

ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики**

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Том 11

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ



**Тбилиси
2003**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лашхи (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 11

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

М. И. Зеликин, В. Ф. Борисов

**Особые оптимальные режимы
в задачах математической экономики**

**კომუნიკაციების ინსტიტუტი
თბილისი**

2003

ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

© 2003 г. **М. И. ЗЕЛИКИН, В. Ф. БОРИСОВ**

Аннотация. Работа написана на основе курса лекций, который авторы читали на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, и может служить основой для чтения спецкурса по математической экономике для студентов математических и экономико-математических специальностей. Впервые доказана теорема об аттракторе для особых режимов первого порядка, изложено доказательство теоремы о стратифицированных многообразиях особых оптимальных режимов в задаче минимизации интеграла от дифференциальной формы на вполне интегрируемом распределении, выведено необходимое условие оптимальности Келли для особых экстремалей, доказана теорема об аттракторе в случае экстремали второго порядка.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Особые экстремали первого порядка	11
1. Магистралы в задачах математической экономики	11
1.1. Модель фон Неймана	12
1.2. Теорема о магистралах	18
2. Условия оптимальности в задачах оптимального управления	19
2.1. Принцип максимума Понтрягина	19
2.2. Уравнение Беллмана	21
2.3. Достаточное условие оптимальности	23
2.4. Уравнение в вариациях	24
2.5. Сопряженные системы линейных дифференциальных уравнений	25
2.6. Экономическая интерпретация	26
3. Модель экономического роста с двумя факторами	26
4. Метод дифференциальных форм	31
4.1. Минимизация интеграла от дифференциальной формы на вполне интегрируемом распределении	31
4.2. Необходимые условия минимума интеграла от дифференциальной формы	33
4.3. Пример неоптимальной экстремали	36
5. Распределения векторных полей	37
5.1. Векторные поля на многообразии	37
5.2. Геометрический смысл коммутатора	38
5.3. Распределения	39
6. Векторные расслоения. Теорема Фробениуса	42
7. Условия минимума L -особых экстремалей	44
7.1. Вполне интегрируемые формы	44
7.2. Теорема о запрете переключений	45
8. Теорема об аттракторе	46
8.1. Достаточное условие оптимальности особой экстремали	46
8.2. Оптимальный синтез в окрестности особой экстремали	48
9. Задачи экономического роста с n факторами	50
9.1. Оптимальный синтез для задачи с тремя производственными факторами.	50
9.2. Задача с общей производственной функцией.	56
9.3. Модель экономического роста с n производственными факторами.	57

9.4. Экономический смысл оптимального синтеза	69
10. Особые стратифицированные многообразия вполне интегрируемых управляемых систем	71
10.1. Постановка задачи	71
10.2. Построение оптимального синтеза	73
10.3. Пример неинтегрируемой формы	79
Глава 2. Особые экстремали второго порядка	97
11. Условие Келли	97
11.1. Достаточные условия локальной управляемости системы дифференциальных включений	98
11.2. Первая и вторая вариации функционала на особой экстремали	100
11.3. Порядок особой траектории	102
11.4. Условие Келли	104
12. Теорема о сопряжении	107
12.1. Скобки Пуассона и гамильтоновы векторные поля.	107
12.2. Полуканоническая форма гамильтоновой системы в окрестности особой траектории.	110
12.3. Пример Льюиса сопряжения в случае локального порядка особой траектории	112
13. Гамильтонов формализм в оптимальном управлении	114
13.1. Теорема об интегральном инварианте	115
13.2. Лагранжевы многообразия и поля экстремалей	116
13.3. Характеристики уравнения Беллмана	119
14. Задача Фуллера	121
15. Теорема об инвариантном многообразии	125
16. Разрешение особенностей отображения Пуанкаре	128
16.1. Орбитальная эквивалентность и грубость систем дифференциальных уравнений	128
16.2. Полуканоническая форма гамильтоновой системы в окрестности особой экстремали второго порядка	134
17. Расслоение с траекториями с накоплением переключений	139
17.1. Теорема о существовании расслоения	139
17.2. Параметризация слоев расслоения	143
17.3. Лагранжевы подмногообразия расслоения Σ^+	145
18. Модели экономического ускорения	147
18.1. Постановка задачи. Вывод уравнений особых экстремалей.	147
18.2. Теорема об аттракторе.	149
18.3. Оптимальный синтез с режимом накоплений переключений.	157
Список литературы	160

ПРЕДИСЛОВИЕ

Увлечение экономикой в современной России предоставляет нам возможность воспользоваться ситуацией для серьезного изложения современных аспектов, концепций и методов геометрической теории оптимального управления на материале математической экономики. К этим методам относятся теория слоений и язык дифференциальных форм, методы разрешения особенностей, техника гамильтоновых систем и другие.

Магистральной линией книги является понятие особой экстремали и ее роль в построении оптимального синтеза. Мы начинаем изложение с классического понятия — режима максимального сбалансированного роста, который для задач с дискретным временем является прообразом особой экстремали задач с непрерывным временем.

Луч максимального сбалансированного роста был введен в работах Дж. фон Неймана [20], поэтому его часто называют неймановским лучом. Самуэльсон [40] высказал гипотезу о том, что

оптимальные траектории управляемых конечно-разностных систем на промежуточных этапах перед достижением конечного состояния имеют тенденцию выходить на неймановский луч (или в его окрестность). Самуэльсон сравнивал неймановский луч с магистралью автодорожной сети. Если требуется проехать в ближайший город, то нужно ехать прямо к цели по местным дорогам. Однако, если город достаточно удален, то более быстрый маршрут состоит в следующем: надо добраться до магистральной дороги, проехать по ней большую часть пути и только тогда, когда цель окажется достаточно близкой, свернуть на местную дорогу. Причина состоит в том, что скорость движения по магистрали существенно выше, чем по местным дорогам. Поэтому теоремы, описывающие подобное поведение оптимальных траекторий в задачах математической экономики, получили название «теоремы о магистрали». Было доказано множество теорем о магистрали при различных предположениях о структуре технологического множества. В подавляющем большинстве этих теорем доказывается, что оптимальные траектории выходят на неймановский луч не точно, а попадают лишь в его окрестность. Лишь в очень немногих ситуациях удавалось доказать теорему о точном выходе оптимальных траекторий на неймановский луч. В этой книге мы покажем, что в задачах с непрерывным временем характерен точный выход оптимальных траекторий на особые экстремали, которые в задачах с непрерывным временем играют роль магистрали.

Многие авторы пытались обобщить понятие магистрали на задачи с непрерывным временем (А. М. Тер-Крикоров [27], С. В. Дубровин, А. Н. Дюкалов, Ю. Н. Иванов и др. [7]). Как правило, при этом рассматривались линейные системы, поскольку общие методы исследования нелинейных систем отсутствовали. Первая нелинейная теорема о магистрали для задачи с непрерывным временем была доказана Л. Ф. Зеликиной [15]. Здесь мы попытались привести ее идеи к логическому завершению.

Мы рассматриваем широкий класс инволютивных управляемых систем с особыми экстремальными первого порядка, в которых экстремаль M играет роль магистрали (или аттрактора) оптимального синтеза. Теорема об аттракторе раздела 8 утверждает, что для всех начальных условий, достаточно близких к M , все оптимальные траектории обязаны выйти на M за конечное время (при этом, чем ближе начальная точка находится к многообразию M , тем короче время выхода оптимальной траектории на магистраль). После выхода на магистраль оптимальная траектория некоторое время движется вдоль M и сходит с нее лишь вблизи многообразия цели, причем та часть оптимальной траектории, которая принадлежит M , неограниченно растет, когда цель удаляется на бесконечность.

Под особой экстремалью понимают решение системы уравнений принципа максимума Л. С. Понтрягина, для которой условие максимума не определяет однозначно управление на траектории. Для задач, линейно зависящих от управления (а именно этим классом задач мы ограничиваем изложение в данной книге), в которых индикатриса допустимых скоростей является выпуклым многогранником Q , управление на особой экстремали, как правило, принимает значение во внутренних точках какой-либо грани многогранника. Поэтому задача по отысканию таких особых экстремалей сводится к решению уравнения Эйлера классического вариационного исчисления. Для задач размерности 3 и выше нахождение множества особых экстремалей является технически трудной задачей. В книге последовательно развивается другой подход к нахождению таких экстремалей, основанный на методе дифференциальных форм. Для случая вполне интегрируемого распределения всех граней многогранника допустимых скоростей Q имеется канонический метод записи задачи управления в виде задачи минимизации интеграла от дифференциальной формы вида

$$\int_{\gamma} \omega \rightarrow \min, \quad \dot{x} \in \mathbb{R}_+^n,$$

с соответствующими краевыми условиями. Уравнение Эйлера для такой задачи вдоль особой экстремали $\hat{x}(\cdot)$ имеет вид

$$d\omega \Big|_{\hat{x}(t)} (\dot{\hat{x}}(t), \xi) = 0$$

для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, или, в эквивалентной форме,

$$\dot{\hat{x}}(t) \lrcorner \omega = 0, \tag{0.1}$$

где $\eta \lrcorner \phi$ является 1-формой, которая получается в результате внутреннего умножения векторного поля η на 2-форму ϕ . Мы докажем условие оптимальности особой экстремали, существенно более информативное, чем условие (0.1):

$$d\omega \Big|_{\dot{x}(t)} = 0 \quad (0.2)$$

(т.е. 2-форма $d\omega$ в точках особой экстремали обязана обратиться в нуль на любых парах векторных полей). В отличие от уравнения Эйлера, являющегося дифференциальным уравнением второго порядка, уравнение (0.2) является обычным неявным уравнением и, в общем случае, задает некоторую регулярную гиперповерхность в \mathbb{R}^n . Однако дело не только в том, что находить особые экстремали, используя условие (0.2), проще, чем решать уравнение Эйлера. В книге мы приводим примеры задач, в которых экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера) не удовлетворяет условию (0.2) и поэтому не является оптимальной. Таким образом, техника дифференциальных форм во многих случаях оказывается более эффективной, чем классическая вариационная техника.

Для случая вполне интегрируемой формы ω в книге доказывается теорема М. И. Зеликина о достаточных условиях оптимальности особых режимов, также сформулированная на языке дифференциальных форм. На базе необходимых и достаточных условий оптимальности особых режимов доказывается несколько общих теорем о структуре оптимального синтеза в окрестности особых режимов.

В качестве приложения к математической экономике рассматриваются особые оптимальные режимы в управляемых моделях экономического роста с производственными функциями $Q(x)$, где $Q(x)$ — функция типа функции Кобба—Дугласа:

$$T \rightarrow \min, \quad \dot{x} = uQ(x), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in M.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}_+^n$, а управление u принимает значения в n -мерном симплексе

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n u_i = 1 \right\}.$$

В книге излагается подробное решение, принадлежащее Л. Ф. Зеликиной, задачи построения оптимального синтеза для данного класса задач (до настоящего момента этот материал можно было найти лишь в статьях в периодических изданиях). Сначала вводится понятие экстремали, особой по отношению к некоторой k -мерной грани симплекса U (грубо говоря, это экстремаль, у которой отличны от нуля те и только те координаты скорости \dot{x} , которые принадлежат этой грани). При некоторых естественных предположениях о производственной функции $Q(x)$ доказывается, что совокупность этих экстремалей имеет структуру стратифицированного многообразия, которое разбивает все n -мерное пространство на n открытых подмножеств

$$V_i = \left\{ x \mid \frac{\partial Q}{\partial x_i} > \frac{\partial Q}{\partial x_j}, \quad j \neq i \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

внутри которых оптимальным является движение вдоль одной из координатных осей с $u_i = 1$. Уравнения стратов других размерностей имеют вид

$$V_{i_1 i_2 \dots i_k} = \left\{ x \mid \frac{\partial Q}{\partial x_{i_1}} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_k}} > \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right\},$$

где неравенство выполнено для всех индексов j , не совпадающих ни с одним из индексов i_1, \dots, i_k .

Для начальных условий из точек некоторого открытого множества \mathbb{R}^n траектория при оптимальном движении последовательно переходит сначала из точек множества V_i с неособым управлением $u_i = 1$ на какой-либо страт многообразия особых экстремалей, а затем, последовательно переходя со страта бóльшей размерности на страт меньшей размерности, за конечное время попадает на магистраль

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_n}.$$

На рис. 1 показано поведение оптимальных траекторий в случае $n = 3$. В этой размерности имеется три двумерных особых плоскости V_{12} , V_{23} , V_{13} , которые пересекаются по общей прямой V_{123} . Прямая V_{123} служит магистралью задачи. Стрелками отмечено направление движения оптимальных траекторий.

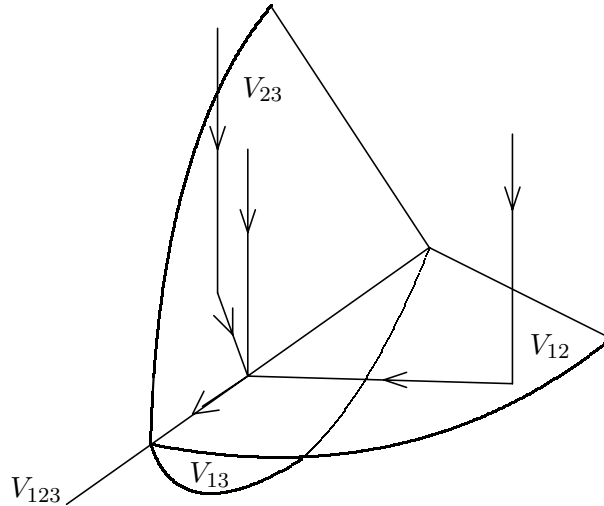


Рис. 1

В книге приводится экономическая интерпретация полученных результатов. В частности, оказывается, что функции $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ определяют норму эффективности капиталовложений в соответствующую отрасль. Теорема о структуре оптимального синтеза, таким образом, гласит, что капиталовложения направляются в ту отрасль хозяйства, где норма эффективности самая большая. Если существует несколько отраслей с равными показателями норм эффективности (при этом они больше норм эффективности остальных отраслей), то капиталовложения распределяются между этими отраслями с наибольшей эффективностью, причем в такой пропорции, чтобы равенство норм эффективности сохранялось в процессе производства. Показано, что для этого следует распределять капиталовложения пропорционально нормам эластичности выпуска по соответствующим факторам.

Вторая половина книги посвящена особым экстремалам второго порядка и неособым экстремалам с накоплением переключений в их окрестности. Явление накопления переключений управления на конечном интервале времени было открыто А. Т. Фуллером в следующем простом примере.

Задача Фуллера. Материальная точка движется по прямой под действием ограниченной силы, величина и направление которой могут выбираться по нашему желанию. Пусть начальные положение и скорость точки заданы. Требуется перевести точку в начало координат (обозначим начало координат буквой O) с нулевой скоростью, минимизировав при этом среднеквадратичное уклонение от O . Математическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом:

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Оптимальное поведение решений этой очень простой, на первый взгляд, задачи можно, казалось бы, просто угадать. Действительно, если мы находимся, скажем, правее точки O и достаточно далеко от нее, то разумно сначала положить управление u равным -1 (т.е. начать из всех сил

«тянуть» нашу точку в направлении к O), а затем, подойдя к началу координат достаточно близко, в какой-то момент переключить управление на 1 с тем, чтобы остановиться в точке O . В этом случае управление как функция времени имеет всего одно переключение, а управляемая точка все время оказывается по одну сторону от точки O и, начиная с какого-то момента, монотонно приближается к ней. Удивительно, но настоящая оптимальная стратегия выглядит намного сложнее. Оказывается, что переключение управления выгоднее немного задержать так, чтобы точка «проскочила» начало координат, остановившись левее точки O , после чего вновь повернула к началу координат, приближаясь к нему уже с другой стороны. Нетрудно понять, что просто в силу соображений симметрии эта серия поворотов должна повторяться бесконечно много раз: каждый раз точка «проскальзывает» начало координат, оказываясь по другую сторону от точки O . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — последовательность точек, в которых оптимальная траектория меняет направление движения. Можно показать, что $x_2 = -qx_1, x_3 = q^2x_0, \dots, x_n = (-1)^{n+1}x_1, \dots$, т.е. последовательные локальные максимумы и минимумы координаты x образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q \approx 0,006$. Поскольку моменты времени, проходящие между этими поворотами, также образуют убывающую геометрическую прогрессию, наша точка за конечное время остановится в начале координат, но совершит при этом бесконечное число переключений управления.

Если требуется попасть в точку (x_0, y_0) из начала координат, необходимо повторить ту же самую серию поворотов, но в обратном течении времени. Довольно трудно представить себе характер движения в начальный момент времени. Чтобы прояснить это, рассмотрим следующий элементарный пример.

Ситуация напоминает известную школьную задачу о двух путешественниках и мухе и звучит так. Из пункта A одновременно и в одном направлении отправились соответственно пешеход и велосипедист. Скорость первого — $v_1 = 4$ км/ч, а второго — $v_2 = 8$ км/ч. Одновременно с ними из A вылетела муха и со скоростью $v = 16$ км/ч начала летать от пешехода к велосипедисту и обратно, мгновенно поворачивая всякий раз, как только поравняется с одним из них. Спрашивается, на каком расстоянии от пункта A будет находиться муха через 1 час после начала движения?

Ответ является несколько неожиданным: муха может оказаться в любой точке между велосипедистом и пешеходом. Чтобы наглядно себе представить это, изобразим движение наших персонажей в виде графика в системе координат, в которой по горизонтальной оси откладывается время движения, а по вертикальной — расстояние от точки A . Движению велосипедиста и пешехода отвечают два центральных луча OB и OP на рис. 2, в то время как траектория полета мухи изображается в виде ломаной, вершины которой лежат на лучах OB и OP , а угловые коэффициенты сторон попеременно принимают значения 16 и -16 . Обращая время движения вспять, через любую точку M внутри угла $BOП$ можно провести ломаную (даже целых две) с такими свойствами. Вершины ломаных сгущаются вблизи начала координат. Обращение течения времени позволяет построить бесконечное множество ломаных, выходящих из начала координат. Чтобы параметризовать это множество, необходимо применить процедуру σ -раздутья.

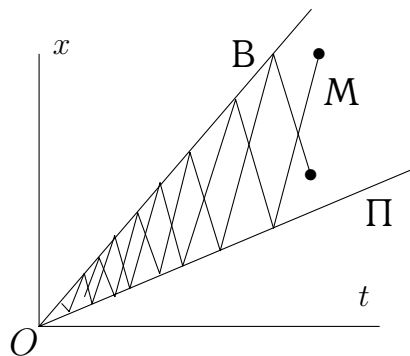


Рис. 2

Теоремы о накоплении переключений не могут быть выведены из принципа максимума Л. С. Понтрягина. Соответствующие доказательства требуют развития и использования нетривиальной математической техники. В точке накопления точек переключений дифференциальные уравнения принципа максимума Понтрягина имеют довольно сложный разрыв. Доказательство существования траекторий с накоплением переключений базируется на процедуре разрешения этой особенности и на существовании гиперболических особых точек системы, полученной в результате такого разрешения особенности. Процедура разрешения особенности, разработанная в контексте рассматриваемого класса задач в серии работ авторов данной книги, позволила решить большое число задач прикладного содержания: задачу стабилизации вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, управление двухзвенным манипулятором (роботом), задачу Лоудена управления движением ракеты в ньютоновском поле тяготения и многие другие задачи (см. монографию [43]). В данной книге мы, в частности, доказываем теорему об аттракторе и приводим решение управляемой модели технологического прогресса в ситуации накопления переключений управления.

На первый взгляд, может показаться, что с практической и технологической точек зрения оптимальные режимы с накоплением переключений являются парадоксальными и не реализуемыми. Авторы данной книги, однако, придерживаются мнения, что такие режимы имеют прямое отношение к процессам, происходящим в природе, и могут быть успешно применены к управлению реально существующими объектами. Есть, по крайней мере, следующие две причины для такого заключения.

Во-первых, знание точных оптимальных стратегий с накоплением переключений позволяет оценить потери, связанные с использованием практически реализуемых стратегий, и аппроксимировать оптимальные стратегии с любой степенью точности. Например, если в описанной выше процедуре торможения шарика в задаче Фуллера использовать вместо бесконечной серии «проскальзываний» лишь первые три, а затем затормозить шарик в начале координат всего с одним переключением управления, то связанные с этой заменой потери функционала качества не превысят одного процента от его оптимального значения.

Во-вторых, описание многих систем со сложной нелинейной динамикой включает малые параметры (запаздывание, трение, прилипание и так далее). Как правило, аналитическое решение такого рода задач на сегодняшний день недоступно. В пределе, при стремлении малых параметров к нулю, возникают системы с режимами накопления переключений, для которых авторами разработан математический аппарат нахождения точных аналитических решений. Эти аналитические решения определяют асимптотику решений задач с малыми параметрами, отличными от нуля, даже если последние и не содержат режима с накоплением переключений. Другого способа охарактеризовать решения систем с малыми параметрами часто просто нет.

Проиллюстрируем нашу точку зрения на следующем примере. Предположим, что у нас имеются две горизонтальные плоскости, одна из которых неподвижно закреплена, а вторая движется навстречу первой с постоянной скоростью. В пространство между этими плоскостями брошен шарик, который двигается в вертикальном направлении и при соударениях отражается то от одной, то от другой плоскости. Если предположить, что удар происходит мгновенно и что вес шарика пренебрежимо мал, то в момент удара его скорость не изменится, а направление движения поменяется на противоположное. К тому моменту, когда шарик окажется зажат между двумя стенками, он совершит бесконечное число отражений. Реальный шарик, разумеется, совершит лишь конечное, хотя и довольно большое, число отскоков, поскольку реальный удар происходит за ненулевое время. Чем меньше время удара, тем больше отскоков совершит шарик. Бесконечная серия отскоков является лишь идеализацией, как бы предельным состоянием этого процесса, в предположении, что время удара стремится к нулю.

Каждый из нас сталкивался с подобной ситуацией, когда пытался прижать шарик для пинг-понга ракеткой к столу. Трудно, однако, догадаться, что этот обыденный пример имеет непосредственное отношение к следующей серьезной проблеме космологии: откуда в космосе берутся частицы с очень большой энергией? Энрико Ферми, Джон Паста и Станислав Улам (работавшие в середине 50-х в лаборатории Лос Аламос на самом большом по тем временам компьютере MANIAC) в

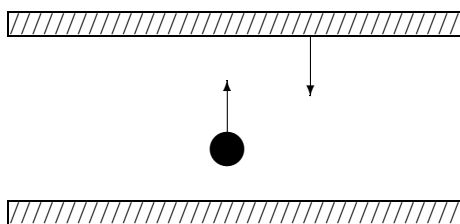


Рис. 3

промежутке между расчетами, связанными с созданием водородной бомбы, занимались моделированием вполне мирных задач (в частности, они нашли экспериментально, но не смогли объяснить теоретически, солитоноподобное поведение цепочки связанных осцилляторов). Они решили проверить гипотезу Ферми о возможном механизме разгона элементарных частиц в гравитационных полях галактик. Столкновение с галактикой, движущейся приблизительно в одном направлении с частицей, имеет много меньшую вероятность, чем столкновение с галактикой, движущейся в противоположном направлении. Второй тип столкновения увеличивает энергию частицы уже после отражения при столкновении первого типа. Достаточно большое число соударений могло бы породить частицы с огромной энергией. Галактики как бы играют частицами в пинг-понг, что и приводит к неограниченному возрастанию скорости частиц. Ферми, Паста и Улам выполнили серию численных экспериментов по моделированию движения частиц между периодически двигающимися стенками при условии идеально упругого отражения. Гипотеза Ферми не нашла подтверждения в этих экспериментах, и позднее было доказано, что при данных условиях энергия частиц остается ограниченной. В этой связи стоит отметить работы Л. Д. Пустыльниковца [24, 25], в которых он показывает, что при релятивистском отражении энергия частиц должна неограниченно расти.

Возвращаясь к магистральной линии книги, отметим, что режимы с накоплением переключений являются типичным способом выхода неособых оптимальных траекторий на многообразии особых экстремалей порядка выше первого. В книге мы рассказываем об условии Келли оптимальности особой экстремали и о связанном с этим условием понятии порядка особой экстремали, а также о теореме Келли—Коппа—Мойера о возможности состыковки особой и неособой экстремалей. Оказывается, что, по крайней мере в случае особой экстремали второго порядка, соединение особой и неособой экстремалей возможно только посредством режима с накоплением переключений. Типичной картиной оптимального синтеза в окрестности многообразия особых экстремалей второго порядка является наличие стратифицированного подмногообразия расширенного фазового пространства, заполненного особыми экстремальными задачи, а также экстремальными с накоплением переключений, которые выходят на многообразие особых экстремалей за конечное время с бесконечным числом переключений управления. Во второй части книги излагаются базовые понятия теории режимов с накоплением переключений (теореме о существовании расслоения, содержащего траектории с накоплением переключений, теореме о лагранжевом многообразии, достаточные условия оптимальности этих режимов). На базе разработанной теории доказываем теорему об аттракторе и приводится решение для класса управляемых моделей научно-технического прогресса.

Данная книга предназначена не только и не столько специалистам в области математической теории оптимального управления. Мы старались сделать ее интересной и доступной всем, кто работает в прикладных областях, а также студентам и аспирантам математических и экономико-математических специальностей. В этой связи при отборе материала мы не стремились формулировать соответствующие теоремы в максимальной общности, но руководствовались соображениями простоты и наглядности, при этом пытаясь донести до нашего читателя простые и красивые идеи, лежащие в основе излагаемой теории. В книге рассказывается о многих классических теоремах теории дифференциальных уравнений и математического анализа, сопутствующих нашему основному изложению (теорема Фробениуса, теорема о структурной устойчивости седла, теорема об инвариантном многообразии диффеоморфизма в неподвижной точке и другие). Это объясняется,

отчасти, желанием сделать книгу как можно более замкнутой, а отчасти, стремлением продемонстрировать, какой содержательный и разнообразный технический аппарат необходимо использовать при решении задач математической экономики. Изложение сопровождается большим числом примеров и задач с подробным решением, которые призваны облегчить усвоение материала. Поэтому книга могла бы стать основой для чтения спецкурса по математической экономике для студентов математических и экономико-математических специальностей.

В то же время специалисты в области теории оптимального управления и математической экономики также найдут, как мы надеемся, много интересного для себя материала. В частности, в книге впервые доказывается теорема об аттракторе для особых режимов первого порядка, излагается доказательство теоремы о стратифицированных многообразиях особых оптимальных режимов в задаче минимизации интеграла от дифференциальной формы на вполне интегрируемом распределении (ранее результат был опубликован в журнальных статьях), содержится элементарный вывод необходимого условия оптимальности Келли для особых экстремалей, доказывается теорема об аттракторе в случае экстремали второго порядка.

Книга написана на основе курса лекций, который авторы читали на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Многие экономико-математические идеи, нашедшие воплощение в книге, принадлежат покойной Людмиле Филипповне Зеликиной. Книга посвящается ее светлой памяти.

ГЛАВА 1

ОСОБЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. МАГИСТРАЛИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Задумавшись над вопросом: как можно описать математически эволюцию экономической системы? Одним из основных объектов изучения в математической экономике является процесс производства. Рассмотрим экономику, которая характеризуется набором из n факторов производства или продуктов в широком смысле этого слова, включая самые разнообразные ресурсы, сырье, производственные мощности, энергию и так далее. Если выбраны какие-то единицы измерения этих факторов, то состояние экономики можно охарактеризовать n -мерным вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Выпуск продукции в процессе производства обеспечивается за счет производственного потребления некоторых исходных продуктов. В экономической теории под *производством* понимается преобразование некоторого количества затрачиваемых продуктов в некоторое количество выпускаемых продуктов в соответствии с выбираемой технологией. *Технология* — это пара векторов (x, y) , где x — вектор затрат продуктов, а y — вектор выпуска. Обычно в нашем распоряжении имеется не одна технология, а некоторое множество допустимых технологий, которое называется *технологическим множеством*. Можно выбирать, какие из допустимых технологий использовать в процессе производства. При таком описании процесс производства носит многошаговый характер, т.е. состояние системы $x(t)$ меняется в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$, причем любая пара векторов $(x(t), x(t+1))$ представляет собой затраты и выпуск за период t , соответствующие некоторой допустимой технологии. Тем самым мы имеем возможность управлять эволюцией экономической системы, выбирая на каждом шаге одну из допустимых технологий.

Если шаг достаточно мал в сравнении с рассматриваемым временем эволюции, то удобно рассматривать модели с непрерывным временем, так как тогда можно использовать математический аппарат анализа, дифференциальных уравнений и теории оптимального управления. Иногда вместо технологического множества пар (x, y) бывает удобно рассматривать множество пар $(x, y - x)$, где $y - x$ — чистый выпуск. Такая точка зрения будет особенно важной при рассмотрении моделей с непрерывным временем. В этом случае роль вектора чистого выпуска $x(t+1) - x(t)$ будет играть вектор $\dot{x}(t)$, а множество допустимых технологий будет зависеть от текущего состояния x .

Такого рода модели с дискретным временем были впервые рассмотрены Дж. фон Нейманом [20] на заре развития математической экономики. Он ввел в рассмотрение и доказал существование

важнейшего для этих моделей понятия — *луча максимального сбалансированного роста*, который впоследствии получил название неймановского луча. Оказалось, что этот луч играет ключевую роль при описании асимптотики оптимальных траекторий неймановских моделей. Цель этого раздела — доказать соответствующую теорему.

1.1. Модель фон Неймана. Введем следующие множества:

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid x^i \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad \text{int } \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Будем писать $x > y$, если $x^i > y^i$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Определение 1.1. Процессом называется пара (x, y) из декартова произведения $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$, где x — затраты (вход), y — выпуск (выход).

Процесс производства — это многошаговый процесс или траектория. Траектория — это последовательность $x(t)$, $t = 0, 1, \dots$.

Определение 1.2. Некоторое множество процессов $T \subset \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ называется технологическим множеством или множеством допустимых процессов, если выполнены следующие условия.

T1. T — строго выпуклый замкнутый конус.

T2. $(0, y) \notin T$ для $y \neq 0$.

T3. Если $(x, y) \in T$, $u \geq x$, $v \leq y$, то $(u, v) \in T$.

T4. Существует такое положительное число N , что для любой допустимой траектории $x(\cdot)$, длина которой больше N , и для любого i , $i = 1, \dots, n$, найдется такое число k , что $x^i(k) > 0$.

T5. Для любого начального состояния $x(0)$ существуют допустимая траектория $\tilde{x}(\cdot)$ и число $k \in \mathbb{N}$ такие, что $\tilde{x}^i(k) > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Траектория называется допустимой, если $(x(t), x(t+1)) \in T$ для любого $t \in \mathbb{N}$.

Пояснения. Условие **T1** означает, что наряду с процессами $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ множество T содержит процесс $(\alpha x_1, \alpha y_1)$ для любого $\alpha > 0$ (т.е. можно менять интенсивность процесса и его эффективность не зависит от масштабов производства), а также процесс $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)$ для любого $0 \leq \alpha \leq 1$ (т.е. процессы можно комбинировать). При этом, если x_1 и x_2 независимы (т.е. $x_1 \neq \text{const} \cdot x_2$), то $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, w) \in T$ для некоторого $w > \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$ (это означает, что совместное использование процессов не понижает, а повышает их эффективность). Замкнутость конуса T означает, что предельная точка допустимых процессов допустима.

Условие **T2** называют отсутствием рога изобилия: нулевой вход не может дать ненулевой выход.

Условие **T3** называют условием свободного расходования: часть продуктов без всяких затрат можно удалить из производства.

Условие **T4** называют условием неразложимости: любая достаточно длинная траектория обязательно включает все факторы производства, т.е. если длина допустимой траектории превышает некоторое наперед заданное число N , то любой ее фактор $x^i(\cdot)$ не может быть равен нулю для всех моментов времени $0 \leq k \leq N$.

Почти все утверждения о свойствах технологического множества и множества допустимых траекторий доказаны ниже в предположении выполнения условий **T1–T4**. Исключение составляет последняя теорема главы — теорема 1.3 о магистрали, в которой предполагается, что выполнена еще и аксиома **T5**. В отличие от условия **T4**, аксиома **T5** требует, чтобы хотя бы на одной допустимой траектории, выходящей из заданного начального состояния $x(0)$, сразу все факторы производства в некоторый момент времени k стали бы отличными от нуля. Отметим, что условие **T5** является следствием условия **T1** при следующем дополнительном предположении. Пусть множество T содержит по крайней мере 2 независимых процесса (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Тогда, в силу **T1**, для произвольной линейной комбинации этих процессов вида

$$(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2), \quad \alpha \in [0, 1],$$

можно найти допустимый процесс вида $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, w)$, где $w > \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$. Даже если какие-то координаты вектора $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$ равны нулю, то у вектора w эти координаты уже отличны от нуля в силу строгого неравенства $w > \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$, и условие **T5** выполнено.

Пример 1.1. Рассмотрим следующие множества:

$$1) T^{(1)} = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^4 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2\};$$

$$2) T^{(2)} = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^4 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq x_1 x_2\}.$$

Покажем, что первое множество не является технологическим, а второе является.

Первое множество не является выпуклым: его граница представляет собой торический конус сигнатуры 0. Чтобы представить себе геометрию этого множества, рассмотрим пересечение $T^{(1)}$ с трехмерной сферой $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$. Легко видеть, что на пересечении мы получим полноторие

$$y_1^2 + y_2^2 \leq \frac{1}{2}, \quad x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2},$$

с границей, гомеоморфной двумерному тору в \mathbb{R}^4 , уравнение которого имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, \quad y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, множество $T^{(1)}$ получается как конус с вершиной в начале координат над трехмерным полноторием и, следовательно, не является выпуклым множеством. Таким образом, множество $T^{(1)}$ не является технологическим.

Покажем, что множество $T^{(2)}$ является технологическим. Это множество является строго выпуклым конусом в смысле нашего определения, поскольку оно может быть получено как конус над трехмерным шаром. Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к координатам

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{2},$$

в которых $T^{(2)}$ задается неравенством

$$y_1^2 + y_2^2 + (x'_2)^2 \leq (x'_1)^2.$$

Пересечение с трехмерной сферой $x'^2_1 + x'^2_2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$ дает шар $y_1^2 + y_2^2 + (x'_2)^2 \leq \frac{1}{2}$. Следовательно, условия аксиомы **T1** выполнены. Условия аксиом **T2** и **T3** для $T^{(2)}$ автоматически выполняются. Проверим выполнение условий аксиом **T4** и **T5**. Рассмотрим произвольную точку $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in T^{(2)}$. Если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то все доказано. Если какая-либо координата вектора (x_1, x_2) равна нулю, например, $x_1 = 0$, то из определения $T^{(2)}$ следует, что $y_1 = y_2 = 0$. Таким образом, любая допустимая траектория процесса либо имеет все ненулевые координаты, либо продолжается тождественным нулем. Следовательно, $N = 1$, и условия **T4**, **T5** выполнены.

Определение 1.3. Траектория $x(\cdot)$ есть траектория сбалансированного роста (или луч сбалансированного роста), если $x(t+1) = \rho x(t)$, где $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Луч максимально сбалансированного роста (или неймановский луч) — это луч сбалансированного роста с максимальным значением параметра ρ .

Пусть $S \subset \mathbb{R}_+^n$ — некоторое множество наборов продуктов,

$$\mathcal{X}(S, k) = \{x(k) \mid x(0) \in S, x(\cdot) \text{ допустима}\}$$

— множество наборов, полученных из множества S за k шагов по любым допустимым траекториям.

Лемма 1.1. Пусть S — выпуклый компакт, тогда $\mathcal{X}(S, k)$ — выпуклый компакт.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $\mathcal{X}(S, 1)$. Выпуклость и замкнутость множества $\mathcal{X}(S, 1)$ следуют из соответствующих свойств конуса T . Покажем ограниченность множества $\mathcal{X}(S, 1)$. Допустим противное, т.е. существуют процессы $(x_\nu, y_\nu) \in T$, где $x_\nu \in S$, а $\|y_\nu\| \rightarrow \infty$. Процесс $\left(\frac{x_\nu}{\|y_\nu\|}, \frac{y_\nu}{\|y_\nu\|}\right)$ допустимый, но $\left(\frac{x_\nu}{\|y_\nu\|}, \frac{y_\nu}{\|y_\nu\|}\right) \rightarrow (0, y)$ для некоторой подпоследовательности индексов ν , где $\|y\| = 1$, что противоречит **T2**. \square

Пусть $x \neq 0$. Назовем *темпом роста* процесса (x, y) число

$$\rho(x, y) = \min_{x^i > 0} \frac{y^i}{x^i}.$$

Теорема 1.1. При выполнении требований **T1–T4** луч максимального сбалансированного роста существует и единствен.

Доказательство. Функция $\rho(x, y)$ полунепрерывна сверху. В силу леммы 1.1, множество $T \cap \{\|x\| = 1\}$ компактно. Следовательно, существует

$$\max_{\substack{(x, y) \in T \\ \|x\|=1}} \rho(x, y) = \rho(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda.$$

Неравенство $y^i \geq \rho(x, y)x^i$ сохраняется даже при $x_i = 0$, поэтому $\hat{y}^i \geq \lambda\hat{x}^i$ для любого $i = 1, \dots, n$. В силу **T3**, $(\hat{x}, \lambda\hat{x}) \in T$; значит, луч максимального сбалансированного роста существует.

Докажем его единственность. Если два процесса $(x_1, \lambda x_1)$ и $(x_2, \lambda x_2)$ независимы и допустимы, то, в силу **T1**, для произвольного $\alpha \in (0, 1)$ существует такой выход w , что $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, w) \in T$, причем $w > \lambda(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$, что противоречит максимальнойности λ . \square

Далее будем считать, что $\|\hat{x}\| = 1$.

Утверждение 1.1. Неймановский луч строго положителен: $\hat{x} > 0$.

Доказательство. Пусть $\hat{x}^i = 0$ при некотором i . Рассмотрим допустимую траекторию $x(k)$, $x(k) = \lambda^k \hat{x}$. Тогда $\hat{x}^i = 0$ для любого k , что противоречит **T4**. \square

Рассмотрим вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$. Тогда $\langle p, x \rangle$ — это стоимость затрат, $\langle p, y \rangle$ — стоимость выпуска.

Определение 1.4. Вектор p называется неймановским вектором цен, если для любого процесса $(x, y) \in T$ имеет место неравенство $\langle p, y \rangle \leq \lambda \langle p, x \rangle$.

Теорема 1.2. Неймановский вектор цен существует.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{y - \lambda x \mid (x, y) \in T\}$. Если $y_0 - \lambda x_0 > 0$ для некоторого $(x_0, y_0) \in T$, то мы можем увеличить темп роста, в то время как λ соответствует максимальному росту. Значит, множество $\{y - \lambda x \mid (x, y) \in T\}$ не содержит положительных векторов и является выпуклым множеством. Следовательно, его можно отделить от первого ортанта некоторым неотрицательным вектором $p = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$. Для этого вектора выполнено неравенство $\langle p, y - \lambda x \rangle \leq 0$ для любого $(x, y) \in T$. \square

Утверждение 1.2 (условие исключительной прибыльности). Пусть p — неймановский вектор цен. Тогда из условия $\langle p, y - \lambda x \rangle = 0$, $(x, y) \in T$, следует, что $x = \text{const} \cdot \hat{x}$.

Доказательство. Пусть $x \not\parallel \hat{x}$. Тогда, в силу **T1**, имеем: $\left(\frac{x + \hat{x}}{2}, w\right) \in T$, где $w > \frac{y + \lambda \hat{x}}{2}$. Следовательно, $\langle p, w \rangle > \left\langle p, \frac{y + \lambda \hat{x}}{2} \right\rangle$. Но, в силу определения неймановского вектора цен, имеем $\langle p, w \rangle \leq \lambda \left\langle p, \frac{x + \hat{x}}{2} \right\rangle$. Значит, $\langle p, y \rangle < \lambda \langle p, x \rangle$, что противоречит условию $\langle p, y - \lambda x \rangle = 0$. \square

Утверждение 1.3. Неймановский вектор цен строго положителен: $p > 0$.

Доказательство. Пусть $p^i = 0$. Рассмотрим процесс (x, y) , у которого $x^k = \hat{x}^k$ для любого $k = 1, \dots, n$; $y^k = \hat{y}^k$ при $k \neq i$ и, наконец, $y^i = 0$. В силу **T3**, $(x, y) \in T$. Тогда $\langle p, y - \lambda x \rangle = 0$ и, согласно утверждению 1.2, имеем $x \parallel \hat{x}$, что противоречит утверждению 1.1. \square

Исторический комментарий. Луч максимального сбалансированного роста был введен в работах Дж. фон Неймана [20], поэтому его часто называют неймановским лучом. Самуэльсон [40] высказал гипотезу о том, что оптимальные траектории на промежуточных этапах перед достижением конечного состояния имеют тенденцию выходить на неймановский луч (или в его окрестность). Самуэльсон сравнивал неймановский луч с магистралью автодорожной сети. Если требуется проехать в ближайший город, то нужно ехать прямо к цели по местным дорогам. Однако, если город достаточно удален, то более быстрый маршрут состоит в следующем: надо добраться до

магистральной дороги, проехать по ней большую часть пути и только когда цель окажется достаточно близкой, свернуть на местную дорогу. Причина состоит в том, что скорость движения по магистрали существенно выше, чем по местным дорогам. Поэтому теоремы, описывающие подобное поведение оптимальных траекторий в задачах математической экономики, получили название «теоремы о магистрали». Было доказано множество теорем о магистрали при различных предположениях о структуре технологического множества T . В подавляющем большинстве этих теорем (Моришима [38], Раднер [39], Маккензи [36], Инада [32], Никайдо [21], Цукуи [44]) доказывалось, что оптимальные траектории выходят на неймановский луч не точно, а попадают лишь в его окрестность (в смысле угловой метрики). Лишь в очень немногих ситуациях удавалось доказать теорему о точном выходе оптимальных траекторий на неймановский луч (Макаров [18], Зеликин и Корнев [14]). Ниже будет показано, что в задачах с непрерывным временем характерен точный выход оптимальных траекторий на особые экстремали, которые в задачах с непрерывным временем играют роль магистрали.

В следующем разделе будет доказана теорема о магистрали для задачи оптимизации с дискретным временем. Мы постарались максимально упростить доказательство, наложив на задачу довольно жесткие ограничения **T1–T5**.

Пример 1.2. Для технологического множества $T^{(2)}$, определенного в примере 1.1, п. 2), найдем неймановский луч $\hat{y} = \lambda \hat{x}$ и множество $\{y - \lambda x \mid (x, y) \in T\} \subset \mathbb{R}^2$, а также определим множество всех неймановских векторов цен p .

Пусть $(x_1, x_2, \rho x_1, \rho x_2) \in T$, т.е. $\rho^2(x_1^2 + x_2^2) \leq x_1 x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Найдем максимум

$$\rho = \sqrt{\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}}$$

по всем допустимым (x_1, x_2) . В силу неравенства Коши—Буняковского,

$$x_1 x_2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

т.е.

$$\lambda = \max \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем множество точек $y - \lambda x = y - \frac{x}{\sqrt{2}}$ для всех допустимых $(x, y) \in T$. Обозначим

$$z_1 = y_1 - \frac{x_1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = y_2 - \frac{x_2}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку для произвольной пары (x_1, x_2) , $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, имеется какая-либо пара (y_1, y_2) , для которой $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in T$, мы можем переформулировать задачу в следующем виде. Пусть (x_1, x_2) — произвольная точка с положительными координатами. Требуется найти все пары (z_1, z_2) , для которых

$$\left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(z_2 + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq x_1 x_2 \quad (1.1)$$

и при этом выполнены условия

$$z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} \geq 0, \quad z_2 + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \geq 0.$$

Неравенство (1.1) определяет внутренность круга с центром в точке $\left(-\frac{x_1}{\sqrt{2}}, -\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)$ радиуса $\sqrt{x_1 x_2}$. Нетрудно видеть, что соответствующие круги для точки (x_1, x_2) и для точки (tx_1, tx_2) при любом $t > 0$ на плоскости (z_1, z_2) получаются друг из друга гомотетией из начала координат и коэффициентом растяжения t . Следовательно, все такие круги заполняют конус с вершиной в начале координат, образующие которого являются касательными к границе любого из этих кругов. Начнем менять (x_1, x_2) . Обозначим объединение точек данного двухпараметрического семейства кругов через \mathfrak{M} . Множество \mathfrak{M} является, разумеется, выпуклым конусом (как образ выпуклого

конуса при линейном отображении), но уже, как мы увидим ниже, не обязательно замкнутым. Нам остается определить его границу.

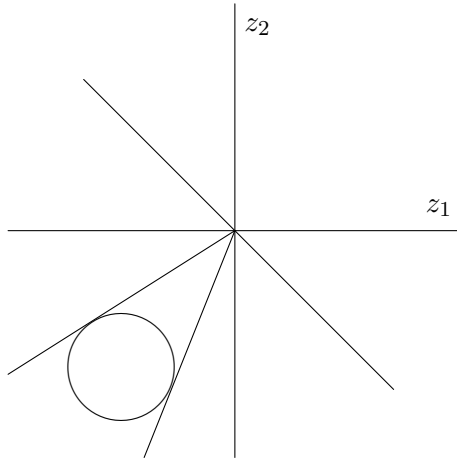


Рис. 4

Для того, чтобы найти границу $\partial\mathfrak{M}$, зафиксируем значение координаты z_1 и определим, в каких пределах изменяется значение координаты z_2 при этом значении z_1 . Решим вспомогательную задачу

$$z_2 \rightarrow \min$$

на множестве точек (x_1, x_2, z_2) , удовлетворяющих неравенствам

$$\left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(z_2 + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq x_1 x_2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Решение данной задачи очевидно — это значение $z_2 = -\infty$. Действительно, при фиксированных z_1, x_1 , полагая $z_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{2}}$ и устремляя x_2 к ∞ , получаем, что множеству \mathfrak{M} принадлежат точки со сколь угодно малыми значениями z_2 .

Рассмотрим теперь задачу

$$z_2 \rightarrow \max$$

при (x_1, x_2, z_2) , удовлетворяющих неравенствам (1.2).

Разрешая квадратичное неравенство

$$\left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(z_2 + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq x_1 x_2$$

относительно z_2 , получаем

$$z_2 \leq -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{x_1 x_2 - \left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2}. \quad (1.3)$$

Зафиксируем $x_2 \geq 0$. Для выражения, стоящего под знаком квадратного корня в (1.3), получаем оценку

$$x_1 x_2 - \left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{x_1^2}{2} + (x_2 - \sqrt{2}z_1)x_1 - z_1^2 \leq \frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{2}z_1)^2 - z_1^2,$$

причем максимум достигается в вершине параболы $x_1 = x_2 - \sqrt{2}z_1$. Таким образом, справедлива оценка

$$z_2 \leq -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{2}z_1)^2 - z_1^2}. \quad (1.4)$$

Отбрасывая выражение $-z_1^2$ под знаком квадратного корня, получим

$$z_2 \leq -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{2}z_1)^2} = -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 - \sqrt{2}z_1|}{\sqrt{2}}.$$

Определим знак выражения $x_2 - \sqrt{2}z_1$. Выражение под знаком квадратного корня в формуле (1.4) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{2}z_1)^2 - z_1^2 = \frac{1}{2}x_2^2 - \sqrt{2}x_2z_1.$$

Это последнее выражение должно быть неотрицательно, поэтому, с учетом $x_2 \geq 0$, получаем

$$\frac{1}{2}x_2^2 - \sqrt{2}x_2z_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq \max\{0, 2\sqrt{2}z_1\}.$$

Следовательно,

$$|x_2 - \sqrt{2}z_1| = x_2 - \sqrt{2}z_1,$$

и мы приходим к окончательной оценке

$$z_2 \leq -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_2 - \sqrt{2}z_1}{\sqrt{2}} = -z_1.$$

Верхняя граница $z_2 = -z_1$ множества \mathfrak{M} достигается на последовательности точек $x_1 = x_2 - \sqrt{2}z_1$, $x_2 \rightarrow +\infty$, поскольку в этом случае имеем

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x_2^2}{2} - \sqrt{2}x_2z_1} = -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}z_1}{x_2}} = \\ &= -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}z_1}{x_2} + o\left(\frac{1}{x_2}\right) \right) = -z_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \cdot o\left(\frac{1}{x_2}\right) \rightarrow -z_1. \end{aligned}$$

В то же время множество \mathfrak{M} оказывается не замкнутым. Действительно, если положить $z_2 = -z_1$, то уравнение, определяющее границу \mathfrak{M} , будет иметь вид

$$\begin{aligned} \left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-z_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - x_1x_2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2z_1^2 + \sqrt{2}z_1(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Это последнее уравнение имеет решение только при $x_2 = x_1$, $z_1 = 0$, поскольку его дискриминант не положителен:

$$D = 2(x_1 - x_2)^2 - 4(x_1 - x_2)^2 = -2(x_1 - x_2)^2 \leq 0.$$

Таким образом, замыкание множества \mathfrak{M} представляет собой полупространство, задаваемое неравенством $z_2 \leq -z_1$.

Отметим, что прямая $z_2 = -z_1$ является общей касательной однопараметрического семейства окружностей вида

$$\left(z_1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(z_2 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = x_1^2,$$

каждая из которых проходит через начало координат на плоскости (z_1, z_2) (это дает еще один, геометрический, способ нахождения границы $\partial\mathfrak{M}$).

Из явного уравнения границы \mathfrak{M} следует, что неймановский вектор цен (p_1, p_2) , определяемый неравенством

$$p_1z_1 + p_2z_2 \leq 0, \quad (z_1, z_2) \in \mathfrak{M},$$

есть вектор $(p_1, p_2) = t(1, 1)$, $t > 0$.

1.2. Теорема о магистрали.

Лемма 1.2 (Раднер). Для произвольного положительного ε существует положительное число $\rho = \rho(\varepsilon) < \lambda$, обладающее следующим свойством. Если $(x, y) \in T$ и выполнено неравенство $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \hat{x} \right\| \geq \varepsilon$, то $\langle p, y \rangle - \rho(\varepsilon)\langle p, x \rangle \leq 0$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$U = \{(x, y) \mid \|x\| = 1, \|x - \hat{x}\| \geq \varepsilon, (x, y) \in T\}.$$

По лемме 1.1 множество U — компакт. Поскольку $\hat{x} \notin U$, имеем $\langle p, y \rangle - \lambda\langle p, x \rangle < 0$ при всех $(x, y) \in U$. В частности, $\langle p, x \rangle \neq 0$, $x \in U$. Рассмотрим на множестве U функцию $\frac{\langle p, y \rangle}{\langle p, x \rangle}$. На компакте U она непрерывна, значит достигает своего максимума $\rho(\varepsilon) < \lambda$, следовательно, $\langle p, y \rangle \leq \rho(\varepsilon)\langle p, x \rangle$. \square

Рассмотрим произвольный вектор цен $u \geq 0$. Траекторию, которая максимизирует доход, полученный в некоторый момент времени N , т.е. величину

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle u, y(k) - x(k) \rangle = \langle u, x(N) \rangle - \langle u, x(0) \rangle,$$

будем называть оптимальной.

Теорема 1.3 (о магистрали). Пусть $x(\cdot)\big|_0^N$ — оптимальная траектория, $(x(t), x(t+1)) \in T$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число l , зависящее от ε и $x(0)$, но не зависящее от N , что число моментов t , для которых $\left\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|} - \hat{x} \right\| > \varepsilon$, не превосходит l .

Доказательство. Оценим $\langle u, x(N) \rangle$ сверху и снизу.

Для оценки снизу рассмотрим траекторию $\tilde{x}(\cdot)$, которая за некоторое число k шагов выходит на луч $\text{const} \cdot \hat{x}$ и далее сбалансированно растет по этому лучу. Покажем, что такая допустимая траектория существует. В силу аксиомы **T5**, за конечное число шагов, равное, скажем, k , можно попасть в множество $\text{int } \mathbb{R}_+^n$, так что $(\tilde{x}(k-1), \tilde{x}(k)) \in T$, $\tilde{x}(k) > 0$. Пусть $\tilde{x}(k) = x_1$. Всегда можно найти такую константу c_0 , что $c_0\hat{x} < x_1$. В силу **T3**, в сечении конуса T плоскостью $x = \tilde{x}(k-1)$ найдется точка с y -координатой $c_0\hat{y} = \lambda c_0\hat{x}$. Таким образом, за k -й шаг мы можем попасть из точки $\tilde{x}(k-1)$ в точку $\lambda c_0\hat{x}$, т.е. на луч $\text{const} \cdot \hat{x}$.

В силу оптимальности траектории $x(\cdot)$ имеем $\langle u, x(N) \rangle \geq \langle u, \tilde{x}(N) \rangle$. Но

$$\langle u, \tilde{x}(N) \rangle = \lambda \langle u, \tilde{x}(N-1) \rangle = \dots = \lambda^{N-k} \langle u, \tilde{x}(k) \rangle.$$

Итак,

$$\langle u, x(N) \rangle \geq \lambda^{N-k} A, \tag{1.5}$$

где константа $A = \langle u, \tilde{x}(k) \rangle > 0$ зависит только от $x(0)$.

Для оценки сверху заметим, что, в силу утверждения 1.3, для данного вектора цен u можно подобрать такую достаточно большую константу K , что $u^i \leq Kp^i$, где p — неймановский вектор цен. Следовательно, $\langle u, x(N) \rangle \leq K\langle p, x(N) \rangle$. Пусть в течение l шагов из N траектория $x(\cdot)$ принадлежит множеству $\left\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|} - \hat{x} \right\| > \varepsilon$. Для соответствующих значений t по лемме Раднера имеем оценку

$$\langle p, x(t+1) \rangle \leq \rho(\varepsilon)\langle p, x(t) \rangle, \quad \rho(\varepsilon) < \lambda.$$

Для остальных значений t имеет место оценка, определяющая неймановский вектор цен:

$$\langle p, x(t+1) \rangle \leq \lambda\langle p, x(t) \rangle.$$

Комбинируя эти оценки для всех шагов от 1 до N , получаем

$$\langle u, x(N) \rangle \leq K\langle p, x(N) \rangle \leq \lambda^{N-l}\rho^l B, \tag{1.6}$$

где константа $B = K\langle p, x(0) \rangle > 0$ зависит только от $x(0)$.

Объединяя оценки (1.5) и (1.6), получаем $\lambda^{N-k}A \leq \lambda^{N-l}\rho^l B$ или $\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^l \geq \lambda^{-k}\frac{A}{B}$, откуда, так как $\frac{\rho}{\lambda} < 1$, немедленно следует, что число l ограничено одной и той же константой, не зависящей от N . \square

2. Условия оптимальности в задачах оптимального управления

В этом разделе мы перейдем к рассмотрению оптимальных процессов с непрерывным временем. Рассмотрим управляемую систему уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^s$, U — компакт, u — управление, Ω — открытое множество. Допустимые управления $u(t)$ — измеримые функции, соответствующие траектории $x(t)$, абсолютно непрерывны. Заданы начальные условия $x(0) = x_0$ и условие окончания процесса $x(T) \in B \subset \Omega$. Рассмотрим функционал

$$J = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Пусть $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u)$$

функцию Понтрягина задачи (2.1)–(2.2).

2.1. Принцип максимума Понтрягина. Пусть $\hat{u}(t)$ — оптимальное управление, $\hat{x}(t)$ — соответствующая оптимальная траектория задачи (2.1)–(2.2). Тогда выполнены следующие необходимые условия оптимальности [23]. Существует вектор $\psi = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)) \neq 0$ такой, что

- 1) $\psi_0(t) \leq 0$;
- 2) $\max_{u \in U} \mathcal{H}(\psi(t), \hat{x}(t), u) = \mathcal{H}(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv 0$;
- 3) $\dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)), i = 1, \dots, n$;
- 4) для любого $\xi \in T_{\hat{x}(T)}B$ имеем $\sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i(T) = 0$.

Вектор ψ , удовлетворяющий условиям 1)–4), определен с точностью до умножения на произвольное положительное число. Поэтому можно считать, что либо $\psi_0 = 0$, либо $\psi_0 = -1$. Если траектория $\hat{x}(t)$ удовлетворяет условиям 1)–4) с $\psi_0 = 0$, говорят, что $\hat{x}(t)$ — *абнормальная экстремаль*. Мы, как правило, будем иметь дело с регулярным случаем $\psi_0 = -1$.

Если в исходной задаче время T фиксировано, то необходимые условия 1)–4) оптимальности траектории $\hat{x}(t)$ по-прежнему имеют место. Исключение составляет условие $\mathcal{H}(\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv 0$ (называемое условием стационарности по T), которое в задаче с фиксированным временем, вообще говоря, не выполнено.

Пример 2.1. Выпишем систему уравнений принципа максимума Понтрягина и построим фазовый портрет экстремалей для следующих задач:

- 1) $\int_0^T x^2 dt \rightarrow \min$, $\dot{x} = u \in [-1, 1]$, $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$.
- 2) $\int_0^1 x^2 dt \rightarrow \min$, $\dot{x} = u \in [-1, 1]$, $x(0) = x_0$, $x(1) = -1$.

Приведем подробное решение задачи 1). Выпишем функцию Понтрягина:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi u + \psi_0 x^2.$$

Будем искать регулярные экстремали задачи, для чего положим $\psi_0 = -1$. Сопряженное уравнение имеет вид

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 2x.$$

Условие максимума имеет вид:

$$\max_{u \in [-1, 1]} \psi(t)u = \psi(t)\hat{u}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}(t) = \operatorname{sgn} \psi(t).$$

Отметим, что если $\psi(t) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_1] \subset [0, T]$, то $\dot{\psi}(t) = 2\hat{x}(t) \equiv 0$, т.е. траектория $\hat{x}(t)$ уже находится в начале координат. Наконец, условие стационарности по T имеет вид:

$$|\psi| - x^2 \equiv 0.$$

Мы приходим к следующей двумерной системе уравнений с разрывной правой частью:

$$\dot{\psi} = 2x, \quad \dot{x} = \operatorname{sgn} \psi.$$

Ее фазовый портрет на плоскости (ψ, x) представляет собой сплющенное седло и изображен на рис 5.

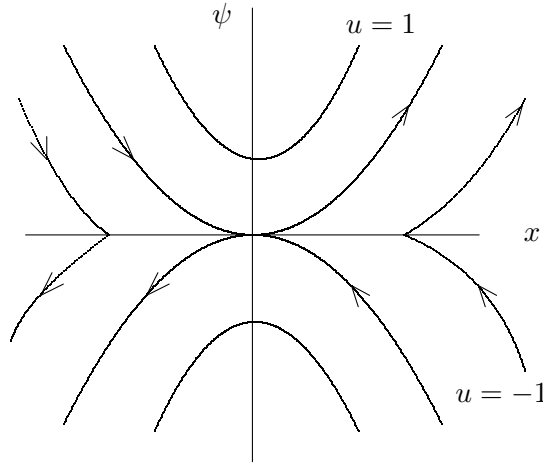


Рис. 5

Нулевой поверхности уровня гамильтониана $|\psi| - x^2 = 0$ принадлежат только две ветви экстремалей, проходящих через начало координат: кривая $\psi = -x^2$, $x \geq 0$, и кривая $\psi = x^2$, $x \leq 0$. Следовательно, оптимальное поведение траекторий в данной задаче совпадает с поведением траекторий в задаче быстрогодействия: при $x_0 > 0$ следует положить $u \equiv -1$ и бежать с этим управлением в начало координат, а при $x_0 < 0$ следует положить $u \equiv 1$ вплоть до момента попадания в начало координат.

Заметим, что оптимальность экстремалей данной задачи легко вывести из самого принципа максимума Понтрягина. Действительно, если $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ — любая допустимая траектория задачи, то, в силу условия максимума, имеем

$$\psi(t)\tilde{u}(t) \leq \psi(t)\hat{u}(t).$$

Пусть $T = \max\{\hat{T}, \tilde{T}\}$, где \hat{T} , \tilde{T} — моменты времени попадания экстремали $\hat{x}(\cdot)$ и траектории $\tilde{x}(\cdot)$ в начало координат соответственно. Доопределим, если нужно, траектории $\hat{x}(\cdot)$ и $\tilde{x}(\cdot)$ нулем так,

чтобы обе они были определены на всем интервале $(0, T)$. Интегрируя это неравенство на интервале $(0, T)$, а затем интегрируя по частям с учетом совпадающих граничных условий, получим

$$\int_0^T \psi(t) \tilde{u}(t) dt \leq \int_0^T \psi(t) \hat{u}(t) dt \Rightarrow - \int_0^T 2\hat{x}(t) \tilde{x}(t) dt \leq - \int_0^T \hat{x}^2(t) dt.$$

С учетом неравенства

$$\int_0^T 2\hat{x}(t) \tilde{x}(t) dt \leq \int_0^T (\hat{x}^2(t) + \tilde{x}^2(t)) dt$$

получаем, что

$$\int_0^T \hat{x}^2(t) dt \leq \int_0^T \tilde{x}^2(t) dt,$$

т.е. $\hat{x}(\cdot)$ оптимальна.

В задаче 2) с фиксированным временем решение существует при $|x_0 + 1| \leq 1$. Оптимальными траекториями являются экстремали задачи, которые попадают на прямую $x = -1$ на плоскости (ψ, x) за время 1. Если $x_0 = 0$ или $x_0 = -2$, то соответствующие экстремали приходят в начало координат с постоянным управлением $u = -1$ и $u = 1$ соответственно. Если $|x_0 + 1| < 1$, то оптимальная траектория имеет ровно одно переключение, с $u = 1$ на $u = -1$ в момент времени $t = -\frac{1}{2}x_0$.

2.2. Уравнение Беллмана.

Предположение 2.1. Пусть глобальный минимум функционала (2.2) достигается для любого начального значения x_0 из Ω .

Предположение 2.2. Обозначим через $\hat{J}(x_0)$ оптимальное значение функционала (2.2) для заданных начальных условий x_0 . Предположим, что $\hat{J}(x) \in C^1(\Omega)$.

Функция $\omega(x) = -\hat{J}(x) \leq 0$ называется *функцией Беллмана*.

В предположениях 2.1–2.2 мы выведем уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция Беллмана. Отметим, что, поскольку система $\dot{x} = f(x, u)$ и подынтегральная функция $f_0(x, u)$ в задаче (2.1)–(2.2) не зависят явно от времени t , справедлив так называемый *принцип Беллмана*: «хвост оптимальной траектории оптимален». Точнее, если $(x(t), u(t))$ — оптимальные траектория и управление задачи (2.1)–(2.2) с начальными условиями $x(0)$, то для любого $\tau > 0$ пара $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (x(t + \tau), u(t + \tau))$ оптимальна для задачи (2.1)–(2.2) с начальными условиями $x(\tau)$. Для произвольной оптимальной траектории $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ отсюда следует соотношение

$$\omega(\hat{x}(t)) = \omega(\hat{x}(0)) + \int_0^t f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt,$$

поскольку

$$\hat{J}(\hat{x}(0)) - \hat{J}(\hat{x}(t)) = \int_0^t f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt.$$

Для произвольной допустимой траектории $(x(t), u(t))$ имеем

$$\omega(x(t)) \leq \omega(x(0)) + \int_0^t f_0(x(t), u(t)) dt.$$

Пусть $\varphi_1(t) = \omega(x(t))$; тогда

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_1(0) + \int_0^t f_0(x(t), u(t)) dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(0)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t f_0(x(t), u(t)) dt.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \rightarrow +0$, получим

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(0) \leq f_0(x(0), u(0))$$

(при условии, что функция $f_0(x(t), u(t))$ непрерывна в точке $(x(0), u(0))$). Таким образом,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, u) \leq f_0(x, u).$$

Пусть теперь $\varphi_2(t) = \omega(\hat{x}(t))$. Тогда всюду в точках дифференцируемости траектории $\hat{x}(t)$ (т.е. для почти всех $t \in (0, T)$) имеем

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = f_0(\hat{x}, \hat{u}),$$

так как

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \int_0^t f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{u}) = f_0(\hat{x}, \hat{u}).$$

Полученные неравенства означают, что для любой точки $x \in \Omega$ имеет место следующее соотношение:

$$\max_{v \in U} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, v) - f_0(x, v) \right) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется уравнением Беллмана. Граничные условия для уравнения Беллмана имеют вид

$$\omega(x) \Big|_{x \in B} = 0. \quad (2.4)$$

Пример 2.2. Выпишем уравнение Беллмана для следующих двух задач быстрого действия:

- 1) $T \rightarrow \min$, $\dot{x}_1 = u_1 x_1 x_2$, $\dot{x}_2 = u_2 x_1 x_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, $x_1(T) + x_2(T) = C$;
- 2) $T \rightarrow \min$, $\dot{x}_1 = u_1 x_1 x_2$, $\dot{x}_2 = u_2 x_1 x_2$, $u_1 + u_2 \leq 1$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, $x_1(T) + x_2(T) = C$.

1) Имеем

$$\max_{(u_1, u_2)} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} u_1 x_1 x_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} u_2 x_1 x_2 \right) = 1, \quad (2.5)$$

где максимум берется по всем (u_1, u_2) из единичного круга $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$. Скалярное произведение $\langle l, u \rangle$ векторов $l = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)$ и $u = (u_1, u_2)$ достигает максимума по u на единичном круге на векторе, пропорциональном вектору l , т.е.

$$u_1 = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2}}, \quad u_2 = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2}}.$$

Таким образом уравнение Беллмана для задачи 1) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 = \frac{1}{x_1^2 x_2^2}, \quad \omega(x_1, C - x_1) \equiv 0.$$

2) Вычислим максимум по u в уравнении (2.5) при условии, что $u_1 + u_2 \leq 1$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$. Максимум линейной функции на симплексе достигается в вершинах симплекса, т.е. либо при $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, либо при $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, либо при $u_1 = u_2 = 0$. Первый случай имеет место, если

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \max \left\{ 0, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right\};$$

второй случай имеет место, если

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \geq \max \left\{ 0, \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right\};$$

наконец, третий случай имеет место, если

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \leq 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \leq 0.$$

Заметим, что в последнем случае уравнение Беллмана не имеет решения. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} &= \frac{1}{x_1 x_2} \quad \text{при} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_1 x_2} \quad \text{при} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \leq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \\ \max \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right\} &> 0, \quad \omega(x_1, C - x_1) \equiv 0. \end{aligned}$$

2.3. Достаточное условие оптимальности.

Рассмотрим уравнение Беллмана

$$\max_{u \in U} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, u) - f_0(x, u) \right) = 0.$$

Пусть $\omega(x)$ — решение этого уравнения, класса C^1 в области $\Omega \setminus B$, удовлетворяющее условию (2.4). Рассмотрим функцию

$$u^*(x) = \arg \max_{u \in U} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, u) - f_0(x, u) \right].$$

Произвольная функция $u = u(x)$, т.е. управление, рассматриваемое как функция от текущего фазового состояния объекта, называется *синтезом управления*. Назовем синтез допустимым, если

- 1) система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x, u(x))$ обладает свойством правосторонней единственности, т.е. для любого начального значения $x_0 \in \Omega$ существует единственное решение этого уравнения с начальными условиями $x(0) = x_0$, определенное при $t \geq 0$;
- 2) любое решение системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ с начальными условиями $x(0) = x_0$ в конечный момент T попадает на многообразие цели.

Допустимый синтез называется оптимальным, если каждое такое решение является оптимальной траекторией.

