

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 2

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**



Тбилиси
2003

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

А. А. Болибрух (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 2

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი

2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Эволюция возмущения окружности в задаче Стокса—Лейбензона для течения Хил-Шоу (<i>А. С. Демидов</i>)	3
О неравенствах Корна на тонких периодических каркасах (<i>В. В. Жиков, С. Е. Пастухова</i>) .	25
Об усреднении некоторых задач теории упругости с быстро осциллирующими выпуклыми ограничениями на перемещения (<i>Г. А. Иосифьян</i>)	46
Разрешимость задачи Дирихле на стратифицированных множествах (<i>С. Никез, О. М. Пенкин</i>)	71
Об устойчивости решений систем моментов неравновесной термодинамики (<i>Е. В. Радкевич</i>)	95
Асимптотическое решение расширенной модели Кана—Хилларда (<i>Е. В. Радкевич, М. В. Захарченко</i>)	121
Теорема усреднения для задач в областях типа «инфузории» с несогласованной структурой (<i>Г. А. Чечкин, Т. П. Чечкина</i>)	139

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ В ЗАДАЧЕ СТОКСА—ЛЕЙБЕНЗОНА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ХИЛ-ШОУ

© 2003 г. А. С. ДЕМИДОВ

Аннотация. Среди начальных контуров соболевского класса H^1 , близких к окружности, выделяется множество таких, для которых задача Стокса—Лейбензона в случае источника имеет решение, причем единственное. Контур, соответствующий этому решению, определен при всех $t > 0$ и стремится к окружности при $t \rightarrow \infty$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Уравнение движения контура Γ_t в терминах функции Гельмгольца—Кирхгофа	5
3. Возмущение окружности	6
4. Система для коэффициентов Фурье решения	7
5. Теорема об однозначной разрешимости. Структура решения вблизи $\beta = 0$	10
Список литературы	23

1. ВВЕДЕНИЕ

А. Н. Крылов, представляя первое издание книги [9], писал в ее предисловии: «... я невольно вспомнил весеннее собрание Общества корабельных инженеров в 1898 г. На этом собрании проф. Хил-Шоу показывал в первый раз свой прибор, которым проектируется на экран с удивительной отчетливостью струйное течение жидкости и показывается обтекание этими струями разного рода препятствий». В том же 1898 г. Г. Г. Стокс показал [26], что прибор Хил-Шоу — это (как пишет Х. Ламб [7]) «прекрасная экспериментальная проверка форм линий тока для некоторых случаев стационарного безвихревого плоского движения».

Основным элементом прибора Хил-Шоу [19] является движущееся между двумя стеклянными пластинами пятно жидкости, например, глицерина. Особый интерес представляет эволюция этого пятна в результате подвода (или, наоборот, отвода) глицерина через маленькое отверстие в одной из пластин. Воздух, окружающий глицерин — жидкость, которая имеет пренебрежимо малую вязкость. В идеализации, которую предложил Л. С. Лейбензон [8] (в связи с задачей об эволюции контура нефтеносности), эта вязкость равна нулю, что соответствует постоянству давления на границе пятна глицерина.

Таким образом, классическая постановка задачи Стокса—Лейбензона для течения Хил-Шоу такова. Пусть Ω_0 — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная достаточно гладкой кривой Γ_0 , окружающей начало координат 0. Область Ω_0 соответствует пятну жидкости (глицерина) в начальный момент, а источник-сток локализован в начале координат $0 \in \Omega_0$. Заданная область деформируется следующим образом: в момент $t \geq 0$ точка $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$ границы $\Gamma = \Gamma_t$ области $\Omega = \Omega_t$ движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{x}, \dot{y})$, определяемой кинематическим условием

$$\dot{\mathbf{s}} = \nabla u \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \quad (1.1)$$

где $\nabla u = (u_x, u_y)$ — градиент функции $u(t; \cdot, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, а $u(t; x, y)$ удовлетворяет условию Стокса

$$u_{xx} + u_{yy} = q\delta(x, y) \quad \text{в} \quad \Omega_t \quad (1.2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-22004) и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова (проект № 02-04).

и условию Лейбензона

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t. \quad (1.3)$$

Здесь $\delta(x, y)$ — это δ -функция Дирака, сосредоточенная в начале координат, а коэффициент $q \in \mathbb{R}^*$ характеризует мощность источника-стока.

Предположим, что область Ω симметрична относительно оси Ox . Учитывая эту симметрию, положим $q = 2$. Поскольку q положительно, то случай источника (стока) соответствует $t > 0$ ($t < 0$).

Задача Стокса—Лейбензона и близкие ей задачи изучались очень многими авторами (см., например, [2, 3, 6, 10–12, 18, 20–25] и цитируемую там литературу). В частности, были получены следующие результаты.

- 1) Кривая Γ_t при некотором $t \neq 0$ гомотетична Γ_0 тогда и только тогда, когда Γ_0 — это окружность с центром в 0.
- 2) Если для случая стока(!) задача (1.1)–(1.3) разрешима (при сколь угодно малом t), то начальный контур Γ_0 необходимо аналитичен.
- 3) В обоих случаях (как источника, так и стока) задача (1.1)–(1.3) разрешима при достаточно малых t , если начальный контур Γ_0 аналитичен; при этом решение единственно.

Не так давно результат 3) был распространен (см. [17]) и на случай неаналитических начальных контуров Γ_0 (при источнике, не сосредоточенном в точке).

Прежде чем говорить об основном результате настоящей работы, отметим, что она базируется на исследовании нелинейного интегро-дифференциального (ИД) уравнения для функции Гельмгольца—Кирхгофа задачи (1.2)–(1.3). Эта функция характеризует касательное поле к искомому (движущемуся) контуру Γ_t . Разрешимость этого весьма специфического уравнения (его вывод публикуется впервые) долгое время автор не мог прояснить и потому он начал изучение аппроксимационной, так называемой квазиконтурной (другие названия: полигональной, конечноточечной) модели (см. [4, 13–16]) задачи (1.1)–(1.3). Квазиконтурная модель описывается матричным уравнением вида $Q(N, \sigma)\dot{N} = P(t, N, \sigma)$, аппроксимирующим указанное ИД-уравнение. Здесь $N = (N_1, \dots, N_m)$, N_j — угол между осью Ox и внешней нормалью к j -й стороне полигонального квазиконтур, а параметр $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ характеризует длины его сторон. Численный анализ показал, что в пространстве квазиконтуров имеется гиперповерхность $\{(N, \sigma) \mid \det Q(N, \sigma) = 0\}$, являющаяся в некотором смысле аттрактором (при $t \uparrow$) [15]. Квазиокружность, т.е. правильный m -угольник $(\hat{N}, \hat{\sigma})$, принадлежит этой гиперповерхности, но численное исследование матричного уравнения в окрестности квазиокружности крайне затруднено, поскольку и правая часть уравнения $Q\dot{N} = P$ также вырождается при $(N, \sigma) = (\hat{N}, \hat{\sigma})$. С другой стороны, указанное выше ИД-уравнение (для исходной задачи (1.1)–(1.3)) удалось, наконец, в какой-то мере изучить в окрестности окружности. А именно, в настоящей работе доказывается, что если угловая функция, представляющая начальный контур (скажем, класса C^2), отличается от угловой функции окружности на возмущение

$$\beta(0, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(0) \sin \pi n \sigma$$

такое, что

$$\sum_{k \geq 2} (k \beta_k(0))^2 \leq \lambda^{1/2} |\beta_1(0)|^{3/2}, \quad 0 < |\beta_1(0)| \leq \lambda \ll 1,$$

то это возмущение

$$\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma$$

«продолжает жить» (т.е. оно определено) при всех(!) $t > 0$, а его коэффициенты Фурье $\beta_n(t)$ (начиная с некоторого момента $t^* \geq 0$ почти монотонно, согласно теореме 5.1) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [5].

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОНТУРА Γ_t В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА—КИРХГОФА

2.1. В каждый момент t мы можем параметризовать контур Γ_t , задав некоторый диффеоморфизм $\sigma \mapsto \mathbf{s}(t, \sigma)$ единичной окружности $\{e^{i\pi\sigma} \mid \sigma \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}\}$ на Γ_t . Соответственно, вектор $(\dot{x}(t, \sigma), \dot{y}(t, \sigma))$ скорости движения точки $\mathbf{s}(t, \sigma)$ параметризован этим диффеоморфизмом. Однако, как легко видеть, нормальная компонента этой скорости, т.е. ее составляющая

$$\dot{\mathbf{s}}(t, \sigma) \cdot \boldsymbol{\nu} = \nu_x \dot{x}(t, \sigma) + \nu_y \dot{y}(t, \sigma) \quad (2.1)$$

вдоль единичной внешней нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$ к Γ_t в точке $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t, \sigma)$, не зависит от параметризации и совпадает с $|\nabla u| = \partial u / \partial \nu$ в точке $\mathbf{s} \in \Gamma$. Отсюда, ввиду условия Лейбензона (1.3), получаем следующую форму кинематического условия (1.1)

$$|\nabla u| \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}(t,\sigma) \in \Gamma_t} = \nu_x \dot{x}(t, \sigma) + \nu_y \dot{y}(t, \sigma). \quad (2.2)$$

2.2. Преобразуем условие (2.2) с помощью функции Гельмгольца—Кирхгофа (ГК) задачи (1.2)–(1.3). Эта функция строится следующим образом (см. [13]). В односвязной области $\Omega_t^+ = \{(x, y) \in \Omega_t \mid y > 0\}$ рассмотрим функцию $v = v(t; x, y)$, гармонически сопряженную к $u = u(t; x, y)$ и удовлетворяющую условию $v(t; x, y) = 0$ при $x > 0$ (что корректно, так как Ω симметрична относительно оси Ox). Обозначив через $\partial/\partial \nu$ дифференцирование по нормали $\boldsymbol{\nu}$, а через $\partial/\partial \tau$ дифференцирование по касательной $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_y, \nu_x)$, получим из (1.2), что $v(t; x, 0) = 1$ при $x < 0$, поскольку $\partial v / \partial \tau = \partial u / \partial \nu$ на

$$\Gamma^+ = \Gamma \cap \Omega^+, \quad \Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega \mid y > 0\}. \quad (2.3)$$

Нетрудно показать, что функция

$$\begin{aligned} w = u + iv : \Omega^+ &\rightarrow \Pi = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid u < 0, 0 < v < 1\}, \\ z = x + iy &\mapsto w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

однолистка и, тем самым, в односвязной области $\Pi \subset \mathbb{C}$ определена однолистная ГК-функция [13]

$$A + iB = \ln \frac{\partial z}{\partial w}, \quad A = A(t; u, v), \quad B = B(t; u, v), \quad (2.5)$$

где $z(t, \cdot) : \Pi \ni w \mapsto z(t, w) = x(t; u, v) + iy(t; u, v) \in \Omega_t^+$. Отсюда получаем, что кривая Γ^+ может быть параметризована (см. п. 2.1) посредством диффеоморфизма

$$\begin{aligned} \{e^{i\pi\sigma} \mid \sigma \in]0, 1[\} &\rightarrow \Gamma^+ = \Gamma_t^+, \\ e^{i\pi\sigma} &\mapsto x(t, \sigma) + iy(t, \sigma), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x(t, \sigma) &= x(t, 0) - \int_0^\sigma e^{a(t, \eta)} \sin b(t, \eta) d\eta, \\ y(t, \sigma) &= \int_0^\sigma e^{a(t, \eta)} \cos b(t, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $x(t, 0) = \int_{-\infty}^0 e^{A(t, u, 0)} du$, а

$$a(t, v) = A(t; 0, v), \quad b(t, v) = B(t; 0, v). \quad (2.7)$$

Поскольку $|\nabla u| = e^{-a}$ на Γ^+ , а $b = b(t, \sigma)$ — угол между осью Ox и нормалью $\boldsymbol{\nu}$ в точке $\mathbf{s}(t, \sigma)$, то перепишем условие (2.2) в виде

$$e^{-a} = \dot{x} \cos b + \dot{y} \sin b \quad \text{на} \quad \Gamma_t^+. \quad (2.8)$$

2.3. Положим

$$T = -\dot{x} \sin b + \dot{y} \cos b. \quad (2.9)$$

Учитывая формулы (2.6), перейдем от формул (2.8)–(2.9) к эквивалентным соотношениям:

$$\begin{aligned} e^{-a} \cos b - T \sin b &= \dot{x}(t, 0) - \int_0^\sigma e^a [\dot{a} \sin b + \dot{b} \cos b] d\xi, \\ e^{-a} \sin b + T \cos b &= \int_0^\sigma e^a [\dot{a} \cos b - \dot{b} \sin b] d\xi. \end{aligned}$$

Продифференцировав эти соотношения по σ , получаем:

$$\begin{cases} e^a [\dot{a} \sin b + \dot{b} \cos b] &= e^{-a} a' \cos b + e^{-a} b' \sin b + (T \sin b)', \\ e^a [\dot{a} \cos b - \dot{b} \sin b] &= -e^{-a} a' \sin b + e^{-a} b' \cos b + (T \cos b)'. \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь и ниже $\dot{a} = \frac{\partial}{\partial t} a(t, \sigma)$, $a' = \frac{\partial}{\partial \sigma} a(t, \sigma)$.

Принимая во внимание тождества

$$\begin{aligned} (T \sin b)' \sin b + (T \cos b)' \cos b &= T', \\ (T \sin b)' \cos b - (T \cos b)' \sin b &= b' T, \end{aligned}$$

выводим из (2.10) систему уравнений

$$e^a \dot{a} = e^{-a} b' + T', \quad e^a \dot{b} = e^{-a} a' + b' T,$$

исключив из которой T , получаем искомое уравнение

$$\dot{b}(t, \sigma) = e^{-2a} a' + b' e^{-a} \int_0^\sigma [e^a \dot{a} - e^{-a} b'] d\xi. \quad (2.11)$$

3. ВОЗМУЩЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Заметим, что окружность задается функцией

$$\hat{b} : \sigma \mapsto \hat{b}(\sigma) = \pi\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Функцию $b = b(t, \sigma)$, задающую контур Γ_t , представим как возмущение $\hat{b}$, т.е.

$$b(t, \sigma) = \hat{b}(\sigma) + \beta(t, \sigma), \quad (3.2)$$

которое (в силу симметрии Γ_t) достаточно рассматривать лишь для $\sigma \in [0, 1]$. Представим это возмущение в виде

$$\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma. \quad (3.3)$$

В этом случае $A(t, u, 0) = a_0(t) + e^u \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \cos \pi n v$,

$$a(t, v) = a_0(t) + \alpha(t, v), \quad \alpha = \mathbb{H}\beta, \quad (3.4)$$

где оператор $\mathbb{H} : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ — это преобразование Гильберта, которое в данной ситуации определяется формулой

$$[\mathbb{H}\beta](t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \cos \pi n \sigma, \quad \text{если} \quad \beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma. \quad (3.5)$$

Найдем $a_0(t)$. Заметим, что $a_0(t) = a(t)$, если $\beta = 0$, т.е. когда $b = \hat{b}$. В этом случае уравнение (2.11) сводится

$$\dot{a}_0(t) = \pi e^{-2a_0(t)}, \quad \text{т.е.} \quad e^{-2a_0(t)} = \frac{1}{2\pi(t+t_0)} = \frac{\dot{a}_0(t)}{\pi}. \quad (3.6)$$

Константа t_0 определяется по начальной кривой Γ_0 согласно формуле

$$|\Gamma_0^+| = \int_0^1 e^{a_0(0)} e^{\alpha(0,v)} dv = \sqrt{2\pi t_0} \int_0^1 e^{\alpha(0,v)} dv, \quad (3.7)$$

выражающей длину $|\Gamma_0^+|$ начальной кривой Γ_0^+ .

Теорема 3.1. Основное уравнение (2.11) для функции $b = \hat{b} + \beta$ допускает следующую форму

$$[1 - \mathbb{K}(b)] \dot{\beta} = \frac{1}{2(t+t_0)} \mathbb{F}(b), \quad (3.8)$$

где оператор $\mathbb{K}(b) : L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$ определяется формулой

$$[K(b)\varphi](t, \sigma) = b'(t, \sigma) e^{-\alpha(t, \sigma)} \int_0^\sigma e^{\alpha(t, \xi)} [\mathbb{H}\varphi](t, \xi) d\xi, \quad (3.9)$$

а

$$[\mathbb{F}(b)](t, \sigma) = \frac{1}{\pi} \left\{ e^{-2\alpha(t, \sigma)} \alpha'(t, \sigma) + b'(t, \sigma) e^{-\alpha(t, \sigma)} \left(\int_0^\sigma [\pi e^{\alpha(t, \xi)} - b'(t, \xi) e^{-\alpha(t, \xi)}] d\xi \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Поскольку $e^{\pm a} = e^{\pm a_0(t)} e^{\pm \alpha}$ и $\dot{a} = \dot{a}_0 + \dot{\alpha}$, то

$$e^{-a} b' \int_0^\sigma e^a \dot{a} d\xi = e^{-a} b' \int_0^\sigma e^{\alpha} \dot{a}_0 d\xi + e^{-a} b' \int_0^\sigma e^{\alpha} \dot{\alpha} d\xi.$$

Отсюда, учитывая соотношение $a' = \alpha'$, получаем следующую форму уравнения (2.11):

$$\dot{b} - b' e^{-\alpha} \int_0^\sigma e^{\alpha} \dot{\alpha} d\xi = e^{-2a_0} e^{-2\alpha} \alpha' + \dot{a}_0 e^{-\alpha} b' \int_0^\sigma e^{\alpha} d\xi - e^{-2a_0} b' e^{-\alpha} \int_0^\sigma e^{-\alpha} b' d\xi.$$

Остается использовать формулу (3.6). □

4. СИСТЕМА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ

4.1. Рассмотрим систему проекций

$$\left\langle [1 - \mathbb{K}(b)] \dot{\beta} - \frac{1}{2(t+t_0)} \mathbb{F}(b), e_n \right\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

уравнения (3.8) на базисные векторы

$$e_n : [0, 1] \ni \sigma \mapsto \sin \pi n \sigma$$

в пространстве $L^2(0,1)$. Другими словами, речь идет о системе уравнений для коэффициентов Фурье $\beta_n(\cdot)$ решения

$$\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma. \quad (4.2)$$

С помощью кропотливых (но очевидных) выкладок получаем следующее утверждение.

Предложение 4.1. Система уравнений (4.1) эквивалентна следующей системе

$$\begin{aligned} 2(t+t_0) \left(\beta_1 \dot{\beta}_1 + \left[r_1(\beta) \dot{\beta} + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) R_k(\beta) \dot{\beta} \right] \right) = \\ = \left(-\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 - \left[s_1(\beta) + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) S_k(\beta) \right] \right), \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$2(t+t_0) \dot{\beta}_k - R_k(\beta) \dot{\beta} = -(k+2) \beta_k + S_k(\beta), \quad k \geq 2. \quad (4.3b)$$

Здесь

$$r_1(\beta) \dot{\beta} = \langle r(\beta) \dot{\beta}, e_1 \rangle, \quad s_1(\beta) = \langle s(\beta), e_1 \rangle, \quad (4.4)$$

$$R_k(\beta) \dot{\beta} = \frac{k}{k-1} \langle R(\beta) \dot{\beta}, e_k \rangle, \quad S_k(\beta) = \frac{k}{k-1} \langle S(\beta), e_k \rangle, \quad (4.5)$$

где $r(\beta)\varphi$, $s(\beta)$, $R(\beta)\varphi$, $S(\beta)$ определяются по нижеследующим формулам¹, в которых $\alpha = \mathbb{H}\beta$, где $\mathbb{H}$ — преобразование Гильберта (см. (3.4) и (3.5)), а

$$e(p_k) = e^{-\alpha} - p_k, \quad p_1 = 1 - \alpha, \quad p_2 = p_1 + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} r(\beta)\varphi = \beta' \left\{ \int_0^\sigma (e^\alpha - 1) \mathbb{H}\varphi + (e^{-\alpha} - 1) \int_0^\sigma e^\alpha \mathbb{H}\varphi \right\} + \\ + \pi \left\{ -\alpha \int_0^\sigma \alpha \mathbb{H}\varphi + (1 - \alpha) \int_0^\sigma (e^\alpha - (1 + \alpha)) \mathbb{H}\varphi + e(p_1) \int_0^\sigma e^\alpha \mathbb{H}\varphi \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} s(\beta) = \frac{1}{\pi} \{ e^{-2\alpha} - (1 - 2\alpha)\alpha' \} + \pi \left\{ \alpha^2 \int_0^\sigma \alpha + 2p_2 \int_0^\sigma (\sinh \alpha - \alpha) + 2e(p_2) \int_0^\sigma \sinh \alpha \right\} + \\ + 2\beta' \left\{ \alpha \int_0^\sigma \alpha + p_1 \int_0^\sigma (\sinh \alpha - \alpha) + e(p_1) \int_0^\sigma \sinh \alpha \right\} - \left\{ \alpha \int_0^\sigma \beta' \alpha + p_1 \int_0^\sigma \beta' e(p_1) + e(p_1) \int_0^\sigma \beta' e^{-\alpha} \right\} - \\ - \frac{1}{\pi} \beta' \left\{ \int_0^\sigma \beta' (e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha} - 1) \int_0^\sigma \beta' e^{-\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$R(\beta)\varphi = \pi \left[\int_0^\sigma (e^\alpha - 1) \mathbb{H}\varphi + (e^{-\alpha} - 1) \int_0^\sigma e^\alpha \mathbb{H}\varphi \right] + \beta' \int_0^\sigma \mathbb{H}\varphi, \quad (4.8)$$

¹Мы используем сокращенную запись формул. Отметим, что несокращенная запись начала формулы (4.6) для $r(\beta)\varphi$ выглядит так:

$$[r(\beta)\varphi](t, \sigma) = \beta'(t, \sigma) \left\{ \int_0^\sigma (e^{\alpha(t, \xi)} - 1) [\mathbb{H}\varphi](t, \xi) d\xi + \dots \right.$$

$$\begin{aligned}
S(\beta) = & \frac{1}{\pi} \{ (e^{-2\alpha} - 1) \alpha' \} + 2\pi \left\{ -\alpha \int_0^\sigma \alpha + p_1 \int_0^\sigma (\sinh \alpha - 1) \right\} + \\
& + \left\{ 2\beta' \int_0^\sigma \sinh \alpha + (e^{-\alpha} - 1) \int_0^\sigma \sinh \alpha \right\} - \\
& - \left\{ \int_0^\sigma \beta' (e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha} - 1) \int_0^\sigma \beta' e^{-\alpha} \right\} - \frac{1}{\pi} \left\{ \beta' e^{-\alpha} \int_0^\sigma \beta' e^{-\alpha} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Определение 4.1. Скажем, что $\beta \in X^q = C(0, T; H^q(0, 1))$ при некоторых $T > 0$ и $q \geq 0$, если $\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma$, $\beta_n(\cdot) \in C[0, T]$ и

$$\|\beta\|_q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\max_{0 \leq t \leq T} \sum_{n \geq 1} (n^q \beta_n(t))^2} < \infty. \tag{4.10}$$

Всюду в дальнейшем будет выполнено условие $\|\beta\|_1 \leq 1$, а потому

$$|\beta(t, \sigma)| \leq \int_0^1 |\beta'(t, \xi)| d\xi \leq \|\beta\|_1 \leq 1 \tag{4.11}$$

и, следовательно, $|\alpha| \leq \|\alpha\|_1 = \|\beta\|_1 \leq 1$, что влечет

$$e^\alpha \leq \text{const}. \tag{4.12}$$

Лемма 4.1. Существует константа $\hat{C} > 0$ такая, что

$$\|R(\beta)\varphi\|_0 \leq \hat{C} \|\beta\|_1 \|\varphi\|_0, \quad |r_1(\beta)\varphi| \leq \hat{C} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1 \|\varphi\|_0, \tag{4.13}$$

$$\|S(\beta)\|_0 \leq \hat{C} \|\beta\|_1^2, \quad |s_1(\beta)| \leq \hat{C} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1^2. \tag{4.14}$$

Доказательство очевидным образом вытекает из формул (4.4)–(4.9) и следующих оценок (в которых мультипликативные константы заменяются единицей).

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 2} (R_k(\beta)\varphi)^2 & \leq \|R(\beta)\varphi\|_0^2, \\
\int_0^1 \left(\beta' \int_0^\sigma \mathbb{H}\varphi \right)^2 d\sigma & \leq \max_\sigma \left(\int_0^\sigma \mathbb{H}\varphi \right)^2 \|\beta\|_1^2 \leq \|\varphi\|_0^2 \|\beta\|_1^2;
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 \beta' \left(\int_0^\sigma (e^\alpha - 1) \mathbb{H}\varphi \right) \sin \pi \sigma d\sigma \right| + \left| \int_0^1 \beta' (e^{-\alpha} - 1) \left(\int_0^\sigma e^\alpha \mathbb{H}\varphi \right) \sin \pi \sigma d\sigma \right| \leq \\
& \leq \|\beta\|_1 \left\{ \left(\int_0^1 \left[\left(\int_0^\sigma (e^\alpha - 1) \mathbb{H}\varphi \right) \sin \pi \sigma \right]^2 d\sigma \right)^{1/2} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left[(e^{-\alpha} - 1) \left(\int_0^\sigma e^\alpha \mathbb{H}\varphi \right) \sin \pi \sigma \right]^2 d\sigma \right)^{1/2} \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \|\beta\|_1 \left\{ \left(\int_0^1 \alpha^2 \|\varphi\|_0^2 d\sigma \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \alpha^2 \left(\int_0^1 |\mathbb{H}\varphi|^2 \right) d\sigma \right)^{1/2} \right\} \leq \|\beta\|_1 \|\beta\|_0 \|\varphi\|_0;$$

3.

$$\sum_{k \geq 2} S_k^2(\beta) \leq \|S(\beta)\|_0^2,$$

$$\int_0^1 \left(\beta' \int_0^\sigma \beta' \right)^2 \leq \max_\sigma \left(\int_0^\sigma \beta' \right)^2 \|\beta\|_1^2 \leq (\|\beta\|_1^2)^2;$$

4.

$$\left| \int_0^1 \beta' \left(\int_0^\sigma \alpha \beta' d\sigma \right) \right| + \left| \int_0^1 \beta' \alpha \left(\int_0^\sigma \beta' d\sigma \right) \right| \leq |\alpha| \left| \int_0^1 \beta' \left(\int_0^\sigma \beta' d\sigma \right) \right| \leq \|\beta\|_1 \|\beta\|_0 \|\beta\|_1.$$

5. ТЕОРЕМА ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ. СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ВБЛИЗИ $\beta = 0$

5.1. Как будет показано ниже, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Существует число $\rho \in (0, 1/8)$ такое, что для любого $\mu \in (0, 1]$ задача Коши для уравнения (3.8) относительно*

$$\beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma,$$

т.е. задача Коши для уравнения

$$2(t + t_0) \left[1 - \mathbb{K}(\hat{b} + \beta) \right] \dot{\beta} = F(\hat{b} + \beta), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

с начальным условием

$$\beta(0, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n^0 \sin \pi n \sigma$$

таким, что

$$\sum_{k \geq 2} (k \beta_k^0)^2 \leq (\mu \rho)^{1/2} |\beta_1^0|^{3/2}, \quad 0 < |\beta_1^0| \leq \mu \rho, \quad (5.2)$$

имеет единственное решение $\beta \in C(0, \infty; H^1(0, 1))$. При этом,

$$\left| \dot{\beta}_1(0) - \dot{\bar{\beta}}_1(0) \right| \leq \mu, \quad \sqrt{\sum_{k \geq 2} \left| \dot{\beta}_k(0) - \dot{\bar{\beta}}_k(0) \right|^2} \leq \mu, \quad (5.3)$$

где

$$\bar{\beta}_1^2(t) = \frac{1}{t + t_0} \left(t_0 \beta_1^2(0) + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2(0) \int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \frac{\tau}{t_0} \right)^{k+2}} \right), \quad (5.4)$$

$$\bar{\beta}_k(t) = \frac{\beta_k(0)}{\left(1 + \frac{t}{t_0} \right)^{k/2+1}}. \quad (5.5)$$

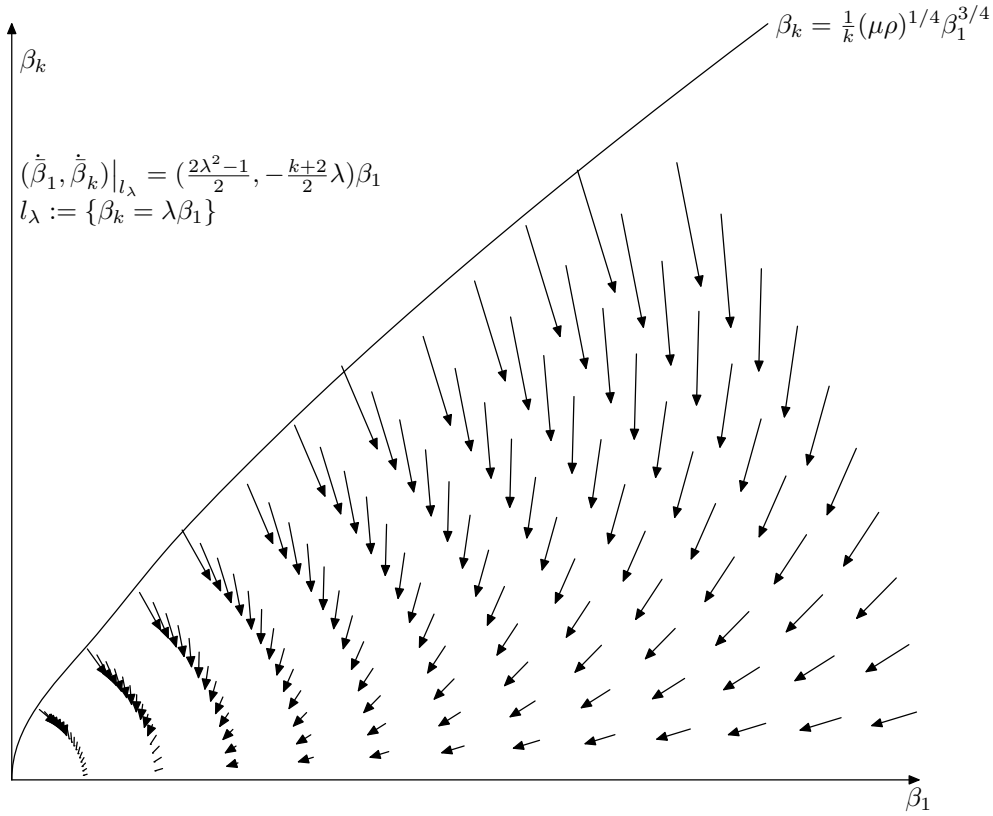


Рис. 1

Кроме того, существует константа C (немного превосходящая единицу) такая, что при любом $t \geq 0$ справедливы оценки

$$|\dot{\beta}_1(t) - \dot{\beta}_1(t)| \leq C\mu, \quad \sqrt{\sum_{k \geq 2} |\dot{\beta}_k(t) - \dot{\beta}_k(t)|^2} \leq C\mu.$$

Векторное поле $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_k)$ для случая, когда $\beta_j(0) = 0$ при $j \neq 1$ и $j \neq k$, представлено на рис. 1.

Чуть ниже мы увидим, что теорема 5.1 весьма просто вытекает из следующего результата о разрешимости уравнения (5.1) при малых $t > 0$.

Теорема 5.2. *Существует такое число $C_* > 1$, что для любых $\chi \geq 1$, $1/\varepsilon \geq C_*\chi^3$, $1/T \geq C_*\chi^2$ и функции*

$$\beta^0 : [0, 1] \ni \sigma \mapsto \beta^0(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n^0 \sin \pi n \sigma,$$

такой, что

$$|\beta_1^0| = \frac{\varepsilon}{8\chi}, \quad \sum_{k \geq 2} (k\beta_k^0)^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^2, \quad (5.6)$$

уравнение (5.1) имеет в ε -окрестности нуля пространства $C(0, T; H^1(0, 1))$ единственное решение

$$\beta : (t, \sigma) \mapsto \beta(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \pi n \sigma \quad (5.7)$$

такое, что $\beta(0, \cdot) = \beta^0$. При этом, решение (5.7) аппроксимируется функцией

$$\bar{\beta}(t, \sigma) = \sum_{n \geq 1} \bar{\beta}_n(t) \sin \pi n \sigma \quad (5.8)$$

в том смысле, что

$$\left| \dot{\beta}_1(0) - \dot{\bar{\beta}}_1(0) \right| \leq C_* \varepsilon, \quad \sqrt{\sum_{k \geq 2} \left| \dot{\beta}_k(0) - \dot{\bar{\beta}}_k(0) \right|^2} \leq \frac{\varepsilon}{\chi}. \quad (5.9)$$

Здесь $\dot{\bar{\beta}}_n(0) = \frac{d}{dt} \bar{\beta}_n(t) \Big|_{t=0}$, а функция $\bar{\beta}_n(t)$ определена в (5.4)–(5.5).

Доказательство теоремы 5.1. В условиях теоремы 5.2 положим $\rho = (8C_*)^{-1}$ и $\varepsilon = \mu C_*^{-1} \chi^{-3}$, где $\mu \in (0, 1]$. Для $|\beta_1^0| \in (0, \mu\rho]$ фиксируем $\chi = (\mu\rho/|\beta_1^0|)^{1/4} \geq 1$ и получаем (5.2) из (5.6). Далее, из (5.9) вытекает оценка (5.3). Она позволяет утверждать, что решение $t \mapsto \beta(t, \cdot)$, построенное при малых $t > 0$ (согласно теореме 5.2), продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ при условии $|\beta_1^0| \ll 1$. В самом деле, при оговоренном условии коэффициенты $\beta_n(t)$ «дрейфуют» (ввиду (5.3)) вблизи траекторий векторного поля (см. рис. 1)

$$\left\{ \dot{\beta}_n(t) \right\}_{n \geq 1} = \left\{ -\frac{\bar{\beta}_1(t)}{2} + \sum_{k \geq 2} \bar{\beta}(t)_k^2, -\frac{3}{2} \bar{\beta}(t)_2, \dots, -\frac{k+2}{2} \bar{\beta}(t)_k, \dots \right\},$$

оставаясь, тем самым, в зоне (5.2). Из приведенных формул следует, что коэффициенты $\beta_n(t)$ в итоге обнуляются, но за бесконечное время. $\square$

Заметим, что последнее утверждение (о бесконечности времени «дрейфа» возмущенной окружности) согласуется с отмеченным во введении известным результатом: кривая Γ_t при некотором $t \neq 0$ гомотетична Γ_0 тогда и только тогда, когда Γ_0 — окружность с центром в 0.

Заметим также, что формулы (5.5) объясняют причину и второго указанного во введении результата: если для случая стока(!) задача (1.1)–(1.3) разрешима при сколь угодно малом t (поскольку в нашем случае $q = 2 > 0$, то это означает, что речь идет о любом малом $t < 0$), то начальный контур Γ_0 необходимо аналитичен. Действительно, в силу (5.5), функции (5.8) и (5.7) будут определены при сколь угодно малом $t < 0$ лишь тогда, когда коэффициенты $\beta_k(0)$ достаточно быстро убывают, а именно: определяют аналитическую функцию (см., например, [1, § 12]).

5.2. Вся остальная часть работы посвящена доказательству теоремы 5.2. Схема доказательства такова.

При $\|\beta\|_1 \leq 1$ и $\beta_1(t) \neq 0$ уравнение (5.1) представимо в виде

$$(1 + P(\beta))\dot{\beta} = \frac{\Lambda(\beta) + Q(\beta)}{t + t_0}, \quad (5.10)$$

где покомпонатные компоненты P , Λ , Q , а также R и S (см. ниже) таковы:

$$P_1(\beta)\dot{\beta} = \frac{1}{\beta_1} \left[\sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) R_k(\beta)\dot{\beta} + r_1(\beta)\dot{\beta} \right], \quad P_k(\beta)\dot{\beta} = -R_k(\beta)\dot{\beta}, \quad (5.11)$$

$$\Lambda_1(\beta) = \frac{1}{2\beta_1} \left[-\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 \right], \quad \Lambda_k(\beta) = -\frac{k+2}{2} \beta_k, \quad (5.12)$$

$$Q_1(\beta) = -\frac{1}{2\beta_1} \left[s_1(\beta) + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) S_k(\beta) \right], \quad Q_k(\beta) = \frac{1}{2} S_k(\beta). \quad (5.13)$$

При этом, существует такая константа $\hat{C} > 0$, что справедливы оценки (4.13)–(4.14) и

$$\|P(\beta)\| \leq 3\hat{C} \left(\frac{\|\beta\|_0}{|\beta_1|} + 1 \right) \|\beta\|_1.$$

На замкнутом множестве¹

$$\mathfrak{M} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \beta \in X^1 \mid \|\beta\|_1 \leq \varepsilon; \beta(0, \cdot) = \beta^0(\cdot); \frac{\beta_1(t)}{\beta_1(0)} \geq \frac{1}{2} \right\} \quad (5.14)$$

пространства $X^1 = C(0, T; H^1(0, 1))$ при $\varepsilon \leq (100\chi\hat{C})^{-1}$ (и, тем самым, при $\|P(\beta)\| \leq 1/2$) уравнение (5.10) стандартным образом преобразуется в функциональное $\beta = \Phi(\beta)$. Проверяется, что оператор Φ сжимаем на $\mathfrak{M}$ при $1/\varepsilon \geq C_*\chi^3$, $1/T \geq C_*\chi^2$, где $C_* = C_*(\hat{C})$. Явно выписывается «главная» часть $\bar{\beta}$ построенного решения β .

5.3. Следуя обозначенной схеме, изложим доказательство.

Доказательство теоремы 5.2 Оно включает ряд лемм.

Лемма 5.1. Пусть $\beta_1(t) \neq 0$. Тогда

$$\|P(\beta)\dot{\beta}\|_0 \leq \hat{C} (3\|\beta\|_0|\beta_1(t)|^{-1} + 1) \|\beta\|_1 \|\dot{\beta}\|_0, \quad (5.15)$$

где константа $\hat{C}$ определена в лемме 4.1.

Доказательство. Имеем

$$|P_1(\beta)\dot{\beta}| \stackrel{(5.11)}{\leq} |\beta_1(t)|^{-1} \left(|r_1(\beta)\dot{\beta}| + 2\|\beta\|_0 \|R(\beta)\dot{\beta}\|_0 \right) \stackrel{(4.13)}{\leq} 3\hat{C} |\beta_1(t)|^{-1} \|\beta\|_0 \|\beta\|_1 \|\dot{\beta}\|_0.$$

Далее,

$$\sum_{k \geq 2} \left(P_k(\beta)\dot{\beta} \right)^2 \stackrel{(5.11)}{\leq} \|R(\beta)\dot{\beta}\|_0^2 \stackrel{(4.13)}{\leq} \left(\hat{C} \|\beta\|_1 \|\dot{\beta}\|_0 \right)^2.$$

□

Заметим, что

$$\|P(\beta)\| \stackrel{(5.15)}{\leq} \hat{C} \left(\frac{3\|\beta\|_0}{|\beta_1(t)|} + 1 \right) \|\beta\|_1 \leq 50\hat{C}\chi \|\beta\|_1, \quad (5.16)$$

поскольку $\|\beta\|_0/|\beta_1(t)| \leq 16\chi$ в силу (5.7) и (5.14). Из оценки (5.16) мгновенно вытекает следующая лемма.

Лемма 5.2. Пусть

$$0 < \varepsilon \leq (100\hat{C}\chi)^{-1}. \quad (5.17)$$

Тогда $\|P(\beta)\| \leq 1/2 \forall \beta \in \mathfrak{M}$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что условие (5.17) выполнено. Поэтому оператор

$$1 + P : X^0 \rightarrow X^0 = C(0, T; H^0(0, 1))$$

допускает обратный

$$(1 + P)^{-1} = 1 - P(1 + P)^{-1}, \quad (5.18)$$

причем $\|(1 + P)^{-1}\| \leq 2$.

Лемма 5.3. Уравнение (5.10) эквивалентно системе

$$(t + t_0) (\beta_1^2)' = -\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 + \rho_1(\beta), \quad (t + t_0) \dot{\beta}_k = -\frac{k+2}{2} \beta_k + \rho_k(\beta), \quad k \geq 2, \quad (5.19)$$

где

$$\rho_1(\beta) = - \left(s_1(\beta) + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) S_k(\beta) \right) - 2\beta_1 \langle \mathfrak{A}(\beta), e_1 \rangle, \quad (5.20)$$

$$\rho_k(\beta) = \frac{1}{2} S_k(\beta) - \langle \mathfrak{A}(\beta), e_k \rangle, \quad k \geq 2, \quad (5.21)$$

¹Напомним, что функция β^0 удовлетворяет условиям (5.6).

$$\mathfrak{A}(\beta) = P(\beta) (1 + P(\beta))^{-1} (\Lambda(\beta) + Q(\beta)). \quad (5.22)$$

Доказательство вытекает из формул (5.12)–(5.13) для Λ и Q , а также того очевидного (в силу (5.18)) факта, что уравнение (5.10) представимо в виде

$$\dot{\beta} = \frac{1}{t + t_0} (\Lambda(\beta) + Q(\beta) - \mathfrak{A}(\beta)).$$

Лемма 5.4. Система уравнений (5.19) эквивалентна функциональному уравнению

$$\beta = \Phi(\beta), \quad \beta \in \mathfrak{M} \stackrel{(5.14)}{=} \overline{\mathfrak{M}} \subset X^1, \quad (5.23)$$

где компоненты $\Phi_k(\beta(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \langle [\Phi(\beta)](t, \cdot), e_k / \|e_k\|_0 \rangle$ вектора $[\Phi(\beta)](t, \cdot)$ определяются по формулам¹

$$\Phi_1^2(\beta(t)) = \bar{\beta}_1^2(t) + \frac{1}{t + t_0} \left(\int_0^t \rho_1(\beta(\tau)) d\tau + 2 \int_0^t \sum_{k \geq 2} \frac{g_k(\beta(\tau)) d\tau}{(\tau + t_0)^{k+2}} \right), \quad (5.24)$$

$$\Phi_k(\beta(t)) = \bar{\beta}_k(t) + \frac{1}{(t + t_0)^{k/2+1}} \int_0^t (\tau + t_0)^{k/2} \rho_k(\beta(\tau)) d\tau, \quad k \geq 2, \quad (5.25)$$

где

$$g_k(\beta(t)) = 2t_0^{k/2+1} \beta_k(0) \int_0^t (\tau + t_0)^{k/2} \rho_k(\beta(\tau)) d\tau + \left(\int_0^t (\tau + t_0)^{k/2} \rho_k(\beta(\tau)) d\tau \right)^2. \quad (5.26)$$

Доказательство. Уравнения системы (5.19) имеют вид

$$\dot{y} = \frac{1}{t + t_0} (-\lambda y + \rho(t)).$$

Решение последнего уравнения задается формулой

$$y(t) = \frac{1}{(t + t_0)^\lambda} \left(\int_0^t \rho(\tau) (\tau + t_0)^{\lambda-1} d\tau + t_0^\lambda y(0) \right).$$

Отсюда получаем (5.25) и формулу

$$\beta_1^2(t) = \frac{1}{t + t_0} \left(t_0 \beta_1^2(0) + \int_0^t 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2(\tau) d\tau + \int_0^t \rho_1(\beta(\tau)) d\tau \right). \quad (5.27)$$

В силу (5.25), имеем

$$\beta_k^2(t) = \frac{1}{(t + t_0)^{k+2}} \left(t_0^{k+2} \beta_k^2(0) + g_k(\beta(t)) \right), \quad k \geq 2.$$

Поэтому формула (5.27) преобразуется в (5.24). $\square$

5.4. Теперь (после того, как исходная задача сведена к уравнению (5.23)) нашей ближайшей (и основной!) целью является поиск тех требований к числам ε и T (фигурирующих в определении множества $\mathfrak{M} \subset X^1$; см. (5.14)), при удовлетворении которых выполнены два свойства:

$$\Phi(\beta) \in \mathfrak{M} \quad \forall \beta \in \mathfrak{M} \quad (5.28)$$

и

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\gamma)\|_1 \leq q \|\beta - \gamma\|_1 \quad \forall \beta \in \mathfrak{M}, \quad \forall \gamma \in \mathfrak{M}, \quad \text{где } 0 < q < 1. \quad (5.29)$$

Действительно, при условиях (5.28)–(5.29) уравнение (5.23) имеет в $\mathfrak{M}$ решение и это решение единственно.

¹Напомним, что $\bar{\beta}_n(t)$ определены в (5.4)–(5.5).

5.4.1. В этом пункте найдем соотношения на ε и T , при которых выполнено условие (5.28). Заметим, прежде всего, что

$$\Phi(\beta)\Big|_{t=0} = \beta\Big|_{t=0} = \beta(0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{M}.$$

Оценим

$$\|\Phi(\beta(t, \cdot))\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |\Phi_1(\beta(t))| + \sqrt{\sum_{k \geq 2} k^2 \Phi_k^2(\beta(t))}. \quad (5.30)$$

В силу (5.25) и (5.5), имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} k^2 \Phi_k^2(\beta(t)) \leq \sum_{k \geq 2} (k\beta_k(0))^2 + \sum_{k \geq 2} \frac{k^2}{(t+t_0)^{k+2}} \max_{\tau \leq t} |\rho_k(\beta(\tau))|^2 \left(\frac{(\tau+t_0)^{k/2+1}\Big|_0^t}{\frac{k+2}{2}} \right)^2.$$

Поэтому

$$\sum_{k \geq 2} k^2 \Phi_k^2(\beta(t)) \leq \|\beta(0, \cdot)\|_1^2 + 4 \max_{\tau \leq t} \sum_{k \geq 2} |\rho_k(\beta(\tau))|^2. \quad (5.31)$$

Лемма 5.5. *Существует такая константа $C_{32} = C_{32}(\hat{C})$, что*

$$\sum_{k \geq 2} |\rho_k(\beta(t))|^2 \leq (C_{32} \chi^2 \|\beta\|_1^2)^2 \quad \forall t \leq T. \quad (5.32)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{k \geq 2} \rho_k^2(\beta) \stackrel{(5.21)}{\leq} \|S(\beta)\|_0^2 + \|\mathfrak{A}(\beta)\|_0^2. \quad (5.33)$$

Оценим

$$\mathfrak{A}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}(\beta) \stackrel{(5.22)}{=} P_\beta(1 + P_\beta)^{-1}(\Lambda_\beta + Q_\beta).$$

Имеем

$$\|\mathfrak{A}_\beta\|_0 \leq 100\hat{C}\chi\|\beta\|_1 (\|\Lambda_\beta\|_0 + \|Q_\beta\|_0), \quad (5.34)$$

поскольку $\|P_\beta\| \stackrel{(5.16)}{\leq} 50\hat{C}\chi\varepsilon$, а $\|(1 + P_\beta)^{-1}\| \stackrel{(5.18)}{\leq} 2$. Далее,

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\beta\|_0 &\stackrel{(5.12)}{\leq} (2|\beta_1|)^{-1} \left(\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 \right) + \left(\sum_{k \geq 2} \left(\frac{k+2}{2} \beta_k \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\|\beta\|_0^2}{|\beta_1|} + \|\beta\|_1 \stackrel{(5.14)}{\leq} (16\chi + 1)\|\beta\|_1 \leq 17\chi\|\beta\|_1 \end{aligned} \quad (5.35)$$

и

$$\begin{aligned} \|Q_\beta\|_0 &\stackrel{(5.13)}{\leq} 2 \frac{|s_1(\beta)| + \|\beta\|_0 \|S_\beta\|_0}{|\beta_1|} + \|S - \beta\|_0 \stackrel{(4.14)}{\leq} \\ &\stackrel{(4.14)}{\leq} 4 \frac{\hat{C}\|\beta\|_0 \|\beta\|_1^2}{|\beta_1|} + \hat{C}\|\beta\|_1^2 \leq 65\hat{C}\chi\|\beta\|_1^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Отсюда

$$\|\Lambda_\beta\|_0 + \|Q_\beta\|_0 \leq C_{37}\chi\|\beta\|_1, \quad C_{37} = C_{36}(\hat{C}). \quad (5.37)$$

Поэтому из (5.34) получаем

$$\|\mathfrak{A}_\beta\|_0 \leq C_{38}(\chi\|\beta\|_1)^2, \quad C_{38} = C_{38}(\hat{C}). \quad (5.38)$$

Тем самым, искомая оценка (5.32) следует из (5.33) и (4.14). $\square$

Из доказанной леммы и формулы (5.31) получаем оценку 2-го слагаемого в правой части формулы (5.30). А именно, имеем:

$$\left(\sum_{k \geq 2} k^2 \Phi_k^2(\beta(t)) \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|\beta(0)\|_1 + C_{39} (\chi \|\beta\|_1)^2. \quad (5.39)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.30).

$$|\Phi_1(\beta(t, \cdot))|^2 \stackrel{(5.24) \& (5.4)}{\leq} |\beta_1(0)|^2 + t \left[2 \|\beta(0)\|_0^2 + \max_{\tau \leq t} \left(\sum_{k \geq 2} 2 \frac{|g_k(\beta(\tau))|}{(\tau + t_0)^{k+2}} + |\rho_1(\beta(\tau))| \right) \right]. \quad (5.40)$$

При этом,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} \frac{|g_k(\beta(\tau))|}{(\tau + t_0)^{k+2}} &\stackrel{(5.26)}{\leq} \sum_{k \geq 2} t_0^{k/2+1} |\beta_k(0)| \int_0^\tau \frac{(\theta + t_0)^{k/2}}{(\tau + t_0)^{k+2}} |\rho_k(\beta(\theta))| d\theta + \\ &+ \left(\int_0^\tau \left(\frac{\theta + t_0}{\tau + t_0} \right)^{k/2} |\rho_k(\beta(\theta))| d\theta \right)^2 \leq t \max_{\theta \leq \tau \leq t} \left[\|\beta(0)\|_0 \left(\sum_{k \geq 2} \rho_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k \geq 2} \rho_k^2 \right) \right] \stackrel{(5.32)}{\leq} \\ &\stackrel{(5.32)}{\leq} C_{41} t (\|\beta(0)\|_0 + \chi^2 \|\beta\|_1^2) (\chi \|\beta\|_1)^2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Оценим последний член в правой части (5.40). Имеем

$$\begin{aligned} |\rho_1(\beta(\tau))| &\stackrel{(5.20)}{\leq} |s_1(\beta)| + 2 \|\beta\|_0 \|S_\beta\|_0 + 2 |\beta_1| \|\mathfrak{A}_\beta\|_0 \stackrel{(5.38), (4.14)}{\leq} \\ &\stackrel{(5.38), (4.14)}{\leq} \frac{1}{2} C_{42} (\|\beta\|_0 + |\beta_1| \chi^2) \|\beta\|_1^2 \leq C_{42} \varepsilon (\chi \|\beta\|_1)^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\beta(t, \cdot))| &\stackrel{(5.40)-(5.42)}{\leq} |\beta_1(0)| + \sqrt{2t} \|\beta(0)\|_0 + \\ &+ \sqrt{t} (C_{41} t (\|\beta(0)\|_0 + \chi^2 \|\beta\|_1^2))^{1/2} \chi \|\beta\|_1 + \sqrt{C_{42} \varepsilon} \chi \|\beta\|_1. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Лемма 5.6. Если

$$t \leq L \chi^{-1} \quad \text{и} \quad \varepsilon \leq L \chi^{-2} \quad (5.44)$$

при подходящей константе $L = L(\hat{C}) > 0$, то

$$|\Phi_1(\beta(t, \cdot))| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left(\sum_{k \geq 2} k^2 \Phi_k^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \|\Phi(\beta(t, \cdot))\|_1 \leq \varepsilon. \quad (5.45)$$

Доказательство. При условиях (5.44) каждое слагаемое в правой части (5.43) оценивается через $\varepsilon/8$, а правая часть в (5.39) — через $\varepsilon/2$. $\square$

5.4.2. Чтобы доказать свойство (5.28) оператора Φ , а именно, $\Phi(\beta) \in \mathfrak{M} \forall \beta \in \mathfrak{M}$, осталось проверить, что

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|\gamma_1(t)|}{|\gamma_1(0)|}, \quad \text{где} \quad \gamma_1 = \Phi_1(\beta), \quad \beta \in \mathfrak{M}. \quad (5.46)$$

Для этого оценим

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(t) &= \frac{(\Phi_1^2(\beta))}{2\Phi_1(\beta)} \stackrel{(5.24)}{=} \\ &\stackrel{(5.24)}{=} \frac{1}{2\Phi_1(\beta)(t + t_0)} \left[-\Phi_1^2(\beta) + 2 \sum_{k \geq 2} \left(\frac{t_0^{k+2} \beta_k^2(0)}{(t + t_0)^{k+2}} + \frac{g_k(\beta(t))}{(t + t_0)^{k+2}} \right) + \rho_1(\beta(t)) \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

В силу (5.41), (5.42) и (5.44), имеем

$$2 \sum_{k \geq 2} \frac{|g_k(\beta(t))|}{(t+t_0)^{k+2}} \leq C_{48} t \varepsilon^2, \quad |\rho_1(\beta(t))| \leq C_{48} \varepsilon^2. \quad (5.48)$$

Отсюда и из (5.47)

$$|\dot{\gamma}_1(t)| \leq \frac{|\Phi_1(\beta)|^2 + 2\|\beta(0, \cdot)\|_0^2 + C_{48}(t\varepsilon^2 + \varepsilon^2)}{2|\Phi_1(\beta)|(t+t_0)}. \quad (5.49)$$

Ввиду (5.14) и (5.45), числитель этой дроби оценивается через $\varepsilon^2/4 + 2(\varepsilon/4)^2 + C_{48}(t\varepsilon^2 + \varepsilon^2)$. Оценим знаменатель. Имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\beta(t))|^2 &\stackrel{(5.24)}{\geq} \frac{t_0}{t+t_0} |\beta_1(0)|^2 - \frac{2t}{t+t_0} \sum_{k \geq 2} |\beta_k^2(0)| - \\ &- \frac{2t}{t+t_0} \max_{\tau \leq t} \sum_{k \geq 2} \frac{|g_k(\beta(\tau))|}{(\tau+t_0)^{k+2}} - t \max_{\tau \leq t} |\rho_1(\beta(\tau))| \stackrel{(5.48)}{\geq} \\ &\stackrel{(5.48)}{\geq} \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{8\chi} \right)^2 - t \{2\|\beta(0, \cdot)\|_0^2 + C_{48}(t\varepsilon^2 + \varepsilon^2)\} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{8\chi} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.50)$$

если $t \leq C_{50}/\chi^2$. Отсюда и из (5.49) получаем

$$|\dot{\gamma}_1(t)| \leq \frac{\frac{\varepsilon^2}{4} + 2 \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^2 + C_{48}(t\varepsilon^2 + \varepsilon^2)}{2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{8\chi} \right)^2 \right]^{1/2}} \leq C_{51} \chi \varepsilon. \quad (5.51)$$

Тем самым, поскольку $|\beta_1(0)| = |\gamma_1(0)| = \varepsilon/(8\chi)$, имеем

$$|\gamma_1(t)| \geq |\gamma_1(0)| - \max_{\tau \leq t} |\dot{\gamma}_1(\tau)| t \geq |\beta_1(0)| - C_{51} \chi \varepsilon t \geq \frac{|\gamma_1(0)|}{2},$$

если $8C_{51}\chi^2 t \leq 1/2$. Итак, справедлива следующая лемма.

Лемма 5.7. *При условии*

$$\varepsilon \leq (C_{52}\chi^2)^{-1}, \quad T \leq (C_{52}\chi^2)^{-1}, \quad (5.52)$$

где $C_{52} = C_{52}(\hat{C})$ — подходящая константа, выполнено свойство (5.28) оператора Φ , т.е. $\Phi(\beta) \in \mathfrak{M} \forall \beta \in \mathfrak{M}$.

Будем теперь искать условия, при которых

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\gamma)\|_1 \leq q \|\beta - \gamma\|_1 \quad \forall \beta \in \mathfrak{M}, \gamma \in \mathfrak{M}, 0 < q < 1. \quad (5.53)$$

5.5. Оценим сначала

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} [k(\Phi_k(\beta) - \Phi_k(\gamma))]^2 &\stackrel{(5.25)}{\leq} \sum_{k \geq 2} \frac{k^2}{(t+t_0)^{k+2}} \left[\frac{(t+t_0)^{k/2+1} - t_0^{k/2+1}}{\frac{k}{2} + 1} \right]^2 \max_{\tau \leq t} |\rho_k(\beta) - \rho_k(\gamma)|^2 \leq \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 2} \max_{\tau \leq t} |\rho_k(\beta) - \rho_k(\gamma)|^2. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Заметим, что ввиду (5.21),

$$\rho_k(\beta) - \rho_k(\gamma) = \frac{1}{2} \langle S(\beta) - S(\gamma), e_k \rangle - \langle \mathfrak{A}(\beta) - \mathfrak{A}(\gamma), e_k \rangle. \quad (5.55)$$

Отсюда и из (5.54) получаем (полагая $S_\beta = S(\beta)$, $\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{A}(\beta)$)

$$\sum_{k \geq 2} [k(\Phi_k(\beta) - \Phi_k(\gamma))]^2 \leq 4 [\|S_\beta - S_\gamma\|_0^2 + \|\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma\|_0^2]. \quad (5.56)$$

5.5.1. Оценим первое слагаемое в правой части (5.56).

Лемма 5.8. *Существует константа $C_{57} = C_{57}(\hat{C}) > 0$ такая, что*

$$\|S_\beta - S_\gamma\|_0 \leq C_{57} \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1). \quad (5.57)$$

Доказательство. Согласно (4.9), имеем

$$\pi(S_\beta - S_\gamma) = T_f + \dots - T_l, \quad (5.58)$$

где

$$T_f = (e^{-2\mathbb{H}\beta} - 1) (\mathbb{H}\beta)' - (e^{-2\mathbb{H}\gamma} - 1) (\mathbb{H}\gamma)',$$

а

$$T_l = \beta' e^{-\mathbb{H}\beta} \int_0^\sigma \beta' e^{-\mathbb{H}\beta} - \gamma' e^{-\mathbb{H}\gamma} \int_0^\sigma \gamma' e^{-\mathbb{H}\gamma}.$$

Оценим T_f . Используя равенства $g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g'(\lambda) d\lambda$, получаем

$$\begin{aligned} |T_f| &= \left| \left(\int_0^\sigma (\mathbb{H}\beta)' e^{-2\mathbb{H}\beta} d\lambda \right) (\mathbb{H}\beta)' - \left(\int_0^\sigma (\mathbb{H}\gamma)' e^{-2\mathbb{H}\gamma} d\lambda \right) (\mathbb{H}\gamma)' \right| = \\ &= \left| \left(\int_0^\sigma (\mathbb{H}\beta)' e^{-2\mathbb{H}\beta} d\lambda \right) (\mathbb{H}\beta - \mathbb{H}\gamma)' + \left(\int_0^\sigma [(\mathbb{H}\beta)' e^{-2\mathbb{H}\beta} - (\mathbb{H}\gamma)' e^{-2\mathbb{H}\gamma}] d\lambda \right) (\mathbb{H}\gamma)' \right| \leq \\ &\leq \|(\mathbb{H}\beta)'\|_0 \|(\mathbb{H}(\beta - \gamma))'\| + |(\mathbb{H}\gamma)'| \int_0^\sigma \left| (\mathbb{H}\beta)' [e^{-2\mathbb{H}\beta} - e^{-2\mathbb{H}\gamma}] + [(\mathbb{H}\beta)' - (\mathbb{H}\gamma)'] e^{-2\mathbb{H}\gamma} \right| d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|T_f\|_0 &\leq \|(\mathbb{H}\beta)'\|_0 \left(\|(\mathbb{H}(\beta - \gamma))'\|_0 + |(\mathbb{H}\gamma)'| \left(\|(\mathbb{H}\beta)' [e^{-2\mathbb{H}\beta} - e^{-2\mathbb{H}\gamma}]\|_0 + \|(\mathbb{H}(\beta - \gamma))'\|_0 \right) \right) \leq \\ &\leq \|\beta\|_1 \|\beta - \gamma\|_1 + \|\gamma\|_1 (\|\beta\|_1 \|\beta - \gamma\|_1 + \|\beta - \gamma\|_1), \end{aligned}$$

поскольку, в силу (4.12),

$$\left| e^{-2\mathbb{H}\beta} - e^{-2\mathbb{H}\gamma} \right| \leq \left| e^{-2\mathbb{H}(\beta - \gamma)} - 1 \right| \leq \left| \int_0^\sigma e^{-2\mathbb{H}(\beta - \gamma)} (\mathbb{H}(\beta - \gamma))' d\lambda \right| \leq \|\beta - \gamma\|_1$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \left| e^{-2\mathbb{H}\beta} - e^{-2\mathbb{H}\gamma} \right|^2 \leq \|\beta - \gamma\|_1^2. \quad (5.59)$$

Оценим последнее слагаемое в (5.58). Имеем

$$\begin{aligned} |T_l| &\leq \left| (\beta' - \gamma') e^{-\mathbb{H}\beta} \int_0^\sigma \beta' e^{-\mathbb{H}\beta} \right| + \left| \gamma' (e^{-\mathbb{H}\beta} - e^{-\mathbb{H}\gamma}) \int_0^\sigma \beta' e^{-\mathbb{H}\beta} \right| + \\ &+ \left| \gamma' e^{-\mathbb{H}\gamma} \int_0^\sigma (\beta' - \gamma') e^{-\mathbb{H}\beta} \right| + \left| \gamma' e^{-\mathbb{H}\gamma} \int_0^\sigma \gamma' (e^{-\mathbb{H}\beta} - e^{-\mathbb{H}\gamma}) \right| \leq \\ &\leq |\beta' - \gamma'| \|\beta'\|_0 + |\gamma'| \left| e^{-\mathbb{H}\beta} - e^{-\mathbb{H}\gamma} \right| \|\beta\|_1 + |\gamma'| \|\beta' - \gamma'\|_0 + |\gamma'| \|\gamma'\|_0 \left\| e^{-\mathbb{H}\beta} - e^{-\mathbb{H}\gamma} \right\|_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|T_l\|_0 &\leq \|\beta\|_1 \|\beta - \gamma\|_1 + \|\beta\|_1 \|\gamma\|_1 \|\beta - \gamma\|_1 + \\ &+ \|\gamma\|_1 \|\beta - \gamma\|_1 + \|\gamma\|_1^2 \|\beta - \gamma\|_1 \leq \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1). \end{aligned}$$

Остальные слагаемые в правой части (5.58) оцениваются также через $\|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1)$. $\square$

5.5.2. Оценим 2-е слагаемое в правой части (5.56).

Лемма 5.9. *Существует константа C_{60} такая, что*

$$\|\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma\|_0 \leq C_{60}(\varepsilon^2 \chi^4 + \varepsilon \chi^3) \|\beta - \gamma\|_1 \quad \forall \beta \in \mathfrak{M}, \forall \gamma \in \mathfrak{M}. \quad (5.60)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma &\stackrel{(5.22)}{=} P_\beta [(1 + P_\beta)^{-1} - (1 + P_\gamma)^{-1}] (\Lambda_\beta + Q_\beta) + \\ &+ (P_\beta - P_\gamma)(1 + P_\gamma)^{-1} (\Lambda_\beta + Q_\beta) + P_\gamma(1 + P_\gamma)^{-1} (\Lambda_\beta - \Lambda_\gamma) + P_\gamma(1 + P_\gamma)^{-1} (Q_\beta - Q_\gamma). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Заметим, что

$$(1 + P_\gamma)^{-1} - (1 + P_\beta)^{-1} = (1 + P_\beta)^{-1} (P_\beta - P_\gamma)(1 + P_\gamma)^{-1}.$$

Поэтому

$$\|\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma\|_0 \leq \|P_\beta\| \cdot \|P_\beta - P_\gamma\| \cdot \|\Lambda_\beta + Q_\beta\|_0 \|P_\gamma\| (\|\Lambda_\beta - \Lambda_\gamma\|_0 + \|Q_\beta - Q_\gamma\|_0). \quad (5.62)$$

Ниже увидим, что для некоторой константы C_{63}

$$\|P_\beta - P_\gamma\| \leq C_{63} \chi^2 \|\beta - \gamma\|_1, \quad (5.63)$$

а

$$\|\Lambda_\beta - \Lambda_\gamma\|_0 + \|Q_\beta - Q_\gamma\|_0 \leq C_{63} \chi^2 \|\beta - \gamma\|_1. \quad (5.64)$$

Отсюда, а также из (5.16), (5.37) и (5.61) получаем (5.60). $\square$

5.5.2.1. Докажем неравенство (5.63). Имеем

$$\begin{aligned} &\|(P_\beta - P_\gamma)v\|_0^2 \stackrel{(5.11)}{=} \left| \frac{1}{\beta_1} \left[r_1(\beta)v + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) R_k(\beta)v \right] - \right. \\ &- \frac{1}{\gamma_1} \left[r_1(\gamma)v + \sum_{k \geq 2} \left(\gamma_k + \frac{k-1}{k} \gamma_{k-1} \right) R_k(\gamma)v \right] \left. \right|^2 + \sum_{k \geq 2} |R_k(\beta)v - R_k(\gamma)v|^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\beta_1 - \gamma_1}{\beta_1 \gamma_1} \right)^2 \left[|r_1(\beta)v|^2 + \left(\sum_{k \geq 2} \beta_k^2 \right) \left(\sum_{k \geq 2} R_k(\beta)v \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{\gamma_1^2} |r_1(\beta)v - r_1(\gamma)v|^2 + \frac{1}{\gamma_1^2} \|\beta - \gamma\|_0^2 \|R(\beta)v\|_0^2 + \\ &+ \frac{1}{\gamma_1^2} \|\gamma\|_0^2 \|R(\beta)v - R(\gamma)v\|_0^2 + \|R(\beta)v - R(\gamma)v\|_0^2 \stackrel{(4.13)}{\leq} \\ &\stackrel{(4.13)}{\leq} \left(\frac{\beta_1 - \gamma_1}{\beta_1 \gamma_1} \right)^2 \|\beta\|_0^2 \|\beta\|_1^2 \|v\|_0^2 + \frac{\|\beta - \gamma\|_0^2}{\gamma_1^2} \|\beta\|_1^2 \|v\|_0^2 + \\ &+ \frac{1}{\gamma_1^2} |r_1(\beta)v - r_1(\gamma)v|^2 + \left(\frac{\|\gamma\|_0^2}{\gamma_1^2} + 1 \right) \|R(\beta)v - R(\gamma)v\|_0^2. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Лемма 5.10. $\|R(\beta)v - R(\gamma)v\|_0 \leq \|\beta - \gamma\|_1 \|v\|_0$.

Доказательство. Достаточно оценить

$$\begin{aligned}
& |R(\beta)v - R(\gamma)v| \stackrel{(4.8)}{\leq} \left| \int_0^\sigma [e^{\mathbb{H}\beta} - e^{\mathbb{H}\gamma}] \mathbb{H}v + \left[(e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) - (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1) \right] + \int_0^\sigma e^{\mathbb{H}\beta} \mathbb{H}v + \right. \\
& \quad \left. + (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1) \int_0^\sigma [e^{\mathbb{H}\beta} - e^{\mathbb{H}\gamma}] \mathbb{H}v + (\beta' - \gamma') \int_0^\sigma \mathbb{H}v \right| \leq \left| e^{-\mathbb{H}\gamma} \int_0^\sigma (e^{\mathbb{H}\beta} - e^{\mathbb{H}\gamma}) \mathbb{H}v \right| + \\
& \quad + \left| e^{-\mathbb{H}\beta} - e^{-\mathbb{H}\gamma} \right| \cdot \left| \int_0^\sigma e^{\mathbb{H}\beta} \mathbb{H}v \right| + |\beta' - \gamma'| \left| \int_0^\sigma \mathbb{H}v \right| \stackrel{(5.59)}{\leq} \|\beta - \gamma\|_1 \|v\|_0 + |(\beta - \gamma)'| \cdot \|v\|_0.
\end{aligned}$$

□

Лемма 5.11. $|r_1(\beta)v - r_1(\gamma)v| \leq \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1) \|v\|_0$.

Доказательство. Имеем¹

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 [r(\beta)v - r(\gamma)v] \sin \pi \sigma \, d\sigma \right| \stackrel{(4.6)}{\leq} \left| \int_0^1 \left[(\beta' - \gamma') \int_0^\sigma (e^{\mathbb{H}\beta} - 1) \mathbb{H}v \, d\xi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \gamma' \int_0^\sigma \left((e^{\mathbb{H}\beta} - 1) - (e^{\mathbb{H}\gamma} - 1) \right) \mathbb{H}v \, d\xi \right] d\sigma \right| + \left| \int_0^1 \left[(\beta' - \gamma') (e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) \int_0^\sigma e^{\mathbb{H}\beta} \mathbb{H}v \, d\xi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \gamma' \left((e^{\mathbb{H}\beta} - 1) - (e^{\mathbb{H}\gamma} - 1) \right) \int_0^\sigma e^{\mathbb{H}\beta} \mathbb{H}v \, d\xi + \gamma' (e^{\mathbb{H}\gamma} - 1) \int_0^\sigma (e^{\mathbb{H}\beta} - e^{\mathbb{H}\gamma}) \mathbb{H}v \, d\xi \right] d\sigma \right| \leq \\
& \quad \leq \|\beta - \gamma\|_1 \|\beta\|_0 \|v\|_0 + \|\gamma\|_1 \|\beta - \gamma\|_0 \|v\|_0 + \|\beta - \gamma\|_1 \|\beta\|_0 \|v\|_0 + \\
& \quad + \|\gamma\|_1 \|\beta - \gamma\|_0 \|v\|_0 + \|\gamma\|_1 \|\beta - \gamma\|_0 \|v\|_0 \leq \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1) \|v\|_0.
\end{aligned}$$

□

Поскольку $\frac{1}{|\beta_1|} \leq \frac{2}{|\beta_1(0)|}$ для $\beta \in \mathfrak{M}$, то из (5.65), леммы 5.10 и леммы 5.11 получаем

$$\begin{aligned}
& \|(P_\beta - P_\gamma)v\|_0 \leq \frac{4}{\beta_1^2(0)} (|\beta_1 - \gamma_1| \|\beta\|_0 \|\beta\|_1 \|v\|_0) + \\
& \quad + \frac{2}{\beta_1(0)} (\|\beta - \gamma\|_0 \|\beta\|_1 \|v\|_0 + \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1) \|v\|_0 + 2\|\gamma\|_0 \|\beta - \gamma\|_1 \|v\|_0).
\end{aligned}$$

Отсюда следует (5.63), так как $|\beta_1(0)| = \varepsilon/(8\chi)$.

