\Omega$ — соответствующая трубчатая область. Снабдим T_{Ω} метрикой Бергмана; тогда трубчатая область T_{Ω} превращается в эрмитово симметрическое пространство. Пусть G — компонента единицы в группе биголоморфных преобразований пространства T_{Ω} и U — стационарная подгруппа точки $ie \in T_{\Omega}$. Тогда L и U являются вещественными формами одной и той же комплексной группы Ли, представляющей собой компоненту единицы в группе

$$\{g \in GL(V_{\mathbb{C}}) \mid P(g(x)) = gP(x)g^t \text{ для любого } x \in V_{\mathbb{C}}\},$$

где P считается естественно продолженным на $V_{\mathbb{C}}$. Группа G является связной простой эрмитово симметрической группой Ли с конечным центром.

Пусть $g \in L$. Обозначим комплексное линейное продолжение g на $V_{\mathbb{C}}$ снова через g . Очевидно, что это продолжение сохраняет T_{Ω} , и поэтому определено естественное отображение группы L в группу G . Мы будем обозначать алгебры Ли введенных выше групп Ли соответствующими строчными готическими буквами. Пусть $\mathfrak{a}$ — картановское подпространство относительно пары $(\mathfrak{l}, \mathfrak{k})$. Оказывается, пространство $\mathfrak{a}$ является тогда картановским подпространством и относительно пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$.

Введем подгруппу сдвигов $N^+ \in G$, образованную элементами вида t_v , действующими по правилу

$$z \mapsto z + v, \quad v \in V, \quad z \in T_{\Omega}.$$

Очевидно, что N^+ изоморфна V как локально-компактная абелева группа. Полупрямое произведение LN^+ (относительно действия L на N^+ , определенного естественным действием группы L

на V) есть группа аффинных преобразований области T_Ω . Группа G порождается подгруппами L и N^+ и инволюцией $z \mapsto -z^{-1}$.

Действие группы G на T_Ω допускает локальное продолжение до действия группы $G^\mathbb{C}$ на T_Ω . Для $g \in G^\mathbb{C}$, $z \in T_\Omega$ и $g(z) \in T_\Omega$ обозначим через

$$J(g, z) = d(g(z))/dz$$

производную отображения $z \mapsto g(z)$. Оказывается, $J(g, z) \in L^\mathbb{C}$ для всех $g \in G^\mathbb{C}$ и $z \in T_\Omega$, причем

$$J(g_1 g_2, z) = J(g_1, g_2(z)) J(g_2, z).$$

Заметим также, что $J(l, z) = l$ при $l \in L$. Пусть $n = \dim V$ и $r = \text{rank } V$ (r совпадает с рангом симметрического пространства $\Omega \simeq L/K$).

2.2. Инвариантные конусы и полугруппы Ольшанского. Согласно одному из результатов [4], любому инвариантному (относительно $\text{Ad}(G)$) конусу C в $\mathfrak{g}$ можно сопоставить полугруппу $\Gamma_C = G \exp iC$ в $G^\mathbb{C}$. Оказывается, среди инвариантных конусов есть наибольший и наименьший конусы, причем полугруппа $\Gamma_{\max} = G \exp iC_{\max}$ совпадает с полугруппой сжатий области T_Ω , т.е.

$$\Gamma_{\max} = \{g \in G^\mathbb{C} \mid g(T_\Omega) \subset T_\Omega\}.$$

Если π — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H и H^∞ — пространство бесконечно дифференцируемых векторов этого представления, то

$$C_\pi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \tau(i d\pi(X)\xi, \xi) \leq 0 \text{ для любого } \xi \in H^\infty\}$$

является инвариантным конусом, и этот конус нетривиален тогда и только тогда, когда π — представление со старшим весом. В этом случае представление π может быть продолжено как (голоморфное) представление полугруппы $\Gamma_\pi = G \exp iC_\pi$ (конечно, сжатиями области T_Ω).

2.3. Построение неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии простой эрмитовой симметрической группы с конечным центром. Пусть (μ, H_μ) — конечномерное неприводимое унитарное представление максимальной компактной подгруппы U группы G . В соответствии со сказанным выше мы можем рассматривать μ как конечномерное неприводимое голоморфное представление комплексной группы $L^\mathbb{C}$, удовлетворяющее условию $\mu(l^*) = \mu(l)^*$ для $l^* = \bar{l}^t$ для $l \in L^\mathbb{C}$. Положим

$$J_\mu(g, z) = \mu(J(g, z))$$

(напомним, что $J(g, z) \in L^\mathbb{C}$).

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_\mu$ голоморфных функций на T_Ω со значениями в H_μ и рассмотрим представление группы G в векторном пространстве $\mathcal{H}_\mu$, определенное формулой

$$(T_\mu(g)f)(g) = (J_\mu(g^{-1}, z))^{-1} f(g^{-1}z), \quad f \in \mathcal{H}_\mu, \quad z \in T_\Omega, \quad g \in G. \quad (7)$$

Естественное G -инвариантное скалярное произведение на пространстве функций $\mathcal{H}_\mu$ может быть задано формулой

$$(f, g)_\mu = \int_{T_\Omega} (\mu(P(y)^{-1})f(z), g(z))_{E_\mu} d_*(z), \quad f, g \in \mathcal{H}_\mu, \quad z \in T_\Omega, \quad y = \text{Im}(z), \quad (8)$$

где d_* — G -инвариантная мера на T_Ω . Если подпространство функций с конечным скалярным квадратом (8) нетривиально, то формула (7) определяет унитарное представление группы G в этом подпространстве, и это представление принадлежит голоморфной дискретной серии представлений группы G .

2.4. Построение неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии универсальной накрывающей группы простой эрмитово симметрической группы с конечным центром. Реализуем универсальную накрывающую группу $\tilde{G}$ группы G как множество пар (g, φ) , где $g \in G$, а φ — некоторая голоморфная функция на T_Ω , удовлетворяющая соотношению

$$e^{\varphi(z)} = \det(J(g, z)), \quad z \in T_\Omega.$$

Умножение на $\tilde{G}$ определяется формулой

$$(g_1, \varphi_1)(g_2, \varphi_2) = (g_1 g_2, \varphi_3),$$

где

$$\varphi_3(g) = \varphi_1(g_2(z)) + \varphi_2(z).$$

Пусть $\nu \in \mathbb{R}$, и пусть μ — некоторое конечномерное унитарное представление группы U группы G в пространстве H_μ , рассматриваемое, как и в предыдущем разделе, как конечномерное голоморфное представление комплексной группы $L^\mathbb{C}$. Как и выше, положим

$$J_\mu(g, z) = \mu(J(g, z)).$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_\mu$ голоморфных функций на T_Ω со значениями в H_μ и представление группы G в векторном пространстве $\mathcal{H}_\mu$, определенное формулой

$$(T_{\mu, \nu} f)((g, \varphi)) = e^{\nu \varphi(z)} (J_\mu(g^{-1}, z))^{-1} f(g^{-1} z), \quad f \in \mathcal{H}_\mu, \quad z \in T_\Omega, \quad (g, \varphi) \in \tilde{G}. \quad (9)$$

Поскольку правая часть формулы (9) отличается от правой части формулы (7) только (конечно, зависящим от (g, φ) и z) числовым множителем, имеющим единичный модуль, естественное G -инвариантное скалярное произведение на пространстве функций $\mathcal{H}_\mu$ может быть по-прежнему задано формулой

$$(f, g)_\mu = \int_{T_\Omega} (\mu(P(y)^{-1}) f(z), g(z))_{E_\mu} d_*(z), \quad f, g \in \mathcal{H}_\mu, \quad z \in T_\Omega, \quad y = \text{Im}(z), \quad (10)$$

где d_* — G -инвариантная мера на T_Ω . Таким образом, если подпространство функций с конечным скалярным квадратом (8) нетривиально, то формула (9) определяет унитарное представление группы $\tilde{G}$ в этом подпространстве, и при $\nu = 0$ это представление является композицией канонического гомоморфизма группы $\tilde{G}$ на G и построенного выше представления, принадлежащего голоморфной дискретной серии представлений группы G .

2.5. Доказательство основной теоремы для неприводимых унитарных представлений голоморфной дискретной серии простой эрмитово симметрической группы с конечным центром.

Рассмотрим ограничение представления $T_{\mu, \nu}$ группы $\tilde{G}$ на ее центр $\mathbb{Z}$. Пусть D — подгруппа центра, являющаяся ядром канонического гомоморфизма группы $\tilde{G}$ на G . Очевидно, группа D изоморфна $\mathbb{Z}$. Пусть d_0 — порождающий элемент группы D . По определению имеем $d_0 = (e, \varphi_0)$ для некоторого φ_0 такого, что $e^{\varphi_0(z)} = \det(J(e, z)) = 1$ для всех $z \in T_\Omega$. Следовательно, $\varphi_0(z)$ тождественно равна постоянной вида $2i\pi N$ для некоторого целого N . Тогда из формулы (9) следует, что

$$(T_{\mu, \nu} f)((e, \varphi_0)) = e^{2i\pi \nu N} f(z), \quad f \in \mathcal{H}_\mu,$$

так что $(T_{\mu, \nu} f)((e, \varphi_0))$ есть оператор умножения на число $e^{2i\pi \nu N}$. Как и в модельном примере, рассмотрим псевдохарактер Гишарде—Вигнера, который очевидным образом определен только с точностью до множителя, и выберем множитель так, чтобы значение псевдохарактера на d_0 было равно единице; обозначим полученный псевдохарактер через χ . Рассмотрим отображение $\psi_t = e^{it\chi}$ группы $\tilde{G}$ в группу комплексных чисел с единичным модулем и положим

$$S_{\mu, \nu}((g, \varphi)) = \psi_{-2\pi i N \nu}((g, \varphi)) T_{\mu, \nu}((g, \varphi)), \quad ((g, \varphi)) \in \tilde{G}. \quad (11)$$

Очевидно, что формула (11) определяет чистое псевдопредставление $S_{\mu, \nu}$ группы $\tilde{G}$ унитарными операторами в соответствующем гильбертовом пространстве для любых представлений μ описанного выше класса и для всех $\nu \in \mathbb{R}$. Это псевдопредставление $S_{\mu, \nu}$ сильнонепрерывно по

построению, и — также по построению — ограничение этого псевдопредставления на любую аменабельную подгруппу группы $\tilde{G}$ является обычным представлением этой группы. Неприводимость семейства $S_{\mu,\nu}((g, \varphi))$, $(g, \varphi) \in \tilde{G}$, следует из неприводимости представлений дискретной серии, так как различаются эти отображения лишь скалярным фактором. Для любого $(g, \varphi) \in \tilde{G}$ подгруппа $A_{(g,\varphi)}$, порожденная (g, φ) и Z , аменабельна, поскольку она разрешима по построению. Поэтому ограничение нашего чистого псевдопредставления на эту подгруппу есть обычное унитарное представление группы $A_{(g,\varphi)}$. Следовательно, образ группы D есть единичный оператор, и наше псевдопредставление постоянно на смежных классах по центру. Отсюда непосредственно следует, что при факторизации наше псевдопредставление универсальной накрывающей группы определяет чистое псевдопредставление группы G как фактор-группы группы $\tilde{G}$ по ее центру. Участвующие в деформации чистые псевдопредставления имеют легко вычисляемые следы на окрестности единичного элемента, являющиеся произведениями следов соответствующих представлений универсальной накрывающей на экспоненту псевдохарактера, и очевидное различие этих следов доказывает попарную неэквивалентность построенных чистых псевдопредставлений. Утверждения 1) и 2) теоремы проверяются непосредственно с помощью формулы (11); тем самым формула (11) определяет искомую деформацию представлений голоморфной дискретной серии группы G , что завершает доказательство основной теоремы в рассматриваемом случае. $\square$

2.6. Заключительные замечания. Очевидно, что аналогичная конструкция работает для антианалитических представлений (с младшим вектором). Однако, вообще говоря, в отличие от модельного примера группы $SL(2, \mathbb{R})$, простые вещественные эрмитово симметрические группы Ли могут иметь представления дискретной серии, не являющиеся ни аналитическими, ни антианалитическими. Простейшим примером является группа $SU(2, 1)$, итоги полного исследования вполне неприводимых представлений которой (в том числе унитарных представлений) подведены в [8, 9]. Оказалось, что группа $SU(2, 1)$ имеет еще в точности одну дискретную серию неприводимых унитарных представлений (без указания принадлежности серии разложению регулярного представления, эта серия была построена ранее М. И. Граевым в [3]). Более того, в [8, 9] отмечено, что группа $SU(2, 1)$ имеет и серию неприводимых унитарных представлений, не входящую в разложение регулярного представления, но нумеруемую дискретными параметрами. Как известно, все эти представления могут быть реализованы как подфакторы представлений, индуцированных представлениями параболических подгрупп (см., напр., [37]), что и открывает возможность полного доказательства основной теоремы настоящей статьи в полном объеме по модели, использованной выше. Однако технические детали соответствующего доказательства очень громоздки, и полное изложение будет дано в другой публикации.

Благодарности Автор благодарен А. С. Мищенко за внимание к работе и участникам юбилейной конференции в честь 60-летия профессора А. С. Мищенко за внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М. Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen// Мат. сб., нов. сер. — 1941. — 9 (51). — С. 49–50.
2. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. Комплексные многообразия, остовы которых — полупростые вещественные группы, и аналитические дискретные серии представлений// Функц. анализ и его прилож. — 1977. — 11, № 4. — С. 19–27.
3. Граев М. И. Неприводимые унитарные представления некоторых классов простых групп Ли// Докл. АН СССР. — 1959. — 127, № 1. — С. 13–16.
4. Ольшанский Г. И. Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфная дискретная серия// Функц. анализ и его прилож. — 1981. — 15, № 4. — С. 53–66.
5. Улам С. Нерешенные математические задачи. — М.: Наука, 1964.
6. Файзиев В. А. Псевдохарактеры на свободных произведениях полугрупп// Функц. анализ и его прилож. — 1987. — 21, № 1. — С. 86–87.
7. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
8. Штерн А. И. Вполне неприводимые представления $SU(2, 1)$ и их следы// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — 2, № 4. — С. 95–96.

