

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Том 3

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**



Тбилиси
2003

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

А. А. Бוליбух (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 3

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი

2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Корректность математических моделей механики сплошных сред и термодинамика (<i>Е. В. Радкевич</i>)	3
Модифицированная задача Стефана, проблема регуляризации и внутренние слои (<i>О. А. Васильева</i>)	146

КОРРЕКТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И ТЕРМОДИНАМИКА

© 2003 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. В работе выделяется круга проблем математических моделей неравновесной термодинамики, связанных с понятиями устойчивости и корректности. Рассматриваются методы и задачи неравновесной термодинамики и математические модели механики сплошных сред, описывающие феномен сепарации (разделения фаз).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Часть 1. Неравновесная термодинамика	4
Введение	5
1.1. Системы моментов неравновесной термодинамики	8
1.2. Уравнение Фоккера—Планка	9
1.3. Метод максимальной энтропии	10
1.4. Метод Эрмита—Града	11
1.5. Область определения системы моментов максимальной энтропии	13
1.6. 5-моментная система максимальной энтропии	14
1.7. Формальная линеаризация системы максимальной энтропии	15
1.8. Начальная задача Римана	16
Часть 2. Линеаризованные системы моментов. Глобальная устойчивость решений	19
Введение	19
2.1. Задача Коши	21
2.2. Гиперболические уравнения с малым параметром при старших производных	22
2.2.1. Полиномиальный пучок	22
2.2.2. Об одной системе неравновесной газовой динамики	23
2.3. Пучки гиперболических полиномов	26
2.3.1. Гиперболические пары полиномов	26
2.3.2. Гиперболические тройки полиномов	27
2.3.3. Гиперболические тройки полиномов с малым параметром	31
2.4. Пучки гиперболических операторов с переменными коэффициентами	32
2.4.1. Обозначения	32
2.4.2. Строгие гиперболические пары операторов	32
2.4.3. Строго гиперболические тройки операторов	34
2.4.4. Однородная задача Коши и ее формальное асимптотическое решение	35
2.4.5. Замечания о выводе оценок (2.4.6)	37
2.4.6. Заключение	37
2.5. Об устойчивости пучков гиперболических полиномов	38
2.5.1. Необходимые условия устойчивости пучка из четырех полиномов	39
2.5.2. Достаточные условия устойчивости полиномиального пучка из четырех полиномов	40
Часть 3. Смешанная задача	43
Введение	43
3.1. Полиномиальный пучок смешанной задачи	45
3.2. Условие Шапиро—Лопатинского	49
3.3. Гиперболические пучки	50

Часть 4. Устойчивость состояния равновесия в моделях неравновесной термодинамики . . .	54
4.1. Энтропия и слабый предельный переход	54
4.2. Локальный релаксационный предел	56
Часть 5. Нелинейный асимптотический анализ	59
Введение	59
5.1. Уравнение Хопфа. Профиль сглаживания	62
5.2. Производство энтропии	66
5.3. Ударные волны слабой силы	68
5.4. Условия типа энтропии	73
5.5. Заключение	75
Часть 6. Модель Кана—Хилларда	77
6.1. Свободная энергия равновесных однородных систем	77
6.2. Свободная энергия неоднородных систем	78
6.3. Неизотермическая сепарация	81
6.3.1. Асимптотическое решение	85
6.3.2. Уравнения на фронте	87
6.3.3. Погранслоное разложение	90
6.4. Нуклеация в изотропной среде. Основное состояние	92
6.4.1. Свойства основного состояния	93
6.4.2. Уравнения движения центра капли	96
6.5. Сингулярно-предельная задача расширенного уравнения Кана—Хилларда	98
6.5.1. Асимптотическое решение	102
6.5.2. Профиль распределения концентрации	104
6.5.3. Сингулярно-предельная задача	111
Часть 7. Система фазового поля	115
Введение	115
7.1. Асимптотическое решение системы ФП	117
7.2. Примеры	123
7.3. Корректность и слабые решения системы фазового поля	125
7.4. Слабые решения и условие ортогональности	127
7.5. Допустимое определение слабого решения	130
7.6. Решения типа «цуга волн» и отвечающая им сингулярно-предельная задача	131
7.7. Заключение	141
Список литературы	143

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа составлена по материалам курса лекций, неоднократно прочитанного автором в Московском государственном университете, Университете г. Осака и в Институте прикладного анализа и статистики им. Вейерштрасса (Берлин). Бесспорно, в названии необходима коррекция, и точнее было бы написать «некоторые модели механики сплошных сред», что отражает пристрастия автора. Но рассматриваемые в работе вопросы имеют отношение к макроскопическим описаниям физических процессов, и это позволило оставить название в таком виде. Целью работы является выделение круга проблем математических моделей неравновесной термодинамики, напрямую связанных с понятиями устойчивости и корректности.

С этой точки зрения нас будут интересовать:

- 1) методы и задачи неравновесной термодинамики [50, 57, 62],
- 2) математические модели механики сплошных сред, описывающие феномен сепарации (разделения фаз), например, математические модели процессов затвердевания двухкомпонентных сплавов (фазовые переходы первого рода [36, 48]).

Часть 1

НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании неравновесных состояний и процессов возможны два принципиально разных подхода: микроскопический и феноменологический. Первый метод изучения неравновесных процессов использует введенное в статистической физике описание состояния с помощью функции распределения. Рассмотрение уравнений (кинетических уравнений), определяющих изменение функции распределения молекул или других микрообъектов (электронов, ионов и т.д.) по скоростям, в пространстве и во времени, позволяет получить законы, управляющие теми или иными системами, на основании исследования их микроструктуры. Задачей кинетики является установление связей между микро- и макроскопическими величинами, а именно, между функцией распределения и потоками различных термодинамических величин. Определяя термодинамические величины (массу, энергию, импульс, энтропию и т.д.) как моменты функции распределения [57], кинетика сводит исследование кинетических уравнений к бесконечной системе квазилинейных уравнений с частными производными с релаксацией для системы моментов $\mathcal{M} = (m_0(x, t), \dots)$. Существует множество способов замыкания этой системы (обрыва бесконечной цепочки уравнений), позволяющих аппроксимировать ее конечной системой законов сохранения, имеющих дважды дивергентную форму [7]

$$\partial_t \partial_{m_\alpha} \mathcal{L}(\mathcal{M}) + \partial_{x_k} \partial_{m_\alpha} \mathcal{L}_k(\mathcal{M}) = \Pi_\alpha(\mathcal{M}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.0.1)$$

относительно первых N моментов $\mathcal{M}_N = (m_0, \dots, m_N)$.

Любой принцип замыкания (обрыва) бесконечной цепочки моментных уравнений опирается на предположение, что, по крайней мере, для малых начальных (и начально-краевых в случае смешанной задачи) отклонений от состояния равновесия:

- 1) решения полученных систем законов сохранения с релаксацией (1.0.1) существуют глобально;
- 2) с точки зрения моментов эти решения близки к решению кинетического уравнения. Имеется в виду, что при подстановке решения кинетического уравнения (функции распределения) в замыкание моментной системы мы получим разумно малые невязки.

Кинетические уравнения не являются самоцелью, как и их частные решения, если они не принадлежат аттрактору хотя бы задачи Коши. Задачей кинетических уравнений является формирование макромоделей (замыканий системы моментов), позволяющих моделировать реальные неравновесные процессы. Недавно в [54] для системы моментов, полученной замыканием методом максимальной энтропии для кинетического уравнения Ловермо (уравнения типа Больцмана), было показано, что область допустимых значений моментов является невыпуклой. Более того, она имеет внутреннюю границу, содержащую все равновесные состояния, в которых старший момент имеет степенную особенность. Невыпуклость области допустимых значений в окрестности состояний равновесия нарушает основное условие глобальной разрешимости гиперболических симметризуемых систем [52]. Поэтому важнейшей задачей, требующей решения в связи с результатами [54], является выяснение природы сингулярности метода максимальной энтропии. Вызвана ли невыпуклость области допустимых значений в окрестности состояний равновесия самим методом замыкания или отражает свойства решений кинетического уравнения? Хорошо известно, что иерархия систем моментов (1.0.1) содержит систему уравнений газовой динамики, полученную феноменологическим замыканием кинетических уравнений законами Фурье—Навье—Стокса. Возможно, что природа трудностей с доказательством их глобальной разрешимости связана с невыпуклостью области допустимых значений для систем моментов, высших по иерархии.

Результаты [54] показали необходимость дополнительного исследования даже, казалось бы, так хорошо известных, линеаризованных систем моментов в окрестности состояния равновесия. В последующих главах мы приведем анализ линеаризованных систем моментов Града—Эрмита, который показал, что они обладают чрезвычайно жесткой структурой: дисперсионные уравнения

задачи Коши для этих систем являются гиперболическими пучками, описываемыми строгими и нестрогими цепочками гиперболических полиномов. Исследование глобальной устойчивости решений задачи Коши и смешанной задачи (их корректности в терминологии Адамара) приводит к обобщениям классической теоремы Эрмита—Биллера об устойчивых полиномах для гиперболических пучков. В [7] С. К. Годунов пишет: «Чтобы математическая модель могла использоваться при изучении механических процессов, во всяком случае необходимо, чтобы для нее была корректно поставлена задача Коши. Рассматривая уравнения механики сплошных сред, мы имели возможность не один раз убедиться в том, что свойства решений этих уравнений (их корректность) существенно зависят от неравенств, которым удовлетворяют производные уравнения состояния среды по параметрам, определяющим состояние. Свойства уравнения состояния и неравенства, которым уравнение и его производные по параметрам должны удовлетворять, являются предметом исследования термодинамики. Таким образом, мы имели возможность убедиться в существовании глубокой аналогии между феноменологической термодинамикой той или иной среды и поведением решений уравнений, описывающих макроскопические физические процессы в ней. Намечившаяся связь между термодинамическими неравенствами и условиями корректности задач для механики сплошных сред не случайна. Постулат Адамара гласит, что дифференциальные уравнения, описывающие развитие физических процессов, должны приводить к корректно поставленным задачам».

Приведем пример «р» системы законов сохранения с релаксацией

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_x p(u) + \frac{1}{\varepsilon}(v - f(u)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

Эта система гиперболична, если $p'(u) > 0$; тогда характеристические скорости $\Lambda^\pm(u) = \pm\sqrt{p'(u)}$. Положительный параметр $\varepsilon > 0$ — время релаксации. Для однородного состояния значение $u = \bar{u}$ фиксировано, в то время, как неравновесная переменная $\sigma(t) = (v(t) - f(\bar{u})) \rightarrow 0$, т.е. система стремится к одному из состояний равновесия, определяемых уравнением состояния $v = f(u)$. В случае жесткой релаксации, когда $\varepsilon \ll 1$, формально решение (1.0.2) стремится к локальному состоянию равновесия, динамика которого описывается так называемым локальным равновесным приближением

$$\begin{aligned} v &= f(u), \\ \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0. \end{aligned} \quad (1.0.3)$$

Это приближение сталкивается с двумя потенциальными проблемами. Во-первых, решения (1.0.3) могут быть разрывными, и мы приходим в противоречие с одним из основных предположений формальных асимптотических разложений, использованных при выводе (1.0.3), об их гладкости, либо должны расширить класс решений, класс рассматриваемых асимптотических разложений. Во-вторых, характеристическая скорость $f'(u)$ для (1.0.3) может превышать характеристические скорости исходной системы (1.0.2), если не выполнен критерий устойчивости

$$\Lambda^-(u) \leq f'(u) \leq \Lambda^+(u). \quad (1.0.4)$$

Непротиворечивость (1.0.2) и приближения (1.0.3), по-видимому, состоят в требовании, что эта оценка справедлива, если только сохраняется причинность в описываемых (1.0.2) и (1.0.3) процессах. В самом деле, дальнейший анализ показывает, что локальное равновесие $(\bar{u}, f(\bar{u}))$ линейно устойчиво тогда и только тогда, когда для $u = \bar{u}$ выполнен критерий устойчивости (1.0.4). Пусть $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ — однопараметрическое семейство гладких решений (1.0.2). Рассмотрим формально асимптотическое разложение v^ε вида

$$v^\varepsilon = f(u^\varepsilon) + \varepsilon v_1^\varepsilon + \dots,$$

где ε -зависимость каждого v_j^ε выражается только через зависимость от u^ε и ее производных. Тогда из (1.0.2) следует, что

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad (1.0.5)$$

$$\partial_t f(u^\varepsilon) + \partial_x p(u^\varepsilon) + v_1^\varepsilon = O(\varepsilon). \quad (1.0.6)$$

Исключая производную $\partial_t u^\varepsilon$ из (1.0.5), получим

$$(p'(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)^2)\partial_x u^\varepsilon + v_1^\varepsilon = O(\varepsilon).$$

Отсюда в первом приближении имеем

$$v_1^\varepsilon = -(p'(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)^2)\partial_x u^\varepsilon.$$

Отбрасывая члены старшего порядка в (1.0.5), (1.0.6), приходим к первой поправке локально равновесного приближения (1.0.3) в виде

$$\begin{aligned} v &= f(u) - \varepsilon(p'(u) - f'(u)^2)\partial_x u, \\ \partial_t u + \partial_x f(u) &= \varepsilon \partial_x \left((p'(u) - f'(u)^2)\partial_x u \right). \end{aligned} \quad (1.0.7)$$

Это эволюционное уравнение будет диссипативным, если справедлив критерий устойчивости. Теперь критерий устойчивости является внутренним свойством приближения (1.0.7), тогда как раньше требовалась причинная связь (1.0.2) и (1.0.3). Система (1.0.7) в духе приближения в [57], использованного в кинетической теории при выводе системы уравнений Навье—Стокса. Оно не может быть рассмотрено как локально равновесный предел системы (1.0.2) ни в каком строгом смысле. В самом деле, это было бы верно, если бы решения были «диссипативными», т.е. были бы малы отброшенные старшие производные решения. Это справедливо только в асимптотике по времени [41]. Критерий устойчивости есть условие на уравнение состояния, обеспечивающее гиперболичность локально равновесного предела и диссипативность его первого приближения. Как мы покажем ниже, он дает возможность доказать существование диссипативных энтропий, контролирующих осцилляции при предельном переходе. В локально равновесном пределе решения (1.0.2) стремятся к соответствующим решениям локально равновесного приближения (1.0.3).

Другой подход к моделированию неравновесных процессов (феноменологический или аксиоматический) постулирует связи между макроскопическими параметрами без использования в явном виде атомо-молекулярных представлений, т.е. установление связей между потоками различных термодинамических величины и коэффициентами, фигурирующими в этих соотношениях. В дальнейшем мы применим этот подход для моделирования фазовых переходов первого рода, связанных с процессами кристаллизации бинарных сплавов, рассмотрев модель Кана—Хилларда и ее расширения. Феноменологический подход выводит свойства систем из постулируемых сведений о характере их поведения, что определяется накопленным опытом исследования реальных процессов. Например (см. [12]), постулируя невозможность существования вечного двигателя второго рода, термодинамика доказывает, что все встречающиеся уравнения состояния газов, задаваемые каждое в виде пары равенств

$$E = E(V, T), \quad p = p(V, T),$$

связаны между собой существованием такой универсальной, т.е. общей для всех газов, функции температуры $\mu(T)$, что дифференциальная форма $\mu(T)(dE + pdV)$ является полным дифференциалом dS некоторой функции состояний, называемой энтропией. Здесь $V = 1/\rho$ — удельный объем, ρ — плотность, E — внутренняя энергия, p — давление макросистемы. Нас будет интересовать другой пример, полученный в рамках классической термодинамики, в другой форме второго начала термодинамики [12], где существенную роль играет родственное энтропии понятие свободной энергии по Гиббсу (термодинамического потенциала) неоднородной системы. Задача связана с моделированием равновесия капли пара в жидкости. Теорема Гиббса гласит следующее: в состоянии равновесия между каплей и внешней фазой разность давлений на поверхности раздела двух фаз пропорциональна средней кривизне H поверхности раздела

$$\Delta P = \sigma H.$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения. Возможность доказательства теоремы Гиббса вне жестких, как отмечал сам Гиббс, ограничений в рамках классической термодинамики до сих пор остается одной из интереснейших задач неравновесной термодинамики. Эта тема станет предметом наших рассуждений в последних главах работы.

1.1. СИСТЕМЫ МОМЕНТОВ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

В этом параграфе мы остановимся на некоторых общих свойствах кинетических уравнений *близкодействия* в терминах Гиббса, аксиоматика которых была проведена в [57], например, уравнения типа Больцмана и уравнения Фоккера—Планка.

В кинетической теории [50, 57, 62] эволюция газа описывается неотрицательной функцией распределения $W(t, x, c)$ частиц в точке (x, c) фазового пространства (c — скорость частицы) в момент времени t , которая является решением кинетического уравнения Больцмана [57]:

$$\partial_t W + c_k \partial_{x_k} W = \mathcal{Q}(W). \quad (1.1.1)$$

Здесь \mathcal{Q} — нелинейный оператор, учитывающий столкновения частиц. Как уже отмечалось, задачей кинетики является установление связей между микро- и макроскопическими величинами, а именно, между функцией распределения и потоками различных термодинамических величин. Определяя термодинамические величины (массу, энергию, импульс, энтропию и т.д.) как моменты функции распределения [57], кинетика сводит исследование кинетических уравнений к бесконечной системе квазилинейных уравнений с частными производными с релаксацией для системы моментов $\mathcal{M} = (m_0(x, t), \dots)$. Так, среднее число частиц $n(t, x) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ в элементе объема dx в данный момент времени (плотность числа частиц — момент нулевого порядка):

$$n(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} W(t, x, c) dc, \quad (1.1.2)$$

скорость газа, скорость движения частиц как целого (математическое ожидание скорости — момент первого порядка)

$$v_k(t, x) = \frac{1}{n(t, x)} \int_{\mathbb{R}^d} c_k W(t, x, c) dc, \quad k = 1, \dots, d.$$

Тогда кинетическая энергия движения частиц представляется как кинетическая энергия $mv^2/2$ движения газа плюс кинетическая энергия относительного движения (энергия хаотического движения частиц)

$$E(x, t) = \frac{m}{2n(t, x)} \int_{\mathbb{R}^d} c^2 W(t, x, c) dc = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m \int_{\mathbb{R}^d} (c - v)^2 W(t, x, c) dc,$$

которая определяет термодинамическую температуру

$$\frac{3}{2}RT = \frac{1}{2}m \int_{\mathbb{R}^d} (c - v)^2 W(t, x, c) dc.$$

Здесь и далее m — масса частицы, $R = k/m$ — газовая постоянная, k — постоянная Больцмана. Тензор напряжений (второй центрированный момент)

$$p_{ij}(t, x) = m \int_{\mathbb{R}^d} (c_i - v_i)(c_j - v_j) W(t, x, c) dc.$$

При условии стабилизации функции распределения W на бесконечности по c , т.е. $|c^A|W \in L_1(\mathbb{R}^d)$, для любой функции $\psi(t, x, c) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (величины ψ) степенного роста можно определить ее среднее по скорости значение (плотность)

$$\langle \psi \rangle(t, x) = \frac{1}{n(t, x)} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, x, c) W(t, x, c) dc \quad (1.1.3)$$

и поток этой величины

$$n \langle c_k \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} c_k \psi(t, x, c) W(t, x, c) dc. \quad (1.1.4)$$

Тогда уравнение (1.1.1) порождает расширение системы уравнений Эйлера (иерархию балансных уравнений)

$$\partial_n \int_{\mathbb{R}^d} m(c)W dc + \partial_x \int_{\mathbb{R}^d} cm(c)W dc = \int_{\mathbb{R}^d} m(c)Q dc \quad (1.1.5)$$

за счет введения новых макровеличин — старших моментов скорости

$$u = \int_{\mathbb{R}^d} m(c)W dc, \quad m(c) = (1, c, c^2, c^3, \dots)^T.$$

Классическая система уравнений Эйлера, моделирующая состояния газа, близкие к термодинамическому равновесию, получается из кинетического уравнения Больцмана (1.1.1) при рассмотрении первых трех моментов скорости $(1, c, c^2)^T$ в предположении, что распределение $W = W^{\text{eq}}$, где

$$W^{\text{eq}}(x, t, c) = \frac{\varrho(x, t)}{m} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi RT(x, t)}} \right)^3 \exp \left(-\frac{1}{2RT} (c - v(x, t))^2 \right)$$

— равновесное распределение Максвелла, для которого $Q(W^{\text{eq}}) = 0$. Здесь плотность $\varrho(x, t)$, средняя скорость газа $v(x, t)$ и температура $T(x, t)$ являются величинами системы уравнений Эйлера.

Как показывает эксперимент, в случае значительного отклонения от равновесия все большее и большее число величин требуется для адекватного описания состояния газа.

Эта основная идея была проведена в [57]. Базируясь на кинетической теории газа, для широкого класса уравнений типа Больцмана была выведена полная иерархия законов сохранения с релаксацией, в которой система уравнений Эйлера является первым членом. Полученные системы обладают рядом замечательных свойств, которые хотелось бы обсудить в этой работе.

1.2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА

Наиболее просто подход [57] можно объяснить на примере кинетического уравнения Фоккера—Планка, описывающего движение броуновских частиц. В этом случае оператор взаимодействия

$$\mathcal{S}(W) = \partial_{c_k} (c_k W + \partial_{c_k} W),$$

распределение Максвелла

$$W^{\text{eq}}(c) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp \left(-\frac{|c|^2}{2} \right)$$

не зависит от пространственных переменных и времени. Для функции распределения относительной энтропии и ее плотности

$$H_W(c) = -\ln \left(\frac{W}{W^{\text{eq}}} \right), \quad F_W(c) = cH_W(c)$$

в этом случае без труда устанавливается справедливость H -теоремы

$$\partial_t h + \partial_{x_k} \varphi_k = \int_{\mathbb{R}^d} W \partial_{c_k} \ln \left(\frac{W(t, x, c)}{W^{\text{eq}}(c)} \right) \partial_{c_k} \ln \left(\frac{W(t, x, c)}{W^{\text{eq}}(c)} \right) dc \geq 0, \quad (1.2.1)$$

где плотность энтропии h и поток энтропии φ_k броуновских частиц определяются следующим образом

$$h(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^d} W(t, x, c) \ln \left(\frac{W(t, x, c)}{W^{\text{eq}}(c)} \right) dc,$$

$$\varphi_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} W(t, x, c) \left(\partial_{c_k} \ln \left(\frac{W(t, x, c)}{W^{\text{eq}}(c)} \right) \right)^2 dc.$$

Правая часть неравенства для энтропии определяет оператор производства энтропии. Производство энтропии равно нулю тогда и только тогда, когда $W = n(t, x)W^{\text{eq}}$ для некоторого $n(x, t) \in \mathbb{R}^+$, не зависящего от c . Это утверждение называется H -теоремой для броуновских частиц. Так как равновесие определяется как процесс, в котором производство энтропии равно нулю, то можно заключить, что в глобальном равновесии распределение броуновских частиц является распределением Максвелла.

Балансные уравнения (1.1.5) для моментов скорости в случае уравнения Фоккера-Планка запишутся в виде

$$\partial_t u_A + \partial_x u_{A+1} = P_A, \quad P_A = -A u_A + A(A-1)u_{A-2}. \quad (1.2.2)$$

Если поставить задачу Коши для первых M моментов u_0, u_1, \dots, u_{M-1} как зависимых переменных, то балансное уравнение для старшего момента u_{M-1} будет содержать поток u_M , которого нет среди переменных, и мы пришли в противоречие с замкнутостью корректной задачи.

В термодинамике проблема замкнутости системы моментов решается двумя способами:

- 1) термодинамическое состояние процесса достаточно хорошо описывается при рассмотрении первых M моментов как зависимых переменных задачи, где M зависит от степени отклонения рассматриваемого процесса от равновесия.
- 2) старший момент u_M является вещественной функцией первых моментов

$$u_M = F(u_0, u_1, \dots, u_{M-1}). \quad (1.2.3)$$

Существует много различных способов получения неизвестных функций F . Два из них (метод Эрмита—Града и метод максимальной энтропии) мы рассмотрим в дальнейшем. В частности, мы постараемся ответить на вопрос: действительно ли полученная система моментов представляет разумную аппроксимацию первоначального уравнения Фоккера—Планка?

1.3. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Замыкание методом максимальной энтропии опирается на предположение, что зависимость фазовой плотности от времени и пространственных переменных реализуется как зависимость от вектора моментов $u(t, x)$, т.е.

$$W(t, x, c) = \widehat{W}(u_0(t, x), u_1(t, x), \dots, u_{M-1}(t, x), c). \quad (1.3.1)$$

Тогда такое соотношение порождает замыкание системы моментов посредством соотношения вида

$$u_M = \int_{-\infty}^{\infty} c^M \widehat{W}(u_0(t, x), u_1(t, x), \dots, u_{M-1}(t, x), c) dc. \quad (1.3.2)$$

Чтобы определить функцию $\widehat{W}(u_0, u_1, \dots, u_{M-1}, c)$, рассмотрим задачу максимизации функционала плотности относительной энтропии

$$h(W) = - \int_{-\infty}^{\infty} W \ln \left(\frac{W}{W^{\text{eq}}} \right) dc \rightarrow \max \quad (1.3.3)$$

относительно фазовых плотностей W , при заданных ограничениях

$$\mu^M(W) = u, \quad u = (u_0, u_1, \dots, u_{M-1}), \quad (1.3.4)$$

на множестве стабилизирующихся на бесконечности (по c) распределений \mathcal{W}_M . Здесь $h(W(t, x, \cdot)) = h(x, t)$, и (t, x) играют роль параметров.

Формально решение задачи оптимизации (1.3.3), (1.3.4) можно получить методом множителей Лагранжа, сведя задачу с ограничением (1.3.3), (1.3.4) к задаче оптимизации функционала Лагранжа

$$\mathcal{L}(W, \lambda) = h(W) + \lambda \cdot (\mu^M(W) - u)$$

относительно $W \in \mathcal{W}_M$ и фиксированных множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^M$. Предполагая существование экстремального значения $W = W_\lambda$, получим уравнение Эйлера для экстремальной точки W_λ функционала Лагранжа:

$$0 = \delta\mathcal{L}(W_\lambda, \lambda) = \ln W^{\text{eq}} - \ln W_\lambda + \sum_{A=0}^{M-1} \lambda_A c^A. \quad (1.3.5)$$

Отсюда получаем

$$W_\lambda(c) = W^{\text{eq}}(c) \exp\left(\sum_{A=0}^{M-1} \lambda_A c^A - 1\right). \quad (1.3.6)$$

Функции $\lambda_A(t, x)$, $A = 0, \dots, M-1$, находим из ограничений

$$u_A(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} c^A W_\lambda(c) dc, \quad A \in (0, 1, \dots, M-1). \quad (1.3.7)$$

Таким образом, задача оптимизации (1.3.3), (1.3.4) свелась к двум проблемам:

- 1) описанию области значений Λ_M допустимых параметров λ , для которых ограничен интеграл в правой части ограничения (1.3.4);
- 2) проблеме однозначной разрешимости ограничения (1.3.4) на множестве Λ_M допустимых множителей Лагранжа.

В предположении положительного ответа на обе поставленные задачи из (1.3.7) получим соотношение

$$\lambda = \lambda(u),$$

которое приводит к максимуму энтропии функции распределения

$$\widehat{W}(u, c) = W_{\lambda(u)}(c), \quad (1.3.8)$$

отвечающей максимуму энтропии. Такой вид замыкающее соотношение (1.3.2) приводит к специфической системе моментов уравнения Фоккера—Планка, которую в дальнейшем будем называть системой моментов максимальной энтропии.

При условии существования распределения $\widehat{W}(u, c)$ максимальной энтропии определяемая им замкнутая система моментов (1.3.2), (1.3.3) имеет следующие свойства [57]:

Предложение 1.3.1. Система максимальной энтропии является квазилинейной гиперболической системой первого порядка, для которой балансное уравнение для относительной энтропии определяет ее выпуклое расширение. Таким образом, система максимальной энтропии симметризуема.

1.4. МЕТОД ЭРМИТА—ГРАДА

Другой подход [50] для построения замыкающего соотношения связан с методом Эрмита—Града. Эта система выводится в предположении существования решения $W(t, x, c)$ уравнения Фоккера—Планка, которое может быть разложено в ряд по ортогональной системе функций Эрмита. Это приближение было использовано в [57] для аппроксимации решений уравнений Больцмана и Фоккера—Планка. При этом подходе в принципе мы не можем гарантировать положительность функции фазового распределения. Эта проблема не возникает при решении уравнения максимальной энтропии Фоккера—Планка и соответствующих им систем моментов. Однако, по крайней мере, для вектора моментов u вне некоторой окрестности состояний равновесия приближение Эрмита—Града является неотрицательным.

Для определения полиномов и функций Эрмита удобно ввести весовое гильбертово $L_\omega^2(\mathbb{R})$ пространство с комплексным скалярным произведением

$$(\Psi, \Sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(c) \overline{\Sigma}(c) \omega(c) dc, \quad (1.4.1)$$

вес которого $\omega(c) = (W^{\text{eq}})^{-1}(c)$. Соответствующая норма $\|\Psi\|^2 = (\Psi, \Psi)$. Полным ортогональным базисом в $L_\omega^2(\mathbb{R})$ являются функции Эрмита Ψ_A , которые определяются в терминах полиномов Эрмита H_A :

$$\Psi_A(c) = H_A(c)W^{\text{eq}}(c), \quad H_A(c) = (W^{\text{eq}})^{-1}(c) \left(-\frac{d}{dc} \right)^A W^{\text{eq}}(c). \quad (1.4.2)$$

В частности, первые пять функций Эрмита

$$\begin{aligned} H_0(c) &= 1, & H_1(c) &= c, & H_2(c) &= c^2 - 1, & H_3(c) &= c^3 - 3c, \\ H_4(c) &= c^4 - 6c^2 + 3, & H_5(c) &= c^5 - 10c^3 + 15c. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Соотношение ортогональности принимает вид

$$(\psi_A, \Psi_B) = A! \delta_{AB}. \quad (1.4.4)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие тождества для функций Эрмита и их производных:

$$\begin{aligned} \Psi_{A+1} &= -\Psi'_A, & c\Psi'_A + c\Psi_A - A\Psi_{A-1} &= 0, \\ c\Psi_A &= A\Psi_{A-1} + \Psi_{A+1}, & \Psi''_A + c\Psi'_A + A\Psi_A &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

При условии, что функция фазового распределения $W \in L_\omega^2(\mathbb{R})$, мы можем разложить W в ряд по функциям Эрмита

$$W(t, x, c) = \sum_{A=0}^{\infty} h_A(t, x) \Psi_A(c), \quad h_A = (W, \Psi_A).$$

Функции

$$h_A(t, x) = (W, \Psi_A) = \int_{-\infty}^{\infty} H_A(c) W(t, x, c) dc$$

называются моментами Эрмита. По аналогии с системой обычных моментов мы получаем иерархию балансных уравнений для моментов Эрмита. В силу соотношений (1.4.4), правая часть этой системы (оператор производства старших моментов) является линейным оператором. Результирующая система имеет вид

$$\partial_t H_A + \partial_x (A h_{A-1} + h_{A+1}) = -A h_A, \quad A = (0, 1, \dots, M-1). \quad (1.4.6)$$

Снова предполагая, что термодинамический процесс достаточно хорошо описывается первыми M моментами Эрмита как зависимыми переменными, мы рассмотрим функцию фазового распределения

$$W_M(h_0(t, x), h_1(t, x), \dots, h_{M-1}(t, x), c) = \sum_{A=0}^{M-1} \frac{1}{A!} \Psi_A(c) \quad (1.4.7)$$

как *хорошее приближение* точного решения W уравнения Фоккера—Планка. В каком смысле это приближение «хорошее», мы исследуем в дальнейшем при сравнении распределения (1.4.7) с точным аналитическим решением уравнения Фоккера—Планка.

Теперь заметим, что старший момент Эрмита h_M , который появляется в старшем по иерархии уравнении системы (1.4.6), равен нулю. Это следует из условия ортогональности (1.4.5):

$$h_M = (\Psi_M, W_M) = 0. \quad (1.4.8)$$

Отсюда следует условие замыкания для системы моментов

$$u = (u_0(t, x), u_1(t, x), \dots, u_{M-1}(t, x)),$$

определяемой распределением W_M . Так, например, для $M = 5$ из (1.4.3) следует, что

$$0 = h_5 = (\Psi_M, W_M) = \int_{-\infty}^{\infty} c^5 W_M dc - 10 \int_{-\infty}^{\infty} c^3 W_M dc + 15 \int_{-\infty}^{\infty} c W_M dc = u_5 - 10u_3 + 15u_1,$$

т.е.

$$u_5 = -15u_1 + 10u_3. \quad (1.4.9)$$

Таким образом, (1.4.8) решает проблему замыкания системы моментов. Окончательно получим

$$\partial_t h_A + \sum_{B=0}^{M-1} M_{AB} \partial_x h_B = - \sum_{B=0}^{M-1} R_{AB} h_B, \quad A \in (0, 1, \dots, M-1), \quad (1.4.10)$$

где постоянные матрицы

$$(M_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & M-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4.11)$$

$$(R_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & M-1 \end{pmatrix}.$$

Система (1.4.10) с матрицами (1.4.11) называется системой Эрмита—Града. Очевидно, система Эрмита—Града может быть переписана как система обычных моментов, если применить линейное преобразование зависимых переменных $u = Qh$. В случае $M = 5$ матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.12)$$

Система моментов Эрмита—Града проще, чем система решения уравнения максимальной энтропии Фоккера—Планка. Она линейная. Однако, она имеет общие гиперболические свойства с системой моментов распределения максимальной энтропии.

Предложение 1.4.1. Система моментов Эрмита—Града является линейной гиперболической системой первого порядка, для которой уравнение баланса энтропии получается как выпуклое расширение. Отсюда следует симметризуемость системы моментов Эрмита—Града.

1.5. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТОВ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Как мы видели выше, существенной особенностью замыкания методом максимальной энтропии является структура замыкающего соотношения $u_M = F(u)$. Оно получается следующим уравнением

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c^M W_{\lambda(u)}(c) dc.$$

В частности, функция F определена только для допустимых значений $u \in U_M \in \mathbb{R}^M$, для которых задача оптимизации (1.3.6), (1.3.7) имеет единственное решение.

Теперь перейдем к исследованию множества U_M — области определения системы максимальной энтропии.

Заметим, что \mathcal{W}_M — выпуклый конус (в силу ограничения $W \geq 0$), следовательно, то же справедливо для множества $\mathcal{K}_M = \mu^M(\mathcal{W}_M)$, которое является открытым подмножеством \mathbb{R}^M . Другое важное наблюдение, что $W_\lambda \in \mathcal{W}_M$ только для λ из некоторого подмножества $\Lambda_M \in \mathbb{R}^M$.

Так, например, для $M = 1$ находим, в частности, что $\Lambda_1 = \mathbb{R}$ и $\mathcal{K}_1 = (0, \infty)$, так как любое $u_0 > 0$ может быть получено как c -интеграл от функции

$$W_\lambda(c) = W^{\text{eq}}(c) \exp(\lambda_0 - 1). \quad (1.5.1)$$

Тогда

$$\lambda_0 = 1 + \ln(u_0). \quad (1.5.2)$$

Отсюда следует, что задача (1.3.3), (1.3.4) при $M = 1$ разрешима для любого $u \in \mathcal{K}_1$.

Таким же образом, для $M = 2$ докажем, что

$$\Lambda = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{K}_2 = \{(u_0, u_1)^T : u_0 > 0, u_1 \in \mathbb{R}\}$$

и любое $u \in \mathcal{K}_2$ может быть реализовано как вектор моментов и

$$W_\lambda(c) = W^{\text{eq}}(c) \exp(\lambda_0 + \lambda_1 c - 1), \quad \lambda_1 = \frac{u_1}{u_0}, \quad \lambda_0 = 1 + \ln(u_0) - \frac{\lambda_1^2}{2}. \quad (1.5.3)$$

Случай $M = 3$ характеризуется тем, что

$$\Lambda_3 = \{\lambda \in \mathbb{R}^3 : \lambda_2 < 0\},$$

$$\mathcal{K}_3 = \{(u_0 = n, u_1 = nv, u_2 = n(\theta + v^2))^T : n > 0, v \in \mathbb{R}, \theta > 0\}.$$

Любой элемент \mathcal{K}_3 может быть получен как вектор моментов распределения Максвелла:

$$W_\lambda(c) = \frac{n}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{(c-v)^2}{2\theta}\right),$$

для которого

$$\lambda_0 + \lambda_1 c + \lambda_2 c^2 = -\frac{(c-v)^2}{2\theta} + \ln\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi\theta}}\right).$$

Условие $\lambda_2 < 0$ является условием разрешимости относительно $n > 0$, $v \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ системы соотношений

$$\theta = -\frac{1}{2\lambda_2} > 0, \quad \frac{v}{\theta} = \lambda_1, \quad \ln\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi\theta}}\right) - \frac{v^2}{2\theta} = \lambda_0.$$

Отсюда получаем

$$n = \sqrt{4\pi\lambda_2} \exp\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1^2}{2\theta^3}\right), \quad \theta = -\frac{1}{2\lambda_2}, \quad v = -2\lambda_1\lambda_2.$$

1.6. 5-МОМЕНТНАЯ СИСТЕМА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Для простоты рассмотрим случай $M = 5$, когда можно детально описать область определения U_5 . Введем нормализующие переменные

$$\widehat{u}_1 = \frac{u_1}{u_0}, \quad \theta = \frac{\sqrt{(u_2 u_0 - u_1^2)}}{u_0^2}.$$

Проверим, что в силу неотрицательности функций распределения справедливы неравенства

$$u_0 > 0, \quad \theta > 0.$$

Рассмотрим сечения U_5 гиперплоскостью

$$P = \{u \in \mathbb{R}^5 : u = (1, 0, 1, q, 3+s)^T, q, s \in \mathbb{R}\}. \quad (1.6.1)$$

В [47] показано, что

$$\widehat{\mathcal{K}}_5 = P \cap \mathcal{K}_5 = \{(1, 0, 1, q, 3+s)^T : q \in \mathbb{R}, s > q^2 - 2\}. \quad (1.6.2)$$

Точка $(0, 0)$ этого сечения отвечает всем точкам равновесия. Сечение 4-мерного многообразия E_5 недопустимых значений моментов плоскостью P состоит из полупрямой

$$\widehat{E}_5 = P \cap E_5 = \{(1, 0, 1, 0, 3+s)^T : q \in \mathbb{R}, s > 0\},$$

выходящей из образа $(0, 0)$ точек равновесия. Очевидно, \widehat{U}_5 — невыпуклое множество, так как внутри есть разрез по полупрямой \widehat{E}_5 . Важно отметить, что \widehat{U}_5 имеет все существенные особенности геометрии множества U_5 . В самом деле, любой элемент $u \in U_5$ однозначно характеризуется первыми тремя моментами (u_0, u_1, u_2) и нормализованным моментом $\widehat{u} \in \widehat{U}_5$. Подавляя информацию о первых трех моментах, мы визуализируем общий вектор моментов двумя величинами $q(u) = \widehat{u}_3$ и $s(u) = \widehat{u}_4 - 3$ в плоскости P переменных (q, s) . Так как нормализующее отображение проецирует множество недопустимых векторов E_5 на полупрямую \widehat{E}_5 , мы легко

решаем, опираясь на функции $q(u), s(u)$, принадлежит ли вектор моментов u множеству U_5 . Более точно, если $q(u) = 0$ и $s(u) > 0$, вектор u не принадлежит U_5 .