5.5.2.2. Докажем оценку (5.64). Имеем

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda_\beta - \Lambda_\gamma\|_0 \stackrel{(5.12)}{\leq} \left| \frac{1}{\beta_1} \left(-\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 \right) - \frac{1}{\gamma_1} \left(-\gamma_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \gamma_k^2 \right) \right| + \|\beta - \gamma\|_1 \leq \\
& \leq \left| \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\gamma_1} \right) \left(-\beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2 \right) + \frac{1}{\gamma_1} \left(\gamma_1^2 - \beta_1^2 + 2 \sum_{k \geq 2} (\beta_k^2 - \gamma_k^2) \right) \right| + \|\beta - \gamma\|_1 \leq \\
& \leq \left| \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\beta_1 \gamma_1} \right| \|\beta\|_0^2 + \frac{1}{|\gamma_1|} \|\beta - \gamma\|_0 \|\beta + \gamma\|_0 + \|\beta - \gamma\|_1 \leq C\chi^2 \|\beta - \gamma\|_1. \tag{5.66}
\end{aligned}$$

¹Ср. доказательство оценки (4.13) для $|r_1(\beta)\varphi|$.

Далее,

$$\begin{aligned}
\|Q_\beta - Q_\gamma\|_0 &\stackrel{(5.13)}{\leq} \left| \frac{1}{\beta_1} \left[s_1(\beta) + \sum_{k \geq 2} \left(\beta_k + \frac{k-1}{k} \beta_{k-1} \right) S_k(\beta) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_1} \left[s_1(\gamma) + \sum_{k \geq 2} \left(\gamma_k + \frac{k-1}{k} \gamma_{k-1} \right) S_k(\gamma) \right] \right| + \|S(\beta) - S(\gamma)\|_0 \leq \\
&\leq \left| \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\beta_1 \gamma_1} \right| \|\beta\|_0 \|\beta\|_1^2 + \frac{1}{|\gamma_1|} |s_1(\beta) - s_1(\gamma)| + \frac{\|\beta\|_0}{|\gamma_1|} \|S_\beta - S_\gamma\|_0 + \\
&\quad + \frac{1}{|\gamma_1|} \|\beta - \gamma\|_0 \|S(\gamma)\|_0 + \|S_\beta - S_\gamma\|_0.
\end{aligned}$$

В силу (5.57), последнее слагаемое оценивается через $\|\beta - \gamma\|_1$ ($\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1$). Оценим

$$\begin{aligned}
|s_1(\beta) - s_1(\gamma)| &\stackrel{(4.7)}{\leq} \left| \int_0^1 \left[\beta' \int_0^\sigma \beta' (e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) d\xi - \gamma' \int_0^\sigma \gamma' (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1) d\xi \right] d\sigma \right| + \\
&\quad + \left| \int_0^1 \left[\beta' (e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) \int_0^\sigma e^{-\mathbb{H}\beta} \beta' d\xi - \gamma' (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1) \int_0^\sigma e^{-\mathbb{H}\gamma} \gamma' d\xi \right] d\sigma \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^1 \left[(\beta' - \gamma') \int_0^\sigma \beta' (e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) d\xi + \gamma' \int_0^\sigma (\beta' - \gamma') (e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) d\xi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma' \int_0^\sigma \gamma' ((e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) - (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1)) d\xi \right] d\sigma \right| + \left| \int_0^1 \left[(\beta' - \gamma') (e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) \int_0^\sigma e^{-\mathbb{H}\beta} \beta' d\xi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma' ((e^{-\mathbb{H}\beta} - 1) - (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1)) \int_0^\sigma e^{-\mathbb{H}\beta} \beta' d\xi + \gamma' (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1) \int_0^\sigma (e^{-\mathbb{H}\beta} - e^{-\mathbb{H}\gamma}) \beta' d\xi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma' (e^{-\mathbb{H}\gamma} - 1) \int_0^\sigma e^{-\mathbb{H}\gamma} (\beta' - \gamma') d\xi \right] d\sigma \right| \leq C_{67} \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1^2 + \|\gamma\|_1^2). \tag{5.67}
\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.66) вытекает оценка (5.64).

Мы оценили оба слагаемых в правой части (5.56). Тем самым, доказано, что (с точностью до мультипликативной константы)

$$\sum_{k \geq 2} [k (\Phi_k(\beta) - \Phi_k(\gamma))]^2 \leq [\chi \varepsilon (\chi^3 \varepsilon + \chi^2) \|\beta - \gamma\|_1]^2. \tag{5.68}$$

5.6. Оценим теперь

$$|\Phi_1^2(\beta) - \Phi_1^2(\gamma)| \stackrel{(5.24)}{\leq} \frac{1}{t + t_0} \left[\int_0^t |\rho_1(\beta(\tau)) - \rho_1(\gamma(\tau))| d\tau + 2 \int_0^t \sum_{k \geq 2} \frac{|g_k(\beta(\tau)) - g_k(\gamma(\tau))|}{(\tau + t_0)^{k+2}} d\tau \right]. \tag{5.69}$$

Заметим, что

$$\sum_{k \geq 2} \frac{|g_k(\beta(\tau)) - g_k(\gamma(\tau))|}{(\tau + t_0)^{k+2}} \stackrel{(5.26)}{\leq} \sum_{k \geq 2} 2t_0^{k/2+1} |\beta_k(0)| \int_0^\tau \frac{(\theta + t_0)^{k/2}}{(t + t_0)^{k+2}} |\rho_k(\beta) - \rho_k(\gamma)| d\theta +$$

$$+ \sum_{k \geq 2} \left(\int_0^\tau |\rho_k(\beta) - \rho_k(\gamma)| d\theta \right) \left(\int_0^\tau (\rho_k(\beta) + \rho_k(\gamma)) d\theta \right).$$

Отсюда, учитывая (5.55), леммы 5.5, 5.8 и 5.9, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} \frac{|g_k(\beta) - g_k(\gamma)|}{(\tau + t_0)^{k+2}} &\leq \|\beta\|_0 \tau \varepsilon \|\beta - \gamma\|_1 \chi^{3/2} + \tau^2 \chi^2 \|\beta\|_1^2 \varepsilon \|\beta - \gamma\|_1 \chi^{3/2} \leq \\ &\leq C \varepsilon^2 t \|\beta - \gamma\|_1 \chi^{3/2}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

если $\varepsilon \leq (C\chi^2)^{-1}$.

Поскольку $\|\mathfrak{A}_\beta\|_0 \stackrel{(5.34)-(5.36)}{\leq} C_0 \chi^2 \|\beta\|_1^2$, то

$$\begin{aligned} |\rho_1(\beta) - \rho_1(\gamma)| &\stackrel{(5.21)}{\leq} |s_1(\beta) - s_1(\gamma)| + C_1 \|\beta - \gamma\|_0 \|S_\beta\|_0 + \\ &+ C_1 \|\gamma\|_0 \|S_\beta - S_\gamma\|_0 + |\beta_1 - \gamma_1| \|\mathfrak{A}_\beta\|_0 + |\gamma_1| \|\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma\|_0 \leq \\ &\leq C_{67} \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1^2 + \|\gamma\|_1^2) + \hat{C} \|\beta - \gamma\|_0 \|\beta\|_1^2 + C_{57} \|\gamma\|_0 \|\beta - \gamma\|_1 (\|\beta\|_1 + \|\gamma\|_1) + \\ &+ |\beta_1 - \gamma_1| C_0 \chi^2 \|\beta\|_1^2 + |\gamma_1| C_{60} \varepsilon \chi^3 \|\beta - \gamma\|_1 \leq C_{71} \varepsilon^2 \chi^3 \|\beta - \gamma\|_1. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Отсюда и из (5.69)–(5.70) вытекает, что

$$|\Phi_1^2(\beta) - \Phi_1^2(\gamma)| \geq C_{72} t \varepsilon^2 \chi^3 \|\beta - \gamma\|_1. \quad (5.72)$$

С другой стороны, согласно (5.50), имеем

$$|\Phi_1(\beta) + \Phi_1(\gamma)| \geq C \frac{\varepsilon}{\chi}, \quad \text{если } t \leq \frac{C_{50}}{\chi^2}. \quad (5.73)$$

Из неравенств (5.72)–(5.73) следует

$$|\Phi_1(\beta) - \Phi_1(\gamma)| \leq C_{74} t \varepsilon \chi^4 \|\beta - \gamma\|_1 \leq \frac{q}{2} \|\beta - \gamma\|_1, \quad (5.74)$$

где $0 < q < 1$, а $t\chi^2 \ll 1$, $\varepsilon\chi^2 \ll 1$. Учитывая (5.68), получим

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\gamma)\|_1 \leq \|\beta - \gamma\|_1 \left(\frac{q}{2} + \chi^4 \varepsilon^2 + \chi^3 \varepsilon \right) \leq q \|\beta - \gamma\|_1, \quad (5.75)$$

если

$$t \leq T \leq (C_* \chi^2)^{-1}, \quad \text{а } \varepsilon \leq (C_* \chi^3)^{-1},$$

где $C_* = C_*(\hat{C})$ достаточно велико.

5.7. Мы нашли условия (5.75), при которых на множестве $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\varepsilon, T}$ оператор Φ обладает свойствами (5.28)–(5.29) и, следовательно, определяет (причем, единственное) решение $\beta \in \mathfrak{M}$ уравнения (5.1). Для завершения доказательства теоремы 5.2 осталось установить оценку (5.3).

Поскольку $|\rho_1(\beta(\tau))| \leq C_{42} \varepsilon (\chi \|\beta\|_1)^2$, то

$$|\beta_1^2(t) - \bar{\beta}_1^2(t)| \stackrel{(5.27)}{\leq} C_{42} \varepsilon t \chi^2 \|\beta\|_1^2 + 2 \int_0^t \sum_{k \geq 2} |\beta_k^2(\tau) - \bar{\beta}_k^2(\tau)| d\tau. \quad (5.76)$$

Далее, в силу (5.5) и (5.25),

$$|\beta_k(\tau) - \bar{\beta}_k(\tau)| \leq 2 |\beta_k(0)| + \tau |\rho_k(\beta(\tau))|, \quad (5.77)$$

а

$$|\beta_k(\tau) - \bar{\beta}_k(\tau)| \leq \frac{1}{(\tau + t_0)^{k/2+1}} \int_0^\tau (\theta + t_0)^{k/2} |\rho_k(\beta(\theta))| d\theta. \quad (5.78)$$

Отметим, что (5.33), (4.14) и (5.38) влекут

$$\left(\sum_{k \geq 2} \rho_k^2(\beta) \right)^{1/2} \leq C_{79} (\chi \|\beta\|_1)^2 \quad (5.79)$$

и потому из (5.77)–(5.78) получаем

$$\sum_{k \geq 2} |\beta_k^2(\tau) - \bar{\beta}_k^2(\tau)| \leq C_{79} t \chi^2 \|\beta\|_1^2 (\|\beta(0, \cdot)\|_0 + C_{79} t \chi^2 \|\beta\|_1^2).$$

Отсюда и из (5.75)–(5.76) следует оценка

$$|\beta_1^2(t) - \bar{\beta}_1^2(t)| \leq C_{80} t \chi^2 \varepsilon^3. \quad (5.80)$$

С другой стороны, аналогично (5.50), получаем

$$|\beta_1(t) + \bar{\beta}_1(t)| \geq C_{81} \frac{\varepsilon}{\chi}. \quad (5.81)$$

Из (5.80)–(5.81) и (5.75) вытекает оценка $|\dot{\beta}_1(0) - \dot{\bar{\beta}}_1(0)| \leq C_* \varepsilon$.

Наконец, в силу (5.78) и (5.79),

$$\sqrt{\sum_{k \geq 2} |\beta_k(t) - \bar{\beta}_k(t)|^2} \leq t C_{79} (\chi \|\beta\|_1)^2.$$

Это влечет оценку

$$\sqrt{\sum_{k \geq 2} |\dot{\beta}_k(0) - \dot{\bar{\beta}}_k(0)|^2} \leq C_* \varepsilon^2 \chi^2 \leq \frac{\varepsilon}{\chi}.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Удмурт. гос. ун-т, 2000.
2. Виноградов Ю. П., Куфарева П. П. Об одной задаче фильтрации// Прикл. мат. мех. — 1948. — 12, № 2. — С. 181–198.
3. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью// Докл. АН СССР. — 1945. — 47, № 4. — С. 250–253.
4. Демидов А. С. Полигональная модель для течения Хил-Шоу// Усп. мат. наук. — 1998. — 4. — С. 195–196.
5. Демидов А. С. Об эволюции слабого возмущения окружности в задаче о Хил-Шоу течении// Усп. мат. наук. — 2002. — 6.
6. Кочина П. Я. (Полубаринова-Кочина П. Я.) Избранные труды. — М.: Наука, 1991.
7. Ламб Г. Гидродинамика. — Гостехиздат, 1947.
8. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика, II. — М.: Нефтеиздат. — 1934.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. — Л.: АН СССР, 1933.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности// Докл. АН СССР. — 1945. — 47, № 4 — С. 254–257.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившихся движениях в теории фильтрации: о перемещении контура нефтеносности// Прикл. мат. мех. — 1945. — 9, № 1. — С. 79–90.
12. Caginalp G. Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotics limits of the phase field equations// Review A. — 1989. — 39. — С. 5887–5896.
13. Demidov A. S. Some applications of the Helmholtz–Kirchhoff method (equilibrium plasma in Tokamaks, Hele-Shaw flow, and high-frequency asymptotics)// Russ. J. Math. Phys. — 2000. — 7, № 2. — С. 166–186.
14. Demidov A. S., Lohéac J.-P. A quasi-contour model of the Stokes–Leibenson problem for Hele-Shaw flows// CNRS UMN 5585 MAPLY. Prepublication — 328. <http://maply.univ-lyon1.fr/publs/publiv/2001/publis.html>
15. Demidov A. S., Lohéac J.-P. Some attractive submanifold in a space of contours for Stokes–Leibenson problem// Eur. J. Appl. Math. — 2003.

16. *Demidov A. S., Vasilieva O. A.* A finite points model of the Stokes–Leibenson problem for the Hele-Shaw flow// *Fundam. Prikl. Mat.* — 1999. — 1. — С. 67–84.
17. *Escher J., Simonett G.* Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models// *SIAM J. Math. Anal.* — 1997. — 28. — С. 1028–1047.
18. *Gustafsson B.* Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele-Shaw flows// *SIAM J. Math. Anal.* — 1985. — 16. — С. 279–300.
19. *Hele-Shaw H. S.*// *Trans. Roy. Inst. Nav. Archit.* — 1898. — 40. — С. 21.
20. *Hohlov Yu. E., Howison S. D.* On the classification of solutions to the zero-surface-tension model for Hele-Shaw free boundary flow// *Quart. Appl. Math.* — 1993. — 51. — С. 777–789.
21. *Hohlov Yu. E., Howison S. D., Huntingford C., Ockendon J. R., Lacey A. A.* A model for non-smooth free boundaries in Hele-Shaw flows// *Quart. J. Mech. Appl. Math.* — 1994. — 47. — С. 107–128.
22. *Howison S. D., Hohlov Yu. E., Lacey A. A.* Some open questions on regularization of ill-posed free boundary problems// *FBP News.* — 1994. — № 4. — С. 11–12.
23. *Reissing M.* The existence and uniqueness of analytic solutions for a moving boundary problem for Hele-Shaw flow in the plane// *Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl.* — 1994. — 23. — С. 565–576.
24. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel// *J. Fluid Mech.* — 1972. — 56. — С. 609–618.
25. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid// *Proc. Roy. Soc. A.* — 1958. — 245. — С. 312–329.
26. *Stokes G. G.* Mathematical proof of the identity of the stream-lines obtained by means of viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions// *Brit. Ass. Rep.* — 1898. — 143 (Papers, V, 278).

А. С. Демидов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: `asd@mech.math.msu.su`; `alexandre.demidov@mtu-net.ru`

О НЕРАВЕНСТВАХ КОРНА НА ТОНКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КАРКАСАХ© 2003 г. **В. В. ЖИКОВ, С. Е. ПАСТУХОВА**

Аннотация. Представлены неравенства типа неравенств Корна для тонких периодических структур, имеющих период ε и толщину $\varepsilon h(\varepsilon)$, где $h(\varepsilon) \rightarrow 0$. Рассмотрены периодические сетки, трехмерные стержневые структуры, трехмерные ящичные структуры, плоские фермы. Особое внимание уделено структурам с так называемой критической толщиной, когда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)\varepsilon^{-1} > 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	25
2. Тонкие периодические сетки	26
3. Ящичные структуры	35
4. Объемные стержневые каркасы	37
5. Фермы и подобные им конструкции	41
Список литературы	45

1. ВВЕДЕНИЕ

В качестве тонких периодических структур F_ε^h будем рассматривать плоские сетки и фермы, а также объемные ящичные и стержневые структуры, геометрия которых зависит от двух связанных между собой параметров: ε определяет ячейку периодичности, а εh — толщина составляющих элементов структуры, причем $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$. Упругие свойства периодических структур обнаруживают качественное различие в зависимости от того, каково значение предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)/\varepsilon$.

Введем классификацию тонких структур, такую же, как в [2]:

достаточно толстые структуры, если $h(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow \infty$,
 структуры критической толщины, если $h(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow \theta > 0$,
 достаточно тонкие структуры, если $h(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$.

Наша цель — получить весовое неравенство Корна для финитных функций, заданных на тонкой структуре F_ε^h , которое прояснит отмеченный выше масштабный эффект в теории упругости. Будут обсуждаться два неравенства

$$\int_{F_\varepsilon^h} |u|^2 dx \leq C_1 \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right) \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon^2 \int_{F_\varepsilon^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \int_{F_\varepsilon^h} \left[\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 |e(u)|^2 + |u|^2 \right] dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^N, \quad (1.2)$$

где константы C_1, C_2 не зависят от геометрических параметров ε, h , но могут зависеть от диаметра носителя вектор-функции u .

Эти два неравенства различны по своей природе. Неравенство (1.2) выполняется «покусочно» на определенного типа фрагментах структуры F_ε^h , тогда как неравенство (1.1) не допускает такого «распадения» и требует от периодической структуры особых свойств связности или прочности.

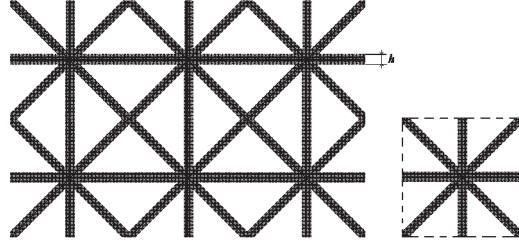


Рис. 1. Модельная сетка.

Для структур критической толщины неравенства (1.1), (1.2) означают, что

$$\int_{F_\varepsilon^h} (|u|^2 + \varepsilon h |\nabla u|^2) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx. \quad (1.3)$$

Весовые неравенства Корна, в которых вес определяется геометрическим параметром тонкой структуры, известны для отдельного стержня и пластины, а также для конструкций специального или общего вида из нескольких стержней (см. [3–9, 12]). Эти неравенства имеют анизотропный характер: продольные и поперечные компоненты вектор-функции u , также как и их продольные и поперечные производные, входят в неравенство с различными весами. Например, для пластины $\Pi = \{x : |x_3| < \frac{\mu}{2}\}$ весовое неравенство имеет вид

$$\int_{\Pi} \left[|u'|^2 + |\nabla_{x'} u'|^2 + \mu^2 \left(u_3^2 + \left| \frac{\partial u'}{\partial x_3} \right|^2 + |\nabla_{x'} u_3|^2 \right) \right] dx \leq C \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3,$$

где $x = (x', x_3)$, $u = (u', u_3)$.

Если же тонкие стержни или пластины формируют ε -периодическую структуру, то при малых ε происходит перемешивание анизотропии, в результате чего исчезает различие между продольными и поперечными направлениями, и появляются веса другого типа. Все эти веса имеют меньший порядок, чем μ^2 , где μ — толщина структуры, в нашем случае $\mu = \varepsilon h$ (см. (1.3)).

Неравенства (1.1), (1.2) представляют интерес и в случае, когда $h = \text{const} > 0$, т.е. для классических перфорированных областей (см. [1, 10]).

2. Тонкие периодические сетки

2.1. Простейшие сетки. На рис. 1 изображена тонкая периодическая сетка, составленная из бесконечных стержней толщины $h > 0$, ячейка периодичности $\square = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^2$ указана пунктиром.

Там же изображена соответствующая бесконечно тонкая (или сингулярная) сетка, отвечающая толщине $h = 0$, которая является каркасом для тонкой сетки. Данная сетка — модельный пример. На нем наглядно видна связь между соответствующими сингулярной и тонкой структурами, которая остается такой же и в более сложных примерах.

Далее, F^h — 1-периодическая сетка с толщиной h , F — соответствующая ей сингулярная сетка, $F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h$ — гомотетическое сжатие сетки F^h . Толщина стержней сетки F_ε^h равна εh .

Модельная сингулярная сетка составлена из нескольких периодически повторяющихся бесконечных прямых. Такие сетки будем называть *простейшими*. Мы исключаем из рассмотрения вырожденный случай одной периодически повторяющейся прямой.

Теорема 2.1. Для простейших сеток F_ε^h выполняются неравенство (1.1), где константа C_1 зависит от геометрии сингулярной сетки F и диаметра $\sup r_i$, а также неравенство

$$h\varepsilon \int_{F_\varepsilon^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \int_{F_\varepsilon^h} (|e(u)|^2 + |u|^2) dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2, \quad (2.1)$$

где константа C_2 зависит лишь от геометрии сингулярной сетки.

Для достаточно тонких сеток константа $C_1 \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2\right)$ из (1.1) стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Покажем на примере, что в этом случае точная константа в неравенстве Корна действительно имеет порядок $\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2$.

Пример. Рассмотрим квадратную сетку F^h . Пусть $a(t)$ — гладкая, 1-периодическая функция, равная нулю в окрестности точек 0 и $\frac{1}{2}$, $a \not\equiv 0$. Зададим в ячейке периодичности вектор-функцию v равенством

$$v(y) = \begin{cases} (-y_2 a'(y_1), a(y_1)), & \text{если } y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \\ (-a(y_2), a'(y_2) y_1), & \text{если } y \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

и периодически продолжим ее на $\mathbb{R}^2$. Нетрудно проверить, что

$$\int_{\square \cap F^h} |v|^2 dy = O(h), \quad \int_{\square \cap F^h} |e(v)|^2 dy = O(h^3).$$

Положим $u(x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ в $\square = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$, где $\varepsilon = \frac{1}{n}$, n — натуральное число. Тогда $u|_{\partial \square} = 0$ благодаря свойствам функции $a(t)$, и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\square \cap F_\varepsilon^h} |u|^2 dx &= \int_{\square \cap F^h} |v|^2 dy = O(h), \\ \int_{\square \cap F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx &= \varepsilon^{-2} \int_{\square \cap F^h} |e(v)|^2 dy = O(h^3 \varepsilon^{-2}), \end{aligned}$$

из которых следует искомое свойство.

2.2. Регулярные сетки. Перейдем к сеткам, которые не являются простейшими (см. рис. 2). Договоримся сначала, как строить по сингулярной сетке F тонкую сетку F^h . Для этого каждое звено I удлиним в обе стороны на $\frac{h}{2}$ так, что получится отрезок I' длины $|I| + h$. Построим полосу I^h ширины h со средней линией I' . Объединение всех этих полос I^h задает сетку F^h . Отметим, что по построению каждый узел сингулярной сетки F принадлежит сетке F^h вместе с кругом радиуса $\frac{h}{2}$.

Определим один класс сеток, для которых можно доказать неравенство (1.1). Звено сетки назовем *пронизывающим*, если сетке принадлежит вся проходящая через это звено прямая. Попытаемся присвоить метку $k = 0, 1, \dots$ каждому узлу сетки F , действуя по индукции. Узел получает метку 0, если из него выходят хотя бы два неколлинеарных пронизывающих звена. Пусть определены все узлы, которым можно присвоить метки $k \leq N$. Тогда метку $N + 1$ присваиваем непомянутому еще узлу, если из него можно выйти по двум неколлинеарным звеньям в соседние узлы, у которых уже есть метки. Скажем, что сетка F *регулярна*, если все ее узлы оказываются

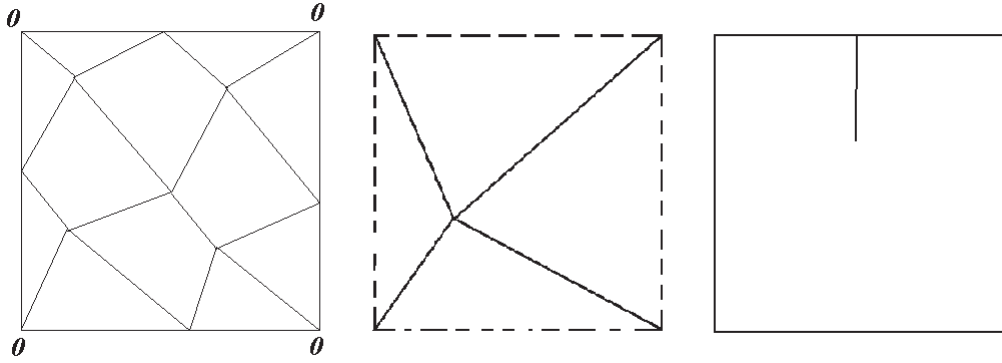


Рис. 2. Сетки, не являющиеся простейшими.

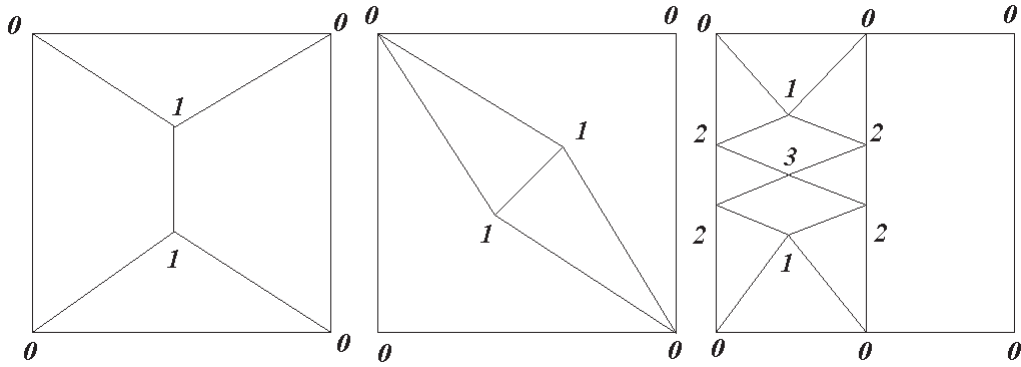


Рис. 3. Примеры регулярных сеток.

помеченными конечным числом меток. На рис. 3 изображены регулярные сетки: их узлы имеют метки от 0 до 3.

Регулярная сетка F , по определению, содержит пронизывающие прямые. Они образуют простейшую сетку, которая составляет основу сетки F , придавая ей особую связность и прочность по двум или более направлениям.

Понятие регулярной сетки можно расширить следующим образом, присваивая метки не только узлам, но и звеньям. Узел получает метку 0, если из него выходят хотя бы два неколлинеарных пронизывающих звена. Нулевую метку получают звенья, соединяющие узлы с нулевой меткой, а также все пронизывающие звенья. Пусть определены все узлы и звенья, которым можно присвоить метки $k \leq N$. Тогда метку $N + 1$ присваиваем непомяченному еще узлу, если из него можно выйти по двум неколлинеарным звеньям в узлы или на звенья, у которых уже есть метки. Определив все узлы с меткой $N + 1$, присвоим метку $N + 1$ непомяченному еще звеньям, которые соединяют уже помеченные узлы. В этом расширенном смысле первая из изображенных на рис. 2 сеток регулярна, а остальные нет.

Теорема 2.2. Пусть F — регулярная сетка. Тогда выполнено неравенство

$$\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2\right)^{-1} \int_{F_\varepsilon^h} (|u|^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|^2) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2,$$

где константа C зависит от геометрии сингулярной сетки F и диаметра $\text{supp } u$.

Теорема 2.3. Для любой без исключения периодической сетки F_ε^h выполняется неравенство (1.2), где константа C_2 зависит лишь от геометрии сингулярной структуры F .

Неравенство Корна (1.1) осталось недоказанным для сеток, не являющихся регулярными, например, для второй и третьей на рис. 2.

Отметим интересную работу [9], где получено некоторое анизотропное неравенство Корна для произвольной конечной системы плоских стержней. Осталось неясным, можно ли проследить за поведением константы в этом неравенстве, когда число стержней неограниченно растет, а их толщина уменьшается, с тем чтобы получить на этом пути, например, неравенство (1.1). Не исключено, что в некоторых случаях это сделать можно.

2.3. Технические леммы. Начнем с некоторых неравенств на единичном квадрате $\square = [0, 1]^2$.

Лемма 2.4. *Справедливы равномерные по h неравенства*

$$\int_{\square} |\nabla v|^2 dy \leq C_1 \int_{\square} (|e(v)|^2 + |v_2|^2) dy, \quad (2.2)$$

$$\int_{\square} |\nabla v|^2 dy \leq C_2 \left(\int_{\square} |e(v)|^2 dy + \sum_{i=0}^1 \frac{1}{h} \int_{K_i} v_2^2 dy \right), \quad v \in C^\infty(\square)^2, \quad (2.3)$$

где K и K^1 — эллипсы, вписанные в прямоугольники $[0, h] \times [0, 1]$ и $[1-h] \times [0, 1]$ соответственно.

Доказательство. Докажем неравенство (2.2) от противного. Допуская, что оно неверно, найдем гладкие векторы v^k такие, что

$$\int_{\square} |\nabla v^k|^2 dy = 1, \quad \int_{\square} [|e(v^k)|^2 + |v_2^k|^2] dy \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Без потери общности предполагаем, что $\int_{\square} v_1^k = 0$. Последовательность v^k ограничена в $H^1(\square)^2$, и можно считать ее слабо сходящейся, т.е.

$$v^k \rightharpoonup v, \quad \nabla v^k \rightharpoonup \nabla v \text{ в } L^2(\square).$$

Тогда из (2.4) вытекают свойства предельной функции

$$e(v) = 0, \quad v_2 = 0, \quad \int_{\square} v_1 dy = 0.$$

Отсюда получаем, что $v = 0$. С другой стороны, из классического неравенства Корна

$$\int_{\square} |\nabla w|^2 dy \leq C_1 \int_{\square} (|e(w)|^2 + |w|^2) dy, \quad w \in C^\infty(\square)^2, \quad (2.5)$$

примененного для $w = v^k$, следует, что $C_1 \int_{\square} |v^k|^2 dy \geq \frac{1}{2}$ при достаточно больших k , в силу (2.4),

что противоречит ранее полученной сильной сходимости $v^k \rightarrow 0$ в $L^2(\square)$. Неравенство (2.2) доказано.

Неравенство (2.3) также доказывается от противного. Допуская, что оно не выполняется, найдем последовательность $h \rightarrow 0$ и векторы v^h такие, что

$$\int_{\square} |\nabla v^h|^2 dy = 1, \quad \int_{\square} |e(v^h)|^2 dy + \frac{1}{h} \int_{K^0} |v_2^h|^2 dy + \frac{1}{h} \int_{K^1} |v_2^h|^2 dy \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

При этом можно считать, что $\int_{\square} v_1^h dy = 0$ и тогда последовательность v_1^h ограничена в $H^1(\square)$.

Последовательность v_2^h также ограничена в $H^1(\square)$. Действительно, пусть $\alpha^h = \int_{\square} v_2^h dy$. Проверим,

что

$$|\alpha^h| < C. \quad (2.7)$$

Из теоремы о следе функции вытекает неравенство

$$\frac{1}{h} \int_{T_0} w^2 dy \leq \delta \int_{\square} |\nabla w|^2 dy + C_\delta \int_{\square} w^2 dy \quad \forall \delta > 0, \quad (2.8)$$

где $T_0 = [0, h] \times [0, 1]$, $w \in H^1(\square)$. Отсюда выводим

$$|\alpha^h|^2 = \frac{1}{|K^0|} \int_{K^0} |\alpha^h|^2 dy = \frac{4}{\pi h} \int_{K^0} |\alpha^h|^2 dy \leq \frac{4}{\pi h} \left[\int_{T_0} |v_2^h - \alpha^h|^2 dy + \int_{K^0} |v_2^h|^2 dy \right] \leq C,$$

в силу (2.6) и ограниченности последовательности $v_2^h - \alpha^h$ в $H^1(\square)$. Здесь мы учли, что площадь вписанного в T_0 эллипса K_0 равна $|K_0| = \pi \frac{h}{4}$, так как у этого эллипса полуоси равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{h}{2}$. Неравенство (2.7) доказано, и вместе с ним доказана ограниченность последовательности v_2^h в $H^1(\square)$.

Итак, $|v^h|_{H^1(\square)^2} \leq C$. Без потери общности считаем, что

$$v^h \rightharpoonup v \text{ в } H^1(\square)^2, \quad v^h \longrightarrow v \text{ в } L^2(\square)^2.$$

Тогда из неравенства (2.8) выводится следующее свойство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} |v_2^h|^2 dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 |v_2(0, y_2)|^2 dy_2 = 0,$$

где $v_2(0, y_2)$ — след функции v_2 , и последнее равенство нулю получилось в силу (2.6).

Аналогично доказывается, что при $h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{|K_1|} \int_{K_1} |v_2^h|^2 dy \longrightarrow \frac{4}{\pi} \int_0^1 |v_2(1, y_2)|^2 dy_2 = 0.$$

Таким образом, из соотношений (2.6) вытекают следующие свойства предельной функции v :

$$e(v) = 0, \quad \int_{\square} v_1 dy = 0, \quad v_2|_{y_1=0} = v_2|_{y_1=1} = 0,$$

что возможно лишь, если $v = 0$. Значит, $v^h \rightarrow 0$ в $L^2(\square)^2$.

С другой стороны, из неравенства Корна (2.5), примененного для $w = v^h$, следует, что $C_1 \int_{\square} |v^h|^2 \geq \frac{1}{2}$, что противоречит сильной сходимости $v^h \rightarrow 0$. Неравенство (2.3) доказано и вместе с ним лемма 2.4. $\square$

Из доказанной леммы 2.4 выведем следующую лемму.

Лемма 2.5. Пусть $I^h = [0, 1] \times [0, h]$ — полоса, B^0, B^1 — круги радиуса $\frac{h}{2}$, примыкающие к торцам полосы (см. рис. 4). Тогда справедливы равномерные по h неравенства

$$h^2 \int_{I^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_1 \int_{I^h} (|e(u)|^2 + h^2 u_2^2) dx, \quad (2.9)$$

$$h^2 \int_{I^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \left(\int_{I^h} |e(u)|^2 dx + \sum_{i=0}^1 h \int_{B^i} u_2^2 dx \right), \quad u \in C^\infty(I^h)^2. \quad (2.10)$$



Рис. 4. Полоса с кругами.

Доказательство. Сделаем в неравенствах (2.2), (2.3) согласованную замену координат и функций:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = hy_2, \quad v_1 = u_1, \quad v_2 = hu_2, \quad (2.11)$$

в результате которой, например, неравенство (2.2) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{I^h} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + h^4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx \leq \\ & \leq C \int_{I^h} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + h^2 u_2^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h^2 \int_{I^h} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx \leq C \int_{I^h} [|e(u)|^2 + h^2 u_2^2] dx,$$

а поскольку

$$\int_{I^h} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \leq \int_{I^h} |e(u)|^2 dx,$$

то получаем оценку (2.9).

Аналогично из неравенства (2.3) выводится неравенство (2.10). Замена (2.11) переводит эллипсы K^i в круги B^i , $i = 0, 1$. Лемма 2.5 доказана. $\square$

Выведем из леммы 2.5 некоторые следствия.

Для стержня $\varepsilon I^h = [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon h]$ из оценки (2.9) гомотетией получаем оценку

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_1 \int_{\varepsilon I^h} \left[\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 |e(u)|^2 + |u|^2 \right] dx. \quad (2.12)$$

Из оценок такого типа суммированием выводится неравенство 1.2 и теорему 2.3 можно считать доказанной.

Из неравенства (2.5) вытекает также следующая лемма.

Лемма 2.6. Пусть $P = \{x : |x_2| < t/2\}$ — полоса. Тогда

$$t \int_P |\nabla u|^2 dx \leq C \int_P (|e(u)|^2 + |u_2|^2) dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2, \quad (2.13)$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. В самом деле, разрежем полосу P , ширина которой равна t , на равные доли P_i длиной $\sqrt{t}$ и применим неравенство (2.5) на каждой доле P_i в отдельности, считая ее полосой εI^h с $\varepsilon = h = \sqrt{t}$. Тогда

$$t \int_{P_i} |\nabla u|^2 dx \leq C_1 \int_{P_i} (|e(u)|^2 + |u_2|^2) dx.$$

Суммируя эти оценки, приходим к неравенству (2.13). $\square$

2.4. Доказательство теоремы 2.1. Неравенство (2.1) для простейшей сетки F_ε^h вытекает из леммы 2.6, если учесть, что толщина составляющих сетку полос равна $t = \varepsilon h$.

Докажем оценку 1.1 для простейшей сетки F_ε^h . Будем использовать при этом неравенство на полосе $\varepsilon I^h = [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon h]$

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla u|^2 dx \leq C \left[\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B^i} u^2 dx \right], \quad (2.14)$$

которое получается гомотетией из неравенства (2.3).

Полезны следующие вариации неравенства Фридрихса для скалярной функции.

(i) Если $I^h = [0, 1] \times [0, h]$, B — круг радиуса $h/2$, принадлежащий полосе I^h , то

$$\int_{I^h} w^2 dx \leq C \left(\int_{I^h} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{h} \int_B w^2 dx \right), \quad w \in C^\infty(I^h).$$

Отсюда с помощью гомотетии получаем

$$\int_{\varepsilon I^h} w^2 dx \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{h} \int_{\varepsilon B} w^2 dx \right), \quad w \in C^\infty(\varepsilon I^h). \quad (2.15)$$

(ii) Если B, B^1 — круги радиуса $h/2$, принадлежащие полосе $I^h = [0, 1] \times [0, h]$, то

$$\frac{1}{h} \int_{B^1} w^2 dx \leq \frac{1}{h} \int_B w^2 dx + C \int_{I^h} \left| w \frac{\partial w}{\partial x_1} \right| dx.$$

Отсюда гомотетией (с использованием неравенства $2|ab| \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$) получаем

$$\frac{1}{h} \int_{\varepsilon B^1} w^2 dx \leq \frac{1}{h} \int_{\varepsilon B} w^2 dx + \varepsilon^2 C_\delta \int_{\varepsilon I^h} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx + \delta \int_{\varepsilon I^h} w^2 dx \quad \forall \delta > 0. \quad (2.16)$$

(iii) Пусть P — горизонтальная полоса шириной t , тогда

$$\int_P w^2 dx \leq d^2 \int_P \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx, \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad (2.17)$$

где d — диаметр носителя функции u .

Если же B — круг радиуса $t/2$, принадлежащий полосе P , то

$$\int_B w^2 dx \leq dt \int_P \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx. \quad (2.18)$$

Приступим к непосредственному доказательству неравенства (1.1). Для ясности пусть F_ε^h — квадратная сетка (рис. 5), составленная из горизонтальных полос $P = P_i$ и вертикальных полос $S = S_i$, ширина которых εh .

Рассмотрим отдельную горизонтальную полосу P . Тогда в силу (2.17),

$$\int_P u_1^2 dx \leq C \int_P |e(u)|^2 dx. \quad (2.19)$$

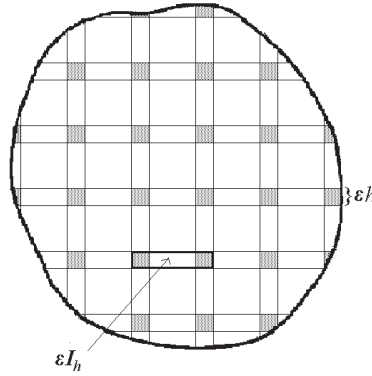


Рис. 5. Квадратная сетка.

Чтобы оценить компоненту u_2 вектора u на полосе P , выделим на полосе фрагмент εI^h (см. рис. 5). Тогда в силу (2.15), (2.14), получим неравенство

$$\int_{\varepsilon I^h} u_2^2 dx \leq C_1 \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} |e(u)|^2 dx + \frac{2}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B^i} u_2^2 dx \right\}.$$

К последним двум интегралам по кругам применим оценку (2.18) по вертикальным полосам S_0 , S_1 , содержащим круги εB^0 , εB^1 , а именно

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B^i} |u_2|^2 dx \leq C\varepsilon \sum_{i=0}^1 \int_{S_i} |e(u)|^2 dx.$$

После суммирования по всем фрагментам, составляющим полосу P , из этих оценок вытекает:

$$\int_P u_2^2 dx \leq C \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_P |e(u)|^2 dx + \varepsilon \sum_j \int_{S_j} |e(u)|^2 dx \right\}. \quad (2.20)$$

Число горизонтальных полос $P = P_i$, пересекающих $\text{supp } u$, имеет порядок ε^{-1} . Поэтому, суммируя оценки (2.20) по всем таким полосам $P = P_i$, выводим:

$$\sum_i \int_{P_i} u_2^2 dx \leq C \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right) \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx.$$

Отсюда и из (2.19), а также из аналогичных неравенств для вертикальных полос S_i следует оценка (1.1) для квадратной сетки. Теорема 2.1 доказана. $\square$

2.5. Доказательство теоремы 2.2. Поскольку теорема 2.3 уже доказана, то остается только проверить оценку (1.1) для регулярной сетки F_ε^h .

Рассмотрим произвольный короткий стержень εI^h с примыкающими к его торцам кругами εB^0 и εB^1 . Центры этих кругов находятся в узлах сингулярной сетки F_ε .

По неравенству (2.15)

$$\int_{\varepsilon I^h} |u|^2 dx \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{h} \int_{\varepsilon B^0} |u|^2 dx \right),$$

что в силу (2.14), дает

$$\int_{\varepsilon I^h} |u|^2 dx \leq C_1 \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B^i} |u|^2 dx \right\}.$$

Отсюда суммированием по всем коротким стержням имеем

$$\int_{F_\varepsilon^h} |u|^2 dx \leq C \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{B_{\varepsilon h}} \int_{B_{\varepsilon h}} |u|^2 dx \right\},$$

где сумма берется по совокупности всех кругов $B_{\varepsilon h}$ радиуса εh с центрами в узлах сингулярной сетки F_ε . Требуется дать подходящую оценку для указанной суммы.

Если сетка F — простейшая, то подходящая оценка следует из неравенства Фридрихса (2.18). Например, для квадратной сетки

$$\frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u_1|^2 dx \leq C\varepsilon \int_P |e(u)|^2 dx,$$

где P — содержащая круг $B_{\varepsilon h}$ горизонтальная полоса. Учитывая, что число кругов в данной полосе имеет порядок ε^{-1} , и суммируя по всем горизонтальным полосам, получим

$$\frac{1}{h} \sum_{B_{\varepsilon, h}} \int_{B_{\varepsilon, h}} |u_1|^2 dx \leq C_1 \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx.$$

Аналогично получаем оценку для компоненты u_2 . Тем самым, заново доказано неравенство (1.1) для простейшей сетки.

Рассмотрим теперь регулярную сетку.

Пусть $J_0, J_1, \dots, J_k$ — шары $B_{\varepsilon h}$, центры которых находятся в узлах с метками $0, 1, \dots, k$.

Если $B_{\varepsilon h} \in J_0$, то для оценки соответствующего интеграла используем две неколлинеарные пронизывающие полосы, содержащие этот круг. Ситуация здесь, по-существу, такая же, как и для простейших сеток, и мы получаем оценку

$$\sum_{J_0} \frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u|^2 dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx. \quad (2.21)$$

Пусть $B_{\varepsilon h}$ — круг с центром в произвольном узле O с единичной меткой. Тогда узел O связан с узлами O_1, O_2 , метки которых нулевые, по двум неколлинеарным звеньям $\varepsilon I_1, \varepsilon I_2$ сингулярной сетки F_ε ; направляющие векторы этих звеньев — τ_1, τ_2 , и им соответствуют в сетке F_ε^h стержни $\varepsilon I_1^h, \varepsilon I_2^h$. Используем в круге $B_{\varepsilon h}$ разложение вектора u по базису τ_1, τ_2 : $u = u_{\tau_1} \tau_1 + u_{\tau_2} \tau_2$, и пусть $u_{\tau_j} = u_j, j = 1, 2$.

Компоненту u_1 в круге $B_{\varepsilon h}$ оценим, используя стержень εI_1^h . А именно, из оценки (2.16) имеем

$$\frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u_1|^2 dx \leq C_\delta \varepsilon^2 \int_{\varepsilon I_1^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \int_{\varepsilon B^1} |u_1|^2 dx + \delta \int_{\varepsilon I_1^h} |u_1|^2 dx,$$

где εB^1 — круг с центром в узле O_1 , принадлежащий стержню εI_1^h .

Аналогично, с помощью стержня εI_2^h оцениваем интеграл

$$\frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u_2|^2 dx.$$

В итоге, рассмотрев все круги, центры которых находятся в узлах с единичными метками, получим оценку

$$\sum_{J_1} \frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u|^2 dx \leq C_2 \left(\sum_{J_0} \frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{h} \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx \right) \leq C_3 \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx,$$

в силу неравенства (2.21).

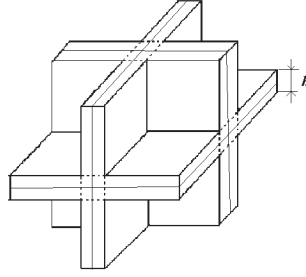


Рис. 6. Ящичная структура.

Таким образом, последовательно оценим суммы $\sum_{J_k} \frac{1}{h} \int_{B_{\varepsilon h}} |u|^2 dx$ для всех $k = 0, 1, \dots$, возможных для данной регулярной сетки F^h . После этого, выбирая $\delta > 0$ достаточно малым, приходим в конечном итоге к оценке (1.1).

Если F — регулярна в расширенном смысле, то доказательство основано на тех же идеях, только оказывается более громоздким. $\square$

3. ЯЩИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ

Определим периодическую ящичную структуру F^h толщины h . На рис. 5 изображен ее фрагмент, приходящийся на ячейку периодичности — единичный куб. Там же представлена и порождающая ее сингулярная структура F , составленная из трех взаимно ортогональных семейств параллельных плоскостей. Каждая плоскость структуры F оказывается серединой для соответствующей бесконечной плиты из структуры F^h . Пусть $F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h$.

Теорема 3.1. Для ящичной структуры F_ε^h выполнено неравенство (1.1), где константа C_1 зависит от диаметра $\text{supp } u$, а также неравенство

$$h\varepsilon \int_{F_\varepsilon^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \int_{F_\varepsilon^h} (|e(u)|^2 + |u|^2) dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \quad (3.1)$$

где C_2 — абсолютная константа.

Для трехмерных структур, как ящичного типа, так и стержневого типа, важна следующая оценка на единичном кубе $\square = [0, 1]^3$.

Лемма 3.2. Справедлива равномерная по h оценка

$$\int_{\square} \left| \frac{\partial}{\partial y_1} v_j \right|^2 dy \leq C \left[\int_{\square} |e(v)|^2 dy + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{K_i} |v_j|^2 dy \right], \quad j = 2, 3, \quad v \in C^\infty(\square)^3, \quad (3.2)$$

где K^0 и K^1 — эллипсоиды, вписанные в параллелепипеды $T_0 = [0, h] \times [0, 1]^2$ и $T_1 = [1 - h, 1] \times [0, 1]^2$ соответственно (см. рис. 7а).

Лемма 3.2 доказывается аналогично лемме 2.4.

Отметим также аналог леммы 2.6 для бесконечной плиты.

Лемма 3.3. Пусть $P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_3| < \frac{t}{2} \right\}$ — бесконечная плита толщины $t > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$t \int_P |\nabla u|^2 dx \leq C \int_P (|e(u)|^2 + |u|^2) dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \quad (3.3)$$

где постоянная C зависит только от диаметра $\text{supp } u$.

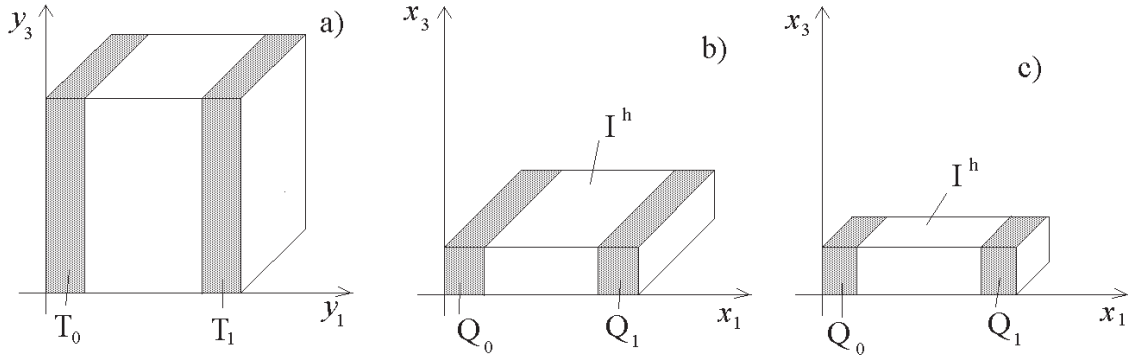


Рис. 7. Куб и его различные сжатия.

В доказательстве этой леммы используется оценка (2.13) на сечениях $x_1 = \text{const}$ и $x_2 = \text{const}$, а также обычные неравенства Корна для финитных функций двух переменных в сечениях $x_3 = \text{const}$.

Из оценки (3.3) немедленно получаем неравенство (3.1), если учесть, что ящичная структура состоит из плит, толщина которых εh .

Теперь наша задача — доказать оценку (1.1).

Сделаем в неравенстве (3.2) с $j = 3$ согласованную замену координат и функций:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = h y_3; \quad u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad v_3 = h u_3.$$

Тогда единичный куб $\square$ перейдет в плиту $I^h = [0, 1]^2 \times [0, h]$, плиты T_0, T_1 — в прямоугольные брусья Q_0, Q_1 , примыкающие к торцам (плиты I^h) $x_1 = 0, x_1 = 1$, эллипсоиды K^0, K^1 — в эллипсоиды B_0, B_1 , вписанные в параллелепипеды Q_0, Q_1 (см. рис. 7b), а из оценки (3.2) получаем неравенство

$$h^2 \int_{I^h} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} u_3 \right|^2 dx \leq C \left(\int_{I^h} |e(u)|^2 dx + h \sum_{i=0}^1 \int_{B_i} |u_3|^2 dx \right). \quad (3.4)$$

С помощью гомотетии для квадратной пластинки $\varepsilon I^h = [0, \varepsilon]^2 \times [0, \varepsilon h]$ из (3.3) выводим

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla u_3|^2 dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B_i} |u_3|^2 dx \right). \quad (3.5)$$

В неравенстве (3.5) дается оценка для одной из продольных производных компоненты u_3 . Она вместе с аналогом неравенства Фридрихса (2.15) для пластинок εI^h , в котором роль круга играет эллипсоид εB^0 , позволяет получить оценку

$$\int_{\varepsilon I^h} |u_3|^2 dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B_i} |u_3|^2 dx \right). \quad (3.6)$$

Суммируя неравенства (3.6) по всем горизонтальным фрагментам εI^h и оценивая интегралы по эллипсоидам εB^0 с помощью аналога неравенства (2.18), приходим к оценке

$$\sum_i \int_{P_i} |u_3|^2 dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 + 1 \right) \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx,$$

где суммирование ведется по всем горизонтальным плитам Π_i . Оценка продольных компонент u_1, u_2 по горизонтальным плитам тривиальна, поскольку она следует из неравенства Фридрихса для финитной функции двух переменных x_1, x_2 .

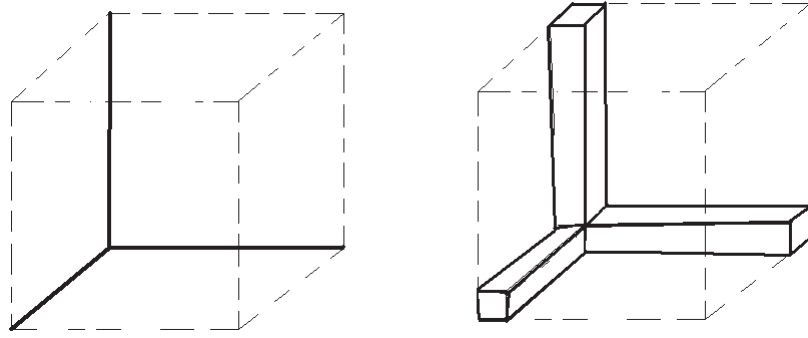


Рис. 8. Простейший стержневой каркас.

В результате получаем оценку

$$\sum_i \int_{P_i} |u|^2 dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 + 1 \right) \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx.$$

Аналогичная оценка для негоризонтальных плит приводит к неравенству (1.1).

Тем самым теорема 3.1 доказана.

4. ОБЪЕМНЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ КАРКАСЫ

4.1. Рассмотрим 1-периодический по трем направлениям стержневой каркас F простейшего вида, когда F составлен из бесконечных прямых. На рис. 8 дано его изображение. Этот каркас можно усложнить, добавив к нему какие-то прямые, соединяющие вершины единичного куба. Есть две возможности наиболее простым способом построить по бесконечному каркасу F каркас F^h толщины h . Это можно сделать, во-первых, из круговых цилиндров радиуса $\frac{h}{2}$, оси которых совпадают с прямыми каркаса F , а во-вторых, из брусов, имеющих в сечении квадрат со стороной h . На рис. 8 представлена ячейка периодичности простейшего каркаса F^h , составленного из брусов.

Теорема 4.1. Для каркаса F_ε^h выполняются неравенство (1.1), где константа C_1 зависит от геометрии сингулярной структуры F и диаметра $\sup r_i$, и неравенство (1.2), где константа C_2 зависит лишь от геометрии сингулярной структуры F .

В доказательстве теоремы 4.1 при выводе оценки (1.2) важную роль играет одна оценка на фрагменте стержневой структуры F^h , который представляет собой пару стыкующихся под углом стержней. Например, рассмотрим «уголок» Π (см. рис. 9), составленный из двух перпендикулярных брусков Π_1 , Π_2 , имеющих единичную длину, а в сечении — квадрат со стороной h : $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2$ — куб с ребром h .

Лемма 4.2. Выполняется равномерное по h неравенство

$$h^2 \int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Pi} (|e(u)|^2 + h^2 |u|^2) dx, \quad u \in C^\infty(\Pi)^3. \quad (4.1)$$

Доказательство этой леммы использует идеи работы [3]. Вопросы, касающиеся неравенства Корна на трехмерных стержневых каркасах, затрагивались также в работах [2, 11, 13]. На конференции «Eurohomogenization» (Неаполь, декабрь 2001 г.) J. Casado-Diaz и M. Luna-Lupez сообщили в своем докладе, что они располагают неравенством (1.1) для трехмерного цилиндрического каркаса. Публикации этих авторов на данную тему нам неизвестны.

Далее в работе рассмотрим каркасы из брусков. Цилиндрические каркасы изучаются аналогично.

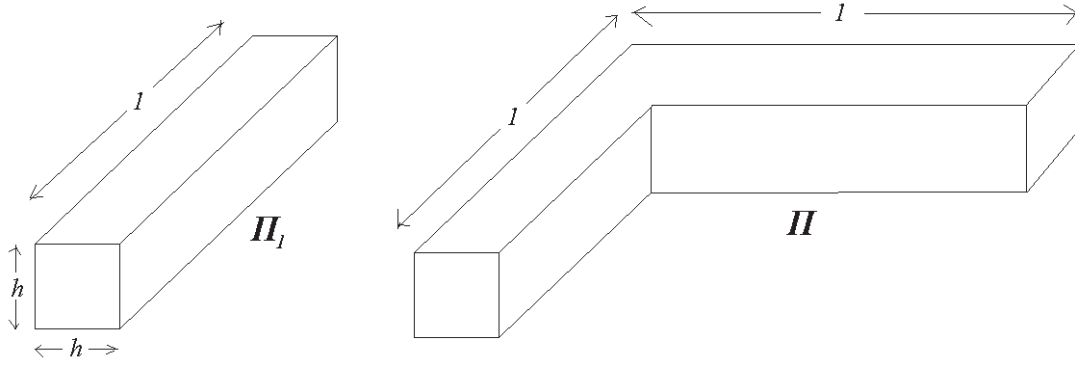


Рис. 9. «Уголок» из двух брусков.

4.2. При выводе оценки (1.1) для стержневых каркасов используем следующую лемму.

Лемма 4.3. Пусть $I^h = [0, 1] \times [0, h]^2$ — горизонтальный брус, B^0, B^1 — вписанные в него шары радиуса $h/2$, примыкающие к торцам $x_1 = 0, x_1 = 1$. Тогда для поперечных компонент u_2, u_3 вектор-функции u выполняется равномерное по h неравенство

$$h^2 \int_{I^h} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right| dx \leq C \left(\int_{I^h} |e(u)|^2 dx + h \sum_{i=0}^1 \int_{B^i} u_j^2 dx \right), \quad j = 2, 3, \quad u \in C^\infty(I^h)^3. \quad (4.2)$$

Доказательство. Сделаем в неравенстве (3.2) согласованную замену координат и функций:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = hy_2, \quad x_3 = hy_3; \quad v_1 = u_1, \quad v_2 = hu_2, \quad v_3 = hu_3.$$

Она переводит куб $\square = [0, 1]^3$ в брус I^h , плиты T_i — в кубы Q_i с ребром h , а эллипсоиды K^i , вписанные в параллелепипеды T_i , — в шары B^i , вписанные в Q_i (см. рис. 7а,с), $i = 0, 1$. Для функции u получается неравенство на бруске I^h , из которого выводится оценка (4.2).

С помощью гомотетии из оценки (4.2) получается оценка на бруске $\varepsilon I^h = [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon h]^2$

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right| dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=0}^1 \int_{\varepsilon B^i} u_j^2 dx \right), \quad j = 2, 3. \quad (4.3)$$

Из оценки (4.3) и подобных ей на брусках εI^h общего положения, необязательно горизонтальных, выводим оценку (1.1) для стержневого каркаса F_ε^h . Для этого разбиваем каркас F_ε^h на перекрывающиеся фрагменты — брусья, содержащие в пересечении общий шар (см. рис. 9). При этом используются те же идеи, что в § 2 при доказательстве теоремы 2.1. $\square$

4.3. В этом пункте докажем лемму 4.2, основную при выводе неравенства (1.2) на стержневом каркасе. Доказательство этой леммы использует идеи работы [3]. Пусть x_i — продольная переменная на бруске Π_i , $i = 1, 2$, так что, например, $\Pi_1 = [0, 1] \times [-h/2, h/2]^2$.

Будем использовать следующие обозначения

$$|\nabla_{i,j} u|^2 \equiv \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2.$$

Применив оценку (2.9) в продольных сечениях $x_i = a$, $i = 2, 3$, $|a| < h/2$, бруса Π_1 (см. рис. 9), получим неравенство

$$h^2 \int_{\Pi_1} (|\nabla_{1,2} u|^2 + |\nabla_{1,3} u|^2) dx \leq C \int_{\Pi_1} [|e(u)|^2 + h^2(u_2^2 + u_3^2)] dx. \quad (4.4)$$

Аналогично, рассматривая продольные сечения бруса Π_2 , выводим неравенство

$$h^2 \int_{\Pi_2} (|\nabla_{1,2}u|^2 + |\nabla_{2,3}u|^2) dx \leq C \int_{\Pi_2} [|e(u)|^2 + h^2(u_1^2 + u_3^2)] dx. \quad (4.5)$$

В теории тонких структур (см., например, [3–5, 7]) известно следующее равномерное по h неравенство

$$\int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\int_{\Pi} |e(u)|^2 dx + \int_{\Pi'} |\nabla u|^2 dx \right), \quad u \in C^\infty(\Pi)^3, \quad (4.6)$$

где Π' — аналогичная Π конструкция типа «уголка», составленная из аналогичных Π_1 , Π_2 брусков Π'_1 , Π'_2 , соосных им, у которых длина $1 - h/2$ и в поперечном сечении квадраты со стороной $h/2$. Например, один из брусков $\Pi'_1 = [h/4, 1 - h/4] \times [-h/4, h/4]^2$. Заметим, что точки множества Π' удалены от границы $\partial\Pi$ не менее, чем на $h/4$. Неравенство (4.6) вытекает из неравенства Корна для звездных областей (см. [3, теорема 1], а также [10, гл. I, § 2]), если Π разбить на кубы с ребром h и в них взять шары радиуса $h/4$ с центром в центре куба.

Из неравенств (4.4)–(4.6) видно, что для получения оценки (4.1) осталось должным образом оценить интеграл $h^2 \int_{\Pi'} |\nabla u|^2 dx$. Более точно, надо получить оценку

$$h^2 \int_{\Pi' \cap \Pi_1} |\nabla_{2,3}u|^2 dx + h^2 \int_{\Pi' \cap \Pi_2} |\nabla_{1,3}u|^2 dx \leq C \int_{\Pi_1 \cap \Pi_2} [|e(u)|^2 + h^2|u|^2] dx, \quad u \in C^\infty(\Pi). \quad (4.7)$$

Для этого используем идеи из [3] (см. также [10, гл. I, § 2]). Напомним их вкратце.

Функции u представляем в виде суммы

$$u = v + w, \quad (4.8)$$

где v — вектор, каждая компонента которого — решение задачи Дирихле в области Π :

$$\begin{cases} \Delta v_i = \sum_{k=1}^3 \left(2 \frac{\partial}{\partial x_k} e_{ik}(u) - \frac{\partial}{\partial x_i} e_{kk}(u) \right) & \text{в } \Pi, \\ v_i \in H_0^1(\Pi). \end{cases}$$

Очевидна оценка

$$\|v_i\|_{H^1(\Pi)}^2 \leq C \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx, \quad (4.9)$$

где C — абсолютная константа. Тогда функция $w = u - v$ имеет свойства

$$\Delta w_i = 0, \quad \Delta e_{ij}(w) = 0 \quad \text{в } \Pi, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad w \in C^\infty(\Pi)^3 \cap L^2(\Pi)^3,$$

причем в силу (4.8), (4.9),

$$\int_{\Pi} |e(w)|^2 dx \leq C \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx.$$

Пусть $\rho(x)$ — функция расстояния до границы $\partial\Pi$. Тогда по основной лемме из [3] (см. [10, гл. I, лемма 2.2]) справедлива оценка:

$$\int_{\Pi} \rho^2 |\nabla e(w)|^2 dx \leq C_1 \int_{\Pi} |e(w)|^2 dx \leq C_2 \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx,$$

где константы C_i не зависят от h . Из нее, в силу соотношения

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j \partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ip}(w) + \frac{\partial}{\partial x_p} e_{ij}(w) - \frac{\partial}{\partial x_i} e_{pj}(w),$$

вытекает неравенство

$$\sum_{i,p} \int_{\Pi} \left| \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_p} \right|^2 \leq C \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx,$$

откуда ввиду выбора Π' следует

$$\sum_{i,p} h^2 \int_{\Pi'} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_p} \right|^2 dx \leq C \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx. \quad (4.10)$$

В силу разложения (4.8), с учетом оценки (4.9), можно считать, что в левой части доказываемой оценки (4.7) стоят интегралы с функцией w .

Аналогично, из оценок (4.4), (4.5) вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} h^2 \int_{\Pi_1 \cap \Pi'} |\nabla_{1,3} w|^2 dx &\leq C \int_{\Pi} (|e(u)|^2 + h^2 |u|^2) dx, \\ h^2 \int_{\Pi_2 \cap \Pi'} |\nabla_{2,3} w|^2 dx &\leq C \int_{\Pi} (|e(u)|^2 + h^2 |u|^2) dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Распространим каждую из оценок (4.11) на дополнительный участок Π_2 или Π_1 из Π' . Воспользуемся для этого неравенством типа неравенства Фридрихса для скалярной функции φ :

$$\int_{\Pi_i \cap \Pi'} \varphi^2 dx \leq C_1 \left(\int_{\Pi_i \cap \Pi'} |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{h} \int_Q \varphi^2 dx \right), \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{h} \int_Q \varphi^2 dx \leq C_2 \int_{\Pi_i \cap \Pi'} \left(\varphi^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \right) dx, \quad i = 1, 2, \quad (4.13)$$

где t — продольная координата на Π_i , $i = 1, 2$; Q есть либо куб с ребром $h/2$, либо шар с радиусом $h/2$, которые лежат в $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi'$. Например, устроим «передачу» оценки (4.11₂) для $|\nabla_{2,3} w|^2$ на участок $\Pi_1 \cap \Pi'$. Возьмем в качестве φ производные $\frac{\partial w_2}{\partial x_3}$ и $\frac{\partial w_3}{\partial x_2}$.

Применяя к φ сначала (4.12) с $i = 1$, а потом (4.13) с $i = 2$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} h^2 \int_{\Pi_1 \cap \Pi'} |\nabla_{2,3} w|^2 dx &\leq Ch^2 \left[\sum_i \int_{\Pi_i \cap \Pi'} \left(\left| \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_i \partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_i \partial x_2} \right|^2 \right) dx + \frac{1}{h} \int_Q |\nabla_{2,3} w|^2 dx \right] \leq \\ &\leq C_1 h^2 \left(\sum_{ij} \int_{\Pi'} \left| \frac{\partial w_2}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx + \int_{\Pi_2 \cap \Pi'} |\nabla_{2,3} w|^2 dx \right) \leq C \int_{\Pi} (|e(u)|^2 + h^2 |u|^2) dx, \end{aligned}$$

где на последнем этапе мы воспользовались оценками (4.10), (4.11₂).

В силу (4.8), (4.9), из последней оценки вытекает

$$h^2 \int_{\Pi_1 \cap \Pi'} |\nabla_{2,3} u|^2 dx \leq C \int_{\Pi} (|e(u)|^2 + h^2 |u|^2) dx,$$

и, значит, часть оценки (4.7) доказана. Другая часть этой оценки доказывается аналогично. Таким образом, лемма 4.2 доказана.

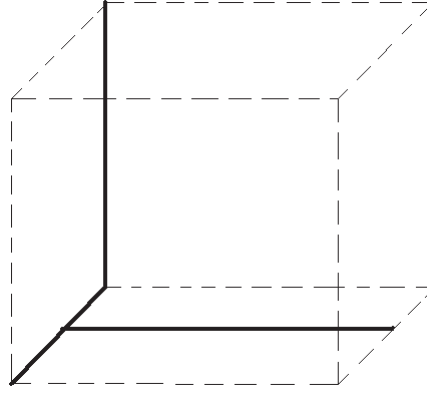


Рис. 10. Каркас не простейшего вида.

4.4. Приступим к непосредственному доказательству неравенства (1.2) для стержневого каркаса F_ε^h . Каркас F_ε^h разрезаем на фрагменты типа $\varepsilon\Pi$ (см. рис. 9). Из оценки (4.1) гомотетией получаем оценку на одном таком фрагменте

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon\Pi} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\varepsilon\Pi} \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 |e(u)|^2 + |u|^2 \right) dx.$$

Суммируя эту оценку по всем фрагментам, пересекающим $\text{supp } u$, выводим неравенство (1.2).

4.5. Теорема 4.1 верна для более широкого класса каркасов, чем тот, что введен в п. 4.1. Как видно из доказательства (см. п. 4.3 и п. 4.4), оценка (1.2) выполняется для каркасов F_ε^h , если соответствующий им сингулярный каркас F можно разрезать на «уголки» из двух неколлинеарных отрезков. Такому требованию удовлетворяет каркас, изображенный на рис. 10. В этом каркасе через каждый узел проходят две пронизывающие прямые, а не три, как у простейшего каркаса (см. рис. 10).

Кроме того, наличие трех пронизывающих прямых в каждом узле каркаса F только облегчает доказательство оценки (4.1), но не является необходимым условием для нее.

Для каркаса, изображенного на рис. 10, оценка (1.1) тоже справедлива и может быть доказана. Этот пример интересен тем, что, если вводить по аналогии с регулярными сетками регулярные трехмерные каркасы, считая, что метку 0 получают узлы с тремя пронизывающими прямыми, то этот каркас, очевидно, не будет регулярным (поскольку нет ни одной вершины с меткой 0).

5. ФЕРМЫ И ПОДОБНЫЕ ИМ КОНСТРУКЦИИ

5.1. Под плоской 1-периодической сингулярной фермой F будем понимать множество на плоскости, 1-периодическое по переменной x_1 , составленное, во-первых, из нескольких горизонтальных прямых с уравнением $x_2 = a$, $a \in [0, 1]$, среди которых обязательно есть граничные прямые $x_2 = 0$, $x_2 = 1$, и, во-вторых, из бесконечного числа негоризонтальных отрезков, концы которых лежат на граничных прямых (см. рис. 11).

Естественным образом по структуре F определяем сначала тонкую 1-периодическую ферму F^h толщины h (см. § 2, посвященный сеткам), а потом ε -периодическую ферму $F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h$ с толщиной составляющих, равной εh .

Теорема 5.1. *Выполняется весовое неравенство*

$$\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right)^{-1} \int_{F_\varepsilon^h} (u_1^2 + \varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|^2) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2, \quad (5.1)$$

где константа C зависит лишь от геометрии сингулярной фермы F и диаметра $\text{supp } u$.

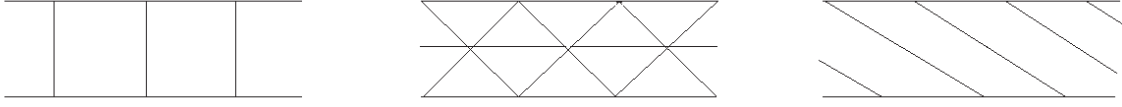


Рис. 11. Фермы.

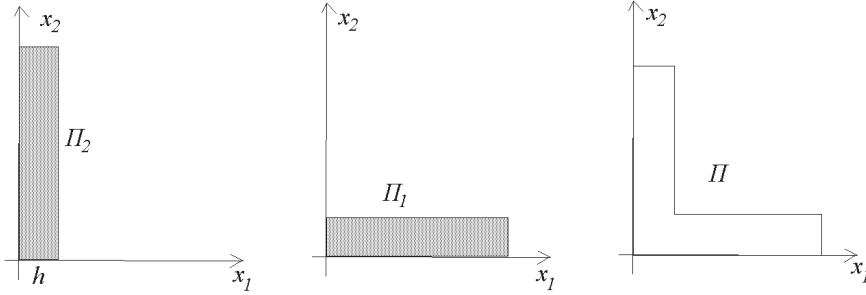


Рис. 12. «Уголок» из двух полос.

Следствие 5.2. Если ферма F_ε^h — достаточно толстая или имеет критическую толщину, то

$$\int_{F_\varepsilon^h} (u_1^2 + \varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|^2) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx; \quad (5.2)$$

если ферма F_ε^h — достаточно тонкая, то

$$\int_{F_\varepsilon^h} \left[\left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 u_1^2 + h^2 u_2^2 + h^2 |\nabla u|^2 \right] dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx. \quad (5.3)$$

Видим, что неравенство (5.2) (в отличие от неравенства (5.3)) совпадает по форме с неравенством Корна для полосы с шириной ε .

При доказательстве теоремы 5.1 важную роль играет следующая лемма.