9. Штерн А. И. О вполне неприводимых представлениях $SU(2,1)$ // Докл. АН СССР. — 1968. — 179, № 6. — С. 1289–1292.
10. Штерн А. И. О жесткости положительных характеров// Усп. мат. наук. — 1980. — 35, № 5. — С. 218.
11. Штерн А. И. Об устойчивости гомоморфизмов в группу R^* // Вестн. МГУ, сер. мат., мех. — 1982. — № 3. — С. 29–32.
12. Штерн А. И. Устойчивость представлений и псевдохарактеры// Ломоносовские чтения МГУ (доклад). — 1983.
13. Штерн А. И. Псевдохарактер, определенный символом Радемахера// Усп. мат. наук. — 1990. — 45, № 3. — С. 197–198.
14. Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления// Функц. анализ и его прилож. — 1991. — 25, № 2. — С. 70–73.
15. Штерн А. И. Непрерывные псевдохарактеры на связных локально-компактных группах являются характерами// Функц. анализ и его прилож. — 1993. — 27, № 4. — С. 94–96.
16. Штерн А. И. Характеризации аменабельных групп в классе связных локально-компактных групп// Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 2 (296). — С. 183–184.
17. Штерн А. И. Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп// Мат. заметки. — 1999. — 65, № 6. — С. 908–920.
18. Штерн А. И. Структурные свойства и ограниченные вещественные 2-когомологии локально-компактных групп// Функц. анализ и его прилож. — 2001. — 35, № 4. — С. 67–80.
19. Штерн А. И. Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений// Мат. заметки (в печати).
20. Baker J., Lawrence J., Zorzitto F. The stability of equation $f(xy) = f(x)f(y)$ // Proc. Am. Math. Soc. — 1979. — 74, № 2. — С. 242–246
21. Censer D. The stability problem for transformations of the circle// Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A. — 1979. — 84. — С. 279–281
22. Clerc J.-L. Laplace transform and unitary highest weight modules// J. Lie Theory. — 1995. — 5, № 2. — С. 225–240.
23. Faraut J., Korányi A. Analysis on symmetric cones/ Oxford Math. Monogr. — Oxford: Clarendon Press, 1994.
24. Forti G. L. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1987. — 57. — С. 215–226
25. Grove K., Karcher H., Roh E. A. Jacobi fields and Finsler metrics on a compact Lie groups with an application to differential pinching problems// Math. Ann. — 1974. — 211, № 1 С. 7–21
26. Guichardet A., Wigner D. Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels// Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. — 1978. — 11. — С. 277–292.
27. de la Harpe P., Karoubi M. Representations approchées d'un groupe dans une algèbre de Banach// Manuscr. Math. — 1977. — 22, № 3. — С. 297–310
28. Hyers D. H. On the stability of the linear functional equation// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1941. — 27, № 2. — С. 222–224
29. Hyers D. H., Ulam S. M. On approximate isometry// Bull. Am. Math. Soc. — 1945. — 51. — С. 288–292
30. Johnson B. E. Cohomology in Banach algebras/ Mem. Am. Math. Soc. — Providence: AMS, 1972. — 127.
31. Johnson B. E. Approximately multiplicative functionals// J. London Math. Soc. — 1986. — 34, № 3. — С. 489–510
32. Johnson B. E. Continuity of generalised homomorphisms// Bull. London Math. Soc. — 1987. — 19, № 1. — С. 67–71
33. Johnson B. E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras// J. London Math. Soc. — 1988. — 37, № 2. — С. 294–316
34. Kazhdan D. On ε -representations// Isr. J. Math. — 1982. — 43, № 4. — С. 315–323
35. Lawrence J. W. The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras// Aequationes Math. — 1985. — 28, №№ 1–2. — С. 94–101
36. Lüscher M., Mack G. Global conformal invariance in quantum field theory// Commun. Math. Phys. — 1975. — 41, № 3. — С. 203–234.
37. Magyar Z. On admissibility and temperedness of representations of real reductive groups// Acta Math. Hungar. — 1998. — 78, № 1–2. — С. 99–174.
38. Olshanskii G. Cauchy–Szegő kernels for Hardy spaces on simple Lie groups// J. Lie Theory. — 1995. — 5, № 2. — С. 241–273.
39. Rademacher H. Zur Theorie der Modulfunktionen// J. Reine Angew. Math. — 1932. — 167. — С. 312–336.

40. *Sally P. J., Jr.* Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of $SL(2, \mathbb{R})$ / Mem. Am. Math. Soc. — Providence: AMS, 1967. — 69.
41. *Schmid W.* On the characters of the discrete series. The Hermitian symmetric case// Invent. Math. — 1975. — 30, № 1. — С. 47–144.
42. *Shtern A. I.* Almost convergence and its applications to the Fourier–Stieltjes localization// Russ. J. Math. Phys. — 1993. — 1, № 1. — С. 115–125.
43. *Shtern A. I.* Quasi-symmetry. I// Russ. J. Math. Phys. — 1994. — 2, № 3. — С. 353–382
44. *Shtern A. I.* Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations// Russ. J. Math. Phys. — 1997. — 5, № 1. — С. 135–138
45. *Shtern A. I.* Almost representations and quasi-symmetry// В кн.: Lie groups and Lie algebras. Their representations, generalizations and applications (eds. B. P. Komrakov et al)/ Math. Appl. (Soviet Ser.), Vol. 433. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1998. — С. 337–358
46. *Shtern A. I.* Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications// Russ. J. Math. Phys. — 2001. — 8, № 1. — С. 122–133.
47. *Shtern A. I.* Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups// Ann. Global Anal. Geom. — 2001. — 20. — С. 199–221.
48. *Shtern A. I.* A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional// Acta Appl. Math. (в печати).

УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА И СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ДЕЙСТВИЯ ГРУПП

© 2003 г. Е. В. ТРОИЦКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	177
2. Понятия условных математических ожиданий конечного индекса	178
3. Условные ожидания, возникающие при действии топологических групп	181
4. Условные ожидания, связанные с действием дискретных групп	185
5. Рефлексивность $C(X)$ над $C_\Gamma(X)$	189
6. Обратные теоремы	194
7. Локализация и глобализация	196
8. Теорема существования	196
Список литературы	199

В общем виде обсуждаемая здесь проблема может быть сформулирована следующим образом. Каковы взаимосвязи между свойствами действия дискретной группы Γ на компактном хаусдорфовом пространстве X и алгебраическими и аналитическими свойствами модуля всех непрерывных функций $C(X)$ над алгеброй инвариантных непрерывных функций $C^\Gamma(X)$? Настоящая обзорная статья охватывает результаты автора, а также совместные результаты с М. Франком и В. Мануйловым и результаты В. Серегина в этой области.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что Γ — дискретная счетная группа, а X — компактное хаусдорфово Γ -пространство. С такими данными могут быть связаны следующие объекты.

- 1) Орбиты, количество их элементов и другие динамические свойства.
- 2) В некоторых случаях, используя инвариантные средние на функциях, определенных на группе Γ , оказывается возможным определить так называемые условные математические ожидания $E_\Gamma : C(X) \rightarrow C^\Gamma(X)$ и изучить их свойства.
- 3) Можно рассмотреть свойства модуля всех непрерывных функции $C(X)$ над алгеброй инвариантных непрерывных функций $C^\Gamma(X)$. В некоторых случаях с помощью E_Γ он может быть снабжен $C^\Gamma(X)$ -значным C^* -скалярным произведением.

Изучение отношений между этими свойствами было начато систематически в [12] (по поводу предварительных и близких исследований см. также [7, 9, 11, 13, 14, 16, 20, 22, 27] и обзор в [12]).

В настоящей обзорной статье мы обсудим главным образом результаты [12] (в разделах 2–4), [5] (в разделе 5), [26] (в разделах 6–8), и (кратко) [11] (в разделе 2).

Мы рассматриваем условные математические ожидания на C^* -алгебрах, не имеющих алгебраически конечного индекса. Исследованы характеристики действий (аменабельных) топологических групп на компактном хаусдорфовом пространстве X , гарантирующие существование корректно определенного условного математического ожидания на соответствующей коммутативной C^* -алгебре $C(X)$, и конечность индекса этого ожидания. Для этой цели используются методы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99–01–01202) и гранта Президента РФ (проект № 00-15-99263).

гильбертовых C^* -модулей и топологические методы. Специальный акцент сделан на действиях дискретных групп.

Сначала мы обобщаем некоторые результаты относительно условных математических ожиданий на C^* -алгебрах, которые имеют конечный индекс в смысле алгебраического определения Вататани [27] на случай более слабого свойства конечности индекса условного математического ожидания E на них, в смысле Байе, Денизо и Аве [9], т.е. таких ожиданий, для которых существует такое конечное вещественное число $K \geq 1$, что отображение $(K \cdot E - \text{id})$ положительно.

Мы рассматриваем действия аменабельных бесконечных дискретных или топологических групп на локально-компактных хаусдорфовых пространствах, определяющие условные математические ожидания конечного индекса. В этих случаях действие аменабельной топологической группы G может всегда заменяться подходящим действием вполне несвязной группы, возникающей как фактор-группа G по ее связной компоненте единицы. Описано влияние максимальной мощности орбиты в X при действии группы на характеристическую константу $K(E_G)$ полученного условного математического ожидания конечного индекса на $C_0(X)$.

Мы анализируем конструкции условных математических ожиданий конечного индекса на коммутативных C^* -алгебрах $C(X)$, предложенные Вататани [27, Propositions 2.8.1, 2.8.2] и возникающие из действий конечных групп на компактных хаусдорфовых пространствах X . Специальное внимание уделено тесной взаимосвязи между немаксимальными орбитами в X при действии группы и неалгебраическим характером соответствующего условного математического ожидания конечного индекса. Для этих исследований мы используем действие группы и методы гильбертовых C^* -модулей. Приведены примеры, которые иллюстрируют феномены, появляющиеся для действий дискретных групп.

Мы доказываем также некоторые обратные утверждения: из некоторых свойств модулей (3) мы выводим некоторые свойства (1) действий. В частности, доказано, что если для равномерно-непрерывного действия модуль $C(X)$ — конечно-порожденный проективный над $C^\Gamma(X)$, то мощность орбит является конечной и постоянной.

Получены некоторые достаточные условия типа Ляпунова для существования естественных условных математических ожиданий $C(X) \rightarrow C^\Gamma(X)$.

Мы используем некоторые основные понятия и результаты теории гильбертовых C^* -модулей. Для введения в эту теорию мы рекомендуем исходные статьи В. Пашке [18] и М. Риффела [23], важную статью Г. Г. Каспарова [15], а также книги [3, 17].

Большая часть результатов [26] (см. разделы 6–8) были получены благодаря творческой и стимулирующей атмосфере Института Макса Планка (Бонн) во время пребывания автора там осенью 2000 и весной 2001 г.

Автор благодарен М. Франку, вызвавшему его интерес к этой тематике и поделившемуся своими познаниями, и В. М. Мануйлову за ряд полезных обсуждений и предложений на различных стадиях данного исследования. Автор обязан М. А. Риффелу за полезные замечания и комментарии во время посещения Института математики Люмини (Марсель) весной 2000 г. Он объяснил мне также некоторые идеи, связанные с [22]. Ж. Рено и Ж. Скандалис предложили рассмотреть в настоящем контексте применение теории группоидов (см. [21]). А. С. Мищенко предложил включить в рассмотрение локально-свободные модули для изучения условий проективности в более общей ситуации. Эти направления представляются наиболее перспективными в развитии настоящей тематики.

2. Понятия условных математических ожиданий конечного индекса

Определение 2.1. Условным ожиданием $E : A \rightarrow B \subseteq A$ на C^* -алгебре A называется проектор нормы 1, с образом, равным C^* -подалгебре $B \subseteq A$ (подробности см. в [19, 25]).

Замечание 2.2. Алгебру A можно без потери общности всегда считать имеющей единицу (унитальной), поскольку E может быть продолжено до условного ожидания E^{**} на бидуальной W^* -алгебре A^{**} алгебры A с образом, равным C^* -алгебре $E^{**}(A^{**}) \subseteq A^{**}$, которая $*$ -изоморфна бидуальной W^* -алгебре B^{**} алгебры B , так что редукция E^{**} на каноническое вложение $A \hookrightarrow A^{**}$ накрывает E .

Определение 2.3. Условное ожидание E называется *точным*, если из выполнения условия $E(x^*x) = 0$ следует $x = 0$ для всякого $x \in A$. В этом случае A и $E(A) = B$ имеют общую единицу.

Мы исследуем условные математические ожидания конечного индекса как в смысле Вататани [27], так и в смысле Байе, Денизо и Аве [9]. Если мы рассматриваем W^* -факторы и нормальные условные математические ожидания на них с образом, являющимся факторной W^* -алгеброй, то оба понятия приводят к классическому понятию индекса Джонса, Пимзнера и Попа [9, 14, 20].