И наоборот, достаточно знать функцию потока для моментов $\hat{u}(q, s) = (1, 0, 1, q, 3 + s)^T \in \hat{U}_5$, так как любой вектор $u \in U_5$ может быть восстановлен по некоторым $\hat{u}(q, s)$ и $(u_0, u_1, u_2) \in \mathcal{K}_3$ и соотношению между $F(u)$ и $F(\hat{u}(q, s))$, которое устанавливается точно

$$F(u) = n(\theta^{5/2}F(\hat{u}) + 5\theta^2(s+3)v + 10\theta^{3/2}qv^2 + 10\theta v + v^5).$$

Применим это замечание к исследованию поведения функции потока $u_5 = F(u)$ системы максимальной энтропии на внутренней границе \hat{E}_5 .

Предложение 1.6.1. Пусть $\hat{u}(q, s) = (1, 0, 1, q, 3 + s)^T \in \hat{U}_5$. Тогда справедлива оценка

$$qF(\hat{u}(q, s)) \geq 2s.$$

Доказательство этого утверждения получено в [54]. Исследуя $F(\hat{u}(q, s))$ для фиксированного значения $s > 0$ и $|q| \rightarrow 0$, мы видим, что функция F имеет особенность на \hat{E}_5 и

$$|F(\hat{u}(q, |q|^{1-\alpha}))| \geq 2|q|^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Таким образом, поток сингулярен в точках равновесия $(0, 0)$ плоскости нормализованных переменных.

1.7. ФОРМАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Так как эволюция функции потока F системы максимальной энтропии достаточно сложна, естественно подумать о ее линеаризации в окрестности состояния равновесия, тем более, что решение системы моментов «имеет тенденцию быть ближе к состоянию равновесия». Однако, как мы видели, линеаризация в окрестности состояния равновесия является «аналитически недостижимой» по двум причинам:

- 1) точки равновесия расположены на внутренней границе области допустимых значений;
- 2) функция потока имеет особенность в этих точках.

Также имеются две причины, по которым, несмотря на эти факты, данный подход используется:

- а) так как поток не определяется точно, то особенность в прямую не визуализируется;
- б) как мы увидим в дальнейшем, тейлоровское разложение формально возможно, несмотря на сингулярное поведение функции потока.

Чтобы извлечь линеаризованную систему, мы должны разложить функцию

$$u_5 = F(u), \tag{1.7.1}$$

которая является единственной нелинейностью в системе моментов

$$\partial_t u_A + \partial_x u_{A+1} = -A u_A + A(A-1)u_{A-2}, \quad A = 0, 1, \dots, 4. \tag{1.7.2}$$

Так как равновесное распределение имеет форму

$$W_{\lambda^{\text{eq}}} = n(x, t)W^{\text{eq}}(c), \quad n > 0, \quad \lambda^{\text{eq}} = (1 + \ln(n))e_1, \tag{1.7.3}$$

то моменты, в которых мы хотели бы получить разложение, имеют вид

$$u^{\text{eq}}(t, x) = n(t, x)\mu^M(W^{\text{eq}}). \tag{1.7.4}$$

Чтобы избежать разложения в особой точке u^{eq} , рассмотрим ее возмущение $u_\varepsilon^{\text{eq}} \in \text{int}(U_M)$. Тогда мы можем использовать тот факт, что отображение

$$u \rightarrow \lambda(u)$$

бесконечно гладко и взаимно однозначно во внутренности $\text{int}(U_M)$ области определения [54].

Линеаризация функции $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c^M W_{\lambda(u)} dc$ достигается линеаризацией функции $W_{\lambda(u)}$ в окрестности $u_\varepsilon^{\text{eq}}$. Затем мы перейдем к пределу $u_\varepsilon^{\text{eq}} \rightarrow u^{\text{eq}}$. Все члены разложения остаются ограниченными.

В случае $M = 5$ такое приближение можно визуализировать в плоскости обобщенных переменных (q, s) . Например, выбирая при этом приближении s -компоненту отрицательной, находим, что вектор $\widehat{u}_\varepsilon^{\text{eq}}$ никогда не входит в область, порождающую сингулярное поведение.

Таким образом, имеем разложение

$$W_\varepsilon^{\text{lin}}(u, c) = W_{\lambda_\varepsilon^{\text{eq}}} + \sum_{A,B=0}^{M-1} \left. \frac{\partial W_{\lambda_\varepsilon^{\text{eq}}}}{\partial \lambda_A} \frac{\partial \lambda_A}{\partial u_B} \right|_{u_\varepsilon^{\text{eq}}} (u_B - U_\varepsilon^{\text{eq}}). \quad (1.7.5)$$

Используя тот факт, что производная $\partial_{\lambda_A} W_\lambda = c^A W_\lambda$ и что $\partial_{u_B} \lambda_A$ — обратная матрица к матрице

$$\left(\partial_{\lambda_B} u_A \right)_{AB}, \quad \partial_{\lambda_B} u_A = \int_{-\infty}^{\infty} c^A c^B W_\lambda dc,$$

получаем

$$W_\varepsilon^{\text{lin}} = \left(1 + \sum_{A,B=0}^{M-1} c^A \left(\partial_{\lambda} u \Big|_{\lambda_\varepsilon^{\text{eq}}} \right)_{AB}^{-1} (u_B - u_{\varepsilon,B}^{\text{eq}}) \right) W_{\lambda_\varepsilon^{\text{eq}}}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$W^{\text{lin}} = n \left(1 + \sum_{A,B=0}^{M-1} c^A S_{AB} (u_B - u_B^{\text{eq}}) \right) W^{\text{eq}},$$

где матрица (S_{AB}) является обратной к положительно определенной матрице

$$n \left(\int_{-\infty}^{\infty} C^A c^B W^{\text{eq}} dc \right),$$

которая вычисляется точно. Окончательно получим линейризацию функции потока вида

$$F^{\text{lin}} = \int_{-\infty}^{\infty} C^M W^{\text{lin}}(u, c) dc = n \left(\int_{-\infty}^{\infty} c^M W^{\text{eq}} dc + \sum_{A,B=0}^{M-1} a_{AB} (u_B - u_B^{\text{eq}}) \int_{-\infty}^{\infty} c^{M+A} W^{\text{eq}} dc \right).$$

В частном случае $M = 5$ получаем

$$(S_{AB}) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}, \quad (1.7.6)$$

откуда следует, что замыкающее соотношение в линейризованном случае равно

$$F^{\text{lin}}(u) = -15u_1 + 10u_3,$$

т.е. получили замыкающее соотношение системы моментов Эрмита—Града при $M = 5$. Очевидно, те же рассуждения справедливы для любого $M > 5$.

1.8. Начальная задача Римана

Как мы отмечали во введении к этой главе, базовая идея любой моментной модели опирается на предположение, что, по крайней мере, для достаточно малых начальных отклонений от состояния равновесия решения системы Эрмита—Града и системы максимальной энтропии:

1) существуют глобально;

2) близки к решению уравнения Фоккера—Планка. Имеется в виду, что, если подставить решение уравнения Фоккера—Планка в моментные системы, то получим разумно малые остатки (невязки).

Так ли это на самом деле? Бесспорно в настоящее время это важнейшая задача.

В силу структуры уравнения Фоккера—Планка, первые 4 уравнения 5-моментной системы ($M = 5$) в случае обоих замыканий (Эрмита—Града и метода максимальной энтропии) удовлетворяются точно, невязка появляется в последнем уравнении и имеет вид

$$\partial_x(F^{\text{lin}}(u) - u_5)$$

для системы Эрмита—Града и

$$\partial_x(F(u) - u_5)$$

для системы максимальной энтропии.

Чтобы оценить эти невязки в случае $M = 1$, используем представление решения задачи Коши для уравнения Фоккера—Планка, полученное в [38]. Введем новую фазовую плотность $f(t, x, c)$, описывающую отклонение от равновесия:

$$W(t, x, c) = W^{\text{eq}}(c)f(t, x, c).$$

Как мы отмечали выше, равновесное распределение W^{eq} является точным решением уравнения Фоккера—Планка. Простые вычисления показывают, что распределение f есть решение линейного уравнения:

$$\partial_t F + c(\partial_x f + \partial_c f) = \partial_c^2 f. \quad (1.8.1)$$

Теперь сделаем замену независимых переменных и фазовой плотности

$$\xi = x - c\psi(t), \quad \eta = c\psi'(t), \quad \psi(t) = 1 - e^{-t},$$

$$f(t, x, c) = g(t, x - c\psi(t), c\psi'(t)),$$

позволяющую свести уравнение (1.8.1) к диффузионному

$$\partial_t g = \psi^2 \partial_\xi^2 g - 2\psi\psi' \partial_\xi \partial_\eta g + (\psi')^2 \partial_\eta^2 g. \quad (1.8.2)$$

Фундаментальное решение этого уравнения, нормализующее условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_*(t, \xi, \eta) d\xi d\eta = 1,$$

равно

$$g_*(t, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta(t)}} \exp \left[-\frac{G(t)\xi^2 + 2H(t)\xi\eta + F(t)\eta^2}{2\Delta(t)} \right],$$

где

$$F(t) = 2 \int_0^t \psi(s)^2 ds = 2t - 34e^{-t} - e^{-2t}, \quad H(t) = 2 \int_0^t \psi(s)\psi'(s) ds = (1 - e^{-t})^2,$$

$$G(t) = 2 \int_0^t \psi'(s)^2 ds = 1 - e^{-2t}, \quad \Delta(t) = F(t)G(t) - H(t)^2.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\Delta(0) = 0, \quad \Delta(t) > 0 \quad \forall t > 0.$$

Заметим, что

$$\xi|_{t=0} = x, \quad \eta|_{t=0} = c.$$

Таким образом, начальные данные для уравнения (1.8.2) определяются по формуле

$$g(0, \xi, \eta) = \frac{W_0(\xi, \eta)}{W^{\text{eq}}(\eta)}.$$

Тогда решение начальной задачи запишется в виде

$$g(t, \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_0(\xi', \eta')}{W^{\text{eq}}(\eta)} g_*(t, \xi - \xi', \eta - \eta') d\xi' d\eta'.$$

Окончательно получим решение первоначальной задачи

$$W(t, x, c) = W^{\text{eq}}(c) g(t, x - c(1 - e^{-t}), ce^{-t}).$$

Чтобы сравнить моментные приближения с точным уравнением Фоккера—Планка, для простоты рассмотрим начальные данные, описывающие два равновесных состояния, сосуществующие в соответствии с некоторым механизмом сепарации и заполняющие два непересекающихся интервала (начальные данные Римана):

$$W_0(x, c) = \begin{cases} n_L W^{\text{eq}}(c) & \forall x \leq 0, \\ n_R W^{\text{eq}}(c) & \forall x > 0. \end{cases}$$

Здесь n_L, n_R — положительные постоянные, $|n_L - n_R| \ll 1$. Тогда получим

$$g_0(\xi, \eta) = \begin{cases} n_L W^{\text{eq}}(c) & \forall \xi \leq 0, \\ n_R W^{\text{eq}}(c) & \forall \xi > 0, \end{cases}$$

следовательно, функция $g(t, \xi, \eta)$ является решением уравнения

$$\partial_t g = \psi^2 \partial_\xi^2 g.$$

Если механизм сепарации прерывается, то процесс, описываемый уравнением Фоккера—Планка, имеет тенденцию к выравниванию разности плотностей. Нетрудно показать, что

$$g(t, \xi, \eta) = n_L \Phi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{F(t)}}\right) + n_R \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{F(t)}}\right),$$

где $\Phi(z)$ — функция ошибок (error function). Это позволяет получить точное решение уравнения Фоккера—Планка для начальных данных Римана:

$$W(t, x, c) = W^{\text{eq}}(c) \left[n_L \Phi\left(-\frac{x - c\psi(t)}{\sqrt{F(t)}}\right) + n_R \Phi\left(\frac{x - c\psi(t)}{\sqrt{F(t)}}\right) \right]. \quad (1.8.3)$$

Вектор моментов, вычисленный для решения (1.8.3), имеет вид

$$\begin{aligned} u_0(t, x) &= n_L + (n_R - n_L) \Phi(\sigma(t, x)), \\ u_1(t, x) &= -(n_R - n_L) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x)), \\ u_2(t, x) &= n_L + (n_R - n_L) (\Phi(\sigma(t, x)) - \gamma(t) \sigma(t, x) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x))), \\ u_3(t, x) &= -(n_R - n_L) \gamma(t) (\gamma^2(t) \sigma(t, x) - \gamma^2(t) + 3) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x)), \\ u_4(t, x) &= 3n_L + (n_R - n_L) (3\Phi(\sigma(t, x)) \\ &\quad - \gamma^2(t) \sigma(t, x) (\gamma^2(t) \sigma^2(t, x) - 3\gamma^2(t) + 6) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x))), \\ u_5(t, x) &= -(n_R - n_L) \gamma(t) (\gamma^4(t) \sigma^4(t, x) + (10\gamma^2(t) \\ &\quad - 6\gamma^4(t)) \sigma^2(t, x) - 10\gamma^2 + 15 + 3\gamma^4(t)) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x)). \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma(t) = \frac{1 - e^{-t}}{\sqrt{2(e^{-t} - 1 + t)}}, \quad \sigma(t, x) = \frac{x}{\sqrt{2(e^{-t} - 1 + t)}}.$$

В случае малого скачка плотностей

$$n_L = 1, \quad n_R = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

с точностью до членов второго порядка, для обобщенных величин (q, s) получим

$$q(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \gamma^3(t) (\sigma^2(t, x) - 1) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x)) + O(\varepsilon^2),$$

$$s(t, x) = \varepsilon \gamma^4(t) \sigma(t, x) (\sigma^2(t, x) - 3) W^{\text{eq}}(\sigma(t, x)) + O(\varepsilon^2).$$

Численный анализ для $\varepsilon \leq 0.01$ показывает, что точное решение и решения, полученные двумя рассмотренными выше замыканиями, хорошо согласованы. Проблемы начинаются для разрывов умеренной силы, когда $n_L = 1$, $n_R = 0.01$.

ЧАСТЬ 2

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ СИСТЕМЫ МОМЕНТОВ. ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Целью этой главы является исследование задачи Коши и смешанной задачи для линеаризованных в окрестности состояния равновесия систем моментов Эрмита—Града для кинетического уравнения Больцмана [50, 57, 62].

В предыдущей главе мы показали, что при определении термодинамических величин (массы, энергии, импульса, энтропии и т.д.) как моментов функции распределения, исследование кинетических уравнений сводится к бесконечной системе квазилинейных уравнений с частными производными (законов сохранения с релаксацией). Как мы видели, существует множество способов замыкания этой системы (обрыва бесконечной цепочки уравнений), одним из которых является метод Эрмита—Града, позволяющих аппроксимировать эту систему конечной системой N законов сохранения, имеющих дважды дивергентную форму относительно первых N моментов. Любой принцип замыкания бесконечной цепочки моментных уравнений опирается на предположение, что, по крайней мере, для малых начальных (начально-краевых в случае смешанной задачи) отклонений от состояния равновесия решения полученных систем законов сохранения существуют глобально; более того, эти решения близки к решению кинетического уравнения. Имеется в виду, что при подстановке решения кинетического уравнения (функции распределения) в замыкание моментной системы мы получим разумно малые невязки. Как мы показали в предыдущей главе, для системы моментов, полученной замыканием методом максимальной энтропии для кинетического уравнения Ловермо, область допустимых значений моментов является невыпуклой. Более того, она имеет внутреннюю границу, содержащую все равновесные состояния, в которых старший момент имеет степенную особенность. Заметим, что подобного рода особенность не возникает при замыкании методом Эрмита—Града. Поэтому важнейшей задачей, требующей решения в связи с результатами [54], является выяснение природы сингулярности метода максимальной энтропии. Вызвана ли невыпуклость области допустимых значений в окрестности состояний равновесия самим методом замыкания или отражает свойства решений кинетического уравнения? Результаты [54] показали, что необходимо дополнительное исследование, казалось бы, так хорошо известных линеаризованных систем моментов в окрестности состояния равновесия. В этой главе мы приведем анализ линеаризованных систем моментов Града—Эрмита который показал, что они обладают чрезвычайно жесткой структурой: дисперсионные уравнения задачи Коши для этих систем являются гиперболическими пучками, описываемыми строгими и нестрогими цепочками гиперболических полиномов [5].

Линеаризованная в окрестности состояния равновесия $\varrho = \varrho_E$, $v_i = 0$, $T = T_E$, $p_{\langle ij \rangle} = 0$, $q_i = 0$, $\varrho_{\langle ijk \rangle} = 0$, $\varrho_{kk\langle ij \rangle} = 0$, 26-моментная система [57] имеет следующий вид:

$$\partial_t \varrho + \partial_{x_k} v_k = 0, \quad (2.0.4)$$

$$\partial_t v_i + \frac{3}{5} \left(\partial_{x_i} \varrho + R \partial_{x_k} T \right) + \partial_{x_k} p_{\langle ik \rangle} = 0, \quad (2.0.5)$$

$$R\partial_t T - \frac{2}{5}\partial_t \varrho + \frac{2}{3}\partial_k q_k = 0, \quad (2.0.6)$$

$$\partial_t p_{\langle ij \rangle} + \frac{4}{5}\frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_j} + \partial_{x_k} \varrho_{\langle ijk \rangle} + \frac{6}{5}\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_j} = -Bp_{\langle ij \rangle}, \quad (2.0.7)$$

$$\partial_t q_i + \frac{3}{5}\partial_{x_k} p_{\langle ik \rangle} + \frac{1}{6}\partial_{x_i} \Delta + \frac{1}{2}\partial_{x_k} \varrho_{jj\langle ik \rangle} + \frac{3}{2}R\partial_{x_i} T = -\frac{2}{3}Bq_i, \quad (2.0.8)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \varrho_{ijk} + \frac{1}{7}\left\{ \partial_{x_k} \varrho_{rr\langle ij \rangle} + \partial_{x_i} \varrho_{rr\langle jk \rangle} + \partial_{x_j} \varrho_{rr\langle ik \rangle} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{5}\left(\partial_{x_n} \varrho_{rr\langle in \rangle} \delta_{jk} + \partial_{x_n} \varrho_{rr\langle jn \rangle} \delta_{ik} + \partial_{x_n} \varrho_{rr\langle kn \rangle} \delta_{ij} \right) \right\} = -\frac{3}{2}B\varrho_{ijk}, \end{aligned} \quad (2.0.9)$$

$$\partial_t \Delta + \frac{24}{5}\partial_{x_k} q_k = -\frac{2}{3}B\Delta, \quad (2.0.10)$$

$$\partial_t \varrho_{rr\langle ij \rangle} + \frac{126}{25}\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_j} + \frac{268}{25}\frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_j} + \frac{27}{5}\partial_{x_k} \varrho_{\langle ijk \rangle} = -\frac{7}{6}B\left(\varrho_{rr\langle ij \rangle} - \frac{3}{5}p_{\langle ij \rangle} \right). \quad (2.0.11)$$

Неизвестные функции: плотность ϱ , скорость v_i , температура T и 21 неравновесная величина $p_{\langle ij \rangle}$, q_i , $\varrho_{\langle ijk \rangle}$, $\varrho_{rr\langle ij \rangle}$, описывающие отклонение от состояния равновесия. Угловые скобки в индексах обозначают симметрическую бесследовую часть тензоров. Здесь R — газовая постоянная, число Кнудсена B является большим для сильно разреженных газов [50, 57]. Подставляя в (2.0.4)–(2.0.11) решение типа плоских волн

$$U = \mathcal{R} \exp(i(kx + \omega t)), \quad (2.0.12)$$

$$\mathcal{R} = (R^\varrho, R^{v_i}, R^T, R^{p_{\langle ij \rangle}}, R^{q_i}, R^{\varrho_{\langle ijk \rangle}}, R^\Delta, R^{\varrho_{rr\langle ij \rangle}}),$$

получаем дисперсионные уравнения для 13-, 14-, 20-, 21-, 26-моментных систем в 1-D, 2-D и 3-D случаях. Так, например, 13-моментная система отвечает первым 13 уравнениям в системе (2.0.4)–(2.0.11), в которых $\varrho_{\langle ijk \rangle} = \Delta = \varrho_{rr\langle ij \rangle} = 0$; соответственно, 20-моментной системе отвечают первые 20 уравнений системы (2.0.4)–(2.0.11), в которых $\Delta = \varrho_{rr\langle ij \rangle} = 0$. Удивительным фактом является то, что все дисперсионные уравнения являются строго или нестрого гиперболическими пучками вида

$$\mathcal{P} = \sum_{j=0}^N (-i)^j B^j P_j(\omega, k), \quad k \in \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3. \quad (2.0.13)$$

Следуя [5], приведем определение гиперболического пучка.

Определение 2.0.1. Цепочка однородных полиномов с вещественными коэффициентами $P_j(\omega, k)$, $j = 0, 1, \dots, N$, порядка $l - j$, $l > N$ соответственно, называется строго гиперболическим пучком длины $N + 1$, если все полиномы P_j — строго гиперболические относительно ω , и корни соседних полиномов P_j , P_{j+1} , $j = 0, \dots, N - 1$, строго взаимно разделяют друг друга, так что между каждыми двумя корнями полинома P_j есть один корень полинома P_{j+1} . В случае нестрогой гиперболическости однородные полиномы цепочки — нестрого гиперболические относительно ω , и нестрого выполнено условие взаимного разделения корней соседних пар полиномов из цепочки.

Так, например, в двумерном случае (решение (2.0.4)–(2.0.11) зависит только от двух пространственных переменных (x_1, x_2)) дисперсионное уравнение задачи Коши для 13-моментной

системы является цепочкой из шести нестрого гиперболических полиномов

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^9 \tau^3 \left[\tau^6 - \frac{103}{25} \tau^4 + \frac{21}{5} \tau^2 \left(1 - \frac{912}{2625} \alpha \beta \right) - \frac{27}{25} \left(1 - \frac{432}{675} \alpha \beta \right) \right], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{13}{3} \tau^6 - \frac{1094}{75} \tau^4 + \frac{1381}{125} \tau^2 \left(1 - \frac{2032}{6905} \alpha \beta \right) - \frac{264}{125} \left(1 - \frac{143}{330} \alpha \beta \right) \right], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{67}{9} \tau^6 - \frac{497}{25} \tau^4 + \frac{3943}{375} \tau^2 \left(1 - \frac{832}{3943} \alpha \beta \right) - \frac{159}{125} \left(1 - \frac{48}{159} \alpha \beta \right) \right], \\
P_3(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{19}{3} \tau^6 - \frac{2908}{225} \tau^4 + \frac{13}{3} \tau^2 \left(1 - \frac{32}{325} \alpha \beta \right) - \frac{6}{25} \right], \\
P_4(\omega, k) &= |k|^5 \tau \left[\frac{8}{3} \tau^4 - \frac{178}{45} \tau^2 + \frac{2}{3} \right], \quad P_5(\omega, k) = \frac{4}{9} |k|^4 \tau^2 (\tau^2 - 1),
\end{aligned} \tag{2.0.14}$$

где $\omega = |k|\tau$, $\alpha = k_1^2$, $\beta = k_2^2$. Нетрудно проверить, что для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$, гиперболический пучок длины $N = 5$, определяемый цепочкой (2.0.14), является нестрого гиперболическим.

2.1. Задача Коши

Основная идея введения неравновесных переменных связана с тем, что для теоретического описания [50, 57, 62] процессов со строго градиентным и быстрым изменением параметров необходимо большее число переменных. Базовыми величинами являются: плотность ρ , скорость v и температура T , отвечающие системе уравнений Эйлера газовой динамики как невозмущенной (предельной) системе. Однородная часть системы (2.0.4)–(2.0.11) является гиперболической, а правая часть системы, вектор P , является линейной вектор-функцией относительно неравновесных величин. Первые пять компонент вектора P тождественно равны нулю, что соответствует пяти законам сохранения — массы, момента и энергии. В равновесном состоянии все компоненты вектора правой части равны нулю и, следовательно, формально все неравновесные величины равны нулю. Неформально это утверждение требует исследования предельного перехода по параметру $B \rightarrow \infty$, т.е. исследования условий типа Лакса глобальной устойчивости решений задачи Коши или смешанной задачи.

В [5] (см. следующую главу) доказано, что в одномерном случае для дисперсионного полинома 13-моментной системы Эрмита—Града справедлив аналог классической теоремы Эрмита—Биллера [51] об устойчивых полиномах. Более того, условия, которым удовлетворяет этот дисперсионный полином, являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости строго гиперболической тройки полиномов. В 13-моментном случае дисперсионное уравнение

$$P^{(13)}(\omega, k) = P_0(\omega, k) - i\gamma_1 B P_1(\omega, k) - \gamma_2 B^2 P_2(\omega, k) = 0, \tag{2.1.1}$$

где $\gamma_1 = \frac{4}{3}$, $\gamma_2 = \frac{32}{75}$, $\tau = \omega + \mu_E k$ и $\mu_E = v_E/c_s$ — число Маха, определяет полиномиальный пучок тройки строго гиперболических полиномов

$$P_0 = \tau \left(\tau^4 - \frac{78}{25} \tau^2 k^2 + \frac{27}{25} k^4 \right), \quad P_1 = \tau^4 - \frac{33}{25} \tau^2 k^2 + \frac{6}{25} k^4, \quad P_2 = \tau (\tau^2 - k^2), \tag{2.1.2}$$

для которого справедлив следующий результат [5].

Предложение 2.1.1. Пусть полиномиальный пучок (2.1.1) определяет строго гиперболическую тройку однородных полиномов, старшие коэффициенты которых $P_5(1, 0) = P_4(1, 0) = P_3(1, 0) = 1$, и постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. Тогда для любого вещественного $k \in \mathbb{R}^1$, $k \neq 0$, корни $\omega(k)$ дисперсионного уравнения (2.1.1) лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ комплексной плоскости.

Корни соседних полиномов P_j в 13-моментном случае (для полинома P_2 имеем $\omega_1^\pm = k(\mu_E \pm 1)$, $\omega_2 = k\mu_E$; для полинома P_1 имеем $\omega_1^\pm = k(\mu_E \pm \tilde{b}_1)$, $\omega_2^\pm = k(\mu_E \pm \tilde{b}_2)$; для полинома P_0 имеем $\omega_1^\pm = k(\mu_E \pm \tilde{c}_1)$, $\omega_2^\pm = k(\mu_E \pm \tilde{c}_2)$, $\omega_3 = k\mu_E$) взаимно разделяют друг друга. Здесь

$$\tilde{c}_1 = 1.6503, \quad \tilde{c}_2 = 0.6297, \quad \tilde{b}_1 = 1, 1, \quad \tilde{b}_2 = 0.22, \quad (2.1.3)$$

где $\mu_E < b_2 < c_2 < b_1 < c_1$ и $\mu_E < b_2 < 1 < b_1$. Таким образом, в линейном приближении 13-моментная система является глобально устойчивой. В 20-моментном случае имеем строго гиперболический пучок

$$P^{(20)}(\omega, k) = P_0 - i\gamma_1 B P_1 - \gamma_2 B^2 P_2 + i\gamma_3 B^3 P_3 = 0, \quad (2.1.4)$$

$$P_0(\omega, k) = \tau^6 - \frac{21}{5}\tau^4 k^2 + \frac{81}{25}\tau^2 k^4 - \frac{81}{125}k^6,$$

$$P_1(\omega, k) = \left(\tau^4 - \frac{258}{95}\tau^2 k^2 + \frac{441}{445}k^4 \right) \tau, \quad P_2(\omega, k) = \tau^4 - \frac{164}{95}\tau^2 k^2 + \frac{27}{95}k^4,$$

P_3 — то же, что P_2 в 13-моментном случае, $\gamma_1 = \frac{19}{6}$, $\gamma_2 = \frac{19}{6}$, $\gamma_3 = 1$. Справедливо следующее обобщение этой теоремы на 20-моментный случай.

Предложение 2.1.2. Пусть полиномиальный пучок (2.1.4) является строго гиперболическим пучком длины $N = 4$. Старшие коэффициенты полиномов пучка $P_6(1, 0) = P_5(1, 0) = P_4(1, 0) = P_3(1, 0) = 1$, постоянные в (2.1.4) $\gamma_j > 0$. Тогда для любого вещественного $k \in \mathbb{R}^1$, $k \neq 0$, корни $\omega(k)$ дисперсионного уравнения (2.1.4) лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ комплексной плоскости.

Следствием этих результатов является иерархия волн [31] (иерархия медленных корней и корней погранслоного типа) для решения задачи Коши системы (2.0.4)–(2.0.11).

В следующем параграфе мы приведем результаты [5] о равномерных оценках решений задачи Коши для уравнений с малым параметром при старших производных.

2.2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРИЗВОДНЫХ

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши для неоднородного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, старшие однородные части которого содержат степени малого параметра. В частном случае, когда степень малого параметра не превосходит 2, найдены необходимые и достаточные условия равномерной (относительно малого параметра) ограниченности решений.

2.2.1. Полиномиальный пучок. Линейный анализ, вообще говоря, нелинейных задач математической физики приводит к изучению задачи Коши (а также смешанной задачи) для пучков гиперболических операторов с малым параметром ε

$$P(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u_\varepsilon(t, x) = f(t, x), \quad (2.2.1)$$

где

$$P(t, x, \tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^k P_m(t, x, \tau, \xi) + \varepsilon^{k-1} P_{m-1}(t, x, \tau, \xi) + \dots + P_{m-k}(t, x, \tau, \xi); \quad (2.2.2)$$

здесь $P_m, P_{m-1}, \dots, P_{m-k}$ — однородные, полиномиальные по (τ, ξ) символы порядков $m, m-1, \dots, m-k$ соответственно.

Если символ P_m — строго гиперболический, то задача Коши для уравнения (2.2.1) однозначно разрешима при вещественных ε , скажем, для $\varepsilon > 0$. Возникает естественный вопрос об асимптотике решений и о равномерной (относительно ε) оценке решений, например, для однородной задачи Коши. Случай $k = 1$ был исследован в [4]. Здесь детально исследуется случай $k = 2$.

Изложение организовано следующим образом. В § 2.1 приводится 13-моментная система Града [50] неравновесной газовой динамики (случай 1-D). Вопрос об устойчивости состояния равновесия для этой системы приводит к исследованию корней алгебраического уравнения

$$P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) = 0, \quad (2.2.3)$$

где P_m, P_{m-1}, P_{m-2} — однородные вещественные строго гиперболические полиномы с $m = 5$ и $\xi \in \mathbb{R}^1$. Исследованию (2.2.3) для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и произвольного m посвящен § 2.2. Основным результатом состоит в том, что все корни (2.2.3) принадлежат верхней полуплоскости $\text{Im } \tau > 0$ тогда и только тогда, когда полином P_{m-1} строго гиперболический, полиномы P_m и P_{m-2} , вообще говоря, нестрого гиперболические (они могут иметь двукратные корни), знаки $P_m(1, 0)$, $P_{m-1}(1, 0)$ и $P_{m-2}(1, 0)$ совпадают, корни P_{m-1} разделяют корни P_m , а корни P_{m-2} разделяют корни P_{m-1} . Кроме того, полиномы P_m, P_{m-1} и P_{m-2} не могут иметь общих вещественных нулей. Отдельно изучается случай, когда полиномы P_m, P_{m-1} и P_{m-2} являются строго гиперболическими, и при этом имеет место строгое разделение корней. Эти же условия являются основными при исследовании уравнения типа (2.2.3) с малым параметром

$$\varepsilon^2 P_m(\tau, \xi) - i\varepsilon P_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) = 0 \quad (2.2.4)$$

и в случае переменных коэффициентов.

§ 2.3 посвящен исследованию уравнения (2.2.1) с переменными коэффициентами в случае $k = 2$. Рассматривается соболевское пространство H^s с весом $e^{\gamma t}$. На этом пространстве определяется эрмитова форма

$$(u, v)_{s[\gamma]} = (e^{\gamma t} u, e^{\gamma t} v)_s.$$

Следуя [11], мы рассматриваем мнимую часть квадратичной формы

$$- \text{Im}(P(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u, P_{m-1}(t, x, D_t, D_x)v)_{s[\gamma]}. \quad (2.2.5)$$

Для этой формы при достаточно больших $-\gamma$ доказывается двусторонняя априорная оценка. Другими словами, при оценке этой формы (в отличие от гиперболического оператора P) не происходит «потери гладкости». В качестве следствия этой двусторонней оценки получается неулучшаемая оценка снизу нормы оператора (2.2.1).

Конец § 2.3 посвящен формальным асимптотическим решениям уравнения (2.2.1) и их связи с асимптотикой по ε действительных решений уравнения (2.2.1).

Следует отметить, что задачи неравновесной газовой динамики приводят к гиперболическим пучкам, отвечающим $k = 3, \dots$. Наряду с задачей Коши для уравнения (2.2.1) большой интерес представляют и смешанные задачи.

2.2.2. Об одной системе неравновесной газовой динамики. Один из примеров возникновения пучка гиперболических полиномов (гиперболической тройки полиномов в терминологии § 2.1) связан с исследованием условия устойчивости решений задачи Коши для линеаризованной в окрестности состояния равновесия так называемой 13-моментной системы Града—Эрмита [50] неравновесной термодинамики (1-D случай).

Как мы отмечали в предыдущем параграфе, в классической газовой динамике система дифференциальных уравнений, отвечающая законам сохранения массы, моментов и энергии, замыкается так называемым «уравнением состояния», являющимся в некотором смысле гипотезой физического характера о свойствах течения газа. Формально строгое описание дается уравнением Больцмана, которое слишком сложно для реального анализа течений. В [50] и во многих последующих работах были получены некоторые замкнутые аппроксимации уравнения Больцмана. Основная идея подобных аппроксимаций состоит в том, что для процессов с быстрым изменением параметров для подходящего теоретического описания множество базовых зависимых переменных (плотность, скорость и энергия) расширяется обобщенными зависимыми переменными, многие из которых не имеют интуитивного физического смысла. Простейшим примером такого расширения является 13-моментная система уравнений Града. В случае одного пространственного переменного эта система содержит только 5 неизвестных функций: плотность ϱ , скорость u , температуру T и две обобщенные зависимые переменные σ и q . Эта система имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v^2 + RT\varrho + \sigma) = 0, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^2 + 3RT\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^3 + 5RT\rho v + 2\sigma v + 2q) = 0, \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{3}\rho v^2 + \sigma\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\rho v^3 + \frac{4}{3}RT\rho v + \frac{7}{3}\sigma v + \frac{8}{15}q\right) = -\frac{4}{5}B\rho\sigma, \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^3 + 5RT\rho v + 2\sigma v + 2q) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v^4 + 8RT\rho v^2 + 5\sigma v^2 + \right. \\ \left. + \frac{32}{5}qv + RT\left(5\frac{k}{m}T\rho + 7\sigma\right)\right) = -\frac{8}{5}B\rho\left(\frac{2}{3}q + \sigma v\right). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Здесь R — так называемая газодинамическая постоянная. В случае, когда обобщенные переменные равны нулю, первые три уравнения системы переходят в систему уравнений Эйлера равновесной газовой динамики:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v^2 + \frac{k}{m}T\rho\right) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v^2 + 3\frac{k}{m}T\rho\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v^3 + 5\frac{k}{m}T\rho v\right) = 0. \quad (2.2.13)$$

Функции ρ , v и T называются базовыми или равновесными переменными, а функции σ и q можно трактовать как неравновесные переменные. Уравнения (2.2.6)–(2.2.10) являются законами сохранения массы, момента и энергии. Системы типа (2.2.6)–(2.2.10) также называются законами сохранения с релаксацией, определяемой большим параметром B (числом Кнудсена [67]).

Разделив уравнения (2.2.9), (2.2.10) на B , мы сможем рассматривать систему (2.2.6)–(2.2.10) как малое сингулярное возмущение системы (2.2.11)–(2.2.13), поскольку после деления на B формально левые и правые части (2.2.9) и (2.2.10) стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$. Неформальное обоснование предельного перехода является серьезной и трудной проблемой. Хотелось бы ответить на следующие основные вопросы для параметрических задач:

- 1) При каких условиях обобщенные переменные σ , q стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$?
- 2) Верно ли утверждение, что σ , $q \rightarrow 0$ при $B \rightarrow \infty$ для любых начальных данных порядка $O(1)$ относительно малого параметра $1/B$?

Как первый шаг в исследовании сформулированной выше задачи, мы рассмотрим систему (2.2.6)–(2.2.10), линеаризованную в окрестности состояния равновесия

$$\rho = \rho_E, \quad v = v_E, \quad t = T_E, \quad \sigma = 0, \quad q = 0, \quad (2.2.14)$$

где ρ_E , v_E и T_E — константы. После перехода к безразмерным переменным система (2.2.6)–(2.2.10), линеаризованная на решении (2.2.14), запишется в виде

$$\mathcal{A}^t(\partial_t + \mu_E \partial_x)\mathcal{U} + \mathcal{A}^x \partial_x \mathcal{U} + B\mathcal{A}^B \mathcal{U} = 0, \quad (2.2.15)$$

где числовые 5×5 матрицы \mathcal{A}^t , \mathcal{A}^x и \mathcal{A}^B имеют вид

$$\mathcal{A}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора \mathcal{U} являются v , ϱ , U , σ , q , где $U = RT - \frac{2}{5}\varrho$. Единственным свободным параметром в системе (2.2.15) является число Маха $\mu_E = v_E/a_E$, где скорость звука $a_E^2 = 5T_E/3$.