Лемма 5.3. Пусть Π — «уголок», составленный из двух прямоугольных полос Π_1 , Π_2 (см. рис. 12). Тогда выполнена равномерная по h оценка

$$h^2 \int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\int_{\Pi} |e(u)|^2 dx + h^2 \int_{\Pi_2} u_1^2 dx \right), \quad u \in C^\infty(\Pi)^2. \quad (5.4)$$

Можно рассматривать тонкую пространственную ферму F_ε^h , периодическую по переменной x_1 , или тонкую трехмерную структуру F_ε^h , периодическую по двум переменным x_1 и x_2 , составленную из стержней или плит. Для них будет выполняться анизотропное весовое неравенство Корна, аналогичное тому, что получено для плоских ферм (см. (5.1)). По характеру этого неравенства обнаруживается, в зависимости от типа толщины, их сходство или несходство с тонкими макроструктурами толщины ε типа трехмерного стержня с осью Ox_1 или плитой с поперечной переменной x_3 .

5.2. Доказательство леммы 5.3. Пусть для определенности $\Pi_1 = [0, 1] \times [0, h]$, $\Pi_2 = [0, h] \times [0, 1]$. Будем использовать метод доказательства леммы 4.2. В «уголке» Π находим разложение $u = v + w$, где функции v , w таковы, что

$$\|v\|_{H^1(\Pi)^3} \leq C_1 \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx, \quad (5.5)$$

$$\sum_{i,j} h^2 \int_{\Pi'} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \leq C_2 \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx, \quad (5.6)$$

где «уголок» $\Pi' = \Pi'_1 \cup \Pi'_2$ составлен из меньших, чем Π_1 , Π_2 полос

$$\Pi'_1 = \left[\frac{h}{4}, 1 - \frac{h}{4} \right] \times \left[\frac{h}{4}, \frac{3}{4}h \right], \quad \Pi'_2 = \left[\frac{h}{4}, \frac{3}{4}h \right] \times \left[\frac{h}{4}, 1 - \frac{h}{4} \right].$$

Для полосы Π_2 справедлива равномерная по h оценка (см. (2.9))

$$h^2 \int_{\Pi_2} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Pi_2} (|e(u)|^2 + h^2 u_1^2) dx,$$

из которой, в силу (5.5), вытекает неравенство

$$h^2 \int_{\Pi_2 \cap \Pi'} |\nabla w|^2 dx \leq C \left(\int_{\Pi} |e(u)|^2 dx + \int_{\Pi_2} h^2 u_1^2 dx \right). \quad (5.7)$$

Кроме того, выполняется равномерное по h неравенство

$$\int_{\Pi} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\int_{\Pi} |e(u)|^2 dx + \int_{\Pi'} |\nabla u|^2 dx \right),$$

из которого видим, что для доказательства леммы 5.3 (с учетом оценок (5.7) и (5.5)) требуется получить оценку

$$h^2 \int_{\Pi_1 \cap \Pi'} |\nabla w|^2 dx \leq C \left(\int_{\Pi} |e(u)|^2 dx + \int_{\Pi_2} h^2 u_1^2 dx \right).$$

Для этого используем процедуру «передачи» оценок с множества $\Pi_2 \cap \Pi'$ на множество $\Pi_1 \cap \Pi'$ через общий для этих множеств круг Q радиуса $\frac{h}{4}$ (см. доказательство леммы 4.2):

$$\begin{aligned} h^2 \int_{\Pi_1 \cap \Pi'} |\nabla w|^2 dx &\leq h^2 C \left(\frac{1}{h} \int_Q |\nabla w|^2 dx + \sum_{i,j} \int_{\Pi_1 \cap \Pi'} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \right) \leq \\ &\leq h^2 C \left(\int_{\Pi_2 \cap \Pi'} |\nabla w|^2 dx + \sum_{i,j} \int_{\Pi'} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i} \partial x_j \right|^2 dx \right) \leq C \left(\int_{\Pi} |e(u)|^2 dx + \int_{\Pi_2} h^2 u_1^2 dx \right), \end{aligned}$$

где на последнем этапе учтены оценки (5.6), (5.7). $\square$

5.3. Доказательство теоремы 5.1. Для простоты и ясности вывод неравенства (5.1) дадим для квадратной фермы F_ε^h , ее сингулярный каркас F — первый на рис. 11. В этом случае (см. рис. 13) ферма F_ε^h составлена из двух бесконечных горизонтальных полос P_0, P_1 шириной εh , а также из коротких вертикальных полос S_i , длина которых равна ε , а ширина — εh . К торцам каждой полосы $S_i = S$ примыкают круги B_j радиуса $\frac{\varepsilon h}{2}$.

Оценим продольную (по отношению ко всей ферме) компоненту u_1 вектор-функции u . Заимствуем из § 2 неравенства для финитной вектор-функции u

$$\int_{P_i} u_1^2 dx \leq C \int_{P_i} |e(u)|^2 dx, \quad i = 0, 1, \quad \int_{B_i} u_1^2 dx \leq C \varepsilon h \int_{P_i} |e(u)|^2 dx, \quad i = 0, 1,$$

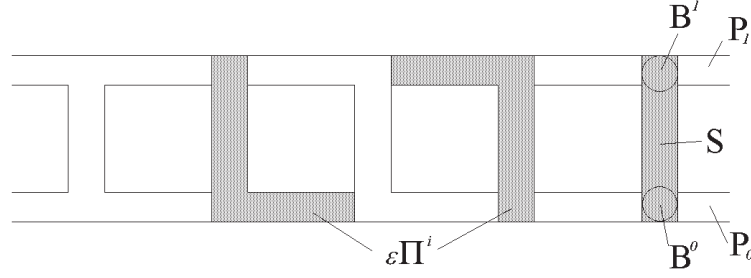


Рис. 13. Разбиение фермы на составляющие.

$$\int_S u_1^2 dx \leq C \left(\varepsilon^2 \int_S \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 dx + \sum_{j=0}^1 \frac{1}{h} \int_{B_j} u_1^2 dx \right),$$

$$\varepsilon^2 \int_S \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_S |e(u)|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{j=0}^1 \int_{B_j} u_1^2 dx \right),$$

из которых суммированием, в соответствии с представлением $F_\varepsilon^h = P_0 \cup P_1 \cup (\bigcup_i S_i)$, получаем оценку

$$\int_{F_\varepsilon^h} u_1^2 dx \leq C \left(\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right) \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx \right). \quad (5.8)$$

Оценим поперечную (по отношению ко всей ферме) компоненту u_2 вектора u . Для нее справедливы следующие неравенства (см. § 2, доказательство теоремы 2.1):

для бесконечных полос

$$\int_{P_i} u_2^2 dx \leq C \int_{P_i} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx, \quad i = 0, 1;$$

для коротких вертикальных полос

$$\int_S u_2^2 dx \leq C \left(\varepsilon^2 \int_S |\nabla u_2|^2 dx + \sum_{j=0}^1 \frac{1}{h} \int_{B_j} u_2^2 dx \right);$$

для отдельного круга

$$\frac{1}{h} \int_{B_j} u_2^2 dx \leq C \varepsilon \int_{P_0 \cup P_1} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx,$$

что в сумме по всем кругам B_j , пересекающим $\text{supp } u$, дает

$$\sum_j \frac{1}{h} \int_{B_j} u_2^2 dx \leq C \int_{P_0 \cup P_1} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx.$$

Из приведенных неравенств суммированием получаем

$$\int_{F_\varepsilon^h} u_2^2 dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + C_2 \varepsilon^2 \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx. \quad (5.9)$$

Видим, что оценка поперечной компоненты u_2 сводится к оценке ее градиента.

Оценим полный градиент ∇u . Для этого разбиваем ферму F_ε^h на фрагменты $\varepsilon\Pi^i$, типа «уголка» Π из леммы 5.3 (см. рис. 13)

$$F_\varepsilon^h = \bigcup_i \varepsilon\Pi^i.$$

Для отдельного «уголка» $\varepsilon\Pi = \varepsilon\Pi^i$, содержащего вертикальную полосу S (в лемме 5.3 полагаем $S = \Pi_2$), получаем гомотетией из оценки (5.4) следующее неравенство

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon\Pi} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon\Pi} |e(u)|^2 dx + \int_S u_1^2 dx \right),$$

откуда суммированием по всем фрагментам $\varepsilon\Pi^i$, учитывая при этом оценку для компоненты u_1 , выводим окончательное неравенство для градиента ∇u

$$\varepsilon^2 \int_{F_\varepsilon^h} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right) \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx. \quad (5.10)$$

Из (5.8)–(5.10) вытекает оценка (5.1). Теорема 5.1 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984. (*Bakhvalov N. S. and Panasenko G. P. Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media.* — Dordrecht-Boston-London: Kluwer, 1989)
2. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — 66, № 2. — С. 81–148
3. Кондратьев В. А., Олейник О. А. О зависимости констант в неравенстве Корна от параметров, характеризующих геометрию области// Успехи мат. н. — 1989. — 44, № 6. — С. 157–158
4. Назаров С. А. Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей// Вестн. СПбГУ. — 1992. — № 8. — С. 19–24
5. Назаров С. А. Асимптотический анализ произвольной анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки)// Мат. сб. — 2000. — 191, № 7. — С. 129–159
6. Назаров С. А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. — Новосибирск: Научн. книга, 2002. — 408 с.
7. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Одномерное уравнение деформации слабо искривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование// Изв. РАН. Сер. мат. — 2000. — 64, № 3. — С. 97–130
8. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Асимптотика частот собственных колебаний упругих балок, соединенных в форме буквы П// Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 23–26
9. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Произвольные плоские системы анизотропных балок// Тр. Мат. ин-та РАН. — 2002. — 236. — С. 234–261
10. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990. (*Oleinik O. A., Shamaev A. S. and Yosifian G. A. Mathematical Problems, Elasticity and Homogenization.* — Amsterdam: Elsevier, 1992)
11. Панасенко Г. П. Асимптотические решения систем теории упругости для стержневых структур// Мат. сб. — 1992. — 183, № 1. — С. 85–113
12. Шойхет Б. А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры// Прикл. мат. мех. — 1973. — 37, № 5. — С. 913–924
13. Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel C. Korn's inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants// Asymptotic Anal. — 1994. — 8. — С. 1–14

В. В. Жиков

Владимирский государственный педагогический университет

E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

С. Е. Пастухова

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

E-mail: leonowmw@cs.msu.su

ОБ УСРЕДНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВЫПУКЛЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

© 2003 г. Г. А. ИОСИФЬЯН

Аннотация. Рассматривается задача теории усреднения для упругого тела, занимающего перфорированную область $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, которая является пересечением фиксированной области Ω и ε -сжатия 1-периодической области ω . Внешняя часть границы тела $\partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$ считается жестко закрепленной (нулевые условия Дирихле), а на границе перфорации $S^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\partial\omega$ перемещения тела подчинены быстро осциллирующим выпуклым ограничениям, а именно, в каждой точке $x \in S^\varepsilon$ вектор перемещений должен принадлежать заданному замкнутому выпуклому множеству $\mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x)$, которое может меняться от точки к точке. Таким образом, ограничения на допустимые перемещения на S^ε характеризуются заданным 1-периодическим полем замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{M}(\xi)$, $\xi \in \partial\omega$, произвольной структуры. С помощью таких полей выпуклых множеств можно задавать различные типы краевых условий (в частности, условия Дирихле, Неймана или Синьорини) на различных частях S^ε . В зависимости от структуры множества ограничений $\mathcal{M}(\xi)$, описывается асимптотика (при $\varepsilon \rightarrow 0$) поля перемещений, реализующего минимум соответствующих функционалов упругой энергии на множестве допустимых перемещений. Предельная (усредненная) задача имеет две характерные особенности: (i) предельное множество допустимых перемещений может задаваться ограничениями почти всюду в области Ω ; (ii) усредненный лагранжиан в ряде случаев не совпадает с квадратичной формой, задающей обычный усредненный тензор упругости. На основе теории двухмасштабной сходимости описывается зависимость предельного множества допустимых перемещений и усредненного лагранжиана от исходных краевых условий. Даны примеры, показывающие, как малые изменения геометрии поверхности S^ε или поля ограничений могут менять тип усредненного лагранжиана. Приведены основные факты теории двухмасштабной сходимости в ограниченных областях и на поверхностях и исследовано асимптотическое поведение граничных условий при двухмасштабной сходимости.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	46
2. Результаты об усреднении для различных типов краевых условий	49
3. Вспомогательные результаты	56
4. Доказательство теорем об усреднении	62
Список литературы	69

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$ — перфорированная область в $\mathbb{R}^n$ с ε -периодической структурой. Здесь Ω — фиксированная ограниченная область, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, ω — неограниченная 1-периодическая область (т. е. ω инвариантна относительно любых сдвигов на векторы с целочисленными компонентами), а $\varepsilon\omega$ — ее гомотетическое сжатие с коэффициентом ε . Положим $\square =]0, 1[^n$, $\omega_\square = \square \cap \omega$, $\partial_\square\omega = \partial\omega \cap]0, 1[^n$. Считаем, что Ω , Ω^ε , а также ячейка периодичности $\omega_\square$ являются липшицевыми областями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 98-01-0450 и № 00-15-96945), а также Centro Nazionale delle Ricerche (GNAMPA-INdAM)..

Множество $\Omega \setminus \varepsilon\omega$ представляет собой перфорацию области Ω и может состоять, например, из малых полостей или узких сквозных каналов в Ω . Границу области Ω^ε можно представить в виде $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma^\varepsilon \cup S^\varepsilon$, где

$$\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon, \quad S^\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega.$$

Таким образом, Γ^ε — внешняя часть границы тела, а S^ε — поверхность полостей внутри него.

Будем рассматривать упругое тело, занимающее область Ω^ε , *тензор напряжений* которого в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ задается $(n \times n)$ -матрицей $\sigma(u^\varepsilon) = \mathcal{A}^\varepsilon(x)e(u^\varepsilon)$. Здесь $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x) = {}^t(u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon)$ — *вектор перемещений* (столбец), $e(u^\varepsilon) = 2^{-1}(\nabla u^\varepsilon + {}^t\nabla u^\varepsilon)$ — *линеаризованный тензор деформаций*, т.е. матрица с элементами $2^{-1}(\partial u_i^\varepsilon / \partial x_j + \partial u_j^\varepsilon / \partial x_i)$; $\mathcal{A}^\varepsilon(x)$ — *тензор упругости*, представляющий собой линейное преобразование в пространстве $\mathbb{M}^n$ вещественных $(n \times n)$ -матриц и имеющий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\varepsilon(x) &= \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) = \left\{ a_{ij}^{hk}(\varepsilon^{-1}x) \right\}, \\ (\mathcal{A}(\xi)p)_{jk} &= a_{ij}^{hk}(\xi)p_{ih} \quad \forall p = \{p_{ih}\} \in \mathbb{M}^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты $a_{ij}^{hk}(\xi)$ являются ограниченными измеримыми 1-периодическими функциями $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими принятым в теории упругости условиям симметрии и положительной определенности, которые можно записать в виде (см. [15, лемма 6]):

$$\begin{cases} q: \mathcal{A}(\xi)p = p: \mathcal{A}(\xi)q & \forall p, q \in \mathbb{M}^n, \\ \mathcal{A}(\xi)p = 0 \iff {}^t p = -p, \\ \kappa_1 |p|^2 \leq p: \mathcal{A}(\xi)p \leq \kappa_2 |p|^2 & \forall p \in \mathbb{S}^n, \quad \kappa_1, \kappa_2 = \text{const} > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где ${}^t p$ — матрица, транспонированная к $p \in \mathbb{M}^n$; $\mathbb{S}^n$ — пространство вещественных симметрических $(n \times n)$ -матриц; $p: q = p_{ij}q_{ij}$ — скалярное произведение матриц, $|p|^2 = p: p$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся латинским индексам. Полужирным шрифтом обозначаются матрицы и векторы (столбцы); $\eta \cdot \zeta = \eta_i \zeta_i$ — скалярное произведение векторов $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^n$.

Для ограниченной липшицевой области Q пространство $H^1(Q)$ есть пополнение $C^\infty(\bar{Q})$ по норме $\|u\|_{1,Q} = \|u\|_{L^2(Q)} + \|\nabla u\|_{L^2(Q)}$. Как обычно, $\bar{A}$ — замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^n$, ∂A — его граница, $\text{int } A$ — множество его внутренних точек; $\text{dist}(A, B) = \inf \{|a - b| : a \in A, b \in B\}$.

Норма в пространстве вектор-функций $H^1(Q)^N$ также обозначается через $\|\cdot\|_{1,Q}$, а норма в пространствах $L^2(D)^N$ — через $\|\cdot\|_{0,D}$, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ или $(n-1)$ -мерная липшицева поверхность с естественной мерой Лебега.

Для множества $\gamma \subset \partial Q$, $\text{meas}_{n-1}\gamma \neq 0$, введем пространство $H_0^1(Q, \gamma)$, состоящее из всех $u \in H^1(Q)$ с нулевым следом на γ ; $H_0^1(Q, \partial Q) = H_0^1(Q)$.

Пространство 1-периодических функций $H_{\text{per}}^1(\omega)$ есть пополнение $C_{\text{per}}^\infty(\bar{\omega})$ по норме $\|\cdot\|_{1,\omega_\square}$. Для 1-периодических функций $v(\xi)$ в ω среднее значение по ω обозначается через $\langle v \rangle_\omega = |\omega_\square|^{-1} \int_{\omega_\square} v(\xi) d\xi$, где $|\omega_\square| = \text{meas } \omega_\square$.

Во внутренних точках области Ω^ε перемещения упругого тела должны удовлетворять обычным уравнениям статического равновесия $\text{div } \sigma(u^\varepsilon) = -f(x)$ при заданных объемных силах $f \in L^2(\Omega)^n$. На внешней части границы $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$ тело жестко закреплено, $u^\varepsilon|_{\Gamma^\varepsilon} = 0$, а в точках поверхности полостей $S^\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega$ перемещения удовлетворяют тому или иному краевому условию, описывающему контакт тела с внешней средой. Рассматриваются обобщенные решения таких задач, а именно, ищется вектор перемещений, реализующий минимум функционала полной энергии на множестве допустимых перемещений $\mathcal{V}^\varepsilon$, которое является замкнутым выпуклым множеством в соболевском пространстве $H^1(\Omega^\varepsilon)^n$ и задает краевые условия на $\partial\Omega^\varepsilon$. Допустимые перемещения равны нулю на внешней поверхности тела Γ^ε , а в каждой точке поверхности перфорации S^ε принадлежат заданному замкнутому выпуклому множеству в $\mathbb{R}^n$ достаточно общей структуры, причем это множество может меняться от точки к точке S^ε . В терминах таких ограничений можно описывать различные краевые условия, в частности, условия Дирихле (жесткое закрепление), Неймана (отсутствие нагрузок) или Синьорини (контакт тела

с препятствием без трения); см. [7, 9]. Формальная (т.е. без учета гладкости) эквивалентность обобщенных и «классических» решений некоторых задач такого типа обсуждается в [1] и не рассматривается в данной статье.

Наша цель — описать предельное поведение (при $\varepsilon \rightarrow 0$) решений следующей задачи на минимум.

Для заданных пространственных сил $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$, функционала энергии

$$I^\varepsilon(\mathbf{u}) = \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathcal{A}^\varepsilon(x) \mathbf{e}(\mathbf{u}) dx - 2 \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx \quad (1.2)$$

и замкнутого выпуклого множества $\mathcal{V}^\varepsilon$ в $H^1(\Omega^\varepsilon)^n$ (характеризующего краевые условия) найти вектор перемещений $\mathbf{u}^\varepsilon$ такой, что

$$\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon, \quad I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}^\varepsilon} I^\varepsilon(\mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Множество допустимых перемещений $\mathcal{V}^\varepsilon$ состоит из вектор-функций, принадлежащих $H^1(\Omega^\varepsilon)^n$ и удовлетворяющих следующим краевым условиям на $\partial\Omega^\varepsilon$. Пусть в каждой точке $x \in \partial\Omega^\varepsilon$ задано замкнутое выпуклое множество $\mathcal{M}_x^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, на $\partial\Omega^\varepsilon$ имеется некоторое поле замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{M}_x^\varepsilon$. Вектор-функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ называется *допустимым перемещением* (т.е. $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^\varepsilon$), если $\mathbf{u} \in H^1(\Omega^\varepsilon)^n$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &\in \mathcal{M}_x^\varepsilon \quad \text{при почти всех } x \in \partial\Omega^\varepsilon \\ \text{или кратко} \quad \mathbf{u}(x) \Big|_{x \in \partial\Omega^\varepsilon} &\in \mathcal{M}_x^\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Итак, значения следа функции $\mathbf{u}$ на $\partial\Omega^\varepsilon$ должны принадлежать множествам $\mathcal{M}_x^\varepsilon$.

Приведем пример краевых условий такого типа. Разобьем границу области Ω^ε на четыре взаимно непересекающихся измеримых множества, $\partial\Omega^\varepsilon = \Sigma_D^\varepsilon \cup \Sigma_N^\varepsilon \cup \Sigma_S^\varepsilon \cup \Sigma_O^\varepsilon$, и рассмотрим поле замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{M}_x^\varepsilon$ вида

$$\mathcal{M}_x^\varepsilon = \begin{cases} \{0\} & \text{при } x \in \Sigma_D^\varepsilon, \\ \mathbb{R}^n & \text{при } x \in \Sigma_N^\varepsilon, \\ \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}^\varepsilon(x) \leq 0\} & \text{при } x \in \Sigma_S^\varepsilon, \\ \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{\eta}| \leq b^\varepsilon(x)\} & \text{при } x \in \Sigma_O^\varepsilon, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega^\varepsilon$. Тогда краевые условия (1.4) можно интерпретировать следующим образом. На Σ_D тело закреплено: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ на Σ_D (нулевые условия Дирихле). На Σ_N тело свободно (нулевые условия Неймана естественным образом возникают на этой части границы). На Σ_S перемещения точек тела могут происходить только вовнутрь, т.е. должны лежать в полупространствах $\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}^\varepsilon(x) \leq 0\}$ (тело контактирует с жестким препятствием, исключаяющим его перемещения вовне; это условие часто называется *условием Синьорини*; см., например, [7]). Наконец, на множестве Σ_O перемещения возможны лишь в пределах шаров радиуса $b^\varepsilon(x)$.

В настоящей работе будет изучаться задача (1.3) в случае

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\varepsilon &= \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega^\varepsilon)^n : \mathbf{u}(x) \Big|_{\partial\Omega^\varepsilon} \in \mathcal{M}_x^\varepsilon\}, \\ \mathcal{M}_x^\varepsilon &= \begin{cases} \{0\} & \text{при } x \in \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon, \\ \mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x) & \text{при } x \in S^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\partial\omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\mathcal{M}(\xi) \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, заданное для любого $\xi \in \partial\omega$ и 1-периодически зависящее от ξ (т.е. $\mathcal{M}(\xi + z) = \mathcal{M}(\xi)$ для любого $\xi \in \partial\omega$ и любой точки z с целочисленными координатами). Предполагается также, что $\mathbf{0} \in \mathcal{M}(\xi)$ при всех $\xi \in \partial\omega$, а семейство $\mathcal{M}(\xi)$ измеримо по ξ в том смысле, что вектор-функция

$$P(\xi)\boldsymbol{\eta} \quad \text{измерима по } \xi \in \partial\omega \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{P}(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(\xi)$ — оператор проекции на замкнутое выпуклое множество $\mathcal{M}(\xi)$ (т.е. $\mathbf{P}(\xi)\boldsymbol{\eta}$ — ближайшая к $\boldsymbol{\eta}$ точка множества $\mathcal{M}(\xi)$). Кратко (1.5) можно записать в виде

$$\mathcal{V}^\varepsilon = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n : \mathbf{u}(x)|_{S^\varepsilon} \in \mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x)\}. \quad (1.7)$$

Легко видеть, что $\mathcal{V}^\varepsilon$ является замкнутым выпуклым множеством в $H^1(\Omega^\varepsilon)^n$. Равномерное (по ε) неравенство Корна¹

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq C \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n \quad (1.8)$$

совместно с (1.1) показывает, что функционал $I^\varepsilon(\mathbf{u})$ коэрцитивен. Кроме того, функционал $I^\varepsilon(\mathbf{u})$ является строго выпуклым и полунепрерывным снизу на $H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n$. Поэтому, в силу предложения 1.2 [9, гл. II], задача (1.2) имеет одно и только одно решение $\mathbf{u}^\varepsilon$. Так как $\mathbf{0} \in \mathcal{V}^\varepsilon$, то $I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \leq I^\varepsilon(\mathbf{0}) = 0$ и, значит,

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx \leq 2 \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\varepsilon. \quad (1.9)$$

Отсюда, пользуясь неравенством Корна (1.8), получаем оценку

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \quad (1.10)$$

с постоянной C_1 , не зависящей от ε . Элемент $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon$, реализующий минимум функционала $I^\varepsilon(\mathbf{u})$ на $\mathcal{V}^\varepsilon$, совпадает с единственным решением вариационного неравенства (см. [9, гл. II, предложение 2.1])

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\varepsilon) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^\varepsilon. \quad (1.11)$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ УСРЕДНЕНИИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Чтобы сформулировать предельную задачу (также называемую усредненной задачей) для (1.3), (1.7) или (1.11) и описать предельное множество допустимых перемещений, введем еще одно замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, а именно,

$$\mathcal{M}^0 = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{M}(\xi) \text{ для почти всех } \xi \in \partial\omega\}. \quad (2.1)$$

Очевидно,

$$\mathcal{M}^0 = \operatorname{ess} \bigcap_{\xi \in \partial\omega} \mathcal{M}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{A \subset \partial\omega} \bigcap_{\xi \in A} \mathcal{M}(\xi), \quad \operatorname{meas}_{n-1}(\partial\omega \setminus A) = 0. \quad (2.2)$$

Пусть $\{\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2, \dots\}$ — счетное всюду плотное в $\mathcal{M}^0$ множество, $\boldsymbol{\eta}^j \in \bigcap_{\xi \in A^j} \mathcal{M}(\xi)$, $\operatorname{meas}_{n-1}(\partial\omega \setminus A^j) = 0$. Так как каждое $\mathcal{M}(\xi)$ замкнуто, то $\mathcal{M}^0 = \bigcap_{\xi \in A} \mathcal{M}(\xi)$, где $A = \bigcap_{j=1}^\infty A^j$. Поэтому, не ограничивая общности, можно положить $\mathcal{M}(\xi) = \mathbb{R}^n$ для ξ из множества нулевой меры на $\partial\omega$ и считать, что

$$\mathcal{M}^0 = \bigcap_{\xi \in \partial\omega} \mathcal{M}(\xi).$$

Оказывается, для большинства задач вида (1.3), (1.7) замкнутое выпуклое множество $\mathcal{M}^0$ определяет множество допустимых перемещений *усредненной задачи*

$$\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0, \quad \widehat{I}(\mathbf{u}^0) = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}^0} \widehat{I}(\mathbf{u}), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{V}^0 = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \mathbf{v}(x) \in \mathcal{M}^0 \text{ п.в. в } \Omega\}, \quad (2.4)$$

$$\widehat{I}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbb{A}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) dx - 2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx, \quad (2.5)$$

¹В случае гладких границ $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ достаточно общей структуры это неравенство Корна установлено в теоремах 4.3 и 4.5 [5, гл. II]. В случае липшицевых областей Ω^ε , Ω и $\omega_\square = \omega \cap]0, 1[^n$ оно может быть легко доказано на основе результатов §3 в [4] о продолжениях и неравенствах Корна.

$$\mathbb{A}(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \left\langle (\mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}) + \mathbf{p}) : \mathcal{A}(\xi)(\mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}) + \mathbf{p}) \right\rangle_\omega, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{M}^n. \quad (2.6)$$

Здесь $\mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}) = 2^{-1}(\nabla_\xi \mathbf{v}(\xi) + {}^t \nabla_\xi \mathbf{v}(\xi))$, скалярная функция $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ аргумента $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$ — так называемый *усредненный лагранжиан*, а $\mathbb{V}$ — замкнутое выпуклое множество в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$, зависящее от структуры ограничений на S^ε (т.е. от множеств $\mathcal{M}(\xi)$). Таким образом, краевые условия на поверхностях S^ε в пределе могут обратиться в ограничения почти всюду в области Ω и могут влиять на вид усредненного лагранжиана. Очевидно, что усредненная задача (2.3) полностью определяется множествами $\mathcal{M}^0$ и $\mathbb{V}$. Поясним, в каком смысле (2.3) понимается как усредненная задача для (1.3), (1.7).

Для продолжения вектор-функций, заданных в Ω^ε , на фиксированный достаточно большой куб $Q \supset \bar{\Omega}$ будем использовать равномерно ограниченные линейные операторы¹

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n &\rightarrow H_0^1(Q)^n, \quad \sup_\varepsilon \|P_\varepsilon\| < \infty, \quad (P_\varepsilon \mathbf{u})|_{\Omega^\varepsilon} \equiv \mathbf{u}; \\ P_\varepsilon \mathbf{u}(x) &= \mathbf{0} \quad \text{при } x \in Q \setminus \Omega, \quad \text{если } \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 4\sqrt{n}\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Определение 2.1. Задача (2.3) называется *усреднением задачи* (1.3), (1.7), если имеет место сходимость решений и энергий,

$$P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}^0 \text{ слабо в } H^1(\Omega)^n, \quad I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \rightarrow |\omega_\square| \hat{I}(\mathbf{u}^0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Простейший случай, когда $\mathcal{M}(\xi) = \mathbb{R}^n$ при всех $\xi \in \partial\omega$, соответствует обычной задаче теории упругости с нулевыми условиями Неймана на поверхности полостей S^ε и нулевыми условиями Дирихле на Γ^ε (эта задача подробно изучалась ранее; см., например, [3, 5]). В этом случае $\mathcal{M}^0 = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}^0 = H_0^1(\Omega)^n$, $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$, а усредненный лагранжиан $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ является квадратичной формой, задающей так называемый *усредненный тензор упругости* $\hat{\mathcal{A}}$,

$$\mathbf{p} : \hat{\mathcal{A}}\mathbf{p} = \mathbb{A}(\mathbf{p}) \quad \text{или} \quad \hat{\mathcal{A}}\mathbf{p} = \left\langle \mathcal{A}(\xi) \left(\mathbf{e}_\xi(\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)) + \mathbf{p} \right) \right\rangle_\omega \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{M}^n, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ — решение задачи (2.6) при $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$. В этом случае усредненная задача (2.3) эквивалентна задаче Дирихле

$$\mathbf{u}^0 \in H_0^1(\Omega)^n, \quad \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}^0) : \hat{\mathcal{A}}\mathbf{e}(\mathbf{v}) dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n. \quad (2.10)$$

Здесь будут изучены различные случаи $\mathcal{M}^0 \neq \mathbb{R}^n$. Например, пусть множество $\mathcal{M}^0$ вида (2.1) имеет внутренние точки в топологии $\mathbb{R}^n$ или $\dim \mathcal{M}^0 = n$ (ясно, что $\text{int } \mathcal{M}^0 \neq \emptyset \iff \dim \mathcal{M}^0 = n$)². Будет показано, что в этом случае всегда $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$, усредненный лагранжиан совпадает с квадратичной формой (2.9), и потому усредненная задача (2.3) эквивалентна вариационному неравенству

$$\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0, \quad \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}^0) : \hat{\mathcal{A}}\mathbf{e}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^0) dx \geq \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^0) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \quad (2.11)$$

с тем же усредненным тензором $\hat{\mathcal{A}}$, что и в (2.10), но с другим множеством допустимых перемещений $\mathcal{V}^0 \neq H_0^1(\Omega)^n$. Таким образом, ограничения $\mathbf{v}(x)|_{S^\varepsilon} \in \mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x)$ в пределе переходят в ограничения $\mathbf{v}(x) \in \mathcal{M}^0$ почти всюду в Ω , но усредненный тензор остается тем же, что и для линейной задачи с нулевыми условиями Неймана на перфорации. Этот результат доказан в [15] в случае конических множеств $\mathcal{M}(\xi)$ при некоторых несущественных дополнительных ограничениях на структуру ячейки $\omega_\square$.

¹В случае гладких границ $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ достаточно общей структуры наличие таких операторов P_ε установлено в теореме 4.3 [5, гл. I]. В рассматриваемом здесь случае липшицевых областей Ω^ε , Ω и $\omega_\square = \omega \cap]0, 1[^n$ такие операторы легко могут быть построены на основе результатов §3 в [4].

²По определению, размерность выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$ есть размерность его выпуклой оболочки.

Далее будут рассмотрены примеры различных краевых условий на S^ε . Для этого удобно ввести 1-периодическое множество $\sigma \subset \partial\omega$ такое, что

$$\mathcal{M}(\xi)|_{\xi \in \sigma} \neq \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{M}(\xi)|_{\xi \in \partial\omega \setminus \sigma} = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{M}^0 = \bigcap_{\xi \in \sigma} \mathcal{M}(\xi). \quad (2.12)$$

Таким образом, ограничения в действительности имеют место лишь на множестве $\Sigma^\varepsilon = S^\varepsilon \cap \varepsilon\sigma$. Будем называть σ (а также $\sigma \cap \bar{\square}$ и Σ^ε) *контактным множеством* и изображать его в виде части $\partial\omega$, примыкающей к жирным линиям на рис. 1, 2 и 4.

Пример 2.2. Пусть $n = 2$ и перфорация области Ω образована полукруглыми отверстиями, как на рис. 1 (a), (b) (изображающем ячейку периодичности $\omega_\square$), и пусть $\sigma \subset \partial\omega$ — контактное множество (примыкает к жирным линиям).

(i) Предположим, что $\mathcal{M}(\xi)|_{\xi \in \sigma} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \nu(\xi) \cdot \eta \leq 0\}$ — полуплоскости, где $\nu(\xi)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\omega$. Таким образом, на $S^\varepsilon \cap \varepsilon\sigma$ имеем условие Синьорини $u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon \leq 0$, а на остальной части S^ε ограничения отсутствуют. Множество $\mathcal{M}^0$ — угол, являющийся пересечением полуплоскостей $\mathcal{M}(\xi)$ при $\xi \in \sigma$. Ясно, что $\mathcal{M}^0$ имеет внутренние точки в $\mathbb{R}^n$, $\dim \mathcal{M}^0 = 2$. Раствор этого угла определяется зоной контакта σ (см. рис. 1 (a), (b)).

(ii) В случае, изображенном на рис. 1 (c), $\mathcal{M}(\xi)|_{\xi \in \sigma} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta + \nu(\xi)| \leq 1\}$ — круги, $\mathcal{M}^0$ — их пересечение, $\dim \mathcal{M}^0 = 2$.

При $\text{int } \mathcal{M}^0 = \emptyset$ (т.е. $\dim \mathcal{M}^0 < n$) ситуация усложняется. Как показано в [15] на примерах линейных задач, в этом случае усредненный тензор $\hat{A}$ может зависеть от краевых условий, поскольку необходимо налагать дополнительные ограничения на v в (2.6), и в качестве $\mathbb{V}$ следует брать некоторое подмножество в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$. Это приведет к тому, что усредненный лагранжиан будет отличаться от квадратичной формы, получающейся при $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$. В настоящей работе, продолжая исследования [14, 15], особое внимание уделяется случаю $\text{int } \mathcal{M}^0 = \emptyset$. Вообще говоря, в силу нелинейности краевых условий, функцию $\mathbb{A}(p)$ нельзя представить в виде квадратичной формы $p : \hat{A}p$. Для описания множеств $\mathbb{V}$ выделим несколько типов краевых условий вида

$$u(x)|_{x \in S^\varepsilon} \in \mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x), \quad (2.13)$$

в зависимости от структуры множеств $\mathcal{M}(\xi)$.

Определение 2.3. Будем говорить, что краевые условия (2.13) на S^ε являются *слабыми ограничениями по всем направлениям*, если либо $\dim \mathcal{M}^0 = n$, либо $0 < \dim \mathcal{M}^0 < n$, но множество $\mathcal{M}^0$ становится n -мерным при снятии всех ограничений вблизи множества нулевой емкости на $\partial\omega$; точнее, если выполнено следующее условие: существует 1-периодическое множество $\gamma \subset \partial\omega$ такое, что $\gamma \cap \partial\square\omega$ имеет нулевую емкость в $\mathbb{R}^n$ и для любого $\delta > 0$ найдутся постоянная $\rho_\delta > 0$ и функция $\eta_\delta(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ такие, что

$$\eta_\delta(\xi) + B_{\rho_\delta} \subset \mathcal{M}(\xi) \quad \forall \xi \in \partial\omega \setminus \gamma_\delta, \quad (2.14)$$

где $\gamma_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\xi, \gamma) < \delta\}$, $B_R = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \leq R\}$.

Очевидно, что если $\dim \mathcal{M}^0 = n$ и $\alpha^0 \in \text{int } \mathcal{M}^0$, то условие (2.14) выполнено при $\gamma = \emptyset$, $\eta_\delta = \alpha^0$, т.е.

$$\alpha^0 + B_\rho \subset \mathcal{M}(\xi) \quad \forall \xi \in \partial\omega \quad (2.15)$$

для всех достаточно малых $\rho > 0$.

Пример 2.4. Пусть $n = 2$. Рассмотрим перфорацию области Ω , образованную отверстиями в ячейках периодичности, изображенными на рис. 1 (d), и пусть контактное множество $\sigma \cap \bar{\square}$ является либо полукруглностью, либо объединением вертикального отрезка с дугой полукруглности, содержащей точку A .

(i) Пусть на $\Sigma^\varepsilon = S^\varepsilon \cap \varepsilon\sigma$ заданы условия Синьорини, а на остальной части S^ε ограничения отсутствуют, т.е. $\mathcal{M}(\xi)|_{\xi \in \sigma} = \{\eta \in \mathbb{R}^2 : \nu(\xi) \cdot \eta \leq 0\}$ и $\mathcal{M}(\xi)|_{\partial\omega \setminus \sigma} = \mathbb{R}^2$. Во всех трех случаях,

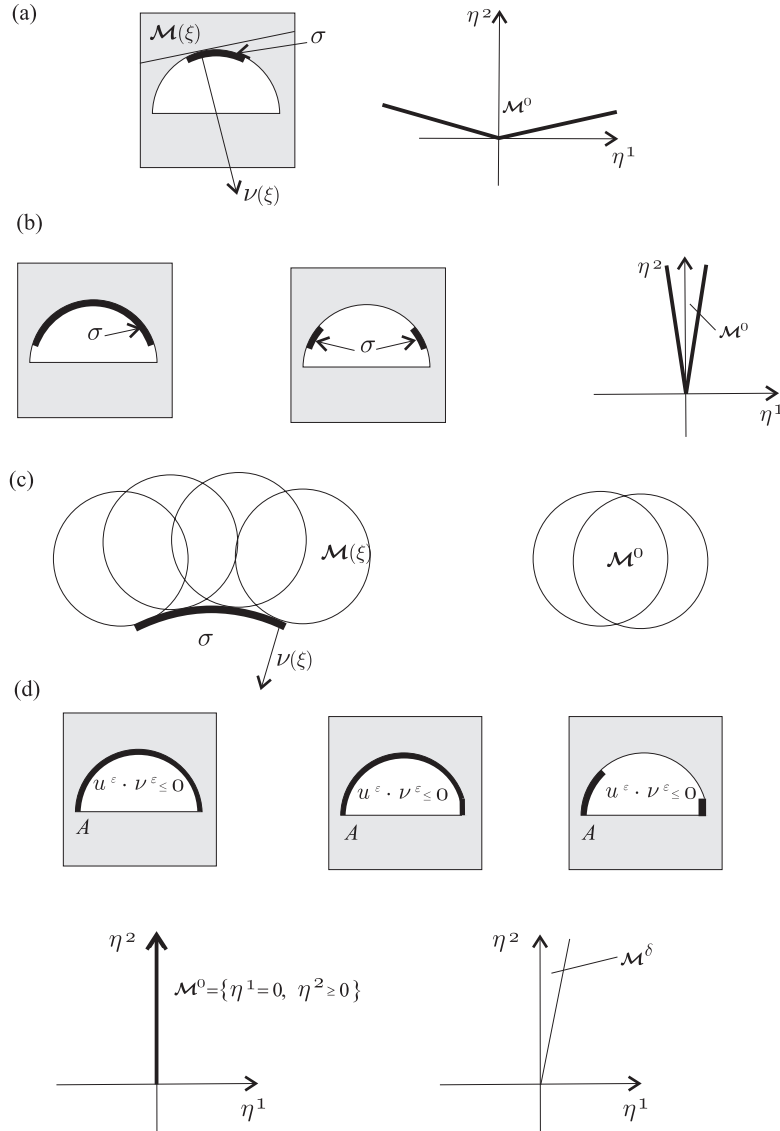


Рис. 1. Ограничения, слабые по всем направлениям.

представленных на рис. 1 (d), имеем $\dim \mathcal{M}^0 = 1$, но при снятии всех краевых условий в δ -окрестности точки A (точка имеет нулевую емкость в $\mathbb{R}^2$) получим двумерный конус $\mathcal{M}^\delta$. Такие условия Синьорини на σ являются слабыми ограничениями в смысле определения 2.3.

(ii) Пусть $\mathcal{M}(\xi)|_{\xi \in \sigma} = \{\eta \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \eta_1 \leq 1, 0 \leq \eta_2 \leq \psi(\xi)\}$, $\mathcal{M}(\xi)|_{\partial\omega \setminus \sigma} = \mathbb{R}^2$, где $\psi(\xi) \geq 0$ — непрерывная 1-периодическая функция на σ , $\psi(A) = 0$, $\psi(\xi) > 0$ при $\xi \in (\sigma \cap \bar{\Omega}) \setminus A$. В этом случае $\mathcal{M}^0 = \{0 \leq \eta_1 \leq 1, \eta_2 = 0\}$, $\dim \mathcal{M}^0 = 1$, но при снятии краевых условий вблизи точки A отрезок $\mathcal{M}^0$ превращается в двумерный прямоугольник $\mathcal{M}^\delta = \{0 \leq \eta_1 \leq 1, 0 \leq \eta_2 \leq c_\delta\}$, $c_\delta > 0$. Такие краевые условия также задают слабые ограничения по всем направлениям.

В рассматриваемом случае имеет место следующий результат об усреднении.

Теорема 2.5. Пусть краевые условия на S^ε в (1.7) задают слабые ограничения по всем направлениям. Тогда усредненная задача для (1.2), (1.7) имеет вид (2.3), где $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)/\mathbb{R}^n$, а усредненный лагранжиан совпадает с квадратичной формой $\mathbb{A}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbb{A}} \mathbf{p}$, где $\hat{\mathbb{A}}$ — обычный усредненный тензор упругости (2.9).

Таким образом, слабые ограничения на S^ε не влияют на усредненный лагранжиан и в пределе превращаются в ограничения почти всюду в области Ω .

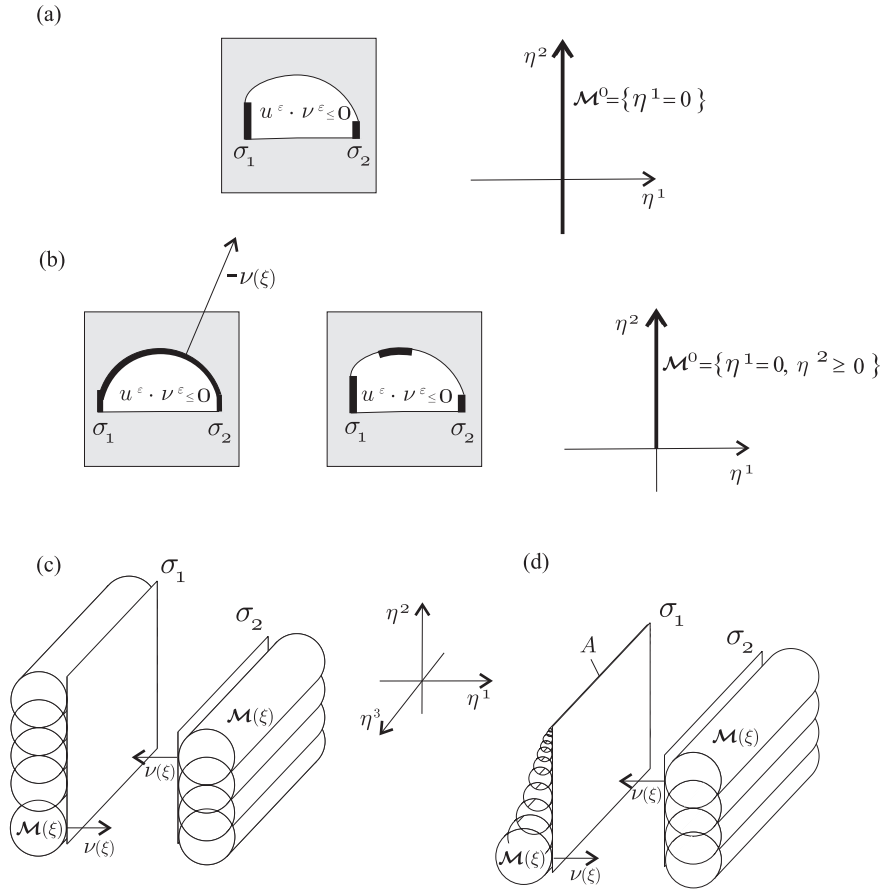


Рис. 2. Ограничения, сильные в направлении x_1 и слабые в направлении x_2 (случаи (a), (b)) или направлениях x_2, x_3 (случаи (c), (d)).

Рассмотрим некоторые другие случаи краевых условий, когда $\dim \mathcal{M}^0 < n$. Начнем с примеров, показывающих, что не всегда можно сделать множество $\mathcal{M}^0$ n -мерным путем снятия ограничений вблизи множества нулевой емкости.

Пример 2.6. Пусть σ — контактное множество (см. (2.12)), $\text{meas}_{n-1} \sigma \neq 0$. В следующих случаях $\dim \mathcal{M}^0 < n$, но множество $\mathcal{M}^0$ нельзя сделать n -мерным, сняв все краевые условия в окрестности множества нулевой емкости.

(i) $\mathcal{M}(\xi)|_{\sigma} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \eta_1 = 0\}$. Соответствующее краевое условие имеет вид $u_1^\varepsilon|_{\Sigma^\varepsilon} = 0$ и $\dim \mathcal{M}^0 = n - 1$.

(ii) Пусть $n = 2$, отверстия имеют вид, как на рис. 2 (a), (b), и на $\Sigma^\varepsilon = S^\varepsilon \cap \varepsilon\sigma$ заданы условия Синьорини $u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon \leq 0$, причем $\sigma \cap \bar{\square}$ состоит из двух вертикальных отрезков σ_1, σ_2 (рис. 2 (a)) или является объединением дуги полуокружности и вертикальных отрезков σ_1, σ_2 (рис. 2 (b)). Очевидно, $\dim \mathcal{M}^0 = 1$.

(iii) Пусть $n = 3$ и контактное множество $\sigma \cap \bar{\square}$ состоит из двух прямоугольников σ_1 и σ_2 , ортогональных оси η^1 , как на рис. 2 (c), (d), $\mathcal{M}(\xi)|_{\sigma} = \{\eta = {}^t(\hat{\eta}, \eta^3) \in \mathbb{R}^3 : |\hat{\eta} + a(\xi)\hat{\nu}(\xi)| \leq a(\xi)\}$ — цилиндры, параллельные оси η^3 , где $\hat{\eta} = {}^t(\eta^1, \eta^2)$, $\hat{\nu} = {}^t(\nu_1, \nu_2) = {}^t(\pm 1, 0)$, $a(\xi)$ — 1-периодическая неотрицательная непрерывная функция на σ . Рис. 2 (c) соответствует случаю $a(\xi) = \text{const} > 0$, а рис. 2 (d) — случаю $a(\xi) > 0$ на $(\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus A$, $a(A) = 0$, где A — верхнее основание σ_1 . Ясно, что $\mathcal{M}^0 = \{\eta \in \mathbb{R}^3 : \eta^1 = \eta^2 = 0\}$ совпадает с осью η^3 .

Опишем общий случай краевых условий, рассмотренных в примере 2.6.

При $0 < n_0 < n$ представим $\mathbb{R}^n$ в виде декартова произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1}$ и для любого вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\Pi_0 \eta \subset \mathbb{R}^{n_0}$ его первые n_0 компонент, а через $\Pi_1 \eta \subset \mathbb{R}^{n_1}$ его

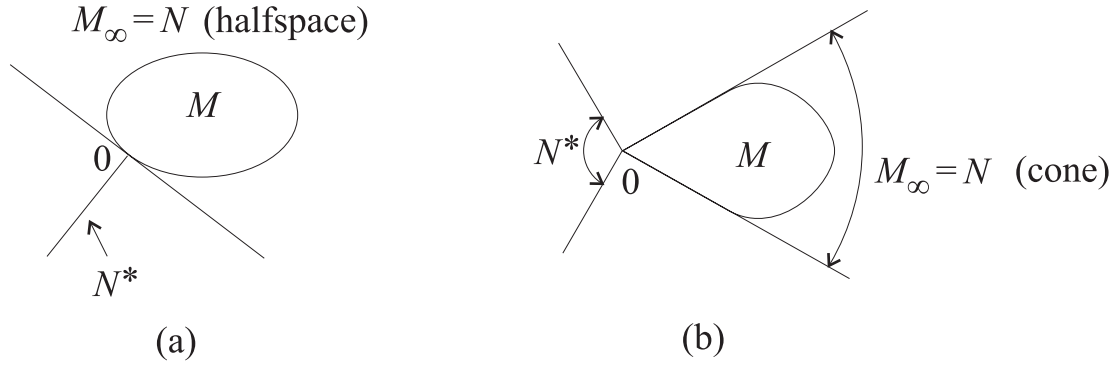


Рис. 3. Структура конуса $M_\infty = \overline{\bigcup_{t \geq 0} tM}$.

последние n_1 компонент. Положим

$$\widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) = \overline{\bigcup_{t \geq 0} t\Pi_0 \mathcal{M}(\xi)}, \quad \mathcal{M}_\infty(\xi) = \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) \times \mathbb{R}^{n_1}. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что при каждом $\xi \in \partial\omega$ множества $\widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi)$ и $\mathcal{M}_\infty(\xi)$ являются замкнутыми выпуклыми конусами в соответствующих пространствах.

Замечание 2.7. Опишем геометрическую структуру замкнутого выпуклого конуса $M_\infty = \overline{\bigcup_{t \geq 0} tM}$, где M — произвольное замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^s$ такое, что $0 \in M$, $\dim M = s$.

Если $s = 1$, то очевидно, что M_∞ совпадает с одним из четырех множеств: $0,] - \infty, +\infty[$, $] - \infty, 0]$, $[0, +\infty[$.

При $s > 1$ пусть $N^* = \{\eta^* \in \mathbb{R}^s : \eta^* \cdot \eta \leq 0 \forall \eta \in M\}$ — конус нормалей к множеству M в точке 0 , а $N = \{\zeta \in \mathbb{R}^s : \zeta \cdot \eta \leq 0 \forall \eta \in N^*\}$ — конус, двойственный к N^* . Легко видеть, что $M_\infty = N$. Если 0 является внутренней точкой множества M , то $M_\infty = \mathbb{R}^s$. Если $0 \in \partial M$ и граница ∂M достаточно гладкая вблизи точки 0 (см. рис. 3 (a)), то конус нормалей является одномерным (луч), а M_∞ — полупространство, ограниченное касательной плоскостью к M в точке 0 . Если $0 \in \partial M$ и ∂M негладкая в точке 0 (см. рис. 3 (b)), то конус нормалей N^* может иметь размерность > 1 и M_∞ является s -мерным конусом, двойственным к N^* .

Определение 2.8. Будем говорить, что краевые условия (2.13) на S^ε задают *сильные ограничения по n_0 направлениям* ($0 < n_0 < n$) и *слабые ограничения по $n_1 = n - n_0$ направлениям*, если

$$\left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n_0} : \eta \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) \text{ п. в. на } \partial\omega \right\} = \text{ess} \bigcap_{\xi \in \partial\omega} \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) = \{0\}, \quad (2.17)$$

и существует 1-периодическое множество $\gamma \subset \partial\omega$ такое, что $\gamma \cap \partial\omega$ имеет нулевую емкость в $\mathbb{R}^n$, и для любого $\delta > 0$ найдутся постоянная $\rho_\delta > 0$ и вектор-функция $\eta_\delta(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ такие, что

$$\eta_\delta(\xi) + \mathcal{M}_\infty(\xi) \cap B_{\rho_\delta} \in \mathcal{M}(\xi) \quad \forall \xi \in \partial\omega \setminus \gamma_\delta, \quad (2.18)$$

где $\gamma_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\xi, \gamma) < \delta\}$, $B_R = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \leq R\}$.

В случае таких краевых условий всегда $\dim \mathcal{M}^0 \leq n_1 < n$, но, в отличие от предыдущего случая, множество $\mathcal{M}^0$ нельзя сделать n -мерным, сняв ограничения вблизи подмножества $\partial\omega$ нулевой емкости. Имеет место следующий результат об усреднении.

Теорема 2.9. Пусть краевые условия на S^ε в (1.7) задают *сильные ограничения по n_0* , $0 < n_0 < n$, *направлениям* и *слабые ограничения по $n_1 = n - n_0$ направлениям*. Тогда усредненная

задача для (1.2), (1.7) имеет вид (2.3) с

$$\mathbb{V} = \left\{ \mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n : \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{v}(\xi) \big|_{\partial\omega} \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) \right\}, \quad (2.19)$$

а усредненный лагранжиан $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ является строго выпуклой функцией $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$, удовлетворяющей оценке

$$c_0 |\mathbf{p}|^2 \leq \mathbb{A}(\mathbf{p}) \leq c_1 |\mathbf{p}|^2 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{S}^n. \quad (2.20)$$

В данном случае множество $\mathbb{V}$ определяется ограничениями на первые n_0 компонент вектора перемещений, и усредненный лагранжиан (2.6) зависит от краевых условий (их формы и геометрии множества, на котором они заданы).

Пример 2.10. Для краевых условий, рассмотренных в примере 2.6, соответствующие множества вектор-функций, определяющие усредненную задачу, имеют вид:

- (i) $\mathcal{V}^0 = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : v_1|_\Omega = 0 \}$,
 $\mathbb{V} = \{ \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n : w_1(\xi) \big|_\sigma = 0 \}$.
- (ii) $\mathcal{V}^0 = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : v_1|_\Omega = 0 \}$ в случае рис. 2 (а);
 $\mathcal{V}^0 = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : v_1|_\Omega = 0, v_2|_\Omega \geq 0 \}$ в случае рис. 2 (b);
 $\mathbb{V} = \{ \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n : \mathbf{w}(\xi) \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi) \big|_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq 0 \}$ в обоих случаях рис. 2 (а) и (b).

Таким образом, условия Синьорини на отрезках σ_1 и σ_2 наследуются функциями множества $\mathbb{V}$, которое определяет усредненный лагранжиан, тогда как краевые условия вне $\sigma_1 \cup \sigma_2$ снимаются для элементов $\mathbb{V}$.

(iii) В случаях, представленных на рис. 2 (c), (d), имеем

$$\mathcal{V}^0 = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3 : v_1|_\Omega = v_2|_\Omega = 0 \},$$

$$\mathbb{V} = \{ \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^3 : \mathbf{w}(\xi) \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi) \big|_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq 0 \}.$$

Таким образом, краевые условия на $\sigma_1 \cup \sigma_2$ переходят в условия Синьорини для элементов множества $\mathbb{V}$, определяющих усредненный лагранжиан.

Наконец, рассмотрим случай $\mathcal{M}^0 = \{0\}$. Введем следующие замкнутые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}_\infty(\xi) = \overline{\bigcup_{t \geq 0} t \mathcal{M}(\xi)}, \quad \xi \in \partial\omega; \quad \mathcal{M}_\infty^0 = \text{ess} \bigcap_{\xi \in \partial\omega} \mathcal{M}_\infty(\xi). \quad (2.21)$$

Например, если $\mathcal{M}(\xi) = \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi) \leq 0 \}$, то $\mathcal{M}_\infty(\xi) = \mathcal{M}(\xi)$ (это равенство всегда имеет место, если $\mathcal{M}(\xi)$ является конусом; см. рис. 3 (b)). Если $\mathcal{M}(\xi) = \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{\eta} + \mathbf{b}(\xi)| \leq |\mathbf{b}(\xi)| \}$ для некоторого ненулевого вектора $\mathbf{b}(\xi) \in \mathbb{R}^n$, то $\mathcal{M}_\infty(\xi) = \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b}(\xi) \leq 0 \}$ (см. замечание 2.7 и рис. 3 (a)).

Теорема 2.11. Пусть $\mathcal{M}^0 = \{0\}$. Тогда для решений $\mathbf{u}^\varepsilon$ задачи (1.3), (1.5) имеет место сходимость $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{1, \Omega^\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Если $\mathcal{M}_\infty^0 = \{0\}$, то справедливы равномерные оценки:

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq C_0 \varepsilon^2, \quad \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq C_1 \varepsilon. \quad (2.22)$$

В § 4 покажем, что при дополнительных условиях на $\mathcal{M}(\xi)$ результат теоремы 2.11 можно улучшить и описать асимптотику величин $\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. теорему 4.2). С этой целью дадим следующее определение, которое формально получается из определения 2.8 при $n_0 = n$.

Определение 2.12. Будем говорить, что краевые условия (2.13) задают *сильные ограничения по всем направлениям*, если $\mathcal{M}_\infty^0 = \{0\}$, и существует 1-периодическое множество $\gamma \subset \partial\omega$ такое, что $\gamma \cap \partial\omega$ имеет нулевую емкость в $\mathbb{R}^n$ и для любого $\delta > 0$ найдутся $\boldsymbol{\eta}_\delta(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ и $\rho_\delta > 0$ такие, что

$$\boldsymbol{\eta}_\delta(\xi) + \mathcal{M}_\infty(\xi) \cap B_{\rho_\delta} \subset \mathcal{M}(\xi) \quad \forall \xi \in \partial\omega \setminus \gamma_\delta. \quad (2.23)$$

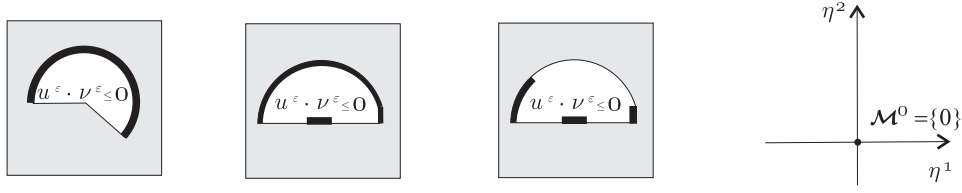


Рис. 4. Сильные ограничения по всем направлениям.

Пример 2.13. Пусть σ — контактное множество (2.12), $\text{meas}_{n-1} \sigma \neq 0$, $\Sigma^\varepsilon = S^\varepsilon \cap \varepsilon \sigma$. Следующие краевые условия задают сильные ограничения по всем направлениям:

- (i) Условия Дирихле $\mathbf{u}|_{\Sigma^\varepsilon} = \mathbf{0}$. В этом случае $\mathcal{M}_\infty(\xi) = \{\mathbf{0}\}$ для $\xi \in \sigma$.
- (ii) При $n = 2$ условия Синьорини, как на рис. 4, где множество $\sigma \cap \square$ примыкает к жирным линиям. В этом случае $\mathcal{M}_\infty(\xi) = \mathcal{M}(\xi) = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi) \leq 0\}$ при $\xi \in \sigma$.
- (iii) Пусть $\mathcal{M}(\xi) = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}(\xi)| \leq |\mathbf{b}(\xi)|\}$, где $\mathbf{b}(\xi)$ — непрерывное по Липшицу 1-периодическое векторное поле такое, что $\mathbf{b}(\xi) \neq \mathbf{0}$ на $\partial\omega \setminus \Gamma_0$, где Γ_0 — 1-периодическое множество, состоящее из $(n-2)$ -мерных липшицевых поверхностей (и, значит, $\Gamma_0 \cap [0, 1]^n$ имеет нулевую емкость в $\mathbb{R}^n$). Тогда $\mathcal{M}_\infty(\xi) = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b}(\xi) \geq 0\}$ при $\xi \in \partial\omega \setminus \Gamma_0$. Если $\bigcap_{\xi \in \partial\omega \setminus \Gamma_0} \mathcal{M}_\infty(\xi) = \{\mathbf{0}\}$, то соответствующие краевые условия задают сильные ограничения по всем направлениям (в (2.23) можно взять $\boldsymbol{\eta}_\delta(\xi) = \mathbf{b}(\xi)$; ср. с рис. 3 (а)).

В § 4 покажем, что в случае сильных ограничений по всем направлениям теорему 2.11 можно уточнить (см. теорему 4.2), а именно, $\varepsilon^{-2}\mathbf{u}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}\nabla\mathbf{u}^\varepsilon$ оказываются близки (в смысле двухмасштабной сходимости) к $\mathbf{u}(x, \xi)$ и $\nabla_\xi \mathbf{u}(x, \xi)$ соответственно, где $\mathbf{u}(x, \xi) = \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \xi)$, а $\mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi)$ зависит от $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ как от параметра и является одним из решений следующей задачи на ячейке:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi) \in \mathcal{U}, \quad J_b(\mathbf{W}) = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{U}} J_b(\mathbf{w}), \quad (2.24)$$

$$J_b(\mathbf{w}) = \int_{\omega_\square} \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}) d\xi - 2 \int_{\omega_\square} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}(\xi) d\xi, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{w}(\xi) \in H^1_{\text{per}}(\omega)^n : \mathbf{w}(\xi) \Big|_{\partial\omega} \in \mathcal{M}_\infty(\xi) \right\}.$$

Пример 2.14. Условия Дирихле и Синьорини, рассмотренные в примере 2.13 (случаи (i) и (ii)), сохраняются для элементов множества $\mathcal{U}$, тогда как краевое условие $|\mathbf{u}^\varepsilon(x) - \mathbf{b}(\varepsilon^{-1}x)| \Big|_{S^\varepsilon} \leq |\mathbf{b}(\varepsilon^{-1}x)|$ в случае (iii) в пределе переходит в условие $\mathbf{w}(\xi) \cdot \mathbf{b}(\xi) \Big|_{\partial\omega} \geq 0$.

Сформулированные выше результаты об усреднении будут доказаны методом двухмасштабной сходимости. Понятие двухмасштабной сходимости было впервые введено в [12], а его обобщения и многочисленные применения к задачам усреднения изложены в работах [2, 10, 11, 13], где можно найти ссылки на другие публикации.

Напомним некоторые определения и приведем основные факты, необходимые для доказательства теорем об усреднении.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Через $L^2(\Omega, H)$ обозначается лебегово пространство квадратично суммируемых функций в Ω со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Норма в $L^2(\Omega, H)$ имеет вид $\|f\|_{L^2(\Omega, H)}^2 = \int_\Omega \|f(x)\|_H^2 dx$.

В дальнейшем H — соболевское или лебегово пространство, элементами которого являются 1-периодические функции аргумента $\xi \in \omega$ (или $\xi \in \partial\omega$), а элементы $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega, H)$ часто обозначаются $\mathbf{u}(x, \xi)$, $\mathbf{v}(x, \xi)$, где $x \in \Omega$, $\xi \in \omega$ (или $\xi \in \partial\omega$).

Через $L^p_{\text{per}}(\omega)$ и $L^p_{\text{per}}(\partial\omega)$ обозначаются лебеговы пространства 1-периодических функций с ограниченными нормами в $L^p(\omega_{\square})$ и $L^p(\partial\omega_{\square})$ соответственно.

Сформулированные выше теоремы об усреднении будут доказаны методом двухмасштабной сходимости. Для наших целей требуется понятие двухмасштабной сходимости относительно лебеговой меры на пространственных областях Ω^ε и поверхностях S^ε . Воспользуемся двумя следующими определениями, которые представляют собой частные случаи определения слабой двухмасштабной сходимости относительно периодических борелевских мер (см. [2]).

Определение 3.1. Последовательность $u^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ называется *двухмасштабно сходящейся* на Ω^ε к $u^0(x, \xi) \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\omega))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если для любых $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi(\xi) \in L^2_{\text{per}}(\omega)$ имеем

$$\int_{\Omega^\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dx \rightarrow \int_{\Omega \times \omega_{\square}} u^0(x, \xi) \varphi(x) \psi(\xi) dx d\xi. \quad (3.1)$$

Для такой сходимости используем обозначение $u^\varepsilon(x) \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} u^0(x, \xi)$.

Определение 3.2. Последовательность $u^\varepsilon \in L^2(S^\varepsilon)$ называется *двухмасштабно сходящейся* на S^ε к $u^0(x, \xi) \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\partial\omega))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если для любых $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi(\xi) \in L^2_{\text{per}}(\partial\omega)$ имеем

$$\int_{S^\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dS_x \rightarrow \int_{\Omega \times \partial\omega_{\square}} u^0(x, \xi) \varphi(x) \psi(\xi) dx dS_\xi. \quad (3.2)$$

Для такой сходимости используем обозначение $u^\varepsilon(x) \xrightarrow[S^\varepsilon]{2} u^0(x, \xi)$.

Приведем теперь некоторые свойства двухмасштабной сходимости, которые используются в дальнейшем. Заметим, что подпоследовательности $\varepsilon \rightarrow 0$ будут обозначаться той же буквой ε , а постоянные c , C_j и т. п. в неравенствах считаются не зависящими от ε , разные постоянные в разных местах могут иметь одинаковое обозначение. Как обычно, символы $\rightarrow$ и $\rightharpoonup$ обозначают сильную и слабую сходимости в соответствующих гильбертовых пространствах.

Утверждения (i)–(iv) выражают свойства *компактности ограниченных последовательностей относительно двухмасштабной сходимости*.

(i) Пусть $u^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $\sup_\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} < \infty$. Тогда для некоторой подпоследовательности $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} u^0(x, \xi), \quad u^0(x, \xi) \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\omega)).$$

(ii) Пусть $u^\varepsilon \in L^2(S^\varepsilon)$, $\sup_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u^\varepsilon\|_{0, S^\varepsilon} < \infty$. Тогда для некоторой подпоследовательности $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow[S^\varepsilon]{2} u^0(x, \xi), \quad u^0(x, \xi) \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\partial\omega)).$$

(iii) Пусть $u^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, $\sup_\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{1, \Omega^\varepsilon} < \infty$. Тогда найдутся

$$u^0 \in H^1(\Omega), \quad u^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, H^1_{\text{per}}(\omega)/\mathbb{R}^1)$$

такие, что для некоторой подпоследовательности

$$u^\varepsilon \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} u^0(x), \quad \nabla_x u^\varepsilon \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} \nabla_x u^0(x) + \nabla_\xi u^1(x, \xi), \quad (3.3)$$

$$u^\varepsilon \xrightarrow[S^\varepsilon]{2} u^0(x). \quad (3.4)$$

(iv) Пусть $u^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, $\sup_\varepsilon \|\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon} + \sup_\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon} < \infty$. Тогда найдется $u^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, H^1_{\text{per}}(\omega))$ такое, что для некоторой подпоследовательности

$$\varepsilon^{-1}u^\varepsilon(x) \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} u^1(x, \xi), \quad \nabla_x u^\varepsilon \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} \nabla_\xi u^1(x, \xi), \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^{-1}u^\varepsilon(x) \xrightarrow[S^\varepsilon]{2} u^1(x, \xi) \Big|_{\xi \in \partial\omega}, \quad (3.6)$$

где $u^1(x, \xi) \Big|_{\xi \in \partial\omega} \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\partial\omega))$ обозначает след функции $u^1(x, \xi)$ на $\partial\omega$ при фиксированном x .

Утверждения (i), (ii) и сходимости (3.3), (3.5) доказаны в [2]. Приведем вкратце доказательство (3.4), (3.6). Прежде всего покажем, что для любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ и достаточно малых ε имеет место оценка

$$\|u\|_{0,S^\varepsilon \cap \Omega'} \leq C \left(\varepsilon^{-1/2} \|u\|_{0,\Omega^\varepsilon} + \varepsilon^{1/2} \|\nabla u\|_{0,\Omega^\varepsilon} \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega^\varepsilon). \quad (3.7)$$

Это неравенство легко получается заменой переменных $\xi = \varepsilon^{-1}x$ в известной оценке следа $\|v\|_{0,\partial\omega_\square}^2 \leq C_0 \left(\|v\|_{0,\omega_\square}^2 + \|\nabla_\xi v\|_{0,\omega_\square}^2 \right)$ для $v(\xi) \in H^1(\omega_\square)$.

При предположениях утверждения (iii) оценка (3.7) обеспечивает ограниченность последовательности $\varepsilon^{1/2} \|\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\|_{0,S^\varepsilon \cap \Omega'}$ для u^ε из (3.5). Следовательно, по утверждению (ii), $\varepsilon^{-1}u^\varepsilon \xrightarrow{2} u^1(x, \xi)$ на $S^\varepsilon \cap \Omega'$ по подпоследовательности. Пользуясь определениями двухмасштабной сходимости на Ω^ε и S^ε , а также формулой Грина, нетрудно показать, что $u^1 = u^0$.

Аналогично, при предположениях утверждения (iv) оценка (3.7) обеспечивает ограниченность последовательности $\varepsilon^{1/2} \|\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\|_{0,S^\varepsilon \cap \Omega'}$. В силу утверждения (ii), имеем $\varepsilon^{-1}u^\varepsilon \xrightarrow{2} \tilde{u}^1(x, \xi)$ на $S^\varepsilon \cap \Omega'$ по подпоследовательности. Пользуясь определением двухмасштабной сходимости и формулой Грина, устанавливаем, что $\tilde{u}^1 = u^1$.

Следующие два утверждения выражают *свойства среднего значения*. Их доказательство можно найти, например, в [2].

(v) Для любых $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$, $\psi(\xi) \in L^1_{\text{per}}(\omega)$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dx = \int_{\Omega \times \omega_\square} \varphi(x) \psi(\xi) dx d\xi. \quad (3.8)$$

(vi) Для любых $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$, $\psi(\xi) \in L^1_{\text{per}}(\partial\omega)$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^\varepsilon} \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dS_x = \int_{\Omega \times \partial\omega_\square} \varphi(x) \psi(\xi) dx dS_\xi. \quad (3.9)$$

Следующее свойство выражает *полунепрерывность снизу квадратических функционалов* относительно двухмасштабной сходимости.

(vii) Для любой $(s \times s)$ -матрицы $\mathbf{Q}(\xi) \geq 0$ с элементами из $L^\infty_{\text{per}}(\omega)$ и любой последовательности вектор-функций $\mathbf{V}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)^s$, $\mathbf{V}^\varepsilon \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} \mathbf{V}^0(x, \xi)$, имеет место неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{V}^\varepsilon(x) \cdot \mathbf{Q}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{V}^\varepsilon(x) dx \geq \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{V}^0(x, \xi) \cdot \mathbf{Q}(\xi) \mathbf{V}^0(x, \xi) dx d\xi. \quad (3.10)$$

В частном случае, когда $s = 1$, $\mathbf{Q} \equiv 1$, $\omega = \mathbb{R}^n$, $\Omega^\varepsilon = \Omega$, $\omega_\square = \square$, это неравенство доказано в [2]. В общем случае неравенство (3.10) устанавливается аналогично соответствующим видоизменением рассуждений, использованных в [2].