Определение 2.4. Условное ожидание $E : A \rightarrow B \subseteq A$ называется условным ожиданием *алгебраически конечного индекса*, если имеются такие элементы (квазибазис) $\{u_1, \dots, u_n\} \subset A$, что для всякого $x \in A$ выполняется равенство $x = \sum_{i=1}^n u_i E(u_i^* x)$. В этом случае индекс определяется формулой $\text{Ind}(E) = \sum_{i=1}^n u_i u_i^*$ и является таким положительным обратимым элементом в центре A , что $\text{Ind}(E) \geq 1_A$. При этом индекс не зависит от выбора квазибазиса $\{u_1, \dots, u_n\}$ в A и, в частности, от числа его элементов [27].

Замечание 2.5. С другой точки зрения существование конечного квазибазиса для некоторого условного математического ожидания $E : A \rightarrow B \subseteq A$ является эквивалентным алгебраическому утверждению о том, что A является конечно-порожденным проективным (следовательно, гильбертовым) B -модулем.

Определение 2.6. C^* -гильбертов B -модуль M называется *автодуальным*, если имеется естественный изоморфизм M на модуль M' всех анти- B -линейных ограниченных функционалов на M . Для унитарной B любой конечно-порожденный проективный модуль автодуален. Если $M'' = M$, то модуль M называется *(B -)рефлексивным*.

Определение 2.7. Условное математическое ожидание $E : A \rightarrow B \subseteq A$ называется условным ожиданием (*топологически*) *конечного индекса*, если существует такое конечное вещественное число $K \geq 1$, что отображение $(K \cdot E - \text{Id}_A)$ является положительным на A .

Эти математические ожидания могут быть охарактеризованы следующим образом.

Предложение 2.8. Пусть A — C^* -алгебра и $E : A \rightarrow B \subseteq A$ — условное ожидание с множеством неподвижных точек B . Тогда конечное вещественное число $K \geq 1$ такое, что отображение $(K \cdot E - \text{id}_A)$ положительно, существует тогда и только тогда, когда E точно и (правый) предгильбертов B -модуль $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\}$ полон по норме $\|E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\|_B^{\frac{1}{2}}$ (где $\langle a, b \rangle_A = a^*b$ для $a, b \in A$).

Доказательство. Если A полон относительно нормы $\|E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\|_B^{\frac{1}{2}}$, то, согласно общей теории банаховых пространств, существует такое число K , что $K\|E(x^*x)\| \geq \|x^*x\|$ для всякого $x \in A$. Возьмем $x = a(\varepsilon + E(a^*a))^{-\frac{1}{2}}$ для $a \in A$ и $\varepsilon > 0$ и заметим, что

$$(\varepsilon + E(a^*a))^{-\frac{1}{2}} \cdot E(a^*a) \cdot (\varepsilon + E(a^*a))^{-\frac{1}{2}} \leq 1_A.$$

Имеет место неравенство

$$K \cdot 1_A \geq (\varepsilon + E(a^*a))^{-\frac{1}{2}} \cdot a^*a \cdot (\varepsilon + E(a^*a))^{-\frac{1}{2}}.$$

Умножая на $(\varepsilon + E(a^*a))^{\frac{1}{2}}$ с обеих сторон, мы приходим к неравенству $K \cdot (\varepsilon + E(a^*a)) \geq a^*a$ для всяких $a \in A$ и $\varepsilon > 0$. Это дает второе из условий. Обратное утверждение является очевидным следствием спектральной теории и неравенства $\|E(x)\| \leq \|x\|$, верного для всякого $x \in A$. $\square$

Разница между двумя типами условных математических ожиданий конечного индекса проявляется в том, как гильбертов B -модуль $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\}$ порожден, конечно или бесконечно (см. [11], [27, Propositions 2.8.1, 2.8.2] и раздел 4). Результаты [11] показывают, что условные математические ожидания $E : A \rightarrow B \subseteq A$ конечного индекса могут быть отождествлены с теми, которые удовлетворяют следующим эквивалентным условиям: для условного математического ожидания E

на (унитальной) C^* -алгебре A существует такое вещественное число $K \geq 1$, что отображение $(K \cdot E - \text{id}_A)$ является положительным тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число $L \geq 1$, что отображение $(L \cdot E - \text{id}_A)$ вполне положительно, и тогда и только тогда, когда E является точным и A полно по норме $\|E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\|_A^{\frac{1}{2}}$ (где $\langle a, a \rangle_A = a^*a$ для $a \in A$). Если положить

$$K(E) = \inf \left\{ K : (K \cdot E - \text{id}_A) \text{ является положительным на } A \right\},$$

$$L(E) = \inf \left\{ L : (L \cdot E - \text{id}_A) \text{ является вполне положительным на } A \right\},$$

то можно получить оценку $K(E) \leq L(E) \leq K(E) \cdot [K(E)]$, где через $[\cdot]$ обозначена целая часть вещественного числа. Кроме того, в дополнение к свойствам этого класса условных ожиданий, полученным в [7], нормальные условные математические ожидания конечного индекса на W^* -алгебрах коммутируют с (абстрактными) проекциями W^* -алгебр на их конечную, бесконечную, дискретную и непрерывную типов I, II_1 , II_∞ и III части, т.е. они полностью сохраняют эти W^* -разложения. Кроме того, значение индекса и башня Джонса всегда существуют в этом случае. В общем C^* -алгебраическом случае индексное значение E может быть получено только как элемент центра бидуальной W^* -алгебры A^{**} алгебры A , продолжающий E до нормального условного ожидания $E^{**} : A^{**} \rightarrow B^{**} \subseteq A^{**}$ (см. [10, 25] и раздел 3). Однако если индексное значение принадлежит образу C^* -алгебры B , то можно показать, что башня Джонса существует. Эти наблюдения из [11] расширяют и продолжают результаты Пимзнера и Попа [20], Байе, Денизо и Аве [9], Вататани [27], Жолисена [13], Андручова и Стоянова [7, 8] и др., заполняя неисследованную область, лежащую между предложением 3.3 и теоремой 3.5 [9]. Имеются примеры условных ожиданий конечного индекса, не имеющих чисто алгебраического типа, исследованные Вататани (ср. [27, Proposition 2.8.2] и раздел 4). Большой класс таких примеров близко связан с действиями группы на компактном хаусдорфовом пространстве и с получающимися C^* -алгебрами, равно как и со скрещенными произведениями.

Следующее утверждение расширяет результат Кошкама относительно условных математических ожиданий, которые имеют алгебраически конечный индекс на случай ожиданий конечного индекса (см. [16, Proposition 3.5]).

Предложение 2.9. Пусть $A \supseteq B \supseteq C$ — C^* -алгебры с общей единицей, а отображения $E : A \rightarrow B \subseteq A$ и $F : B \rightarrow C \subseteq B$ являются точными условными ожиданиями, связывающими эти C^* -алгебры. В этом случае $F \circ E : A \rightarrow C \subseteq A$ имеет конечный индекс тогда и только тогда, когда E и F оба имеют конечные индексы. Более того, имеет место неравенство $K(F \circ E) \leq K(F) \cdot K(E)$. Наконец, композиция $F \circ E$ имеет алгебраически конечный индекс тогда и только тогда, когда E и F являются ожиданиями алгебраически конечного индекса.

Доказательство. Пусть E и F — ожидания конечного индекса в смысле определения 2.7, т.е. существуют вещественные числа

$$K(E) = \inf \left\{ K : (K \cdot E - \text{id}_A) \text{ положительно на } A \right\} \geq 1,$$

$$K(F) = \inf \left\{ K : (K \cdot F - \text{id}_B) \text{ положительно на } B \right\} \geq 1.$$

Поскольку условие $K(E) = 1$ влечет $E = \text{id}_A$, без ограничения общности можно предположить, что $K(E) > 1$. Неравенство $K(F) \cdot F \geq \text{id}_B$ выполнено согласно предположению. Отсюда заключаем, что

$$(K(F) \cdot K(E) \cdot F \circ E - \text{id}_A) \geq K(E) \cdot E - \text{id}_A \geq 0. \quad (1)$$

Поэтому $F \circ E$ имеет конечный индекс.

Обратно, пусть $F \circ E$ имеет конечный индекс. Тогда имеется такое конечное вещественное число $K(F \circ E)$, что отображение $(K(F \circ E) \cdot F \circ E - \text{id}_A)$ положительно. Действуя положительным отображением E слева, получаем

$$0 \leq E \circ (K(F \circ E) \cdot F \circ E - \text{id}_A) = (K(F \circ E) \cdot F - \text{id}_B) \circ E.$$

Это дает положительность отображения $(K(F \circ E) \cdot F - \text{id}_B)$ для конечного числа $K(F \circ E)$ и доказывает, что F — ожидание конечного индекса.

Далее, предположим, что E не является ожиданием конечного индекса. Другими словами, имеется такая последовательность $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset A_h^+$, что последовательность $\{\|E(a_i)\|\}_{i \in \mathbb{N}}$ ограничена, но последовательность $\{\|a_i\|\}_{i \in \mathbb{N}}$ — нет. Тогда последовательность $\{\|F(E(a_i))\|\}_{i \in \mathbb{N}}$ ограничена, поскольку F — ожидание конечного индекса, как было показано. Однако $F(E(a_i)) = (F \circ E)(a_i)$ и, согласно предположению, $F \circ E$ также имеет конечный индекс. Следовательно, последовательность $\{\|a_i\|\}_{i \in \mathbb{N}}$ должна быть ограничена, что противоречит ее выбору. Единственная возможность — допустить существование такого конечного вещественного числа $K(E)$, что неравенство $K(E) \cdot \|E(a)\| \geq \|a\|$ выполнено для всякого $a \in A_h^+$. Это условие эквивалентно тому, что E — ожидание конечного индекса.

В специальном случае, когда E и F или $F \circ E$ имеют алгебраически конечный индекс, мы сошлемся на результат Кошкама. Неравенство $K(F \circ E) \leq K(F) \cdot K(E)$ может быть получено из (1). В общем случае, как показывает следующий пример, это неравенство не выполняется. $\square$

Пример 2.10. Рассмотрим следующие точные условные ожидания конечного индекса:

$$E : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad E : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$$F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad F : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{a+d}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие характеристические числа принимают значения $K(E) = K(F) = K(F \circ E) = 2$, так что $K(F \circ E) < K(F) \cdot K(E)$.

3. УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Пусть X — локально-компактное хаусдорфово пространство, на котором действует топологическая группа G . Обозначим C^* -подалгебру G -инвариантных функций, стремящихся к 0 на бесконечности, через $C_0^G(X)$, а стабилизатор точки $x \in X$ — через $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. Рассмотрим ситуации, для которых действие G на X корректным образом определяет условное ожидание E_G на соответствующей C^* -алгебре $C_0(X)$. Для этого нам понадобятся следующие определения.

Определение 3.1. Мы называем действие топологической группы G на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X *равномерно-непрерывным*, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности U_x найдется другая ее окрестность V_x такая, что $g(V_x) \subseteq U_x$ для любого $g \in G_x$.

Пример 3.2. Пусть пространство $X \subset \mathbb{R}^2$ задается относительно полярных координат (r, ϕ) формулой

$$X = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{m} \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

При этом X — компактное нормальное пространство как замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^2$. Для удобства обозначим его части следующим образом:

$$X_m = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{m} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0, 0)\} \quad (m \in \mathbb{N}),$$

$$X_0 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0, 0)\}, \quad X = \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m.$$

Пусть группа $G \subseteq \bigoplus_1^{\infty} \mathbb{Z}_2$ состоит из тех последовательностей $g = (g_1, \dots, g_k, \dots)$ нулей и единиц, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля. Обозначим через $g_{(k)}$ последовательность с единственным ненулевым элементом на k -м месте. Зададим действие G на X следующими правилами:

- (i) если $x \in X_m$ и $m \neq k$, то $g_{(k)}x = x$;
- (ii) если $x \in X_k$, $x = \left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{k} \right)$ и $n \neq 1$, $n \neq k$, то $g_{(k)}x = x$;
- (iii) $g_{(k)}$ переставляет точки $\left(1, \frac{\pi}{k} \right)$ и $\left(\frac{1}{k}, \frac{\pi}{k} \right)$.

При действии G орбита каждой точки множества $X \setminus X_0$ состоит в точности из двух элементов, а точки X_0 неподвижны. Хотя описанное действие непрерывно (G рассматривается как дискретная группа), оно не удовлетворяет условию равномерной непрерывности, поскольку любая окрестность начала координат содержит точки, которые под действием некоторого элемента группы G переходят в точки, находящиеся на расстоянии 1 от начала координат.

Заметим, что непрерывное действие компактной группы всегда равномерно-непрерывно.

Определение 3.3. Действие аменабельной топологической группы G на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X порождает условное ожидание $E_{G,\text{am}}$ на $C_0(X)$, если формула

$$E_{G,\text{am}}(f)(x) = m_G(f(g^{-1}x)) \quad (2)$$

задает непрерывную функцию для любой $f \in C_0(X)$ и некоторой фиксированной (лево-) инвариантной меры m_G на G .

Пример 3.4. Пусть дискретная группа $\mathbb{Z}$ действует на многообразии S^1 при помощи иррациональных вращений. Тогда орбита каждой точки $x \in S^1$ состоит из бесконечного числа точек, а условное ожидание $E_{\mathbb{Z}}$ корректно определено как интеграл. Положительный линейный функционал $E_{\mathbb{Z}}$ оказывается обычным интегралом непрерывной функции по окружности S^1 .

Рассмотрим дискретную группу $\mathbb{Z}$, действующую на себе естественным образом. Получающееся условное ожидание $E_{G,\text{am}}$ совпадает с выбранным инвариантным средним $m_{\mathbb{Z}}$.

Отображение $E_{G,\text{am}}$, происходящее из действия группы в примере 3.2, по (2) является разрывным в точке $(0, 0)$, что показывает необходимость дополнительного предположения равномерной непрерывности действия G на X .