Теорема 2.1. Пусть $\omega(x)$ — C^1 -решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (2.4). Если управление $u^*(x)$, порождаемое функцией $\omega(x)$, допустимо, то $\hat{J}(x) = -\omega(x)$ есть оптимальное значение функционала (2.2) как функция начального состояния, и, соответственно, $u^*(x)$ есть синтез оптимальных управлений.

Доказательство. Зафиксируем начальную точку x_0 . Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(x, u^*(x))$ с начальным условием $x(0) = x_0$. По определению функции $u^*(x)$ имеем

$$\frac{d}{dt} \omega(x(t)) = \frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, u^*(x)) = f_0(x(t), u^*(x(t))),$$

откуда следует, что

$$\omega(x(T)) - \omega(x(0)) = \int_0^T f_0(x(t), u^*(x(t))) dt.$$

Если взять такое T , что $x(T) \in B$, то

$$-\omega(x(0)) = \int_0^T f_0(x(t), u^*(x(t))) dt.$$

Пусть теперь $\tilde{u}(t)$ — произвольное допустимое управление, $\tilde{x}(t)$ — соответствующая траектория. Тогда

$$\frac{d\omega(\tilde{x}(t))}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial x} f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \leq f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)),$$

откуда для любого \tilde{T} имеем

$$\omega(\tilde{x}(T)) - \omega(\tilde{x}(0)) \leq \int_0^{\tilde{T}} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt.$$

Если $\tilde{x}(\tilde{T}) \in B$, то получим

$$-\omega(\tilde{x}(0)) \leq \int_0^{\tilde{T}} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt,$$

т.е.

$$\int_0^T f_0(x(t), u^*(x(t))) dt \leq \int_0^{\tilde{T}} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt.$$

Следовательно, траектория $x(t)$ оптимальна. \square

2.4. Уравнение в вариациях. Рассмотрим систему уравнений $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ — класса C^1 , а $x(t, x_0)$ — решение системы с начальным значением x_0 . Пусть $x(t, \hat{x}_0)$ — некоторое выделенное решение системы. Найдем дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция

$$y(t) = \left. \frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = \hat{x}_0}.$$

В силу теоремы о дифференцировании решений дифференциальных уравнения по начальным данным [22] имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0) = f(x(t, x_0)), \quad \frac{d}{dt} y(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x(t, \hat{x}_0)}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial f(x(t, \hat{x}_0))}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(t, \hat{x}_0)}{\partial x_0}.$$

В матричных обозначениях уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

где $A(t) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x(t, \hat{x}_0)}$ — квадратная $(n \times n)$ -матрица, определяемая по данному решению $x(t, \hat{x}_0)$.

Следовательно, уравнением в вариациях в окрестности решения $\hat{x}(\cdot)$ является линейное уравнение, полученное линеаризацией данного уравнения в точках траектории $x(t, \hat{x}_0)$.

Задача 2.1. Выписать уравнение в вариациях для системы $\ddot{x} = -\sin x$ на решении $\hat{x}(\cdot) \equiv 0$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение описывает малые колебания физического маятника. По определению уравнения в вариациях для произвольного решения $x(t, x_0)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \ddot{x}(t, x_0) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \sin x(t, x_0) \Leftrightarrow \ddot{y}(t) = -\cos(x(t, x_0)) \cdot y(t),$$

где через $y(t)$ обозначена функция $y(t) = \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, x_0)$. Подставляя $x(t, x_0) \equiv 0$, получим уравнение малых колебаний математического маятника: $\ddot{y} = -y$. \square

2.5. Сопряженные системы линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.6)$$

где $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $A(t)$ — квадратная $(n \times n)$ -матрица. Система уравнений

$$\dot{p} = -pA(t) \quad (2.7)$$

называется *сопряженной* к системе (2.6), $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n*}$ — элемент двойственного пространства (линейный функционал). Рассмотрим произведение

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x^i.$$

Утверждение 2.1. Если $x(\cdot)$ и $p(\cdot)$ — решение систем (2.6) и (2.7) соответственно, то $\langle p, x \rangle \equiv \text{const}$.

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} \langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (p_i x^i) = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i x^i + \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}^i = -\langle pA(t), x \rangle + \langle p, A(t)x \rangle = 0.$$

□

Если рассмотреть каноническое отождествление ковектора p с вектором $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ из \mathbb{R}^n , то сопряженная система (2.7) записывается в виде

$$\dot{p} = -A^T p.$$

Поскольку выполнение уравнения Беллмана является достаточным условием оптимальности, из него, разумеется, следует необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина. Полезно привести непосредственный вывод принципа максимума из уравнения Беллмана, так как этот вывод показывает, что двойственные переменные ψ — это градиент функции Беллмана.

Рассмотрим уравнение

$$\max_{u \in U} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, u) - f_0(x, u) \right) = 0, \quad \omega(x) \Big|_B = 0. \quad (2.8)$$

Предположение 2.3. Предположим, что $\omega(x)$ — решение (2.8) класса $C^2(\Omega)$.

Для произвольной точки $x_0 \in \Omega$ пусть $u = u_0(x_0)$ — то значение управления, при котором

$$\frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x} f(x_0, u_0) = f_0(x_0, u_0).$$

При $x = x_0$ функция $\frac{\partial \omega(x)}{\partial x} f(x, u_0)$, рассматриваемая как функция от x , достигает своего максимума $f_0(x_0, u_0)$. Тогда по теореме Ферма имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega(x_0)}{\partial x^j \partial x^i} f^i(x_0, u_0) + \frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x^i} \frac{\partial f^i(x_0, u_0)}{\partial x^j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Обозначим $\frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x^i}$ через $\psi_i(x_0)$. Тогда на траектории $(x(t), u(t))$, для которой

$$\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x} f(x(t), u(t)) \equiv f_0(x(t), u(t)),$$

получаем сопряженное уравнение

$$\frac{d}{dt} \psi_j(x(t)) = - \sum_{i=1}^n \psi_i(x(t)) \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x(t), u(t)) + \frac{\partial f_0}{\partial x^j}(x(t), u(t)), \quad j = 1, \dots, n.$$

В силу граничных условий, для любого вектора $\xi \in T_{x(t)}B$ имеем $\langle \psi(t), \xi \rangle = 0$.

2.6. Экономическая интерпретация. Сопряженные переменные в принципе максимума Понтрягина можно интерпретировать как цены оптимального плана или, как говорят экономисты, теневые цены. Действительно, будем рассматривать функцию Беллмана как максимально возможный конечный доход $\omega(x)$, который можно получить, исходя из данного начального состояния x . Градиент функции Беллмана (сопряженные переменные с точки зрения принципа максимума Понтрягина) определяет линеаризацию функции Беллмана

$$\Delta\omega = \sum_{i=1}^n \psi_i \Delta x_i + o(|\Delta x|).$$

Значит, для того, чтобы понять, насколько изменится доход при приращении продукта x_i на малую величину Δx_i , надо умножить Δx_i на ψ_i , а это и есть цена продукта x_i в данной точке x . Можно обобщить это рассуждение на случай негладкой функции Беллмана. Пусть, например, градиент функции Беллмана $\nabla\omega(x)$ терпит разрыв на некоторой гиперповерхности $\pi = \{x \mid G(x) = 0\}$. При этом, однако, предполагается, что существуют пределы $\nabla\omega(x)$ при x , стремящемся к произвольной точке $x_0 \in \pi$, как из точек множества $G(x) > 0$, так и из точек $G(x) < 0$. При этом соответствующие предельные значения $\psi_+(x_0) = \nabla\omega_+(x_0)$ и $\psi_-(x_0) = \nabla\omega_-(x_0)$ не равны друг другу. Если при разных знаках приращения Δx_i мы попадем по разные стороны от поверхности разрыва, то скажем, что $\psi_+(x_0)$ будет соответствовать закупочным ценам, а $\psi_-(x_0)$ — продажным. Следует иметь в виду, что главная часть приращения ω в точке x_0 уже не является в этом случае линейной по Δx , поэтому цена набора продуктов, вообще говоря, уже не является суммой цен каждого продукта, входящего в набор. Все зависит от того, в какую сторону от поверхности разрыва попадет вектор Δx .

3. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ДВУМЯ ФАКТОРАМИ

Перейдем к рассмотрению моделей математической экономики, которые были изучены в работах Л. Ф. Зеликиной [15].

Рассматривается производство с двумя ограниченными факторами (ресурсами) x_1 и x_2 . Зависимость объема производства v (т.е. количество продукта, полученного из ресурсов x_1, x_2 в момент t) выражается в так называемой производственной функции модели $v = Q(x_1, x_2)$. Типичным примером служит производственная функция Кобба—Дугласа

$$Q(x_1, x_2) = \rho x_1^\lambda x_2^\mu,$$

где ρ — коэффициент эффективности использования ресурсов, а λ и μ — показатели эластичности производства относительно факторов x_1 и x_2 ($\lambda > 0, \mu > 0$).

Функция $Q = Q(x_1, x_2)$ обладает определенными свойствами, например, Q положительна и монотонно возрастает по каждому из аргументов:

$$Q > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} > 0.$$

Величина $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ называется эффективностью выпуска по i -му фактору.

Рассмотрим следующую задачу быстрого действия:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= u_1 Q(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = u_2 Q(x_1, x_2), \\ u_1 + u_2 &= 1, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) \in B = \{Q(x) = c\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Функция Понтрягина задачи имеет вид

$$H = (u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2) Q,$$

а сопряженная система уравнений — вид

$$\dot{\psi}_1 = -(u_1\psi_1 + u_2\psi_2)\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad \dot{\psi}_2 = -(u_1\psi_1 + u_2\psi_2)\frac{\partial Q}{\partial x_2}. \quad (3.2)$$

Условие максимума записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 = 1, \quad u_2 = 0, & \quad \text{если } \psi_1 > \psi_2, \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 1, & \quad \text{если } \psi_1 < \psi_2, \\ u & \text{ произвольно, если } \psi_1 = \psi_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим простейший случай:

$$Q = x_1x_2.$$

Найдем сначала все решения принципа максимума Понтрягина (экстремали) задачи (3.1). Посмотрим, существуют ли особые экстремали задачи, на которых $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t)$. В этом случае

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}.$$

Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial Q}{\partial x_2} = x_1$, имеем

$$x_1(t) \equiv x_2(t), \quad (3.3)$$

при этом $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$. Эта траектория является особой экстремалью; об особых экстремальных мы будем впоследствии говорить более подробно.

Построение оптимального синтеза следует начинать с многообразия цели B . В силу условия трансверсальности, начальный вектор $(\psi_1(0), \psi_2(0))$ пропорционален вектору-градиенту к поверхности $Q(x) = c$. Из условия нормировки $\mathcal{H} = 1$ следует, что координаты $(\psi_1(0), \psi_2(0))$ неотрицательны. Следовательно,

$$(\psi_1(0), \psi_2(0)) = \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right)$$

с некоторым неотрицательным множителем λ . На той части многообразия цели $B = \{Q(x) = c\}$, где $x_1 > x_2$, имеем

$$\psi_1 = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_1} < \psi_2 = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_2}.$$

При $\psi_1 < \psi_2$ имеем $\dot{x}_1 = 0$, и траекторией служит вертикальная прямая. При этом

$$\dot{x}_2 = x_1x_2, \quad \dot{\psi}_1 = -\psi_2x_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_2x_1.$$

Выясним, может ли на этой траектории значение ψ_1 стать больше, чем ψ_2 , т.е. может ли при обратном движении от цели к начальной точке произойти переключение на другое значение управления?

Пусть $\tau = -t$. Рассмотрим разность $\frac{d\psi_2}{d\tau} - \frac{d\psi_1}{d\tau} = \psi_2(x_1 - x_2)$. На рассматриваемой траектории имеем: $\psi_2 > 0$, так как ненулевое решение линейного уравнения нигде не обращается в нуль; при этом x_1 все время остается больше, чем x_2 . Следовательно, $\psi_2 > \psi_1$ при всех t .

Точно такую же картину получаем при отражении в биссектрисе $x_1 = x_2$ для той части многообразия цели $B = \{Q(x) = c\}$, где $x_1 < x_2$.

Незаполненными экстремальными траекториями остался квадрат $0 < x_1 < \sqrt{c}$, $0 < x_2 < \sqrt{c}$. В него можно попасть только с особой экстремали (3.3). Доказательство того, что после схода с этой экстремали (при обратном течении времени) переключений больше не будет, буквально повторяет предыдущее.

Получилось, что через каждую точку области $Q < c$ проходит и притом только одна траектория, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина. Можно показать, что, в силу теоремы А. Ф. Филиппова [29], решение задачи (3.1) существует для каждой начальной точки в этой области, следовательно, построенный синтез оптимален.

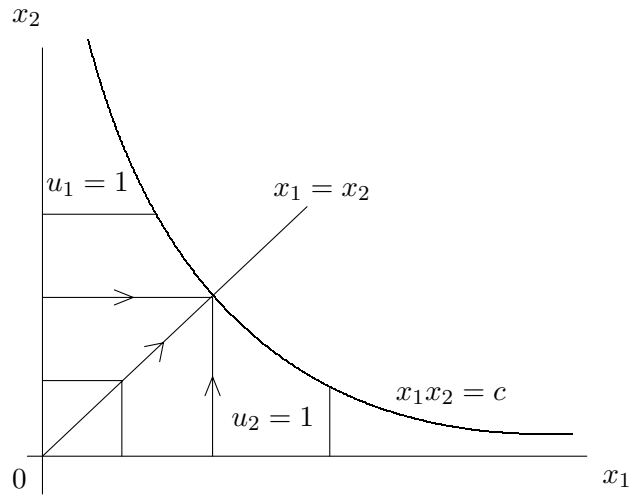


Рис. 6

Пример 3.1. Для задачи (3.1) ($Q(x) = x_1x_2$) с многообразием цели $B = \{Q(x) = c\}$ выпишем уравнение Беллмана и найдем гладкое решение соответствующей краевой задачи $\omega(x)|_{x \in B} = 0$; $\omega(x)|_{x \notin B} \neq 0$.

Уравнение Беллмана имеет вид

$$\max \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right\} = \frac{1}{x_1x_2}, \quad \omega|_{x_1x_2=c} = 0.$$

Найдем сначала аналитическое представление функции ω в области $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$. Тогда $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1x_2}$, откуда следует, что

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{\ln x_1}{x_2} + f(x_2).$$

В той части рассматриваемой области, которая примыкает к границе $x_1 = \frac{c}{x_2}$, с учетом условия $\omega\left(\frac{c}{x_2}, x_2\right) \equiv 0$, получаем

$$f(x_2) = -\frac{\ln c - \ln x_2}{x_2},$$

т.е.

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1x_2) - \ln c}{x_2}.$$

Из соображений симметрии следует ожидать, что на луче $x_1 = x_2$ имеем $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \omega(x, x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \omega(x, x) = \frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, на луче $x_1 = x_2 = x$ функция $\phi(x) = \omega(x, x)$ определяется из уравнения $\phi'(x) = \frac{2}{x^2}$, $\phi(\sqrt{c}) = 0$, откуда следует, что

$$\omega(x, x) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x}.$$

В той части рассматриваемой области, которая примыкает к лучу $x_1 = x_2$, получаем

$$\frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2} + f(x_2),$$

откуда

$$f(x_2) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2}.$$

Следовательно,

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2}.$$

Убедимся, что две полученные формулы непрерывно (и даже гладко) стыкуются на прямой $x_2 = \sqrt{c}$. Действительно, решая уравнение

$$\frac{\ln(x_1 x_2) - \ln c}{x_2} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2},$$

получаем

$$\frac{2 \ln x_2 - \ln c}{x_2} = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2},$$

откуда следует, что корень $x_2 = \sqrt{c}$ является решением данного уравнения. Окончательно, функция $\omega(x_1, x_2)$ в предположении $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ задается следующим образом:

$$\omega(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\ln(x_1 x_2) - \ln c}{x_2} & \text{при } x_2 \geq \sqrt{c}, \\ \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2} & \text{при } x_2 \leq \sqrt{c}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Частные производные функции в первой области имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{1 - \ln(x_1 x_2) + \ln c}{x_2^2},$$

а во второй равны

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{1 - \ln x_1 + \ln x_2}{x_2^2}$$

(отсюда легко, в частности, убедиться, что производные непрерывно стыкуются в точках прямой $x_2 = \sqrt{c}$).

Теперь мы имеем возможность проверить, в каких точках двумерной плоскости (x_1, x_2) выполнено соотношение $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ и, следовательно, функция $\omega(x)$ действительно выражается формулой (3.4). В области $x_2 \geq \sqrt{c}$ имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1 - x_1(\ln c - \ln(x_1 x_2))}{x_1 x_2^2}.$$

При фиксированном x_2 получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 - x_1 - x_1(\ln c - \ln(x_1 x_2))) = \ln \frac{x_1 x_2}{c} < 0,$$

т.е. ограничение функции $\Delta = x_2 - x_1 - x_1(\ln c - \ln(x_1 x_2))$ на прямую $x_2 = \text{const}$ является убывающей. В точке $x_1 = \frac{c}{x_2}$ получаем $\Delta = x_2 - x_1 = x_2 - \frac{c}{x_2}$. При $x_2 \geq \sqrt{c}$ имеем $\Delta > 0$. Следовательно,

в области $x_2 \geq \sqrt{c}$, $x_1 x_2 \leq c$ неравенство $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ выполнено.

Аналогично, в области $x_2 \leq \sqrt{c}$ имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1 - x_1(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_1 x_2^2}.$$

При фиксированном x_2 получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 - x_1 - x_1(\ln x_2 - \ln x_1)) = -\ln \frac{x_2}{x_1} < 0,$$

и функция $x_2 - x_1 - x_1(\ln x_2 - \ln x_1)$ монотонно убывающая. Поскольку при $x_1 = x_2$ получаем $x_2 - x_1 - x_1(\ln x_2 - \ln x_1) = 0$, отсюда следует, что в области $x_2 \geq x_1$, $x_2 \leq \sqrt{c}$ неравенство $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \geq \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ также выполнено.

В области $x_2 \leq x_1$ формулы для функции $\omega(x_1, x_2)$ получаются из полученных выше формул перестановкой индексов координат: $x_1 \mapsto x_2$, $x_2 \mapsto x_1$. Окончательно, решение уравнения Беллмана с нужными нам свойствами гладкости задается в виде:

$$\omega(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\ln(x_1 x_2) - \ln c}{x_2} & \text{при } x_2 \geq \sqrt{c}, x_2 \geq x_1, \\ \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_2} & \text{при } x_2 \leq \sqrt{c}, x_2 \geq x_1, \\ \frac{\ln(x_1 x_2) - \ln c}{x_1} & \text{при } x_1 \geq \sqrt{c}, x_2 \leq x_1, \\ \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_1} + \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{2}{x_1} & \text{при } x_1 \leq \sqrt{c}, x_2 \leq x_1. \end{cases}$$

Посмотрим, как изменится синтез при изменении многообразия цели. Заменим в (3.1) B на многообразии, задаваемое уравнением

$$B = \{x \mid x_1 = c\}. \quad (3.5)$$

Как и ранее, построение синтеза надо начинать с многообразия B . Нормалью к B служит вектор $(1, 0)$, поэтому $\psi_1(T) = 1$, $\psi_2(T) = 0$. Следовательно, на конечном (начальном в обратном времени) участке экстремали имеем $u = 1$. Найдем точки переключения. Имеем

$$\begin{aligned} x_2(\tau) &= \text{const}, & x_1(\tau) &= x_1(0) \exp(-x_2 \tau), \\ \psi_1(\tau) &= \exp(x_2 \tau), & \psi_2(\tau) &= c\tau. \end{aligned}$$

Момент переключения определяется как решение уравнения

$$\exp(x_2 \tau) = c\tau.$$

При достаточно больших значениях координаты x_2 это уравнение не имеет корней, и на соответствующих горизонтальных траекториях переключений нет. При малых x_2 уравнение имеет два различных корня, и переключение происходит при меньшем из корней. Эти два случая отделены значением x_2 , при котором корень двукратный (не только сама функция, но и ее производная обращается в нуль) (см. рис. 7).

Для определения кратного корня нужно решить следующую систему уравнений:

$$\exp(x_2 \tau) = c\tau, \quad x_2 \exp(x_2 \tau) = c.$$

Получаем

$$x_2 = \frac{c}{e}, \quad \tau = \frac{1}{x_2} \ln \frac{c}{x_2}.$$

Следовательно, $x_1 = c \exp(-x_2 \tau) = x_2$. Уравнение кривой переключения получается исключением τ из системы

$$\exp(x_2 \tau) = c\tau; \quad x_1 = c \exp(-x_2 \tau),$$

что дает

$$x_2 = x_1 \ln \frac{c}{x_1}. \quad (3.6)$$

Кривая переключения соответствует меньшему корню, т.е. правой ветви $x_1 > \frac{c}{e}$ кривой (3.6). После переключения на режим $u = 0$ траектории становятся вертикальными. Далее переключений больше не будет, что доказывается так же, как и выше. Вновь незаполненным остался квадрат $0 < x_1 < \frac{c}{e}$, $0 < x_2 < \frac{c}{e}$, который заполняется вертикальными и горизонтальными траекториями, отходящими в обратном времени от особой экстремали (3.3).

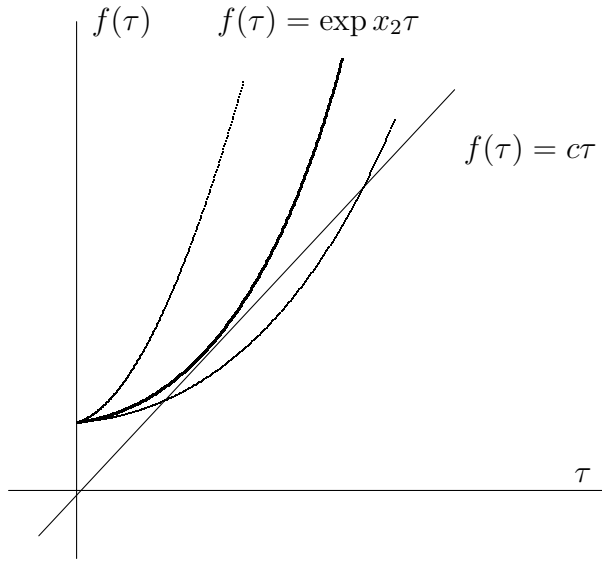


Рис. 7

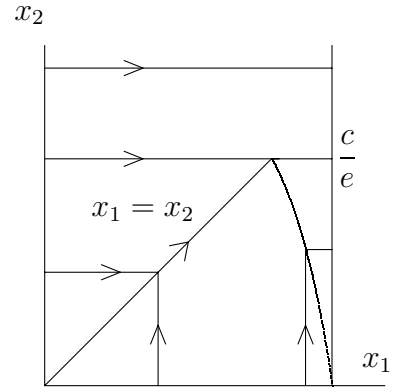


Рис. 8

Особая экстремаль играет для задачи (3.1), (3.5) роль магистрали. Если целевое многообразие B достаточно удалено, то оптимальная траектория сначала выходит на (3.3), движется по ней тем дольше, чем больше c , и, наконец, сходит с нее, когда цель достаточно близка.

4. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

В этом разделе мы покажем, что для задач, линейно зависящих от управления, в случае, когда индикатриса допустимых скоростей имеет полную размерность, есть канонический способ записи задачи в инвариантном (не зависящем от координат) виде, т.е. в виде задачи минимизации интеграла от дифференциальной формы на решениях дифференциального включения. Будет доказано необходимое условие оптимальности особой экстремали, которое выражено в терминах дифференциала этой формы и во многих случаях позволяет доказать неоптимальность решений уравнения Эйлера—Лагранжа.

4.1. Минимизация интеграла от дифференциальной формы на вполне интегрируемом распределении. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \phi(x, v) = \phi_0(x) + \phi_1(x)v, \tag{4.1}$$

где $\phi_0(x)$ — вектор-функция, $\phi_1(x)$ — матричная функция, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in U \subset \mathbb{R}^n$, U — симплекс

$$U = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq v_i \leq 1, \ i = 1, \dots, n, \ \sum_{i=1}^n v_i = 1 \right\}$$

с вершинами $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим $\phi(x, e_i) = f_i$. Рассмотрим функционал

$$J = \int_0^T g(x) dt$$

на решениях системы (4.1) с начальным условием $x(0) = x_0$. Окончание процесса происходит в момент T попадания траектории на некоторое многообразие B .

Перейдем к пространству \mathbb{R}^{n+1} . В пространстве \mathbb{R}^n с координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$ в правую часть (4.1) входили n вектор-функций $f_i = (f_i^1, \dots, f_i^n)$, $i = 1, \dots, n$. Введем $(n + 1)$ -ю координату x_0 так, чтобы $\dot{x}_0 = g(x)$, $x_0(0) = 0$. Тогда $x_0(T) = \int_0^T g(x) dt$. Пусть $X = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и

$F_i = (g, f_i^1, \dots, f_i^n)$, $i = 1, \dots, n$. Исходная система уравнений будет иметь вид

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^n v_i F_i(x),$$

а функционалом J служит нулевая координата вектора X .

Предположим, что в некоторой области Ω , где будут происходить все последующие построения, векторы $f_i(x)$ линейно независимы. Обозначим $\|F_1 \dots F_n\|$ матрицу размера $((n+1) \times n)$ вида

$$\begin{pmatrix} g & g & \dots & g \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^n & f_2^n & \dots & f_n^n \end{pmatrix}.$$

При вычеркивании i -й строки получается минор размера $(n \times n)$. Обозначим через $\mathcal{X}_i(x)$ его определитель. Тогда, по предположению, $\mathcal{X}_0(x) \neq 0$ для любых $x \in \Omega$.

Введем дифференциальную 1-форму

$$\omega = - \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\mathcal{X}_j(x)}{\mathcal{X}_0(x)} dx^j.$$

Утверждение 4.1. На любой допустимой траектории γ имеем $\int_{\gamma} \omega = J(\gamma)$.

Доказательство. Имеем

$$\dot{x}^j = \sum_{i=1}^n v_i F_i^j(x), \quad j = 0, 1, \dots, n;$$

тогда

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\mathcal{X}_j(x)}{\mathcal{X}_0(x)} dx^j = - \int_0^T \sum_{i,j=1}^n (-1)^j \frac{\mathcal{X}_j(x)}{\mathcal{X}_0(x)} v_i F_i^j(x) dt.$$

Припишем к матрице $\|F_1 \dots F_n\|$ столбец F_i , т.е. рассмотрим матрицу $\|F_i F_1 \dots F_n\|$. Разложим определитель $\det \|F_i F_1 \dots F_n\| = 0$ по первому столбцу:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k F_i^k \mathcal{X}_k(x) + g \mathcal{X}_0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g = - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{F_i^k \mathcal{X}_k(x)}{\mathcal{X}_0(x)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда, с учетом соотношения

$$g = \sum_{i=1}^n v_i g,$$

получаем

$$\int_0^T g dt = - \int_0^T \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\mathcal{X}_k(x)}{\mathcal{X}_0(x)} v_i F_i^k dt.$$

Утверждение доказано. \square

Таким образом, мы привели интеграл $\int_0^T g dt$ к интегралу от формы $\int_{\gamma} \omega$, который зависит только от самой кривой γ и не зависит от ее параметризации.

4.2. Необходимые условия минимума интеграла от дифференциальной формы. Введем конус $K(x)$, натянутый на n векторов F_i , $K(x) = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i F^i(x) \mid v_i \geq 0 \right\}$. Тогда, в силу независимости от параметризации, $\dot{x} \in K(x)$. Пусть M^n — некоторое многообразие. В каждой точке x в касательном к M^n пространстве задан конус $K(x)$ и задана дифференциальная форма ω . Рассмотрим следующую задачу:

$$\int_{x(\cdot)} \omega \rightarrow \min, \quad \dot{x} \in K(x). \quad (4.2)$$

Найдем решение $x(\cdot)$, минимизирующее интеграл от ω . Будем использовать стандартное обозначение: $I = \{i_1 \dots i_k\}$ — набор различных индексов, принимающих значения от 1 до n .

Определение 4.1. 1) Обозначим через $L_I(x) = \left\{ \sum_{i \in I} v_i F^i(x) \mid v_i \geq 0 \right\}$ грань конуса $K(x)$, а через $\text{ri } L_I(x) = \left\{ \sum_{i \in I} v_i F^i(x) \mid v_i > 0 \right\}$ — внутренность грани L_I .

2) Скажем, что траектория $x(t)$ принадлежит грани L_I , если $\dot{x}(t) \in L_I(x(t))$ в любой точке $x(t)$.

3) Решение $x(t)$ назовем L_I -особым на (t_0, t_1) , если $\dot{x}(t) \in \text{ri } L_I(x(t))$ для любого $t \in (t_0, t_1)$.

Лемма 4.1. Пусть $x(\cdot)$ — K -особое решение задачи (4.2), $\omega = \sum_{i=1}^n P_i(x) dx^i$. Тогда для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $d\omega(\dot{x}, \xi) = 0$.

Доказательство. Напишем уравнение Эйлера для K -особой экстремали, т.е. уравнение Эйлера для простейшей задачи вариационного исчисления с функционалом

$$\int \omega = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n P_i(x(t)) \dot{x}^i(t) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\sum_{i=1}^n P_i(x) \dot{x}^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n P_i(x) \dot{x}^i \right) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ -\frac{d}{dt} P_j(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i(x)}{\partial x^j} \dot{x}^i &= 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial x^i} \dot{x}^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x^j} \dot{x}^i = 0, \\ \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial P_j}{\partial x^i} + \frac{\partial P_i}{\partial x^j} \right) \dot{x}^i &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Вычислим результат внутреннего умножения 2-формы

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

на вектор \dot{x} фазовой скорости экстремали, т.е.

$$(\dot{x} \lrcorner \omega)(\xi) = d\omega\{\dot{x}, \xi\} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x^j} (\dot{x}^j \xi^i - \dot{x}^i \xi^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial x^j} - \frac{\partial P_j}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j \xi^i.$$

Из уравнения Эйлера следует, что суммы

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial x^j} - \frac{\partial P_j}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j$$

равны 0 для любого $i = 1, \dots, n$. Значит, $d\omega(\dot{x}, \xi) = 0$. \square

Докажем более сильный результат.

Теорема 4.1. Пусть $x(\cdot)$ — K -особое решение задачи. Тогда $d\omega|_{x(t)} = 0$.

Доказательство. Примем произвольную точку O на траектории $x(\cdot)$ за начало координат; построим вариацию $x(\cdot)$ для фиксированного момента времени θ . Заменим экстремаль от точки O до точки $x(\theta)$ ломаной. В точке O возьмем произвольные векторы h_1, h_2 . По лемме 4.1 имеем $d\omega(\dot{x}, h_1) = 0, d\omega(\dot{x}, h_2) = 0$. Положим

$$A = \theta\dot{x}(0), \quad B = \theta\frac{\dot{x}(0)}{2} + \theta\alpha h_1, \quad C = \theta\frac{\dot{x}(0)}{4} + \theta\alpha\frac{h_1}{2} + \theta\alpha h_2, \quad \alpha > 0.$$

В результате получим ломаную $OCBx(\theta)$. При достаточно малом α , которое можно выбрать одним и тем же для всех достаточно малых $\theta \in [0, \theta_0]$, ломаная $OCBx(\theta)$ является допустимой траекторией (т.е. векторы $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{Bx(\theta)}$ лежат во внутренности конусов $\text{int } K$ в точках O, C, B соответственно). Через $\tilde{\gamma}(\alpha)$ обозначим ломаную $OCBx(\theta)$, а через γ — участок оптимальной траектории $x(\cdot)$ между точками O и $x(\theta)$. Тогда

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega \geq \int_{\gamma} \omega, \quad \int_{\tilde{\gamma}-\gamma} \omega \geq 0, \quad \tilde{\gamma} - \gamma = OCBx(\theta)O.$$

По формуле Стокса

$$\int_{\tilde{\gamma}-\gamma} \omega = \iint_{\Omega} d\omega,$$

где Ω — двумерная поверхность с границей $\partial\Omega = \tilde{\gamma} - \gamma$, составленная из плоского куска — треугольника OCB , и некоторого «криволинейного» треугольника с границей, составленной из отрезков прямых $OB, Bx(\theta)$ и кривой $x(\theta)O = -\gamma$:

$$\iint_{\Omega} d\omega = \iint_{OCB} d\omega + \iint_{OBx(\theta)} d\omega.$$

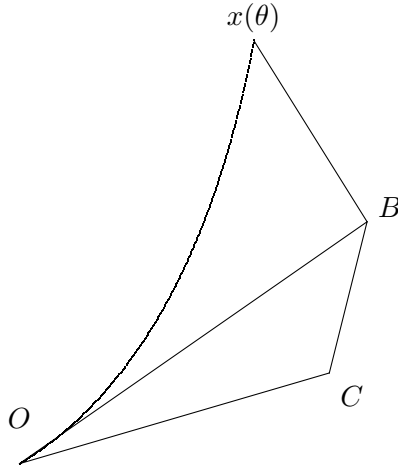


Рис. 9

Имеем

$$\iint_{OCB} d\omega = \frac{1}{2}d\omega|_0\{OB, OC\} + o(\theta^2), \quad \iint_{OBx(\theta)} d\omega = \frac{1}{2}d\omega|_0\{OB, Ox(\theta)\} + o(\theta^2).$$

Так как $x(\theta) = \theta\dot{x}(0) + o(\theta)$, то

$$\iint_{OBx(\theta)} d\omega = \frac{1}{2}d\omega|_0\{OB, OA\} + o(\theta^2).$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} d\omega &= \frac{1}{2}d\omega|_0\left\{\theta\frac{\dot{x}(0)}{2} + \theta\alpha h_1, \theta\frac{\dot{x}(0)}{4} + \theta\alpha\frac{h_1}{2} + \theta\alpha h_2\right\} + \frac{1}{2}d\omega|_0\left\{\theta\dot{x}(0), \theta\frac{\dot{x}(0)}{2} + \alpha\theta h_1\right\} + o(\theta^2) = \\ &= \frac{1}{2}\theta^2\alpha^2 d\omega\{h_1, h_2\} + o(\theta^2). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$A = \theta\dot{x}(0), \quad B = \theta\frac{\dot{x}(0)}{2} + \theta\alpha h_2, \quad C = \theta\frac{\dot{x}(0)}{4} + \theta\alpha\frac{h_2}{2} + \theta\alpha h_1;$$

тогда аналогично получаем

$$\iint_{\Omega} d\omega = \frac{1}{2}\theta^2\alpha^2 d\omega\{h_2, h_1\} + o(\theta^2).$$

Следовательно, $d\omega\{h_1, h_2\} = d\omega\{h_2, h_1\} + o(\theta^2)$. Устремляя $\theta \rightarrow 0$, в силу антисимметричности $d\omega$ получаем, что $d\omega|_0\{h_1, h_2\} = 0$. Так как точка O выбиралась произвольно, то $d\omega|_{x(t)}\{h_1, h_2\} = 0$ для любых h_1, h_2 . \square

Пример 4.1. Пользуясь теоремой 4.1, выпишем уравнение K -особых экстремалей в задаче

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_i &= x_1 x_2 x_3 u_i, \\ u_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 3, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 1, \\ x_i(0) &= x_{i0} > 0, \quad x_1(T_0) + x_2(T_0) + x_3(T_0) = 1. \end{aligned}$$

Имеем

$$u_1 dt = \frac{dx_1}{x_1 x_2 x_3}, \quad u_2 dt = \frac{dx_2}{x_1 x_2 x_3}, \quad u_3 dt = \frac{dx_3}{x_1 x_2 x_3},$$

откуда

$$\omega = dt = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{x_1 x_2 x_3}.$$

Соответствующая 2-форма имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_2} - \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_3} - \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1} + \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_3} + \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_1} - \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_2} \right) = \\ &= \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{x_3 - x_1}{x_3 x_1} dx_3 \wedge dx_1 \right). \end{aligned}$$

Условие $d\omega = 0$ влечет

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 - x_1 = 0,$$

т.е. особая экстремаль задачи есть центральный луч $x_1 = x_2 = x_3$.

4.3. Пример неоптимальной экстремали. Чтобы проиллюстрировать теорему 4.1, рассмотрим следующий поучительный пример, показывающий, что особые экстремали задачи могут быть локально не оптимальны:

$$\begin{aligned} T \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 &= u_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = u_2 x_3, \quad \dot{x}_3 = u_3 x_1, \\ u_1 + u_2 + u_3 &= 1, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0, \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad i = 1, \dots, 3, \quad x_1(T) + x_2(T) + x_3(T) = 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Сведем задачу (4.3) к интегрированию дифференциальной формы. Имеем

$$u_1 dt = \frac{dx_1}{x_2}, \quad u_2 dt = \frac{dx_2}{x_3}, \quad u_3 dt = \frac{dx_3}{x_1}.$$

Суммируя эти три соотношения, получим

$$dt = \frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_3} + \frac{dx_3}{x_1}.$$

Таким образом, задача минимизации интеграла от дифференциальной формы имеет вид:

$$\int_{x(\cdot)} \frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_3} + \frac{dx_3}{x_1} \rightarrow \min, \quad \dot{x}(\cdot) \in \mathbb{R}_+^3.$$

Выпишем необходимое условие минимума $d\omega = 0$ особой экстремали. Имеем

$$d \left(\frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_3} + \frac{dx_3}{x_1} \right) = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_2^2} + \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_3^2} + \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_1^2} = 0.$$

Поскольку коэффициенты при каждом из мономов $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$ и $dx_3 \wedge dx_1$ не равны нулю, получаем, что соответствующая 2-форма нигде не равна нулю, и оптимальных особых экстремалей у задачи (4.3) нет. В то же время уравнение Эйлера

$$d\omega(\hat{x}(\cdot), \xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

выделяет в качестве особой экстремали задачи (4.3) луч $x_1 = x_2 = x_3$. Действительно, пусть $\hat{x}(t) = (t, t, t)$, $\vec{l} = \dot{\hat{x}}(t) = (1, 1, 1)$, тогда

$$\vec{l} \lrcorner dx_1 \wedge dx_2 = \begin{vmatrix} dx_1(\vec{l}) & dx_2(\vec{l}) \\ dx_2(\vec{l}) & dx_1(\vec{l}) \end{vmatrix} = dx_2 - dx_1.$$

Аналогично, $\vec{l} \lrcorner dx_2 \wedge dx_3 = dx_3 - dx_2$, $\vec{l} \lrcorner dx_3 \wedge dx_1 = dx_1 - dx_3$. Отсюда следует, что в точках луча (t, t, t) внутреннее умножение вектора \vec{l} и формы $d\omega$ равно нулю:

$$\vec{l} \lrcorner \left(\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_2^2} + \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_3^2} + \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_1^2} \right) = \frac{dx_2 - dx_1 + dx_3 - dx_2 + dx_1 - dx_3}{t^2} \equiv 0.$$

Это означает, что луч (t, t, t) является экстремалью задачи (4.3).

Полезно построить явную вариацию этой экстремали, которая улучшает значение функционала. Пусть (t_0, t_0, t_0) — произвольная точка на луче (t, t, t) . Построим траекторию, которая начинается в этой точке и заключается в последовательном движении сначала вдоль оси O_{x_1} с $u_1 = 1$ в течение времени τ_1 , затем вдоль оси O_{x_3} с $u_3 = 1$ в течение τ_2 и, наконец, вдоль оси O_{x_2} с $u_2 = 1$ в течение τ_3 с возвращением в некоторую точку того же луча. Имеем

$$x_1(\tau_1) = t_0 + t_0\tau_1, \quad x_2(\tau_1) = t_0, \quad x_3(\tau_1) = t_0.$$

Обозначим $\tau_1 = \varepsilon$. Тогда $x_1(\tau_1) = t_0(1 + \varepsilon)$. На втором участке имеем

$$x_1(\tau_1 + \tau_2) = t_0(1 + \varepsilon), \quad x_2(\tau_1 + \tau_2) = t_0, \quad x_3(\tau_1 + \tau_2) = t_0 + t_0(1 + \varepsilon)\tau_2.$$

Выберем τ_2 так, чтобы $x_3(\tau_1 + \tau_2) = x_1(\tau_1 + \tau_2)$:

$$(1 + \varepsilon)\tau_2 = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tau_2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

На третьем участке имеем

$$x_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = t_0(1 + \varepsilon), \quad x_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = t_0 + t_0(1 + \varepsilon)\tau_3, \quad x_3(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = t_0(1 + \varepsilon).$$

Положим $(1 + \varepsilon)\tau_3 = \varepsilon$, тогда $x_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = t_0(1 + \varepsilon)$, и проварьированная траектория вернулась на луч (t, t, t) в точке $(t_0(1 + \varepsilon), t_0(1 + \varepsilon), t_0(1 + \varepsilon))$. Время движения на построенной вариации равно $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}$. С другой стороны, движение вдоль луча (t, t, t) с управлением $u_1 = u_2 = u_3 = 1/3$ в ту же самую точку займет время τ , являющееся решением уравнения

$$t_0 e^{\tau/3} = (1 + \varepsilon)t_0 \Leftrightarrow \tau = 3 \ln(1 + \varepsilon).$$

Разлагая разность $\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ и $3 \ln(1 + \varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке $\varepsilon = 0$, получим

$$\varepsilon + 2\varepsilon(1 - \varepsilon + \dots) - 3 \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots \right) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots < 0.$$

Следовательно, при достаточно малых ε движение по проварьированной траектории быстрее, чем по центральному лучу.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

5.1. Векторные поля на многообразии. Для удобства вычислений мы встанем здесь на алгебраическую (бескоординатную) точку зрения. Вместо того, чтобы представлять себе векторное поле как систему векторов, выбранных в каждой касательной плоскости, мы будем рассматривать векторное поле как оператор дифференцирования в силу системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемой этим полем.

Обозначим через $C^\infty(\mathcal{X})$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на многообразии \mathcal{X} .

Определение 5.1. Векторным полем X на многообразии \mathcal{X} называется линейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий на функции из пространства $C^\infty(\mathcal{X})$,

$$X : C^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}),$$

так что

$$X(fg) = X(f)g + X(g)f, \quad X = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Векторные поля образуют линейное пространство. Введем операцию $[X, Y] = XY - YX$ над векторными полями X и Y :

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right] - \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Значит, $[X, Y]$ — оператор дифференцирования первого порядка, т.е. векторное поле.

Определение 5.2. Операция $[X, Y]$ называется коммутатором.

Задача 5.1. Найти коммутатор векторных полей

$$v_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем

$$[v_1, v_2]^1 = \sum_{i=1}^3 \left(v_1^i \frac{\partial v_2^1}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial v_1^1}{\partial x^i} \right) = x_3 + x_2,$$

$$[v_1, v_2]^2 = \sum_{i=1}^3 \left(v_1^i \frac{\partial v_2^2}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial v_1^2}{\partial x^i} \right) = x_1 + x_3,$$

$$[v_1, v_2]^3 = \sum_{i=1}^3 \left(v_1^i \frac{\partial v_2^3}{\partial x^i} - v_2^i \frac{\partial v_1^3}{\partial x^i} \right) = x_2 - x_1.$$

□

Непосредственным вычислением можно проверить, что операция коммутирования векторных полей обладает следующими свойствами:

- 1) $[X, Y] = -[Y, X]$ для любых двух векторных полей X, Y (антикоммутативность);
- 2) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ для любых векторных полей X, Y, Z и произвольных констант α, β (билинейность);
- 3) тождество Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \equiv 0$$

(X, Y, Z — произвольные векторные поля).

Первые два свойства коммутатора очевидны. Докажем тождество Якоби. Имеем:

$$[X, [Y, Z]] = X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X = XYZ - XZY - YZX + ZYX;$$

$$[Y, [Z, X]] = Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y = YZX - YXZ - ZXY + XZY;$$

$$[Z, [X, Y]] = Z(XY - YX) - (XY - YX)Z = ZXY - ZYX - XYZ + YXZ.$$

Складывая эти три выражения, убеждаемся, что $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \equiv 0$.

Свойства 1)–3) коммутатора превращают множество векторных полей в бесконечномерную алгебру Ли.

Пусть $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — гладкое отображение многообразий, $f \in C^\infty(\mathcal{X})$, $g \in C^\infty(\mathcal{Y})$.

Определение 5.3. Функции f и g называются согласованными, если $f(x) = g(h(x))$. Векторные поля X и Y называются согласованными, если их значения на согласованных функциях совпадают, т.е. $X(f(x)) = Y(g(y))$.

Утверждение 5.1. Пусть X и Y — векторные поля на \mathcal{X} , а U и V — векторные поля на \mathcal{Y} . Тогда если векторные поля X и Y согласованы соответственно с U и V , то коммутаторы $[X, Y]$ и $[U, V]$ согласованы.

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ согласованы, тогда согласованы Yf и Vg , значит, согласованы XYf и UVg . Аналогично, согласованы YXf и VUg ; значит, согласованы коммутаторы. □

5.2. Геометрический смысл коммутатора. Пусть X, Y — векторные поля. Из произвольной точки O проведем траекторию поля X на время τ . Ее конец обозначим через x_1 . Из точки x_1 проведем траекторию поля Y на время τ . Ее конец обозначим через x_2 . Изменив порядок следования вдоль полей X и Y , получим точки x_3 и x_4 .

Утверждение 5.2.

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{x_4 - x_2}{\tau^2} = [X, Y](O).$$

Доказательство. Вычислим x_2, x_4 : будем считать τ очень малым и используем разложение в ряд Тейлора. Без ограничения общности можно считать $O = 0$. Для траектории $x(t)$ системы $\dot{x} = X(x)$ имеем

$$x(\tau) = x(0) + \int_0^\tau X(x(s)) ds = x(0) + \int_0^\tau (X(x(0)) + s\dot{x}(0) + o(s)) ds =$$

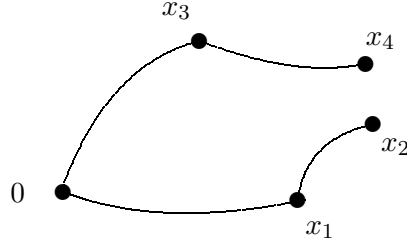


Рис. 10

$$= x(0) + X(x(0))\tau + \frac{DX}{Dx}(x(0))X(x(0))\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2).$$

Таким образом, для произвольного $i = 1, \dots, n$ имеем

$$x_1^i = X^i(0)\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^i(0)}{\partial x^j} X^j(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2),$$

$$x_2^i = x_1^i + Y^i(x_1)\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^i(x_1)}{\partial x^j} Y^j(x_1)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2),$$

$$Y^i(x_1) = Y^i(0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^i(0)}{\partial x^j} X^j(0)\tau + o(\tau),$$

$$\frac{\partial Y^i(x_1)}{\partial x^j} = \frac{\partial Y^i(0)}{\partial x^j} + o(1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_2^i &= X^i(0)\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^i(0)}{\partial x^j} X^j(0)\frac{\tau^2}{2} + Y^i(0)\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^i(0)}{\partial x^j} X^j(0)\tau^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^i(0)}{\partial x^j} Y^j(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} x_4^i &= Y^i(0)\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^i(0)}{\partial x^j} Y^j(0)\frac{\tau^2}{2} + X^i(0)\tau + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^i(0)}{\partial x^j} Y^j(0)\tau^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^i(0)}{\partial x^j} X^j(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2), \\ x_4^i - x_2^i &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X^i(0)}{\partial x^j} Y^j(0) - \frac{\partial Y^i(0)}{\partial x^j} X^j(0) \right) \tau^2 + o(\tau^2), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор $x_4 - x_2$ стремится к касательной к траектории, определяемой коммутатором $[X, Y]$. \square

5.3. Распределения. Пусть \mathcal{X} — n -мерное гладкое многообразие.

Определение 5.4. Закон, сопоставляющий каждой точке $t \in \mathcal{X}$ k -мерное векторное подпространство $W(t)$ касательного подпространства к многообразию \mathcal{X} в точке t , называется распределением k -мерных плоскостей на \mathcal{X} .

Векторное подпространство конечномерного пространства можно определить либо с помощью базиса, либо с помощью системы линейных уравнений, обращающихся в нуль в точках подпространства. Поскольку в случае распределения плоскостей у нас выделено подпространство $W(t)$ в касательном пространстве к многообразию в каждой из его точек t , при первом способе мы задаем распределение плоскостей с помощью базиса, зависящего от t , т.е. с помощью набора векторных полей. Во втором случае для каждого t у нас имеется набор линейных функционалов, аннулирующих векторы из $W(t)$, т.е. набор дифференциальных 1-форм на \mathcal{X} . Итак, формально, распределение W можно задать следующими двумя способами:

- 1) набором k линейно независимых в каждой точке векторных полей $X_1(t), \dots, X_k(t)$. Тогда вектор касательного пространства $X \in T_{t_0}\mathcal{X}$ принадлежит распределению W , если X является линейной комбинацией векторов $X_1(t_0), \dots, X_k(t_0)$;
- 2) набором $n - k$ линейно независимых дифференциальных 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$. Тогда вектор $X \in T_{t_0}\mathcal{X}$ принадлежит распределению W , если все формы ω_i , $i = 1, \dots, n - k$, обращаются на векторе X в нуль.

Распределение W называется гладким, если его можно задать с помощью базиса, состоящего из гладких векторных полей (или гладких дифференциальных форм).

Задача 5.2. Найти набор векторных полей, образующих распределение в 4-мерном пространстве, заданное формами $\omega_1 = x_1 dx_2 + dx_3$, $\omega_2 = -x_3 dx_2 + dx_4$.

Решение. Задача сводится к решению следующей системы линейных уравнений на вектор $u = (u_1, u_2, u_3)$:

$$x_1 u_2 + u_3 = 0, \quad -x_3 u_2 + u_4 = 0.$$

В параметрической форме решение может быть записано в виде:

$$u_1 = t, \quad u_2 = s, \quad u_3 = -x_1 s, \quad u_4 = x_3 s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

В качестве базиса соответствующего распределения можно взять векторы

$$U_1 = (1, 0, 0, 0), \quad U_2 = (0, 1, -x_1, x_3).$$

□

Определение 5.5. Будем говорить, что дифференциальная 2-форма θ принадлежит идеалу, порожденному 1-формами $\omega_1, \dots, \omega_m$, если существуют такие 1-формы β_1, \dots, β_m , что

$$\theta = \sum_{i=1}^m \beta_i \wedge \omega_i.$$

Пусть W — гладкое k -мерное распределение.

Лемма 5.1 (формула Картана). Пусть A, B — векторные поля, ω — 1-форма на многообразии \mathcal{X} . Тогда

$$d\omega(A, B) = A(\omega(B)) - B(\omega(A)) - \omega([A, B]).$$

Доказательство. В локальных координатах:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, & B &= \sum_{i=1}^n B^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, & \omega &= \sum_{i=1}^n P_i(x) dx^i, \\ d\omega &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial P_i(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i, & [A, B] &= \sum_{i,j=1}^n \left(A^i \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - B^i \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ d\omega(A, B) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial P_i(x)}{\partial x^j} (A^i B^j - B^i A^j), & \omega(B) &= \sum_{i=1}^n P_i B^i. \end{aligned}$$

С этого момента мы используем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Имеем

$$A(\omega(B)) = A^i \frac{\partial P_\alpha}{\partial x^i} B^\alpha + A^i P_\alpha \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^i}; \quad (5.1)$$

$$B(\omega(A)) = B^i \frac{\partial P_\alpha}{\partial x^i} A^\alpha + B^i P_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i}; \quad (5.2)$$

$$\omega([A, B]) = P_i \left(A^\alpha \frac{\partial B^i}{\partial x^\alpha} - B^\alpha \frac{\partial A^i}{\partial x^\alpha} \right). \quad (5.3)$$

Вычитая из выражения (5.1) равенства (5.2) и (5.3), получим

$$d\omega(A, B) = \frac{\partial P_\alpha}{\partial x^i} (A^i B^\alpha - B^i A^\alpha).$$

Лемма доказана. \square

Утверждение 5.3. Пусть I — идеал, порожденный формами $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$. Дифференциальная 2-форма θ принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда для любых двух векторов X и Y , принадлежащих распределению W , порожденному формами $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$, выполнено равенство $\theta(X, Y) = 0$.

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть $\theta \in I$, $X, Y \in W$. Тогда

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{n-k} \theta_i \wedge \omega_i(X, Y) = \sum_{i=1}^{n-k} \det \begin{pmatrix} \theta_i(X) & \theta_i(Y) \\ \omega_i(X) & \omega_i(Y) \end{pmatrix} = 0,$$

так как $\omega_i(X) = 0$, $\omega_i(Y) = 0$.

2. *Достаточность.* Пусть $\theta(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in W$. К формам $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ добавим k форм $\kappa_1, \dots, \kappa_k$ так, чтобы в каждой точке многообразия \mathcal{X} набор $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}, \kappa_1, \dots, \kappa_k$ образовывал базис в кокасательном пространстве. В касательном пространстве выберем базис $a_1, \dots, a_{n-k}, b_1, \dots, b_k$, двойственный к базису ω_i, κ_j , т.е. $\omega_i(a_i) = 1$, $\omega_j(a_i) = 0 \forall j \neq i$, $\omega_i(b_j) = 0 \forall i$, $\kappa_i(b_i) = 1$, $\kappa_i(b_j) = 0 \forall i \neq j$, $\kappa_i(a_j) = 0 \forall i$. Такой базис всегда существует.

Разложим форму θ по базису ω_i, κ_j :

$$\theta = \sum_{i,j=1}^{n-k} p_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i,j=1}^{n-k,k} q_{ij} \omega_i \wedge \kappa_j + \sum_{i,j=1}^k r_{ij} \kappa_i \wedge \kappa_j.$$

Так как $\omega_i(b_j) = 0 \forall i$, то все векторы b_j принадлежат распределению W , значит $\theta(b_i, b_j) = 0$. С другой стороны, $\theta(b_i, b_j) = r_{ij}$. Следовательно, $r_{ij} = 0$ для всех i, j . Таким образом,

$$\theta = \sum_{i,j=1}^{n-k} p_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i,j=1}^{n-k,k} q_{ij} \omega_i \wedge \kappa_j \Rightarrow \theta \in I.$$

Утверждение доказано. \square

Определение 5.6. Распределение W называется инволютивным, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) коммутатор любых двух векторных полей, принадлежащих распределению W , также принадлежит W ;
- 2) пусть $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ — базисные формы распределения W . Тогда $d\omega_i$ принадлежат идеалу, порожденному формами ω_i , $i = 1, \dots, n - k$.

Утверждение 5.4. Условия 1) и 2) в определении 5.6 инволютивного распределения эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим поля $X, Y \in W$.

1. Пусть выполнено условие 1) и $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ — базисные формы распределения W . Тогда $d\omega_i(X, Y) = X\omega_i(Y) - Y\omega_i(X) - \omega_i([X, Y]) = 0$ (по формуле Картана). В силу утверждения 5.3, это и означает, что $d\omega_i \in I$.

2. Пусть выполнено условие 2). Тогда для любых $X, Y \in W$ имеем $d\omega_i(X, Y) = 0$. По формуле Картана имеем, что $\omega([X, Y]) = 0$, т.е. $[X, Y] \in W$. \square

6. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

Определение 6.1. Многообразие E называется гладким вещественным векторным расслоением над многообразием B , если определено гладкое отображение $\pi : E \rightarrow B$ со следующими свойствами:

- 1) для любого $b \in B$ прообраз $\pi^{-1}b$ есть подмногообразие E , которое является линейным пространством, изоморфным \mathbb{R}^n (причем размерность n не зависит от точки $b \in B$);
- 2) для любого $b \in B$ существует такая окрестность O_b , что ее прообраз $\pi^{-1}O_b$ диффеоморфен $\mathbb{R}^n \times O_b$ (обозначим через $h : \mathbb{R}^n \times O_b \rightarrow \pi^{-1}O_b$ соответствующий диффеоморфизм);
- 3) для любого $b \in O_b$ ограничение $h|_{\mathbb{R}^n \times b}$ есть линейное взаимно однозначное отображение \mathbb{R}^n на $\pi^{-1}b$.

Многообразие E называется пространством расслоения, B называется базой, отображение π — проекцией, а векторное пространство $\pi^{-1}b$ — слоем над точкой b .

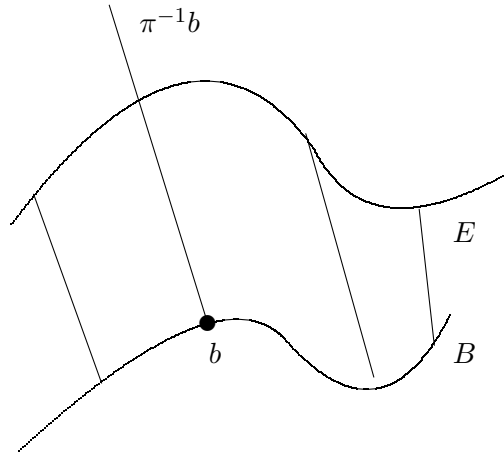


Рис. 11

Определение 6.2. Семейство гладких k -мерных подмногообразий $M_\alpha \subset E^n$, E^n — гладкое n -мерное многообразие, называется k -мерным слоением на многообразии E^n , если через каждую точку $x \in E^n$ проходит одно и только одно из многообразий M_α , и при этом каждая точка $x \in E^n$ обладает такой окрестностью O_x , что ограничение слоев M_α на O_x описывается уравнениями $f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-k}(x) = c_{n-k}$, где функции f_i — гладкие, а матрица Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ имеет ранг $n - k$ во всех точках $x \in O_x$.

Слоение отличается от расслоения тем, что его слои не обязательно диффеоморфны друг другу, а база не обязана иметь структуру гладкого многообразия.

Определение 6.3. Подмногообразие $N \subset M$ называется интегральным многообразием распределения W , если все касательные плоскости к многообразию N принадлежат распределению W .

Определение 6.4. Распределение W размерности k на многообразии M называется вполне интегрируемым, если на M существует k -мерное слоение, все слои которого являются интегральными многообразиями распределения W .

Теорема 6.1 (Фробениус). *Распределение W интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть распределение W интегрируемо, тогда на M существует k -мерное слоение, слои которого являются интегральными многообразиями распределения. Пусть векторные поля X и Y принадлежат распределению W , а L — некоторое интегральное k -мерное многообразие распределения W . Тогда в любой точке $x \in L$ поля A и B касаются L , следовательно коммутатор $[A, B]$ тоже касается L , а значит, принадлежит распределению W . Следовательно, W инволютивно.

Достаточность. Пусть распределение W инволютивно. Будем доказывать его интегрируемость по индукции (по размерности распределения).

При $k = 1$ утверждение верно по теореме о существовании и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть теорема доказана для распределений с любой размерностью, меньшей k . Докажем ее для k -мерных распределений.

Без ограничения общности можем проводить доказательство в некоторой достаточно малой окрестности нуля \mathcal{O}_0 .

Пусть X_1, \dots, X_k — гладкие векторные поля, образующие базис распределения W . По теореме о выпрямлении векторного поля [3] можно выбрать базис в \mathcal{O}_0 так, что локальными координатами векторного поля X_1 будут функции $X_1^1 = 1, X_1^2 = 0, \dots, X_1^n = 0$. Полю X_1 соответствует дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial t^1}$. Далее, вместо векторных полей X_2, \dots, X_k построим поля $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k$, где $\tilde{X}_i = X_i + \varphi_i X_1$. Скалярные функции φ_i выберем так, чтобы первая координата полей \tilde{X}_i была равна нулю. Полученная система векторов $X_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k$ остается базисом распределения W .

Рассмотрим сечение окрестности \mathcal{O}_0 плоскостью $t^1 = 0$. Это $(n - 1)$ -мерная плоскость V . Поля $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k$ касаются сечения V , так как их первая координата равна нулю. Векторы $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k$ образуют базис $(k - 1)$ -мерного распределения $\Lambda = W \cap V$ на сечении V . Из инволютивности распределения W следует инволютивность распределения Λ . Действительно, коммутаторы $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]$, во-первых, лежат в W (поскольку W инволютивно), а, во-вторых, касаются Λ (поскольку поля \tilde{X}_i при всех t касаются V). Значит, $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] \in W \cap V = \Lambda$.

Следовательно, по предположению индукции распределение \tilde{W} вполне интегрируемо и определяет $(k - 1)$ -мерное слоение на V . Пусть его слои задаются уравнениями $f_i(t^2, \dots, t^n) = c_i$, $i = 1, \dots, n - k + 1$, где константы c_1, \dots, c_{n-k+1} параметризуют множество слоев. Каждый слой касается распределения Λ , т.е. $\tilde{X}_j(f_i) = 0$ в точках $t \in V$. Через каждую точку сечения V проведем траектории векторного поля X_1 . Траектории, выходящие из точек слоя, образуют k -мерное многообразие, которое есть цилиндр по координате t^1 . Получили k -мерное слоение, определенное на \mathcal{O}_0 .

Покажем, что полученное слоение является интегральным для распределения W , т.е. что $X_1(f_i) = 0, \tilde{X}_j(f_i) = 0$ во всех точках $t \in \mathcal{O}_0$. Имеем $X_1(f_i) = \frac{\partial f_i}{\partial t^1} = 0$, так как функции f_i не зависят от t^1 . Вычислим производные по остальным направлениям. При любом $t \in v_0$ $\frac{\partial}{\partial t^1} \tilde{X}_j(f_i) = X_1(\tilde{X}_j(f_i))$, вычтем из этого выражения нулевое слагаемое $\tilde{X}_j(X_1(f_i))$, тогда $\frac{\partial}{\partial t^1}(\tilde{X}_j(f_i)) = \frac{\partial}{\partial t^1} \tilde{X}_j(f_i) - \tilde{X}_j(X_1(f_i)) = [X_1, \tilde{X}_j](f_i)$. Так как распределение W инволютивно, то найдутся такие функции $a_j^s(t)$, что $[X_1, \tilde{X}_j] = \sum_{s=1}^k a_j^s \tilde{X}_s$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t^1}(\tilde{X}_j(f_i)) = \sum_{s=2}^k a_j^s \tilde{X}_s(f_i).$$

Зафиксируем индекс i и переменные t^2, \dots, t^n , тогда полученные равенства можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $\tilde{X}_s(f_i)$ от переменного t^1 . При $t^1 = 0$ имеем $\tilde{X}_s(f_i) = 0$. Так как система уравнений линейна и однородна, то $\tilde{X}_s(f_i) \equiv 0$, т.е. распределение W интегрируемо. \square

Задача 6.1. Рассмотрим распределение в \mathbb{R}^3 с координатами (t, x, p) , заданное 1-формой $\omega = p dx - H(t, x, p) dt$. Найти функции $H(t, x, p)$, для которых распределение интегрируемо.

Решение. В силу теоремы Фробениуса, для интегрируемого распределения имеем

$$\omega \wedge d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -p \frac{\partial H}{\partial p} dx \wedge dp \wedge dt - H dt \wedge dp \wedge dx = 0,$$

откуда

$$p \frac{\partial H}{\partial p} = H.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$H(t, x, p) = pF(t, x).$$

□

7. УСЛОВИЯ МИНИМУМА L -ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

7.1. Вполне интегрируемые формы. Вернемся к изучению задачи (4.2). Пусть на некотором многообразии M заданы дифференциальная 1-форма ω , поле конусов $K(x) \in T_x M$, набор линейно независимых векторных полей $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — образующих конуса $K(x)$ с гранями

$$L_I(x) = \left\{ v = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x) \mid \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Определение 7.1. Кривая γ на многообразии M называется допустимой, если $\dot{\gamma}(x) \in K(x)$ для всех $x \in M$.

Рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} \omega$. Найдем кривую γ , дающую минимум интеграла.

Лемма 7.1. Пусть распределение граней L_I инволютивно, траектория γ — оптимальна и γ является I -особой траекторией, тогда $d\omega|_{L_I} = 0$.

Доказательство. Векторы скоростей траектории γ лежат в $\text{ri } L_I(\gamma(t))$ для всех $t \in (t_0, t_1)$. Следовательно, можно рассмотреть вспомогательную задачу, ограниченную на слой слоения, порожденную распределением L_I . Конусом допустимых скоростей в ней будет множество L_I . Рассмотрим кривые, проходящие через точки t_0, t_1 . Тогда если кривая γ была оптимальной для исходной задачи, то она ею останется и для вспомогательной задачи. Тогда по теореме 4.1 имеем $d\omega = 0$, но $d\omega = d\omega|_{L_I} \implies d\omega|_{L_I} = 0$. □

Определение 7.2. Дифференциальная 1-форма ω называется вполне интегрируемой, если имеет место представление

$$\omega = P(x) d\Pi(x),$$

где $P(x), \Pi(x)$ — некоторые гладкие функции.

Определение 7.2 означает, что у формы ω есть интегрирующий множитель, т.е. ω пропорциональна дифференциалу от некоторой функции $\Pi(x)$.

Утверждение 7.1. Следующие условия эквивалентны:

- 1) у формы ω есть интегрирующий множитель;
- 2) распределение, порождаемое формой ω , интегрируемо;
- 3) $\omega \wedge d\omega = 0$.

Доказательство. 1) \implies 2), так как соответствующее слоение определяется уравнением

$$\Pi(x) = \text{const}.$$

2) \implies 1). Если слоение задается локально уравнением $\Pi(x) = \text{const}$, то форма ω обращается в нуль на векторах, касательных к слоям $\Pi(x) = \text{const}$. Следовательно, достаточно рассмотреть ω на нормалях $n(x) = \nabla \Pi(x)$ к слоям. Эти значения и дают функцию $P(x)$: $P(x) = \omega(n(x))$.

2) \Leftrightarrow 3) по теореме Фробениуса. □

Лемма 7.2. Пусть все грани конуса K инволютивны, 1-форма ω вполне интегрируема и $\omega(\varphi_i) > 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда, если $d\omega(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ и $d\omega(\varphi_j, \varphi_k) = 0$, то $d\omega(\varphi_i, \varphi_k) = 0$.

Доказательство. По свойству инволютивности имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega \wedge d\omega)(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k) = \\ &= \omega(\varphi_i) \wedge d\omega(\varphi_j, \varphi_k) + \omega(\varphi_j) \wedge d\omega(\varphi_k, \varphi_i) + \omega(\varphi_k) \wedge d\omega(\varphi_i, \varphi_j) = \\ &= \omega(\varphi_j) \wedge d\omega(\varphi_k, \varphi_i) \implies d\omega(\varphi_k, \varphi_i) = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

7.2. Теорема о запрете переключений. Рассмотрим грани L_I и L_J , где L_I имеет образующими векторные поля $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, а L_J имеет образующими поля $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_m$, $I = \{1, \dots, k\}$, $J = \{k+1, \dots, m\}$. Тогда грани L_I и L_J пересекаются только в начале координат. Пусть грани конуса K инволютивны.

Определение 7.3. Грань L_I мажорирует грань L_J в некоторой точке x , если $d\omega(\varphi_i, \varphi_j) < 0$, где $i \in I, j \in J$.

Определение 7.4. Будем говорить, что траектория $x(t)$ соответствует режиму L_i , если $\dot{x}(t) \in L_i$.

Теорема 7.1 (о запрете переключений). Пусть в некоторой точке t траектория $x(t)$ переключается с режима L_I на режим L_J , и в этой точке грань L_I мажорирует грань L_J . Тогда траектория $x(t)$ неоптимальна.