Следующая лемма показывает, что в определенном смысле *выпуклые ограничения инвариантны относительно двухмасштабной сходимости*.

Рассмотрим 1-периодическое семейство замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{K}(\xi) \subset \mathbb{R}^s$, $\xi \in \partial\omega$, таких, что

$$\mathbf{0} \in \mathcal{K}(\xi) \text{ и } \mathcal{K}(\xi) \text{ измеримо по } \xi \in \partial\omega \text{ (в смысле (1.6)).} \quad (3.11)$$

Лемма 3.3. Пусть $\mathbf{v}^\varepsilon \in L^2(S^\varepsilon)^s$ — последовательность вектор-функций такая, что

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) \Big|_{S^\varepsilon} \in \mathcal{K}(\varepsilon^{-1}x), \quad \mathbf{v}^\varepsilon \xrightarrow{S^\varepsilon} \mathbf{v}(x, \xi).$$

Тогда $\mathbf{v}(x, \xi) \in \mathcal{K}(\xi)$ почти всюду в $\Omega \times \partial\omega$.

Доказательство. Для фиксированного ξ пусть $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\xi) : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathcal{K}(\xi)$ — проектор $\mathbb{R}^s$ на замкнутое выпуклое множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\xi)$, т.е.

$$|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{P}\boldsymbol{\eta}| = \min_{\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{K}} |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}| \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^s,$$

где $|\cdot|$ обозначает обычную норму в $\mathbb{R}^s$. Как известно (см., например, [9, гл. II, § 3]),

$$\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{K} \iff (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{P}\boldsymbol{\eta}) \cdot (\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}\boldsymbol{\eta}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^s. \quad (3.12)$$

Поэтому для любых фиксированных $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^s$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $w \in C_{\text{per}}(\partial\omega)$, $w \geq 0$, имеем

$$0 \geq \int_{S^\varepsilon} \varphi(x) w(\varepsilon^{-1}x) (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{P}(\varepsilon^{-1}x)\boldsymbol{\eta}) \cdot (\mathbf{v}^\varepsilon(x) - \mathbf{P}(\varepsilon^{-1}x)\boldsymbol{\eta}) dS_x.$$

Отсюда, пользуясь тем, что $\mathbf{P}(\xi)\boldsymbol{\eta} \in L_{\text{per}}^\infty(\partial\omega)^s$ для фиксированного $\boldsymbol{\eta}$, а также определением двухмасштабной сходимости и свойством среднего значения (vi), получаем

$$0 \geq \int_{\Omega \times \partial\omega} \varphi(x) w(\xi) (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{P}(\xi)\boldsymbol{\eta}) \cdot (\mathbf{v}(x, \xi) - \mathbf{P}(\xi)\boldsymbol{\eta}) dx dS_\xi.$$

В силу произвольности выбора φ и w , это означает, что

$$(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{P}(\xi)\boldsymbol{\eta}) \cdot (\mathbf{v}(x, \xi) - \mathbf{P}(\xi)\boldsymbol{\eta}) \leq 0 \quad \text{п. в. в } \Omega \times \partial\omega.$$

Из этого неравенства и (3.12) вытекает требуемый результат. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Следующая лемма обобщает неравенство Фридрихса на вектор-функции, удовлетворяющие выпуклым ограничениям.

Лемма 3.4. Пусть $\mathcal{K}(\xi) \subset \mathbb{R}^s$, $\xi \in \partial\omega$, — 1-периодическое семейство замкнутых выпуклых конусов, удовлетворяющих условию (3.11). Предположим, что (см. (2.2))

$$\mathcal{K}^0 = \text{ess} \bigcap_{\xi \in \partial\omega} \mathcal{K}(\xi) = \{\mathbf{0}\}. \quad (3.13)$$

Тогда имеют место следующие неравенства типа Фридрихса:

$$\|\mathbf{v}\|_{0,G}^2 \leq C(G) \|\nabla_\xi \mathbf{v}\|_{0,G}^2 \quad \forall \mathbf{v}(\xi) \in H^1(G)^s, \quad \mathbf{v}(\xi) \Big|_{\partial\omega} \in \mathcal{K}(\xi), \quad (3.14)$$

$$\|\mathbf{v}^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq C\varepsilon^2 \|\nabla_x \mathbf{v}^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)^s, \quad \mathbf{v}^\varepsilon(x) \Big|_{S^\varepsilon} \in \mathcal{K}(\varepsilon^{-1}x), \quad (3.15)$$

где $G = \omega_\square$ или $G = \square_k =]-k, k[^n$, $k \geq 1$.

Классы эквивалентности $\mathbf{w}(\xi) + \text{const}$, соответствующие элементам $\mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^s$, удовлетворяющим краевому условию $\mathbf{w}(\xi) \Big|_{\xi \in \partial\omega} \in \mathcal{K}(\xi)$, образуют замкнутое выпуклое множество в факторпространстве $H_{\text{per}}^1(\omega)^s / \mathbb{R}^s$.

Доказательство. Предположим, что (3.14) неверно. Тогда найдется последовательность $\mathbf{w}^m(\xi) \in H^1(G)^s$, для которой

$$\|\mathbf{w}^m\|_{0,G} \geq m \|\nabla_\xi \mathbf{w}^m\|_{0,G}, \quad \mathbf{w}^m(\xi) \Big|_{\partial_\square \omega} \in \mathcal{K}(\xi), \quad m \rightarrow \infty.$$

Поскольку каждое множество $\mathcal{K}(\xi)$ является конусом, то имеем $t\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}(\xi)$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, $\mathbf{w}^m$ можно умножить на произвольную положительную постоянную, сохранив при этом ограничения на $\partial_\square \omega$, и потому, не ограничивая общности, можем считать, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^m\|_{0,G} &= 1, \quad \|\nabla_\xi \mathbf{w}^m\|_{0,G} \rightarrow 0 \\ \text{при } m &\rightarrow \infty, \quad \mathbf{w}^m(\xi) \Big|_{\partial_\square \omega} \in \mathcal{K}(\xi). \end{aligned}$$

В силу неравенства Пуанкаре и компактности вложения $H^1(G)$ в $L^2(G)$ можно найти постоянный вектор $\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathbb{R}^s$ и подпоследовательность $m' \rightarrow \infty$ такие, что $\|\mathbf{w}^{m'} - \boldsymbol{\eta}^0\|_{1,G} \rightarrow 0$, $\|\boldsymbol{\eta}^0\|_{0,G} = 1$. Поскольку множество всех $\mathbf{v} \in H^1(G)^s$, удовлетворяющих условию $\mathbf{v}(\xi) \Big|_{\partial_\square \omega} \in \mathcal{K}(\xi)$, замкнуто в $H^1(G)^s$, то $\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{K}(\xi)$ при почти всех $\xi \in \partial_\square \omega$ и, значит, $\boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{K}^0$, что невозможно, так как $\mathcal{K}^0 = \{\mathbf{0}\}$ и $\|\boldsymbol{\eta}^0\|_{0,G} = 1$. Таким образом, неравенство (3.14) доказано.

Рассмотрим открытый куб $Q \supset \bar{\Omega}$ и линейный оператор продолжения $P : H^1(\Omega)^s \rightarrow H^1(Q)^s$ такой, что $\|Pu\|_{0,Q} \leq c\|u\|_{0,\Omega}$, $\|Pu\|_{1,Q} \leq c\|u\|_{1,\Omega}$ с постоянной c , не зависящей от u . При фиксированном $k \geq 1$ рассмотрим покрытие куба Q малыми ε -кубами вида $\varepsilon(z + \square_k)$, где z имеет целочисленные координаты, а число ε -кубов, пересекающихся с любым заданным ε -кубом, не зависит от ε . Поскольку область Ω липшицева, то число k можно выбрать столь большим (и не зависящим от ε), что $\varepsilon(z + \partial_\square \omega) \subset \Omega$ для каждого куба $\varepsilon(z + \square_k)$, пересекающегося с Ω и содержащего множество $\varepsilon(z + \partial_\square \omega)$. Неравенство (3.15) устанавливается применением к Pv^ε (в каждом из ε -кубов, покрывающих Ω) оценки, которая получается заменой переменных $\xi = \varepsilon^{-1}x$ из оценки (3.14) с $G = \square_k$.

Докажем последнее утверждение леммы 3.4. Выпуклость указанного множества очевидна, и остается показать, что если $\mathbf{w}^0(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^s$ и

$$\mathbf{w}^m \in H_{\text{per}}^1(\omega)^s, \quad \mathbf{w}^m(\xi) \Big|_{\partial_\omega} \in \mathcal{K}(\xi), \quad \|\nabla_\xi (\mathbf{w}^m - \mathbf{w}^0)\|_{0,\omega_\square} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то найдется постоянный вектор $\boldsymbol{\eta}$, для которого $\mathbf{w}^0 + \boldsymbol{\eta}$ удовлетворяет тому же краевому условию на $\partial\omega$. Из (3.14) при $G = \omega_\square$ вытекает, что последовательность средних значений $\langle \mathbf{w}^m \rangle_\omega$ ограничена, и можно считать, что она имеет конечный предел при $m \rightarrow \infty$. В силу неравенства Пуанкаре, $\{\mathbf{w}^m\}$ является последовательностью Коши в $H_{\text{per}}^1(\omega)^s$ и, значит, имеет предел $\tilde{\mathbf{w}} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^s$, так что $\mathbf{w}^0 - \tilde{\mathbf{w}} \equiv \text{const}$. Так как множество всех $\mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^s$, удовлетворяющих условию $\mathbf{v}(\xi) \Big|_{\partial_\omega} \in \mathcal{K}(\xi)$, замкнуто в $H_{\text{per}}^1(\omega)^s$, то вектор-функция $\tilde{\mathbf{w}}$ удовлетворяет тому же краевому условию на $\partial\omega$. $\square$

Замечание 3.5. Предположение леммы 3.4, что $\mathcal{K}(\xi)$ являются замкнутыми выпуклыми конусами в $\mathbb{R}^s$, а не просто замкнутыми выпуклыми множествами, существенно для обеспечения неравенства (3.14). Действительно, пусть $s = 1$, $n = 2$, $0 \in \partial\omega$ (поэтому $\partial\omega$ содержит все точки (z_1, z_2) с целочисленными координатами, т.е. $\mathbb{Z}^2 \subset \partial\omega$). Пусть $\mathcal{K}(\xi) = \{\eta \in \mathbb{R}^1 : 0 \leq \eta \leq a(\xi)\}$, где $a(\xi)$ — непрерывная 1-периодическая функция на $\partial\omega$ такая, что $a(\xi) = 0$ при $\xi \in \mathbb{Z}^2$, $a(\xi) > 0$ при $\xi \in \partial\omega \setminus \mathbb{Z}^2$. Ясно, что условие (3.13) выполнено для таких замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{K}(\xi)$. Рассмотрим 1-периодическую функцию $\psi_\delta(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi_\delta(\xi) = \varphi\left(\ln(\delta^{-1}|\xi|)/\ln(1 + \delta^{-1/2})\right)$ при $\xi \in [-1/2, 1/2]^2$, где $\delta > 0$ достаточно мало, а $\varphi(t)$ — произвольная гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ такая, что $\varphi \geq 0$, $\varphi(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 1$. Для любого δ найдется постоянная $c_\delta > 0$ (зависящая от функции $a(\xi)$), для которой $c_\delta \psi_\delta(\xi) \Big|_{\xi \in \partial\omega} \in \mathcal{K}(\xi)$, так как $0 \leq \psi_\delta \leq 1$ и $\psi_\delta(\xi) \equiv 0$ в окрестности нуля. Оценка (3.14) не может выполняться для $\mathbf{v}(\xi) = c_\delta \psi_\delta(\xi)$ в области $G = \square$, поскольку непосредственно проверяется, что $\|\psi_\delta\|_{0,\square} \rightarrow 1$ и $\|\nabla_\xi \psi_\delta\|_{0,\square} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Замечание 3.6. Предположим, что $\mathcal{K}(\xi) = \{0\}$ для ξ из множества ненулевой меры на $\partial\omega$. Тогда очевидно, что в последнем утверждении леммы 3.4 каждому классу эквивалентности $\mathbf{w}(\xi) + \text{const}$ соответствует единственный элемент $\mathbf{w}(\xi)$, удовлетворяющий краевому условию $\mathbf{w}(\xi)|_{\partial\omega} \in \mathcal{K}(\xi)$. Однако, в общем случае выпуклых ограничений, удовлетворяющих предположениям леммы 3.4, таких элементов может быть много. Действительно, пусть $s = 1$, $\gamma_+, \gamma_- \subset \partial\omega$ — непересекающиеся множества, $\text{meas}_{n-1} \gamma_{\pm} \neq 0$ и $\mathcal{K}(\xi)|_{\gamma_+} = [0, +\infty[$, $\mathcal{K}(\xi)|_{\gamma_-} =]-\infty, 0]$, $\mathcal{K}(\xi) =]-\infty, +\infty[$ в остальных точках $\partial\omega$. Легко видеть, что если $w(\xi) \in C^1_{\text{per}}(\bar{\omega})$ и $w(\xi) > 1$ на γ_+ , $w(\xi) < -1$ на γ_- , то $(w(\xi) + c)|_{\partial\omega} \in \mathcal{K}(\xi)$ для всех постоянных $c \in [-1, 1]$.

Предложение 3.7. Пусть $\mathcal{V}$ — замкнутое выпуклое множество в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $0 \in \mathcal{V}$. Тогда множество

$$\mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^2(\Omega, \mathcal{H}) : f(x) \in \mathcal{V} \text{ при почти всех } x \in \Omega\}$$

выпукло и замкнуто в $L^2(\Omega, \mathcal{H})$. Конечные суммы вида

$$\sum_{s=1}^m \varphi_s(x) v^s, \quad \varphi_s \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \varphi_s \leq 1, \quad v^s \in \mathcal{V}, \quad s = 1, \dots, m, \quad (3.16)$$

образуют всюду плотное множество в $\mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{V})$.

Доказательство. Эти утверждения основаны на известных фактах теории интегрирования функций со значениями в банаховом пространстве (см., например, [8]). Выпуклость множества $\mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{V})$ очевидна. Это множество замкнуто, поскольку из сходимости по норме $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ следует сходимость почти всюду в Ω .

Докажем последнее утверждение. Так как область Ω липшицева, то достаточно показать, что любую функцию $f \in \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{V})$ с носителем $\text{supp } f \subset \Omega$ можно приблизить функциями вида (3.16). Пусть $\{B^s, s = 1, 2, \dots\}$ — система взаимно непересекающихся параллелепипедов $B^s = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^s \leq x_i < b_i^s, i = 1, \dots, n\}$, $\bigcup_{s=1}^\infty B^s = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\hat{f}(x) = \sum_s \chi_{B^s}(x) f^s, \quad f^s = \frac{1}{\text{meas } B^s} \int_{B^s} f(x) dx,$$

где $\chi_{B^s}(x)$ — характеристическая функция множества B^s . Каждое f^s принадлежит $\mathcal{V}$, так как f^s является средним значением интегрируемой функции со значениями в замкнутом выпуклом множестве (см. [8, гл. IV, § 4, следствие 4 из теоремы 39]). Пусть $\hat{h}(x)$ — любая другая ступенчатая функция, принимающая постоянные значения $h^s \in \mathcal{H}$ на B^s . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{B^s} \|f - h^s\|_{\mathcal{H}}^2 dx &= \int_{B^s} \|f - f^s\|_{\mathcal{H}}^2 dx + \int_{B^s} \|f^s - h^s\|_{\mathcal{H}}^2 dx + \\ &+ 2(f^s - h^s) \cdot \int_{B^s} (f - f^s) dx \geq \int_{B^s} \|f - f^s\|_{\mathcal{H}}^2 dx, \end{aligned}$$

поскольку операция интегрирования коммутирует с непрерывными линейными операторами ([8, гл. IV, § 4, теорема 45]) и $\int_{B^s} (f - f^s) dx = 0$. Следовательно, $\|f - \hat{f}\|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} \leq \|f - \hat{h}\|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}$

для любой ступенчатой функции $\hat{h}(x)$, которая постоянна на B^s . Отсюда следует, что f можно приблизить в $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ конечными суммами вида $\sum_s \chi_{B^s}(x) f^s$, $f^s \in \mathcal{V}$. Приближая (в $L^2(\mathbb{R}^n)$)

характеристические функции χ_{B^s} функциями $\varphi_s \in C_0^\infty(B^s)$, $0 \leq \varphi_s \leq 1$, получим искомое приближение для функции f . $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ОБ УСРЕДНЕНИИ

Факторпространство $H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\nabla_{\xi} \mathbf{w}\|_{0,\omega_{\square}}$ обозначается далее через $\mathbb{H}$. Вообще говоря, мы не будем отождествлять $\mathbb{H}$ с подпространством в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, состоящим из элементов $\mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ с нулевым средним $\langle \mathbf{w} \rangle_{\omega} = 0$ (как это часто делается). При рассмотрении градиентов, когда не может возникнуть недоразумений, одно и то же обозначение, например $\mathbf{w}(\xi)$, может использоваться для конкретного элемента из $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ и его класса эквивалентности $\mathbf{w}(\xi) + \text{const}$ в $\mathbb{H}$.

Лемма 4.1. Пусть $\mathbb{V}$ — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{H}$, $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$. Тогда для любого $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ задача

$$\mathbb{A}(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{V}} \left\langle (e_{\xi}(\mathbf{w}) + \mathbf{p}) : \mathcal{A}(\xi)(e_{\xi}(\mathbf{w}) + \mathbf{p}) \right\rangle_{\omega} \quad (4.1)$$

имеет единственное решение $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi) \in \mathbb{V}$. Элемент $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi)$, на котором достигается минимум, является непрерывной по Липшицу функцией $\mathbf{p}$ со значениями в $\mathbb{V}$, а $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ является строго выпуклой функцией $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$c_0 |\mathbf{p}|^2 \leq \mathbb{A}(\mathbf{p}) \leq c_1 |\mathbf{p}|^2 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{S}^n, \quad c_0, c_1 = \text{const} > 0. \quad (4.2)$$

Доказательство. Прежде всего напомним неравенство Корна для периодических вектор-функций (см. [5, гл. I, теорема 2.8])

$$\|\mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle_{\omega}\|_{1,\omega_{\square}} \leq C_1 \|e_{\xi}(\mathbf{w})\|_{0,\omega_{\square}} \quad \forall \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n. \quad (4.3)$$

В силу этого неравенства и (1.1), при каждом $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ минимизируемый функционал в (4.1) является коэрцитивным и строго выпуклым на $\mathbb{H}$. Поэтому задача имеет одно и только одно решение $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi) \in \mathbb{V}$ (см. [9, гл. II, § 1]).

Покажем, что найдется положительная постоянная C такая, что

$$|\mathbf{p}|^2 + \int_{\omega_{\square}} |e_{\xi}(\mathbf{w})|^2 d\xi \leq C \int_{\omega_{\square}} |\mathbf{p} + e_{\xi}(\mathbf{w})|^2 d\xi \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{S}^n, \quad \forall \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n. \quad (4.4)$$

Предположив противное, можно построить последовательности $\mathbf{p}^m \in \mathbb{S}^n$ и $\mathbf{w}^m \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ такие, что $\mathbf{p}^m \rightarrow \mathbf{p}^0 \in \mathbb{S}^n$ при $m \rightarrow \infty$ и

$$\int_{\omega_{\square}} |\mathbf{p}^m + e_{\xi}(\mathbf{w}^m)|^2 d\xi \rightarrow 0, \quad |\mathbf{p}^m|^2 + \int_{\omega_{\square}} |e_{\xi}(\mathbf{w}^m)|^2 d\xi = 1, \quad \langle \mathbf{w}^m \rangle_{\omega} = 0. \quad (4.5)$$

Таким образом, $\|\mathbf{p}^0 + e_{\xi}(\mathbf{w}^m)\|_{0,\omega_{\square}} \rightarrow 0$, и, значит, $\{\mathbf{w}^m\}$ является последовательностью Коши в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ в силу неравенства Корна (4.3). Следовательно, существует $s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{w}^m = \mathbf{w}^0 \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$. Учитывая соотношение $\mathbf{p}^0 = e_{\xi}(\mathbf{p}^0 \xi)$ для $\xi = {}^t \xi$, находим, что

$$0 = \int_{\omega_{\square}} |\mathbf{p}^0 + e_{\xi}(\mathbf{w}^0)|^2 d\xi = \int_{\omega_{\square}} |e_{\xi}(\mathbf{p}^0 \xi + \mathbf{w}^0)|^2 d\xi.$$

Это означает, что мы получили жесткое перемещение $\mathbf{p}^0 \xi + \mathbf{w}^0 = \mathbf{Q} \xi + \mathbf{b}$, где $\mathbf{Q}$ — кососимметричная $(n \times n)$ -матрица с постоянными элементами, а $\mathbf{b}$ — постоянный n -вектор. Поскольку $\mathbf{w}^0$ является 1-периодической и имеет нулевое среднее, то $\mathbf{w}^0 \equiv \mathbf{0}$, а также $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$. Но это противоречит второму соотношению в (4.5). Тем самым (4.4) доказано.

Теперь, учитывая (4.4) и (1.1), нетрудно вывести оценку (4.2).

Вектор $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi)$, на котором достигается минимум, удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int_{\omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{w}) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) d\xi \geq - \int_{\omega_{\square}} \mathbf{p} : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) d\xi \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Корна (4.3), получаем оценку

$$\|\nabla_{\xi} (\mathbf{w}(\mathbf{p}^1, \cdot) - \mathbf{w}(\mathbf{p}^2, \cdot))\|_{0,\omega_{\square}} \leq C |\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2|,$$

которая означает равномерную непрерывность по Липшицу $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi)$ как функции со значениями в $\mathbb{H}$.

Покажем, что функция $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ строго выпукла на $\mathbb{S}^n$. Пусть $\mathbf{w}^1 = \mathbf{w}(\mathbf{p}^1, \xi)$, $\mathbf{w}^2 = \mathbf{w}(\mathbf{p}^2, \xi)$, $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{p}^1 \neq \mathbf{p}^2$. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ квадратичная форма $a[\mathbf{p}, \xi] = \mathbf{p} : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{p}$ строго выпукла на $\mathbb{S}^n$ (см. (1.1)), и потому

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\lambda \mathbf{p}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^2) &\leq \left\langle a \left[\lambda (\mathbf{p}^1 + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}^1)) + (1 - \lambda) (\mathbf{p}^2 + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}^2)) \right], \xi \right\rangle_\omega < \\ &< \lambda \langle a[\mathbf{p}^1 + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}^1), \xi] \rangle_\omega + (1 - \lambda) \langle a[\mathbf{p}^2 + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}^2), \xi] \rangle_\omega = \lambda \mathbb{A}(\mathbf{p}^1) + (1 - \lambda) \mathbb{A}(\mathbf{p}^2) \quad \forall \lambda \in]0, 1[, \end{aligned}$$

причем строгое неравенство могло бы нарушиться только в случае, если $\mathbf{p}^1 + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}^1) \equiv \mathbf{p}^2 + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{w}^2)$ почти всюду в ω . Но последнее тождество невозможно в силу (4.4) при $\mathbf{p} = \mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2$. $\square$

Доказательство теоремы 2.5. Согласно определению 2.1, нужно доказать соотношения (2.8). Как упомянуто выше, имеем равномерную оценку норм (1.10). Поэтому последовательность продолжений $P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$ ограничена в $H^1(Q)^n$. В силу свойств операторов продолжения (2.7) можно построить подпоследовательность $P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$, слабо сходящуюся в $H^1(\Omega)^n$ к некоторому элементу $\mathbf{u}^0 \in H_0^1(\Omega)^n$ и сильно сходящуюся к $\mathbf{u}^0$ в $L^2(\Omega)^n$. Согласно свойству компактности (iii) (см. (3.3), (3.4)), можем считать, что для этой подпоследовательности $\mathbf{u}^\varepsilon$ существует элемент $\mathbf{u}^1 \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} \mathbf{u}^0(x), \quad \nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow[\Omega^\varepsilon]{2} \nabla_x \mathbf{u}^0(x) + \nabla_\xi \mathbf{u}^1(x, \xi), \quad \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow[S^\varepsilon]{2} \mathbf{u}^0(x). \quad (4.6)$$

Из леммы 3.3 при $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{M}(\xi)$ и $\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon$ вытекает, что $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0$.

Для пар $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\}$, $\mathbf{v}^0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{v}^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{H})$ введем матрицы

$$\mathbf{E} \{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} = \mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}^1) = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{v}^0 + {}^t \nabla_x \mathbf{v}^0) + \frac{1}{2} (\nabla_\xi \mathbf{v}^1 + {}^t \nabla_\xi \mathbf{v}^1)$$

и рассмотрим функционал

$$I^0 \{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} = \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{E} \{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{E} \{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} dx d\xi - 2|\omega_\square| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^0 dx. \quad (4.7)$$

Легко видеть, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{f} dx \rightarrow |\omega_\square| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^0 dx \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

в силу свойства среднего значения (3.8) и сильной сходимости $P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}^0$ в $L^2(\Omega)^n$. Теперь, пользуясь свойством полунепрерывности снизу (3.10) при $\mathbf{Q}(\xi) = \mathcal{A}(\xi)$, $\mathbf{V}^\varepsilon(x) = \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ и учитывая (4.6), получаем

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \geq I^0 \{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\} \geq |\omega_\square| \widehat{I}(\mathbf{u}^0), \quad (4.8)$$

где $\widehat{I}(\mathbf{u})$ — функционал (2.5). Последнее неравенство в (4.8) получено интегрированием по $x \in \Omega$ поточечного неравенства

$$\int_{\omega_\square} (\mathbf{e}(\mathbf{u}^0(x)) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1(x, \xi))) : \mathcal{A}(\xi) (\mathbf{e}(\mathbf{u}^0(x)) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1(x, \xi))) d\xi \geq |\omega_\square| \mathbb{A}(\mathbf{e}(\mathbf{u}^0(x))),$$

которое имеет место при почти всех $x \in \Omega$ в силу определения усредненного лагранжиана (2.6).

Напомним, что, по определению, множество $\gamma_0 \subset [0, 1]^n \subset [-1, 2]^n = Q$ имеет нулевую емкость в $\mathbb{R}^n$, если

$$\inf_{\varphi} \|\nabla \varphi\|_{0,Q} = 0, \quad \varphi \in C^\infty(Q), \quad \|\varphi\|_{0,Q} = 1, \\ \varphi \equiv 0 \text{ в окрестности } \gamma_0.$$

Поскольку множество $\gamma \cap [0, 1]^n$ имеет нулевую емкость, то нетрудно построить последовательность функций $\psi_\delta(\xi)$ таких, что

$$\begin{aligned} \psi_\delta \in C_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \psi_\delta \leq 1, \quad \psi_\delta(\xi) = 0, \text{ если } \text{dist}(\xi, \gamma) < \delta, \\ \psi_\delta \rightarrow 1 \quad \text{в} \quad H^1(Q) \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

и, значит,

$$\psi_\delta u \xrightarrow{H^1(\square)} u \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0 \quad \forall u \in H^1(\square) \cap L^\infty(\square). \quad (4.10)$$

Фиксируем произвольные функции $\varphi_s(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \varphi_s \leq 1$, произвольные ограниченные функции $\mathbf{w}^s(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, $s = 1, \dots, m < \infty$, а также произвольные малые постоянные $\delta > 0$, $\sigma > 0$. Так как множество $\mathcal{M}(\xi)$ выпукло и содержит $\mathbf{0}$, то из (2.14) вытекает наличие достаточно большого числа $N > 0$, для которого

$$\mu \varphi_s(x) \psi_\delta(\xi) (\sigma \boldsymbol{\eta}_\delta(\xi) + N^{-1} \mathbf{w}^s(\xi)) \in \mathcal{M}(\xi) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \partial\omega, \quad \forall \mu \in [0, 1[. \quad (4.11)$$

Поэтому для любого $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{V}^0$ и любого $\lambda \in]0, 1[$ имеем

$$\mathbf{v}(x, \xi) \equiv (1 - \lambda) \mathbf{v}^0(x) + \frac{\lambda}{m} \mu \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_\delta(\xi) (\sigma \boldsymbol{\eta}_\delta(\xi) + N^{-1} \mathbf{w}^s(\xi)) \in \mathcal{M}(\xi) \quad (4.12)$$

при почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \partial\omega$. Отсюда, полагая $\mu = mN\varepsilon/\lambda$ и $\mathbf{v}^\varepsilon(x) = \mathbf{v}(x, \varepsilon^{-1}x)$, получаем функцию

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) = (1 - \lambda) \mathbf{v}^0(x) + N\varepsilon \sigma \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_\delta(\varepsilon^{-1}x) \boldsymbol{\eta}_\delta(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_\delta(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{w}^s(\varepsilon^{-1}x) \quad (4.13)$$

такую, что $\mathbf{v}^\varepsilon(x)|_{S^\varepsilon} \in \mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x)$, $\mathbf{v}^\varepsilon|_{\Gamma^\varepsilon} = 0$, т.е. $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon$ является допустимым перемещением для задачи (1.3), (1.7). Далее, полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1(x, \xi) &= \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \mathbf{w}^s(\xi), \\ \mathbf{v}_\delta^1(x, \xi) &= \psi_\delta(\xi) \mathbf{v}^1(x, \xi) = \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_\delta(\xi) \mathbf{w}^s(\xi), \\ \Psi_\delta^0(x, \xi) &= N \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_\delta(\xi) \boldsymbol{\eta}_\delta(\xi), \end{aligned} \quad (4.14)$$

представим $\mathbf{v}^\varepsilon(x)$ в виде

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) = (1 - \lambda) \mathbf{v}^0(x) + \varepsilon \sigma \Psi_\delta^0(x, \varepsilon^{-1}x) + \varepsilon \mathbf{v}_\delta^1(x, \varepsilon^{-1}x).$$

Пользуясь свойством среднего значения (3.8), получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = I^0 \{ (1 - \lambda) \mathbf{v}^0, \sigma \Psi_\delta^0 + \mathbf{v}_\delta^1 \}. \quad (4.15)$$

Это соотношение, вместе с (4.8) и неравенством $I^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \geq I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$, приводит к неравенству

$$I^0 \{ (1 - \lambda) \mathbf{v}^0, \sigma \Psi_\delta^0 + \mathbf{v}_\delta^1 \} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \geq I^0 \{ \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \} \geq |\omega_\square| \widehat{I}(\mathbf{u}^0).$$

Отсюда, учитывая, что (см. (4.10))

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\sigma \rightarrow 0} I^0 \{ (1 - \lambda) \mathbf{v}^0, \sigma \Psi_\delta^0 + \mathbf{v}_\delta^1 \} = I^0 \{ \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1 \},$$

получаем неравенство

$$I^0 \{ \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1 \} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \geq I^0 \{ \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \} \geq |\omega_\square| \widehat{I}(\mathbf{u}^0) \quad (4.16)$$

для любой $\mathbf{v}^0(x) \in \mathcal{V}^0$ и любой $\mathbf{v}^1(x, \xi)$ вида (4.14) с ограниченными $\mathbf{w}^s \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$. Легко видеть, что (4.16) справедливо для любого элемента $\mathbf{v}^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{H})$, так как конечные суммы вида (4.14) с ограниченными $\mathbf{w}^s \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ плотны в $L^2(\Omega, \mathbb{H})$ (см. предложение 3.7).

Для любого $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$ элемент, на котором достигается минимум в задаче (2.6) при $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, определен с точностью постоянного слагаемого (вектора). Пусть $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi)$ — единственный элемент с нулевым средним значением по ω , на котором достигается этот минимум. Легко видеть, что $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi)$ является линейной функцией $\mathbf{p}$ со значениями в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$. Поэтому $\mathbf{v}^1(x, \xi) \equiv \mathbf{w}(\mathbf{e}(\mathbf{v}^0(x)), \xi) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\omega)^n)$. Взяв этот элемент $\mathbf{v}^1$ в (4.16), получим

$$|\omega| \hat{I}(\mathbf{v}^0) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \geq |\omega| \hat{I}(\mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{v}^0 \in \mathcal{V}^0. \quad (4.17)$$

Это означает, что $\mathbf{u}^0$ — решение усредненной задачи (2.3). Поскольку решение $\mathbf{u}^0$ задачи (2.3) единственно, то приведенные выше рассуждения можно применить к произвольной подпоследовательности $\mathbf{u}^\varepsilon$, что снова приводит к тому же решению $\mathbf{u}^0$. Полагая $\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0$ в (4.17), устанавливаем сходимость энергий (2.8). Теорема 2.5 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.9. Этот результат об усреднении доказывается по той же схеме, что и теорема 2.5. Поэтому будем использовать доказательство теоремы 2.5, указывая на основные отличия рассматриваемого случая. Как и выше, $P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}^0$ в $H^1(\Omega)^n$ и имеет место сходимость (4.6) по подпоследовательности $\mathbf{u}^\varepsilon$, а также $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0$.

Легко видеть, что первые n_0 компонент вектора $\mathbf{u}^\varepsilon$, обозначаемые через $\Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon$, удовлетворяют краевому условию $\Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon|_{S^\varepsilon} \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi)$ (см. (2.16)). Так как краевые условия на S^ε задают сильные ограничения по n_0 направлениям, то $\text{ess} \bigcap_{\xi \in \partial\omega} \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) = \{\mathbf{0}\}$ (см. определение 2.8), и по лемме 3.4 для $\mathbf{v}^\varepsilon = \Pi_0 P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$ имеем равномерную оценку

$$\|\Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq C_0 \varepsilon \|\nabla \Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq C_1 \varepsilon.$$

В силу свойства компактности (iv) (см. (3.6)), можем считать, что для этой подпоследовательности $\mathbf{u}^\varepsilon$ и этого $\mathbf{u}^0$ выполняются соотношения

$$\varepsilon^{-1} \Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow[S^\varepsilon]{} \Pi_0 \mathbf{u}^1(x, \xi), \quad \Pi_0 \mathbf{u}^1(x, \xi)|_{\xi \in \partial\omega} \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi).$$

Последнее краевое условие вытекает из леммы 3.3 для $\mathbf{v}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon$, $\mathcal{K}(\xi) = \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi)$, так как множества $\widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi)$ являются конусами и $\varepsilon^{-1} \Pi_0 \mathbf{u}^\varepsilon|_{S^\varepsilon} \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\varepsilon^{-1}x)$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \left\{ \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n : \Pi_0 \mathbf{w}(\xi)|_{\partial\omega} \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi) \right\}, \\ \mathbb{W} &= \left\{ \mathbf{W} \in \mathbb{H} : \exists \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \quad \nabla_\xi \mathbf{W} = \nabla_\xi \mathbf{w} \right\}. \end{aligned}$$

В силу последнего утверждения леммы 3.4, $\mathbb{W}$ является замкнутым выпуклым конусом в $\mathbb{H}$, и мы только что установили включение $\mathbf{u}^1(x, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$.

Ясно, что взяв $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ или $\mathbb{V} = \mathcal{W}$ в определении усредненного лагранжиана (2.6), получаем одну и ту же функцию $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ со свойствами, указанными в лемме 4.1. Как и в доказательстве теоремы 2.5, выводим неравенство (4.8).

Построим теперь функции $\mathbf{v}(x, \xi)$ вида (4.12), где $\mathbf{w}^s(\xi)$ — произвольные ограниченные функции из $\mathcal{W}$. В рассматриваемом случае включение (4.11) обеспечивается условием (2.18), а не (2.14). Так как $\Pi_0 \mathcal{V}^0 = \mathbf{0}$, то имеет место включение (4.12) для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \partial\omega$. Поэтому $\mathbf{v}^\varepsilon(x)$ является допустимым перемещением и (4.16) справедливо для любого $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{V}^0$ и любого $\mathbf{v}^1(x, \xi)$ вида (4.14) с ограниченными $\mathbf{w}^s \in \mathcal{W}$.

Покажем, что ограниченные вектор-функции из $\mathcal{W}$ плотны в $\mathcal{W}$, т.е. любой элемент $\mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, удовлетворяющий краевому условию $\Pi_0 \mathbf{w}(\xi)|_{\xi \in \partial\omega} \in \widehat{\mathcal{M}}_\infty(\xi)$, можно приблизить ограниченными функциями из $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, удовлетворяющими тому же краевому условию на $\partial\omega$. Рассмотрим следующую последовательность ограниченных аппроксимаций:

$$\mathbf{w}^{(N)} = \mathbf{F}_N(\mathbf{w}), \quad (4.18)$$

где

$$F_N(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{при } |\eta| \leq N, \\ N|\eta|^{-1}\eta & \text{при } |\eta| \geq N. \end{cases}$$

Так как $F_N(\eta)$ непрерывна по Липшицу с постоянной в неравенстве Липшица, не зависящей от N , то справедливы неравенства (по теореме 4.2 из [4])

$$\mathbf{w}^{(N)} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n, \quad \|\mathbf{w}^{(N)}\|_{1, \omega_{\square}} \leq C \|\mathbf{w}\|_{1, \omega_{\square}}$$

с постоянной C , не зависящей от N . Ясно, что $\|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(N)}\|_{1, \omega_{\square}} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, поскольку $\text{meas} \{\xi \in \omega_{\square} : |\mathbf{w}(\xi)| \geq N\} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Легко видеть, что $\mathbf{w}^{(N)}$ удовлетворяет требуемому краевому условию на $\partial\omega$.

Таким образом, неравенство (4.16) справедливо для любой $\mathbf{v}^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{W})$, поскольку конечные суммы вида (4.14) с ограниченными $\mathbf{w}^s \in \mathcal{W}$ плотны в $L^2(\Omega, \mathbb{W})$ (см. предложение 3.7).

Пусть $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ и $\mathbf{w}(\mathbf{p}, \xi)$ — решение задачи на минимум (2.6) при $\mathbb{V} = \mathbb{W}$. По лемме 4.1 это решение является непрерывной по Липшицу функцией от $\mathbf{p}$ со значениями в $\mathbb{W}$. Поэтому $\mathbf{v}^1(x, \xi) \equiv \mathbf{w}(\mathbf{e}(\mathbf{v}^0(x)), \xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{W})$. Взяв этот элемент $\mathbf{v}^1$ в (4.16), получим (4.17). Доказательство завершается, как в теореме 2.5. $\square$

Доказательство теоремы 2.11. Как и в доказательстве теоремы 2.5, находим подпоследовательность $P_{\varepsilon} \mathbf{u}^{\varepsilon}$, которая сходится к $\mathbf{u}^0$ слабо в $H^1(\Omega)^n$ и сильно в $L^2(\Omega)^n$ и для которой выполнено (4.6). Так как $\mathcal{M}^0 = \{\mathbf{0}\}$, то имеем $\mathcal{V}^0 = \{\mathbf{0}\}$ и, значит, $\mathbf{u}^0 \equiv \mathbf{0}$. Отсюда, учитывая (1.9) и неравенство Корна (1.8), выводим, что $\|\mathbf{u}^{\varepsilon}\|_{1, \Omega^{\varepsilon}} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай $\mathcal{M}_{\infty}^0 = \{\mathbf{0}\}$. Поскольку $\mathbf{u}^{\varepsilon}|_{S^{\varepsilon}} \in \mathcal{M}(\varepsilon^{-1}x) \subset \mathcal{M}_{\infty}(\varepsilon^{-1}x)$, а $\mathcal{M}_{\infty}(\xi)$ — замкнутые выпуклые конусы, то лемма 3.4, примененная к $\mathbf{v}^{\varepsilon} = P_{\varepsilon} \mathbf{u}^{\varepsilon}$ и $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{M}_{\infty}(\xi)$, дает оценку $\|\mathbf{u}^{\varepsilon}\|_{0, \Omega^{\varepsilon}}^2 \leq C \varepsilon^2 \|\nabla \mathbf{u}^{\varepsilon}\|_{0, \Omega^{\varepsilon}}^2$. Это неравенство вместе с (1.8), (1.9) приводит к оценкам (2.22). Теорема 2.11 доказана. $\square$

Наконец, опишем асимптотическое поведение величин $\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^{\varepsilon}$, $\varepsilon^{-1} \nabla \mathbf{u}^{\varepsilon}$ в случае краевых условий на S^{ε} , задающих сильные ограничения по всем направлениям (см. определение 2.12).

Теорема 4.2. Для решений $\mathbf{u}^{\varepsilon}$ задачи (1.3), (1.5) с краевыми условиями на S^{ε} , задающими сильные ограничения по всем направлениям, имеем

$$\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^{\varepsilon} \xrightarrow[\Omega^{\varepsilon}]{} \mathbf{u}(x, \xi), \quad \varepsilon^{-2} \mathbf{u}^{\varepsilon} \xrightarrow[S^{\varepsilon}]{} \mathbf{u}(x, \xi) \quad (\text{по подпоследовательности}), \quad (4.19)$$

$$\varepsilon^{-1} \nabla \mathbf{u}^{\varepsilon} \xrightarrow[\Omega^{\varepsilon}]{} \nabla_{\xi} \mathbf{u}(x, \xi), \quad \mathbf{u}(x, \xi) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\omega)^n), \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^{\varepsilon}} \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) dx \rightarrow \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{u}(x, \xi)) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{u}(x, \xi)) dx d\xi. \quad (4.21)$$

При почти всех $x \in \Omega$ предел $\mathbf{u}(x, \xi)$ совпадает с некоторым решением задачи (2.24) при $\mathbf{b} = \mathbf{f}(x)$. Если $\tilde{\mathbf{u}}(x, \xi)$ — предел другой подпоследовательности, то $\tilde{\mathbf{u}}(x, \xi) = \mathbf{u}(x, \xi) + \mathbf{g}(x)$, $\mathbf{g}(x) \in L^2(\Omega)^n$ и $\mathbf{g}(x) \cdot \mathbf{f}(x) = 0$ почти всюду в Ω .

Доказательство. Из оценок (2.22) и свойства компактности (iv) (см. (3.5), (3.6)) устанавливаем (4.19) и (4.20) для подпоследовательности и некоторого элемента $\mathbf{u}(x, \xi) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\omega)^n)$.

Функции $\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^{\varepsilon}$ удовлетворяют краевому условию $\varepsilon^{-2} \mathbf{u}^{\varepsilon}(x)|_{x \in S^{\varepsilon}} \in \mathcal{M}_{\infty}(\varepsilon^{-1}x)$, так как $\mathcal{M}(\xi) \subset \mathcal{M}_{\infty}(\xi)$ (см. (2.21)). Поскольку $\mathcal{M}_{\infty}^0 = \{\mathbf{0}\}$, то лемма 3.3, примененная к $\mathbf{v}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2} \mathbf{u}^{\varepsilon}$, $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{M}_{\infty}(\xi)$, показывает, что $\mathbf{u}(x, \xi) \in \mathcal{U}$ при почти всех x , где $\mathcal{U}$ — множество допустимых

перемещений задачи на ячейке (2.24). Таким образом, $\mathbf{u}(x, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})$. Покажем, что $\mathbf{u}(x, \xi)$ является решением следующей задачи на минимум:

$$\mathbf{u}(x, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U}), \quad \widehat{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})} \widehat{J}(\mathbf{v}) \quad (4.22)$$

для функционала

$$\widehat{J}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{v}) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{v}) dx d\xi - 2 \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{v}(x, \xi) dx d\xi.$$

Пользуясь (4.19), (4.20) и свойством полунепрерывности снизу (3.10), устанавливаем неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} I^{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \geq \widehat{J}(\mathbf{u}). \quad (4.23)$$

Фиксируем $\varphi_s(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $0 \leq \varphi_s \leq 1$, $\mathbf{w}^s(\xi) \in \mathcal{U}$, $s = 1, \dots, m < \infty$, а также малые постоянные $\delta > 0$, $0 < \sigma < 1$. Предположим сначала, что $\mathbf{w}^s(\xi)$ ограничены, и пусть $\psi_{\delta}(\xi)$ — функция из (4.10). Поскольку каждое множество $\mathcal{M}(\xi)$ выпукло и содержит $\mathbf{0}$, из (2.23) следует наличие достаточно большой постоянной $N > 0$ такой, что

$$\mu \varphi_s(x) \psi_{\delta}(\xi) (\sigma \boldsymbol{\eta}_{\delta}(\xi) + N^{-1} \mathbf{w}^s(\xi)) \in \mathcal{M}(\xi) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \partial\omega, \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (4.24)$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}^1(x, \xi) \equiv \frac{\mu}{m} \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_{\delta}(\xi) (\sigma \boldsymbol{\eta}_{\delta}(\xi) + N^{-1} \mathbf{w}^s(\xi)) \in \mathcal{M}(\xi) \quad (4.25)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \partial\omega$. Отсюда, взяв $\mu = mN\varepsilon^2$ и $\mathbf{v}^{\varepsilon}(x) = \mathbf{v}^1(x, \varepsilon^{-1}x)$, получим функцию

$$\mathbf{v}^{\varepsilon}(x) = N\varepsilon^2 \sigma \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_{\delta}(\varepsilon^{-1}x) \boldsymbol{\eta}_{\delta}(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_{\delta}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{w}^s(\varepsilon^{-1}x). \quad (4.26)$$

Легко видеть, что $\mathbf{v}^{\varepsilon} \in \mathcal{V}^{\varepsilon}$ при достаточно малых ε . Положим

$$\mathbf{v}(x, \xi) = \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \mathbf{w}^s(\xi), \quad (4.27)$$

$$\mathbf{v}_{\delta}(x, \xi) = \psi_{\delta}(\xi) \mathbf{v}(x, \xi) = \sum_{s=1}^m \varphi_s(x) \psi_{\delta}(\xi) \mathbf{w}^s(\xi), \quad \Psi_{\delta}(x, \xi) = N \sum_{x=1}^m \varphi_s(x) \psi_{\delta}(\xi) \boldsymbol{\eta}_{\delta}(\xi)$$

и представим $\mathbf{v}^{\varepsilon}(x)$ в виде

$$\mathbf{v}^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 \sigma \Psi_{\delta}(x, \varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_{\delta}(x, \varepsilon^{-1}x).$$

Пользуясь свойством среднего значения (3.8), получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} I^{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\varepsilon}) = \widehat{J}(\sigma \Psi_{\delta} + \mathbf{v}_{\delta}). \quad (4.28)$$

Это соотношение вместе с (4.23) и неравенством $I^{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\varepsilon}) \geq I^{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ позволяет заключить, что

$$\widehat{J}(\sigma \Psi_{\delta} + \mathbf{v}_{\delta}) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} I^{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \geq \widehat{J}(\mathbf{u}).$$

Отсюда, учитывая, что (см. (4.10))

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \widehat{J}(\sigma \Psi_{\delta} + \mathbf{v}_{\delta}) = \widehat{J}(\mathbf{v}),$$

получаем неравенство

$$\widehat{J}(\mathbf{v}) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} I^{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \geq \widehat{J}(\mathbf{u}) \quad (4.29)$$

для любой $\mathbf{v}$ вида (4.27) с ограниченными $\mathbf{w}^s \in \mathcal{U}$. Но ограниченные функции $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$ плотны в $\mathcal{U}$ (так как ограниченные аппроксимации (4.18) сохраняют рассматриваемые ограничения на $\partial\omega$, как и в доказательстве теоремы 2.9), и, значит, (4.29) выполняется для любого элемента $\mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})$, в силу предложения 3.7. Следовательно, $\mathbf{u}(x, \xi)$ является решением задачи (4.22), и имеет место сходимость энергий (4.21).

Рассмотрим теперь более подробно задачу на ячейке (2.24) и соответствующее ей вариационное неравенство

$$\int_{\omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{W}) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{w} - \mathbf{W}) d\xi \geq \int_{\omega_{\square}} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{W}) d\xi \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}. \quad (4.30)$$

Пользуясь неравенством Корна (4.3) и неравенством типа Фридрихса (3.14) при $G = \omega_{\square}$, $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{M}_{\infty}(\xi)$, устанавливаем неравенство

$$\|\mathbf{w}\|_{0,\omega_{\square}}^2 + \|\nabla_{\xi} \mathbf{w}\|_{0,\omega_{\square}}^2 \leq C \|e_{\xi}(\mathbf{w})\|_{0,\omega_{\square}}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}. \quad (4.31)$$

Поэтому для любого $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ функционал $J_b(\mathbf{w})$ в (2.24) коэрцитивен и задача на минимум имеет по крайней мере одно решение $\mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi) \in \mathcal{U}$. Из (4.30) и (4.31) заключаем, что

$$\|\mathbf{W}(\mathbf{b}, \cdot)\|_{1,\omega_{\square}} \leq C|\mathbf{b}|, \quad \|\nabla_{\xi} (\mathbf{W}(\mathbf{b}^1, \cdot) - \mathbf{W}(\mathbf{b}^2, \cdot))\|_{0,\omega_{\square}}^2 \leq C_1 |\mathbf{b}^1 - \mathbf{b}^2| (|\mathbf{b}^1| + |\mathbf{b}^2|). \quad (4.32)$$

Отсюда следует, что если $\mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi)$ и $\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{b}, \xi)$ — два решения задачи на минимум, соответствующие одному и тому же $\mathbf{b}$, то $\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{b}, \xi) = \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi) + \boldsymbol{\eta}$ для некоторого постоянного вектора $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, причем $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$ (поскольку функционал J_b достигает свой минимум на элементах $\mathbf{W}$ и $\widetilde{\mathbf{W}}$). Заметим, что, вообще говоря, возможен случай $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$ (см. замечание 3.6), однако $\mathbf{b} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi) = \mathbf{b} \cdot \widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{b}, \xi)$ является однозначной функцией $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ со значениями в $H_{\text{per}}^1(\omega)$. Второе неравенство в (4.32) показывает, что $\mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi)$ можно рассматривать как непрерывную функцию $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ со значениями в замкнутом выпуклом множестве (см. последнее утверждение леммы 3.4)

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathbb{H} : \nabla_{\xi} \mathbf{U} = \nabla_{\xi} \mathbf{w} \text{ для некоторого } \mathbf{w} \in \mathcal{U} \right\}. \quad (4.33)$$

Можно также утверждать, что

$$\text{если } \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi) + \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathcal{U}, \text{ то } \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 \leq 0, \quad (4.34)$$

так как в противном случае имели бы $J_b(\mathbf{W} + \boldsymbol{\eta}^0) < J_b(\mathbf{W})$.

Покажем, что $\mathbf{b} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi)$ является непрерывной функцией $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ со значениями в $H_{\text{per}}^1(\omega)$. Действительно, пусть $\mathbf{b}^m \rightarrow \mathbf{b}^0$ при $m \rightarrow \infty$. В силу (4.32), имеем

$$\|\nabla_{\xi} \mathbf{W}(\mathbf{b}^m, \xi) - \nabla_{\xi} \mathbf{W}(\mathbf{b}^0, \xi)\|_{0,\omega_{\square}} \rightarrow 0,$$

а средние значения $\langle \mathbf{W}(\mathbf{b}^m, \cdot) \rangle_{\omega}$ ограничены по m . Поэтому, в силу неравенства Пуанкаре, найдется подпоследовательность $m' \rightarrow \infty$ такая, что $\mathbf{W}(\mathbf{b}^{m'}, \xi) \rightarrow \mathbf{W}^0(\xi)$ сильно в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$. Так как множество $\mathcal{U}$ замкнуто в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, то $\mathbf{W}^0(\xi) \in \mathcal{U}$ и очевидно, что $\mathbf{W}^0(\xi)$ является решением задачи на ячейке (4.30) при $\mathbf{b} = \mathbf{b}^0$. Следовательно, $\mathbf{W}^0(\xi) = \mathbf{W}(\mathbf{b}^0, \xi) + \boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta} = \text{const}$, $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b}^0 = 0$. Итак, $\mathbf{b}^{m'} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{b}^{m'}, \xi) \xrightarrow{H_{\text{per}}^1(\omega)} \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{W}^0(\xi) = \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{W}(\mathbf{b}^0, \xi)$. Это означает, что $\mathbf{b} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi)$ непрерывна по $\mathbf{b}$.

Можно также утверждать, что отображение

$$\mathbf{f}(x) \mapsto \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \xi) \quad (4.35)$$

непрерывно из $L^2(\Omega)^n$ в $L^1(\Omega, L_{\text{per}}^1(\omega))$.

Этот результат следует из предложения 1.1, [9, гл. IV, п. 1.2, теорема Красносельского] при $E = \mathbb{R}^n$, $F = L_{\text{per}}^1(\omega)$, $g : \mathbf{b} \mapsto g(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{b}, \xi) \in L_{\text{per}}^1(\omega)$, если заметить, что $g(\mathbf{b})$ непрерывна по $\mathbf{b}$ и $\|\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \cdot)\|_{1,\omega_{\square}} \leq C|\mathbf{f}(x)|^2$ в силу (4.32).

Обратимся теперь к задаче на минимум (4.22) и рассмотрим соответствующее ей вариационное неравенство: $\forall \mathbf{v}(x, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})$

$$\int_{\Omega \times \omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{u}) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dx d\xi \geq \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dx d\xi. \quad (4.36)$$

Полагая $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})$ в (4.31) и интегрируя получившееся неравенство по $x \in \Omega$, устанавливаем, что

$$\|\mathbf{w}\|_{0, \Omega \times \omega_{\square}}^2 + \|\nabla_{\xi} \mathbf{w}\|_{0, \Omega \times \omega_{\square}}^2 \leq C \|e_{\xi}(\mathbf{w})\|_{0, \Omega \times \omega_{\square}}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U}). \quad (4.37)$$

Это неравенство обеспечивает коэрцитивность функционала $\hat{J}(\mathbf{v})$ на $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})$. Поэтому задача на минимум (4.22) имеет решение, а в силу (4.36), (4.37), имеют место оценки (ср. с (4.32))

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\omega)^n)} &\leq C \|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}, \\ \|\nabla_{\xi} (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')\|_{0, \Omega \times \omega_{\square}}^2 &\leq C_1 \|\mathbf{f}' - \mathbf{f}''\|_{0, \Omega} \|\mathbf{f}' + \mathbf{f}''\|_{0, \Omega}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$ — решения этой задачи на минимум при $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$, $\mathbf{f}''$ соответственно.

Рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\mathbf{f}^m(x) \rightarrow \mathbf{f}(x)$ в $L^2(\Omega)^n$ при $m \rightarrow \infty$, и пусть $B_{ms} \subset \Omega$ — измеримые множества, на которых $\mathbf{f}^m$ принимают постоянные значения $\mathbf{f}_s^m \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{u}^m(x, \xi)$ ступенчатые функции x со значениями в $\mathcal{U}$ такие, что при любом $x \in \Omega$ функция $\mathbf{u}^m(x, \xi)$ является решением задачи на ячейке (2.24) при $\mathbf{b} = \mathbf{f}^m(x)$. Таким образом, $\mathbf{u}^m(x, \xi) = \mathbf{W}(\mathbf{f}_s^m, \xi) = \mathbf{W}(\mathbf{f}^m(x), \xi)$ при $x \in B_{sm}$. Взяв $\mathbf{v} = \mathbf{u}^m$ в (4.36), получим неравенство

$$\int_{\Omega \times \omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{u}) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}) dx d\xi \geq \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{u}^m - \mathbf{u}) dx d\xi.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая (4.32), (4.35), получаем

$$\int_{\Omega \times \omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{u}) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{W}^0 - \mathbf{u}) dx d\xi \geq \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{W}^0 - \mathbf{u}) dx d\xi, \quad (4.39)$$

где $\mathbf{W}^0 = \mathbf{W}^0(x, \xi) = \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \xi)$.

С другой стороны, зафиксируем x и возьмем в (4.30) $\mathbf{b} = \mathbf{f}(x)$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}^0 = \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \xi)$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{U})$, а затем проинтегрируем получившееся неравенство по $x \in \Omega$. В результате имеем

$$\int_{\Omega \times \omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{W}^0) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{u} - \mathbf{W}^0) dx d\xi \geq \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{W}^0) dx d\xi. \quad (4.40)$$

Складывая неравенства (4.39) и (4.40), устанавливаем, что $\nabla_{\xi} \mathbf{u}(x, \xi) = \nabla_{\xi} \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \xi)$ при почти всех $x \in \Omega$. Следовательно, $\mathbf{u}(x, \xi) = \mathbf{W}(\mathbf{f}(x), \xi) + \mathbf{C}(x)$ и $\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{C}(x) \leq 0$ в силу (4.34). Функция $\mathbf{C}(x)$ может не быть измеримой, но функция $\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{C}(x)$ всегда измерима. Сравнивая (4.39) с (4.40), мы видим, что правые части этих неравенств равны нулю, и, значит, $\int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{C}(x) dx = 0$, поэтому $\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{C}(x) = 0$ почти всюду в Ω . Теперь легко видеть, что при почти всех $x \in \Omega$ функция $\mathbf{u}(x, \xi)$ является решением задачи (2.24) при $\mathbf{b} = \mathbf{f}(x)$. $\square$

Автор выражает признательность профессорам В. В. Жикову, В. Кьядо Пьят и М. Кодегоне за полезные дискуссии по вопросам, рассмотренным в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
2. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — 7. — С. 31–72.
3. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов и интегральных функционалов. — М.: Физматгиз, 1993.
4. Иосифьян Г. А. О некоторых односторонних краевых задачах для упругих тел с изрезанной границей// Труды Семинара им. И.Г. Петровского. — 1999. — 21.
5. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — Изд-во МГУ, 1990.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.

7. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1972.
8. Шварц Л. Анализ. — М.: Мир, 1972.
9. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
10. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — 23. — С. 1482–1518.
11. Allaire G., Damlamian A., Hornung U. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. In: *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media*, A. Bourgeat et al. eds., World Scientific Pub., Singapore, 1995.
- 12.Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to homogenization// SIAM J. Math. Anal. — 1980. — 20. — С. 608–623.
13. Neuss-Radu M. Some extensions of two-scale convergence// C. R. Acad. Sci., Ser. I. — 322, № 9. — 1996. — С. 899–904.
14. Yosifian G. A. On some homogenization problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions// Appl. Anal. — 1997. — 65. — С. 257–288.
15. Yosifian G. A. Some homogenization problems for the system of elasticity with nonlinear boundary conditions in perforated domains// Appl. Anal. — 1999. — 71. — С. 379–411.
16. Yosifian G. A. Homogenization of some contact problems for the system of elasticity in perforated domains// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 2001. — 105. — С. 37–64.

Г. А. Иосифьян

Институт проблем механики РАН

E-mail: yosifian@mtu-net.ru

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

© 2003 г. **С. НИКЕЗ, О. М. ПЕНКИН**

Аннотация. Статья посвящена изложению новых результатов о разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго и четвертого порядка на стратифицированных множествах в пространствах типа Соболева и классической разрешимости одного специального класса задач второго порядка.

Даются условия геометрического и механического типа на устройство стратифицированного множества, названные условиями прочности, обеспечивающие выполнение неравенства типа Пуанкаре и, как следствие, разрешимость задачи Дирихле в упомянутых пространствах.

Классической разрешимость однородной задачи Дирихле для уравнений второго порядка специального вида получена для случая стратифицированных множеств модифицированным методом Пуанкаре—Перрона.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	71
2. Предварительные сведения	73
3. Неравенство Пуанкаре	75
4. Неравенство Пуанкаре для операторов четвертого порядка	77
5. Неравенство Корна	80
6. Теорема о среднем и p -гармонические функции	83
7. Основные свойства p -субгармонических функций	85
Список литературы	93

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения на мультиструктурах — одна из наиболее популярных областей общей теории дифференциальных уравнений с широкой областью применений в механике сплошных сред, аэродинамике, биологии и др. (см., например, [20]). В числе важных вопросов — разрешимость, регулярность решений, спектральная теория, проблемы управляемости, численные аппроксимации решений. Различным аспектам этой теории посвящены работы [1, 7, 8, 16, 19–21], в которых можно найти дальнейшие ссылки.

Как обычно, первый шаг — это изучение разрешимости краевых задач, которая зависит от гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений и от регулярности областей, в которых они рассматриваются. Для мультиструктур, помимо этих обстоятельств, нужно учитывать еще и геометрическое устройство области. Основная задача статьи — изучить этот вопрос для различных операторов, определенных на классе мультиструктур, называемых стратифицированными множествами. Для рассматриваемых нами задач фундаментальную роль играют неравенства типа Пуанкаре. Ранее аналогичный результат был установлен в работе [12] при некоторых чисто геометрических ограничениях на рассматриваемые множества, названные нами условиями прочности. Было показано, что эти условия влекут выполнение неравенства типа Пуанкаре и, как следствие, разрешимость задачи Дирихле в пространствах типа Соболева.

Работа написана при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 01-01-00417).

Для задач в перфорированных областях похожее условие было найдено В. В. Жиковым [3] в чисто аналитической форме.

Таким образом, данная статья может рассматриваться как продолжение работы [12]. Но результаты, приведенные здесь, являются более общими, поскольку получены при менее ограничительных условиях прочности множеств; новый вариант этих условий является комбинацией геометрических и аналитических ограничений, отражающих механическую специфику рассматриваемых задач. Кроме того, помимо уравнений второго порядка, мы приводим результаты для уравнений четвертого порядка, возникающих при моделировании механических систем, составленных из стержней и пластин, и для системы теории упругости.

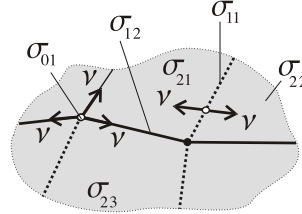


Рис. 1. Пример стратифицированного множества.

Прежде чем перейти к формальному изложению, приведем иллюстративный пример. Рассмотрим механическую систему Ω , расположенную в плоскости Π и состоящую из струн и мембран, как показано на рисунке 1. Сплошными линиями выделены участки, где располагаются струны, а пунктирными — где мембраны примыкают друг к другу непосредственно, а не разделены струнами. В обоих случаях считаем, что имеется одномерный элемент (страт) σ_{1i} , лежащий между двумя двумерными, но в случае, когда σ_{1i} соответствует струне, мы называем этот элемент упругим. В противном случае, т.е. когда σ_{1i} — место непосредственного примыкания мембран, мы называем его мягким стратом. На приведенном выше рисунке σ_{12} является упругим стратом, а σ_{11} — мягким. В обоих случаях удобно представить, что струна есть, но во втором случае она не натянута. Все мембраны, конечно, предполагаются натянутыми, т.е. все двумерные страты предполагаются упругими.

Пусть f — малая нагрузка, действующая на систему и ортогональная к плоскости Π . Естественно считать, что f имеет физическую размерность N/M^k в пределах страта σ_{ki} . При $k = 0$ имеем нагрузку, сосредоточенную в точке. Обозначим через $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ функцию, описывающую распределение первоначального напряжения в системе. Функция p обращается в нуль в мягких стратах и предполагается равной положительной константе p_{ki} в упругих стратах σ_{ki} . Малые перемещения системы $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, вызванные силой f , являются решениями следующего набора дифференциальных соотношений (запись $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ означает, что σ_{1i} примыкает к σ_{2j}):

$$-p\Delta u(X) = f(X)$$

на двумерных стратах и

$$-p\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}(X) - \sum_{\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}} \left(p \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)_{|\overline{2j}}(X) = f(X),$$

когда X лежит в одномерном страте. Для X , принадлежащего σ_{ki} , через $\vec{\tau}(X)$ обозначается какое-либо касательное направление к σ_{ki} . Кроме того, через $\vec{\nu}$ обозначаем единичный вектор, направленный внутрь $\sigma_{k+1j} \succ \sigma_{ki}$ и ортогональный к σ_{ki} . Запись

$$w_{|\overline{kj}}(X)$$

означает продолжение по непрерывности в $\overline{\sigma_{kj}}$ сужения $w_{|\sigma_{kj}}$ на σ_{kj} . Когда X принадлежит некоторому нульмерному страту, подобному σ_{01} на приведенном выше рисунке, имеем

$$- \sum_{\sigma_{1j} \succ \sigma_{0i}} \left(p \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)_{|\overline{1j}}(X) = f(X).$$

Можно показать (см. [25]), что левые части последних трех уравнений могут быть переписаны в дивергентном виде

$$-\nabla(p\nabla u) = f,$$

где оператор дивергенции ∇ может быть определен классическим образом как плотность потока векторного поля по отношению к специальной «стратифицированной» мере на Ω (более детальное изложение будет дано в следующем параграфе).

Добавляя к приведенной системе уравнений граничные условия, попытаемся найти достаточные условия, гарантирующие разрешимость получающейся краевой задачи. Для случая, когда все страты являются упругими, ответ был найден в [12]. В следующих параграфах мы получим аналогичный ответ для случая, когда некоторые страты являются мягкими.

План этой работы таков. После напоминания основных понятий в § 2 докажем в § 3 «стандартное» неравенство Пуанкаре на стратифицированном множестве в предположении его прочности. § 4 посвящен неравенству Пуанкаре для операторов четвертого порядка. Результат применяется к доказательству разрешимости краевой задачи для таких операторов. В § 5 мы докажем неравенство Корна на стратифицированном множестве и дадим его приложение к системе теории упругости. Заключительные параграфы посвящены развитию метода Пуанкаре — Перрона для специальных операторов второго порядка на стратифицированном множестве.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь мы напомним некоторые основные определения, касающиеся стратифицированных множеств. Более подробное изложение можно найти в [12]. Поскольку наши построения довольно сложны, то проиллюстрируем их некоторыми простыми примерами (см. также простой пример из предыдущего параграфа).

Связное множество Ω в $\mathbb{R}^n$ называется *стратифицированным*, если существует конечная последовательность замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$

$$\Omega^{k_0} \subset \Omega^{k_1} \subset \dots \subset \Omega^{k_m} = \Omega \quad \text{при } k_0 < k_1 < \dots < k_m, \quad (1)$$

со следующими свойствами:

- i) $\Omega^{k_i} \setminus \Omega^{k_{i-1}}$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ размерности k_i . Его связные компоненты называются *k_i -мерными стратами* и обозначаются через $\sigma_{k_i j}$. Второй индекс служит для нумерации стратов. Предположим, что имеется лишь конечное число стратов в Ω и что все они имеют компактные замыкания в $\mathbb{R}^n$. Важно отметить, что граница страта является кусочно гладкой, поскольку сама состоит из стратов. Однако, она может иметь особенности типа клюва с нулевым углом или разрезов. Чтобы избежать некоторых осложнений, предположим границы стратов липшицевыми.
- ii) Граница $\partial\sigma_{k_i} = \overline{\sigma_{k_i}} \setminus \sigma_{k_i}$ каждого страта σ_{k_i} с $k \geq 1$ является объединением стратов $\sigma_{m j}$ с $m < k$. Мы пишем $\sigma_{m j} \prec \sigma_{k_i}$, если $\sigma_{m j} \subset \partial\sigma_{k_i}$.
- iii) Если $\sigma_{k-1, j} \prec \sigma_{k_i}$ и $Y \in \sigma_{k_i}$ стремится к $X \in \sigma_{k-1, j}$ вдоль некоторой непрерывной кривой, то касательное пространство $T_Y \sigma_{k_i}$ имеет предельное положение $\lim_{Y \rightarrow X} T_Y \sigma_{k_i}$, содержащее касательное пространство $T_X \sigma_{k-1, j}$.

Последовательность (1) называется стратификацией множества Ω . Одно и то же множество может быть стратифицировано многими способами. Более точно стратифицированное множество является тройкой (Ω, S, φ) , в которой Ω — исходное множество, S — стратификация типа (1) и φ описывает способ «сборки» Ω из элементов σ_{k_i} множества S . Тем не менее будем называть стратифицированным само Ω (при фиксированных S и φ).

Приведем некоторые примеры стратифицированных множеств:

- Одномерная топологическая сеть (см. [5, 7, 16, 17, 19, 21]), в которой нульмерными стратами являются вершины, а одномерными — ребра.
- Двумерная полигональная топологическая сеть в смысле [21]. В этом случае одномерные страты — ребра, а двумерные — грани этой сети.

- Возьмем единичный куб в $\mathbb{R}^3$ со следующей стратификацией: вершины куба — нульмерные страты, его ребра — одномерные страты и его грани — двумерные страты. Наконец, внутренность куба — единственный трехмерный страт.
- В качестве одномерных стратов возьмем два concentрических кольца на плоскости, а область между ними в качестве двумерного.
- На плоскости возьмем в качестве нульмерных стратов точки: $\sigma_{04} = (0, 0)$, $\sigma_{02} = (1, 0)$, $\sigma_{01} = (2, 0)$ и $\sigma_{03} = (0, 1)$, в качестве одномерных стратов — интервалы: $(\sigma_{04}, \sigma_{02})$, $(\sigma_{02}, \sigma_{01})$, $(\sigma_{02}, \sigma_{03})$ и $(\sigma_{04}, \sigma_{03})$ и, наконец, объявим треугольник с вершинами σ_{02} , σ_{03} , σ_{04} двумерным стратом.
- В качестве n -мерного страта ($n \geq 1$) возьмем ограниченное открытое множество O в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, которую объявим $(n - 1)$ -мерным стратом.

Множество Ω наследует топологию из $\mathbb{R}^n$. В терминах этой топологии фиксируем в Ω некоторое связное и открытое подмножество Ω_0 , состоящее из некоторых стратов множества Ω и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Дополнение $\Omega \setminus \Omega_0 = \partial\Omega_0$ является границей Ω_0 в Ω . Множество Ω_0 играет роль классической области, в которой будем рассматривать дифференциальные уравнения, в то время как $\partial\Omega_0$ является аналогом классической границы. В этой статье всегда предполагается, что $\Omega \neq \Omega_0$, т.е. $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$.

Множество стратов в Ω_0 разобьем на две группы. Страты первой группы назовем *упругими*, в то время как страты второй группы назовем *мягкими*. Это разбиение мотивировано примером из предыдущего параграфа, а также задачами, рассмотренными в [1, 9, 11, 18, 21, 22, 24]. Все нульмерные страты будем считать мягкими по определению (поскольку точка сама по себе не имеет механических свойств типа упругости). Таким образом, в отличие от [12], множество Ω_0 имеет дополнительную (механическую) структуру в форме упомянутого выше разбиения стратов на упругие и мягкие. В дальнейшем $E(\Omega_0)$ будет обозначать множество упругих стратов, а $S(\Omega_0)$ — множество мягких стратов.

Теперь определим на Ω «стратифицированную» меру μ с помощью следующего равенства

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ki} \subset \Omega} \mu_k(\omega \cap \sigma_{ki}),$$

в котором μ_k — обычная k -мерная мера Лебега на σ_{ki} . Подмножества ω множества Ω , для которых приведенная формула имеет смысл, будут называться *μ -измеримыми*. Очевидно, что μ -измеримость ω эквивалентна измеримости по Лебегу всех «следов» $\omega \cap \sigma_{ki}$.

Теперь можно определить интеграл Лебега по этой мере. Нетрудно показать, что для интегрируемой функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ее интеграл сводится к сумме интегралов Лебега по множествам σ_{ki} . Иными словами

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{ki}} \int_{\sigma_{ki}} f d\mu.$$

В правой части пишем $d\mu$ вместо $d\mu_k$, поскольку $d\mu(\omega \cap \sigma_{ki}) = d\mu_k(\omega \cap \sigma_{ki})$ в соответствии с нашим определением.

Теперь определим некоторые функциональные пространства на стратифицированном множестве, которые будут полезны в дальнейшем.