Кроме доказательства корректной определенности такого типа условных ожиданий, мы хотели бы получить некоторые достаточные условия для конечности их индекса в смысле [9, 11].

Лемма 3.5. Пусть G — (аменабельная) топологическая группа, действующая на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X . Предположим, что орбита Gx состоит из конечного числа точек для каждого $x \in X$. Тогда связная компонента H единицы G действует на x тривиально, т.е. принадлежит стабилизатору G_x точки $x \in X$.

Доказательство. Конечное подмножество хаусдорфова пространства X , состоящее более чем из одной точки, не связно. Рассмотрим отображение $H \rightarrow H/H_x \rightarrow Hx$, $h \mapsto hH_x \mapsto hx$, где H_x — стабилизатор x при действии H . Первое отображение в этой комбинации является эпиморфизмом, второе — гомеоморфизмом. Таким образом, Hx связно и, следовательно, совпадает с $\{x\}$. $\square$

Лемма 3.6. Пусть G — аменабельная топологическая группа, которая действует на локально-компактном нормальном пространстве X и порождает условное ожидание $E_{G,\text{am}}$ на $C_0(X)$ (ср. (2)). Предположим, что для некоторого $x \in X$ существует орбита Gx , состоящая из бесконечного числа точек, и соответствующее среднее на Gx нормально, а именно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует положительная функция f такая, что $f(x) = 1$ и $m_{Gx}(f) < \varepsilon$. Тогда характеристическое число условного ожидания $E_{G,\text{am}}$ бесконечно.

Доказательство. Упомянутые функции существуют по [24, Theorem V.17.4] и удовлетворяют неравенству $1 = f(x) \leq K(E_{G,\text{am}}) \cdot E_{G,\text{am}}(f)(x) < K(E_{G,\text{am}})\varepsilon$. Следовательно, утверждение очевидно, поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно. $\square$

Заметим, что условия леммы 3.6 выполнены для примера 3.4.

Теорема 3.7. Пусть G — аменабельная топологическая группа, действующая на локально-компактном нормальном пространстве X таким образом, что условное ожидание $E_{G,\text{am}}$ порождается некоторым инвариантным средним m_G на G . Предположим, что соответствующее среднее на Gx нормально для каждого $x \in X$. Тогда имеются ровно два случая:

(i) для связной компоненты H единицы G действие G разлагается в композицию

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\quad} & G/H \times X \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array} .$$

Действие G на X может быть альтернативно описано действием вполне несвязной группы G/H . В этом случае характеристическое значение $K(E_{G,\text{am}})$ может быть, вообще говоря, конечным.

(ii) Во всех других случаях возникают только бесконечные значения $K(E_{G,\text{am}})$.

Доказательство. Прежде всего, H — нормальный делитель G [4]. Если имеется бесконечная орбита, то по лемме 3.6 мы имеем вторую ситуацию; в противном случае мы имеем первый случай согласно лемме 3.5. $\square$

Теорема 3.7 показывает, что рассмотрение условных ожиданий конечного индекса, связанных с действием аменабельных топологических групп на локально-компактных нормальных пространствах X , приводит к исследованию действий аменабельных вполне несвязных групп на этих пространствах. Мы можем ограничиться в поиске результатов последним видом действий. Заметим, что фактор-группа G/H локально-компактной группы по ее связной компоненте единицы H не обязательно дискретна (однако это так для групп Ли). Например, любое бесконечное произведение конечных групп — недискретная группа с тривиальной связной компонентой. Мы, однако, сосредоточимся в дальнейшем на случае действий конечных и дискретных групп. Наиболее многообещающая ситуация характеризуется существованием верхней грани числа точек в любой орбите.

Теорема 3.8. Пусть X — локально-компактное хаусдорфово пространство, снабженное действием конечной группы G . Тогда для условного ожидания $E_{G,\text{am}}$ имеет место оценка

$$K(E_{G,\text{am}}) \leq k := \max_{x \in X} \#(Gx).$$

Если X — нормальное пространство, то имеет место равенство $K(E_{G,\text{am}}) = k$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольный элемент и $k_x = \#Gx$. Тогда

$$k \cdot E_{G,\text{am}}(f)x = k \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g^{-1}x) = k \frac{1}{|G|} \sum_{[g] \in G/G_x} |G_x| \cdot f(gx) \geq \frac{k}{k_x} \sum_{[g] \in G/G_x} f(g^{-1}x) \geq f(x).$$

Предположим, что $K(E_{G,\text{am}}) < k$ и X нормально. Выберем элемент $x \in X$, на котором реализуется $k_x > K(E_{G,\text{am}})$. Тогда существует такая окрестность U_x точки x , что $(gU_x) \cap U_x = \emptyset$ для некоторого элемента $g \in G$ с $gx \neq x$. Поскольку X , как предполагается, является нормальным, существует непрерывная неотрицательная функция f с носителем внутри U_x (см. [24, Theorem V.17.4]). Тогда

$$\begin{aligned} K(E_{G,\text{am}}) \cdot E_{G,\text{am}}(f)x &= K(E_{G,\text{am}}) \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(gx) \\ &= K(E_{G,\text{am}}) \frac{1}{|G|} \sum_{[g] \in G/G_x} |G_x| \cdot f(gx) < k_x \frac{1}{k_x} \sum_{[g] \in G/G_x} f(gx) = f(x). \end{aligned}$$

Это противоречит определению характеристического числа $K(E_{G,\text{am}})$ и завершает доказательство. $\square$

Лемма 3.9. Пусть дискретная аменабельная группа G равномерно-непрерывно действует на локально-компактном хаусдорфовом пространстве таким образом, что мощность каждой орбиты $\#Gx$ ограничена, скажем, $\#Gx \leq k$ для некоторого фиксированного $k \in \mathbb{N}$. Тогда $E_{G,\text{am}}$ корректно определено.

Доказательство. Пусть $H \subseteq G$ — подгруппа конечного индекса, T — трансверсаль H , т.е. выбор представителей в классах смежности. Имеется равенство

$$m_G(f(gx)) = m_G\left(\sum_{g_a \in T} f(hg_ax)\chi_{g_aH}\right) = \sum_{g_a \in T} f(g_ax) \cdot m_G(\chi_{g_aH}) = c \cdot \sum_{g_a \in T} f(g_ax).$$

Пусть $f = \mathbf{1}$. Тогда для всякого $x \in X$ выполняется равенство $1 = m_G(\mathbf{1}) = c \cdot \#(G/H)$, из которого следует $c = \#(G/H)^{-1}$ и

$$m_G(f(gx)) = \frac{1}{\#(G/H)} \cdot \sum_{g_a \in T} f(g_ax).$$

Зафиксируем теперь $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Выберем y столь близко к x , что для любого $g \in G$ выполнена оценка $|f(gx) - f(gy)| < \varepsilon$. В силу равномерной непрерывности действия G на X этот выбор возможен, поскольку мы можем взять y из столь малой окрестности U точки x , что вариация f на $g_1V = V, g_2V, \dots, g_mV$ меньше ε для $\{g_1 = e, g_2, \dots, g_m\} = T$ и $G_xV \subseteq U$. В этой ситуации каждый элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = g_ih$ для некоторого $h \in H$ и $gy \in g_iV$.

Следовательно, подгруппа $D = G_x \cap G_y$ имеет конечный индекс, и набор классов смежности G/D совпадает с набором попарных пересечений $gG_x \cap HG_y$. Кроме того, индекс D в G не больше, чем произведение индексов G_x и G_y (ср. [2]). Функции $\phi(g) = f(gx)$ и $\psi(g) = f(gy)$ постоянны на D , так что мы получаем равенства

$$E_{G,\text{am}}(f)(x) = \frac{1}{\#(G/D)} \cdot \sum_{g_a \in T} f(g_ax), \quad E_{G,\text{am}}(f)(y) = \frac{1}{\#(G/D)} \cdot \sum_{g_a \in T} f(g_ay)$$

для выбранных элементов $x, y \in X$. Следовательно,

$$|E_{G,\text{am}}(f)(x) - E_{G,\text{am}}(f)(y)| < \frac{1}{\#(G/D)} \cdot \#(G/D) \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

и лемма доказана. $\square$

Определение 3.10. Предположим, что произвольная топологическая группа G действует равномерно-непрерывно на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X таким образом, что каждая орбита имеет мощность $\#Gx$, причем $\#Gx \leq k$ для некоторого фиксированного $k \in \mathbb{N}$. Как и в лемме 3.9, мы определяем условное математическое ожидание $E_G : C_0(X) \rightarrow E_G(C_0(X)) \subseteq C_0(X)$ формулой

$$E_G(f)(x) = \frac{1}{\#(G/G_x)} \cdot \sum_{g_a \in T_x} f(g_ax) \quad (x \in X).$$

Точно такое же рассуждение, как в лемме 3.9, применимо для доказательства следующего утверждения.

Лемма 3.11. Предположим, что дискретная группа G действует равномерно-непрерывно на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X таким образом, что мощность любой орбиты удовлетворяет неравенству $\#Gx \leq k$ для некоторого фиксированного $k \in \mathbb{N}$. Тогда E_G корректно определено.

Теорема 3.12. Предположим, что дискретная группа G действует на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X таким образом, что $k := \max\{\#(Gx) : x \in X\} < +\infty$. Если X нормально, то $K(E_G) = k$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольный элемент и $k_x = \#Gx$. Тогда

$$k \cdot E_G(f)(x) = k \frac{1}{k_x} \cdot \sum_{g_a \in T} f(g_ax) \geq f(x).$$

Предположим, $K(E_G) < k$ для нормального пространства X . Выберем точку $x \in X$ с $k_x > K(E_G)$. Тогда найдется такая окрестность U_x точки x , что $g_iU_x \cap g_jU_x = \emptyset$ для $i \neq j$ и $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_m\} =$

T_x . Для непрерывной неотрицательной функции f с носителем внутри U_x (см. [24, Theorem V.17.4] по поводу существования) мы имеем неравенство

$$K(E_G) \cdot E_G(f)(x) = K(E_G) \frac{1}{k_x} \cdot \sum_{g_a \in T} f(g_a x) < f(x).$$

Это противоречит определению $K(E_G)$ и завершает доказательство. $\square$

4. УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ДЕЙСТВИЕМ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП

Займемся исследованием условных ожиданий конечного индекса, связанных с определенным действием дискретной группы на компактном хаусдорфовом пространстве. Эти исследования являются продолжением результатов Вататани [27, Propositions 2.8.1, 2.8.2] о действиях конечной группы G на компактном хаусдорфовом пространстве X , порождающих условные ожидания конечного индекса E на $C(X)$,

$$E_G(f)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(gx) \quad (x \in X),$$

которые иногда не являются условными ожиданиями алгебраически конечного индекса. Мы хотели бы провести более детальный анализ действий аменабельных дискретных групп G на компактных хаусдорфовых пространствах X , для которых орбита каждой точки $x \in X$ конечна. Для определения соответствующего условного ожидания E_G на C^* -алгебре $C(X)$ воспользуемся леммами 3.9 и 3.11. Нашей целью является более детальный анализ появляющихся свойств с точки зрения теории гильбертовых C^* -модулей путем соответствующего приспособления техники [27].

Прежде всего приведем два примера условных ожиданий конечного индекса, которые не являются условными ожиданиями алгебраически конечного индекса в смысле определения Вататани. Они получаются из [27, Propositions 2.8.1, 2.8.2] как специальные случаи, дающие новый способ для доказательства их нетривиальности.

Пример 4.1. Пусть X — компактное хаусдорфово подпространство $X = \{t \cdot e^{\frac{2k\pi}{n}i} : k = 1, \dots, n, t \in [0, 1]\}$ плоскости $\mathbb{C}$, которое может рассматриваться как звездоподобное расположение n экземпляров единичного интервала с общим нулем. Пусть A — C^* -алгебра $C(X)$ всех непрерывных функций на X . Рассмотрим нормальное условное ожидание E на A , задаваемое взятием среднего значения по действию циклической группы

$$E(f)(x_1) = \dots = E(f)(x_n) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \quad (x_i \in [0, 1]_i, \quad i = 1, \dots, n).$$

Образом служит C^* -алгебра B , которая может быть отождествлена со следующим множеством функций на A :

$$\left\{ f \in A : f(x_1) = \dots = f(x_n) \text{ для } x_i \in [0, 1]_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\},$$

наследующим C^* -структуру A . Заметим, что $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\}$ не является автодуальным гильбертовым B -модулем, поскольку ограниченное B -линейное отображение

$$E(f_0^* f)(x_1) = \dots = E(f_0^* f)(x_n) = \frac{f_0^*(x_1)f(x_1) + \dots + f_0^*(x_n)f(x_n)}{n},$$

определенное для $f \in A$ с $x_i \in [0, 1]_i$ ($i = 1, \dots, n$) и

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 \in (0, 1]_1, \\ -1, & \text{если } x_2 \in (0, 1]_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

отображает A в B , но f_0 не принадлежит A . Следовательно, гильбертов B -модуль $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\}$ не может быть конечно-порожденным проективным, и E не имеет конечного индекса в смысле алгебраического определения Вататани. Тем не менее E обладает очень хорошим свойством: очевидно,

что отображение $(n \cdot E - \text{id}_M)$ вполне положительно. Кроме того, более внимательный анализ, который будет проведен ниже, обнаруживает B -рефлексивность гильбертова B -модуля $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle_A)\}$. Характеристическое число E равняется $K(E) = n$.