Доказательство. Будем считать, что точке переключения соответствует значение $t = 0$. Пусть при $t < 0$ фазовая скорость траектории принадлежит грани I , т.е. $\dot{x} = \sum_{i \in I} u_i \varphi_i$, $u_i \geq 0$; а при $t > 0$ имеем $\dot{x} = \sum_{j \in J} u_j \varphi_j$, $u_j \geq 0$. Для продолжения доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7.3. Предположим, что распределения L_I инволютивны для любых наборов индексов I . Тогда можно ввести новые координаты, в которых конус K перейдет в \mathbb{R}_+^n .

Доказательство леммы 7.3. Пусть конус K образован векторными полями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Обозначим через I_i множество индексов $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ (т.е. индекс i отсутствует). По условию, распределение L_{I_i} интегрируемо (как и распределение любых граней конуса K), следовательно, для любого $i = 1, \dots, n$ имеем $(n-1)$ -мерное слоение, слои которого порождены образующими $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n$. Пусть соответствующий слой задается уравнением $\Phi_i(x) = c$, причем $\text{grad } \Phi_i(x) \neq 0$. Введем новые координаты y , положив $y_i = \Phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Проверим, что отображение $x \mapsto y$ является диффеоморфизмом, т.е. $J = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} \right) \neq 0$. Имеем:

$\left\langle \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \varphi_s \right\rangle = 0$ при $s \neq i$, $\left\langle \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \varphi_i \right\rangle \neq 0$, иначе значение $\text{grad } \Phi_i(x)$ было бы равно нулю на всех базисных векторах. Пусть, для определенности, $Q_i(x) \triangleq \left\langle \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \varphi_i \right\rangle > 0$. Тогда

$$\left(\frac{1}{Q_1(x)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \dots, \frac{1}{Q_n(x)} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right)$$

— базис, двойственный к базису $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, и, следовательно, матрица $\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} \right)$ невырождена, так как она составлена из базисных векторов.

В новом базисе (y_1, \dots, y_n) форма ω перейдет в некоторую форму $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(y)$. Во что перейдет конус K ? Имеем

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \varphi_\alpha^j(x) = \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} \varphi_\alpha^j(x) = u_i Q_i;$$

значит, новые образующие конуса пропорциональны координатным ортам $f_i = (0, \dots, Q_i, \dots, 0)^T$ и $\dot{y}_i = u_i Q_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, где вместо x подставляем функцию $x(y)$, полученную как решение системы $y_i = \Phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. \square

Вернемся к доказательству теоремы 7.1. Будем вести доказательство в координатах (y_1, \dots, y_n) . Построим вариацию $\tilde{y}(t)$ функции $y(t)$ ($y(t)$ — это прежняя траектория $x(t)$ в координатах y):

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t \notin (-\delta, \delta), \\ y(t + \delta) + y(-\delta) - y(0), & t \in (-\delta, 0), \\ y(t - \delta) + y(\delta) - y(0), & t \in (0, \delta). \end{cases}$$

Тогда по теореме Стокса

$$\int_{\tilde{y}(\cdot)} \omega - \int_{y(\cdot)} \omega = \oint_{\tilde{y}-y} \omega = \iint d\omega.$$

Поскольку интеграл от дифференциальной формы не зависит от параметризации,

$$\iint d\omega = \delta^2 d\omega \left(\sum_{i \in I} u_i \varphi_i, \sum_{j \in J} u_j \varphi_j \right) + o(\delta^2) = \delta^2 \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} u_i u_j d\omega(\varphi_i, \varphi_j) + o(\delta^2) < 0,$$

т.е. траектория $x(\cdot)$ неоптимальна. \square

8. ТЕОРЕМА ОБ АТТРАКТОРЕ

8.1. Достаточное условие оптимальности особой экстремали. Докажем следующее простое достаточное условие оптимальности особой экстремали в задаче минимизации интеграла на дифференциальном включении. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ является K -особой экстремалью задачи

$$\int_{x(\cdot)} \omega \rightarrow \min, \quad \dot{x} \in K(x), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \quad (8.1)$$

Здесь $K(x)$ — конечномерный выпуклый конус с образующими $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, распределение всех граней которого инволютивно. В силу теоремы 4.1, имеет место соотношение

$$d\omega \Big|_{\hat{x}(\cdot)} = 0. \quad (8.2)$$

Рассмотрим сначала случай, когда форма ω вполне интегрируема, $\omega = P(x)d\Pi(x)$. Предположим, что $\nabla P(x) \Big|_{\hat{x}(\cdot)} \neq 0$, $\nabla \Pi(x) \Big|_{\hat{x}(\cdot)} \neq 0$. Но тогда условие (8.2) означает, что $dP \wedge d\Pi = 0$, т.е. градиенты функций $P(x)$ и $Q(x)$ в точках особой экстремали пропорциональны. В силу принципа Лагранжа, это является необходимым условием экстремума в следующей конечномерной задаче:

$$P(x) \rightarrow \min, \quad \Pi(x) = \text{const}.$$

Оказывается, что естественное усиление этого требования уже является достаточным условием локальной оптимальности экстремали $\hat{x}(\cdot)$.

Определение 8.1. Скажем, что ограничение функции $P(x)$ на поверхность уровня $\Pi(x) = \text{const}$ достигает минимума в точках $\hat{x}(t)$ равномерно по t , если существует $\delta > 0$ такое, что при всех x , для которых $\Pi(x) = \Pi(\hat{x}(t))$ и $|x - \hat{x}(t)| < \delta$, имеем $P(x) \geq P(\hat{x}(t))$.

Пример 8.1. Чтобы проиллюстрировать определение 8.1, приведем пример, когда функция $P(x)$ имеет неравномерный минимум в точках некоторой траектории. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $\Pi^*(x_1, x_2) = x_2$, $\hat{x}(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$. Рассмотрим функцию

$$P^*(x_1, x_2) = 4x_2^4 x_1^2 - 5x_2^2 x_1^4 + x_1^6.$$

Положим $x_2 = t \geq 0$ и решим уравнение $4t^4 - 5t^2 x_1^2 + x_1^4 = 0$ относительно x_1 . Корни уравнения $x_1 = \pm 2t$, $x_1 = \pm t$. Следовательно, функция $F(x_1) = P^*(x_1, t)$ положительна при $|x_1| < t$, $|x_1| > 2t$ и отрицательна при $t < |x_1| < 2t$. Таким образом, при каждом фиксированном t функция $F(x_1)$

имеет локальный минимум в точке $x_1 = 0$, однако интервал, на котором этот минимум имеет место, стремится к нулю при $t \rightarrow +0$ (в самой же точке $t = 0$ минимум имеет место для всех x_1).

Покажем, что функция $\hat{x}(\cdot)$ не доставляет локального минимума в задаче

$$\int P^*(x_1, x_2) d\Pi^*(x_1, x_2) \rightarrow \min, \quad \dot{x}_2 \geq 0.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть вариацию траектории $\hat{x}(\cdot)$ вида

$$\tilde{x}_2(t) = t, \quad \tilde{x}_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{2\tau}(t - \varepsilon) & \text{при } \varepsilon \leq t \leq \varepsilon + \tau, \\ 0 & \text{при } t \geq \varepsilon + \tau. \end{cases}$$

В силу ограниченности подинтегральной функции, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\tau > 0$ так, чтобы

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\tau} |P^*(\tilde{x}_1, t)| dt < -\frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} P^*(\tilde{x}_1, t) dt.$$

Но тогда

$$\int_0^{\varepsilon+\tau} P^*(\tilde{x}_1, t) dt < 0,$$

и сильного локального минимума функционала $\int P^*(x_1, x_2) d\Pi^*(x_1, x_2)$ на траектории $\hat{x}(\cdot)$ нет.

Теорема 8.1. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ является особой экстремалью задачи (8.1). Пусть форма $\omega = P(x)d\Pi(x)$ вполне интегрируема, причем $\omega(\varphi_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что ограничение функции $P(x)$ на поверхности вида $\Pi(x) = \text{const}$ достигает минимума в точках экстремали $\hat{x}(\cdot)$ равномерно по t . Тогда существует открытая окрестность \mathcal{O} кривой $\hat{x}(\cdot)$ в пространстве \mathbb{R}^n такая, что для любой допустимой траектории $x(\cdot) \subset \mathcal{O}$ с начальной точкой на поверхности $\Pi(x) = \Pi(\hat{x}(0))$ и конечной точкой на поверхности $\Pi(x) = \Pi(\hat{x}(T))$ выполнено неравенство

$$\int_{\hat{x}(\cdot)} \omega \leq \int_{x(\cdot)} \omega,$$

т.е. $\hat{x}(\cdot)$ является локально оптимальной в задаче (8.1).

Доказательство. В условиях теоремы допустимые траектории пересекают поверхности $\Pi = \text{const}$ трансверсально, поэтому

$$\frac{d}{dt} \Pi(x(t)) \neq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Следовательно, значение $q = \Pi(x(t))$ можно выбрать в качестве параметра на $x(t)$ вместо t . В этих координатах

$$\int_{x(\cdot)} \omega = \int_{q_0}^{q_1} P(x(q)) dq.$$

В силу того, что минимум P достигается равномерно по t , существует такая окрестность кривой $\hat{x}(q)$, где $P(x) \geq P(\hat{x}(q))$. Следовательно,

$$\int_{q_0}^{q_1} P(\hat{x}(q)) dq \leq \int_{q_0}^{q_1} P(x(q)) dq.$$

□

Следствие 8.1. Пусть в задаче (8.1) конус $K(x)$ остается прежним, а форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^k P_i(x) d\Pi_i(x).$$

Пусть $P_i(x)d\Pi_i(x)(\varphi_j) > 0$ для любых $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$. Предположим, что для любого $i = 1, \dots, k$ ограничение $P_i(x)$ на поверхности $\Pi_i(x) = \text{const}$ достигает минимума в точке особой экстремали $\hat{x}(\cdot)$ равномерно по t . Тогда $\hat{x}(\cdot)$ доставляет локальный минимум в задаче (8.1).

Доказательство. Интеграл $\int \omega$ представляется в этом случае в виде суммы функционалов, каждый из которых достигает минимума на одной и той же кривой. \square

8.2. Оптимальный синтез в окрестности особой экстремали. Введем еще одно понятие теории оптимального синтеза — *универсальное многообразие*, или *аттрактор*. В задаче (8.1) для простоты зафиксируем конечную точку x_1 и предположим, что в некоторой открытой области \mathcal{O} начальных значений x_0 существует оптимальный синтез $u = \hat{u}(x)$. Многообразие M , $x_1 \in M$, назовем аттрактором для оптимальных траекторий, определяемых $\hat{u}(x)$, если для любого $x_0 \in \mathcal{O}$ оптимальная траектория с начальным условием x_0 выходит на M в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$, причем

$$\lim_{x_0 \rightarrow M} T(x_0) = 0.$$

Покажем, что при некотором усилении условий теоремы 8.1 особая траектория является универсальным притягивающим многообразием задачи (8.1). В задаче (8.1) зафиксируем конечную точку $x_1 \in \hat{x}(\cdot)$.

Теорема 8.2 (об аттракторе). Пусть выполнены условия теоремы 8.1, при этом минимум ограничения функции $P(x)$ на поверхность $\Pi(x) = c$ для любого c является невырожденным, т.е. в точке минимума гессиан ограничения $P(x)|_{\Pi(x)=c}$ строго положительно определен:

$$\langle D^2P(\hat{x})v, v \rangle > 0 \quad \forall v \perp \nabla \Pi(\hat{x}), \quad v \neq 0, \quad \hat{x} = \hat{x}(\cdot) \cap \{\Pi = c\}.$$

Предположим, что для любой точки особой экстремали $\hat{x}(\cdot)$ ее вектор фазовой скорости принадлежит внутренности конуса $K(x)$. Тогда, если в некоторой открытой окрестности экстремали $\hat{x}(\cdot)$ существует оптимальный синтез задачи (8.1), то экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ является аттрактором оптимальных траекторий.

Доказательство. Сейчас нам удобно вернуться к прежним, координатным, обозначениям. Таким образом,

$$\oint_{x(\cdot)} \omega = \int_0^T P(x(t)) d(\Pi(x(t))) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} \in Q(x), \quad Q(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \in K(x), \|y\| \leq 1\}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

По предположению, форма $P d\Pi > 0$ на любом допустимом векторе фазовой скорости. Следовательно, любая допустимая траектория пересекает поверхности уровня функции Π трансверсально, и значение $\Pi = \Pi(x(t))$ можно выбрать в качестве параметра на $x(t)$ вместо t . Теперь уравнение экстремали можно записать в виде $x_i = a_i(\Pi)$, $i = 1, \dots, n$. Без потери общности можно считать, что $\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} > 0$. Введем новые координаты

$$q = -\Pi(x), \quad \xi_i = x_{i+1} - a_{i+1}(\Pi), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Матрица Якоби замены $x \rightarrow (q, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} & -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial a_2}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} & 1 - \frac{\partial a_2}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial a_2}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial a_n}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} & \frac{\partial a_n}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} & \dots & 1 - \frac{\partial a_n}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Вычитая из i -й строки первую строку матрицы R , умноженную на $\frac{\partial a_i}{\partial \Pi}$, $i = 2, \dots, n$, можно убедиться, что $\det R(x) \neq 0$ и замена не вырождена.

Пусть $\mathcal{N}_{q,\xi}$ — образ множества $K(x)$ при линейном представлении с матрицей $R(x)$. Условие $\omega|_K > 0$ перейдет в условие $dq|_{\mathcal{N}} > 0$, и мы можем считать q независимой переменной на любой допустимой траектории. Экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ в новых координатах задается уравнением $\xi = 0$, а функционал принимает вид

$$\int_{q_0}^{q_1} P(q, \xi(q)) dq.$$

Задача (8.1) становится эквивалентной задаче

$$\int_{q_0}^{q_1} P(q, x(q)) dq \rightarrow \min, \quad (8.3)$$

$$\frac{d\xi}{dq} \in \mathcal{N}_{q,\xi} \cap \left\{ \left\| \frac{d\xi}{dq} \right\| \leq 1 \right\}, \quad \xi(q_0) = \xi(q_1) = 0. \quad (8.4)$$

По условию, существует окрестность V экстремали $\hat{\xi}$, где $P \geq 0$. Уменьшая, если нужно, V , в силу невырожденности гессиана функции $P(q, \xi)$ на плоскостях $q = \text{const}$, при $(q, \xi) \in V$ получаем оценку

$$A_1 \|\xi\|^2 \leq P(q, \xi) \leq A_2 \|\xi\|^2, \quad (8.5)$$

где $A_1 > 0$, $A_2 > 0$.

Шаг 1. Оценка функционала сверху. Поскольку экстремаль $\hat{\xi} \equiv 0$ особая, ее вектор скорости $\dot{\xi} = 0$ принадлежит внутренности симплекса $\mathcal{N}_{q,0}$, т.е. существует $(n-1)$ -мерный шар $B_\sigma(0)$ с центром в точке $\xi = 0$ и радиусом σ такой, что $B_\sigma(0) \subset \mathcal{N}_{q,0}$ для любого $q \in [q_0, q_1]$. В силу непрерывной зависимости симплекса $\mathcal{N}_{0,q}$ от переменных (q, ξ) , найдется такая окрестность V точки $(q, 0)$, что

$$B_\sigma(\xi) \subset \mathcal{N}_{q,\xi} \quad (8.6)$$

при любых $(q, \xi) \in V$ (здесь $B_\sigma(\xi)$ — шар радиуса σ с центром в точке ξ).

Рассмотрим начальное значение $(q^1, \xi^1) \in V$. В силу (8.6), для каждой точки $(q, \xi) \in V$ существует допустимая скорость $\phi(\xi) = \frac{d\xi}{dq}$, направленная в начало координат и равная σ по модулю. Траектория системы $\dot{\xi} = \phi(\xi)$ допустима и приходит в начало координат (т.е. на траекторию $\hat{\xi}(\cdot)$) за время $\sigma|\xi^1|$. В силу (8.5), на всем протяжении этой траектории имеет место оценка $P(q, \xi) \leq A_2|\xi^1|^2$. Следовательно, оптимальное значение функционала \hat{J} в точке (q^1, ξ^1) не превосходит

$$\hat{J} \leq \int_{q^1}^{q^1 + \sigma|\xi^1|} P(q, \xi) dq \leq A_2 \sigma |\xi^1|^3. \quad (8.7)$$

Шаг 2. Оценка функционала снизу. Предположим, что траектория, начинающаяся в точке (q^1, ξ^1) , остается вне шара радиуса $\frac{1}{2}|\xi^1|$ с центром в нуле в течение некоторого времени τ :

$$|\xi(q)| \geq \frac{1}{2}|\xi^1| \quad \text{при} \quad q^1 \leq q \leq q^1 + \tau.$$

Тогда, в силу (8.6):

$$\int_{q^1}^{q^1+\tau} P(q, \xi(q)) dq \geq \frac{1}{4}\tau A_1 |\xi^1|^2. \quad (8.8)$$

Шаг 3. Завершение доказательства теоремы. Объединяя оценки (8.7) и (8.8), получаем оценку для τ :

$$\frac{1}{4}\tau A_1 |\xi^1|^2 \leq A_2 \sigma |\xi^1|^3,$$

т.е.

$$\tau \leq C|\xi^1|.$$

Итак, за время $\tau \leq C|\xi^1|$ величина $|\xi(q)|$ на оптимальной траектории уменьшится в 2 раза, затем за время $\leq \frac{1}{2}C|\xi^1|$ она уменьшится еще в 2 раза, и так далее. Следовательно, за время

$$T \leq C|\xi^1| + \frac{1}{2}C|\xi^1| + \frac{1}{4}C|\xi^1| + \dots = 2C|\xi^1|$$

оптимальная траектория попадет в начало координат. \square

Отметим, что предположение $x_1 \in \hat{x}(\cdot)$ в условиях теоремы 8.2 не существенно. Точно также можно было бы показать, что если начальная точка x_0 допустимых траекторий в задаче (8.3)–(8.4) принадлежит экстремали $\hat{x}(\cdot)$, точка x_0 лежит в некоторой открытой окрестности точки $\hat{x}(q_0)$, а значение $q_1 - q_0$ достаточно велико, то соответствующая оптимальная траектория большую часть времени движется вдоль экстремали $\hat{x}(\cdot)$ и сходит с нее в некоторой малой окрестности точки x_1 . Комбинируя это рассуждение с теоремой 8.2, можно утверждать, что если значение $q_1 - q_0$ достаточно велико, то для любых краевых точек x_0, x_1 в окрестности кривой $\hat{x}(\cdot)$ оптимальная траектория обязана выйти на особую экстремаль, двигаться вдоль нее в течение некоторого времени, а затем сойти с особой экстремали и попасть в целевую точку.

Замечание 8.1. Мы видим, что при естественных предположениях особая экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ действительно является наиболее выгодной с точки зрения рассматриваемого функционала. Именно поэтому оптимальное поведение в соседних точках состоит в том, чтобы выйти на $\hat{x}(\cdot)$ и двигаться по ней, по крайней мере до тех пор, пока мы не подойдем достаточно близко к многообразию цели. Таким образом эта траектория играет роль магистрали в задаче с непрерывным временем.

9. ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С n ФАКТОРАМИ

9.1. Оптимальный синтез для задачи с тремя производственными факторами. В качестве иллюстрации использования теорем 7.1–8.2 рассмотрим следующую трехмерную задачу управления — модель экономического роста с тремя производственными факторами:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= u_1 x_1 x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = u_2 x_1 x_2 x_3, \quad \dot{x}_3 = u_3 x_1 x_2 x_3, \\ \sum_{i=1}^3 u_i &= 1, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0, \\ x(0) &= x^0 \in \mathbb{R}_+^3, \quad x(T) \in B \subset \mathbb{R}_+^3. \end{aligned} \quad (9.1)$$

В качестве B можно, например, взять поверхность уровня функции $x_1 x_2 x_3$:

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid x_1 x_2 x_3 = \text{const}\}.$$

Перейдем к задаче минимизации дифференциальной формы на включении. Имеем

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i x_1 x_2 x_3, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$dx_i = u_i x_1 x_2 x_3 dt \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 dx_i = x_1 x_2 x_3 dt \Leftrightarrow dt = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \sum_{i=1}^3 dx_i.$$

Тогда задача (9.1) будет иметь вид:

$$\int_{x(\cdot)} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} \rightarrow \min, \quad \dot{x}(\cdot) \in K = \mathbb{R}_+^3. \quad (9.2)$$

Найдем сначала K -особую экстремаль задачи (9.1). Обозначим

$$\omega = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} (dx_1 + dx_2 + dx_3).$$

Найдем дифференциал формы ω :

$$d\omega = \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 x_2^2 x_3} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{x_2 - x_3}{x_1 x_2^2 x_3^2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{x_1 - x_3}{x_1^2 x_2 x_3^2} dx_1 \wedge dx_3.$$

Таким образом, K -особая экстремаль определяется уравнениями

$$x_1 = x_2 = x_3. \quad (9.3)$$

Ограничим функцию $\frac{1}{x_1 x_2 x_3}$ на поверхность $x_1 + x_2 + x_3 = \text{const}$ и найдем ее минимум. Решим вспомогательную задачу

$$x_1 x_2 x_3 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 + x_3 = C, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0.$$

В силу принципа Лагранжа, получаем

$$\nabla(x_1 x_2 x_3) = \lambda(1, 1, 1),$$

откуда следует, что $x_2 x_3 = x_1 x_3 = x_1 x_2$, и единственной точкой экстремума функции $x_1 x_2 x_3$ на симплексе $x_1 + x_2 + x_3 = C$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, может быть точка пересечения экстремали (9.3) и плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = C$.

Найдем теперь гессиан ограничения функции $Q = x_1 x_2 x_3$ на плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = C$ в точке экстремума. Выберем в касательной плоскости к поверхности $x_1 + x_2 + x_3 = C$ базис $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$. Тогда в этом базисе матрица квадратичной формы $\langle D^2 Q(t_1 e_1 + t_2 e_2), t_1 e_1 + t_2 e_2 \rangle$ имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} -2x_3 & -x_3 - x_2 + x_1 \\ -x_3 - x_2 + x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}.$$

По предположению, мы рассматриваем Ω в точке $x_1 = x_2 = x_3 = x$. Тогда $\Omega = \begin{pmatrix} -2x & -x \\ -x & -2x \end{pmatrix}$ и является строго отрицательно определенной матрицей. В силу теоремы 8.1, K -особая экстремаль локально оптимальна, а в силу теоремы 8.2, она является аттрактором оптимальных траекторий задачи (9.1).

Посмотрим теперь, каким образом устроен оптимальный синтез в окрестности K -особой экстремали. Неособый режим в задаче (9.2) получается, если для одного из индексов $i = 1, 2, 3$ фазовая скорость \dot{x}_i не равна 0, а остальные компоненты скорости тождественно нулевые. Это соответствует движению траектории вдоль ортов. Легко понять, что с таким характером управления мы попадем на особую экстремаль (9.3) только из точек трех двумерных полуплоскостей: $x_1 \leq x_2 = x_3$, $x_2 \leq x_3 = x_1$, $x_3 \leq x_1 = x_2$.

Для всех остальных начальных условий мы можем попасть в точки (9.3), только используя особый режим. Рассмотрим режим, особый по двум компонентам из трех, например, для $I = \{1, 2\}$:

$$d\omega \Big|_{L_{12}} = \frac{x_1 x_3 - x_2 x_3}{x_1^2 x_2^2 x_3} dx_1 \wedge dx_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Таким образом, все L_I -особые режимы при $I = \{1, 2\}$ лежат на поверхности $\Sigma_{12} = \{x \mid x_1 = x_2\}$. Обозначим кривую, определяемую уравнениями (9.3), через Σ_{123} . Тогда кривая Σ_{123} разделяет Σ_{12} на две двумерные поверхности с общей границей: Σ_{12}^+ , где $x_1 = x_2 \leq x_3$, и Σ_{12}^- , где $x_1 = x_2 \geq x_3$.

Найдем фазовую скорость $\{12\}$ -особых траекторий. Дифференцируя уравнение $x_1 - x_2 = 0$, получаем

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2, \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Определим характер пересечения $\{12\}$ -особых траекторий с кривой Σ_{123} на Σ_{12} . Для этого применим теорему 7.1 о запрете переключений. Рассмотрим грани L_{12} и L_3 и найдем мажорирующую грань. Имеем

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \frac{x_1 x_2 - x_2 x_3}{x_1^2 x_2^2 x_3^2}, \quad d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \frac{x_1 x_2 - x_1 x_3}{x_1^2 x_2^2 x_3^2}.$$

Следовательно,

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) < 0 \quad \text{при} \quad x_1 < x_3, \quad d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) < 0 \quad \text{при} \quad x_2 < x_3.$$

Таким образом, грань L_{12} мажорирует грань L_3 в области

$$x_1 < x_3, \quad x_2 < x_3.$$

По теореме 7.1 о запрете переключений переключение с любого режима, принадлежащего грани L_{12} , на L_3 -режим не оптимально. В частности, если мы используем в области $x_1 < x_3$, $x_2 < x_3$ управление, принадлежащее грани L_{12} , то мы не сможем переключиться с него до тех пор, пока не выйдем на границу области. С другой стороны, если в какой-то точке области на оптимальной траектории мы использовали L_3 -режим (т.е. $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_3 > 0$), то, двигаясь в попятном времени, мы обязаны либо все время использовать этот режим, либо попасть на границу области $x_1 = x_3$ или $x_2 = x_3$. Отметим, что если мы используем L_3 -режим в области $x_1 < x_3$, $x_2 < x_3$, то соответствующая траектория не может выйти в прямом времени за пределы области с таким управлением. Отсюда следует, что для попадания на границу области мы обязаны использовать L_{12} -режим.

Наоборот, если

$$x_1 > x_3, \quad x_2 > x_3,$$

то грань L_3 мажорирует грань L_{12} . В частности, мы можем переключиться с L_3 на особый $\{12\}$ -режим только в точках многообразия Σ_{12}^+ . Если мы используем особый $\{12\}$ -режим в точках Σ_{12}^- , то, двигаясь в обратном времени, мы уже никогда не можем сменить особый режим на L_3 (т.е. соответствующая L_{12} -особая траектория сходит с многообразия Σ_{123}).

Сказанное выше относится и к другим индексам. В частности, если в некоторой точке мы используем оптимальное управление, при котором растет меньшая из трех координат (а остальные две остаются неизменными), то это управление нельзя изменить (в прямом течение времени) до того момента, пока значение этой координаты не сравняется с одной из двух других. Если мы используем оптимальное управление, при котором растет бóльшая из трех координат, то это управление при попятном движении не меняется до тех пор, пока эта координата не станет равной одной из двух оставшихся.

Чтобы описать оптимальный синтез в задаче быстродействия с различными краевыми условиями, рассмотрим сначала вспомогательную задачу. Выберем в качестве многообразия цели луч $\Sigma_{123} = \{x_1 = x_2 = x_3\}$. Оптимальные траектории этой вспомогательной задачи обладают следующим свойством автомодельности. Пусть $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \hat{x}_3(t))$ — оптимальная траектория с начальными условиями (x_1^0, x_2^0, x_3^0) . Для произвольного $\lambda > 0$ рассмотрим траекторию $x_\lambda(t)$

$$x^\lambda(t) = (\lambda \hat{x}_1(\lambda^2 t), \lambda \hat{x}_2(\lambda^2 t), \lambda \hat{x}_3(\lambda^2 t))$$

с начальными условиями $(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0, \lambda x_3^0)$. Ясно, что траектория $x^\lambda(t)$ допустима. Если T — момент достижения цели траектории $\hat{x}(t)$, то T/λ^2 — момент попадания на L_{123} траектории $x^\lambda(t)$.

Отображение $x(\cdot) \mapsto x^\lambda(\cdot)$ обратимо:

$$\hat{x}_i(t) = \frac{1}{\lambda} x_i^\lambda(t/\lambda^2).$$

Отсюда следует, что если $\hat{x}(\cdot)$ оптимальна для начальных условий x^0 , то $x^\lambda(\cdot)$ также является оптимальной траекторией для начальных условий λx^0 . Таким образом, оптимальное управление как функция текущего состояния $u = u(x)$ сохраняет значения вдоль прямых $x_2 = ax_1$, $x_3 = bx_1$.

Рассмотрим факторпространство первого координатного ортанта $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i > 0, i = 1, \dots, 3\}$ относительно действия группы

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Можно считать, что это двумерный симплекс

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

Таким образом, мы можем изображать оптимальный синтез в трехмерной задаче как некоторую динамическую систему на S . Опишем образы траекторий исходной системы с неособым управлением при отображении $q: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow S$. Это отображение задается соотношениями

$$q: (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{\lambda}(x_1, x_2, x_3), \quad \lambda = x_1 + x_2 + x_3.$$

Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$. При таком выборе управления на соответствующей траектории растет только координата x_1 , поэтому, изменив параметризацию, траекторию можно записать в виде $x_1(\sigma) = x_1^0 + \sigma$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$. Образ траектории $x(\sigma)$ при отображении q задается в параметрическом виде как

$$x_1 = \frac{x_1^0 + \sigma}{x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \sigma}, \quad x_2 = \frac{x_2^0}{x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \sigma}, \quad x_3 = \frac{x_3^0}{x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \sigma}$$

и совпадает с отрезком прямой $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2^0}{x_3^0}$ (для управлений $u_2 = 1$, $u_1 = u_3 = 0$ и $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$ все аналогично).

Особому многообразию Σ_{123} на S отвечает точка $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, а Σ_{12} -, Σ_{23} - и Σ_{31} -особым многообразиям — отрезки $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_1$ соответственно. Прямые Σ_{12}^+ , Σ_{23}^+ , Σ_{31}^+ разбивают S на три одинаковых четырехугольника $S_1 = \{x_1 \geq \max(x_2, x_3)\}$, $S_2 = \{x_2 \geq \max(x_1, x_3)\}$, $S_3 = \{x_3 \geq \max(x_1, x_2)\}$. Рассмотрим, например, четырехугольник S_3 . Из сказанного выше следует, что при оптимальном движении в S_3 следует использовать управление $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$ в той части S_3 , где $x_1 \leq x_2$, управление $u_2 = 1$, $u_1 = u_3 = 0$ в $x_2 \leq x_3$ и управление $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 0$ на отрезке $x_1 = x_2$. Для двух других четырехугольников оптимальное управление получается циклическими заменами координат управления в S_3 .

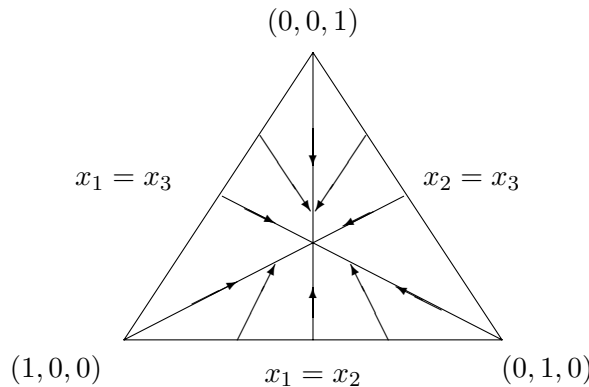


Рис. 12

Таким образом, отрезок $x_1 = x_2$ на S разбивается точкой $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ на два сегмента: на том из них, который выходит из вершины $(0, 0, 1)$ симплекса S , мы используем особое управление $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 0$, а на его продолжении за точку $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ мы движемся с неособым управлением $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$. Вообще, для тех начальных условий, для которых одна из координат строго меньше двух других, мы используем неособое управление, которое увеличивает именно эту координату, а две других оставляет неизменными.

Покажем, что функция Беллмана для краевой задачи с $B = \Sigma_{123}$ является функцией класса C^1 , и соответствующий оптимальный синтез является оптимальным.

Построенный синтез удовлетворяет условиям принципа максимума Понтрягина (т.е. каждая траектория синтеза является экстремалью), поэтому, если время $T(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ попадания траектории синтеза с начальными условиями (x_1^0, x_2^0, x_3^0) на многообразие цели является функцией класса C^1 , то функция $\omega = -T(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ автоматически будет решением уравнением Беллмана и, следовательно, функцией Беллмана задачи.

Рассмотрим область

$$x_3 \leq x_1, \quad x_3 \leq x_2$$

и найдем явные формулы для времени $T(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ попадания траектории построенного синтеза из начальной точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0) на луч $x_1 = x_2 = x_3$. Тогда для начальных условий из областей $x_1 \leq x_2$, $x_1 \leq x_3$ и $x_2 \leq x_1$, $x_2 \leq x_3$ выражение функции $T(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ получится из этих формул циклическими перестановками

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1), \quad (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2).$$

Пусть сначала $x_1^0 < x_2^0$. Тогда траектория синтеза сначала с управлением $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$ приходит на луч $x_3 = x_1$ и затем движется по нему с управлением $u_3 = u_1 = \frac{1}{2}$ до момента попадания на луч $x_1 = x_2 = x_3$. Время t_1 движения на первом участке определяется из уравнения

$$x_1^0 = x_3^0 e^{t_1 x_1^0 x_2^0} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{x_1^0 x_2^0} (\ln x_1^0 - \ln x_3^0).$$

Время t_2 движения на втором участке определяется из уравнения

$$-\frac{1}{x_2^0} + \frac{1}{x_1^0} = \frac{1}{2} x_2^0 t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{2(x_2^0 - x_1^0)}{x_1^0 (x_2^0)^2}.$$

Окончательно,

$$T(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{1}{x_1^0 x_2^0} (\ln x_1^0 - \ln x_3^0) + \frac{2(x_2^0 - x_1^0)}{x_1^0 (x_2^0)^2}.$$

Если $x_1^0 = x_2^0$, то траектория с постоянным управлением $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$ без переключений сразу попадает на луч $x_1 = x_2 = x_3$. В этом случае имеем

$$T(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{1}{(x_1^0)^2} (\ln x_1^0 - \ln x_3^0).$$

Наконец, если $x_1^0 > x_2^0$, то траектория сначала с управлением $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$ приходит на луч $x_3 = x_2$ и затем движется по нему с управлением $u_3 = u_2 = \frac{1}{2}$ до момента попадания на луч $x_1 = x_2 = x_3$. Получаем

$$T(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{1}{x_1^0 x_2^0} (\ln x_2^0 - \ln x_3^0) + \frac{2(x_1^0 - x_2^0)}{(x_1^0)^2 x_2^0}.$$

В каждом из трех случаев остается найти три частных производные функции и их пределы в точках границы $x_3 = x_1$, $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_2$ соответственно, а также в точках центрального луча $x_1 = x_2 = x_3$.

Ввиду циклической симметрии, достаточно проверку провести для плоскости $x_3^0 = x_1^0 < x_2^0$. Вычислим производную $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ сначала в области $x_3^0 \leq x_1^0 < x_2^0$:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{1}{(x_1^0)^2 x_2^0} - \frac{1}{(x_1^0)^2 x_2^0} (\ln x_1^0 - \ln x_3^0) - \frac{2}{(x_1^0)^2 x_2^0}.$$

Предел $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ при $x_3^0 \rightarrow x_1^0$ равен

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{1}{(x_1^0)^2 x_2^0}.$$

В области $x_1^0 \leq x_3^0 < x_2^0$ функция $T(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ имеет вид:

$$T(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{1}{x_2^0 x_3^0} (\ln x_3^0 - \ln x_1^0) + \frac{2(x_2^0 - x_3^0)}{(x_2^0)^2 x_3^0}.$$

Производная $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ равна:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1^0 x_3^0 (x_2^0)^2},$$

и при $x_3^0 \rightarrow x_1^0$ получаем непрерывную склейку производной $\frac{\partial T}{\partial x_1}$.

Аналогично, для $\frac{\partial T}{\partial x_2}$ в области $x_3^0 \leq x_1^0 < x_2^0$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{1}{x_1^0 (x_2^0)^2} (\ln x_1^0 - \ln x_3^0) - \frac{2}{x_1^0 (x_2^0)^2} + \frac{4}{(x_2^0)^3},$$

откуда при $x_3^0 \rightarrow x_1^0$ получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_1^0 (x_2^0)^2} + \frac{4}{(x_2^0)^3}.$$

В области $x_1^0 \leq x_3^0 < x_2^0$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{1}{(x_2^0)^2 x_3^0} (\ln x_3^0 - \ln x_1^0) - \frac{2}{x_3^0 (x_2^0)^2} + \frac{4}{(x_2^0)^3},$$

и при $x_3^0 \rightarrow x_1^0$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} \rightarrow -\frac{2}{x_1^0 (x_2^0)^2} + \frac{4}{(x_2^0)^3}.$$

Таким образом, производная $\frac{\partial T}{\partial x_2}$ также непрерывно склеивается в точках поверхности $x_3^0 = x_1^0 < x_2^0$. Остается проверить непрерывность производной $\frac{\partial T}{\partial x_3}$.

В области $x_3^0 \leq x_1^0 < x_2^0$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = -\frac{1}{x_1^0 x_2^0 x_3^0},$$

и при $x_3^0 \rightarrow x_1^0$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} \rightarrow -\frac{1}{(x_1^0)^2 x_2^0}.$$

В области $x_1^0 \leq x_3^0 < x_2^0$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = -\frac{1}{x_2^0 (x_3^0)^2} (\ln x_3^0 - \ln x_1^0) - \frac{1}{x_2^0 (x_3^0)^2},$$

и при $x_3^0 \rightarrow x_1^0$ получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} \rightarrow -\frac{1}{x_2^0 (x_1^0)^2}.$$

Пределы всех трех частных производных $\frac{\partial T}{\partial x_1}$, $\frac{\partial T}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial T}{\partial x_3}$ при $x_1^0 \rightarrow x_2^0$, $x_3^0 \rightarrow x_2^0$ из каждой из рассмотренных областей равны между собой и равны $-\frac{1}{(x_2^0)^3}$. Следовательно, функция $T(x)$ класса C^1 . \square

Для произвольного многообразия цели B , достаточно удаленного от начала координат, луч L_{123} является, в силу теоремы 8.1, аттрактором оптимальных траекторий. Отсюда следует, что для всех начальных условий, достаточно близких к началу координат, оптимальное движение будет иметь такой же вид, как и в рассмотренной только что вспомогательной задаче. В частности, все траектории выйдут на луч Σ_{123} , будут двигаться некоторое время вдоль этого луча с особым управлением $u_1 = u_2 = u_3$, а затем попадут на многообразие B в одной и той же точке. Время попадания на целевое многообразие будет отличаться от функции Беллмана вспомогательной задачи на величину, гладко зависящую от начальных условий. Поэтому соответствующая функция Беллмана будет гладкой, а траектории синтеза — оптимальны.

9.2. Задача с общей производственной функцией. Прежде чем рассмотреть обобщение задачи экономического роста с тремя факторами на случай n -факторной модели с произвольным значением n , посмотрим, какие трудности встречаются при анализе трехфакторной модели с произвольной производственной функцией $Q(x_1, x_2, x_3)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 Q(x), & \dot{x}_2 &= u_2 Q(x), & \dot{x}_3 &= u_3 Q(x), \\ \sum_{i=1}^3 u_i &= 1, & u_1 &\geq 0, & u_2 &\geq 0, & u_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу быстрогодействия

$$T \rightarrow \min.$$

Перейдем к задаче минимизации дифференциальной формы на включении. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= u_i Q(x), \quad i = 1, 2, 3; \\ dx_i &= u_i Q dt \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 dx_i = Q(x) dt \Leftrightarrow dt = \frac{1}{Q(x)} \sum_{i=1}^3 dx_i, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_{x(\cdot)} \frac{1}{Q(x)} \sum_{i=1}^3 dx_i \rightarrow \min, \quad \dot{x}(\cdot) \in K = \mathbb{R}_+^3. \quad (9.4)$$

K -особая экстремаль задачи (9.4) определяется уравнениями

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3}. \quad (9.5)$$

Ограничим функцию Q на поверхность $x_1 + x_2 + x_3 = \text{const}$ и найдем ее максимум. Ниже мы покажем, что при естественных ограничениях на функцию Q единственной точкой экстремума функции $Q(x)$ на симплексе $x_1 + x_2 + x_3 = C$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, является точка пересечения экстремали (9.5) и плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = C$. Будем рассматривать такие функции $Q(x)$, для которых уравнение (9.5) выделяет единственную кривую в пространстве \mathbb{R}^3 . В этом случае, в силу теоремы 8.1, K -особая экстремаль локально оптимальна.

Найдем гессиан ограничения функции Q на плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = C$ в точке экстремума. Выберем в касательной плоскости базис $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$. Тогда в этом базисе матрица квадратичной формы $\langle D^2 Q(t_1 e_1 + t_2 e_2), t_1 e_1 + t_2 e_2 \rangle$ имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} Q_{x_1 x_1} - 2Q_{x_1 x_2} + Q_{x_2 x_2} & Q_{x_1 x_1} - Q_{x_1 x_2} - Q_{x_1 x_3} + Q_{x_2 x_3} \\ Q_{x_1 x_1} - Q_{x_1 x_2} - Q_{x_1 x_3} + Q_{x_2 x_3} & Q_{x_1 x_1} - 2Q_{x_1 x_3} + Q_{x_3 x_3} \end{pmatrix}$$

(нижними индексами обозначены координаты, по которым ведется дифференцирование, $Q_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_i}$).

По предположению, мы рассматриваем Ω в точке условного максимума функции Q , поэтому матрица Ω неотрицательно определена. Если матрица Ω строго отрицательно определена в точке экстремума, то, в силу теоремы 8.2, K -особая экстремаль является аттрактором нашей задачи. Поэтому достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} Q_{x_1 x_1} - 2Q_{x_1 x_2} + Q_{x_2 x_2} &< 0, \\ (Q_{x_1 x_1} - 2Q_{x_1 x_2} + Q_{x_2 x_2})(Q_{x_1 x_1} - 2Q_{x_1 x_3} + Q_{x_3 x_3}) - (Q_{x_1 x_1} - Q_{x_1 x_2} - Q_{x_1 x_3} + Q_{x_2 x_3})^2 &> 0. \end{aligned}$$

Для оптимальности (i, j) -особых экстремалей, т.е. экстремалей, для которых $u_i \neq 0$, $u_j \neq 0$, $u_k = 0$ при $k \neq i, j$, необходимо дополнительно потребовать, чтобы

$$Q_{x_i x_i} < Q_{x_i x_j}, \quad Q_{x_j x_j} < Q_{x_i x_j}.$$

Неособый режим в задаче (9.4) получается, если для одного из индексов $i = 1, 2, 3$ фазовая скорость \dot{x}_i не равна 0, а остальные компоненты скорости тождественно нулевые. Это соответствует движению вдоль ортов. Легко понять, что с таким характером управления мы попадем на особую экстремаль (9.5) только из точек трех двумерных многообразий с краем.

Для всех остальных начальных условий мы можем попасть в точки (9.5), только используя особый режим. Опуская рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к построению оптимального синтеза в задаче с $Q = x_1 x_2 x_3$, приведем окончательный ответ. Для многообразий цели, достаточно удаленных от начала координат, в окрестности начала координат оптимальное движение устроено следующим образом. Имеется три двумерных многообразия Σ_{12} , Σ_{23} , Σ_{13} с общей границей Σ_{123} , задаваемых следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^3 \mid \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} \geq \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right\}, \\ \Sigma_{23} &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^3 \mid \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} \geq \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right\}, \\ \Sigma_{13} &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^3 \mid \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} \geq \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right\}, \\ \Sigma_{123} &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^3 \mid \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right\}. \end{aligned}$$

Они разбивают пространство \mathbb{R}_+^3 на три области, в каждой из которых одна из трех функций: $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_2}$ или $\frac{\partial Q}{\partial x_3}$, максимальна. Обозначим индекс, соответствующий этому максимуму, через i_0 . Тогда внутри такой области используется неособое управление с ненулевым значением u_{i_0} , в то время как остальные компоненты управления равны нулю. С таким управлением соответствующие траектории либо попадают на одно из трех особых многообразий Σ_{ij} и затем двигаются по нему с особым управлением $u_i = u_j = \frac{1}{2}$, пока не попадут на Σ_{123} , либо непосредственно выходят на Σ_{123} и также движутся по нему по направлению к цели.

9.3. Модель экономического роста с n производственными факторами. Рассмотрим управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = uQ(x), \tag{9.6}$$

где $x \in \mathbb{R}_+^n$, т.е. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i > 0$; $Q(x)$ — скалярная функция, $Q(x) > 0$, $Q(x) \in C^3(\mathbb{R}_+^n)$; $u = (u_1, \dots, u_n)$ — управление с областью значений

$$U = \left\{ u \mid u_i \geq 0, \sum_{i=1}^n u_i = 1 \right\}.$$

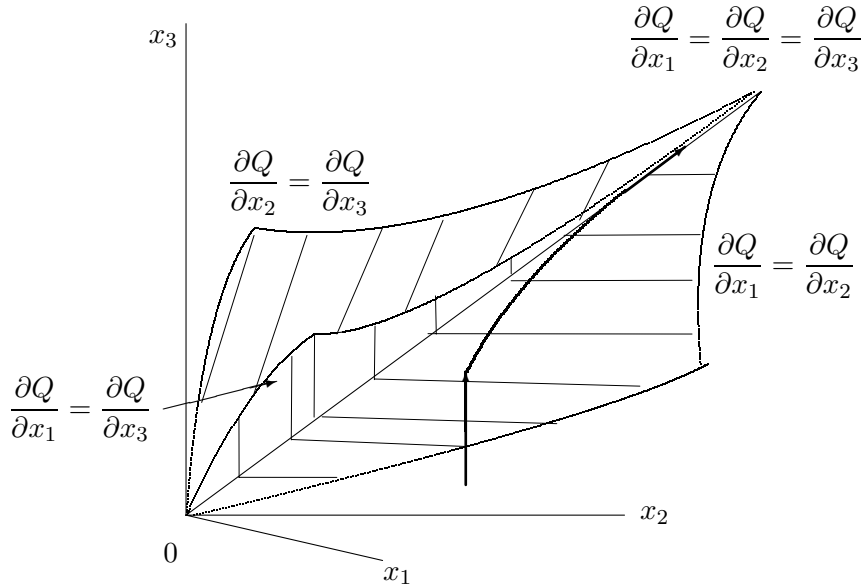


Рис. 13

Для удобства введем следующие обозначения. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — мультииндекс, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, $|I| = k$. Обозначим

$$V_I = \left\{ x \mid \frac{\partial Q}{\partial x_{i_1}} = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_2}} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_k}} > \max_{j \notin I} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right\};$$

в частности,

$$V_i = \left\{ x \mid \frac{\partial Q}{\partial x_i} > \max_{j \neq i} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right\}.$$

Пусть

$$A_I = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial Q}{\partial x_{i_2}} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial Q}{\partial x_{i_2}} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_{i_{k-1}}} - \frac{\partial Q}{\partial x_{i_k}} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_{i_{k-1}}} - \frac{\partial Q}{\partial x_{i_k}} \right) \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right\|. \quad (9.7)$$

Через $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ обозначим единичные орты в \mathbb{R}^n ; Δ_I — определитель матрицы A_I ; Δ_I^j — алгебраическое дополнение к j -му элементу последней строки.

Рассмотрим задачу наискорейшего достижения точки $b \in V_{1, \dots, n}$ по траекториям системы (9.6).

Теорема 9.1 (Л. Ф. Зеликина, [15, 16]). Пусть функция Q такова, что

1° $V_{1, \dots, n} \neq \emptyset$;

2° на замыкании множества V_I функции Δ_I^j не равны нулю и имеют одинаковые знаки $(-1)^{|I|-1}$.

Тогда оптимальный синтез имеет следующий вид. Множество $V = \bigcup_{|I| \geq 1} V_I$ является стратифицированным многообразием с гладкими стратами V_I . Оптимальное управление в области V_i равно e_i . Оптимальное управление на страте V_I равно

$$u_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \notin I, \\ \frac{\Delta_I^j}{\Delta_I} & \text{при } j \in I. \end{cases} \quad (9.8)$$

Коментарий. 1. Теорема 9.1 определяет следующую структуру оптимального синтеза. Стратифицированное многообразие V разбивает \mathbb{R}^n на n областей V_i , $i = 1, \dots, n$. В каждой из этих областей используется неособое управление, направленное по оси с соответствующим номером. Двигаясь параллельно этой оси, фазовая точка через некоторое время пересекается с одним из стратов V_I многообразия V . Каждый страт V_I является гладким многообразием размерности $n + 1 - |I|$ и составлен из особых экстремалей, на которых отличны от нуля те и только те компоненты управляющего вектора u , номера которых входят в мультииндекс I . Двигаясь по соответствующей особой экстремали, фазовая точка выходит на границу страта V_I в точке другого страта V_J ($I \subset J$), имеющего меньшую размерность, чем V_I . Продолжая переходить со страта на страт все меньшей размерности, траектория выходит в конце концов на одномерный страт $V_{1,\dots,n}$ и движется по нему до достижения точки b .

2. С помощью прямой выкладки мы покажем, что условие 2° теоремы 9.1 гарантирует отрицательную определенность гессиана d^2Q , ограниченного на интегральные поверхности формы

$$\omega = \frac{1}{Q} d \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

(соответствующей нашей задаче) в точках страта $V_{1,\dots,n}$. Тем самым выполняются условия теоремы 8.2 и страт $V_{1,\dots,n}$ является аттрактором оптимальных траекторий.

Доказательство теоремы 9.1 разобьем на несколько этапов.

Лемма 9.1. *Если для начального состояния x^0 имеется хотя бы одна допустимая траектория, приходящая в точку $b \in V_{1,\dots,n}$, то соответствующая задача быстрого действия для системы (9.6) имеет решение.*

Доказательство. Множество допустимых решений системы является равномерно ограниченным и равномерно непрерывным, следовательно, по теореме Арцела любая минимизирующая последовательность траекторий содержит сходящуюся подпоследовательность. Предельная траектория такой подпоследовательности является липшицевой и, следовательно, допустимой. В силу непрерывности функционала, предельная траектория доставляет минимум рассматриваемой задаче. \square

Для произвольного мультииндекса $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $k \geq 2$, обозначим $\omega_I(x^0)$ ограничение формы $\omega = \frac{1}{Q}(dx_1 + \dots + dx_n)$ на $(n + 1 - k)$ -мерную поверхность $L_I(x^0) = \{x \mid x_j = x_j^0, j \notin I\}$, т.е.

$$\omega_I(x^0)|_x = \frac{1}{Q(x)}(dx_{i_1} + \dots + dx_{i_k}), \quad x_j = x_j^0 \quad \forall j \notin I.$$

Лемма 9.2. *Если для произвольного I выполнено неравенство*

$$(-1)^{|I|-1} \Delta_I^j|_{V_I} > 0 \quad \forall j \in I,$$

то тогда для любого $x^0 \in V_I$ ограничение интегрирующего множителя Q формы $\omega_I(x^0)$ на поверхность $L_I(x^0) \cap \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} = x_{i_1}^0 + \dots + x_{i_k}^0\}$ достигает своего локального максимума в точках особой траектории, принадлежащей страту V_I и проходящей через точку x^0 , причем максимум равномерный по всей особой траектории. Обратно, если для любого I ограничение Q на поверхность $L_I(x^0) \cap \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} = x_{i_1}^0 + \dots + x_{i_k}^0\}$ достигает своего локального максимума в точках особой траектории, то

$$(-1)^{|I|-1} \Delta_I^j|_{V_I} \geq 0 \quad \forall j \in I.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество из k индексов $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и соответствующий ему страт V_I . Без ограничения общности можно считать, что $I = \{1, \dots, k\}$. Выберем базис касательного пространства к поверхности $\Sigma_I(x^0) = L_I(x^0) \cap \{x_1 + \dots + x_k = x_1^0 + \dots + x_k^0\}$ (один и тот же для произвольной точки поверхности), состоящий из векторов

$$l^i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

(т.е. i -я координата вектора l^i равна 1, а $(i+1)$ -я равна -1 соответственно). Необходимые условия локального максимума ограничения функции Q на поверхность $\Sigma_I(x^0)$ имеют вид

$$DQ \cdot l^i = 0, \quad i = 1, \dots, k-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_k},$$

что совпадает с определением страта V_I . Для того, чтобы экстремум был локальным максимумом, достаточным условием является положительная определенность матрицы из вторых частных производных ограничения Q на векторах, касательных к поверхности $\Sigma_I(x^0)$, или, эквивалентно, матрицы

$$\Omega = \left\| \begin{array}{cccc} \langle D^2Q \cdot l^1, l^1 \rangle & \langle D^2Q \cdot l^1, l^2 \rangle & \dots & \langle D^2Q \cdot l^1, l^{k-1} \rangle \\ \langle D^2Q \cdot l^2, l^1 \rangle & \langle D^2Q \cdot l^2, l^2 \rangle & \dots & \langle D^2Q \cdot l^2, l^{k-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle D^2Q \cdot l^{k-1}, l^1 \rangle & \langle D^2Q \cdot l^{k-1}, l^2 \rangle & \dots & \langle D^2Q \cdot l^{k-1}, l^{k-1} \rangle \end{array} \right\|$$

квадратичной формы $\sum_{\alpha, \beta=1}^{k-1} t_\alpha t_\beta \langle D^2Q \cdot l^\alpha, l^\beta \rangle$. Прямое вычисление дает, что

$$\langle D^2Q \cdot l^i, l^j \rangle = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_{i+1}} \right) - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_{j+1} \partial x_i} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{j+1} \partial x_{i+1}} \right),$$

откуда

$$\Omega = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_{k-1}} - \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_{k-1}} - \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k,k-1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{(k,k-1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial Q_{(k,k-1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_{(k,k-1)}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial Q_{(k,k-1)}}{\partial x_{k-1}} - \frac{\partial Q_{(k,k-1)}}{\partial x_k} \end{array} \right\|,$$

где через $Q_{(i,j)}$ обозначены функции

$$Q_{(i,j)} = \frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_j}.$$

В этих обозначениях матрица A_I , определенная формулой (9.7), имеет вид:

$$A_I = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_k} \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right\|.$$

Проверим, что $\det \Omega = \det A_I$. Действительно, вычитая в определителе матрицы A_I из первого столбца второй, из второго — третий и так далее, вплоть до предпоследнего, $(k-1)$ -го, столбца, получим

$$\det A_I = \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_{k-1}} - \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_{k-1}} - \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_k} & \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_k} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right|,$$

откуда получаем требуемое. Разлагая определитель $\det A_I$ по последней строке, получим

$$\det \Omega = \sum_{j=1}^k \Delta_I^j. \quad (9.9)$$

Для произвольного главного минора Ω^l матрицы Ω порядка $l - 1$, $l < k$, аналогично получаем

$$\det \Omega^l = \sum_{j=1}^l \Delta_{I^l}^j,$$

где $I^l = \{1, \dots, l\}$.

Теперь мы можем приступить непосредственно к доказательству леммы 9.2. Предположим сначала, что $(-1)^{|I|-1} \Delta_I^j > 0$ для произвольного набора индексов I . Тогда из формулы (9.9) следует, что для произвольного I определители главных миноров матрицы Ω имеют чередующиеся знаки $(-1)^{|I|-1}$, $(-1)^{|I|-2}$, \dots (в порядке убывания размерности миноров), и, следовательно, матрица Ω отрицательно определена в точках особых экстремалей. Это означает, что ограничение функции Q на $\Sigma_I(x^0)$ имеет локальный максимум в точке соответствующей особой экстремали, причем окрестность этой экстремали, в которой максимум имеет место, может быть отделена от нуля равномерно по всей длине экстремали.

Покажем теперь, что если для произвольного набора индексов I у функции Q , ограниченной на $\Sigma_I(x^0)$, $x^0 \in V_I$, в точках соответствующей особой экстремали имеет место локальный максимум, равномерный по всей длине экстремали, то определители Δ_I^j , $j = 1, \dots, |I|$, не равны нулю и имеют одинаковые знаки $(-1)^{|I|-1}$.

Для этого найдем управление, с которым особая экстремаль может удержаться на страте V_I . Пусть, для определенности, $I = \{1, \dots, k\}$ (для остальных наборов I все аналогично). Поскольку особая экстремаль принадлежит слою $x_j = \text{const}$, $j = k+1, \dots, n$, распределения, для всех $j \geq k+1$ имеем $u_j = 0$. Дифференцируя уравнения страта V_I в силу системы $\dot{x} = uQ(x)$, получим

$$\frac{d}{dt} Q_{(i,i+1)} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} u_k = 0, \\ \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial Q_{(2,3)}}{\partial x_k} u_k = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_k} u_k = 0, \\ u_1 + u_2 + \dots + u_k = 1. \end{array} \right.$$

По формулам Крамера получаем

$$u_j = \frac{\Delta_I^j}{\Delta_I} \geq 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Таким образом, все определители Δ_I^j или равны нулю, или имеют одинаковые знаки, равные знаку Δ_I . В силу формулы (9.9), Δ_I равен определителю матрицы, являющейся ограничением D^2Q на поверхность $\Sigma_I(x^0)$ и, следовательно, его знак равен $(-1)^{|I|-1}$. Это завершает доказательство леммы. \square

В качестве следствия леммы 9.2 и теоремы об аттракторе 8.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 9.1. *В условиях теоремы 9.1 особые экстремали задачи быстрого действия для системы (9.6), принадлежащие страту $V_{1,\dots,n}$, являются локально оптимальными, а страт*

$V_{1,\dots,n}$ — аттрактором траекторий оптимального синтеза. Особые экстремали, принадлежащие страту V_I , являются локально оптимальными в задаче, где множество допустимых скоростей принадлежит конусу L_I .

В качестве второго, неформального, следствия леммы 9.2 мы получаем, что алгебраические уравнения, задающие поверхности V_I , имеют интерпретацию, не зависящую от выбора системы координат. Но тогда порядок следования индексов в определении I не существен; проверив выполнение какого-либо утверждения для страта V_I , мы автоматически доказываем выполнение того же свойства (с точностью до переименования индексов) для любого страта той же размерности. Ниже это обстоятельство несколько упростит нам многие (и без того довольно громоздкие) выкладки.

Обозначим через $u = u(x)$ функцию, определяемую формулами

$$u^i(x) = \begin{cases} \frac{\Delta_I^i}{\Delta_I}, & \text{если } i \in I, \\ 0, & \text{если } i \notin I, \end{cases} \quad \text{при } x \in V_I. \quad (9.10)$$

Лемма 9.3. Для любого набора индексов I множество V_I является гладким многообразием с границей $\partial V_I = \bigcup_{J, I \subset J} V_J$. Траектории системы (9.10) с начальными условиями, принадлежащими страту V_I , пересекают V_J , $I \subset J$, трансверсально, т.е. под ненулевым углом с ненулевой фазовой скоростью.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $I = 1, \dots, k$. Тогда уравнение V_I имеет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_{k-1}} - \frac{\partial Q}{\partial x_k} = 0.$$

Определитель главного минора размера $(k-1) \times (k-1)$ якобиана отображения

$$x \rightarrow y, \quad y_j = Q_{(j,j+1)} = \frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial Q}{\partial x_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

в точках V_I имеет вид

$$D_0 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_{k-1}} \end{array} \right\|$$

и совпадает с Δ_I^k . По предположению, $\Delta_I^k \neq 0$ и по теореме о неявной функции V_I является гладко вложенным подмногообразием \mathbb{R}^n .

Пусть теперь $J = 1, \dots, k, k+1, \dots, l$, где $k+1 \leq l \leq n$. Рассмотрим траекторию системы (9.10) с начальными условиями в V_I и пересекающими V_J . Управление на особых траекториях, проходящих вдоль многообразия V_I , имеет вид

$$u_i(x) = \frac{\Delta_I^i}{\Delta_I}, \quad i = 1, \dots, k, \quad u_i(x) = 0, \quad i = k+1, \dots, n.$$

Условие, что вектор v является касательным к страту V_J в точке $x \in V_I \cap V_J$ имеет вид $D \cdot v = 0$, где D — матрица размера $(l-1) \times n$ вида

$$D = D_n = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(l-1,l)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(l-1,l)}}{\partial x_n} \end{array} \right\|.$$

Однако вектор v , соответствующий движению по страту V_I , не может удовлетворять этому условию, поскольку для него часть компонент не равна нулю:

$$D_k \cdot v = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k,k+1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(k,k+1)}}{\partial x_k} \end{array} \right\| \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \neq 0,$$

поскольку $(k \times k)$ -матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k,k+1)}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{(k,k+1)}}{\partial x_k} \end{array} \right\|$$

является невырожденной как в точках самого страта V_I , $I' = \{1, \dots, k, k+1\}$, так и в точках его замыкания. Лемма доказана. \square

Лемма 9.4. Пусть I, J — два произвольных набора индексов таких, что $I \subset J$. Тогда найдется такая открытая окрестность многообразия V_J в многообразии V_I , что для произвольной точки $x^0 \in V_I$ из этой окрестности траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = u(x)Q(x)$ с начальным условием $x(0) = x^0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} \Big|_{x(t)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) \geq \alpha \quad \forall i \in I, \quad j \in J \setminus I, \quad (9.11)$$

с некоторой константой $\alpha > 0$.

Иными словами, скорость, с которой меньшее значение $\frac{\partial Q}{\partial x_j}$ «догоняет» большее значение $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ на траектории синтеза, отделена от нуля в окрестности страта V_J , включающего индекс j .

Доказательство. Пусть сначала $I = \{i\}$, например, $I = \{1\}$. Пусть $J = \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда множество V_I определяется неравенствами

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} > \max \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right\}.$$

Непосредственное дифференцирование дает:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_j} \right) Q.$$

По предположению, в окрестности страта $V_J \subset \partial V_I$ имеем

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_j} < 0, \quad 2 \leq j \leq k.$$

У выражения для производной $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right)$ есть простой геометрический смысл. Вспомним, каким образом определяется особое управление на $(1, j)$ -особой траектории, принадлежащей страту $V_{1,j}$. Очевидно, что $u_k = 0$ для любого $k \neq 1, j$, и для определения u_1, u_j нужно решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) u_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) u_j = 0, \\ u_1 + u_j = 1. \end{cases}$$

В ранее введенных терминах получаем

$$u_j = \frac{\Delta_{1,j}^j}{\Delta_{1,j}} = \frac{\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_j}}{\Delta_{1,j}}.$$

Таким образом, с точностью до множителя $Q\Delta_{1,j}$ функция $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right)$ в точках границы $V_{1,j} \subset \partial V_1$ является значением j -й компоненты скорости особых траекторий на страте $V_{1,j}$ (в точках стратов большей коразмерности функция $\Delta_{1,j}$ доопределяется по непрерывности).

Обозначая через α максимум $\left| \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_j} \right|$ по замыканию тех точек из V_I , в окрестности которых $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_j} < 0$, получим утверждение леммы для $I = \{1\}$. Для любого другого индекса $i = 2, \dots, n$ рассуждение аналогично.

Рассмотрим теперь произвольный набор индексов длины $k \geq 2$, например, $I = \{1, \dots, k\}$. Пусть $J = \{1, \dots, k, k+1, \dots, l\}$. Множество V_I определяется соотношениями

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_k} > \max \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right\}.$$

Удобно вновь использовать обозначения

$$Q_{(\alpha,\beta)} = \frac{\partial Q}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial Q}{\partial x_\beta}.$$

При $i = 1, \dots, k$ и для $k+1 \leq j \leq l$ получаем, что выражение $\mathfrak{V} = \frac{d}{dt} Q_{(i,j)}$ не зависит от i и равно

$$\mathfrak{V} = \sum_{m=1}^k \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_m \partial x_i} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_m \partial x_j} \right) u_m Q = \sum_{m=1}^k \frac{\partial Q_{(k,j)}}{\partial x_m} u_m Q. \quad (9.12)$$

Опять свяжем выражение $\mathfrak{V} = \frac{d}{dt} Q_{(i,j)}$ вблизи участка границы $V_{1,\dots,k,j} \subset \partial V_{1,\dots,k}$ со скоростью u_j особых траекторий, проходящих вдоль $V_{1,\dots,k,j}$. Вспомним, что значения компонент u_m особого управления на страте в формуле (9.12) определяются по формуле $u_m = \frac{\Delta_{1,\dots,k}^m}{\Delta_{1,\dots,k}}$. Заменяя в определителе $\Delta_{1,\dots,k}$ последнюю строку, состоящую из единиц, на строку $\left(\frac{\partial Q_{(k,j)}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q_{(k,j)}}{\partial x_k} \right)$, получаем

$$\mathfrak{V} = \frac{Q}{\Delta_{1,\dots,k}} \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Q_{(1,2)}}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Q_{(k-1,k)}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial Q_{(k,j)}}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_{(k,j)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Q_{(k,j)}}{\partial x_k} \end{vmatrix}.$$

Теперь становится очевидно, что

$$\mathfrak{V} = \frac{\Delta_{1,\dots,k,j}^j}{\Delta_{1,\dots,k}} Q = \frac{u_j \Delta_{1,\dots,k,j}}{\Delta_{1,\dots,k}} Q.$$

Определим знаки соответствующих определителей:

$$\operatorname{sgn} \Delta_{1,\dots,k,j} = (-1)^k, \quad \operatorname{sgn} \Delta_{1,\dots,k} = (-1)^{k-1},$$

откуда следует, что \mathfrak{V} отрицательно и отделено от нуля.

Для остальных наборов I длины k все аналогично. Лемма доказана. \square

Следствие 9.2. Многообразие V_I является универсальным многообразием синтеза, определяемого формулой (9.10). Точнее, существует такое открытое подмножество \mathcal{O} пространства \mathbb{R}^n , что для всех начальных условий $x(0) \in \mathcal{O}$ каждая траектория системы $\dot{x} = u(x)Q(x)$ за конечное время попадает на страт $V_{1,\dots,n}$. В области \mathcal{O} траектории системы

$$\dot{x} = u(x)Q(x) \quad (9.13)$$

могут перейти со страта V_I только в точки страта $V_{I'}$ меньшей размерности, $I \subset I'$, при этом время перехода из точек $x \in V_I$ в точки $V_{I'}$ стремится к нулю при $x \rightarrow V_{I'}$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что при любом допустимом движении функция $Q(x)$ растет вдоль соответствующей траектории, поскольку

$$\frac{d}{dt}Q(x) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0.$$

Следовательно, можно считать, что фазовая скорость траекторий системы (9.13) отделена от нуля вдоль любой фиксированной допустимой траектории при $t \in [0, \infty)$.

В силу леммы 9.4, траектории системы (9.13), принадлежащие страту V_I , трансверсально пересекают произвольный страт V_J , $I \subset J$. Из теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных следует, что траектории (9.13), которые переходят из точек страта V_I на страт V_J , $V_J \subset \partial V_I$, заполняют подмножество V_I с непустой относительной внутренностью. Из непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных следует также, что те области в V_I , траектории в которых попадают на различные страты $V_J \subset \partial V_I$, коразмерность которых превышает коразмерность V_I в точности на единицу, имеют общую границу в V_I , состоящую из траекторий системы (9.13), попадающих из V_I в точки стратов, коразмерность которых больше коразмерности V_I на 2 и больше единиц.