- $C_{\sigma}(\Omega_0)$ определяется как множество функций с непрерывными сужениями u_{ki} (подобное сужение обычно обозначается через $u|_{\sigma_{ki}}$ или $u|_{ki}$).
- $C(\Omega_0)$ — множество непрерывных на Ω_0 функций.
- $C_{\sigma}^1(\Omega_0)$ — множество таких функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что в каждом σ_{kj} сужение $u|_{kj}$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по отношению к локальным координатам на σ_{kj} , и эти производные допускают продолжение по непрерывности в те страты $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj}$, которые не лежат в $\partial\Omega_0$. Заметим, что функция из $C_{\sigma}^1(\Omega_0)$ может быть разрывной (скачки возможны при переходе со страта на страт).
- $C^1(\Omega_0) = C_{\sigma}^1(\Omega_0) \cap C(\Omega)$.
- $C_0^1(\Omega_0)$ — множество функций из $C^1(\Omega_0)$, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega_0$.

- $L^2_\mu(\Omega_0)$ — пополнение $C(\Omega_0)$ по норме в $C(\Omega_0)$, порожденной скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega_0} uv \, d\mu.$$

- $\overset{\circ}{H}^1_\mu(\Omega_0)$ — пополнение $C^1_0(\Omega_0)$ по норме $\|\cdot\|_{\langle \rangle}$ в $C^1_0(\Omega_0)$, порожденной скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} uv \, d\mu + \int_{E(\Omega_0)} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu.$$

Пусть $\vec{F}$ — касательное векторное поле на Ω_0 в том смысле, что для каждого $X \in \sigma_{k-1i} \subset \Omega_0$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному пространству $T_X(\sigma_{ki})$. Пусть $X \in \sigma_{k-1i}$ и ω — небольшая часть Ω_0 , содержащая X . Можно представить ω как пересечение Ω_0 с некоторой гладкой областью G в $\mathbb{R}^n$. Если вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ сквозь поверхность множества ω и разделить его на $\mu(\omega)$, то получим приближенное значение дивергенции $\nabla \vec{F}(X)$. Точная величина дивергенции дается следующим выражением

$$\nabla \vec{F}(X) = \nabla_{k-1} \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \vec{\nu} \cdot \vec{F}_{|kj}(X),$$

где ∇_{k-1} — обычная $(k-1)$ -мерная дивергенция на σ_{k-1i} .

Если $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$, то градиент ∇f понимается как набор градиентов на отдельных стратах, т.е. на страте σ_{ki} он является обычным градиентом сужения $f|_{\sigma_{ki}}$ функции f на σ_{ki} . Заметим, что мы пользуемся традицией физиков обозначать дивергенцию и градиент одним символом ∇ .

Взяв какую-нибудь функцию $p \in C_\sigma(\Omega_0)$, можем определить эллиптический оператор

$$\Delta_p u = \nabla(p \nabla u)$$

на Ω_0 . Во всем дальнейшем предполагается, что $p \equiv 0$ на мягких стратах и p положительна на упругих стратах.

В [12] мы рассмотрели задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta_p u(x) &= f(x), & x \in \Omega_0, \\ u &= 0 & \text{на } \partial\Omega_0, \end{aligned}$$

когда множество мягких стратов предполагалось пустым. Разрешимость этой задачи была основана на так называемом неравенстве Пуанкаре на Ω_0 . Тем самым, наша ближайшая цель состоит в распространении этого неравенства на случай, когда мягкие страты имеются.

3. НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ

Начнем с важного определения.

Определение 1. Тройка $(E(\Omega_0), S(\Omega_0), \partial\Omega_0)$ называется *прочной*, если для любого страта σ_{ki} в Ω_0 существует страт σ_{mj} из $\partial\Omega_0$ и прочная цепочка, соединяющая σ_{ki} с σ_{mj} в том смысле, что существует связная последовательность стратов $\sigma_{k_1 i_1}, \sigma_{k_2 i_2}, \dots, \sigma_{k_p i_p}$ со следующими свойствами:

- $\sigma_{k_1 i_1} = \sigma_{ki}$, $\sigma_{k_p i_p} = \sigma_{mj}$ и $\sigma_{k_q i_q} \subset \Omega_0$, когда $q \neq p$,
- $|k_{q+1} - k_q| = 1$ для всех $q < p$ и либо $\sigma_{k_q i_q} \prec \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$, либо $\sigma_{k_q i_q} \succ \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$,
- при $1 \leq q \leq p-1$ и при условии, что $\sigma_{k_q i_q}$ — мягкий страт, оба страта $\sigma_{k_{q-1} i_{q-1}}$ и $\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$ являются упругими и имеют размерность $k_q + 1$ (за исключением случая $q = 1$; здесь нужно, чтобы $\sigma_{k_2 i_2}$ был упругим и имел размерность $k_1 + 1$).

Заметим, что в условиях этого определения $\sigma_{k_{p-1} i_{p-1}}$ всегда упругий, поскольку $k_{p-1} > k_p$ (в противном случае он был бы граничным). Отсюда следует, что каждый страт, не принадлежащий $\partial\Omega_0$, но пересекающийся с $\partial\Omega_0$ своей границей, является упругим. Заметим также, что страты старшей размерности также обязаны быть упругими.

Замечание 1. В [12] мы взяли подмножество Ω_1 множества Ω с теми же свойствами, что и Ω_0 , и приняли, что $\partial\Omega_1 = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (Γ_D и Γ_N являются объединениями стратов из Ω). Прочность в [12] определялась как прочность пары (Ω_1, Γ_D) . Это определение является частным случаем определения, приведенного здесь, поскольку можно показать, что если (Ω_1, Γ_D) — прочная пара (в смысле [12]), то такой же будет тройка $(E(\Omega_0), S(\Omega_0), \partial\Omega_0)$, если взять $E(\Omega_0) = \Omega_1$, $S(\Omega_0) = \Gamma_N$ и $\partial\Omega_0 = \Gamma_D$. Приложения, рассмотренные в [12], также являются частными случаями приложений, приведенных ниже.

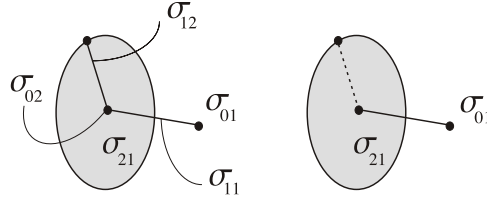


Рис. 2. Прочная и не прочная тройки.

Рисунок 2 дает пример прочной тройки и тройки, не являющейся прочной. Справа на этом рисунке имеем непрочную пару (Ω_0, Γ_D) , если взять $\Omega_0 = \Omega \setminus \sigma_{01}$ и $\Gamma_D = \sigma_{01}$, поскольку не существует прочной цепочки, соединяющей σ_{21} с σ_{01} . В левой части рисунка видим прочную пару (Ω_0, Γ_D) с Ω_0 и Γ_D , определенными, как и выше (требуемая цепочка, соединяющая σ_{21} с σ_{01} , такова: $\sigma_{21}, \sigma_{12}, \sigma_{02}, \sigma_{11}, \sigma_{01}$).

Если Ω_0 — одномерная топологическая сеть (стратификация описана выше), в которой все одномерные страты упруги, граница $\partial\Omega_0$ не пуста и состоит из некоторых нульмерных стратов, а остальные нульмерные страты считаются мягкими, то тройка $(E(\Omega_0), S(\Omega_0), \partial\Omega_0)$ является прочной.

Пусть Ω — двумерная полигональная топологическая сеть (со стратификацией, описанной выше). Возьмем в качестве упругих стратов все двумерные и часть одномерных, а каждый из оставшихся либо объявим мягким, либо включим его в границу. Тем самым получим прочную тройку.

Теперь можно сформулировать основной результат этого параграфа.

Теорема 1. Пусть $(E(\Omega_0), S(\Omega_0), \partial\Omega_0)$ — прочная стратифицированная тройка. Тогда существует такая положительная константа C , что

$$\int_{\Omega_0} u^2 d\mu \leq C \int_{E(\Omega_0)} |\nabla u|^2 d\mu \quad (2)$$

для всех $u \in \mathring{H}_\mu^1(\Omega_0)$.

Доказательство основано на следующих двух леммах, доказанных в [12].

Лемма 1. Пусть $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj}$. Тогда существует такая положительная константа C , что для всех $u \in H^1(\sigma_{kj})$ выполняется неравенство

$$\int_{\sigma_{k-1i}} u^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu \right). \quad (3)$$

Лемма 2. В условиях предыдущей леммы выполняется также неравенство вида

$$\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{k-1i}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu \right). \quad (4)$$

Теперь все готово для доказательства неравенства (2).

Доказательство теоремы 1. Пусть σ_{kj} — произвольный страт из Ω_0 . Мы можем соединить его с некоторым стратом из $\partial\Omega_0$ прочной цепочкой стратов $\sigma_{k_1 i_1}, \dots, \sigma_{k_p i_p}$, как указано в определении 1. При $1 \leq q < p$ рассмотрим некоторый страт $\sigma_{k_q i_q}$ этой цепочки. Если $\sigma_{k_q i_q} \in S(\Omega_0)$, то $\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}} \in E(\Omega_0)$ и $k_{q+1} = k_q + 1$ (в соответствии с определением прочности), и можно применить (3) к паре $\sigma_{k_q i_q}, \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$. В результате получим

$$\int_{\sigma_{k_q i_q}} u^2 d\mu \leq C_q \left(\int_{\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}} |\nabla u|^2 d\mu \right) \quad (5)$$

при некотором $C_q > 0$. В случае, когда $\sigma_{k_q i_q}$ принадлежит $E(\Omega_0)$, а $\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$ лежит в $S(\Omega_0)$ (или $\partial\Omega_0$), имеем $k_{q+1} = k_q - 1$ и можем применить (4), чтобы получить

$$\int_{\sigma_{k_q i_q}} u^2 d\mu \leq C_q \left(\int_{\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{k_q i_q}} |\nabla u|^2 d\mu \right). \quad (6)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $\sigma_{k_q i_q}$ и $\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$ лежат в $E(\Omega_0)$. В этом случае могут представиться обе возможности: $k_{q+1} = k_q + 1$ или $k_{q+1} = k_q - 1$. Используя (3) или (4), получаем либо (5), либо (6).

Важно заметить, что правые части неравенств (5) и (6) содержат интегралы от $|\nabla u|^2$ только по упругим стратам, иными словами, неравенства (5) и (6) приводят в конечном итоге к

$$\int_{\sigma_{k_q i_q}} u^2 d\mu \leq C_q \left(\int_{\sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}} u^2 d\mu + \sum_{q'=q, q+1: \sigma_{k_{q'} i_{q'}} \subset E(\Omega_0)} \int_{\sigma_{k_{q'} i_{q'}}} |\nabla u|^2 d\mu \right). \quad (7)$$

По индукции получим

$$\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu \leq C_{kj} \left(\int_{\sigma_{k_p i_p}} u^2 d\mu + \sum_{1 \leq q' \leq p-1: \sigma_{k_{q'} i_{q'}} \subset E(\Omega_0)} \int_{\sigma_{k_{q'} i_{q'}}} |\nabla u|^2 d\mu \right), \quad (8)$$

где $C_{kj} = 2 \max_{1 \leq i \leq p} \{C_1 \cdots C_i\}$. Приняв во внимание то, что u обращается в нуль на $\partial\Omega_0$, получим

$$\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu \leq C_{kj} \sum_{1 \leq q' \leq p-1: \sigma_{k_{q'} i_{q'}} \subset E(\Omega_0)} \int_{\sigma_{k_{q'} i_{q'}}} |\nabla u|^2 d\mu \leq C_{kj} \int_{E(\Omega_0)} |\nabla u|^2 d\mu.$$

Суммируя подобные неравенства по всем стратам, получим (2) при $C = \sum C_{kj}$. $\square$

4. НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В этом и следующих параграфах предположим, что страты (исключая граничные) являются плоскими в том смысле, что каждый σ_{ki} лежит в какой-нибудь k -мерной гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, мы можем фиксировать глобальные декартовы координаты в пределах каждого страта. При этом предположении докажем наш следующий вариант неравенства Пуанкаре, полезный при доказательстве разрешимости краевых задач с уравнениями четвертого порядка (см. далее).

Как и прежде, введем пространство $H_\mu^2(\Omega_0)$, замыкая $C^2(\Omega_0)$ относительно нормы $\|\cdot\|_2$, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_2 = \int_{\Omega_0} (u^2 + |\nabla u|^2) d\mu + \int_{E(\Omega_0)} \|H(u)\|^2 d\mu,$$

где $H(u)$ — матрица Гессе функции u , определенная на каждом страте σ_{ki} относительно упомянутых выше декартовых координат $(y_1, \dots, y_k)$:

$$H(u_{ki}) = \left(\frac{\partial^2 u_{ki}}{\partial y_l \partial y_m} \right)_{l,m=1,\dots,k}.$$

Пространство $C^2(\Omega_0)$ определяется аналогично $C^1(\Omega_0)$.

Теорема 2. Пусть тройка $(E(\Omega_0), S(\Omega_0), \partial\Omega_0)$ является прочной и каждый страт — плоский в указанном выше смысле. Тогда существует такая положительная константа C , что

$$\int_{\Omega_0} (u^2 + |\nabla u|^2) d\mu \leq C \int_{E(\Omega_0)} \|H(u)\|^2 d\mu \quad (9)$$

для всех $u \in H_\mu^2(\Omega_0) \cap \overset{\circ}{H}_\mu^1(\Omega_0)$.

Доказательство этого неравенства основывается на леммах 4 и 5 и на так называемых интерполяционных неравенствах (см., например, теорему 1.4.3.3 в [14]).

Лемма 3. Существует такая константа C , что для всех $\varepsilon > 0$ и всех $u \in H^2(\sigma_{ki})$ выполняется неравенство

$$\int_{\sigma_{ki}} |\nabla u|^2 d\mu \leq \varepsilon \int_{\sigma_{ki}} u^2 d\mu + \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_{ki}} \|H(u)\|^2 d\mu. \quad (10)$$

Лемма 4. Пусть $\sigma_{k-1,i} \prec \sigma_{kj}$. Тогда существует такая константа C , что для всех $u \in H^2(\sigma_{kj})$ имеем

$$\int_{\sigma_{k-1,i}} (u^2 + |\nabla u|^2) d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu \right). \quad (11)$$

Доказательство. Применяя лемму 1 к $\frac{\partial u}{\partial y_l}$ с $l = 1, \dots, k$ и суммируя по l , имеем

$$\int_{\sigma_{k-1,i}} |\nabla u|^2 d\mu \leq \sum_{l=1}^k \int_{\sigma_{k-1,i}} \left| \frac{\partial u}{\partial y_l} \right|^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu \right).$$

Благодаря неравенству (10), получаем

$$\int_{\sigma_{k-1,i}} |\nabla u|^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu \right). \quad (12)$$

Неравенства (3) и (10) непосредственно приводят к

$$\int_{\sigma_{k-1,i}} u^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu \right). \quad (13)$$

Остается просуммировать неравенства (12) и (13). $\square$

Лемма 5. В условиях предыдущей леммы имеет место неравенство

$$\int_{\sigma_{kj}} (u^2 + |\nabla u|^2) d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{k-1,i}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu \right). \quad (14)$$

Доказательство. В силу неравенства (10), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu \leq \varepsilon \int_{\sigma_{kj}} u^2 d\mu + \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu.$$

Тогда в силу леммы 2, получаем

$$\int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu \leq C\varepsilon \int_{\sigma_{k-1i}} u^2 d\mu + C\varepsilon \int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu + \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu.$$

Выбрав $\varepsilon > 0$ таким, что $C\varepsilon < 1/2$, приходим к

$$\int_{\sigma_{kj}} |\nabla u|^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{k-1i}} u^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|H(u)\|^2 d\mu \right).$$

Это неравенство и (4) непосредственно приводят к (14). $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1 с заменой леммы 1 (соответственно, леммы 2) леммой 4 (соответственно, леммой 5), легко приводят к требуемому утверждению. $\square$

Коротко остановимся на приложении приведенного неравенства Пуанкаре к разрешимости некоторых краевых задач с уравнением четвертого порядка. Эти задачи существенно расширяют класс задач, рассмотренных в [1, 11, 21, 22]. Для каждого упругого страта σ_{ki} введем модуль Юнга $E_{ki} > 0$ и коэффициент Пуассона $\nu_{ki} \in (0, 1)$ материала, из которого изготовлен страт σ_{ki} . Положим далее $p_{ki} = \frac{E_{ki}}{1 - \nu_{ki}^2}$ на каждом упругом страте σ_{ki} и $p_{ki} = 0$ на каждом мягком страте σ_{ki} . В этих обозначениях введем в рассмотрение билинейную форму a на любом замкнутом подпространстве V пространства $H_\mu^2(\Omega_0) \cap \dot{H}_\mu^1(\Omega_0)$ посредством равенства

$$a(u, v) = \sum_{\sigma_{ki} \subset E(\Omega_0)} p_{ki} a_{ki}(u_{ki}, v_{ki}),$$

в котором

$$a_{ki}(u, v) = \int_{\sigma_{ki}} \left\{ \Delta u \Delta v - (1 - \nu_{ki}) \sum_{l \neq m} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_m^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_m} \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_m} \right] \right\} dy.$$

Основываясь на теореме 2, покажем, что эта билинейная форма коэрцитивна на V , а именно, имеем (ср. с леммой 2.5 из [21] или леммой 2.1 из [22])

Лемма 6. *Существует такая положительная константа α , что для любого $u \in V$ выполняется неравенство*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_2^2. \quad (15)$$

Доказательство. Простые вычисления показывают, что

$$a_{ki}(u, u) = \int_{\sigma_{ki}} \left\{ \sum_{l=1}^k \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} \right|^2 + \nu_{ki} \sum_{l \neq m} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} + (1 - \nu_{ki}) \sum_{l \neq m} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_m} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_m} \right\} dy.$$

Из неравенства типа Юнга получаем неравенство

$$\sum_{l \neq m} a_l a_m \geq - \sum_{l=1}^k |a_l|^2,$$

верное для любых вещественных чисел a_l . Отсюда

$$a_{ki}(u, u) \geq (1 - \nu_{ki}) \int_{\sigma_{ki}} \left\{ \sum_{l=1}^k \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} \right|^2 + \sum_{l \neq m} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_m} \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_m} \right\} dy \geq (1 - \nu_{ki}) \int_{\sigma_{ki}} \|H(u)\|^2 dy.$$

Требуемое утверждение следует теперь из неравенства Пуанкаре (9). $\square$

Теорема Лакса — Мильграма позволяет теперь сделать заключение о существовании и единственности решения $u \in V$ задачи

$$a(u, v) = \int_{\Omega_0} f v d\mu \quad \forall v \in V \quad (16)$$

для любой $f \in L^2_\mu(\Omega_0)$.

Дадим интерпретацию задачи (16) в терминах уравнений с частными производными в специальном случае $V = H^2_\mu(\Omega_0) \cap \mathring{H}^1_\mu(\Omega_0)$. В этом случае введем для каждого страта σ_{ki} граничные операторы

$$M_{ki}u := p_{ki} \left(\nu_{ki} \Delta u + (1 - \nu_{ki}) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \right), \quad (17)$$

$$N_{ki}u := p_{ki} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1 - \nu_{ki}) \Delta_T \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \quad (18)$$

на границе страта. Применяя формулы Грина, видим, что для достаточно регулярных u и v

$$p_{ki} a_{ki}(u, v) = p_{ki} \int_{\sigma_{ki}} \Delta^2 uv dy - \int_{\partial \sigma_{ki}} \left\{ M_{ki}u \frac{\partial v}{\partial \nu} - N_{ki}uv \right\} d\sigma + p_{ki}(1 - \nu_{ki}) \int_{\partial(\partial \sigma_{ki})} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \sigma_{ki}} \right) v d\sigma.$$

Используя это тождество в (16), видим, что решение $u \in H^2_\mu(\Omega_0) \cap \mathring{H}^1_\mu(\Omega_0)$ задачи (16) является слабым решением задачи

$$p_{ki} \Delta^2 u_{ki} + \sum_{\sigma_{ki} \prec \sigma_{k+1,j}} N_{k+1,j} u_{k+1,j} + \sum_{\sigma_{ki} \prec \sigma_{k+1,j} \prec \sigma_{k+2,l}} p_{k+2,l} (1 - \nu_{k+2,l}) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\sigma_{k+1,j}} \right) \Big|_{\sigma_{ki}} = f_{ki} \quad \text{в } \sigma_{ki},$$

$$M_{ki}u_{ki} = 0 \quad \text{на } \partial \sigma_{ki},$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_0.$$

Заметим, что эта задача расширяет класс граничных задач, изученных в [1, 11] для одномерных топологических сетей и в [21, 22] — для двумерных.

5. НЕРАВЕНСТВО КОРНА

Так называемое неравенство Корна является одним из основных компонентов для изучения коэрцитивности задач, связанных с системой теории упругости (см. [6, 10]). Сейчас мы покажем, что подобное неравенство выполняется также и на стратифицированном множестве. В конце параграфа приводится приложение этого неравенства к системе теории упругости.

Сначала напомним неравенство Корна для отдельного страта σ_{ki} (доказательство приводимого ниже неравенства для области с липшицевой границей можно найти, например, в [13]), утверждающего существование такой положительной константы C , что

$$\int_{\sigma_{ki}} |\nabla u|^2 dy \leq C \left(\int_{\sigma_{ki}} \|\varepsilon(u)\|^2 dy + \int_{\sigma_{ki}} |u|^2 dy \right) \quad \forall u \in H^1(\sigma_{ki})^k, \quad (19)$$

где, как обычно, $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{lm}(u))_{l,m=1}^k$ — тензор деформаций $\varepsilon_{lm}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_m} + \frac{\partial u_m}{\partial y_l} \right)$, и для краткости положено $|\nabla u|^2 = \sum_{l,m=1}^k \left| \frac{\partial u_l}{\partial y_m} \right|^2$.

Это неравенство и лемма 1 непосредственно приводят к следующему утверждению.

Лемма 7. Пусть $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj}$. Тогда существует такая константа C , что для всех $u \in H^1(\sigma_{kj})^k$

$$\int_{\sigma_{k-1i}} |u|^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{kj}} |u|^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|\varepsilon(u)\|^2 d\mu \right). \quad (20)$$

Для получения аналога леммы 2 требуется более кропотливый анализ, приводящий к следующему утверждению, по-видимому являющемуся новым.

Лемма 8. В условиях предыдущей леммы имеем

$$\int_{\sigma_{kj}} |u|^2 d\mu \leq C \left(\int_{\sigma_{k-1i}} |u_t|^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|\varepsilon(u)\|^2 d\mu \right), \quad (21)$$

где u_t — касательная составляющая функции u на σ_{k-1i} , т.е.

$$u_t = u - (u \cdot \nu_{kj}) \nu_{kj} \quad \text{на } \sigma_{k-1i}.$$

Доказательство. Предположим, что оценка (21) не выполняется. Тогда существует такая последовательность (u_n) , что

$$\int_{\sigma_{kj}} |u_n|^2 d\mu = 1, \quad (22)$$

$$\int_{\sigma_{k-1i}} |u_{t,n}|^2 d\mu + \int_{\sigma_{kj}} \|\varepsilon(u_n)\|^2 d\mu = 1/n. \quad (23)$$

В силу неравенства Корна (19), последовательность (u_n) ограничена в $H^1(\sigma_{kj})^k$ и, в силу теоремы о компактности вложения $H^1(\sigma_{kj})$ в $L^2(\sigma_{kj})$ (Реллих—Кондрашов), существует подпоследовательность, для простоты обозначаемая по-прежнему (u_n) , сходящаяся в $L^2(\sigma_{kj})^k$. В силу (23) и (19), последовательность сходится в $H^1(\sigma_{kj})^k$. Обозначим ее предел через u . В силу (22) и (23), имеем

$$\int_{\sigma_{kj}} |u|^2 d\mu = 1, \quad (24)$$

$$u_t = 0 \quad \text{на } \sigma_{k-1i}, \quad (25)$$

$$\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \sigma_{kj}. \quad (26)$$

Из этого свойства вытекает, что u описывает движение твердого тела, т.е.

$$u(y) = Ay + b \quad \forall y \in \sigma_{kj}$$

при некотором $b \in \mathbb{R}^k$ и антисимметрической матрице A . Благодаря граничному условию (25) заключаем, что $b = 0$ и $A = 0$. Таким образом $u = 0$, что противоречит (24). $\square$

Теперь определим нужное нам пространство вектор-функций на Ω_0 . Сначала определим $\mathbf{C}(\Omega_0)$ как множество таких функций, что их сужения u_{ki} на σ_{ki} принадлежат $C(\overline{\sigma_{ki}}, \mathbb{R}^k)$, и таких, что для любых стратов σ_{ki} и $\sigma_{ki'}$ с общей границей $\sigma_{k-1,j}$ выполняются условия «непрерывности»:

$$u_{ki} = u_{ki'} \quad \text{на } \sigma_{k-1,j},$$

$$u_{k-1,j} = u_{ki} - (u_{ki} \cdot \nu_{ki}) \nu_{ki} \quad \text{на } \sigma_{k-1,j}.$$

Заметим, что первое условие влечет

$$u_{ki} - (u_{ki} \cdot \nu_{ki}) \nu_{ki} = u_{ki'} - (u_{ki'} \cdot \nu_{ki'}) \nu_{ki'} \quad \text{на } \sigma_{k-1,j}.$$

Теперь можно определить $\mathbf{C}^1(\Omega_0)$ как подпространство $\mathbf{C}(\Omega_0)$ такое, что сужения u_{ki} на σ_{ki} принадлежат $C^1(\overline{\sigma_{ki}}, \mathbb{R}^k)$. Далее, $\mathbf{C}_0^1(\Omega_0)$ — подпространство $\mathbf{C}^1(\Omega_0)$ функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega_0$. Наконец, через $\mathring{\mathbf{H}}_\mu^1(\Omega_0)$ обозначим замыкание $\mathbf{C}_0^1(\Omega_0)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega_0} uv \, d\mu + \sum_{\sigma_{ki} \subset E(\Omega_0)} \int_{\sigma_{ki}} \sum_{l,m=1}^k \frac{\partial u_l}{\partial y_m} \frac{\partial v_l}{\partial y_m} dy.$$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1 с заменой леммы 1 (соответственно, леммы 2) леммой 7 (соответственно, леммой 8), приходим к следующему утверждению, которое дает аналог неравенства Корна на стратифицированном множестве.

Теорема 3. Пусть тройка $(E(\Omega_0), S(\Omega_0), \partial\Omega_0)$ является прочной, а страты — плоскими. Тогда существует такая константа C , что

$$\int_{\Omega_0} |u|^2 \, d\mu \leq C \int_{E(\Omega_0)} \|\varepsilon(u)\|^2 \, d\mu \quad (27)$$

для всех $u \in \mathring{\mathbf{H}}_\mu^1(\Omega_0)$.

Закончим данный параграф приложением к системе теории упругости. Наши рассуждения дают некоторое расширение класса задач о трансмиссии для операторов теории упругости, рассмотренных в [23, 24]. Для каждого упругого страта σ_{ki} предполагается выполненным закон Гука, а именно, тензор напряжений $\sigma^{(ki)}(u_{ki}) = (\sigma_{lm}(u_{ki}))_{l,m=1,\dots,k}$ связан с тензором деформаций соотношением

$$\sigma_{lm}^{(ki)}(u_{ki}) = \sum_{l',m'=1}^k c_{lml'm'}^{(ki)} \varepsilon_{l'm'}(u_{ki}),$$

где модули упругости $c_{lml'm'}^{(ki)}$ — вещественные константы, удовлетворяющие стандартным условиям симметрии $c_{lml'm'}^{(ki)} = c_{l'm'lm}^{(ki)} = c_{mll'm'}^{(ki)} = c_{lmm'l'}^{(ki)}$ и условию положительности: существует такая константа $\alpha > 0$, что

$$\sum_{l,m,l',m'=1,\dots,k} c_{lml'm'}^{(ki)} \xi_{lm} \xi_{l'm'} \geq \alpha \sum_{l,m=1,\dots,k} |\xi_{lm}|^2 \quad \forall \xi_{lm} \in \mathbb{R}.$$

Введем билинейную форму a_k на $H^1(\sigma_{ki})^k$ формулой

$$a_{ki}(u, v) = \int_{\sigma_{ki}} \sum_{l,m=1,\dots,k} \sigma_{lm}^{(ki)}(u) \varepsilon_{lm}(v) \, dy.$$

Заметим, что система Ламе является частным случаем приведенной системы при специальном выборе коэффициентов $c_{lml'm'}^{(ki)}$. В этом случае имеем

$$a_k(u, v) = \int_{\sigma_{ki}} \left\{ \lambda_{ki} \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu_{ki} \sum_{l,m=1}^k \varepsilon_{lm}(u) \varepsilon_{lm}(v) \right\} dy,$$

где $\lambda_{ki} > 0$ и $\mu_{ki} > 0$ — коэффициенты Ламе страта σ_{ki} .

Наконец, определим билинейную форму a на пространстве $\mathring{\mathbf{H}}_\mu^1(\Omega_0)$ формулой

$$a(u, v) = \sum_{\sigma_{ki} \subset E(\Omega_0)} a_{ki}(u_{ki}, v_{ki}).$$

Условие положительности $c_{lm'l'm'}^{(ki)}$ и неравенство Корна (27) влекут коэрцитивность формы a . Следовательно, по теореме Лакса—Мильграма существует единственное решение $u \in \mathring{\mathbf{H}}_\mu^1(\Omega_0)$ задачи

$$a(u, v) = \sum_{ki} \int_{\sigma_{ki}} f_{ki} \cdot v_{ki} dy \quad \forall v \in \mathring{\mathbf{H}}_\mu^1(\Omega_0) \quad (28)$$

для любой $f_{ki} \in L^2(\sigma_{ki})^k$.

Применяя формулу Грина, получаем

$$a_k(u, v) = - \int_{\sigma_{ki}} \sum_{l=1}^k \frac{\partial}{\partial y_l} \sigma_{lm}^{(ki)}(u) v_m dy - \int_{\partial \sigma_{ki}} (\sigma^{(ki)}(u) \cdot \nu) \cdot v d\sigma.$$

Следовательно, решение $u \in \mathring{\mathbf{H}}_\mu^1(\Omega_0)$ задачи (28) является слабым решением задачи

$$\begin{aligned} - \sum_{l=1}^k \frac{\partial}{\partial y_l} \sigma_{lm}^{(ki)}(u_{ki}) - \sum_{\sigma_{ki} \prec \sigma_{k+1,j}} (\sigma^{(k+1,j)}(u_{k+1,j}) \cdot \nu)_t &= f_{ki} \quad \text{в } \sigma_{ki}, \\ (\sigma^{(ki)}(u_{k+1,j}) \cdot \nu) \cdot \nu &= 0 \quad \text{на } \partial \sigma_{ki} \subset \Omega_0, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial \Omega_0 \end{aligned}$$

в предположении, что $\sigma^{(ki)}(u_{ki}) = 0$ на мягких стратах σ_{ki} .

6. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ И p -ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Начиная с этого параграфа, приступим к доказательству классической разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений на стратифицированном множестве.

Здесь мы снова ограничимся случаем, когда все страты являются плоскими, включая и граничные страты (что позволит избежать в этой статье обсуждения условий регулярности границы). Кроме того, предположим, что p — так называемая стратифицированная константа. Это означает, что p равна константе p_{kj} на каждой страте σ_{kj} . Более того, предположим, что p положительна внутри стратов старшей размерности $d = d(\Omega)$ и обращается в нуль во всех остальных. При этих условиях оператор Δ_p обладает свойствами, близкими к свойствам классического лапласиана. В этом параграфе остановимся на аналоге теоремы о среднем.

Нам потребуется следующее утверждение, которое является точным аналогом классической формулы Грина (доказательство имеется в [4]).

Теорема 4. Пусть $u, v \in C^2(\Omega_0) \cap C(\Omega)$ дифференцируемы вплоть до границы $\partial \Omega_0$ (как обычно, в пределах каждого страта). Тогда

$$\int_{\Omega_0} (u \Delta_p v - v \Delta_p u) d\mu = - \int_{\partial \Omega_0} (u(p \nabla v)_\nu - v(p \nabla u)_\nu) d\mu. \quad (29)$$

Выражение $(p \nabla u)_\nu$ в точке $X \in \sigma_{k-1,i} \subset \partial \Omega_0$ определяется как сумма

$$(p \nabla u)_\nu = \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \vec{\nu} \cdot p \nabla u \Big|_{\overline{kj}}(X),$$

в которой суммирование распространяется только на те страты σ_{kj} , которые не лежат в $\partial \Omega_0$. Такая сумма оказывается аналогом нормальной производной, умноженной на p .

Пусть u — решение уравнения $\Delta_p u = 0$. Тогда из формулы (29) получаем (положив $v \equiv 1$) полезное соотношение

$$\int_{\partial \Omega_0} (p \nabla u)_\nu d\mu = 0. \quad (30)$$

Эта формула также имеет очевидный классический аналог. Решения уравнения $\Delta_p u = 0$ назовем *p-гармоническими функциями*.

Пусть $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и $r_0(X)$ — расстояние от X до множества всех σ_{d-1i} таких, что $X \notin \bar{\sigma}_{d-1i}$. Пусть $B_r(X)$ — обычный шар в $\mathbb{R}^n$. При $r < r_0(X)$ назовем множество

$$\mathfrak{B}_r(X) = B_r(X) \cap \Omega_0$$

стратифицированным шаром.

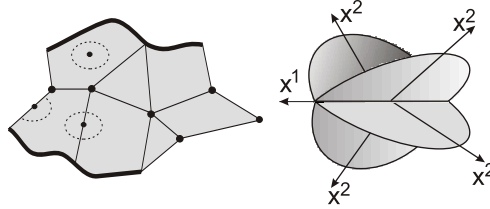


Рис. 3. Стратифицированные шары.

Некоторые примеры таких шаров показаны на приведенном рисунке. Слева изображены примеры шаров для плоского стратифицированного множества. Справа показан пример неплоского шара $\mathfrak{B}_r(X)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u)$ весовое среднее

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u) = \frac{\int_{\mathfrak{B}_r(X)} p u d\mu}{\int_{\mathfrak{B}_r(X)} p d\mu}$$

функции u по шару $\mathfrak{B}_r(X)$, а через $\mathfrak{M}_{\partial\mathfrak{B}_r(X)}(u)$ — аналогичное среднее по сфере $\partial\mathfrak{B}_r(X)$. Следующее утверждение дает точный аналог теоремы о среднем для классических гармонических функций.

Теорема 5. Пусть $u \in C^2(\Omega_0)$ — p -гармоническая функция. Тогда

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u) = \mathfrak{M}_{\partial\mathfrak{B}_r(X)}(u) = u(X).$$

Доказательство. Докажем часть утверждения, относящуюся к сферам. Для шаров результат получается интегрированием по радиусу.

Заметим, что шар $\mathfrak{B}_r(X)$ очевидным образом наследует стратификацию множества Ω_0 . Поэтому к нему применима формула (30), в которой в качестве Ω_0 нужно взять сам этот шар, а в качестве $\partial\Omega_0$ — соответствующую сферу. Заметим далее, что приведенные выше ограничения на радиус шара и обращение в нуль коэффициента p на стратах σ_{mj} с $m < d$ обеспечивают равенство $p d\mu_{r+\Delta r} = p(1+\Delta r/r)^d d\mu_r$, где $d\mu_r$ — элемент «площади» (а точнее — элемент стратифицированной меры) сферы радиуса r . Пользуясь этими обстоятельствами для приращения $\Delta \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u) = \mathfrak{M}_{\partial\mathfrak{B}_{r+\Delta r}(X)}(u) - \mathfrak{M}_{\partial\mathfrak{B}_r(X)}(u)$, легко получить формулу:

$$\Delta \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u) = \frac{\Delta r}{\int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} p d\mu_r} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} (p \nabla u)_\nu d\mu_r + o(\Delta r) = o(\Delta r).$$

Как раз здесь и используется формула (30), в соответствии с которой интеграл в правой части равен нулю. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}_{\partial\mathfrak{B}_r(X)}(u) \equiv \text{const}$ при $0 < r < r_0(X)$. Требуемое утверждение получается отсюда предельным переходом при $r \rightarrow 0$. $\square$

Аналогично доказывается, что неравенство $\Delta_p u \geq 0$ влечет за собой $u(X) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u)$. Вместо формулы (30) при этом используется неравенство

$$\int_{\partial\Omega_0} (p\nabla u)_\nu d\mu \leq 0,$$

также следующее из второй формулы Грина.

В силу очевидной аналогии с классическим случаем, назовем непрерывную на Ω_0 функцию p -субгармонической, если для каждой точки $X \in \Omega_0$ и достаточно малых $r < r_0(X)$ выполняется неравенство $u(X) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u)$. Аналогично определяется понятие p -супергармонической функции.

7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА p -СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы приведем все свойства субгармонических функций, необходимые для реализации метода Перрона. Обоснование этих свойств проводится так же, как в классическом случае, поэтому мы позволим себе опустить подробные доказательства.

Прежде всего напомним, что функция $u \in C(\Omega)$ называется *субгармонической* (или *p -субгармонической*), если

$$u(X) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u)$$

для любого $X \in \Omega_0$ и любого стратифицированного шара $\mathfrak{B}_r(X)$ с достаточно малым радиусом $r \leq r_0(X)$.

Из теоремы о среднем непосредственно следует слабый принцип максимума для субгармонических функций.

Лемма 9. Пусть u субгармонична на Ω . Тогда

$$\max_{X \in \Omega} u(X) = \max_{Y \in \partial\Omega_0} u(Y).$$

Следует заметить, что сильный принцип максимума для субгармонических функций не выполняется даже в классическом случае, хотя в [2, утверждение (i), стр. 31] утверждается обратное. В самом деле, в пространстве $\mathbb{R}^2$ функция

$$u(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ y & \text{при } y \geq 0 \end{cases}$$

является субгармонической в обычном классическом смысле в любой области, содержащей начало координат. Тем не менее, часть такой области, лежащая в нижней полуплоскости, целиком состоит из точек локального максимума функции u . Тем не менее, имеет место такое утверждение.

Лемма 10. Субгармоническая функция не может иметь в Ω_0 точек локального нетривиального максимума.

В самом деле, предположим, что $X \in \Omega_0$ — точка нетривиального локального максимума субгармонической функции u . Напомним (см. [20]), что это, в частности, означает, что ни в какой окрестности X функция не является постоянной. Поэтому в любом шаре $\mathfrak{B}_r(X)$ найдется точка Y , в которой $u(Y) < u(X)$ и то же неравенство выполняется для всех близких к Y точек из $\mathfrak{B}_r(X)$. Определим функцию $\bar{u} \equiv u(X)$. Имеем

$$u(X) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(\bar{u}) > \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_r(X)}(u),$$

что противоречит субгармоничности функции u .

Лемма 11. Пусть $u_1, \dots, u_k$ — субгармонические функции в Ω . Тогда функция

$$u(X) = \max\{u_1(X), \dots, u_k(X)\},$$

называемая далее верхней огибающей семейства функций u_i , $i = 1, \dots, k$, также является субгармонической.

Субгармонические функции в нашем смысле обладают также следующим характеристическим свойством, часто лежащим в основе определения субгармонических функций.

Лемма 12. Пусть u — субгармоническая, а v — гармоническая функции такие, что $u(X) \leq v(X)$ на границе $\partial\Omega_0$. Тогда это неравенство выполняется всюду на Ω .

Действительно, разность $u - v$, очевидно, является субгармонической функцией, принимающей на границе неположительные значения. В силу слабого принципа максимума для субгармонических функций, она принимает неположительные значения всюду на Ω .

Наконец, последнее утверждение относится к так называемым гармоническим срезкам. Пусть имеется субгармоническая функция u . В некотором шаре $\mathfrak{B}_r(X)$ решим задачу Дирихле для уравнения $\Delta_p v = 0$ с условиями на границе шара, определяемыми значениями функции u ; в следующих двух пунктах будет показано, что такую задачу можно решить, по крайней мере, для шаров с центрами в стратах σ_{kj} при $j \geq d - 1$, где d — размерность стратифицированного множества. Положим теперь

$$u_{X,r}(Z) = \begin{cases} u(Z) & \text{при } Z \notin \mathfrak{B}_r(X), \\ v(Z) & \text{при } Z \in \mathfrak{B}_r(X). \end{cases}$$

Лемма 13. Пусть u — субгармоническая функция. Тогда любая гармоническая срезка $u_{X,r}$ этой функции также является субгармонической.

Доказательство этого утверждения опирается на предыдущее утверждение. При этом неравенство

$$u_{X,r}(Z) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_p(Z)}(u_{X,r})$$

достаточно проверить при $Z \in \partial\mathfrak{B}_r(X)$, поскольку при $Z \in \mathfrak{B}_r(X)$ требуемое следует из теоремы о среднем, а при $Z \in \Omega_0 \setminus \overline{\mathfrak{B}_r(X)}$ — из определения субгармонической функции.

При $Z \in \partial\mathfrak{B}_r(X)$ имеем

$$u_{X,r}(Z) = u(Z) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_p(Z)}(u) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}_p(Z)}(u_{X,r}).$$

Собирая начало и конец этой выкладки, приходим к требуемому утверждению.

7.1. Фундаментальное решение оператора Δ_p . Фундаментальное решение пока найдено только в стратифицированных шарах $\mathfrak{B}_r(X)$ с центрами в не менее чем $(d - 1)$ -мерных стратах, но этого оказалось достаточно для реализации метода Перрона. Это связано с тем, что при обращении коэффициента p в нуль на всех стратах σ_{kj} с $k < d$ уравнение $\Delta_p u = 0$ содержит дифференциальные соотношения лишь в не менее, чем $(d - 1)$ -мерных стратах.

Основным препятствием к нахождению фундаментального решения в произвольном шаре является то, что в местах соединения $(d - 1)$ -мерных стратов у решения уравнения могут быть особенности типа угловых особенностей; решение будет непрерывным в этих точках, но его производные по некоторым направлениям оказываются бесконечными. Подробное исследование на эту тему было проведено в [21]. В связи с этим, метод отражения, с помощью которого и было найдено фундаментальное решение для упомянутых выше шаров, оказывается неприменимым в общем случае. Реализация метода Перрона несколько упростилась бы, если бы удалось найти фундаментальное решение в произвольном шаре.

Фундаментальным решением, как обычно, называется функция $G(Z, Y)$, которая по переменной Z удовлетворяет уравнению $\Delta_p G = 0$ при $Z \neq Y$ и, дополнительно, удовлетворяет соотношению

$$\varphi(Z) = \int_{\mathfrak{B}_r(X)} G(Z, Y) \Delta_p \varphi(Y) d\mu \quad (31)$$

для произвольной функции $\varphi \in C^2(\Omega_0)$ с носителем, содержащимся в шаре $\mathfrak{B}_r(X)$.

Обозначим через $K(z, y)$ классическую функцию Грина в шаре $B_r(0)$. С помощью этой функции построим фундаментальное решение, являющееся, кроме того, функцией Грина в шаре $\mathfrak{B}_r(X)$ с центром в точке $X \in \sigma_{d-1i}$; случай, когда центр шара лежит в d -мерном страте, интереса для нас не представляет, поскольку в этом случае пригодна (с точностью до постоянного множителя)

классическая функция Грина. Более того, полученная нами формула для функции Грина содержит в себе и классическую, о чем ниже будет сказано подробно.

Пусть $\sigma_{dj_1}, \dots, \sigma_{dj_m}$ — все страты множества Ω , примыкающие к σ_{d-1i} . Для удобства предположим, что номера этих стратов идут подряд, начиная с единицы, т.е. $j_1 = 1, \dots, j_m = m$. Введем на множестве $\mathfrak{B}_r(X)$ координаты следующим образом. Сначала определяем координаты $x^1, \dots, x^{d-1}$ на страте σ_{d-1i} и для каждого $\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1i}$ дополняем их еще одной координатой x^d . Предположим также, что добавленная координата обращается в нуль на σ_{d-1i} и положительна на каждой страте $\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1i}$. Кроме того, будем считать, что точка X является началом этих координат, т.е. все ее координаты равны нулю. Подобные координаты изображены на рисунке 3 (для случая $d = 2$).

Пусть далее $Y \in \sigma_{dl} \cap \mathfrak{B}_r(X)$. Определим функцию $G(Z, Y)$ с помощью следующих соотношений:

$$G(Z, Y) = \frac{2}{P} \begin{cases} \frac{p_l + P_l}{2p_l} K(z, y) + \frac{p_l - P_l}{2p_l} K(z^*, y), & Z \in \sigma_{dl}, \\ K(z^*, y), & Z \in \sigma_{dj}, \quad j \neq l, \end{cases} \quad (32)$$

где $z = (z^1, \dots, z^d)$, $y = (y^1, \dots, y^d)$ — координаты точек Z и Y соответственно, а $z^* = (z^1, \dots, z^{d-1}, -z^d)$. Через P_l мы обозначили сумму всех p_i , $i \leq m$, за исключением p_l , а $P = p_l + P_l$ — сумма всех p_i . Напомним еще раз, что p — стратифицированная константа, а p_i — ее сужение на страт σ_{di} . Все p_i , как обычно, предполагаются положительными числами.

Легко видеть, что при изменении Y коэффициенты при $K(Z, Y)$ и при $K(Z^*, Y)$ (в первой строчке формулы (32)) меняются скачком. Это затрудняет вычисления, в которых фигурирует явное выражение функции Грина; например, интегралы по сферам приходится вычислять, производя интегрирования по отдельности на каждой полусфере. Тем не менее, функция G непрерывна при $Y \neq Z$. В самом деле, когда Y приближается к σ_{d-1i} , расстояния $\text{dist}(Z, Y)$ и $\text{dist}(Z^*, Y)$ сравниваются, и значение первой строчки формулы (32) стремится к $K(Z, Y)$. Тем самым предельное значение не зависит от того, какому страту принадлежал Y в допредельном состоянии.

Теорема 6. *Функция $G(Z, Y)$ является функцией Грина оператора Δ_p в стратифицированном шаре $\mathfrak{B}_r(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что функция $G(Z, Y)$ обращается в нуль на границе $\partial\mathfrak{B}_r(X)$ как по переменной Y , так и по переменной Z , когда вторая переменная принадлежит $\mathfrak{B}_r(X)$, поскольку обе функции $K(z, y)$ и $K(z^*, y)$ обращаются в нуль на границе $\partial B_r(0)$. Наиболее громоздка проверка тождества (31). Здесь мы следуем стандартной схеме, основанной на применении формулы Грина.

Нетрудно проверить, что $\Delta_p G(Z, Y) = 0$ по каждой переменной Z и Y , когда $Z \neq Y$. С учетом отмеченной выше непрерывности, можно воспользоваться формулой Грина (все интегрирования в данном случае относятся к переменной Y) и получить

$$\int_{\mathfrak{B}_r(X) \setminus \omega_\varepsilon} G \Delta_p \varphi \, d\mu = \int_{\mathfrak{B}_r(X) \setminus \omega_\varepsilon} \varphi \Delta_p G \, d\mu + \int_{\partial\omega_\varepsilon} (\varphi (p \nabla G)_\nu - G (p \nabla \varphi)_\nu) \, d\mu, \quad (33)$$

где ω_ε — маленькая сферическая окрестность с центром Z и радиусом ε . Интеграл по границе стратифицированного шара $\mathfrak{B}_r(X)$ здесь отсутствует из-за того, что носитель функции φ лежит внутри этого шара, а потому соответствующий интеграл оказывается равным нулю.

Первый интеграл в правой части равенства (33) также обращается в нуль, поскольку функция G гармонична в рассматриваемой области (области между поверхностями двух неконцентрических сфер $\partial\mathfrak{B}_r(X)$ и $\partial\omega_\varepsilon$). Нетрудно проверить также, что интеграл от $G \cdot (p \nabla \varphi)_\nu$ по множеству $\partial\omega_\varepsilon$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теперь остается разобраться с интегралом

$$\int_{\partial\omega_\varepsilon} \varphi \cdot (p \nabla G)_\nu \, d\mu.$$

Для определенности будем считать, что Z лежит в страте σ_{dl} . Поскольку при малых $\varepsilon > 0$ сфера ω_ε также лежит в σ_{dl} , а потому является обычным d -мерным шаром, то вместо записи $(p \nabla G)_\nu$

можно пользоваться более наглядным представлением $p_l \frac{\partial G}{\partial \nu}$ этой величины, в котором $\vec{\nu}$ является внешней по отношению к ω_ε нормалью. Используя представление функции G формулой (32), получаем

$$\int_{\partial \omega_\varepsilon} \varphi \cdot (p \nabla G)_\nu d\mu = \frac{2p_l}{P} \int_{\partial \omega_\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{p_l + P_l}{2p_l} K(z, y) + \frac{p_l - P_l}{2p_l} K(z^*, y) \right) d\mu,$$

что можно переписать в виде

$$\int_{\partial \omega_\varepsilon} \varphi \cdot (p \nabla G)_\nu d\mu = \int_{\partial \omega_\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} K(z, y) d\mu + \frac{p_l - P_l}{2p_l P} \int_{\partial \omega_\varepsilon} K(z^*, y) d\mu.$$

Второй интеграл в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку $K(z^*, y)$ не имеет особенностей во множестве ω_ε . Первая же часть этого интеграла стремится к $\varphi(Z)$, поскольку, как хорошо известно, выполняется соотношение

$$\int_{\partial \omega_\varepsilon} \varphi \frac{\partial K}{\partial \nu} d\mu \rightarrow \varphi(Z),$$

когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, тождество (31) получается из (33) предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следовало бы рассмотреть еще и случай, когда Z лежит в страте σ_{d-1i} . Здесь рассуждения проводятся по уже приведенной схеме, однако в заключительной части приходится учитывать то обстоятельство, что ω_ε пересекается со всеми d -мерными стратами, а поскольку коэффициенты функции Грина зависят от страта, то интегрирование по $\partial \omega_\varepsilon$ приходится проводить отдельно для каждого пересечения $\partial \omega_\varepsilon \cap \sigma_{dj}$. $\square$

Следует заметить, что выражение функции Грина в виде (32) применимо и в том случае, когда центр X стратифицированного шара лежит в d -мерном страте. В этом случае стратифицированный шар имеет форму обычного d -мерного шара. Можно искусственно стратифицировать этот шар на два полушария и экваториальную $(d-1)$ -мерную плоскость (на которой коэффициент p следует считать равным нулю). Если теперь выписать формулу (32), то будет нетрудно убедиться, что получающееся при этом выражение совпадает с обычным представлением функции Грина с точностью до постоянного множителя (появление этого множителя связано с тем, что вместо обычного лапласиана у нас получается $p\Delta$).

Заметим также, что выражение (32) пригодно и в случае, когда центр лежит в $(d-1)$ -мерном страте, к которому примыкает всего лишь один d -мерный страт. В этом случае стратифицированный шар имеет форму обычного полушария.

7.2. Формула Пуассона в стратифицированном шаре. Если носитель функции φ не обязательно располагается в шаре $\mathfrak{B}_r(X)$, то с помощью рассуждений, приведенных в предыдущем пункте, вместо (31) получается такая формула

$$\varphi(Z) = \int_{\mathfrak{B}_r(X)} G(Z, Y) \Delta_p \varphi(Y) d\mu + \int_{\partial \mathfrak{B}_r(X)} \varphi(Y) \frac{\partial G(Z, Y)}{\partial \nu} d\mu.$$

Полагая здесь $\varphi \equiv 1$, получаем

$$\int_{\partial \mathfrak{B}_r(X)} \frac{\partial G}{\partial \nu} d\mu = 1. \quad (34)$$

Если φ — гармоническая функция на Ω_0 , то имеем также

$$\varphi(Z) = \int_{\partial \mathfrak{B}_r(X)} \varphi(Y) \frac{\partial G}{\partial \nu} d\mu.$$

В связи с последней формулой функцию

$$P(Z, Y) = \frac{\partial G}{\partial \nu}$$

естественно назвать ядром Пуассона.

Для дальнейшего нам потребуется явное выражение для функции P . Чтобы его получить, нужно продифференцировать по нормали (или, что то же, по радиусу) функцию (32). Как видно из этой формулы, достаточно продифференцировать $K(z, y)$ и $K(z^*, y)$. Для первой из этих производных формула хорошо известна (напомним, что точка X соответствует у нас началу координат):

$$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \frac{r^2 - |z|^2}{\omega_d r} |z - y|^{-d}, \quad (35)$$

где ω_d — площадь d -мерной единичной сферы. Вычислим теперь выражение для нормальной производной функции $K(z^*, y)$. Сначала напомним выражение для $K(z, y)$:

$$K(z, y) = \frac{1}{(2-d)\omega_d} \left(|z - y|^{2-d} - \left(\frac{|z|}{r} \right)^{2-d} \left| \frac{r^2}{|z|^2} z - y \right|^{2-d} \right).$$

Подставляя сюда $z = z^*$ (напомним, что z^* отличается от z только знаком перед последней координатой, поэтому, например, $|z^*| = |z|$) и дифференцируя по всем y^i , получаем следующее выражение для градиента функции $K(z^*, y)$:

$$\nabla K(z^*, y) = -\frac{1}{\omega_d} \left(|z^* - y|^{-d} \cdot (z^* - y) - \left(\frac{|z|}{r} \right)^{2-d} \left| \frac{r^2}{|z|^2} z^* - y \right|^{-d} \cdot \left(\frac{r^2}{|z|^2} z^* - y \right) \right).$$

Если Y лежит на $\partial \mathfrak{B}_r(X)$, то нормаль в этой точке имеет вид y/r . Заметим также, что при $Y \in \partial \mathfrak{B}_r(X)$ имеем

$$\left| \frac{r^2}{|z|^2} z^* - y \right| = \frac{r}{|z|} |z^* - y|.$$

Учитывая эти обстоятельства, получаем (после умножения предпоследнего равенства на y/r и очевидных упрощений):

$$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \frac{r^2 - |z|^2}{\omega_d r} |z^* - y|^{-d}. \quad (36)$$

Теперь можно, наконец, выписать явное выражение для ядра Пуассона:

$$P(Z, Y) = \frac{2(r^2 - |z|^2)}{P\omega_d r} \begin{cases} \frac{p_l + P_l}{2p_l} |z - y|^{-d} + \frac{p_l - P_l}{2p_l} |z^* - y|^{-d}, & Z \in \sigma_{dl}, \\ |z^* - y|^{-d}, & Z \in \sigma_{dj}, j \neq l. \end{cases} \quad (37)$$

Вновь можно заметить, что, как и в случае с функцией Грина, выражение для ядра Пуассона превращается в обычное его представление, когда центр шара располагается в d -мерном страте.

Кроме того, отметим, что ядро Пуассона является неотрицательной функцией.

Теперь мы можем доказать основное утверждение этого пункта.

Теорема 7. Пусть $g : \partial \mathfrak{B}_r(X) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на $\partial \Omega_0$ функция. Тогда функция u , определенная следующим образом

$$u(Z) = \begin{cases} g(Z), & Z \in \partial \mathfrak{B}_r(X), \\ \int_{\partial \mathfrak{B}_r(X)} P(Z, Y) g(Y) d\mu, & Z \in \mathfrak{B}_r(X), \end{cases} \quad (38)$$

даёт решение задачи Дирихле

$$\Delta_p u = 0, \quad (39)$$

$$u|_{\partial \mathfrak{B}_r(X)} = g \quad (40)$$

в стратифицированном шаре с центром в некотором страте σ_{kj} с размерностью $k \geq d - 1$. Здесь $\vec{\nu}$ является внешней нормалью к $\partial\mathfrak{B}_r(X)$, а дифференцирование относится ко второму аргументу Y .

Доказательство. Тот факт, что функция u удовлетворяет уравнению (39), следует из того, что функция $G(Z, Y)$ удовлетворяет по переменной Z тому же уравнению и из возможности дифференцировать под знаком интеграла. Остается только проверить непрерывность функции u в $\mathfrak{B}_r(X)$. Ясно, что это достаточно сделать лишь в граничных точках.

Пусть $Z_0 \in \partial\mathfrak{B}_r(X)$, а $Z \in \mathfrak{B}_r(X)$. Рассмотрим разность $u(Z) - u(Z_0) = u(Z) - g(Z_0)$. В силу формулы (34), разность $u(Z) - g(Z_0)$ можно записать в виде интеграла

$$u(Z) - g(Z_0) = \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} P(Z, Y)(g(Y) - g(Z_0)) d\mu.$$

Так как функция g предполагалась непрерывной, то по произвольному положительному числу ε можно подобрать такое положительное δ , что $|g(Y) - g(Z_0)| < \varepsilon$ при $|Y - Z_0| < \delta$. В силу этого, имеем

$$|u(Z) - g(Z_0)| \leq \int_{|Y - Z_0| < \delta} P(Z, Y)|g(Y) - g(Z_0)| d\mu + \int_{|Y - Z_0| \geq \delta} P(Z, Y)|g(Y) - g(Z_0)| d\mu;$$

здесь мы воспользовались неотрицательностью ядра Пуассона. Первый интеграл не превосходит ε . Второй интеграл стремится к нулю, когда Z стремится к Z_0 , из-за наличия множителя $r^2 - |z|^2$ в ядре Пуассона и неравенства $|z - y| \geq \delta/2$ (что обеспечивает отсутствие сингулярности) при Z , достаточно близких к Z_0 . Таким образом, при близких к Z_0 точках Z будем иметь $|u(Z) - g(Z_0)| < 2\varepsilon$. $\square$

7.3. Неравенство Харнака. Хотя для рассматриваемого нами случая доказан аналог теоремы о среднем для p -гармонических функций, неравенство Харнака нельзя обосновать только на основе этого факта, как это делается в классическом случае. Основным препятствием являются ограничения на радиус стратифицированного шара; этот радиус может быть сколь угодно мал даже для далеких от границы точек. В связи с этим, «сферический» вариант неравенства Харнака приходится доказывать на основе формулы Пуассона. Тем самым, мы ограничиваемся сферами с центрами в $(d - 1)$ -мерных и d -мерных стратах, но этого окажется достаточно.

Сферический вариант неравенства Харнака содержится в следующей лемме.

Лемма 14. Пусть u — неотрицательная на Ω_0 p -гармоническая функция и $\mathfrak{B}_r(X) \subset \Omega_0$. Тогда при $\rho < r$ и некоторых не зависящих от u константах C_1 и C_2 (ниже они будут выписаны явно), имеем

$$C_1 \frac{(r - \rho)^{d-2}}{(r + \rho)^{d-1}} u(X) \leq u(Z) \leq C_2 \frac{(r + \rho)^{d-2}}{(r - \rho)^{d-1}} u(X) \quad (41)$$

для любого $Z \in \mathfrak{B}_\rho(X)$, удаленного от X на расстояние ρ .

Доказательство. В самом деле, в силу формулы Пуассона, имеем

$$u(Z) = \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} P(Z, Y)u(Y) d\mu.$$

Расстояние $\text{dist}(Z, Y)$ между Z и Y в этой формуле оценивается так:

$$r - \rho \leq \text{dist}(Z, Y) \leq r + \rho,$$

и та же оценка верна для $\text{dist}(Z^*, Y)$, поскольку Z^* удалена от X также на расстояние ρ . Отсюда следует, что числа $|z - y|$ и $|z^* - y|$ находятся между $r - \rho$ и $r + \rho$. Отсюда и из формулы (37) получаем оценку ядра Пуассона

$$\frac{2(r^2 - \rho^2)}{P\omega_d r(r + \rho)^d} \leq P(Z, Y) \leq \frac{2(r^2 - \rho^2)}{P\omega_d r(r - \rho)^d}.$$

Пусть $X \in \sigma_{d-1i}$ и пусть $\sigma_{d1}, \dots, \sigma_{dk}$ — все d -мерные страты, примыкающие к σ_{d-1i} . Умножая члены неравенства на $u(Y)$ и интегрируя по $\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_j P \omega_d r(r + \rho)^d} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}} p_j u(Y) d\mu &\leq \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}} P(Z, Y) u(Y) d\mu \leq \\ &\leq \frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_j P \omega_d r(r - \rho)^d} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}} p_j u(Y) d\mu. \end{aligned}$$

Положив $p_{\max} = \max\{p_1, \dots, p_k\}$ и $p_{\min} = \min\{p_1, \dots, p_k\}$, получим из последних неравенств

$$\begin{aligned} \frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_{\max} P \omega_d r(r + \rho)^d} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}} p_j u(Y) d\mu &\leq \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}} P(Z, Y) u(Y) d\mu \leq \\ &\leq \frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_{\min} P \omega_d r(r - \rho)^d} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X) \cap \sigma_{dj}} p_j u(Y) d\mu. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем, с учетом формулы Пуассона, примененной к сумме средних интегралов,

$$\frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_{\max} P \omega_d r(r + \rho)^d} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} p u(Y) d\mu \leq u(Z) d\mu \leq \frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_{\min} P \omega_d r(r - \rho)^d} \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} p u(Y) d\mu.$$

Интегралы слева и справа могут быть преобразованы на основе теоремы о среднем. В итоге получаем

$$\frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_{\max} P \omega_d r(r + \rho)^d} u(X) \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} p d\mu \leq u(Z) d\mu \leq \frac{2(r^2 - \rho^2)}{p_{\min} P \omega_d r(r - \rho)^d} u(X) \int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} p d\mu.$$

Далее заметим, что

$$\int_{\partial\mathfrak{B}_r(X)} d\mu = \frac{k \omega_d r^{d-1}}{2}.$$

Учитывая это и делая очевидное огрубление коэффициента p под знаком интегралов предпоследней оценки, получаем

$$\frac{p_{\min} k(r - \rho) r^{d-2}}{p_{\max} P(r + \rho)^{d-1}} u(X) \leq u(Z) \leq \frac{p_{\max} k(r - \rho) r^{d-2}}{p_{\min} P(r - \rho)^{d-1}} u(X),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Стандартное следствие неравенства Харнака — это теорема Харнака о сходимости.

Лемма 15. Пусть $\{u_n\}$ — неубывающая последовательность гармонических функций на Ω_0 , сходящаяся в некоторой точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$, $k \geq d - 1$. Тогда она сходится в Ω_0 равномерно на каждом стратифицированном шаре с центром в X . При этом предельная функция также является гармонической.

7.4. Реализация метода Пуанкаре—Перрона. Обозначим через S_g множество всех p -субгармонических функций u на Ω , которые удовлетворяют неравенству $u(X) \leq g(X)$ на границе $\partial\Omega_0$. Решением Перрона краевой задачи

$$\Delta_p u = 0, \tag{42}$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = g \tag{43}$$

называют функцию $\bar{u}$, которая является верхней огибающей множества S_g , т.е.

$$\bar{u}(X) = \sup_{v \in S_g} v(X). \quad (44)$$

Доказательство того, что решение Перрона $\bar{g}$ удовлетворяет (42), (43) в обычном (классическом) случае, разбивается на два независимых шага. Прежде всего доказывают, что $\bar{g}$ удовлетворяет уравнению, после чего остается проверить, что удовлетворяются и краевые условия (см., например, [15] или [2]).

В случае стратифицированного множества имеется еще один шаг. Нужно еще проверить непрерывность $\bar{g}$ в стратах малой (меньше $(d-1)$) размерности. Этот дополнительный шаг основывается на изучении особенностей решения в угловых точках стратов (они имеются и внутри).

Классическим решением задачи (42), (43) мы называем функцию $u \in C_\alpha^2(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, удовлетворяющую этим соотношениям в обычном смысле.

Следует отметить, что $\bar{u}$ может не быть классическим (и даже слабым) решением задачи, как это изображено на следующем рисунке.

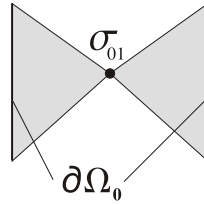


Рис. 4. Неразрешимый случай.

Чтобы избежать подобной ситуации, наложим геометрические ограничения на структуру Ω и его разбиения на Ω_0 и $\partial\Omega_0$. В предыдущих условиях были найдены оптимальные ограничения для слабой разрешимости, названные условиями прочности. Здесь мы дадим аналогичные условия, модифицированные для классической разрешимости. Поскольку было условлено упругими считать только страты старшей размерности, то нет необходимости явно указывать разбиение стратов на мягкие и упругие страты. В связи с этим вместо упругих троек далее фигурируют упругие пары.

Назовем $\{\Omega_0, \partial\Omega_0\}$ прочной парой, если $\partial\Omega_0$ содержится в замыкании $(d-1)$ -мерных стратов, лежащих в $\partial\Omega_0$, и если для каждого σ_{kj} с $k < d-1$ множество $\Omega \setminus \sigma_{kj}$ связно вблизи σ_{kj} .

В следующей теореме (основной в этом разделе) нет условий регулярности границы, поскольку страты (включая граничные) предполагаются плоскими.

Теорема 8. Пусть $\{\Omega_0, \partial\Omega_0\}$ — прочная пара, а g непрерывна. Тогда $\bar{u}$ является классическим решением задачи (42), (43).

Доказательство. Пусть X_0 — произвольная точка Ω_0 , лежащая в некотором страте σ_{kj} с $k \geq d-1$. Покажем, что в этой точке $\bar{u}$ удовлетворяет (42).

Фиксируем некоторый стратифицированный шар $\mathfrak{B}_r(X)$ и счетное множество $X_1, \dots, X_k, \dots$, плотное в $\mathfrak{B}_r(X)$ и содержащее X . Из определения функции $\bar{u}$ следует существование последовательности $\{u_k^i\}$ p -субгармонических функций, сходящейся к $\bar{u}(X_i)$. Используя семейство последовательностей $\{u_k^i\}$, можно построить неубывающую последовательность, сходящуюся к $\bar{u}$ во всех точках X_k . Для этой цели достаточно положить $v_k = \max\{u_1^k, \dots, u_k^k\}$. В соответствии с леммой 11, эта последовательность состоит из p -субгармонических функций из S_g . Заменяя v_k p -гармоническими в упомянутом шаре функциями $w_k = (v_k)_{X,r}$, сохраним (в соответствии с леммой 13) все свойства первоначальной последовательности $\{v_k\}$, включая сходимость к $\bar{u}$ в точках X_k .

В соответствии с леммой 15, предельная функция последовательности $\{w_k\}$ (или ее подпоследовательности) будет p -гармонической в некотором шаре $\mathfrak{B}_\rho(X)$ с $\rho < r$, и эта функция совпадает с $\bar{u}$ в точках X_k , попавших в этот шар. Используя плотность множества $\{X_k\}$, нетрудно показать, что совпадение с $\bar{u}$ имеет место всюду в $\mathfrak{B}_\rho(X)$.

Для доказательства того, что $\bar{u}$ удовлетворяет (43) в граничных стратах размерности $d - 1$, можно рассуждать, как в классическом случае, используя барьерную технику (см., например, [2]). Дело в том, что граничные страты плоские, а потому нетрудно построить локальный барьер (p -супергармоническая функция, положительная вблизи рассматриваемой точки и обращающаяся в ней в нуль) в точке, лежащей в $(d - 1)$ -мерном страте (для этого используется фундаментальное решение, построенное выше). Из локального барьера легко строится глобальный (продолжением его константой за пределы небольшого шара, содержащего рассматриваемую точку).

Для проверки непрерывности функции $\bar{u}$ на Ω_0 нам нужна следующая лемма.

Лемма 16. Пусть $\{\Omega_0, \partial\Omega_0\}$ — прочная пара. Тогда для каждого σ_{dj} и $\sigma_{kj} \prec \sigma_{dj}$ существует предел

$$\lim_{Y \rightarrow X} \bar{u}(Y),$$

где Y принадлежит σ_{di} , а X — фиксированная точка в σ_{kj} .

Доказательство. Утверждение тривиально в случае $k = d - 1$, поскольку мы только что проверили, что $\bar{u}$ непрерывна на Ω_0 без маломерных стратов.

Основная трудность — доказательство непрерывности в стратах σ_{kj} при $k < d - 1$. Здесь воспользуемся результатами книги [21]. Легко проверить, что $\bar{u}$ — слабое решение задачи (42), (43) из $H^1_\mu(\Omega_0)$. Однако его сужения на d -мерные страты могут иметь особенности степенного вида (неограниченные производные) вблизи точек маломерных стратов. Точное описание этих особенностей имеется в [21]. Оно показывает, что обсуждаемые пределы действительно существуют. $\square$

Теперь можно вернуться к доказательству теоремы.

Фиксируем страт σ_{kj} с $k < d - 1$ и точку $X \in \sigma_{kj}$. В соответствии с леммой, предел

$$\lim_{Y \rightarrow X} \bar{u}(Y) = \alpha_i$$

существует для каждого страта σ_{di} . Используя непрерывность $\bar{u}$ на Ω_0 без маломерных стратов, имеем $\alpha_i = \alpha_l$, если σ_{di} и σ_{dl} граничат по $(d - 1)$ -мерному страту. Используя прочность, можем утверждать, что все α_i равны по транзитивности. Это доказывает непрерывность $\bar{u}$ в Ω_0 . Похожие соображения применимы и к маломерным стратам из $\partial\Omega_0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети// Докл. РАН. — 1995. — 52. — С. 433–435.
2. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
3. Жиков В. В. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости// Мат. сб. — 1996. — 187, № 8. — С. 1109–1147.
4. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах// Диффер. уравнения. — 2000. — 36, № 2. — С. 226–232.
5. Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н. Об одной векторной краевой задаче// В сб. «Краевые задачи». — Пермь: Изд-во Перм. политех. ин-та, 1983. — С. 64–70.
6. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974
7. Below J. von A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2 -networks// Linear Algebra Appl. — 1985. — 71. — С. 309–325.
8. Below J. von Parabolic Network Equations// Habilitation Thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1993.
9. Below J. von, Nicaise S. Dynamical interface transition with diffusion in ramified media// Commun. Part. Differ. Equat. — 1996. — 21. — С. 255–279.
10. Ciarlet P. G. The finite element method for elliptic problems// Stat. Math. Appl. — 4, North-Holland, 1978.
11. Dekoninck B., Nicaise S. The eigenvalue problem for networks of beams// Linear Algebra Appl. — 2000. — 314. — С. 165–189.

12. *Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O.* Poincaré's inequality on stratified sets and applications// Rapport de recherche 01.2, Université de Valenciennes, 2001.
13. *Gobert J.* Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité// Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. — 1962. — 3-4. — С. 182–191.
14. *Grisvard P.* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. — Boston-London-Melbourne: Pitman, 1985.
15. *John F.* Partial Differential Equations. — Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
16. *Lagnese J. E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G.* Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. — Boston: Birkhäuser, 1994.
17. *Lumer G.* Espaces ramifiés et diffusions sur les réseaux topologiques// C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. — 1980. — 291. — С. 627–630.
18. *Mehmeti F. Ali* Regular solutions of transmission and interaction problems for wave equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 1989. — 11. — С. 665–685.
19. *Mehmeti F. Ali* Nonlinear Waves in Networks. — Akademie-Verlag, 1994.
20. *Mehmeti F. Ali, Below J. von, Nicaise S. eds* Partial differential equations on multistructures// Lect. Notes in Pure and Appl. Math. — 219. — Marcel Dekker, 2001.
21. *Nicaise S.* Polygonal interface problems// Methoden und Verfahren Math. Physik, Peter Lang Verlag, 1993. — 39.
22. *Nicaise S.* Polygonal interface problems for the biharmonic operator// Math. Meth. Appl. Sci. — 1994. — 17. — С. 21–39.
23. *Nicaise S., Sändig A. M.* General interface problems I-II// Math. Meth. Appl. Sci. — 1994. — 17. — С. 395–429, 431–450.
24. *Nicaise S., Sändig A. M.* Transmission problems for the Laplace and elasticity operators: regularity and boundary integral formulation// Math. Models and Meth. Appl. Sci. — 1999. — 9. — С. 855–898.
25. *Penkin O.* About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions/ *Mehmeti F. Ali, Belov J. von, Nicaise S., eds.* Partial differential equations on multistructures. — Marcel Dekker, 2001. — С. 183–191.