Теперь рассмотрим индексное значение. Для этого продолжим E до его канонического нормального условного ожидания $E^{**} : A^{**} \rightarrow B^{**} \subseteq A^{**}$ (см. [10, 19]) и вычислим индекс расширенного условного ожидания E^{**} как элемент центра A^{**} . Соответствующие константы

$$K(E^{**}) = K(E) = \inf \left\{ K : (K \cdot E - \text{id}_A) \text{ положительно на } A \right\},$$

$$L(E^{**}) = L(E) = \inf \left\{ L : (L \cdot E - \text{id}_A) \text{ вполне положительно на } A \right\}$$

сохраняются по монотонности [19].

Дискретная часть бидуального векторного пространства и W^* -алгебра A_{discr}^{**} алгебры A изоморфна $l_\infty(X)$ по теореме Гельфанда. Формула, задающая E^{**} , та же, что и для E . Индекс может быть подсчитан алгебраически, и мы получаем

$$\text{Ind}(E) = \text{Ind}(E^{**})_{\text{discr}} = \begin{cases} 2, & \text{если } x_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad \in l_\infty(X),$$

и $\text{Ind}(E) \notin A \hookrightarrow A_{\text{discr}}^{**}$. Заметим, что индексное значение $\text{Ind}(E) \in A_{\text{discr}}^{**}$ определяет положительное отображение $(\text{Ind}(E) \cdot E^{**} - \text{id}_{A_{\text{discr}}^{**}})$ на A_{discr}^{**} .

Алгебра A^{**} коммутативна (следовательно, является алгеброй типа I). Рассмотрим ее недискретную часть. Согласно теории разложения коммутативных W^* -алгебр, она является прямой суммой W^* -алгебр $L^\infty([0, 1], \lambda)$, где через λ обозначена мера Лебега (ср. [25]). Рассмотрим каноническое вложение $A = C(X) \subset L^\infty(X, \lambda) \cong \sum \oplus L^\infty([0, 1]_i, \lambda)$. Снова индекс E^{**} на $L^\infty(X, \lambda)$ может быть найден: он равен функции $f(x) \equiv 2$, что отличается от значения, полученного для дискретной части $\text{Ind}(E^{**})$.

Пример 4.2. Рассмотрим два экземпляра интервала $[-1, 1]$ с обычной топологией и обозначим через X их несвязное объединение. Пусть циклическая группа $G = \mathbb{Z}_4$ действует на $x \in X = [-1, 1]_1 \cup [-1, 1]_2$ по правилу

$$x \in [-1, 1]_1 \rightarrow -x \in [-1, 1]_2 \quad \text{и} \quad x \in [-1, 1]_2 \rightarrow x \in [-1, 1]_1.$$

Орбиты всех точек $x \in X \setminus \{0 \in [-1, 1]_1, 0 \in [-1, 1]_2\}$ имеют мощность 4, кроме двух исключительных точек, которые имеют мощность 2. Вернемся к индуцированному действию G на соответствующей унитарной C^* -алгебре $A = C(X)$ и рассмотрим канонически определенное условное ожидание

$$E(f)(x) = \frac{1}{4}(f(ex) + f(gx) + f(g^2x) + f(g^3x)),$$

где $g \in \mathbb{Z}_4$ — образующая, которое допускает характеристическую константу $K(E) = 4$. Рассматривая ограниченный B -линейный функционал на гильбертовом B -модуле $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$, определенный правилом $E(f_1^* f)$ для $f \in A$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [-1, 0]_1, \\ -1, & \text{если } x \in (0, 1]_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

мы снова убеждаемся в неавтодуальности $\{A, E(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$ как гильбертова B -модуля. Следовательно, E не может ожиданием быть алгебраически конечного индекса, хотя действие G на X не имеет неподвижных точек.

Два следующих примера показывают, что действия бесконечных аменабельных дискретных групп могут определять нетривиальные условные математические ожидания конечного индекса наряду с отображениями E_G с образами вне C^* -алгебры $C(X)$. Другими словами, мы должны всегда иметь в виду специфику построения. Очень часто мы можем приспособить примеры с локально-компактными пространствами X к компактной ситуации, переходя к одноточечной

компактификации αX . Однако при этом могут появляться дополнительные неподвижные точки действия G .

Пример 4.3. Пусть $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Z}_2)_i$ — бесконечная дискретная группа. Обозначим через g_i образующую i -й копии $\mathbb{Z}_2$. Положим $Y := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ и $X := Y \times I$, где $I = [0, 1]$. Обозначив через a_j^i канонические поточечные отождествления $\{\frac{1}{i}\} \times I$ и $\{\frac{1}{j}\} \times I$, определим действие G на X формулой

$$g_i(x) = \begin{cases} a_{2^i}^{2^{i-1}}(x), & \text{если } x \in \{\frac{1}{2^{i-1}}\} \times I, \\ a_{2^{i-1}}^{2^i}(x), & \text{если } x \in \{\frac{1}{2^i}\} \times I, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда мощность любой орбиты не превосходит 2, однако действие G не пропускается ни через какое действие компактной или конечной группы. Теперь определим естественное условное ожидание E на $A = C_0(X)$ формулой

$$E(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{g \in \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{Z}_2)_i} f(gx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{(n-1)} \left(\sum_{g \in \mathbb{Z}_2} f(gx) \right) = \frac{f(e \circ x) + f(g \circ x)}{2} \quad (x \in X).$$

Мы получаем естественное условное ожидание конечного индекса со структурной константой $K(E) = 2$, которое также имеет алгебраически конечный индекс. Существенный момент заключается в том, что E может быть также индуцировано действием группы $\mathbb{Z}_2$ на X , которое отличается от исходного действия группы, несмотря на тот факт, что действие исходной группы не может быть заменено никаким действием конечной группы.

Пример 4.4. Пусть $G = \mathbb{Z}$ действует на $X = \mathbb{R}$ сдвигами. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — следующая положительная четная функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [n + \frac{1}{n+1}, n + 1 - \frac{1}{n+1}] \quad (n \geq 0), \\ 0, & \text{если } x = n \quad (n \geq 0), \\ \text{линейна} & \text{в остальных интервалах.} \end{cases}$$

Тогда $E(f)(0+i) = 0$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Для $x \notin \mathbb{Z}$ имеется такой номер $j_0 \in \mathbb{N}$, что $f(x+j) = 1$ для j с $|j| > j_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} E(f)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{j=n} f(x+i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-k_0}^{k_0} f(x+i) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k_0 < |j| \leq n} f(x+i) \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-k_0)}{2n+1} = 1. \end{aligned}$$

Объединяя, получаем, что

$$E(f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

т.е. является разрывной функцией.

Следующий пример описывает действие аменабельной группы G на компактном хаусдорфовом пространстве X , индуцирующее нетривиальное условное ожидание E на C^* -алгебре $C_0(X)$, которое не может быть определено действием конечной группы на X .

Пример 4.5. Рассмотрим счетную дискретную группу $G = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_k$. Обозначим через g_k образующую k -го слагаемого $\mathbb{Z}_k \subset G$. Пусть X — бесконечное несвязное объединение (по $k \in \mathbb{N}$) несвязных объединений k экземпляров интервала $I_k = [0, 1]$ каждое. Обозначив через $a_j^i(k)$ поточечное

отождествление интервалов I_k^i и I_k^j на k -м месте, зададим действие G на X формулой

$$g_k(x) = \begin{cases} a_{i+1}^i \bmod k(k)(x), & \text{если } x \in I_k^i, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Конечно, в этом случае характеристическое число $K(E) = +\infty$.

Теорема 4.6. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и дискретная группа G действует равномерно-непрерывно на X , причем все орбиты состоят из одного и того же конечного числа точек. Тогда гильбертов $C^G(X)$ -модуль $\{C(X), E(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$ является конечно-порожденным и проективным.

Доказательство. Мы следуем первоначальному доказательству Вататани для случая свободного действия конечной группы [27, Proposition 2.8.1]. Каждое компактное хаусдорфово пространство нормально ([24, Theorem VI.22.8]). Таким образом, можно применить лемму Урысона (ср. [24, Proposition V.17.4]). Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 4.7. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и дискретная группа G действует равномерно-непрерывно на X , причем все орбиты состоят из одного и того же конечного числа точек. Тогда для любого $x \in X$ и $g \in G_x$ имеется открытая окрестность U_x точки x , на которой g действует как тождественное отображение.

Доказательство. Рассмотрим стабилизатор $G_x \subset G$. Он является подгруппой конечного индекса, индекс которой равен $G : G_x = \#(Gx) = n$. Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$ — орбита x и $h_i \in G$ — такие элементы, что $h_i x = x_i$. Зафиксируем $g_0 \in G_x$ и предположим, что каждая окрестность U_x точки x содержит такую точку $y \in U_x$, что $g_0 y \neq y$. Выберем такие окрестности U_{x_i} точек x_i , что $U_{x_i} \cap U_{x_j} = \emptyset$ для $i \neq j$. Существует такая окрестность $V_x \subseteq U_x$ точки x , что $h_i(V_x) \subseteq U_{x_i}$. В соответствии с предположением G действует на X равномерно-непрерывно, так что выберем такую окрестность $W_x \subseteq V_x$ точки x , что $g(W_x) \subseteq V_x$ для каждого $g \in G_x$. Для $y \in W_x$ с $g_0 y \neq y$ орбита Gy содержит по крайней мере $n + 1$ различных точек: $\{g_i y : i = 1, \dots, n\} \in U_{x_i}$ и $\{y, g_0 y\} \in V_x$. Это противоречит тому, что мощности орбит ограничены n , и доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.8. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и дискретная группа G действует равномерно-непрерывно на X , причем все орбиты состоят из одного и того же конечного числа точек. Тогда для любого $x \in X$ существует такая окрестность V_x , что действие G_x на V_x — тождественное отображение.

Доказательство. Для каждого $g \in G_x$ положим $U_x(g) = \{y \in X : gy = y\}$. Предположим противное, т.е. что множество $\bigcap_{g \in G_x} U_x(g)$ не содержит никакой окрестности точки x или что каждая окрестность точки x содержит такую точку z , что для некоторого $g_z \in G_x$ имеем $g_z z \neq z$. Рассмотрим окрестность V_x точки x и такие окрестности $\{U_{g_i x}\}$ для фиксированных представителей $g_i \in G$ ($g_i \neq e$) классов смежности G/G_x , что их попарные пересечения пусты и $g_i(V_x) \subseteq U_{g_i x}$ (ср. с доказательством леммы 4.7). В соответствии с предположением G действует равномерно-непрерывно на X , так что существует такая окрестность $W_x \subseteq V_x$ точки x , что $g(W_x) \subseteq V_x$ для каждого $g \in G_x$. Определим $U_x = \bigcup_{g \in G_x} g(W_x) \subseteq V_x$; это G_x -инвариантная открытая окрестность $x \in X$. Предположение $g_z z \neq z$ для некоторого $z \in U_x$, $g_z \in G_x$, влечет существование орбиты z , состоящей из по крайней мере $n + 1$ точек, что противоречит условиям леммы. $\square$

Пусть $U_x \subset V_x$ — такие окрестности точки x , что действие G_x на V_x — тождественное отображение. Тогда существует такая функция $f_x \in C(X)$, что $\text{supp } f_x \subset V_x$ и $f_x|_{U_x} = 1$. Для любого $g \in G$ мы имеем или $(gV_x) \cap V_x = \emptyset$, или $gV_x \equiv V_x$, что влечет

$$\alpha_g(f_x) \cdot f_x = \begin{cases} \alpha_g(f_x)^2, & \text{если } gx = x, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где через α обозначено действие группы G на функциях, $\alpha_g(f)(x) = f(gx)$. Выберем конечное покрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ пространства X множествами указанного вида и положим

$$v = \sum_{i=1}^k f_{x_i} \geq 1, \quad u_i = v^{-\frac{1}{2}}(f_{x_i})^{\frac{1}{2}} \in C(X).$$

Заметим, что для представителей g_i классов смежности G/G_x мы имеем корректное отображение

$$E_G(f)(x) = \frac{1}{\#(Gx)} \sum_{i=1}^n f(g_i x)$$

для каждого $x \in X$, $f \in C(X)$, благодаря фиксированной мощности орбит действия на X и лемме 4.7. Это — условное ожидание на $C(X)$. Далее, для каждой функции $f \in C(X)$ имеем равенства

$$\sum_{i=1}^n u_i \cdot E_G(u_i^* f) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_i(x) u_i^*(g_j x) f(g_j x) \right) = f, \quad E_G(u_i^* u_j) = \delta_{i,j}.$$

Следовательно, гильбертов $C^G(X)$ -модуль $\{C(X), E_G(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$ имеет $\{u_1, \dots, u_n\}$ в качестве квази-базиса, и, таким образом, этот модуль является конечно-порожденным и проективным. $\square$

Заметим, что конечная порожденность и проективность влечет автодуальность гильбертова $C^G(X)$ -модуля $\{C(X), E_G(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$. В случае общих действий группы невозможно ожидать, что результирующее действие на C^* -алгебре $A = C(X)$ приведет к условному ожиданию E_G на A , превращающему его в автодуальный гильбертов $C^G(X)$ -модуль. Однако если существует $K(E_G) < \infty$ (т.е. когда модуль A полон относительно нормы, заданной соответствующим C^* -значным скалярным произведением), то мы можем ожидать его C^* -рефлексивности. Можно доказать следующий факт.

Теорема 4.9. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и G — дискретная группа, действующая равномерно-непрерывно на X . Если G действует так, что мощности всех орбит равномерно ограничены некоторым номером n и число точек с мощностями орбит, меньшими, чем n , конечно, то гильбертов $C^G(X)$ -модуль $\{C(X), E_G(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$ является $C^G(X)$ -рефлексивным.

В следующем разделе мы докажем окончательный вариант этой теоремы, принадлежащий В. Сергину.

5. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ $C(X)$ НАД $C_\Gamma(X)$

Замечание 5.1. Рассмотрим равномерно-непрерывное действие Γ на хаусдорфовом компакте X с ограниченной мощностью орбит. Разовьем конструкцию, которая использовалась в леммах 4.7 и 4.8. Для любой точки $x^0 \in X$ обозначим через U_{x^0} такую ее окрестность, которая инвариантна под действием стабилизатора Γ_{x^0} данной точки и не пересекается со своими образами при действии элементов, не лежащих в Γ_{x^0} . Такая окрестность существует в силу равномерной непрерывности: рассмотрим окрестность U'_{x^0} со всеми свойствами кроме инвариантности, затем выберем по определению равномерной непрерывности W_{x^0} с $\Gamma_{x^0} W_{x^0} \subset U'_{x^0}$ и положим $U_{x^0} := \Gamma_{x^0} W_{x^0}$. В этом случае можно взять представители g_j ($j = 1, \dots, \#\Gamma_{x^0}$) классов смежности по стабилизатору, и окрестности, фигурирующие в этой конструкции примут вид $U_{x_j^0} = g_j U_{x^0}$, $x_j^0 = g_j(x^0)$, $\{x_j^0\}$ — орбита x^0 . Выберем непрерывную функцию $\varphi_{x^0} : X \rightarrow [0, 1]$, $\varphi_{x^0} \in H = \{C(X), E_\Gamma(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$, удовлетворяющую соотношениям

$$\varphi_{x^0}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin U_{x^0}, \\ 1, & x = x^0. \end{cases}$$

Поскольку при ограниченности мощности орбит, как показано ранее, E определено, можно считать, что φ_{x^0} является G_{x^0} -инвариантной. Пусть $\varphi_j(x) = \varphi_{x^0}(g_j^{-1}x)$, так что $\text{supp } \varphi_j \subset U_{x_j^0}$; тогда $\varphi_U := \sum_j \varphi_j$ инвариантна, равна 1 на орбите x^0 и сосредоточена в $\bigcup_j U_{x_j^0}$. Действительно, все свойства,

кроме инвариантности, очевидны. Если же $g \in \Gamma$ и $y \in U_{x_j^0}$, то $y = g_j z$, где $z \in U_{x^0}$, и $gg_j = g_k h$ для некоторых g_k и $h \in G_{x^0}$, так что

$$\varphi_U(gy) = \varphi_k(g_k h z) = \varphi_{x_0}(h z) = \varphi_{x_0}(z) = \varphi_j(y) = \varphi_U(y).$$

Аналогично, можно выбрать окрестности $V_{x_j^0}$ с такими же свойствами, как у $U_{x_j^0}$, и входящие в $U_{x_j^0}$ вместе со своими замыканиями; тогда можно взять вместо φ_{x_0} функцию $\varphi_{x_0}^V$, равную 1 на V_{x^0} и с носителем в U_{x^0} и получить соответствующую функцию φ_U^V .

Теорема 5.2 (см. [5]). Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и Γ — дискретная группа, действующая равномерно-непрерывно на X . Если Γ действует так, что количества элементов всех орбит равномерно ограничены некоторым номером N , то гильбертов $C_\Gamma(X)$ -модуль $H = \{C(X), E_\Gamma(\langle \cdot, \cdot \rangle)\}$ является $C_\Gamma(X)$ -рефлексивным.

Доказательство. Обозначим через $B(X)$ пространство всех ограниченных функций на X , а через $\tilde{H}$ — пространство всех отображений из H в $B(X)$.

Выберем U_x и φ_x для любой $x \in X$ согласно замечанию 5.1. Определим отображения $\xi : H' \rightarrow B(X)$ и $\eta : B(X) \rightarrow \tilde{H}$ следующим образом:

$$\xi(F)(x) = \# \Gamma x \cdot (F(\varphi_x))(x), \quad (3)$$

$$\eta(f)(h)(x) = \frac{1}{\# \Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} f(x_i) h(x_i), \quad (4)$$

где $F \in H'$, а через $\# \Gamma x$ обозначено, как и ранее, число точек в орбите. Проверим корректность определения ξ , т.е. что функция $f = \xi(F)$ является ограниченной. Действительно, $|f(x)| \leq N |F(\varphi_x)(x)| \leq N \|F\|$.

Докажем, что $\eta(\xi(F)) = F$. Возьмем элемент $h \in C(X)$ и точку $x \in X$. Тогда

$$\begin{aligned} F(h)(x) &= F \left(h - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \varphi_{x_i} + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \varphi_{x_i} \right) (x) \\ &= F \left(h - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \varphi_{x_i} \right) (x) + F \left(\sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \varphi_{x_i} \right) (x) = \\ &= F(h_1)(x) + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) F(\varphi_{x_i})(x) = F(h_1)(x) + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) F(\varphi_{x_i})(x_i) = \\ &= F(h_1)(x) + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \frac{1}{\# \Gamma x} f(x_i) F(h_1)(x) + \eta(\xi(F))(h)(x), \end{aligned}$$

где $h_1 = h - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \varphi_{x_i}$. Здесь мы учли, что $F(\varphi_{x_i}) \in C^\Gamma(X)$. Заметим, что функция h_1 тождественно равна нулю на орбите точки x . Тогда $F(h_1)$ тождественно равна нулю на орбите точки x . Действительно, выберем в соответствии с замечанием 5.1 U_{x_j} столь малыми, что $|h_1| < \varepsilon$ на их объединении, так что $\|h_1 \varphi_U\| < \varepsilon$ для соответствующей инвариантной функции φ_U . Получаем для произвольного ε

$$\|F(h_1)(x)\| = \|F(h_1) \varphi_U(x)\| = \|F(h_1 \varphi_U)(x)\| < \varepsilon \|F\|.$$

В силу произвольности x отсюда вытекает, что $\eta \circ \xi = \text{Id}$ и $\eta(\xi(H')) = H'$.

Докажем, что отображение η инъективно. Пусть $f \neq 0 \in B(X)$, так что для некоторой точки $x^0 \in X$ имеем $f(x^0) \neq 0$. Выберем непрерывную функцию $h \in H$, удовлетворяющую условиям

$$h(x^0) = 1, \quad h(x_i^0) = 0 \quad (x_i^0 \in \Gamma x^0, \quad x_i^0 \neq x^0).$$

Тогда $\eta(f)(h)(x^0) = \frac{1}{\# \Gamma x^0} f(x^0) \neq 0$, так что $\eta(f) \neq 0$ и $\text{Ker } \eta = 0$. Следовательно,

$$\xi : H' \cong \text{Im } \xi \subset B(X), \quad \eta : \text{Im } \xi \cong H' \subset \tilde{H}. \quad (5)$$

Лемма 5.3. *Образ ξ состоит из таких функций $f \in B(X)$, что для любой точки $x_0 \in X$ существует такая ее окрестность U_{x_0} , что*

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\#\Gamma x_0}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x \cap U_{x_0}} f(x_i). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условию (6). Для доказательства принадлежности $f \in \text{Im } \xi$ достаточно показать, что в этом случае $\eta(f) \in H'$. Тогда из (5) мы сразу получим $\xi\eta(f) = f$.

Первое из этих утверждений означает, что $\eta(f)(h)$ является непрерывной инвариантной функцией для любой функции $h \in H$, а соответствие $h \mapsto \eta(f)(h)$ ограничено и линейно над $C^\Gamma(X)$. Инвариантность сразу вытекает из формулы (4), а непрерывность — из следующей выкладки, где мы обозначим через x_i точки орбиты x , через x_i^0 — точки орбиты x_0 , причем будем считать, что $x \in U_{x_0}$ (см. замечание 5.1), так что $\Gamma x \subset \bigcup_i U_{x_i^0}$ и можно положить $\varepsilon_{x_0}^j := \max_{x_i \in U_{x_j^0}} |h(x_i) - h(x_j^0)|$,

($j = 1, \dots, \#\Gamma x_0$). Заметим, что $\varepsilon_{x_0}^j \rightarrow 0$ при уменьшении окрестности U_{x_0} (и, соответственно, $U_{x_j^0}$). Тогда

$$\begin{aligned} |\eta(f)(h)(x) - \eta(f)(h)(x_0)| &= \left| \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_i f(x_i)h(x_i) - \frac{1}{\#\Gamma x_0} \sum_j f(x_j^0)h(x_j^0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_j \left(\sum_{x_i \in \Gamma x \cap U_{x_j^0}} f(x_i)h(x_i) \right) - \frac{1}{\#\Gamma x_0} \sum_j f(x_j^0)h(x_j^0) \right| \leq \\ &\leq \sup |f(y)| \cdot \max |\varepsilon_{x_0}^j| + \left| \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_j \left(\sum_{x_i \in \Gamma x \cap U_{x_j^0}} f(x_i)h(x_j^0) \right) - \frac{1}{\#\Gamma x_0} \sum_j f(x_j^0)h(x_j^0) \right| \leq \\ &\leq \|f\| \cdot \max |\varepsilon_{x_0}^j| + \left| \frac{1}{\#\Gamma x_0} \sum_j h(x_j^0) \left(\left[\frac{\#\Gamma x_0}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x \cap U_{x_j^0}} f(x_i) \right] - f(x_j^0) \right) \right|. \end{aligned}$$

В силу (6) (с x_j^0 вместо x^0) получаем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |\eta(f)(h)(x) - \eta(f)(h)(x_0)| = 0.$$

Из формулы (4) сразу следует аддитивность $\eta(f)$. Пусть теперь $r \in C^\Gamma(X)$ — инвариантная функция. Тогда

$$\eta(f)(hr)(x) = \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} f(x_i)h(x_i)r(x_i) = \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} f(x_i)h(x_i)r(x) = \eta(f)(h)(x)r(x)$$

и $\eta(f)$ является $C^\Gamma(X)$ -функционалом.

Поскольку для любого $h \in H$ имеем

$$\eta(f)(h)(x) = \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} f(x_i)h(x_i) \leq \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} |f(x_i)| \cdot |h(x_i)| \leq \|f\| \cdot \|h\|,$$

$\eta(f)$ — непрерывный функционал. Таким образом, $\eta(f) \in H'$.

Обратно, докажем, что для любой функции f , лежащей в образе ξ , выполнено условие (6). Для f существует такой функционал $F \in H'$, что $f = \xi(F)$. Именно, $F = \eta(f)$. Рассмотрим произвольную точку x^0 и выберем для нее окрестность $V_{x^0} \subset U_{x^0}$ (см. замечание 5.1). Возьмем функцию $\varphi_{x^0}^V$ (см. замечание 5.1) и подействуем F на нее. Тогда при $x \in V_{x^0}$ функция, задаваемая

формулой

$$F(\varphi_{x^0}^V)(x) = \eta(f)(\varphi_{x^0}^V) \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_i f(x_i) \varphi_{x^0}^V(x_i) = \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x \cap V_{x^0}} f(x_i),$$

непрерывна как образ функционала F . Это эквивалентно условию

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x \cap V_{x^0}} f(x_i) = \frac{1}{\#\Gamma x^0} \sum_{z \in \Gamma x^0 \cap V_{x^0}} f(z) = \frac{1}{\#\Gamma x^0} f(x^0).$$

Таким образом, для f выполнено (6) и лемма 5.3 доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы и дадим функциональное описание H'' . Определим отображения $\nu : H'' \rightarrow B(X)$ и $\mu : B(X) \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}$ (где $\tilde{\mathbf{H}}$ — пространство всех отображений из H'' в $B(X)$) с помощью формул

$$\nu(\mathbf{F})(x) = \#\Gamma x \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{f}_x))(x), \quad \mu(f)(\mathbf{h})(x) = \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} f(x_i) h(x_i),$$

где $\mathbf{f}_x = \eta(\varphi_x) \in H'$, $x \in X$, $h = \xi \mathbf{h}$, так что $\mathbf{h} = \eta(h)$. Заметим, что при этом

$$\|h\| = \sup_x |\xi(\mathbf{h})(x)| = \sup_x \#\Gamma x \cdot |((\mathbf{h})(\varphi_x))(x)| \leq N \cdot \|\mathbf{h}\|. \quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{h})(x) &= \mathbf{F} \left(\mathbf{h} - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{f}_{x_i} + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{f}_{x_i} \right) (x) = \\ &= \mathbf{F} \left(\mathbf{h} - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{f}_{x_i} \right) (x) + \mathbf{F} \left(\sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{f}_{x_i} \right) (x) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{h}_1)(x) + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{F}(\mathbf{f}_{x_i})(x) = \mathbf{F}(\mathbf{h}_1)(x) + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{F}(\mathbf{f}_{x_i})(x_i) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{h}_1)(x) + \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \frac{1}{\#\Gamma x} \nu(\mathbf{F})(x_i) = \mathbf{F}(\mathbf{h}_1)(x) + \mu \nu(\mathbf{F})(\mathbf{h})(x), \end{aligned}$$

где $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h} - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \mathbf{f}_{x_i}$ и использована инвариантность функций $\mathbf{F}(\mathbf{f}_{x_i})$. При этом для любой точки $y \in \Gamma x$ имеем

$$h_1(y) := \xi \mathbf{h}_1(y) = h(y) - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \xi(\mathbf{f}_{x_i})(y) = h(y) - \sum_{x_i \in \Gamma x} h(x_i) \varphi_{x_i}(y) = h(y) - h(y) = 0.$$

Следовательно, функция $\mathbf{F}(\mathbf{h}_1)$ равна 0 на этой орбите. Действительно, выберем в соответствии с замечанием 5.1 U_{x_j} столь малыми, что $|h_1| < \varepsilon$ на их объединении, так что $\|h_1 \varphi_U\| < \varepsilon$ для соответствующей инвариантной функции φ_U , а

$$|[\mathbf{h}_1 \varphi_U](f)(x)| = |(\eta(h_1 \varphi_U))(f)(x)| = \left| \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} (h_1 \varphi_U)(x_i) f(x_i) \right| < \varepsilon \|f\|.$$

Таким образом, получаем для произвольного ε

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{h}_1)(x)\| = \|\mathbf{F}(\mathbf{h}_1) \varphi_U(x)\| = \|\mathbf{F}(\mathbf{h}_1 \varphi_U)(x)\| < \varepsilon \|\mathbf{F}\|.$$

Итак,

$$\mu \nu = \text{id}. \quad (8)$$

Докажем теперь, что μ инъективно. Пусть $f \neq 0 \in B(X)$, так что для некоторой точки $x^0 \in X$ имеем $f(x^0) \neq 0$. Тогда

$$\mu(f)(\mathbf{f}_{x^0})(x^0) = \frac{1}{\#\Gamma x^0} \sum_{x_j^0 \in \Gamma x^0} \xi(\mathbf{f}_{x^0})(x_j^0) f(x_j^0) = \frac{1}{\#\Gamma x^0} \sum_{x_j^0 \in \Gamma x^0} \varphi_{x^0}(x_j^0) f(x_j^0) = \frac{1}{\#\Gamma x^0} f(x^0) \neq 0;$$

поэтому $\mu(f) \neq 0$ и $\text{Ker } \mu = 0$.