Проследим, в какое подмножество \mathbb{R}^n могут попасть траектории системы (9.13) с начальной точкой $x(0) = b$ при движении в попятном времени. Сначала рассмотрим траектории, которые двигаются по многообразию $V_{1,\dots,n}$. Получим открытую полупрямую \mathcal{J} и точку b . Затем присоединим к ним траектории, приходящие на \mathcal{J} по двумерным особым многообразиям, на которых только 2 координаты управляющего параметра равны 0 (таких имеется C_n^2 штук), а также присоединим те траектории (9.13), лежащие на этих двумерных многообразиях, которые попадают в точку b непосредственно, минуя интервал движения вдоль \mathcal{J} . Продолжая процесс, приходим к открытому подмножеству $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ со стратифицированной границей, для всех точек которого траектории системы (9.13) приходят в прямом времени в точку b .

В силу леммы 9.4, разность

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) < 0, \quad i \in I, \quad j \notin I,$$

растет вдоль траектории $x(t)$, принадлежащей V_I вблизи его границы $V_J = V_{I \cup \{j\}}$, причем скорость роста отделена от нуля. Поэтому время выхода $x(t)$ на V_J стремится к нулю при $x(0) \rightarrow V_J$. \square

Доказательство теоремы 9.1. Доказательство теоремы проведем способом, который ниже, в теореме о лагранжевом многообразии, позволит получить достаточные условия оптимальности для общей задачи управления. Построим поле сопряженных переменных $\Psi(x)$, которые определяют синтез $u(x)$, задаваемый соотношением (9.10).

Выпишем систему сопряженных уравнений и условие максимума принципа максимума Понтрягина

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= - \left(\sum_{j=1}^n \psi_j u_j \right) \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \max_{\substack{v \in \mathbb{R}_+^n, \\ v_1 + \dots + v_n = 1}} \sum_{j=1}^n \psi_j v_j &= \sum_{j=1}^n \psi_j u_j. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Из последнего условия в частности, следует, что если на некотором интервале (τ_1, τ_2) выполнены соотношения

$$\psi_{i_1}(t) = \psi_{i_2}(t) = \dots = \psi_{i_k}(t) > \psi_j(t) \quad \forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\},$$

то на этом интервале $u_j = 0$, $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, и тогда этот участок траектории является $\{i_1, \dots, i_k\}$ -особым.

Поскольку из условия $d(\omega|_{L_I}) = 0$ следует уравнение Эйлера, то все ранее найденные траектории системы (9.13), принадлежащие стратам V_{i_1, \dots, i_k} , являются также $\{i_1, \dots, i_k\}$ -особыми экстремалими системы (9.14). В частности, для них ненулевые компоненты управления определяются формулой (9.10). Полезно, однако, убедиться в этом непосредственно и, кроме того, как побочный результат соответствующей выкладки, получить некоторые формулы для поля сопряженных переменных, отвечающего синтезу (9.13).

Пусть I — произвольный набор индексов, например, $I = \{1, \dots, k\}$. Обозначим через $u_I(x)$ ограничение функции $u(x)$, задаваемой формулой (9.10), на страт V_I . Пусть $(\psi(t), x(t))$ — некоторое решение системы уравнений принципа максимума Понтрягина (9.14). Если $x(t) \in V_I$ и при этом выполнены соотношения

$$\psi_1(t) = \dots = \psi_k(t) > \psi_j(t) \quad \forall j \notin I, \quad (9.15)$$

то тогда $x(t)$ является L_I -особой экстремалью задачи и $\dot{x}(t) = u(x)Q(x)$. Убедимся, что для любой траектории системы (9.13) такое решение системы (9.14) существует, причем это решение принадлежит единичной поверхности уровня гамильтониана

$$\psi u(x)Q(x) = 1. \quad (9.16)$$

Предположим, что соотношения (9.15) и (9.16) выполнены. Тогда на особом участке для любого $i \in I$ имеем

$$\psi_i \left(\sum_{j=1}^k (u_I)_j \right) Q(x) = 1, \quad \psi_i Q(x) = 1,$$

т.е. должны выполняться соотношения

$$\psi_i(t) \equiv \frac{1}{Q(x(t))}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (9.17)$$

Проверим, что, обратно, соотношения (9.17) сохраняются вдоль решений сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}_i = - \left(\sum_{j=1}^k \psi_j (u_I)_j \right) \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.18)$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Q} \right) = - \frac{1}{Q^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q}{\partial x_j} (u_I)_j Q = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{Q} (u_I)_j \frac{\partial Q}{\partial x_j}.$$

С учетом того, что на страте V_I все частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x_j}$, $j \in I$, равны между собой, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{Q} \right) = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{Q} \cdot (u_I)_j \right) \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

что совпадает с первыми k уравнениями системы (9.18). Таким образом, если в начальный момент времени для решения $(\psi(t), x(t))$ системы (9.13), (9.18) выполнены соотношения (9.17), то эти соотношения выполнены на всей траектории.

Построим теперь поле сопряженных переменных $\Psi(x)$, которое отвечает синтезу (9.13), и убедимся при этом, что вдоль траекторий этого поля выполнены не только соотношения (9.15) типа равенства, но и соответствующие неравенства тоже выполнены.

Пусть $x(t, x_0)$ — траектория системы (9.13) с начальными условиями $x(0, x_0) = x_0$. Подберем функцию $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такую, что ее ограничение на траекторию $x(t, x_0)$, т.е. функция

$\psi(t) = \Psi(x(t, x_0))$, удовлетворяет соотношениям (9.14). Функцию $\Psi(x)$ мы определим сначала на одномерном страте $V_{1, \dots, n}$, затем распространим на двумерные страты $1, \dots, \hat{i}, \dots, n$ (i -й индекс опущен), затем на трехмерные страты и так далее, вплоть до V_1, \dots, V_n . Затем убедимся, что определенная таким образом функция $\Psi(x)$ обладает необходимыми нам свойствами непрерывности и гладкости.

Начнем построение с конечной точки $b \in V_{1, \dots, n}$. Для нее положим

$$\Psi_i(b) = 1/Q(b), \quad i = 1, \dots, n.$$

Продолжим $\Psi(x)$ на $V_{1, \dots, n}$, проинтегрировав уравнение

$$\dot{x} = u_{1, \dots, n}(x)Q(x), \quad \dot{\psi} = -\psi u_{1, \dots, n}(x) \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (9.19)$$

с начальным условием $x(0) = b$, $\psi(0) = \Psi(b)$ в попятном времени. Напомним, что в точках многообразия $V_{1, \dots, n}$ управление задается соотношением $u_i = \frac{\Delta_{1, \dots, n}^i}{\Delta_{1, \dots, n}}$, $i = 1, \dots, n$, и является гладкой функцией на $V_{1, \dots, n}$. Следовательно, по теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, полученное значение $\psi(t)$ является гладкой функцией от координат на $V_{1, \dots, n}$. Кроме того, по доказанному, соотношения $\Psi_i(x) = 1/Q(x)$ ($i = 1, \dots, n$) сохраняются вдоль всего страта $V_{1, \dots, n}$.

Чтобы построить поле $\Psi(x)$ в точках двумерных многообразий V_I , $|I| = n - 1$, проинтегрируем в попятном времени систему (9.18) с начальными условиями $\psi(0) = \Psi(x)$, $x \in V_{1, \dots, n}$. Соответствующие функции $\Psi(x)$ получаются гладкими в точках $\text{int } V_I$ и непрерывно продолжаемыми в точки их общей границы $V_{1, \dots, n}$. Рассмотрим, например, страт $I = \{1, \dots, n - 1\}$. Разумеется, построенное поле $\Psi(x)$ удовлетворяет соотношениям $\Psi_1(x) = \dots = \Psi_{n-1}(x)$. Убедимся, что в точках страта $V_{1, \dots, n-1}$ имеет место неравенство

$$\Psi_n(x) < \Psi_1(x) = \dots = \Psi_{n-1}(x).$$

Действительно, для координаты ψ_n на $V_{1, \dots, n-1}$ имеем уравнение

$$\dot{\psi}_n = -\frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_n}.$$

Но по определению страта $V_{1, \dots, n-1}$ имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x_n} < \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_{n-1}}.$$

Поэтому

$$\dot{\psi}_n > \dot{\psi}_1 = \dots = \dot{\psi}_{n-1}.$$

Если $\psi_1(0) = \dots = \psi_{n-1}(0) = \psi_n(0)$, то

$$\psi_n(t) < \psi_1(t) = \dots = \psi_{n-1}(t)$$

при $t < 0$.

В точки трехмерных, четырехмерных и так далее стратов поле $\Psi(x)$ продолжается аналогичным образом. Чтобы понять, какими свойствами гладкости обладает поле $\Psi(x)$, достаточно рассмотреть трехмерные страты, например $V_{1, \dots, n-2}$. Особые траектории, принадлежащие $V_{1, \dots, n-2}$, могут приходиться в точки двух различных двумерных стратов $V_{1, \dots, n-2, n-1}$ и $V_{1, \dots, n-2, n}$ или непосредственно в точки одномерного страта $V_{1, \dots, n}$ (см. рис. 14). По теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, функция $\Psi(x)$ будет функцией класса C^1 в тех точках $V_{1, \dots, n-2}$, которые приходят в прямом времени на $V_{1, \dots, n-2, n-1}$ или на $V_{1, \dots, n-2, n}$, и будет функцией класса C^0 на их общей границе, заполненной точками, которые выходят с особым управлением $u_{n-1} = u_n = 0$ непосредственно на $V_{1, \dots, n}$.

Переходя со страта меньшей размерности на страт большей размерности, при этом интегрируя систему (9.13) в попятном времени, за n шагов получим функцию $\Psi(x)$, которая для любой траектории $x(t)$ системы (9.13), проходящей в точку b , определяет соответствующую функцию

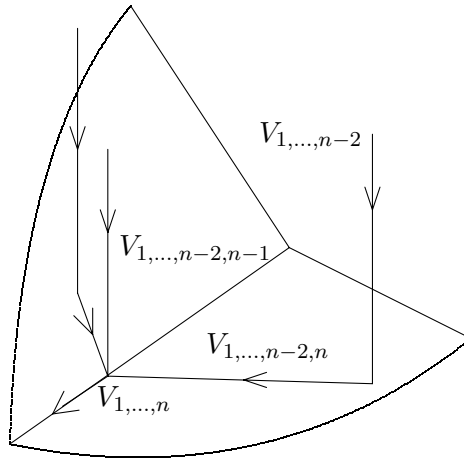


Рис. 14

$\psi(t)$ по формуле $\psi(t) = \Psi(x(t))$. При этом функция $\Psi(x)$ является непрерывной всюду в области определения и класса C^1 в точках открытого плотного множества.

По построению функция $\Psi(x)$ для каждого страта I удовлетворяет соотношению $\Psi(x)u_I(x)Q(x) \equiv 1$.

Нам надо проверить, что поле $\Psi(x)$ потенциально, т.е. существует функция $w(x)$, для которой $\nabla w(x) = \Psi(x)$.

Потенциальность поля $\Psi(x)$ следует из следующего общего свойства решений гамильтоновых систем. В $(2n)$ -мерном пространстве с координатами (p, q) , $p, q \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим систему вида

$$\dot{p} = -\frac{\partial h(p, q)}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial h(p, q)}{\partial p} \quad (9.20)$$

с произвольной гладкой функцией $h(p, q)$ (гамильтонианом). Тогда имеет место следующая теорема об интегральном инварианте Пуанкаре—Картана (она доказывается ниже, в гл. 13, теорема 13.1).

Рассмотрим произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур γ в $(2n+1)$ -мерном пространстве с координатами (t, p, q) такой, что траектории системы

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{p} = -\frac{\partial h(p, q)}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial h(p, q)}{\partial p} \quad (9.21)$$

трансверсальны γ . Рассмотрим Σ — множество точек тех траекторий системы (9.21), которые проходят через контур γ . Пусть γ_1 — произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур, принадлежащий Σ . Тогда

$$\oint_{\gamma} p dq - h(p, q) dt = \oint_{\gamma_1} p dq - h(p, q) dt.$$

Пользуясь теоремой об интегральном инварианте, докажем потенциальность поля $\Psi(x)$. Для каждого страта V_I предъявим гладкую гамильтонову систему, траектории которой совпадают с траекториями нашего поля в точках V_I . Для этого рассмотрим гамильтониан $h_I(\psi, x) = \psi u_I(x)Q(x)$ (функцию $u_I(x)$ аналитически продолжим с V_I на открытую окрестность V_I в \mathbb{R}^n , так что гамильтониан h_I станет определенным в открытой области $(2n)$ -мерного пространства). Выпишем соответствующую гамильтонову систему:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\psi u_I \frac{\partial Q}{\partial x} - \psi \frac{\partial u_I}{\partial x} Q, \\ \dot{x} &= u_I Q. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Убедимся, что на страте V_I система (9.22) совпадает с системой (9.13), (9.18). Действительно, если $\psi_{i_1}(t) = \psi_{i_2}(t)$ для $\forall i_1, i_2 \in I$, то

$$\sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial (u_I)_j}{\partial x} Q = \psi_{i_1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial (u_I)_j}{\partial x} \right) Q = \psi_{i_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^n (u_I)_j \right) Q \equiv 0.$$

Для каждого I семейство решений гамильтоновой системы (9.22), отвечающее синтезу (9.13), лежит на поверхности уровня гамильтониана $h_I = 1$. В этом случае для произвольного замкнутого контура γ интеграл $\oint_{\gamma} h dt$ автоматически равен нулю, и тогда поток гамильтонова поля сохраняет значение $\oint_{\gamma} \psi dx$, т.е.

$$\oint_{\gamma} \psi dx = \oint_{\gamma_1} \psi dx.$$

Покажем, что интеграл $\oint_{\gamma} \psi dx$ на самом деле равен нулю. Для страта $V_{1, \dots, n}$ получаем $\oint_{\gamma} \psi dx = 0$ просто в силу того, что размерность $V_{1, \dots, n}$ равна 1. Переходя от $V_{1, \dots, n}$ к стратам размерности 2, по теореме об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана получаем, что $\oint_{\gamma} \psi dx = 0$ для произвольного кусочно-гладкого замкнутого контура γ , принадлежащего V_I , $|I| = n - 1$. Переходя от V_I , $|I| = n - k$, к V_J , $|J| = n - k - 1$, вплоть до V_1, \dots, V_n , получаем, что $\oint_{\gamma} \psi dx = 0$, $\gamma \subset V_J$. Таким образом, поле $\Psi(x)$ потенциально по крайней мере в открытых областях V_1, \dots, V_n . Определяя функцию $w(x)$ формулой

$$w(x) = \int_{\gamma(s)} \Psi(x) dx, \quad x \in V_i, \quad s \in [0, 1], \quad \gamma(0) = b, \quad \gamma(1) = x,$$

и используя непрерывность поля $\Psi(x)$, получаем, что $w(x)$ класса C^1 в открытой области, заполненной траекториями синтеза $u(x)$, приходящими в точку b . Но тогда функция $\omega(x) = -w(x)$ класса C^1 и является решением уравнения Беллмана, отвечающим синтезу $u(x)$. По теореме 2.1 построенный синтез оптимален. \square

9.4. Экономический смысл оптимального синтеза. Система (9.6) описывает экономику с производственными факторами x_1, \dots, x_n и агрегированным продуктом $Q(x)$, который представляет собой поток выпуска при наличии факторов x_1, \dots, x_n . С производственной функцией $Q(x)$ связаны следующие экономические понятия. Величина

$$n_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

называется *нормой эффективности капиталовложений* в производство i -го фактора, или, коротко, эффективностью выпуска по i -му фактору. Стандартное экономическое определение этого понятия таково: «насколько увеличится выпуск при изменении фактора x_i на единицу». В этом эвристическом определении слово «единица» следует понимать как бесконечно малую величину.

Величина

$$E_i = \frac{x_i}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

называется *эластичностью* по i -му фактору. По существу,

$$E_i = \frac{\partial(\ln Q)}{\partial(\ln x_i)},$$

поэтому экономисты в таких случаях говорят: «на сколько процентов изменится выпуск при изменении фактора x_i на 1%». Нетрудно проверить, что для функции Кобба—Дугласа

$$Q = (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n}$$

норма эффективности по x_i равна $n_i = \frac{\alpha_i Q}{x_i}$, а эластичность выпуска $E_i = \alpha_i$.

Экономический смысл системы (9.6) состоит в следующем. В произвольный момент времени t при наличии набора факторов x_1, \dots, x_n мы должны распределить выпуск $Q(x)$ между отраслями, производящими каждый из этих факторов. Управление u_i есть доля общего выпуска $Q(x)$, направленного в отрасль i .

Уравнения стратов V_I

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{i_1}} = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_2}} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_k}} > \max_{j \notin I} \frac{\partial Q}{\partial x_j}$$

можно записать так

$$n_{i_1} = n_{i_2} = \dots = n_{i_k} > \max_{j \notin I} n_j.$$

Теорема 9.1, таким образом, гласит, что капиталовложения направляются в ту отрасль хозяйства, где норма эффективности самая большая. Если существует несколько отраслей с равными показателями норм эффективности (при этом они больше норм эффективности остальных отраслей), то капиталовложения распределяются между этими отраслями с наибольшей эффективностью, причем в такой пропорции, чтобы равенство норм эффективности сохранялось в процессе производства. Эти пропорции определяются оптимальным управлением (9.8). Уравнения магистрали задаются условием

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_n}. \quad (9.23)$$

Если производственная функция $Q(x)$ является однородной любой степени k , то функции $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ также однородны степени $k - 1$. Магистраль в этом случае является лучом, проходящим через начало координат. Уравнение (9.23) можно переписать в виде

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \frac{x_1}{Q} = \frac{1}{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x_2} \frac{x_2}{Q} = \dots = \frac{1}{x_n} \frac{\partial Q}{\partial x_n} \frac{x_n}{Q},$$

или, что то же самое,

$$\frac{x_1}{E_1(x)} = \frac{x_2}{E_2(x)} = \dots = \frac{x_n}{E_n(x)}. \quad (9.24)$$

Эластичности выпуска являются функциями нулевой степени однородности и, следовательно, остаются постоянными на магистрали. Продифференцировав уравнение (9.24) по t , получим

$$\frac{u_1 Q}{E_1(x)} = \frac{u_2 Q}{E_2(x)} = \dots = \frac{u_n Q}{E_n(x)}. \quad (9.25)$$

Из уравнения (9.25) следует, что управления на оптимальной траектории, движущейся вдоль магистрали, постоянны и пропорциональны эластичности выпуска. Итак, для сохранения равенства норм эффективности по различным факторам надо распределить капиталовложения между отраслями пропорционально эластичности выпуска по соответствующим факторам.

Для однородных производственных функций $Q(x)$ магистраль есть луч и, следовательно, задает траекторию сбалансированного роста. При сбалансированном росте для того, чтобы обеспечить движение по лучу, вектор \dot{x} должен быть пропорционален вектору x . В этом случае имеет смысл говорить о темпе роста. Темп роста определяется выражением

$$\lambda = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{uQ}{x},$$

причем вектор u пропорционален вектору x , и, поскольку $\sum_{i=1}^n u_i = 1$, имеем: $u_i = x_i / \sum_{i=1}^n x_i$. Значит,

$$\lambda = \frac{Q}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (9.26)$$

В важном случае, когда $Q(x)$ является функцией первой степени однородности (эффективность выпуска не зависит от масштабов производства), $\lambda(x)$ является функцией нулевой степени однородности и, следовательно, зависит только от направления луча. Посмотрим, на каком луче она достигает максимального значения. Предположим для простоты, что функция $Q(x)$ обращается в нуль, если хотя бы один из факторов равен нулю (это имеет место, например, в случае функции Кобба—Дугласа). Тогда функция $\lambda(x)$, непрерывная на компакте, являющемся пересечением единичной сферы с замыканием ортанта \mathbb{R}_+^n , обращается в нуль на границе этого компакта и положительна в его внутренних точках. Следовательно, она достигает максимума в некоторой внутренней точке. Так как функция $\lambda(x)$ постоянна вдоль лучей, то в точке максимума $\nabla \lambda(x) = 0$. Используя (9.26), получаем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n x_i - Q}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Следовательно, равенство $\nabla \lambda = 0$ имеет место только при выполнении соотношения

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = \frac{Q}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

т.е. в точках магистрали. Значит, на магистрали достигается максимум функции $\lambda(x)$, т.е. магистраль является лучом максимального сбалансированного роста.

10. ОСОБЫЕ СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Материал, изложенный в разделе 10, технически более сложен и при первом чтении может быть опущен без ущерба для понимания последующего текста.

10.1. Постановка задачи. Теорема 9.1 о структуре оптимального синтеза в задаче экономического роста с n производственными факторами допускает обобщение на случай задачи минимизации произвольной вполне интегрируемой дифференциальной формы на решениях инволютивного распределения. Рассмотрим распределение n линейно независимых векторных полей $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ в n -мерном пространстве и соответствующую ему управляемую систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(x), \quad u_i \geq 0, \quad u_1 + \dots + u_n = 1. \quad (10.1)$$

Как и ранее, будем рассматривать задачу быстродействия

$$T \rightarrow \min, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что для любого набора индексов $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ распределение $\phi_{i_1}(x), \dots, \phi_{i_k}(x)$ инволютивно. Тогда, в силу леммы 7.3, существует замена переменных $x \rightarrow y$, при которой конус K , натянутый на векторные поля $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$, перейдет в \mathbb{R}_+^n , т.е. система (10.1) будет иметь вид

$$\dot{y}_1 = u_1 Q_1(y), \quad \dot{y}_2 = u_2 Q_2(y), \quad \dots, \quad \dot{y}_n = u_n Q_n(y), \quad (10.2)$$

с некоторыми ненулевыми функциями $Q_1(y), \dots, Q_n(y)$. В этих координатах задача быстродействия становится эквивалентной следующей задаче минимизации дифференциальной формы на

решениях дифференциального включения:

$$\int_{y(\cdot)} \omega \rightarrow \min, \quad \dot{y} \in \mathbb{R}_+^n,$$

где

$$\omega = \frac{dy_1}{Q_1(y)} + \dots + \frac{dy_n}{Q_n(y)}.$$

Потребуем, чтобы форма ω оказалась вполне интегрируемой, т.е. чтобы

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

(помимо условия инволютивности всех граней многогранника допустимых скоростей, это требование — самое существенное ограничение на задачу). Тогда справедлива следующая теорема о структуре особых оптимальных экстремалей задачи.

Пусть с самого начала система (10.1) приведена к виду (10.2). Рассмотрим задачу

$$\int_{x(\cdot)} \omega \rightarrow \min, \quad \dot{x} \in \mathbb{R}_+^n, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in \mathcal{M}, \quad (10.3)$$

где ω является вполне интегрируемой 1-формой, положительно определенной на конусе \mathbb{R}_+^n (т.е. $\omega(v) > 0$ для любого вектора $v \neq 0$ с неотрицательными координатами). Будем считать, что

$$\omega = \frac{dx_1}{Q_1(x)} + \dots + \frac{dx_n}{Q_n(x)},$$

где $Q_i(x)$ — некоторые положительные функции.

Обозначим через e_i единичные орты пространства \mathbb{R}^n , $i = 1, \dots, n$. Для произвольного набора индексов $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, определим многообразие W_I :

$$W_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d\omega(e_i, e_j) = 0, \quad d\omega(e_i, e_l) < 0 \quad \forall i, j \in I, \quad \forall l \notin I\}.$$

В частности, для набора, состоящего из одного элемента, множество W_i , $i = 1, \dots, n$, задается $n - 1$ неравенствами

$$W_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d\omega(e_i, e_l) < 0 \quad \forall l \neq i\}.$$

Рассмотрим $(k \times k)$ -матрицу

$$A_I = \left\| \begin{array}{ccc} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right\|.$$

Обозначим $\Delta_I = \det A_I$; пусть Δ_I^s — алгебраическое дополнение s -го элемента последней строки матрицы A_I .

Пусть \mathcal{O} — открытое связное множество в \mathbb{R}^n .

Теорема 10.1. *Предположим, что*

- 1) *множество $\mathcal{O} \cap W_{1, \dots, n} \cap \mathcal{M}$ не пусто;*
- 2) *для любого I функции Δ_I^s ($s \in I$) строго положительны на замыкании $\mathcal{O} \cap W_{1, \dots, n}$.*

Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ множества $W_{1, \dots, n}$ все W_I являются гладкими особыми универсальными $(n - k + 1)$ -мерными многообразиями ($k = |I|$) такими, что $W_I \subset \partial W_J$ при $J \subset I$, а оптимальный синтез $u(x)$ в задаче (10.3) задается следующим образом. При $x \in W_i$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$u_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i; \end{cases}$$

для произвольного $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ при $x \in W_I$ имеем

$$u_j(x) = \begin{cases} \frac{\Delta_I^s}{\Delta_I}, & \text{если } j = i_s \in I, \\ 0, & \text{если } j \notin I. \end{cases}$$

10.2. Построение оптимального синтеза. При доказательстве теоремы 10.1 нам придется повторить большую часть доказательства теоремы 9.1. Выясним сначала, какую роль играет полная интегрируемость формы ω при определении стратифицированных многообразий, заполненных особыми экстремальными задачи (10.3). Везде далее будем предполагать условия теоремы 10.1 выполненными.

Лемма 10.1. *Для произвольного набора индексов I многообразии W_I является гладко вложенным подмногообразием \mathbb{R}^n размерности $n - k + 1$, $k = |I|$. Если $I \subset J$, то W_J принадлежит границе замыкания W_I .*

Доказательство. Поскольку форма ω вполне интегрируема, имеем $\omega \wedge d\omega = 0$. Для произвольной тройки векторов (e_i, e_j, e_l) отсюда получаем:

$$\omega(e_i)d\omega(e_j, e_l) + \omega(e_j)d\omega(e_l, e_i) + \omega(e_l)d\omega(e_i, e_j) \equiv 0.$$

В частности, поскольку $\omega(e_i) = \frac{1}{Q_i} \neq 0$, из обращения в нуль любых двух из трех 2-форм в этом тождестве следует, что и третья 2-форма равна нулю, т.е. если

$$d\omega(e_i, e_j) = 0, \quad d\omega(e_j, e_l) = 0,$$

то автоматически имеет место равенство

$$d\omega(e_i, e_l) = 0.$$

Вспомним теперь определение многообразий W_I :

$$d\omega(e_i, e_j) = 0, \quad d\omega(e_i, e_l) < 0 \quad \forall i, j \in I, \quad \forall l \notin I.$$

Пусть $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $k = |I|$. Ясно, что все C_k^2 соотношений типа равенства, задающие W_I , являются следствием $(k - 1)$ соотношения вида

$$d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) = 0, \quad d\omega(e_{i_2}, e_{i_3}) = 0, \quad \dots, \quad d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) = 0. \quad (10.4)$$

Чтобы показать, что W_I является гладким многообразием без особенностей, рассмотрим минор порядка $(k - 1) \times (k - 1)$ якобиана функций, стоящих в левой части системы (10.4):

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \end{vmatrix}.$$

Определитель M с точностью до ненулевых множителей выражается через Δ_I^k и потому не равен нулю на замыкании множества W_I . Действительно,

$$|M| = \frac{1}{Q_{i_1} \dots Q_{i_{k-1}}} \begin{vmatrix} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_{k-1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_{k-1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \end{vmatrix} = \frac{\Delta_I^k}{Q_{i_1} \dots Q_{i_{k-1}}} > 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции, W_I является гладким $(n - k + 1)$ -мерным многообразием.

Включение $W_J \subset \overline{\partial W_I}$ для произвольного набора $J \supset I$ автоматически следует из уравнений (10.4). \square

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 Q_1(x), \quad \dots, \quad \dot{x}_n = u_n Q_n(x), \\ u_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad u_1 + \dots + u_n = 1. \end{aligned} \quad (10.5)$$

При $x \in W_I$ положим

$$U^j(x) = \begin{cases} \frac{\Delta_I^s}{\Delta_I}, & \text{если } j = i_s \in I, \\ 0, & \text{если } j \notin I. \end{cases}$$

Лемма 10.2. Для произвольного набора индексов I многообразие W_I является интегральным многообразием системы

$$\dot{x}_1 = U_1(x)Q_1(x), \quad \dots, \quad \dot{x}_n = U_n(x)Q_n(x). \quad (10.6)$$

Обратно, если $(x(t), u(t))$ — допустимая L_I -особая траектория системы (10.5), принадлежащая W_I , то $u(t) = U(x(t))$.

Доказательство. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. В силу определения W_I для того, чтобы допустимая траектория $(x(t), u(t))$ системы (10.5) принадлежала W_I , необходимо и достаточно, чтобы в точках W_I было выполнено $k - 1$ соотношение

$$d\omega \Big|_{x(t)}(e_{i_1}, e_{i_2}) \equiv 0, \quad \dots, \quad d\omega \Big|_{x(t)}(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \equiv 0. \quad (10.7)$$

Прямое дифференцирование по t дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) u_1 Q_1(x) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) u_n Q_n(x) &\equiv 0, \\ &\dots, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) u_1 Q_1(x) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) u_n Q_n(x) &\equiv 0, \\ u_1 + \dots + u_n &= 1. \end{aligned}$$

Если $(x(t), u(t))$ — некоторая L_I -особая допустимая траектория системы (10.5), то ненулевыми компонентами управления $u(t)$ могут быть только компоненты u_{i_1}, \dots, u_{i_k} . Обозначая $v_1 = u_{i_1}, \dots, v_k = u_{i_k}$, получаем невырожденную линейную систему

$$\begin{aligned} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) v_1 + \dots + Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) v_k &= 0, \\ &\dots, \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) v_1 + \dots + Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) v_k &= 0, \\ v_1 + \dots + v_k &= 1. \end{aligned}$$

Выписывая решение этой системы по правилу Крамера, получаем

$$v_j = \frac{\Delta_I^j}{\Delta_I}, \quad j = 1, \dots, k,$$

откуда

$$u_{i_j} = \frac{\Delta_I^j}{\Delta_I}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Очевидно, верно и обратное: если $u(t) = U(x(t))$, то соответствующая траектория управляемой системы (10.5) с начальными условиями на W_I удовлетворяет условиям (10.7) и, следовательно, не покидает многообразия W_I . \square

Лемма 10.3. В некоторой открытой окрестности многообразия $W_{1,\dots,n}$ для траектории системы (10.6) на участке, принадлежащем многообразию W_I с произвольным набором индексов I , имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) \geq \alpha \quad \forall i \in I, j \notin I, \quad (10.8)$$

с некоторой константой $\alpha > 0$, не зависящей от набора I .

Доказательство. 1. Пусть сначала $x \in W_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда через точку x проходит неособая траектория синтеза (10.6) с управлением

$$u_i = 1, \quad u_j = 0, \quad \forall j \neq i,$$

и для произвольного $j \neq i$ имеем:

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}d\omega(e_i, e_j)Q_i.$$

В силу ранее принятых обозначений, имеем:

$$A_{ij} = \left\| \begin{array}{cc} Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} d\omega(e_i, e_j) & Q_j \frac{\partial}{\partial x_j} d\omega(e_i, e_j) \\ 1 & 1 \end{array} \right\|, \quad Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} d\omega(e_i, e_j) = \Delta_{ij}^2 > 0$$

если $i < j$, и

$$A_{ij} = \left\| \begin{array}{cc} Q_j \frac{\partial}{\partial x_j} d\omega(e_j, e_i) & Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} d\omega(e_j, e_i) \\ 1 & 1 \end{array} \right\|, \quad Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} d\omega(e_j, e_i) = -\Delta_{ij}^1,$$

если $i > j$, откуда также следует, что

$$Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} d\omega(e_i, e_j) = \Delta_{ij}^1 > 0.$$

2. Рассмотрим случай множества I , состоящего более чем из одного индекса. Пусть $x \in W_I$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $k \geq 2$. Для произвольного индекса $j \notin I$ найдем скорость изменения функций $d\omega(e_i, e_j)$ ($i \in I$) на траектории системы (10.6). Имеем

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \sum_{m=1}^k \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} d\omega(e_i, e_j) Q_{i_m} U_{i_m}.$$

Подставляя в полученную формулу выражения $U_{i_m} = \frac{\Delta_I^m}{\Delta_I}$, находим

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \sum_{m=1}^k Q_{i_m} \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} d\omega(e_i, e_j) \frac{\Delta_I^m}{\Delta_I}.$$

С точностью до положительного множителя $\frac{1}{\Delta_I}$ производную $\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j)$ можно представить как определитель следующей $(k \times k)$ -матрицы:

$$M = \left\| \begin{array}{ccc} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_i, e_j) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_i, e_j) \end{array} \right\|.$$

Достаточно разложить определитель $|M|$ по последней строке. В самой простой ситуации, когда $i = i_k$ и $j > i_k$, мы сразу получаем

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \frac{\Delta_J^{k+1}}{\Delta_I} > 0,$$

где $J = \{i_1, \dots, i_k, j\}$ (напомним, что в определении матрицы A_I предполагается, что множество индексов I упорядочено по возрастанию).

Для произвольного $i = i_s \in I$ воспользуемся тождеством, которое является следствием условия $\omega \wedge d\omega = 0$ вполне интегрируемости формы ω :

$$\frac{1}{Q_{i_s}}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + \frac{1}{Q_{i_{s+1}}}d\omega(e_j, e_{i_s}) + \frac{1}{Q_j}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}) = 0.$$

Получаем

$$d\omega(e_{i_s}, e_j) = \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_s}, e_j) &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}} \right) \cdot d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}} \frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \right) \cdot d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}) + \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}). \end{aligned}$$

В точках многообразия W_I имеем $d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}) = 0$. В точках W_J выражение $d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j)$ также обращается в нуль, поэтому в достаточно малой окрестности W_J этим выражением можно пренебречь. Таким образом, с точностью до бесконечно малых величин, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_s}, e_j) = \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}} \frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}). \quad (10.9)$$

Заменим в определителе матрицы M последнюю строку на строку

$$\left(Q_{i_1} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}} \frac{\partial}{\partial x_1}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + Q_{i_1} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_1}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}), \dots, \right. \\ \left. Q_{i_k} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}} \frac{\partial}{\partial x_k}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) + Q_{i_k} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_k}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}) \right).$$

Поскольку строка

$$\left(Q_{i_1} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_1}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}), \dots, Q_{i_k} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_k}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}) \right)$$

пропорциональна s -й строке определителя, каждое второе слагаемое вида

$$Q_{i_m} \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_m}d\omega(e_{i_s}, e_{i_{s+1}})$$

в последней строке определителя можно отбросить. В результате, с точностью до величин, обращаяющихся в нуль в точках многообразия $W_{1, \dots, n}$, получаем

$$|M| = \frac{Q_{i_{s+1}}}{Q_{i_s}} \begin{vmatrix} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}d\omega(e_{i_{s+1}}, e_j) \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, в определителе матрицы M заменим сначала i_s на i_{s+1} , затем i_{s+1} на i_{s+2} и так далее, пока не дойдем до последнего индекса i_k . Окончательно получим

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_{i_s}, e_j) = \frac{Q_{i_k} \Delta_J^{k+1}}{Q_{i_s} \Delta_I} > 0.$$

Рассмотрим теперь случай произвольного индекса $j \notin I$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p < j < i_{p+1} < \dots < i_k$, и произвольного $i = i_s \in I$. Достаточно рассмотреть случай $s \leq p$, поскольку для $s \geq p$ все аналогично. Напомним, что нам нужно отделить от нуля величину

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \frac{1}{\Delta_I} \begin{vmatrix} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_i, e_j) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_i, e_j) \end{vmatrix}.$$

Прежде всего, используя соотношение (10.9), заменим последовательно i_s на i_{s+1} , i_{s+2} и т. д., пока не получим i_p вместо i_s . При этом величина $\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j)$, с точностью до величин, обращающихся в нуль на $W_{1, \dots, n}$, станет равной

$$\frac{Q_{i_p}}{\Delta_I Q_{i_s}} \begin{vmatrix} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_p, e_j) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_p, e_j) \end{vmatrix}.$$

Переставляя строки в этом определителе, добьемся, чтобы последняя строка в определителе оказалась на p -м месте:

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \frac{(-1)^{k-p} Q_{i_p}}{\Delta_I Q_{i_s}} \begin{vmatrix} Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_1}, e_{i_2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{p-1}}, e_{i_p}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{p-1}}, e_{i_p}) \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_p, e_j) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_p, e_j) \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_p}, e_{i_{p+1}}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_p}, e_{i_{p+1}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) & \dots & Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_{k-1}}, e_{i_k}) \end{vmatrix}.$$

Остается еще раз воспользоваться формулой (10.9) и заменить строку

$$Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_{i_p}, e_{i_{p+1}}), \quad \dots, \quad Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_{i_p}, e_{i_{p+1}})$$

в полученном определителе на строку

$$Q_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} d\omega(e_j, e_{i_{p+1}}), \quad \dots, \quad Q_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} d\omega(e_j, e_{i_{p+1}}),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}d\omega(e_i, e_j) = \frac{(-1)^{2(k-p)}Q_j}{\Delta_I Q_{i_s}} \Delta_J^{p+1} > 0, \quad J = \{i_1, \dots, i_p, j, i_{p+1}, \dots, i_k\}.$$

Лемма доказана. \square

Следствие 10.1. Стратифицированное многообразие $\bigcup_I W_I$ является аттрактором траекторий системы (10.6).

Доказательство. Действительно, из леммы 10.3 следует, что скорость роста функции $d\omega(e_i, e_j)$ на траектории, принадлежащей W_I , $i \in I$, $j \notin I$, отделена от нуля вблизи любого многообразия W_J , $I \subset J$, $j \in J$. Следовательно, за конечное время каждая такая траектория должна попасть из малой окрестности W_J либо в точки относительной внутреннейности W_J , либо в граничные точки замыкания $\overline{W_J}$. При этом время выхода на каждый такой страт бóльшей коразмерности W_J стремится к нулю, когда начальная точка стремится к W_J . \square

В силу теоремы 4.1, траектории синтеза (10.6) являются экстремалами задачи (10.3), т.е. удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина. То, что в условиях теоремы 10.1 в некоторой открытой области \mathcal{O} пространства \mathbb{R}^n существует поле сопряженных переменных $\Psi(x)$, непрерывно зависящее от точки $x \in \mathcal{O}$, и это поле потенциально, доказывается полностью аналогично тому, как это было сделано в теореме 9.1. Мы опускаем здесь это доказательство. Тем самым, теорема 10.1 доказана.

Пример 10.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= u_1 x \sqrt{yz}, \quad \dot{y} = u_2 xy \sqrt{z}, \quad \dot{z} = u_3 x \sqrt{yz}, \\ u_1 &\geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 1, \end{aligned} \quad (10.10)$$

с некоторыми краевыми условиями, которые мы уточним позднее. Будем рассматривать систему (10.10) в положительном октанте пространства \mathbb{R}^3 . Множество допустимых скоростей представляет собой многогранник, грани которого параллельны координатным плоскостям в \mathbb{R}^3 , независимо от точки, в которой они рассматриваются. Поэтому соответствующее распределение граней многогранника является вполне инволютивным. Убедимся, что условия теоремы 10.1 для задачи (10.10) выполнены. Дифференциальная форма ω для (10.10) имеет вид

$$\omega = \frac{dx}{x\sqrt{yz}} + \frac{dy}{xy\sqrt{z}} + \frac{dz}{x\sqrt{yz}}.$$

Эта форма вполне интегрируема, поскольку

$$\omega = \frac{1}{x\sqrt{yz}} d(x + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z}).$$

Для того, чтобы найти особые многообразия задачи (10.10) и значение управления на них, найдем дифференциал формы ω . Имеем

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{1}{2x\sqrt{y^3z}} - \frac{1}{x^2y\sqrt{z}} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{1}{2xy\sqrt{z^3}} - \frac{1}{2x\sqrt{y^3z}} \right) dy \wedge dz + \\ &\quad + \left(\frac{1}{x^2\sqrt{yz}} - \frac{1}{2x\sqrt{yz^3}} \right) dz \wedge dx = \\ &= \frac{x - 2\sqrt{y}}{2x^2\sqrt{y^3z}} dx \wedge dy + \frac{\sqrt{y} - \sqrt{z}}{2x\sqrt{y^3z^3}} dy \wedge dz + \frac{-2\sqrt{z} + x}{2x^2\sqrt{yz^3}} dx \wedge dz. \end{aligned}$$

На паре базисных векторов значения формы $d\omega$ равны

$$d\omega(e_1, e_2) = \frac{x - 2\sqrt{y}}{2x^2\sqrt{y^3z}}, \quad d\omega(e_2, e_3) = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{z}}{2x\sqrt{y^3z^3}}, \quad d\omega(e_1, e_3) = \frac{x - 2\sqrt{z}}{2x^2\sqrt{yz^3}}.$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} W_{123} &= \left\{ (x, y, z) : y = z = \frac{1}{4}x^2 \right\}, \\ W_{12} &= \left\{ (x, y, z) : y = \frac{1}{4}x^2, y < z \right\}, \\ W_{13} &= \left\{ (x, y, z) : z = \frac{1}{4}x^2, y > z \right\}, \\ W_{23} &= \left\{ (x, y, z) : y = z, y < \frac{1}{4}x^2 \right\}, \\ W_1 &= \left\{ (x, y, z) : y > \frac{1}{4}x^2, z > \frac{1}{4}x^2 \right\}, \\ W_2 &= \left\{ (x, y, z) : y < \frac{1}{4}x^2, y < z \right\}, \\ W_3 &= \left\{ (x, y, z) : z < \frac{1}{4}x^2, z < y \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующие управления равны

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{3} & \text{ при } x \in W_{123}, \\ u_1 = u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = 0 & \text{ при } x \in W_{12}, \\ u_1 = u_3 = \frac{1}{2}, u_2 = 0 & \text{ при } x \in W_{13}, \\ u_2 = u_3 = \frac{1}{2}, u_1 = 0 & \text{ при } x \in W_{23}, \\ u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0 & \text{ при } x \in W_1, \\ u_2 = 1, u_1 = u_3 = 0 & \text{ при } x \in W_2, \\ u_3 = 1, u_1 = u_2 = 0 & \text{ при } x \in W_3. \end{aligned}$$

Выпишем матрицы A_I :

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{vmatrix} \frac{4\sqrt{y}-x}{2x^2y} & \frac{4\sqrt{y}-3x}{4x\sqrt{y^3}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, & A_{23} &= \begin{vmatrix} \frac{3\sqrt{z}-2\sqrt{y}}{4\sqrt{y^3}z} & \frac{2\sqrt{z}-3\sqrt{y}}{4y\sqrt{z^3}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} \frac{4\sqrt{z}-x}{2x^2z} & \frac{4\sqrt{z}-3x}{4x\sqrt{z^3}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, & A_{123} &= \begin{vmatrix} \frac{4\sqrt{y}-x}{2x^2y} & \frac{4\sqrt{y}-3x}{4x\sqrt{y^3}} & \frac{2\sqrt{y}-x}{4xy\sqrt{z}} \\ \frac{\sqrt{z}-\sqrt{y}}{2xyz} & \frac{3\sqrt{z}-2\sqrt{y}}{4\sqrt{y^3}z} & \frac{2\sqrt{z}-3\sqrt{y}}{4y\sqrt{z^3}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В окрестности многообразия W_{123} , с точностью до величин, обращающихся в нуль на самом многообразии W_{123} , имеем

$$A_{12} = A_{13} = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{2}{x^3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} \frac{4}{x^4} & -\frac{4}{x^4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{123} = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{x^4} & -\frac{4}{x^4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Если многообразие цели в рассматриваемой задаче пересекается с многообразием W_{123} , то найдется такая открытая область трехмерного пространства (включающая многообразие цели), в которой условия теоремы 10.1 выполнены. Следовательно, для всех начальных условий из некоторой малой окрестности многообразия W_{123} оптимальные траектории задачи (10.10) выходят на W_{123} по траекториям, принадлежащим стратифицированным многообразиям W_I .

10.3. Пример неинтегрируемой формы. Чтобы продемонстрировать, насколько существенно условие вполне интегрируемости формы в минимизируемом интеграле и как может качественно измениться картина оптимального синтеза для задачи, в которой соответствующая форма оказывается не вполне интегрируемой, рассмотрим следующий пример.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= u_1 x_1 x_2^2 x_3, \quad \dot{x}_2 = u_2 x_1 x_2 x_3^2, \quad \dot{x}_3 = u_3 x_1^2 x_2 x_3, \\ x(0) &= x^0, \quad x(T) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^3. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Будем рассматривать задачу в положительном октанте пространства \mathbb{R}^3 : $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$. Допустимые управления принимают значения из симплекса

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 1.$$

Индикатриса допустимых скоростей образует многогранник, все грани которого вполне интегрируемы. Сведем данную задачу (10.11) к задаче минимизации интеграла от дифференциальной формы ω на включении $\dot{x} \in \mathbb{R}_+^3$. Имеем

$$u_1 dt = \frac{dx_1}{x_1 x_2^2 x_3}, \quad u_2 dt = \frac{dx_2}{x_1 x_2 x_3^2}, \quad u_3 dt = \frac{dx_3}{x_1^2 x_2 x_3},$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_3} + \frac{dx_3}{x_1} \right).$$

Убедимся, что форма ω не является вполне интегрируемой, для чего вычислим 3-форму $\omega \wedge d\omega$. Имеем

$$d\omega = \frac{2x_1 x_3 - x_2^2}{x_1^2 x_2^2 x_3^2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{2x_1 x_2 - x_3^2}{x_1^2 x_2^2 x_3^2} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{2x_2 x_3 - x_1^2}{x_1^3 x_2^2 x_3^2} dx_3 \wedge dx_1.$$

Отсюда следует, что

$$\omega \wedge d\omega = \frac{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2}{x_1^4 x_2^4 x_3^4} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0,$$

т.е. форма ω не имеет интегрирующего множителя.

Особые экстремали. Убедимся, что у задачи (10.11) имеются особые экстремали (особые по всем компонентам управления, или K -особые), но они не являются оптимальными. Для этого выпишем условия принципа максимума Понтрягина. Функция Понтрягина задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\psi, x, u) &= \psi_1 u_1 x_1 x_2^2 x_3 + \psi_2 u_2 x_1 x_2 x_3^2 + \psi_3 u_3 x_1^2 x_2 x_3 = \\ &= x_1 x_2 x_3 (u_1 \psi_1 x_2 + u_2 \psi_2 x_3 + u_3 \psi_3 x_1). \end{aligned}$$

Система уравнений принципа максимума Понтрягина имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 x_1 x_2^2 x_3, & \dot{\psi}_1 &= -\psi_1 u_1 x_1 x_2^2 x_3 - \psi_2 u_2 x_2 x_3^2 - 2\psi_3 u_3 x_1 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= u_2 x_1 x_2 x_3^2, & \dot{\psi}_2 &= -2\psi_1 u_1 x_1 x_2 x_3 - \psi_2 u_2 x_1 x_3^2 - \psi_3 u_3 x_1^2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= u_3 x_1^2 x_2 x_3, & \dot{\psi}_3 &= -\psi_1 u_1 x_1 x_2^2 - 2\psi_2 u_2 x_1 x_2 x_3 - \psi_3 u_3 x_1^2 x_2, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где

$$(u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{если } \psi_1 x_2 > \max\{\psi_2 x_3, \psi_3 x_1\}, \\ (0, 1, 0), & \text{если } \psi_2 x_3 > \max\{\psi_1 x_2, \psi_3 x_1\}, \\ (0, 0, 1), & \text{если } \psi_3 x_1 > \max\{\psi_1 x_2, \psi_2 x_3\}. \end{cases}$$

Лемма 10.4. У задачи (10.11) особые экстремали по компонентам управления (u_1, u_2) заполняют двумерную поверхность $x_2^2 - 2x_1 x_3 = 0$, особые экстремали по компонентам (u_2, u_3) — поверхность $x_3^2 - 2x_2 x_1 = 0$ и особые экстремали по компонентам (u_1, u_3) — поверхность $x_1^2 - 2x_3 x_2 = 0$.

Доказательство. Выпишем сначала уравнения для (12)-особой экстремали. По определению экстремали имеем

$$\psi_1 x_2 \equiv \psi_2 x_3.$$

Продифференцируем это соотношение по t :

$$\begin{aligned} -\psi_1 u_1 x_2^3 x_3 - \psi_2 u_2 x_2^2 x_3^2 - 2\psi_3 u_3 x_1 x_2^2 x_3 + \psi_1 u_2 x_1 x_2 x_3^2 = \\ = -2\psi_1 u_1 x_1 x_2 x_3^2 - \psi_2 u_2 x_1 x_3^3 - \psi_3 u_3 x_1^2 x_3^2 + \psi_2 u_3 x_1^2 x_2 x_3. \end{aligned}$$

С учетом того, что на (12)-особой экстремали $u_3 \equiv 0$, $u_1 + u_2 \equiv 1$, получим

$$-\psi_1 u_1 x_2^3 - \psi_2 u_2 x_2^2 x_3^2 + \psi_1 u_2 x_1 x_2 x_3 = -2\psi_1 u_1 x_1 x_2 x_3 - \psi_2 u_2 x_1 x_3^2.$$

Подставляя соотношение $\psi_1 x_2 = \psi_2 x_3$, находим

$$x_2^2 - 2x_1 x_3 = 0.$$

Управление на этой экстремали равно

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = 0.$$

Для того, чтобы найти (13)- и (23)-особые экстремали, достаточно применить циклические подстановки (123) \rightarrow (231), (123) \rightarrow (312). Так, (23)-особые экстремали заполняют многообразие $x_3^2 - 2x_2 x_1 = 0$, а (13)-особые экстремали заполняют многообразие $x_1^2 - 2x_3 x_2 = 0$. \square

Покажем, что экстремали, особые по двум компонентам управления из трех, удовлетворяют достаточным условиям оптимальности L -особых траекторий раздела 7. Ввиду циклической симметрии достаточно рассмотреть (12)-особые экстремали. Ограничим форму ω на произвольную плоскость $x_3 = x_3^0$. Тогда

$$\omega = \frac{1}{x_1 x_2 x_3^0} \left(\frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_3^0} \right).$$

Любая 1-форма на двумерном многообразии имеет интегрирующий множитель. В частности,

$$\omega = \frac{d(x_3^0 x_1 + \frac{1}{2} x_2^2)}{x_1 x_2^2 (x_3^0)^2}.$$

Остается найти минимум функции $P(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2^2 (x_3^0)^2}$, ограниченной на произвольную кривую вида $x_3^0 x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 = C$. Имеем

$$x_1 = \frac{1}{x_3^0} \left(C - \frac{1}{2} x_2^2 \right),$$

и ограничение функции P имеет вид:

$$P = \frac{1}{(C - \frac{1}{2} x_2^2) x_2^2 x_3^0}, \quad 0 \leq x_2 \leq \sqrt{2C}.$$

Далее,

$$\frac{dP}{dx_2} = \frac{x_2^3 - 2x_2(C - \frac{1}{2} x_2^2)}{(C - \frac{1}{2} x_2^2)^2 x_2^4 x_3^0} = 0 \iff x_2(x_2^2 - C) = 0.$$

Единственный минимум, очевидно, достигается при $x_2 = \sqrt{C}$, $x_1 = \frac{C}{2x_3^0}$, что соответствует пересечению поверхности $x_3^0 x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 = C$ с многообразием особых экстремалей $2x_1 x_3^0 = x_2^2$. Таким образом, любая (12)-особая экстремаль является локально оптимальной и аттрактором неособых экстремалей, по крайней мере в классе управлений, для которых $u_3 \equiv 0$. То же относится и к (13)- и (23)-особым экстремалам.

Лемма 10.5. У задачи (10.11) имеется двупараметрическое семейство экстремалей, которые заполняют внутренность конуса, границей которого служат двумерные поверхности, заполняемые (12)-, (23)- и (13)-особыми экстремальями. Все особые экстремали задачи (10.11) не оптимальны.

Доказательство. По определению (123)-особых экстремалей имеем

$$\psi_1 x_2 \equiv \psi_2 x_3 \equiv \psi_3 x_1,$$

откуда после дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} -\psi_1 u_1 x_2^3 x_3 - \psi_2 u_2 x_2^2 x_3^2 - 2\psi_3 u_3 x_1 x_2^2 x_3 + \psi_1 u_2 x_1 x_2 x_3^2 &\equiv \\ &\equiv -2\psi_1 u_1 x_1 x_2 x_3^2 - \psi_2 u_2 x_1 x_3^3 - \psi_3 u_3 x_1^2 x_3^2 + \psi_2 u_3 x_1^2 x_2 x_3 \equiv \\ &\equiv -\psi_1 u_1 x_1^2 x_2^2 - 2\psi_2 u_2 x_1^2 x_2 x_3 - \psi_3 u_3 x_1^3 x_2 + \psi_3 u_1 x_1 x_2^2 x_3. \end{aligned}$$

Подставляя $\psi_1 x_2 = s$, $\psi_2 x_3 = s$, $\psi_3 x_1 = s$ и сокращая на s , находим

$$\begin{aligned} -u_1 x_2^2 x_3 - u_2 x_2^2 x_3 - 2u_3 x_2^2 x_3 + u_2 x_1 x_3^2 &= \\ &= -2u_1 x_1 x_3^2 - u_2 x_1 x_3^2 - u_3 x_1 x_3^2 + u_3 x_1^2 x_2 = \\ &= -u_1 x_1^2 x_2 - 2u_2 x_1^2 x_2 - u_3 x_1^2 x_2 + u_1 x_2^2 x_3, \end{aligned}$$

откуда, с учетом соотношения $u_1 + u_2 + u_3 = 1$,

$$-(1 + u_3)x_2^2 x_3 + u_2 x_1 x_3^2 = -(1 + u_1)x_1 x_3^2 + u_3 x_1^2 x_2 = -(1 + u_2)x_1^2 x_2 + u_1 x_2^2 x_3.$$

Перегруппировав слагаемые, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -(1 + u_3)x_2^2 x_3 + (2 - u_3)x_1 x_3^2 = u_3 x_1^2 x_2, \\ -(1 + u_1)x_1 x_3^2 + (2 - u_1)x_1^2 x_2 = u_1 x_2^2 x_3, \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$u_1 = \frac{x_1(2x_1 x_2 - x_3^2)}{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1}, \quad u_2 = \frac{x_2(2x_2 x_3 - x_1^2)}{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1}, \quad u_3 = \frac{x_3(2x_1 x_3 - x_2^2)}{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1}.$$

Для того, чтобы управление на особой экстремали было допустимым, необходимо, чтобы все три компоненты управления были неотрицательными, т.е.

$$2x_1 x_2 - x_3^2 \geq 0, \quad 2x_2 x_3 - x_1^2 \geq 0, \quad 2x_1 x_3 - x_2^2 \geq 0.$$

Используя однородность этих соотношений и неотрицательность координат x_1 , x_2 , x_3 , можно поделить неравенства на x_3^2 . Обозначая $a = \frac{x_1}{x_3}$, $b = \frac{x_2}{x_3}$, получим

$$2ab \geq 1, \quad 2b \geq a^2, \quad 2a \geq b^2.$$

На плоскости с координатами (u, v) эти неравенства выделяют криволинейный треугольник с непустой внутренностью.

В трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) соответствующие экстремали заполняют трехмерный конус, границей которого служат части двумерных многообразий, заполненных (12)-, (13)- и (23)-особыми экстремальями задачи. Таким образом, формально у нашей задачи имеется много (123)-особых экстремалей. В частности, центральный луч

$$x_1 \equiv x_2 \equiv x_3, \quad \psi_1 \equiv \psi_2 \equiv \psi_3, \quad u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{3}$$

является (123)-особой экстремалью задачи.

Замечательным обстоятельством является тот факт, что все найденные (123)-экстремали не оптимальны. Действительно, в силу теоремы 4.1, для оптимальности (123)-особых экстремалей

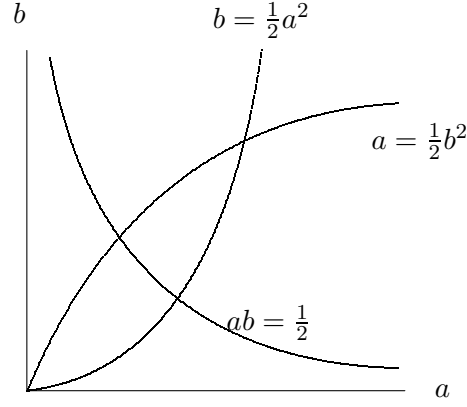


Рис. 15

необходимым условием является обращение в нуль формы $d\omega$ в точках экстремали. Однако условие $d\omega = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$2x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad 2x_2x_3 - x_1^2 = 0, \quad 2x_1x_3 - x_2^2 = 0$$

(иными словами, пересечению всех трех (12)-, (13)- и (23)-особых многообразий), откуда следует, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Лемма доказана. \square

Центральный (t, t, t) луч является инвариантным относительно всех циклических перестановок индексов, и, как мы видели, он является (неоптимальной) экстремалью задачи. Весьма интригующим является вопрос о том, каким образом при оптимальном движении следует сходить с этого луча. Полезно при этом показать непосредственно, при помощи построения явной вариации по управлению, что движение по центральному лучу не оптимально ни на каком малом интервале времени.

Пусть (κ, κ, κ) — произвольная точка на луче (t, t, t) . Построим траекторию, которая начинается в точке (κ, κ, κ) и заключается в последовательном движении сначала вдоль оси O_{x_1} с $u_1 = 1$ на расстояние Δ (Δ — малый параметр) в течение времени τ_1 , затем вдоль оси O_{x_3} с $u_3 = 1$ на расстояние Δ в течение τ_2 и, наконец, вдоль оси O_{x_2} с $u_2 = 1$ на расстояние Δ в течение τ_3 с возвращением в некоторую точку того же луча. Найдем явное выражение для τ_1, τ_2, τ_3 через Δ и подсчитаем, в течение какого времени траектория, двигающаяся по центральному лучу, также попадет из точки (κ, κ, κ) в точку $(\kappa + \Delta, \kappa + \Delta, \kappa + \Delta)$. На первом участке имеем:

$$\dot{x}_1 = x_1x_2^2x_3, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = 0,$$

откуда

$$dt = \frac{dx_1}{x_1x_2^2x_3} \iff \tau_1 = \int_{\kappa}^{\kappa+\Delta} \frac{dx}{x\kappa^3} = \frac{1}{\kappa^3} \ln \left(1 + \frac{\Delta}{\kappa} \right).$$

На втором участке

$$\dot{x}_3 = x_1^2x_2x_3, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

откуда

$$dt = \frac{dx_3}{x_1^2x_2x_3} \iff \tau_2 = \int_{\kappa}^{\kappa+\Delta} \frac{dx}{x\kappa(\kappa+\Delta)^2} = \frac{1}{\kappa^3} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta}{\kappa} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa} \right)^2}.$$

На третьем участке

$$\dot{x}_2 = x_1x_2x_3^2, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_3 = 0,$$

откуда

$$dt = \frac{dx_2}{x_1 x_2 x_3^2} \iff \tau_3 = \int_{\kappa}^{\kappa+\Delta} \frac{dx}{x(\kappa + \Delta)^3} = \frac{1}{\kappa^3} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right)^3}.$$

Суммарное время движения на построенной вариации равно

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{1}{\kappa^3} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right) \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right)^3}\right) = \frac{1}{\kappa^3} \left(3\frac{\Delta}{\kappa} - \frac{13}{2}\left(\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2 + o\left(\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2\right).$$

С другой стороны, движение вдоль луча (t, t, t) с управлением $u_1 = u_2 = u_3 = 1/3$ в ту же самую точку займет время τ ,

$$\tau = 3 \int_{\kappa}^{\kappa+\Delta} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{\kappa^3} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right)^3}\right) = \frac{1}{\kappa^3} \left(3\frac{\Delta}{\kappa} - 6\left(\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2 + o\left(\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2\right).$$

Следовательно, при достаточно малых Δ движение по проварьированной траектории быстрее, чем по центральному лучу.

Чтобы представить себе, как может быть устроен оптимальный синтез в задаче минимизации интеграла с неинтегрируемой формой и что является аналогом магистрали в этой ситуации, рассмотрим частный случай задачи (10.11), когда условие $x(T) \in \mathcal{M}$ отсутствует, и мы рассматриваем выход решений соответствующей управляемой системы на бесконечность за наименьшее время (это возможно, поскольку правая часть системы имеет порядок по переменным x_1, x_2, x_3 , больший 2). Итак, рассмотрим класс кривых $x(\cdot)$, неограниченно продолжимых в пространстве x . Формально задача имеет вид

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{x(\cdot)} \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left(\frac{dx_1}{x_2} + \frac{dx_2}{x_3} + \frac{dx_3}{x_1} \right) \rightarrow \min, \quad \dot{x}(\cdot) \in \mathbb{R}_+^3, \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}_+^3.$$

Можно показать, что, несмотря на то, что соответствующий интеграл является несобственным, у задачи имеется решение, на котором минимизируемый функционал сходится. При выбранных нами краевых условиях задача обладает однопараметрической группой симметрий, которая позволяет понизить размерность управляемой системы. Именно, рассмотрим однопараметрическую группу диффеоморфизмов пространства \mathbb{R}^3 :

$$g_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g_\lambda(x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Поставим в соответствие произвольному решению $x(t)$ системы $\dot{x}(\cdot) \in \mathbb{R}_+^3$ с начальными условиями $x(0)$ еще одно решение, $x_\lambda(t) = g_\lambda(x(t))$, с начальными условиями $\lambda x(0)$. Однородность функционала влечет за собой равенство

$$\mathcal{J}(x_\lambda(\cdot)) = \frac{1}{\lambda^3} \mathcal{J}(x(\cdot)).$$

Применяя данное преобразование к оптимальным траекториям задачи, получим, что оно переводит оптимальные траектории с начальными условиями x^0 в оптимальные траектории с начальными условиями λx^0 .

Наличие однопараметрической группы симметрий, действующей на множестве оптимальных траекторий, позволяет сопоставить трехмерной системе дифференциальных уравнений, определяющей оптимальный синтез в пространстве \mathbb{R}^3 , некоторую динамическую систему на факторпространстве пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ относительно действия группы g_λ . Такая система определена с точностью до потраекторной эквивалентности (т.е. однозначно определено лишь направление вектора фазовой

скорости системы, но не его длина) и называется факторсистемой. В качестве факторпространства $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / g_\lambda$ можно выбрать, например, плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Тогда образ оптимальной траектории на симплексе

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

задается отображением

$$x(t) \rightarrow \sigma(t) = \frac{x(t)}{x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)}.$$

Экстремали задачи (10.11), особые по двум компонентам управления из трех, определяют криволинейный треугольник на Σ :

$$\Sigma_{12} = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_2^2 - 2x_1x_3 = 0\},$$

$$\Sigma_{23} = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_3^2 - 2x_1x_2 = 0\},$$

$$\Sigma_{13} = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1^2 - 2x_2x_3 = 0\}$$

с вершинами в точках $\Sigma_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (пересечение Σ_{12} с Σ_{23}), $\Sigma_2(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (пересечение Σ_{23} с Σ_{13}), $\Sigma_3(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (пересечение Σ_{12} с Σ_{13}). Движению с управлением $u_3 = 0$ отвечает движение вдоль Σ_{12} в направлении от точки Σ_1 к точке Σ_3 . Траектория факторсистемы с $u_2 = 0$ движется вдоль Σ_{13} от точки Σ_3 к точке Σ_2 . Наконец, с $u_1 = 0$ соответствующая траектория движется по Σ_{23} от Σ_2 к Σ_1 .

Отметим, однако, что переключение с любого управления, особого по двум компонентам из трех, возможно только на неособый режим. Действительно, переключение с одного особого режима на другой может происходить только в тех точках особых экстремалей, в которых одновременно выполнены все три равенства $\psi_1x_2 = \psi_2x_3 = \psi_3x_1$, что, как мы видели, возможно только при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Таким образом, циклическое чередование особых режимов с $u_1 = 1$ на $u_3 = 1$ и затем на $u_2 = 1$ не удовлетворяет условиям принципа максимума Понтрягина и потому не оптимально.

Наличие группы симметрий у исходной задачи индуцирует однородность системы уравнений принципа максимума (10.12) относительно некоторой группы. Заметим, однако, что умножение координат ψ произвольного решения уравнений (10.12) не изменяет систему. Поэтому система обладает двупараметрической группой симметрий, переводящей траектории системы с одними начальными условиями в траектории с другими начальными условиями:

$$\begin{aligned} (\psi(t), x(t), u(t)) &\rightarrow (\psi_{\lambda, \nu}(t), x_{\lambda, \nu}(t), u_{\lambda, \nu}(t)), \\ (\psi_{\lambda, \nu})_i(t) &= \nu \psi_i(\lambda^3 t), \quad (x_{\lambda, \nu})_i = \lambda x_i(\lambda^3 t), \quad (u_{\lambda, \nu})_i = u_i(\lambda^3 t), \\ \lambda &\in \mathbb{R}_+, \quad \nu \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

В качестве факторпространства пространства \mathbb{R}^6 относительно группы

$$(x, \psi) \rightarrow (\mu x, \nu \psi)$$

удобно выбрать четырехмерную поверхность $\bar{\Sigma}$ в \mathbb{R}^6 , задаваемую уравнениями

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad \psi_1 = 1.$$

На поверхности $\bar{\Sigma}$ система (10.12) определяет с точностью до потраекторной эквивалентности некоторую динамическую систему, которую мы также будем называть факторсистемой. В следующем разделе мы покажем, что факторсистема обладает по крайней мере одним предельным циклом, который является притягивающим множеством для некоторого двупараметрического семейства экстремалей исходной задачи.

Вычисление предельного цикла факторсистемы. Какие могут быть притягивающие множества у факторсистемы системы (10.12)? Найдём уравнение простейшего возможного цикла, состоящего из трех звеньев и отвечающего движению по неособым экстремалам задачи, последовательно чередующим сначала управление $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$, затем управление $u_3 = 1, u_1 = u_2 = 0$ и, наконец, управление $u_2 = 1, u_1 = u_3 = 0$, с которым экстремаль возвращается на орбиту начальной точки.