С. Никез

Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis

E-mail: serge.nicaise@univ-valenciennes.fr

О. М. Пенкин

Воронежский государственный университет

E-mail: penkin@comch.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ МОМЕНТОВ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

© 2003 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. Статья посвящена исследованию асимптотического поведения решений линеаризованных систем уравнений для так называемых моментов неравновесной термодинамики.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	95
2. Задача Коши	98
3. 13-моментный случай	100
4. 20-моментный случай	101
5. Смешанная задача	104
6. Полиномиальный пучок смешанной задачи	105
7. Условие Шапиро—Лопатинского	110
8. Заключение	111
9. Приложение I (Гиперболические пучки)	111
10. Приложение II (Иерархия волн)	115
Список литературы	120

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью этой статьи является исследование задачи Коши и смешанной задачи для систем моментов Града—Эрмита, полученных в контексте неравновесной термодинамики [3, 7, 12, 13], базирующейся на кинетической теории одноатомного идеального газа. Рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана

$$\partial_t f + c_i \partial_{x_i} f = S(f, f) \quad (1)$$

для функции распределения $f(x, t, c)$ атомов. Здесь c_i — скорость атомов, t — время и $S(f, f)$ — оператор столкновений [12].

Неравновесная термодинамика [12] определяет аппроксимации (1) диссипативными, симметризуемыми гиперболическими системами законов сохранения с релаксацией. Термодинамические величины определяются как моменты функции распределения. Плотность масс ϱ и момент плотности ϱv_i (v_i — средняя скорость) имеют следующие выражения

$$\varrho(x, t) = m \int f \, dc \quad \text{и} \quad \varrho v_i = m \int c_i f \, dc,$$

где m — масса атома. Через относительную скорость $C_i = c_i - v_i$ хаотического движения атомов можно вычислить плотность внутренней энергии и температуру

$$\varepsilon = \frac{m}{2\varrho} \int C^2 f \, dc = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T.$$

Девииатор давления и тепловой поток определяются соотношениями:

$$p_{\langle ij \rangle} = m \int C_{\langle i} C_{j \rangle} f \, dc, \quad q_i = \frac{m}{2} \int C_i C^2 f \, dc. \quad (2)$$

Угловые скобки в индексах обозначают симметрическую безследовую часть тензоров. Здесь исчерпываются моменты, имеющие простую физическую интерпретацию. Если добавить, как неравновесные величины, моменты высшего порядка, которые не имеют интуитивного физического смысла, такие как полная безследовая часть $\varrho_{\langle ijk \rangle}$ момента третьего порядка (семь компонент), пять компонент $\varrho_{kk\langle ij \rangle}$

$$\varrho_{\langle ijk \rangle} = m \int C_{\langle i} C_j C_k \rangle f \, dc, \quad \varrho_{kk\langle ij \rangle} = \frac{m}{2} \int C^2 C_{\langle i} C_j \rangle f \, dc, \quad (3)$$

и неравновесную часть Δ полного следа момента четвертого порядка

$$\Delta = m \int C^4 (f - f_M) \, dc, \quad (4)$$

то в 3-D случае можно определить специфическую систему уравнений Эрмита—Града для 26 моментов, так называемое замыкание Эрмита—Града (см. [3, 7, 12]).

Для системы моментов, полученной замыканием метода максимальной энтропии для кинетического уравнения Ловермо (уравнения типа Больцмана), было показано, что область допустимых значений моментов является невыпуклой (см. [10]). Более того, она имеет внутреннюю границу, содержащую все равновесные состояния, в которых старший момент имеет степенную особенность. Заметим, что подобного рода особенность не возникает при замыкании методом Эрмита—Града [3, 7, 12]. Невыпуклость области допустимых значений в окрестности состояний равновесия нарушает основное условие глобальной разрешимости гиперболических симметризуемых систем [6]. Хорошо известно, что иерархия систем моментов содержит систему уравнений газовой динамики, полученную феномологическим замыканием кинетических уравнений с помощью законов Фурье—Навье—Стокса. Возможно, что природа трудностей с доказательством их глобальной разрешимости связана с невыпуклостью области допустимых значений для систем моментов — высших по иерархии.

Результаты [10] показали, что необходимо дополнительное исследование линеаризованных систем моментов в окрестности состояния равновесия. В этой статье приведем анализ линеаризованных систем моментов Эрмита—Града, который показал, что они обладают чрезвычайно жесткой структурой: дисперсионные уравнения задачи Коши для этих систем являются гиперболическими пучками, описываемыми строгими и нестрогими цепочками гиперболических полиномов.

Линеаризованная в окрестности состояния равновесия

$$\varrho = \varrho_E, v_i = 0, T = T_E, p_{\langle ij \rangle} = 0, q_i = 0, \varrho_{\langle ijk \rangle} = 0, \varrho_{kk\langle ij \rangle} = 0, \quad (5)$$

26-моментная система (см. [12]) имеет следующий вид:

$$\partial_t \varrho + \partial_{x_k} v_k = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t v_i + \frac{3}{5} \left(\partial_{x_i} \varrho + \frac{k}{m} \partial_{x_k} T \right) + \partial_{x_k} p_{\langle ik \rangle} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{k}{m} \partial_t T - \frac{2}{5} \partial_t \varrho + \frac{2}{3} \partial_k q_k = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t p_{\langle ij \rangle} + \frac{4}{5} \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_j} + \partial_{x_k} \varrho_{\langle ijk \rangle} + \frac{6}{5} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_j} = -B p_{\langle ij \rangle}, \quad (9)$$

$$\partial_t q_i + \frac{3}{5} \partial_{x_k} p_{\langle ik \rangle} + \frac{1}{6} \partial_{x_i} \Delta + \frac{1}{2} \partial_{x_k} \varrho_{jj\langle ik \rangle} + \frac{3}{2} \frac{k}{m} \partial_{x_i} T = -\frac{2}{3} B q_i, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_{ijk} + \frac{1}{7} \left\{ \partial_{x_k} \varrho_{rr\langle ij \rangle} + \partial_{x_i} \varrho_{rr\langle jk \rangle} + \partial_{x_j} \varrho_{rr\langle ik \rangle} \right. \\ \left. - \frac{2}{5} \left(\partial_{x_n} \varrho_{rr\langle in \rangle} \delta_{jk} + \partial_{x_n} \varrho_{rr\langle jn \rangle} \delta_{ik} + \partial_{x_n} \varrho_{rr\langle kn \rangle} \delta_{ij} \right) \right\} = -\frac{3}{2} B \varrho_{ijk}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\partial_t \Delta + \frac{24}{5} \partial_{x_k} q_k = -\frac{2}{3} B \Delta, \quad (12)$$

$$\partial_t \varrho_{rr\langle ij \rangle} + \frac{126}{25} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_j} + \frac{268}{25} \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_j} + \frac{27}{5} \partial_{x_k} \varrho_{\langle ijk \rangle} = -\frac{7}{6} B \left(\varrho_{rr\langle ij \rangle} - \frac{3}{5} p_{\langle ij \rangle} \right). \quad (13)$$

Здесь 26 неизвестных функций

$$\varrho, \quad v_i, \quad T, \quad p_{\langle ij \rangle}, \quad q_i, \quad \varrho_{\langle ijk \rangle}, \quad \varrho_{rr\langle ij \rangle}$$

обозначают отклонения от состояния равновесия (5). Здесь k — постоянная Больцмана. Система (6)–(13) записана в безразмерном виде. Для этого введены скорость звука $c_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k}{m} T_E}$ и безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \widehat{t} &= \frac{t}{t_E}, \quad \widehat{x}_i = \frac{x_i}{c_s t_E}, \quad \widehat{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_E}, \quad \widehat{v}_i = \frac{v_i}{c_s}, \quad \widehat{T} = \frac{T}{c_s^2}, \\ \widehat{p_{\langle ij \rangle}} &= \frac{p_{\langle ij \rangle}}{\varrho_E c_s^2}, \quad \widehat{q_i} = \frac{q_i}{\varrho_E c_s^3}, \quad \widehat{\varrho_{\langle ijk \rangle}} = \frac{\varrho_{\langle ijk \rangle}}{\varrho_E c_s^4}, \\ \widehat{\Delta} &= \frac{\Delta}{\varrho_E c_s^5}, \quad \widehat{\varrho_{rr\langle ij \rangle}} = \frac{\varrho_{rr\langle ij \rangle}}{\varrho_E c_s^5}. \end{aligned}$$

В безразмерной форме получим следующие значения равновесных параметров: $\widehat{\varrho_E} = 1$, $\widehat{v_E} = 0$, $\frac{k}{m} \widehat{T_E} = \frac{3}{5}$, $v_E = 0$. Для упрощения записи в дальнейшем опустим символ $\widehat{}$, характеризующий безразмерные величины. Число Кнудсена $B = \alpha/t_E \gg 1$ является большим для сильно разреженных газов. Здесь $\alpha > 0$ определяется потенциалом взаимодействий молекул Максвелла, для которого вычисляется правая часть в системе (6)–(13).

Подставляя в (6)–(13) решение типа плоских волн

$$U = \mathcal{R} \exp(i(kx + \omega t)),$$

$$\mathcal{R} = (R^\varrho, R^{v_i}, R^T, R^{p_{\langle ij \rangle}}, R^{q_i}, R^{\varrho_{\langle ijk \rangle}}, R^\Delta, R^{\varrho_{rr\langle ij \rangle}}),$$

получаем дисперсионные уравнения для 13-, 14-, 20-, 21-, 26-моментных систем в 1-D, 2-D и 3-D случаях. Напомним, что 13-моментная система отвечает первым 13 уравнениям в системе (6)–(13), в которых величины $\varrho_{\langle ijk \rangle} = \Delta = \varrho_{rr\langle ij \rangle} = 0$. Соответственно, 14-моментная система определяется также первыми 13 уравнениями и двадцать первым уравнением в системе (6)–(13), где $\varrho_{\langle ijk \rangle} = \varrho_{rr\langle ij \rangle} = 0$. 20- и 21-моментные системы отвечают первым 20 и 21 уравнениям в системе (6)–(13), в которых, соответственно, $\Delta = \varrho_{rr\langle ij \rangle} = 0$ и $\varrho_{rr\langle ij \rangle} = 0$.

Удивительным фактом является то, что все дисперсионные уравнения являются строго или нестрого гиперболическими пучками вида:

$$\mathcal{P} = \sum_{j=0}^N (-i)^j B^j P_j(\omega, k), \quad k \in \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3.$$

Следуя [2], приведем определение гиперболического пучка.

Определение 1.1. Цепочка однородных полиномов с вещественными коэффициентами $P_j(\omega, k)$, $j = 0, 1, \dots, N$, порядка $l - j$, $l > N$, соответственно, называется строго гиперболическим пучком длины $N + 1$, если все полиномы P_j — строго гиперболические относительно ω , и корни соседних полиномов P_j , P_{j+1} , $j = 0, \dots, N - 1$, строго взаимно разделяют друг друга, так что между каждыми двумя корнями полинома P_j есть один корень полинома P_{j+1} .

В случае нестрогой гиперболическости однородные полиномы цепочки являются нестрого гиперболическими относительно ω . Условие взаимного разделения корней соседних пар полиномов из цепочки выполнено нестрого.

Например, в двумерном случае (решение (6)–(13) зависит только от двух пространственных переменных (x_1, x_2)) дисперсионное уравнение задачи Коши для 13-моментной системы является цепочкой из шести нестрого гиперболических полиномов

$$\begin{aligned} P_0(\omega, k) &= |k|^9 \tau^3 \left[\tau^6 - \frac{103}{25} \tau^4 + \frac{21}{5} \tau^2 \left(1 - \frac{912}{2625} \alpha \beta \right) - \frac{27}{25} \left(1 - \frac{432}{675} \alpha \beta \right) \right], \\ P_1(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{13}{3} \tau^6 - \frac{1094}{75} \tau^4 + \frac{1381}{125} \tau^2 \left(1 - \frac{2032}{6905} \alpha \beta \right) - \frac{264}{125} \left(1 - \frac{143}{330} \alpha \beta \right) \right], \\ P_2(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{67}{9} \tau^6 - \frac{497}{25} \tau^4 + \frac{3943}{375} \tau^2 \left(1 - \frac{832}{3943} \alpha \beta \right) - \frac{159}{125} \left(1 - \frac{48}{159} \alpha \beta \right) \right], \\ P_3(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{19}{3} \tau^6 - \frac{2908}{225} \tau^4 + \frac{13}{3} \tau^2 \left(1 - \frac{32}{325} \alpha \beta \right) - \frac{6}{25} \right], \\ P_4(\omega, k) &= |k|^5 \tau \left[\frac{8}{3} \tau^4 - \frac{178}{45} \tau^2 + \frac{2}{3} \right], \quad P_5(\omega, k) = \frac{4}{9} |k|^4 \tau^2 (\tau^2 - 1), \end{aligned}$$

где $\omega = |k|\tau$, $\alpha = k_1^2$, $\beta = k_2^2$. Нетрудно проверить, что для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$ гиперболический пучок длины $N = 5$, определяемый этой цепочкой, является нестрого гиперболическим.

2. Задача Коши

Основная идея введения обобщенных переменных связана с тем, что для теоретического описания [12, 13] процессов со строго градиентным и быстрым изменением параметров необходимо большее число переменных. Основными переменными являются: плотность ϱ , скорость v , температура T , отвечающие системе уравнений Эйлера газовой динамики как невозмущенной (предельной) системе.

Однородная часть системы (6)–(13) является гиперболической, и правая часть системы — вектор P — является линейной вектор-функцией относительно неравновесных величин. Первые пять компонент вектора P тождественно равны нулю, что соответствует законам сохранения массы, момента и энергии.

В равновесном состоянии все компоненты вектора правой части равны нулю и, следовательно, формально все неравновесные величины равны нулю. Это утверждение требует исследования предельного перехода по параметру $B \rightarrow \infty$, т.е. исследования условий типа Лакса глобальной устойчивости решений задачи Коши или смешанной задачи.

В одномерном случае 13-моментная система [2] определяет строго гиперболическую тройку полиномов, для которой справедлив аналог классической теоремы Эрмита—Биллера [9] об устойчивых полиномах. Более того, условия, которым удовлетворяет дисперсионный полином линеаризованной 13-моментной системы Эрмита—Града, являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости строго гиперболической тройки полиномов.

В 13-моментном случае дисперсионное уравнение

$$P^{(13)}(\omega, k) = P_0(\omega, k) - i\gamma_1 B P_1(\omega, k) - \gamma_2 B^2 P_2(\omega, k) = 0, \quad (14)$$

где $\gamma_1 = \frac{4}{3}$, $\gamma_2 = \frac{32}{75}$, $\tau = \omega + \mu_E k$ и $\mu_E = v_E/c_s$ — число Маха, определяет полиномиальный пучок тройки строго гиперболических полиномов

$$P_0 = \tau \left(\tau^4 - \frac{78}{25} \tau^2 k^2 + \frac{27}{25} k^4 \right), \quad P_1 = \tau^4 - \frac{33}{25} \tau^2 k^2 + \frac{6}{25} k^4, \quad P_2 = \tau (\tau^2 - k^2),$$

для которого справедлив следующий результат (см. [2]).

Предложение 2.1. Пусть полиномиальный пучок дисперсионного уравнения (14) определяет строго гиперболическую тройку однородных полиномов, старшие коэффициенты которых $P_5(1, 0) = P_4(1, 0) = P_3(1, 0) = 1$ и постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. Тогда для любого вещественного $k \in \mathbb{R}^1$, $k \neq 0$, корни $\omega(k)$ дисперсионного уравнения (14) лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ комплексной плоскости.

Корни соседних полиномов P_j в 13-моментном случае

$$\begin{aligned}\omega_1^\pm &= k(\mu_E \pm 1), \quad \omega_2 = k\mu_E - \text{корни полинома } P_2; \\ \omega_1^\pm &= k(\mu_E \pm \tilde{b}_1), \quad \omega_2^\pm = k(\mu_E \pm \tilde{b}_2) - \text{корни полинома } P_1; \\ \omega_1^\pm &= k(\mu_E \pm \tilde{c}_1), \quad \omega_2^\pm = k(\mu_E \pm \tilde{c}_2), \quad \omega_3 = k\mu_E - \text{корни полинома } P_0\end{aligned}$$

взаимно разделяют друг друга. Здесь

$$\tilde{c}_1 = 1.6503, \quad \tilde{c}_2 = 0.6297, \quad \tilde{b}_1 = 1, 1, \quad \tilde{b}_2 = 0.22,$$

где $\mu_E < b_2 < c_2 < b_1 < c_1$ и $\mu_E < b_2 < 1 < b_1$. Таким образом, в линейном приближении, 13-моментная система является глобально устойчивой.

В 20-моментном случае имеем строго гиперболический пучок

$$P^{(20)}(\omega, k) = P_0 - i\gamma_1 B P_1 - \gamma_2 B^2 P_2 + i\gamma_3 B^3 P_3 = 0, \quad (15)$$

$$P_0(\omega, k) = \omega^6 - \frac{21}{5}\omega^4 k^2 + \frac{81}{25}\omega^2 k^4 - \frac{81}{125}k^6,$$

$$P_1(\omega, k) = \left(\omega^4 - \frac{258}{95}\omega^2 k^2 + \frac{441}{445}k^4 \right) \omega, \quad P_2(\omega, k) = \omega^4 - \frac{164}{95}\omega^2 k^2 + \frac{27}{95}k^4,$$

где P_3 то же, что P_2 в 13-моментном случае, $\gamma_1 = \frac{19}{6}$, $\gamma_2 = \frac{19}{6}$, $\gamma_3 = 1$.

Справедливо следующее обобщение этой теоремы на 20-моментный случай.

Предложение 2.2. Пусть полиномиальный пучок (15) является строго гиперболическим пучком длины $N = 3$. Старшие коэффициенты полиномов пучка $P_6(1, 0) = P_5(1, 0) = P_4(1, 0) = P_3(1, 0) = 1$, постоянные в (15) $\gamma_j > 0$, таковы, что

$$\gamma_1 \gamma_2 - \alpha(\omega, k) \gamma_3 > 0, \quad \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{4} \beta^2(\omega, k) \gamma_3 > 0$$

на конусе

$$K = \left\{ (\omega, k) \in \mathbb{R}^2, [P_0, P_3](\omega, k) > 0 \right\}.$$

Здесь $\alpha(\omega, k)$, $\beta^2(\omega, k)$ — координаты разложения скобки Пуассона $[P_0, P_3]$ по псевдобазису

$$[P_0, P_3](\omega, k) = \alpha(\omega, k)[P_1, P_2](\omega, k) + \sqrt{[P_0, P_3][P_2, P_3]}(\omega, k).$$

Тогда для любого вещественного $k \in \mathbb{R}^1$, $k \neq 0$, корни $\omega(k)$ дисперсионного уравнения (15) лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ комплексной плоскости.

Следствием этих результатов является иерархия волн [5] (иерархия медленных корней и корней погранслоного типа) для решения задачи Коши системы (6)–(13). Рассмотрим главную (однородную) часть системы (6)–(13). Очевидно, общее решение представимо как суперпозиция плоских волн Даламбера

$$\varphi_1(x - c_1 t) + \varphi_2(x - c_2 t) + \dots + \varphi_5(x - c_N t), \quad (16)$$

которые распространяются со скоростями $c_1, \dots, c_N$ ($N = 5$ для 13-моментной системы или $N = 6$ для 20-моментной системы в 1-D случае). Решение предельной линеаризованной в окрестности состояния равновесия системы уравнений Эйлера также представимо как суперпозиция плоских волн Даламбера

$$\varphi_1(x - a_1 t) + \varphi_2(x - a_2 t) + \varphi_3(x - a_3 t), \quad (17)$$

распространяющихся со скоростями a_1, a_2, a_3 . По аналогии с [5], системы (6)–(13) описывают феномен иерархии волн, в которой волны высшего порядка (коротковолновые приближения

решений) дают (16) и волны низшего порядка (длинноволновые приближения решений) дают (17). Мы покажем, что свойства промежуточных полиномов $P_1(P_1, P_2)$ в 13-моментном случае (или 20-моментном) обеспечивают устойчивый переход от волн высшего порядка к волнам низшего порядка, когда $tB \rightarrow \infty$. Имеется в виду, что при предельном переходе $B \rightarrow \infty$ решения задачи Коши и смешанной задачи стремятся к соответствующим решениям невозмущенной линеаризованной системы уравнений Эйлера. Этот результат получен как обобщение классической теоремы Эрмита—Биллера [9] об устойчивых полиномах.

Теорема 2.1. Пусть пара строго гиперболических полиномов (цепочка длины $N = 1$) $P_0(z)$ и $P_1(z)$ с вещественными коэффициентами, корни которых простые и вещественные p_j , $j = 1, \dots, N$, Q_j , $j = 1, \dots, N - 1$, удовлетворяет условию строгого разделения корней. Между двумя последовательными корнями многочлена P_0 находится точно один корень полинома P_1 . Старшие коэффициенты многочленов P_0 , P_1 одного знака. Тогда полином $P_0(z) - iP_1(z)$ является устойчивым и его корни находятся в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ комплексной плоскости переменной z .

Более того, условия строгой гиперболичности пучка $P_0(z) - iP_1(z)$ являются необходимыми условиями его устойчивости.

3. 13-МОМЕНТНЫЙ СЛУЧАЙ

Перейдем к доказательству предложений 2.1 и 2.2. Начнем с 13-моментного 1-D случая.

3.1. Прямые вычисления регулярных асимптотик для корней (14) позволяют получить следующее утверждение.

Предложение 3.1. Пусть полиномиальный пучок (14) удовлетворяет условиям предложения 2.1. Тогда для любого вещественного $n_1 \in \mathbb{R}^1$, $n_1 \neq 0$, корни $n_0(n_1)$ дисперсионного уравнения

$$P^{(13)}(n_0, n_1) = P_0(n_0, n_1) - i\gamma_1 P_1(n_0, n_1) - \gamma_2 P_2(n_0, n_1) = 0, \quad \omega = Bn_0, \quad k = Bn_1, \quad (18)$$

обладают следующими свойствами:

- 1) для достаточно больших $|n_1| \geq \delta_1$, $\delta_1 \gg 1$, (так называемое коротковолновое приближение) для первых трех корней K_j , $j = 1, 2, 3$, уравнения (18) справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$n_j^0(n_1) = -c_j n_1 + i\alpha_j^h + O\left(\frac{1}{n_1}\right), \quad j = 1, 2, 3; \quad (19)$$

в силу условия взаимного разделения корней выполнены неравенства

$$\alpha_j^h = \frac{\prod_{k=1}^k (b_k - c_j)}{\prod_{k \neq j} (c_k - c_j)} > 0, \quad j = 1, \dots, 5;$$

- 2) для малых значений $|n_1| \leq \delta_2 \ll 1$ (так называемое длинноволновое приближение корней) для этих трех корней выполнено асимптотическое разложение вида

$$n_j^0(n_1) = -a_j n_1 - i\alpha_j^l n_1^2 + O(|n_1|^3), \quad j = 1, 2, 3; \quad (20)$$

в силу условия взаимного разделения корней, справедливы неравенства

$$\alpha_j^l = \frac{\prod_{j=1}^N (b_k - a_j)}{\prod_{k \neq j} (a_k - a_j)} < 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

- 3) последние два корня K_4 , K_5 уравнения (18) имеют коротковолновые приближения (19) для $j = 4, 5$ и длинноволновые приближения вида

$$n_j^0(n_1) = n_{j,0}^0 + O(|n_1|), \quad j = 4, 5, \quad (21)$$

где $n_{j,0}^0$ являются решениями устойчивого квадратного уравнения

$$Z^2 - \gamma_1 Z - \gamma_2 = 0.$$

3.2. Положим $\mathcal{P} = P_0 - P_2$, $\mathcal{Q} = P_1$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im}(\mathcal{P} - i\mathcal{Q})\overline{\mathcal{Q}} &= -\operatorname{Im}\left(P_0\overline{P_1} + \gamma_2 P_1\overline{P_2}\right) = \\ &= \operatorname{Im} n^0 \left(P'_1 P_0 - P'_0 P_1 + \gamma_2(P'_2 P_1 - P'_1 P_2)\right) \Big|_{\operatorname{Im} n^0=0} + O((\operatorname{Im} n^0)^2) + |\mathcal{Q}|^2. \end{aligned}$$

Из условия взаимного разделения корней пар полиномов P_0, P_1 и P_1, P_2 нетрудно получить

$$\left(P'_4 P_5 - P'_5 P_4 + \gamma_2(P'_3 P_4 - P'_4 P_3)\right) \Big|_{\operatorname{Im} n_0=0} < 0 \quad \forall n_1 \in \mathbb{R}^1, \quad n_1 \neq 0.$$

Таким образом, в достаточно малой окрестности вещественной прямой при $\operatorname{Im} n_0 < 0$ нет корней полинома (18).

В 13-моментном случае докажем несуществование вещественных корней. Если существует вещественный корень, то

$$(P_0 - P_2)(n_0(n_1^*), n_1^*) = P_1(n_0(n_1^*), n_1^*) = 0, \quad n_1^* \neq 0,$$

для некоторого $k \in \{1, \dots, 4\}$, где $n_0(n_1^*) = -n_1^*/b_k$. Отсюда получаем

$$(P_0 - P_2)(n_0(n_1^*), n_1^*) = \frac{(n_1^*)^3}{b_k^3} \left(\frac{(n_1^*)^2}{b_k^2} \Pi_{j=1}^5(b_k - c_j) - \Pi_{j=1}^3(b_k - a_j) \right) \neq 0.$$

В силу условия взаимного разделения корней, имеем

$$\frac{(n_1^*)^2}{b_k^2} \Pi_{j=1}^5(b_k - c_j) - \Pi_{j=1}^3(b_k - a_j) > 0,$$

что противоречит уравнению $(P_0 - P_2)(n_0(n_1^*), n_1^*) = 0$.

3.3. Из коротковолнового приближения корней для достаточно больших значений $|n_1| \gg 1$ следует, что $\operatorname{Im} z_j > 0$, $j = 1, \dots, 5$. Длинноволновое приближение (20) при малых значениях $|n_1| \leq \delta_2 \ll 1$ для первых трех корней позволяет оценить их мнимую часть

$$\frac{\Pi_{j=1}^k(b_k - a_j)}{\Pi_{k \neq j}(a_k - a_j)} < 0, \quad j = 1, \dots, 3.$$

Отсюда следует, что три корня лежат в верхней полуплоскости. Для двух так называемых погранслойных корней имеем разложение (21), где $n_{j,0}$, $j = 4, 5$, — корни уравнения

$$(n_{j,0})^2 - i\gamma_1 n_{j,0} - \gamma_2 = 0.$$

В силу условия Рауса—Гурвица $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, имеем

$$\operatorname{Im} n_{j,0} > 0.$$

Более того, из неравенства $\gamma_1^2 - 4\gamma_2 > 0$ следует, что корни $n_{j,0}$, $j = 4, 5$, — чисто мнимые.

3.4. Учитывая, что, в силу асимптотических разложений (18), (20), (21), корни лежат в верхней полуплоскости как для достаточно больших $|n_1| \gg 1$, так и достаточно малых значений $|n_1| \ll 1$; в силу непрерывности корней, они должны оставаться в верхней полуплоскости для любого значения $n_1 \in \mathbb{R}^1$.

4. 20-МОМЕНТНЫЙ СЛУЧАЙ

Теперь приведем доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим случай $n_1 > 0$ (случай $n_1 < 0$ исследуется аналогично).

Так же, как выше, прямым вычислением получаем регулярные асимптотические разложения корней уравнения

$$P^{(20)}(n_0, n_1) = P_0(n_0, n_1) - i\gamma_1 P_1(n_0, n_1) - \gamma_2 P_2(n_0, n_1) + i\gamma_3 P_3(n_0, n_1) = 0. \quad (22)$$

Здесь $\omega = Bn_0$, $k = Bn_1$.

1) Для $|n_1| \gg 1$ корни K_j , $j = 1, \dots, 6$, уравнения (22) имеют коротковолновые приближения

$$n_j^0(n_1) = -c_j n_1 + i\alpha_j^h + O\left(\frac{1}{n_1}\right), \quad j = 1, \dots, 6, \quad (23)$$

$$\alpha_j^h = \frac{\prod_{k=1}^k (b_k - c_j)}{\prod_{k \neq j} (c_k - c_j)}.$$

Здесь, в силу условия взаимного разделения корней, выполнены неравенства

$$\gamma_1 \frac{\prod_{k \neq 3} (b_k - c_3)}{\prod_{k \neq 3,4} (c_k - c_3)} > 0. \quad (24)$$

Следовательно, при $|n_1| \gg 1$ имеем

$$\operatorname{Im} n_j^0 > 0, \quad j = 1, \dots, 6, \quad n_1 \neq 0.$$

2) Для трех первых корней в длинноволновом приближении, когда $|n_1| \ll 1$, справедливы асимптотические разложения вида

$$n_j^0 = -a_j n_1 - i\alpha_j^l n_1^2 + O(n_1^3), \quad j = 1, 2, 3, \quad (25)$$

$$\alpha_j^l = \frac{\gamma_2 \prod_{k=1}^4 (d_k - a_j)}{\gamma_3 \prod_{k \neq j} (a_k - a_j)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, для этих корней $\operatorname{Im} n_j^0 > 0$, $n_1 \neq 0$.

3) В длинноволновом приближении есть еще три корня с асимптотическими разложениями вида

$$n_j^0 = n_{j,0}^l + O(|n_1|), \quad j = 4, 5, 6.$$

Главные части этих корней для операторного пучка (22) являются решениями кубического уравнения

$$(n_{j,0}^l)^3 - i\gamma_1 (n_{j,0}^l)^2 - \gamma_2 n_{j,0}^l + i\gamma_3 = 0, \quad j = 4, 5, 6. \quad (26)$$

Замена $n_{j,0}^l = -iz$ приводит исследование уравнения (26) к исследованию уравнения (27).

Лемма 4.1 (условие Рауса—Гурвица). *Вещественные части корней кубического уравнения*

$$\alpha_0 \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad (27)$$

отрицательны тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},$$

т.е. $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$.

Для уравнения (27) в 20-моментном случае имеем

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{19}{6}.$$

Очевидно, что условия Рауса—Гурвица выполнены. Следовательно, корни лежат в верхней полуплоскости.

Теперь рассмотрим компактное множество значений $\delta_2 \leq |n_1| \leq \delta_1$. Так же, как выше, получим

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Im} (\mathcal{P} \overline{\mathcal{Q}})(n_1, n^0) = -\gamma_1 \operatorname{Im} (\mathcal{P}_0 \overline{\mathcal{P}}_1) - \\ & -\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{Im} (\mathcal{P}_1 \overline{\mathcal{P}}_2) - \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{Im} (\mathcal{P}_2 \overline{\mathcal{P}}_3) + |\gamma_1 \mathcal{P}_2 - \gamma_3 \mathcal{P}_3|^2 + \gamma_3 \operatorname{Im} (\mathcal{P}_0 \overline{\mathcal{P}}_3). \end{aligned} \quad (28)$$

Положим $n_0 = Z n_1$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= -\gamma_1 \operatorname{Im} \left(\mathcal{P}_0 \overline{\mathcal{P}_1} \right) - \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{Im} \left(\mathcal{P}_1 \overline{\mathcal{P}_2} \right) - \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{Im} \left(\mathcal{P}_1 \overline{\mathcal{P}_2} \right) + \gamma_3 \operatorname{Im} \left(\mathcal{P}_0 \overline{\mathcal{P}_2} \right) = \\ &= n_1^8 \operatorname{Im} Z \left\{ n_1^2 \gamma_1 ((\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0)'_Z \mathcal{P}_1)(1, Z) + \frac{1}{n_1^2} \gamma_2 \gamma_3 ((\mathcal{P}_3)'_Z \mathcal{P}_2 - (\mathcal{P}_2)'_Z \mathcal{P}_3)(1, Z) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 \gamma_2 ((\mathcal{P}_2)'_Z \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_2)(1, Z) - \gamma_3 ((\mathcal{P}_3)'_Z \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0)'_Z \mathcal{P}_3)(1, Z) \right\} \Big|_{\operatorname{Im} Z=0} + O((\operatorname{Im} Z)^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Из условия взаимного разделения корней многочленов $\mathcal{P}_j$, $\mathcal{P}_{j-1}$, $j = 0, 1, 2$, для любого вещественного $Z \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0)'_Z \mathcal{P}_1(1, Z) &< 0, \\ ((\mathcal{P}_3)'_Z \mathcal{P}_2 - (\mathcal{P}_2)'_Z \mathcal{P}_3)(1, Z) &< 0, \\ ((\mathcal{P}_2)'_Z \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_2)(1, Z) &< 0. \end{aligned}$$

Осталось оценить последний член в (29). Заметим, что если для любого $Z \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &((\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0)'_Z \mathcal{P}_1)(1, Z) + \\ &+ \gamma_2 (\mathcal{P}_2)_Z \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_2(1, Z) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} ((\mathcal{P}_3)'_Z \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0)'_Z \mathcal{P}_3)(1, Z) < 0, \end{aligned} \quad (30)$$

то $I_1 < 0$ для любого $n_1 \in \mathbb{R}^1$, $|n_1| \in (\delta_2, \delta_1)$, $|n_1| \gg 1$. Если для любого $Z \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\gamma_3 ((\mathcal{P}_3)'_Z \mathcal{P}_2 - (\mathcal{P}_2)'_Z \mathcal{P}_3)(1, Z) + \\ &+ \gamma_1 (\mathcal{P}_2)_Z \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_1)'_Z \mathcal{P}_2(1, Z) - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} ((\mathcal{P}_3)'_Z \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0)'_Z \mathcal{P}_3)(1, Z) < 0, \end{aligned} \quad (31)$$

то $I_1 < 0$ для любого $n_1 \in \mathbb{R}^1$, $|n_1| \in (\delta_2, \delta_1)$, $|n_1| \leq 1$. Очевидно, что (30), (31) выполнены, если постоянная γ_3 достаточно мала. Вычисления на компьютере показывают, что для любого $Z \in \mathbb{R}^1$ неравенства (30) и (31) выполнены. Следовательно, для любых вещественных $Z \in \mathbb{R}^1$ и $\delta_2 \leq |n_1| \leq \delta_1$ имеем $I_1 < 0$. Из (29) следует, что нет корней уравнения (22) в нижней полуплоскости. Осталось доказать, что уравнение (22) не имеет вещественных корней.

Прежде всего отметим, что вещественные корни не могут быть кратными. Прямые вычисления показывают, что шесть корней $p_j(n_1)$ уравнения $\mathcal{P} = 0$ принадлежат интервалам

$$\begin{aligned} p_6(n_1) &< c_6 n_1, & d_4 n_1 &< p_5(n_1) < c_5 n_1, \\ d_3 n_1 &< p_4(n_1) < c_3 n_1 < p_3(n_1) < d_2 n_1, \\ c_2 n_1 &< p_2(n_1) < d_1 n_1, & c_1 n_1 &< p_1(n_1). \end{aligned}$$

Пять корней $q_j(n_1)$ уравнения $\mathcal{Q} = 0$ принадлежат интервалам

$$\begin{aligned} q_5(n_1) &< b_5 n_1, & a_3 n_1 &< q_4(n_1) < b_4 n_1, & q_3(n_1) &= b_3 n_1, \\ b_2 n_1 &< q_2(n_1) < a_1 n_1, & b_1 n_1 &< q_1(n_1). \end{aligned}$$

Следовательно, общие вещественные корни уравнений $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0$ могут быть только простыми.

Отсюда вытекает гладкость по n_1 траектории корня $n^0(n_1)$ в окрестности вещественного корня $n^0(n_1^*)$. Дифференцируя уравнение (22) вдоль траектории корня при $n_1 = n_1^*$, получим

$$\mathcal{P}'_{n_0}(n_1^*, n^0(n_1^*)) \frac{dn^0(n_1^*)}{dn_1} - \mathcal{P}'_{n_1}(n_1^*, n^0(n_1^*)) - i \left(\mathcal{Q}'_{n_0}(n_1^*, n^0(n_1^*)) \frac{dn^0(n_1^*)}{dn_1} - \mathcal{Q}'_{n_0}(n_1^*, n^0(n_1^*)) \right) = 0.$$

Траектория касается вещественной оси (в нижней полуплоскости нет корней); тогда $\frac{dn^0(n_1^*)}{dn_1}$ — вещественное число. Дифференцируя (22) дважды по n_1 , для мнимой части второй производной $\text{Im} \left(\frac{d^2 n^0(n_1^*)}{d^2 n_1} \right)$ в точке касания получим уравнение

$$\left(\mathcal{P}'_{n_0}(n_1^*, n^0(n_1^*)) - i \mathcal{Q}'_{n_0}(n_1^*, n^0(n_1^*)) \right) \text{Im} \left(\frac{d^2 n^0(n_1^*)}{d^2 n_1} \right) = 0.$$

В силу простоты корня $n^0(n_1^*)$, отсюда следует, что

$$\text{Im} \left(\frac{d^2 n^0(n_1^*)}{d^2 n_1} \right) = 0.$$

Таким же образом можно доказать вещественность любой производной $\text{Im} \left(\frac{d^j n^0(n_1^*)}{d^j n_1} \right)$. Ввиду вещественной аналитичности траектории, следует, что траектория должна остаться на вещественной оси при $n_1 < n_1^*$, что противоречит длинноволновому приближению. Для малых значений n_1 корни находятся в верхней полуплоскости. Таким образом, для $n_1 \neq 0$ нет вещественных корней уравнения (22). В силу непрерывности корней относительно параметра $n_1 \in \mathbb{R}^1$, следует, что корни (22) лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } n_0 > 0$ для любых $n_1 \in \mathbb{R}^1$, $n_1 \neq 0$. При $n_1 = 0$ имеем трехкратный корень $n_0 = 0$ и три простых корня $n_0 = n_{\pm}^0$, $\text{Im } n_{\pm}^0 > 0$ уравнения (27), мнимая часть которых больше нуля.

5. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

Другой круг задач моментной теории связан со специфическими трудностями смешанных задач для систем моментов. Часть зависимых переменных (моменты высших порядков), как отмечалось выше, не имеет интуитивного физического смысла. Такие переменные не могут быть определены из эксперимента, что должно учитываться в структуре краевых условий. Для формулировки смешанной задачи требуются подходящие (корректные с физической точки зрения) граничные условия. Например, для разреженного газа возможны скачок температуры на стенке и появление скорости проскальзывания. Впервые граничные условия, описывающие эти феномены, были предложены в [13]. Условие, описывающее скачок температуры на стенке для 13-моментной системы в 1-D случае, имеет следующий вид:

$$\frac{2 - \theta}{\theta} q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{m}{kT}} \left(2 \varrho \frac{k^2}{m^2} T (T_w - T) + \frac{k}{m} \left(T_w - \frac{3}{2} T \right) p_{11} \right), \quad (32)$$

где $T_w(t)$ — заданная функция. Здесь θ — коэффициент согласования (см. [13]). Это условие является линейной комбинацией неравновесных переменных.

Рассмотрим смешанную задачу в четверти плоскости $\mathbb{R}^{++} = \{(x, t), t > 0, x > 0\}$. Ниже исследуем корректность (в смысле [8]) линеаризованного граничного условия (32). В безразмерных переменных в 13- и 20-моментном случаях уравнение (32) запишется в виде:

$$(\alpha^\theta q_1 + \beta^p p_{\langle 11 \rangle})|_{x=0} = T_W - T|_{x=0}, \quad (\alpha^\theta q_1 + \beta^p p_{\langle 11 \rangle} + \beta^q \varrho_{\langle 111 \rangle})|_{x=0} = T_W - T|_{x=0}.$$

Здесь

$$\alpha^\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5\pi}{6}}, \quad \beta^p = \frac{1}{15}, \quad \beta^q = \frac{3}{10}. \quad (33)$$

Дополнительно,

$$v_1|_{x=0} = v_b(t), \quad \varrho|_{x=0} = \varrho_b(t), \quad p_{\langle 11 \rangle}|_{x=0} = 0$$

в 13-моментном случае и

$$\varrho_{\langle 111 \rangle}|_{x=0} = 0$$

в 20-моментном случае. Линеаризованные условия (см. [13]) являются частным случаем условий вида

$$\mathcal{BU}|_{x=0} = \mathcal{F}_b. \quad (34)$$

Здесь $\mathcal{F}_b(t)$ — граничные данные задачи, $\mathcal{B}$ является $3 \times (3 + n_g)$ матрицей с постоянными коэффициентами, $n_g = 2$ и $n_g = 3$ в 13- и 20-моментном случаях соответственно.

Комментарий 1. Ниже мы получим условие корректности граничного условия (34) и как следствие — условие корректности граничного условия, предложенного в [13]. Пусть N_c^+ — число положительных постоянных $\mu_E + \tilde{c}_j > 0$ и N_a^+ — число положительных постоянных $\mu_E + \tilde{a}_j > 0$. Покажем, что число N^+ необходимых условий корректной задачи (34) равно N_c^+ — числу входящих в область $\mathbb{R}^{++}$ характеристик старшей части линеаризованной системы. Точнее, $N^+ = N_a^+ + N_b^+$. Здесь N_a^+ — число входящих в область $\mathbb{R}^{++}$ характеристик линеаризованной системы уравнений Эйлера, N_b^+ равно числу линейно независимых устойчивых решений типа погранслоя, локализованных в $1/B$ окрестности границы.

Для простоты рассмотрим нулевые начальные данные. Как обычно, продолжим решение и краевые данные нулем для $t < 0$ и сведём преобразованием Фурье смешанную задачу в четверти плоскости $\mathbb{R}^{++}$ к граничной задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$, общее решение которой представлено в виде

$$U(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \sum_{j=1}^{N^+} G_j(B\xi) R_j(B\xi) e^{iB(\xi t + K_j(\xi)x)} d\xi, \quad t > 0. \quad (35)$$

Контур интегрирования $\mathcal{B}$ находится выше всех особенностей подынтегрального выражения в комплексной ξ -плоскости. Здесь K_j , $j = 1, \dots, 3 + n_g$, определяются корнями $k(\omega, B) = BK(\xi)$, $\omega = B\xi$ относительно $k = k(\omega)$ дисперсионного уравнения смешанной задачи в 13-и 20-моментном случаях соответственно, $\mathcal{R}_j$ — столбцы при $x = t = 0$ фундаментальной матрицы $\mathcal{F}(t, x, \xi)$ порядка $N^+ \times (3 + N_g)$ устойчивых плоских решений

$$R_j(B\xi) e^{iB(\xi t + BK_j(\xi)x)}, \quad \text{Im } K_j > 0,$$

полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Неизвестные функции G_j однозначно определяются из граничного условия (34) как решение системы

$$\mathcal{BR}(\xi)\mathcal{G}(\xi) = \tilde{\mathcal{F}}_b(\xi),$$

если выполнен аналог условия Шапиро—Лопатинского [1]

$$\det(\mathcal{BR}) \neq 0, \quad \text{Im } \xi \geq c_0, \quad (36)$$

для некоторого $c_0 \geq 0$. Здесь $\tilde{\mathcal{F}}_b(\xi)$ — преобразование Фурье граничных данных в (34). Тем самым, для смешанной задачи получим аналог теоремы Вишика—Люстерника о малых сингулярных возмущениях общих граничных эллиптических задач.

6. Полиномиальный пучок смешанной задачи

Теперь исследуем полиномиальный пучок, определяемый смешанной задачей в 13- и 20-моментном случаях. В 13-моментном случае дисперсионное уравнение смешанной задачи имеет вид

$$P_0(K(\xi), \xi) - P_2(K(\xi), \xi) - iP_1(K(\xi), \xi) = 0, \quad (37)$$

где

$$P_0 = \Pi_{j=1}^5(\xi + (\mu_E + \tilde{c}_j)K(\xi)), \quad P_1 = \Pi_{j=1}^4(\xi + (\mu_E + \tilde{b}_j)K(\xi)), \quad P_2 = \Pi_{j=1}^3(\xi + (\mu_E + \tilde{a}_j)K(\xi)).$$

Переход от дисперсионного уравнения задачи Коши к дисперсионному уравнению смешанной задачи в 20-моментном случае

$$P_0(K(\xi), \xi) - P_2(K(\xi), \xi) - i(P_1(K(\xi), \xi) - P_3(K(\xi), \xi)) = 0 \quad (38)$$

тот же, что и в 13-моментном. Как будет показано ниже, свойства корней дисперсионных уравнений (37), (38) определяют поведение решений смешанной задачи.

Теорема 6.1. Пусть полиномиальный пучок дисперсионного уравнения (14) (соответственно, (22)) удовлетворяет условиям предложения 2.1 (предложения 2.2). Дополнительно в 13-моментном случае потребуем, чтобы

$$\mu_E \neq 0, \quad (\mu_E \pm 1) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{c}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{b}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (39)$$

а в 20-моментном случае

$$\mu_E \neq 0, \quad (\mu_E \pm 1) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{c}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{b}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{d}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (40)$$

и

$$\gamma_1 \gamma_2 \Pi_{j=1,2} |\mu_E| |(\mu_E \pm \tilde{b}_j)| |(\mu_E \pm \tilde{d}_j)| - \gamma_3 |\mu_E| \Pi_{k=1,2} |(\mu_E \pm \tilde{c}_j)| |(\mu_E \pm 1)| > 0.$$

Тогда в 13- и 20-моментном случаях для любого $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\xi \neq 0$, число $N^\pm(\xi)$ корней дисперсионного уравнения с положительной и отрицательной мнимыми частями не зависит от $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\xi \neq 0$, и равно $N_c^\pm = N_a^\pm + N_b^\pm$.

Докажем теорему 6.1. Для этого покажем, что в 13 и 20-моментном случаях для любого вещественного $\xi > 0$ корни дисперсионного уравнения лежат в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости, т.е. N^+ корней удовлетворяют условию $\text{Im } K(\xi) > 0$, а $3 + N_g - N^+$ корней таковы, что $\text{Im } K(\xi) < 0$. Случай $\xi < 0$ исследуется аналогично.

6.1. 13-моментный случай. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1. Пусть полиномиальный пучок (37) удовлетворяет условиям теоремы 6.1. Тогда пять корней (37) имеют следующую структуру:

1) для пяти корней $K_j(\xi)$ в высокочастотном приближении при $|\xi| \geq \delta_1$ справедливо следующее разложение:

$$K_{h,j} = -\frac{\xi}{c_j} + i\kappa_j^h + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu_E + \tilde{c}_1, \quad c_2 = \mu_E + \tilde{c}_2, \quad c_3 = \mu_E, \\ c_4 &= \mu_E - \tilde{c}_2, \quad c_5 = \mu_E - \tilde{c}_1, \quad \kappa_j^h = \frac{\gamma_1 \Pi_{k=1}^4 (b_k - c_j)}{c_j \Pi_{k \neq j} (c_k - c_j)}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_E + \tilde{b}_1, \quad b_2 = \mu_E + \tilde{b}_2, \quad b_3 = \mu_E - \tilde{b}_2, \quad b_4 = \mu_E - \tilde{b}_1, \\ a_1 &= \mu_E + 1, \quad a_2 = \mu_E, \quad a_3 = \mu_E - 1; \end{aligned}$$

2) в низкочастотном приближении при $|\xi| \leq \delta_2$ для трех корней имеем разложения вида

$$K_{l,j} = -\frac{\xi}{a_j} + i\kappa_j^l \xi^2 + O(|\xi|^3), \quad j = 1, 2, 3, \quad (43)$$

$$\kappa_j^l = \frac{\gamma_1 \Pi_{k=1}^4 (b_k - a_j)}{a_j^3 \gamma_2 \Pi_{k \neq j} (a_k - a_j)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для двух $K_j(\xi)$, $j = 4, 5$, так называемых погранслойных корней, в низкочастотном приближении справедливы разложения

$$K_j = \kappa_{b,j}^l + O(|\xi|), \quad j = 4, 5. \quad (44)$$

Здесь $\kappa_{b,j}^l$, $j = 4, 5$, являются корнями уравнения

$$\begin{aligned} (\kappa_b^l)^2 - i\alpha_1 \kappa_b^l - \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 &= \gamma_1 \frac{\Pi_{j=1}^4 b_j}{\Pi_{j=1}^5 c_j}, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \frac{\Pi_{j=1}^3 a_j}{\Pi_{j=1}^5 c_j}. \end{aligned} \quad (45)$$

Построение асимптотических разложений проводится прямым вычислением регулярной асимптотики. Из условия взаимного разделения корней строго гиперболической тройки полиномов следует

$$c_j \kappa_j^h > 0, \quad j = 1, \dots, 5, \quad a_j \kappa_j^l > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Таким образом, для больших $|\xi| \gg 1$ в верхней полуплоскости находится N_c^+ (соответственно, в нижней N_c^-) корней. Также для малых $|\xi| \ll 1$ в верхней полуплоскости находится N_a^+ (соответственно, в нижней N_a^-) корней. Теперь для $|\xi| \ll 1$ рассмотрим погранслойные корни, главные части которых являются решениями уравнения (45).

После замены $\kappa_b^l = -iz$ это уравнение может иметь различную структуру в зависимости от чисел N_c^-, N_b^-, N_a^- отрицательных значений c_j, b_j, a_j . Возможны следующие комбинации

$$\begin{pmatrix} N_c^+ & N_b^+ & N_a^+ & \text{sign } \alpha_1 & \text{sign } \alpha_2 & N_b^+ & P \\ \hline 0 & 0 & 0 & + & + & 2 & P_1(z) \\ 1 & 0 & 0 & - & - & 1 & P_2(z) \\ 1 & 1 & 0 & + & - & 1 & P_3(z) \\ 1 & 1 & 1 & + & + & 2 & P_1(z) \\ 2 & 1 & 1 & - & - & 1 & P_2(z) \\ 2 & 2 & 1 & + & - & 1 & P_3(z) \\ 3 & 2 & 2 & - & - & 1 & P_2(z) \\ 3 & 3 & 2 & + & - & 1 & P_3(-z) \\ 4 & 3 & 2 & - & + & 0 & P_4(-z) \\ 4 & 3 & 3 & - & - & 1 & P_2(-z) \\ 4 & 4 & 3 & + & - & 1 & P_3(-z) \\ 5 & 4 & 3 & - & + & 0 & P_4(-z) \end{pmatrix}.$$

Здесь полиномы

$$\begin{aligned} P_1(z) &= z^2 + |\alpha_1|z + |\alpha_2|, & P_2(z) &= z^2 - |\alpha_1|z - |\alpha_2|, \\ P_3(z) &= z^2 + |\alpha_1|z - |\alpha_2|, & P_4(z) &= z^2 - |\alpha_1|z + |\alpha_3|, \end{aligned}$$

N_b^+ — число корней полинома P_j с отрицательной вещественной частью.

Отсюда следует утверждение: для любого достаточно малого $|\xi| \ll 1$ число корней в верхней полуплоскости (соответственно, в нижней полуплоскости) равно $N_c^+ = N_a^+ + N_b^+$ и $N_c^- = N_a^- + N_b^-$. Таким образом, для любого вещественного $\xi > 0$ вне отрезка $\delta_2 \leq \xi \leq \delta_1$, нет вещественных и чисто мнимых корней ($\text{Im } K(\xi) = 0$) дисперсионного уравнения, и их число в верхней и нижней полуплоскостях не зависит от ξ .

Несуществование вещественных корней в 13-моментном случае доказывается просто. Если существует вещественный корень, тогда

$$(P_0 - P_2)(\xi^*, K(\xi^*)) = P_1(\xi^*, K(\xi^*)) = 0, \quad \xi^* \neq 0,$$

для некоторого $k \in \{1, \dots, 4\}$, где $K(\xi^*) = -\xi^*/b_k$. Отсюда получаем

$$(P_0 - P_2)(\xi^*, K(\xi^*)) = \frac{(\xi^*)^3}{b_k^3} \left(\frac{(\xi^*)^2}{b_k^2} \Pi_{j=1}^5(b_k - c_j) - \Pi_{j=1}^3(b_k - a_j) \right) \neq 0,$$

так как, в силу условия взаимного разделения корней, имеем

$$\frac{(\xi^*)^2}{b_k^2} \Pi_{j=1}^5(b_k - c_j) - \Pi_{j=1}^3(b_k - a_j) > 0,$$

что противоречит уравнению $(P_0 - P_2)(\xi^*, K(\xi^*)) = 0$.

Следовательно, для $\xi > 0$ траектории корней не пересекают вещественной оси. Отсюда вытекает, что для любого $\xi > 0$ в верхней полуплоскости находится N_c^+ корней, и соответственно, N_c^- корней находится в нижней полуплоскости.

Таким образом, для любого $\xi \neq 0$ траектории корней остаются в верхней или нижней полуплоскостях комплексной плоскости. Более того, для больших значений $\xi \gg 1$ траектории корней $K_j(\xi)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости находятся одна над другой по возрастанию номера $j = 1, \dots, 5$, т.е. $\text{Im } K_{j+1} > \text{Im } K_j$, $j = 1, \dots, 4$, и движутся к мнимой оси с убывающими (по возрастанию номера j) скоростями проекций на вещественную ось, оставаясь в верхней полуплоскости комплексной плоскости. Теорема 6.1 в 13-моментном случае доказана.

Комментарий 2. На самом деле, можно ввести понятие непрерывной ветви корня. Первой ветвью (первым корнем K_1) назовем огибающую снизу всех корней. Затем рассмотрим замыкание области выше этой огибающей и назовем второй ветвью (вторым корнем K_2) огибающую снизу всех корней в этом множестве и т.д. Тогда ветви (корни) (37) входят в окрестность малых значений $\xi > 0$, $\xi \ll 1$ по кривым, прилегающим в главном (до порядка ξ^3) к параболам

$$\text{Im } K_j = \kappa_j^l (\text{Re } K_j)^2, \quad \kappa_3^l > \kappa_2^l > \kappa_1^l > 0.$$

Здесь

$$\kappa_j^l = -\frac{1}{a_j^2} \frac{\prod_{k=1}^k (b_k - a_j)}{\prod_{k \neq j} (a_k - a_j)}.$$

При $\xi = 0$ имеем трехкратный корень $K_j(0) = 0$, $j = 1, 2, 3$, и два простых погранслоиных корня $K_j(0) = \kappa_{b,j}^i$, $j = 4, 5$.

Возникает проблема описания корней в промежуточных состояниях, когда $\delta_2 \leq |\xi| \ll \delta_1$, что чрезвычайно важно в решении задачи о иерархии волн [5] в системах моментов неравновесной термодинамики на больших временах и при $B \rightarrow \infty$. Гипотеза состоит в том, что в промежуточных состояниях вещественные части корней последовательно находятся в окрестностях корней промежуточных гиперболических операторов цепочки, определяемой дисперсионным уравнением. Насколько это верно, покажут дальнейшие исследования.

6.2. 20-моментный случай. В 20-моментном случае так же, как выше, получим следующее утверждение.

Лемма 6.2. Пусть полиномиальный пучок (38) удовлетворяет условиям теоремы 6.1 (в 20-моментном случае) и пусть

$$\mu_E \neq 0, \quad (\mu_E \pm 1) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{c}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{b}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{d}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (46)$$

$$\gamma_1 \gamma_2 \prod_{j=1,2} |\mu_E| |(\mu_E \pm \tilde{b}_j)| |(\mu_E \pm \tilde{d}_j)| - \gamma_3 |\mu_E| \prod_{k=1,2} |(\mu_E \pm \tilde{c}_j)| |(\mu_E \pm 1)| > 0.$$

Тогда шесть $K_j(\xi)$ корней уравнения (38) имеют высокочастотное и низкочастотное асимптотические приближения следующего вида:

1) для четырёх корней $K_j(\xi)$ в высокочастотном приближении $|\xi| \gg 1$ справедливо разложение

$$K_j(\xi) = -\frac{\xi}{c_j} + i \frac{\gamma_1 \prod_{k=1}^5 (b_k - c_j)}{c_j \prod_{k \neq j} (c_k - c_j)} + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad (47)$$

2) в низкочастотном приближении $|\xi| \ll 1$ имеем

$$K_j(\xi) = -\frac{\xi}{a_j} + i \frac{\gamma_2 \prod_{k=1}^4 (d_k - a_j)}{a_j^3 \gamma_3 \prod_{k \neq j} (a_k - a_j)} \xi^2 + O(|\xi|^3), \quad j = 1, 2, 3. \quad (48)$$

В этом приближении есть еще три погранслоиных корня с асимптотическими разложениями вида

$$K_j(\xi) = \kappa_{b,j}^l + O(|\xi|), \quad j = 4, 5, 6. \quad (49)$$

Главные части погранслоиных корней (49) определяются решениями кубического уравнения

$$\prod_{j=1}^6 c_j (\kappa_b^l)^3 - i \gamma_1 \prod_{j=1}^5 b_j (\kappa_b^l)^2 - \gamma_2 \prod_{j=1}^4 d_j \kappa_b^l + i \gamma_3 \prod_{j=1}^2 a_j = 0. \quad (50)$$

Доказательство этой леммы проводится прямым вычислением регулярных асимптотик. Теперь исследуем уравнение для погранслойных корней (50). Положим $\kappa_b^l = -iz$ и приведем классификацию структуры этого уравнения в зависимости от чисел $N_c^-, N_b^-, N_d^-, N_a^-$ отрицательных значений c_j, b_j, d_j, a_j :

N_c^-	N_b^-	N_d^-	N_a^-	$\text{sign}(\alpha_1)$	$\text{sign}(\alpha_2)$	$\text{sign}(\alpha_3)$	N_b^+	P
0	0	0	0	+	+	+	3	$P_1(z)$
1	0	0	0	—	—	—	2	$P_2(z)$
1	1	0	0	+	—	—	2	$P_3(z)$
1	1	1	0	+	+	—	2	$P_4(z)$
1	1	1	1	+	+	+	3	$P_1(z)$
2	1	1	1	—	—	—	2	$P_2(z)$
2	2	1	1	+	—	—	2	$P_3(z)$
2	2	2	1	+	+	—	2	$P_4(z)$
4	3	2	2	—	+	+	1	$P_4(-z)$
4	3	3	2	—	—	+	1	$P_3(-z)$
4	4	3	2	+	—	+	1	$P_2(-z)$
5	4	3	2	—	+	—	0	$P_1(-z)$
5	4	3	3	—	+	+	1	$P_4(-z)$
5	4	4	3	+	—	+	1	$P_3(-z)$
5	5	4	3	+	—	+	1	$P_2(-z)$
6	5	4	3	—	+	—	0	$P_1(-z)$

Здесь

$$\alpha_1 = \gamma_1 \frac{\prod_{k=1}^5 b_k}{\prod_{j=1}^6 c_j}, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \frac{\prod_{k=1}^4 d_k}{\prod_{j=1}^6 c_j}, \quad \alpha_3 = \gamma_3 \frac{\prod_{k=1}^3 a_k}{\prod_{j=1}^6 c_j},$$

полиномы

$$\begin{aligned} P_1(z) &= z^3 + |\alpha_1|z^2 + |\alpha_2|z + |\alpha_3|, & P_2(z) &= z^3 - |\alpha_1|z^2 - |\alpha_2|z - |\alpha_3|, \\ P_3(z) &= z^3 + |\alpha_1|z^2 - |\alpha_2|z - |\alpha_3|, & P_4(z) &= z^3 + |\alpha_1|z^2 + |\alpha_2|z - |\alpha_3| \end{aligned}$$

и N_b^+ — число корней полинома P_j с отрицательной вещественной частью.

Лемма 6.3. Пусть $|\alpha_1\alpha_2| - |\alpha_3| > 0$. Тогда все корни полинома P_1 имеют отрицательные вещественные части, полиномы P_j , $j = 2, 3, 4$, имеют один положительный корень и два корня с отрицательными вещественными частями.

Утверждение о свойствах полинома P_1 является следствием правила Рауса—Гурвица. Для полинома P_2 имеем

$$P_3(0) = -|\alpha_3| < 0, \quad P_3(-|\alpha_1|) = |\alpha_1\alpha_2| - |\alpha_3| > 0,$$

откуда следует существование одного положительного корня и двух отрицательных. Для полиномов P_2, P_4 из условия $P_j(0) = -|\alpha_3| < 0$ также следует существование положительного корня $\kappa > 0$. Тогда эти полиномы можно представить в виде

$$P_4(z) = (z - \kappa)(y^2 + (3\kappa + |\alpha_1|)y + P'_j(\kappa)), \quad y = z - \kappa,$$

$$P_2(z) = (z - \kappa)(y^2 + (3\kappa - |\alpha_1|)y + P'_j(\kappa)),$$

где $P'_j(\kappa) > 0$, $j = 1, 2$. Так как $3\kappa + |\alpha_1| > 0$, то в первом случае вещественные части двух других корней отрицательны. Во втором случае

$$P_2(|\alpha_1|) = -|\alpha_2\alpha_1| - |\alpha_3| < 0 \implies \kappa > |\alpha_1|,$$

следовательно, $3\kappa - |\alpha_1| > 0$, откуда снова получаем, что вещественные части двух других корней полинома P_2 отрицательны. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, так же, как в 13-моментном случае, для значений $|\xi| \geq \delta_1^{-1}$, $|\xi| \leq \delta_1$, где δ_1 достаточно мало, N^+ корней уравнения (48) для $n_1 > 0$ лежат в верхней и соответственно, $N^- = 6 - N^+$ корней — в нижней полуплоскостях комплексной плоскости (то же справедливо для $n_1 < 0$). Число их не зависит от n_1 и равно N_c^+ и N_c^- соответственно. Завершение доказательства этого предложения проводится аналогично 13-моментному случаю. Доказательство несуществования вещественных корней (48) следует из доказательства того же факта для дисперсионного уравнения задачи Коши.

Как было отмечено выше, эти результаты позволяют, используя стандартную процедуру построения общего решения линеаризованной смешанной задачи, построить аналог условия Шапиро—Лопатинского для эллиптических краевых задач [1].

7. УСЛОВИЕ ШАПИРО—ЛОПАТИНСКОГО

Исследуем наиболее интересный случай линеаризации одномерной 13-моментной системы при $N_c^+ = 4 > N_a^+ = 2$, т.е. случай, когда требуется на два граничных условия больше, чем для предельной линеаризованной системы уравнений Эйлера.

Пусть $\mathcal{R}^v, \mathcal{R}^e, \mathcal{R}^U, \mathcal{R}^{p(11)}, \mathcal{R}^{q1}$ — строки фундаментальной матрицы $\mathcal{F}$ устойчивых решений при $t = x = 0$, определяемые координатами величин $v, e, U, p_{(11)}, q_1$ соответственно. В 13-моментном случае, когда $N_c^+ = 4$, рассмотрим матрицу $\mathcal{R}^D$, строками которой являются $\mathcal{R}^v, \mathcal{R}^e, \mathcal{R}^U, \mathcal{R}^{p(11)}$, и матрицу $\mathcal{R}^\theta$, строки которой — $\mathcal{R}^v, \mathcal{R}^e, \mathcal{R}^U, \mathcal{R}^{q1}$.

Лемма 7.1. В 1-D, 13-моментном случае ($N^+ = 4$), для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\xi \neq 0$, исключая случай кратности устойчивых корней, имеем

$$\det \mathcal{R}^\theta(\xi) \neq 0. \quad (51)$$

Как следствие этой леммы, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 (о числе устойчивых корней 13-моментного пучка). Тогда для достаточно большого α^θ , т.е. достаточно малого коэффициента согласования $\theta \ll 1$, краевая задача (33) корректна (справедливо условие Шапиро—Лопатинского (36)).

Действительно, для граничного условия (33) имеем

$$\mathcal{B}^\theta = \mathcal{B}\mathcal{R} = \alpha^\theta \mathcal{R}^\theta + \mathcal{R}^D.$$

Если $\det \mathcal{R}^\theta \neq 0$, то для достаточно большого $\alpha^\theta \geq 1$ получаем

$$\det \mathcal{B}^\theta \neq 0.$$

Теперь докажем лемму 7.1 в 13-моментном случае. Доказательство этого утверждения в 20-моментном случае аналогично. Из последних трех уравнений системы для собственных векторов $\mathcal{R}^v, \dots, \mathcal{R}^{q1}$ в 1-D, 13-моментном случае следует, что

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4} \frac{(\xi + \mu_E K(\xi)) + \frac{4}{5}}{(\xi + \mu_E K(\xi))} \right) \mathcal{R}^{p(11)} + \left[\frac{(\xi + \mu_E K(\xi)) + \frac{8}{15}}{K(\xi)} - \frac{3}{5} \frac{K(\xi)}{(\xi + \mu_E K(\xi))} \right] \mathcal{R}^{q1} = 0.$$

Если бы векторы $\mathcal{R}^{p(11)}, \mathcal{R}^{q1}$ были линейно зависимы, т.е. $\mathcal{R}^{p(11)} = \lambda(\xi) \mathcal{R}^{q1}$, то уравнение второго порядка относительно $K(\xi)$

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) \left(\frac{3}{5} K(\xi) (\xi + \mu_E K(\xi)) + \frac{3}{4} K(\xi) \left((\xi + \mu_E K(\xi)) + \frac{4}{5} \right) \right) = \\ = (\xi + \mu_E K(\xi)) \left((\xi + \mu_E K(\xi)) + \frac{8}{15} \right) - \frac{3}{5} K(\xi)^2 \end{aligned}$$

имело бы четыре разных корня K_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, векторы $\mathcal{R}^{p(11)}, \mathcal{R}^{q1}$ линейно независимы. Таким же образом, исключая $\mathcal{R}^{q1}, \mathcal{R}^U$ (или $\mathcal{R}^{p(11)}, \mathcal{R}^U$), докажем линейную независимость векторов $\mathcal{R}^e, \mathcal{R}^{p(11)}$ (соответственно, $\mathcal{R}^e, \mathcal{R}^{q1}$).

Определение 7.1. Корректную смешанную задачу назовем равновесной, если в нормах корректности задачи неравновесные переменные стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$.

Лемма 7.2. Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда для единственного решения смешанной задачи справедлива следующая оценка:

$$B(\|p_{(11)}, C(R^{++})\| + \|q_1, C(R^{++})\|) \leq \\ \leq C_0(\|v_b, H^1(R^{++})\| + \|\varrho_b, H^1(R^{++})\| + \|T_W, H^1(R^{++})\|),$$

т.е. смешанная задача (33), является равновесной. При $B \rightarrow \infty$ для любых $x > 0$, $t \geq 0$ базовые компоненты решения стремятся к соответствующим компонентам решения предельной системы уравнений Эйлера

$$v(x, t, B) \rightarrow v_{\lim}(x, t) = v_b \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \frac{\mu_E}{(1 - \mu_E^2) \left(\frac{3}{2} \mu_E \alpha^\theta - 1 \right)} \left(\frac{k}{m} T_w - \frac{2}{5} \varrho_b \right) \left(t - \frac{x}{a_1} \right), \\ \varrho(x, t, B) \rightarrow \varrho_{\lim}(x, t) = v_{\lim}(x, t), \quad T(x, t, B) \rightarrow \\ \rightarrow T_{\lim}(x, t) = v_b \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \varrho_b \left(t - \frac{x}{a_2} \right) - \frac{1 + \mu_E}{(1 - \mu_E^2) \left(\frac{3}{2} \mu_E \alpha^\theta - 1 \right)} \left(\frac{k}{m} T_w - \frac{2}{5} \varrho_b \right) \left(t - \frac{x}{a_2} \right).$$

Результаты леммы 7.2 следуют из длинноволнового приближения матрицы $\mathcal{R}^\theta$ и оценок решений смешанных задач, полученных методом перевала [4].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты этой статьи относятся к нелинейным системам моментов неравновесной термодинамики. Такие системы ещё не изучены достаточно систематически. Мы исследовали их линеаризации в окрестности состояния равновесия и описали поведение решений задачи Коши и смешанной задачи, когда параметр $B \rightarrow \infty$.

Получены следующие результаты:

- 1) условия глобальной устойчивости решений задачи Коши как обобщение классической теоремы Эрмита—Биллера об устойчивых полиномах;
- 2) для смешанной задачи получен аналог теоремы Вишика—Люстерника о малых сингулярных возмущениях общих эллиптических задач. Последнее позволило определить условие Шапиро—Лопатинского о корректности смешанной задачи.

Более того, структура общего решения начальной и смешанной задач для линеаризованных одномерных систем дает правильное разложение асимптотического решения этих задач в 2-D и 3-D случаях. Такое разложение является аналогом разложений, предложенных П. Лаксом [11]. Детальное построение асимптотического решения для 13- и 20-моментных систем на плоскости будет предметом ближайшей публикации. Мы обоснуем это асимптотическое решение, используя «a,b,c-Фридрихс метод» [6].

Автор благодарен Dr. W. Dreyer (WIAS, Berlin) и профессору Л. Р. Волевицу (ИПМ, Москва) за полезные обсуждения.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ I (ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПУЧКИ)

Приведем пучки гиперболических полиномов задачи Коши в 2-D (решение (6)–(13) зависит только от двух пространственных переменных (x_1, x_2)) и в 3-D случаях.

В 2-D случае имеем следующие гиперболические пучки.

1) Дисперсионное уравнение задачи Коши для 14-моментной системы в 2-D случае является цепочкой из семи нестрого гиперболических полиномов вида

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^{10} \tau^4 \left[\tau^6 - \frac{123}{25} \tau^4 + \frac{161}{25} \tau^2 (1 - 0.306086956 \alpha \beta) - \frac{63}{25} (1 - 0.64 \alpha \beta) \right], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^9 \tau^3 \left[5 \tau^6 - \frac{304}{15} \tau^4 + \frac{2151}{125} \tau^2 (1 - 0.257154057 \alpha \beta) - \frac{706}{125} \left(1 - \frac{469}{3} \alpha \beta \right) \right], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{31}{8} \tau^6 - \frac{7561}{225} \tau^4 + \frac{1861}{75} \tau^2 \left(1 - \frac{31552}{139975} \alpha \beta \right) - \frac{547}{125} (1 - 0.368555758 \alpha \beta) \right], \\
P_3(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{305}{27} \tau^6 - \frac{1286}{45} \tau^4 + \frac{16301}{1125} \tau^2 \left(1 - \frac{2144}{16301} \alpha \beta \right) - \frac{176}{125} \left(1 - \frac{2}{11} \alpha \beta \right) \right], \\
P_4(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{62}{9} \tau^6 - \frac{8846}{675} \tau^4 + \frac{184}{45} \left(1 - \frac{8}{115} \alpha \beta \right) \tau^2 - \frac{4}{25} \right], \\
P_5(\omega, k) &= \frac{20}{9} |k|^5 \tau \left(\tau^4 - \frac{104}{25} \tau^2 + \frac{1}{5} \right), \quad P_6(\omega, k) = \frac{8}{27} |k|^4 \tau^2 (\tau^2 - 1),
\end{aligned}$$

где $\omega = |k|\tau$, $\alpha = k_1^2$, $\beta = k_2^2$. Нетрудно проверить, что для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$ этот гиперболический пучок длины $N = 5$ является нестрого гиперболическим.