Пусть $f \in \text{Im } \nu$, т.е. существует такой функционал $\mathbf{F} \in H''$, что $f = \nu(\mathbf{F})$. В силу инъективности μ и соотношения (8), $\mathbf{F} = \mu(f)$. Для произвольной точки x выберем V_x и φ_x^V (см. замечание 5.1). Функция $\mathbf{F}(\eta(\varphi_x^V))$ является непрерывной, причем в окрестности x имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\eta(\varphi_x^V))(y) &= \mu(f)(\eta(\varphi_x^V))(y) = \frac{1}{\#\Gamma y} \sum_{y_i \in \Gamma y} f(y_i) \xi \eta(\varphi_x^V)(y_i) = \\ &= \frac{1}{\#\Gamma y} \sum_{y_i \in \Gamma y} f(y_i) (\varphi_x^V)(y_i) = \frac{1}{\#\Gamma y} \sum_{y_i \in \Gamma y \cap V_x} f(y_i), \end{aligned}$$

откуда, как было уже показано, следует, что для f выполнено условие (6). При этом f ограничена, поскольку

$$|f(x)| \leq \frac{N}{\#\Gamma x} |f(x)| = N |\mathbf{F}(\mathbf{f}_x)(x)| \leq N \|\mathbf{F}\|.$$

Таким образом, $f \in \xi(H')$. Более того, из этого следует, что $\nu : H' \rightarrow \nu(H') \subset B(X)$ непрерывно, если последнее пространство снабжено равномерной нормой. С другой стороны, с учетом (7) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\| &= \sup_{\|\mathbf{h}\|=1} \|\mathbf{F}(\mathbf{h})\| = \sup_{x, \|\mathbf{h}\|=1} \|\mu(f)(\mathbf{h})(x)\| = \sup_{x, \|\mathbf{h}\|=1} \left\| \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_i \in \Gamma x} f(x_i) h(x_i) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|\mathbf{h}\|=1} N \cdot \|f\| \cdot \|\mathbf{h}\| \leq N^2 \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Таким образом, H' изоморфно образу $\nu(H')$, снабженному равномерной нормой.

Докажем, что всякая функция $f \in \text{Im } \nu$ непрерывна. Пусть $x \in X$. Можно считать, что $f = 0$ на Γx . Действительно, непосредственно из определения ν видно, что f инвариантна, а $\nu\mu(1) = 1$ для тождественной единицы, так что в противном случае изменим f на константу. По доказанному, можно рассмотреть $\mathbf{F} := \mu(f) \in H''$ и $F = \eta(\bar{f}) \in H'$. Тогда функция

$$\mathbf{F}(F)(x) = \frac{1}{\#\Gamma x} \sum_{x_j \in \Gamma x} |f(x_j)|^2$$

непрерывна и инвариантна.

Пусть x^a — направленность точек из X , сходящаяся к x^0 . Тогда

$$\lim_a \frac{1}{\#\Gamma x^a} \sum_{x_j^a \in \Gamma x^a} |f(x_j^a)|^2 = \frac{1}{\#\Gamma x^0} \sum_{x_i^0 \in \Gamma x^0} |f(x_i^0)|^2 = 0$$

а значит,

$$\lim_a \sum_{x_j^a \in \Gamma x^a} |f(x_j^a)|^2 = 0$$

и, в частности,

$$\lim_a f(x^a) = 0.$$

Следовательно, функция f непрерывна в произвольной точке x . Итак, $f \in C(X)$ и $H = H''$. $\square$

6. ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В этом разделе мы получим некоторые теоремы, обратные к основным утверждениям предыдущих разделов.

Предположим, что Γ — дискретная счетная группа и X — локально-компактное хаусдорфово Γ -пространство. Обозначим через $M_\Gamma(f)$ (или просто $M(f)$) инвариантное среднее ограниченной функции $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, если оно существует (если Γ аменабельна или f почти периодична). Пусть, как и ранее, $C^\Gamma(X)$ — алгебра непрерывных инвариантных функций, так что алгебра всех непрерывных функций $C(X)$ является модулем над $C^\Gamma(X)$. Обозначим через L_g левый сдвиг на функциях, заданных на группе Γ : $(L_g\varphi)(h) := \varphi(gh)$.

Теорема 6.1 (комбинация лемм 3.9 и 3.11 и теоремы 3.12). *Предположим, что дискретная группа Γ действует на локально-компактном хаусдорфовом пространстве X таким образом, что $k := \max\{\#(\Gamma x) : x \in X\} < +\infty$. Тогда E_Γ корректно определено.*

Если X — нормальное пространство, то $K(E_\Gamma) = k$. Следовательно, по предложению 2.8, $C(X)$ — гильбертов модуль над $C^\Gamma(X)$.

Начиная с этого места, X компактно и сепарабельно, следовательно, метризуемо и нормально. Напомним следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть Z — бесконечное компактное хаусдорфово пространство. Не существует такой структуры (полного) гильбертова пространства на $C(Z)$, что соответствующая норма удовлетворяет $\|f\|_h \leq \|f\|_{C(Z)}$.*

Доказательство. Согласно [1, теорема II.2.5] две нормы должны быть эквивалентны. Но модуль $C(Z)$ рефлексивен если и только если пространство Z конечно [1, IV.13.15]. $\square$

Теорема 6.3. *Пусть Γ — дискретная группа, действующая равномерно-непрерывно на компактном хаусдорфовом (следовательно нормальном) топологическом пространстве X . Тогда следующие свойства эквивалентны:*

- (i) *количества элементов всех орбит равномерно ограничены;*
- (ii) *E_Γ корректно определено и существует такое конечное вещественное число $K \geq 1$, что отображение $(K \cdot E - \text{id}_A)$ является положительным;*
- (iii) *E_Γ корректно определено и соответствующий предгильбертов модуль является полным;*
- (iv) *E_Γ корректно определено и соответствующий предгильбертов модуль является рефлексивным.*

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (iv) доказана в теореме 5.2, (iv) $\Rightarrow$ (iii) очевидна, а эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) доказана в предложении 2.8.

Чтобы доказать импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i), предположим противное. Заметим, что, если $Y \subset X$ является замкнутым инвариантным подпространством, то предгильбертов $C^\Gamma(Y)$ -модуль $C(Y)$ также полон (см. лемму 7.2).

Сначала предположим, что имеется бесконечная орбита Γx . Взяв $Y = \overline{\Gamma x}$ и применив сделанное выше замечание, получаем, что $C(Y)$ может быть снабжено структурой гильбертова пространства. Противоречие с теоремой 6.2.

Другой случай — конечных орбит произвольного количества элементов. Здесь можно рассуждать как в [12, теорема 2.12]. По предложению 2.8 существует такое вещественное число $K \geq 1$, что $K \cdot E_\Gamma(\varphi) \geq \varphi$ для любой положительной функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Выберем точку $x \in X$ с $k_x := \#(\Gamma x) > K$. Тогда можно найти такие окрестности U_x точки x , что $g_i U_x \cap g_j U_x = \emptyset$ для $i \neq j$ и $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_m\} = T_x := \Gamma/\Gamma_x$, где Γ_x — подгруппа изотропии. Для непрерывной неотрицательной функции f с носителем внутри U_x (существующей по [24, Theorem V.17.4]) имеем неравенство

$$K \cdot E_\Gamma(f)(x) = K \frac{1}{k_x} \cdot \sum_{g_a \in T_x} f(g_a x) < f(x).$$

Это противоречит определению K . $\square$

Теорема 6.4. Пусть Γ — дискретная группа, действующая равномерно-непрерывно на компактном хаусдорфовом связном топологическом пространстве X . Предположим, что усреднение по орбитам определяет структуру автодуального гильбертова модуля на $C(X)$ над алгеброй непрерывных инвариантных функций $C^\Gamma(X)$. Пусть мощность орбит ограничена. Тогда она одинакова для всех орбит.

Доказательство. Пусть $W \subset X$ — открытое подмножество, образованное всеми точками орбит максимальной длины k . Предположим, что $W \neq X$, и возьмем $x \in \overline{W} \cap (X \setminus W)$ (так как X связно, то это возможно).

Тогда для любой окрестности U точки x существуют такие $y \in U \cap W$ и $g \in \Gamma_x$, что $gy \neq y$, где Γ_x — стабилизатор x . Действительно, предположим противное: существует такая окрестность U , что любой элемент $y \in U \cap W$ является Γ_x -инвариантным, т.е. $\Gamma_x \subset \Gamma_y$. Тогда $\#(\Gamma_x) \geq \#(\Gamma_y)$, и мы получили противоречие.

Итак, мы можем выбрать такие последовательности элементов $y_n \in W$ различных орбит (из-за ограниченности мощности орбит) и $g_n \in \Gamma_x$, что $y_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) и $y'_n := g_n y_n \neq y_n$. Поскольку X нормально, мы можем выбрать (переходя к подпоследовательности, если это необходимо) две последовательности открытых окрестностей $W \supset V_n \ni y_n$ и $V'_n = g_n V_n \ni y'_n$, не пересекающихся друг с другом и с x и удовлетворяющих следующему условию: для любой окрестности V точки x множества V_n и V'_n находятся внутри V для больших n . Возьмем непрерывные функции

$$\begin{aligned} \varphi_n : X &\rightarrow [0, 1], & \varphi_n(y_n) &= 1, & \text{supp } \varphi_n &\subset V_n, \\ \varphi'_n : X &\rightarrow [-1, 0], & \varphi'_n(y'_n) &= -1, & \text{supp } \varphi'_n &\subset V'_n, \\ \varphi'_n(g_n z) &= -\varphi_n(z). \end{aligned}$$

Определим функцию $\varphi : X \rightarrow [-1, 1]$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_n & \text{на } V_n, \\ \varphi'_n & \text{на } V'_n, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Она непрерывна везде, кроме x . Тогда $F(f) := E_\Gamma(\varphi f)$ является $C^\Gamma(X)$ -функционалом на $C(X)$. Он не может быть представлен как $E_\Gamma(gf)$ с $g \in C(X)$. Действительно, искомый элемент g должен совпасть с φ на открытом инвариантном множестве W . Противоречие с автодуальностью. $\square$

Лемма 6.5. Предположим, что X — компактное нормальное пространство и $C(X)$ — конечно-порожденный модуль над $C^\Gamma(X)$. Тогда количество элементов каждой орбиты конечно.

Доказательство. Предположим, что некоторая орбита бесконечна. Тогда (алгебраическая) размерность пространства непрерывных функций на ней (или ее замыкании) бесконечна. Следовательно, оно не может быть конечно-порожденным над константами (инвариантными функциями). По теореме Титце все эти функции — ограничения некоторых непрерывных функций на замыкании орбиты. Следовательно, то же утверждение верно для всех функций. $\square$

Определение 6.6. C^* -Алгебра A называется *модульно-бесконечной* (MI), если каждый гильбертов A -модуль проективен и конечно порожден, если и только если он автодуален.

Теорема 6.7. Пусть Γ — дискретная группа, действующая равномерно-непрерывно на компактном связном хаусдорфовом топологическом пространстве X . Предположим, что усреднение по орбитам определяет структуру автодуального гильбертова модуля на $C(X)$ над алгеброй $C^\Gamma(X)$. Пусть $C^\Gamma(X)$ является MI-алгеброй. Тогда все орбиты имеют одно и то же количество элементов.

Доказательство. По лемме 6.5 все орбиты конечны. Предположим, что имеются орбиты мощности k , а также и меньшей. Пусть $W \subset X$ — открытое подмножество, образованное всеми точками орбит с количеством элементов $\geq k$. Тогда $W \neq X$; возьмем $x \in \overline{W} \cap (X \setminus W)$ (так как X связно, это

возможно). Так что $\#(\Gamma X) = m < k$. Доказательство заканчивается аналогично доказательству теоремы 6.4. $\square$

7. ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ГЛОБАЛИЗАЦИЯ

Оказывается, мы можем получать факты относительно количества элементов орбит из чисто алгебраических данных.

Начнем со следующей очевидной леммы, которая формулирует идею доказательства, использованного в предыдущем параграфе, в более общем виде.