Итак, пусть $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$ — начальная точка траектории системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 x_1 x_2^2 x_3, & \dot{\psi}_1 &= -\psi_1 u_1 x_2^2 x_3 - \psi_2 u_2 x_2 x_3^2 - 2\psi_3 u_3 x_1 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= u_2 x_1 x_2 x_3^2, & \dot{\psi}_2 &= -2\psi_1 u_1 x_1 x_2 x_3 - \psi_2 u_2 x_1 x_3^2 - \psi_3 u_3 x_1^2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= u_3 x_1^2 x_2 x_3, & \dot{\psi}_3 &= -\psi_1 u_1 x_1 x_2^2 - 2\psi_2 u_2 x_1 x_2 x_3 - \psi_3 u_3 x_1^2 x_2, \end{aligned} \quad (10.13)$$

где

$$(u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{если } \psi_1 x_2 > \max\{\psi_2 x_3, \psi_3 x_1\}, \\ (0, 1, 0), & \text{если } \psi_2 x_3 > \max\{\psi_1 x_2, \psi_3 x_1\}, \\ (0, 0, 1), & \text{если } \psi_3 x_1 > \max\{\psi_1 x_2, \psi_2 x_3\} \end{cases}$$

с требуемыми свойствами. Обозначим τ_1 время движения по соответствующей траектории с управлением $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$; τ_2 — время движения по ее продолжению с управлением $u_3 = 1, u_1 = u_2 = 0$ и, наконец τ_3 — время движения с $u_2 = 1, u_1 = u_3 = 0$. При этом в момент $t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ траектория должна попасть в точку $(\lambda_1 x_1^0, \lambda_1 x_2^0, \lambda_1 x_3^0, \lambda_2 \psi_1^0, \lambda_2 \psi_2^0, \lambda_2 \psi_3^0)$ с некоторыми $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Чтобы такое движение стало возможным, должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) x_2(t) &> \max\{\psi_2(t) x_3(t), \psi_3(t) x_1(t)\} && \text{при } t \in (0, \tau_1), \\ \psi_3(t) x_1(t) &> \max\{\psi_1(t) x_2(t), \psi_2(t) x_3(t)\} && \text{при } t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2), \\ \psi_2(t) x_3(t) &> \max\{\psi_1(t) x_2(t), \psi_3(t) x_1(t)\} && \text{при } t \in (\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3). \end{aligned}$$

Ввиду однородности можно считать, что $\tau_1 = 1$. Обозначим для краткости $\tau_2 = \tau, \tau_3 = s, x_i(1) = x_i^1, \psi_i(1) = \psi_i^1, x_i(1 + \tau) = x_i^2, \psi_i(1 + \tau) = \psi_i^2, i = 1, 2, 3$. Интегрируя систему на участке $(0, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 e^{(x_2^0)^2 x_3^0}, & \psi_1^1 &= \psi_1^0 e^{-(x_2^0)^2 x_3^0}, \\ x_2^1 &= x_2^0, & \psi_2^1 &= \psi_2^0 - 2\psi_1^0 x_1^0 x_2^0 x_3^0, \\ x_3^1 &= x_3^0, & \psi_3^1 &= \psi_3^0 - \psi_1^0 x_1^0 (x_2^0)^2. \end{aligned}$$

При интегрировании мы учитывали, что при управлении $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0)$ на решениях системы (10.13) выполнено тождество

$$\frac{d}{dt}(\psi_1 x_1) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi_1 x_1 \equiv \psi_1^0 x_1^0.$$

Условие переключения управления в моменты $t = 0$ и $t = 1$ сводятся к уравнениям

$$\psi_1^0 x_2^0 = \psi_2^0 x_3^0, \quad \psi_1^1 x_2^1 = \psi_3^1 x_1^1.$$

Для интервалов $(1, 1 + \tau)$ и $(1 + \tau, 1 + \tau + s)$ все аналогично:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_1^1, & \lambda_1 x_1^0 &= x_1^2, \\ x_2^2 &= x_2^1, & \lambda_1 x_2^0 &= x_2^2 e^{x_1^1 (x_3^1)^2 s}, \\ x_3^2 &= x_3^1 e^{(x_1^1)^2 x_2^1 \tau}, & \lambda_1 x_3^0 &= x_3^2, \\ \psi_1^2 &= \psi_1^1 - 2\psi_3^1 x_1^1 x_2^1 x_3^1 \tau, & \lambda_2 \psi_1^0 &= \psi_1^2 - \psi_2^2 x_2^2 (x_3^2)^2 s, \\ \psi_2^2 &= \psi_2^1 - \psi_3^1 (x_1^1)^2 x_3^1 \tau, & \lambda_2 \psi_2^0 &= \psi_2^2 e^{-x_1^1 (x_3^1)^2 s}, \\ \psi_3^2 &= \psi_3^1 e^{-(x_1^1)^2 x_2^1 \tau}, & \lambda_2 \psi_3^0 &= \psi_3^2 - 2\psi_2^2 x_1^1 x_2^2 x_3^2 s, \end{aligned}$$

где τ и s определяются из соотношений

$$\begin{aligned} (\psi_3^1 e^{-(x_1^1)^2 x_2^1 \tau}) x_1^1 &= (\psi_2^1 - \psi_3^1 (x_1^1)^2 x_3^1 \tau) (x_3^1 e^{(x_1^1)^2 x_2^1 \tau}), \\ (\psi_2^2 e^{-x_1^1 (x_3^1)^2 s}) x_3^2 &= (\psi_1^2 - \psi_3^1 x_2^2 (x_3^2)^2 s) (x_2^2 e^{x_1^1 (x_3^1)^2 s}) \end{aligned}$$

соответственно.

Вспомним, однако, что система (10.13) обладает циклической симметрией: циклические перестановки индексов $(123) \rightarrow (231) \rightarrow (312)$ не изменяют уравнений движения. Геометрически это означает, что поворот в плоскости, перпендикулярной к центральному лучу $(t, t, t), t \in \mathbb{R}_+$, на угол

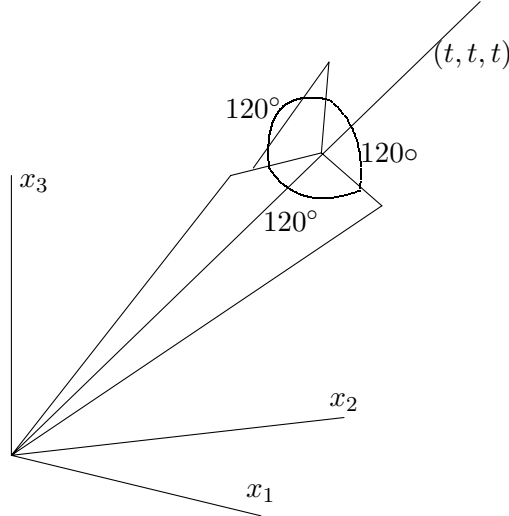


Рис. 16

в 120° переводит оптимальные траектории задачи в оптимальные. Аналогичное преобразование индексов оставляет неизменной и систему (10.12) в расширенном фазовом пространстве. Будем искать такой цикл факторсистемы системы (10.12), который инвариантен относительно таких поворотов.

Утверждение 10.1. *Имеется ровно одно однопараметрическое семейство решений системы (10.12), каждая траектория которого через каждые три переключения возвращается на одну и ту же орбиту группы $(x, \psi) \rightarrow (\mu x, \nu \psi)$ и которое инвариантно относительно действия группы перестановок индексов $(123) \rightarrow (231) \rightarrow (312)$.*

Доказательство. Найдем начальные условия $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$, для которых точка $(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1)$, в которую попадает траектория в момент первого переключения управления, связана с начальной точкой соотношениями

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \mu x_2^0, & x_2^1 &= \mu x_3^0, & x_3^1 &= \mu x_1^0, \\ \psi_1^1 &= \nu \psi_2^0, & \psi_2^1 &= \nu \psi_3^0, & \psi_3^1 &= \nu \psi_1^0. \end{aligned}$$

Тогда точка (x^1, ψ^1) через 1 переключение автоматически перейдет в точку (x^2, ψ^2) ,

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \mu x_2^1 = \mu^2 x_3^0, & x_2^2 &= \mu x_3^1 = \mu^2 x_1^0, & x_3^2 &= \mu x_1^1 = \mu^2 x_2^0, \\ \psi_1^2 &= \nu \psi_2^1 = \nu^2 \psi_3^0, & \psi_2^2 &= \nu \psi_3^1 = \nu^2 \psi_1^0, & \psi_3^2 &= \nu \psi_1^1 = \nu^2 \psi_2^0, \end{aligned}$$

с теми же значениями параметров μ, ν , что и для точки (x^0, ψ^0) . В свою очередь, точка (x^2, ψ^2) к моменту третьего переключения управления перейдет в точку

$$\begin{aligned} x_1^3 &= \mu x_2^2 = \mu^3 x_1^0, & x_2^3 &= \mu x_3^2 = \mu^3 x_2^0, & x_3^3 &= \mu x_1^2 = \mu^3 x_3^0, \\ \psi_1^3 &= \nu \psi_2^2 = \nu^3 \psi_1^0, & \psi_2^3 &= \nu \psi_3^2 = \nu^3 \psi_2^0, & \psi_3^3 &= \nu \psi_1^2 = \nu^3 \psi_3^0. \end{aligned}$$

Это дает искомую точку с $\lambda_1 = \mu^3$ и $\lambda_2 = \nu^3$.

В результате приходим к следующим семи уравнениям с восемью неизвестными $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0, \mu, \nu)$:

$$\begin{aligned} \mu x_2^0 &= x_1^0 e^{(x_2^0)^2 x_3^0}, & \mu x_3^0 &= x_2^0, & \mu x_1^0 &= x_3^0, \\ \nu \psi_2^0 &= \psi_1^0 e^{-(x_2^0)^2 x_3^0}, & \nu \psi_3^0 &= \psi_2^0 - 2\psi_1^0 x_1^0 x_2^0 x_3^0, & \nu \psi_1^0 &= \psi_3^0 - \psi_1^0 x_1^0 (x_2^0)^2, \\ & & \psi_1^0 x_2^0 &= \psi_2^0 x_3^0 & & \end{aligned}$$

(отметим, что условие переключения в момент $t = 1$, $\psi_1^1 x_2^1 = \psi_3^1 x_1^1$, на рассматриваемом цикле является автоматическим следствием соотношения $\psi_1^0 x_2^0 = \psi_2^0 x_3^0$). Получаем

$$\begin{aligned} x_3^0 &= \mu x_1^0, & x_2^0 &= \mu^2 x_1^0, & \mu^3 &= e^{\mu^5 (x_1^0)^3} & \left(\Leftrightarrow (x_1^0)^3 = \frac{3 \ln \mu}{\mu^5} \right), \\ \psi_2^0 &= \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\psi_1^0}{\mu^3}, & \psi_3^0 &= \psi_1^0 (\nu + \mu^4 (x_1^0)^3), & \nu (\nu + \mu^4 (x_1^0)^3) &= \frac{1}{\nu \mu^3} - 2\mu^3 (x_1^0)^3, \\ & & \mu^2 &= \frac{1}{\nu \mu^2}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что координаты (x_1^0, x_2^0, x_3^0) однозначно выражаются через параметры μ и ν , координаты $(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$ определены с точностью до умножения на произвольную постоянную (этот произвол можно устранить, нормировав функции $\psi(t)$, например, условием $\mathcal{H} = 1$), а параметры μ и ν определяются из соотношений

$$\nu = \frac{1}{\mu^4}, \quad \frac{1}{\mu^8} + \frac{3 \ln \mu}{\mu^5} = \mu - \frac{6 \ln \mu}{\mu^2}.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$3 \ln \mu = \frac{\mu^6 - \frac{1}{\mu^3}}{1 + 2\mu^3}.$$

Нетрудно проверить, что функция

$$f(\mu) = -3 \ln \mu + \frac{\mu^6 - \frac{1}{\mu^3}}{1 + 2\mu^3}$$

при $\mu \geq 1$ строго выпукла ($f''(\mu) \geq 0$) и имеет ровно два корня $\mu_0 = 1$, $\mu_1 \approx 1,2362$. Корень μ_1 как раз и определяет искомый трехзвенный цикл факторсистемы, симметричный относительно поворотов вокруг центрального луча в пространстве (x_1, x_2, x_3) . Координаты начальной точки на таком цикле равны

$$\begin{aligned} x_1^0 &= 0,6039, & x_2^0 &= 0,9231, & x_3^0 &= 0,7467, \\ \psi_1^0 &= p, & \psi_2^0 &= 1,2363 \cdot p, & \psi_3^0 &= 0,9428 \cdot p. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что все необходимые условия типа неравенства для существования предельного цикла при данных начальных условиях выполнены.

Нормируем координаты $(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$, положив $p = 1$. Обозначим $A_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$,

$$\begin{aligned} x_1^0 &= 0,6040, & x_2^0 &= 0,9231, & x_3^0 &= 0,7467, \\ \psi_1^0 &= 1, & \psi_2^0 &= 1,2363, & \psi_3^0 &= 0,9428. \end{aligned}$$

Пусть $A_1(x^1, \psi^1)$, $A_2(x^2, \psi^2)$ — образы точки A_0 при первом и втором переключении управления соответственно. По определению циклической траектории имеем

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \mu_1 x_2^0, & x_2^1 &= \mu_1 x_3^0, & x_3^1 &= \mu_1 x_1^0, \\ \psi_1^1 &= \frac{1}{\mu_1^4} \psi_2^0, & \psi_2^1 &= \frac{1}{\mu_1^4} \psi_3^0, & \psi_3^1 &= \frac{1}{\mu_1^4} \psi_1^0, \\ x_1^2 &= \mu_1^2 x_3^0, & x_2^2 &= \mu_1^2 x_1^0, & x_3^2 &= \mu_1^2 x_2^0, \\ \psi_1^2 &= \frac{1}{\mu_1^8} \psi_3^0, & \psi_2^2 &= \frac{1}{\mu_1^8} \psi_1^0, & \psi_3^2 &= \frac{1}{\mu_1^8} \psi_2^0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 1,1412, & x_2^1 &= 0,9231, & x_3^1 &= 0,7467, \\ \psi_1^1 &= 0,5293, & \psi_2^1 &= 0,4036, & \psi_3^1 &= 0,4281, \\ x_1^2 &= 1,1412, & x_2^2 &= 0,9231, & x_3^2 &= 1,4108, \\ \psi_1^2 &= 0,1728, & \psi_2^2 &= 0,1833, & \psi_3^2 &= 0,2266. \end{aligned}$$

Время движения по второму и третьему участку непрерывности управления для рассматриваемой траектории равны соответственно

$$\tau = \frac{1}{\mu_1^3} = 0,5293, \quad s = \frac{1}{\mu_1^6} = 0,2801.$$

Утверждение доказано. \square

Отметим, что моменты переключения на построенном семействе траекторий являются членами убывающей геометрической прогрессии, поэтому траектории выходят на бесконечность (по компонентам x) за конечное время. Компоненты ψ траекторий при этом стремятся к нулю.

Структура траекторий гамильтоновой системы в окрестности предельного цикла. Предельному циклу факторсистемы, найденному в предыдущем пункте, в трехмерном пространстве с координатами (x_1, x_2, x_3) отвечает двумерный конус K_0 с вершиной в начале координат, двумерные грани которого образованы прямыми, проходящими через начало координат и через точки дуг траекторий $[A'_0 A'_1]$, $[A'_1 A'_2]$ и $[A'_2 A'_3]$, где A'_0, A'_1, A'_2 — проекции точек A_0, A_1, A_2 на пространство (x_1, x_2, x_3) , а $A'_3 = \mu_1^3 A'_0$. Мы хотим найти все траектории системы (10.13), которые при росте t приближаются к K_0 (по крайней мере, в угловой метрике). Иными словами, мы хотели бы определить структуру траекторий факторсистемы в окрестности предельного цикла, в частности, найти размерность устойчивого интегрального подмногообразия цикла. Эта стандартная задача для дифференциальных уравнений будет сведена к нахождению устойчивого инвариантного многообразия отображения последования Пуанкаре в окрестности цикла. Объясним, как определяется отображение последования в данном случае.

Обозначим через

$$S_1 = \{(x, \psi) \mid \psi_1 x_2 = \psi_2 x_3\}, \quad S_2 = \{(x, \psi) \mid \psi_1 x_2 = \psi_3 x_1\}, \quad S_3 = \{(x, \psi) \mid \psi_2 x_3 = \psi_3 x_1\}$$

три поверхности переключения системы с режима $u = (1, 0, 0)$ на $u = (0, 0, 1)$, с режима $u = (0, 0, 1)$ на $u = (0, 1, 0)$ и с режима $u = (0, 1, 0)$ на $u = (1, 0, 0)$ соответственно. Рассмотрим начальные условия траекторий системы (10.13), принадлежащие поверхности S_1 . В малой окрестности точки $A_0 \in S_1$ траектории (10.13) пересекают поверхность S_1 трансверсально, так что все эти траектории с управлением $(1, 0, 0)$ приходят на поверхность S_2 , которую также пересекают трансверсально. Возникает отображение

$$\Phi_1 : S_1 \rightarrow S_2,$$

которое сопоставляет каждой точке $(x^0, \psi^0) \in S_1$ точку поверхности S_2 , в которой соответствующая траектория системы (10.13) с начальными условиями (x^0, ψ^0) впервые пересечет S_2 . В силу трансверсального пересечения траекториями поверхностей S_1, S_2 , отображение Φ_1 является диффеоморфизмом в малой окрестности точки A_0 . При этом $\Phi_1(A_0) = A_1$.

Продолжим построение и рассмотрим отображение Φ_2 поверхности S_2 на поверхность S_3 , которое сопоставляет произвольной точке $(x^1, \psi^1) \in S_2$ точку поверхности S_3 , в которой траектория (10.13) с начальной точкой (x^1, ψ^1) , двигаясь с управлением $(0, 0, 1)$, впервые пересечет S_3 . В окрестности точки A_1 отображение Φ_2 является диффеоморфизмом. Таким же образом определяется отображение последования $\Phi_3 : S_3 \rightarrow S_1$. Рассмотрим теперь композицию

$$\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1.$$

Это отображение переводит поверхность S_1 в себя. Используя наличие двупараметрической группы симметрий у системы (10.13), «подправим» теперь отображение Φ так, чтобы в результате у нового

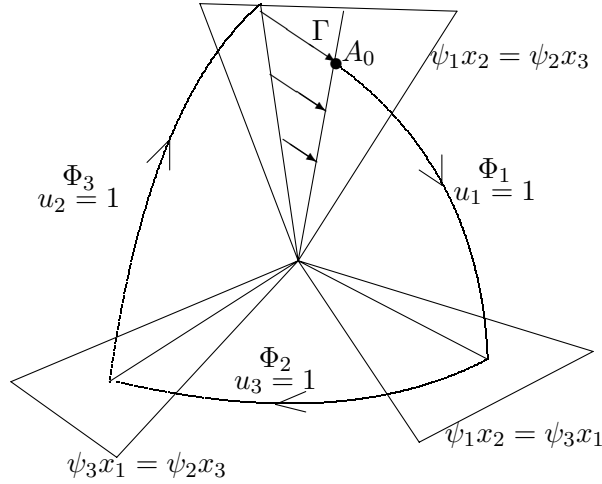


Рис. 17

отображения появилась неподвижная точка. Именно, положим

$$\Gamma : S_1 \rightarrow S_1, \quad \Gamma(x, \psi) = (x/\mu_1^3, \mu_1^{12}\psi),$$

где $\mu_1 = 1,2362$ — найденное ранее значение параметра.

Отображение $\Gamma \circ \Phi : S_1 \rightarrow S_1$ переводит точку A_0 в себя. Если мы найдем многообразие $\mathfrak{N} \subset S_1$, содержащее точку A_0 и инвариантное относительно отображения $\Gamma \circ \Phi$, то его проекция на пространство x даст многообразие \mathfrak{N}' , из каждой точки которого выходит экстремаль, возвращающаяся на конус, натянутый на \mathfrak{N}' , через три последовательных переключения управления (что и требовалось).

Таким образом, задача поиска устойчивого многообразия предельного цикла факторсистемы свелась к вычислению устойчивого инвариантного многообразия отображения $\Gamma \circ \Phi$ в неподвижной точке A_0 . Ниже, в разделе 15, будет сформулирована и доказана теорема об инвариантном многообразии диффеоморфизма. Для доказательства существования и определения размерности такого многообразия достаточно найти дифференциал отображения в неподвижной точке и исследовать его спектр.

Лемма 10.6. *Дифференциал отображения $\Gamma \circ \Phi$ в точке A_0 имеет одно собственное значение, по модулю меньшее 1, два собственных значения, равных 1, и два собственных значения, по модулю больших 1.*

Доказательство. Доказательство сводится к прямому вычислению дифференциала $\Gamma \circ \Phi$. Эта процедура, однако, потребует от читателя некоторого терпения. Выпишем отображение Φ_1 в координатах и найдем его дифференциал в точке A_0 :

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto x_1^1 = x_1 e^{(x_2)^2 x_3 t}, & \psi_1 &\mapsto \psi_1^1 = \psi_1 e^{-(x_2)^2 x_3 t}, \\ x_2 &\mapsto x_2^1 = x_2, & \psi_2 &\mapsto \psi_2^1 = \psi_2 - 2\psi_1 x_1 x_2 x_3 t, \\ x_3 &\mapsto x_3^1 = x_3, & \psi_3 &\mapsto \psi_3^1 = \psi_3 - \psi_1 x_1 (x_2)^2 t, \end{aligned}$$

где $t = t(x, \psi)$ — первый положительный корень уравнения $f(t, x, \psi) = 0$,

$$f(t, x, \psi) = \psi_1 e^{-(x_2)^2 x_3 t} x_2 - (\psi_3 - \psi_1 x_1 (x_2)^2 t) x_1 e^{(x_2)^2 x_3 t}.$$

Такая запись отображения Φ_1 требует разъяснений. Многообразие S_1 задается уравнением $\psi_1 x_2 = \psi_2 x_3$ и имеет размерность 5. Выписанные соотношения определяют отображение шестимерного пространства с координатами (x, ψ) на себя. Однако ограничение этого отображения на поверхность S_1 переводит эту пятимерную поверхность в пятимерную поверхность S_2 . Поэтому мы будем

рассматривать определенное нами отображение $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, вычислим его дифференциал в точке A_0 , а затем ограничим этот дифференциал на касательную плоскость к S_1 в точке A_0 . Соотношения, которые получаются при этом, выглядят несколько проще, чем при подсчете соответствующего дифференциала в какой-либо системе координат на поверхности S_1 непосредственно.

Вычислим градиент функции $t(x, \psi)$ в точке A_0 . По теореме о неявной функции имеем

$$\frac{\partial t}{\partial x_i} = -\frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \psi_i} = -\frac{\partial f / \partial \psi_i}{\partial f / \partial t},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\psi_1(x_2)^3 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} + \psi_1(x_1)^2 (x_2)^2 e^{(x_2)^2 x_3 t} - (\psi_3 - \psi_1 x_1 (x_2)^2 t) x_1 (x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} = \\ &= -\psi_1^1(x_2^0)^3 x_3^0 + \psi_1^0 x_1^0 (x_2^0)^2 x_1^1 - \psi_3^1 x_1^1 (x_2^0)^2 x_3^0 = -0,0344 \end{aligned}$$

(здесь в последней строке использованы координаты точки A_0 , снабженные верхним индексом 0, и координаты точки A_1 , снабженные верхним индексом 1);

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\psi_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} + 2\psi_1 x_1 (x_2)^2 t e^{(x_2)^2 x_3 t} = -\psi_3^0 \mu_1^3 + 2\psi_1^0 x_1^1 (x_2^0)^2 = 0,1635,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \psi_1 e^{-(x_2)^2 x_3 t} - 2\psi_1 (x_2)^2 x_3 t e^{-(x_2)^2 x_3 t} + \\ &+ 2\psi_1 (x_1)^2 x_2 t e^{(x_2)^2 x_3 t} - 2(\psi_3 - \psi_1 x_1 (x_2)^2 t) x_1 x_2 x_3 t e^{(x_2)^2 x_3 t} = \\ &= \psi_1^1 - 2\psi_1^1 (x_2^0)^2 x_3^0 + 2\psi_1^0 x_1^0 x_1^1 x_2^0 - 2\psi_3^1 x_1^1 x_2^0 x_3^0 = 0,4548, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_3} &= -\psi_1 (x_2)^3 t e^{-(x_2)^2 x_3 t} - (\psi_3 - \psi_1 x_1 (x_2)^2 t) x_1 (x_2)^2 t e^{(x_2)^2 x_3 t} = \\ &= -\psi_1^1 (x_2^0)^3 - \psi_3^1 x_1^1 (x_2^0)^2 = -0,8326, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_1} = e^{-(x_2)^2 x_3 t} x_2 + (x_1)^2 (x_2)^2 t e^{(x_2)^2 x_3 t} = \frac{x_2^0}{\mu_1^3} + x_1^0 x_1^1 (x_2^0)^2 = 1,0758,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_3} = -x_1 e^{(x_2)^2 x_3 t} = -x_1^1 = -1,1412.$$

Подставляя координаты точек A_0 и A_1 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x_1} &= 4,7537, & \frac{\partial t}{\partial x_2} &= 13,2241, & \frac{\partial t}{\partial x_3} &= -24,2113, \\ \frac{\partial t}{\partial \psi_1} &= 31,2853, & \frac{\partial t}{\partial \psi_2} &= 0, & \frac{\partial t}{\partial \psi_3} &= -33,1838. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выписать дифференциал отображения Φ_1 в точке A_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^1}{\partial x_1} &= e^{(x_2)^2 x_3 t} + x_1 (x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial x_1} = 5,3409, \\ \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2} &= 2x_1 x_2 x_3 t e^{(x_2)^2 x_3 t} + x_1 (x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial x_2} = 11,1746, \\ \frac{\partial x_1^1}{\partial x_3} &= x_1 (x_2)^2 t e^{(x_2)^2 x_3 t} + x_1 (x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial x_3} = -16,6065, \\ \frac{\partial x_1^1}{\partial \psi_1} &= x_1 (x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial \psi_1} = 22,7149, \\ \frac{\partial x_1^1}{\partial \psi_2} &= x_1 (x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial \psi_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_1^1}{\partial \psi_3} = x_1(x_2)^2 x_3 e^{(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial \psi_3} = -24,0934.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2^1}{\partial x_3} = \frac{\partial x_2^1}{\partial \psi_1} = \frac{\partial x_2^1}{\partial \psi_2} = \frac{\partial x_2^1}{\partial \psi_3} &= 0, & \frac{\partial x_2^1}{\partial x_2} &= 1; \\ \frac{\partial x_3^1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3^1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3^1}{\partial \psi_1} = \frac{\partial x_3^1}{\partial \psi_2} = \frac{\partial x_3^1}{\partial \psi_3} &= 0, & \frac{\partial x_3^1}{\partial x_3} &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1^1}{\partial x_1} &= -\psi_1(x_2)^2 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial x_1} = -1,6008, \\ \frac{\partial \psi_1^1}{\partial x_2} &= -2\psi_1 x_2 x_3 t e^{-(x_2)^2 x_3 t} - \psi_1(x_2)^2 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial x_2} = -5,1828, \\ \frac{\partial \psi_1^1}{\partial x_3} &= -\psi_1(x_2)^2 t e^{-(x_2)^2 x_3 t} - \psi_1(x_2)^2 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial x_3} = 7,7022, \\ \frac{\partial \psi_1^1}{\partial \psi_1} &= e^{-(x_2)^2 x_3 t} - \psi_1(x_2)^2 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial \psi_1} = -10,006, \\ \frac{\partial \psi_1^1}{\partial \psi_2} &= -\psi_1(x_2)^2 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial \psi_2} = 0, \\ \frac{\partial \psi_1^1}{\partial \psi_3} &= -\psi_1(x_2)^2 x_3 e^{-(x_2)^2 x_3 t} \frac{\partial t}{\partial \psi_3} = 11,1746; \\ \frac{\partial \psi_2^1}{\partial x_1} &= -2\psi_1 x_2 x_3 t - 2\psi_1 x_1 x_2 x_3 \frac{\partial t}{\partial x_1} = -5,3365, \\ \frac{\partial \psi_2^1}{\partial x_2} &= -2\psi_1 x_1 x_3 t - 2\psi_1 x_1 x_2 x_3 \frac{\partial t}{\partial x_2} = -11,9125, \\ \frac{\partial \psi_2^1}{\partial x_3} &= -2\psi_1 x_1 x_2 t - 2\psi_1 x_1 x_2 x_3 \frac{\partial t}{\partial x_3} = 19,0435, \\ \frac{\partial \psi_2^1}{\partial \psi_1} &= -2x_1 x_2 x_3 t - 2\psi_1 x_1 x_2 x_3 \frac{\partial t}{\partial \psi_1} = -26,8810, \\ \frac{\partial \psi_2^1}{\partial \psi_2} &= 1 - 2\psi_1 x_1 x_2 x_3 \frac{\partial t}{\partial \psi_2} = 1, \\ \frac{\partial \psi_2^1}{\partial \psi_3} &= -2\psi_1 x_1 x_2 x_3 \frac{\partial t}{\partial \psi_3} = 27,6291; \\ \frac{\partial \psi_3^1}{\partial x_1} &= -\psi_1(x_2)^2 t - \psi_1 x_1(x_2)^2 \frac{\partial t}{\partial x_1} = -3,2986, \\ \frac{\partial \psi_3^1}{\partial x_2} &= -2\psi_1 x_1 x_2 t - \psi_1 x_1(x_2)^2 \frac{\partial t}{\partial x_2} = -7,921, \\ \frac{\partial \psi_3^1}{\partial x_3} &= -\psi_1 x_1(x_2)^2 \frac{\partial t}{\partial x_3} = 12,4605, \\ \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \psi_1} &= -x_1(x_2)^2 t - \psi_1 x_1(x_2)^2 \frac{\partial t}{\partial \psi_1} = -16,6158, \\ \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \psi_2} &= -\psi_1 x_1(x_2)^2 \frac{\partial t}{\partial \psi_2} = 0, \\ \frac{\partial \psi_3^1}{\partial \psi_3} &= 1 - \psi_1 x_1(x_2)^2 \frac{\partial t}{\partial \psi_3} = 18,0782. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$D_1 = \frac{D\Phi_1}{D(x, \psi)} \Big|_{A_0} = \begin{pmatrix} 5,3409 & 11,1746 & -16,6065 & 22,7149 & 0 & -24,0934 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1,6008 & -5,1828 & 7,7022 & -10,0060 & 0 & 11,1746 \\ -5,3365 & -11,9125 & 19,0435 & -26,8810 & 1 & 27,6291 \\ -3,2986 & -7,921 & 12,4605 & -16,6158 & 0 & 18,0782 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти производные

$$D_2 = \frac{D\Phi_2}{D(x, \psi)} \Big|_{A_1}, \quad D_3 = \frac{D\Phi_3}{D(x, \psi)} \Big|_{A_2},$$

используем имеющуюся симметрию системы (10.13). Вспомним, что система (10.13) инвариантна относительно циклических переменных индексов $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 1, 2)$. Соответствующее преобразование задается линейным отображением пространства \mathbb{R}^6 с матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если (x, ψ) — точка поверхности S_2 , то для того, чтобы найти ее образ при отображении Φ_2 , можно сначала найти ее прообраз $\begin{pmatrix} x^0 \\ \psi^0 \end{pmatrix} = \Pi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}$ на поверхности S_1 , применить отображение Φ_1 к точке (x^0, ψ^0) , а затем еще раз повернуть точку $\Phi_1(x^0, \psi^0)$ с помощью матрицы Π . Таким образом,

$$\Phi_2 = \Pi \circ \Phi_1 \circ \Pi^{-1}.$$

Вспомним, однако, что точка A_1 получается из точки A_0 в два приема: сначала мы применяем поворот Π к точке A_0 , а затем растяжение в μ_1 раз по координатам x и $\nu = 1/\mu_1^4$ раз по координатам ψ . Посмотрим, как различаются дифференциалы отображения Φ_2 в любых двух точках вида (x, ψ) и $(\mu x, \nu \psi)$.

Нетрудно видеть, что время $t(x, \psi)$ движения до следующего переключения удовлетворяет соотношению

$$t(\mu x, \nu \psi) = \frac{1}{\mu^3} t(x, \psi), \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} = \frac{1}{\mu^4} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{(x, \psi)}, \quad \frac{\partial t}{\partial \psi} \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} = \frac{1}{\nu \mu^3} \cdot \frac{\partial t}{\partial \psi} \Big|_{(x, \psi)}.$$

Подставляя эти соотношения в производные функций $(x^1, \psi^1) = \Phi_2(x, \psi)$ по (x, ψ) , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial x} \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} &= \frac{\partial x^1}{\partial x} \Big|_{(x, \psi)}, & \frac{\partial x^1}{\partial \psi} \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} &= \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial \psi} \Big|_{(x, \psi)}, \\ \frac{\partial \psi^1}{\partial x} \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} &= \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{\partial \psi^1}{\partial x} \Big|_{(x, \psi)}, & \frac{\partial \psi^1}{\partial \psi} \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} &= \frac{\partial \psi^1}{\partial \psi} \Big|_{(x, \psi)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$D\Phi_2 \Big|_{(\mu x, \nu \psi)} = J_{\mu, \nu} \left(D\Phi_2 \Big|_{(x, \psi)} \right) = \left(J_{\mu, \nu}^1 \cdot \frac{D\Phi_2}{Dx} \Big|_{(x, \psi)}, J_{\mu, \nu}^2 \cdot \frac{D\Phi_2}{D\psi} \Big|_{(x, \psi)} \right),$$

где

$$J_{\mu,\nu}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{\mu} \end{pmatrix}, \quad J_{\mu,\nu}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно,

$$D_2 = J_{\mu_1, 1/\mu_1^4}(\Pi \cdot D_1 \cdot \Pi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11,1746 & -16,6065 & 5,3409 & 0 & 69,5706 & 65,5903 \\ -4,1255 & 6,5951 & -1,8481 & 1 & 27,6291 & -26,881 \\ -2,7431 & 4,3153 & -1,1424 & 0 & 18,0782 & -16,6158 \\ -1,7949 & 2,6674 & -0,5544 & 0 & 11,1746 & -10,0060 \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$D_3 = J_{\mu_1, 1/\mu_1^4}(\Pi \cdot D_2 \cdot \Pi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16,6065 & 5,3409 & 11,1746 & -200,888 & 189,395 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,4944 & -0,3956 & -0,9500 & 18,0782 & -16,6158 & 0 \\ 0,9238 & -0,1920 & -0,6216 & 11,1746 & -10,0060 & 0 \\ 2,2840 & -0,6400 & -1,4287 & 27,6291 & -26,8810 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем вычислить дифференциал D композиции $\Gamma \circ \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ в точке A_0 :

$$D = D\Gamma \circ D_3 \circ D_2 \circ D_1,$$

где

$$D\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_1^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^{12} \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$D = \begin{pmatrix} 2,8268 & 5,9145 & -8,7894 & 12,0225 & -12,7521 & \\ 4338,95 & 8446,39 & -13950,38 & 21137,23 & -1536,95 & -20404,56 \\ 113,577 & 220,967 & -364,042 & 547,337 & -36,822 & -532,268 \\ -9556,09 & -18603,86 & 30728,90 & -46548,72 & 3379,33 & 44943,32 \\ -6190,78 & -12052,98 & 19908,19 & -30143,87 & 2180,29 & 29115,46 \\ -13935,71 & -27131,79 & 44814,21 & -67906,96 & 4943,97 & 65545,91 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы D . Имеем

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 29253,9, & V_1 &= (0,0002, 0,3113, 0,0082, -0,6857, -0,4443, -0,9997), \\ \lambda_2 &= 0, & V_2 &= (11,1748, 0, 0, -18,5015, -24,2117, -14,9659), \\ \lambda_3 &= 1, & V_3 &= (0,0560, 0,0856, 0,0692, 0,8908, 1,1012, 0,8398), \\ \lambda_4 &= 6,7445, & V_4 &= (0,0098, 0,0532, 0,0228, -0,1619, -0,1666, -0,1467), \\ \lambda_5 &= 1, & V_5 &= (1,1206, 1,7126, 1,3853, -7,1001, -8,7775, -6,6939), \\ \lambda_6 &= 0,0002, & V_6 &= (0,0427, 0,0002, 0,0032, -0,0755, -0,0983, -0,0638).\end{aligned}$$

Векторы V_1, V_3, V_4, V_5, V_6 являются касательными векторами к поверхности S_1 в точке A_0 . Вектор V_2 трансверсален поверхности S_1 . Отсюда следует, что ограничение отображения $\Gamma \circ \Phi$ на поверхность S_1 является диффеоморфизмом. Векторы V_3 и V_5 с собственными значениями 1 являются касательными к орбитам двумпараметрической группы преобразований

$$(x, \psi) \rightarrow (\mu x, \nu \psi), \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}_+. \quad (10.14)$$

Лемма доказана. \square

Следствие 10.2. *Имеется одномерное гладкое многообразие $\mathfrak{N} \subset S_1$, содержащее точку A_0 , которое инвариантно относительно отображения $\Gamma \circ \Phi$.*

Доказательство. Единственным собственным числом матрицы D , значение которого по модулю меньше единицы, является $\lambda_6 = 0,0002$. По теореме об инвариантном многообразии на поверхности S_1 имеется кривая \mathfrak{N}_0 , проходящая через точку A_0 (с касательным вектором V_6 в точке A_0), которая, во-первых, инвариантна относительно преобразования $\Gamma \circ \Phi$ и, во-вторых, ограничение $\Gamma \circ \Phi$ на \mathfrak{N}_0 является сжимающим отображением в окрестности точки A_0 с коэффициентом сжатия, близким к значению λ_6 . \square

Отметим, что применение группы (10.14) к кривой \mathfrak{N}_0 дает уже трехмерное подмногообразие \mathfrak{M}_0 в пространстве (x, ψ) , которое инвариантно относительно отображения последования Φ . Обrazy \mathfrak{M}_0 при отображении последования Φ_1 и Φ_2 дают еще два трехмерных многообразия \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 , которые являются поверхностями переключения траекторий системы (10.12) с начальными условиями на \mathfrak{M}_0 . Ясно, что проекции этих трехмерных многообразий на пространство x являются уже двумерными многообразиями и представляют собой три конические поверхности с вершиной в начале координат. Обозначим соответствующие поверхности \mathfrak{K}_i , $i = 0, 1, 2$. По построению, для всех начальных условий из \mathfrak{K}_i существует экстремаль, которая через каждые три переключения управления возвращается на \mathfrak{K}_i . При каждом таком возвращении экстремаль прижимается к лучам $[0, A_0]$, $[0, A_1]$ и $[0, A_2]$ в угловой метрике пространства x . С точки зрения факторсистемы на симплексе Σ имеется траектория, прижимающаяся к циклу $[A_0 A_1 A_2]$ в прямом течение времени.

Структура оптимального синтеза. Как можно было бы доказать оптимальность траекторий, заполняющих конус \mathfrak{K} ? Самый простой способ заключается в построении во всем положительном октанте пространства \mathbb{R}^3 гладкого поля экстремалей $\psi = \Psi(x)$ с условием обращений функций Ψ на бесконечности в 0. Из приведенной выкладки в лемме 10.6 и утверждения следствия 10.2 следует существование такого поля в некоторой угловой окрестности конуса, натянутого на цикл $[A_0 A_1 A_2]$. Продолжение траекторий системы (10.13) с начальными условиями на \mathfrak{N} в попятном времени и их поведение при убывании t на данный момент аналитически не исследовано. Все, что нам известно, получено в результате численного эксперимента. Опишем, тем не менее, картину, которая получается при численном интегрировании системы (10.13).

Результат удобно описывать в терминах проекции на пространство x факторсистемы системы (10.12) по отношению к группе (10.14). Внутри симплекса Σ семейство автомодельных решений, найденных в утверждении 10.1, определяет некоторый треугольник, вершины которого будем по-прежнему обозначать A_0, A_1 и A_2 . Пересечение поверхностей переключения \mathfrak{K}_i с Σ дает три криволинейных отрезка, проходящих через точки A_i соответственно.

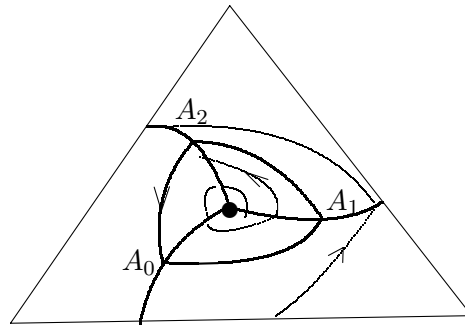


Рис. 18

Обратим теперь время движения по траекториям системы (10.12) и посмотрим, как продолжатся эти поверхности переключения при убывании t и какие имеются предельные множества траекторий факторсистемы системы (10.12) с начальными условиями на \mathfrak{M}_i .

Именно в этот момент обратимся к численному эксперименту. Выписанные выше уравнения позволяют для каждой начальной точки $(x^0, \psi^0) \in \mathfrak{M}_0 \cap \bar{\Sigma}$ найти моменты трех последовательных переключений управления (в отрицательные моменты времени), что позволяет определить соответствующую точку (x^1, ψ^1) возврата (x^0, ψ^0) на поверхность \mathfrak{M}_0 . Нормируем (x^1, ψ^1) условием

$$x_i^1 \rightarrow \frac{x_i^1}{x_1^1 + x_2^1 + x_3^1}, \quad \psi_i^1 \rightarrow \psi_i^1 / \psi_1^1, \quad i = 1, 2, 3,$$

и с полученными начальными условиями вновь запустим процедуру численного интегрирования. Всякий раз мы при этом «подстраиваем» очередной кусок инвариантной кривой $\mathfrak{M}_0 \cap \bar{\Sigma}$ к уже имеющемуся.

Оказывается, что эволюция траектории в попятном времени существенно зависит от того, с какой стороны от точки A_0 находятся ее начальные условия. Для начальных условий внутри треугольника $[A_0 A_1 A_2]$ все рассматриваемые траектории стремятся к точке $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ пересечения Σ и центрального луча (t, t, t) . Траектории самой системы (10.12) при этом совершают бесконечное число переключений управления и выходят на луч (t, t, t) за конечное время. Таким образом, через каждую точку центрального луча проходит бесконечно много экстремалей, которые при росте t «наматываются» на предельный цикл $[A_0 A_1 A_2]$. В то же время для начальных условий из Σ , лежащих вне треугольника $[A_0 A_1 A_2]$, число переключений управления при попятном движении конечно, и в какой-то момент каждая такая траектория выходит на границу симплекса Σ . Примерное поведение траекторий факторсистемы, принадлежащих построенному семейству решений, изображено на рис. 18.

Жирными линиями на рис. 18 изображен цикл $[A_0 A_1 A_2]$ и поверхности переключения построенного семейства. Тонкими линиями изображены неавтономные траектории с начальными условиями на соответствующих кривых переключения.

Если бы удалось аналитически обосновать существование семейства экстремалей с описанными свойствами во всем симплексе (а не только в окрестности предельного цикла), то это было бы достаточным условием оптимальности и обосновало бы картину оптимального синтеза, представленную на рис. 18.

В качестве философского следствия полученных аналитических выкладок и результатов численных экспериментов приходим к выводу о том, какой объект для задач с неинтегрируемой дифференциальной формой может оказаться аналогом магистрали. В данном случае это некоторое замкнутое множество, заполненное автономными решениями задачи с циклическим чередованием неособых режимов в счетном числе. Циклическое чередование неособых режимов на некотором многообразии, притягивающем все другие оптимальные траектории, наблюдалось ранее при изучении некоторых дискретных динамических систем экономического содержания [38].

ГЛАВА 2

ОСОБЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Во главе 2 мы рассмотрим особые экстремали, являющиеся в некотором смысле вырожденными по сравнению с экстремалими, рассмотренными в главе 1. Оказывается, что, по крайней мере в случае скалярного управления, особым экстремалим можно приписать некоторое целое положительное число q , называемое порядком экстремали. В случае $q \geq 2$ поведение неособых экстремалий в окрестности особой может оказаться очень сложным. В частности, имеются примеры, когда неособые экстремали состыковываются с особыми экстремалими порядка $q \geq 2$ посредством так называемого режима накопления переключений, когда счетное число точек переключений управления на неособом участке сгущается к точке сопряжения с особым участком экстремали.

11. УСЛОВИЕ КЕЛЛИ

Для задач классического вариационного исчисления имеется необходимое условие неотрицательности второй вариации функционала — условие Лежандра. В этом разделе мы докажем аналог условия Лежандра для особых экстремалий в задачах оптимального управления, линейных по скалярному управляющему параметру. Мы выведем это условие при некоторых ограничениях на задачу, которые на самом деле выполняются во всех «типичных» задачах. Хотя эти ограничения не являются необходимыми для того, чтобы соответствующее условие неотрицательности второй вариации имело место, они упрощают некоторые технические детали доказательств, сохраняя неизменными основные идеи этих доказательств.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\int_0^{T_0} f_0(x(t)) + u f_1(x(t)) dt \rightarrow \min, \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \phi_0(x(t)) + u \phi_1(x(t)), & u &\in [-1, 1], \\ x(0) &= x_0, & x(T_0) &\in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Пусть $x(t)$, $t \in (\tau_0, \tau_1) \subset [0, T_0]$, — участок особой регулярной экстремали задачи с управлением $u(t)$. Это означает, что найдется такая абсолютно непрерывная функция $\psi(t)$, что для функции Понтрягина

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi(\phi_0(x) + u \phi_1(x)) - (f_0(x) + u f_1(x))$$

выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}(\psi(t), x(t), u(t)), & \dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(\psi(t), x(t), u(t)), \\ \phi_1(x(t)) - f_1(x(t)) &\equiv 0, & t &\in (\tau_0, \tau_1). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Отметим, что на траекториях системы (11.2) имеет место следующее тождество:

$$\int_s^\tau f_0(x(t)) + u f_1(x(t)) dt \equiv \int_s^\tau \langle \psi(t), \dot{x}(t) \rangle - \mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) dt.$$

Следовательно, исходная задача эквивалентна задаче минимизации интеграла

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{T_0} \langle \psi, \dot{x} \rangle - \mathcal{H}(\psi, x, u) dt. \quad (11.4)$$

11.1. Достаточные условия локальной управляемости системы дифференциальных включений. Покажем, как при некоторых естественных предположениях об особой траектории $x(t)$ можно построить сколь угодно малую (в норме C^0) допустимую вариацию траектории $x(t)$.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \phi(x, u(t)). \quad (11.5)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}^1$. Функция $\phi(x, u)$ класса C^2 по совокупности переменных. Решение $(x(t), u(t))$ назовем допустимым, если $u(t)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных функций, а $x(t)$ является кусочно-дифференцируемой.

Пусть $(x^0(t), u^0(t))$ — некоторое допустимое решение уравнения (11.5) с начальными условиями $x(0) = x_0$, определенное на интервале $(0, \tau)$.

Рассмотрим уравнение в вариациях для (11.5) на траектории $(x^0(t), u^0(t))$

$$\dot{h} = A(t)h + b(t)v,$$

где

$$A(t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(x^0(t), u^0(t))}, \quad b(t) = \frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{(x^0(t), u^0(t))}.$$

Определение 11.1. Скажем, что система (11.5) обладает свойством полной управляемости в точках траектории $(x^0(t), u^0(t))$, если для любого $t \in (0, \tau)$ имеем

$$\text{rk} \{b(t), A(t)b(t), A^2(t)b(t), \dots, A^{n-1}(t)b(t)\} = n. \quad (11.6)$$

Лемма 11.1. Предположим, что система (11.5) является вполне управляемой в точках траектории $(x^0(t), u^0(t))$. Пусть при всех $t \in (0, \tau)$ управление $u^0(t)$ принимает значения, отличные от -1 и 1 . Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t', t'' \in (0, \tau)$, $|t'' - t'| < \delta$, существует семейство $(x^\alpha(t), u^\alpha(t))$ допустимых решений системы (11.5) такое, что $x^\alpha(t)$ совпадают с $x^0(t)$ всюду вне отрезка $[t', t'']$, $x^\alpha(t) \neq x^0(t)$ при $t \in (t', t'')$, и

$$\|x^0(\cdot) - x^\alpha(\cdot)\|_{C^0[t', t'']} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Утверждение леммы 11.1 сводится к тому, что для вполне управляемой системы дифференциальных уравнений существует нетривиальная локальная вариация допустимой траектории. На самом деле мы докажем, что некоторая открытая окрестность траектории $(x^0(t), u^0(t))$ может быть заполнена допустимыми траекториями системы (11.5).

Доказательство. По предположению, $u^0(t) \in (-1, 1)$. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой кусочно-непрерывной функции $v(\cdot)$, удовлетворяющей неравенству $|v(t)| < \varepsilon$, $t \in (\tau_0, \tau_1)$, управление $u(t) + v(t) \in (-1, 1)$ является допустимым. Зафиксируем произвольный момент времени $t' \in (0, \tau)$ и рассмотрим все возможные траектории $x(t)$ системы (11.5) с фиксированными начальными условиями $x(t') = x^0(t')$ и управлениями $u(t) + v(t)$, $|v(t)| < \varepsilon$. Рассмотрим отображение $KC^1[t', t''] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое сопоставляет функции $v(t)$ точку $x(t'')$ траектории $x(t)$. Нам надо показать, что если $|t'' - t'| < \delta$ для некоторого $\delta > 0$, то это отображение дифференцируемо и его производная в точке $v(\cdot) \equiv 0$, отвечающей траектории $(x^0(t), u^0(t))$, является сюръективным отображением.

Дифференцируемость этого отображения следует из теоремы о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру. Производную отображения можно записать в явном виде. Дифференцируя соотношение

$$x(t'') = x(t') + \int_{t'}^{t''} \phi(x(t), u(t) + v(t)) dt$$

по $v(t)$ и обозначая производную $\frac{\delta x}{\delta v}$ через h , с учетом того, что $\frac{\delta x}{\delta v}$ есть решение уравнения в вариациях для исходного уравнения, получим

$$v(\cdot) \mapsto \int_{t'}^{t''} A(t)h(t) + b(t)v(t) dt,$$

где

$$\dot{h} = A(t)h + b(t)v, \quad h(t') = 0.$$

Таким образом, остается проверить сюръективность соответствующего отображения для линейной системы.

Рассмотрим сначала автономный случай, когда матрица $A(t)$ и вектор $b(t)$ не зависят от t . Докажем локальную вполне управляемость системы

$$\dot{h} = Ah + bv.$$

Используя условие (11.6), выберем в качестве новых координат пространства x векторы $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$. В этом базисе система имеет следующий вид:

$$\dot{h}_1 = v, \quad \dot{h}_2 = h_1, \quad \dot{h}_3 = h_2, \quad \dots \quad \dot{h}_n = h_{n-1}.$$

Отображение, сопоставляющее функции $v(\cdot)$ точку h'' траектории $h(\cdot)$ в момент t'' , можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} h_1'' &= \int_{t'}^{t''} v(t) dt, \\ h_2'' &= \int_{t'}^{t''} (t'' - t)v(t) dt, \\ h_3'' &= \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} (t'' - t)^2 v(t) dt, \\ &\vdots \\ h_n'' &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{t'}^{t''} (t'' - t)^{n-1} v(t) dt. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Нужно показать, что для любого достаточно малого вектора $h'' \in \mathbb{R}^n$ найдется допустимое управление $v(\cdot)$, для которого имеют место соотношения (11.7). Будем искать такое $v(\cdot)$ в классе многочленов

$$v(t) = c_0 + c_1(t - t') + \frac{1}{2}c_2(t - t')^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}(t - t')^{n-1}.$$

Обозначая $t = t'' - t'$, получаем линейную систему

$$\begin{aligned} h_1'' &= c_0 t + \frac{1}{2}c_1 t^2 + \dots + \frac{1}{n!}c_{n-1} t^n, \\ h_2'' &= \frac{1}{2}c_0 t^2 + \frac{1}{6}c_1 t^3 + \dots + \frac{1}{(n+1)!}c_{n-1} t^{n+1}, \\ h_3'' &= \frac{1}{6}c_0 t^3 + \frac{1}{24}c_1 t^4 + \dots + \frac{1}{(n+2)!}c_{n-1} t^{n+2}, \\ &\vdots \\ h_n'' &= \frac{1}{n!}c_0 t^n + \frac{1}{(n+1)!}c_1 t^{n+1} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!}c_{n-1} t^{2n-1}. \end{aligned}$$

Определитель матрицы системы

$$\begin{vmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{n!}t^n \\ \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \cdots & \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!}t^n & \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!}t^{2n-1} \end{vmatrix} = t^{n^2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при всех $t \neq 0$. Чтобы показать это, заменим последнюю строчку определителя на строку из производных $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, \dots , y' , y и рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{n!}t^n \\ \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \cdots & \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} & \frac{1}{n!}t^n & \cdots & \frac{1}{(2n-2)!}t^{2n-2} \\ y^{(n-1)} & y^{(n-2)} & \cdots & y \end{vmatrix} = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение порядка $\leq n - 1$. У него имеется $n - 1$ очевидных базисных решений — это функции

$$y_1(t) = \frac{1}{n!}t^n, \quad y_2(t) = \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad \dots, \quad y_{n-1}(t) = \frac{1}{(2n-2)!}t^{2n-2}.$$

Поскольку функция $\frac{1}{(2n-1)!}t^{2n-1}$ функционально не зависима от этих решений, она не является решением того же дифференциального уравнения, и соответствующий определитель отличен от нуля. Следовательно, система разрешима относительно c_0, c_1, \dots, c_{n-1} .

В неавтономном случае можно воспользоваться соотношением

$$A(t) = A(t') + O(1)(t - t'), \quad b(t) = b(t') + O(1)(t - t').$$

Образование $\Phi : v(\cdot) \rightarrow x(t'')$ будет иметь вид

$$\Phi = \Phi' + O(1)(t'' - t'),$$

где Φ' — отображение, отвечающее «замороженной» системе с матрицей $A(t')$ и вектором $b(t')$. Поскольку отображение Φ' невырождено, отсюда следует, что и при всех достаточно малых $|t'' - t'|$ отображение Φ также невырождено.

Обратимся теперь к построению вариации траектории $(x^0(t), u^0(t))$ системы (11.5). Мы показали, что, какой бы (достаточно малый) интервал времени (t', t'') мы не взяли, для любой точки x^1 , достаточно близкой к точке $x^0(t'')$, можно найти управление $v(t)$, которое позволяет соединить точки $x^0(t')$ и $x^0(t'')$ допустимой траекторией. Рассуждая аналогично, опять же за достаточно малое время $t''' - t''$ мы сможем вернуться на траекторию $x^0(t)$ в некоторую точку $x(t''')$. Поскольку, как мы видели, вариации v можно искать в классе многочленов, мы всегда можем включить траекторию $(x^0(t), u^0(t))$ в некоторое однопараметрическое семейство $(x^\alpha(t), u^\alpha(t))$, гладко зависящее от параметра α . \square

11.2. Первая и вторая вариации функционала на особой экстремали. Вернемся к задаче (11.1)–(11.2). Пусть $(x(t), u(t))$, $t \in (\tau_0, \tau_1)$, — особая экстремаль задачи, при этом $|u(t)| < 1$, и выполнено условие вполне управляемости (11.6) системы (11.2) на $(x(t), u(t))$. Тогда, в силу леммы 11.1, существует нетривиальное однопараметрическое семейство вариаций $(x^\alpha(t), u^\alpha(t))$ траектории $(x(t), u(t))$, гладко зависящее от α , т.е. существуют функции

$$q(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{dx^\alpha(t)}{d\alpha}, \quad v(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{du^\alpha(t)}{d\alpha}.$$

Носитель вариации $[t', t'']$ можно выбрать в окрестности любой точки интервала (τ_0, τ_1) и сделать сколь угодно малым.

По теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра функция $\psi^\alpha(t)$, являющаяся решением уравнения

$$\dot{\psi}^\alpha(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(\psi^\alpha(t), x^\alpha(t), u^\alpha(t)),$$

также будет гладко зависеть от α . Обозначим

$$p(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d\psi^\alpha(t)}{d\alpha}.$$

Функции $(q(t), p(t))$ являются решениями системы в вариациях уравнения (11.3):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi^2} p + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial \psi} q + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi \partial u} v, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi \partial x} p - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} q - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial u} v. \end{aligned}$$

Здесь функции $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi^2}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi \partial x}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial \psi}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi \partial u}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial u}$ вычислены в точках траектории $(\psi(t), x(t), u(t))$. С учетом того, что $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi^2} \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned} \dot{q} &= A^*(t)q + c(t)v, \\ \dot{p} &= -A(t)p + B(t)q - d(t)v, \end{aligned} \tag{11.8}$$

где $A(t) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi \partial x}$, $A^*(t) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial \psi}$ (матрица A^* является транспонированной по отношению к матрице A), $B(t) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}$ (матрица B симметрична), $c(t) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \psi \partial u}$, $d(t) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial u}$.

Вычислим первую и вторую вариации функционала (11.4) на траекториях семейства $(x^\alpha(\cdot), \psi^\alpha(\cdot))$ при $\alpha = 0$. При произвольном α имеем

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{T_0} \left\langle \frac{d\psi^\alpha}{d\alpha}, \dot{x}^\alpha \right\rangle + \left\langle \psi^\alpha, \frac{d\dot{x}^\alpha}{d\alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}, \frac{d\psi^\alpha}{d\alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \frac{du^\alpha}{d\alpha} dt.$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^n . Интегрируя $\int_0^{T_0} \left\langle \psi^\alpha, \frac{d\dot{x}^\alpha}{d\alpha} \right\rangle dt$ по частям, с учетом нулевых граничных условий получаем

$$\int_0^{T_0} \left\langle \psi^\alpha, \frac{d\dot{x}^\alpha}{d\alpha} \right\rangle dt = - \int_0^{T_0} \left\langle \dot{\psi}^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \right\rangle dt.$$

С учетом соотношений

$$\left\langle \frac{d\psi^\alpha}{d\alpha}, \dot{x}^\alpha \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}, \frac{d\psi^\alpha}{d\alpha} \right\rangle, \quad \left\langle \dot{\psi}^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \right\rangle,$$

получим

$$\frac{dJ}{d\alpha} = - \int_0^{T_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \frac{du^\alpha}{d\alpha} dt.$$

Полагая $\alpha = 0$, получим

$$\frac{dJ}{d\alpha}(0) = - \int_0^{T_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} v(t) dt.$$

Равенство нулю $\frac{dJ}{d\alpha}(0)$ является следствием предположения о том, что участок экстремали $x(t)$, $t \in (\tau_0, \tau_1)$, особый:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \equiv 0 \quad \text{на траектории } x(t).$$

Вычислим теперь вторую вариацию $\frac{d^2 J}{d\alpha^2}$. Обозначим

$$H_1(\psi, x) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \psi \phi_1(x) - f_1(x).$$

Имеем

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2}(0) = - \int_0^{\tau_0} \frac{dH_1}{d\alpha} v(t) dt = - \int_{t'}^{t''} \frac{dH_1}{d\alpha} v(t) dt,$$

где

$$\left. \frac{dH_1}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial H_1}{\partial \psi} p + \frac{\partial H_1}{\partial x} q = \langle c(t), p \rangle + \langle d(t), q \rangle.$$

11.3. Порядок особой траектории. Нам нужно получить условия неотрицательности второй вариации $\frac{d^2 J}{d\alpha^2}(0)$. Вскоре выяснится, что знак второй вариации существенно зависит от знака коэффициента, с которым переменная v впервые войдет в выражение для очередной производной функции $h(t) = \langle c(t), p \rangle + \langle d(t), q \rangle$ в силу системы (11.8). Найдем, на каком шаге дифференцирования может появиться этот коэффициент. Чтобы упростить дальнейшие выкладки, сделаем следующее дополнительное предположение. Пусть с самого начала $f_1(x) \equiv 0$, а вектор $\phi_1(x)$ в точках особой траектории не равен нулю (это последнее предположение является на самом деле следствием условия вполне управляемости системы (11.8) на особой экстремали). Тогда в окрестности особой траектории векторное поле $\phi_1(x)$ можно «выпрямить», т.е. выбрать такую систему координат (x_1, \dots, x_n) , в которой $\phi_1(x) \equiv (1, 0, \dots, 0)$ [3]. В этих координатах структура уравнения в вариациях (11.8) упростится. Переменная v не будет входить в выражение для производной \dot{p} и будет входить только в выражение \dot{x}_1 , причем с единичным коэффициентом, $c(t) \equiv (1, 0, \dots, 0)$, $d(t) \equiv 0$. Имеем

$$\dot{h}(t) = \langle c, -Ap + Bq \rangle.$$

Как мы видим, при первом дифференцировании переменная v появиться не может. Далее,

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= \langle c, -\dot{A}p + \dot{B}q - A(-Ap + Bq) + B(A^*q + cv) \rangle = \\ &= \langle c, A^2p + (BA^* - AB)q \rangle + \langle c, -\dot{A}p + \dot{B}q \rangle + \langle c, Bc \rangle v. \end{aligned}$$

Возможны два случая: $\langle c, B(t)c \rangle \neq 0$ и $\langle c, B(t)c \rangle \equiv 0$. Если $\langle c, B(t)c \rangle \neq 0$, то скажем, что особая экстремаль имеет первый порядок. Пусть $\langle c, B(t)c \rangle \equiv 0$. Покажем, что в этом случае и в выражение для третьей производной h^{III} переменная v также будет входить с нулевым коэффициентом. Действительно, в правой части системы (11.8) переменная v присутствует только в выражении для производной \dot{x}_1 . Поэтому v не войдет в выражение $\frac{d}{dt} \langle c, A^2p \rangle$. Далее, $BA^* - AB$ является кососимметрической матрицей. При дифференцировании выражения $\langle c, (BA^* - AB)q \rangle$ переменная v формально появится, но коэффициент при ней будет равен $\langle c, (BA^* - AB)c \rangle$. В силу кососимметричности $BA^* - AB$, $\langle c, (BA^* - AB)c \rangle \equiv 0$. При дифференцировании выражения $\langle c, -\dot{A}p + \dot{B}q \rangle$ (аналогично тому, как это было при дифференцировании выражения $\langle c, -Ap + Bq \rangle$) переменная v появится с коэффициентом $\langle c, \dot{B}c \rangle$. Однако по предположению $\langle c, B(t)c \rangle \equiv 0$, следовательно $\langle c, \dot{B}(t)c \rangle \equiv 0$. Таким образом, если v не появилась в выражении для второй производной \ddot{h} , то и $\frac{\partial}{\partial v} h^{\text{III}} \equiv 0$. Следовательно, в этом случае v впервые может появиться только в выражении для h^{IV} . Покажем, что это общий факт: впервые v в выражении для $\frac{d^m}{dt^m} h$ может появиться только на четном шаге дифференцирования $m = 2q$.

Лемма 11.2. Если $h(t) = \langle c, p(t) \rangle$, где $(p(t), q(t))$ — произвольное решение уравнения (11.8), и при этом

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k}{dt^k} h \right|_{(11.8)} &= \langle c, A_k p + B_k q \rangle, \quad k = 1, \dots, m-1, \\ \left. \frac{d^m}{dt^m} h \right|_{(11.8)} &= \langle c, A_m p + B_m q + c_m v \rangle, \quad \langle c, c_m \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

то число m четно.

Определение 11.2. Число q называется порядком особой экстремали.

Мы рассматриваем только особые экстремали порядков 1 и 2.

Доказательство леммы 11.2. Пусть сначала $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные матрицы. Рассмотрим функцию $\phi(t) = \langle c, a(t)p + b(t)q \rangle$. Посмотрим, каким образом переменная v может впервые войти в выражение для производной в силу системы (11.8) от функции $\phi(t)$. Пусть для всех $k = 1, \dots, m$ переменная v не входит в $\frac{d^k \phi}{dt^k}$ с ненулевым коэффициентом. Тогда

$$\frac{d^k}{dt^k} \phi(t) = \sum_{i=0}^k C_k^i \langle c, a^{(k-i)} p^{(i)} + b^{(k-i)} q^{(i)} \rangle, \quad k = 1, \dots, m,$$

где функции $p^{(i)}, q^{(i)}$ есть результат последовательного дифференцирования функций p, q в силу системы

$$\dot{p} = -A(t)p + B(t)q, \quad \dot{q} = A^*(t)q.$$

По предположению, функции $p^{(i)}, q^{(i)}$ имеют вид

$$p^{(i)} = P_{1i}(t)p + Q_{1i}(t)q, \quad q^{(i)} = P_{2i}(t)p + Q_{2i}(t)q, \quad i = 1, \dots, m.$$

Выясним, в каком месте может появиться переменная v при дифференцировании выражения $\frac{d^m}{dt^m} \phi(t)$. Имеем

$$\frac{d}{dt} \langle c, a^{(m-i)} p^{(i)} + b^{(m-i)} q^{(i)} \rangle = \langle c, \dot{a}^{(m-i)} p^{(i)} + \dot{b}^{(m-i)} q^{(i)} \rangle + \langle c, a^{(m-i)} p^{(i+1)} + b^{(m-i)} q^{(i+1)} \rangle,$$

где $i = 0, 1, \dots, m$. Очевидно, что первое слагаемое в этой сумме не содержит v . Однако, если $0 \leq i \leq m-1$, то по той же самой причине и второе слагаемое не содержит v , поскольку оно является первым слагаемым в производной от члена

$$\langle c, a^{(m-i-1)} p^{(i+1)} + b^{(m-i-1)} q^{(i+1)} \rangle,$$

присутствующего в соответствующей сумме для $\frac{d^m}{dt^m} \phi(t)$. Вывод: переменная v может впервые войти в производную $\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \phi(t)$ лишь в слагаемом $\langle c, a p^{(m+1)} + b q^{(m+1)} \rangle$, не содержащем производных от функций $a(t)$ и $b(t)$.

Вернемся к утверждению леммы. Переменная v может появиться в выражении для производной функции $\langle c, A_k p + B_k q \rangle$ только за счет дифференцирования функции q . При этом

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{d}{dt} \langle c, A_k p + B_k q \rangle = \langle c, B_k c \rangle.$$

Рассмотрим отображение $(A_k, B_k) \rightarrow (A_{k+1}, B_{k+1})$ и найдем рекуррентное соотношение между соответствующими функциями. Нетрудно видеть, что

$$A_{k+1} = -A_k A + \dot{A}_k, \quad B_{k+1} = A_k B + B_k A^* + \dot{B}_k.$$

Однако в предыдущем пункте мы показали, что если переменная v не вошла с ненулевым коэффициентом в k -ю производную, то в первый ненулевой коэффициент при v не войдут производные от функций A_k и B_k . В выражениях для A_k и B_k обозначим члены, не содержащие производных

от A, B, A^* , через \tilde{A}_k и \tilde{B}_k соответственно. Нам достаточно проверить, на каком шаге впервые будет выполнено неравенство $\langle c, \tilde{B}_k c \rangle \neq 0$. Для \tilde{A}_k и \tilde{B}_k рекуррентные соотношения упрощаются:

$$\tilde{A}_{k+1} = -\tilde{A}_k A, \quad \tilde{B}_{k+1} = \tilde{A}_k B + \tilde{B}_k A^*.$$

Выпишем несколько первых пар этого отображения:

$$\begin{aligned} k = 0 & (E, 0), \\ k = 1 & (-A, B), \\ k = 2 & (A^2, -AB + BA^*), \\ k = 3 & (-A^3, A^2B - ABA^* + B(A^*)^2), \\ k = 4 & (A^4, -A^3B + A^2BA^* - AB(A^*)^2 + B(A^*)^3). \end{aligned}$$

Видна простая закономерность: при четном k матрица \tilde{B}_k является кососимметрической, а при нечетном — симметрической. Действительно, по индукции легко показать, что при четном k :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k = & -A^{k-1}B + A^{k-2}BA^* - A^{k-3}B(A^*)^2 + \dots + \\ & + (-1)^i A^{k-i}B(A^*)^i + \dots + A^2B(A^*)^{k-3} - AB(A^*)^{k-2} + B(A^*)^{k-1}, \end{aligned}$$

а при нечетном k :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k = & A^{k-1}B - A^{k-2}BA^* + A^{k-3}B(A^*)^2 + \dots + \\ & + (-1)^{i+1} A^{k-i}B(A^*)^{i-1} + \dots + A^2B(A^*)^{k-3} - AB(A^*)^{k-2} + B(A^*)^{k-1}. \end{aligned}$$

Тем самым квадратичная форма $\langle c, \tilde{B}_k c \rangle$ тождественно равна нулю при четном k . Переменная v появляется на следующем шаге дифференцирования и может впервые войти с ненулевым коэффициентом только в четную производную. \square

11.4. Условие Келли. Теперь проясним связь порядка особой траектории и неотрицательности второй вариации

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2}(0) = - \int_{t'}^{t''} h(t)v(t) dt.$$

Предположим, что особая траектория имеет порядок q . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^k h}{dt^k} &= a_k(t)p + b_k(t)q, & k = 1, \dots, 2q - 1; \\ \frac{d^{2q} h}{dt^{2q}} &= a_{2q}(t)p + b_{2q}(t)q + r(t)v, & r(t) \neq 0. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Лемма 11.3. Если $(-1)^q r(t^0) > 0$ для некоторого $t^0 \in (\tau_0, \tau_1)$, то особая экстремаль не оптимальна.