Перейдя от переменных t , x к переменным $t' = t + \mu_E x$, $x' = x$ и опустив штрихи, мы заменим систему (2.2.15) системой

$$\mathcal{A}^t \partial_t \mathcal{U} + \mathcal{A}^x \partial_x \mathcal{U} + B \mathcal{A}^B \mathcal{U} = 0 \quad (2.2.16)$$

с теми же самыми матрицами \mathcal{A}^t , \mathcal{A}^x и \mathcal{A}^B . Решение этой системы записывается в виде интеграла Фурье

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(\xi, B) \exp(i(\xi x + \tau(\xi, B)t)) d\xi,$$

где $\tau(\xi, B)$ является корнем дисперсионного уравнения

$$\mathcal{P}(\tau, \xi, B) := \det(\mathcal{A}^t \tau + \mathcal{A}^x \xi - i B \mathcal{A}^B) = 0. \quad (2.2.17)$$

Так как полином (2.2.17) является квадратным полиномом от $-iB$, то его можно переписать в виде

$$\mathcal{P}(\tau, \xi, B) = P_5(\tau, \xi) - i\gamma_1 B P_4(\tau, \xi) - \gamma_2 B^2 P_3(\tau, \xi), \quad (2.2.18)$$

где $P_5(\tau, \xi)$, $P_4(\tau, \xi)$, $P_3(\tau, \xi)$ — вещественные однородные полиномы степеней 5, 4 и 3 соответственно, разрешенные относительно старшей степени τ , причем соответствующий коэффициент равен 1. Полагая $\xi = 0$ в полиноме (2.2.17), мы получим, что $\gamma_1 = \frac{4}{3}$, $\gamma_2 = \frac{32}{75}$.

Прямое вычисление определителя (2.2.17) при $\xi \neq 0$ приводит к явным выражениям для однородных полиномов (2.2.18)

$$P_5 = \tau \left(\tau^4 - \frac{78}{25} \tau^2 \xi^2 + \frac{27}{25} \xi^4 \right), \quad P_4 = \tau^4 - \frac{33}{25} \tau^2 \xi^2 + \frac{6}{25} \xi^4, \quad P_3 = \tau(\tau^2 - \xi^2).$$

Разложим наши полиномы на множители, полагая

$$P_5(\tau, \xi) = \prod_{j=1}^5 (\tau - c_j \xi), \quad P_4(\tau, \xi) = \prod_{j=1}^4 (\tau - b_j \xi), \quad P_3(\tau, \xi) = \prod_{j=1}^3 (\tau - a_j \xi). \quad (2.2.19)$$

Очевидно, что

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1.$$

Для корней P_5 и P_4 укажем приближенные значения:

$$c_1 = -1,6503, \quad c_2 = -0,6297, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0,22, \quad c_5 = 1,6503,$$

$$b_1 = -1,1, \quad b_2 = -0,22, \quad b_3 = 0,22, \quad b_4 = 1,1.$$

Приведенные значения корней показывают:

- 1) полиномы P_5 , P_4 и P_3 — строго гиперболические;
- 2) корни полинома P_4 разделяют корни полинома P_5 , т.е.

$$c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < c_3 < b_3 < c_4 < b_4 < b_5;$$

- 3) корни полинома P_3 разделяют корни полинома P_4 , т.е.

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < b_4.$$

Как будет показано в следующем параграфе, условия 1)–3) являются необходимыми и достаточными условиями того, что корни дисперсионного уравнения (2.2.15) при $\xi \neq 0$ имеют положительные мнимые части. Следствием этого результата является экспоненциальная устойчивость для линейной системы (2.2.15).

2.3. Пучки гиперболических полиномов

Ниже через $P_\ell(\tau, \xi)$, $\ell = m, m-1, m-2$ будем обозначать однородные полиномы степени ℓ от переменных $\tau \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ с вещественными коэффициентами, разрешенные относительно старшей степени τ , т.е. $P_\ell(1, 0) \neq 0$. Через $\tau_{\ell j}^0(\xi)$, $j = 1, \dots, \ell$ будем обозначать корни этих полиномов. В силу разрешенности полинома P_ℓ относительно старшей степени τ можно выбрать ℓ непрерывных по ξ ветвей корней; далее непрерывность корней не будет специально оговариваться.

Как хорошо известно, однородный полином $P_\ell(\tau, \xi)$ называется гиперболическим, если он разрешен относительно старшей степени τ и все корни $\tau_{\ell j}^0(\xi)$ — вещественные. Не ограничивая общности, можно считать, что полином P_ℓ имеет вещественные коэффициенты.

2.3.1. Гиперболические пары полиномов. Гиперболический полином называется строго гиперболическим, если корни $\tau_{\ell j}^0(\xi)$ попарно различны при $\xi \neq 0$. Следуя [4], будем называть полиномы $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ *гиперболической парой*, если:

- старшие коэффициенты $P_m(1, 0)$ и $P_{m-1}(1, 0)$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак;
- полиномы P_m и P_{m-1} — гиперболические;
- корни P_m разделяют корни P_{m-1} т.е. при подходящей нумерации корней и $\xi \neq 0$ имеет место (нестрогое) неравенство

$$\tau_{m1}^0(\xi) \leq \tau_{m-1,1}^0(\xi) \leq \tau_{m2}^0(\xi) \leq \dots \leq \tau_{m-1,m-1}^0(\xi) \leq \tau_{mm}^0(\xi). \quad (2.3.1)$$

Будем называть полиномы $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ *строгой гиперболической парой*, если:

- старшие коэффициенты $P_m(1, 0)$ и $P_{m-1}(1, 0)$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак;
- полиномы P_m и P_{m-1} — строго гиперболические;
- корни P_{m-1} строго разделяют корни P_m , т.е. при подходящей нумерации корней и $\xi \neq 0$ имеет место строгое неравенство

$$\tau_{m1}^0(\xi) < \tau_{m-1,1}^0(\xi) < \tau_{m2}^0(\xi) < \dots < \tau_{m-1,m-1}^0(\xi) < \tau_{mm}^0(\xi). \quad (2.3.2)$$

В [4] приведено описание гиперболической и строго гиперболической пар. Оно основано на классической теореме Эрмита (см., например, [21, лемма 9.1.3]). Согласно этой теореме для вещественных полиномов $p_m(\tau)$ и $p_{m-1}(\tau)$ одного переменного τ степеней m и $m-1$ соответственно, условие

$$p_m(\tau) - ip_{m-1}(\tau) \neq 0, \quad \text{Im } \tau \leq 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда $p_m(\tau)$ и $p_{m-1}(\tau)$ образуют эрмитову пару полиномов: знаки старших коэффициентов полиномов p_m и p_{m-1} совпадают, $p_m(\tau)$ и $p_{m-1}(\tau)$ имеют различные вещественные корни, причем корни $p_{m-1}(\tau)$ строго разделяют корни $p_m(\tau)$.

Замечание. Пусть полиномы $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ образуют строгую гиперболическую пару. Зафиксировав точку $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$, мы получим полиномы от одного переменного $p_m(\tau) := P_m(\tau, \xi^0)$ и $p_{m-1}(\tau) := P_{m-1}(\tau, \xi^0)$, образующие эрмитову пару.

Предложение 2.3.1. Для однородных вещественных полиномов $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ степеней m и $m-1$ соответственно, следующие утверждения эквивалентны:

- выполнено условие

$$P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \text{Im } \tau < 0;$$

- для любого $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ полиномы P_m и P_{m-1} представляются в виде

$$P_m(\tau, \xi^0) = p_{m-r}(\tau)q_r(\tau), \quad P_{m-1}(\tau, \xi^0) = p_{m-r-1}(\tau)q_r(\tau),$$

где полином q_r степени r имеет только вещественные корни, а вещественные полиномы p_{m-r} и p_{m-r-1} образуют эрмитову пару;

- $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ образуют гиперболическую пару;

(iv) имеет место неравенство

$$-\operatorname{Im} P_m(\tau, \xi) \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} > 0, \quad \operatorname{Im} \tau < 0.$$

Для строгой гиперболической пары имеется следующее описание.

Предложение 2.3.2. Для однородных вещественных полиномов $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ степеней m и $m-1$ соответственно, разрешенных относительно старших степеней τ , следующие утверждения эквивалентны:

(i) выполнено условие

$$P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0, \quad |\tau| + |\xi| > 0;$$

(ii) полиномы P_m и P_{m-1} образуют строгую гиперболическую пару;

(iii) выполнена двусторонняя оценка

$$C^{-1} \leq \frac{-\operatorname{Im} [P_m(\tau, \xi) \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)}]}{|\operatorname{Im} \tau| (|\tau| + |\xi|)^{2m-2}} \leq C, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0;$$

(iv) выполнено неравенство

$$|P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi)| \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| (|\tau| + |\xi|)^{m-1} + |P_{m-1}(\tau, \xi)|, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0.$$

2.3.2. Гиперболические тройки полиномов. Пусть $P_m(\tau, \xi)$, $P_{m-1}(\tau, \xi)$ и $P_{m-2}(\tau, \xi)$ — вещественные однородные полиномы степеней m , $m-1$ и $m-2$ соответственно. Будем говорить, что они образуют *строгую гиперболическую тройку*, если:

(a) полиномы P_m и P_{m-1} образуют (строгую) гиперболическую пару;

(b) полиномы P_{m-1} и P_{m-2} образуют (строгую) гиперболическую пару.

Из указанных свойств вытекает свойство

(c) старшие коэффициенты $P_m(1, 0)$, $P_{m-1}(1, 0)$ и $P_{m-2}(1, 0)$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак.

Развитием предложения 2.3.1 является следующая теорема.

Теорема 2.3.1. Для вещественных однородных полиномов $P_m(\tau, \xi)$, $P_{m-1}(\tau, \xi)$ и $P_{m-2}(\tau, \xi)$ степеней m , $m-1$ и $m-2$ соответственно, разрешенных относительно старшей степени τ , условие

$$P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0, \quad |\tau| + |\xi| > 0 \quad (2.3.3)$$

выполняется тогда и только тогда, когда:

(α) полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} образуют гиперболическую тройку;

(β) полином P_{m-1} — строго гиперболический;

(γ) полиномы $P_m(\tau, \xi)$, $P_{m-1}(\tau, \xi)$ и $P_{m-2}(\tau, \xi) \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ не имеют общих вещественных нулей, т.е. не существуют такие вещественные пары (σ^0, ξ^0) , $|\sigma^0| + |\xi^0| > 0$, что

$$P_m(\sigma^0, \xi^0) = P_{m-1}(\sigma^0, \xi^0) = P_{m-2}(\sigma^0, \xi^0) = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Полагая в (2.3.3) $\xi = 0$, после деления на $|\tau|^{m-2}$ получим

$$P_m(1, 0)\tau^2 - iP_{m-1}(1, 0)\tau - P_{m-2}(1, 0) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0.$$

Из явных формул решения квадратного уравнения вытекает, что коэффициенты указанного выше трехчлена имеют одинаковый знак (см. [21]).

Согласно цитированной выше теореме Эрмита из условия (2.3.3) следует, что при любом фиксированном $\xi \neq 0$ полиномы $P(\tau, \xi) := P_m(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ имеют попарно различные вещественные корни, а корни $\tau_{m-1, j}^0(\xi)$ полинома $P_{m-1}(\tau, \xi)$ строго разделяют корни $\tau_j(\xi)$ полинома $P(\tau, \xi)$:

$$\tau_1(\xi) < \tau_{m-1, 1}^0(\xi) < \tau_2(\xi) \cdots < \tau_{m-1, m-1}^0(\xi) < \tau_m(\xi). \quad (2.3.4)$$

Итак, утверждение (β) уже доказано. Для доказательства утверждений (α) и (γ) изучим поведение корней $\tau_j(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ и $|\xi| \rightarrow 0$. Положим

$$\tau_j(\xi) = |\xi| \tau_j^0(\omega, |\xi|), \quad \omega = \frac{\xi}{|\xi|}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Докажем, что

$$\tau_{mj}^0(\omega) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \tau_j^0(\omega, |\xi|). \quad (2.3.5)$$

В самом деле, при больших $|\xi|$ каждый корень $\tau_j^0(\omega, |\xi|)$ будет корнем уравнения

$$P_m(\tau, \omega) - |\xi|^{-2} P_{m-2}(\tau, \omega) = 0,$$

содержащего малый параметр $|\xi|^{-2}$. Ввиду непрерывной зависимости корней $\tau_j^0(\omega, |\xi|)$ от параметра $|\xi|^{-2}$ приходим к (2.3.5). Отсюда и из вещественности корней $\tau_j^0(\omega, |\xi|)$, в свою очередь, следует вещественность корней $\tau_{mj}^0(\omega)$, так что полином P_m — гиперболический.

Разделив все члены неравенства (2.3.4) на $|\xi|$ и перейдя к пределу при $|\xi| \rightarrow \infty$, мы получим, что корни P_{m-1} разделяют корни P_m . Итак, утверждение (α) доказано.

Для доказательства (γ) рассмотрим корни $\tau_j(\xi)$ при малых $|\xi|$. В этом случае $\tau_j^0(\omega, |\xi|)$ можно рассматривать как корни уравнения

$$P_{m-2}(\tau, \omega) - |\xi|^2 P_m(\tau, \omega) = 0 \quad (2.3.6)$$

с малым параметром $|\xi|^2$. При исследовании корней (2.3.6) будем следовать [2]. При $\xi = 0$ наше уравнение имеет $m-2$ корня $\tau_{m-2,j}^0(\omega)$, $j = 1, \dots, m-2$. При $|\xi| > 0$ возникает $m-2$ непрерывных ветвей корней

$$\tau_j^0(\omega, |\xi|) = \tau_{m-2,j}^0(\omega) + o(1), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m-2. \quad (2.3.7)$$

Кроме корней (2.3.7) существуют еще два так называемых погранслойных корня

$$\tau_1^0(\xi) = -b|\xi|^{-1} + o(|\xi|^{-1}), \quad \tau_m^0(\xi) = b|\xi|^{-1} + o(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow 0,$$

где

$$b = \left(\frac{P_{m-2}(1, 0)}{P_m(1, 0)} \right)^{1/2}.$$

Нам осталось проверить, что полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} не могут иметь общих вещественных нулей. В случае $\text{Im } \tau = 0$ левая часть (2.3.3) может обращаться в нуль для таких (σ^0, ξ^0) , для которых

$$P_m(\sigma^0, \xi^0) - P_{m-2}(\sigma^0, \xi^0) = 0, \quad P_{m-1}(\sigma^0, \xi^0) = 0. \quad (2.3.8)$$

Пусть, для определенности, $\sigma^0 = \tau_{m-1,k}^0(\xi^0)$. Тогда левое число в (2.3.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & P_m(1, 0) \prod_{j=1}^k (\tau_{m-1,k}^0(\xi^0) - \tau_{mj}^0(\xi^0)) \prod_{j=k+1}^m (\tau_{m-1,k}^0(\xi^0) - \tau_{mj}^0(\xi^0)) + \\ & + (-1) P_{m-2}(1, 0) \prod_{j=1}^{k-1} (\tau_{m-1,k}^0(\xi^0) - \tau_{m-2,j}^0(\xi^0)) \prod_{j=k}^{m-2} (\tau_{m-1,k}^0(\xi^0) - \tau_{m-2,j}^0(\xi^0)). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Если (σ^0, ξ^0) не является общим нулем P_m и P_{m-2} , то оба члена в (2.3.8) обязаны не обращаться в нуль и иметь противоположные знаки.

С другой стороны, если выполнено условие чередования корней (2.3.1) и первый член в (2.3.9) отличен от нуля, то его знак совпадает со знаком $P_m(1, 0)(-1)^{m-k}$. Аналогично, если (строго) чередуются нули P_{m-1} и P_{m-2} , то второй член в (2.3.9) имеет знак, совпадающий со знаком $-P_{m-2}(1, 0)(-1)^{m-k-1}$. Итак, рассматриваемая разность вне общих нулей всех трех полиномов отлична от нуля.

Достаточность. При доказательстве необходимости мы фактически показали, что если выполнены условия (α) , (β) и (γ) , то полином в левой части не может обращаться в нуль на вещественной оси. При $\text{Im } \tau < 0$ рассмотрим

$$\begin{aligned} -\text{Im} \left[P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \right] \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} = \\ = -\text{Im}(P_m \overline{P_{m-1}}) - \text{Im}(P_{m-1} \overline{P_{m-2}}) + |P_{m-1}|^2. \end{aligned}$$

Согласно предложению 2.3.1 правая часть строго положительна. Теорема доказана. \square

Замечание 2.3.1. Заметим, что если для цепочки вещественных полиномов произвольной длины k выполнено условие типа (2.3.3)

$$\sum_{j=0}^k (-i)^j P_{m-j}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \text{Im } \tau \leq 0, \quad |\tau| + |\xi| > 0,$$

то имеет место устойчивость полинома от переменной τ

$$\sum_{j=0}^k (-i)^j P_{m-j}(1, 0) \tau^{k-j},$$

который получается, если мы в исходном полиноме положим $\xi = 0$, а затем разделим его на τ^{m-k} . Устойчивость исходного полинома эквивалентна выполнению условий Рауса—Гурвица для его коэффициентов. В рассмотренном случае $k = 2$ условия Рауса—Гурвица сводятся к совпадению знака у коэффициентов $P_m(1, 0)$, $P_{m-1}(1, 0)$ и $P_{m-2}(1, 0)$. Это условие содержится в условии того, что P_m , P_{m-1} и P_{m-2} образуют гиперболическую тройку.

Замечание 2.3.2. Вернемся к доказательству необходимости в теореме 2.3.1. Мы исходили из того, что корни неоднородного полинома $P_m - P_{m-2}$, поделенные на $|\xi|$, различны и строго разделяются корнями строго гиперболического полинома $P_{m-1}(\tau, \omega)$. При предельном переходе $|\xi| \rightarrow \infty$ условие строгого разделения корней может перейти в нестрогое условие для старшей части P_m , так что полином $P_m(\tau, \omega)$, вообще говоря, может иметь корни кратности 2, совпадающие с простыми корнями $P_{m-1}(\tau, \omega)$. Аналогично дело обстоит с полиномом $P_{m-2}(\tau, \omega)$.

Ниже приведем примеры троек, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3.1. В этих примерах либо P_m , либо P_{m-2} имеет двукратные корни. Пример 2 подсказан работой [65].

Пример 1. $m = 2$ и $P_2 = (\tau - a\xi)^2$, $P_1 = (\tau - a\xi)$, $P_0 \equiv 1$, где a — произвольное вещественное число, а $\xi \in \mathbb{R}^1$.

Пример 2. $m = 5$ и

$$P_5 = \tau^2 \left(\tau^2 - \frac{9}{4} \xi^2 \right) \left(\tau - \frac{5}{2} \xi \right), \quad P_4 = \tau(\tau^2 - \xi^2)(\tau - 2\xi), \quad P_3 = \left(\tau^2 - \frac{1}{4} \xi^2 \right) \left(\tau - \frac{3}{2} \xi \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Проверим условия разделения корней. Мы можем ограничиться случаями $\xi = 1$ и $\xi = -1$. В первом случае имеем

$$\begin{aligned} c_1 = -\frac{3}{2}, \quad c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{3}{2}, \quad c_5 = \frac{5}{2}; \quad b_1 = -1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 2; \\ a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$c_1 < b_1 < c_2 = b_2 = c_3 < b_3 < c_4 < b_4 < c_5, \quad b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < b_4.$$

Аналогично при $\xi = -1$ имеем

$$\begin{aligned} c_1 = -\frac{5}{2}, \quad c_2 = -\frac{3}{2}, \quad c_3 = c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{5}{2}; \quad b_1 = -2, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 1; \\ a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В этом случае имеем

$$c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < c_3 = b_3 = c_4 < b_4 < c_5, \quad b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < b_4.$$

Отметим еще пример, в котором кратные корни имеются у полинома P_{m-2} .

Пример 3. $m = 5$ и $P_5 = (\tau^2 - 16\xi^2) \left(\tau^2 - \frac{1}{4}\xi^2 \right) (\tau - 2\xi)$, $P_4 = \tau(\tau^2 - \xi^2)(\tau - 3\xi)$, $P_3 = \tau^2(\tau - 2\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

Развитием предложения 2.3.2 и теоремы 2.3.1 является следующая теорема.

Теорема 2.3.2. Для вещественных однородных полиномов $P_m(\tau, \xi)$, $P_{m-1}(\tau, \xi)$ и $P_{m-2}(\tau, \xi)$ степеней m , $m-1$ и $m-2$ соответственно, разрешенных относительно старшей степени τ , следующие утверждения эквивалентны:

- (i) полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} образуют строгую гиперболическую тройку;
- (ii) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Im} \left[P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \right] \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} \geq \\ & \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| \left((|\tau| + |\xi|)^{2m-2} + (|\tau| + |\xi|)^{2m-4} \right) + |P_{m-1}(\tau, \xi)|^2, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0; \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

- (iii) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & |P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi)| \geq \\ & \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| \left[(|\tau| + |\xi|)^{m-1} + (|\tau| + |\xi|)^{m-3} \right] + |P_{m-1}(\tau, \xi)|, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

и, кроме того, полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} попарно не имеют общих вещественных нулей.

Доказательство. (i) \rightarrow (ii) Левая часть (2.3.10) равна

$$-\operatorname{Im}(P_m \overline{P_{m-1}}) - \operatorname{Im}(P_{m-1} \overline{P_{m-2}}) + |P_{m-1}|^2.$$

Воспользовавшись предложением 2.3.2(iii), получим наше утверждение.

(ii) \rightarrow (iii) Так как все три члена в правой части (2.3.10) положительны, то это неравенство можно переписать в виде трех неравенств:

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Im} \left[P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \right] \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| (|\tau| + |\xi|)^{2m-2}, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0, \\ & -\operatorname{Im} \left[P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \right] \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| (|\tau| + |\xi|)^{2m-4}, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0, \\ & -\operatorname{Im} \left[P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \right] \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} \geq |P_{m-1}(\tau, \xi)|^2, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0. \end{aligned}$$

Левые части первых двух неравенств можно сверху оценить через

$$\operatorname{const} (|\tau| + |\xi|)^{m-1} |P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi)|.$$

Левую часть последнего неравенства можно оценить сверху через

$$|P_{m-1}(\tau, \xi)| |P_m(\tau, \xi) - iP_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi)|.$$

В результате мы приходим к неравенству (2.3.11).

Доказательство отсутствия общих вещественных нулей полиномов P_m , P_{m-1} и P_{m-2} во многом повторяет вывод (γ) в теореме 2.3.1. Заменим в неравенстве (2.3.10) (ξ, τ) на $(\rho\xi, \rho\tau)$, разделим полученное неравенство на ρ^{2m-1} и перейдем к пределу при $\rho \rightarrow \infty$. В итоге получим неравенство

$$-\operatorname{Im} \left[P_m(\tau, \xi) \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)} \right] \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| (|\tau| + |\xi|)^{2m-2}, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0,$$

и из предложения 2.3.2 следует, что P_m и P_{m-1} образуют строгую гиперболическую пару. Аналогично, после деления на ρ^{2m-3} и перехода к пределу при $\rho \rightarrow 0$ получим неравенство

$$-\operatorname{Im} \left[P_{m-1}(\tau, \xi) \overline{P_{m-2}(\tau, \xi)} \right] \geq \operatorname{const} |\operatorname{Im} \tau| (|\tau| + |\xi|)^{2m-4}, \quad \operatorname{Im} \tau \leq 0.$$

Отсюда следует, что P_{m-1} и P_{m-2} образуют строгую гиперболическую пару.

(iii) \rightarrow (i) Из неравенства (2.3.11) тривиально следует, что условие (2.3.3) выполняется при $\text{Im } \tau < 0$. Так как по условию рассматриваемые полиномы попарно не имеют общих вещественных нулей, то условие (2.3.3) будет выполнено и в замкнутой полуплоскости $\text{Im } \tau \leq 0$. Из теоремы 2.3.1 вытекает, что полином P_{m-1} — строго гиперболический, полиномы P_m и P_{m-2} — гиперболические, и имеет место нестрогое разделение корней для пар P_m и P_{m-1} и, соответственно, P_{m-1} и P_{m-2} . Так как по условию рассматриваемые полиномы попарно не имеют общих вещественных нулей, то разделение корней будет строгим. Таким образом, нам осталось проверить, что полиномы P_m и P_{m-2} — строго гиперболические. Для этих целей заменим в неравенстве (2.3.11) (ξ, τ) на $(\rho\xi, \rho\tau)$ и отбросим последний член в правой части. Если мы разделим полученное неравенство на ρ^m и перейдем к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, то получим неравенство

$$|P_m(\tau, \xi)| \geq \text{const} |\text{Im } \tau| (|\tau| + |\xi|)^{m-1}, \quad \text{Im } \tau \leq 0.$$

Если же мы разделим полученное неравенство на ρ^{m-2} и перейдем к пределу при $\rho \rightarrow 0$, то получим неравенство

$$|P_{m-2}(\tau, \xi)| \geq \text{const} |\text{Im } \tau| (|\tau| + |\xi|)^{m-2}, \quad \text{Im } \tau \leq 0.$$

Как хорошо известно (см., например, [3, гл. I, предложение 3.2]), из этих неравенств вытекает строгая гиперболичность P_m и P_{m-2} . \square

2.3.3. Гиперболические тройки полиномов с малым параметром. В дальнейшем ε обозначает положительный малый параметр. Утверждения (α) , (β) и (γ) теоремы 2.3.1 остаются в силе при замене полиномов P_m , P_{m-1} , P_{m-2} на полиномы $\varepsilon^2 P_m$, εP_{m-1} и P_{m-2} соответственно. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2.3.3. *Для вещественных однородных полиномов $P_m(\tau, \xi)$, $P_{m-1}(\tau, \xi)$ и $P_{m-2}(\tau, \xi)$ степеней m , $m-1$ и $m-2$ соответственно, разрешенных относительно старшей степени τ и вещественного положительного ε условие*

$$\varepsilon^2 P_m(\tau, \xi) - i\varepsilon P_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \text{Im } \tau \leq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad |\tau| + |\xi| > 0, \quad (2.3.12)$$

выполняется тогда и только тогда, когда имеют место условия (α) , (β) и (γ) теоремы 2.3.1.

Более важный для дальнейшего результат можно получить для случая строгих гиперболических троек, заменяя в теореме 2.3.2 полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} на полиномы $\varepsilon^2 P_m$, εP_{m-1} и P_{m-2} соответственно. Полученный результат в следующем параграфе будет распространен на дифференциальные операторы с переменными коэффициентами.

Теорема 2.3.4. *Для вещественных однородных полиномов $P_m(\tau, \xi)$, $P_{m-1}(\tau, \xi)$ и $P_{m-2}(\tau, \xi)$ степеней m , $m-1$ и $m-2$ соответственно, разрешенных относительно старшей степени τ и вещественного положительного ε следующие условия эквивалентны:*

- (i) полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} образуют строгую гиперболическую тройку;
- (ii) положим

$$H(\sigma, \gamma, \xi, \varepsilon) = -\text{Im} \left[\varepsilon^2 P_m(\tau, \xi) - i\varepsilon P_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi) \right] \overline{P_{m-1}(\tau, \xi)}, \quad \tau = \sigma + i\gamma; \quad (2.3.13)$$

тогда справедлива двусторонняя оценка

$$C^{-1} \leq \frac{H(\sigma, \gamma, \xi, \varepsilon)}{|\text{Im } \tau| (|\tau| + |\xi|)^{2m-4} \left(1 + \varepsilon^2 (|\tau| + |\xi|)^2 \right) + \varepsilon |P_{m-1}(\tau, \xi)|^2} \leq C, \quad \text{Im } \tau \leq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.3.14)$$

с константой не зависящей от ε ;

- (iii) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & |\varepsilon^2 P_m(\tau, \xi) - i\varepsilon P_{m-1}(\tau, \xi) - P_{m-2}(\tau, \xi)| \geq \\ & \geq \text{const} |\text{Im } \tau| [\varepsilon^2 (|\tau| + |\xi|)^{m-1} + (|\tau| + |\xi|)^{m-3}] + \varepsilon |P_{m-1}(\tau, \xi)|, \quad \text{Im } \tau \leq 0, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

и, кроме того, полиномы P_m , P_{m-1} и P_{m-2} не имеют общих вещественных нулей.

2.4. Пучки гиперболических операторов с переменными коэффициентами

2.4.1. Обозначения. В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с малыми параметрами при старших производных

$$P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u(y) = f(y), \quad y = (t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4.1)$$

Как обычно, $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$ и $D_x = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, где символ дифференциального оператора в (2.4.1) имеет вид

$$P(y, \tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^2 P^{(1)}(y, \tau, \xi) - i\varepsilon P^{(2)}(y, \tau, \xi) - P^{(3)}(y, \tau, \xi). \quad (2.4.2)$$

Здесь $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$ — дифференциальные операторы порядков m , $m-1$ и $m-2$ соответственно, со старшими символами $P_m(y, \tau, \xi)$, $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-2}(y, \tau, \xi)$. Мы предполагаем, что коэффициенты рассматриваемых операторов являются гладкими функциями y , не зависящими от y при больших $|y|$.

Мы будем пользоваться стандартными функциональными пространствами. Обозначим через $H^s := H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ обычное пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_s$, а через $H_{[\gamma]}^s$ — совокупность таких u , что $e^{\gamma t}u \in H^s$. Как обычно, при $s = 0$ соответствующий индекс будем опускать.

В качестве нормы в $H_{[\gamma]}^s$ можно взять

$$\left(\int |\hat{u}(\sigma + i\gamma, \xi)|^2 (1 + |\sigma + i\gamma|^2 + |\xi|^2)^s d\xi d\sigma \right)^{1/2},$$

где через $\hat{u}(\sigma + i\gamma, \xi)$ обозначено (комплексное) преобразование Фурье функции $u(t, x)$:

$$\hat{u}(\sigma + i\gamma, \xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{it(\sigma + i\gamma) + i(x, \xi)} u(t, x) dt dx.$$

Нам будет удобнее пользоваться эквивалентной нормой, определяемой с помощью псевдодифференциальных операторов (подробнее см. [3, гл. 2, п. 1.6])

$$\|u\|_{s[\gamma]} := \|\delta_s^+(D_t, D_x)u\|_{[\gamma]},$$

где $\delta_s^+(D_t, D_x)$ — псевдодифференциальный оператор с символом

$$\delta_s^+(\tau, \xi) = \left(i\tau + \gamma_0 + \sqrt{1 + |\xi|^2} \right)^s, \quad \gamma \leq \gamma_0.$$

В пространстве $H_{[\gamma]}^s$ вводится естественное скалярное произведение

$$(u, v)_{s[\gamma]} = (\delta_s^+(D_t, D_x)u, \delta_s^+(D_t, D_x)v)_{[\gamma]}. \quad (2.4.3)$$

Обозначим через $H_{[\gamma]+}^s$ подпространство пространства $H_{[\gamma]}^s$, состоящее из элементов с носителем в полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, t \geq 0\}$. Подробную теорию этих пространств можно найти в [3]. Для дальнейшего отметим, что функция (распределение) u принадлежит $H_{[\gamma]+}^s$ тогда и только тогда, когда $\delta_s^+(D_t, D_x)u \in H_{[\gamma]+}$.

2.4.2. Строгие гиперболические пары операторов. Будем говорить, что дифференциальные операторы $P^{(1)}(y, D_t, D_x)$ и $P^{(2)}(y, D_t, D_x)$ порядков m и $m-1$ соответственно, с вещественными старшими однородными символами $P_m(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ образуют строгую гиперболическую пару, если $\forall y^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ полиномы $P_m(y^0, \tau, \xi)$ и $P_{m-1}(y^0, \tau, \xi)$ образуют строгую гиперболическую пару, т.е. удовлетворяют эквивалентным условиям предложения 2.3.2.

Предложение 2.4.1. Для операторов $P^{(1)}(y, D_t, D_x)$ и $P^{(2)}(y, D_t, D_x)$ порядков m и $m-1$ с вещественными старшими символами следующие условия эквивалентны:

(i) операторы $P^{(1)}(y, D_t, D_x)$ и $P^{(2)}(y, D_t, D_x)$ образуют строгую гиперболическую пару;

(ii) для любого $s_0 > 0$ можно указать такое $\gamma_0 = \gamma_0(s_0) > 0$, что при $|s| \leq s_0$ и $\gamma \leq -\gamma_0$ имеет место двусторонняя оценка

$$C^{-1}|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 \leq -\operatorname{Im} (P^{(1)}(y, D_t, D_x)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]} \leq C|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2. \quad (2.4.4)$$

Это предложение сформулировано в [4] и там намечен его вывод. Оценки типа (2.4.4) идут от основополагающей работы Лере [11]. Для полноты изложения мы сделаем несколько замечаний по поводу доказательства этого предложения.

(i) \rightarrow (ii) Обозначим через $P^{(1)}(y, \tau, \xi)$ и $P^{(2)}(y, \tau, \xi)$ полные символы операторов $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, а через $P_m(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ — их старшие символы. Положим

$$H(y, \sigma, \gamma, \xi) = -\operatorname{Im} \left[P^{(1)}(y, \tau, \xi) \overline{P^{(2)}(y, \tau, \xi)} \right], \quad \tau = \sigma + i\gamma. \quad (2.4.5)$$

Зафиксируем произвольную точку $y^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ и в обозначениях соответствующих операторов и символов при $y = y^0$ будем писать $P^{(1)}(D_t, D_x), \dots, H(\sigma, \gamma, \xi)$. Поскольку для старших символов $P_m(\tau, \xi)$ и $P_{m-1}(\tau, \xi)$ выполнены эквивалентные условия предложения 2.3.2, то для символа $H(\sigma, \gamma, \xi)$ при достаточно больших $-\gamma$ справедлива двусторонняя оценка условия (iii) предложения 2.3.2. Отсюда с помощью преобразования Фурье выводится оценка (2.4.4) для формы с замороженными коэффициентами

$$\operatorname{Im}(P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x)u)_{s[\gamma]}.$$

Из сказанного выше также следует, что символ (2.4.5) удовлетворяет условию постоянства силы, т.е. символы $H(y', \sigma, \gamma, \xi)$ и $H(y'', \sigma, \gamma, \xi)$ при достаточно больших $-\gamma$ и любых $y', y'' \in \mathbb{R}^{n+1}$ сверху и снизу оцениваются друг через друга.

Как показано в [3, гл. 2, теорема 4.2], алгебраическое условие постоянства силы для строго гиперболических операторов индуцирует при больших $-\gamma$ неравенства для квадратичных форм

$$\begin{aligned} C^{-1} \operatorname{Im}(P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x)u)_{s[\gamma]} &\leq \operatorname{Im}(P^{(1)}(y, D_t, D_x)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s[\gamma]} \leq \\ &\leq C \operatorname{Im}(P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x)u)_{s[\gamma]}, \quad \gamma \leq \gamma_0(s_0), \quad |s| \leq s_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (2.4.4).

Замечание. По поводу теоремы 4.2 из [3, гл. 2] требуется небольшое уточнение. В указанной монографии в качестве символов $P^{(2)}(y, \tau, \xi)$ рассматривались символы, у которых старшая однородная часть $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ была равна производной по τ от старшей однородной части $P_m(y, \tau, \xi)$ символа $P^{(1)}(y, \tau, \xi)$. Однако, как несложно проверить, указанный оператор $P^{(2)}$ можно заменить на любой другой строго гиперболический оператор, индуцирующий условие постоянства силы символа (2.4.5).

Еще раз подчеркнем, что условие постоянства силы связано с тем, что P_m и P_{m-1} образуют строгую гиперболическую пару.

(ii) \rightarrow (i) Опять зафиксируем произвольную точку $y^0 = (t^0, x^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и положим $P_{m-i}(D_t, D_x) = P_{m-i}(y^0, D_t, D_x)$, $i = 0, 1, \dots$. Доказательство необходимости (i) для справедливости оценки (2.4.4) основано на выводе из (2.4.4) оценки для замороженных коэффициентов

$$C^{-1}|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 \leq -\operatorname{Im} (P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]} \leq C|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2, \quad (2.4.6)$$

где через $\|u\|'_{s[\gamma]}$ обозначена норма, которая получается из нормы $\|u\|_{s[\gamma]}$ заменой $(1 + |\tau|^2 + |\xi|^2)^{s/2}$ на $(|\tau|^2 + |\xi|^2)^{s/2}$. Далее остается воспользоваться предложением 2.4.1(ii).

Вывод неравенства (2.4.6) из (2.4.4) является традиционным (см. [3, гл. 2, предложение 4.2]). Возьмем пробную функцию $u(y) \in H_{[\gamma]}^\infty$ и положим $u_\delta(y) = u(y - y^0)/\delta$. Тогда $u_\delta(y) \in H_{[\gamma/\delta]}^\infty$, и при достаточно малом δ мы находимся в условиях применимости оценки (2.4.4) с весом $\exp(t\gamma/\delta)$. Заменяя в (2.4.4) γ на γ/δ и u на u_δ , мы придем к оценке

$$C^{-1} \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| \|u\|_{m-1+s, [\gamma/\delta]}^2 \leq -\operatorname{Im} (P^{(1)}(y, D_t, D_x)u_\delta, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u_\delta)_{s, [\gamma/\delta]} \leq$$

$$\leq C \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| \|u\|_{m-1+s, [\gamma/\delta]}^2. \quad (2.4.7)$$

Прямое вычисление преобразования Фурье показывает, что

$$\hat{u}_\delta(\tau, \xi) = \exp(i(x^0, \xi) + it^0\tau)\delta^{n+1}\hat{u}(\tau\delta, \xi\delta).$$

Таким образом, левая часть (2.4.7) равна

$$C^{-1}K(\delta)(|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 + O(\delta)),$$

где

$$K(\delta) := \delta^{-m-s+2+(n+1)/2} \exp\left(t^0 \frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Разделив все члены неравенства (2.4.7) на $K(\delta)$ и перейдя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, мы получим оценку сверху и снизу предела квадратичной формы через левую часть (2.4.6).

Можно показать (см. вычисления в [3, п. 4.2, гл. 2]), что после деления на $K(\delta)$ средний член в (2.4.7) сходится к среднему члену в (2.4.6).