2) Дисперсионное уравнение задачи Коши для 20-моментной системы в 2-D случае является цепочкой из 10 нестрого гиперболических полиномов вида

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^{13} \tau^7 \left[\tau^6 - \frac{103}{25} \tau^4 + \frac{21}{5} \tau^2 (1 - 0.347428571 \alpha \beta) - \frac{27}{25} (1 - 0.64 \alpha \beta) \right], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^{12} \tau^6 \left[\frac{31}{3} \tau^6 - \frac{2948}{75} \tau^4 + \frac{4531}{125} \tau^2 (1 - 0.33122931 \alpha \beta) - \frac{1074}{125} (1 - 0.60782123 \alpha \beta) \right], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^{11} \tau^5 \left[\frac{845}{18} \tau^6 - \frac{8151}{50} \tau^4 + \frac{100127}{750} \tau^2 (1 - 0.310293927 \alpha \beta) - \frac{7131}{250} (1 - 0.56676483 \alpha \beta) \right], \\
P_3(\omega, k) &= |k|^{10} \tau^4 \left[123 \tau^6 - \frac{34627}{90} \tau^4 + \frac{102476}{375} \tau^2 (1 - 0.282977478 \alpha \beta) - \frac{12741}{250} (1 - 0.513115141 \alpha \beta) \right], \\
P_4(\omega, k) &= \\
&= |k|^9 \tau^3 \left[\frac{9827}{48} \tau^6 - \frac{81743}{144} \tau^4 + 339.025(6) \tau^2 (1 - 0.617881438 \alpha \beta) - 52.5965(1 - 0.441105501 \alpha \beta) \right], \\
P_5(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{32311}{144} \tau^6 - \frac{973589}{1800} \tau^4 + 260.3735 \tau^2 (1 - 0.100183386 \alpha \beta) - \frac{3888}{125} (1 - 0.341(6) \alpha \beta) \right], \\
P_6(\omega, k) &= \\
&= |k|^7 \tau \left[\frac{7769}{48} \tau^6 - \frac{397427}{1200} \tau^4 + 120.7305 \tau^2 (1 - 0.016499558 \alpha \beta) - 9.6795(1 - 0.20083682 \alpha \beta) \right], \\
P_7(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{1185}{16} \tau^6 - 124.83 \tau^4 + \frac{495}{16} (1 - 0.069818181 \alpha \beta) \tau^2 - 1.215 \right], \\
P_8(\omega, k) &= |k|^5 \tau \left(\frac{39}{2} \tau^4 - \frac{1041}{40} \tau^2 + \frac{27}{8} \right), \quad P_9(\omega, k) = \frac{9}{4} |k|^4 \tau^2 (\tau^2 - 1).
\end{aligned}$$

Для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1$ этот гиперболический пучок длины $N = 10$ является нестрого гиперболическим.

3) Дисперсионное уравнение задачи Коши для 21-моментной системы в 2-D случае является цепочкой из 11 нестрого гиперболических полиномов вида

$$\begin{aligned}
 P_0(\omega, k) &= |k|^{14} \tau^8 \left[\tau^6 - \frac{123}{25} \tau^4 + \frac{161}{25} \tau^2 (1 - 0.306086957 \alpha \beta) - \frac{63}{25} (1 - 0.64 \alpha \beta) \right], \\
 P_1(\omega, k) &= |k|^{13} \tau^7 \left[11 \tau^6 - \frac{3734}{75} \tau^4 + \frac{7381}{125} \tau^2 (1 - 0.289174909 \alpha \beta) - \frac{2596}{125} (1 - 0.608936825 \alpha \beta) \right], \\
 P_2(\omega, k) &= |k|^{12} \tau^6 \left[\frac{323}{6} \tau^6 - \frac{99731}{450} \tau^4 + \frac{175651}{750} \tau^2 (1 - 0.268987939 \alpha \beta) - \frac{18071}{250} (1 - 0.570018262 \alpha \beta) \right], \\
 P_3(\omega, k) &= \\
 &= |k|^{11} \tau^5 \left[\frac{4166}{27} \tau^6 - \frac{256601}{450} \tau^4 + \frac{118309}{225} \tau^2 (1 - 0.244863874 \alpha \beta) - \frac{34483}{250} (1 - 0.520511557 \alpha \beta) \right], \\
 P_4(\omega, k) &= \\
 &= |k|^{10} \tau^4 \left[\frac{13763}{48} \tau^6 - \frac{2023357}{2160} \tau^4 + \frac{105713}{144} \tau^2 (1 - 0.216138413 \alpha \beta) - \frac{313379}{2000} (1 - 0.456719819 \alpha \beta) \right], \\
 P_5(\omega, k) &= \\
 &= |k|^9 \tau^3 \left[\frac{51965}{144} \tau^6 - \frac{138093}{1350} \tau^4 + \frac{2371987}{3600} \tau^2 (1 - 0.18231928 \alpha \beta) - \frac{107637}{3600} (1 - 0.374057248 \alpha \beta) \right], \\
 P_6(\omega, k) &= \\
 &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{134543}{432} \tau^6 - \frac{8117579}{10800} \tau^4 + \frac{2274577}{6000} \tau^2 (1 - 0.143406357 \alpha \beta) - \frac{86643}{2000} (1 - 0.26824556 \alpha \beta) \right], \\
 P_7(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{26203}{144} \tau^6 - \frac{656951}{1800} \tau^4 + \frac{269109}{2000} \tau^2 (1 - 0.10024191 \alpha \beta) - \frac{1161}{125} (1 - 0.139534884 \alpha \beta) \right], \\
 P_8(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{551}{8} \tau^6 - \frac{22389}{200} \tau^4 + 26.7 (1 - 0.053932585 \alpha \beta) \tau^2 - 0.81 \right], \\
 P_9(\omega, k) &= |k|^5 \tau \left(\frac{61}{4} \tau^4 - \frac{98}{5} \tau^2 + \frac{9}{2} \right), \quad P_{10}(\omega, k) = \frac{3}{2} |k|^4 \tau^2 (\tau^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1$ этот гиперболический пучок длины $N = 11$ является нестрого гиперболическим.

В 3-D случае дисперсионное уравнение задачи Коши для 13-моментной системы является цепочкой из 9 нестрого гиперболических полиномов вида

$$\begin{aligned}
 P_0(\omega, k) &= |k|^{13} \tau^5 \left[\tau^8 - \frac{128}{25} \tau^6 + \frac{208}{25} \tau^4 (1 - 0.175384616 (\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma)) - \right. \\
 &\quad - \frac{132}{25} \tau^2 (1 - 0.407272728 (\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta) - 1.086060607 \alpha \beta \gamma)) + \\
 &\quad + \frac{27}{25} (1 - 0.64 (\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \\
 &\quad \left. - 1.28 (\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - 2.8928 (\alpha^2 \beta \gamma + \beta^2 \alpha \gamma + \gamma^2 \alpha \beta) \right),
 \end{aligned}$$

$$P_1(\omega, k) = |k|^{12} \tau^4 \left[7\tau^8 - \frac{2348}{75}\tau^6 + \frac{15976}{375}\tau^4 \left(1 - 0.167651478(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{548}{25}\tau^2 \left(1 - 0.374656935(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 1.019328468\alpha\beta\gamma \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{453}{125} \left(1 - 0.56370861(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 1.127417219(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - 2.58458279(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \right] ,$$

$$P_2(\omega, k) = |k|^{11} \tau^3 \left[\frac{64}{3}\tau^8 - \frac{18518}{225}\tau^6 + \frac{34397}{375}\tau^4 \left(1 - 0.155827544(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{69536}{1875}\tau^2 \left(1 - 0.32945237(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.917119191\alpha\beta\gamma \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2913}{625} \left(1 - 0.464675593(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 0.929351185(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - 2.1730(9)(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \right] ,$$

$$P_3(\omega, k) = |k|^{10} \tau^2 \left[\frac{998}{27}\tau^8 - \frac{27272}{225}\tau^6 + \frac{24197}{225}\tau^4 \left(1 - 0.138569245(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{61412}{1875}\tau^2 \left(1 - 0.269497819(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.770066433\alpha\beta\gamma \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1791}{625} \left(1 - 0.337688443(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 0.675376885(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - 1.62412061(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \right] ,$$

$$P_4(\omega, k) = |k|^9 \tau \left[\frac{1075}{27}\tau^8 - \frac{73604}{675}\tau^6 + \frac{83389}{1125}\tau^4 \left(1 - 0.11443236(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{9972}{625}\tau^2 \left(1 - 0.194143603(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.669875652\alpha\beta\gamma \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{528}{625} \left(1 - 0.181818182(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 0.363636364(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - 0.90909091(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \right] ,$$

$$P_5(\omega, k) = |k|^8 \left[\frac{737}{27}\tau^8 - \frac{41252}{675}\tau^6 + \frac{11269}{375}\tau^4 \left(1 - 0.08234981(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1528}{375}\tau^2 \left(1 - 0.104712042(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.314136126\alpha\beta\gamma \right) + \frac{12}{125} \right] ,$$

$$P_6(\omega, k) = |k|^7 \tau \left[\tau^6 - \frac{518}{25}\tau^4 + \frac{1496}{225} \left(1 - \frac{8}{197}(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) \right) \tau^2 - \frac{32}{75} \right] ,$$

$$P_7(\omega, k) = |k|^6 \tau^2 \left(\frac{76}{27}\tau^4 - \frac{104}{27}\tau^2 + \frac{28}{45} \right) , \quad P_8(\omega, k) = \frac{8}{27} |k|^5 \tau^3 (\tau^2 - 1) ,$$

где $\omega = |k|\tau$, $\alpha = k_1^2$, $\beta = k_2^2$, $\gamma = k_3^2$. Нетрудно проверить, что для любых $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ этот гиперболический пучок длины $N = 8$ является нестрого гиперболическим.

10. ПРИЛОЖЕНИЕ II (ИЕРАХИЯ ВОЛН)

Для исследования иерархии волн в смешанной задаче удобно вместо преобразования Фурье использовать преобразование Лапласа. Тогда смешанная задача в четверти плоскости $\mathbb{R}^{++}$

$$\mathcal{A}^x \partial_x \mathcal{U} + \mathcal{A}^\tau \partial_\tau \mathcal{U} + B \mathcal{A}^B \mathcal{U} = 0, \quad (52)$$

$$B \mathcal{U}|_{x=0} = \mathcal{F}_b, \quad U|_{t=0} = 0,$$

сводится к граничной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$. Решение смешанной задаче будем искать в виде

$$\mathcal{U}(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{\tilde{\mathcal{U}}(p, x) e^{pt}}{p} dp, \quad t > 0, \quad (53)$$

где контур интегрирования $\mathcal{B}$, находится правее всех особенностей подынтегрального выражения в комплексной p -плоскости. Подставляя (53) в (52), получим

$$(\mathcal{A}^x + \mu_E \mathcal{A}_\tau) \partial_x \tilde{\mathcal{U}} + p \mathcal{A}^\tau \tilde{\mathcal{U}} + B \mathcal{A}^B \tilde{\mathcal{U}} = 0, \quad (54)$$

$$B \tilde{\mathcal{U}}|_{x=0} = \tilde{\mathcal{F}}_b. \quad (55)$$

Общее решение имеет следующую форму

$$\tilde{\mathcal{U}}(p, x) = \sum_{j=1}^{3+n_g} G_j(p, B) \mathcal{R}_j(p, B) e^{x K_j(p, B)}, \quad (56)$$

где K_j , $j = 1, \dots, 3 + n_g$, являются корнями дисперсионного уравнения (27) в 13-моментном и (28) в 20-моментном случае; и G_j — неизвестные функции. Собственные векторы $\mathcal{R}_j$ являются решениями системы линейных уравнений

$$\mathcal{A}(\eta, Z(\eta)) R(\eta, Z(\eta)) = 0, \quad (57)$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{13}(\eta, Z) = \begin{pmatrix} Z & \tau & 0 & 0 & 0 \\ \tau & Z & Z & Z & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 & \frac{2}{3}Z \\ 0 & -\frac{4}{5}\tau & 0 & \tau + \frac{4}{5} & \frac{8}{15}Z \\ 0 & \frac{3}{5}Z & \frac{3}{2}Z & \frac{3}{5}Z & \tau + \frac{8}{15} \end{pmatrix}, \quad \tau = \eta + \mu Z,$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{14}(\eta, Z) = \begin{pmatrix} Z & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & Z & Z & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 & \frac{2}{3}Z & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5}\tau & 0 & \tau + \frac{4}{5} & \frac{8}{15}Z & \\ 0 & \frac{3}{5}Z & \frac{3}{2}Z & \frac{3}{5}Z & \tau + \frac{8}{15} & \frac{1}{6}Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{5} & \tau + \frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

в 13- и 20-моментном случаях соответственно. Здесь мы использовали замену $p = B\eta$, $K = BZ(\eta)$.

10.1. Структура решения смешанной задачи. Теперь мы должны исследовать члены в (56). В силу теоремы 6.1, из высокочастотных приближений для больших $\operatorname{Re} p$ имеем

$$K_j = -\frac{p}{c_j} + O(1), \quad (58)$$

где $c_j < 0$ для $j > N_c^+$. Следовательно, последние $j = N_c^+ + 1, \dots, N$ членов в (56) являются неограниченными, и мы должны положить $G_j = 0$, $j = N_c^+ + 1, \dots, N$. Здесь $N = 5$ в 13-моментном случае и $N = 6$ в 20-моментном случае. Окончательно получим

$$U(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \sum_{j=1}^{N_c^+} \frac{G_j(p)}{p} R_j e^{pt+K_j(p)x} dp, \quad t > 0. \quad (59)$$

Оставшиеся функции G_j находятся из граничных условий (55).

В дальнейшем рассмотрим случай, когда число Маха

$$|\mu_E| < 1. \quad (60)$$

Тогда число устойчивых корней в 13-моментном случае $N_c^+ \leq 4$. Исследуем наиболее интересный случай, когда $N_c^+ > N_a^+$, т.е. число входящих характеристик низшего порядка N_a^+ меньше числа входящих характеристик высшего порядка. Например, когда $N_c^+ = 4$, $N_a^+ = 2$. Тогда требуются дополнительные граничные условия.

Очевидно, в силу свойств устойчивых корней, отвечающие им собственные векторы равномерно ограничены в верхней полуплоскости комплексной плоскости параметра p . Тот же результат справедлив в 14-моментном случае.

10.2. Иерархия волн. Исследуем поведение решения смешанной задачи в рассматриваемом случае четырех входящих в область высших характеристик

$$c_j, j = 1, \dots, 4, \quad a_j > 0, j = 1, 2, \quad c_5 < 0 (c_5, c_6 < 0), \quad a_3 < 0. \quad (61)$$

Для этого исследуем поведение интегралов, входящих в общее решение (59), отвечающих корням иерархии волн K_j , $j = 1, 2$ и погранслойным корням K_3 , K_4 .

Лемма 10.1. Пусть корень $K_j(p, B)$ дисперсионного уравнения (40) имеет высокочастотное приближение в форме

$$K(p, B) = -\frac{p}{c_j} + B\kappa_j^h + O\left(\frac{B^2}{|p|}\right),$$

$$\operatorname{Im} \kappa_j^h > 0, \quad \operatorname{Re} p \geq c_0 B^{1+\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (62)$$

и низкочастотное приближение вида

$$K(p, B) = -\frac{p}{a_j} + \frac{\kappa_j^h p^2}{a_j^3 B} + O\left(\frac{|p|^3}{B^2}\right),$$

$$\operatorname{Im} \kappa_j^l < 0, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad |p| < c_0 B^{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (63)$$

так что

$$\operatorname{Im} K_j \geq 0 \quad \forall (p, B), \quad \operatorname{Re} p \geq c_1, \quad B \geq 1, \quad (64)$$

где постоянная $c_0 > 0$ не зависит от B . Тогда для любой функции $g_j \in H^\alpha(\mathbb{R}^+)$, $\alpha > 3/2$, равной нулю при $t = 0$, справедливы следующие утверждения:

1) первое возмущение (волны высшего порядка) интеграла

$$I_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{G_j(p, B)}{p} e^{pt+K_j(p, B)x} dp, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (65)$$

$$G_j(p) = \int_0^\infty \partial_t g_j(t) e^{-pt} dt$$

для $x/c_j > t$ затухает экспоненциально быстро и становится пренебрежимо малым на временах порядка $1/Bc_j$;

- 2) доминирующая часть I_j сосредоточена в окрестности $Q_{a_j} = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{++}, \left| \frac{x}{t} - a_j \right| < 1/B^{1-\lambda} \right\}$ низшей характеристики $\Gamma_{a_j} = \{x = a_j t\}$ и хорошо описывается решением смешанной задачи

$$B(\partial_t + a_j \partial_x) I_j^{\text{as}} = -\kappa^l \partial_x^2 I_j^{\text{as}}, \quad (66)$$

$$I_j^{\text{as}}|_{x=0} = g_j(t), \quad I_j^{\text{as}}|_{t=0} = 0,$$

когда $tB^{1-2\lambda} \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что доминирующая часть возмущения I_j распространяется со скоростью a_j , $j = 1, 2$. Влияние членов высшего порядка проявляется в диффузии волн низшего порядка. Эта диффузия мала, если B велико.

Если $t - x/c_j < 0$, то контур интегрирования $\mathcal{B}$ в интеграле (59) замыкаем полуокружностью достаточно большого радиуса. Тогда на контуре выполнено (63), откуда следует высокочастотное приближение интеграла I_j вида

$$I_j^{\text{as}} = g_j \left(t - \frac{x}{c_j} \right) \exp \left(-B\kappa^h x \right). \quad (67)$$

Отсюда следует, что I_j пренебрежимо мало при $x > c_j t$. Таким образом, фронт интеграла I_j описывается уравнением $x - c_j t = 0$. Первое возмущение распространяется с c_j -волной. Это возмущение затухает экспоненциально быстро и становится пренебрежимо малым на лучах $x = \alpha t$, $\alpha > c_j$, на временах порядка $1/B$ для всех $x > c_j t$. Следующие члены этого разложения могут быть получены уточнением асимптотического разложения функции $e^{K_j x}$ для больших $\text{Re } p$.

Где сосредоточена главная часть возмущения, описываемого выражением (59)? Чтобы ответить на этот вопрос, исследуем (см. [11]) поведение I_j на множестве прямых

$$\frac{x}{t} = m = \text{const}, \quad 0 \leq m \leq c_j, \quad j = 1, 2,$$

в (x, t) плоскости. Каждый из этих лучей является траекторией волны, движущейся с постоянной скоростью. Рассмотрим асимптотическое поведение интеграла (67) при $B^{1-2\lambda} t \rightarrow \infty$ для фиксированного m . Введем безразмерные величины

$$n_1 = \frac{\xi}{B}, \quad n_j^0(n_1) = \frac{K_j(\xi)}{B}, \quad m = \frac{x}{t}.$$

Тогда I_j можно записать в виде

$$I_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{G_j(Bn_1)}{n_1} e^{(r + mn_j^0(n_1))t} dn_1, \quad t > 0. \quad (68)$$

Здесь n_j^0 является соответствующим корнем уравнения

$$\tilde{\mathcal{P}}_5(n_1, n_j^0) + \gamma_1 \tilde{\mathcal{P}}_4(n_1, n_j^0) + \gamma_2 \tilde{\mathcal{P}}_3(n_1, n_j^0) = 0 \quad (69)$$

или

$$\tilde{\mathcal{P}}_6(n_1, n_j^0) + \gamma_1 \tilde{\mathcal{P}}_5(n_1, n_j^0) + \gamma_2 \tilde{\mathcal{P}}_4(n_1, n_j^0) + \gamma_3 \tilde{\mathcal{P}}_3(n_1, n_j^0) = 0$$

соответственно.

Согласно методу перевала [6], доминирующий вклад в (65) образуется окрестностью стационарной точки $n_1 = n_1^*$

$$\frac{d}{dn_1} (n_1 + mn_j^0(n_1)) = 0 \implies 1 + m(n_j^0)'(n_1^*) = 0.$$

Деформируем контур интегрирования в кривую наискорейшего спуска $\mathcal{T}$, проходящую через стационарную точку $n_1 = n_1^*$, и разложим функции $n_1 + mn_j^0$ по переменной $n_1 - n_1^*$, включая квадратичные члены. Тогда получим

$$I_j^{\text{as}} = \exp \left(Bt(n_1^* + mn_j^0(n_1^*)) \right) \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}} \frac{G_j(Bn_1)}{n_1} \exp \left(\frac{1}{2} Btm(n_j^0)''(n_1^*)(n_1 - n_1^*)^2 \right) dr.$$

В старых переменных получим

$$I_j^{\text{as}} = \exp \left(tp^* + xK_j(p^*) \right) \times \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{T}} \frac{G_j(p)}{p} \exp \left(\frac{1}{2B} xK_j''(p^*)(p - p^*)^2 \right) dp. \quad (70)$$

Здесь функция $p^*(x, t)$ определяется уравнением

$$t + xK_j'(p^*(x, t)) = 0. \quad (71)$$

Выражение (70) описывает поведение интеграла $I_j(x, t)$ для фиксированного отношения $m = x/t$ при $B^{1-2\lambda}t \rightarrow \infty$.

Экспоненциальный множитель перед интегралом доминирует в (70). Стационарная точка этого множителя находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(xp^* + tK_1'(p^*)) = 0, \quad (72)$$

которое, в силу соотношения (71), сводится к равенству

$$K_j(p^*) = 0, \quad \text{Re } p^* \geq 0. \quad (73)$$

Равенство (73) разрешимо, если либо $p^* = 0$, либо p^* является решением уравнения

$$p^2 + \gamma_1 B p + \gamma_2 B^2 = 0$$

в 13-моментном случае или уравнения

$$p^3 + \gamma_1 B p^2 + \gamma_2 B^2 p + \gamma_3 B^3 = 0$$

в 14-моментном случае, которые отрицательны. Отсюда, правильным выбором $\text{Re } p^* \geq 0$ для стационарной точки p^* является $p^* = 0$.

Экспоненциальный множитель в (70) принимает стационарное значение (локальный минимум) для таких значений (x, t) , для которых $p^*(x, t) = 0$ является решением уравнения (71). Следовательно, максимум I_j достигается на прямой

$$t + xK_j'(0) = 0, \quad (74)$$

где, в силу (48),

$$K_j'(0) = \frac{1}{a_j}.$$

Максимум экспоненциального множителя в (70) лежит на прямой

$$x = a_j t;$$

более того, этот максимум единственный.

Итак, возмущение I_j (в рассматриваемом пределе) экспоненциально мало всюду вне окрестности прямой

$$x = a_j t. \quad (75)$$

Доминирующая часть возмущения интеграла I_j со временем начинает распространяться со скоростью a_j . Когда $B \rightarrow \infty$, это наступает все раньше и раньше, так как приближение (70) получено при условии $B^{1-2\lambda}t \rightarrow \infty$.

Дальнейшую информацию о поведении доминирующего возмущения получаем разложением $pt + K_j(p)x$ вблизи $p = 0$. В силу низкочастотного приближения (49), имеем

$$I_j^{\text{as}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{T}} \frac{G_j(p)}{p} \exp \left(p \left(t - \frac{x}{a_j} \right) - \frac{1}{B} \frac{\kappa^l}{a_j^3} p^2 x \right) dp \quad (76)$$

в окрестности прямой (74), когда $B^{1-2\lambda}t \gg 1$.

В первом приближении получим

$$I_{1,j}^{\text{as}}(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{T}} \frac{G_j(p)}{p} \exp \left(p \left(t - \frac{x}{a_j} \right) \right) dp = g_j \left(t - \frac{x}{a_j} \right), \quad (77)$$

$$(\partial_t + a_j \partial_x) I_{1,j}^{\text{as}} = 0. \quad (78)$$

Таким образом, убеждаемся, что волны, являющиеся низшими в иерархии, правильно описывают доминирующее возмущение.

Чтобы понять роль квадратичных членов в экспоненте в (77), найдем уравнение, решением которого является интеграл (76). Выражение (76) совпадает с решением уравнения

$$B(\partial_t + a_j \partial_x) I_j^{\text{as}} = -\frac{\kappa^l}{a_j^2} \partial_t^2 I_j^{\text{as}} \quad (79)$$

с начально-граничными условиями

$$I_j^{\text{as}}|_{x=0} = g_j(t), \quad I_j^{\text{as}}|_{t=0} = 0. \quad (80)$$

Правая часть (79) является малой поправкой (порядка B/t). Следовательно, можем использовать здесь первое приближение (77) и перейти к эквивалентной форме уравнения (79)

$$B(\partial_t + a_j \partial_x) I_j^{\text{as}} = -\kappa^l \partial_x^2 I_j^{\text{as}}. \quad (81)$$

Таким образом, получили следующий результат:

- 1) начиная со значений времени порядка $1/B$, первое возмущение (волны высшего порядка) становится экспоненциально малым;
- 2) доминирующая часть I_j (76) хорошо описывается решением уравнения (81). Влияние членов высшего порядка проявляется в диффузии волн низшего порядка. Эта диффузия мала, если B велико. Что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к исследованию членов в общем решении (35), отвечающих погранслойным корням. Справедлив следующий результат.

Лемма 10.2. Пусть K_j — корень дисперсионного уравнения (40) погранслойного типа, т.е. справедливы высокочастотные $j = 3, 4$ и низкочастотные приближения

$$K_j(p) = Bn_j^0 + O\left(\frac{p}{B}\right), \quad \text{Re } n_j^0 < 0, \quad j = 3, 4. \quad (82)$$

Тогда первый вклад интеграла (70) в этом случае распространяется также с c_j волнами и затухает. Доминирующий вклад сосредоточен в окрестности границы и описывается выражением

$$I_3^{\text{as}} = g_3(t) e^{Bn_3^0 x}, \quad I_4^{\text{as}} = g_4(t) e^{Bn_4^0 x}, \quad (83)$$

которые соответствуют предельному переходу

$$Bx \rightarrow \infty.$$

Так как $K_j = -\frac{p}{c_j} + O(1)$, $j = 3, 4$, при $p \rightarrow \infty$, то интегралы I_j , $j = 3, 4$, равны 0, когда $x - c_j t > 0$. Таким образом, так же, как и выше, волновой фронт связан с волнами, распространяющимися со скоростью c_j . Эти волны высшего порядка затухают экспоненциально быстро и становятся пренебрежимо малыми, когда $Btc_j \gg 1$.

В низкочастотном приближении для погранслоного корня при малых p/B справедливо асимптотическое разложение (81). И в этом случае метод перевала показывает, что вклад интегралов I_3 , I_4 мал всюду вне окрестности границы $x = 0$. Для исследования поведения I_3 , I_4 вблизи границы $x = 0$ используем низкочастотное асимптотическое разложение (81), в силу которого получаем (82). Так же, как выше, показывается, что это приближение получается из асимптотического разложения подынтегрального выражения в I_j для малых p/B .

Следовательно, первый вклад членов типа погранслоя I_j в общем решении (35) распространяется с c_j , $j = 3, 4$, волнами и затухает. Доминирующий вклад сосредоточен в окрестности границы и описывается выражением (83).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями// Успехи мат. н. — 1960. — 15, № 4.
2. Волевич Л. Р., Радкевич Е. В. Равномерные оценки решений задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных (в печати).
3. Румер Ю., Рывкин М. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977. — 532 с.
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
5. Babich V. M., Klimova A. A. Hyperbolic equation with large parameter at lower terms, and the hierarchy of waves// St. Petersburg Math. J. — 1995. — 6, 5. — С. 1001–1038.
6. Friedrichs K., Lax P. System of conservation equations with a convex extension// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1971. — 68, № 8. — С. 1686–1688.
7. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases// Commun. Pure Appl. Math. — 1949. — 2.
8. Hadamard J. Sur les problem aux derivees partielles et leur signification physique. — Bull. Univ. Princeton 13, 1902.
9. Hermite Ch., Oeuvres I. — Paris, 1905. — С. 397–414.
10. Junk M. Domain of definition of Levermore's five-moment system// J. Stat. Phys. — 1998. — 93. — С. 1143–67.
11. Lax P. Hyperbolic system of conservation laws II// Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — 10. — С. 537–566.
12. Muller I., Ruggeri T. Extended Thermodynamics. — Springer-Verlag, 1993.
13. Struchtrup H., Weiss W. Temperature jump and velocity slip in the moment method// Continuum Mech. and Thermodyn. — 2000. — 12. — С. 1–18.

Е. В. Радкевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: radk@mech.math.msu.su

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ КАНА—ХИЛЛАРДА

© 2003 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ, М. В. ЗАХАРЧЕНКО**

Аннотация. Статья посвящена нелинейному асимптотическому анализу математической модели с малым параметром процесса затвердевания двухкомпонентного сплава свинец-олово. Основным результатом является вывод сингулярно предельной задачи — расширенной задачи Стефана, в случае быстрого времени релаксации процессов в зоне фазового перехода. На времени существования классического решения сингулярно предельной задачи доказано существование асимптотического решения с любой точностью. Фронт фазового перехода определяется однозначно первыми тремя приближениями. Показано, что условие устойчивости фронта определяется условием диссипации решений уравнения для фронта. Несимметрия тензора поверхностных натяжений приводит к зависимости предельных значений для распределений концентраций от геометрии фронта. Это вызывает дисперсию решений уравнения для фронта на части фронта, которой не касается главная кристаллографическая ось.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	121
2. Асимптотическое решение	125
Список литературы	137

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы исследуем математическую модель сепарации в двухкомпонентном сплаве свинец-олово [11] с существенно различными кристаллическими структурами компонент. Проблема описания процесса возникновения и роста кристалла остается на сегодняшний момент одной из труднейших задач математической физики. Рассматриваемая в данной статье модель, предложенная в [11], является обобщением широко признанной модели Кана—Хилларда [8], описывающей кристаллизацию однородных смесей. Важнейшую роль в исследовании классической модели Кана—Хилларда сыграла ее сингулярно-предельная задача — так называемая Мелин—Сикерка задача со свободной границей, позволившая на сегодняшний момент только численно описать неустойчивость процесса кристаллизации. Целью статьи является вывод сингулярно-предельной задачи для модели [11].

Будем считать, что двухкомпонентный сплав заполняет область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, разделенную на три части: области, заполненные разными фазами (α и β), и межфазной зоной (так называемой зоной фазового перехода). Предполагается, что фаза α , богатая свинцом, имеет кубическую симметрию; фаза β , которая богата оловом, — четырехугольную (т.е. симметрию преобладающего вещества: свинца или олова). Требуется определить распределение концентраций чистых веществ $c_{\text{Pb}}(x, t)$, $c_{\text{Sn}}(x, t)$ (свинец, олово) в области Ω . В силу предположения о сохранении масс в двухкомпонентной смеси

$$c_{\text{Sn}}(x, t) + c_{\text{Pb}}(x, t) = 1,$$

достаточно определить распределение только одной концентрации, например, свинца $c(x, t) = c_{\text{Pb}}(x, t)$. В данной статье рассмотрим упрощенную модель [11] без учета механической части задачи — полей напряжений, описываемых уравнениями статического равновесия сил.

Эволюция распределения концентрации $c(x, t)$ описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t} c + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{J}_i = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{J}_i$ является расширенным диффузионным потоком вида

$$\mathbf{J}_i = -M(c) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\partial_c \Psi(c) - \varepsilon^2 a_{kl}(c) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} c \right] \quad \text{на } B_T = \Omega \times (0, T).$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\varepsilon \ll 1$. Функция M является скалярным коэффициентом мобильности, который характеризует подвижность α и β фаз:

$$M(c) = M^\alpha + (M^\beta - M^\alpha) \frac{c(x, t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \quad M^\alpha, M^\beta > 0,$$

где c^α, c^β являются концентрациями α и β фаз в равновесном состоянии соответственно. Тензор поверхностных напряжений

$$a_{kl}(c) = a_{kl}^\alpha + (a_{kl}^\beta - a_{kl}^\alpha) \frac{c(x, t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \quad (1.2)$$

где $a_{kl}^\alpha, a_{kl}^\beta$ являются положительными постоянными такими, что выполняется условие эллиптичности

$$a_{kl}(c) \xi_k \xi_l > d_0 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad |\xi| = 1, \quad c \in [0, 1].$$

Предположим, что

$$a_{ij}^\alpha = \begin{pmatrix} a^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & a^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & a^\alpha \end{pmatrix}, \quad a_{ij}^\beta = \begin{pmatrix} a_1^\beta & 0 & 0 \\ 0 & a_1^\beta & 0 \\ 0 & 0 & a_3^\beta \end{pmatrix},$$

т.е. фазы обладают существенно разными симметриями. Так (см. [11]), возможны следующие соотношения:

$$a_1^\beta : a^\alpha : a_3^\beta = 1 : 1.5 : 14.$$

Основные вопросы, на которые предстоит ответить:

1) Каково влияние несимметрии на структуру решения вблизи фронта фазового перехода?

2) В чем отличие этой модели от классической модели Кана—Хилларда [8], описывающей феномен сепарации фаз?

Чтобы было гарантировано сосуществование обеих фаз, плотность свободной энергии Гиббса должна быть невыпуклой функцией концентрации (см., например, [8, с. 261])

$$\Psi = \psi_0 \left([c^\alpha - c_0]^2 - [c - c_0]^2 \right)^2 - b[c - c_0], \quad c_0 = \frac{1}{2}(c^\alpha + c^\beta),$$

где ψ_0 и b являются постоянными. Тогда постоянные $c^\alpha, c^\beta \in (0, 1)$ являются классическими равновесными концентрациями, однозначно определяемыми по схеме Максвелла [8] системой уравнений

$$\begin{aligned} \partial_c \Psi(c^\alpha) &= \partial_c \Psi(c^\beta), \\ \Psi(c^\beta) - \Psi(c^\alpha) &= \partial_c \Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассматриваемая модель описывает процесс кристаллизации, когда первая стадия разделения фаз завершена, и существуют области с двумя разными фазами. Для простоты будем считать, что в рассматриваемом случае имеются две такие связанные области $\Omega_{t,\varepsilon}^\pm$, разделенные зоной фазового перехода, являющейся в любое время окрестностью поверхности $\Gamma_{t,\varepsilon}$ фронта фазового перехода. Такие процессы называются жестко фронтовыми.

Обычные граничные условия завершают постановку задачи

$$\partial_N c = 0, \quad \partial_N \left(\partial_c \Psi(c) - \varepsilon^2 a_{kl}(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_l} \right) = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad (1.4)$$

где N — вектор нормали к фиксированной границе $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

Начальное значение концентрации

$$c(x, t; \varepsilon)|_{t=0} = c^0(x; \varepsilon). \quad (1.5)$$

Для определенности будем считать, что

$$0 < c^\alpha < c^\beta < 1. \quad (1.6)$$

Как было отмечено выше, целью статьи является вывод сингулярно-предельной задачи для задачи (1.1), (1.4), (1.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [9, 16]). Как будет показано ниже, сингулярно-предельная задача описывается обобщенной задачей со свободной границей Стефана

$$\frac{\partial}{\partial t} c^\pm - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(M(c) \frac{\partial}{\partial x_i} \partial_c \Psi(c^\pm) \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{t,0}^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (1.7)$$

$$c^\pm = \widehat{c^\pm}(\nu), \quad (x, t) \in \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0, T), \quad (1.8)$$

$$(\widehat{c^+} - \widehat{c^-}) V_\nu = M(c^+) \partial_\nu (\partial_c \Psi(c^+)) - M(c^-) \partial_\nu (\partial_c \Psi(c^-)) \quad (x, t) \in \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0, T). \quad (1.9)$$

Здесь вектор ν — единичная нормаль к $\Gamma_{t,0}$, внешняя для области $\Omega_{t,0}^\pm$, V_ν , и для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{t,0}^+ \cup \Gamma_t \cup \Omega_{t,0}^- &= \Omega, & \Omega_{t,0}^+ \cap \Omega_{t,0}^- &= \emptyset, \\ \partial \Omega_{t,0}^+ &= \Gamma_{t,0} \cup \Omega, & \partial \Omega_{t,0}^- &= \Gamma_{t,0}, \end{aligned}$$

где V_ν — нормальная скорость свободной границы $\Gamma_{t,0}$. Несимметрия тензора поверхностных натяжений приводит к зависимости предельных значений концентрации $\widehat{c^\pm}(\nu)$ на фронте фазового перехода, в отличие от классической задачи Стефана, от геометрии фронта.

Граничные условия:

$$\partial_N c^\pm = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad \Sigma_T \cap \Gamma_{0,0} = \emptyset. \quad (1.10)$$

Начальное значение предельных концентраций

$$c^\pm(x, t)|_{t=0} = c_\pm^0(x). \quad (1.11)$$

Численные эксперименты, проведенные О. А. Васильевой (МГУ), показали, что в 3-D случае задача (1.7)–(1.11) неустойчива. Радиально-симметричные начальные данные в области Ω , являющейся шаром, и начальной свободной поверхности $\Gamma_{0,0}$, являющейся сферой, привели к нарушению симметрии решения, подобному феномену типа роста дендрита. В двумерном 2-D случае отмечен эффект перетяжки границы раздела фаз. Окружность $\Gamma_{0,0}$ трансформируется в эллипс $\Gamma_{t,0}$ с главной осью, параллельной главной кристаллографической оси, совпадающей с собственным вектором матрицы тензора поверхностного натяжения для максимального собственного значения. Бесспорно, эти свойства связаны со свойствами решений задачи (1.7)–(1.11).

Теорема 1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с C^∞ — границей $\partial\Omega$, $c_\pm^0 \in C^{\alpha+1}$ — начальные функции, $\alpha > 3$, $[\alpha] \neq 0$ — целая часть, Γ_0 — начальный фронт класса $C^{\alpha+2}$, и пусть выполнены условия согласования до порядка $[\alpha] + 1$. Дополнительно потребуем, чтобы было выполнено условие разрешимости

$$\partial_{\nu_0} c_\pm^0|_{\Gamma_0} > 0, \quad (1.12)$$

где ν_0 — единичная нормаль к Γ_0 , внешняя для области Ω_0^- . Тогда на достаточно малом временном интервале $(0, T_0)$ существует единственное классическое решение двумерной расширенной задачи Стефана:

$$c^\pm(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(Q_{T_0}), \quad Q_{T_0} = \Omega \times (0, T_0) \quad (1.13)$$

с фронтом Γ_t , $t \in (0, T_0)$, локально описываемым уравнением $y = \varrho(x, t)$, где функция

$$\varrho \in C^{\alpha/2}([0, T_0], C^1(\mathbb{R}^1)) \cap C^{1/2}([0, T_0], C^{\alpha-1}(\mathbb{R}^1)). \quad (1.14)$$

Теорема 1.2. *На временном интервале существования классического решения сингулярно-предельной задачи (1.7)–(1.11) существует стабилизирующееся асимптотическое решение задачи (1.1), (1.4), (1.5) с любой точностью.*

Доказательство существования классического решения расширенной задачи Стефана в двумерном случае аналогично доказательству существования классического решения модифицированной задачи Стефана (метод модельных операторов). Расширенная задача Стефана — нелинейная задача. Стандартная процедура локализации (на малых временах) позволяет выбрать диффеоморфизм $\mathcal{F}_t(x, y)$ окрестности свободной границы (фронта) Γ_t в полуплоскость $\mathbb{R}^\pm = \{x \in \mathbb{R}^1, \pm y > 0\}$ следующего вида

$$\mathcal{F}_t(x, y) = (x, y + \varrho(t, x)).$$

Здесь функция $\varrho(t, x)$ описывает в локальных координатах положение фронта Γ_t (если начальное положение фронта Γ_0 для $t = 0$ совпадает с границей полуплоскостей). Используя эти локальные координаты, можно описать нормальный вектор к фронту ν , внешний для области Ω_t^- , нормальную скорость фронта и значения предельных концентраций $c^\pm$ на фронте

$$\begin{aligned} \nu(x, t) &= \frac{(\partial_x \varrho(t, x), -1)}{\sqrt{1 + |\partial_x \varrho|^2}}, \quad V_\nu(t, x) = -\frac{\partial_t \varrho}{\sqrt{1 + |\partial_x \varrho|^2}}, \quad c^\pm|_{y=0} = \widehat{c}^\pm(q(\nu)), \\ q(\nu) &= \frac{1}{a^\alpha} \left(a_1^\beta - a^\alpha + (a_3^\beta - a_1^\beta) \frac{(\partial_x \varrho(t, x))^2}{1 + |\partial_x \varrho|^2} \right), \end{aligned}$$

Тогда линеаризованная задача для расширенной задачи Стефана в любой точке $\mathcal{P} \in \Gamma_0$ начального положения фронта определяет следующую модельную смешанную задачу в полупространствах: $\mathbb{R}^\pm = \mathbb{R}_x^1 \times \{\pm y > 0\}$

$$\begin{aligned} \partial_t C^\pm - M^\pm \Delta C^\pm &= F^\pm, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^\pm, \\ \partial_t \varrho &= M^+ \partial_y C^+|_{y=0} - M^- \partial_y C^-|_{y=0} + g, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ C^\pm|_{y=0} &= (a \partial_x + b) \varrho + f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ C^\pm|_{t=0} &= 0, \quad \varrho|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Постоянные

$$\begin{aligned} M^\pm &= M(c_\pm^0(\mathcal{P})) \partial_c \Psi^2(c_\pm^0(\mathcal{P})) > 0, \quad \gamma = c_+^0(\mathcal{P}) - c_-^0(\mathcal{P}), \\ b &= \partial_{\nu_0} c_\pm^0(\mathcal{P}), \quad a = 2(a_3^\beta - a_1^\beta) \partial_x \varrho(0, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Центральным местом доказательства теоремы 1.1 (см. [3]) являются следующие утверждения о решениях модельной задачи.

Теорема 1.3. *Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $1 < p < \infty$ и $p \neq 3/2, 3$. Тогда для решения $C^\pm(x, y, t), \varrho(x, t)$ модельной задачи эквивалентны следующие утверждения:*

1) *имеем*

$$\begin{aligned} C^\pm &\in H_p^1((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap L_p((0, \infty), H_p^2(\mathbb{R}^\pm)), \\ \varrho &\in B_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap B^{1-\frac{1}{2p}}((0, \infty), H^2(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B^{3-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)); \end{aligned}$$

2) *имеем*

$$\begin{aligned} F &\in L_p((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)), \\ f &\in B_p^{1-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)), \\ g &\in B_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)), \end{aligned}$$

если выполнены условия согласования для функций F, f, g . Здесь B_p^s — пространства Бесова.

Теорема 1.4. Пусть $b > 0$, $a = 0$, $1 < p < \infty$ и $p \neq 3/2$. Тогда описанная выше модельная задача совпадает с модельной задачей классической задачи Стефана. В этом случае (см. [3]) для решения $C^\pm(x, y, t)$, $\varrho(x, t)$ модельной задачи эквивалентны следующие утверждения:

1) имеем

$$C^\pm \in H_p^1((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap L_p((0, \infty), H_p^2(\mathbb{R}^\pm)),$$

$$\varrho \in B_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap B_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1));$$

2) имеем

$$F \in L_p((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)),$$

$$f \in B_p^{1-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)),$$

$$g \in B_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)),$$

если выполнены условия согласования для функций F , f , g .

Модельная задача при $b > 0$ сводится к параболическим псевдодифференциальным операторам порядка 2 на границе $a \neq 0, 1$, $a = 0$. Стандартной процедурой (см. [3]) точные оценки решений модельной задачи позволяют доказать локальную разрешимость задачи нелинейной.

Открытой остается задача о неустойчивости решения трехмерной расширенной задачи Стефана. Расширенная задача Стефана станет предметом исследований нашей ближайшей публикации. Исследование классических решений сингулярно-предельной задачи [9, 16] позволяет провести селекцию начальных данных (1.5) задачи (1.1), (1.4), (1.5) так, чтобы соответствующие решения этой задачи были бы гладкими аппроксимациями решений сингулярно-предельной задачи (1.7)–(1.11) (см. [10]), а именно, стремились бы к таким решениям при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это позволит нам описать свойства фронта фазового перехода $\Gamma_{\varepsilon, T}$ и поведение решений первоначальной задачи (1.1), (1.4), (1.5) в окрестности фронта.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Перейдем к построению асимптотического решения для концентрации $c(x, t; \varepsilon)$, являющейся гладкой аппроксимацией сильного разрыва. Рассмотрим случай, когда фронт фазового перехода Γ_t не имеет пересечения с фиксированной границей Σ_T для любого $t \in [0, T]$. Тогда асимптотическое решение в окрестности $\Omega_{\Gamma, \delta} \in B_T$ фронта Γ_T и в окрестности $\Omega_{\Sigma_T, \delta}$ фиксированной границы Σ_T строятся независимо. В этом случае (см. [6]) носитель быстрого изменения функции типа погранслоя и носитель быстрого изменения решения в окрестности фронта Γ_T не пересекаются (с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^\infty)$). Построение функций погранслоя аналогично приведенному в [6]. В настоящей статье сосредоточим основное внимание на внутреннем разложении в окрестности $\Omega_{\Gamma, \delta}$ фронта, на внешнем разложении (фоне) и их сравнении в области пересечения носителей. Что же касается функций типа погранслоя и связанной с ними задачи описания поведения решения в окрестности фиксированной границы, сошлемся на результаты [6].

Анализ гладкой аппроксимации сильного разрыва для концентрации c в окрестности $\Omega_{\Gamma, \delta} = \{x \in B, |t + \varphi(x)| < \delta\}$, $t \in (0, T)$, будем искать в виде

$$c_{as}(x, t; \varepsilon) = \varepsilon \Phi^M(x, t; \varepsilon) + \mathcal{W}^M(\xi, x, t; \varepsilon), \quad \xi = \gamma(x)\eta(x)\tau + \varphi_1(x), \quad \tau = \frac{t + \varphi(x)}{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

$$\eta = \frac{1}{|\nabla_x \varphi|}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}}, \quad \nabla_x \varphi \neq 0, \quad \gamma \neq 0;$$

здесь $\nu = \eta \nabla_x \varphi$ — вектор нормали к фронту. Фоновые функции Φ^M являются гладкими, ограниченными в B_T , имеющими следующее разложение

$$\Phi^M = \sum_{j=1}^M \varepsilon^{j-1} \Phi_j(x, t).$$

Функции $\mathcal{W}^M$, быстро меняющиеся вблизи фронта Γ_t , аналогичны внутреннему разложению в окрестности $\Omega_\Gamma \in B_T$ фронта фазового перехода Γ_T , рассматриваются в виде

$$\mathcal{W}^M(\xi, x, t; \varepsilon) = y(\xi, x, t) + \sum_{j=1}^M \varepsilon^j Y_j(\xi, x, t),$$

где

$$(Y_j)^- = 0 \quad \text{и} \quad \hat{y} \neq 0. \quad (2.2)$$

Функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\gamma(x)$ также являются гладкими, ограниченными в B .

Определение 2.1. В дальнейшем используем следующее обозначение

$$\hat{G}(t, \xi) = G(x, t, \xi) \Big|_{t=-\varphi(x)}$$

для оператора следа гладкой функции G на поверхность фронта сингулярно-предельной задачи Γ_T , где

$$\Gamma_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_{t,0}, \quad \Gamma_{t,0} = \{x \in \Omega, t + \varphi(x) = 0\}.$$

Фронт фазового перехода $\Gamma_{t,\varepsilon}$ рассматривается как возмущение Γ_T вида

$$\Gamma_{T,\varepsilon} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_{t,\varepsilon}, \quad \Gamma_{t,\varepsilon} = \{x \in \Omega, \gamma(x)\eta(x)(t + \varphi(x)) + \varepsilon\varphi_1(x) = 0\}.$$

Теперь определим используемые в дальнейшем классы быстрых функций. Положим $\mathcal{S} = S(\mathbb{R}_\xi^1; C^\infty(\overline{B}_T))$ (класс так называемых функций типа солитона), где S — пространство функций Шварца, $\mathcal{K} = \{f(\xi, x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^1 \times \overline{B}_T), \partial_\xi f \in \mathcal{S}\}$ (класс так называемых функций типа кинка). Справедливо следующее условие стабилизации на бесконечности:

$$\xi^k \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{\partial^i}{\partial x^i} (f - f^\pm) = 0 \quad \forall k, j, i, l \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad (2.3)$$

равномерное на любом компакте $G \subset B_T$. Здесь

$$f^\pm(x, t) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi, x, t).$$

Для функций типа солитона f имеем $f^\pm = 0$.

Лемма 2.1. Для любой функции типа солитона $Y(\xi, x, t) \in \mathcal{S}$ справедливо следующее соотношение:

$$Y(\xi, x, t) \Big|_{\xi = \frac{\gamma(x)\eta(x)(t+\varphi(x))}{\varepsilon} + \varphi_1(x)} = \left\{ \hat{Y}(\xi, x) + \frac{\varepsilon}{\gamma\eta} (\xi - \varphi_1) \frac{\partial}{\partial t} \widehat{Y}(\xi, x) \right\} \Big|_{\xi = \frac{\eta\gamma(t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(\varepsilon^2).$$

Доказательство. Разложим функцию Y в ряд Тейлора по медленной переменной в окрестности фронта Γ_T . Получим

$$\begin{aligned} Y(\xi, x, t) &= \hat{Y}(\xi, x) + \widehat{\partial_t Y}(\xi, x)(t + \varphi(x)) + \partial_t^2 Y(\xi, t_*, x)(t + \varphi(x))^2 = \\ &= \hat{Y}(\xi, x) + \frac{\varepsilon}{\eta\gamma} \widehat{\partial_t Y}(\xi, x)(\xi - \varphi_1) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

так как в силу (2.3), $|\xi^2 \partial_t^2 Y(\xi, t_*, x)| < C_2$ и, следовательно, имеем

$$(t + \varphi(x))^2 \partial_t^2 Y(\xi, t_*, x) = O(\varepsilon^2).$$

Последнее завершает доказательство леммы. $\square$

Приведем ряд следствий леммы 2.1 для производных функций типа Y_w и Y_{st} . А именно, функций $Y_w, Y_{st} \in \mathcal{K}$ таких, что справедливы следующие условия:

$$\widehat{Y_w}(\xi, x) = 0, \quad \widehat{\partial_t Y_w}(\xi, x) \neq 0, \quad \widehat{Y_{st}}(\xi, x) \neq 0.$$

Отметим, что

$$\eta \widehat{\nabla_x \varrho} = \widehat{\varrho_t} \nu, \quad \nu = \eta \nabla_x \varphi \quad (2.4)$$

для любой гладкой функции ϱ такой, что $\varrho = 0$ на фронте, где ν является нормалью к фронту. В силу леммы 2.1, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} Y_w \left(\gamma \eta \frac{t+\varphi}{\varepsilon} + \varphi_1, x, t \right) &= \left\{ \partial_{x_k} Y + \frac{\eta}{\varepsilon} \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi Y_w + \partial_{x_k} (\gamma \eta) (t+\varphi) \partial_\xi Y_w \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} = \\ &= \left\{ \partial_{x_k} Y_w(\xi, x, t) + (\xi - \varphi_1) \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi \widehat{\partial_t Y_w}(\xi, x) \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя (2.4), перепишем (2.5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} Y_w \left(\gamma \eta \frac{t+\varphi}{\varepsilon} + \varphi_1, x, t \right) = \left\{ \partial_{x_k} Y_w(\xi, x, t) + (\xi - \varphi_1) \partial_\xi \widehat{\partial_{x_k} Y_w}(\xi, x) \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(\varepsilon).$$

Также получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} Y_{st} \left(\gamma \eta \frac{t+\varphi}{\varepsilon} + \varphi_1, x, t \right) &= \\ &= \left\{ \partial_{x_k} Y + \frac{\gamma \eta}{\varepsilon} \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi Y_w + \partial_{x_k} (\gamma \eta) (t+\varphi) \partial_\xi Y_w \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} = \frac{1}{\varepsilon} \gamma \eta \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi Y_w \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(1). \end{aligned}$$

Комментарий 2.1. Отметим, что в выражении в фигурных скобках медленные переменные t и x и быстрая переменная ξ предполагаются независимыми. Тогда производные ∂_{x_j} и ∂_ξ также рассматриваются независимыми. В тоже время выбор значения быстрой переменной $\xi = \frac{\gamma \eta (t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1$ осуществляется после операции ограничения на фронт $\langle \frown \rangle$, введенной выше.

2.1. Профиль распределения концентрации. Первое, что мы сейчас установим, — это утверждение о том, что несимметрия тензора поверхностного натяжения в расширенной модели (1.1)–(1.6) Кана–Хилларда приводит к необходимости изменения процедуры Максвелла нахождения равновесных значений концентрации.

Из приближения уравнения (1.1) порядка $O(1/\varepsilon^2)$, в силу оценок леммы 2.1, следует, что главная часть $y(\xi, x, t)$ асимптотического разложения для распределения концентрации удовлетворяет следующему уравнению на фронте

$$\partial_\xi \left(M(\hat{y}) \partial_\xi \left(\partial_{\hat{y}} \Psi(\hat{y}) - (1 + q(\nu)) (\hat{y} - c^\alpha) \partial_\xi^2 \hat{y} \right) \right) = 0, \quad (2.6)$$

где $\nu = \eta \nabla_x \varphi$ является нормалью к фронту,

$$\begin{aligned} \hat{y}(\xi, x) &= y(\xi, q(\nu)), \quad \xi = \gamma \eta \tau + \varphi_1(x), \quad \tau = \frac{t + \varphi(x)}{\varepsilon}, \\ \gamma(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}}, \quad q(\nu) = \frac{a_{kl}^\beta \nu_k \nu_l - a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}{(c^\beta - c^\alpha) a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}. \end{aligned}$$

В силу эллиптичности тензора поверхностных натяжений $a_{kl}(c)$, имеем

$$\gamma(\nu) \geq c_0 > 0, \quad 1 + q(\nu)(c - c^\alpha) > c_0 > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^3, \quad |\nu| = 1 \quad \forall c \in [c_{\min}^-, c_{\min}^+],$$

где постоянная c_0 не зависит от ε . Тогда справедливы следующие оценки

$$\max \left(0, c^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)} \right) < y < \min \left(1, c^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)} \right), \quad (2.7)$$

где

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c^\alpha} < q < \frac{1}{\max(0, c^\alpha - c_{\min}^-)}.$$

Из последней оценки следует, что

$$c_{\min}^\pm \in I_\Psi(q) = \left(\max \left(0, c^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)} \right), \min \left(1, c^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)} \right) \right)$$

для любых

$$q \in \mathcal{J}_\Psi = \left(-\frac{1}{c_{\min}^+ - c^\alpha}, \frac{1}{\max(0, c^\alpha - c_{\min}^-)} \right).$$

Комментарий 2.2. Уравнение (2.6) может быть рассмотрено как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно быстрой переменной ξ , в котором вектор ν является вектор-параметром.

Интегрируя уравнение (2.6) относительно ξ и имея в виду класс рассматриваемых решений $y(\xi) \in \mathcal{K}$ уравнения (2.6), в силу условия стабилизации на бесконечности (2.3), получим

$$(1 + q(y - c^\alpha)) \left\{ \partial_y \Psi_1(y) - \frac{\partial_c \Psi(y^-)}{1 + q(y - c^\alpha)} - \partial_\xi^2 y \right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\partial_\xi^2 y - \partial_y W_1(y, q) = 0, \quad (2.8)$$

где потенциал

$$\begin{aligned} W_1(y, q) &\stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1(y, q) - \frac{1}{q} \partial_c \Psi(y^-) \ln \left(\frac{1 + q(y - c^\alpha)}{1 + q(y^- - c^\alpha)} \right) - \Psi_1(y^-) = \\ &= \int_{y^-}^y \frac{\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(y^-)}{1 + q(c - c^\alpha)} dc, \quad \partial_y \Psi_1(y, \nu) = \frac{\partial_y \Psi(y)}{1 + q(\nu)(y - c^\alpha)}. \end{aligned}$$

Здесь $y^\pm = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} y$ являются предельными значениями функции $y \in \mathcal{K}$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Определение 2.2. Гладкий потенциал $\Psi(c)$ будем называть допустимым, если существуют только три критические точки $0 < c_{\min}^- < c_{\max} < c_{\min}^+ < 1$ такие, что

$$\begin{aligned} \partial_c \Psi(c_{\min}^\pm) = \partial_c \Psi(c_{\max}) = 0, \quad \partial_c^2 \Psi(c_{\min}^\pm) > 0, \quad \partial_c^2 \Psi(c_{\max}) < 0, \\ \partial_c^2 \Psi(c) > 0 \quad \forall c \in [0, c_{\min}^-] \quad \text{и} \quad c \in [c_{\min}^+, 1], \end{aligned} \quad (2.9)$$

и только две точки перегиба $c_i^\pm, c_{\min}^- < c_i^- < c_i^+ < c_{\min}^+$. Дополнительно потребуем, чтобы

$$\partial_c \Psi(1) \geq \partial_c \Psi(c_i^-) \quad \text{и} \quad \partial_c \Psi(0) \leq \partial_c \Psi(c_i^+). \quad (2.10)$$

Комментарий 2.3. Классический метод Максвелла [11] построения равновесных значений концентрации использует факт существования опорной прямой к графику допустимого потенциала. Точки касания опорной прямой и графика потенциала определяют предельные значения концентрации $c = c^\alpha$, $c = c^\beta$, удовлетворяющие системе (1.3), которые являются постоянными. Как будет показано ниже, введение несимметрии в тензор поверхностных натяжений приводит к необходимости изменения конструкции Максвелла. Более того, в этом случае равновесные значения концентраций будут зависеть от геометрии области, что обуславливает существенное различие в поведении решений классической модели Кана—Хилларда (симметричный тензор поверхностных напряжений, $a_{kl} = \delta_{kl}$ в (1.2)) и уравнения (1.1) в окрестности фронта фазового перехода.

Лемма 2.2. Для любого допустимого потенциала $\Psi(c)$ и любого значения постоянной q из интервала

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c^\alpha} < q < \frac{1}{\max(0, c^\alpha - c_{\min}^-)}$$

существует логарифмическая опорная кривая к графику потенциала $\Psi_1(c, q)$. Имеется в виду существование двух предельных значений $c = \widehat{c}^\pm(q) \in (0, 1)$, определяемых системой уравнений

$$\begin{aligned} \partial_c \Psi(\widehat{c}^-(q)) &= \partial_c \Psi(\widehat{c}^+(q)), \\ \Psi_1(\widehat{c}^+(q), q) - \Psi_1(\widehat{c}^-(q), q) &= \frac{1}{q} \partial_c \Psi(\widehat{c}^-(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}^+(q) - c^\alpha)}{1 + q(\widehat{c}^-(q) - c^\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда потенциал

$$W_1(c, q) = \int_{\widehat{c}^-(q)}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c}^-(q))}{1 + q(c_1 - c^\alpha)} dc_1$$

имеет два кратных корня $c = \widehat{c}^\pm(q)$ уравнения $W_1 = 0$ таких, что справедливы соотношения

$$W_1(c, q) > 0 \quad \forall c \in I_\Psi(q), \quad c \neq \widehat{c}^\pm(q), \quad \partial_c^2 W_1(c, q)|_{c=\widehat{c}^\pm(q)} = \frac{\partial_c^2 \Psi(c)}{1 + q(c - c^\alpha)} \Big|_{c=\widehat{c}^\pm(q)} > 0$$

для любого допустимого значения $q \in \mathcal{J}_\Psi$.

Лемма 2.3. Для любого допустимого потенциала $\Psi(c)$ уравнение

$$\partial_\xi^2 y - \frac{\partial_c \Psi(y) - \partial_c \Psi(\widehat{c}^-)}{1 + q(y - c^\alpha)} = 0 \quad (2.12)$$

с вектор-параметром $q \in \mathcal{J}_\Psi$ имеет единственное (с точностью до трансляции) ограниченное строго монотонное решение $y(\xi, q) \in \mathcal{K}$, удовлетворяющее условию стабилизации (2.3). Для определения допустимых значений q уравнения (2.6) требуется выполнение следующей равномерной оценки:

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c^\alpha} < q(\nu) < \frac{1}{\max(0, c^\alpha - c_{\min}^-)} \quad \forall \nu \in R^3, \quad |\nu| = 1$$

Лемма 2.4. Функции $\widehat{c}^\pm$, полученные в лемме 2.2, являются решением обыкновенных дифференциальных уравнений относительно q вида

$$\frac{d\widehat{c}^-}{dq} = \frac{W_2(\widehat{c}^+, q)}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^-(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}^+ - c^\alpha)}{1 + q(\widehat{c}^- - c^\alpha)} \right)}, \quad \widehat{c}^-|_{q=0} = c^\alpha, \quad (2.13)$$

где

$$W_2(c, q) = \int_{\widehat{c}^-(q)}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c}^-(q))}{(1 + q(c_1 - c^\alpha))^2} dc_1,$$

функция $\widehat{c}^+(q) = \widehat{c}^+(\widehat{c}^-(q))$ является композицией функций $\widehat{c}^+(\widehat{c}^-)$ и $\widehat{c}^-(q)$. Функция $\widehat{c}^-(q)$ является решением уравнения

$$\partial_c \Psi(\widehat{c}^+) = \partial_c \Psi(\widehat{c}^-), \quad \widehat{c}^+ \neq \widehat{c}^-$$

таким, что

$$\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^\pm) > 0.$$

Справедливо неравенство

$$\widehat{\frac{dc^-}{dq}} > 0 \quad \forall q \in \mathcal{J}_\Psi. \quad (2.14)$$

Доказательство леммы 2.3 следует из результатов леммы 2.2. Существование логарифмической опорной кривой к графику потенциала W_1 сводится к классическому случаю существования опорной прямой к графику допустимого потенциала. Для этого сделаем замену переменных

$$z = \frac{1}{q} \ln(1 + q(c - c^\alpha)), \quad J_\Psi(q) \rightarrow \mathcal{Z}_\Psi(q), \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\Psi(q) &= (\mathcal{Z}_\Psi^+(q), \mathcal{Z}_\Psi^-(q)), \quad \mathcal{Z}_\Psi^-(q) = \frac{1}{q} \ln \left(1 + q \left(\max \left(0, c^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)} \right) - c^\alpha \right) \right), \\ \mathcal{Z}_\Psi^+(q) &= \frac{1}{q} \ln \left(1 + q \left(\min \left(1, c^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)} \right) - c^\alpha \right) \right). \end{aligned}$$

Так как $(1 + q(c - c^\alpha)) > 0$ для любого $q \in \mathcal{J}_\Psi$, имеем

$$\mathcal{Z}_\Psi^-(q) < \mathcal{Z}_\Psi^+(q).$$

Очевидно, что $\mathcal{Z}_\Psi(0) = (-c^\alpha, 1 - c^\alpha)$. В переменной z получим

$$\Psi_1(z, q) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1(c(z), q) = \int_{c^\alpha}^{c(z)} \frac{\partial_c \Psi(c)}{1 + q(c - c^\alpha)} dc, \quad c(z) = c^\alpha + \frac{e^{qz} - 1}{q}.$$

Теперь мы можем использовать существование опорной прямой к графику потенциала $\Psi_1(z, q)$, допустимого на интервале $\mathcal{Z}_\Psi(q)$. Для этого проверим достаточные условия допустимости потенциала Ψ_1 относительно переменной $z \in \mathcal{Z}_\Psi(q)$. Имеем

$$\partial_z \Psi_1(z, q) = \frac{\frac{dc}{dz} \Psi_c(c(z), q)}{1 + q(c - c^\alpha)} = \partial_c \Psi(c(z)).$$

Следовательно, уравнение $\partial_z \Psi_1(z, q) = 0$ имеет три различных корня $z = z_{\min}^\pm = z(c_{\min}^\pm)$, $z = z_{\max} = z(c_{\max}) \in \mathcal{Z}_\Psi(q)$, определяемых корнями $c_{\min}^\pm, c_{\max} \in I_\Psi(q)$ уравнения $\partial_c \Psi(c) = 0$ и

$$\partial_z^2 \Psi_1|_{z=z_{\min}^\pm} = \frac{dc}{dz} \partial_c^2 \Psi(c(z))|_{z=z^\pm} > 0, \quad \partial_z^2 \Psi_1|_{z=z_{\max}} = \frac{dc}{dz} \partial_c^2 \Psi(c(z))|_{z=z_{\max}} < 0.$$

Последнее является следствием свойств потенциала $\Psi(c)$. Также получим

$$\partial_z^2 \Psi_1 > 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}_\Psi(q) \cup \{z < z_{\min}^-\} \quad \text{и} \quad z \in \mathcal{Z}_\Psi(q) \cup \{z > z_{\max}^+\}.$$

Более того, функция $\Psi_1(z, q)$ имеет только две точки перегиба $z_i^\pm = z(c_i^\pm) \in \mathcal{Z}_\Psi(q)$.

Если потенциал $\Psi_1(z)$ ограничен на интервале $\mathcal{Z}_\Psi(q)$, то рассмотрим гладкое его продолжение с интервала $\mathcal{Z}_\Psi(q)$ в $\mathbb{R}_z^1$ такое, что

$$\partial_z^2 \Psi_1 > 0 \quad \forall z \neq \mathcal{Z}_\Psi(q).$$

Желаемый результат следует из существования опорной прямой к графику $\Psi_1(z, q)$. Тогда существуют два значения $z = z^\pm(q)$, для которых справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \partial_z \Psi_1(z^+(q), q) &= \partial_z \Psi_1(z^-(q), q), \\ \Psi_1(z^+(q), q) - \Psi_1(z^-(q), q) &= \partial_z \Psi_1(z^-(q), q)(z^+(q) - z^-(q)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда получаем, что

$$W_1(z, q) = \int_{z^-(q)}^z \partial_z \Psi_1(c(z_1)) dz_1 - \partial_z \Psi_1(z^-(q), q)(z - z^-(q)) =$$

$$= \left\{ \int_{\widehat{c^-(q)}}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{1 + q(c - c^\alpha)} dc_1 \right\} \Big|_{c=c(z)} > 0$$

для любого $z \in \mathbb{R}^1$, $z \neq z^\pm$, где

$$\widehat{c^\pm}(q) \stackrel{\text{def}}{=} c(z^\pm(q)).$$

Дополнительные условия (2.10) определения 2.2 позволяют показать, что

$$\begin{aligned} \partial_z \Psi_1(z_i^+) &< \partial_z \Psi_1 \Big|_{z=\frac{1}{q} \ln(1+q(\max(0, c^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)}) - c^\alpha))}, \\ \partial_z \Psi_1(z_i^-) &> \partial_z \Psi_1 \Big|_{z=\frac{1}{q} \ln(1+q(\min(1, c^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)}) - c^\alpha))}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$z^\pm \in \mathcal{Z}_\Psi(q) \implies \widehat{c^\pm} \in I_\Psi(q).$$

Таким образом,

$$W_1(c, q) = \int_{\widehat{c^-(q)}}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{1 + q(c_1 - c^\alpha)} dc_1 > 0 \quad \forall c \in I_\Psi(q), \quad c \neq \widehat{c^\pm}(q)$$

и $c = \widehat{c^\pm}(q)$ являются кратными корнями уравнения $W_1(c, q) = 0$, что завершает доказательство леммы 2.2.

В силу теоремы о неявной функции (см. [10]), функции $\widehat{c^\pm}(q)$ являются гладкими на интервале $q \in \mathcal{J}_\Psi$. Дифференцируя второе уравнение в (2.11), получим

$$- \int_{\widehat{c^-(q)}}^{\widehat{c^+(q)}} \frac{\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{(1 + q(c - c^\alpha))^2} (c - c^\alpha) dc - \frac{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c^-(q)})}{q} \frac{d\widehat{c^-(q)}}{dq} \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c^+(q)} - c^\alpha)}{1 + q(\widehat{c^-(q)} - c^\alpha)} \right) = 0.$$

Отсюда, в силу соотношения

$$W_1(\widehat{c^+}(q), q) \equiv 0, \quad q \in \mathcal{J}_\Psi,$$

имеем

$$\frac{d\widehat{c^-(q)}}{dq} = \frac{W_2(\widehat{c^+}(q), q)}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c^-(q)}) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c^+}(q) - c^\alpha)}{1 + q(\widehat{c^-(q)} - c^\alpha)} \right)},$$

где

$$W_2(c, q) = \int_{\widehat{c^-(q)}}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{(1 + q(c_1 - c^\alpha))^2} dc_1.$$

Можно показать, что

$$W_2(\widehat{c^+}(q), q) > (1 + q(c_*(q) - c^\alpha))^{-1} \int_{\widehat{c^-(q)}}^{\widehat{c^+(q)}} \frac{\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{1 + q(c - c^\alpha)} dc = 0.$$

Последнее является следствием второго уравнения (2.11). Здесь $c_*(q)$ является третьим корнем $\widehat{c^-(q)} < c_*(q) < \widehat{c^+(q)}$ уравнения

$$\partial_c \Psi(c) = \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)}).$$

Таким образом, неравенство (2.14) справедливо при $q \in \mathcal{J}_\Psi$, $q \neq 0$. В то же время при $q = 0$ имеем неопределенность $\frac{0}{0}$; используя правило Лопиталя, получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\widehat{c}^-(q)}{dq} \right|_{q=0} &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{W_2(\widehat{c}^+(q), q)}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^-(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}^+(q) - c^\alpha)}{1 + q(\widehat{c}^-(q) - c^\alpha)} \right)} = \\ &= - \frac{2 \int_{c^\alpha}^{c^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c^\alpha))(c - c^\alpha) dc + \partial_c^2 \Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha) \left. \frac{d\widehat{c}^-(q)}{dq} \right|_{q=0}}{\partial_c^2 \Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha)}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\left. \frac{d\widehat{c}^-(q)}{dq} \right|_{q=0} = - \frac{\int_{c^\alpha}^{c^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c^\alpha))(c - c^\alpha) dc}{\partial_c^2 \Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha)}.$$

В силу соотношения

$$\int_{c^\alpha}^{c^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c^\alpha)) dc = 0,$$

получаем оценку

$$\int_{c^\alpha}^{c^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c^\alpha))(c - c^\alpha) dc < (c_*(0) - c^\alpha) \int_{c^\alpha}^{c^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c^\alpha)) dc = 0,$$

где $c_*(0)$ является третьим корнем $c^\alpha < c_*(0) < c^\beta$ уравнения

$$\partial_c \Psi(c) = \partial_c \Psi(c^\alpha).$$

Это доказывает лемму 2.4.