Доказательство. Из (11.9) следует, что при $t \in [t', t'']$

$$h(t) = \int_{t'}^t \frac{(t-s)^{2q-1}}{(2q-1)!} (a_{2q}(s)p(s) + b_{2q}(s)q(s) + r(s)v(s)) ds.$$

Проинтегрируем q раз по частям выражение $-\int_{t'}^{t''} h(t)v(t) dt$ с учетом нулевых краевых условий. Имеем:

$$-\int_{t'}^{t''} h(t)v(t) dt = \int_{t'}^{t''} \left(\dot{h}(t) \int_{t'}^t v(s) ds \right) dt = \dots = (-1)^{q-1} \int_{t'}^{t''} \left(\frac{d^q h(t)}{dt^q} \int_{t'}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{(q-1)!} v(s) ds \right) dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^q h(t)}{dt^q} = \int_{t'}^t \frac{(t-s)^{2q-1}}{(2q-1)!} (a_{2q}(s)p(s) + b_{2q}(s)q(s) + r(s)v(s)) ds,$$

поэтому

$$-\int_{t'}^{t''} h(t)v(t) dt = (-1)^{q-1} \int_{t'}^{t''} \left(\int_{t'}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{(q-1)!} (a_{2q}p + b_{2q}q + rv) ds \cdot \int_{t'}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{(q-1)!} v ds \right) dt.$$

Пусть сначала $a_{2q} \equiv 0$, $b_{2q} \equiv 0$, $r \equiv r_0 = \text{const} \neq 0$. В этом случае

$$-\int_{t'}^{t''} h(t)v(t) dt = (-1)^{q-1} r_0 \int_{t'}^{t''} \left(\int_{t'}^t (t-s)^{q-1} v(s) ds \right)^2 dt.$$

Ясно, что неравенство $(-1)^{q-1} r_0 \geq 0$ является достаточным условием неотрицательности $\frac{d^2 J}{d\alpha^2}(0)$.

Однако оно является и необходимым условием того, что $\frac{d^2 J}{d\alpha^2}(0) \geq 0$. Действительно, коэффициент при v в выражении для $\frac{d^q h(t)}{dt^q}$ зависит только от самой особой экстремали и не зависит от выбора вариации v . Если для какой либо точки t^0 интервала (τ_0, τ_1) этот коэффициент удовлетворяет условию $(-1)^{q-1} r_0 < 0$, то построив вариацию с носителем, принадлежащим достаточно малой окрестности точки t^0 , получим, что $\frac{d^2 J}{d\alpha^2}(0) < 0$. Таким образом, из оптимальности особой экстремали следует, что

$$(-1)^{q-1} r_0 \geq 0.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда функции $a_{2q}(t)$, $b_{2q}(t)$, $r(t)$ произвольны. На отрезке $[t', t'']$ функции $p(t)$ и $q(t)$ являются решениями линейной неоднородной системы уравнений (11.8) с нулевыми граничными условиями. Отсюда следует, что имеет место представление

$$p(t) = \int_{t'}^t K_p(t, s)v(s) ds, \quad q(t) = \int_{t'}^t K_q(t, s)v(s) ds,$$

где функции $K_p(t, s)$, $K_q(t, s)$ допускают равномерную оценку сверху на множестве $[t', t''] \times [t', t'']$. Выбирая носитель вариации $[t', t'']$ достаточно малым, получим

$$\int_{t'}^t (t-s)^{q-1} (a_{2q}p + b_{2q}q) ds = \int_{t'}^t (t-s)^{q-1} \left(\int_{t'}^s O(1)v(\tau) d\tau \right) ds.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{t'}^t (t-s)^{q-1} (a_{2q}p + b_{2q}q) ds = \int_{t'}^t v(\tau) \left(\int_{\tau}^t (t-s)^{q-1} O(1) ds \right) d\tau,$$

откуда

$$\int_{t'}^t (t-s)^{q-1} (a_{2q}p + b_{2q}q) ds = \int_{t'}^t (t-\tau)^{q-1} v(\tau) O(\tau) d\tau.$$

Отсюда следует соотношение

$$-\int_{t'}^{t''} h(t)v(t) dt = (-1)^{q-1} \int_{t'}^{t''} (r_0 + O(t'' - t')) \left(\int_{t'}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{(q-1)!} v(s) ds \right)^2 dt.$$

Таким образом, условие неотрицательности второй вариации имеет вид

$$(-1)^{q-1}r(t) \geq 0. \quad (11.10)$$

□

Неравенство (11.10) фактически и есть условие Келли. Иногда его называют также обобщенным условием Лежандра—Клебша. Традиционно это условие записывают в несколько иной форме. Будем дифференцировать функцию $H_1(\psi, x)$ в силу системы (11.3). Пусть

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^k}{dt^k} H_1 = 0, \quad k = 1, \dots, r-1,$$

в точках особой экстремали, а

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^r}{dt^r} H_1 \neq 0.$$

Тогда, ограничивая $\frac{d^k}{dt^k} H_1$ на проварьированную траекторию $(x^\alpha(\cdot), \psi^\alpha(\cdot))$ и дифференцируя эти соотношения по α , при $\alpha = 0$ получим, что

$$\begin{aligned} h^{(k)} &= a_k(t)p(t) + b_k(t)q(t), \quad k = 1, \dots, r, \\ h^{(r)} &= a_r(t)p(t) + b_r(t)q(t) + c_r(t)v(t), \end{aligned}$$

где

$$c_r(t) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^r}{dt^r} H_1(t) \neq 0.$$

Отсюда следует, что $r = 2q$, где q — порядок особой экстремали в смысле определения, данного выше.

Приведем здесь формулировку соответствующей теоремы (доказательство см. в [1]).

Теорема 11.1 (условие Келли). Пусть $(x(t), u(t))$ является оптимальным решением задачи (11.2) и тройка $(\psi(t), x(t), u(t))$ является регулярной особой траекторией системы (11.3). Пусть $|u(t)| < 1$. Тогда для некоторого целого q , $1 \leq q \leq \infty$, вдоль особой экстремали $(\psi(t), x(t), u(t))$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^k}{dt^k} H_1 &\equiv 0, \quad k = 1, \dots, 2q-1, \\ (-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} H_1 &< 0. \end{aligned}$$

Более общие условия второго порядка для случая многомерного управления в терминах коммутаторов векторных полей, определяющих управляемую систему, см. в [1]. Пары смыкающихся друг с другом необходимых и достаточных условий второго порядка в случае, когда сопряженные переменные на исследуемой экстремали определяются неоднозначно, найдены в работах А. А. Милютин и его учеников [37].

Определение порядка особой траектории основано на понятии дифференцирования функции в силу системы. При таком дифференцировании переменная v , вообще говоря, может появиться в производной функции раньше, чем на $(2q)$ -м шаге, однако соответствующий коэффициент должен при этом обратиться на самой особой траектории в нуль. При этом на другой особой траектории, проходящей вблизи рассматриваемой особой траектории, этот коэффициент уже может оказаться не равным нулю. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 11.3. Число q называется порядком системы (11.3), если в некоторой открытой области пространства (ψ, x) имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^k}{dt^k} H_1 \right|_{(11.3)} &\equiv 0, \quad k = 1, \dots, 2q-1, \\ \left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} H_1 \right|_{(11.3)} &\neq 0. \end{aligned}$$

Также, как в лемме 11.2, можно показать, что число q в определении 11.3 является целым (см. [33]).

Определение 11.4. Если порядок особой траектории совпадает с порядком системы, то скажем, что порядок особой траектории существенный (intrinsic order). В противном случае будем говорить, что порядок особой траектории локальный (local order).

12. ТЕОРЕМА О СОПРЯЖЕНИИ

В этом разделе докажем теорему о том, каким образом могут состыковываться участки неособых экстремалей с особыми участками второго порядка. Но сначала определим важную операцию над функциями в пространстве $(\psi, x) \in \mathbb{R}^{2n}$, называемую скобкой Пуассона.

12.1. Скобки Пуассона и гамильтоновы векторные поля. Пусть ω — произвольная невырожденная кососимметрическая 2-форма четномерного пространства \mathbb{R}^{2n} (иными словами, ω — симплектическая структура \mathbb{R}^{2n}). Пусть H — некоторая C^∞ -функция. Назовем симплектическим градиентом H векторное поле $\text{sgrad } H$, определяемое соотношением

$$\omega(\text{sgrad } H, v) = L_v H.$$

Здесь v — произвольное векторное поле в \mathbb{R}^{2n} , а $L_v : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$ — производная Ли от гладкой функции H вдоль векторного поля v ; в координатах

$$L_v H = \sum_{i=1}^{2n} v_i \frac{\partial H}{\partial \xi^i}.$$

Задача 12.1. Каждое векторное поле $v(\xi)$ на многообразии M порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $g_t : M \rightarrow M$ (фазовый поток системы). Если $\xi(t, \xi_0)$ — решение системы $\dot{\xi} = v(\xi)$ с начальными условиями $\xi(0) = \xi_0$, то $g_t(\xi_0) = \xi(t, \xi_0)$. Любой диффеоморфизм g многообразия M порождает отображение множества всех дифференциальных 2-форм в себя:

$$\omega \mapsto g^* \omega, \quad g^* \omega|_{\xi}(u, v) = \omega|_{g(\xi)}(g_* u, g_* v)$$

(здесь g_* обозначает дифференциал g в точке ξ). Показать, что для произвольной функции $H(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, поток g_t , отвечающий векторному полю $\text{sgrad } H$, сохраняет симплектическую структуру \mathbb{R}^{2n} , т.е. $g_t^* \omega = \omega$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$, т.е. $\omega(u, v) = \sum_{i, j=1}^{2n} \omega_{ij} u_i v_j$, для любой пары векторов $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, где $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ — кососимметрическая матрица соответствующей квадратичной формы. Тогда по определению симплектического градиента для произвольной функции $H(\xi)$ имеем

$$\sum_{i, j=1}^{2n} \omega_{ij} (\text{sgrad } H)_i v_j = \sum_{k=1}^{2n} v_k \frac{\partial H}{\partial \xi^k}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{2n} \omega_{ik} (\text{sgrad } H)_i = \frac{\partial H}{\partial \xi^k} \quad (\forall k = 1, \dots, 2n) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{sgrad } H)_k = - \sum_{i=1}^{2n} \omega^{ki} \frac{\partial H}{\partial \xi^i}.$$

Через (ω^{ki}) обозначена матрица, обратная к матрице (ω_{ik}) , $\sum_{i=1}^{2n} \omega^{ki} \omega_{ij} = \delta_{kj}$ (δ_{kj} — символ Кронекера).

Теперь найдем производную по t формы $g_t^* \omega$. Для любого векторного поля $V(\xi)$ диффеоморфизм $g_t : M \rightarrow M$ имеет вид

$$g_t : \xi \mapsto \xi + V(\xi)t + o(t), \quad (g_t)_* : v \mapsto v + t \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial V}{\partial \xi^i} v_i + o(t).$$

Поэтому для любой пары векторов (u, v) имеем

$$g_t^* \omega(u, v) = \omega(u, v) + t\omega_1(u, v) + o(t),$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1(u, v) &= \sum_{i,j,k=1}^{2n} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^k} V_k u_i v_j + \omega_{ij} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi^k} u_k v_j + u_i \frac{\partial V_j}{\partial \xi^k} v_k \right) \right) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{2n} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^k} V_k + \omega_{kj} \frac{\partial V_k}{\partial \xi^i} + \omega_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial \xi^j} \right) u_i v_j. \end{aligned}$$

Подставим в полученное соотношение

$$V_k = (\text{sgrad } H)_k = - \sum_{m=1}^{2n} \omega^{km} \frac{\partial H}{\partial \xi^m}.$$

Тогда для любой пары индексов (i, j) коэффициент при $u_i v_j$ в выражении $\omega_1(u, v)$ равен

$$\begin{aligned} & - \sum_{k,m=1}^{2n} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^k} \omega^{km} \frac{\partial H}{\partial \xi^m} + \omega_{kj} \left(\frac{\partial \omega^{km}}{\partial \xi^i} \frac{\partial H}{\partial \xi^m} + \omega^{km} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^i \partial \xi^m} \right) + \omega_{ik} \left(\frac{\partial \omega^{km}}{\partial \xi^j} \frac{\partial H}{\partial \xi^m} + \omega^{km} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^j \partial \xi^m} \right) = \\ & = - \sum_{k,m=1}^{2n} \left(\omega^{km} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^k} + \omega_{kj} \frac{\partial \omega^{km}}{\partial \xi^i} + \omega_{ik} \frac{\partial \omega^{km}}{\partial \xi^j} \right) \frac{\partial H}{\partial \xi^m} - \sum_{k,m=1}^{2n} \left(\omega_{kj} \omega^{km} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^i \partial \xi^m} + \omega_{ik} \omega^{km} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^j \partial \xi^m} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{2n} \omega_{kj} \omega^{km} = -\delta_{jm}, \quad \sum_{k=1}^{2n} \omega_{ik} \omega^{km} = \delta_{im},$$

имеем

$$\sum_{k,m=1}^{2n} \left(\omega_{kj} \omega^{km} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^i \partial \xi^m} + \omega_{ik} \omega^{km} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^j \partial \xi^m} \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^j \partial \xi^i} \equiv 0.$$

Используя тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sum_{k=1}^{2n} \omega_{kj} \omega^{km} &= \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\partial \omega_{kj}}{\partial \xi^i} \omega^{km} + \omega_{kj} \frac{\partial \omega^{km}}{\partial \xi^i} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \sum_{k=1}^{2n} \omega_{ik} \omega^{km} &= \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \xi^j} \omega^{km} + \omega_{ik} \frac{\partial \omega^{km}}{\partial \xi^j} \right) = 0, \end{aligned}$$

перепишем первую сумму в виде

$$\sum_{k,m=1}^{2n} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \xi^j} \right) \omega^{km} \frac{\partial H}{\partial \xi^m} = \sum_{k,m=1}^{2n} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial \xi^j} \right) \omega^{km} \frac{\partial H}{\partial \xi^m}.$$

В силу точности формы ω (т.е. из равенства $d\omega = 0$), получаем, что для любых трех индексов α, β, γ выполнено тождество

$$\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} + \frac{\partial \omega_{\beta\gamma}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \omega_{\gamma\alpha}}{\partial \xi^\beta} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $\omega_1 \equiv 0$ и, следовательно, $\frac{d}{dt} g_t^* \omega = 0$. Поскольку это верно для произвольного t и произвольной точки ξ , $g_t^* \omega = \omega$. \square

Все векторные поля, которые являются симплектическими градиентами некоторой функции H , называются (локально) гамильтоновыми, а функция H называется гамильтонианом системы $\dot{\xi} = \text{sgrad } H(\xi)$. Замечательным обстоятельством является тот факт, что коммутатор

$[\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2]$ локально гамильтоновых полей является локально гамильтоновым, т.е. все такие поля образуют подалгебру в бесконечномерной алгебре Ли всех векторных полей относительно операции взятия коммутатора. Функция H , для которой

$$\text{sgrad } H = [\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2],$$

называется скобкой Пуассона функций H_1 и H_2 . Утверждается, что скобка Пуассона функций H_1, H_2 определяется соотношением

$$H = \omega(\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2) = L_{\text{sgrad } H_2} H_1 = -L_{\text{sgrad } H_1} H_2.$$

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся теоремой Дарбу [26], утверждающей, что в некоторой открытой окрестности произвольной точки пространства \mathbb{R}^{2n} форма ω заменой переменных может быть приведена к виду

$$\omega = dp^1 \wedge dx^1 + \dots + dp^i \wedge dx^i + \dots + dp^n \wedge dx^n.$$

В базисе $(p^1, x^1, \dots, p^i, x^i, \dots, p^n, x^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H &= \left(-\frac{\partial H}{\partial x^1}, \frac{\partial H}{\partial p^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x^n}, \frac{\partial H}{\partial p^n} \right); \\ \omega(\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial p^i} \frac{\partial H_2}{\partial x^i} - \frac{\partial H_2}{\partial p^i} \frac{\partial H_1}{\partial x^i} \right). \end{aligned}$$

Надо показать, что

$$\text{sgrad } \omega(\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2) = [\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2].$$

Вычислим, например, первую координату (т.е. координату, отвечающую переменной p_1) каждого из этих векторов. Имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \text{sgrad } \omega(\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2), \frac{\partial}{\partial p^1} \right\rangle &= -\frac{\partial}{\partial x^1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial p^i} \frac{\partial H_2}{\partial x^i} - \frac{\partial H_2}{\partial p^i} \frac{\partial H_1}{\partial x^i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^1 \partial p^i} \frac{\partial H_2}{\partial x^i} - \frac{\partial H_1}{\partial p^i} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^1 \partial x^i} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^1 \partial p^i} \frac{\partial H_1}{\partial x^i} + \frac{\partial H_2}{\partial p^i} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^1 \partial x^i} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\left\langle [\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2], \frac{\partial}{\partial p^1} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H_1}{\partial p^i} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^i \partial x^1} + \frac{\partial H_1}{\partial x^i} \frac{\partial^2 H_2}{\partial p^i \partial x^1} + \frac{\partial H_2}{\partial p^i} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^i \partial x^1} - \frac{\partial H_2}{\partial x^i} \frac{\partial^2 H_1}{\partial p^i \partial x^1} \right).$$

Из сравнения получаем требуемое. Точно так же доказывается совпадение остальных координат векторов $\text{sgrad } \omega(\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2)$ и $[\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2]$. Таким образом, операция

$$H \rightarrow \text{sgrad } H$$

задает изоморфизм бесконечномерных алгебр локально гамильтоновых векторных полей, снабженных операцией коммутирования, и C^∞ -функций относительно операции взятия скобки Пуассона. В качестве практического следствия этого изоморфизма получаем, что скобка Пуассона обладает теми же свойствами, что и коммутатор векторных полей: билинейность, антикоммутативность и тождество Якоби. Если для краткости обозначить $\omega(\text{sgrad } H_1, \text{sgrad } H_2)$ как $\text{ad}_{H_1} H_2$, то тождество Якоби имеет вид

$$\text{ad}_A \text{ad}_B C + \text{ad}_B \text{ad}_C A + \text{ad}_C \text{ad}_A B \equiv 0$$

для любых трех гладких функций A, B, C .

Обозначение $\text{ad}_{H_1} H_2$ возникло следующим образом. В произвольной алгебре Ли \mathfrak{g} операция умножения $(u, v) \rightarrow [u, v]$ порождает отображение из алгебры Ли \mathfrak{g} в пространство линейных отображений $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$:

$$u \mapsto \text{ad}_u, \quad \text{ad}_u v = [u, v].$$

Из тождества Якоби следует, что это отображение является представлением, т.е. оно переводит произведение любых двух элементов алгебры Ли в обычный коммутатор линейных операторов:

$$\text{ad}_{[u,v]} = \text{ad}_u \text{ad}_v - \text{ad}_v \text{ad}_u.$$

Нетрудно видеть, что операция ad_v является дифференцированием в алгебре Ли \mathfrak{g} над кольцом гладких функций $C^\infty(\mathfrak{g})$. Отображение ad_v называется присоединенным представлением алгебры Ли \mathfrak{g} . Сокращение ad происходит от английского слова *adjoint*.

Для функции $\text{ad}_{H_1} H_2$ будем использовать также обозначение $\{H_1, H_2\}$.

12.2. Полуканоническая форма гамильтоновой системы в окрестности особой траектории. Возвращаемся к системе (11.3) в пространстве с координатами $(\psi, x) \in \mathbb{R}^{2n}$. Назовем *скобкой Пуассона* функций $A(\psi, x)$, $B(\psi, x)$ функцию

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial \psi_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} - \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial \psi_i}.$$

В этих обозначениях

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{(11.3)} A = \{\mathcal{H}, A\}.$$

Обозначим

$$H_0(\psi, x) = \phi_0(x)\psi - f_0(x), \quad H_1(\psi, x) = \phi_1(x)\psi - f_1(x).$$

Пусть $(\psi(t), x(t))$ есть особая траектория системы (11.3). Посмотрим, как устроена система (11.3) в окрестности $(\psi(t), x(t))$. Чтобы найти порядок особой траектории, нужно продифференцировать функцию H_1 в силу системы (11.3) до первого появления переменной u в производной. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_1 &= \{H_0 + uH_1, H_1\} \equiv \{H_0, H_1\}, \\ \frac{d^2}{dt^2} H_1 &= \{H_0, \{H_0, H_1\}\} + u\{H_1, \{H_0, H_1\}\}. \end{aligned}$$

Если порядок особой траектории равен 2, то

$$\left. \{H_1, \{H_0, H_1\}\} \right|_{(\psi(t), x(t))} \equiv 0.$$

Может, однако, оказаться, что функция $\{H_1, \{H_0, H_1\}\}$ равна 0 тождественно как функция переменных (ψ, x) , и тогда переменная u появляется при четвертом дифференцировании H_1 . Согласно данному ранее определению, в этом случае особая траектория $(\psi(t), x(t))$ имеет *существенный* второй порядок (*intrinsic order*). Сейчас мы рассмотрим именно этот случай. Таким образом, пусть

$$\{H_1, \{H_0, H_1\}\} \equiv 0.$$

Тогда

$$\frac{d^3}{dt^3} H_1 = \{H_0, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\} + u\{H_1, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\}.$$

В силу тождества Якоби, имеем

$$\{H_1, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\} = -\{H_0, \{\{H_0, H_1\}, H_1\}\} - \{\{H_0, H_1\}, \{H_1, H_0\}\}.$$

Но $\{\{H_0, H_1\}, \{H_1, H_0\}\} \equiv 0$ в силу антикоммутативности, а

$$\{H_0, \{\{H_0, H_1\}, H_1\}\} = -\{H_0, \{H_1, \{H_0, H_1\}\}\} \equiv 0$$

по предположению. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} H_1 &= \{H_0, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\}, \\ \frac{d^4}{dt^4} H_1 &= \{H_0, \{H_0, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\}\} + u\{H_1, \{H_0, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\}\}. \end{aligned}$$

Обозначим для краткости $\{A, B\} = \text{ad}_A B$. Положим

$$z_1 = H_1, \quad z_2 = \text{ad}_{H_0} H_1, \quad z_3 = \text{ad}_{H_0}^2 H_1, \quad z_4 = \text{ad}_{H_0}^3 H_1. \quad (12.1)$$

Из проведенной выкладки следует, что в окрестности особой траектории второго порядка для любого решения системы (11.3) (как для особого, так и для неособого) имеют место соотношения

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = \alpha(t) + u(t)\beta(t), \quad (12.2)$$

где

$$\beta(t) = \text{ad}_{H_1} \text{ad}_{H_0}^3 H_1 \neq 0.$$

В силу условия Келли, на оптимальной особой кривой выполнено неравенство $\beta(t) < 0$, что мы и будем в дальнейшем считать выполненным.

Теперь забудем на некоторое время о том, как была получена система (12.2). Рассмотрим четырехмерную неавтономную разрывную систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= \alpha(t) + u(t)\beta(t), \end{aligned} \quad u = \text{sgn } z_1, \quad \beta(t) < 0, \quad (12.3)$$

и постараемся ответить на следующие два вопроса.

- 1) Когда у этой системы могут быть особые решения, т.е. решения, целиком лежащие на поверхности $z_1 = 0$ (поскольку система разрывна, ее решения по Филиппову определяются как абсолютно непрерывные функции $z(t)$, удовлетворяющие в точках разрыва правой части включению $z^{(IV)}(t) \in \bigcup_{u \in [-1, 1]} (\alpha(t) + u\beta(t))$)?
- 2) Когда у системы (12.3) есть неособые решения, в некоторый момент времени $t = t_0$ выходящие в точку особой траектории с кусочно непрерывным управлением $u(t) = \text{sgn } z_1(t)$ (т.е. функция $z_1(t)$ не должна менять знак или на интервале $(t_0, t_0 + \tau)$, или на интервале $(t_0 - \tau, t_0)$ для некоторого $\tau > 0$)?

Ответ на первый вопрос простой: если на некотором интервале $t \in (\tau_0, \tau_1)$ имеет место тождество $z_1(t) \equiv 0$, то на этом интервале должны быть выполнены соотношения $z_2(t) \equiv z_3(t) \equiv z_4(t) \equiv 0$, откуда следует, что $\alpha(t) + u(t)\beta(t) \equiv 0$ с некоторой функцией $u(t)$, принимающей значения из отрезка $[-1, 1]$; из этого последнего условия следует, что $|\alpha(t)| \leq -\beta(t)$.

В предположении $|\alpha(t)| \leq -\beta(t)$, ответ на второй вопрос оказывается несколько неожиданным: каковы бы ни были функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, удовлетворяющие условиям $\beta < 0$, $|\alpha| \leq -\beta$, решений системы (12.3) с таким свойством не существует! Чтобы доказать это, предположим противное: пусть $z(t)$ — неособое решение системы (12.3) такое, что $z(t_0) = 0$, $z_1(t) > 0$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau)$. Тогда $u(t) \equiv 1$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau)$. Интегрируя систему

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = \alpha(t) + \beta(t)$$

с начальными условиями $z(t_0) = 0$, получаем

$$z_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^3}{6} (\alpha(s) + \beta(s)) ds.$$

Но поскольку $\alpha(s) + \beta(s) \leq 0$, из последней формулы следует, что $z_1(t) \leq 0$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau)$, $\tau > 0$. Противоречие.

Предположим теперь, что $z(t_0) = 0$, $z_1(t) < 0$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau)$. Тогда

$$z_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^3}{6} (\alpha(s) - \beta(s)) ds.$$

Но теперь $\alpha(s) - \beta(s) \geq 0$, и мы вновь приходим к противоречию: $z_1(t) \geq 0$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau)$. Аналогично доказывается, что у системы (12.3) нет неособых решений, проходящих через начало

координат и лежащих на некотором интервале $(t_0 - \tau, t_0)$, $\tau > 0$, целиком в одном из двух полупространств $z_1 > 0$ или $z_1 < 0$. Таким образом, доказана теорема Келли—Коппа—Мойера [33] о сопряжении неособого участка экстремали с особым участком второго порядка.

Теорема 12.1 (Келли—Копп—Мойер). *Если $(\psi(t), x(t))$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$, — участок особой оптимальной траектории системы (11.3) второго существенного порядка, то он не может сопрягаться с неособым участком с кусочно-постоянным управлением.*

Вывод: если в условиях теоремы 12.1 соединение особого и неособого участков все-таки происходит, то неособый участок должен содержать по крайней мере счетное число точек переключения управления, накапливающихся к точке сопряжения с особым участком.

Теорема 12.1 допускает простое обобщение на случай особой траектории произвольного четного порядка $q = 2m$ (порядок при этом должен быть существенным). Действительно, нетрудно показать по индукции [33], что если особая экстремаль $(\psi(t), x(t))$ имеет существенный порядок q , то для функций

$$z_1 = H_1, \quad z_i = \text{ad}_{H_0}^{i-1} H_1, \quad i = 2, \dots, 2q,$$

дифференцирование z_i в окрестности $(\psi(t), x(t))$ в силу системы (11.3) дает

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = z_2, \quad \dots, \quad \dot{z}_{2q-1} = z_{2q}, \quad \dot{z}_{2q} = \text{ad}_{H_0} z_{2q} + u \text{ad}_{H_1} z_{2q}, \\ u = \text{sgn } z_1, \quad (-1)^q \text{ad}_{H_1} < 0. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha(t) = \text{ad}_{H_0} z_{2q}(t)$, $\beta(t) = \text{ad}_{H_1} z_{2q}$ на любом решении системы (11.3), получим

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dots, \quad \dot{z}_{2q-1} = z_{2q}, \quad \dot{z}_{2q} = \alpha(t) + u\beta(t), \quad u = \text{sgn } z_1. \quad (12.4)$$

Теперь рассуждение, с помощью которого мы доказали теорему 12.1, легко переносится и на случай системы (12.4). Записав функцию $z_1(t)$ в виде

$$z_1(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{2q-1}}{(2q-1)!} (\alpha(s) + u\beta(s)) ds,$$

получим то же самое противоречие: если $u = \text{sgn } z_1 = 1$ на некотором интервале (t_0, t) , то $z_1(s) \leq 0$ при $s \in (t_0, t)$, и, наоборот, если $u = \text{sgn } z_1 = -1$, то $z_1(s) \geq 0$. Восстановить детали оставляем читателю для упражнения.

12.3. Пример Льюиса сопряжения в случае локального порядка особой траектории. Отметим, что теорема о сопряжении, вообще говоря, не верна для случая особой экстремали произвольного четного порядка, если порядок локальный. В работе Льюиса [35] построены контрпримеры к соответствующему утверждению.

Пример 12.1 (Льюис [35]).

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T (x_1 - \frac{1}{2})^2 dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= x_2 u, \quad \dot{x}_2 = u - x_1, \quad |u| \leq 1, \\ x_1(0) &= \xi_1 \neq \frac{1}{2}, \quad x_2(0) = \xi_2 \neq 0, \quad x_1(T) = \frac{1}{2}, \quad x_2(T) = 0. \end{aligned}$$

Убедимся, что в этой задаче имеется экстремаль, включающая особый участок второго порядка, и неособый участок этой кривой состыковывается с особым посредством кусочно-непрерывного управления.

Выпишем систему уравнений принципа максимума Понтрягина.

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 x_2 u + \psi_2 (u - x_1) - \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 + x_1 - \frac{1}{2}, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 u, \quad u = \text{sgn}(\psi_1 x_2 + \psi_2). \end{aligned} \quad (12.5)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче время T процесса не фиксировано, оптимальные экстремали должны принадлежать нулевой поверхности уровня гамильтониана

$$\psi_1 x_2 u + \psi_2 (u - x_1) - \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 = 0. \quad (12.6)$$

Найдем особые экстремали задачи. Для этого продифференцируем функцию $H_1 = \psi_1 x_2 + \psi_2$ в силу системы уравнений принципа максимума Понтрягина до появления с ненулевым коэффициентом управляющего параметра u в выражении для производной. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= \left(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) x_2 + \psi_1 (u - x_1) - \psi_1 u = \\ &= \left(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) x_2 - \psi_1 x_1; \\ \frac{d^2 H_1}{dt^2} &= (-\psi_1 u + x_2 u) x_2 + \left(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) (u - x_1) - \left(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) x_1 - \psi_1 x_2 u = \\ &= -2 \left(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) x_1 + u \left(-2\psi_1 x_2 + x_2^2 + \psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку параметр u появился на втором шаге дифференцирования, порядок системы — первый, т.е. большинство особых экстремалей имеет первый существенный порядок. Найдем уравнения особых экстремалей и значение управления на них. Для этого надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \psi_1 x_2 + \psi_2 = 0, \\ -\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 = - \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) x_2, \\ -2 \left(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) x_1 + u \left(-2\psi_1 x_2 + x_2^2 + \psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ -x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ равен $x_2^2 + x_1$. Если $x_2^2 + x_1 \neq 0$, система разрешима относительно переменных ψ_1, ψ_2 :

$$\psi_1 = \frac{x_2(x_1 - \frac{1}{2})}{x_2^2 + x_1}, \quad \psi_2 = -\frac{x_2^2(x_1 - \frac{1}{2})}{x_2^2 + x_1}.$$

Таким образом, через любую точку плоскости (x_1, x_2) , $x_2^2 + x_1 \neq 0$, проходит некоторая особая экстремаль. Надо, правда, позаботиться, чтобы управление

$$u = \frac{2(\psi_2 + x_1 - \frac{1}{2})x_1}{-2\psi_1 x_2 + x_2^2 + \psi_2 + x_1 - \frac{1}{2}} = \frac{2(x_1 - \frac{1}{2})x_1^2}{x_2^4 - x_2^2(x_1 + 1) + x_1(x_1 - \frac{1}{2})} \quad (12.7)$$

оказалось допустимым, т.е. принадлежащим отрезку $[-1, 1]$. В силу (12.6), на оптимальных особых экстремальных должно выполняться соотношение

$$-\psi_2 x_1 - \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 = 0.$$

Подставляя сюда $\psi_2 = -\frac{x_2^2(x_1 - \frac{1}{2})}{x_2^2 + x_1}$ и разрешая полученное уравнение относительно x_2 , получим

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{x_1(2x_1 - 1)}{2x_1 + 1}}.$$

Управление на полученной особой траектории определяется формулой

$$u = \frac{2x_1(2x_1 + 1)^2}{4x_1^2 + 4x_1 + 3}.$$

Мы, естественно, хотели бы найти особые экстремали, находящиеся в малой окрестности точки цели $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, 0)$. В пределе при $x_1 \rightarrow \frac{1}{2}$ получаем $u = \frac{2}{3}$, и управление на найденной особой траектории допустимо.

Заметим, однако, что в самой точке $(\frac{1}{2}, 0)$ знаменатель дроби в выражении (12.7) равен нулю. В силу данного выше определения, траектория

$$\psi_1 = \psi_2 \equiv 0, \quad x_1 \equiv \frac{1}{2}, \quad x_2 \equiv 0, \quad u \equiv \frac{1}{2} \quad (12.8)$$

является особой экстремалью задачи, порядок которой больше порядка гамильтоновой системы. Покажем, что экстремаль $\hat{\xi}$ имеет второй локальный порядок. Для этого продолжим дифференцирование гамильтониана уже в точках экстремали (12.8). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^3 H_1}{dt^3} &= u(4\psi_1 x_1 - 4\psi_2 x_2 - 8x_1 x_2 + 2x_2) + 3u^2(-\psi_1 + x_2) + \\ &+ \dot{u} \left(-2\psi_1 x_2 + x_2^2 + \psi_2 + x_1 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

В точках экстремали (12.8) имеем

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^3 H_1}{dt^3} \equiv 0.$$

Наконец, при четвертом дифференцировании получаем

$$\left. \frac{d^4 H_1}{dt^4} \right|_{(12.8)} = 3u^3 - \frac{7}{2}u^2 + u,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4 H_1}{dt^4} = 9u^2 - 7u + 1 = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Таким образом, экстремаль (12.8) имеет второй локальный порядок.

Покажем, что через точку $(\psi_1, \psi_2, x_1, x_2) = (0, 0, \frac{1}{2}, 0)$ проходят две неособые траектории системы (12.5). Полагая в (12.5) $u \equiv 1$, с точностью до бесконечно малых большего порядка получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t^2 + o(t^2), & x_2(t) &= \frac{1}{2}t + o(t), \\ \psi_1 &= \frac{1}{12}t^3 + o(t^3), & \psi_2(t) &= -\frac{1}{48}t^4 + o(t^4). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в функцию $H_1 = \psi_1 x_2 + \psi_2$, получаем

$$H_1 = \frac{1}{48}t^4 + o(t^4),$$

т.е. условие $\text{sgn } H_1 = 1$ выполнено. Следовательно, в точку $(0, 0, \frac{1}{2}, 0)$ приходит неособая траектория системы (12.5) с управлением $u = 1$ и выходит неособая траектория системы также с управлением $u = 1$.

Заметим, однако, что неособая траектория системы (12.5) с управлением $u = -1$ не может пройти через точку $(0, 0, \frac{1}{2}, 0)$. Действительно, для $u \equiv -1$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t^2 + o(t^2), & x_2(t) &= -\frac{3}{2}t + o(t), \\ \psi_1 &= -\frac{1}{4}t^3 + o(t^3), & \psi_2(t) &= -\frac{1}{16}t^4 + o(t^4), \end{aligned}$$

откуда $H_1 = \frac{5}{16}t^4 + o(t^4) > 0$, т.е. условие $\text{sgn } H_1 = -1$ не выполнено.

13. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

В данном разделе будут изложены достаточные условия оптимальности, основанные на инвариантном интеграле Гильберта и обобщающие метод полей геодезических классического вариационного исчисления.

13.1. Теорема об интегральном инварианте. Начнем с одного из центральных понятий классической механики — интегрального инварианта Пуанкаре—Картана. В $(2n)$ -мерном пространстве с координатами (ψ, x) , $\psi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, снабженном стандартной симплектической структурой $\sum_{i=1}^n d\psi_i \wedge dx_i$ рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}. \quad (13.1)$$

Здесь $H = H(t, \psi, x)$ — некоторая C^2 -функция по совокупности переменных, называемая гамильтонианом системы (13.1). Будем рассматривать систему (13.1) в $(2n + 1)$ -мерном пространстве с координатами (t, ψ, x) :

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}. \quad (13.2)$$

Переменную, по которой идет дифференцирование в (13.2), переименуем из t в s .

В пространстве с координатами (t, ψ, x) рассмотрим произвольный замкнутый контур γ , задаваемый C^1 -отображением

$$\begin{aligned} \gamma : \alpha \in [0, 1] &\mapsto (t(\alpha), \psi(\alpha), x(\alpha)), \\ t(0) = t(1), \quad \psi(0) = \psi(1), \quad x(0) = x(1). \end{aligned}$$

Предположим, что γ трансверсален фазовому потоку системы (13.2), т.е. для любого $\alpha \in [0, 1]$ касательный вектор $\left(\frac{dt}{d\alpha}, \frac{d\psi}{d\alpha}, \frac{dx}{d\alpha}\right)$ линейно независим с вектором фазовой скорости $\left(1, -\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \psi}\right)$ в любой точке $(t(\alpha), \psi(\alpha), x(\alpha))$.

Положим для краткости $\xi = (t, \psi, x)$. Обозначим через $\Xi(s, \xi_0)$ решение (13.2) с начальными условиями $\Xi(0) = \xi_0$. Рассмотрим трубку траекторий системы (13.2), выходящих из контура γ , т.е. рассмотрим двумерное многообразие $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, параметризуемое значениями s и α по формулам

$$\xi = \Xi(s, \xi(\alpha)).$$

Пусть $\gamma_1 \subset \Sigma$ — произвольный замкнутый C^1 -контур вида $\xi = \Xi(s(\alpha), \xi(\alpha))$, $s(\alpha) \geq 0$, $s(0) = s(1)$, охватывающий трубку Σ .

Теорема 13.1 (интегральный инвариант Пуанкаре—Картана).

$$\oint_{\gamma} (\psi dx - H(t, \psi, x)) dt = \oint_{\gamma_1} (\psi dx - H(t, \psi, x)) dt.$$

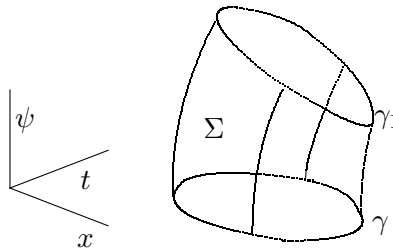


Рис. 19

Доказательство. По теореме Стокса имеем

$$\oint_{\gamma} (\psi dx - H(t, \psi, x)) dt - \oint_{\gamma_1} (\psi dx - H(t, \psi, x)) dt = \iint_{\Sigma^*} (d\psi \wedge dx - dH \wedge dt),$$

где Σ^* — должным образом ориентированная часть поверхности Σ с ориентированной границей $\gamma \cup (-\gamma_1)$. Обозначим

$$\omega = \psi dx - H(t, \psi, x) dt.$$

Утверждается, что вектор фазовой скорости системы (13.2) (а этот вектор является касательным к поверхности Σ в любой ее точке) принадлежит аннулятору 2-формы $d\omega = d\psi \wedge dx - dH \wedge dt$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \left(1, -\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \psi}\right) \lrcorner \left(d\psi \wedge dx - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} d\psi \wedge dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx \wedge dt\right)\right) = \\ & = -\frac{\partial H}{\partial x} dx - \frac{\partial H}{\partial \psi} d\psi - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) dt - \frac{\partial H}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial \psi} dt - \frac{\partial H}{\partial x} dx\right) \equiv 0 \end{aligned}$$

(здесь $v \lrcorner \phi$ обозначает подстановку вектора v в форму ϕ , или внутреннее умножение вектора на форму; результатом внутреннего умножения вектора v на 2-форму η является 1-форма ξ , определяемая соотношением $\xi(v') = \eta(v, v')$). Отсюда следует, что

$$\iint_{\Sigma^*} d\psi \wedge dx - dH \wedge dt = 0.$$

Теорема доказана. □

13.2. Лагранжевы многообразия и поля экстремалей. С этого места для простоты будем рассматривать автономную систему, когда

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0.$$

Нетрудно убедиться, что производная гамильтониана вдоль любой траектории гамильтоновой системы равна

$$\frac{d}{dt} H(t, \psi(t), x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} H(t, \psi, x) \Big|_{\psi=\psi(t), x=x(t)}.$$

Поэтому траектории автономной гамильтоновой системы идут вдоль одной и той же поверхности уровня гамильтониана $H(\psi(t), x(t)) \equiv \text{const}$. Нас, как правило, будут интересовать подмногообразия нулевой поверхности уровня

$$\Sigma_0 = \{(\psi, x) \mid H(\psi, x) = 0\}.$$

Многообразию $\mathcal{M} \subset \Sigma_0$ назовем *лежандровым*, если

$$\omega(v) = 0$$

для любого $v \in T_x \mathcal{M}$. Многообразию $\mathcal{L} \subset \Sigma_0$ размерности n назовем *лагранжевым*, если

$$d\omega|_{\mathcal{L}} = 0,$$

т.е. $d\psi \wedge dx(v_1, v_2) = 0$ для любой пары (v_1, v_2) касательных векторов к \mathcal{L} в точке (ψ, x) .

Эквивалентное определение лагранжевого многообразия:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

для любого кусочно-гладкого замкнутого стягиваемого в \mathcal{L} контура $\gamma \subset \mathcal{L}$.

Теорема 13.2. Пусть \mathcal{L} — некоторое гладкое n -мерное многообразие с краем \mathcal{M} , заполненное траекториями системы (13.1). При этом каждая траектория на \mathcal{L} пересекает \mathcal{M} , и притом в единственной точке. Тогда, если \mathcal{M} — лежандрово многообразие, то \mathcal{L} является лагранжевым многообразием.

Доказательство. Покажем, что интеграл $\oint_{\gamma} \omega$ равен нулю на произвольном замкнутом кусочно-гладком контуре γ , принадлежащем \mathcal{L} . Пусть кривая γ задается в виде $\psi = \psi(s)$, $x = x(s)$, $s \in [0, 1]$. Через каждую точку кривой γ проведем траекторию системы (13.1) вспять до пересечения с \mathcal{M} . Соответствующую кривую на \mathcal{M} обозначим $\gamma_1(s)$. Обозначим через $T(s)$ время, за которое траектория (13.1) с начальными условиями $\gamma(s)$ попала на \mathcal{M} . Предположим, для простоты, что все траектории системы (13.1) пересекают \mathcal{M} в точках $\gamma_1(s)$ трансверсально. Тогда, по теореме о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным данным, функция $T(s)$ и кривая $\gamma_1(s)$ являются гладкими. По теореме об интегральном инварианте имеем

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega.$$

Поскольку \mathcal{M} лежандрово,

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

В силу теоремы Стокса, получаем

$$\iint_{\Pi} d\omega = 0$$

на любой двумерной поверхности $\Pi \subset \mathcal{L}$ с границей $\gamma \cup \gamma_1$. Отсюда следует, что $d\omega|_{\mathcal{L}} = 0$. \square

Применим теорему об интегральном инварианте к решению задачи оптимального управления. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \int_0^T f_0(x, u) dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, u), \quad u \in Q, \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) \in M. \end{aligned} \tag{13.3}$$

В данной задаче время процесса T не фиксировано, M — произвольное гладкое k -мерное подмногообразие \mathbb{R}^n , $k \leq n$. Допустимые траектории $x(t)$ абсолютно непрерывны, допустимые управления $u(t)$ измеримы (Q — некоторое компактное множество, скажем, отрезок).

Пусть $(x(t), u(t))$ — регулярная экстремаль задачи (13.3), т.е. имеется абсолютно непрерывная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая, вместе с $(x(t), u(t))$, следующим трем условиям. Обозначим $\mathcal{H}(\psi, x, u) = -f_0(x, u) + \psi f(x, u)$ функцию Понтрягина задачи (13.3). Пусть

$$H(\psi, x) = \max_{u \in Q} \mathcal{H}(\psi, x, u)$$

(далее эта функция будет называться гамильтонианом задачи (13.3)). Тогда $(\psi(t), x(t), u(t))$ есть решение гамильтоновой системы

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(\psi(t), x(t), u(t)), \quad \dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}(\psi(t), x(t), u(t)); \tag{13.4}$$

управление $u(t)$ удовлетворяет условию максимума:

$$H(\psi(t), x(t)) = \mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) \quad \text{почти всюду на } [0, T]; \tag{13.5}$$

и, наконец, выполнено условие трансверсальности:

$$\psi(T) \perp T_{x(T)}M.$$

Поскольку T не фиксировано, то дополнительно выполнено еще и так называемое условие стационарности по T :

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) \equiv 0.$$

Отметим, что решение системы (13.4), удовлетворяющее условию максимума (13.5), можно рассматривать одновременно как решение следующей разрывной гамильтоновой системы:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}. \quad (13.6)$$

Само понятие решения этой системы нуждается в дополнительном определении. В большинстве случаев можно использовать определение решения разрывной системы в смысле А. Ф. Филиппова. В предположении (которое везде далее будет выполнено), что условие максимума (13.5) задает соответствующее значение $u(\psi, x) = \arg \max_{u \in Q} \mathcal{H}(\psi, x, u)$ как функцию, которая однозначно определена

и непрерывна всюду, кроме точек некоторого стратифицированного подмногообразия \mathcal{S} пространства \mathbb{R}^{2n} коразмерности, большей или равной 1, это определение может быть дано в следующем виде. Абсолютно непрерывная функция $(\psi(t), x(t))$ является решением уравнения (13.6), если ее производная (существующая для почти всех t) равна

$$(\dot{\psi}(t), \dot{x}(t)) = \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \right) \Big|_{(\psi, x, u(\psi, x))}$$

в точках $(\psi, x) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \mathcal{S}$, а в точках $(\psi, x) \in \mathcal{S}$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{\psi}(t), \dot{x}(t)) \in \overline{\text{co}} \bigcup_{\substack{(\psi, x) \rightarrow (\psi(t), x(t)) \\ (\psi, x) \notin \mathcal{S}}} \lim \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \right) \Big|_{(\psi, x, u(\psi, x))},$$

где $\overline{\text{co}}A$ обозначает выпуклое замыкание множества A .

Отображение $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ назовем регулярным в точке $x^0 \in \mathbb{R}^m$, если матрица Якоби этого отображения имеет максимально возможный ранг в этой точке.

Теорема 13.3. *Предположим, что имеется некоторое гладкое n -мерное интегральное подмногообразие \mathcal{L} системы (13.6) с границей \mathcal{M} , обладающее следующими свойствами:*

- 1) *траектория $(\psi(t), x(t))$ лежит на \mathcal{L} ;*
- 2) *\mathcal{L} принадлежит нулевой поверхности уровня гамильтониана $H(\psi, x) = 0$;*
- 3) *\mathcal{L} регулярно проектируется на пространство x ;*
- 4) *через каждую точку \mathcal{M} проходит единственная траектория (13.6), при этом каждая траектория системы (13.6), принадлежащая \mathcal{L} , обязательно проходит через \mathcal{M} ;*
- 5) *проекция \mathcal{M} на пространство x содержит многообразие \mathcal{M} ;*
- 6) *на границе \mathcal{M} выполнено условие трансверсальности $\psi dx|_{\mathcal{M}} = 0$ (в частности, \mathcal{M} является лежандровым).*

Тогда $(\psi(t), x(t))$ является локально оптимальной траекторией задачи (13.1) (доставляет минимум в классе всех допустимых траекторий, принадлежащих проекции \mathcal{L} на пространство x).

Доказательство. Рассмотрим произвольную допустимую траекторию $\tilde{x}(t)$ с теми же начальными условиями, что и у траектории $x(t)$, и целиком принадлежащую проекции \mathcal{L} на пространство x . Рассмотрим поднятие $(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t))$ траектории $\tilde{x}(t)$ в расширенное фазовое пространство (ψ, x) на многообразие \mathcal{L} (в силу предположения о регулярной проектируемости \mathcal{L} на x , такое поднятие определено однозначно и является гладкой кривой). Соединим точки $(\psi(T), x(T))$ и $(\tilde{\psi}(T), \tilde{x}(T)) \in \mathcal{M}$ некоторой гладкой кривой Γ , проходящей по границе \mathcal{M} . Рассмотрим $\int \psi dx$ вдоль подходящим образом ориентированного замкнутого контура, составленного из $(\psi(t), x(t))$, $(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t))$ и Γ . В силу теоремы 13.2, \mathcal{L} является лагранжевым многообразием, поэтому из теоремы Стокса следует, что

$$\int_{(\psi(\cdot), x(\cdot)) \cup (\tilde{\psi}(\cdot), \tilde{x}(\cdot)) \cup \Gamma} \psi dx = 0.$$

Так как $\psi dx|_{\Gamma} \equiv 0$, то

$$\int_{(\psi(\cdot), x(\cdot))} \psi dx = \int_{(\tilde{\psi}(\cdot), \tilde{x}(\cdot))} \psi dx.$$

Однако на траектории $(\psi(\cdot), x(\cdot))$, как следует из условия максимума (13.5), выполнено тождество

$$\psi(t)\dot{x}(t) \equiv f_0(x(t), u(t)),$$

в то время как на траектории $(\tilde{\psi}(\cdot), \tilde{x}(\cdot))$, в силу того же условия максимума для почти всех $t \in [0, \tilde{T}]$, имеет место неравенство

$$\tilde{\psi}(t)\dot{\tilde{x}}(t) \leq f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$$

(равенство $\tilde{\psi}(t)\dot{\tilde{x}}(t) = f_0(\tilde{x}(t), u)$ достигается для того значения u , которое соответствует интегральной кривой системы (13.6), проходящей через точку $(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t))$). Следовательно,

$$\int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \leq \int_0^{\tilde{T}} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt.$$

Теорема доказана. \square

К сожалению, предположение теоремы 13.3 о существовании интегрального многообразия \mathcal{L} с нужными свойствами гладкости в задачах оптимального управления почти никогда не выполняется (в сущности, это предположение эквивалентно тому, что управление на траекториях гамильтоновой системы меняется непрерывно). На самом деле, удается построить лишь стратифицированное гладкое многообразие \mathcal{L} с изломами в точках стратов размерности $n - 1$ и ниже. Обсудим сейчас, влияет ли это ослабление требований на гладкость \mathcal{L} на справедливость утверждения теоремы 13.3. При доказательстве теоремы мы использовали гладкость \mathcal{L} фактически только два раза: во-первых, при поднятии кривой $\tilde{x}(t)$ в расширенное фазовое пространство на \mathcal{L} и, во-вторых, при ссылке на теорему Стокса. В первом случае образ произвольной кусочно-гладкой кривой $\tilde{x}(t)$ на многообразии \mathcal{L} уже не обязан быть кусочно-гладкой кривой (скажем, в случае, когда этот образ пересечет множество точек негладкости \mathcal{L} по подмножеству положительной меры). Однако, в силу теоремы трансверсальности Тома [28], для любой кривой $\tilde{x}(t)$ существует допустимая траектория $\tilde{x}^*(t)$, сколь угодно близкая к $\tilde{x}(t)$ в C^0 -топологии, которая пересекает страты \mathcal{L} размерности $\leq n - 1$ в конечном числе точек, и поднятие кривой $\tilde{x}^*(t)$ в пространство (ψ, x) уже будет кусочно-гладким. Для доказательства оптимальности $x(t)$ достаточно сравнить значения минимизируемого функционала на траекториях $x(t)$ и $\tilde{x}^*(t)$. Теорема Стокса справедлива и для стратифицированных многообразий. Таким образом, и для стратифицированного многообразия \mathcal{L} утверждение теоремы 13.3 остается справедливым.

13.3. Характеристики уравнения Беллмана. Поясним связь теоремы о лагранжевом многообразии с уравнением Беллмана. В теореме 2.1 было доказано, что существование C^1 -гладкого решения уравнения Беллмана

$$\max_{u \in Q} \left(\frac{\partial S}{\partial x} f(x, u) - f_0(x, u) \right) = 0,$$

удовлетворяющее дополнительным краевым условиям, является достаточным условием оптимальности соответствующего семейства экстремалей. Используя изложенный выше гамильтонов формализм, такое решение уравнения Беллмана можно построить в явном виде, основываясь на соответствующем лагранжевом многообразии гамильтоновой системы.

Нам потребуется понятие *системы уравнений характеристик* для уравнения с частными производными первого порядка [17]. Рассмотрим уравнение вида

$$F \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (13.7)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x) \in \mathbb{R}^1$. В $(2n + 1)$ -мерном фазовом пространстве с координатами (x, u, p) ($p \in \mathbb{R}^n$) выпишем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое называется уравнением характеристик и согласовано с уравнением (13.7) в следующем смысле. Пусть $u = U(x)$ — произвольное решение уравнения (13.7). Тогда на любой траектории $(x(t), u(t), p(t))$ искомого дифференциального уравнения должны быть выполнены следующие свойства:

- 1) $U(x(t)) \equiv u(t)$;
- 2) $\frac{\partial U}{\partial x}(x(t)) \equiv p(t)$.

Иными словами, все траектории уравнения характеристик, которые начинаются на поверхности $u = U(x)$, не сходят с этой поверхности, и при этом $p(t)$ изменяется как градиент функции $U(x)$. Дифференцируя первое соотношение по t , получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} = \dot{u} \quad \Leftrightarrow \quad p \dot{x} = \dot{u}.$$

Дифференцируя тождество $F(x(t), u(t), p(t)) \equiv 0$ по t , находим

$$F_x \dot{x} + F_u \dot{u} + F_p \dot{p} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_x \dot{x} + F_u p \dot{x} + F_p \dot{p} \equiv 0.$$

Положим

$$\dot{x} = F_p(x, u, p).$$

Тогда $\langle F_p, F_x + F_u p + \dot{p} \rangle \equiv 0$. В частности, это уравнение будет автоматически выполнено, если

$$F_x + F_u p + \dot{p} = 0.$$

Таким образом,

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - F_u p, \quad \dot{u} = p F_p. \quad (13.8)$$

Остается убедиться, что произвольное решение $U(x)$ уравнения (13.7), ограниченное на траекторию уравнения (13.8), удовлетворяет условиям 1) и 2). Сопоставим функции $u = U(x)$ n -мерную поверхность S в пространстве (x, u, p) , задаваемую уравнениями

$$u = U(x), \quad p = \nabla U(x). \quad (13.9)$$

Будем считать для простоты, что функция $U(x)$ класса C^2 . Проверим, что для любого $x \in S$ фазовая скорость системы (13.8) принадлежит касательному пространству $T_x S$. Аннулятор $T_x S$ является линейной оболочкой $(n + 1)$ 1-форм

$$n_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + du = - \sum_{i=1}^n p_i dx_i + du,$$

$$n_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} dx_i + dp_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$n_0(F_p, p F_p, -F_x - F_u p) = -p F_p + p F_p = 0,$$

$$n_j(F_p, p F_p, -F_x - F_u p) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial x_j} - F_u p_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку $U(x)$ является по предположению решением уравнения (13.7), то имеет место тождество

$$F(x, U(x), \nabla U(x)) \equiv 0.$$

Дифференцируя его по x_j , получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial u} p_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} \equiv 0.$$

Из сравнения получаем $n_j(F_p, p F_p, -F_x - F_u p) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, поверхность (13.9) является интегральным многообразием системы (13.8), и свойства 1) и 2) выполнены.

Для уравнения Беллмана имеем $F\left(x, S, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \max_{u \in Q} H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, u\right)$ (в частности, $F_S \equiv 0$) и первые два уравнения системы характеристик совпадают с гамильтоновой системой (13.6). Таким образом, интегрируя соотношение $\dot{u} = pH_p$ вдоль экстремалей, лежащих на соответствующем лагранжевом многообразии, можно получить явное решение уравнения Беллмана. (При этом, правда, все равно придется проверять, является ли это решение функцией класса C^1 .)

14. ЗАДАЧА ФУЛЛЕРА

Этот раздел посвящен подробному изучению задачи, в которой впервые был обнаружен феномен накопления переключений управления — оптимальные траектории задачи имеют счетное число переключений, сгущающихся к точке сопряжения регулярного и особого участков траектории. Рассмотрим следующую задачу:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T x^2 dt \rightarrow \min, \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= u \in [-1, 1], \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & x(T) &= y(T) = 0. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Уравнение (14.2) описывает поведение механической тележки, в момент времени t находящейся на расстоянии x от начала координат и имеющей скорость y , которая движется без трения под воздействием некоторой силы u , ограниченной по модулю единицей.

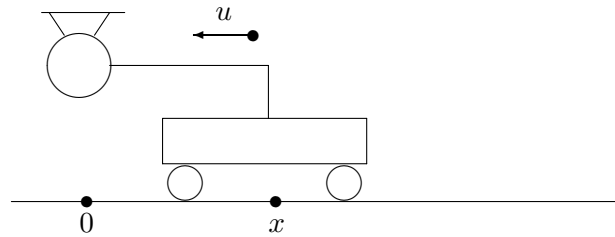


Рис. 20

Наша цель — затормозить тележку в начале координат с минимальным среднеквадратичным отклонением переменной x от начала координат. А. Т. Фуллер рассмотрел функционал (14.1) с целью изучить, как влияет различный выбор критериев качества на процесс стабилизации управляемого объекта в начале координат. Однако следует заметить, что функционал (14.1) реально важен для задач статистики, где минимальное среднеквадратичное отклонение есть один из самых естественных критериев.

Задача Фуллера обладает однопараметрической группой симметрий, которая упрощает ее решение. Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство преобразований:

$$\begin{aligned} (x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) &\mapsto (x_\lambda(\cdot), y_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)), \\ x_\lambda(t) &= \lambda^2 x(t/\lambda), & y_\lambda(t) &= \lambda y(t/\lambda), & u_\lambda(t) &= u(t/\lambda). \end{aligned}$$

Прямое вычисление дает, что при любом $\lambda > 0$ тройка $(x_\lambda(\cdot), y_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot))$ удовлетворяет уравнению (14.2) и $J(u_\lambda(\cdot)) = \lambda^5 J(u(\cdot))$. Отсюда немедленно следует, что если набор $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ является оптимальным для (14.1)–(14.2) при начальных условиях (x_0, y_0) , то тогда набор $(x_\lambda(\cdot), y_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot))$ также оптимален при начальных условиях $(\lambda^2 x_0, \lambda y_0)$. Другими словами, оптимальный синтез $u = u(x, y)$ выдерживает действие группы

$$g_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g_\lambda(x_0, y_0) = (\lambda^2 x_0, \lambda y_0).$$

В частности, точки переключения оптимального синтеза на плоскости с координатами (x_0, y_0) являются орбитами группы g_λ и представляют собой ветви парабол вида $x_0 = C y_0^2$. Остается определить число этих кривых. Для этого рассмотрим произвольную допустимую траекторию $(x(t), y(t))$ с управлением $u(t)$ на интервале (t_0, t_1) . Пусть $y(t) \neq 0$ при $t \in (t_0, t_1)$. Не теряя общности, можно считать, что $y(t) > 0$. Оценим приращение функционала (14.1) на интервале (t_0, t_1) .

Из уравнения $\dot{x} = y > 0$ следует, что на любой допустимой траектории на участке $t_0 \leq t \leq t_1$ значение y является однозначной функцией от x . Если зафиксировать значения x и y в точках t_0 и t_1 , то получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} x^2(t) dt = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{x^2 dx}{y(x)}. \quad (14.3)$$

Из (14.3) следует, что чем выше на плоскости (x, y) расположена траектория, тем меньше $\int_{t_0}^{t_1} x^2(t) dt$.

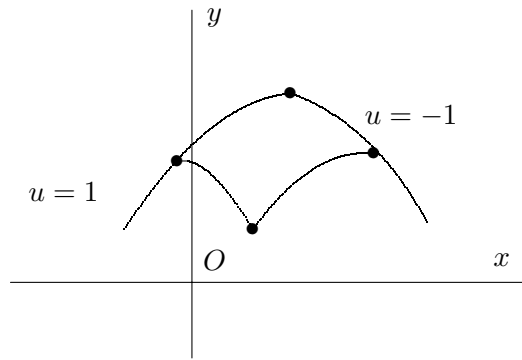


Рис. 21

Таким образом, переключение с $u = -1$ на $u = 1$ в полуплоскости $y > 0$ не оптимально, и множество точек переключения в полуплоскости $y > 0$ состоит из единственной орбиты группы g_λ вида $x = C_1 y^2$.

Аналогично, в полуплоскости $y < 0$ множество точек переключения состоит из единственной орбиты группы g_λ вида $x = C_2 y^2$.

Заметим, что отображение центральной симметрии

$$(x(t), y(t), u(t)) \rightarrow (-x(t), -y(t), -u(t))$$

переводит оптимальные траектории задачи (14.1)–(14.2) в оптимальные. Тем самым, если кривая

$$x = \begin{cases} C_1 y^2 & \text{при } y > 0, \\ C_2 y^2 & \text{при } y < 0 \end{cases} \quad (14.4)$$

является кривой переключения оптимальных траекторий задачи (14.1)–(14.2), то и кривая

$$x = \begin{cases} -C_2 y^2 & \text{при } y > 0, \\ -C_1 y^2 & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

является кривой переключения оптимальных траекторий. Отсюда следует, что отображение $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ переводит кривую (14.4) в себя, т.е. $C_2 = -C_1 > 0$. Тем самым, множество точек переключения задается уравнением

$$x = -C y^2 \operatorname{sgn} y.$$

Для того, чтобы найти константу C , применим принцип максимума Л. С. Понтрягина к задаче (14.1)–(14.2). Путь $(x(t), y(t))$ есть решение задачи (14.1)–(14.2) с управлением $u(t)$; тогда существует пара абсолютно непрерывных функций $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ и число $\psi_0 \geq 0$ (одновременно не равные нулю), такие что

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \psi_0 x, & \dot{x} &= y, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1, & \dot{y} &= u = \operatorname{sgn} \psi_2.\end{aligned}\tag{14.5}$$

Будем искать регулярные экстремали задачи, для которых $\psi_0 \neq 0$. Положим $\psi_0 = 1$. Поскольку мы рассматриваем задачу со свободным концом, из условия трансверсальности по T следует, что оптимальные траектории принадлежат нулевой поверхности уровня гамильтониана

$$\psi_1 y + |\psi_2| - \frac{1}{2}x^2 = 0.$$

Следовательно, в точках переключения имеем $\psi_2 = 0$ и $\psi_1 y = \frac{1}{2}x^2$.

Проинтегрируем систему (14.5) с начальными условиями $x^0 = -C(y^0)^2$, $\psi_2^0 = 0$, $\psi_1^0 = \frac{1}{2}C^2(y^0)^3$ при некотором $y^0 > 0$, положив $u = -1$ до первого момента пересечения с поверхностью $\psi_2 = 0$. После этого подставим найденные значения переменных x и y в уравнение $x = Cy^2$ (заметим, что, поскольку функция $H = \psi_1 y + |\psi_2| - \frac{1}{2}x^2$ является первым интегралом системы (14.5), уравнение $\psi_1^1 = \frac{1}{2}C^2(y^1)^3$ будет выполнено автоматически). В результате получим

$$\begin{aligned}y^1 &= y^0 - t, \\ x^1 &= -C(y^0)^2 + y^0 t - \frac{1}{2}t^2, \\ \psi_1^1 &= \frac{1}{2}C^2(y^0)^3 - C(y^0)^2 t + \frac{1}{2}y^0 t^2 - \frac{1}{6}t^3,\end{aligned}$$

где $t > 0$ — корень уравнения

$$-\frac{1}{2}C^2(y^0)^3 t + \frac{1}{2}C(y^0)^2 t^2 - \frac{1}{6}y^0 t^3 + \frac{1}{24}t^4 = 0.$$

Будем искать t в виде $t = y^0 \tau$, тогда получаем

$$\begin{aligned}C &= \frac{-C + \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2}, \\ -\frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{2}C\tau - \frac{1}{6}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^3 &= 0.\end{aligned}$$

Исключая отсюда τ , получим полиномиальное уравнение на константу C

$$C^2(72C^5 - 36C^4 + 6C^3 - 3C^2 - 4C + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2C - 1)(36C^4 + 3C^2 - 2) = 0.$$

Прямое вычисление дает, что

$$C_0 = \frac{1}{12}\sqrt{6\sqrt{33} - 6} \approx 0,4446\dots$$

Фазовый портрет оптимальных траекторий изображен на рис. 22.

Отличительной чертой оптимальных траекторий задачи (14.1)–(14.2) является существование счетного числа переключений на конечном интервале времени. Действительно, пусть точки $(x^0, y^0) = (-C_0(y^0)^2, y^0)$ и $(x^1, y^1) = (C_0(y^1)^2, y^1)$ являются двумя последовательными точками переключения некоторой кривой (для определенности считаем $y^0 > 0$). Поскольку

$$x^1 + \frac{1}{2}(y^1)^2 = x^0 + \frac{1}{2}(y^0)^2,$$

получаем

$$\frac{y^1}{y^0} = -\sqrt{\frac{1 - 2C_0}{1 + 2C_0}} \approx -0,2422.$$

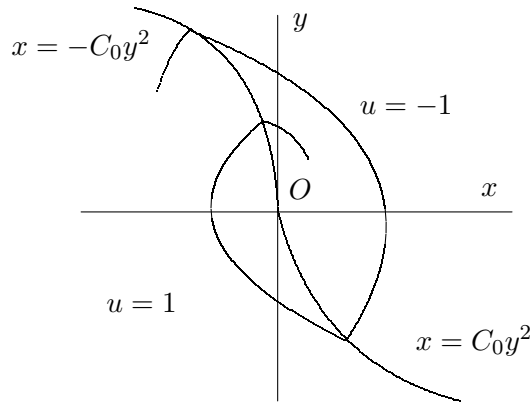


Рис. 22

Отсюда следует, что координаты $y^0, y^1, \dots, y^{\{k\}}, \dots$ точек последовательных переключений на данной траектории образуют знакоперевающуюся геометрическую прогрессию со знаменателем $-\sqrt{\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}$. Моменты времени, проходящие между последовательными переключениями, равны

$$|y^{\{k+1\}}| + |y^{\{k\}}| = \left(1 + \sqrt{\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}\right) |y^{\{k\}}|$$

и также образуют убывающую геометрическую прогрессию, ввиду чего оптимальный процесс завершается за конечное время \hat{T} после счетного числа переключений. Отсюда следует, что оптимальное управление не является *кусочно-непрерывной* функцией времени: у него нет предела при $t \rightarrow \hat{T} - 0$.