2.4.3. Строго гиперболические тройки операторов. Вернемся к оператору (2.4.1), (2.4.2). Будем предполагать, что порядки дифференциальных операторов $P^{(1)}(y, D_t, D_x)$, $P^{(2)}(y, D_t, D_x)$ и $P^{(3)}(y, D_t, D_x)$ равны, соответственно, m , $m-1$ и $m-2$, а старшие однородные символы $P_m(y, \tau, \xi)$, $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-2}(y, \tau, \xi)$ — вещественные.

Будем говорить, что операторы $P^{(1)}(y, D_t, D_x)$, $P^{(2)}(y, D_t, D_x)$ и $P^{(3)}(y, D_t, D_x)$ образуют строгую гиперболическую тройку, если для всех $y^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ полиномы $P_m(y^0, \tau, \xi)$, $P_{m-1}(y^0, \tau, \xi)$ и $P_{m-2}(y^0, \tau, \xi)$ образуют строгую гиперболическую тройку полиномов.

Основным результатом этого параграфа, вытекающим из теоремы 2.3.4 и предложения 2.4.1, является следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Для оператора в (2.4.1) следующие условия эквивалентны:*

- (i) операторы $P^{(1)}(y, D_t, D_x)$, $P^{(2)}(y, D_t, D_x)$ и $P^{(3)}(y, D_t, D_x)$ образуют строгую гиперболическую тройку;
- (ii) для любого $s_0 > 0$ можно указать такое $\gamma_0 = \gamma_0(s_0) > 0$, что при $|s| \leq s_0$ и $\gamma \leq -\gamma_0$ имеет место двусторонняя оценка

$$\begin{aligned} & C^{-1}(\varepsilon^2 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 + |\gamma| \|u\|_{m-2+s, [\gamma]}^2 + \varepsilon \|P^{(2)}(y, D_t, D_x)u\|_{s, [\gamma]}^2) \leq \\ & \leq -\operatorname{Im} (P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]} \leq \\ & \leq C(\varepsilon^2 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 + |\gamma| \|u\|_{m-2+s, [\gamma]}^2 + \varepsilon \|P^{(2)}(y, D_t, D_x)u\|_{s, [\gamma]}^2) \quad \forall u \in H_{[\gamma]}^\infty; \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

- (iii) для любого $s_0 > 0$ можно указать такое $\gamma_0 = \gamma_0(s_0) > 0$, что при $|s| \leq s_0$ и $\gamma \leq -\gamma_0$ имеет место оценка

$$\varepsilon^2 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]} + |\gamma| \|u\|_{m-3+s, [\gamma]} \leq \operatorname{const} \|P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s, [\gamma]} \quad \forall u \in H_{[\gamma]}^\infty. \quad (2.4.9)$$

Кроме того, старшие символы $P_m(y, \tau, \xi)$, $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-2}(y, \tau, \xi)$ при любом фиксированном $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ попарно не имеют общих вещественных нулей.

Доказательство. (i) \rightarrow (ii) Квадратичная форма в среднем члене (2.4.8) равна

$$-\varepsilon^2 \operatorname{Im} (P^{(1)}u, P^{(2)}u)_{s, [\gamma]} + \operatorname{Im} (P^{(3)}u, P^{(2)}u)_{s, [\gamma]} + \varepsilon \|P^{(2)}u\|_{s, [\gamma]}^2.$$

Согласно предложению 2.4.1 первый член при больших $-\gamma$ допускает двустороннюю оценку

$$\begin{aligned} & C^{-1}\varepsilon^2 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 \leq -\varepsilon^2 \operatorname{Im} (P^{(1)}(y, D_t, D_x)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]} \leq \\ & \leq C\varepsilon^2 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2, \quad \gamma \leq \gamma_0(s_0), |s| \leq s_0, \quad u \in H_{[\gamma]}^\infty. \end{aligned}$$

Второй член равен

$$\operatorname{Im} (\overline{P^{(3)}}u, \overline{P^{(2)}}u)_{s, [\gamma]} = -\operatorname{Im} (\overline{P^{(2)}}u, \overline{P^{(3)}}u)_{s, [\gamma]}.$$

Так как старшие символы $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$ — вещественные, то при достаточно больших $-\gamma$, согласно предложению 2.4.1, справедлива двусторонняя оценка

$$\begin{aligned} C_1^{-1}|\gamma| \|u\|_{m-2+s, [\gamma]}^2 &\leq \operatorname{Im} (P^{(3)}(y, D_t, D_x)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]} \leq \\ &\leq C|\gamma| \|u\|_{m-2+s, [\gamma]}^2, \quad \gamma \leq \gamma_0(s_0), \quad |s| \leq s_0, \quad u \in H_{[\gamma]}^\infty. \end{aligned}$$

Из этих оценок непосредственно следует (2.4.8).

(ii) \rightarrow (iii) Начнем с вывода неравенства (2.4.9). Отбрасывая второй и третий члены в левой части (2.4.8), получим

$$C^{-1}\varepsilon^2|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 \leq -\operatorname{Im} (P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]}.$$

Оценивая сверху правую часть по неравенству Шварца, приходим к неравенству

$$\varepsilon^2|\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]} \leq \operatorname{const} \|P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s, [\gamma]}. \quad (2.4.10)$$

Оценивая правую часть неравенства

$$C^{-1}|\gamma| \|u\|_{m-2+s, [\gamma]}^2 \leq -\operatorname{Im} (P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x)u)_{s, [\gamma]}$$

через

$$\|P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s+1, [\gamma]}^2 \|P^{(2)}(y, D_t, D_x)u\|_{s-1, [\gamma]}^2,$$

придем к неравенству

$$|\gamma| \|u\|_{m-2+s, [\gamma]} \leq \operatorname{const} \|P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s+1, [\gamma]}.$$

Заменяя s на $s-1$, получим

$$|\gamma| \|u\|_{m-3+s, [\gamma]} \leq \operatorname{const} \|P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s, [\gamma]}. \quad (2.4.11)$$

Складывая оценки (2.4.10) и (2.4.11), приходим к неравенству (2.4.9).

Переходим к доказательству попарного различия вещественных корней. Полагая в (2.4.8) $\varepsilon = 0$ и пользуясь предложением 2.4.1 для операторов $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$, докажем, что $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-2}(y, \tau, \xi)$ образуют строгую гиперболическую пару. Аналогично, разделив левое неравенство (2.4.8) на ε^2 , перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow \infty$ и воспользовавшись предложением 2.4.1 для операторов $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, докажем, что $P_m(y, \tau, \xi)$ и $P_{m-1}(y, \tau, \xi)$ образуют строгую гиперболическую пару.

(iii) \rightarrow (i) Зафиксируем точку $y^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ и заморозим в ней коэффициенты операторов $P^{(i)}$, где $i = 1, 2, 3$. Повторяя рассуждения, использованные при выводе (ii) \rightarrow (i) в предложении 2.4.1, из оценки (2.4.9) выведем оценку для постоянных коэффициентов

$$\begin{aligned} \varepsilon^2|\gamma| \|u\|'_{m-1+s, [\gamma]} + |\gamma| \|u\|'_{m-3+s, [\gamma]} &\leq \\ &\leq \operatorname{const} \|P^0(D_t, D_x, \varepsilon)u\|'_{s, [\gamma]} \quad \forall u \in H_{[\gamma]}^\infty, \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

где мы положили

$$P^0(D_t, D_x, \varepsilon) = \varepsilon^2 P_m(D_t, D_x) - i\varepsilon P_{m-1}(D_t, D_x) - P_{m-2}(D_t, D_x).$$

Переходя в неравенстве (2.4.12) к преобразованию Фурье и пользуясь произвольностью функции u , мы приходим к неравенству (2.3.15). Теперь нам остается воспользоваться теоремой 2.3.4. \square

2.4.4. Однородная задача Коши и ее формальное асимптотическое решение. Как следует из результатов [3], при $\varepsilon > 0$ существует непрерывный обратный оператор

$$(P(y, D_t, D_x, \varepsilon))^{-1} : H_{[\rho]}^s \rightarrow H_{[\rho]}^{s+m-1}, \quad -\rho > \gamma_0(s_0), \quad |s| \leq s_0. \quad (2.4.13)$$

Однако пространства $H_{[\rho]}^s$ с разными ρ не вкладываются друг в друга, поэтому для конкретной правой части f , скажем, принадлежащей $H_{[\rho]}^\infty$, для некоторого ρ , мы не можем гарантировать существование гладкого решения уравнения (2.4.1).

Ситуация радикально меняется при замене пространств $H_{[\rho]}^s$ на подпространства $H_{[\rho]^+}^s$, поскольку для них имеют место вложения

$$H_{[\rho]^+}^s \subset H_{[\rho']^+}^s \quad \forall \rho' < \rho.$$

В правой части этого равенства стоят функции из $H_{[\rho_N]}^{s-3-2N}$ с коэффициентами ε^{N+1} и ε^{N+2} . Отсюда вытекает (2.4.16).

(ii) Если в равенстве (2.4.21) мы заменим $f(y)$ на $P(y, D_t, D_x, \varepsilon)u$, то получим

$$P(y, D_t, D_x, \varepsilon)(U^N - u) = \varepsilon^{N+1} f_N, \quad f_N \in H_{[\rho_N]_+}^{s-3-2N}.$$

Воспользовавшись теоремой 2.4.1(iii) (в которой s надо заменить на $s - 3 - 2N$), мы получим оценку (2.4.18). \square

2.4.5. Замечания о выводе оценок (2.4.6). Как и при выводе (iii) \rightarrow (i) в теореме 2.4.1, зафиксируем произвольную точку $y^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ и положим $P^{(1)}(D_t, D_x) = P^{(1)}(y^0, D_t, D_x)$, $P^{(2)}(D_t, D_x) = P^{(2)}(y^0, D_t, D_x)$. Оценка (2.4.5) для форм с замороженными коэффициентами

$$\text{Im}(P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x)u)_{s[\gamma]}$$

вытекает из условия (iii) предложения 2.3.1 с помощью преобразования Фурье.

Предложение 2.3.1(iii) также показывает, что символ

$$H(y, \sigma, \gamma, \xi) = -\text{Im} \left[P^{(1)}(y, \tau, \xi) \overline{P^{(2)}(y, \tau, \xi)} \right], \quad \tau = \sigma + i\gamma, \quad (2.4.22)$$

квадратичной формы в (2.4.5) при больших $-\gamma$ сверху и снизу оценивается через символы

$$H(\sigma, \gamma, \xi) = -\text{Im}(P^{(1)}(\tau, \xi), \overline{P^{(2)}(\tau, \xi)})$$

квадратичных форм с замороженными коэффициентами, т.е. удовлетворяет условию постоянства силы.

Как показано в [3, гл. 2, теорема 4.2], алгебраическое условие постоянства силы индуцирует при больших $-\gamma$ неравенства для квадратичных форм

$$\begin{aligned} C^{-1} \text{Im}(P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x))_{s[\gamma]} &\leq \text{Im}(P^{(1)}(y, D_t, D_x)u, P^{(2)}(y, D_t, D_x))_{s[\gamma]} \leq \\ &\leq C \text{Im}(P^{(1)}(D_t, D_x)u, P^{(2)}(D_t, D_x))_{s[\gamma]}, \quad \gamma \leq \gamma_0(s_0), \quad |s| \leq s_0. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует оценка (2.4.5).

Интересно понять, справедлив ли аналог этих утверждений для систем моментов высших порядков.

2.4.6. Заключение. Следствием этих результатов является иерархия волн [38] (иерархия медленных корней и корней погранслоного типа) для решения задачи Коши системы (2.2.6)–(2.2.10) (главы 2). Рассмотрим главную (однородную) часть этой системы. Очевидно, общее решение представимо как суперпозиция плоских волн Д’Аламбера

$$\varphi_1(x - c_1 t) + \varphi_2(x - c_2 t) + \dots + \varphi_5(x - c_N t), \quad (2.4.23)$$

которые распространяются со скоростями c_1, \dots, c_N ($N = 5$ для 13-моментной системы или $N = 6$ для 20-моментной системы в 1-D случае). Решение предельной линеаризованной в окрестности состояния равновесия системы уравнений Эйлера также представимо как суперпозиция плоских волн Д’Аламбера

$$\varphi_1(x - a_1 t) + \varphi_2(x - a_2 t) + \varphi_3(x - a_3 t), \quad (2.4.24)$$

распространяющихся со скоростями a_1, a_2, a_3 . По аналогии с [31] системы моментов описывают феномен иерархии волн, в которой высшие волны (коротковолновые приближения решений) дают (2.4.23) и низшие волны (длинноволновые приближения решений) дают (2.4.24). Свойства промежуточных полиномов $P_1(P_1, P_2)$ в 13-моментном (или 20-моментном) случае обеспечивают устойчивый переход от высших волн в низшие волны, когда $tB \rightarrow \infty$. Имеется в виду, что при предельном переходе $B \rightarrow \infty$ решения задачи Коши и корректных смешанных задач стремятся к соответствующим решениям невозмущенной линеаризованной системы уравнений Эйлера.

2.5. Об устойчивости пучков гиперболических полиномов

В этом параграфе мы возвращаемся к изучению задачи Коши для линеаризованных систем неравновесной термодинамики. Мы получим достаточные условия, близкие к необходимым, устойчивости решений задачи Коши. Условия устойчивости сформулированы в форме параметрической теоремы Эрмита—Биллера для полиномиальных гиперболических пучков из четырех полиномов.

Линейный анализ устойчивости многих задач математической физики [50, 54, 62] сводится к исследованию устойчивости дисперсионного уравнения задачи Коши

$$P_0(t, x, \tau, \xi) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{-i}{\varepsilon} \right)^j \gamma_j(t, x) P_j(t, x, \tau, \xi) = 0, \quad (2.5.1)$$

которое называется полиномиальным пучком порядка (m, N) [5, 24]. Здесь $x, \xi \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, ε — малый параметр (или $\varepsilon = 1$), P_j являются однородными по переменным (τ, ξ) полиномами порядков $m, m-1, \dots, m-N$ соответственно, где $m-N > 0$.

Определение строго гиперболического пучка Пучок (2.5.1) однородных полиномов $P_j(\tau, \xi)$, $j = 0, 1, \dots, N$, порядков $m-j$, $m > N$, с вещественными коэффициентами называется *строго гиперболическим пучком* порядка (m, N) , если:

- 1) все P_j — строго гиперболические относительно τ полиномы со старшими коэффициентами $P_j(1, 0)$, равными единице;
- 2) корни соседних полиномов P_j, P_{j+1} , $j = 0, \dots, N-1$, строго разделяют друг друга;
- 3) полином

$$\mathcal{R}G(\tau) \equiv \left(\mathcal{P} - i\mathcal{Q} \right) \frac{(\tau, 0)}{\tau^{m-N}} = \tau^N + \sum_{j=1}^N (-i)^j \gamma_j(t, x) \tau^{N-j}$$

устойчивый, т.е. для коэффициентов γ_j справедливо условие Рауса—Гурвица.

Определение нестрого гиперболического пучка Пучок (2.5.1) однородных полиномов $P_j(\tau, \xi)$, $j = 0, 1, \dots, N$, порядков $m-j$, $m > N$, с вещественными коэффициентами называется *нестрого гиперболическим пучком* порядка (m, N) , если:

- 1) все P_j — гиперболические относительно τ полиномы со старшими коэффициентами, равными единице;
- 2) корни соседних полиномов P_j, P_{j+1} , $j = 0, \dots, N-1$, разделяют друг друга нестрого;
- 3) для коэффициентов γ_j полинома

$$\mathcal{R}G(\tau) = \tau^N + \sum_{j=1}^N (-i)^j \gamma_j(t, x) \tau^{N-j}$$

справедливо условие Рауса—Гурвица.

Определение правильной кратности корней Полиномиальный пучок P_0, \dots, P_N удовлетворяет условию правильной кратности корней, если кратный корень $p(\xi)$ полинома

$$P_j(\tau, \xi) = (\tau - p(\xi))^r \tilde{P}_j(\tau, \xi)$$

порядка $r(\xi) \geq 2$ является корнем полиномов P_s порядка $r(\xi) + j - s$, $s = 0, \dots, j-1$, и корнем полиномов P_{j+s} порядка $r - s$, $s = 1, \dots, r-1$ соответственно.

Четверка гиперболических полиномов Рассмотрим пучок (2.5.1) из четырех полиномов:

$$\mathcal{R}(\tau, \xi) = \mathcal{P}(\tau, \xi) + i\mathcal{Q}(\tau, \xi), \quad (2.5.2)$$

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) = P_0(\tau, \xi) + \gamma_2 P_2(\tau, \xi), \quad \mathcal{Q}(\tau, \xi) = \gamma_1 P_1(\tau, \xi) + \gamma_3 P_3(\tau, \xi). \quad (2.5.3)$$

Многочлены P_0, P_1, P_2, P_3 — однородные по переменным (τ, ξ) степени $m, m-1, m-2, m-3$ соответственно, гиперболические относительно τ , старшие коэффициенты которых равны единице. Постоянные $\gamma_j > 0$, $j = 1, 2, 3$. Пусть $c_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m$; $b_k(\xi)$, $k = 1, \dots, m-1$; $d_l(\xi)$, $l = 1, \dots,$

$m - 2$; $a_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m - 3$ — корни полиномов P_0, P_1, P_2, P_3 ; $\tau = p_j(\xi)$ — корни $\mathcal{P}(\tau, \xi) = 0$, и $\tau = q_l(\xi)$ — корни $\mathcal{Q}(\omega, k) = 0$.

Лемма 2.5.1. Пусть $Q_0(\tau, \xi)$ и $Q_1(\tau, \xi)$ — полиномы с вещественными коэффициентами от переменной τ степеней m и $m - 1$ соответственно, полиномиально зависящие от вещественного векторного параметра $\xi \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- 1) для любого $\xi \neq 0$ все нули полинома $Q_0 - iQ_1$ лежат в полуплоскости $\text{Im } \tau > 0$;
- 2) для любого $\xi \neq 0$ старшие коэффициенты полиномов Q_0 и Q_1 имеют одинаковые знаки, нули полиномов Q_0 и Q_1 — вещественные, простые и разделяют друг друга;
- 3) для любого $\xi \neq 0$ все корни Q_0 — вещественные и простые; если их обозначить через $p_j(\xi)$, то

$$\frac{Q_1(\tau, \xi)}{Q_0(\tau, \xi)} = \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j(\xi)}{\tau - p_j(\xi)}, \quad (2.5.4)$$

где константы $\mu_j(\xi)$ — положительны;

- 4) для любых $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus (0, 0)$ скобка Пуассона $[Q_0, Q_1] = (\partial_\tau(Q_0)Q_1 - \partial_\tau(Q_1)Q_0) > 0$;
- 5) для любых $\hat{\tau} \in \mathbb{R}$, $\hat{\xi} \in S^d$

$$[Q_0, Q_1](|\xi|\hat{\tau}, \hat{\xi}) > 0, \quad |\tau| + |\xi| \neq 0.$$

Эта лемма является одной из интерпретаций классической теоремы Эрмита—Биллера [51, 52]. Доказательство первых трех утверждений приведено в [52]. Справедливость двух последних следует из интерполяционной формулы Лагранжа

$$[Q_0, Q_1](\tau) = -Q_0^2 \partial_\tau \left(\frac{Q_1(\tau)}{Q_0(\tau)} \right) = \sum_{j=1}^m \mu_j \prod_{s \neq j} (\tau - p_s)^2 \geq 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.5.5)$$

где $\mu_j = Q_1(p_j(\xi), \xi)/Q_0'(p_j(\xi), \xi)$. Из условия взаимного разделения корней следует, что знаки $Q_1(p_j(\xi), \xi)$ и $Q_0'(p_j(\xi), \xi)$ чередуются, так что числа $\mu_j(\xi)$ — положительны.

Как следствие получаем следующую лемму.

Лемма 2.5.2. Для строго гиперболического пучка $P(\tau, \xi), Q(\tau, \xi)$ из двух полиномов для вещественных значений $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, скобка Пуассона $[P, Q] = \partial_\tau(P)Q - \partial_\tau(Q)P > 0$ положительна.

Для нестрого гиперболического пучка из двух полиномов $P(\tau, \xi), Q(\tau, \xi)$, удовлетворяющего условию правильной кратности корней, для вещественных значений $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, скобка Пуассона $[P, Q] = \partial_\tau(P)Q - \partial_\tau(Q)P \geq 0$.

2.5.1. Необходимые условия устойчивости пучка из четырех полиномов.

Лемма 2.5.3. Для устойчивого полиномиального пучка из четырех полиномов, удовлетворяющего условию правильной кратности, необходимо:

- 1) полином

$$\mathcal{R}G(\tau) = \tau^3 - i\gamma_1\tau^2 - \gamma_2\tau + i\gamma_3 \quad (2.5.6)$$

устойчив, т.е. для него справедливо условие Рауса—Гурвица;

- 2) полиномы P_0, P_1 — гиперболические, полиномы P_2, P_3 — строго гиперболические, кратность корня P_0 не выше трех;
- 3) для любых $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $(\tau, \xi) \neq 0$, справедливо неравенство

$$[P_0, P_3](\tau, \xi) \geq \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2](\tau, \xi) + 2\sqrt{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}} \sqrt{[P_0, P_1][P_2, P_3]}(\tau, \xi).$$

Из теоремы Эрмита—Биллера при фиксированном значении параметра ξ следуют строгая гиперболичность полиномов \mathcal{P}, \mathcal{Q} и положительность скобки Пуассона

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, \xi) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \neq 0. \quad (2.5.7)$$

Из условий нестрогой гиперболичности и правильной кратности следует, что

$$\begin{aligned} (\tau, \xi) \geq 0, \quad [P_1, P_2](\tau, \xi) \geq 0, \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \\ [P_2, P_3](\tau, \xi) > 0, \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (\tau, \xi) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Последнее справедливо, так как из условия правильной кратности следует, что если $[P_2, P_3](\tau, \xi) = 0$, то в этой точке существует общий вещественный корень всех полиномов P_0, \dots, P_3 . Тогда из (2.5.8) и нестрогой гиперболичности полиномов P_2, P_3 следует их строгая гиперболичность.

Теперь рассмотрим скобку Пуассона (2.5.7). Необходимым условием устойчивости (см. теорему Эрмита—Биллера) является положительность формы

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\lambda \hat{\tau}, \lambda \hat{\xi}) = \gamma_1 [P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \lambda^4 + \gamma_1 \gamma_2 [P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \lambda^2 - \\ - \gamma_3 [P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \lambda^2 + \gamma_2 \gamma_2 \gamma_3 [P_2, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) > 0 \quad \forall \lambda \geq 0, \quad (\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Возможны следующие случаи:

- 1) в точках $(\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}$, где $[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi}) = 0$, необходимым условием справедливости (2.5.9) является

$$[P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \leq \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}); \quad (2.5.10)$$

- 2) в точках $(\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}$, где $[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi}) > 0$, необходимым условием справедливости (2.5.9) является неравенство

$$[P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) < \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) + 2 \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3}} \sqrt{[P_0, P_1][P_2, P_3]}(\hat{\tau}, \hat{\xi}). \quad (2.5.11)$$

Нетрудно видеть, что в случаях, когда несправедливы (2.5.9) или (2.5.10), существует положительное решение λ уравнения

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\lambda \hat{\tau}, \lambda \hat{\xi}) = 0,$$

что противоречит устойчивости полинома $\mathcal{P} - i\mathcal{Q}$.

При $\xi = 0$ имеем

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, 0) = \tau^{2(m-3)} \left(\gamma_1 \tau^4 + (\gamma_1 \gamma_2 - 3\gamma_3) \tau^2 + \gamma_2 \gamma_3 \right) > 0, \quad \tau \neq 0.$$

Отсюда следует, что либо $\gamma_1 \gamma_2 > 3\gamma_3$, либо

$$\gamma_1 \gamma_2 \leq 3\gamma_3, \quad 3\gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2 - 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} < 0,$$

т.е. $\gamma_1 \gamma_2 > \gamma_3$, что является необходимым и достаточным условием устойчивости (2.5.6).

Целью следующего пункта является доказательство достаточности условий (2.5.10)–(2.5.11) для устойчивости нестрогой гиперболического пучка правильной кратности.

2.5.2. Достаточные условия устойчивости полиномиального пучка из четырех полиномов.

Теорема 2.5.1. (Достаточные условия устойчивости полиномиального пучка из четырех полиномов). *Полиномиальный пучок (2.5.1) порядка $(m, 3)$ устойчив, если:*

- 1) пучок P_0, P_1, P_2, P_3 однородных полиномов порядков $m, m-1, m-2, m-3, m-3 > 0$ — строго гиперболический;
- 2) для конуса $\mathcal{K}^{0,3} = \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, [P_0, P_3](\tau, \xi) > 0\}$, где положительна знакопеременная скобка Пуассона $[P_0, P_3]$, справедлива следующая оценка:

$$[P_0, P_3](\sigma, \xi) < \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3}} \left(\sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3}} [P_1, P_2] + 2\sqrt{[P_0, P_1][P_2, P_3]} \right) (\sigma, \xi) \in \overline{\mathcal{K}^{0,3}} \cap S^{d+1}.$$

Эта теорема является обобщением классической теоремы Эрмита—Биллера [48] на полиномы, коэффициенты которых полиномиально зависят от вещественного многомерного параметра. Приведем сначала ряд простых лемм.

Лемма 2.5.4. Для строго гиперболического пучка (2.5.1) полиномы \mathcal{P} , \mathcal{Q} — строго гиперболические.

Доказательство следует из условия строгого разделения корней соседних полиномов. Так, например, $\mathcal{P}(b_j(\xi), \xi) = (-1)^j$.

В силу п. 4 теоремы Эрмита—Биллера для доказательства устойчивости полинома (2.5.1) достаточно проверить положительность скобки Пуассона $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] > 0$ для вещественных $(\tau, \xi) \neq 0$. В достаточно малой окрестности начала $\mathcal{O}_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| < \delta\}$, $0 < \delta \ll 1$, в силу устойчивости полинома

$$\tau^3 - \gamma_2\tau - i\gamma_1\left(\tau^2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right) = 0,$$

что следует из условия Рауса—Гурвица, положительны мнимые части корней (2.5.1) погранслоного типа. Из низкочастотной асимптотики оставшихся корней

$$\tau_j(\xi) = a_j(\xi) + i \frac{\prod_{k=1}^{m-2} (a_j(\xi) - d_k(\xi))}{\prod_{j \neq k} (a_j(\xi) - a_k(\xi))} |\xi|^2 + o(|\xi|^2)$$

имеем $\text{Im } \tau_j > 0$ в силу строгого разделения корней полиномов P_2, P_3 . Тогда теорема Эрмита—Биллера утверждает, что $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] > 0$ в \mathcal{O}_δ , $\delta \ll 1$. Также для достаточно малого $0 < \delta \ll 1$ выберем область $\mathcal{O}_\delta^\infty = \{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| > 1/\delta\}$, в которой в силу условия строгого разделения корней мнимые части корней полинома $\mathcal{R} = 0$ положительны. Доказательство следует из высокочастотной ($|\xi| \gg 1$) асимптотики корней уравнения (2.5.1):

$$\tau_j(\xi) = c_j(\xi) + i \frac{\prod_{s=1} (c_j(\tilde{\xi}) - b_j(\tilde{\xi}))}{\prod_{s \neq j} (c_j(\tilde{\xi}) - c_s(\tilde{\xi}))} + O(|\xi|^{-1}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Отсюда $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] > 0$ в \mathcal{O}^∞ , $\delta \ll 1$. Таким образом, $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] > 0$ в $\mathcal{O}_\delta^\infty \cup \mathcal{O}_\delta$. Теперь оценим скобку Пуассона на компакте $\delta \leq |\xi| \leq 1/\delta$.

Лемма 2.5.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Тогда $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] > 0$ на конусе $\mathcal{K}^{0,3}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы на конусе $(\tau, \xi) \in \mathcal{K}^{0,3}$. Для $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{O}_\delta^\infty \cup \mathcal{O}_\delta)$ скобка Пуассона

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, \xi) = \gamma_1[P_0, P_1](\tau, \xi) + \gamma_2\gamma_3[P_2, P_3](\tau, \xi) + \gamma_1\gamma_2[P_1, P_2](\tau, \xi) - \gamma_3[P_0, P_3](\tau, \xi) \quad (2.5.12)$$

положительна там, где $[P_0, P_3](\tau, \xi) \leq 0$. В конусе $\mathcal{K}^{0,3}$ применим п. 5 теоремы Эрмита—Биллера, чтобы получить оценку скобки Пуассона на луче

$$\Lambda(\hat{\tau}, \hat{\xi}) = \left\{ \lambda(\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in \mathcal{K}^{0,3}, (\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}, \lambda \geq 0 \right\}.$$

На этом луче

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}, \mathcal{Q}] \frac{\lambda(\hat{\tau}, \hat{\xi})}{\lambda^{2(m-2)}} &= \gamma_1[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi})\lambda^4 + \gamma_2\gamma_3[P_2, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) + \\ &+ \left(\gamma_1\gamma_2[P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) - \gamma_3[P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \right) \lambda^2 > 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда:

1) либо

$$\gamma_3[P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi})\gamma_1\gamma_2[P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \leq 0, \quad (2.5.13)$$

т.е. точка $\lambda(\hat{\tau}, \hat{\xi})$ не принадлежит конусу $\mathcal{K}^{0,3}$,

2) либо

$$\begin{aligned} & \gamma_3[P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) - \gamma_1\gamma_2[P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) > 0, \\ [P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) & < \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}[P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) + 2\sqrt{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}}\sqrt{[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi})[P_2, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi})}. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

При $\xi = 0$ имеем либо

$$\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_3 \geq 0,$$

либо

$$\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_3 < 0, \quad 3 < \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} + 2\sqrt{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}}.$$

Как видим, последнее условие эквивалентно условию Рауса—Гурвица

$$\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} > 1.$$

Следовательно, выбор оптимальных координат разложения (2.5.14) скобки Пуассона $[P_0, P_3](\tau, \xi)$ по псевдобазису однородных функций того же порядка $[P_1, P_2](\tau, \xi)$, $\sqrt{[P_0, P_1][P_2, P_3]}(\tau, \xi)$ приводит к точному результату при $\xi = 0$. \square

Таким образом, мы доказали, что $\min_{(\tau, \xi) \in (\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))} [\mathcal{P}, \mathcal{Q}] > 0$. Отсюда, в силу теоремы Эрмита—Биллера, следует, что мнимая часть корней $\tau_j(\xi)$, $\xi \neq 0$, положительна. Теперь рассмотрим нестрогий гиперболический пучок (2.5.1).

Теорема 2.5.2. (Достаточные условия устойчивости нестрогий гиперболического пучка из четырех полиномов). *Полиномиальный пучок (2.5.1) порядка $(m, 3)$ устойчив, если:*

- 1) пучок P_0, P_1, P_2, P_3 однородных полиномов порядков $m, m-1, m-2, m-3, m-3 > 0$ — нестрогий гиперболический, удовлетворяющий условию правильного разделения корней, постоянные $\gamma_j > 0$, $j = 1, 2, 3$;
- 2) для конуса $\mathcal{K}^{0,3}$ справедлива оценка (2.5.14);
- 3) полиномы P_0, P_1, P_2, P_3 не имеют общего вещественного корня.

Заметим, что условия теоремы о достаточных условиях устойчивости строгого и нестрогий гиперболических пучков выполнены для дисперсионных уравнений задачи Коши линеаризованных 14-, 20-моментных систем в 1-D случае (четыре полинома). Кратность вещественных корней не выше трех.

Примеры. 1) Дисперсионное уравнение линеаризованной 14-моментной системы в 1-D случае [36, 50] имеет вид

$$\begin{aligned} P^{(14)} &= P_0 - i\gamma_1 B P_1 - \gamma_2 B^2 P_2 + i\gamma_3 B^3 P_3 = 0, \\ P_0 &= \tau^2 \left(\tau^4 - \frac{98}{25} \tau^2 \xi^2 + \frac{63}{25} \xi^4 \right), \quad P_1 = \tau \left(7\tau^4 - \frac{426}{25} \tau^2 \xi^2 + \frac{129}{25} \xi^4 \right), \\ P_2 &= \frac{32}{5} \tau^4 - \frac{252}{25} \tau^2 \xi^2 + \frac{36}{25} \xi^4, \quad P_3 = \tau(\tau^2 - \xi^2), \quad \gamma_1 = \frac{28}{15}, \quad \gamma_2 = \frac{256}{225}, \quad \gamma_3 = \frac{256}{1125}. \end{aligned}$$

2) Для 20-моментной системы в 1-D случае имеем строго гиперболический пучок

$$\begin{aligned} P^{(20)}(\tau, \xi) &= P_0 - i\gamma_1 B P_1 - \gamma_2 B^2 P_2 + i\gamma_3 B^3 P_3 = 0, \\ P_0(\tau, \xi) &= \tau^6 - \frac{21}{5} \tau^4 \xi^2 + \frac{81}{25} \tau^2 \xi^4 - \frac{81}{125} \xi^6, \quad P_1(\tau, \xi) = \left(\tau^4 - \frac{258}{95} \tau^2 \xi^2 + \frac{441}{445} \xi^4 \right) \tau, \\ P_2(\tau, \xi) &= \tau^4 - \frac{164}{95} \tau^2 \xi^2 + \frac{27}{95} \xi^4, \end{aligned}$$

где полином P_3 — то же, что P_2 в 13-моментном случае, $\gamma_1 = \frac{19}{6}$, $\gamma_2 = \frac{19}{6}$, $\gamma_3 = 1$.

Доказанную теорему об устойчивости гиперболического пучка из четырех полиномов можно интерпретировать как параметрическое расширение классической теоремы Эрмита—Биллера. Полиномиальная зависимость от параметров связана со структурой дисперсионного уравнения задачи Коши для дифференциальных уравнений или систем с частными производными. Рассмотрим дифференциальный оператор $P(t, x, D_t, D_x)$, символ которого имеет вид

$$P(t, x, \tau, \xi, \varepsilon) = \mathcal{P}(t, x, \tau, \xi, \varepsilon) - i\mathcal{Q}(t, x, \tau, \xi, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5.15)$$

$$\mathcal{P}(t, x, \tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^3 P^{(0)}(t, x, \tau, \xi) - \varepsilon P^{(2)}(t, x, \tau, \xi),$$

$$\mathcal{Q}(t, x, \tau, \xi, \varepsilon) = \varepsilon^2 P^{(1)}(t, x, \tau, \xi) - P^{(3)}(t, x, \tau, \xi).$$

Как обычно, $D_t = -i\frac{\partial}{\partial t}$ и $D_x = -i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Коэффициенты рассматриваемых операторов являются гладкими функциями (t, x) , не зависящими от (t, x) при больших $|(t, x)|$. Здесь $P^{(j)}$ — дифференциальные операторы порядков $m-j$, $m-j > 0$, $j = 0, 1, 2, 3$, соответственно, со старшими символами $P_j(t, x, \tau, \xi)$, равномерно по (t, x) удовлетворяющими условиям теоремы об устойчивости строго гиперболического пучка из четырех полиномов. Как следствие этой теоремы (см. [48]) можно получить следующий результат.

Теорема 2.5.3. *Для оператора (2.5.15) следующие условия эквивалентны:*

- (i) *полиномы $P_j(t, x, \tau, \xi)$, $j = 0, \dots, 3$, равномерно по $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, образуют строгую гиперболическую четверку;*
- (ii) *для любого $s_0 > 0$ можно указать такое $\gamma_0 = \gamma_0(s_0) > 0$, что при $|s| \leq s_0$ и $\gamma \leq -\gamma_0$ имеет место двусторонняя оценка*

$$\begin{aligned} & C^{-1}(\varepsilon^3 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 + |\gamma| \|u\|_{m-3+s, [\gamma]}^2 + \|\mathcal{Q}(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s, [\gamma]}^2) \leq \\ & \leq -\operatorname{Im} (P(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u, \mathcal{Q}(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u)_{s, [\gamma]} \leq C(\varepsilon^3 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]}^2 + \\ & + |\gamma| \|u\|_{m-3+s, [\gamma]}^2 + \|\mathcal{Q}(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s, [\gamma]}^2) \quad \forall u \in H_{[\gamma]}^\infty; \end{aligned}$$

- (iii) *для любого $s_0 > 0$ можно указать такое $\gamma_0 = \gamma_0(s_0) > 0$, что при $|s| \leq s_0$ и $\gamma \leq -\gamma_0$ имеет место оценка*

$$\varepsilon^3 |\gamma| \|u\|_{m-1+s, [\gamma]} + |\gamma| \|u\|_{m-4+s, [\gamma]} \leq \operatorname{const} \|P(t, x, D_t, D_x, \varepsilon)u\|_{s, [\gamma]} \quad \forall u \in H_{[\gamma]}^\infty.$$

Заключение 1. Получены достаточные условия, близкие к необходимым, устойчивости решений задачи Коши для линеаризованных в окрестности состояния равновесия 14- и 20-моментных систем неравновесной термодинамики. Условия устойчивости сформулированы в форме параметрической теоремы Эрмита для полиномиальных гиперболических пучков из четырех полиномов.

2. Решена проблема Уизема [27] об иерархии волн в задаче Коши для линеаризованных 14- и 20-моментных систем неравновесной термодинамики. Линейный анализ систем моментов показал, что они удовлетворяют условиям Петровского [18] для обобщенных гиперболических систем с релаксацией, что позволяет получить теорему существования и единственности решения задачи Коши. Полученные априорные оценки дают обоснование предельного перехода по малому параметру (времени релаксации) и при $t \rightarrow \infty$.