Лемма 7.1. Пусть $C(X)$ является m -порожденным над $C^\Gamma(X)$. Предположим, что Y — замкнутое Γ -инвариантное подпространство X . Тогда $C(Y)$ является m -порожденным над $C^\Gamma(Y)$.

Лемма 7.2. Предположим, что ожидание E_Γ корректно определено и соответствующий предгильбертов модуль является полным. Если $Y \subset X$ — замкнутое инвариантное подпространство, то предгильбертов $C^\Gamma(Y)$ -модуль $C(Y)$ также полон.

Доказательство. По предложению 2.8 существует такое вещественное число $K \geq 1$, что $K \cdot E_\Gamma(\varphi) \geq \varphi$ для любой положительной функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть $\hat{\varphi} : Y \rightarrow \mathbb{C}$ — положительная функция. По теореме Титце, имеется положительное непрерывное продолжение $\hat{\varphi}$ до $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Имеем

$$K \cdot E_\Gamma(\varphi) \geq \varphi, \quad K \cdot E_\Gamma(\varphi)|_Y \geq \varphi|_Y, \quad K \cdot E_\Gamma(\hat{\varphi}) \geq \hat{\varphi}.$$

Применение предложения 2.8 в противоположном направлении завершает доказательство. $\square$

Лемма 7.3. Пусть орбита $Y = \Gamma x$ состоит ровно из k точек. Тогда $C(Y)$ — свободный k -порожденный модуль над $C^\Gamma(Y)$.

Доказательство. $C^\Gamma(Y) \cong \mathbb{C}$ и $C(Y) \cong \mathbb{C}^k$ как $\mathbb{C}$ -модуль. $\square$

Лемма 7.4. Пусть орбита $Y = \Gamma x$ бесконечна. Тогда $C(\bar{Y})$ не является конечно-порожденным модулем над $C^\Gamma(\bar{Y})$.

Доказательство. $C^\Gamma(\bar{Y}) \cong \mathbb{C}$ и алгебра непрерывных функций на бесконечном компактном хаусдорфовом пространстве бесконечно-порождена над $\mathbb{C}$. $\square$

Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 7.5. Пусть $C(X)$ является m -порожденным над $C^\Gamma(X)$. Тогда количество элементов каждой орбиты не превышает m .

Доказательство. Утверждение является комбинацией лемм 7.1, 7.3 и 7.4. $\square$

Теорема 7.6. Предположим, что действие Γ на X равномерно-непрерывно. Пусть $C(X)$ — конечно-порожденный проективный модуль над $C^\Gamma(X)$. Тогда все орбиты имеют одно и то же конечное количество элементов.

Доказательство. Согласно предложению 7.5 количества элементов орбит ограничены m . Следовательно, по теореме 6.1 ожидание E_Γ корректно определено и предгильбертов модуль $C(X)$ над $C^\Gamma(X)$ полон. Так как он конечно-порожден и проективен, то он автодуален. Итак, мы имеем оба свойства, и мы не нуждаемся в М1, чтобы закончить доказательство, как в теореме 6.7. $\square$

8. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Начиная с этого места, мы сосредоточимся на некоторых специфических свойствах действий (бесконечных) дискретных групп на компактных хаусдорфовых пространствах. Так как эти пространства метризуемы, обозначим через ρ некоторое расстояние на X . Конечно, рассмотрения могут быть сформулированы с использованием топологии и окрестностей вместо расстояния и ε -окрестностей.

В настоящем параграфе мы получим некоторые достаточные условия корректной определенности E_Γ .

Начнем с пары примеров.

Пример 8.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ состоит из двух окружностей

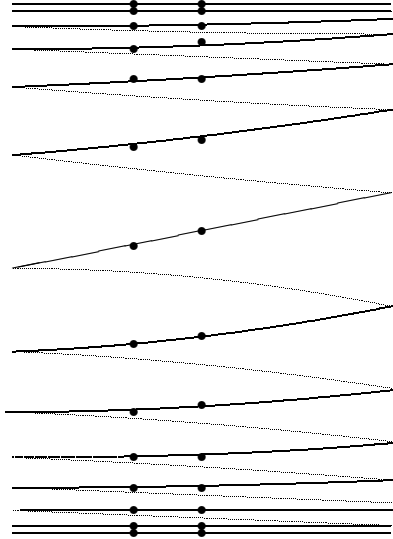
$$S_\pm : \begin{cases} x = \cos 2\pi t, \\ y = \sin 2\pi t, \\ z = \pm 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

и неравномерной спирали

$$\Sigma : \begin{cases} x = \cos 2\pi\tau, \\ y = \sin 2\pi\tau, \\ z = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, 1].$$

Пусть образующая g группы $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует на всех трех компонентах по правилу

$$t \mapsto t + \frac{1}{n}, \quad \tau \mapsto \tau + \frac{1}{n}.$$



Поскольку $\mathbb{Z}$ аменабельна, поточечно значение E_Γ определено. Предположим, что $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ — неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi|_{S_+} = 0, \quad \varphi|_\Sigma = 1 \quad \text{для} \quad t \leq 0, \quad \varphi|_{S_-} = 1.$$

Тогда $E_\Gamma(\varphi)|_{S_+} = 0$ и $E_\Gamma(\varphi)|_\Sigma > 0$. Значит, функция $E_\Gamma(\varphi)$ разрывна.

В этом примере действие не является равномерно-непрерывным; мы всегда подчеркивали, что такие действия являются плохими. К сожалению, следующий пример показывает, что ограничение на действие, чтобы оно было равномерно-непрерывным, не помогает.

Пример 8.2. Пусть X и Γ — как в предыдущем примере, но действие определяется формулой

$$t \mapsto t + \alpha, \quad \tau \mapsto \tau + \alpha,$$

где α — положительное иррациональное число. Тогда группа изотропии каждой точки X тривиальна. Следовательно, условие равномерной непрерывности выполнено автоматически. Однако, из той же самой функции φ получается разрывная $E_\Gamma(\varphi)$.

Замечание 8.3. Пусть в любом из этих примеров $x \in \Sigma$. Тогда для упомянутого φ функция $\varphi_x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ не является почти периодической. Конечно, для аменабельной $\Gamma = \mathbb{Z}$ это не препятствие, но подобное явление может происходить также и для неаменабельных групп.

Теперь мы вводим условие, которое является достаточным для преодоления указанных трудностей.

Определение 8.4. Действие группы Γ на метрическом пространстве X называется *устойчивым* (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in X$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\rho(gx, gy) < \varepsilon \quad \text{для любого } g \in \Gamma \quad \text{если } \rho(x, y) < \delta.$$

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 8.5. Если действие устойчиво, то оно равномерно-непрерывно.

Предложение 8.6. Пусть дискретная группа Γ действует устойчиво на компактном хаусдорфовом пространстве X . Предположим, что $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда для любого $x \in X$ функция $\varphi_x : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_x(g) := \varphi(gx)$, является почти периодической. Следовательно, определено ее среднее $M(\varphi_x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Поскольку X компактно и φ непрерывна, то она равномерно-непрерывна. В частности, существует такое $\tilde{\varepsilon}$, что

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon \quad \text{если } \rho(z, y) < \tilde{\varepsilon}. \quad (9)$$

Для каждой точки gx орбиты найдем ε_g -окрестность U_g со следующим свойством:

$$\rho(hgx, hy) < \tilde{\varepsilon} \quad \text{для любых } h \in \Gamma \quad \text{если } y \in U_g. \quad (10)$$

Пусть $U_{g_1}, \dots, U_{g_m}$ — конечное подпокрытие (замыкания) орбиты Γx . Тогда функции $L_{g_s} \varphi_x$, $s = 1, \dots, m$, образуют ε -сеть для множества $L_g \varphi_x$, $g \in \Gamma$ по отношению к равномерной норме. Действительно, для любого $g \in \Gamma$ мы можем выбрать такое $s_0 \in \{1, \dots, m\}$, что $y = gx \in U_{g_{s_0}}$. Тогда (9) и (10) дают

$$\sup_{h \in \Gamma} |(L_g \varphi_x)(h) - (L_{g_{s_0}} \varphi_x)(h)| = \sup_{h \in \Gamma} |\varphi(hgx) - \varphi(hg_{s_0}x)| < \varepsilon.$$

□

Теорема 8.7. Пусть дискретная группа Γ действует на компактном хаусдорфовом пространстве X . Если действие устойчиво, то E_Γ корректно определено.

Доказательство. По предложению 8.6 мы только должны проверить непрерывность по $x \in X$ среднего $M(\varphi_x)$. Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Напомним (ср. [6]), что можно выбрать такие $h_1, \dots, h_p \in \Gamma$, что равномерное расстояние на $\Gamma \times \Gamma$ между функцией

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_x : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{где } (D_h \psi)(g_1, g_2) := \psi(g_1 h g_2))$$

и некоторой константой меньше ε . В этом случае равномерное расстояние

$$\left\| M(\varphi_x) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_x \right\|_u < 2\varepsilon.$$

Выберем такую δ -окрестность U точки x , что

$$|\varphi(gy) - \varphi(gx)| < \varepsilon \quad \text{для любого } g \in \Gamma, y \in U.$$

Эта окрестность может быть найдена как в доказательстве предложения 8.6: $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon} \rightarrow \delta$. Более точно, сначала мы можем найти такое $\tilde{\varepsilon} > 0$, что $|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon$ всякий раз, когда $\rho(y, z) < \tilde{\varepsilon}$ (используется компактность X). Тогда, в силу устойчивости действия, мы можем найти для нашего фиксированного x такое число $\delta > 0$, что $\rho(gy, gx) < \tilde{\varepsilon}$ для любого $g \in \Gamma$ всякий раз, когда $\rho(y, x) < \delta$.

Тогда для любого $y \in U$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_y \right) (g_1, g_2) &= \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_x \right) (g_1, g_2) + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (\varphi_y(g_1 h_j g_2) - \varphi_x(g_1 h_j g_2)) = \\ &= \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_x \right) (g_1, g_2) + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (\varphi(g_1 h_j g_2 y) - \varphi(g_1 h_j g_2 x)). \end{aligned}$$

Каждый член второго слагаемого меньше ε . Следовательно, второе слагаемое меньше ε . Таким образом,

$$\left\| M(\varphi_x) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_x \right\|_u < 3\varepsilon.$$

Следовательно, рассматривая $M(\varphi_x)$ как произвольную постоянную, мы имеем

$$\left\| M(\varphi_y) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p D_{h_j} \varphi_x \right\|_u < 6\varepsilon.$$

Наконец,

$$|M(\varphi_y) - M(\varphi_x)| < 9\varepsilon.$$

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
2. Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.
3. Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. C^* -гильбертовы модули. — М.: Факториал, 2001.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1974.
5. Серегин В. Рефлексивность C^* -гильбертовых модулей, полученных с помощью действий группы// Вестн. Моск. ун-та, сер. I, мат., мех. (в печати).
6. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1975.
7. Andruchow E., Stojanoff D. Geometry of conditional expectations of finite index// Int. J. Math. — 1994. — 5. — С. 169–178.
8. Andruchow E., Stojanoff D. Conditional expectations of finite weak index/ Preprint, 1995.
9. Baillet M., Denizeau Y., Havet J.-F. Indice d'une esperance conditionnelle// Compos. Math. — 1988. — 66. — С. 199–236.
10. Bing-Ren Li. Introduction to operator algebras. — Singapore: World Scientific, 1992.
11. Frank M., Kirchberg E. On conditional expectations of finite index// J. Oper. Theory. — 1998. — 40, № 1. — С. 87–111.
12. Frank M., Manuilov V. M., Troitsky E. V. On conditional expectations arising from group actions// Zeitschr. Anal. Anw. — 1997. — 16. — С. 831–850.
13. Jolissaint P. Indice d'esperances conditionnelles et algèbres de von Neumann finies// Math. Scand. — 1991. — 68. — С. 221–246.
14. Jones V. Index of subfactors// Invent. Math. — 1981. — 41. — С. 1–25.
15. Kasparov G. G. Hilbert C^* -modules: theorems of Stinespring and Voiculescu// J. Oper. Theory. — 1980. — 4. — С. 133–150.
16. Khoshkam M. Hilbert C^* -modules and conditional expectations on crossed products// J. Austr. Math. Soc. (Ser. A). — 1996. — 61. — С. 106–118.
17. Lance E. C. Hilbert C^* -modules — a toolkit for operator algebraists/ London Math. Soc. Lect. Note Ser. — Cambridge Univ. Press, 1995. — 210.
18. Paschke W. L. Inner product modules over B^* -algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — 182. — С. 443–468.
19. Pedersen G. K. C^* -Algebras and their automorphism groups. — London–New York–San Francisco: Academic Press, 1979.
20. Pimsner M., Popa S. Entropy and index for subfactors// Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. — 1986. — 19. — С. 57–106.

21. Renault J. A groupoid approach to C^* -algebras/ Springer Lect. Notes Math. — 1980. — 793.
22. Rieffel M. Integrable and proper action on C^* -algebras, and square-integrable representations of groups/ E-print, 1998.
23. Rieffel M. A. Induced representations of C^* -algebras// Adv. Math. — 1974. — 13. — С. 176–257.
24. Rinow W. Lehrbuch der Topologie. — Berlin: Dt. Verlag Wiss., 1975.
25. Takesaki M. Theory of operator algebras. Vol. 1. — New York: Springer-Verlag, 1979.
26. Troitsky E. V. Discrete group actions and some properties of corresponding modules/ Preprint № 112. — Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 2000.
27. Watatani Y. Index for C^* -subalgebras/ Mem. Am. Math. Soc. — Providence: AMS, 1990. — 424.

Е. В. Троицкий

Московский государственный университет

E-mail: troitsky@mech.math.msu.su,

URL: <http://mech.math.msu.su/~troitsky>