Приведем простое рассуждение, позволяющее строго доказать оптимальность построенного семейства траекторий. Предположим, что для тех же начальных условий (x_0, y_0) имеется допустимая траектория $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{u}(t))$, доставляющая меньшее значение функционалу (14.1), чем траектория $(x(t), y(t), u(t))$ данного семейства. Доопределяя траектории системы (14.2) после момента попадания в начало координат тождественным нулем, получим, что обе траектории определены на одном и том же интервале времени $(0, T)$. В силу условия максимума,

$$\psi_2(t)u(t) \geq \psi_2(t)\tilde{u}(t)$$

для почти всех $t \in (0, T)$. Интегрируя это соотношение на $(0, T)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi_2(t)(u(t) - \tilde{u}(t)) dt &\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^T \psi_1(t)(y(t) - \tilde{y}(t)) dt \geq 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad - \int_0^T x(t)(x(t) - \tilde{x}(t)) dt \geq 0 \end{aligned}$$

(каждый раз мы интегрируем по частям соответствующий интеграл с учетом нулевых граничных условий). Таким образом,

$$\int_0^T x^2 dt \leq \int_0^T x\tilde{x} dt.$$

Поскольку $x\tilde{x} \leq \frac{1}{2}(x^2 + \tilde{x}^2)$, отсюда получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^T x^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{x}^2 dt,$$

что и требовалось.

Автор задачи, А. Т. Фуллер, назвал режим бесконечного числа переключений на конечном интервале времени *chattering* режимом. Мы будем называть такие режимы траекториями с накоплением переключений.

15. ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНОМ МНОГООБРАЗИИ

Рассмотрим отображение $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, оставляющее точку $x^0 \in \mathbb{R}^n$ неподвижной: $\Phi(x^0) = x^0$. Предположим, что Φ является гиперболическим отображением в точке x^0 , т.е. дифференциал Φ в x^0 есть линейная матрица $D\Phi^0$, имеющая k собственных значений, больших 1 по модулю, и $n - k$ собственных значений, меньших 1 по модулю. Тогда теорема об инвариантном многообразии диффеоморфизма утверждает, что существует k -мерное многообразие \mathfrak{M} , содержащее точку x^0 и инвариантное относительно Φ . При этом действие Φ на \mathfrak{M} топологически эквивалентно действию $D\Phi^0$ на собственном подпространстве, отвечающем собственным значениям $D\Phi^0$, по модулю большим 1. Гладкость многообразия \mathfrak{M} (которое мы будем называть неустойчивым усом диффеоморфизма) такая же, как и у самого отображения Φ . Аналогичное утверждение верно и для устойчивого уса Φ , отвечающего собственным числам $D\Phi^0$, меньшим 1 по модулю. Полное доказательство теоремы см. в [31]. Ниже мы докажем несколько более простое утверждение.

Теорема 15.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм с неподвижной точкой x^0 . Пусть $D\Phi(x^0)$ имеет k собственных значений, больших 1 по модулю, и $n - k$ собственных значений, меньших 1 по модулю. Тогда существует k -мерное многообразие \mathfrak{M} такое, что

- 1) $\Phi(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{-n}(x) = x^0$ для любого x из некоторой открытой окрестности x^0 на \mathfrak{M} .

Доказательство. С самого начала можно считать, что точка x^0 совпадает с началом координат $x^0 = 0$. Сначала рассмотрим частный случай, когда отображение Φ линейное: $\Phi(x) = Dx$, где D — невырожденная $(n \times n)$ -матрица. Более того, предположим, что матрица D имеет блочно-диагональный вид

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A — матрица размера $(n - k) \times (n - k)$ и $\|Au\| \leq a\|u\|$ для некоторого $0 < a < 1$ и любого $u \in \mathbb{R}^{n-k}$, а B — матрица размера $(k \times k)$ и $\|Bv\| \geq b\|v\|$ для некоторого $b > 1$ и любого $v \in \mathbb{R}^k$.

Утверждение теоремы в этом случае очевидно; искомое многообразие \mathfrak{M} задается уравнениями $u = 0$. Докажем, однако, этот факт способом, который работает и для нелинейного возмущения отображения $(u, v) \mapsto (Au, Bv)$.

Рассмотрим произвольные k -мерные поверхности в \mathbb{R}^n вида $u = f(v)$, где $f(\cdot)$ — некоторые C^1 -гладкие функции. Отображение Φ переводит поверхность $u = f_0(v)$ в некоторую поверхность $u = f_1(v)$. Покажем, что соответствующее отображение $\tilde{\Phi} : f_0(\cdot) \mapsto f_1(\cdot)$ — сжимающее в топологии C^1 .

Пусть точка (u_1, v_1) , лежащая на поверхности $u_1 = f_1(v_1)$, получается при действии Φ на точку (u_0, v_0) , принадлежащую поверхности $u_0 = f_0(v_0)$. Поскольку $u_1 = Au_0$, $v_1 = Bv_0$, отсюда следует, что $A^{-1}u_1 = f_0(B^{-1}v_1)$ и

$$f_1(v_1) = Af_0(B^{-1}v_1).$$

Отметим, что если функция $f_0(\cdot)$ была определена при $\|v\| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то и функция $f_1(\cdot)$, в силу соотношения $\|B^{-1}v_1\| \leq \|v_1\|$, также определена при $\|v\| < \varepsilon$. Оценим теперь разность $\|h_{11}(v) - h_{21}(v)\|$ для двух каких-либо функций $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ из рассматриваемого

класса через величину $\sup_{\|v\| < \varepsilon} \|h_1(v) - h_2(v)\|$. Пусть $\|v\| < \varepsilon$; тогда

$$\|h_{11}(v) - h_{21}(v)\| = \|Ah_1(B^{-1}v) - Ah_2(B^{-1}v)\| \leq a \sup_{\|v\| < \varepsilon} \|h_1(v) - h_2(v)\|.$$

Для производных функций $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ имеем оценку:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Dh_{11}(v)}{Dv} - \frac{Dh_{21}(v)}{Dv} \right\| &= \left\| A \frac{Dh_1}{Dv}(B^{-1}v)B^{-1} - A \frac{Dh_2}{Dv}(B^{-1}v)B^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \frac{a}{b} \sup_{\|v_1\| < \varepsilon} \left\| \frac{Dh_1}{Dv}(v_1) - \frac{Dh_2}{Dv}(v_1) \right\|. \end{aligned}$$

Поскольку $0 < a < 1$, $b > 1$, отсюда получаем, что отображение $\tilde{\Phi}$ — сжимающее и, следовательно, имеет единственную неподвижную «точку», т.е. некоторое C^1 -многообразие вида $u = f_*(v)$. Нетрудно видеть, что отображение $\tilde{\Phi}$ переводит в себя множество многообразий $u = f(v)$, для которых $f(0) = 0$, $\frac{Df}{Dv}(0) = 0$. Поэтому неподвижная точка $u = f_*(v)$ также удовлетворяет условиям $f_*(0) = 0$, $\frac{Df_*}{Dv}(0) = 0$.

Для доказательства существования устойчивого уса достаточно рассмотреть обратное отображение Φ^{-1} и повторить дословно предыдущее утверждение.

Прежде чем перейти к нелинейному случаю, обсудим, как связаны между собой свойства сжимаемости и растяжимости линейных отображений и их спектральные характеристики. Пусть все собственные числа некоторой матрицы C меньше 1 по модулю. Без ограничения общности можно считать, что матрица C приведена к жордановой форме. Для жордановых $(m \times m)$ -клеток вида

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

условие $\|Jx\| < \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^m$, более уже не соблюдается. (Полезное упражнение — подсчитать операторную норму J_m для $m = 2$, $m = 3$ при условии, что норма пространства \mathbb{R}^m евклидова.) Однако, если рассмотреть степень J_m^M для достаточно большого $M \in \mathbb{N}$, то отображение J_m^M уже будет сжимающим. Действительно, J_m можно записать как $J_m = \lambda E + I$, где E — единичная $(m \times m)$ -матрица, а

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— нильпотентная матрица, $I^m = 0$. В формуле бинома Ньютона

$$(\lambda E + I)^M = \sum_{k=0}^M C_M^k \lambda^{M-k} I^k$$

сумма конечна (число слагаемых не превосходит $m + 1$). Поскольку $C_M^{N-k} \leq \text{const} \cdot M^m$ при $k \leq m$ и $M^m \lambda^M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$, получаем $\|J_m^M\| \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Теперь свойство сжимаемости отображения $\tilde{\Phi}$ для линейного отображения $\Phi = D$ общего вида будет выполнено для некоторой степени M_0 отображения D . Отсюда следует существование инвариантного многообразия \mathfrak{M} пока только для отображения D^{M_0} . Заметим, однако, что $\mathfrak{M}_1 = D\mathfrak{M}$ также обязано быть инвариантным для D^{M_0} . Однако такое многообразие может быть получено как неподвижная точка для некоторого сжимающего отображения. Поэтому $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ и $D\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$.

Перейдем теперь к нелинейному случаю. Произвольное нелинейное отображение Φ в достаточно малой окрестности неподвижной точки $x^0 = 0$ можно рассматривать как малое возмущение своей главной линейной части $D = D\Phi(0)$. Поскольку отображение $\tilde{\Phi}$, которое отображение Φ

индуцирует на поверхностях вида $u = f(v)$, непрерывно зависит от Φ , для всех отображений Φ , достаточно близких к отображению D , отображение $\tilde{\Phi}$ также будет сжимающим. Докажем это подробнее.

Пусть отображение Φ имеет вид $\Phi(x) = Dx + H(x)$, где

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

В эквивалентной записи имеем

$$u_1 = Au + h_1(u, v), \quad v_1 = Bv + h_2(u, v),$$

где

$$\frac{\partial h_i}{\partial u}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial h_i}{\partial v}(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $u = f_0(v)$ — некоторая C^1 -поверхность, построим ее образ $u_1 = f_1(v_1)$ при отображении $\tilde{\Phi}$. Прежде всего по теореме об обратном отображении имеем

$$u = A^{-1}u_1 + g_1(u_1, v_1), \quad v = B^{-1}v_1 + g_2(u_1, v_1)$$

для некоторых функций $g_1(u_1, v_1)$, $g_2(u_1, v_1)$ класса C^1 таких, что

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_1}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial v_1}(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1}u_1 + g_1(u_1, v_1) = f_0(B^{-1}v_1 + g_2(u_1, v_1)).$$

Это последнее уравнение неявно задает функцию $u_1 = f_1(v_1)$ такую, что

$$A^{-1}f_1(v_1) + g_1(f_1(v_1), v_1) \equiv f_0(B^{-1}v_1 + g_2(f_1(v_1), v_1)).$$

Используя это соотношение, для любых двух функций $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ оценим сверху модуль разности $\|h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1)\|$ через $\|h_1(v) - h_2(v)\|$. Имеем

$$\begin{aligned} h_{11}(v_1) &= Ah_1(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1)) - Ag_1(h_{11}, v_1), \\ h_{21}(v_1) &= Ah_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{21}, v_1)) - Ag_1(h_{21}, v_1), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1) &= A(h_1(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1)) - h_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{21}, v_1))) - \\ &\quad - A(g_1(h_{11}, v_1) - g_1(h_{21}, v_1)). \end{aligned}$$

Оценивая разности соответствующих функций по теореме о среднем, получим

$$\begin{aligned} |h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1)| &\leq \|A\| \cdot \|h_1(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1)) - h_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1))\| + \\ &\quad + \|A\| \cdot \|h_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1)) - h_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{21}, v_1))\| + \\ &\quad + \|A\| \cdot \left\| \frac{\partial g_1}{\partial u} \right\| \cdot \|h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1)\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|h_1(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1)) - h_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1))\| + \\ &\quad + \|A\| \cdot \left\| \frac{Dh_2}{Dv} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial g_2}{\partial u} \right\| \cdot \|h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1)\| + \\ &\quad + \|A\| \cdot \left\| \frac{\partial g_1}{\partial u} \right\| \cdot \|h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1)\|. \end{aligned}$$

Черта над функцией в формулах означает, что она вычислена в некоторой промежуточной точке. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\left(1 - \|A\| \cdot \left\| \frac{Dh_2}{Dv} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial g_2}{\partial u} \right\| - \|A\| \cdot \left\| \frac{\partial g_1}{\partial u} \right\| \right) \cdot \|h_{11}(v_1) - h_{21}(v_1)\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|h_1(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1)) - h_2(B^{-1}v_1 + g_2(h_{11}, v_1))\|. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\left\| \frac{\partial g_i}{\partial u} \right\| \rightarrow 0$ при $(u, v) \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$), выбирая достаточно малую окрестность начала координат, в которой определены функции h_1, h_2 , и с учетом оценки $\|A\| \leq a < 1$, получим что

$$\sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \|h_{11}(v) - h_{21}(v)\| \leq \lambda \sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \|h_1(v) - h_2(v)\|$$

для некоторого $\lambda < 1$. Аналогично доказывается сжимаемость отображения $\tilde{\Phi}$ в норме C^1 . Теорема доказана. \square

16. РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

16.1. Орбитальная эквивалентность и грубость систем дифференциальных уравнений. В этом разделе мы напомним некоторые сведения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, связанные с классификацией уравнений в окрестности неподвижной точки.

Рассмотрим два уравнения

$$\dot{x} = F(x), \quad (16.1)$$

$$\dot{y} = G(y). \quad (16.2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n; F(x), G(y)$ — функции класса C^1 . Уравнения (16.1) и (16.2) назовем C^1 -эквивалентными в окрестности точек x^0, y^0 соответственно, если существует диффеоморфизм $h: \mathcal{O}(x^0) \rightarrow \mathcal{O}(y^0)$, где $\mathcal{O}(x^0), \mathcal{O}(y^0)$ — открытые окрестности точек x^0 и y^0 , такой, что для любого решения $x(t)$ уравнения (16.1) функция $y(t) = h(x(t))$ является решением уравнения (16.2), т.е.

$$\frac{dh}{dx} \dot{x} = G(h(x(t))) \Leftrightarrow F(x) = \left(\frac{dh}{dx} \right)^{-1} \cdot G(h(x)).$$

Все обыкновенные дифференциальные уравнения являются C^1 -эквивалентными в окрестности любой точки, в которой фазовая скорость системы не равна нулю (теорема о выпрямлении векторного поля, см. [3]). Тем не менее, это самый жесткий тип эквивалентности систем. В частности, уравнения

$$\dot{x} = x \quad \text{и} \quad \dot{y} = 2y, \quad x, y \in \mathbb{R}^1,$$

являются неэквивалентными в окрестности начала координат в смысле этого определения, поскольку для любого диффеоморфизма $y = h(x)$, переводящего 0 в 0, имеем $h(x) = ax + o(x)$, $a \neq 0$, откуда

$$x \equiv \frac{1}{a} \cdot 2(ax + o(x)) \quad \Leftrightarrow \quad -x = o(x).$$

Противоречие. Но эти уравнения определяют, по существу, одинаковое поведение фазового потока систем. Чтобы отождествить системы с одинаковыми особенностями поведения траекторий (т.е. те, у которых одни и те же притягивающие множества, один и тот же характер достижения траекториями этих множеств и так далее), вводят понятие орбитальной эквивалентности.

Определение 16.1. Уравнения (16.1) и (16.2) назовем орбитально C^1 -эквивалентными в окрестностях $\mathcal{O}(x^0), \mathcal{O}(y^0)$, если существует диффеоморфизм $h: \mathcal{O}(x^0) \rightarrow \mathcal{O}(y^0)$ такой, что для любого решения $x(t)$ уравнения (16.1) найдется такая C^1 -функция $T(t)$, что $y(t) = h(x(T(t)))$ является решением уравнения (16.2):

$$F(x) = \left(\frac{dh}{dx} \right)^{-1} \Big|_{h(x)} \cdot G(h(x)) \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Последнее соотношение означает, что при отображении h фазовая скорость системы (16.1) в точке x переходит в вектор, пропорциональный вектору фазовой скорости системы (16.2) в точке $h(x)$. Следовательно, при диффеоморфизме h поле направлений системы (16.1) переходит в поле направлений системы (16.2). В принципе, это свойство можно считать определением орбитальной эквивалентности уравнений.

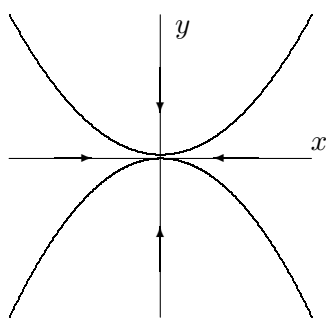


Рис. 23

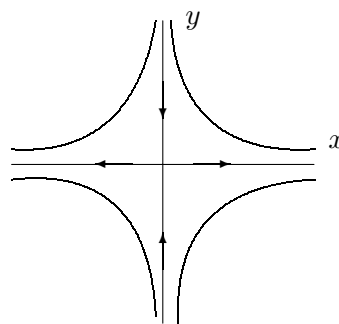


Рис. 24

Можно еще более ослабить требования на гладкость преобразования, связывающего орбитально эквивалентные уравнения, и ввести понятие орбитальной C^0 -эквивалентности, когда диффеоморфизм $h(\cdot)$ заменяется на гомеоморфизм.

Определение 16.2. Уравнения (16.1) и (16.2) назовем орбитально C^0 -эквивалентными в окрестностях $\mathcal{O}(x^0)$, $\mathcal{O}(y^0)$, если существует гомеоморфизм $h : \mathcal{O}(x^0) \rightarrow \mathcal{O}(y^0)$ такой, что для любого решения $x(t)$ уравнения (16.1) найдется такая C^0 -функция $T(t)$, что $y(t) = h(x(T(t)))$ является решением уравнения (16.2).

Рассмотрим теперь орбитально неэквивалентные системы в окрестности неподвижной точки, например, следующие две линейные системы на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -2y, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -2y. \end{cases} \quad (16.3)$$

В первом случае мы имеем дело с устойчивым узлом, во втором — с седлом. Поскольку линейные системы нетрудно проинтегрировать в явном виде, неэквивалентность систем очевидна. В первом случае все ненулевые траектории системы имеют вид

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \quad y(t) = y_0 e^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad y = Cx^2,$$

и стремятся к началу координат. Во втором случае

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot x^2 = C,$$

и имеется только две ненулевые траектории, для которых начало координат является предельным множеством — устойчивый ус $x = 0$ и неустойчивый $y = 0$. Остальные траектории покидают окрестность начала координат, прижимаясь к неустойчивому усу положения равновесия.

Возникает вопрос: можно ли научиться определять, эквивалентны или нет системы в окрестности положения равновесия, не прибегая к явным формулам для решений? В частности, как научиться определять траектории, которые стремятся к положению равновесия либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ (т.е. те, для которых положение равновесия является ω или α предельным множеством соответственно)? Например, как понять, изменится ли фазовый портрет системы при добавлении в ее правую часть квадратичных членов по x , y ?

Для ответа на эти вопросы удобно записать систему в некоторой специальной системе координат. Положим

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi.$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ — полярный радиус точки на плоскости (x, y) , $\phi = \text{Arctg} \frac{y}{x}$ — полярный угол. Отождествляя значения ϕ по модулю 2π , можно считать, что (ρ, ϕ) являются координатами точек двумерного полубесконечного цилиндра $C = \mathbb{R}_+ \times S^1 = \{(\rho, \phi) \mid \rho \geq 0, \phi \in [0, 2\pi]\}$ с границей $S^1 = \{\rho = 0, \phi \in [0, 2\pi]\}$. Рассмотрим отображение

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow C, \quad (x, y) \mapsto (\rho, \phi).$$

Это отображение является взаимно однозначным всюду в \mathbb{R}^2 за исключением точки начала координат. Этой точке соответствует целая одномерная окружность $\rho = 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$ — точка «раздувается» в окружность. Поэтому переход от декартовых координат на плоскости (x, y) к полярным называют σ -раздутием или σ -процессом.

Найдем образ уравнений (16.3) на C . Для узла имеем

$$\dot{\rho} \cos \phi - \rho \sin \phi \dot{\phi} = -\rho \cos \phi, \quad \dot{\rho} \sin \phi + \rho \cos \phi \dot{\phi} = -2\rho \sin \phi,$$

откуда

$$\dot{\rho} = -\rho(\cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi), \quad \dot{\phi} = -\sin \phi \cos \phi.$$

В точках окружности $\rho = 0$ неподвижными являются четыре точки $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$. В окрестности точки $(0, 0)$ имеем: $\dot{\rho} = -\rho(1 + o(1)) < 0$, $\dot{\phi} = -\phi + o(\phi)$, поэтому все траектории с начальными условиями из малой окрестности этой точки уже не покинут эту окрестность и потому их ω -предельное множество состоит в точности из точки $(0, 0)$. Аналогичное утверждение имеет место для точки $(\pi, 0)$. В малой окрестности точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$ имеем:

$$\dot{\rho} = -2\rho(1 + o(1)) < 0, \quad \dot{\phi} = \left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому для всех начальных условий, отличных от $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$, соответствующие траектории покидают окрестность точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Такая же картина поведения траекторий имеет место в окрестности точки $(\frac{3\pi}{2}, 0)$.

Для седла получаем

$$\dot{\rho} \cos \phi - \rho \sin \phi \dot{\phi} = \rho \cos \phi, \quad \dot{\rho} \sin \phi + \rho \cos \phi \dot{\phi} = -2\rho \sin \phi,$$

откуда

$$\dot{\rho} = \rho(\cos^2 \phi - 2 \sin^2 \phi), \quad \dot{\phi} = -3 \sin \phi \cos \phi.$$

В точках окружности $\rho = 0$ неподвижными также являются четыре точки $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$. В окрестности точки $(0, 0)$ имеем

$$\dot{\rho} = \rho(1 + o(1)) < 0, \quad \dot{\phi} = -3\phi + o(\phi),$$

поэтому все траектории системы с начальными условиями, отличными от $\phi(0) = 0$, покидают окрестность точки $(0, 0)$. Такая же картина поведения траекторий имеет место для всех остальных неподвижных точек. Как видим, топологическое поведение траекторий двух сравниваемых систем в окрестности неподвижной точки различно. Процедура σ -раздутия послужила «микроскопом» для того, чтобы разглядеть детали поведения траекторий в окрестности устойчивых и неустойчивых усов неподвижной точки. В частности, траектории системы, которые приближались в неподвижной точке без касания, в новой системе координат вообще перестали пересекаться, а для траекторий, касавшихся друг друга при подходе к неподвижной точке, порядок касания стал на единицу меньше.

Обсудим теперь вопрос, что меняет в поведении траекторий системы добавление в ее правую часть членов большего порядка малости в окрестности неподвижной точки. Системы, для которых топологическое поведение траекторий при этом не меняется, иными словами, которые являются орбитально эквивалентными своей линеаризации в неподвижной точке, называются устойчивыми, или грубыми. Оба рассмотренных примера являются грубыми системами. Покажем, как доказывается теорема о грубости на примере седла.

Теорема 16.1 (об устойчивости седла). Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0,$$

где

$$f_1(x_1, x_2) = o(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = o(x_1, x_2),$$

в окрестности начала координат орбитально C^0 -эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \end{cases}$$

Доказательство. Шаг 1. Теорема Гробмана—Хартмана. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение с неподвижной точкой $(0, 0)$, и при этом $D\Phi(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$, где $|\mu_1| > 1$, $|\mu_2| < 1$. Утверждается, что существует непрерывная замена переменных $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$ вида

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + f_1(x_1, x_2), \\ y_2 = x_2 + f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

при которой отображение Φ запишется в виде

$$\bar{\Phi}(y_1, y_2) = (\mu_1 y_1, \mu_2 y_2).$$

Чтобы показать это, выпишем уравнение, которому должны удовлетворять функции $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ замены $x \rightarrow y$ для того, чтобы было выполнено утверждение теоремы Гробмана—Хартмана. Соответствующее уравнение на замену переменных называется гомологическим. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \Phi(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longrightarrow & \bar{\Phi}(y) \end{array}$$

с учетом того, что

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2) \\ \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad \phi_i(x) = o(x),$$

получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1 + f_1(x_1, x_2)) &= \mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2) + f_1(\Phi(x)), \\ \mu_2(x_2 + f_2(x_1, x_2)) &= \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2) + f_2(\Phi(x)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{\mu_1} \phi_1(x_1, x_2) + \frac{1}{\mu_1} f_1(\mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2), \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2)), \\ f_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{\mu_2} \phi_2(x_1, x_2) + \frac{1}{\mu_2} f_2(\mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2), \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2)). \end{aligned} \tag{16.4}$$

Чтобы доказать существование решения $f_1(\cdot)$ гомологического уравнения, покажем, что отображение

$$h(x_1, x_2) \mapsto \bar{h}(x_1, x_2), \quad \bar{h}(x_1, x_2) = \frac{1}{\mu_1} \phi_1(x_1, x_2) + \frac{1}{\mu_1} h(\mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2), \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2))$$

является сжимающим в топологии C^0 . Действительно, если $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$ — две произвольные непрерывные функции, определенные на всей двумерной плоскости и ограниченные по норме C^0 , то

$$|\bar{h}_2(x_1, x_2) - \bar{h}_1(x_1, x_2)| = \frac{1}{\mu_1} |h_2(y_1, y_2) - h_1(y_1, y_2)|,$$

где $y_1 = \mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2)$. Таким образом,

$$\|\bar{h}_2(\cdot) - \bar{h}_1(\cdot)\| \leq \frac{1}{\mu_1} \|h_2(\cdot) - h_1(\cdot)\|,$$

и отображение $h(\cdot) \rightarrow \bar{h}(\cdot)$ — сжимающее. Но тогда $f_1(\cdot)$ — неподвижная точка этого отображения — является решением гомологического уравнения.

Чтобы доказать существование решения $f_2(\cdot)$ второго уравнения системы (16.4), надо перейти к обратному отображению и показать, что отображение

$$\begin{aligned} f_2(\cdot) \mapsto \bar{f}_2(\cdot), \quad \bar{f}_2(y_1, y_2) &= \mu_2 f_2(x_1, x_2) - \phi_2(x_1, x_2), \\ y_1 = \mu_1 x_1 + \phi_1(x_1, x_2), \quad y_2 &= \mu_2 x_2 + \phi_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

— сжимающее.

Чтобы доказать теорему Гробмана—Хартмана, нам осталось показать, что построенное нами отображение

$$x \rightarrow y, \quad y_1 = x_1 + f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2 + f_2(x_1, x_2),$$

является взаимно однозначным, по крайней мере в окрестности начала координат. Из гомологического уравнения (16.4) следует, что

$$\|f_1(\cdot)\| = O(1)\|\phi_1(\cdot)\|, \quad \|f_2(\cdot)\| = O(1)\|\phi_2(\cdot)\|.$$

Поскольку по предположению $\phi_i(x) = o(x)$, отсюда следует, что $f_i(x) = o(x)$ и отображение $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1 + f_1(x_1, x_2), x_2 + f_2(x_1, x_2))$ является гомеоморфизмом, по крайней мере в окрестности начала координат.

Шаг 2. Сопряженность фазовых потоков. Рассмотрим две однопараметрические группы диффеоморфизмов плоскости, g_t и \bar{g}_t , отвечающие системе

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f_2(x_1, x_2)$$

и системе

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2,$$

соответственно. Чтобы доказать C^0 -орбитальную эквивалентность систем, достаточно найти непрерывную замену $y = F(x)$, для которой

$$\bar{g}_t(F(x)) = F(g_t(x))$$

при любом $t \in \mathbb{R}$.

Положим сначала $t = 1$ и докажем сопряженность отображений g_1 и \bar{g}_1 . Для того, что свести этот вопрос к теореме Гробмана—Хартмана, вычислим производные g_1 и \bar{g}_1 в начале координат. Для отображения \bar{g}_1 производная $D\bar{g}_1(0, 0)$ легко получается из явного представления решений в виде матричной экспоненты:

$$\bar{g}_t(y_1, y_2) = (e^{\lambda_1 t} y_1^0, e^{\lambda_2 t} y_2^0),$$

откуда

$$D\bar{g}_t(0, 0) = (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}).$$

В частности, $D\bar{g}_1(0, 0) = (e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2})$.

Чтобы продифференцировать отображение g_t , соответствующую систему удобно сначала записать в виде системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 + \int_0^t \lambda_1 x_1(s) + f_1(x_1(s), x_2(s)) ds, \\ x_2(t) = x_2^0 + \int_0^t \lambda_2 x_2(s) + f_2(x_1(s), x_2(s)) ds. \end{cases}$$

Дифференцируя по x_1^0, x_2^0 и вводя обозначения

$$h_{11}(t) = \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_1^0}, \quad h_{12}(t) = \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_2^0}, \quad h_{21}(t) = \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_1^0}, \quad h_{22}(t) = \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_2^0},$$

с учетом того, что $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, i = 1, 2$, получаем

$$\begin{aligned} h_{11}(t) &= 1 + \int_0^t \lambda_1 h_{11}(s) ds, & h_{12}(t) &= \int_0^t \lambda_1 h_{12}(s) ds, \\ h_{21}(t) &= \int_0^t \lambda_1 h_{21}(s) ds, & h_{22}(t) &= 1 + \int_0^t \lambda_2 h_{22}(s) ds. \end{aligned}$$

С учетом начальных условий $h_{11}(0) = 1$, $h_{12}(0) = 0$, $h_{21}(0) = 0$, $h_{22}(0) = 1$, получаем

$$h_{11}(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad h_{12}(t) = 0, \quad h_{21}(t) = 0, \quad h_{22}(t) = e^{\lambda_2 t},$$

т.е. $Dg_t(0,0)$ совпадает с $D\bar{g}_t(0,0)$. Теперь существование отображения $F_0(x_1, x_2)$, для которого $\bar{g}_1(F_0(x)) = F_0(g_1(x))$, следует из теоремы Гробмана—Хартмана, поскольку $\mu_1 = e^{\lambda_1} > 1$, $\mu_2 = e^{\lambda_2} < 1$.

Покажем теперь, как из отображения F_0 устроить отображение F , сопрягающее потоки g_t , \bar{g}_t уже для произвольных t . Положим

$$F = \int_0^1 \bar{g}_{-s} F_0 g_s ds.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \bar{g}_t(F(x)) &= \int_0^1 \bar{g}_{t-s}(F_0(g_s(x))) ds = \int_0^1 \bar{g}_{t-s}(F_0(g_{s-t}(g_t(x)))) ds = \\ &= \int_{-t}^{1-t} \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds = \\ &= \int_{-t}^0 \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds + \int_0^{1-t} \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds. \end{aligned}$$

Подставив соотношение $\bar{g}_1(F_0) = F_0(g_1)$ в первый из двух интегралов, запишем его в виде

$$\int_{-t}^0 \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds = \int_{-t}^0 \bar{g}_{-s-1}(F_0(g_{s+1}(g_t(x)))) ds,$$

откуда

$$\int_{-t}^0 \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds = \int_{-t+1}^1 \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds.$$

Следовательно,

$$\bar{g}_t(F(x)) = \int_0^1 \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds.$$

С другой стороны,

$$F(g_t(x)) = \int_0^1 \bar{g}_{-s}(F_0(g_s(g_t(x)))) ds,$$

т.е.

$$\bar{g}_t(F(x)) = F(g_t(x)).$$

Осталось проверить обратимость отображения F в окрестности начала координат. Из теоремы Гробмана—Хартмана следует, что $F_0(x) = x + o(x)$. Точно так же для \bar{g}_t и g_t имеем представление

$$\bar{g}_t(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} x, \quad g_t(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} x + o(x).$$

Отсюда следует, что

$$F(x) = x + o(x).$$

□

16.2. Полуканоническая форма гамильтоновой системы в окрестности особой экстремали второго порядка. Обратимся к замене (12.1). Напомним, что система функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($k < n$), называется функционально независимой в области Ω , если матрица Якоби $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$ имеет в каждой точке Ω максимальный ранг k . Мы будем рассматривать достаточно малую открытую область Ω , содержащую особые экстремали. В ситуации общего положения функции z_1, \dots, z_4 функционально независимы и могут быть дополнены функциями w_1, \dots, w_{2n-4} до полной системы функционально независимых функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, в окрестности особого решения второго порядка система (11.3) может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_2 &= z_3, & \dot{z}_3 &= z_4, & \dot{z}_4 &= \alpha(z, w) + u\beta(z, w), \\ \dot{w} &= F(z, w, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Рассмотрим сначала систему (16.5), в которой переменные w отсутствуют, функция $\alpha(z, w)$ и функция $\beta(z, w)$ постоянны, $\alpha(z, w) \equiv 0$, $\beta(z, w) = -1$. В этом случае (16.5) является системой принципа максимума Понтрягина для двумерной задачи Фуллера (14.1)–(14.2):

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -\operatorname{sgn} z_1. \quad (16.6)$$

Найдем семейство оптимальных экстремалей задачи Фуллера способом, который затем можно будет обобщить и на случай произвольной системы (16.5).

Обозначим через $\Sigma = \{(z, w) \mid z_1 = 0\}$ поверхность переключения системы (16.6). Рассмотрим отображение последования Пуанкаре $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, которое сопоставляет произвольной точке $(z_0, w_0) \in \Sigma$ точку, где происходит первое пересечение с поверхностью разрыва траектории системы (16.6), выходящей из точки (z_0, w_0) . Покажем, что отображение Пуанкаре корректно определено и является гладким в некоторой окрестности того двумерного интегрального подмногообразия, которое заполнено оптимальными траекториями задачи (14.1)–(14.2). При этом кривая переключения внутри такого двумерного подмногообразия является инвариантной кривой отображения Φ . Для установления факта существования такой инвариантной кривой естественно применить технику теоремы об интегральном многообразии.

Отображение Пуанкаре является вырожденным (и даже не всюду определенным) в окрестности начала координат пространства (z_1, z_2, z_3, z_4) . Чтобы разрешить особенность отображения Пуанкаре в окрестности инвариантной кривой, введем следующие координаты $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$:

$$z_1 = \xi_4^4 \xi_1, \quad z_2 = \xi_4^3 \xi_2, \quad z_3 = \xi_4^2 \xi_3, \quad z_4 = \xi_4. \quad (16.7)$$

Напомним, что задача Фуллера обладает однопараметрической группой симметрий. Из этого факта, в частности, следует, что система (16.6) является однородной относительно действия следующей однопараметрической группы преобразований пространства \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} g_\lambda : z &\mapsto \tilde{z}, \\ \tilde{z}_1 &= \lambda^4 z_1, \quad \tilde{z}_2 = \lambda^3 z_2, \quad \tilde{z}_3 = \lambda^2 z_3, \quad \tilde{z}_4 = \lambda z_4. \end{aligned}$$

Замена (16.7) как раз и индуцирована действием группы g_λ . Здесь $\lambda = \xi_4$ является координатой на орбите группы, а координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) можно рассматривать как координаты факторпространства пространства $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ по действию g_λ (т.е. (ξ_1, ξ_2, ξ_3) параметризуют сами орбиты). Данная замена переменных является обобщением полярных (точнее, сферических) координат в \mathbb{R}^4 . Она сопоставляет точке $z = 0$ целую 3-мерную плоскость $\xi_4 = 0$ в системе координат ξ . В алгебраической геометрии такого рода замены называются σ -раздутьями.

Подсчитаем отображение Φ в координатах ξ . В координатах (z_1, z_2, z_3, z_4) отображение Пуанкаре задается следующим образом. Пусть $z^0 = (0, z_2^0, z_3^0, z_4^0)$ — точка поверхности Σ , для которой $z_2^0 \neq 0$. Для определенности будем считать, что $z_2^0 > 0$. Тогда траектория системы (16.6), стартующая в начальный момент $t = 0$ из точки z^0 на некотором интервале времени $(0, \tau)$, $\tau > 0$, остается в полупространстве $z_1 > 0$, т.е. $u(t) = \operatorname{sgn} z_1(t) = 1$ при $t \in (0, \tau)$. Интегрируя систему (16.6) с начальными условиями z^0 , получаем

$$z_4^0 \mapsto z_4^1 = z_4^0 - t^0,$$

$$\begin{aligned} z_3^0 &\mapsto z_3^1 = z_3^0 + z_4^0 t^0 - \frac{1}{2}(t^0)^2, \\ z_2^0 &\mapsto z_2^1 = z_2^0 + z_3^0 t^0 + \frac{1}{2}z_4^0 (t^0)^2 - \frac{1}{6}(t^0)^3, \end{aligned}$$

где $t^0 = t^0(z_2^0, z_3^0, z_4^0)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$z_2^0 t^0 + \frac{1}{2}z_3^0 (t^0)^2 + \frac{1}{6}z_4^0 (t^0)^3 - \frac{1}{24}(t^0)^4 = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} z_4^0 &= \xi_4^0, & z_3^0 &= (\xi_4^0)^2 \xi_3^0, & z_2^0 &= (\xi_4^0)^3 \xi_2^0, \\ z_4^1 &= \xi_4^1, & z_3^1 &= (\xi_4^1)^2 \xi_3^1, & z_2^1 &= (\xi_4^1)^3 \xi_2^1, \\ & & & & t^0 &= \xi_4^0 \tau. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi_4^1 &= \xi_4^0(1 - \tau), \\ \xi_3^1 &= \frac{\xi_3^0 + \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2}, \\ \xi_2^1 &= \frac{\xi_2^0 + \xi_3^0 \tau + \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3}, \end{aligned} \tag{16.8}$$

где $\tau = \tau(\xi_2^0, \xi_3^0)$ — наименьший по модулю ненулевой корень уравнения

$$\xi_2^0 \tau + \frac{1}{2}\xi_3^0 \tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{24}\tau^4 = 0. \tag{16.9}$$

Система (16.6) является центрально-симметричной (т.е. если $(z(t), u(t))$ — решение (16.6) с начальными условиями z^0 , то $(-z(t), -u(t))$ есть решение (16.6) с начальными условиями $-z^0$). В силу однородности системы относительно действия группы g_λ , каждая орбита группы, лежащая на поверхности переключения $z_1 = 0$, при отображении Пуанкаре переходит также в некоторую орбиту группы g_λ . В частности, если некоторая орбита группы перейдет при отображении Пуанкаре в центрально-симметричную орбиту, то повторное отображение Пуанкаре переведет ее образ в точки исходной орбиты. В координатах ξ каждой такой орбите отвечает некоторая неподвижная точка отображения Φ^2 — двукратно примененного отображения Пуанкаре. При этом отображение Φ^2 оказывается гиперболическим в этой неподвижной точке.

Таким образом, на поверхности $\xi_4 = 0$ будем искать точки (ξ_2, ξ_3) , которые отвечают таким орбитам группы, которые переводятся при отображении Пуанкаре Φ в центрально-симметричные орбиты. Из (16.7) в этом случае следует, что $\text{sgn } \xi_4^1 = -\text{sgn } \xi_4^0$, $\xi_3^1 = -\xi_3^0$, $\xi_2^1 = \xi_2^0$. Получаем

$$-\xi_3^0 = \frac{\xi_3^0 + \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2}, \quad \xi_2^0 = \frac{\xi_2^0 + \xi_3^0 \tau + \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3}.$$

Эта последняя система является линейной относительно (ξ_2^0, ξ_3^0) . Найдем ξ_2^0, ξ_3^0 :

$$\xi_3^0 = \frac{(\tau - 2)\tau}{2(\tau^2 - 2\tau + 2)}, \quad \xi_4^0 = \frac{\tau^2 - 5\tau + 5}{6(\tau^4 - 5\tau^3 + 11\tau^2 - 12\tau + 6)}.$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение (16.9), получим

$$\begin{aligned} &\tau^2(\tau - 2)(\tau^4 - 7\tau^3 + 11\tau^2 - 8\tau + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\tau^2(\tau - 2) \left(\tau^2 - \frac{7 + \sqrt{33}}{2}\tau + \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \right) \left(\tau^2 - \frac{7 - \sqrt{33}}{2}\tau + \frac{7 - \sqrt{33}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Вещественные корни этого уравнения равны

$$\tau_1 = 1,242121374, \quad \tau_2 = 2, \quad \tau_3 = 5,130159950, \quad \tau_4 = 0.$$

Интересующий нас корень равен

$$\tau^* = 1,242121374.$$

Значения соответствующих координат ξ_2^0, ξ_3^0 равны соответственно

$$\xi_2^* \approx 0,09884505445, \quad \xi_3^* \approx -0,4446235599.$$

Найдем дифференциал отображения $(\xi_2^0, \xi_3^0) \mapsto (\xi_2^1, \xi_3^1)$ в точке (ξ_2^*, ξ_3^*) . Получим

$$D^* = \frac{D(\xi_2^1, \xi_3^1)}{D(\xi_2^0, \xi_3^0)} \Big|_{(\xi_2^*, \xi_3^*)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\tau^*)^3} & \frac{\tau^*}{(1-\tau^*)^3} \\ 0 & \frac{1}{(1-\tau^*)^2} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{-\xi_3^* - 3\xi_2^*}{1-\tau^*} \cdot \frac{24}{12\xi_3^* + 8\tau^* - 3(\tau^*)^2} & \frac{-\xi_3^* - 3\xi_2^*}{1-\tau^*} \cdot \frac{12\tau^*}{12\xi_3^* + 8\tau^* - 3(\tau^*)^2} \\ \frac{1+2\xi_3^*}{1-\tau^*} \cdot \frac{24}{12\xi_3^* + 8\tau^* - 3(\tau^*)^2} & \frac{1+2\xi_3^*}{1-\tau^*} \cdot \frac{12\tau^*}{12\xi_3^* + 8\tau^* - 3(\tau^*)^2} \end{pmatrix}.$$

Окончательно,

$$D^* = \begin{pmatrix} 471,0457801 & 248,7923145 \\ 404,9781824 & 268,5742494 \end{pmatrix}$$

и собственные значения матрицы D^* равны

$$\lambda_1^* \approx 702,9828520, \quad \lambda_2^* \approx 36,63717746.$$

Дифференциал отображения Пуанкаре Φ в точке $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$ задается следующей (3×3) -матрицей

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} D^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \tau^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, спектр дифференциала состоит из одного собственного числа $1 - \tau^*$, по модулю меньшего 1, и двух собственных чисел, по модулю больших 1.

Как было сказано выше, $\Phi(\xi_2^*, -\xi_3^*, 0) = (\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$, т.е. $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$ — неподвижная точка отображения Φ^2 . Найдем теперь дифференциал Φ^2 в точке $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$.

Обозначим через s отображение $s(\xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_2, -\xi_3, -\xi_4)$. Из свойств симметрии отображения Пуанкаре следует, что $\Phi(s(\xi_2, \xi_3, \xi_4)) = s(\Phi(\xi_2, \xi_3, \xi_4))$, поэтому

$$D\Phi \Big|_{s(\xi_2, \xi_3, \xi_4)} \cdot Ds = Ds \cdot D\Phi \Big|_{(\xi_2, \xi_3, \xi_4)},$$

где

$$Ds = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для точки $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$ получаем

$$D\Phi^2 \Big|_{(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)} = (Ds \cdot \Omega^* \cdot (Ds)^{-1}) \cdot \Omega^*.$$

Отсюда следует, что спектр $D\Phi^2$ по-прежнему состоит из одного собственного числа, по модулю меньшего 1, и двух собственных чисел, по модулю больших 1. Следовательно, по теореме об инвариантном многообразии, существует одномерное многообразие Γ^* , содержащее точку $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$, которое инвариантно относительно отображения Φ^2 и ограничение на которое отображения Φ^2 является сжимающим.

Вывод не удивительный: это инвариантное многообразие является прямой $\xi_2 = \xi_2^*, \xi_3 = \xi_3^*$. Действительно, однородность системы (16.6) влечет, что любая полупрямая вида $\xi_2 = \xi_2^0, \xi_3 = \xi_3^0, \xi_4 \geq 0$ переходит в некоторую полупрямую $\xi_2 = \xi_2^1, \xi_3 = \xi_3^1, \xi_4 \leq 0$. Как только мы нашли неподвижную точку отображения

$$(\xi_2^0, \xi_3^0, 0) \xrightarrow{\Phi} (\xi_2^1, \xi_3^1, 0) \xrightarrow{\Phi} (\xi_2^2, \xi_3^2, 0),$$

мы автоматически нашли и инвариантную кривую отображения Пуанкаре Φ^2 . Однако наши вычисления не были напрасны. Сейчас мы «возмутим» систему (16.6) так, что она перестанет быть

однородной относительно прежней группы симметрий, однако при этом неподвижная точка отображения Пуанкаре на плоскости $\xi_4 = 0$ сохранится, и отображение Φ^2 останется гиперболическим в этой точке. Но тогда вывод о существовании инвариантного многообразия отображения Φ^2 уже станет нетривиальным.

Итак, рассмотрим частный случай системы (16.5), в которой переменные w все еще отсутствуют, но функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ теперь произвольны. Для упрощения вычислений предположим, что в точке $z = 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = -1$$

(на самом деле результат верен для любой пары значений $(\alpha(0), \beta(0))$, удовлетворяющих неравенству $|\alpha(0)| < -\beta(0)$ [12, 43]),

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = \alpha(z) + u\beta(z), \quad u = \text{sgn } z_1. \quad (16.10)$$

Рассмотрим отображение Пуанкаре Φ — отображение последования поверхности $z_1 = 0$ для системы (16.10) и запишем это отображение в координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, определяемых соотношениями (16.7). Пусть

$$(\xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0) \xrightarrow{\Phi} (\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1) \xrightarrow{\Phi} (\xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2).$$

Посмотрим, какие изменения нужно внести в формулы (16.8), связывающие координаты $(\xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0)$, $(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1)$, $(\xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2)$. Будем рассматривать отображение Φ в малой окрестности точки $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$, являющейся неподвижной точкой отображения Φ^2 системы (16.6), считая при этом $\xi_4^0 > 0$. Тогда траектория системы (16.10) выходит из точки $(0, \xi_2^0(\xi_4^0)^3, \xi_3^0(\xi_4^0)^2, \xi_4^0)$ с управлением $u = 1$ и выходит из точки $(0, \xi_2^1(\xi_4^1)^3, \xi_3^1(\xi_4^1)^2, \xi_4^1)$ с управлением $u = -1$. Найдем сначала соотношения для $(\xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0)$ и $(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1)$. Перепишем систему (16.10) в виде системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} z_4(t) &= z_4^0 + \int_0^t (\alpha(z(s)) + \beta(z(s))) ds, \\ z_3(t) &= z_3^0 + z_4^0 t + \int_0^t (t-s)(\alpha(z(s)) + \beta(z(s))) ds, \\ z_2(t) &= z_2^0 + z_3^0 t + z_4^0 \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} (\alpha(z(s)) + \beta(z(s))) ds, \\ z_1(t) &= z_2^0 t + z_3^0 \frac{t^2}{3} + z_4^0 \frac{t^3}{6} + \int_0^t \frac{(t-s)^3}{6} (\alpha(z(s)) + \beta(z(s))) ds. \end{aligned}$$

При малых $s > 0$ имеем

$$\alpha(z(s)) + \beta(z(s)) = -1 + sh_0(s, z^0),$$

где функция $h_0(s, z^0)$ класса C^1 по совокупности переменных (следствие теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра). Делая замену времени под знаком интеграла вида $s = ts'$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} z_4(t) &= z_4^0 - t + t^2 \int_0^1 h_4(ts', z^0) ds', \\ z_3(t) &= z_3^0 + z_4^0 t - \frac{1}{2}t^2 + t^3 \int_0^1 h_3(ts', z^0) ds', \\ z_2(t) &= z_2^0 + z_3^0 t + \frac{1}{2}z_4^0 t^2 - \frac{1}{6}t^3 + t^4 \int_0^1 h_2(ts', z^0) ds', \end{aligned}$$

$$z_1(t) = z_2^0 t + \frac{1}{2} z_3^0 t^2 + \frac{1}{6} z_4^0 t^3 - \frac{1}{24} t^4 + t^5 \int_0^1 h_1(ts', z^0) ds'$$

с некоторыми функциями $h_1(s, z^0)$, $h_2(s, z^0)$, $h_3(s, z^0)$, $h_4(s, z^0)$ класса C^1 по совокупности переменных.

Первый момент переключения (пересечения траектории с поверхностью разрыва $z_1 = 0$) $t = t(z^0)$ есть корень уравнения

$$z_2^0 t + \frac{1}{2} z_3^0 t^2 + \frac{1}{6} z_4^0 t^3 - \frac{1}{24} t^4 + t^5 \int_0^1 h_1(ts', z^0) ds' = 0. \quad (16.11)$$

Перейдем к координатам (ξ_2, ξ_3, ξ_4) , при этом будем искать решение уравнения (16.11) в виде $t = \xi_4^0 \tau(\xi)$. Получим

$$\begin{aligned} \xi_4^1 &= \xi_4^0(1 - \tau) + (\xi_4^0)^2 \Xi_4^0(\xi^0, \tau), \\ \xi_3^1 &= \frac{\xi_3^0 + \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2} + \xi_4^0 \Xi_3^0(\xi^0, \tau), \\ \xi_2^1 &= \frac{\xi_2^0 + \xi_3^0 \tau + \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3} + \xi_4^0 \Xi_2^0(\xi^0, \tau), \end{aligned}$$

где τ — корень уравнения вида

$$\xi_2^0 \tau + \frac{1}{2} \xi_3^0 \tau^2 + \frac{1}{6} \tau^3 - \frac{1}{24} \tau^4 + \xi_4^0 \Xi_1^0(\xi^0, \tau) = 0.$$

Как именно выглядят функции Ξ_i^0 , $i = 1, \dots, 4$, для нас сейчас не существенно. Из полученных соотношений следует, что ограничение отображения Пуанкаре Φ на плоскость $\xi_4 = 0$ совпадает с соответствующим ограничением отображения Пуанкаре для системы (16.6).

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \xi_4^2 &= \xi_4^1(1 + \tau_1) + (\xi_4^1)^2 \Xi_4^1(\xi^1, \tau_1), \\ \xi_3^2 &= \frac{\xi_3^1 + \tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1^2}{(1 + \tau_1 + 1)^2} + \xi_4^1 \Xi_3^1(\xi^1, \tau_1), \\ \xi_2^2 &= \frac{\xi_2^1 + \xi_3^1 \tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1^2 + \frac{1}{6}\tau_1^3}{(1 + \tau_1)^3} + \xi_4^1 \Xi_2^1(\xi^1, \tau_1), \end{aligned}$$

где τ_1 — корень уравнения вида

$$\xi_2^1 \tau_1 + \frac{1}{2} \xi_3^1 \tau_1^2 + \frac{1}{6} \tau_1^3 + \frac{1}{24} \tau_1^4 + \xi_4^1 \Xi_1^1(\xi^1, \tau_1) = 0.$$

Таким образом, точка $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$ по-прежнему является неподвижной точкой отображения Φ^2 уже и для системы (16.10). Выпишем дифференциал $D\Phi^2$ в точке $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$. Легко видеть, что

$$D = D\Phi^2 \Big|_{(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)} = \begin{pmatrix} \Omega^* & * \\ 0 & 0 & (1 - \tau^*)^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \Omega^* & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \tau^*)^2 \end{pmatrix}$$

— дифференциал $D\Phi^2$ для невозмущенной системы (16.6), а звездочками обозначены числа, выражающиеся через частные производные функций Ξ_i^j , $i, j = 1, \dots, 4$, значения которых не существенны, поскольку не влияют на собственные числа матрицы D (но влияют на собственные направления этой матрицы и, тем самым, на касательные пространства к инвариантным многообразиям

отображения $D\Phi^2$ в точке $(\xi_2^*, \xi_3^*, 0)$. Таким образом, отображение Φ^2 является гиперболическим, и из теоремы об инвариантном многообразии следует

Утверждение 16.1. *В пространстве (z_1, z_2, z_3, z_4) существует одномерное многообразие Γ^* вида*

$$z_1 = 0, \quad z_2 = z_4^3(\xi_2^* + O(1)z_4), \quad z_3 = z_4^2 \operatorname{sgn} z_4(\xi_3^* + O(1)z_4),$$

которое инвариантно относительно отображения Пуанкаре Φ^2 системы (16.10). При этом ограничение Φ^2 на Γ^* является сжимающим. В частности, все решения системы (16.10) с начальными условиями, принадлежащими кривой Γ^* , приходят в начало координат за конечное время после счетного числа пересечений с поверхностью разрыва $z_1 = 0$.

Доказательство. Доказать нужно лишь конечность времени прихода в начало координат траекторий с начальными условиями на Γ^* . Мы видели, что время движения соответствующих траекторий между точками z^0 и z^1 и точками z^1 и z^2 , соответственно, имеет вид $t = z_4^i(\tau^* + O(1))$. Поскольку отображение Пуанкаре является сжимающим в точках кривой Γ^* , сумма таких времен на каждой отдельной траектории оценивается сверху сходящейся геометрической прогрессией и, таким образом, конечна. Тем самым утверждение 16.1 доказано. \square

17. РАССЛОЕНИЕ С ТРАЕКТОРИЯМИ С НАКОПЛЕНИЕМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ

17.1. Теорема о существовании расслоения. В предыдущем разделе мы доказали существование инвариантной кривой переключений у некоторого семейства траекторий с накоплением переключений в окрестности особой траектории второго порядка. Рассмотрим теперь следующую систему, которую можно считать возмущением системы (16.5):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, w, u), & \dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, w, u), \\ \dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, w, u), & \dot{z}_4 &= a(w) + ub(w) + f_4(z, w, u), \\ \dot{w} &= F(z, w, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Теперь мы покажем, что если функции f_i ($i = 1, \dots, 4$) достаточны малы (точный смысл этих слов будет выяснен позднее), то особые траектории системы (17.1) заполняют открытую область поверхности $z = 0$, и в каждую точку этой области приходит соответствующее однопараметрическое семейство траекторий с накоплением переключений. При этом семейство траекторий в некотором смысле гладко зависит от точки, через которую оно проходит. Точнее, траектории семейства заполняют некоторое двумерное стратифицированное многообразие, а объединение таких двумерных многообразий в объемлющем пространстве представляет собой расслоение коразмерности 2 над базой коразмерности 4.

На самом деле мы приведем здесь схему доказательства соответствующей теоремы, поскольку, во-первых, почти все принципиальные идеи доказательства уже были изложены, а во-вторых, необходимые подробные вычисления весьма громоздки.

Замечание 17.1. Может показаться, что сам факт существования траекторий с накоплением переключений обязан наличию особых траекторий порядка 2 и выше. Однако это не так. Разрывная гамильтонова система общего вида не приводится к виду (17.1) и, вообще говоря, не имеет особых траекторий порядка 2 и выше. Однако в ситуации общего положения (т.е. для открытого в соответствующей топологии множества гамильтонианов) гамильтонова система с тангенциальным разрывом на гиперповерхности приводится к некоторой другой полуканонической форме, которая уже обладает траекториями с накоплением переключений. Впервые этот факт был доказан И. Купкой в работе [34]. Множество фуллеровских точек (т.е. точек, через которые проходит однопараметрическое семейство траекторий с накоплением переключений) имеет в примере И. Купки коразмерность 8. Несколько позднее, в работах М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [13, 43] коразмерность была понижена до 7. Подчеркнем, что в обоих случаях (и в ситуации, рассмотренной И. Купкой, и в ситуации, рассмотренной М. И. Зеликиным и В. Ф. Борисовым) траектории с накоплением переключений *не* проходят через какую-либо особую траекторию.

Как и ранее, мы приведем результаты соответствующих вычислений только для системы (17.1) в окрестности точки $a(0, w_0) = 0$, $b(0, w_0) = -1$. Доказательство того, что при произвольных $a(0, w_0)$ и $b(0, w_0)$, удовлетворяющих условиям $|a(0, w_0)| < -b(0, w_0)$, повторное отображение Пуанкаре после разрешения особенностей имеет гиперболическую неподвижную точку и инвариантное многообразие в ее окрестности, приведено в [43].

Пусть дано $w_0 \in \mathbb{R}^{2n-4}$. Зафиксируем точку $(0, w_0)$ на поверхности $z = 0$. Предположим, что выполнены неравенства

$$b(w_0) < 0, \quad |a(w_0)| < -b(w_0).$$

Определим отображение

$$g_\lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \lambda > 0, \quad g_\lambda(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\lambda^4 z_1, \lambda^3 z_2, \lambda^2 z_3, \lambda z_4).$$

Рассмотрим систему (17.1), правые части которой удовлетворяют соотношениям

$$\sup_{\substack{\|z\| \leq \varepsilon, \\ \|w - w_0\| \leq \varepsilon, \\ |u| \leq 1}} \lambda^{-(5-i)} |f_i(g_\lambda(z), w, u)| < \text{const}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (17.2)$$

С этого места и далее будем считать, что

$$b(0, w_0) = -1, \quad a(0, w_0) = 0.$$

В малой окрестности точки $(0, w_0)$ рассмотрим отображение последования Пуанкаре Φ поверхности z_1 в себя и разрешим его особенность, перейдя к координатам

$$(z, w) \rightarrow (\xi, \eta), \quad \xi \in \mathbb{R}^4, \quad \eta \in \mathbb{R}^{2n-4}, \\ z_1 = \xi_4^4 \xi_1, \quad z_2 = \xi_4^3 \xi_2, \quad z_3 = \xi_4^2 \xi_3, \quad z_4 = \xi_4; \quad w = w_0 + \xi_4 \eta.$$

Подсчитав отображение Φ в координатах (ξ, η) , можно убедиться, что

- 1) с точностью до членов высшего порядка малости по ξ_4 , отображение Φ для системы (17.1) совпадает с отображением Φ для невозмущенной системы (16.5) (в которой $\alpha(z, w) \equiv \alpha(0, w_0)$, $\beta(z, w) \equiv \beta(0, w_0)$, $F(z, w, u) \equiv F(0, w_0, u)$);
- 2) для невозмущенной системы кривая переключения семейства оптимальных траекторий задачи Фуллера переходит при замене переменных $(z, w) \rightarrow (\xi, \eta)$ в две полуоси в пространстве (ξ, η) : $\xi_i = \xi_i^*$, $i = 1, 2, 3$, $\xi_4 > 0$, $\eta = \eta^*$ для первой ветви кривой и $\xi_i = \xi_i^{**}$, $i = 1, 2, 3$, $\xi_4 < 0$, $\eta = \eta^{**}$ для второй ветви;
- 3) для системы (17.1) общего вида точка $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*)$ является неподвижной точкой двукратного отображения Φ^2 , причем Φ^2 является гиперболическим отображением в своей неподвижной точке (т.е. дифференциал отображения не имеет собственных чисел, равных 1 по абсолютной величине).

Гиперболичность Φ^2 в неподвижной точке позволяет применить теорему об инвариантном многообразии для поиска устойчивого подмногообразия отображения Φ^2 в неподвижной точке. Оказывается, что устойчивое подмногообразие является одномерным и определяет двумерное интегральное подмногообразие системы (17.2), заполненное траекториями с накоплением переключений. Остается вернуться к исходным координатам и проверить, будет ли отображение Пуанкаре гладким в точках данной кривой.

Поскольку все замены переменных явные, описанная процедура позволяет определить расположение кривой переключения на поверхности разрыва Σ с любой точностью. Это позволяет строить семейства полей экстремалей с накоплением переключений и с особыми экстремалами второго порядка.

Приступим к реализации намеченной программы. Прежде всего, двукратное отображение Пуанкаре поверхности $\xi_1 = 0 \setminus \{\xi_2 = 0\}$ в себя по траекториям системы (17.1)–(17.2) может быть записано в виде:

$$(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta) \xrightarrow{u=1} (\xi_1^1 = 0, \xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1) \xrightarrow{u=-1} (\xi_1^2 = 0, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2, \eta^2).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\xi_2^1 &= \frac{\xi_2 + \tau\xi_3 + \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3}{(1-\tau)^3} + \xi_4\Xi_2(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau), \\ \xi_3^1 &= \frac{\xi_3 + \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1-\tau)^2} + \xi_4\Xi_3(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau), \\ \xi_4^1 &= \xi_4(1-\tau) + \xi_4^2\Xi_4(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau), \\ \eta^1 &= \frac{\eta - \tau F(0, w_0, 1)}{1-\tau} + \xi_4 N(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau),\end{aligned}$$

а $\tau = \tau(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta)$ есть наименьший положительный корень уравнения вида

$$\xi_2 + \frac{1}{2}\tau\xi_3 + \frac{1}{6}\tau^2 - \frac{1}{24}\tau^3 + \xi_4\Xi_1(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta, \tau) = 0,$$

если $\xi_4 > 0$, и наибольший отрицательный корень этого уравнения, если $\xi_4 < 0$. Аналогично,

$$\begin{aligned}\xi_2^2 &= \frac{\xi_2^1 + \tau_1\xi_3^1 + \frac{1}{2}\tau_1^2 + \frac{1}{6}\tau_1^3}{(1+\tau_1)^3} + \xi_4^1\Xi_2^1(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1, \tau_1), \\ \xi_3^2 &= \frac{\xi_3^1 + \tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1^2}{(1+\tau_1)^2} + \xi_4^1\Xi_3^1(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1, \tau_1), \\ \xi_4^2 &= \xi_4^1(1+\tau_1) + (\xi_4^1)^2\Xi_4^1(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1, \tau_1), \\ \eta^2 &= \frac{\eta^1 + \tau_1 F(0, w_0, -1)}{1+\tau_1} + \xi_4^1 N^1(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1, \tau_1),\end{aligned}$$

а $\tau_1 = \tau_1(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1)$ есть наименьший положительный корень уравнения вида

$$\xi_2^1 + \frac{1}{2}\tau_1\xi_3^1 + \frac{1}{6}\tau_1^2 + \frac{1}{24}\tau_1^3 + \xi_4^1\Xi_1^1(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1, \tau_1) = 0,$$

если $\xi_4^1 > 0$, и наибольший отрицательный корень этого уравнения, если $\xi_4^1 < 0$. В выписанных соотношениях Ξ_α^β , N^β — функции класса C^1 .

Найдем сначала неподвижную точку отображения Φ^2 на поверхности $\xi_4 = 0$. Координаты соответствующих точек будем обозначать $(0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*)$, $(0, \xi_2^{1*}, \xi_3^{1*}, 0, \eta^{1*})$. Получаем

$$\begin{aligned}\xi_2^{1*} &= \frac{\xi_2^* + \tau^*\xi_3^* + \frac{1}{2}\tau^{*2} - \frac{1}{6}\tau^{*3}}{(1-\tau^*)^3}, \\ \xi_3^{1*} &= \frac{\xi_3^* + \tau^* - \frac{1}{2}\tau^{*2}}{(1-\tau^*)^2}, \\ \eta^{1*} &= \frac{\eta^* - \tau^* F(0, w_0, 1)}{1-\tau^*}, \\ 0 &= \xi_2^* + \frac{1}{2}\tau^*\xi_3^* + \frac{1}{6}\tau^{*2} - \frac{1}{24}\tau^{*3};\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\xi_2^* &= \frac{\xi_2^{1*} + \tau_1^*\xi_3^{1*} + \frac{1}{2}\tau_1^{*2} + \frac{1}{6}\tau_1^{*3}}{(1+\tau_1^*)^3}, \\ \xi_3^* &= \frac{\xi_3^{1*} + \tau_1^* + \frac{1}{2}\tau_1^{*2}}{(1+\tau_1^*)^2}, \\ \eta^* &= \frac{\eta^{1*} - \tau_1^* F(0, w_0, -1)}{1+\tau_1^*}, \\ 0 &= \xi_2^{1*} + \frac{1}{2}\tau_1^*\xi_3^{1*} + \frac{1}{6}\tau_1^{*2} + \frac{1}{24}\tau_1^{*3}.\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения, определяющие неподвижную точку, разделились: значения ξ_2^* , ξ_3^* , ξ_2^{1*} , ξ_3^{1*} не зависят от η^* , η^{1*} , при этом координаты η^* и η^{1*} определены однозначно:

$$\begin{aligned}\eta^* &= \frac{-\tau_1^*(1-\tau^*)F(0, w_0, -1) + \tau^*F(0, w_0, 1)}{1 - (1-\tau^*)(1+\tau_1^*)}, \\ \eta^{1*} &= \frac{\tau^*(1+\tau_1^*)F(0, w_0, 1) - \tau_1^*F(0, w_0, -1)}{1 - (1-\tau^*)(1+\tau_1^*)}.\end{aligned}\quad (17.3)$$

Оставшиеся шесть уравнений представляют собой в точности уравнения на кривую переключения в двумерной задаче Фуллера, симметричный случай. Всего имеется два решения соответствующей системы: одна неподвижная точка отвечает кривой переключений семейства экстремалей задачи Фуллера, приходящих в начало координат в прямом времени, а вторая — семейству экстремалей, приходящих в начало координат при обращении времени, т.е. выходящих из начала координат. На самом деле достаточно рассмотреть только одну из этих двух точек, поскольку отображение Пуанкаре в окрестности одной из них совпадает с отображением Пуанкаре в окрестности второй при обращении времени движения вдоль экстремалей. Мы подробно рассмотрим только «устойчивую» неподвижную точку, отвечающую экстремалям, выходящим на особый режим в прямом времени. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\xi_2^* &= -\xi_2^{1*} \approx 0,09884505445, \\ \xi_3^* &= \xi_3^{1*} \approx -0,4446235599, \\ \tau_1^* &= -\tau_2^* \approx 1,242121374.\end{aligned}$$

Найдем дифференциал отображения Пуанкаре Φ^2 в точке $(0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*)$. Имеем

$$D\Phi^2(\xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*) = \Omega_2 \cdot \Omega_1,$$

где

$$\Omega_1 = \left. \frac{D(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1)}{D(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta)} \right|_{\xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*}, \quad \Omega_2 = \left. \frac{D(\xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2, \eta^2)}{D(\xi_2^1, \xi_3^1, \xi_4^1, \eta^1)} \right|_{\xi_2^{1*}, \xi_3^{1*}, 0, \eta^{1*}}.$$

Прямое вычисление дает:

$$\Omega_2 \cdot \Omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{D(\xi_2^2, \xi_3^2)}{D(\xi_2, \xi_3)} & * & 0 \\ \frac{D(\xi_3, \xi_2)}{D(\xi_2, \xi_3)} & * & 0 \\ 0 & 0 & (1-\tau^*)(1+\tau_1^*) & 0 \\ * & * & * & \frac{1}{(1-\tau^*)(1+\tau_1^*)} \end{pmatrix}. \quad (17.4)$$

Звездочкой $*$ обозначены величины, которые не влияют на спектр матрицы $\Omega_2 \cdot \Omega_1$. Отметим, что матрица

$$D = \frac{D(\xi_2^2, \xi_3^2)}{D(\xi_3, \xi_2)}$$

зависит только от координат неподвижной точки $(0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*)$, и потому она совпадает с матрицей D , вычисленной для системы (17.1), в которой возмущающие добавки f_i отсутствуют, $a \equiv 0$, $b \equiv -1$. При $a \equiv 0$, $b \equiv -1$ у модельной системы (16.5) с «замороженным» значением переменной w спектр D можно найти в явном виде: $\lambda_{1,2} = -4,71 \pm 9,05i$. Отсюда следует, что у матрицы $\Omega_2 \cdot \Omega_1$ имеется единственное собственное число 0,57, по модулю меньше 1, и еще $2n - 1$ собственных чисел, по модулю больших 1. Нетрудно видеть, что собственный вектор, отвечающий значению 0,57, трансверсален плоскости $\xi_4 = 0$. По теореме об инвариантном многообразии имеется одномерное Φ^2 -инвариантное многообразие \mathfrak{N}_{w_0} , проходящее через точку $(0, \xi_2^*, \xi_3^*, 0, \eta^*)$, трансверсальное к поверхности $\xi_4 = 0$. При этом ограничение Φ^2 на \mathfrak{N}_{w_0} является сжимающим отображением. Отсюда следует существование двумерной поверхности Σ_{w_0} в пространстве (z, w) , заполненное экстремалами с учащающимися переключениями, приходящими за конечное время в точку $(0, w_0)$. Гладкая зависимость кривой \mathfrak{N}_{w_0} от w_0 влечет существование структуры расслоения на объединении $\bigcup_{w_0} \Sigma_{w_0}$.