ЧАСТЬ 3

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

ВВЕДЕНИЕ

Другой круг задач моментной теории связан со специфическими трудностями смешанных задач для систем моментов. Часть зависимых переменных (моменты высших порядков) не имеет интуитивного физического смысла. Такие переменные не могут быть определены из эксперимента, что должно учитываться в структуре краевых условий. Для формулировки смешанной задачи

требуются подходящие (корректные с физической точки зрения) граничные условия. Так, например, для разреженного газа возможен скачок температуры на стенке, и возможно появление скорости проскальзывания. Впервые граничные условия, описывающие эти феномены, были предложены в [67]. Исследуем линеаризацию этих граничных условий в окрестности состояния равновесия. Для простоты рассмотрим эту смешанную задачу в 1-D случае в четверти плоскости $\mathbb{R}^{++} = \{(x, t), t > 0, x > 0\}$. Тогда в безразмерных переменных для 13- и 20-моментных систем получим следующие условия:

$$(\alpha^\theta q_1 + \beta^p p_{\langle 11 \rangle})|_{x=0} = T_W - T|_{x=0}, \quad (3.0.16)$$

$$(\alpha^\theta q_1 + \beta^p p_{\langle 11 \rangle} + \beta^e \varrho_{\langle 111 \rangle})|_{x=0} = T_W - T|_{x=0}. \quad (3.0.17)$$

Здесь $\alpha^\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5\pi}{6}}$, $\beta^p = \frac{1}{15}$, $\beta^e = \frac{3}{10}$. Потребуем также, чтобы $v_1|_{x=0} = v_b(t)$, $\varrho|_{x=0} = \varrho_b(t)$, $p_{\langle 11 \rangle}|_{x=0} = 0$ в 13-моментном случае и дополнительно $\varrho_{\langle 111 \rangle}|_{x=0} = 0$ в 20-моментном случае. Как мы видим, линеаризованные условия, введенные в [36], являются частным случаем условий вида

$$\mathcal{B}\mathcal{U}|_{x=0} = \mathcal{F}_b. \quad (3.0.18)$$

Здесь $\mathcal{F}_b(t)$ — граничные данные задачи, \mathcal{B} является $3 \times (3 + n_g)$ -матрицей с постоянными коэффициентами $n_g = 2$ и $n_g = 3$ в 13- и 20-моментном случаях соответственно.

Комментарий. Ниже мы получим условие корректности этого граничного условия и как следствие — условие корректности граничного условия, предложенного в [67]. Пусть N_c^+ — число положительных постоянных $\mu_E + \tilde{c}_j > 0$ и N_a^+ — число положительных постоянных $\mu_E + \tilde{a}_j > 0$. Покажем, что число N^+ необходимых условий корректной задачи (3.0.18) равно N_c^+ — числу входящих в область \mathbb{R}^{++} характеристик старшей части линеаризованной системы. Точнее, $N^+ = N_a^+ + N_b^+$. Здесь N_a^+ — число входящих в область \mathbb{R}^{++} характеристик линеаризованной системы уравнений Эйлера, N_b^+ равно числу линейно независимых устойчивых решений типа погранслоя, локализованных в $1/B$ окрестности границы.

Выберем нулевые начальные данные и продолжим решение и краевые данные нулем для $t < 0$, что позволяет преобразованием Фурье свести смешанную задачу в четверти плоскости \mathbb{R}^{++} к граничной задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$, общее решение которой представляется в виде

$$U(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \sum_{j=1}^{N^+} G_j(B\xi) R_j(B\xi) e^{iB(\xi t + K_j(\xi)x)} d\xi, \quad t > 0, \quad (3.0.19)$$

где контур интегрирования \mathcal{B} находится выше всех особенностей подынтегрального выражения в комплексной ξ -плоскости. Здесь K_j , $j = 1, \dots, 3 + n_g$ определяются корнями $k(\omega, B) = BK(\xi)$, $\omega = B\xi$ относительно $k = k(\omega)$ дисперсионного уравнения смешанной задачи в 13- и 20-моментном случаях соответственно, \mathcal{R}_j — столбцы при $x = t = 0$ фундаментальной матрицы $\mathcal{F}(t, x, \xi)$ порядка $N^+ \times (3 + N_g)$ устойчивых плоских решений $R_j(B\xi) e^{iB(\xi t + BK_j(\xi)x)}$, $\text{Im } K_j > 0$, полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестные функции G_j однозначно определяются из граничных условий (3.0.16), (3.0.17) как решение системы $\mathcal{B}\mathcal{R}(\xi)\mathcal{G}(\xi) = \tilde{\mathcal{F}}_b(\xi)$, если выполнен аналог условия Шапиро—Лопатинского [52]

$$\det(\mathcal{B}\mathcal{R}) \neq 0, \quad \text{Im } \xi \geq c_0, \quad (3.0.20)$$

для некоторого $c_0 \geq 0$. Здесь $\tilde{\mathcal{F}}_b(\xi)$ — преобразование Фурье граничных данных. Тем самым, для смешанной задачи получим аналог теоремы Вишика—Люстерника [2] о малых сингулярных возмущениях общих эллиптических задач, дав определение условия Шапиро—Лопатинского о корректности смешанной задачи. Условие (3.0.20) мы исследуем ниже. Перейдем к доказательству утверждения о независимости числа устойчивых корней $K_j(\xi)$ от вещественного параметра $\xi \in \mathbb{R}^1$.

3.1. Полиномиальный пучок смешанной задачи

Теперь исследуем полиномиальный пучок, определяемый смешанной задачей в 13- и 20-моментном случаях. В 13-моментном случае дисперсионное уравнение смешанной задачи имеет вид

$$P_0(K(\xi), \xi) - P_2(K(\xi), \xi) - iP_1(K(\xi), \xi) = 0, \quad (3.1.1)$$

$$P_0 = \prod_{j=1}^5 (\xi + (\mu_E + \tilde{c}_j)K(\xi)), \quad P_1 = \prod_{j=1}^4 (\xi + (\mu_E + \tilde{b}_j)K(\xi)),$$

$$P_2 = \prod_{j=1}^3 (\xi + (\mu_E + \tilde{a}_j)K(\xi)).$$

Переход от дисперсионного уравнения задачи Коши к дисперсионному уравнению смешанной задачи в 20-моментном случае

$$P_0(K(\xi), \xi) - P_2(K(\xi), \xi) - i(P_1(K(\xi), \xi) - P_3(K(\xi), \xi)) = 0 \quad (3.1.2)$$

тот же, что и в 13-моментном. Как мы покажем ниже, свойства корней дисперсионных уравнений (3.1.1), (3.1.2) определяют поведение решений смешанной задачи.

Теорема 3.1.1. Пусть полиномиальный пучок (3.1.1) (соответственно, (3.1.2)) удовлетворяет условиям предложения 2.1.1 (предложения 2.1.2). Дополнительно в 13-моментном случае потребуем, чтобы

$$\mu_E \neq 0, \quad (\mu_E \pm 1) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{c}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{b}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1.3)$$

а в 20-моментном случае

$$\mu_E \neq 0, \quad (\mu_E \pm 1) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{c}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{b}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{d}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1.4)$$

$$\gamma_1 \gamma_2 \prod_{j=1,2} |\mu_E| |(\mu_E \pm \tilde{b}_j)| |(\mu_E \pm \tilde{d}_j)| - \gamma_3 |\mu_E| \prod_{k=1,2} |(\mu_E \pm \tilde{c}_j)| |(\mu_E \pm 1)| > 0. \quad (3.1.5)$$

Тогда в 13- и 20-моментном случаях для любого $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\xi \neq 0$, число $N^\pm(\xi)$ корней дисперсионного уравнения с положительной и отрицательной мнимыми частями не зависит от $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\xi \neq 0$, и равно $N_c^\pm = N_a^\pm + N_b^\pm$.

Как мы отмечали выше, N_c^\pm , N_a^\pm равны числу положительных (отрицательных) значений $\mu_E, (\mu_E \pm \tilde{c}_j)$, $j = 1, 2$, и $\mu_E, (\mu_E \pm 1)$ соответственно. N_b^\pm — число погранслойных корней с положительными (отрицательными) мнимыми частями.

Докажем теорему 3.1.1. Для этого покажем, что в 13- и 20-моментном случаях для любого вещественного $\xi > 0$ корни дисперсионного уравнения лежат в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости, т.е. N^+ корней удовлетворяют условию $\text{Im } K(\xi) > 0$ и $3 + N_g - N^+$ корней таковы, что $\text{Im } K(\xi) < 0$. Случай $\xi < 0$ исследуется аналогично. Начнем с 13-моментного случая. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1.1. Пусть полиномиальный пучок (3.1.1) удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Тогда пять корней (3.1.1) имеют следующую структуру: для пяти корней $K_j(\xi)$ в высокочастотном приближении при $|\xi| \geq \delta_1$ справедливо следующее разложение:

$$K_{h,j} = -\frac{\xi}{c_j} + i\kappa_j^h + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad \kappa_j^h = \frac{\gamma_1 \prod_{k=1}^4 (b_k - c_j)}{c_j \prod_{k \neq j} (c_k - c_j)}, \quad j = 1, \dots, 5, \quad (3.1.6)$$

$$c_1 = \mu_E + \tilde{c}_1, \quad c_2 = \mu_E + \tilde{c}_2, \quad c_3 = \mu_E, \quad c_4 = \mu_E - \tilde{c}_2, \quad c_5 = \mu_E - \tilde{c}_1,$$

$$b_1 = \mu_E + \tilde{b}_1, \quad b_2 = \mu_E + \tilde{b}_2, \quad b_3 = \mu_E - \tilde{b}_2, \quad b_4 = \mu_E - \tilde{b}_1,$$

$$a_1 = \mu_E + 1, \quad a_2 = \mu_E, \quad a_3 = \mu_E - 1.$$

В низкочастотном приближении при $|\xi| \leq \delta_2$ для трех корней имеем разложения вида

$$K_{l,j} = -\frac{\xi}{a_j} + i\kappa_j^l \xi^2 + O(|\xi|^3), \quad \kappa_j^l = \frac{\gamma_1 \prod_{k=1}^4 (b_k - a_j)}{a_j^3 \gamma_2 \prod_{k \neq j} (a_k - a_j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.1.7)$$

Для двух $K_j(\xi)$, $j = 4, 5$, так называемых погранслойных корней, в низкочастотном приближении справедливы разложения $K_j = \kappa_{b,j}^l + O(|\xi|)$, $j = 4, 5$. Здесь $\kappa_{b,j}^l$, $j = 4, 5$, являются корнями уравнения

$$(\kappa_b^l)^2 - i\alpha_1 \kappa_b^l - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = \gamma_1 \frac{\prod_{j=1}^4 b_j}{\prod_{j=1}^5 c_j}, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \frac{\prod_{j=1}^3 a_j}{\prod_{j=1}^5 c_j}. \quad (3.1.8)$$

Построение асимптотических разложений проводится прямым вычислением регулярной асимптотики. Из условия взаимного разделения корней строго гиперболической тройки полиномов следует, что $c_j \kappa_j^h > 0$, $j = 1, \dots, 5$, $a_j \kappa_j^l > 0$, $j = 1, 2, 3$. Таким образом, для больших $|\xi| \gg 1$ в верхней полуплоскости находится N_c^+ (соответственно, в нижней — N_c^-) корней. Также для малых $|\xi| \ll 1$ в верхней полуплоскости находится N_a^+ (соответственно, в нижней — N_a^-) корней. Теперь для $|\xi| \ll 1$ рассмотрим погранслойные корни, главные части которых являются решениями уравнения (3.1.8). После замены $\kappa_b^l = -iz$ получаем уравнение, которое имеет различную структуру в зависимости от чисел N_c^+ , N_b^+ , N_a^+ , определяемых отрицательными значениями c_j , b_j , a_j . Возможны следующие комбинации:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} N_c^+ & N_b^+ & N_a^+ & \text{sign } \alpha_1 & \text{sign } \alpha_2 & N_b^+ & P \\ \hline 0 & 0 & 0 & + & + & 2 & P_1(z) \\ 1 & 0 & 0 & - & - & 1 & P_2(z) \\ 1 & 1 & 0 & + & - & 1 & P_3(z) \\ 1 & 1 & 1 & + & + & 2 & P_1(z) \\ 2 & 1 & 1 & - & - & 1 & P_2(z) \\ 2 & 2 & 1 & + & - & 1 & P_3(z) \\ 3 & 2 & 2 & - & - & 1 & P_2(z) \\ 3 & 3 & 2 & + & - & 1 & P_3(-z) \\ 4 & 3 & 2 & - & + & 0 & P_4(-z) \\ 4 & 3 & 3 & - & - & 1 & P_2(-z) \\ 4 & 4 & 3 & + & - & 1 & P_3(-z) \\ 5 & 4 & 3 & - & + & 0 & P_4(-z) \end{array} \right), \quad (3.1.9)$$

$$P_1(z) = z^2 + |\alpha_1|z + |\alpha_2|, \quad P_2(z) = z^2 - |\alpha_1|z - |\alpha_2|,$$

$$P_3(z) = z^2 + |\alpha_1|z - |\alpha_2|, \quad P_4(z) = z^2 - |\alpha_1|z + |\alpha_3|,$$

N_b^+ — число корней полинома P_j с отрицательной вещественной частью.

Отсюда следует утверждение: для любого достаточно малого $|\xi| \ll 1$ число корней в верхней полуплоскости (соответственно, в нижней полуплоскости) равно $N_c^+ = N_a^+ + N_b^+$ и $N_c^- = N_a^- + N_b^-$. Таким образом, для любого вещественного $\xi > 0$, вне отрезка $\delta_2 \leq \xi \leq \delta_1$, нет вещественных и чисто мнимых корней дисперсионного уравнения, и их число в верхней и нижней полуплоскостях не зависит от ξ . Несуществование вещественных корней в 13-моментном случае доказывается просто. Если существует вещественный корень, то $(P_0 - P_2)(\xi^*, K(\xi^*)) = P_1(\xi^*, K(\xi^*)) = 0$, $\xi^* \neq 0$, для некоторого $k \in \{1, \dots, 4\}$, где $K(\xi^*) = -\xi^*/b_k$. Отсюда получаем

$$(P_0 - P_2)(\xi^*, K(\xi^*)) = \frac{(\xi^*)^3}{b_k^3} \left(\frac{(\xi^*)^2}{b_k^2} \prod_{j=1}^5 (b_k - c_j) - \prod_{j=1}^3 (b_k - a_j) \right) \neq 0,$$

так как, в силу условия взаимного разделения корней, имеем

$$\frac{(\xi^*)^2}{b_k^2} \prod_{j=1}^5 (b_k - c_j) - \prod_{j=1}^3 (b_k - a_j) > 0,$$

что противоречит уравнению $(P_0 - P_2)(\xi^*, K(\xi^*)) = 0$. Следовательно, для $\xi > 0$ траектории корней не пересекают вещественной оси. Отсюда следует, что для любого $\xi > 0$ в верхней полуплоскости находится N_c^+ корней и, соответственно, N_c^- корней находится в нижней полуплоскости.

Таким образом, для любого $\xi \neq 0$ траектории корней остаются в верхней или нижней полуплоскостях комплексной плоскости. Более того, для больших значений $\xi \gg 1$ траектории корней $K_j(\xi)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости находятся одна над другой по возрастанию номера $j = 1, \dots, 5$, т.е. $\text{Im } K_{j+1} > \text{Im } K_j$, $j = 1, \dots, 4$, и движутся к мнимой оси с убывающими (по возрастанию номера j) скоростями проекций на вещественную ось, оставаясь в верхней полуплоскости комплексной плоскости. Теорема 3.1.1 в 13-моментном случае доказана. \square

Комментарий. На самом деле, можно ввести понятие непрерывной ветви корня. Первой ветвью (первым корнем K_1) назовем огибающую снизу всех корней. Затем рассмотрим замыкание области выше этой огибающей и назовем второй ветвью (вторым корнем K_2) огибающую снизу всех корней в этом множестве и т.д. Тогда ветви (корни) (3.1.1) входят в окрестность малых значений $\xi > 0$, $\xi \ll 1$, по кривым, прилегающим в главном (до порядка ξ^3) к параболам

$$\text{Im } K_j = \kappa_j^l (\text{Re } K_j)^2, \quad \kappa_3^l > \kappa_2^l > \kappa_1^l > 0, \quad \kappa_j^l = -\frac{1}{a_j^2} \frac{\prod_{j=1}^k (b_k - a_j)}{\prod_{k \neq j} (a_k - a_j)}.$$

При $\xi = 0$ имеем трехкратный корень $K_j(0) = 0$, $j = 1, 2, 3$, и два простых погранслоиных корня $K_j(0) = \kappa_{b,j}^i$, $j = 4, 5$. Возникает проблема описания корней в промежуточных состояниях, когда $\delta_2 \leq |\xi| \ll \delta_1$, что чрезвычайно важно в решении задачи о иерархии волн [54] в системах моментов неравновесной термодинамики на больших временах и при $B \rightarrow \infty$. Гипотеза состоит в том, что в промежуточных состояниях вещественные части корней последовательно находятся в окрестностях корней промежуточных гиперболических операторов цепочки, определяемой дисперсионным уравнением. Насколько это верно, покажут дальнейшие исследования.

В 20-моментном случае, как и выше, получим следующее утверждение.

Лемма 3.1.2. Пусть полиномиальный пучок (3.1.2) удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1 и

$$\mu_E \neq 0, \quad (\mu_E \pm 1) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{c}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{b}_j) \neq 0, \quad (\mu_E \pm \tilde{d}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.1.10)$$

$$\gamma_1 \gamma_2 \prod_{j=1,2} |\mu_E| |(\mu_E \pm \tilde{b}_j)| |(\mu_E \pm \tilde{d}_j)| - \gamma_3 |\mu_E| \prod_{k=1,2} |(\mu_E \pm \tilde{c}_j)| |(\mu_E \pm 1)| > 0.$$

Тогда шесть $K_j(\xi)$ корней уравнения (3.1.2) имеют высокочастотное и низкочастотное асимптотические приближения вида:

для четырех корней $K_j(\xi)$ в высокочастотном приближении $|\xi| \gg 1$ справедливо следующее разложение:

$$K_j(\xi) = -\frac{\xi}{c_j} + i \frac{\gamma_1 \prod_{k=1}^5 (b_k - c_j)}{c_j \prod_{k \neq j} (c_k - c_j)} + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad (3.1.11)$$

в низкочастотном приближении $|\xi| \ll 1$ имеем

$$K_j(\xi) = -\frac{\xi}{a_j} + i \frac{\gamma_2 \prod_{k=1}^4 (d_k - a_j)}{a_j^3 \gamma_3 \prod_{k \neq j} (a_k - a_j)} \xi^2 + O(|\xi|^3), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.1.12)$$

В этом приближении есть еще три погранслойных корня с асимптотическими разложениями вида $K_j(\xi) = \kappa_{b,j}^l + O(|\xi|)$, $j = 4, 5, 6$, главные части которых определяются решениями кубического уравнения

$$\prod_{j=1}^6 c_j (\kappa_b^l)^3 - i\gamma_1 \prod_{j=1}^5 b_j (\kappa_b^l)^2 - \gamma_2 \prod_{j=1}^4 d_j \kappa_b^l + i\gamma_3 \prod_{j=1}^2 a_j = 0. \quad (3.1.13)$$

Доказательство этой леммы проводится прямым вычислением регулярных асимптотик. Теперь исследуем уравнение для погранслойных корней (3.1.13). Положим $\kappa_b^l = -iz$ и приведем классификацию структуры этого уравнения в зависимости от чисел $N_c^-, N_b^-, N_d^-, N_a^-$ отрицательных значений c_j, b_j, d_j, a_j :

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} N_c^- & N_b^- & N_d^- & N_a^- & \text{sign}(\alpha_1) & \text{sign}(\alpha_2) & \text{sign}(\alpha_3) & N_b^+ & P \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & + & 3 & P_1(z) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 2 & P_2(z) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & + & - & - & 2 & P_3(z) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & + & + & - & 2 & P_4(z) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & + & + & + & 3 & P_1(z) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 2 & P_2(z) \\ 2 & 2 & 1 & 1 & + & - & - & 2 & P_3(z) \\ 2 & 2 & 2 & 1 & + & + & - & 2 & P_4(z) \\ 4 & 3 & 2 & 2 & - & + & + & 1 & P_4(-z) \\ 4 & 3 & 3 & 2 & - & - & + & 1 & P_3(-z) \\ 4 & 4 & 3 & 2 & + & - & + & 1 & P_2(-z) \\ 5 & 4 & 3 & 2 & - & + & - & 0 & P_1(-z) \\ 5 & 4 & 3 & 3 & - & + & + & 1 & P_4(-z) \\ 5 & 4 & 4 & 3 & + & - & + & 1 & P_3(-z) \\ 5 & 5 & 4 & 3 & + & - & + & 1 & P_2(-z) \\ 6 & 5 & 4 & 3 & - & + & - & 0 & P_1(-z) \end{array} \right), \quad (3.1.14)$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 \frac{\prod_{k=1}^5 b_k}{\prod_{j=1}^6 c_j}, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \frac{\prod_{k=1}^4 d_k}{\prod_{j=1}^5 c_j}, \quad \alpha_3 = \gamma_3 \frac{\prod_{k=1}^3 a_k}{\prod_{j=1}^4 c_j},$$

$$P_1(z) = z^3 + |\alpha_1|z^2 + |\alpha_2|z + |\alpha_3|, \quad P_2(z) = z^3 - |\alpha_1|z^2 - |\alpha_2|z - |\alpha_3|,$$

$$P_3(z) = z^3 + |\alpha_1|z^2 - |\alpha_2|z - |\alpha_3|, \quad P_4(z) = z^3 + |\alpha_1|z^2 + |\alpha_2|z - |\alpha_3|,$$

N_b^+ — число корней полинома P_j с отрицательной вещественной частью.

Лемма 3.1.3. Пусть $|\alpha_1\alpha_2| - |\alpha_3| > 0$. Тогда все корни полинома P_1 имеют отрицательные вещественные части, полиномы P_j , $j = 2, 3, 4$, имеют один положительный корень и два корня с отрицательными вещественными частями.

Утверждение о свойствах полинома P_1 является следствием правила Рауса—Гурвица. Для полинома P_2 имеем $P_3(0) = -|\alpha_3| < 0$, $P_3(-|\alpha_1|) = |\alpha_1\alpha_2| - |\alpha_3| > 0$, откуда следует существование одного положительного корня и двух отрицательных. Для полиномов P_2, P_4 из условия $P_j(0) = -|\alpha_3| < 0$ также следует существование положительного корня $\kappa > 0$. Тогда эти полиномы можно представить в виде

$$P_4(z) = (z - \kappa) \left(y^2 + (3\kappa + |\alpha_1|)y + P'_j(\kappa) \right), \quad y = z - \kappa,$$

$$P_2(z) = (z - \kappa) \left(y^2 + (3\kappa - |\alpha_1|)y + P'_j(\kappa) \right),$$

где $P'_j(\kappa) > 0$, $j = 1, 2$. Так как $3\kappa + |\alpha_1| > 0$, то в первом случае вещественные части двух других корней отрицательны. Во втором случае имеем $P_2(|\alpha_1|) = -|\alpha_2\alpha_1| - |\alpha_3| < 0$, т.е. $\kappa > |\alpha_1|$,

следовательно, $3\kappa - |\alpha_1| > 0$, откуда снова получаем, что вещественные части двух других корней полинома P_2 отрицательны. Лемма доказана. \square

Таким образом, как и в 13-моментном случае, для значений $|\xi| \geq \delta_1^{-1}$, $|\xi| \leq \delta_1$, δ_1 — достаточно мало, N^+ корней уравнения (3.1.2) для $n_1 > 0$ лежат в верхней и, соответственно, $N^- = 6 - N^+$ корней в нижней полуплоскостях комплексной плоскости (то же справедливо для $n_1 < 0$). Число их не зависит от n_1 и равно N_c^+ и N_c^- соответственно. Завершение доказательства этого предложения проводится аналогично 13-моментному случаю. Как мы отмечали выше, эти результаты позволяют, используя стандартную процедуру построения общего решения линейаризованной смешанной задачи, построить аналог условия Шапиро—Лопатинского для эллиптических краевых задач [2].

3.2. УСЛОВИЕ ШАПИРО—ЛОПАТИНСКОГО

Исследуем наиболее интересный случай линейаризации одномерной 13-моментной системы при $N_c^+ = 4 > N_a^+ = 2$, т.е. случай, когда требуется на два граничных условия больше, чем для предельной линейаризованной системы уравнений Эйлера. Пусть $\mathcal{R}^v, \mathcal{R}^\varrho, \mathcal{R}^U, \mathcal{R}^{p(11)}, \mathcal{R}^{q_1}$ — строки фундаментальной матрицы \mathcal{F} устойчивых решений при $t = x = 0$, определяемые координатами величин $v, \varrho, U, p(11), q_1$ соответственно. В 13-моментном случае, когда $N_c^+ = 4$, рассмотрим матрицу \mathcal{R}^D , строками которой являются $\mathcal{R}^v, \mathcal{R}^\varrho, \mathcal{R}^U, \mathcal{R}^{p(11)}$, и матрицу \mathcal{R}^θ , строки которой — $\mathcal{R}^v, \mathcal{R}^\varrho, \mathcal{R}^U, \mathcal{R}^{q_1}$.

Лемма 3.2.1. *В 1-D случае, 13-моментной системе ($N^+ = 4$) для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\xi \neq 0$, исключая случай кратности устойчивых корней, $\det \mathcal{R}^\theta(\xi) \neq 0$.*

Как следствие этой леммы можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1 (о числе устойчивых корней 13-моментного пучка). Тогда для достаточно большого α^θ , т.е. достаточно малого коэффициента согласования $\theta \ll 1$, краевая задача (3.0.17) корректна (справедливо условие Шапиро—Лопатинского (3.0.20)).*

Определение 3.2.1. Корректную смешанную задачу назовем равновесной, если в нормах корректности задачи неравновесные переменные стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$.

Лемма 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1. Тогда для единственного решения смешанной задачи справедлива следующая оценка:*

$$\begin{aligned} & B \left(\|p(11), C(\mathbb{R}^{++})\| + \|q_1, C(\mathbb{R}^{++})\| \right) \leq \\ & \leq C_0 \left(\|v_b, H^1(\mathbb{R}^{++})\| + \|\varrho_b, H^1(\mathbb{R}^{++})\| + \|T_w, H^1(\mathbb{R}^{++})\| \right), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

т.е. смешанная задача (3.0.17) является равновесной. При $B \rightarrow \infty$ для любых $x > 0$, $t \geq 0$, базовые компоненты решения стремятся к соответствующим компонентам решения предельной системы уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} v(x, t, B) & \rightarrow v_{\lim}(x, t) = v_b \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \frac{\mu_E}{\left(1 - \mu_E^2\right) \left(\frac{3}{2}\mu_E\alpha^\theta - 1\right)} \left(\frac{k}{m}T_w - \frac{2}{5}\varrho_b \right) \left(t - \frac{x}{a_1} \right), \\ \varrho(x, t, B) & \rightarrow \varrho_{\lim}(x, t) = v_{\lim}(x, t), \\ T(x, t, B) & \rightarrow T_{\lim}(x, t) = v_b \left(t - \frac{x}{a_2} \right) + \varrho_b \left(t - \frac{x}{a_2} \right) - \\ & - \frac{1 + \mu_E}{\left(1 - \mu_E^2\right) \left(\frac{3}{2}\mu_E\alpha^\theta - 1\right)} \left(\frac{k}{m}T_w - \frac{2}{5}\varrho_b \right) \left(t - \frac{x}{a_2} \right). \end{aligned}$$

Результаты леммы 3.2.2 следуют из длинноволнового приближения матрицы \mathcal{R}^θ и оценок решений смешанных задач, полученных методом перевала [28].

3.3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПУЧКИ

Приведем пучки гиперболических полиномов задачи Коши (2.0.4)–(2.0.11) в 2-D (решение зависит только от двух пространственных переменных (x_1, x_2)) и в 3-D случаях.

В 2-D случае имеем следующие гиперболические пучки:

1) Дисперсионное уравнение задачи Коши для 14-моментной системы в 2-D случае является цепочкой из семи нестрого гиперболических полиномов вида:

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^{10} \tau^4 \left[\tau^6 - \frac{123}{25} \tau^4 + \frac{161}{25} \tau^2 (1 - 0.306086956\alpha\beta) - \frac{63}{25} (1 - 0.64\alpha\beta) \right], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^9 \tau^3 \left[5\tau^6 - \frac{304}{15} \tau^4 + \frac{2151}{125} \tau^2 (1 - 0.257154057\alpha\beta) - \frac{706}{125} \left(1 - \frac{469}{3} \alpha\beta \right) \right], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{31}{8} \tau^6 - \frac{7561}{225} \tau^4 + \frac{1861}{75} \tau^2 \left(1 - \frac{31552}{139975} \alpha\beta \right) - \frac{547}{125} (1 - 0.368555758\alpha\beta) \right], \\
P_3(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{305}{27} \tau^6 - \frac{1286}{45} \tau^4 + \frac{16301}{1125} \tau^2 \left(1 - \frac{2144}{16301} \alpha\beta \right) - \frac{176}{125} \left(1 - \frac{2}{11} \alpha\beta \right) \right], \\
P_4(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{62}{9} \tau^6 - \frac{8846}{675} \tau^4 + \frac{184}{45} \tau^2 \left(1 - \frac{8}{115} \alpha\beta \right) - \frac{4}{25} \right], \\
P_5(\omega, k) &= \frac{20}{9} |k|^5 \tau \left(\tau^4 - \frac{104}{25} \tau^2 + \frac{1}{5} \right), \quad P_6(\omega, k) = \frac{8}{27} |k| 4\tau^2 (\tau^2 - 1),
\end{aligned}$$

где $\omega = |k|\tau$, $\alpha = k_1^2$, $\beta = k_2^2$. Нетрудно проверить, что для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$, этот гиперболический пучок длины $N = 5$ является нестрого гиперболическим.

2) дисперсионное уравнение задачи Коши для 20-моментной системы в 2-D случае является цепочкой из 10 нестрого гиперболических полиномов вида:

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^{13} \tau^7 \left[\tau^6 - \frac{103}{25} \tau^4 + \frac{21}{5} \tau^2 (1 - 0.347428571\alpha\beta) - \frac{27}{25} (1 - 0.64\alpha\beta) \right], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^{12} \tau^6 \left[\frac{31}{3} \tau^6 - \frac{2948}{75} \tau^4 + \frac{4531}{125} \tau^2 (1 - 0.33122931\alpha\beta) - \frac{1074}{125} (1 - 0.60782123\alpha\beta) \right], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^{11} \tau^5 \left[\frac{845}{18} \tau^6 - \frac{8151}{50} \tau^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{100127}{750} \tau^2 (1 - 0.310293927\alpha\beta) - \frac{7131}{250} (1 - 0.56676483\alpha\beta) \right], \\
P_3(\omega, k) &= |k|^{10} \tau^4 \left[123\tau^6 - \frac{34627}{90} \tau^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{102476}{375} \tau^2 (1 - 0.282977478\alpha\beta) - \frac{12741}{250} (1 - 0.513115141\alpha\beta) \right], \\
P_4(\omega, k) &= |k|^9 \tau^3 \left[\frac{9827}{48} \tau^6 - \frac{81743}{144} \tau^4 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 339.025(6)\tau^2 \left(1 - 0.617881438\alpha\beta \right) - 52.5965 \left(1 - 0.441105501\alpha\beta \right) \Big], \\
P_5(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{32311}{144} \tau^6 - \frac{973589}{1800} \tau^4 + \right. \\
& \left. + 260.3735\tau^2 \left(1 - 0.100183386\alpha\beta \right) - \frac{3888}{125} \left(1 - 0.341(6)\alpha\beta \right) \right], \\
P_6(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{7769}{48} \tau^6 - \frac{397427}{1200} \tau^4 + \right. \\
& \left. + 120.7305\tau^2 \left(1 - 0.016499558\alpha\beta \right) - 9.6795 \left(1 - 0.20083682\alpha\beta \right) \right], \\
P_7(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{1185}{16} \tau^6 - 124.83\tau^4 + \frac{495}{16} \left(1 - 0.069818181\alpha\beta \right) \tau^2 - 1.215 \right], \\
P_8(\omega, k) &= |k|^5 \tau \left(\frac{39}{2} \tau^4 - \frac{1041}{40} \tau^2 + \frac{27}{8} \right), \quad P_9(\omega, k) = \frac{9}{4} |k| 4\tau^2 (\tau^2 - 1).
\end{aligned}$$

Для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1$, этот гиперболический пучок длины $N = 10$ является нестрого гиперболическим.

3) Дисперсионное уравнение задачи Коши для 21-моментной системы в 2-D случае является цепочкой из 11 нестрого гиперболических полиномов вида:

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^{14} \tau^8 \left[\tau^6 - \frac{123}{25} \tau^4 + \frac{161}{25} \tau^2 \left(1 - 0.306086957\alpha\beta \right) - \frac{63}{25} \left(1 - 0.64\alpha\beta \right) \right], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^{13} \tau^7 \left[11\tau^6 - \frac{3734}{75} \tau^4 + \right. \\
& \left. + \frac{7381}{125} \tau^2 \left(1 - 0.289174909\alpha\beta \right) - \frac{2596}{125} \left(1 - 0.608936825\alpha\beta \right) \right], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^{12} \tau^6 \left[\frac{323}{6} \tau^6 - \frac{99731}{450} \tau^4 + \right. \\
& \left. + \frac{175651}{750} \tau^2 \left(1 - 0.268987939\alpha\beta \right) - \frac{18071}{250} \left(1 - 0.570018262\alpha\beta \right) \right], \\
P_3(\omega, k) &= |k|^{11} \tau^5 \left[\frac{4166}{27} \tau^6 - \frac{256601}{450} \tau^4 + \right. \\
& \left. + \frac{118309}{225} \tau^2 \left(1 - 0.244863874\alpha\beta \right) - \frac{34483}{250} \left(1 - 0.520511557\alpha\beta \right) \right], \\
P_4(\omega, k) &= |k|^{10} \tau^4 \left[\frac{13763}{48} \tau^6 - \frac{2023357}{2160} \tau^4 + \right. \\
& \left. + \frac{105713}{144} \tau^2 \left(1 - 0.216138413\alpha\beta \right) - \frac{313379}{2000} \left(1 - 0.456719819\alpha\beta \right) \right], \\
P_5(\omega, k) &= |k|^9 \tau^3 \left[\frac{51965}{144} \tau^6 - \frac{138093}{1350} \tau^4 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2371987}{3600} \tau^2 \left(1 - 0.18231928\alpha\beta\right) - \frac{107637}{3600} \left(1 - 0.374057248\alpha\beta\right) \Big], \\
P_6(\omega, k) &= |k|^8 \tau^2 \left[\frac{134543}{432} \tau^6 - \frac{8117579}{10800} \tau^4 + \right. \\
& \left. + \frac{2274577}{6000} \tau^2 \left(1 - 0.143406357\alpha\beta\right) - \frac{86643}{2000} \left(1 - 0.26824556\alpha\beta\right) \right], \\
P_7(\omega, k) &= |k|^7 \tau \left[\frac{26203}{144} \tau^6 - \frac{656951}{1800} \tau^4 + \right. \\
& \left. + \frac{269109}{2000} \tau^2 \left(1 - 0.10024191\alpha\beta\right) - \frac{1161}{125} \left(1 - 0.139534884\alpha\beta\right) \right], \\
P_8(\omega, k) &= |k|^6 \left[\frac{551}{8} \tau^6 - \frac{22389}{200} \tau^4 + 26.7(1 - 0.053932585\alpha\beta)\tau^2 - 0.81 \right], \\
P_9(\omega, k) &= |k|^5 \tau \left(\frac{61}{4} \tau^4 - \frac{98}{5} \tau^2 + \frac{9}{2} \right), \quad P_{10}(\omega, k) = \frac{3}{2} |k|^4 \tau^2 (\tau^2 - 1).
\end{aligned}$$

Для любых $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$, этот гиперболический пучок длины $N = 11$ является нестрого гиперболическим.

В 3-D случае дисперсионное уравнение задачи Коши для 13-моментной системы является цепочкой из 9 нестрого гиперболических полиномов вида:

$$\begin{aligned}
P_0(\omega, k) &= |k|^{13} \tau^5 \left[\tau^8 - \frac{128}{25} \tau^6 + \frac{208}{25} \tau^4 \left(1 - 0.175384616(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma)\right) - \right. \\
& - \frac{132}{25} \tau^2 \left(1 - 0.407272728(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 1.086060607\alpha\beta\gamma\right) + \\
& + \frac{27}{25} \left(1 - 0.64(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \\
& \left. - 1.28(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - 2.8928(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \Big], \\
P_1(\omega, k) &= |k|^{12} \tau^4 \left[7\tau^8 - \frac{2348}{75} \tau^6 + \frac{15976}{375} \tau^4 \left(1 - 0.167651478(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma)\right) - \right. \\
& - \frac{548}{25} \tau^2 \left(1 - 0.374656935(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 1.019328468\alpha\beta\gamma\right) + \\
& + \frac{453}{125} \left(1 - 0.56370861(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \\
& - 1.127417219(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - \\
& \left. - 2.58458279(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \Big], \\
P_2(\omega, k) &= |k|^{11} \tau^3 \left[\frac{64}{3} \tau^8 - \frac{18518}{225} \tau^6 + \frac{34397}{375} \tau^4 \left(1 - 0.155827544(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma)\right) - \right. \\
& - \frac{69536}{1875} \tau^2 \left(1 - 0.32945237(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.917119191\alpha\beta\gamma\right) + \\
& + \frac{2913}{625} \left(1 - 0.464675593(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0.929351185(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - \\
& - 2.1730990(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \Big], \\
P_3(\omega, k) = & |k|^{10}\tau^2 \left[\frac{998}{27}\tau^8 - \frac{27272}{225}\tau^6 + \frac{24197}{225}\tau^4 \left(1 - 0.138569245(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) \right) - \right. \\
& - \frac{61412}{1875}\tau^2 \left(1 - 0.269497819(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.770066433\alpha\beta\gamma \right) + \\
& + \frac{1791}{625} \left(1 - 0.337688443(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \\
& - 0.675376885(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - \\
& \left. \left. - 1.62412061(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \right], \\
P_4(\omega, k) = & |k|^9\tau \left[\frac{1075}{27}\tau^8 - \frac{73604}{675}\tau^6 + \frac{83389}{1125}\tau^4 \left(1 - 0.11443236(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) \right) - \right. \\
& - \frac{9972}{625}\tau^2 \left(1 - 0.194143603(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)) - \right. \\
& - 0.669875652\alpha\beta\gamma \Big) + \frac{528}{625} \left(1 - 0.181818182(\alpha^3(\beta + \gamma) + \beta^3(\alpha + \gamma) + \gamma^3(\alpha + \beta)) - \right. \\
& - 0.363636364(\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) - \\
& \left. \left. - 0.90909091(\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) \right) \right], \\
P_5(\omega, k) = & |k|^8 \left[\frac{737}{27}\tau^8 - \frac{41252}{675}\tau^6 + \frac{11269}{375}\tau^4 \left(1 - 0.08234981(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) \right) - \right. \\
& - \frac{1528}{375}\tau^2 \left(1 - 0.104712042(\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \right. \\
& \left. + \gamma^2(\alpha + \beta)) - 0.314136126\alpha\beta\gamma \right) + \frac{12}{125} \Big], \\
P_6(\omega, k) = & |k|^7\tau \left[\tau^6 - \frac{518}{25}\tau^4 + \frac{1496}{225} \left(1 - \frac{8}{197}(\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) \right) \tau^2 - \frac{32}{75} \right], \\
P_7(\omega, k) = & |k|^6\tau^2 \left(\frac{76}{27}\tau^4 - \frac{104}{27}\tau^2 + \frac{28}{45} \right), \quad P_8(\omega, k) = \frac{8}{27}|k|^5\tau^3(\tau^2 - 1),
\end{aligned}$$

где $\omega = |k|\tau$, $\alpha = k_1^2$, $\beta = k_2^2$, $\gamma = k_3^2$. Нетрудно проверить, что для любых $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, этот гиперболический пучок длины $N = 8$ является нестрогим гиперболическим.