Для тензора поверхностных натяжений имеем

$$q(\nu) = \frac{(a_1^\beta - a^\alpha)(1 - \nu_3^2) + (a_3^\beta - a^\alpha)\nu_3^2}{a^\alpha} = \frac{a_1^\beta - a^\alpha + (a_3^\beta - a_1^\beta)\nu_3^2}{a^\alpha}.$$

Как было отмечено выше (см. [11]), возможны следующие соотношения

$$a_1^\beta : a^\alpha : a_3^\beta = 1 : 1.5 : 14.$$

Тогда функция

$$q(\nu)|_{\nu_3=0} = \frac{a_1^\beta - a^\alpha}{a^\alpha} < 0, \quad q(\nu)|_{\nu_3=1} = \frac{a_3^\beta - a^\alpha}{a^\alpha} > 0$$

меняет знак. Основное ограничение на коэффициенты тензора поверхностных натяжений, определяемое условием леммы 2.2, может быть сформулировано в виде

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c^\alpha} < \max_{|\nu_3| \leq 1} \frac{a_1^\beta - a^\alpha + (a_3^\beta - a_1^\beta)\nu_3^2}{a^\alpha} < \frac{1}{\max(0, c^\alpha - c_{\min}^-)}.$$

Отметим, что расширение (1.1) классической задачи Кана—Хилларда чрезвычайно чувствительно к структуре оператора поверхностных натяжений и геометрическим свойствам фронта Γ_T . Так, например, если оператор поверхностных натяжений в (1.1) вводится в самосопряженной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} c = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ M(c) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \Psi(c)}{\partial c} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kl}(c) \frac{\partial}{\partial x_l} c \right) \right] \right\},$$

то стандартное уравнение для главной части асимптотического разложения для концентрации имеет вид

$$\partial_\xi \left(M(c) \partial_\xi \left(\partial_\xi \left((1 + q(y - c^\alpha)) \partial_\xi y \right) - \partial_c \Psi(y) \right) \right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\partial_\xi \left((1 + q(y - c^\alpha)) \partial_\xi y \right) - \partial_c \Psi(y) + \partial_c \Psi(\widehat{c^-}) = 0. \quad (2.17)$$

Сделав замену функций

$$\partial_\xi Y(y) = (1 + q(y - c^\alpha)) \partial_\xi y \implies \frac{d}{dy} Y(y) = 1 + q(y - c^\alpha),$$

получим

$$\partial_\xi^2 Y - \partial_c \Psi(y(Y)) + \partial_c \Psi(\widehat{c^-}) = 0.$$

Вводя потенциал $\Psi_1(Y, q) = \Psi(y(Y), q)$ такой, что

$$\partial_y \Psi_1 = (1 + q(y - c^\alpha - \Psi)) \partial_y \Psi(y),$$

сведем исследование разрешимости уравнения (2.17) к исследованию стандартного уравнения классической задачи Канна—Хилларда. Так же, как выше, доказывается следующая лемма.

Лемма 2.5. Для любого допустимого потенциала $\Psi(c)$ уравнение (2.17) с вектор-параметром $q \in \mathcal{J}_\Psi$ имеет единственное с точностью до трансляции ограниченное строго монотонное решение $y(\xi, q) \in K$, удовлетворяющее условию стабилизации (2.3).

Предельные значения $\widehat{c^\pm} = y^\pm$ решения $y(\xi, q)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_c \Psi(\widehat{c^-}) = \partial_c \Psi(\widehat{c^+}), \quad \frac{d\widehat{c^-}}{dq} = - \frac{\int_{\widehat{c^+}}^{\widehat{c^-}} (\partial_c \Psi(y) - \Psi(\widehat{c^-})) dy}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c^-}(q)) \left[(1 + q(c - c^\alpha))^2 \right] \Big|_{\widehat{c^-}}^{\widehat{c^+}}},$$

где

$$\widehat{c^-}|_{q=0} = c^\alpha.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\frac{d\widehat{c^-}}{dq} < 0 \quad \forall q \in \mathcal{J}_\Psi, \quad q \neq 0, \quad \frac{d\widehat{c^-}}{dq} \Big|_{q=0} = 0. \quad (2.18)$$

Как видим, знак производной в (2.18) противоположен знаку (2.14) такой же производной в лемме 2.4. Более того, производная функции $\widehat{c^-}$ при $q = 0$ равна нулю.

2.2. Сингулярная предельная задача. Теперь рассмотрим первое приближение к старшей аппроксимации уравнения (1.1). Для этого мы должны определить продолжение быстрой функции $\widehat{y}(\xi, q(\nu))$ с фронта Γ_T в некоторую окрестность $\Omega_{\Gamma, \delta} \subset \Omega$ фронта фазового перехода, которая зависит от области существования неизвестной функции $\varphi(x)$, описывающей движение фронта Γ_T . Продолжение $y_e(\xi, x, t)$ функции $\widehat{y}(\xi, q(\nu))$ с фронта в область $\Omega_{\Gamma, \delta}$ будем искать в следующем виде:

$$y_e(\xi, x, t) = c_e^-(x, t) + \frac{c_e^+(x, t) - c_e^-(x, t)}{\widehat{c^+} - \widehat{c^-}} \left(\widehat{y}(\xi, q) - \widehat{c^-} \right),$$

где функция $\widehat{y}(\xi, q(\nu))$ считается продолженной тождественно по t с фронта в область $\Omega_{\Gamma, \delta}$. Функции $c_e^\pm(x, t)$ должны обладать двумя свойствами:

1) она является продолжением $\widehat{c^\pm}$ с фронта $\Gamma_{t,0}$ в область $\Omega_{\Gamma, \delta}$

$$c_e^\pm(x, t)|_{\Gamma_{t,0}} = \widehat{c^\pm},$$

2) в $\Omega_{\Gamma,\delta}$

$$\partial_c^2 \Psi(c_e^\pm) > 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.19)$$

Как будет показано ниже, функции $c_e^+(x, t)$, $c_e^-(x, t)$ можно определить как любое гладкое продолжение из областей $\Omega_{t,0}^\pm$, $t \in (0, T)$ в области $\Omega_{t,0}^+ \cap \Omega_{\Gamma,\delta}$ и $\Omega_{t,0}^- \cap \Omega_{\Gamma,\delta}$ решений $c^+(x, t)$, $c^-(x, t)$ уравнения

$$\partial_t c^\pm = \nabla_x \left(M(c^\pm) \nabla_x \left(\partial_c \Psi(c^\pm) \right) \right) \quad \text{в} \quad \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (2.20)$$

с граничным условием на фронте

$$c^+ = \widehat{c^+}, \quad c^- = \widehat{c^-} \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \quad t \in (0, T),$$

и граничным условием на неподвижной границе вида

$$\partial_N c^+ = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_T.$$

Функция в (2.19), в силу свойств потенциала $\Psi(c)$, меняет знак. Поэтому условие (2.19) является условием параболичности уравнения (2.20). Из построения предельных значений $\widehat{c^\pm}$ следует справедливость неравенств (2.19) на фронте

$$\partial_c^2 \Psi(\widehat{c^\pm}) > 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0, T). \quad (2.21)$$

Тогда, в силу принципа максимума, имеем

$$\min_{\Gamma_t} \widehat{c^\pm} \leq c^\pm \leq \max_{\Gamma_t} \widehat{c^\pm} \quad \text{в} \quad B_t^\pm, \quad t \in (0, T),$$

следовательно, $\partial_c^2 \Psi(c^\pm(x, t)) > 0$ в $\Omega_t^\pm$, $t \in (0, T)$. Таким образом, существование продолжения $c_e^+(x, t)$, $c_e^-(x, t)$ со свойством (2.19) является следствием невырожденности уравнения (2.20) при справедливости (2.21). Это условие позволяет обойти трудности, связанные с неустойчивостью в общем случае так называемой обратно-параболической предельной задачи (2.20).

Приближение уравнения (1.1) (порядка $O(1/\varepsilon)$) порождает следующее уравнение на фронте:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \partial_\xi \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[Q(\widehat{y}_e) \left(\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q) \right) \widehat{Y}_1 \right] \right\} + \\ & + \gamma \eta \partial_\xi \widehat{y}_e + \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - \frac{1}{\eta} \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right] \Big|_{t=-\varphi} + \\ & + \gamma \partial_\xi \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) + \frac{(\xi - \varphi_1)}{\eta} M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) \right\} \Big|_{t=-\varphi} + \\ & + \gamma^2 \partial_\xi \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[a_{kl}(y_e) Z_{kl}(y_e) - Q(\widehat{y}_e) \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e) \widehat{\Phi}_1 \right] \right\} \Big|_{t=-\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь имеем

$$\begin{aligned} Q(y_e) &= 1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha), \quad \mathcal{L}(y_e, q) = Q(y_e) \partial_\xi^2 y_e - \partial_c \Psi(y_e), \\ Z_{kl}(y_e) &= 2 \partial_\xi^2 y_e \partial_{x_l} \xi_0 \partial_{x_k} \varphi_1 + 2 \partial_\xi \partial_{x_k} y_e \partial_{x_l} \xi_0 + \partial_\xi y_e \partial_{x_k} \partial_{x_l} \xi_0 = \\ &= 2 \gamma \nu_l \partial_{x_k} \varphi_1 \partial_\xi^2 y_e + 2 \gamma \nu_l \partial_\xi \partial_{x_k} y_e + \partial_\xi y_e (2 \partial_{x_k} \gamma \nu_l + 2 \gamma \partial_{x_k} \eta \partial_{x_l} \varphi + \gamma \eta \partial_{x_k} \partial_{x_l} \varphi). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что, в силу лемм 2.1, 2.3, имеем

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \partial_\xi \left(M(y_e) \partial_\xi \left(\mathcal{L}(y_e, q) \right) \right) = \varepsilon \frac{\gamma}{\eta} (\xi - \varphi_1) \partial_\xi \left(M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) \Big|_{t=-\varphi} + O(\varepsilon^2) = \\ & = \varepsilon \frac{\gamma}{\eta} \partial_\xi \left((\xi - \varphi_1) M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) \Big|_{t=-\varphi} - \varepsilon \frac{\gamma}{\eta} M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \Big|_{t=-\varphi} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Далее, в силу соотношения (2.4), имеем

$$\eta \left(\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q))^- \right) \Big|_{t=-\varphi} = \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_t \mathcal{L}(y_e, q))^- \right) \Big|_{t=-\varphi},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} & M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) - \eta \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) \right) \Big|_{t=-\varphi} = \\ & = M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_t \mathcal{L}(y_e, q))^- - \eta \left(\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q))^- \right) \right) \Big|_{t=-\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Интегрируя (2.22) по ξ и принимая во внимание условие стабилизации (2.3), (2.23), преобразуем уравнение (2.22) к виду

$$\begin{aligned} & \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[Q(\widehat{y}_e) \left(\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q) \right) \widehat{Y}_1 \right] = \\ & = -\eta(\widehat{y}_e - \widehat{c}^-) - \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - \left(M(\widehat{y}_e) \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) \right)^- + \frac{(\xi - \varphi_1)}{\eta} M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(a_{kl}(y_e) Z_{kl}(y_e) - Q(\widehat{y}_e) \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e) \widehat{\Phi}_1 \right) \right\} \Big|_{t=-\varphi} = \\ & = \widehat{F}_1^c + \frac{\varphi_1}{\eta} M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{y}_e, q) - \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(a_{kl}(\widehat{y}_e) \widehat{Z}_{kl}(y_e) - Q(\widehat{y}_e) \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e) \widehat{\Phi}_1 \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Стабилизирующиеся решения уравнения (2.24) типа кинка $\widehat{Y}_1$ существуют, если правая часть (2.24) является функцией типа солитона, т.е.

$$(F_1^c|_{t=-\varphi})^+ = (F_1^c|_{t=-\varphi})^-. \quad (2.25)$$

Из предположения (2.2) для быстрых функций следует

$$(F_1^c)^-|_{t=-\varphi} = 0.$$

Тогда (2.25) влечет граничное условие (аналог условия Ранкин—Гюгонио) на фронте фазового перехода вида

$$-(F_1^c)^+|_{t=-\varphi} = M(\widehat{c}^+) (\partial_\nu \widehat{\partial_c \Psi}(y_e))^+ - M(\widehat{c}^-) (\partial_\nu \widehat{\partial_c \Psi}(y_e))^- + \eta(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) = 0.$$

В силу определения продолжения y_e , имеем

$$(\partial_\nu \widehat{\partial_c \Psi}(y_e))^\pm = \partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^\pm) \partial_\nu \widehat{c}_e^\pm.$$

Отсюда получаем расширенное условие Стефана (1.9) на фронте

$$\eta(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) + M(\widehat{c}^+) \partial_\nu \widehat{\partial_c \Psi}(c^+) - M(\widehat{c}^-) \partial_\nu \widehat{\partial_c \Psi}(c^-) = 0,$$

где нормальная скорость фронта

$$V_\nu = -\frac{\partial_t(t + \varphi)}{|\partial_x \varphi|} = -\eta.$$

Далее, деля (2.24) на $\gamma M(\widehat{y}_e)$ и интегрируя по ξ , получим

$$\begin{aligned} Q(y_e) (\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e)) \widehat{Y}_1 &= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M(\widehat{y}_e)} d\xi_1 + \frac{\varphi_1}{\gamma \eta} (\partial_t \mathcal{L}(\widehat{y}_e) - (\partial_t \mathcal{L}(\widehat{y}_e))^-) - \\ &- a_{kl}(\widehat{y}_e) Z_{kl}(\widehat{y}_e) + \left(Q(\widehat{y}_e) \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e) - Q(\widehat{c}_e^-) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^-) \right) \widehat{\Phi}_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} (\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q)) \widehat{Y}_1 &= \frac{\varphi_1}{\gamma \eta} \left(\frac{q \partial_t \widehat{y}_e \partial_\xi^2 \widehat{y}_e}{Q(\widehat{y}_e)} + \partial_\xi^2 \partial_t \widehat{y}_e - \frac{\partial_t \widehat{\partial_c \Psi}(y_e) - \partial_t \widehat{\partial_c \Psi}(c_e^-)}{Q(\widehat{y}_e)} \right) + \\ &+ \frac{1}{Q(\widehat{y}_e)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M(\widehat{y}_e)} d\xi_1 - \frac{a_{kl}(\widehat{y}_e) Z_{kl}(\widehat{y}_e)}{Q(\widehat{y}_e)} + \left(\partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e) - \frac{Q(\widehat{c}_e^-) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^-)}{Q(\widehat{y}_e)} \right) \widehat{\Phi}_1 = G_1^c. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Напомним, что мы должны решать уравнение (2.26) в классе функций $\widehat{Y}_1 \in \mathcal{K}$ таких, что $(\widehat{Y}_1)^- = 0$. Положим

$$Y_1 = H_1(x, t) \frac{y_e(\xi, x, t) - c_e^-(x, t)}{c_e^+(x, t) - c_e^-(x, t)} + \mathcal{A}_1(\xi, x), \quad (2.27)$$

где $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{S}$ является функцией типа солитона. Нетрудно доказать следующее утверждение (см. [13]).

Лемма 2.6. *Решение $\widehat{Y}_1 \in \mathcal{K}$ уравнения (2.26) существует тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_1^c \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi = 0. \quad (2.28)$$

Тогда

$$\widehat{Y}_1 = \partial_\xi \widehat{y}_e \left(\int_{-\infty}^{\xi} \frac{d\xi_1}{(\partial_\xi \widehat{y}_e)^2} \int_{-\infty}^{\xi_1} \widehat{G}_1^c \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi_2 + c_1(x) \right),$$

где функция $c_1(x)$ является «постоянной» интегрирования.

В силу первого условия разрешимости ($\widehat{G}_1^c \in \mathcal{K}$), можно определить единственным образом функцию $\widehat{H}_1$:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1 &= -\frac{1}{(\partial_y^2 W_1)^+} (G_1)^+ = a\varphi_1 + b\widehat{\Phi}_1 + f, & a &= \frac{1}{\eta\gamma} \frac{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}_e^+) \partial_t \widehat{c}_e^+ - \partial_c^2 \Psi(\widehat{c}_e^-) \partial_t \widehat{c}_e^-}{Q(\widehat{c}_e^+) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^+)}, \\ f &= -\frac{1}{Q(\widehat{c}_e^+) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^+)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M(\widehat{y}_e)} d\xi, & b &= \frac{Q(\widehat{c}_e^-) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^-)}{Q(\widehat{c}_e^+) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^+)} - 1. \end{aligned}$$

Теперь вычислим интеграл в уравнении (2.28), который определит функцию $\widehat{\Phi}_1$ на фронте. Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{Q(\widehat{y}_e)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M} d\xi_1 \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi + \frac{\varphi_1}{\gamma\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{q \partial_t \widehat{y}_e \partial_\xi^2 \widehat{y}_e}{Q(\widehat{y}_e)} + \partial_\xi^2 \partial_t \widehat{y}_e - \frac{\partial_y^2 \Psi(\widehat{y}_e) \partial_t \widehat{y}_e - \partial_y^2 \Psi(\widehat{c}_e^-) \partial_t \widehat{c}_e^-}{Q(\widehat{y}_e)} \right) \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{kl}(\widehat{y}_e, q) Z_{kl}(\widehat{y}_e, \varphi_1)}{Q(\widehat{y}_e)} \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi - Q(\widehat{c}_e^-) \partial_y^2 W_1(\widehat{c}_e^-) \ln \frac{Q(\widehat{c}_e^+)}{Q(\widehat{c}_e^-)} \widehat{\Phi}_1 = 0. \end{aligned}$$

Зная значения функций H_1 , Φ_1 как функций от φ_1 на фронте $\Gamma_{t,0}$, можем определить значения на фронте решений c_1^+ , c_1^- вариации сингулярно предельной задачи

$$c_1^-|_{t=-\varphi} = \widehat{\Phi}_1, \quad c_1^+|_{t=-\varphi} = \widehat{\Phi}_1 + \widehat{H}_1. \quad (2.29)$$

Для окончания вывода сингулярно предельной задачи осталось получить уравнение (1.7). Для этого рассмотрим следующее приближение уравнения (1.1) порядка $O(1)$. Так же, как выше, результаты леммы 2.1 позволят получить соотношение

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \partial_\xi \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[(1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha)) (\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q)) \widehat{Y}_2^c \right] \right\} + \gamma \eta \partial_\xi \widehat{y}_e = \\ &= \partial_t y_e - \partial_{x_k} \left(M(y_e) \partial_{x_k} \partial_c \Psi(y_e) \right) + S(\xi, x) \Big|_{\xi=\gamma\eta\frac{(t+\varphi)}{\varepsilon}+\varphi_1} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $S(\xi, x)$ — функция типа солитона, определенная на фронте $\Gamma_{t,0}$. Так как решение уравнения ищем в классе стабилизирующих функций (2.3), то должны выполняться следующие уравнения:

$$\left\{ \partial_t y_e - \partial_{x_k} \left(M(y_e) \partial_{x_k} \partial_c \Psi(y_e) \right) \right\}^\pm = \partial_t c^\pm - \partial_{x_k} \left(M(c^\pm) \partial_{x_k} \partial_c \Psi(c^\pm) \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T).$$

Отсюда следует (1.7). При выводе формулы требуется определение продолжения функции $\widehat{Y}_1^c$ с фронта $\Gamma_{t,0}$ в область $\Omega_{\delta,\Gamma}$. Необходимо построить продолжение функций $\widehat{\Phi}_1, \widehat{H}_1^c$, заданных на фронте, в окрестность $\Omega_{\delta,\Gamma}$ фронта. Эти функции, по аналогии с продолжением функции y_e , будем искать в виде

$$\Phi_1 = (c_1^-)_e, \quad H_1^c = (c_1^+)_e - (c_1^-)_e,$$

где функции $(c_1^+)_e(x, t)$, $(c_1^-)_e(x, t)$ (поправки к предельным концентрациям $c_e^\pm$) можно определить как любое гладкое продолжение из областей $\Omega_{t,0}^\pm$, $t \in (0, T)$, в области $\Omega_{t,0}^+ \cap \Omega_{\Gamma,\delta}$ и $\Omega_{t,0}^- \cap \Omega_{\Gamma,\delta}$ решений $c_1^+(x, t)$, $c_1^-(x, t)$ задачи в вариациях к сингулярно предельной задаче (1.7)–(1.11)

$$\partial_t c_1^\pm = \nabla_x (M(c^\pm) \partial_c^2 \Psi(c^\pm) \nabla_x c_1^\pm + \partial_c (M \partial_c \Psi)(c^\pm) c_1^\pm \nabla_x c^\pm) \quad \text{в } \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (2.30)$$

в области $\Omega_t^\pm$, $t \in (0, T)$, с граничными условиями на фронте (2.29), вариацией условия (1.8) вида:

$$\begin{aligned} 1 + \left(M(c^+) \nabla_x c_1^+ - M(c^-) \nabla_x c_1^- + M_c(c_1^+ \nabla_x c^+ - c_1^- \nabla_x c^-) \right) \nabla_x \varphi = \\ = - \left(M(c^+) \nabla_x c^+ - M(c^-) \nabla_x c^- \right) \nabla \varphi_1 + g_1, \quad \text{на } \Gamma_t, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где функция g_1 зависит от функций $c^\pm$ и их производных на фронте. Граничные условия на неподвижной границе имеют вид

$$\partial_N c_1^+ = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad (2.32)$$

и начальным условием является

$$c_1^\pm|_{t=0} = 0.$$

Процедура вывода задачи (2.29), (2.30)–(2.32) аналогична проведенной выше при выводе сингулярно предельной задачи. Решение линейной задачи (2.29), (2.30)–(2.32) определено на времени существования классического решения расширенной задачи Стефана. Как видно, процедура построения следующих поправок $c_j^\pm$ устойчива, на каждом шаге мы будем получать задачу (2.29), (2.30)–(2.32) с правыми частями в (2.29)–(2.31), зависящими от функций φ , φ_1 и $c_k^\pm$, $k \leq j-1$, и их производных, полученных на предыдущих шагах.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 2.1. *На временном интервале существования классического решения сингулярно предельной задачи (1.7)–(1.11), существует стабилизирующееся асимптотическое решение задачи (1.1), (1.4), (1.5) с любой точностью. Более того, возмущение $\Gamma_{t,\varepsilon}$ фронта Γ_t однозначно определяется первыми тремя приближениями. Функции $c_1^\pm$, φ_1 являются классическим решением задачи в вариациях для сингулярно предельной задачи. На следующих приближениях роль свободных параметров в условиях разрешимости для обыкновенных стандартных уравнений на фронте для функции $\widehat{Y}_j$, $j \geq 2$, вместо φ , φ_1 будут играть постоянные интегрирования $c_k(x)$, $k \leq j-1$, полученные при решении этих стандартных уравнений на фронте на предыдущих шагах.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблат Г. И., Ентов В. М., Рижик В. М. Поведение жидкостей и газов в пористых слоях. — М.: Недра, 1984.
2. Маслов В. П. Распространение ударных волн в изэнтропическом невязком газе// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения/ ВИНТИ. — 1977. — 8. — С. 199–272.
3. Радкевич Е. В. Условия существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса—Томсона)// Мат. сб. — 1992. — 183, № 2. — С. 77–101.
4. Радкевич Е. В. Об асимптотическом решении системы фазового поля// Дифференц. уравн. — 1993. — 29, № 3. — С. 487–500.
5. Akhmerov R. On a structure of a set of solutions of Dirichlet boundary valued problem for stationary one-dimensional forward-backward parabolic equation// Nonlinear Anal.: Theory Meth. and Appl. — 1987. — 11, № 11. — С. 1303–1316.
6. Alikakos N., Bates P., Fusco G. Slow motion for Cahn–Hilliard equation// SIAM J. Appl. Math. — 1991. — 90. — С. 81–135.

7. *Bates P., Fife P.* The dynamics of nucleation for Cahn–Hilliard equation// *SIAM J. Appl. Math.* — 1993. — 53. — С. 990–1008.
8. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy// *J. Chemical Physics.* — 1958. — 28, № 1. — С. 258–267.
9. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// *Eur. J. Appl. Math.* — 1999. — 10. — С. 55–77.
10. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Asymptotic solution of the conserved phase field system in the fast relaxation case// *Eur. J. Appl. Math.* — 1998. — 9. — С. 1–21.
11. *Dreyer W. and Muller W. H.* A study of the coarsening in tin/lead solders// *Int. J. Solids Structures.* — 2000. — 37. — С. 3841–3871.
12. *Elliot Ch.* The stefan problem with a non-monotone constitutive relations// *IMA J. Appl. Math.* — 1985. — 35. — С. 257–264.
13. *Elliot Ch., Zheng S.* On the Chan–Hilliard equation// *Arch. Rat. Mech. Anal.* — 1986. — 96, № 4. — С. 339–357.
14. *Fridman A.*, Variational principles and free boundary problem. — New York-Chichester, Brisbane Toronto Singapur, 1982.
15. *Grant C.* Spinodal decomposition for the Cahn–Hilliard equation// *Comm. Part. Differ. Equat.* — 1985. — 18, № 3-4. — С. 453–490.
16. *Hilhorst D., Kersner R., Logak E., Mimura M.* On some asymptotic limits of the Fisher equation with degenerate diffusion, in press.
17. *Hollig K.* Existence of infinity many solutions for a forward-backward parabolic equation// *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1983. — 278, № 1. — С. 299–316.
18. *Kinderlehrer D., Pedregal P.* Weak convergence of integrands and the Young measure representation// *SIAM J. Math. Anal.* — 1992. — 23. — С. 1–19.
19. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global properties of a class of pattern formation equations// *Commun. Part. Differ. Equat.* — 1989. — 14, № 2. — С. 245–297.
20. *Nirenberg L.* Topics on Nonlinear Functional Analysis// New York Courant Inst. Math. Sciences, 1974.
21. *Plotnikov P.* Singular limits of solutions to Cahn–Hilliard equation, in press.
22. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid// *Proc. Roy. Soc. London.* — 1958. — A. 245. — С. 312–329.
23. *Slemrod M.* Dynamics of measure valued solutions to a backward forward parabolic equation// *J. Dyn. Differ. Equat.* — 1991. — 2. — С. 1–28.

Е. В. Радкевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: radk@mech.math.msu.su

М. В. Захарченко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

ТЕОРЕМА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ ТИПА «ИНФУЗОРИИ» С НЕСОГЛАСОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2003 г. Г. А. ЧЕЧКИН, Т. П. ЧЕЧКИНА

Аннотация. В этой работе мы рассматриваем модельную задачу усреднения для уравнения Пуассона в перфорированной области с очень быстро осциллирующей внешней границей. Перфорация и граничная осцилляция предполагаются локально периодическими, их структуры не согласованы и имеют разный порядок малости. В работе строится усредненная задача и доказывается теорема о сходимости решения исходной задачи к решению усредненной задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	140
2. Применение метода компенсированной компактности Мюра—Тартара	143
3. Предварительные леммы	145
4. Доказательство теоремы	150
Список литературы	152

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа имеет свои корни в моделях математической биологии. На стыке математики и биологии можно найти интересные постановки задач и неожиданные приложения известных результатов. Нас же привлекает поведение микроорганизмов. Эти одноклеточные имеют достаточно сложную внутреннюю структуру и очень маленькие характерные размеры, поэтому краевые задачи, которые описывают поведение простейших одноклеточных, естественно содержат малый параметр (характерный размер микронеоднородности среды). Это означает, что становятся актуальными асимптотические методы и методы теории усреднения дифференциальных операторов (см., например, [1, 5, 6, 8, 31, 39, 47]) для исследования таких задач.

Движение и питание простейших типа инфузории происходит благодаря наличию ресничек на поверхности их тел (см. рис. 1).

Тонкие и относительно длинные реснички помогают доставлять питательные вещества к клетке, а плавные движения ресничек заставляют ее двигаться. С хорошей точностью можно считать, что внутренняя структура инфузорий имеет локально периодический характер в некоторой малой окрестности ее границы. Процессы в таких клетках можно моделировать уравнениями в локально периодической области с осциллирующей границей. При этом осцилляция границы не согласована с внутренним строением области. Случай согласованной внутренней структуры и осцилляции внешней границы для областей типа «инфузории» был рассмотрен в работе [22]. Там была предъявлена удивительная инфузория (*STROBILIDIUM RAPULUM*), у которой структура ресничек строго согласована с внутренней микроструктурой.

Настоящая работа посвящена изучению поведения перфорированного тела с быстро осциллирующей внешней границей. Перфорация и граничная осцилляция предполагаются

Работа частично поддержана грантом № 00-01 Франко-Российского института им. А. М. Ляпунова, а также грантом Российского Фонда Фундаментальных Исследований № 02-01-00693.

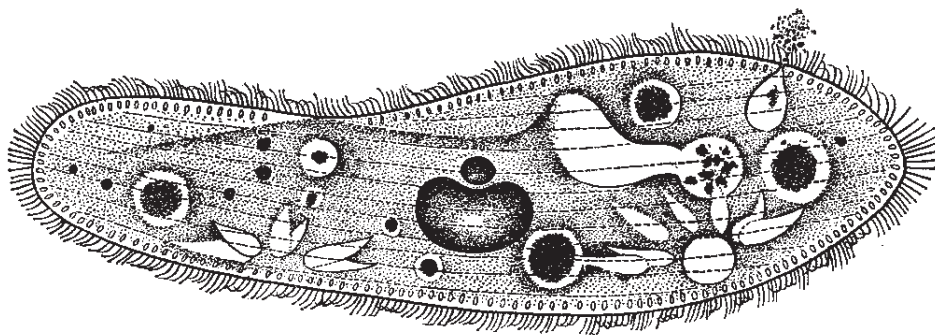


Рис. 1. Инфузория туфелька (PARAMECIUM CAUDATUM).

локально периодическими, причем их структуры не согласованы. Точные определения будут даны позднее.

В последние годы область математики, посвященная асимптотическому анализу задач в перфорированных областях, бурно развивается. Были получены результаты по усреднению для периодических, почти периодических и случайных структур. Детальную библиографию можно найти в [5, 6, 8, 39, 47, 48]. В частности, задачи с условием Неймана на границе полостей были исследованы в [19, 35], с третьим краевым условием (условием Фурье) на границе полостей были исследованы в [12, 13, 20, 21], а также в [3], [29], [34]. Интересные случаи рассмотрены в [14, 15], где исследуются асимптотики задачи с косою производной на поверхности полостей и задачи типа Стеклова. Также один интересный случай был рассмотрен в [4]. Особый интерес вызывает наиболее реалистичный случай, когда на границе дырок присутствует малая диссипация. Соответствующая математическая постановка включает третье краевое условие (условие Фурье) с малым параметром, при этом в усредненном уравнении возникает потенциал. Периодический случай был подробно изучен в [33, 34]. Позднее локально периодические перфорированные структуры были изучены в [30, 42]. В работе [12] исследуется асимптотическое поведение спектра краевой задачи с третьим краевым условием на границе полостей, в которых большая диссипация компенсируется за счет введения неограниченно возрастающего потенциала в уравнение.

Другое направление, уравнения в областях с осциллирующей границей, также достаточно хорошо исследовано. Смотри, например, [1–3, 10, 11, 23, 26–28, 36–38, 40, 44, 45, 49–53].

Комбинация этих двух эффектов, перфорации и осцилляции внешней границы, является естественной, но приводит к появлению дополнительных математических трудностей. Случай, когда внутренняя и граничная структуры согласованы, был рассмотрен в [3], а также в статье [22]. В настоящей работе изучается общий случай, когда и перфорация, и осцилляция границы локально периодичны и их структуры не согласованы. При этом осцилляция и перфорация имеют различные порядки малости. В этом случае мы не можем получить асимптотический ряд для решения задачи и только доказываем сходимость решений.

1. Постановка задачи

Начнем с определения перфорированной области с осциллирующей границей. Пусть граница ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, является $(d-1)$ -мерным гладким многообразием. Обозначим

$$J^\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^d : \text{dist}(\varepsilon j, \partial\Omega) \geq \varepsilon\sqrt{d}\}, \quad \square \equiv \left\{ \xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Определим перфорацию, а затем перфорированную область. Задав 1-периодическую по ξ гладкую функцию $\Phi(x, \xi)$ такую, что $\Phi(x, \xi)|_{\xi \in \partial\square} \geq \text{const} > 0$, $\Phi(x, 0) = -1$, $\nabla_\xi \Phi \neq 0$ при $\xi \in \square \setminus \{0\}$,

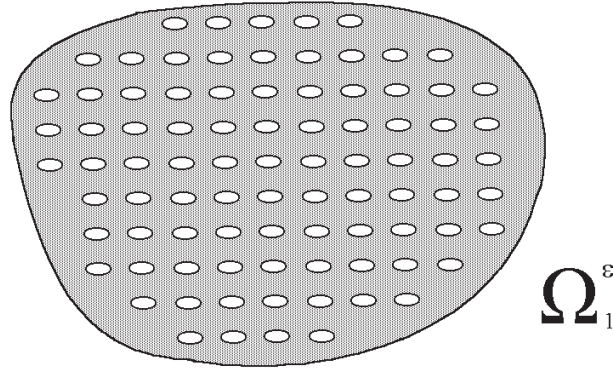


Рис. 2. Перфорированная область.

положим

$$Q_j^\varepsilon = \left\{ x \in \varepsilon(\square + j) \mid \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}^d,$$

и определим перфорированную область следующим образом:

$$\Omega_1^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{j \in J^\varepsilon} Q_j^\varepsilon.$$

Также будем использовать следующее обозначение:

$$\Omega_2^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{j \in J^\varepsilon} (\varepsilon(\square + j)).$$

Это «приграничный» слой без перфорации.

Далее, будем интерпретировать 1-периодические по ξ функции как функции, определенные на d -мерном торе $T^d \equiv \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d\}$.

Осталось снабдить область Ω_1^ε осциллирующей границей. Пусть дана гладкая неотрицательная 1-периодичная по $\hat{\xi}$ функция $F(y, \hat{\xi})$, $y \in \partial\Omega$, $\hat{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$. Положим

$$\Pi^\varepsilon = \left\{ (y, \tau) : y \in \partial\Omega, 0 \leq \tau < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(y, \frac{\varphi(y)}{\varepsilon}\right) \right\}, \quad \alpha > 1,$$

где τ — координата, направленная вдоль вектора внешней нормали к границе $\partial\Omega$, $\varphi(y)$ — гладкая вектор-функция такая, что

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \neq 0.$$

Далее, рассмотрим произвольное финитное покрытие $\partial\Omega$ с элементами U_q : $\partial\Omega = \bigcup_q U_q$. В локальных координатах $\hat{x}_q = (x_q^1, \dots, x_q^{d-1})$

$$\Pi_q^\varepsilon = \left\{ (\hat{x}_q, \tau) : \hat{x}_q \in U_q, 0 \leq \tau < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F_q\left(\hat{x}_q, \frac{\varphi_q(\hat{x}_q)}{\varepsilon}\right) \right\},$$

вектор-функция φ_q удовлетворяет $\varphi_q(\hat{x}_q) := \varphi(y)$, если $\hat{x}_q$ — локальные координаты $y \in \partial\Omega$, и

$$\left| \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x_q^j} \right| \neq 0.$$

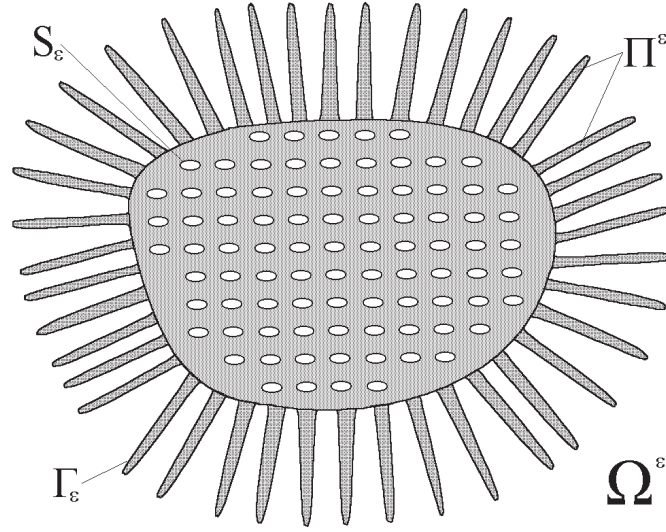


Рис. 3. Перфорированная область с быстроосциллирующей границей.

Если пересечение U_q и U_p непусто, то имеем

$$F_q \left(\hat{x}_q(\hat{x}_p), \frac{\varphi_q(\hat{x}_q(\hat{x}_p))}{\varepsilon} \right) = F_p \left(\hat{x}_p, \frac{\varphi_p(\hat{x}_p)}{\varepsilon} \right).$$

В дальнейшем будем опускать номер элемента покрытия q .

Наконец, нужную нам перфорированную область определяем следующим образом:

$$\Omega^\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon \bigcup \Pi^\varepsilon.$$

В силу изложенного выше построения, граница $\partial\Omega^\varepsilon$ состоит из

$$\Gamma_\varepsilon = \bigcup_q \left\{ (\hat{x}_q, \tau) : \hat{x}_q \in U_q, \tau = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F_q \left(\hat{x}_q, \frac{\varphi_q(\hat{x}_q)}{\varepsilon} \right) \right\},$$

образующей внешнюю границу, и границ «дырок» $S_\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega$. Обозначим $S(x) = \{\xi \in T^d | \Phi(x, \xi) = 0\}$, $\omega = \{\xi \in T^d | \Phi(x, \xi) > 0\}$.

Исследуем асимптотическое поведение решения $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ следующей краевой задачи в области Ω^ε :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f(x) & \text{в } \Omega^\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} p \left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} g \left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon} \right) & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon q \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = \varepsilon r \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где ν_ε — внешняя нормаль к Γ_ε , n_ε — внутренняя нормаль к границе «дырок»; $p(\hat{x}, \hat{\xi})$ и $g(\hat{x}, \hat{\xi})$ — 1-периодические по $\hat{\xi}$ положительные функции, $q(x, \xi)$ и $r(x, \xi)$ — 1-периодические по ξ функции.

Определение 1. Функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ является решением задачи (1), если интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x) \nabla v(x) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) v(x) ds^\varepsilon + \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) v(x) ds^\varepsilon = \\ = \int_{\Omega^\varepsilon} f(x) v(x) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds^\varepsilon + \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon} \right) v(x) ds^\varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

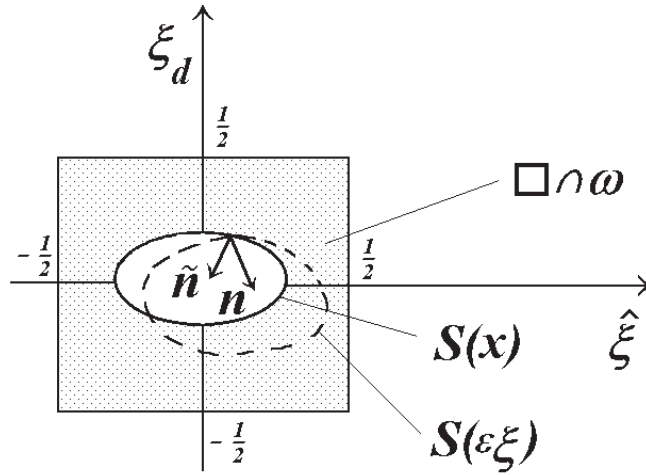


Рис. 4

верно для всех функций $v \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, где ds^ε — элемент $(d-1)$ -мерного объема на $\partial\Omega^\varepsilon$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЕНСИРОВАННОЙ КОМПАКТНОСТИ МЮРА—ТАРТАРА

В этом параграфе строим усредненное уравнение внутри области Ω . Для этого вводим вспомогательную однородную задачу в той же перфорированной области Ω^ε с условием Дирихле на внешней границе. Эта задача проще исходной и может быть изучена с помощью стандартного метода компенсированной компактности.

Зададимся произвольным $h \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Пусть w_ε — решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = h & \text{в } \Omega^\varepsilon, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

и пусть w_0 — решение задачи

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i(x, \xi)}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial w_0(x)}{\partial x_i} \right) = -|\square \cap \omega| h(x) & \text{в } \Omega, \\ w_0 = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ обозначает интеграл по множеству $\square \cap \omega$, и 1-периодические компоненты вектор-функции $M(x, \xi) = (M_1(x, \xi), \dots, M_d(x, \xi))$ являются решением задач

$$\begin{cases} \Delta_\xi M_i(x, \xi) = 0 & \text{в } \square \cap \omega, \\ \frac{\partial M_i(x, \xi)}{\partial \tilde{n}} = -\tilde{n}_i & \text{на } S(x), \quad i = 1, \dots, d; \end{cases} \quad (5)$$

$\tilde{n}$ — нормаль к $S(x)$,

$$n_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \tilde{n}(x, \xi) \Big|_{\xi = \frac{x}{\varepsilon}} + O(\varepsilon).$$

Очевидно,

$$n_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \equiv \frac{\nabla_x \Phi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)}{\left| \nabla_x \Phi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|} = \left(\frac{\nabla_\xi \Phi(x, \xi)}{|\nabla_\xi \Phi(x, \xi)|} + \varepsilon \frac{\nabla_x \Phi(x, \xi)}{|\nabla_\xi \Phi(x, \xi)|} - \right.$$

$$- \varepsilon \nabla_{\xi} \Phi(x, \xi) \frac{(\nabla_x \Phi(x, \xi), \nabla_{\xi} \Phi(x, \xi))}{|\nabla_{\xi} \Phi(x, \xi)|^3} + O(\varepsilon^2) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Поэтому, $\tilde{n}(x, \xi) = \frac{\nabla_{\xi} \Phi(x, \xi)}{|\nabla_{\xi} \Phi(x, \xi)|}$. Обозначим

$$p_{\varepsilon} := a^{\varepsilon} \nabla w_{\varepsilon} \quad (6)$$

и

$$p_0 := a^0 \nabla w_0, \quad (7)$$

где $a_{ij}^{\varepsilon}(x) = \chi_{\Omega^{\varepsilon}} \delta_{ij}$, $a_{ij}^0(x) = \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right\rangle$, $\chi_{\Omega^{\varepsilon}}$ — характеристическая функция области Ω^{ε} .

Верно следующее утверждение.

Предложение 2. Семейство p_{ε} сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$ к p_0 . Более того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^{\varepsilon}} |w_{\varepsilon} - w_0|^2 dx = 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что последовательность w_{ε} равномерно ограничена в $\overset{\circ}{H}^1(\Omega^{\varepsilon}, \partial\Omega)$. Это следует непосредственно из интегрального тождества. По теореме Реллиха существует подпоследовательность ε' и функция $w_*(x) \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ такая, что $w_{\varepsilon} \rightharpoonup w_*$ в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon' \rightarrow 0$. С другой стороны, можно доказать, что вектор p_{ε} равномерно ограничен в $(L_2(\Omega^{\varepsilon}))^d$. Аналогично, по теореме Реллиха существует подпоследовательность ε'' подпоследовательности ε' и функция $p_*(x) \in (L_2(\Omega))^d$ такая, что $p_{\varepsilon} \rightharpoonup p_*$ в $(L_2(\Omega))^d$ при $\varepsilon'' \rightarrow 0$. Так как $\operatorname{div}(p_{\varepsilon}) = -\chi_{\Omega^{\varepsilon}} h$ в Ω и $\chi_{\Omega^{\varepsilon}} h \rightarrow |\square \cap \omega| h$ в $L_2(\Omega)$, то

$$\operatorname{div}(p_*) = -|\square \cap \omega| h. \quad (8)$$

Осталось доказать, что $p_* \equiv p_0$.

Замечание 3. В силу выше приведенных построений, $w_*(x)$ и $M\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ не определены во всей Ω^{ε} . Применение симметричного продолжения (см. [7]) позволяет продолжить $w_*(x)$ в окрестность Π^{ε} и $M(x, \xi)$ во внутренность «дырок», сохраняя регулярность этих функций. Оставим то же обозначение для продолженных функций.

Рассмотрим последовательность $\nabla w_{\varepsilon} a^{\varepsilon} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right)$. Тогда $\nabla w_{\varepsilon} a^{\varepsilon} \rightharpoonup p_*$ и $\left(\delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right) \rightharpoonup \delta_{ij}$. С другой стороны, $\nabla w_{\varepsilon} \rightharpoonup \nabla w_*$ и $a^{\varepsilon} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right) \rightharpoonup \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right\rangle$. Очевидно, что $\operatorname{rot} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right) = 0$, $\operatorname{rot} \nabla w_{\varepsilon} = 0$. Осталось доказать, что $\operatorname{div} \left[a^{\varepsilon} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right) \right] = 0$ в $\square$ для $i = 1, \dots, d$. Это следует из того, что $\operatorname{div} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right) \right] = 0$ в $\square \cap \omega$ для $i = 1, \dots, d$, и из формулы Стокса.

В силу леммы о компенсированной компактности (см. [43]),

$$\left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial w_*}{\partial x_j} = (p_*)_j \delta_{ij} = (p_*)_i.$$

Поэтому из (8) следует $\operatorname{div}(a^0 \nabla w_*) = -|\square \cap \omega| h$. Принимая во внимание единственность решения задачи (4), заключаем, что $w_* \equiv w_0$ и $p_* = p_0$. Утверждение доказано. $\square$

Наша следующая цель — доказать, что предельная задача для задачи (1) принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i(x, \xi)}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \right) - \\ - R(x) - Q(x)u_0(x) = -|\square \cap \omega|f(x) & \text{в } \Omega, \\ \sum_{i,j=1}^d \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i(y, \xi)}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial u_0(y)}{\partial x_i} N_j + \\ + P(y)u_0(y) = G(y) & \text{при } y \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (9)$$

где $N = (N_1, \dots, N_d)$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$ (см. также [2, 3, 28] и [22]),

$$P(y) = \int_T p(y, \hat{\xi}) \sqrt{\left| \left(\nabla_\xi F(y, \hat{\xi}), \nabla \varphi \right) \right|^2} d\hat{\xi}, \quad G(y) = \int_T g(y, \hat{\xi}) \sqrt{\left| \left(\nabla_\xi F(y, \hat{\xi}), \nabla \varphi \right) \right|^2} d\hat{\xi},$$

$$Q(x) = \int_S q(x, \xi) d\sigma, \quad R(x) = \int_S r(x, \xi) d\sigma,$$

где $T = \{\xi : 0 < \xi_j < 1, j = 1, \dots, d-1\}$, а $\left| \left(\nabla_\xi F(y, \hat{\xi}), \nabla \varphi \right) \right|^2$ обозначает выражение

$$\sum_{i,j=1}^{d-1} \left(\frac{\partial \varphi^j(y)}{\partial x_i} \frac{\partial F(y, \hat{\xi})}{\partial \xi_j} \right)^2.$$

Интегральное тождество для задачи (9) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^d \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i(x, \xi)}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + Q(x)u_0(x)v(x) \right) dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} P(\hat{x})u_0(x)v(x) ds = \int_{\Omega} |\square \cap \omega|f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} R(x) dx + \int_{\partial\Omega} G(\hat{x})v(x) ds \end{aligned} \quad (10)$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Замечание 4. Необходимо продолжить $u_0(x)$ в окрестность Π^ε , сохраняя регулярность этой функции (см. замечание 3). Сохраним прежнее обозначение для продолженной функции.

Предельное поведение решения задачи (1) описывается следующим утверждением.

Теорема 5. Пусть $p(y, \hat{\xi})$ и $q(x, \xi)$ — неотрицательные и хотя бы одна из них строго положительна хотя бы в одной точке. Тогда для любого достаточно малого ε задача (1) имеет единственное решение и

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad (11)$$

в $H^1(\Omega^\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где u_ε и u_0 — решения задач (1) и (9) соответственно.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Этот параграф посвящен различным техническим утверждениям, которые будут использованы в дальнейшем анализе (см. также [3, 22, 28, 29]).

Лемма 6. Неравенства

$$\left\| v \left(\hat{x}, \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F \left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon} \right) \right) - v(\hat{x}, 0) \right\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \quad (12)$$

$$\|v\|_{L_2(\Pi^\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \quad (13)$$

выполнены для всех функций $v \in H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно полагать, что $v \in C^\infty(\overline{\Omega^\varepsilon})$. Замечая, что

$$v(\hat{x}, \tau) - v(\hat{x}, 0) = \int_0^\tau \frac{\partial v(\hat{x}, t)}{\partial x_n} dt$$

для всех $(\hat{x}, \tau) \in \overline{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega}$, имеем

$$|v(\hat{x}, \tau) - v(\hat{x}, 0)|^2 = \left| \int_0^\tau \frac{\partial v(\hat{x}, t)}{\partial x_n} dt \right|^2 \leq \tau \int_0^\tau \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dt.$$

Делая замену $\tau = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)$ и интегрируя по $\partial\Omega$, получаем (12).

Далее, для $(\hat{x}, \tau) \in \overline{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega}$ верно неравенство

$$v^2(\hat{x}, \tau) \leq 2v^2(\hat{x}, 0) + 2 \left(\int_0^\tau \frac{\partial v(\hat{x}, t)}{\partial x_n} dt \right)^2 \leq 2v^2(\hat{x}, 0) + 2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) \int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dt.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial\Omega} d\hat{x} \int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)} v^2(\hat{x}, \tau) d\tau \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \max F \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 + \varepsilon^{\frac{2}{\alpha}} \max F^2 \int_{\partial\Omega} d\hat{x} \int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dt.$$

Это доказывает (13). Лемма доказана. $\square$

Естественно выразить элемент $(d-1)$ -мерного объема на $\partial\Omega^\varepsilon$ через элемент $(d-1)$ -мерного объема на $\partial\Omega$.

Лемма 7. Пусть ds^ε — элемент $(d-1)$ -мерного объема $\partial\Omega^\varepsilon$ и ds — элемент $(d-1)$ -мерного объема $\partial\Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} ds^\varepsilon &= \sqrt{1 + \varepsilon^{\frac{2-2\alpha}{\alpha}} \left| \left(\nabla_{\hat{\xi}} F_q(\hat{x}_q, \hat{\xi}), \nabla \varphi_q \right) \right|^2} \Big|_{\hat{\xi} = \frac{\varphi_q(\hat{x})}{\varepsilon}} ds \left(1 + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right) = \\ &= \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\sqrt{\left| \left(\nabla_{\hat{\xi}} F_q(\hat{x}_q, \hat{\xi}), \nabla \varphi_q \right) \right|^2} \Big|_{\hat{\xi} = \frac{\varphi_q(\hat{x})}{\varepsilon}} + O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) \right) ds \quad \text{на } U_q. \end{aligned}$$

Доказательство. Опуская индекс q , получаем уравнение, задающее Γ_ε

$$\tau - \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} ds^\varepsilon &= \left\{ \left(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{\xi})}{\partial x_1} + \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j(\hat{x})}{\partial x_1} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{\xi})}{\partial x_{d-1}} + \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j(\hat{x})}{\partial x_{d-1}} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

где $\hat{\xi} = \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \varepsilon^{\frac{2}{\alpha}} |\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \\ & - \left\{ 1 + \varepsilon^{\frac{2-2\alpha}{\alpha}} \left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} |\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} \right) \times \\ & \times \left[\left\{ 1 + \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} |\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \left\{ 1 + \varepsilon^{\frac{2-2\alpha}{\alpha}} \left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} = O(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} |\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \\ & - \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left\{ \left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} |\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} + 1 \right) \times \\ & \times \left[\left\{ 1 + \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} |\nabla_{\hat{x}} F|^2 + 2\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \sum_{i,j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left\{ \left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \leq C \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}) \right) = \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} O(\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Следующее предложение является прямым следствием теоремы вложения Соболева (см., например, [17, 18]).

Предложение 8. Для всех $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{\partial\Omega} uv \, ds \right| \leq C_3 \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

причем C_3 не зависит от u и v .

Равномерная по ε коэрцитивность билинейной формы в (1) является предметом леммы 9, которая подразумевает, в частности, что задача (1) поставлена корректно. Доказательство этой леммы следует из эквивалентности соответствующих нормировок в $H^1(\Omega^\varepsilon)$ (см. [9]).

Лемма 9. В условиях теоремы 5 неравенство

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla v|^2 dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v^2 ds^\varepsilon + \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v^2 ds^\varepsilon \geq C_4 \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2$$

выполнено для всех $v \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, где C_4 не зависит от ε .

Следующее утверждение будет систематически использоваться в дальнейшем рассмотрении.

Замечание 10. Это предложение для гладкой функции $h(\hat{x}, \hat{\xi})$ в двумерном случае было доказано в [2] и независимо в [25]. Смотри также [24]. Доказательство для липшицевой функции смотри в [28]. Подобные оценки были получены также в [12–14].

Лемма 11. Пусть $h(y, \hat{\xi})$ — 1-периодическая по $\hat{\xi}$, удовлетворяющая условию Липшица, функция такая, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 h(y, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \equiv 0. \quad (14)$$

Тогда неравенство

$$\left| \int_{\partial\Omega} h\left(y, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) u(y)v(y) ds \right| \leq C_5 \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad (15)$$

выполнено для всех $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Доказательство. В силу тождества (14), уравнение

$$\Delta_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) = h(\hat{x}, \hat{\xi})$$

разрешимо в пространстве 1-периодических по $\hat{\xi}$ функций. Решение единственно с точностью до аддитивной константы.

Предположим, что $v(\hat{x}, 0)$ и $u(\hat{x}, 0)$ принадлежат $\dot{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ и $h(\hat{x}, \hat{\xi})$ из C^1 . Тогда после замены $h(\hat{x}, \hat{\xi}) = \Delta_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi})$, интегрирования по частям и использования неравенства Коши—Буняковского получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\Omega} h\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) u(\hat{x})v(\hat{x}) d\hat{x} \right| = \left| \int_{\partial\Omega} \left(\Delta_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) \right) \Big|_{\hat{\xi}=\frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}} u(\hat{x})v(\hat{x}) d\hat{x} \right| = \\ & = \left| \int_{\partial\Omega} \left(\varepsilon \nabla_{\hat{x}} \left[\nabla_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) \Big|_{\hat{\xi}=\frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}} \right] - \varepsilon \left((\nabla_{\hat{x}}, \nabla_{\hat{\xi}}) \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) \right) \Big|_{\hat{\xi}=\frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}} \right) uv d\hat{x} \right| \leq \\ & \leq \varepsilon \left| \int_{\partial\Omega} \left(\nabla_{\hat{\xi}} \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) \Big|_{\hat{\xi}=\frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}}, \nabla_{\hat{x}}(uv) \right) d\hat{x} \right| + \\ & + \varepsilon \left| \int_{\partial\Omega} \left((\nabla_{\hat{x}}, \nabla_{\hat{\xi}}) \Psi(\hat{x}, \hat{\xi}) \right) \Big|_{\hat{\xi}=\frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}} uv d\hat{x} \right| \leq K_1 \varepsilon^\alpha \|u\|_{H^1(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\partial\Omega)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь при приближении произвольной липшицевой функции $h(\hat{x}, \hat{\xi})$ последовательностью C^1 -функций обобщаем последнее неравенство на пространство липшицевых функций. Ясно, что K_1 зависит только от константы Липшица.

Пусть $p \in [0, 1]$. На основе билинейной формы

$$\int_{\partial\Omega} h\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) u(\hat{x})v(\hat{x}) d\hat{x}, \quad u, v \in H^p(\partial\Omega)$$

определим оператор $T_\varepsilon : H^p(\partial\Omega) \rightarrow H^{-p}(\partial\Omega)$ следующей формулой

$$\langle T_\varepsilon u, v \rangle_p = \int_{\partial\Omega} h\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) u(\hat{x}, 0) v(\hat{x}, 0) d\hat{x}.$$

Обозначим через $L(H^p(\partial\Omega), H^{-p}(\partial\Omega))$ пространство линейных операторов из $H^p(\partial\Omega)$ в $H^{-p}(\partial\Omega)$. Из (16) получаем

$$\|T_\varepsilon\|_{L(H^1(\partial\Omega), H^{-1}(\partial\Omega))} \leq K_1 \varepsilon.$$

Также имеем очевидное неравенство

$$\|T_\varepsilon\|_{L(L_2(\partial\Omega), L_2(\partial\Omega))} \leq K_2,$$

где константа не зависит от ε .

Используя метод интерполяции пространств (см. [41, 46]), получаем оценку

$$\|T_\varepsilon\|_{L(H^p(\partial\Omega), H^{-p}(\partial\Omega))} \leq K_2^{1-p} K_1^p \varepsilon^p. \quad (17)$$

Полагая $p = \frac{1}{2}$ в (17), приходим к (15). Лемма доказана. $\square$

Лемма 12. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\left| \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v(x) ds^\varepsilon - \int_{\partial\Omega} G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) ds \right| \leq C_6 \left(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v(x) u(x) ds^\varepsilon - \int_{\partial\Omega} P(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) u(\hat{x}, 0) ds \right| \leq \\ & \leq C_7 \left(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $P(y)$ и $G(y)$ были определены ранее.

Доказательство. Используя результат леммы 7, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)\right) ds^\varepsilon - \int_{\partial\Omega} G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) ds \right| = \\ & = \left| \int_{\partial\Omega} \left[\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)\right) \times \right. \right. \\ & \times \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\sqrt{\left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2} + O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) \right) \left. \right] ds - \int_{\partial\Omega} G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) ds \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\partial\Omega} \left(g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v\left(\hat{x}, \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} F\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right)\right) \sqrt{\left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v(\hat{x}, 0) \sqrt{\left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2} \right) ds \right| + \\ & + \left| \int_{\partial\Omega} \left(g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v(\hat{x}, 0) \sqrt{\left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2} - G(\hat{x}) v(\hat{x}, 0) \right) ds \right| + C_9 \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Положим $h(\hat{x}, \hat{\xi}) = \sqrt{\left| (\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi}), \nabla \varphi) \right|^2} g(\hat{x}, \hat{\xi}) - G(\hat{x})$. Тогда из уравнения на $G(\hat{x})$ имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 h(\hat{x}, \hat{\xi}) d\xi \equiv 0.$$

Следовательно, оценивая первый интеграл в правой части (20) по лемме 6 и второй — по лемме 11, получаем неравенство (18).

Неравенство (19) доказывается аналогично. $\square$

Следующее утверждение фактически является модифицированной версией леммы 11 (см. [3]).

Лемма 13. Если

$$\frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{\square \cap \omega} Q(x) d\xi - \int_S q(x, \xi) d\sigma \equiv 0, \quad (21)$$

то следующее неравенство

$$\left| \int_{\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon} \frac{1}{|\square \cap \omega|} Q(x) v(x) dx - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) ds^\varepsilon \right| \leq C_8 \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \quad (22)$$

верно для всех $v(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, где C_8 не зависит от ε .

Доказательство. Из (21) следует, что задача

$$\begin{cases} \Delta_\xi \Psi(x, \xi) = \frac{1}{|\square \cap \omega|} Q(x) & \text{в } \square \cap \omega, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = q(x, \xi) & \text{на } S \end{cases} \quad (23)$$

имеет 1-периодическое по ξ решение. Более того, это решение единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Умножим уравнение (23) на функцию $v(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ и проинтегрируем по области $\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon$. Интегрирование левой части полученной формулы по частям дает

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon} Q(x) v(x) dx - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) ds \right| = \\ & = \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon} \Delta_\xi \Psi(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) ds \right| = \\ & = \left| \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon} \left(\nabla_x \left[\nabla_\xi \Psi(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \right] - ((\nabla_x, \nabla_\xi) \Psi(x, \xi)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \right) v(x) dx - \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) ds \right| \leq \varepsilon \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon} \left((\nabla_\xi \Psi(x, \xi)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}, \nabla_x v(x) \right) dx \right| + \\ & + \varepsilon \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon \setminus \Omega_2^\varepsilon} ((\nabla_x, \nabla_\xi) \Psi(x, \xi)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \right| + \varepsilon^2 \left| \int_{S_\varepsilon} \left((\nabla_\xi \Psi(x, \xi)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}, n'_\varepsilon \right) v(x) ds \right| \leq C_8 \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Лемма доказана. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В силу предложения 8 и тождества (1), $H^1(\Omega^\varepsilon)$ -норма $\|u_\varepsilon(x)\|$ ограничена. В силу теоремы Реллиха, существует слабо сходящаяся подпоследовательность $u_{\varepsilon'}(x)$. Предельную функцию обозначим $u_*(x)$.

Используя методы асимптотического анализа, докажем, что для слабого предела $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено тождество (10). С помощью леммы 12 получаем

$$\left| \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} g\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) v(x) ds^\varepsilon - \int_{\partial\Omega} G(\hat{x})v(x) ds \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x)v(x) ds^\varepsilon - \int_{\partial\Omega} P(\hat{x})u_*(x)v(x) ds \right| \leq \\ & \leq \left| \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} p\left(\hat{x}, \frac{\varphi(\hat{x})}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x)v(x) ds^\varepsilon - \int_{\partial\Omega} P(\hat{x})u_\varepsilon(x)v(x) ds \right| + \\ & + \left| \int_{\partial\Omega} P(\hat{x})(u_\varepsilon(x) - u_*(x))v(x) ds \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее полагаем, что $v \in H^1(\Omega)$. Очевидно, что

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} |\square \cap \omega| f(x)v(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Так как $\left| \int_{\Omega_2^\varepsilon} Q(x)u_*(x)v(x) dx \right| \rightarrow 0$, то из леммы 13 следует, что

$$\left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x)v(x) ds^\varepsilon - \int_{\Omega} Q(x)u_*(x)v(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Аналогично,

$$\left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} r\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) ds^\varepsilon - \int_{\Omega} R(x)v(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 5, остается проверить, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x) \nabla v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial u_*}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (25)$$

или, что

$$\chi_{\Omega^\varepsilon} \nabla_x u_\varepsilon \rightharpoonup \sum_{i=1}^d \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \right\rangle \frac{\partial u_*}{\partial x_i} \quad \text{в } L_2(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (26)$$

Лемма 14 (о сходимости произвольных решений). Пусть a^0 — такое же, как в предложении 2. Тогда

$$\begin{aligned} a^\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\rightharpoonup a^0 \nabla u_* \quad \text{в } (L_2(\Omega))^d \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \operatorname{div} (a^0 \nabla u_*) &= -|\square \cap \omega| f. \end{aligned}$$

Доказательство. Применяя лемму 9, легко получить равномерную ограниченность последовательности $a^\varepsilon \nabla u_\varepsilon$. А значит, по теореме Реллиха существует такое q_0 , что

$$a^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup q_0 \quad \text{в } (L_2(\Omega))^d \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$\operatorname{div} q_0 = -|\square \cap \omega| f.$$

Рассмотрим следующее тождество

$$\nabla u_\varepsilon [a^\varepsilon \nabla w_\varepsilon] = [\nabla u_\varepsilon a^\varepsilon] \nabla w_\varepsilon,$$

где w_ε — решение (3) для некоторого h . По лемме о компенсированной компактности и предложению 2, имеем

$$\nabla u_* a^0 \nabla w_0 = q_0 \nabla w_0.$$

В силу произвольности h видим, что $q_0 = a^0 \nabla u_*$. Лемма доказана. $\square$

Следует также заметить, что

$$\int_{\Pi_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x) \nabla v(x) dx \leq \sqrt{\int_{\Pi_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon(x))^2 dx} \sqrt{\int_{\Pi_\varepsilon} (\nabla v(x))^2 dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

так как первый интеграл равномерно ограничен, а второй сходится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следовательно, мы доказали, что интегральные тождества для u_* и для u_0 эквивалентны. Значит,

$$u_*(x) \equiv u_0(x).$$

Используя единственность решения задачи (9), можно утверждать, что последовательность $u_\varepsilon(x)$ сходится слабо к $u_0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. Беляев А. Г. О сингулярных возмущениях граничных задач. — М.: МГУ, 1990.
3. Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей// Сиб. мат. ж. — 1998. — 39, № 4. — С. 730–754.
4. Волков Д. Б. Об осреднении некоторых краевых задач в областях с периодической структурой// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1982. — 22, № 1. — С. 112–122.
5. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: ФизМатЛит, 1993.
6. Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
8. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелко-зернистой границей. Киев: Наукова Думка, 1974.
9. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
10. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Влияние малой поверхностной иррегулярности на статическую деформацию тела и энергетический баланс растущей трещины// Прикл. мат. и мех. — 1991. — 55, № 5. — С. 819–828.
11. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей// Мат. сб. — 1980. — 112 (154). — С. 588–610.
12. Пастухова С. Е. Усреднение смешанной задачи с косою производной для эллиптического оператора в перфорированной области// Диффер. уравнения. — 1994. — 30, № 8. — С. 1445–1456.
13. Пастухова С. Е. О погрешности усреднения для задачи Стеклова в перфорированной области// Диффер. уравнения. — 1995. — 31, № 6. — С. 1042–1054.
14. Пастухова С. Е. Метод компенсированной компактности Тартара в усреднении спектра смешанной задачи для эллиптического уравнения в перфорированной области с третьим краевым условием// Мат. сб. — 1995. — 186, № 5. — С. 127–144.
15. Пастухова С. Е. О характере распределения поля температур в перфорированном теле с заданным его значением на внешней границе в условиях теплообмена на границе полостей по закону Ньютона// Мат. сб. — 1996. — 187, № 6. — С. 85–96.
16. Пастухова С. Е. Обоснование асимптотики решения смешанной задачи для стационарной теплопроводности в перфорированной области// ТММО. — 1997. — 58. — С. 88–101.
17. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
18. Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщённых функций. — М.: Наука, 1989.

19. Сукретный В. И. Усреднение краевых задач для эллиптических уравнений в перфорированных областях// Успехи мат. н. — 1983. — 38, № 6. — С. 125–126.
20. Сукретный В. И. Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях// Успехи мат. н. — 1984. — 39, № 4. — С. 120–121.
21. Сукретный В. И. О задаче стационарной теплопроводности в перфорированных областях// Препр. 84.48/ Ин-т. мат. АН УССР, Киев, 1984.
22. Чечкин Г. А., Чечкина Т. П. Об усреднении задач в областях типа «инфузории»// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2003. — 23.
23. Arrieta J. M. Neumann eigenvalue problems on exterior perturbations of the domain// J. Differ. Equat. — 1995. — 118. — С. 54–103.
24. Ball J. M., Murat F. Remarks on Rank-One Convexity and Quasiconvexity. R 90043. Paris: Universite Pierre et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire d'Analyse Numérique, 1990.
25. Briane M. Homogénéisation de Matériaux Fibres et Multi-Couches. Thèse d'Etat, Université de Paris VI, France, 1990.
26. Brizzi R., Chalot J. P. Homogénéisation de Frontière. Thèse d'Etat, Université de Nice, France, 1978; Ric. Mat. — 1997. — 46, № 2. — С. 341–387.
27. Butazzo G., Kohn R. Reinforcement by a Thin Layer with Oscillating Thickness// IMA Preprint Series # 236. Minneapolis: Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, 1986.
28. Chechkin G. A., Friedman A., Piatnitski A. L. The boundary-value problem in domains with very rapidly oscillating boundary// J. Math. Anal. and Appl. — 1999. — v. 231, № 1. — С. 213–234.
29. Chechkin G. A., Piatnitski A. L. Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain// Appl. Anal. — 1999. — 71, № 1–4. — С. 215–235.
30. Chenais D., Mascarenhas M. L., Trabucho L. On the optimization of nonperiodic homogenized microstructures// Modél. Math. Anal. Numér. (M²AN). — 1997. — 31, № 5. — С. 559–597.
31. Cherkaev A., Kohn R. (Eds.) Topics in Mathematical Modelling of Composite Materials. — Boston: Birkhäuser Publ., 1997.
32. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization in open sets with holes// J. Math. Anal. and Appl. — 1979. — 71. — С. 590–607.
33. Cioranescu D., Donato P. On a Robin problem in perforated domains// In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*. Edited by D. Cioranescu, A. Damlaian, and P. Donato. GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications. Tokyo: Gakkōtoshō, 1997. — 9. — С. 123–136.
34. Cioranescu D., Donato P. Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés// Asymptotic Anal. — 1988. — 1. — С. 115–138.
35. Cioranescu D., Murat F. Un terme étrange venu d'ailleurs// In: *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Res. Notes in Math.* — London: Pitman, 1982. — 60. — С. 98–138.
36. Dancer E. N., Daners D. Domain perturbation for elliptic equations subject to robin boundary conditions// J. Differ. Equat. — 1997. — 138, № 1. — С. 86–132.
37. Friedman A., Bei Hu, and Yong Liu. A Boundary Value Problem for the Poisson Equation with Multi-Scale Oscillating Boundary// IMA Preprint Series # 1415. Minneapolis: Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, 1996.
38. Gaudiello A. Asymptotic behavior of nonhomogeneous Neumann problems in domains with oscillating boundary// Ric. Mat. — 1994. — 43. — С. 239–292.
39. Hornung U. (Ed.) Homogenization and Porous Media. — IAM, Vol. 6. Berlin, New York: Springer Verlag, 1997.
40. Kohler W., Papanicolaou G., Varadhan S. Boundary and interface problems in regions with very rough boundaries// In: *Multiple Scattering and Waves in Random Media* (Eds. Chow P. L., Kohler W. E., Papanicolaou G. C.). — Amsterdam, North-Holland, 1981. — С. 165–197.
41. Lions J.-L., Magenes E. Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Applications. — Berlin-New York: Springer-Verlag, 1973.
42. Mascarenhas M. L., Poliřevski D. The warping, the torsion, and the Neumann problems in a quasi-periodically perforated domain// Modél. Math. Anal. Numér. (M²AN). — 1994. — 28, № 1. — С. 37–57.
43. Murat F., Tartar L. Calcul des variations et homogénéisation/ R 84012. Paris: Universite Pierre et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire d'Analyse Numérique, 1984.
44. Nevard J., Keller J. B. Homogenization of rough boundaries and interfaces// SIAM J. Appl. Math. — 1997. — 57, № 6. — С. 1660–1686.

45. *Ozawa S., Rappongi S.* Singular variation of domains and continuity property of eigenfunction for some semilinear elliptic equations// *Kodai Math. J.* — 1995. — 18. — С. 315–327.
46. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. II Fourier analysis. Self-Adjointness. — New York-San Francisco-London: Academic Press, 1975.
47. *Saint Jean Paulin J., Cioranescu D.* Homogenization of Reticulated Structures. Applied Mathematical Sciences. Vol. 136. — Berlin-New York: Springer Verlag, 1999.
48. *Sanchez-Palencia E.* Homogenization Techniques for Composite Media. — Berlin-New York: Springer-Verlag, 1987.
49. *Sanchez-Palencia E., Suquet P.* Friction and homogenization of a boundary. In: *Free Boundary Problems: Theory and Applications*. Ed. A. Fasano, M. Primicerio. — London: Pitman, 1983. — С. 561–571.
50. *Santosa F., Vogelius M., Jian-Ming Xu.* An effective nonlinear boundary condition for a corroding surface. Identification of the damage based on electrostatic data// IMA Preprint Series # 1461. Minneapolis: Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, 1997.
51. *Shamaev A. S., Shamaev S. I., Nesterov S. V.* Methods, Algorithms and Facilities of aerospace Computer Radar Tomography of Earth Surface Regions. — Moscow: Scientific World, 1996.
52. *Viêt Hà Hoàng.* Homogenization of Singularly Perturbed Dirichlet Problems in Perforated Domains// *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* — 2000. — 130A. — С. 35–51.
53. *Viêt Hà Hoàng.* Singularly Perturbed Dirichlet Problems in Randomly Perforated Domains// *Commun. Part. Differ. Equat.* — 2000. — 25, № 1–2. — С. 355–375.

Г. А. Чечкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: chchkin@mech.math.msu.su

Т. П. Чечкина

Московский инженерно-физический институт