Если проделать те же самые вычисления для второй неподвижной точки отображения Φ^2 , получим существование инвариантного двумерного многообразия, заполненного траекториями, выходящими из точки $(0, w_0)$. Тем самым (с вышеперечисленными оговорками), доказана

Теорема 17.1 (о расслоении). *Пусть выполнены неравенства*

$$b(0, w_0) < 0, \quad |a(0, w_0)| < -b(w_0).$$

Тогда существует открытая окрестность \mathcal{O} точки w_0 в \mathbb{R}^{2n-4} такая, что для любого $w \in \mathcal{O}$ через точку $(0, w)$ проходит некоторое однопараметрическое семейство решений системы (17.2). Траектории этого семейства заполняют двумерное многообразие \mathfrak{N}_w^+ , гомеоморфное \mathbb{R}^2 . Каждая траектория внутри \mathfrak{N}_w^+ приходит в точку $(0, w)$ за конечное время после счетного числа пересечений с поверхностью разрыва $z_1 = 0$.

Кроме того, другое семейство \mathfrak{N}_w^- решений (17.2) выходит из точки $(0, w_0)$, также имея счетное число переключений на конечном интервале времени.

Точки переключения \mathfrak{N}_w^\pm заполняют две кусочно-гладкие кривые Γ_w^\pm . Объединение всех подмногообразий $\bigcup_{w \in \mathcal{O}} \mathfrak{N}_w^\pm$ наделено структурой расслоения с базой \mathcal{O} и двумерными кусочно-гладкими слоями.

В случае произвольных $a(w_0)$, $b(w_0)$ вычисления аналогичны приведенным выше. Некоторые сложности встречаются при доказательстве того, что спектр матрицы D состоит из значений, по модулю больших 1. Доказательство теоремы 17.1 для произвольных $a(w_0)$, $b(w_0)$ приведено в [43].

17.2. Параметризация слоев расслоения. Введем следующие обозначения:

$$\Sigma^\pm = \bigcup_{w \in \mathcal{O}} \mathfrak{N}_w^\pm, \quad \Gamma^\pm = \bigcup_{w \in \mathcal{O}} \Gamma_w^\pm.$$

Пусть $\pi : \Sigma^\pm \rightarrow \mathcal{O}$ обозначает естественную проекцию расслоения $\bigcup_{w \in \mathcal{O}} \mathfrak{N}_w^\pm$ на базу, сопоставляющую всем точкам двумерного слоя \mathfrak{N}_w^\pm точку $(0, w)$.

Изучим вопрос о том, каким образом можно параметризовать многообразия Σ^\pm . Для определенности остановимся на Σ^+ , рассуждения для неустойчивого расслоения Σ^- полностью аналогичны. Начнем с поверхности переключения Γ^+ траекторий внутри Σ^+ . В координатах $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta^*)$ поверхность переключения Γ^+ естественно параметризовать значением w_0 — w -координатой точки, в которую приходят все траектории слоя $\mathfrak{N}_{w_0}^+$, и некоторым одномерным параметром λ , который является координатой на одномерной инвариантной кривой отображения Φ^2 при фиксированном w_0 (эта кривая является устойчивым подмногообразием отображения Φ^2). Естественно считать, что значение $\lambda = 0$ отвечает точке базы $(z = 0, w_0)$. Вектор $\left. \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$ есть собственный вектор матрицы (17.4) со значением $(1 + \tau_1)(1 - \tau_2) \in (0, 1)$. Если бы возмущающих добавок в правой части уравнения (17.1) не было, то соответствующий собственный вектор имел координаты $(0, 0, 1, 0)$. Однако мы видели, что при возмущении правой части уравнения (17.1) только спектр матрицы $\Omega_2 \cdot \Omega_1$ сохраняется, координаты собственного вектора уже зависят от функций f_i и их производных при $z = 0$. В принципе, эти координаты можно было бы найти в явном виде, однако это приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям. В каждом конкретном случае, разумеется, вектор $\left. \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$ можно найти в явном виде (выписав отображение Пуанкаре с точностью до следующих по порядку малости членов). Однако и в общем случае при некоторых дополнительных предположениях найти базис касательного пространства к поверхности Γ^+ с точностью до некоторых не существенных членов тоже можно. Таким образом, основная трудность параметризации многообразия Γ^+ (а вместе с ним и расслоения Σ^+) заключается в том, что в общем случае эта параметризация включает некоторые «скрытые» параметры, которые во многих случаях оказываются не существенными при построении оптимального синтеза.

Отметим, что плоскость $\xi_4 = 0$ является инвариантной для матрицы $\Omega_2 \cdot \Omega_1$, и собственные векторы $\Omega_2 \cdot \Omega_1$, отвечающие ее собственным значениям, по модулю большим 1, лежат в этой

плоскости. Отсюда следует, что собственный вектор со значением $(1 - \tau^*)(1 + \tau_1^*)$ трансверсален плоскости $\xi_4 = 0$ (т.е. его ξ_4 -координата отлична от нуля).

Возвращаясь к координатам (z, w) , поверхность Γ^+ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= \xi_4^3(w_0, \lambda)\xi_2(w_0, \lambda) = \xi_2^*(w_0, 0)\xi_4^3(w_0, \lambda) + o(\xi_4^3(w_0, \lambda)), \\ z_3 &= \xi_4^2(w_0, \lambda)\xi_3(w_0, \lambda) = \xi_3^*(w_0, 0)\xi_4^2(w_0, \lambda) + o(\xi_4^2(w_0, \lambda)), \\ z_4 &= \xi_4(w_0, \lambda), \\ w &= w_0 + \eta(w_0, \lambda)\xi_4(w_0, \lambda) = w_0 + \eta^*(w_0, 0)\xi_4(w_0, \lambda) + o(\xi_4(w_0, \lambda)), \end{aligned}$$

где

$$\eta^*(w_0, 0) = \frac{(1 - \tau^*)F(0, w_0, -1) + F(0, w_0, 1)}{2 - \tau^*}.$$

Поскольку $\frac{\partial \xi_4(w_0, \lambda)}{\partial \lambda} \neq 0$ при $\lambda = 0$, значение координаты z_4 можно взять вместо λ в параметрическом представлении поверхности переключения. На самом деле мы выписали представление только той части поверхности переключения Γ^+ , которая лежит в полупространстве $z_2 > 0$. Построить представление поверхности Γ^+ до полупространства $z_2 < 0$ не представляет труда. Детальное рассуждение см. в [12, 43]. Тем самым доказано

Утверждение 17.1. *Поверхность переключения Γ^+ траекторий расслоения Σ^+ может быть задана в параметрическом виде:*

$$\begin{aligned} z_2 &= \xi_2^*(w_0)z_4^3 + o(z_4^3), \\ z_3 &= \xi_3^*(w_0)z_4^2 + o(z_4^2), \\ w &= \begin{cases} w_0 + \eta^*(w_0)z_4 + o(z_4) & \text{при } z_4 > 0, \\ w_0 + (\eta^1)^*(w_0)z_4 + o(z_4) & \text{при } z_4 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.5)$$

Здесь (w_0, z_4) — $(2n - 3)$ -мерный параметр на поверхности, функции $\xi_2^*(w_0)$, $\xi_3^*(w_0)$, $\eta^*(w_0)$ класса C^1 в замыкании каждой из областей $z_4 > 0$ и $z_4 < 0$. Значения $\xi_2^*(w_0)$, $\xi_3^*(w_0)$ есть координаты неподвижной точки отображения Φ^2 на поверхности $z = 0$; значения $\eta^*(w_0)$, $(\eta^1)^*(w_0)$ определяются соотношениями (17.3). В частности, в точке w_0 , в которой $\alpha(0, w_0) = 0$, $\beta(0, w_0) = -1$, имеем

$$\xi_2^*(w_0) \approx 0,0988, \quad \xi_3^*(w_0) \approx -0,4446.$$

Таким образом, поверхность переключения Γ^+ оказывается «склеенной» из двух гладких кусков, лежащих в плоскости $z_1 = 0$ по разные стороны от плоскости $z_2 = 0$. Из (17.5), в частности, следует, что базисом касательного пространства $T_{(0, w_0)}(\Gamma^+ \cap \{z_2 > 0\})$ является набор векторов

$$\frac{\partial}{\partial z_4} + \eta^*(w_0)\frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial w},$$

а базисом касательного пространства $T_{(0, w_0)}(\Gamma^+ \cap \{z_2 < 0\})$ является набор векторов

$$\frac{\partial}{\partial z_4} + (\eta^1)^*(w_0)\frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial w}.$$

Поскольку разность векторов $\frac{\partial}{\partial z_4} + \eta^*(w_0)\frac{\partial}{\partial w}$ и $\frac{\partial}{\partial z_4} + (\eta^1)^*(w_0)\frac{\partial}{\partial w}$ принадлежит линейной оболочке $\frac{\partial}{\partial w}$, в точках поверхности $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ эти куски поверхности Γ^+ гладко склеиваются, т.е. предел касательной плоскости к Γ^+ в точках базы расслоения, вычисленный из точек полупространства $z_2 > 0$, совпадает с пределом касательной плоскости из полупространства $z_2 < 0$ и имеет базис

$$\frac{\partial}{\partial z_4} + \eta^*(w_0)\frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial w}. \quad (17.6)$$

Перейдем теперь к построению параметризации расслоения Σ^+ . Размерность Σ^+ на 1 больше размерности поверхности переключения Γ^+ . В качестве недостающего параметра для представления Σ^+ естественно взять время t движения по траектории системы (17.1) с начальными условиями на $\Gamma^+ \cap \{z_2 > 0\}$ с $u = -1$, либо на $\Gamma^+ \cap \{z_2 < 0\}$ с $u = 1$ до данной точки расслоения. К сожалению, естественный базис касательного пространства, состоящий из векторов вида (17.6) и вектора фазовой скорости системы (17.1), в точках, принадлежащих базе расслоения Σ^+ , вырождается, поскольку вектор фазовой скорости системы (17.1) как с $u = -1$, так и с $u = 1$ при $z = 0$ принадлежит линейной оболочке векторов (17.6).

Чтобы получить базис касательного пространства $T_{(0,w_0)}\Sigma^+$, требуется учесть члены высшего порядка по z_4 в представлении (17.5). Выпишем производные по z_4 и w_0 из соотношений (17.5) с точностью до $O(z_4^2)$. С учетом представления вектора фазовой скорости в виде

$$V_{2n-2} = (-u + O(z_4))\frac{\partial}{\partial z_4} + z_4\frac{\partial}{\partial z_3} + (F(0, w_0, u) + O(z_4))\frac{\partial}{\partial w} + O(z_4^2), \quad (17.7)$$

получаем базис касательного пространства $T_{(z,w)}\Gamma^+$ в точках $(z, w) \in \Gamma^+$ для малых z_4 :

$$V_1 = 2\xi_3^* z_4 \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial}{\partial z_4} + (\eta^*(w_0) + O(z_4))\frac{\partial}{\partial w} + O(z_4^2), \quad V_{2,\dots,2n-3} = \frac{\partial}{\partial w}. \quad (17.8)$$

Напомним, что ξ_3^* отвечает кривой переключения оптимальных траекторий в двумерной задаче Фуллера. Поскольку всюду вне начала координат оптимальные траектории задачи пересекают кривую переключения трансверсально, получаем, что векторы

$$2\xi_3^* z_4 \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial}{\partial z_4} \quad \text{и} \quad z_4 \frac{\partial}{\partial z_3} + u \frac{\partial}{\partial z_4}$$

линейно независимы. Отсюда следует

Утверждение 17.2. *Базис касательного пространства к Σ^+ в точках $z = 0$ состоит из векторов*

$$\frac{\partial}{\partial z_4}, \quad \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad \frac{\partial}{\partial w}. \quad (17.9)$$

Параметрические представления расслоения Σ^+ для произвольных значений $a(w_0)$, $b(w_0)$ получены в [12, 43].

17.3. Лагранжевы подмногообразия расслоения Σ^+ . Рассмотрим задачу

$$\int_0^T f_0(x) dt \rightarrow \min, \quad (17.10)$$

$$\dot{x} = \phi_0(x) + \phi_1(x)u, \quad u \in [-1, 1], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in M,$$

и соответствующую ей разрывную гамильтонову систему

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad (17.11)$$

где $H = H_0 + uH_1$, $H_0 = \psi\phi_0(x) - f_0(x)$, $H_1 = \psi\phi_1(x)$, $u = \text{sgn } H_1$. Предположим, что систему (17.11) можно привести к виду (17.1), (17.2), и при этом все требования теоремы 17.1 о существовании расслоения Σ^+ выполнены. В этом разделе обсудим, как можно выбрать из расслоения n -мерное подмногообразие, заполненное оптимальными траекториями задачи (17.10).

Напомним, что n -мерное подмногообразие M $(2n)$ -мерного пространства с координатами (ψ, x) мы назвали лагранжевым, если $\oint_{\gamma} \psi dx = 0$ для любого кусочно-гладкого замкнутого контура γ .

Опустим на время в этом определении требование, чтобы M было n -мерным.

Теорема 17.2 (о лагранжевых многообразиях). *Пусть M есть произвольное лагранжевое подмногообразие на поверхности $\Sigma_0 = \Sigma^+ \cap \{z = 0\}$ (т.е. на базе расслоения Σ^+). Тогда прообраз M в расслоении Σ^+ , т.е. $\pi^{-1}(M)$, также является лагранжевым подмногообразием.*

Доказательство. Теорема 17.2 является следствием теоремы 13.1 об интегральном инварианте Пуанкаре—Картана. Обозначим $\mathcal{M}^+ = \pi^{-1}(\mathcal{M})$. Рассмотрим произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур $\gamma \subset \mathcal{M}^+$. Надо показать, что $\oint_{\gamma} \psi dx = 0$. Можно считать, что γ целиком лежит на поверхности переключения $z_1 = 0$ и принадлежит полупространству $z_2 > 0$. Поскольку траектории системы (17.11) оказываются в этом случае трансверсальными γ , при отображении Пуанкаре поверхности переключения $z_1 = 0$ в себя контур γ перейдет в некоторый кусочно-гладкий контур γ_1 , $\gamma_1 \subset \mathcal{M}^+ \cap \{z_2 < 0\}$. Затем γ_1 перейдет в γ_2 и т. д. Возникает счетная последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ образов γ при отображении Пуанкаре. По теореме об интегральном инварианте Пуанкаре—Картана имеем

$$\oint_{\gamma} \psi dx = \oint_{\gamma_n} \psi dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Чему равен предел последовательности $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ при $n \rightarrow \infty$? Параметризуя точки \mathcal{M}^+ координатами (z_4, w_0) , где w_0 — координаты слоя $\mathfrak{N}_{(0, w_0)}^+$ в расслоении Σ^+ , а z_4 — текущая координата точки $(\psi, x) \in \gamma_n$, замечаем, что отображение Пуанкаре является сжимающим по координате z_4 и оставляет w_0 неизменной. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \pi(\gamma),$$

где $\pi(\gamma)$ — проекция контура γ на базу Σ_0 в расслоении Σ_+ . Отсюда следует, что

$$\oint_{\gamma} \psi dx = \oint_{\pi(\gamma)} \psi dx = 0.$$

Подробное доказательство см. в [12, 43]. □

Теорема 17.2 приводит нас к построению полей экстремалей и обобщению достаточных условий оптимальности для задачи (17.10).

Пусть $N \subset \{(\psi, x) \mid z = 0\}$ — некоторое $(n - 3)$ -мерное подмногообразие расширенного $(2n)$ -мерного пространства, регулярно проектирующееся на многообразие цели M . Предположим, что в точках N выполнено условие трансверсальности

$$\psi dx \Big|_N = 0.$$

Пусть

$$\left(0, \frac{1}{2b_0} ((b_0 - a_0)F(0, w, 1) + (b_0 + a_0)F(0, w, -1)) \right) \notin T_{(0, w)}N,$$

$$a_0 = a(0, w), \quad b_0 = b(0, w)$$

(из последнего соотношения следует, что через каждую точку поверхности $z = 0$ проходит некоторая особая экстремаль и поток особых экстремалей трансверсален подмногообразию N).

Обозначим через N^* $(n - 2)$ -мерное подмногообразие поверхности $z = 0$, заполненное особыми решениями (16.5), которые приходят на N в прямом времени. Обозначим через $\pi^* : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi^*(\psi, x) = x$, естественную проекцию расширенного (ψ, x) -фазового пространства на x -пространство.

Следствие 17.1. *Если многообразие $\pi^{-1}N^* \subset \Sigma^+$ регулярно проектируется на пространство x , то проекции траекторий $\pi^{-1}N^* \subset \Sigma^+$ локально оптимальны в задаче (17.10).*

Доказательство. Действительно, по теореме 17.2, многообразие $\pi^{-1}N^*$ является лагранжевым. Тогда, по теореме 13.3, проекции траекторий из $\pi^{-1}N^*$ на пространство x являются локально оптимальными в исходной задаче. □

Следующие утверждения содержат эффективные условия регулярной проектируемости $\pi^{-1}(N^*)$ на x -пространство, что необходимо для применимости следствия 17.1. Мы изложим лишь формулировки соответствующих утверждений, поскольку подробные доказательства были опубликованы ранее, в частности, в [12, 43].

Обозначим $\Sigma^* = \pi^{-1}(N^*)$. Без ограничения общности можно считать, что многообразие N^* задается уравнениями $w_{n-1} = w_n = \dots = w_{2n-4} = 0$ в окрестности точки $(0, w_0)$. Обозначим $w' = (w_1, \dots, w_{n-2})$, $w'' = (w_{n-1}, \dots, w_{2n-4})$. Пусть

$$\frac{\partial}{\partial w'} = \left(\frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_{n-2}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial w''} = \left(\frac{\partial}{\partial w_{n-1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_{2n-4}} \right).$$

Лемма 17.1. *Предположим, что ограничение π^* на N^* является регулярным отображением, а векторы $\phi_0(x) + \phi_1(x)$ и $\phi_0(x) - \phi_1(x)$ не касаются поверхности $\pi^*(N^*)$. Тогда поверхность переключения $\Sigma^* \cap \{H_1 = 0\}$ является непрерывной всюду и гладкой в точках вне π^*N^* .*

Доказательство леммы 17.1 сводится к прямому вычислению базиса касательного пространства поверхности переключения, как это было сделано в формуле (17.6) (см. [12, 43]).

Пусть предположения теоремы 17.1 и леммы 17.1 выполнены. Рассмотрим поверхность L , натянутую на вектор $\frac{\partial}{\partial z_3}$ и векторы касательной плоскости к поверхности переключения.

Теорема 17.3 (о регулярной проекции). *Предположим, что ограничение π^* на L регулярно. Тогда ограничение π^* на Σ^* регулярно в точке $(0, w_0)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 17.1. Алгоритм вычисления базиса касательного пространства к проекции Σ^+ на фазовое пространство подробно изложен в [12, 43] и очень похож на вычисления, проделанные в предыдущем разделе при получении формул (17.8)–(17.9).

Обозначим через $S_0 = \pi(N^*)$ подмногообразие \mathbb{R}^n , заполненное особыми экстремальными данного поля.

Следствие 17.2. *Предположим, что $\text{codim } S_0 = 2$ и проекции векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}$, $\frac{\partial}{\partial z_4}$, и $\frac{\partial}{\partial w'}$ на пространство x независимы в точке $(0, w_0)$. Тогда предположения теоремы 17.3 о регулярной проекции π^*L выполнены.*

Таким образом, при использовании теоремы 17.3 и следствия 17.2 для проверки регулярной проектируемости и локальной оптимальности поля экстремалей с траекториями с учащающимися переключениями мы пользуемся следующим алгоритмом. В качестве многообразия цели M надо выбрать проекцию на фазовое пространство некоторого $(n-3)$ -мерного подмногообразия $(2n-4)$ -мерного многообразия $S \cap \{H_0 = 0\}$. Обозначим это подмногообразие N и потребуем, чтобы оно обладало следующими свойствами:

- 1) ограничение дифференциальной формы ψdx на N должно быть тождественно равно нулю;
- 2) многообразие N трансверсально потоку особых экстремалей, заполняющих S ;
- 3) должны быть выполнены достаточные условия регулярной проектируемости Σ^* из следствия 17.2.

Теоремы 17.1–17.3 содержат конструктивные предположения и могут быть непосредственно применены к решению задач оптимального управления с chattering режимом при наличии особого режима второго порядка. Значительное число таких задач было найдено и решено в рамках научной школы профессора М. И. Зеликина (см. [5, 6, 8–12, 19, 41, 42]). В этом списке находятся такие задачи, как управление двузвенным манипулятором, задача Лоудена космической навигации, задача стабилизации вращения твердого тела на группе $SO(3)$ и др.

18. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ

18.1. Постановка задачи. Вывод уравнений особых экстремалей. Вернемся к моделям экономического роста раздела 9. Рассмотрим модель с двумя факторами производства $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и производственной функцией $Q(x_1, x_2)$. Предположим, что мы желаем вкладывать агрегированный

продукт не в увеличение масштабов производства, а в его модернизацию и усовершенствование используемых технологий, т.е. в научно-технический прогресс. Поскольку отдача от таких вложений естественным образом запаздывает со временем и влияет не на скорость роста продуктов, а на его ускорение, мы получаем следующую управляемую систему:

$$\ddot{x}_1 = u_1 Q(x_1, x_2), \quad \ddot{x}_2 = u_1 Q(x_1, x_2),$$

где $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_1 + u_2 = 1$. В эквивалентной записи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{x}_2 &= y_2, & u_1 + u_2 &= 1, & u_1, u_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\dot{y}_1 = u_1 Q(x_1, x_2), \quad \dot{y}_2 = u_2 Q(x_1, x_2),$$

Как обычно, считаем, что все фазовые переменные неотрицательны: $x_i > 0$, $y_i > 0$, $i = 1, 2$, а функция $Q(x_1, x_2) \in C^3$ удовлетворяет неравенствам

$$Q > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1, 2.$$

В качестве функционала выберем наименьшее время T достижения траектории системы (18.1) из заданного начального положения $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$ некоторого многообразия $B \subset \mathbb{R}^4$ (например, многообразия $x_1 + x_2 = C_0$, $y_1 + y_2 = C_1$). Нас будет интересовать та часть многообразия цели B , которая принадлежит некоторой ограниченной области пространства \mathbb{R}^4 , тогда значения (x_1, y_1, x_2, y_2) на всех допустимых траекториях равномерно ограничены, также как и значения функции Q и ее частных производных.

Выпишем необходимые условия оптимальности соответствующих траекторий в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Введем функцию Понтрягина

$$\mathcal{H} = y_1 \phi_1 + u_1 Q(x_1, x_2) \psi_1 + y_2 \phi_2 + u_2 Q(x_1, x_2) \psi_2$$

и выпишем сопряженную систему:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} \psi_1 - u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_1} \psi_2, & \dot{\phi}_2 &= -u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_2} \psi_1 - u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= -\phi_1, & \dot{\psi}_2 &= -\phi_2, \end{aligned} \quad (18.2)$$

условие максимума:

$$(u_1, u_2) = \arg \max_{\substack{v_1 + v_2 = 1, \\ v_1, v_2 \geq 0}} (v_1 \psi_1 + v_2 \psi_2)$$

и условие трансверсальности

$$(\phi_1(T), \psi_1(T), \phi_2(T), \psi_2(T)) \perp T_{(x(T), y(T))} B.$$

Поскольку мы рассматриваем задачу быстрогодействия, можно считать, что оптимальные экстремали лежат на единичной поверхности уровня гамильтониана

$$y_1 \phi_1 + y_2 \phi_2 + Q(x_1, x_2)(u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2) = 1.$$

Из условия максимума следует, что

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{при } \psi_1 > \psi_2, \\ (0, 1) & \text{при } \psi_1 < \psi_2, \\ \text{любое} & \text{при } \psi_1 = \psi_2. \end{cases}$$

Найдем все особые экстремали задачи с $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t)$. Дифференцируя тождество $\psi_1 - \psi_2 = 0$ в силу системы (18.1)–(18.2), получим

$$\begin{aligned} \psi_1 - \psi_2 &= 0, & \phi_1 - \phi_2 &= 0, \\ -u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} \psi_1 - u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_1} \psi_2 + u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_2} \psi_1 + u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} \psi_2 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right) \psi_1 = 0. \end{aligned}$$

Если на особой траектории на некотором интервале времени выполнено условие $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$, то тогда $\phi_1 = \phi_2 \equiv 0$, что противоречит условию $\mathcal{H} = 1$. Таким образом, можно считать, что $\psi_1 \neq 0$ и тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 0.$$

Дифференцируя это тождество по t , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} y_2 - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} y_1 - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_1} y_2 = 0, \\ & \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} \right) u_1 Q + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_1} \right) u_2 Q + \\ & + \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1^2 \partial x_2} y_1^2 + \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1 \partial x_2^2} y_1 y_2 - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1^3} y_1^2 - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_2 \partial x_1^2} y_1 y_2 + \\ & + \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1 \partial x_2^2} y_1 y_2 + \frac{\partial^3 Q}{\partial x_2^3} y_2^3 - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_2 \partial x_1^2} y_1 y_2 - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_2^2 \partial x_1} y_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Ненулевой коэффициент при $u = (u_1, u_2)$ получается при четвертом дифференцировании. Следовательно, если выполнено условие Келли

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} < 0, \quad (18.4)$$

и управление $u = (u_1, u_2)$, определяемое последним уравнением системы (18.3), допустимо, то особая траектория имеет порядок 2. В этих предположениях через каждую точку двумерного многообразия S пространства $\mathbb{R}^4(x_1, y_1, x_2, y_2)$

$$S = \left\{ (x, y) \mid \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} \right) y_1 = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} \right) y_2 \right\} \quad (18.5)$$

проходит некоторая особая экстремаль исходной задачи. В следующем разделе будет показано, что при некоторых естественных предположениях, многообразие S является аттрактором оптимальных траекторий задачи.

18.2. Теорема об аттракторе. Покажем, что из любой точки в некоторой открытой окрестности поверхности S найдется допустимая траектория системы (18.1), выходящая на поверхность S . Напомним, что мы рассматриваем систему (18.1) в некоторой компактной области пространства (x_1, y_1, x_2, y_2) .

Лемма 18.1. *Предположим, что управление (u_1, u_2) на особых экстремальных, определяемое условиями (18.3), принимает значения во внутренних точках симплекса, т.е. $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$. Пусть выполнено условие Келли (18.4). Тогда найдется такое $\varepsilon_0 \geq 0$, что для любой начальной точки $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$, расстояние от которой до многообразия S равно $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, имеется допустимое управление, переводящее точку $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$ по траектории системы (18.1) на S за время $\tau \leq \tau_0 \sqrt{\varepsilon}$, где константа τ_0 не зависит от $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$.*

Доказательство. Выпишем систему уравнений в вариациях для уравнения (18.1) на произвольной особой экстремали $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ с управлением $(u_1(t), u_2(t))$. Получаем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \eta_1, \\ \dot{\eta}_1 &= u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} \xi_1 + u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_2} \xi_2 + v Q, \\ \dot{\xi}_2 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_1} \xi_1 + u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} \xi_2 - v Q. \end{aligned}$$

Матрица этой линейной системы и вектор-столбец при переменной управления v имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} & 0 & u_1 \frac{\partial Q}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_1} & 0 & u_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \\ -Q \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление дает:

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \\ -Q \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2b = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 Q \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) \\ 0 \\ u_2 Q \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) \end{pmatrix}.$$

В точках многообразия S имеем $\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} \equiv 0$, поэтому $A^2b = 0$. Следовательно, система (18.1) не является вполне управляемой в окрестности точек поверхности S . Покажем, что, используя допустимое управление, можно, стартуя из произвольной точки S , попасть в точки некоторой двумерной поверхности, касательная плоскость к которой в точке пересечения с S имеет базис b, Ab . Убедимся сначала, что эта двумерная поверхность трансверсальна к поверхности S .

С точностью до ненулевого множителя $Q > 0$, векторы b, Ab коллинеарны векторам

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аннулятор этой двумерной плоскости в \mathbb{R}^4 есть двумерная плоскость с базисом $l^1 = (0, 1, 0, 1)$, $l^2 = (1, 0, 1, 0)$. Проверим, что векторы l^1, l^2 и градиенты функций в соотношении (18.5), задающем поверхность S , являются линейно независимыми в точках S . Для этого вычислим определитель матрицы

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} & 0 \\ m_{41} & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} & m_{43} & -\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} \end{array} \right\|,$$

где

$$m_{41} = \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1^3} \right) y_1 - \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) y_2,$$

$$m_{43} = \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) y_1 - \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 Q}{\partial x_2^3} \right) y_2.$$

Прямое вычисление дает, что в силу (18.4)

$$\det M = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} \right)^2 \neq 0.$$

Следовательно, мы показали, что плоскость с базисом b, Ab трансверсальна поверхности S в произвольной точке $(x, y) \in S$.

Покажем теперь, что траектории системы (18.1) с начальными условиями на поверхности S заполняют некоторую открытую окрестность S , при этом дадим оценку сверху минимального времени достижения допустимых траекторий произвольной точки, находящейся в окрестности S .

Пусть $(x_1^1, y_1^1, x_2^1, y_2^1)$ — некоторая точка, находящаяся на расстоянии ε от S . Покажем, что найдется траектория системы (18.1) с начальной точкой $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) \in S$, проходящая в некоторый момент времени τ через $(x_1^1, y_1^1, x_2^1, y_2^1)$, и оценим сверху минимум моментов τ по всем таким допустимым траекториям. Переходя к базису, где первые два базисных вектора равны

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а два других образуют базис касательного пространства к S в точке $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$, и, уменьшая, если нужно, множество допустимых значений управления, запишем систему (18.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \eta_1, & \dot{\xi}_2 &= f_1(\xi, \eta, u), \\ \dot{\eta}_1 &= u \in [-a, a], \quad a > 0, & \dot{\eta}_2 &= f_2(\xi, \eta, u). \end{aligned} \quad (18.6)$$

В этой системе координат многообразие S локально задается уравнениями $\xi_1 = \eta_1 = 0$. Система

$$\dot{\xi}_1 = \eta_1, \quad \dot{\eta}_1 = u \in [-a, a] \quad (18.7)$$

локально вполне управляема в начале координат, т.е. найдется допустимая траектория системы (18.7), выходящая из начала координат в начальный момент времени $t = 0$ и приходящая в произвольную точку $(\xi_1, \eta_1) \neq (0, 0)$ в некоторый момент времени $t = \tau$. Из условия $A^2 b \Big|_S = 0$ следует, что допустимые траектории системы (18.1), выходящие из точек S , касаются со вторым порядком плоскости с базисом b и Ab (т.е. первая и вторая производные соответствующей траектории лежат в этой плоскости).

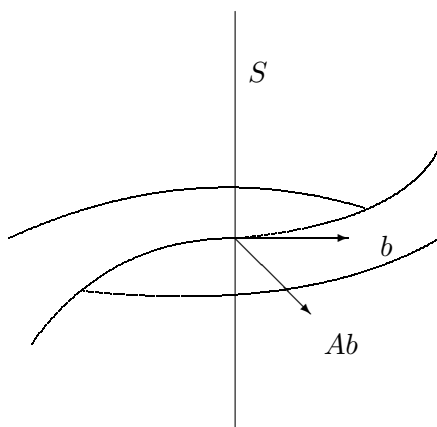


Рис. 25

В частности, множество всех допустимых траекторий, выходящих из точки $(0, 0, \xi_2, \eta_2) \in S$, заполняет некоторое подмножество четырехмерного пространства, содержащее двумерное подмногообразие с касательной плоскостью с базисом b, Ab . Таким образом, множество всех допустимых траекторий, выходящих из S , заполняет открытую окрестность поверхности S в \mathbb{R}^4 .

Если мы рассматриваем решения системы (18.6) с начальными условиями на S на достаточно малом интервале времени, то из условия $\dot{\xi}_2(0) = 0, \dot{\xi}_2(0) = 0, \dot{\eta}_2(0) = 0, \dot{\eta}_2(0) = 0$ следует, что

$$\|(\xi_1(t) - \xi_1(0), \eta_1(t) - \eta_1(0), \xi_2(t) - \xi_2(0), \eta_2(t) - \eta_2(0))\| = (1 + o(1))\|(\xi_1(t) - \xi_1(0), \eta_1(t) - \eta_1(0))\|.$$

В простейшей задаче быстродействия

$$\begin{aligned} T \rightarrow \min, \quad \dot{\xi}_1 &= \eta_1, \quad \dot{\eta}_1 = u \in [-a, a], \\ \xi_1(0) &= 0, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \xi_1(T) = \xi_1^1, \quad \eta_1(T) = \eta_1^1, \end{aligned}$$

оптимальное время T определяется следующими соотношениями:

$$T = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(2\sqrt{\frac{1}{2}(\eta_1^1)^2 - a\xi_1^1} + \eta_1^1 \right) & \text{при } \xi_1^1 < \frac{1}{2a}(\eta_1^1)^2 \operatorname{sgn} \eta_1^1, \\ \frac{1}{a} \left(2\sqrt{\frac{1}{2}(\eta_1^1)^2 + a\xi_1^1} - \eta_1^1 \right) & \text{при } \xi_1^1 > \frac{1}{2a}(\eta_1^1)^2 \operatorname{sgn} \eta_1^1 \end{cases}$$

(см. [2]). Отсюда следует оценка

$$\tau < A\sqrt{\max\{|\xi_1^1|, |\eta_1^1|\}},$$

где $A > 0$ — некоторая константа. Обращая время движения по траекториям системы (18.1), получаем, что для произвольной точки, принадлежащей некоторой ε -окрестности поверхности S , время выхода в точку самой поверхности S также допускает оценку $\tau < K\sqrt{\varepsilon}$. \square

Одно из уравнений многообразия, заполняемого особыми экстремальными задачи, а именно, уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2},$$

является необходимым условием локального экстремума функции $Q(x_1, x_2)$, ограниченной на прямую

$$x_1 + x_2 = C.$$

Действительно, соответствующее ограничение определяется функцией $Q(x, C - x)$, $x \in (0, C)$, и

$$\frac{d}{dx}Q(x, C - x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x, C - x) - \frac{\partial Q}{\partial x_2}(x, C - x) = 0.$$

Гессиан этого ограничения имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}Q(x, C - x) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}(x, C - x) - 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2}(x, C - x) + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}(x, C - x).$$

В силу условия Келли (18.4), в точке пересечения с S имеем $\frac{d^2 Q}{dx^2} < 0$, т.е. функция Q достигает локального максимума.

Предположение 18.1. Пусть для каждого C имеется единственная точка локального максимума ограничения функции Q на прямую $x_1 + x_2 = C$, а в граничных точках $x_i = 0$ функция Q обращается в нуль.

В этом предположении локальный максимум является максимумом на всем отрезке.

Удобно записать систему (18.1) в следующей системе координат. Обозначим

$$q_1 = x_1 + x_2, \quad q_2 = x_1 - x_2, \quad p_1 = y_1 + y_2, \quad p_2 = y_1 - y_2, \quad u = u_1 - u_2.$$

Тогда (18.1) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{q}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_1 &= \tilde{Q}(q_1, q_2), & \dot{p}_2 &= u\tilde{Q}(q_1, q_2), \end{aligned} \quad u \in [-1, 1], \quad (18.8)$$

где $\tilde{Q}(q_1, q_2) = Q(\frac{1}{2}(q_1 + q_2), \frac{1}{2}(q_1 - q_2))$. Уравнения многообразия S особых экстремалей будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_1 \partial q_2} p_1 + \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} p_2 = 0.$$

Значение управления на особых экстремальных определяется соотношением

$$u = -\frac{\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_1 \partial q_2} \tilde{Q} + \frac{\partial^3 \tilde{Q}}{\partial^2 q_1 \partial q_2} p_1^2 + 2\frac{\partial^3 \tilde{Q}}{\partial q_1 \partial q_2^2} p_1 p_2 + \frac{\partial^3 \tilde{Q}}{\partial q_2^3} p_2^2}{\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} \tilde{Q}} \in [-1, 1].$$

В силу условия Келли, $\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} < 0$ и функция $\tilde{Q}(q_1, q_2)$ при каждом фиксированном q_1 имеет максимум по q_2 в точке экстремума. Отсюда следует, что уравнения многообразия S в окрестности особой экстремали можно разрешить относительно (q_1, p_1) в виде

$$q_2 = f(q_1), \quad p_2 = f'_1(q_1)p_1.$$

Тогда S параметризуется значениями координат (q_1, p_1) . Ввиду непрерывности функции $\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2}$, для любого $q_1 \in (0, C_0]$ найдется константа $r_0 = r_0(C_0) > 0$, для которой

$$\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2}(q_1, f(q_1)) < -r_0.$$

Поскольку по предположению функция $\tilde{Q}(q_1, q_2)$ класса C^3 , то функция $\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2}$, с одной стороны, равномерно ограничена сверху, а, с другой стороны, отделена от нуля в некоторой окрестности U кривой $q_2 = f(q_1)$ на плоскости (q_1, q_2) . Отсюда следует, что для любого $q_1 \in (0, C_0]$ в U верна оценка

$$r_1 \|f(q_1) - q_2\|^2 \leq \tilde{Q}(q_1, f(q_1)) - \tilde{Q}(q_1, q_2) \leq r_2 \|f(q_1) - q_2\|^2. \quad (18.9)$$

Поскольку функция \tilde{Q} непрерывна по (q_1, q_2) , причем рассматриваем мы эту функцию в компактной области, то вне окрестности U имеем оценку:

$$\tilde{Q}(q_1, f(q_1)) - \tilde{Q}(q_1, q_2) \geq r_3 > 0. \quad (18.10)$$

Теорема 18.1. *Предположим, что управление u на особых экстремалих принимает значения из интервала $(-1, 1)$. Пусть выполнены условия Келли (18.4) и условия предположения 18.1. Тогда, если многообразие цели B достаточно удалено от начала координат, найдется такая открытая окрестность многообразия S , что для всех начальных условий из этой окрестности оптимальные траектории задачи за конечное время выходят на многообразие S и движутся по нему в течение некоторого ненулевого интервала времени.*

Доказательство. Будем для простоты рассматривать многообразие цели B вида

$$q_1(T) = C_0, \quad p_1(T) = C_1, \quad q_2(T) = f(q_1(T)), \quad p_2(T) = f'_1(q_1(T))p_1(T),$$

т.е. $B \subset S$.

Шаг 1. Оценка сверху. Будем измерять расстояние от произвольной точки $(q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0))$ до многообразия S с помощью функции

$$\phi(q, p) = \max \left\{ |q_2(0) - f(q_1(0))|, (p_2(0) - f'_1(q_1(0))p_1(0))^2 \right\}.$$

Линии уровня функции ϕ на плоскости (q_2, p_2) (при фиксированных (q_1, p_1)) имеют вид, изображенный на рис. 26.

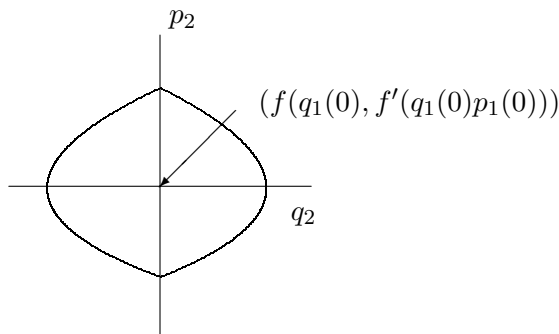


Рис. 26

В силу леммы 18.1, имеется такая ε -окрестность многообразия S , что для начальных условий $(q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0))$ из этой окрестности имеется допустимая траектория системы (18.8), падающая на S за время τ , не превосходящее $\tau_1 \sqrt[4]{\varepsilon}$, где

$$\varepsilon = \max \left\{ |q_2(0) - f(q_1(0))|, (p_2(0) - f'(q_1(0))p_1(0))^2 \right\}.$$

Поясним, откуда берется порядок $\sqrt[4]{\varepsilon}$ в оценке времени выхода допустимой траектории на S . Из определения функции ϕ следует, что максимум евклидова расстояния от точек ε -окрестности многообразия S до самого многообразия S равен $\sqrt{\varepsilon}$. Но тогда по лемме 18.1 имеется гарантированное управление, переводящее произвольную точку этой окрестности на S за время, по порядку равное корню квадратному из этого расстояния, т.е. $\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Обозначим точку выхода на S соответствующей траектории через $(q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))$. Сделаем замену времени на траекториях системы (18.8), выбрав в качестве независимой переменной значение координаты $q_1 = \sigma$. Тогда

$$T = \int_{q_1(0)}^{C_0} \frac{d\sigma}{p_1}, \quad \frac{dp_1}{d\sigma} = \frac{\tilde{Q}(\sigma, q_2)}{p_1}, \quad \frac{dq_2}{d\sigma} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{dp_2}{d\sigma} = u \frac{\tilde{Q}(\sigma, q_2)}{p_1}.$$

Пусть T^0 — время попадания на цель B особой экстремали с начальными условиями $(q_1^0, p_1^0, q_2^0, p_2^0)$, $q_1^0 = q_1(0)$, проходящей через точку $(q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))$. Обозначим эту особую траекторию через $(q_1^0(\cdot), p_1^0(\cdot), q_2^0(\cdot), p_2^0(\cdot))$. Для нее имеем

$$T^0 = \int_{q_1(0)}^{C_0} \frac{d\sigma}{p_1}, \quad \frac{dp_1}{d\sigma} = \frac{\tilde{Q}(\sigma, f(\sigma))}{p_1}, \quad \frac{dq_2}{d\sigma} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{dp_2}{d\sigma} = u \frac{\tilde{Q}(\sigma, f(\sigma))}{p_1}.$$

Оценим сверху величину

$$\max_{\sigma \in [q_1(0), q_1(\tau)]} |p_1(\sigma) - p_1^0(\sigma)|.$$

Из уравнения $\frac{dp_1}{d\sigma} = \frac{\tilde{Q}(\sigma, q_2)}{p_1}$ получаем

$$\frac{d}{d\sigma} (p_1^2 - (p_1^0)^2) = 2(\tilde{Q}^2(\sigma, q_2(\sigma)) - \tilde{Q}^2(\sigma, f(\sigma))) \leq 2r_2 |q_2(\sigma) - f(\sigma)|^2 \leq 2r_2 \varepsilon^2.$$

Отсюда, с учетом нулевых граничных условий при $\sigma = q_1(\tau)$, получаем

$$0 \leq p_1^2(\sigma) - (p_1^0(\sigma))^2 \leq 2r_2 \varepsilon^2 (q_1(\tau) - \sigma), \quad \sigma \in [q_1(0), q_1(\tau)].$$

Поскольку

$$q_1(\tau) - q_1(0) \leq \left(\max_{t \in [0, \tau]} p_1(t) \right) \tau \leq K_1 \sqrt[4]{\varepsilon},$$

окончательно получаем

$$0 \leq p_1(\sigma) - p_1^0(\sigma) \leq K_2 \varepsilon^2 \sqrt[4]{\varepsilon}. \quad (18.11)$$

Разность $T^0 - T$ равна

$$\int_{q_1(0)}^{q_1(\tau)} \left(\frac{1}{p_1^0(\sigma)} - \frac{1}{p_1(\sigma)} \right) d\sigma$$

и оценивается сверху по модулю величиной

$$(q_1(\tau) - q_1(0)) \max_{\sigma \in [q_1(\tau), q_1(0)]} \left| \frac{1}{p_1^0(\sigma)} - \frac{1}{p_1(\sigma)} \right| = K_3 \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon}.$$

Окончательно,

$$T < T^0 + K_3 \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon}, \quad K_3 > 0.$$

Шаг 2. Оценка снизу. Предположим, что некоторая допустимая траектория $(q_1(\cdot), p_1(\cdot), q_2(\cdot), p_2(\cdot))$ системы (18.8) с начальными условиями $(q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0))$, лежащими на расстоянии ε от S , в течение времени τ находится вне $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестности особого многообразия S , т.е.

$$\max \left\{ |q_2(t) - f(q_1(t))|, (p_2(t) - f'(q_1(t))p_1(t))^2 \right\} \geq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad t \in [0, \tau]. \quad (18.12)$$

Оценим снизу приращение функционала $\int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1}$, $q_1 \in [q_1(0), q_1(\tau)]$, на такой траектории.

Пусть $(q_1^1(\cdot), p_1^1(\cdot), q_2^1(\cdot), p_2^1(\cdot))$ — особая экстремаль системы (18.8) с начальными условиями $(q_1(0), p_1(0), f(q_1(0)), f'(q_1(0))p_1(0))$. Ясно, что

$$\int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1^1(\sigma)} < \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1(\sigma)},$$

поскольку для каждого $\sigma \in [q_1(0), q_1(\tau)]$ значение $p_1^1(\sigma)$ больше $p_1(\sigma)$. Нам, однако, нужно отделить разность между этими интегралами от нуля. Для этого оценим сверху меру тех точек отрезка $[q_1(0), q_1]$, для которых траектория $(p_1(\sigma), q_2(\sigma), p_2(\sigma))$, оставаясь в области (18.12), может находиться внутри полосы

$$A = \left\{ (q_2, p_2) \mid |q_2(\sigma) - f(\sigma)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \right\}. \quad (18.13)$$

Поскольку для этих значений q_1 имеем

$$\left| \frac{d}{d\sigma} (q_2 - f(\sigma)) \right| = \left| \frac{p_2}{p_1} - f'(\sigma) \right| \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2p_1} \geq K_4\sqrt{\varepsilon}, \quad K_4 > 0,$$

интервал (q', q'') , на котором траектория может находиться внутри пересечения областей (18.12) и (18.13), допускает равномерную оценку сверху $|q'' - q'| < \alpha\sqrt{\varepsilon}$ для некоторого $\alpha > 0$.

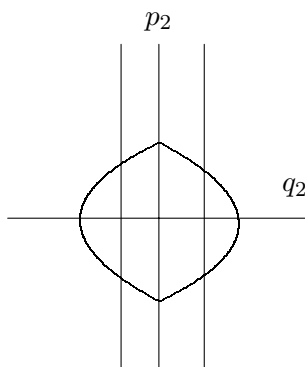


Рис. 27

С другой стороны, представим себе, что траектория, пробыв на интервале (q', q'') внутри пересечения областей (18.12) и (18.13), вышла на границу их пересечения. Понятно, что в этот момент $|q_2 - f(\sigma)| = \frac{\varepsilon}{2}$, $|p_2 - f'(\sigma)p_1| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Повторное возвращение траектории внутрь пересечения областей (18.12) и (18.13) возможно только тогда, когда скорость $\frac{d}{d\sigma} (q_2 - f(\sigma))$, по крайней мере, сменит знак. Поскольку скорость изменения величины $\frac{d}{d\sigma} (q_2 - f(\sigma)) = \frac{p_2}{p_1} - f'(\sigma)$ равномерно ограничена, рассматриваемая траектория обязана остаться в области $|q_2 - f(\sigma)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ также на некотором интервале (q'', q') , длина которого равномерно оценивается снизу как $q'' - q' \geq \beta\sqrt{\varepsilon}$ для некоторого $\beta > 0$.

Следовательно, если при $\sigma \in [q_1(0), q_1(\tau)]$ произвольная допустимая траектория находится внутри области (18.12) и при этом n раз попала в область $|q_2 - f(\sigma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, то не меньше $n - 1$ раза она

побывала в полосе $|q_2 - f(\sigma)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через τ_0 суммарное время пребывания траектории вне полосы $|q_2 - f(\sigma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\tau_0 \geq \beta(n-1)\sqrt{\varepsilon} = \frac{\beta(n-1)}{\alpha n} \cdot (n\alpha\sqrt{\varepsilon}) \geq \frac{\beta(n-1)}{\alpha n}(\tau - \tau_0),$$

откуда следует оценка

$$\tau_0 \geq \gamma\tau, \quad \gamma = \frac{\beta(n-1)}{\beta(n-1) + \alpha n} > \frac{\beta}{\beta + 2\alpha}.$$

Теперь мы можем оценить снизу разность интегралов

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1(\sigma)} - \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1^1(\sigma)} = \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{p_1^1(\sigma) - p_1(\sigma)}{p_1(\sigma)p_1^1(\sigma)} d\sigma = \\ &= \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{(p_1^1)^2 - (p_1)^2}{(p_1 + p_1^1)p_1 p_1^1} d\sigma \geq K_5 \int_{q_1(0)}^{q_1} ((p_1^1)^2 - (p_1)^2) d\sigma \end{aligned}$$

с некоторой константой $K_5 > 0$. Функции $p_1^1(q_1)$ и $p_1(q_1)$ являются решениями уравнений

$$\frac{dp_1}{d\sigma} = \frac{\tilde{Q}(\sigma, f(\sigma))}{p_1}, \quad \frac{dp_1^1}{d\sigma} = \frac{\tilde{Q}(\sigma, q_2)}{p_1^1}$$

соответственно с одними и теми же начальными условиями. Для произвольного $\sigma \in [q_1(0), q_1(\tau)]$ имеем $\frac{dp_1^1}{d\sigma} \geq \frac{dp_1}{d\sigma}$, причем для тех σ , для которых траектория находится в области $|q_2 - f(\sigma)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$, верна (в силу (18.9)) оценка

$$\frac{d(p_1^1)^2}{d\sigma} - \frac{d(p_1)^2}{d\sigma} \geq 2r_1\varepsilon^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta &\geq K_5 \int_{q_1(0)}^{q_1} \left(\int_{q_1(0)}^s \frac{d}{ds} ((p_1^1)^2 - (p_1)^2) ds \right) d\sigma = \\ &= K_5 \int_{q_1(0)}^{q_1} (q_1 - s) \frac{d}{ds} ((p_1^1)^2 - (p_1)^2) ds \geq K_5 2r_1\varepsilon^2 \int_{\mu} (q_1 - s) ds. \end{aligned}$$

Здесь μ обозначает подмножество $[q_1(0), q_1]$, на котором верна оценка $|q_2 - f(\sigma)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Нетрудно видеть, что для всех подмножеств отрезка $[q_1(0), q_1]$ меры $\mu_0 \geq \gamma(q_1 - q_1(0))$ наименьшее значение интеграл $\int_{\mu} (q_1 - s) ds$ принимает в случае $\mu = [q_1 - \mu_0, q_1]$. Это дает оценку

$$\Delta \geq K_6\varepsilon^2(q_1 - q_1(0))^2, \quad K_6 > 0.$$

Обозначим через T_1 время попадания траектории $(q_1^1(\cdot), p_1^1(\cdot), q_2^1(\cdot), p_2^1(\cdot))$ на цель $q^1 = C_0$ и через T — время попадания на цель траектории $(q_1(\cdot), p_1(\cdot), q_2(\cdot), p_2(\cdot))$. Заметим, что

$$T_1 = \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1^1(\sigma)} + \int_{q_1}^{C_0} \frac{d\sigma}{p_1^1(\sigma)}, \quad T = \int_{q_1(0)}^{q_1} \frac{d\sigma}{p_1(\sigma)} + \int_{q_1}^{C_0} \frac{d\sigma}{p_1(\sigma)},$$

при этом

$$\int_{q_1}^{C_0} \frac{d\sigma}{p_1^1(\sigma)} < \int_{q_1}^{C_0} \frac{d\sigma}{p_1(\sigma)},$$

поскольку для каждого $\sigma \in [q_1, C_0]$ имеем строгое неравенство

$$p_1^1(\sigma) > p_1(\sigma).$$

Таким образом,

$$T \geq T_1 + K_7 \varepsilon^2 (q_1 - q_1(0))^2, \quad K_7 > 0.$$

Шаг 3. Завершение доказательства теоремы. Предположим теперь, что траектория $(q_1(\cdot), p_1(\cdot), q_2(\cdot), p_2(\cdot))$, о которой говорилось в предыдущем пункте, оптимальна. Оценим сверху длину интервала $[q_1(0), q_1]$, на котором эта траектория может пребывать вне полосы $|q_2 - f(\sigma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Заметим, что особые экстремали $(q_1^0(\cdot), p_1^0(\cdot), q_2^0(\cdot), p_2^0(\cdot))$ и $(q_1^1(\cdot), p_1^1(\cdot), q_2^1(\cdot), p_2^1(\cdot))$, построенные в пп. 1 и 2, имеют различные начальные условия, при этом $q_1^0(0) = q_1^1(0)$, $p_1^0(0) < p_1^1(0)$. Поскольку

$$\frac{dp_1^i}{d\sigma} = \frac{Q(\sigma, f(\sigma))}{p_1^i}, \quad i = 1, 2,$$

то $(p_1^0(\sigma))^2 - (p_1^1(\sigma))^2 \equiv (p_1^0(0))^2 - (p_1^1(0))^2$. Поэтому

$$0 \leq T_0 - T_1 = \int_{q_1(0)}^{C_0} \left(\frac{1}{p_1^0(\sigma)} - \frac{1}{p_1^1(\sigma)} \right) d\sigma \leq K_8 (p_1^0(0) - p_1^1(0)).$$

Из оценки (18.11) следует, что

$$p_1^0(0) - p_1^1(0) \leq K_2 \varepsilon^2 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$T_0 - T_1 \leq K_8 K_2 \varepsilon^2 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Теперь для времени T попадания траектории на цель получаем

$$T_1 + K_4 \varepsilon^2 (q_1 - q_1(0))^2 \leq T \leq T^0 + K_3 \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon},$$

откуда

$$(q_1 - q_1(0))^2 \leq \frac{T_0 - T_1 + K_3 \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon}}{K_4 \varepsilon^2} \leq \frac{K_9 \varepsilon^2 \sqrt[4]{\varepsilon}}{\varepsilon^2} = K_9 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Следовательно, отрезки, на которых оптимальная траектория должна попасть внутрь $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots, \frac{\varepsilon}{2^n}$, ... окрестностей многообразия S , оцениваются сверху геометрической прогрессией со знаменателем $\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$ и потому имеют конечную суммарную длину. Таким образом, если C_0 достаточно велико, оптимальная траектория обязана в процессе движения выйти на многообразие особых траекторий S и двигаться по нему. \square

18.3. Оптимальный синтез с режимом накоплений переключений. Приведем систему (18.2) в окрестности многообразия особых экстремалей к полуканонической форме. Будем с самого начала считать, что система (18.1) записана в координатах в виде (18.8). Тогда функция Понтрягина задачи имеет вид

$$\mathcal{H} = p_1 \phi_1 + \tilde{Q}(q_1, q_2) \psi_1 + p_2 \phi_2 + u \tilde{Q}(q_1, q_2) \psi_2,$$

а (18.2) запишется как

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_1} \psi_1 - u \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_1} \psi_2, & \dot{\phi}_2 &= -\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_2} \psi_1 - u \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_2} \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= -\phi_1, & \dot{\psi}_2 &= -\phi_2, \\ u &= \arg \max_{u \in [-1, 1]} u \psi_2 = \begin{cases} 1, & \text{при } \psi_2 > 0, \\ -1, & \text{при } \psi_2 < 0, \\ \forall u \in [-1, 1] & \text{при } \psi_2 \equiv 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.14)$$

Введем следующие обозначения:

$$z_1 = \psi_2, \quad z_2 = -\phi_2, \quad z_3 = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_2} \psi_1, \quad z_4 = \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_1 \partial q_2} p_1 + \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} p_2 \right) \psi_1,$$

$$w_1 = \psi_1, \quad w_2 = \phi_1, \quad w_3 = q_1, \quad w_4 = p_1.$$

Покажем, что замена

$$(\psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2, q_1, p_1, q_2, p_2) \rightarrow (z, w)$$

является невырожденной в окрестности особого многообразия

$$\psi_2 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_1 \partial q_2} p_1 + \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} p_2 = 0.$$

Перегруппировав переменные

$$(\psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2, q_1, p_1, q_2, p_2) \rightarrow (z_1, z_2, w_1, w_2, z_3, z_4, w_3, w_4),$$

нетрудно убедиться, что якобиан замены будет иметь блочно-треугольный вид:

$$\begin{vmatrix} J_1 & 0 \\ * & J_2 \end{vmatrix},$$

где

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \det J_1 \neq 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} * & 0 & \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} \psi_1 & 0 \\ * & * & * & \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} \psi_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В силу предположения 18.1, $\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} < 0$. Поэтому $\det J_2 = \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} \psi_1 \right)^2 \neq 0$ при $\psi_1 \neq 0$.

В координатах (z, w) система (18.14) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & \dot{w}_1 &= -w_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, & \dot{w}_2 &= f_4(z, w, u), \\ \dot{z}_3 &= z_4 + u f_1(z, w) z_1, & \dot{w}_3 &= w_4, \\ \dot{z}_4 &= f_2(z, w) + f_3(z, w) u, & \dot{w}_4 &= f_5(z, w), \end{aligned} \quad u = \operatorname{sgn} z_1, \quad (18.15)$$

где $f_3 = \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial q_2^2} \psi_1 \tilde{Q}$. В области $w_1 = \psi_1 > 0$ выполнено условие $f_3 < 0$. Как мы видим, система удовлетворяет условиям теоремы 17.1, откуда следует существование расслоений Σ^+ и Σ^- из экстремалей с накоплением переключений в окрестности особого многообразия.

Замечание 18.1. Особые экстремали системы (18.15) имеют второй локальный порядок. В этом случае утверждение теоремы 12.1 о сопряжении, вообще говоря, не имеет места, т.е. возможен выход неособых оптимальных экстремалей на особые с непрерывным управлением. Для рассматриваемой задачи выполнены и условия теоремы 18.1 об аттракторе, и условия теоремы 17.1 о существовании расслоения с накоплением переключений, однако мы пока не знаем, будут ли оптимальные экстремали принадлежать семейству экстремалей с накоплением переключений. Чтобы убедиться в этом, следует применить достаточные условия оптимальности траекторий с накоплением переключений раздела 17.

Чтобы применить теорему о локальной оптимальности экстремалей с накоплением переключений и особых экстремалей задачи, нам следует включить эти траектории в лагранжево подмногообразии расслоения Σ^+ размерности 4. Простейший способ для этого — выбрать в пространстве (p, q) многообразии цели B , принадлежащее проекции многообразия особых экстремалей, трансверсальное потоку особых экстремалей и имеющее размерность 1. В качестве такого многообразия можно выбрать любую кривую вида

$$q_2(T) = f(q_1(T)), \quad p_2(T) = f'(q_1(T))p_1(T), \quad q_1(T) = C_0. \quad (18.16)$$

где $f(\cdot)$ — произвольная гладкая функция.

Поднятие этого многообразия B в расширенное фазовое пространство с учетом условий трансверсальности будет определено однозначно, с точностью до умножения сопряженных координат на положительную константу. Обозначим соответствующее поднятие через B^* . Множество всех траекторий с накоплением переключений из расслоения Σ^+ , которые в прямом времени попадают на B^* , имеет в этом случае размерность 4, и, в силу теоремы о лагранжевом многообразии, является лагранжевым. Остается проверить выполнение условий регулярной проектируемости этого лагранжева подмногообразия на пространство (p, q) .

В силу уравнений движения, имеем $\frac{dq_1}{dt} = p_1$, и при $p_1 \neq 0$ особые экстремали пересекают B под ненулевым углом с ненулевой фазовой скоростью. В силу того, что особые экстремали трансверсально пересекают B , множество особых траекторий, в прямом времени попадающих на B , локально заполняет гладкое двумерное многообразие с краем.

Выпишем условия трансверсальности для данного многообразия цели. Имеем

$$(\psi_1(T), \phi_1(T), \psi_2(T), \phi_2(T)) \perp T_{(q_1(T), p_1(T), q_2(T), p_2(T))} B.$$

Найдем касательный вектор к кривой (18.16). Кривая параметризована значением координаты p_2 , и потому соответствующий касательный вектор равен $(0, 1, 0, f'_1(q_1))$. Составив скалярное произведение вектора $(\psi_1(T), \phi_1(T), \psi_2(T), \phi_2(T))$ с $(0, 1, 0, f'_1(q_1))$, убеждаемся в том, что условия трансверсальности дают соотношение

$$\phi_1(T) + f'_1(q_1)\phi_2(T) = 0. \quad (18.17)$$

Поднятие многообразия B в расширенное фазовое пространство на многообразии B^* определяется уравнениями

$$\psi_2 = \phi_2 = 0,$$

означающими, что B^* принадлежит многообразию особых экстремалей, и уравнением

$$p_1\phi_1 + \tilde{Q}(q_1, q_2)\psi_1 + p_2\phi_2 + u\tilde{Q}(q_1, q_2)\psi_2 - \lambda_0 = 0,$$

означающим, что B^* лежит на нулевой поверхности уровня гамильтониана. Нормируя множители Лагранжа условием $\lambda_0 = 1$, получим

$$\psi_2 = \phi_2 = \phi_1 = 0, \quad \psi_1 = \frac{1}{\tilde{Q}(q_1, q_2)}.$$

Поскольку проекция B^* на пространство (p, q) трансверсальна фазовому потоку особых экстремалей, тем же свойством обладает и само многообразие B^* . Следовательно, B^* определяет двумерное подмногообразие B° на базе расслоения Σ^+ экстремалей с накоплением переключений. Рассмотрим прообраз B° в расслоении Σ^+ . Обозначим его Σ^* . Проверим выполнение достаточных условий регулярной проектируемости Σ^* на пространство (p, q) . В силу следствия 17.2, для этого достаточно убедиться, что проекции векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ на пространство (p, q) не принадлежат касательной плоскости к многообразию особых экстремалей в пространстве (p, q) .

Проекцию векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ на пространство (p, q) можно получить из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} &= \frac{\partial q_1}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial p_1}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial p_2} + \\ &+ \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \psi_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \quad i = 3, 4, \end{aligned}$$

для чего следует обратить матрицу якобиана замены $\left\| \begin{smallmatrix} J_1 & 0 \\ * & J_2 \end{smallmatrix} \right\|$. В результате достаточно длинной, но прямой выкладки, можно убедиться, что в общих точках многообразия особых траекторий S проекции векторов $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ на пространство (p, q) трансверсальны к S , и достаточные условия оптимальности построенного синтеза выполнены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. Симплектическая геометрия и необходимые условия оптимальности// Мат. сб. — 1991. — 182, № 1. — С. 36–54.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
4. Борисов В. Ф. Феномен Фуллера: обзор// Итоги науки и техн. Совр. мат. и прилож./ М., ВИНТИ, 1998. — 55, Динамические системы—8.
5. Борисов В. Ф., Зеликин М. И. Режимы с учащающимися переключениями в задаче оптимального по быстрдействию управления роботом// Прикл. мат. мех. — 1988. — 52, № 6. — С. 934–946.
6. Вашков И. О. Задачи быстрдействия на бесконечность// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат., мех. — 1990. — № 1. — С. 36–40.
7. Дубровин С. В., Дюкалов А. Н., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Уздемир А. П., Фаткин Ю. М. О построении оптимального экономического плана// Автомат. и телемех. — 1972. — № 8. — С. 100–114.
8. Зеликин М. И. Нерегулярность оптимального управления в регулярных экстремальных задачах// Фундам. прикл. мат. — 1995. — 1, № 2. — С. 399–408.
9. Зеликин М. И. Оптимальное управление вращением твердого тела// Докл. РАН. — 1996. — 346, № 3.
10. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Поля оптимальных траекторий, содержащие особые экстремали второго порядка и экстремали с учащающимися переключениями// Докл. АН СССР. — 1989. — 304, № 5. — С. 1650–1653.
11. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Синтез в задачах оптимального управления, содержащий траектории с учащающимися переключениями и особые траектории второго порядка// Мат. заметки. — 1990. — 47, № 1. — С. 62–73.
12. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1991. — 197. — С. 85–166.
13. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений// Итоги науки и техн. Совр. мат. и ее прилож. Тематические обзоры/ М., ВИНТИ, 2001. — 90, Оптимальное управление—4. — С. 5–189.
14. Зеликин М. И., Корнев С. А. Синтез оптимальных траекторий для одной n -мерной многошаговой задачи оптимального управления// Математические вопросы управления производством. — М.: МГУ, 1977. — № 7. — С. 46–53.
15. Зеликина Л. Ф. Многомерный синтез и теоремы о магистралях// В кн.: Вероятностные проблемы управления в экономике. — М.: Наука, 1977. — С. 33–114.
16. Зеликина Л. Ф., Зеликин М. И., Хлюстов К. В. Особые стратифицированные многообразия для инволютивных управляемых систем// Дифференц. уравнения. — 2001. — 37, № 9. — С. 1161–1167.
17. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
18. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики// Успехи мат. наук. — 1970. — 25, № 5. — С. 125–169.
19. Манита Л. А. Поведение экстремалей в окрестности особых режимов и негладкие функции Ляпунова в задачах оптимального управления// Фундам. прикл. мат. — 1996. — 2, № 2. — С. 441–447.
20. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 707 с.
21. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1976.
22. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
23. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
24. Пустыльников Л. Д. Новый механизм ускорения частиц и числа вращения// Теор. мат. физ. — 1990. — 82, № 2. — С. 157–267.
25. Пустыльников Л. Д. Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики, механизм ускорения Ферми// Успехи мат. наук. — 1995. 50, № 1. — С. 143–186.
26. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970. — 412 с.
27. Тер-Крикоров А. М. Некоторые линейные задачи теории оптимального управления с фазовыми ограничениями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1975. — 15, № 1. — С. 55–66.
28. Том Р., Левин Г. Особенности дифференцируемых отображений// В кн.: Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Мир, 1968. — С. 9–101.
29. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1959. — №2. — С. 25–32.

30. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
31. Hirsh M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1977.
32. Inada K. Some structural characteristics of turnpike theorem// Rev. Econ. Stud. — 1964. — 31, № 1. — С. 43–58.
33. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals// In: Topics in Optimization/ G. Leitmann, ed. — New York: Academic Press, 1967. — С. 63–103.
34. Kupka I. The ubiquity of Fuller's phenomenon// Nonlinear controllability and optimal control/ Monograph Textbook. Pure Appl. Math. — New York: Marcel Dekker, 1990. — № 133. — С. 313–350.
35. Lewis R. M. Definitions of order and junction condition in singular control problems// SIAM J. Control and Optimiz. — 1980. — 18, № 1. — С. 21–32.
36. McKenzie L. W. Turnpike theorem of Morishima// Rev. Econ. Stud. — 1963. — 30, № 3.
37. Milyutin A. A., Osmolovskii N. P. Calculus of variations and optimal control/ Transl. Math. Monogr. — Amer. Math. Soc., 1998. — 180.
38. Morishima M. Proof of turnpike theorem// Rev. Econ. Stud. — 1960. — 28, № 2.
39. Radner R. Paths of economic growth// Rev. Econ. Stud. — 1961. — 29, № 2.
40. Samuelson P. A. Foundation of economic analysis. — Cambridge, Massachusetts, 1948.
41. Zelikin M. I. The Fuller phenomenon in problems of vibration of two linked oscillators// J. Math. Sci. — 1996. — 78, № 5. — С. 626–631.
42. Zelikin M. I. One-parameter families of solutions to a class of PDE optimal control problems// Contemporary Mathematics. Optimization Methods in Partial Differential Equations/ S. Cox and I. Lasiecka, eds. — 1997. — 209. — С. 339–349.
43. Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. — Boston–New York: Birkhäuser, 1994.
44. Zukui. Turnpike theorem in a generalized dynamic input-output systems// Econometrica. — 1966. — 34, № 2.