ЧАСТЬ 4

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛЯХ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Феноменологический подход к построению моделей механики сплошных сред сталкивается с двумя трудностями. Первая связана с необходимостью классификации получаемых уравнений с точки зрения их гиперболичности. В то же время из кинетической теории, например, для системы уравнений Эйлера гиперболичность получается почти автоматически. Эта система получена как первое приближение уравнения Больцмана в методе Чэпмена—Энскога в дважды дивергентной форме. Вторая трудность связана с требованием корректности моделей механики сплошных сред. Постулат Адамара гласит, что дифференциальные уравнения, описывающие развитие физических процессов, должны приводить к корректно поставленным задачам.

Посмотрим, какую информацию о нелинейных уравнениях несет их свойство удовлетворять равномерному условию гиперболических пучков для линеаризованных уравнений в окрестности состояний равновесия.

4.1. ЭНТРОПИЯ И СЛАБЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Рассмотрим пример 2×2 системы законов сохранения с релаксацией в 1-D случае:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x(f_1(u, \sigma)) &= 0, \\ \partial_t \sigma + \partial_x(f_2(u, \sigma)) + \frac{1}{\varepsilon} r(u)\sigma &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

которая является аппроксимацией уравнения Хопфа

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad f(u) = f_1(u, 0).$$

Эта система строго гиперболична, если различны и вещественны характеристические скорости

$$\Lambda^\pm = \frac{1}{2} \left(\partial_u f_1 + \partial_\sigma f_2 \pm \sqrt{(\partial_u f_1 - \partial_\sigma f_2)^2 + 4\partial_\sigma f_1 \partial_u f_2} \right) \quad (4.1.2)$$

для любых $(u, \sigma) \in \mathbf{O}$ из открытой выпуклой области в \mathbb{R}^2 . Подчеркнем: *выпуклого* множества. Для простоты пусть $\mathbf{O} = o_u \times o_\sigma$, $o_u, o_\sigma \subset \mathbb{R}^1$. Для многих физических задач \mathbf{O} генерируется областью инвариантности. Равновесные состояния определяются условием

$$\Gamma_{\text{eq}} = \{(u, 0), u \in o_u\} \subset \mathbf{O}, \quad o_u \subset \mathbb{R}^1,$$

равенства нулю обобщенной зависимой переменной $\sigma = 0$.

Условие 4.1.1. Потребуем выполнения следующих соотношений:

а) условия диссипации

$$r(u) > 0, \quad u \in o_u; \quad (4.1.3)$$

б) условия согласования уравнений системы (4.1.1)

$$(\partial_u f_2 \partial_\sigma f_1)|_{\Gamma_{\text{eq}}} > 0. \quad (4.1.4)$$

Тогда система (4.1.1) является релаксационным гиперболическим расширением закона сохранения

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad (4.1.5)$$

(аналог системы Эйлера) с характеристической скоростью

$$\lambda(u) = f'(u) = \partial_u f_1(u, 0). \quad (4.1.6)$$

В силу условия согласования (4.1.4) дисперсионное уравнение системы (4.1.1), линеаризованной в окрестности любого состояния равновесия $(u_e, 0)$, $u_e \in o_u$, определяет устойчивые гиперболические пучки, условие стабильности которых имеет вид:

$$\Lambda^-(u) < \lambda(u) < \Lambda^+(u), \quad u \in o_u. \quad (4.1.7)$$

Заметим, что условие (4.1.7) совпадает с условием устойчивой иерархии волн в (4.1.1) или условием устойчивого предельного перехода из системы (4.1.1) к уравнению (4.1.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определение 4.1.1. Пара дважды дифференцируемых функций $\Phi(u, \sigma)$, $\Psi(u, \sigma)$ называется энтропийной парой системы (4.1.1), если

(i) Φ — решение следующего энтропийного уравнения

$$\partial_u f_2 \partial_\sigma^2 \Phi - (\partial_\sigma f_2 - \partial_u f_1) \partial_u \partial_\sigma \Phi - \partial_\sigma f_1 \partial_u^2 \Phi = 0 \quad (4.1.8)$$

в некоторой окрестности $(u, \sigma)^T \in \mathbf{O}$ состояний равновесия G_{eq} ;

(ii) $\partial_\sigma \Phi r(u) \sigma \geq 0 \quad \forall (u, \sigma) \in \mathbf{O}$;

(iii) для $(u, \sigma)^T \in \mathbf{O}$ следующее эквивалентно:

a) $r(u) \sigma = 0$,

b) $\partial_\sigma \Phi(u, \sigma) r(u) \sigma = 0$;

(iv) Φ удовлетворяет следующим условиям строгой выпуклости для $(u, \sigma)^T \in \mathbf{O}$,

$$\partial_\sigma^2 \Phi > 0, \quad \partial_u^2 \Phi \partial_\sigma^2 \Phi - (\partial_u \partial_\sigma \Phi)^2 > 0. \quad (4.1.9)$$

В дальнейшем энтропией $\Phi(u, \sigma)$ будем называть любую дважды дифференцируемую выпуклую функцию, для которой существует энтропийная пара. Из этих условий следует, что на множестве состояний равновесия

$$\partial_\sigma \Phi(u, 0) = 0, \quad u \in o_u. \quad (4.1.10)$$

В самом деле для любого фиксированного $u \in o_u$ из условий (4.1.10) и (iv) следует, что функция $\sigma \rightarrow \partial_\sigma \Phi(u, \sigma)$ имеет простой нуль при $\sigma = 0$ и не более. То же, в силу (4.1.3), справедливо для функции $\sigma \rightarrow r(u) \sigma$. Обе эти функции имеют локальное возрастание в нуле, следовательно, их произведение неотрицательно и $\sigma = 0$ есть нуль одновременно для $r\sigma$ и произведения $\partial_\sigma \Phi r\sigma$. Отсюда следует эквивалентность (ii), (iii).

Далее, условие (4.1.8) является следствием определения энтропийной пары, согласно которому, в силу системы (4.1.1), имеем

$$\partial_t \Phi + \partial_x \Psi + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\sigma \Phi r(u) \sigma = 0,$$

т.е.

$$\partial_u \Psi = \partial_u \Phi \partial_u f_1 + \partial_\sigma \Phi \partial_u f_2, \quad \partial_\sigma \Psi = \partial_u \Phi \partial_\sigma f_1 + \partial_\sigma \Phi \partial_\sigma f_2.$$

Тогда (4.1.8) следует из равенства

$$\partial_\sigma \left(\partial_u \Phi \partial_u f_1 + \partial_\sigma \Phi \partial_u f_2 \right) = \partial_u \left(\partial_u \Phi \partial_\sigma f_1 + \partial_\sigma \Phi \partial_\sigma f_2 \right). \quad (4.1.11)$$

Теперь докажем существование для любой выпуклой $\phi(u)$ функции $\Phi(u, \sigma)$, удовлетворяющей (4.1.9), (4.1.8), (4.1.10), такой, что

$$\Phi(u, 0) = \phi(u), \quad \Psi(u, 0) = \psi(u) \quad u \in o_u.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 4.1.1 (энтропийная пара). Пусть справедливо равномерное условие гиперболической пары для системы (4.1.1), т.е. условие (4.1.6). Тогда для любой строго выпуклой энтропийной пары $\psi(u)$, $\phi(u)$ для предельного закона сохранения (4.1.3) в некоторой окрестности \mathbf{O} множества равновесных состояний существует ее продолжение — строго выпуклая энтропийная пара $\Psi(u, \sigma)$, $\Phi(u, \sigma)$ для системы (4.1.1) такая, что на множестве состояний равновесия Γ_{eq}

$$\phi(u) = \Phi(u, 0), \quad \psi(u) = \Psi(u, 0). \quad (4.1.12)$$

Уравнение (4.1.3) — скалярный закон сохранения, для которого любая выпуклая функция $\phi(u)$ является энтропией.

Доказательство. Если Φ — энтропия, то она должна быть решением гиперболического уравнения (4.1.8). Условие гиперболичности (4.1.8) является следствием условия гиперболичности (4.1.3) системы (4.1.1). Также из (4.1.3) следует условие нехарактеристичности $\partial_u f_2|_{G_{\text{eq}}} \neq$

0 поверхности равновесных состояний G_{eq} . Следовательно, мы можем рассмотреть нехарактеристическую задачу Коши

$$\Phi|_{G_{\text{eq}}} = \phi, \quad \partial_\sigma \Phi|_{G_{\text{eq}}} = 0 \quad (4.1.13)$$

для гиперболического уравнения (4.1.8). Локальная теорема существования гарантирует, что в некоторой окрестности \mathbf{O} множества G_{eq} существует решение задачи Коши (4.1.8), (4.1.13). Теперь покажем, что это решение строго выпукло, если строго выпукла функция ϕ .

Условие устойчивости (4.1.10) гиперболической пары можно переписать в виде

$$(\Lambda^+ - \lambda(u))(\lambda(u) - \Lambda^-)|_{G_{\text{eq}}} = (\partial_\sigma f_1 \partial_u f_2)|_{G_{\text{eq}}} = \partial_\sigma f_1(u, 0) \partial_u f_2(u, 0) > 0, \quad u \in o_u. \quad (4.1.14)$$

Дифференцируя данные Коши вдоль G_{eq} , получим соотношения

$$\partial_u^2 \Phi(u, 0) = -\phi''(u), \quad \partial_u \partial_\sigma \Phi(u, 0) = 0. \quad (4.1.15)$$

Отсюда и из уравнения (4.1.8) получаем, что на G_{eq}

$$\partial_u f_2 \partial_\sigma^2 \Phi(u, 0) = \partial_\sigma f_1 \partial_u^2 \Phi(u, 0).$$

Тогда (4.1.14) можно переписать в виде

$$(\Lambda^+(u) - \lambda(u))(\lambda(u) - \Lambda^-(u))|_{G_{\text{eq}}} \partial_\sigma^2 \Phi|_{G_{\text{eq}}} = (\partial_\sigma f_1)^2 \partial_u^2 \Phi(u, 0) = (\partial_\sigma f_1)^2 \phi''(u, 0).$$

Отсюда, в силу строгой выпуклости начальной функции ϕ , получаем первое условие строгой выпуклости Φ на G_{eq}

$$\phi'' > 0 \implies \partial_\sigma^2 \Phi|_{G_{\text{eq}}} > 0. \quad (4.1.16)$$

Второе условие строгой выпуклости функции Φ на G_{eq}

$$\partial_\sigma^2 \Phi(u, 0) \partial_u^2 \Phi(u, 0) - (\partial_\sigma \partial_u \Phi(u, 0))^2 > 0$$

является следствием (4.1.15), (4.1.16). Теорема доказана. \square

4.2. ЛОКАЛЬНЫЙ РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ПРЕДЕЛ

Теперь рассмотрим последовательность $U^\varepsilon = (u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon) \in \mathbf{B}_\gamma$, где $\mathbf{B}_\gamma \subset \mathbf{O}$ — ограниченное выпуклое открытое множество, состоящую из решений системы законов сохранения с жестким релаксационным членом

$$\partial_t U^\varepsilon + \partial_x F(U^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ R(U^\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (4.2.1)$$

$$U^\varepsilon|_{t=0} = U_\varepsilon^0,$$

$$F(U) = (f_1(u, \sigma), f_2(u, \sigma))^T, \quad R(U) = (0, r(u)\sigma)^T,$$

удовлетворяющих энтропийному условию: для любой выпуклой энтропийной пары (Φ, Ψ) на \mathbf{B}_γ

$$\partial_t \Phi(U^\varepsilon) + \partial_x \Psi(U^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\sigma \Phi(U^\varepsilon) R(U^\varepsilon) \leq 0, \quad (4.2.2)$$

для двух выпуклых энтропийных пар (Φ_i, Ψ_i) на \mathbf{B}_γ . Можно предположить, в силу теоремы 4.1.1, существование двух выпуклых и диссипативных энтропийных пар (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$, на \mathbf{B}_γ таких, что

$$\phi_2(u) - \phi_1(u) = \mathbf{C}f(u), \quad (4.2.3)$$

где $\phi_i(u) = \Phi_i(u, 0)$, $f(u) = f_1(u, 0)$, и

$$\mathbf{C} < \frac{\sup_{(u, \sigma) \in \mathbf{B}_\gamma} f''(u)}{\inf_{(u, \sigma) \in \mathbf{B}_\gamma} \phi_1''(u)}.$$

Действительно, сначала выберем любую выпуклую функцию $\phi_1(u)$ как данные Коши в задаче Коши для уравнения (4.1.8), чтобы получить выпуклую диссипативную энтропийную пару (Φ_1, Ψ_1) на \mathbf{B}_{γ_1} . Затем возьмем выпуклую функцию $\phi_2 = \mathbf{C}f(u) + \phi_1$ как данные Коши в задаче Коши для уравнения (4.1.8), чтобы получить другую выпуклую диссипативную энтропийную пару (Φ_1, Ψ_1) на \mathbf{B}_{γ_2} . Наконец, выберем $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2)$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.2.1. *Предположим, что*

$$\begin{aligned} \text{meas}\{u | \lambda'(u) = 0\} &= 0, \\ \|(u_\varepsilon^0 - \bar{u}, \sigma_\varepsilon^0); L_2\| &\leq C. \end{aligned}$$

Тогда существует подпоследовательность, которую также обозначим через $(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$, строго сходящаяся почти всюду

$$(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon) \rightarrow (u, \sigma), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

к функции такой, что:

- (i) $\sigma(t, x) = 0$ почти всюду, для $t > 0$;
- (ii) функция $u(t, x)$ — единственное энтропийное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0, \\ u|_{t=0} &= w^* - \lim u_\varepsilon^0(x), \end{aligned}$$

где $w^* - \lim$ обозначает слабый звездный предел в пространстве L^∞ .

Комментарий. Заметим, что, вообще говоря, функция $\sigma_\varepsilon^0(x)$ не равна нулю, т.е. начальные данные могут быть далеки от состояния равновесия. Сформулированное предложение указывает на то, что предельная функция $(u, 0)$ принадлежит множеству состояний равновесия при $t > 0$. Это показывает, что предельный переход является жестко сингулярным и состоит из двух процессов: один отвечает предельному переходу в пограничном слое $t = 0$ (как мы отмечали выше, один из корней линеаризованной задачи является равномерно погранслойным в окрестности состояний равновесия), другой связан с предельным переходом иерархии волн. Более того, это предложение 4.2.1 устанавливает, что последовательность $(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ слабо компактна, несмотря на возможную осцилляцию начальных данных. Заметим, что системы с жестко релаксационным членом могут быть обобщенно линейными, в частности, второму полю характеристик $(\Lambda_- \leq \lambda)$ разрешается быть обобщенно линейным, и начальные осцилляции могут распространяться вдоль линейно обобщенного поля для систем без жестко релаксационного члена (см. [40]). Этот факт показывает, что механизм релаксации (возможно и нелинейность уравнения равновесия, функция $r(u, \sigma)$ нелинейна по σ) может уничтожать начальные осцилляции так же, как сильная нелинейность [46].

Приведем доказательство предложения 4.2.1, придерживаясь [41]. Прежде всего заметим, что если (Φ, Ψ) — выпуклая энтропийная пара, то

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(U) &= \Phi(U) - \Phi(\bar{U}) - \partial_U \Phi(\bar{U}), \\ \widehat{\Psi}(U) &= \Psi(U) - \Psi(\bar{U}) - \partial_U \Psi(\bar{U}) \end{aligned}$$

также являются выпуклыми энтропийными парами для $\bar{U} = (\bar{u}, 0)$. Без потери общности можно считать, что $\bar{U} = (0, 0)$. Отсюда имеем

$$\partial_t \widehat{\Phi}(U^\varepsilon) + \partial_x \widehat{\Psi}(U^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\sigma \widehat{\Phi}(U^\varepsilon) r(U^\varepsilon) \leq 0. \quad (4.2.4)$$

Интегрируя (4.2.4) по $[0, t] \times (-\infty, \infty)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Phi}(U^\varepsilon(t, x)) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\sigma \widehat{\Phi}(U^\varepsilon) r(U^\varepsilon) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Phi}(U_\varepsilon^0) dx.$$

Следовательно, в силу выпуклости $\widehat{\Phi}$, существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^\varepsilon)^2 dx \leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left((u_\varepsilon^0(x) - \bar{u})^2 + (\sigma_\varepsilon^0(x))^2 \right) dx.$$

Положим $(\phi_i(u), \psi_i(u)) = (\widehat{\Phi}, \widehat{\Psi})|_{\sigma=0}$, $i = 1, 2$. Тогда $(\phi_i(u), \psi_i(u))$ — выпуклые энтропии, рассмотренные в предыдущем параграфе. Тогда имеем

$$\partial_t \phi_i(u^\varepsilon) + \partial_x \psi_i(u^\varepsilon) \leq \partial_t (\widehat{\Phi}_i(u^\varepsilon, 0) - \widehat{\Phi}_i(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)) +$$

$$\begin{aligned}
& +\partial_x(\widehat{\Psi}_i(u^\varepsilon, 0) - \widehat{\Psi}_i(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\sigma\widehat{\Phi}_i(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)(r(u^\varepsilon, 0) - r(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)) = \\
& = I_{i,1}^\varepsilon + I_{i,2}^\varepsilon + I_{i,3}^\varepsilon, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Используя оценку (4.2.4), имеем

$$\begin{aligned}
\|I_{i,1}^\varepsilon; H^{-1}\| &= \sup_{\varphi \in H_0^1} \left| \iint \partial_t(\widehat{\Phi}_i(u^\varepsilon, 0) - \widehat{\Phi}_i(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon))\varphi \, dx \, d\tau \right| \leq \\
&\leq C_2\|\sigma^\varepsilon; L_2\| \|\partial_t\varphi; L_2\| \leq \sqrt{\varepsilon}C_3\|\partial_t\varphi; L_2\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\|I_{i,2}^\varepsilon; H^{-1}\| \leq C_4\|\partial_x\varphi; L_2\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что $\partial_\sigma\widehat{\Phi}_i(u, 0) = 0$. Следовательно, из неравенств (4.2.4) и (4.2.5) следует, что

$$\|I_{i,3}^\varepsilon; L^1\| \leq C_5,$$

откуда, в силу теоремы вложения Соболева, следует компактность $I_{i,3}^\varepsilon$ в W^{-1,p_1} . Таким образом, имеем

$$I_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^3 I_{i,j}^\varepsilon \quad \text{компактно в } W^{-1,p_1}. \tag{4.2.6}$$

Используя факты

$$\partial_t\phi_i(u^\varepsilon) + \partial_x\psi_i(u^\varepsilon) - I_i^\varepsilon \leq 0,$$

$$\partial_t\phi_i(u^\varepsilon) + \partial_x\psi_i(u^\varepsilon) - I_i^\varepsilon \quad \text{ограничено в } W^{-1,p_1},$$

из (4.2.5), ограниченности u^ε и теоремы Мюрата [63], заключаем, что

$$\partial_t\phi_i(u^\varepsilon) + \partial_x\psi_i(u^\varepsilon) - I_i^\varepsilon \quad \text{компактно в } W^{-1,p_2}, \quad 1 < p_2 < p_1. \tag{4.2.7}$$

Соединяя (4.2.6), (4.2.7) и ограниченность u^ε , получаем

$$\partial_t\phi_i(u^\varepsilon) + \partial_x\psi_i(u^\varepsilon) \begin{cases} \text{компактно в } W^{-1,p_2}, & 1 < p < p_2, \\ \text{ограничено в } W^{-1,\infty}. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Таким образом,

$$\partial_t\phi_i(u^\varepsilon) + \partial_x\psi_i(u^\varepsilon) \quad \text{компактно в } H^{-1}, \quad i = 1, 2, \tag{4.2.9}$$

в силу теоремы о компактности оператора вложения [42].

Пусть $1 < p \leq q < r < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \left(\text{компактное множество в } W_{\text{loc}}^{-1,p} \right) \cap \left(\text{ограниченное множество в } W_{\text{loc}}^{-1,r} \right) \subset \\
& \subset \left(\text{компактное множество в } W_{\text{loc}}^{-1,q} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, из (4.1.16) и (4.2.9) следует, что

$$\partial_t f(u^\varepsilon) + \partial_x \left(\int_0^{u^\varepsilon} (f'(y))^2 \, dy \right) \quad \text{компактно в } H^{-1}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) \quad \text{компактно в } H^{-1}. \tag{4.2.10}$$

Теорема компактности из [54] позволяет выделить подпоследовательность $u^\varepsilon(x, t)$ (сохраним старые обозначения), которая сходится почти всюду к функции $u(x, t)$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{почти всюду,}$$

и также, в силу оценки (4.2.5),

$$\sigma^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{почти всюду.}$$

Доказательство завершено. \square

Комментарий. Интересно исследовать проблему переноса поднятых здесь вопросов о локальном релаксационном пределе на системы первого порядка с переменными коэффициентами и релаксацией, равномерно удовлетворяющие условиям гиперболических пучков для линеаризованных систем в окрестности состояний равновесия. Являются ли достаточными эти условия для теоремы о продолжении энтропии на гладкие релаксационные аппроксимации предельных систем в случае большого числа неравновесных величин? И насколько много таких выпуклых энтропийных пар? Достаточно ли их для обоснования локального релаксационного предела? Мы вернемся к этим вопросам в последних главах обзора при исследовании условий корректности слабых определений начально-краевых задач.

ЧАСТЬ 5

НЕЛИНЕЙНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВВЕДЕНИЕ

Начнем с простого примера, который позволит войти в круг проблем первой темы: «Методы и задачи неравновесной термодинамики» и выявить особенности метода стабилизирующихся асимптотических разложений [18, 44]. Рассмотрим хорошо известное нелинейное гиперболическое уравнение Хопфа [52]

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (5.0.11)$$

описывающее одномерную среду, состоящую из частиц, движущихся по инерции (т.е. без взаимодействий и в отсутствии внешних сил). Тогда характеристическая скорость $v_{\text{ch}} = u(x, t)$ — скорость частицы, находящейся в момент времени t в точке x . Здесь, прежде всего, остановимся на старой проблеме регуляризации разрывных решений гиперболических квазилинейных систем уравнений (например, системы уравнений Эйлера), которая имеет долгую историю [52]. Расширим множество переменных этой задачи, введя обобщенную переменную $\sigma(x, t)$, чтобы расширение было корректным, т.е. расширенная система была бы:

1. гиперболической (сохраняется конечная скорость распространения возмущения);
2. диссипативной;
3. уравнение Хопфа было бы слабым пределом расширенной системы.

Возможное расширение имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x \left(\frac{1}{2} (u^\varepsilon)^2 + \beta \sigma^\varepsilon \right) &= 0, \\ \partial_t \sigma^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon &= -\frac{1}{\varepsilon} \sigma. \end{aligned} \quad (5.0.12)$$

Системы вида (5.0.12) называются законами сохранения с релаксацией. Положительный параметр ε играет роль времени релаксации. При $\beta > 0$ эту систему можно интерпретировать как модель, описывающую одномерную «пористую среду», состоящую из частиц, движущихся по инерции, с балансным уравнением для пористости σ [65]. Равновесное состояние может быть охарактеризовано условием $\sigma \equiv 0$, так что σ является неравновесной переменной. Переменную u будем называть базовой переменной системы (5.0.12). Для $\varepsilon \rightarrow 0$ система (5.0.12) формально сводится к уравнению Хопфа (5.0.11). Заметим, что характеристический полином системы (5.0.12)

$$v_{\text{ch}}^2 - uv_{\text{ch}} - \beta = 0$$

имеет корни

$$v_{\text{ch}}^\pm(u) = \frac{1}{2}u \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + \beta}. \quad (5.0.13)$$

Условие гиперболичности сохраняется, если $u^2 + 4\beta \geq 0$. Таким образом, в этом случае первое условие корректности расширения (регуляризации) (5.0.11) выполнено. Дисперсионному

уравнению линеаризованной в окрестности состояния равновесия $(u, 0)$ системы (5.0.12) отвечает гиперболический пучок

$$\mathcal{D}(\omega, k) = P_0(\omega, k) - iP_1(\omega, k) = 0, \quad P_0 = \omega^2 - uk\omega - \beta k^2, \quad P_1 = \omega + uk,$$

для которого P_0, P_1 — строго гиперболическая пара, если выполнен критерий устойчивости

$$v_{\text{ch}}^-(u) < -u < v_{\text{ch}}^+(u). \quad (5.0.14)$$

Очевидно, это справедливо для любого $u \in \mathbb{R}^1$, если $\beta > 0$. Отсюда следует линейная устойчивость системы (5.0.12) для любого $u \in \mathbb{R}^1$ при $\beta > 0$. Покажем, что из критерия устойчивости следует диссипативность расширения (5.0.12). Более того, мы установим условия типа энтропии, выделяющие допустимые разрывы решений (5.0.11), которые могут быть получены как слабые пределы решений (5.0.12). Таким образом, расширение (5.0.12) — корректно. Это обуславливает выбор знака в (5.0.12).

Другой, более известной регуляризацией уравнения Хопфа является уравнение Бюргерса

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon = \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (5.0.15)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. «Идеология обобщенных функций, обобщенных решений» (как физическая, так и математическая [52]) позволила в середине прошлого века ввести понятие вязких решений уравнения Хопфа как слабого предела гладких решений уравнения Бюргерса. Но с физической точки зрения расширение уравнения Хопфа (5.0.15) имеет существенный недостаток — бесконечную скорость распространения возмущения.

Итак, мы имеем два расширения, две регуляризации уравнения Хопфа, и нам необходимо провести анализ возможных структур решений этих моделей и их особенностей, сделать сравнительный анализ. Нам хотелось бы получить ответы на следующие вопросы:

1) Какова структурная связь модели \mathcal{L}_ε с малым параметром (5.0.12) (или (5.0.15)) и предельной задачи \mathcal{L}_0 (5.0.11) (сингулярно-предельной задачи)?

2) Какова алгебра основных особенностей решений предельной задачи (5.0.11)?

3) Корректно ли расширение (5.0.12) (или (5.0.15)), т.е. являются ли решения $u(x, t, \varepsilon)$ модели с малым параметром гладкими аппроксимациями решений $u_{\text{lim}}(x, t)$ предельной задачи (5.0.11) и каких решений? Какими условиями обусловлены решения (5.0.11), являющиеся пределами гладких решений модели с малым параметром? Какова временная асимптотика решений (5.0.12) (или (5.0.15)) при $t/\varepsilon \rightarrow \infty$? В дальнейшем решения предельных задач, которые являются пределами решений их гладких аппроксимаций, будем называть допустимыми. Условия отбора допустимых решений будем называть условиями типа энтропии.

4) Расширенная система предполагает большее число граничных условий для задачи в ограниченной области, чем базовая (предельная) система. Что происходит с «лишними» граничными условиями при предельном переходе по малому параметру? Какова структура решения в окрестности граничных точек? Определяются ли однозначно граничные значения обобщенных переменных по граничным данным базовых переменных?

Чтобы ответить на эти вопросы, применим методы нелинейного асимптотического анализа. Основным инструментом исследования базовых предельных моделей (например, (5.0.11)) будут асимптотические решения (по малому параметру или, одновременно, и по гладкости) допредельных моделей (например, (5.0.12) или (5.0.15)). При построении асимптотических решений, выборе их структуры (анзатц) мы должны будем ответить на следующие вопросы:

1_{ас}) Что такое быстрая переменная? Природа ее возникновения, связь и соотношение медленных (x, t) (эйлеровых) переменных и быстрой переменной? Что такое фронт? Какова структура (анзатц) двухмасштабного асимптотического разложения? Что такое асимптотическое решение в классе двухмасштабных асимптотических разложений? Что такое быстрые и медленные (фоновые) функций?

2_{ас}) Каков профиль гладкой аппроксимации главной особенности предельной задачи. Какова структура ОДУ (стандартного уравнения), описывающего профиль первого приближения (профиль гладкой аппроксимации главной особенности)? Что такое стабилизирующиеся решения стандартного уравнения? Что такое условия типа Гюгонио как условия разрешимости стандартного

уравнения в классе стабилизирующихся функций? Что такое условия разрешимости типа неравенств как аналоги энтропийных условий?

3_{ас}) Что такое предельная задача, внешнее и внутреннее разложения, каковы соотношения между ними? Какое соотношение между временем существования классического решения сингулярно-предельной задачи и временем существования стабилизирующегося двухмасштабного асимптотического решения?

4_{ас}) Каковы этапы построения асимптотических решений:

4₁) Продолжение коэффициентов асимптотического разложения, заданных на фронте, с фронта в достаточно малую окрестность $\Omega_{\Gamma, \delta}$ фронта, не зависящую от малого параметра.

4₂) Построение следующих приближений требует выделения ОДУ на фронте, определяющих значения коэффициентов этих приближений на фронте. Каковы условия их разрешимости в классе стабилизирующихся функций?

4₃) Продолжение этих коэффициентов с фронта в $\Omega_{\Gamma, \delta}$.

4₄) Исследование условий существования и единственности классических решений сингулярно-предельной задачи.

5_{ас}) Возможен ли слабый предельный переход по малому параметру? Что такое слабое асимптотическое разложение? Что такое слабые энтропийные решения сингулярно-предельной задачи? Каковы условия их корректности?

Постараемся на примерах (5.0.11) и (5.0.12), (5.0.15) ответить на эти вопросы. Прежде всего заметим, что рассматриваемые здесь модели механики сплошных сред имеют одно общее свойство — они обладают так называемыми жесткофронтными решениями. Такие решения описывают процессы в случае, когда область существования процесса разделена на подобласти «медленного» изменения параметров и переходную зону быстрого изменения параметров. Например, исследование процесса затвердевания двухкомпонентного сплава при большой продолжительности, когда первая стадия процесса разделения фаз завершена и появились области с двумя разными фазами. Область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, заполненная сплавом, разделена на три части: две фазы (α и β) и межфазную зону (зону фазового перехода). Другой пример — модель Баклея—Левретта, описывающая течение двух несжимаемых жидкостей разной плотности (разной подвижности) в пористой среде. В обоих случаях межфазная зона предполагается достаточно малой. Для простоты будем считать, что имеются две такие связанные подобласти $\Omega_t^\pm \in \Omega$, $t \in (0, T)$, разделенные переходной зоной Ω_Γ , являющейся окрестностью поверхности Γ_t , $t \in (0, T)$, коразмерности единица, фронта фазового перехода. Гладкие решения рассматриваемых моделей, обладающие подобными свойствами, будем называть решениями типа волновых фронтов.

Целью наших исследований является динамика свободной границы (фронта), разделяющей фазы. Простейшей моделью, обладающей таким свойством, ставшей прототипом исследования подобного типа моделей механики сплошных сред, является уравнение Бюргерса (5.0.15).

Решением типа волнового фронта является точное решение уравнения Бюргерса:

$$u(x, t, \varepsilon) = 2a \left(1 - \operatorname{th} \left(a \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon} \right) \right), \quad \varphi(t) = 2at,$$

$$\widehat{u}^+ = 0, \quad \widehat{u}^- = 4a, \quad \frac{\widehat{u}^+ + \widehat{u}^-}{2} = 2a. \quad (5.0.16)$$

Оно позволяет дать математическую интерпретацию «жесткофронтности». При $\varepsilon \rightarrow 0$ гладкая функция $u(x, t, \varepsilon)$ сходится поточечно к разрывной функции:

$$u_{\text{lim}} = \begin{cases} 0, & x > \varphi(t), \\ 4a, & x < \varphi(t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (5.0.17)$$

являющейся слабым решением уравнения Хопфа.

Заметим, что быстрая функция $f(\xi) = \text{th}(\xi)$ по быстрой переменной $\xi = a \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}$ удовлетворяет так называемому условию стабилизации на бесконечности

$$\xi^k \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} (f - f^\pm) = 0 \quad \forall j \geq 0, \quad \text{если } \xi \rightarrow \pm\infty, \quad f^\pm = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f. \quad (5.0.18)$$

Стабилизирующиеся функции, предельные значения которых $f^\pm = 0$, называются функциями типа солитона. В случае $f^+ \neq f^-$ стабилизирующиеся функции называются функциями типа кинка.

Структура (5.0.16) подсказывает выбор (вид) гладкой аппроксимации сильного разрыва для уравнения Хопфа в моделях (5.0.12), (5.0.15).

5.1. УРАВНЕНИЕ ХОПФА. ПРОФИЛЬ СГЛАЖИВАНИЯ

Начнем исследование модели (5.0.11) с задачи Коши

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (5.1.1)$$

Для простоты рассмотрим кусочно-постоянные начальные данные

$$u|_{t=0} = u^0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0. \end{cases}$$

В этом случае задача (5.0.11), (5.1.1) называется задачей Римана о распаде разрыва. Для расширения (5.0.12) необходимо расширение начальных данных, т.е. сглаживание (5.1.1)

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u^0(x, \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^0(x, \varepsilon) = u^0(x),$$

определение граничного условия для неравновесной переменной, определяющего возмущение равновесного состояния:

$$\sigma^\varepsilon|_{t=0} = \sigma^0(x, \varepsilon) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^0(x, \varepsilon) = 0.$$

В состоянии динамического равновесия двух сосуществующих фаз, без учета переходной зоны ($\varepsilon = 0$), процесс описывается кусочно-постоянным решением (5.0.11). В этом случае уравнение состояния

$$\sigma = 0, \quad (5.1.2)$$

т.е. в состоянии динамического равновесия без переходной зоны неравновесная переменная, описывающая отклонение от состояния равновесия, равна нулю. Посмотрим, можно ли определить продолжение (5.1.2) для $\varepsilon > 0$, связывающее в присутствии переходной зоны

$$\sigma^\varepsilon = F(u^\varepsilon, \varepsilon), \quad F(u^\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{если } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.1.3)$$

неравновесную и базовую переменные, когда динамическое равновесие описывается жесткофронтными решениями (5.0.12). В духе [57] рассмотрим формальное асимптотическое разложение

$$\sigma^\varepsilon(x, t) = \varepsilon \sigma_1^\varepsilon(x, t) + \varepsilon^2 \sigma_2^\varepsilon(x, t) + \dots, \quad (5.1.4)$$

где ε — зависимость гладких поправок σ_j^ε , выражается только через зависимость от u^ε и ее производных. Подставляя в (5.0.12), в первом приближении получим

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon = O(\varepsilon),$$

$$\partial_x u^\varepsilon + \sigma_1^\varepsilon = O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем первые приближения к (5.1.3) вида

$$\sigma^\varepsilon = -\varepsilon \partial_x u^\varepsilon + O(\varepsilon), \quad (5.1.5)$$

и первому уравнению (5.0.12)

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon = \varepsilon \beta \partial_x u^\varepsilon + O(\varepsilon). \quad (5.1.6)$$

Отсюда получаем так называемое первое локально равновесное приближение системы (5.0.12) (см. [41])

$$\sigma^\varepsilon = -\varepsilon \partial_x u^\varepsilon, \quad (5.1.7)$$

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon = \varepsilon \beta \partial_x u^\varepsilon. \quad (5.1.8)$$

Как видим, мы получили уравнение Бюргерса — аналог системы Навье—Стокса как первого локально равновесного приближения системы уравнений Эйлера [57]. Роль вязкости играет произведение $\varepsilon\beta$. Знак $\beta > 0$ гарантирует диссипацию (5.1.8). Естественный вопрос — является ли (5.1.7), (5.1.8) промежуточным приближением как для (5.0.11), так и для (5.0.12)? Вопрос не праздный, так как, во-первых, мы отбросили члены высшего порядка в (5.0.12), что предполагает гладкость членов разложения (5.1.4) и малость их производных, и, во-вторых, решения предельного уравнения (5.0.11) даже с гладкими начальными условиями за конечное время могут стать разрывными, и тогда предельный переход при $t/\varepsilon \rightarrow \infty$ становится сингулярным. Положительный ответ мы имеем для линеаризованной в окрестности состояния равновесия системы (5.0.12). Линеаризация уравнения (5.1.8) получается методом перевала при исследовании иерархии волн [31] в решении задачи Коши для линеаризованной системы (5.0.12). Критерий устойчивости (5.0.14) в этом случае гарантирует устойчивый переход решения задачи Коши линеаризованной системы при $t/\varepsilon \rightarrow \infty$ в соответствующее решение задачи Коши линеаризованного уравнения Хопфа. Линеаризованное уравнение (5.1.8) описывает поведение решения в окрестности фронта для $t/\varepsilon \gg 1$.

Теперь проведем нелинейный анализ. Для этого рассмотрим гладкие решения (5.0.12) типа бегущей волны

$$u(x, t, \varepsilon) = U(\xi), \quad \sigma(x, t, \varepsilon) = \Sigma(\xi), \quad (5.1.9)$$

в классе функций, стабилизирующихся на бесконечности (5.0.17), с предельными значениями (граничными условиями)

$$u^\pm = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U, \quad \sigma^\pm = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \Sigma.$$

Быстрая переменная

$$\xi = \frac{x - x_0 - \overset{\circ}{x} t}{\varepsilon}.$$

Очевидно, (5.1.9) описывают структуру типа волнового фронта. Здесь $x = x(0)$ — начальное положение фронта $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^1, x = x(t)\}$, $t \in [0, T]$, $\overset{\circ}{x}$ — неизвестная скорость фронта.

Прежде всего заметим, что в силу условия стабилизации (5.0.17) из второго уравнения в (5.0.12) следует, что

$$\Sigma^\pm = 0. \quad (5.1.10)$$

Подставляя (5.1.9) в первое уравнение системы (5.0.12) и интегрируя, в силу (5.1.10) получим

$$\Sigma(\xi) = \frac{1}{\beta} \overset{\circ}{x} (U - u^-) - \frac{1}{2\beta} (U^2 - u_-^2). \quad (5.1.11)$$

Из условия $\Sigma^+ = 0$ получим так называемое условие типа Гюгонио — уравнение для скорости фронта

$$\overset{\circ}{x} = \frac{1}{2} (u^+ + u^-). \quad (5.1.12)$$

Очевидно, это известное уравнение для скорости ударной волны в уравнении Хопфа [52].

Отсюда получаем уравнение для функции

$$\Sigma(\xi) = \frac{1}{2\beta} (u_- - U)(U - u^+),$$

и функции U вида

$$\frac{d}{d\xi} U(\xi) = \frac{(u^+ - U)(U - u^-)}{2(\overset{\circ}{x}^2 - \overset{\circ}{x} U - \beta)}. \quad (5.1.13)$$

Необходимым условием существования ограниченных решений автономного уравнения (5.1.13) (сепаратрисы) является

$$u^- \neq u^+, \quad \mathcal{P}(U) = \overset{\circ}{x}^2 - \overset{\circ}{x} U - \beta \neq 0, \quad U \in [u^-, u^+].$$

Значения решения принадлежат отрезку $[u_+, u_-]$, либо отрезку $[u_-, u_+]$. Покажем, что условие $u^+ > u^-$ невозможно. Имеем $\dot{x} \in [u^-, u^+]$ и $\mathcal{P}(\dot{x}) = -\beta < 0$. Следовательно, гладкое решение существует в этом случае, если $\mathcal{P}(U) < 0$, $U \in [u^-, u^+]$. Тогда решение (5.1.13) строго убывает, откуда следует, что $u_- > u_+$. К тому же должны выполняться оценки

$$0 > \max_{U \in [u^+, u^-]} \mathcal{P}(U) = \begin{cases} \mathcal{P}(u^-), & \text{если } \dot{x} > 0, \\ \mathcal{P}(u^+), & \text{если } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Суммируя эти оценки, получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} u_- > u_+ > -u^- &\implies u_-^2 < u_+^2 + 4\beta, \\ -u^+ > u_- > u_+ &\implies u_+^2 < u_-^2 + 4\beta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие

$$0 < |\dot{x}|(u_- - u_+) < 2\beta \quad (5.1.14)$$

является условием существования гладкого решения уравнения (5.1.13), единственного с точностью до трансляции. Левое неравенство в (5.1.14) называется условием типа энтропии. Как видим, мы получили хорошо известное условие [52] устойчивости допустимой ударной волны для уравнения Хопфа. Правое же неравенство в (5.1.14) является дополнительным условием на амплитуду сглаживаемого разрыва. Следуя [25], введем понятие силы ударной волны. Меру $|\alpha|$ силы ударной волны (5.0.18) определим соотношением

$$u^- - u^+ = \alpha u^-$$

по базовой переменной u предельного уравнения (5.0.11). В силу (5.1.14) система (5.0.12) допускает сглаживание только ударных волн уплотнения (compressional shock structure) умеренной силы:

$$|2 - \alpha||\alpha| < \frac{4\beta}{u_-^2}, \quad \text{sign } \alpha = \text{sign } u_-. \quad (5.1.15)$$

Соотношения (5.1.13), (5.1.14) являются ограничением на возможные значения скачка $u^- - u^+$ и скорости фронта \dot{x} , сглаживающего этот скачок жесткофронтového решения системы (5.0.12). Гладкое решение (5.1.13) порождается неявной формой

$$\left(\frac{u^- - u^+}{2}\right)^{\frac{1}{2}(u_-^2 - u_+^2)} \exp\left((u^- - u^+)\xi\right) = \frac{(U - u^+)^{(\dot{x}^2 - \dot{x}u^+ - \beta)}}{(u^- - U)^{(\dot{x}^2 - \dot{x}u^- - \beta)}}. \quad (5.1.16)$$

Постоянная интегрирования выбрана так, что

$$\xi\left(\frac{u^+ + u^-}{2}\right) = 0.$$

Заметим, что для ударных волн умеренной силы ударные волны однородной системы (5.0.12) движутся быстрее решения типа бегущей волны, т.е. скорость волнового фронта (5.1.12) меньше характеристических скоростей (5.0.13) того же знака. Пусть для определенности $u^- > u^+ > 0$. В силу (5.1.15) имеем

$$\begin{aligned} v_1^{\text{ch}}|_{u=u_+} &= \frac{1}{2}\left(u^+ + \sqrt{u_+^2 + 4\beta}\right) = \\ &= \frac{u^-}{2}\left(1 - \alpha + \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4\frac{\beta}{u_-^2}}\right) > \dot{x} = \frac{1}{2}(u^- + u^+) = \frac{u^-}{2}(2 - \alpha). \end{aligned}$$

В этом случае решение типа волнового фронта возникает как результат взаимодействия двух стартовых волн ($t = 0$): $v_1^{\text{ch}}|_{u=u_-}$, $v_2^{\text{ch}}|_{u=u_+}$.

Теперь рассмотрим случай, когда ограничение (5.1.15) не выполнено. Знаменатель в (5.1.13) имеет форму характеристического полинома \mathcal{P} системы (5.0.12). Поэтому, когда характеристическая скорость внутри интервала (u^+, u^-) приближается к скорости ударной волны,

производная U' становится бесконечной. В этом случае функция $\xi(U)$ имеет экстремальную точку $U = u_* \in (u^+, u^-)$, определяемую уравнением

$$\mathcal{P}(u_*) = 0 \implies u_* = \frac{\overset{\circ}{x}^2 - \beta}{\overset{\circ}{x}}.$$

Тогда $U(\xi)$ становится многозначной. В этом случае существуют два разрывных слабых решения уравнения (5.1.13) вида:

$$U_-(\xi) = \begin{cases} U_-^*(\xi), & -\infty < \xi < \xi_*, \\ u^+, & \xi_* < \xi < \infty, \end{cases} \quad \text{если } \overset{\circ}{x} < 0, \quad (5.1.17)$$

$$U_+(\xi) = \begin{cases} u^-, & -\infty < \xi \leq \xi_+, \\ U_+^*(\xi), & \xi_+ \leq \xi < \infty, \end{cases} \quad \text{если } \overset{\circ}{x} > 0. \quad (5.1.18)$$

Постоянная ξ_* находится единственным образом

$$\xi_* = \overset{\circ}{x} \ln \left[(u_* - u_+)^{-\frac{u_* - u_+}{u_- - u_+}} (u_- - u_*)^{\frac{u_- + u_* - 2u_+}{u_- - u_+}} \right].$$

Функции $U_-^*(\xi)$, $U_+^*(\xi)$ определяются из уравнений

$$\exp\left(-\frac{\xi}{\overset{\circ}{x}}\right) = (U_- - u_+)^{-\frac{u_* - u_+}{u_- - u_+}} (u_- - U_-)^{\frac{u_- + u_* - 2u_+}{u_- - u_+}}, \quad -\infty < \xi < \xi_*,$$

$$\exp\left(\frac{\xi}{\overset{\circ}{x}}\right) = (U_+ - u_+)^{-\frac{u_* + u_- - 2u_+}{u_- - u_+}} (u_- - U_+)^{\frac{u_* - u_+}{u_- - u_+}}, \quad \xi_* < \xi < \infty,$$

если $\overset{\circ}{x} < 0$ или $\overset{\circ}{x} > 0$ соответственно. Решение типа волнового фронта (бегущей волны) вырождается в слабое решение типа полуволнового фронта (в зависимости от знака скорости жесткофронтного решения), которое разрывно и для которого сохраняется условие (5.0.18) стабилизации на одной из бесконечностей. Такое поведение является типичным для диссипативных гиперболических систем.

Комментарий. Таким образом, ситуация, рассмотренная выше, подобна хорошо известной для вязкой регуляризации уравнения Хопфа: сглаживаются только устойчивые ударные волны, для которых справедливо условие $u^- > u^+$. Более того, в силу солитонной структуры Σ в полученном выше решении расширение (5.0.12) обладает дисперсией относительно обобщенной переменной Σ . Отличие состоит в том, что при гиперболической регуляризации (5.0.12) решение типа бегущей волны теряет гладкость для достаточно больших скачков $[u] = u^+ - u^-$. Ударная волна может быть сглажена только до некоторого значения α_* силы ударной волны. Продолжим исследование задачи Коши для уравнения Хопфа и его гиперболического расширения (5.0.12). При наличии в системе дифференциальных уравнений параметра (большого или малого) всегда возникает один и тот же вопрос: какие решения Вы исследуете, отдельное решение или семейство решений (относительно параметра)? Если предмет исследования — семейство решений, то Вас интересуют равномерные свойства решений относительно параметра. Как мы увидим ниже, системы моментов расширенной термодинамики являются линейными расширениями предельной системы (системы уравнений Эйлера) относительно неравновесных переменных в окрестности равновесного состояния. Таким образом, изначально вводятся в рассмотрение такие понятия, как «расширение» системы уравнений Эйлера и «окрестность» равновесного состояния, которым необходимо придать точное математическое определение. Одной из основных задач дальнейших наших исследований будет проблема описания предельного поведения решений расширенной системы. С этой точки зрения требуется ответить на следующие вопросы:

1) Когда решения предельной системы уравнений Эйлера будут аттрактором для равномерно ограниченных семейств решений расширенной системы?

2) Какова возможная зона притяжения системы уравнений Эйлера? Т.е. нас будет интересовать описание множества начальных (гранично-начальных) данных базовых переменных, для которых

существуют равномерно ограниченные семейства решений расширенной системы, пределом которых будут слабые решения системы уравнений Эйлера.

5.2. ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ

Итак, продолжим исследование задачи Коши в полосе. Следуя Лаксу [42], умножим первое уравнение в (5.0.12) на u , а второе на σ и, сложив, получим законы сохранения для энергии $e = \frac{1}{2}(u^2 + \beta\sigma^2)$ и удельной энтропии $s = -e$ вида:

$$\partial_t e + \partial_x H_e = P_e, \quad (5.2.1)$$

$$\partial_t s + \partial_x H_s = P_s. \quad (5.2.2)$$

Здесь поток энергии $H_e(u, \sigma) = \frac{1}{3}u^3 + u\sigma$, поток энтропии $H_s = -H_e$, правые части

$$P_e(\sigma) = -\beta \frac{\sigma^2}{\varepsilon}, \quad P_s(\sigma) = -P_e$$

уравнений (5.2.1), (5.2.2) называются производствами (productions) [57, 62] энергии и отрицательной энтропии соответственно. Из (5.2.2) получаем так называемую Н-теорему для системы (5.0.12)

$$\partial_t s_\varepsilon + \partial_x H_s > 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.2.3)$$

Для гладких стабилизирующихся решений $u, \sigma \in L_2(\mathbb{R}^1)$, $t \in (0, T_0)$, из (5.2.3) следует, что

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e \, dx = -\frac{\beta}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \, dx.$$

Отсюда следует диссипация энергии при $\beta > 0$.

Теперь установим связь между неравновесной переменной в (5.0.12) и условием диссипации энергии в уравнении Хопфа. Для этого рассмотрим кусочно-гладкое решение (5.0.11), стабилизирующееся на бесконечности, $u^\pm(x, t) \in L_2(\Omega_t^\pm)$, $t \in (0, T_0)$, $\Omega_t^\pm = \{(-1)x > x(t)\}$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 5.2.1. *Для любого кусочно-гладкого решения (5.0.11) $u^\pm(x, t) \in L_2(\Omega_t^\pm)$, $t \in (0, T_0)$, имеем*

$$\frac{d}{dt} E_{\text{lim}}(t) = -2\beta \int_{u^-(t)}^{u^+(t)} \Sigma(U) \, dU, \quad (5.2.4)$$

здесь энергия $E_{\text{lim}}(t) = \left(\int_{-\infty}^{x(t)} u_-^2 \, dx + \int_{x(t)}^{\infty} u_+^2 \, dx \right) / 2$.

Для кусочно-гладкого решения имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} \frac{u^2}{2} \, dx + \int_{-\infty}^{x(t)} \frac{u^2}{2} \, dx \right) = \dot{x} \left(\frac{1}{2} u_-^2 - \frac{1}{2} u_+^2 \right) + \int_{-\infty}^{x(t)} u \partial_t u \, dx + \int_{x(t)}^{\infty} u \partial_t u \, dx = \\ &= \dot{x} \left(\frac{1}{2} u_-^2 - \frac{1}{2} u_+^2 \right) - \int_{-\infty}^{x(t)} u^2 \partial_x u \, dx - \int_{x(t)}^{\infty} u^2 \partial_x u \, dx = -\frac{1}{2} \int_{u^-(t)}^{u^+(t)} \left(U^2 - u_-^2 - 2 \dot{x} (U - u^-) \right) dU. \end{aligned}$$

Для диссипации энергии на разрыве должно быть выполнено условие

$$\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} \left(U^2 - u_-^2 - 2 \dot{x} (U - u^-) \right) dU > 0. \quad (5.2.5)$$

Заметим, что интеграл в (5.2.5) равен площади $S(t)$, ограниченной графиком функции состояния $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ на отрезке $[u^-(t), u^+(t)]$ (или $[u^+(t), u^-(t)]$) и хордой, соединяющей точки $(u^-(t), p(u^-(t)))$ и $(u^+(t), p(u^+(t)))$ на этом графике. В силу выпуклости вниз функции состояния имеем $S(t) < 0$. Отсюда следует, что условием диссипации является условие на фронте вида

$$u^-(t) > u^+(t). \quad (5.2.6)$$

Напомним, что при сглаживании кусочно-постоянного решения системы (5.0.11) мы получили следующее выражение

$$\Sigma(U) = \frac{1}{2\beta} \left(U^2 - u_-^2 - 2 \overset{\circ}{x} (U - u^-) \right) \quad (5.2.7)$$

для неравновесной компоненты решения (5.0.12) типа бегущей волны. Покажем, что для кусочно-гладкого решения условие (5.2.6) является одним из условий существования стабилизирующегося решения стандартной системы уравнений. Кусочно-гладкое решение (5.0.11) аппроксимируется решением (5.0.12) с начальными данными $\sigma|_{t=0} = 0$, $u|_{t=0} = u^{\text{as}}|_{t=0}$, где асимптотическое решение $u^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)$, $\sigma^\varepsilon(x, t, \varepsilon)$ имеет следующую главную часть:

$$u^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = u_e^-(x, t) + \frac{(u_e^+(x, t) - u_e^-(x, t))}{(\widehat{u}^+(t) - \widehat{u}^-(t))} U \left(\frac{x - x(t)}{\varepsilon} - x_1(t) \right) + O(\varepsilon),$$

$$\sigma^\varepsilon(x, t, \varepsilon) = \Sigma \left(\frac{x - x(t)}{\varepsilon} - x_1(t) \right) + O(\varepsilon).$$

Здесь u_e^\pm — любое гладкое продолжение u^\pm в \mathbb{R}^1 для всех $t \in (0, T_0)$. Тогда профиль сглаживания $U(\xi, t)$ является решением ОДУ на фронте

$$\frac{d}{d\xi} U(\xi, t) = \frac{(\widehat{u}^+(t) - U(\xi, t))(U(\xi, t) - \widehat{u}^-(t))}{2(\overset{\circ}{x}^2(t) - \overset{\circ}{x}(t)U(\xi, t) - \beta)}, \quad (5.2.8)$$

$$\overset{\circ}{x}(t) = \frac{1}{2}(\widehat{u}^+(t) + \widehat{u}^-(t)), \quad \widehat{u}^\pm(t) = u^\pm(x(t), t).$$

Зависимость главных частей разложений неравновесной и базовой переменных имеет ту же структуру, что и в (5.2.7)

$$\Sigma(U) = \frac{1}{2\beta} \left(U^2 - \widehat{u}_-^2(t) - 2 \overset{\circ}{x}(t)(U - \widehat{u}^-(t)) \right). \quad (5.2.9)$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} E_{\text{lim}}(t) = -2\beta \int_{\widehat{u}^-(t)}^{\widehat{u}^+(t)} \Sigma(U) dU.$$

Замечательный факт! Простейший асимптотический анализ позволил установить связь диссипации энергии на разрыве для уравнения Хопфа с существованием обобщенной компоненты решения расширенной системы как функции типа солитона. Грубо говоря, расширенная система описывает процесс, при котором часть энергии тратится на существование обобщенной переменной солитонного типа, сосредоточенной в окрестности фронта разрыва, что в пределе приводит к диссипации на разрыве.

Подобный же результат справедлив для систем моментов расширенной термодинамики. Как мы покажем ниже, диссипация энергии на разрыве решений базовой системы уравнений Эйлера связана с природой обобщенных компонент расширенной системы как функций типа солитона.

5.3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ СЛАБОЙ СИЛЫ

В этом параграфе мы применим технику нелинейного асимптотического анализа к исследованию 20-моментной системы Града—Эрмита в 1-D случае:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v^2 + RT\varrho + \sigma) = 0, \quad (5.3.2)$$

где $R = \frac{k}{m}$ — газовая постоянная,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \frac{3}{2} RT\varrho \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \varrho v^3 + \frac{5}{2} RT\varrho v + \sigma v + q \right) = 0, \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{3} \varrho v^2 + \sigma \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \varrho v^3 + \frac{4}{3} RT\varrho v + \frac{7}{3} \sigma v + \frac{8}{15} q + m \right) = -\frac{4}{5} B\varrho\sigma, \quad (5.3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varrho v^3 + \frac{5}{2} RT\varrho v + \sigma v + q \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \varrho v^4 + 4RT\varrho v^2 + \frac{5}{2} \sigma v^2 + \right. \\ \left. + \frac{16}{5} qv + mv + RT \left(\frac{5}{2} RT\varrho + \frac{7}{2} \sigma \right) \right) = -\frac{4}{5} B\varrho \left(\frac{2}{3} q + \sigma v \right), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(m + \frac{2}{5} \varrho v^3 + \frac{9}{5} v\sigma \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{5} \varrho v^4 + \left(\frac{6}{5} R\varrho T + 3\sigma \right) v^2 + \frac{9}{5} RT\sigma + \right. \\ \left. + \left(\frac{24}{25} q + \frac{14}{5} m \right) v \right) = -\frac{4}{5} B\varrho \left(\frac{9}{5} \sigma v + \frac{3}{2} m \right), \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta + \varrho v^4 + (4\sigma + 10R\varrho T)v^2 + 8qv + 15R^2T^2\varrho \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{84}{5} q + 4m \right) v^2 + \varrho v^5 + (14R\varrho T + 8\sigma)v^3 + \varrho v^5 + (14R\varrho T + 8\sigma)v^3 + \right. \\ \left. + \left(35\varrho R^2T^2 + 28RT\sigma + \frac{7}{3} \Delta \right) v + 28RTq \right) = -\frac{4}{5} B\varrho \left(4v^2\sigma + \frac{16}{3} qv + \frac{2}{3} \Delta \right). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Здесь $\sigma = p_{11}$, $q = q_1$, $m = \varrho_{111}$. Наше внимание будет сосредоточено на ударных волнах слабой силы, в терминологии Лакса [56], описывающих малые отклонения от состояния равновесия, т.е. разрывные решения линеаризованной системы уравнений Эйлера в окрестности состояния равновесия ϱ_0 , v_0 , T_0 , $\sigma_0 = 0$, $q_0 = 0$, $\Delta_0 = 0$. Мы исследуем условия регуляризации таких решений системой (5.3.1)–(5.3.7) с четырьмя неравновесными переменными $\sigma = p_{11}$, $q = q_1$, $m = \varrho_{111}$, Δ . В терминах предыдущего параграфа разрывные решения системы уравнений Эйлера описывают динамическое равновесие сосуществующих фаз, когда не учитывается переходная зона или зона фазового перехода. В этом случае уравнения состояния

$$\sigma = q = m = \Delta = 0. \quad (5.3.8)$$

При учете переходной зоны динамическое равновесие может описываться в 1-D случае расширенной системой (5.3.1)–(5.3.7) с четырьмя неравновесными переменными σ^ε , q^ε , m^ε , Δ^ε . Возникает та же проблема продолжения уравнений состояния (5.3.8)

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon = F^\sigma(v^\varepsilon, \varrho^\varepsilon, T^\varepsilon), \quad q^\varepsilon = F^q(v^\varepsilon, \varrho^\varepsilon, T^\varepsilon), \\ m^\varepsilon = F^m(v^\varepsilon, \varrho^\varepsilon, T^\varepsilon), \quad \Delta^\varepsilon = F^\Delta(v^\varepsilon, \varrho^\varepsilon, T^\varepsilon), \end{aligned}$$

связывающих неравновесные и базовые переменные в переходной зоне. Для нормировки введем скорость звука $c_0^2 = \frac{5}{3}RT_0$, отвечающую температуре T_0 . Тогда, используя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 \tilde{\varrho}, & v &= \frac{c_0}{\varrho_0} \tilde{v}, & T &= \frac{c_0^2}{\varrho} \tilde{T}, \\ \sigma &= c_0^2 \tilde{\sigma}, & q &= c_0^3 \tilde{q}, & m &= c_0^4 \tilde{m}, & \Delta &= c_0^5 \tilde{\Delta} \end{aligned}$$

(гл. 1), можно считать, что рассматриваемое состояние равновесия характеризуется величинами $\tilde{\varrho}_0 = 1$, $\tilde{v}_0 = \mu$, $\tilde{T}_0 = 3/5$ и $\tilde{B} = \varrho_0 B$, где μ — число Маха. Введем масштабирование зависимых переменных, полагая

$$\tilde{\sigma} = \varepsilon^2 \Sigma, \quad \tilde{q} = \varepsilon^2 Q, \quad \tilde{m} = \varepsilon^2 \mathcal{M}, \quad \tilde{\Delta} = \varepsilon^2 \Pi, \quad \tilde{B} = 1/\varepsilon^3, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Система (5.3.1)–(5.3.7) переписется в виде:

$$\partial_t(\tilde{\varrho}) + \partial_x(\tilde{\varrho}\tilde{v}) = 0, \quad \partial_t(\tilde{\varrho}\tilde{v}) + \partial_x(\tilde{\varrho}\tilde{v}^2 + R\tilde{T}\tilde{\varrho} + \varepsilon^2\Sigma) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (5.3.9)$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\tilde{\varrho}\tilde{v}^2 + \frac{3}{2}R\tilde{T}\tilde{\varrho}\right) + \partial_x\left(\frac{1}{2}\tilde{\varrho}\tilde{v}^3 + \frac{5}{2}R\tilde{T}\tilde{\varrho}\tilde{v} + \varepsilon^2\Sigma\tilde{v} + \varepsilon^2Q\right) = 0, \quad (5.3.10)$$

$$\varepsilon\partial_t\left(\frac{2}{3}\tilde{\varrho}\tilde{v}^2 + \varepsilon^2\Sigma\right) + \varepsilon\partial_x\left(\frac{2}{3}\tilde{\varrho}\tilde{v}^3 + \frac{4}{3}R\tilde{T}\tilde{\varrho}\tilde{v} + \frac{7}{3}\varepsilon^2\Sigma\tilde{v} + \frac{8}{15}\varepsilon^2Q + \varepsilon^2\mathcal{M}\right) = -\frac{4}{5}\Sigma, \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t\left(\frac{1}{2}\tilde{\varrho}\tilde{v}^3 + \frac{5}{2}R\tilde{T}\tilde{\varrho}\tilde{v} + \varepsilon^2\Sigma\tilde{v} + \varepsilon^2Q\right) + \varepsilon\partial_x\left(\frac{1}{2}\tilde{\varrho}\tilde{v}^4 + 4R\tilde{T}\tilde{\varrho}\tilde{v}^2 + \frac{5}{2}\varepsilon^2\Sigma\tilde{v}^2 + \right. \\ \left. + \frac{16}{5}\varepsilon^2Q\tilde{v} + \varepsilon^2\mathcal{M}\tilde{v} + R\tilde{T}\left(\frac{5}{2}R\tilde{T}\tilde{\varrho} + \frac{7}{2}\varepsilon^2\Sigma\right)\right) = -\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}Q + \Sigma\tilde{v}\right). \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t\left(\varepsilon^2\mathcal{M} + \frac{2}{5}\tilde{\varrho}\tilde{v}^3 + \frac{9}{5}\varepsilon^2\tilde{v}\Sigma\right) + \varepsilon\partial_x\left(\frac{2}{5}\tilde{\varrho}\tilde{v}^4 + \left(\frac{6}{5}R\tilde{\varrho}\tilde{T} + 3\varepsilon^2\Sigma\right)\tilde{v}^2 + \frac{9}{5}R\varepsilon^2\tilde{T}\Sigma + \right. \\ \left. + \varepsilon^2\left(\frac{24}{25}Q + \frac{14}{5}\mathcal{M}\right)\tilde{v}\right) = -\frac{4}{5}\left(\frac{9}{5}\Sigma\tilde{v} + \frac{3}{2}\mathcal{M}\right), \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t\left(\varepsilon^2\Pi + \tilde{\varrho}\tilde{v}^4 + (4\varepsilon^2\Sigma + 10R\tilde{\varrho}\tilde{T})\tilde{v}^2 + 8\varepsilon^2Q\tilde{v} + \right. \\ \left. + 15R^2\tilde{T}^2\tilde{\varrho}\right) + \varepsilon\partial_x\left(\tilde{\varrho}\tilde{v}^5 + (14R\tilde{\varrho}\tilde{T} + 8\varepsilon^2\Sigma)\tilde{v}^3 + \varepsilon^2\left(\frac{84}{5}Q + 4\mathcal{M}\right)\tilde{v}^2 + \right. \\ \left. + \left(35\tilde{\varrho}R^2\tilde{T}^2 + 28\varepsilon^2R\tilde{T}\Sigma + \frac{7}{3}\varepsilon^2\Pi\right)\tilde{v} + 28\varepsilon^2R\tilde{T}Q\right) = -\frac{4}{5}\left(4\tilde{v}^2\Sigma + \frac{16}{3}Q\tilde{v} + \frac{2}{3}\Pi\right). \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Рассмотрим условия существования асимптотического разложения вида:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varrho}_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= 1 + \left\{ \varepsilon \left(\varrho_1(x, t) + H^e \chi(\xi, t) \right) + \varepsilon^2 \left(\varrho_2(x, t) + \chi_2^e(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3), \\
\tilde{v}_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= \mu + \left\{ \varepsilon \left(v_1(x, t) + H^v \chi(\xi, t) \right) + \varepsilon^2 \left(v_2(x, t) + \chi_2^v(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3), \\
\tilde{T}_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= 1 + \left\{ \varepsilon \left(T_1(x, t) + H^T \chi(\xi, t) \right) + \varepsilon^2 \left(T_2(x, t) + \chi_2^T(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3), \\
\Sigma_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= \left\{ \chi^\sigma(\xi, t) + \varepsilon \left(\sigma_2(x, t) + \chi_1^\sigma(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2), \\
Q_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= \left\{ \chi^q(\xi, t) + \varepsilon \left(q_2(x, t) + \chi_1^q(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2), \\
M_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= \left\{ \chi^m(\xi, t) + \varepsilon \left(m_2(x, t) + \chi_1^m(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2), \\
\Pi_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) &= \left\{ \chi^\pi(\xi, t) + \varepsilon \left(\pi_2(x, t) + \chi_1^\pi(\xi, t) \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Асимптотическое разложение, как и в предыдущей главе, будем искать в классе стабилизирующихся функций $\chi(\xi, t)$, $\chi_j^e(\xi, t)$, $\chi_j^v(\xi, t)$, $\chi_j^T(\xi, t)$, гладких по своим переменным, таких, что $(\chi)^- = (\chi_j)^- = 0$. Функции $\varrho_j(x, t) = \varrho_j^-(x, t)$, $v_j(x, t) = v_{j,e}^-(x, t)$, $T_j(x, t) = T_{j,e}^-(x, t)$, $(\chi)^+ H^e(x, t) = \varrho_{j,e}^+(x, t) - \varrho_{j,e}^-(x, t)$, $(\chi)^+ H^v(x, t) = v_{j,e}^+(x, t) - v_{j,e}^-(x, t)$, $(\chi)^+ H^T(x, t) = T_{j,e}^+ - T_{j,e}^-$. Функции $v_{j,e}^\pm$, $\varrho_{j,e}^\pm$, $T_{j,e}^\pm$ — любые гладкие равномерно ограниченные продолжения решения сингулярно-предельной задачи (5.3.9)–(5.3.14) v_j^\pm , ϱ_j^\pm , T_j^\pm на $\Omega_T = \mathbb{R}^1 \times (0, T)$.

Как мы покажем ниже, сингулярно-предельная задача в этом случае описывает разрывные решения линеаризованной системы уравнений Эйлера (5.3.1)–(5.3.3) ($\sigma = q = 0$) в окрестности состояния равновесия $\varrho_0 = 1$, $v_0 = \mu$, $T_0 = 3/5$:

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \mu \partial_x) \varrho_1^\pm(x, t) + \partial_x v_1^\pm(x, t) &= 0, \\
(\partial_t + \mu \partial_x) v_1^\pm(x, t) + \frac{3}{5} \partial_x \varrho_1^\pm(x, t) + R \partial_x T_1^\pm(x, t) &= 0, \\
(\partial_t + \mu \partial_x) \left(T_1^\pm(x, t) - \frac{2}{5} \varrho_1^\pm(x, t) \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

данные Коши:

$$T_1^\pm|_{t=0} = T_\pm^{0,1}(x), \quad v_1^\pm|_{t=0} = v_\pm^{0,1}(x), \quad \varrho_1^\pm|_{t=0} = \varrho_\pm^{0,1}(x).$$

Характеристические скорости системы (5.3.16) — $\overset{\circ}{\varphi} = \mu, \mu \pm 1$ и соответствующие собственные векторы матрицы

$$\mathcal{A}^\tau \mathcal{R}^\tau = 0, \quad \mathcal{R}^\tau = (R_\varrho^\tau, R_v^\tau, R_T^\tau)^T, \quad \tau = \mu - \overset{\circ}{\varphi},$$

$$\mathcal{A}^\tau = \begin{pmatrix} \tau & 1 & 0 \\ 1 & \tau & 1 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{2}\tau \end{pmatrix}.$$

Отсюда условия Гюгонио на характеристике:

$$[T_1] = 0, \quad [\varrho_1] = \pm[v_1], \quad \overset{\circ}{\varphi} = \mu \pm 1,$$

$$[\varrho_1] = [v_1] = 0, \quad \overset{\circ}{\varphi} = \mu.$$

Наша задача — показать природу сглаживания разрывных решений системы (5.3.16) решениями системы с грубой релаксацией (5.3.8)–(5.3.14). Подставляя (5.3.15) в первые три уравнения (5.3.8)–(5.3.10) в приближении порядка $O(1/\varepsilon)$, получим

$$\mathcal{A}^T \widehat{H} \chi'(\xi, t) = 0, \quad (5.3.17)$$

откуда следует, что $\widehat{H}^e(t) = H^e|_{x=\varphi(t)} = \mathcal{H}(t)R_\rho^T$, $\widehat{H}^v(t) = \mathcal{H}(t)R_v^T$, $\widehat{H}^T(t) = \mathcal{H}(t)R_T^T$, \mathcal{H} — неизвестная функция. Приближение порядка $O(1)$ описывается неоднородной системой ОДУ на фронте $\Gamma_t = \{x = \varphi(t)\}$, $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \tau(\chi_2^e)'(\xi, t) + (\chi_2^v)'(\xi, t) &= \widehat{\mathcal{F}}_1, \\ \tau(\chi_2^v)'(\xi, t) + \frac{3}{5}(\chi_2^e)'(\xi, t) + R(\chi_2^T)'(\xi, t) &= \widehat{\mathcal{F}}_2, \\ \frac{3}{2}\tau(\chi_2^T)'(\xi, t) - \frac{3}{5}(\chi_2^e)'(\xi, t) &= \widehat{\mathcal{F}}_3. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Здесь для любой гладкой функции $\widehat{F}(\xi, t, x) = F(\xi, t, \varphi(t))$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \overset{\circ}{\varphi}_1 H^e \chi' - [(\varrho_1 + H^e \chi)(v_1 + H^v \chi)]', \\ \mathcal{F}_2 &= \overset{\circ}{\varphi}_1 (H^v + \mu H^e) \chi' - \overset{\circ}{\varphi} [(\varrho_1 + H^e \chi)(v_1 + H^v \chi)]' - \\ &\quad - [(v_1 + H^v \chi)^2 + 2(\varrho_1 + H^e \chi)(v_1 + H^v \chi) + R(T_1 + H^T \chi)(\varrho_1 + H^e \chi)]' - (\chi^\sigma)', \\ \mathcal{F}_3 &= \overset{\circ}{\varphi}_1 \left(\frac{1}{2} \mu^2 H^e + \mu H^v + \frac{3}{2} R H^T + \frac{2}{5} H^e \right) \chi' + \\ &\quad + \overset{\circ}{\varphi} [\mu(\varrho_1 + H^e \chi)(v_1 + H^v \chi) + (v_1 + H^v \chi)^2]' - \\ &\quad - \left[3\mu(v_1 + H^v \chi)^2 + \frac{3}{2} \mu^2 (v_1 + H^v \chi)(\varrho_1 + H^e \chi) + 5R\mu(T_1 + H^T \chi)(\varrho_1 + H^e \chi) + \right. \\ &\quad \left. + 5R(v_1 + H^v \chi)(T_1 + H^T \chi) + 3(v_1 + H^v \chi)(\varrho_1 + H^e \chi) \right]' - \mu \Sigma' - Q'. \end{aligned}$$

Условие разрешимости системы (5.3.18) записывается в виде уравнения

$$R_\rho^T \widehat{\mathcal{F}}_1 + R_v^T \widehat{\mathcal{F}}_2 + R_T^T \widehat{\mathcal{F}}_3 = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^1,$$

из которого можно определить линейную комбинацию функций χ^σ , χ^q . Имеем

$$(R_v^T + \mu R_T^T) \chi^\sigma + R_T^T \chi^q = Q(\chi, \widehat{\varrho}_1, \widehat{v}_1, \widehat{T}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1), \quad (5.3.19)$$

где квадратичная относительно χ форма

$$\begin{aligned} Q(\chi, \widehat{\varrho}_1, \widehat{v}_1, \widehat{T}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1) &= R_\rho^T \widehat{\mathcal{G}}_1 + R_v^T \widehat{\mathcal{G}}_2 + R_T^T \widehat{\mathcal{G}}_3, \\ \mathcal{G}_1 &= \left((\overset{\circ}{\varphi}_1 - v_1) H^e - \varrho_1 H^v - \frac{1}{2} H^e H^v \chi \right) \chi, \\ \mathcal{G}_2 &= \left(\overset{\circ}{\varphi}_1 (H^v + \mu H^e) - \overset{\circ}{\varphi} (\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - 2v_1 H^v - 2(\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - R(T_1 H^e + \varrho_1 H^T) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [(\overset{\circ}{\varphi} + 2) H^e H^v + (H^v)^2 + R H^T H^e] \chi \right) \chi, \\ \mathcal{G}_3 &= \left(\overset{\circ}{\varphi}_1 \left(\frac{1}{2} \mu^2 H^e + \mu H^v + \frac{3}{2} R H^T + \frac{2}{5} H^e \right) + (\overset{\circ}{\varphi} \mu + 3(\mu^2 + 1))(\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - \right. \end{aligned}$$

$$-4v_1H^v + 5R(\mu(T_1H^e + \varrho_1H^T) + v_1H^T + T_1H^v) + \frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{\varphi} [\mu H^e H^v + (H^v)^2] - 3\mu(H^v)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}\mu^2 H^v H^e + 5R(\mu H^T H^e + H^v H^T) + 3H^v H^e \right] \chi.$$

Из условия $(\chi)^- = 0$ следует, что

$$Q(0, \widehat{\varrho}_1, \widehat{v}_1, \widehat{T}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1) = 0. \quad (5.3.20)$$

Если условие (5.3.19) выполнено, то решение (5.3.18) записывается в виде

$$\overline{\chi}_2(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\xi} (\mathcal{A}^\tau)^{-1} \overline{\mathcal{F}}(s, t) ds, \quad \overline{\chi} = (\chi_2^e, \chi_2^v, \chi_2^T)^T, \quad \overline{\mathcal{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_1, \widehat{\mathcal{F}}_2, \widehat{\mathcal{F}}_3)^T.$$

Положим

$$N_T^\tau = -\frac{15}{8}R_T^\tau, \quad N_v^\tau = -\frac{5}{4} \left[R_v^\tau - \frac{1}{2}\mu R_T^\tau \right].$$

В первом приближении из уравнений (5.3.11), (5.3.12) получим

$$l_v \frac{d\chi}{d\xi} = -\frac{4}{5}\chi^\sigma, \quad l_T \frac{d\chi}{d\xi} = -\frac{4}{5} \left(\frac{2}{3}\chi^q + \mu\chi^\sigma \right), \quad (5.3.21)$$

$$l_v^\tau = -\overset{\circ}{\varphi} \left(\frac{2}{3}\mu^2 H^e + \frac{4}{3}\mu H^v \right) + \\ + \frac{2}{3}\mu^3 H^e + 2\mu^2 H^v + \frac{4}{3}R\mu H^T + \frac{4}{5}(H^v + \mu H^e), \\ l_T^\tau = -\overset{\circ}{\varphi} \left[\frac{1}{2}\mu^3 H^e + \frac{3}{2}\mu^2 H^v + \frac{5}{2}R\mu H^T + \frac{3}{2}(H^v + \mu H^e) \right] + \\ + \frac{1}{2}\mu^4 H^e + 2\mu^3 H^v + 4R\mu^2 H^T + \frac{12}{5}(\mu^2 H^e + \mu H^v) + \frac{9}{10}H^e + 3RH^T.$$

Умножая первое уравнение в (5.3.21) на N_v^τ , второе — на N_T^τ и складывая, мы можем исключить линейную комбинацию (5.3.19)

$$(N_v^\tau l_v + N_T^\tau l_T) \frac{d\chi}{d\xi} = -\frac{4}{5}Q(\chi, \widehat{\varrho}_1, \widehat{v}_1, \widehat{T}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1). \quad (5.3.22)$$

Таким образом, мы получили уравнение для χ . Существование решения $\chi \in \mathcal{K}$ приводит к тому, что все функции $\Sigma, Q, \mathcal{M}, \Pi \in \mathcal{S}$ в силу структуры оператора производства энтропии (правых частей уравнений (5.3.11)–(5.3.14)), т.е. являются функциями типа солитона.

Условием существования решения $\chi \in \mathcal{K}$, т.е. сепаратрисного решения, является существование второго вещественного корня у квадратичной формы

$$Q((\chi)^+, \widehat{\varrho}_1, \widehat{v}_1, \widehat{T}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1) = 0, \quad (5.3.23)$$

и неравенство нулю старшего коэффициента

$$(N_v^\tau l_v^\tau + N_T^\tau l_T^\tau) \neq 0. \quad (5.3.24)$$

Так, например, для $\tau = 0$ ($\overset{\circ}{\varphi} = \mu$) имеем

$$l_v^0 = \frac{4}{3}R\mu\widehat{H}^T, \quad l_T^0 = 3R \left(\frac{1}{2}\mu^2 + 1 \right) \widehat{H}^T, \quad \widehat{H}^v = \widehat{H}^e = 0,$$

тогда

$$N_v^0 l_v^0 + N_T^0 l_T^0 = -\frac{5}{2} R \mu \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \mu^2 + 1 \right) \right] \widehat{H^T} = -\frac{15}{16} R \mu \left[\frac{14}{3} + \mu^2 \right] \frac{\widehat{T_1^+} - \widehat{T_1^-}}{(\chi)^+}. \quad (5.3.25)$$

5.4. УСЛОВИЯ ТИПА ЭНТРОПИИ

Как мы покажем ниже, уравнение (5.3.23) однозначно определяет поправку $\overset{\circ}{\varphi}_1$ к скорости фронта $\overset{\circ}{\varphi}$. В силу треугольного вида матрицы первых приближений правых частей уравнений (5.3.13), (5.3.14) функции $\chi^m, \chi^\pi \in \mathcal{S}$ однозначно определяются функциями $\chi', \chi^\sigma, \chi^q \in \mathcal{S}$. Таким образом, чтобы завершить построение первого приближения, достаточно исследовать уравнение (5.3.22).

Квадратичная форма в (5.3.22) имеет вид:

$$Q(\chi, \widehat{\varrho}_1, \widehat{v}_1, \widehat{T}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1) = \chi(\widehat{\alpha}^\tau + \widehat{\beta}^\tau \chi),$$

$$\alpha^\tau = \overset{\circ}{\varphi}_1 \left[R_\varrho^\tau H^e + R_v^\tau (H^v + \mu H^e) + R_T^\tau \overset{\circ}{\varphi}_1 \left(\frac{1}{2} \mu^2 H^e + \mu H^v + \frac{3}{2} R H^T + \frac{2}{5} H^e \right) \right] -$$

$$- R_\varrho^\tau [v_1 H^e + \varrho_1 H^v] - R_v^\tau \left[\overset{\circ}{\varphi} (\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - 2v_1 H^v + 2(\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - \right.$$

$$\left. - R(T_1 H^e + \varrho_1 H^T) \right] + R_T^\tau \left[(\overset{\circ}{\varphi} \mu + 3(\mu^2 + 1))(\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - 4v_1 H^v + \right.$$

$$\left. + 5R(\mu(T_1 H^e + \varrho_1 H^T) + v_1 H^T + T_1 H^v) \right],$$

$$\beta^\tau = -\frac{1}{2} \left(R^e H^e H^v + R_v^\tau [(\overset{\circ}{\varphi} + 2) H^e H^v + (H^v)^2 + R H^T H^e] + \right.$$

$$\left. + R_T^\tau \left[\overset{\circ}{\varphi} [\mu H^e H^v + (H^v)^2] - 3\mu (H^v)^2 + \frac{3}{2} \mu^2 H^v H^e + 5R(\mu H^T H^e + H^v H^T) + 3H^v H^e \right] \right).$$

Положим

$$\widehat{\alpha}^\tau = \gamma^\tau \widehat{\beta}^\tau, \quad (5.4.1)$$

где постоянная $\gamma^\tau, |\gamma^\tau| = 1$, определяется из условия существования строго монотонного решения уравнения

$$(N_v^\tau l_v + N_T^\tau l_T) \frac{d\chi}{d\xi} = -\frac{4}{5} \beta^\tau (\gamma^\tau + \chi) \chi.$$

Здесь условие типа энтропии имеет вид

$$\gamma^\tau (N_v^\tau l_v + N_T^\tau l_T) \beta^\tau < 0. \quad (5.4.2)$$

Из (5.4.1) определяем поправку скорости фронта

$$\overset{\circ}{\varphi}_1 \left[R_\varrho^\tau H^e + R_v^\tau (H^v + \mu H^e) + R_T^\tau \left(\frac{1}{2} \mu^2 H^e + \mu H^v + \frac{3}{2} R H^T + \frac{2}{5} H^e \right) \right] =$$

$$= R_\varrho^\tau [v_1 H^e + \varrho_1 H^v] + R_v^\tau \left[\overset{\circ}{\varphi} (\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - 2v_1 H^v + 2(\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - \right.$$

$$\left. - R(T_1 H^e + \varrho_1 H^T) \right] - R_T^\tau \left[(\overset{\circ}{\varphi} \mu + 3(\mu^2 + 1))(\varrho_1 H^v + v_1 H^e) - \right.$$

$$\left. - 4v_1 H^v + 5R(\mu(T_1 H^e + \varrho_1 H^T) + v_1 H^T + T_1 H^v) \right] +$$

$$+ \gamma^\tau \left(-\frac{1}{2} \left(R^e H^e H^v + R_v^\tau [(\overset{\circ}{\varphi} + 2) H^e H^v + (H^v)^2 + R H^T H^e] - 3\mu (H^v)^2 R_T^\tau + \right. \right.$$

$$\left. + R_T^\tau \left(\overset{\circ}{\varphi} [\mu H^e H^v + (H^v)^2] + \frac{3}{2} \mu^2 H^v H^e + 5R(\mu H^T H^e + H^v H^T) + 3H^v H^e \right) \right).$$

Условие 5.4.1. Потребуем, чтобы

$$R_\rho^T H^e + R_v^T (H^v + \mu H^e) + \frac{1}{2} R_T^T \left(\left(\mu^2 + \frac{4}{5} \right) H^e + \mu H^v + \frac{3}{2} R H^T \right) \neq 0, \quad (5.4.3)$$

$$(N_v^T l_v + N_T^T l_T) \beta^T \neq 0. \quad (5.4.4)$$

Таким образом, условия (5.4.3), (5.4.4) — условия существования единственного решения $\chi \in \mathcal{K}$ уравнения (5.3.22). Условие (5.4.4) в деталях имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{5}{4} \left[R_v^T - \frac{1}{2} \mu R_T^T \right] \left(\overset{\circ}{\varphi} \left(\frac{2}{3} \mu^2 H^e + \frac{4}{3} \mu H^v \right) + \right. \right. \\ & + \frac{2}{3} \mu^3 H^e + 2 \mu^2 H^v + \frac{4}{3} R \mu H^T + \frac{4}{5} (H^v + \mu H^e) \left. \right) + \frac{15}{8} R_T^T \overset{\circ}{\varphi} \left[\frac{1}{2} \mu^3 H^e + \frac{3}{2} \mu^2 H^v + \right. \\ & \left. + \frac{5}{2} R \mu H^T + \frac{3}{2} (H^v + \mu H^e) \right] \left. \right\} \left(- \frac{1}{2} \left(R^e H^e H^v + R_v^T [(\overset{\circ}{\varphi} + 2) H^e H^v + (H^v)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + R H^T H^e \right] + R_T^T \left(\overset{\circ}{\varphi} [\mu H^e H^v + (H^v)^2] - 3 \mu (H^v)^2 + \frac{3}{2} \mu^2 H^v H^e + \right. \right. \\ & \left. \left. + 5 R (\mu H^T H^e + H^v H^T) + 3 H^v H^e \right) \right) \neq 0. \quad (5.4.5) \end{aligned}$$

Как видим, условия разрешимости (5.4.3), (5.4.4) являются условиями на *допустимые (энтропийные)* начальные скачки

$$[T_1]|_{t=0} = \widehat{H^T}|_{t=0}, \quad [v_1]|_{t=0} = \widehat{H^v}|_{t=0}, \quad [\varrho_1]|_{t=0} = \widehat{H^e}|_{t=0}$$

данных Коши для сингулярно-предельной задачи (5.3.16). Теперь можно сформулировать полученный результат.

Предложение 5.4.1. Пусть на конечном временном интервале $(0, T_0)$ существует классическое решение сингулярно-предельной задачи (5.3.16) такое, что на нем справедливы условия (5.4.3), (5.4.4). Тогда существует стабилизирующееся асимптотическое решение задачи Коши для системы (5.3.1)–(5.3.7) с любой точностью, со специальными начальными данными, определяемыми значением асимптотического решения при $t = 0$. Главный член асимптотики имеет вид

$$\tilde{\varrho}_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \varrho_0 + \varepsilon \left(\varrho_1(x, t) + H^e \chi(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2), \quad (5.4.6)$$

$$\tilde{v}_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = v_0 + \varepsilon \left(v_1(x, t) + H^v \chi(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{T}_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = T_0 + \varepsilon \left(T_1(x, t) + H^T \chi(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\chi^\sigma(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3),$$

$$q_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\chi^q(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3),$$

$$m_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\chi^m(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3),$$

$$\Delta_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\chi^\pi(\xi, t) \right) \Big|_{\xi = \frac{x - \varphi(x) - \varepsilon \varphi_1(x)}{\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^3).$$

Здесь $\varepsilon^3 = 1/(B \varrho_0)$, функции $\chi(\xi, t)$, $\chi_j^e(\xi, t)$, $\chi_j^v(\xi, t)$, $\chi_j^T(\xi, t) \in \mathcal{K}$ такие, что $(\chi)^- = (\chi_j)^- = 0$.
Функции

$$\varrho_j(x, t) = \varrho_j^-(x, t), \quad v_j(x, t) = v_{j,e}^-(x, t), \quad T_j(x, t) = T_{j,e}^-(x, t),$$

$$\begin{aligned}
 (\chi)^+ H^e(x, t) &= \varrho_{j,e}^+(x, t) - \varrho_{j,e}^-(x, t), & (\chi)^+ H^v(x, t) &= v_{j,e}^+(x, t) - v_{j,e}^-(x, t), \\
 (\chi)^+ H^T(x, t) &= T_{j,e}^+ - T_{j,e}^-.
 \end{aligned}$$

Здесь $v_{j,e}^\pm$, $\varrho_{j,e}^\pm$, $T_{j,e}^\pm$ — любые гладкие равномерно ограниченные продолжения решения сингулярно-предельной задачи (5.3.16) v_j^\pm , ϱ_j^\pm , T_j^\pm на $\Omega_T = \mathbb{R}^1 \times (0, T)$.

5.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенные построения без труда переносятся на многомерный случай.

Комментарий. Заметим, что амплитуда неравновесных переменных в случае жесткой релаксации, рассмотренном в этой главе, на порядок меньше, чем в случае общей релаксации (умеренной), который был исследован в § 5.3. Существенно, что в случае жесткой релаксации все неравновесные переменные σ , q , m , $\Delta \in \mathcal{S}$ оказались функциями типа солитона, амплитуда которых на порядок меньше амплитуды базовых переменных. Таким образом, мы имеем стремление к равновесию при $\varepsilon \rightarrow 0$. Существенно еще и следующее: только первые неравновесные переменные p_{ij} , q_j , девиатор давления и поток, имеющие физический смысл, являются образующими всех остальных моментов высшего порядка. Остается открытым вопрос о регуляризации разрывных решений системы уравнений Эйлера умеренной силы. Останутся ли первые моменты p_{ij} , q_i образующими моментов высших порядков?

Первым этапом исследования этой проблемы будет задача о существовании сепаратрисных решений системы ОДУ, получаемой из (5.3.1)–(5.3.7) подстановкой решения типа бегущей волны

$$\begin{aligned}
 U &= \left(Y^e(x - \varphi(t)), Y^v(x - \varphi(t)), Y^T(x - \varphi(t)), \right. \\
 &\quad \left. Y^\sigma(x - \varphi(t)), Y^q(x - \varphi(t)), Y^m(x - \varphi(t)), Y^\Delta(x - \varphi(t)) \right)^T.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим стационарные решения, когда $\varphi(t) = \text{const}$. Стационарную систему ОДУ законов сохранения с релаксацией можно записать в виде

$$\partial_x \overline{f(U)} = \partial_U \overline{f(U)} \partial_x U = \overline{r(U)}. \quad (5.5.1)$$

Это линейная система. Свойства ее решений строго зависят от структуры матрицы $\partial_U \overline{f(U)}$ и вектора производства энтропии $\overline{r(U)}$. Рассмотрим кусочно-постоянное стационарное решение системы уравнений Эйлера с равновесным состоянием ϱ_0 , v_0 , T_0 до разрыва и равновесным состоянием ϱ_1 , v_1 , T_1 после разрыва. Для ОДУ (5.5.1) исследуется проблема существования сепаратрисного решения, сглаживающего эту ударную волну, т.е.

$$U^+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} U = (\varrho_1, v_1, T_1, 0, \dots)^T, \quad U^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} U = (\varrho_0, v_0, T_0, 0, \dots)^T,$$

с нулевыми значениями для неравновесных переменных. Тогда адиабатическая скорость звука в $\pm\infty$ дается выражениями

$$a_1 = \sqrt{\frac{5}{3} RT_1}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{5}{3} RT_0}$$

соответственно. Условия Гюгонио на разрыве:

$$\varrho_1 = \frac{4M_0^2}{M_0^2 + 3} \varrho_0, \quad v_1 = \frac{M_0^2 + 3}{4M_0^2} v_0, \quad T_1 = \frac{5M_0^4 + 14M_0^2 - 3}{16M_0^2} T_0, \quad (5.5.2)$$

$M_0 = v_0/a_0$ — число Маха на $-\infty$. В силу равновесия на $\pm\infty$, производство энтропии $\overline{r}(U^\pm) = 0$, но для конечных значений $x \in \mathbb{R}^2$, вообще говоря, $\overline{r}(U(x)) \neq 0$. В то же время детерминант $\det(\partial_U \overline{f(U(x))}) = 0$, если v -компонента $U(x)$ равна характеристической скорости c . Так, для 14-моментной системы имеем

$$D_0 = \det \left(\partial_U \overline{f(U^-)} \right) = 0, \text{quadесли } v_0 = \begin{cases} c_0^{(1)} = 0.900a_0, \\ c_0^{(2)} = 1.763a_0, \end{cases} \quad (5.5.3)$$

$$D_1 = \det \left(\partial_U \overline{f(U^+)} \right) = 0 \quad \text{если} \quad v_1 = \begin{cases} c_1^{(1)} = 0.900a_1, \\ c_0^{(2)} = 1.763a_1. \end{cases} \quad (5.5.4)$$

Следовательно, система вырождается на $-\infty$, если $M_0 = 0.9$ или $M_0 = 1.763$. Соотношения (5.5.2) позволяют описать связь между характеристическими скоростями на $+\infty$ и $-\infty$

$$c_1 = \left(\frac{5M_0^4 + 14M_0^2 - 3}{16M_0^2} \right)^{1/2} c_0.$$

Отсюда получаем значения числа Маха M_0 , при которых возникает характеристическая скорость $v_1 = c_1$ на $+\infty$:

$$M_0 = \left(\frac{3a_0^2 + c_0^2}{5c_0^2 - a_0^2} \right)^{1/2}.$$

Так, для двух характеристических скоростей 14-моментной системы (5.5.2) критические значения числа Маха: $M_0 = 0.648$ и $M_0 = 1.117$. При этих критических значениях числа Маха $v_1 = c_1^{(1)}$ или $v_1 = c_1^{(2)}$. Если число Маха возрастает, начиная с $M_0 = 1$, то 14-моментная система (5.5.2) вырождается, т.е. $\det \left(\partial_U \overline{f(U^+)} \right) = 0$ на $+\infty$ при $M_0 = 1.117$. Для $M_0 > 1.117$ имеем

$$D_0 < 0, \quad D_1 > 0,$$

следовательно, точка, в которой детерминант обращается в нуль, движется из $+\infty$ в направлении $-\infty$. Таким образом, существует критическое значение $x_* \in \mathbb{R}^1$ такое, что $\det \left(\partial_U \overline{f(U(x_*))} \right) = 0$. Для $M_0 = 1.763$ критическая точка приходит в $-\infty$. При дальнейшем возрастании числа Маха критическое значение движется в обратном направлении от $-\infty$ к $+\infty$. Но здесь есть существенное различие между этими критическими значениями. Напомним, что $M_0 = 1.763$ — максимальное значение числа Маха, когда возникает максимальная характеристическая скорость $v_1 = 1.763a_0$ на $-\infty$. В невырожденном случае имеем

$$\partial_x U = \frac{1}{\det \left(\partial_U \overline{f(U)} \right)} \mathcal{M} \bar{r}(U),$$

где \mathcal{M} — матрица миноров. Численные вычисления показывают, что:

$$\mathcal{M} \bar{r}(U(x_*(M_0))) = 0 \quad \forall M_0 \in [1.117, 1.763];$$

$$\mathcal{M} \bar{r}(U(x_*(M_0))) \neq 0 \quad \forall M_0 > 1.763.$$

Таким образом, сепаратрисное решение существует до наибольшей характеристической скорости на $-\infty$. Этот результат численного эксперимента имеет простую физическую интерпретацию. Если скорость в газе до фронта выше наибольшей характеристической скорости, то возникает опрокидывание, т.е. нет непрерывной структуры ударной волны. Как мы видели, для линеаризованных систем моментов Града—Эрмита выполнено равномерное условие гиперболических пучков, определяющее иерархию корней дискриминантного уравнения, а, следовательно, и иерархию волн при предельном переходе по параметру или на больших временах. Какова роль промежуточных операторов с их чрезвычайно жесткой структурой в существовании сепаратрисного решения до критических скоростей момента опрокидывания? На этот вопрос интересно было бы получить ответ в ближайшем будущем.

Часть 6

МОДЕЛЬ КАНА—ХИЛЛАРДА

В этой главе мы рассмотрим феноменологический подход к построению моделей механики сплошных сред, описывающих процессы сепарации двухфазных смесей и кристаллизации двухкомпонентных сплавов. Но прежде необходимо привести некоторые понятия классической термодинамики, связанные с устойчивостью.

6.1. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ РАВНОВЕСНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Классическая термодинамика оперирует с термодинамическими системами, т.е. макроскопическими телами, находящимися в равновесном или близком к равновесному состояниях. Как можно аксиоматизировать состояния равновесия?

Состояние любого макроскопического тела [25] описывается с помощью ряда параметров. Состояние газа или жидкости (однородной системы) может быть задано давлением (P), объемом (V), температурой (T); состояние пленки жидкости — коэффициентом поверхностного натяжения (σ), площадью пленки (S) и температурой (T). Не всегда можно предписать единое значение параметра для системы. Например, рассмотрим газ в сосуде, разделенном пополам перегородкой с краном. Пусть газ находится в левой половине сосуда, а в правой — вакуум. Если открыть кран, то плотность газа, поступающего в правую половину сосуда, будет меняться, и указать значение плотности газа для всей системы невозможно, пока не закончится переход газа из левой половины в правую. Опыт показывает, что в таких состояниях в системах существуют потоки (поток тепла, поток массы газа и т.д.), и эти состояния систем не остаются неизменными, если они не поддерживаются искусственно с помощью теплопроницаемых перегородок, газопроницаемых стенок и т.д. По прошествии некоторого времени устанавливается состояние, в котором каждый параметр имеет одно и то же значение во всех точках системы и остается неизменным сколь угодно долго, если не меняются внешние условия. Такое состояние называется *равновесным*. В противном случае состояние называется *неравновесным*, например, в системе существуют градиенты макроскопических параметров.

Процесс перехода из неравновесного состояния в равновесное называется *релаксацией*. При этом для выравнивания значения каждого параметра по всему объему системы существует свое характерное время — *время релаксации*. Максимальное значение спектра времен определяет время релаксации системы. Оценку времени релаксации нельзя провести в рамках термодинамики, это задача физической кинетики, так как механизм релаксации есть, по существу, процесс переноса молекул (атомов, электронов и т.д.).

Теперь рассмотрим процесс, протекающий в термодинамической системе значительно медленнее, чем процесс релаксации, т.е. на любом этапе этого процесса значения всех параметров будут успевать выравниваться. Такой процесс можно представить как цепочку бесконечно близких друг к другу равновесных состояний. В таких процессах в любой момент времени градиенты всех параметров равны нулю. Отсюда следует, что в силу симметрии процесс может быть обращен во времени, и при обратном процессе система пройдет через те же состояния, что и при прямом процессе, но в обратном порядке. Такие достаточно медленные процессы принято называть *равновесными процессами* (или обратимыми). Ясно, что все реальные процессы являются неравновесными и могут лишь в большей или меньшей степени приближаться к равновесным. В основе аксиоматики классической термодинамики лежит предположение о возможности приближения реальных процессов к равновесным.

Параметры, описывающие состояние системы, не являются независимыми, а могут быть связаны одним или несколькими уравнениями, которые называются *уравнениями состояния*. Термодинамика постулирует эти уравнения, черпая знания о них из опыта или других разделов теоретической физики (обычно из статистической физики).

Для отыскания условий равновесия такой системы с помощью свободной энергии [12] будем считать температуру системы постоянной, а стенки сосуда, содержащего нашу систему,

неподвижными и абсолютно твердыми, так что работа внешних сил равна нулю. Обозначим через n_1 , v_1 , $\Psi_1(v_1)$ массу, удельный объем (объем единицы массы) и удельную свободную энергию (свободную энергию единицы массы) первой фазы, а через n_2 , v_2 , $\Psi_2(v_2)$ — те же величины для второй фазы. Классическая термодинамика говорит, что в состоянии равновесия свободная энергия смеси $\Psi = n_1\Psi_1 + n_2\Psi_2$ достигает минимума, поэтому

$$\delta(n_1\Psi_1 + n_2\Psi_2) = 0 \quad (6.1.1)$$

для всех возмущений n_1 , n_2 , v_1 и v_2 , удовлетворяющих условиям постоянства массы и давления:

$$\delta(n_1 + n_2) = 0,$$

$$\delta(n_1v_1 + n_2v_2) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\delta n_1 + \delta n_2 = 0 \implies \delta n_2 = -\delta n_1,$$

$$n_2\delta v_2 = -n_1\delta v_1 - (v_1 - v_2)\delta n_1.$$

Простые вычисления показывают, что в этом случае из (6.1.1) получаем

$$\Psi_1\delta n_1 + n_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial v_1}\delta v_1 - \Psi_2\delta n_1 + n_1\frac{\partial\Psi_2}{\partial v_2}[n_1\delta v_1 + (v_1 - v_2)\delta n_1] = 0.$$

В силу произвольности δn_1 , δv_1 получаем, что в состоянии равновесия давление $p = -\partial_v\Psi$ и свободная энергия Гиббса $E^G(v) = \Psi(v) - v\partial_v\Psi(v) = \Psi(v) + pv$ в обеих фазах должны быть одинаковы:

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial v_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial v_2} \implies p_1 = p_2, \quad (6.1.2)$$

$$\Psi_1 - v_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial v_1} = \Psi_2 - v_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial v_2} \implies (E_1^G)_{\text{eq}} = (E_2^G)_{\text{eq}}.$$

Условия (6.1.2) являются правилом Максвелла для определения значений удельного объема v_1^{eq} , v_2^{eq} , отвечающих равновесному состоянию.

6.2. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Теперь рассмотрим процесс в состоянии, близком к равновесному. Определив энтропию, свободную энергию и термодинамический потенциал, классическая термодинамика, если рассуждать строго, не имеет права отнести эти величины к неоднородным состояниям. Например, такой системе, как жидкость, соприкасающаяся со своими парами при давлении, не соответствующем состоянию равновесия, нельзя приписывать определенного значения свободной энергии. Но, как пишет Г. А. Лоренц, «этот случай можно, однако, так видоизменить, что наши определения (энтропии, свободной энергии и термодинамического потенциала) будут применимы. Отделив перегородкой жидкость от ее паров, мы можем приписать системе, полученной таким образом, вполне определенную свободную энергию, равную сумме свободных энергий обеих ее частей. Таким же искусственным приемом можно воспользоваться и для других систем, состоящих из двух или более частей или фаз, обладающих различными свойствами и соприкасающихся друг с другом. Поместив подобную перегородку, мы, конечно, вызовем изменения в пограничном слое. Но этими изменениями можно пренебречь, если толщина пограничного слоя достаточно мала по сравнению с объемами жидкости и пара, и тогда можно применять предшествующие рассуждения. Неоднородный газ можно было бы разделить перегородками на отдельные ячейки, а внутри каждой из этих ячеек рассматривать газ как однородную систему. Под свободной энергией всей системы мы понимаем тогда сумму свободных энергий ее частей.»

Сказанное выше становится неприемлемым, если внешние силы производят возмущения плотности в весьма малых объемах, когда столь малая масса уже не обладает свойствами самой среды, например, в случае появления мельчайших капель пара в жидкости. В этом же случае становятся существенными процессы в переходной зоне — зоне фазового перехода, где среда перестает быть однородной.

Приведем пример [36] физической постановки задачи. Исследуется устойчивость несжимаемой жидкости, которая неустойчива в присутствии сформировавшейся другой, более устойчивой

фазы. «Здесь, прежде всего, требуется определить, метастабильна ли эта фаза или нет, т.е. устойчива ли она относительно любых возможных бесконечно малых возмущений концентрации в отсутствие второй фазы. Если это так, то существует барьер к преобразованию этой фазы в более устойчивую. Требуется оценить «высоту» этого барьера, минимизируя работу, необходимую для трансформации первоначальной фазы в состояние, в котором она может преобразовываться самопроизвольно.» С этой точки зрения Гиббс разделяет возможные бесконечно малые возмущения на две категории. В первую входят возмущения дальнего действия, которые малы по амплитуде, но велики по протяженности. Например, малые возмущения концентрации, распространяющиеся на большой объем. Если фаза неустойчива относительно таких возмущений, то не существует барьера к непрерывному преобразованию этой фазы в более устойчивую. В терминах классической термодинамики Гиббс формулирует необходимые условия такого рода возмущений. Двухкомпонентная система трансформируется самопроизвольно, если для свободной энергии по Гиббсу $(\partial_c^2 E_G)_{T,P} < 0$, где c — концентрация. На фазовой диаграмме граница области неустойчивости определяется условием $(\partial_c^2 E_G)_{T,P} = 0$ и обычно называется спинодалом. Вторая категория возмущений, рассмотренная Гиббсом, — возмущения большие по амплитуде, но малые в протяженности. Например, бесконечно малые капельки вещества со свойствами, близкими к более устойчивой фазе. Метастабильная фаза всегда устойчива относительно такого рода возмущений, как капли, поскольку в этом случае возникает положительное поверхностное натяжение. Существует критический размер капли, когда она находится в неустойчивом равновесии с окружающей фазой. Любое дальнейшее бесконечно малое возрастание такой капли (или критического ядра) может увеличиваться без какого либо внешнего воздействия. И наоборот, при малейшем уменьшении размера капли она исчезает. В этом случае необходима энергия (существует барьер) для зарождения критического ядра. Одна из интереснейших задач математической физики — описать нуклеацию (зарождение критического ядра) и процессы вблизи спинодала. В рамках классической термодинамики при вызванных ею искусственных предположениях об однородности капли вплоть до поверхности раздела с внешней фазой Гиббс доказал, что для сохранения гидростатического равновесия радиус r_{cr} критического ядра должен быть таким, что разность давлений между ядром и внешней фазой

$$P_i - P_{ext} = 2 \frac{\sigma}{r_{cr}}, \quad (6.2.1)$$

где σ — подходящее определенное поверхностное натяжение. Гиббс для σ использовал поверхностное натяжение плоскости, разделяющей две сосуществующие в равновесии концентрации c^α, c^β фаз α и β , соответствующие равновесным значениям удельного объема (6.1.2). Когда радиус капли $r > r_{cr}$, давление, оказываемое поверхностью капли, недостаточно для предотвращения ее роста. С другой стороны, если $r < r_{cr}$, то давление, оказываемое поверхностью капли, больше, чем $P_i - P_{ext}$, что, как мы отмечали, вызывает исчезновение капли. При фиксированных значениях радиуса капли, концентрации и давления Гиббс вычислил минимум работы, требуемой для формирования капли

$$W = 16 \frac{\pi}{3} (P_i - P_{ext})^{-2} \sigma^3 = 2 \frac{\pi}{3} r^3 (P_i - P_{ext}) = 4 \frac{\pi}{3} r^2 \sigma.$$

Таким образом, (6.1.2) определяет возрастание давления, необходимое для сохранения капли в равновесии с внешней фазой. В дальнейшем (6.2.1) будем называть классической трактовкой проблемы нуклеации.

В [36] был предложен другой подход к исследованию неоднородных систем, состоящих из областей чистых (однородных) фаз и межфазной зоны, где среда неоднородна. Эту зону в дальнейшем будем называть зоной фазового перехода. Было предложено новое определение свободной энергии для неоднородных сред, зависящее от одной из величин, например, концентрации или плотности одной из фаз. Рассматривается двухфазная α и β (двухкомпонентная) система, в которой неоднородной величиной является концентрация $c(x, t)$ (доля фазы (компоненты) β в единице удельного объема $V = 1/\rho$, где ρ — распределение плотности). Предполагается, что в области неоднородности распределение свободной энергии $f(c, \nabla c, \nabla^2 c, \dots)$ (по Гельмгольцу) одновременно зависит от распределения концентрации c и ее

производных как *независимых переменных*. Чтобы гарантировать сосуществование двух фаз α , β (см. (6.1.2)), конфигурационное распределение для однородных концентраций $f_0(c) = f(c, 0, \dots)$ должно быть невыпуклой функцией (типа Ван-дер-Ваальса) с двумя точками минимума $c = c_1^m$, $c = c_2^m$ и одной точкой максимума $c = c_c$, так что точки касания $(c^\alpha, f_0(c^\alpha))$, $(c^\beta, f_0(c^\beta))$ опорной к графику f_0 прямой определяют равновесные значения c^α , c^β концентрации. Тогда для свободной энергии по Гиббсу $E_G(c) = f_0(c) - f_0(c^\alpha) - \partial_c f_0(c^\alpha)(c - c^\alpha)$ выполнено (6.1.2). Теперь можно определить функционал свободной энергии для неоднородных распределений концентрации объема V в следующем виде:

$$\mathcal{E}(c) = \int_V \left(f_0(c) + \kappa_{ij}^{(1)}(c) \partial_{x_i} \partial_{x_j} c + \kappa_{ij}^{(2)}(c) \partial_{x_i} c \partial_{x_j} c + \dots \right) dV. \quad (6.2.2)$$

Подынтегральным выражением в (6.2.2) является ряд Тейлора распределения f ,

$$\kappa_{ij}^{(2)}(c) = (\partial_{\partial_{x_i} c \partial_{x_j} c} f)(c, 0, \dots), \quad \kappa_{ij}^{(1)}(c) = (\partial_{\partial_{x_i} c} f)(c, 0, \dots).$$

Мы предположили, что среда неполяризованная, тогда $L_i = (\partial_{\partial_{x_i} c} f)(c, 0, \dots) \equiv 0$. Для кубического кристалла или изотропной среды $\kappa_{ij}^{(2)} = 0$, $\kappa_{ij}^{(1)} = 0$, $i \neq j$, и $\kappa_{ii}^{(2)} = \kappa^{(2)} = (\partial_{\Delta c} f)(0, \dots)$, $\kappa_{ii}^{(1)} = \kappa^{(1)} = (\partial_{|\nabla c|^2} f)(0, \dots)$. Если рассматриваемый объем V достаточно большой, и класс распределений c стабилизируется на границе области V к равновесному классу, например, c^α , то в первом приближении свободная энергия неоднородного состояния изотропной системы

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(c) &= \int_V \left(f_0(c) + \kappa_{ij}^{(1)}(c) \partial_{x_i} \partial_{x_j} c + \kappa_{ij}^{(2)}(c) \partial_{x_i} c \partial_{x_j} c \right) dV = \\ &= \int_V \left(f_0(c) + \kappa(c) (\nabla c)^2 \right) dV, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

где $\kappa(c) = -\partial_c \kappa^{(1)}(c) + \kappa^{(2)}(c)$. Таким образом, в первом приближении свободная энергия неоднородного состояния определялась бы вкладом свободной энергии объема, если бы распределение концентрации в нем было однородным (конфигурационная часть свободной энергии), и так называемой «градиентной» частью свободной энергии.

Прежде всего, в терминах свободной энергии (6.2.3) постараемся описать условия динамического равновесия двух фаз при наличии переходной зоны неоднородного распределения концентрации. Будем рассматривать возмущения c однородной концентрации $c_0 = \text{const}$, $c^\alpha < c_0 < c^\beta$ смеси, т.е.

$$\int_V (c - c_0) dV = 0. \quad (6.2.4)$$

Свободная энергия смеси с промежуточной концентрацией определяется следующим образом:

$$f_0(c_0) = f_0(c^\alpha) + \partial_c f_0(c^\alpha)(c_0 - c^\alpha).$$

Теперь можно определить энергию (работу для изотермического процесса при постоянном объеме V), необходимую для формирования смеси (6.2.4) при наличии переходной зоны (зоны неоднородной концентрации)

$$\begin{aligned} W(c) &= \int_V \left(f_0(c) + \kappa(c) (\nabla c)^2 \right) dV - \int_V \left(f_0(c^\alpha) + \partial_c f_0(c^\alpha)(c - c^\alpha) \right) dV = \\ &= \int_V \left(E_G(c) + \kappa(c) (\nabla c)^2 \right) dV. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Тогда динамическое состояние неустойчивого равновесия описывается уравнением диффузии

$$\partial_t c + \partial_{x_i} J_i(c) = 0, \quad \int_V (c - c_0) dV = 0,$$

с расширенным диффузионным потоком вида $J(c) = \nabla \mathcal{D}_{\text{var}}(c)$, Таким образом, первая часть диффузионного потока J приводит к классическому диффузионному уравнению Фикке [48], вторая часть, введенная Каном и Хиллардом, позволяет определить поверхностное натяжение и свободную энергию переходной зоны. Здесь вариационная производная функционала (6.2.5)

$$\mathcal{D}_{\text{var}}(c) = \partial_c E_{\mathbf{G}}(c) - \nabla(\kappa(c)\nabla c).$$

Для простоты за f_0 возьмем полином Ландау $f_0(c) = [(c^\alpha - c_0)^2 - (c - c_0)^2]^2$, $c_0 = (c^\beta + c^\alpha)/2$.

6.3. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СЕПАРАЦИЯ

Рассмотрим простейшую модель [27], описывающую неизотермический процесс фазового перехода в двухфазной среде, состоящей из жидкой и твердой фаз и зоны фазового перехода, когда одна из фаз (новая фаза) прошла процесс нуклеации (зарождения), и исследуем динамику ее устойчивого роста. Таким образом, мы будем исследовать процесс, когда первая стадия разделения фаз завершена, и области жидкой и твердой фаз сформировались. Основная задача состоит в нахождении распределения концентраций каждой из фаз и в исследовании динамики фронта — свободной границы, разделяющей эти фазы. Необходимо оценить насколько адекватно описание этой модели законам классической термодинамики, и, прежде всего, закону Гиббса, при этом сняты жесткие ограничения классической термодинамики такие, например, как отсутствие переходной зоны при описании неравновесного процесса фазового перехода, о которых мы говорили выше в связи с моделью Кана—Хилларда.

В силу закона о сохранении массы достаточно определить концентрацию лишь одной из фаз в каждой точке среды в любой момент времени. В [27] была предложена математическая модель этого неравновесного процесса с двумя неизвестными величинами: концентрацией жидкой фазы $c(x, t)$ и температурой $T(x, t)$ по Кельвину

$$\partial_t \left(T + \frac{l}{2} \varphi(c) \right) = \kappa \Delta T + f(x, t), \quad (6.3.1)$$

функция порядка $\varphi = 2 \frac{c - c^-}{c^+ - c^-} - 1$,

$$\tau \partial_t c = \sigma^2 \Delta \left(\frac{1}{a} \partial_c \Psi(c, T, a) - \sigma^2 \Delta c \right). \quad (6.3.2)$$

Здесь $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $d = 2, 3$, Δ — оператор Лапласа, κ — коэффициент теплопроводности, l — скрытая теплота плавления, τ — время релаксации, малый параметр a — мера ширины зоны фазового перехода (так называемая длина взаимодействия); параметр σ условно (как это сделано в [45]) назовем поверхностным натяжением. В дальнейшем мы сможем описать этот параметр и сравнить его с поверхностным натяжением по закону Гиббса и результатом Кана—Хилларда [36]. Чтобы гарантировать равновесное сосуществование двух фаз, плотность свободной энергии по Гиббсу Ψ должна быть невыпуклой функцией, например, полиномом Ландау

$$\Psi(c) = \psi_0(T) \Psi_0(c) - Q(T)(c - c_0),$$

$$\Psi_0(c) = [(c^- - c_0)^2 - (c - c_0)^2]^2, \quad c_0 = \frac{1}{2}(c^+ + c^-),$$

где функции $\psi_0(T) \geq \text{const} > 0$, $b(T)$ гладко зависят от температуры T , \widehat{c}^\pm — постоянные равновесные значения концентраций фаз, определяемые по диаграмме равновесного состояния [48].

Основные предположения [27] вывода системы (6.3.1), (6.3.2)

$$a \ll 1, \quad \frac{\sigma^2}{a} = O(1).$$

За основной параметр возьмем $\varepsilon = a$. Рассмотрим случай быстрой релаксации $\tau = \gamma\varepsilon$, $\gamma = O(1)$. Для простоты пусть $\sigma^2 = \varepsilon$, $\gamma = \text{const}$, $l = 2$, $\kappa = 1$. Тогда неизотермическое расширение (6.3.1), (6.3.2) уравнения Кана—Хилларда запишется в виде:

$$\partial_t (T + \varphi(c)) = \Delta T + f(x, t), \quad (6.3.3)$$

$$\varepsilon \partial_t c = \Delta (\psi_0(T) \partial_c \Psi_0(c) + \varepsilon Q(T) - \varepsilon^2 \Delta c). \quad (6.3.4)$$

Из свойств функции Ландау при $\varepsilon = 0$ следует справедливость правила Максвелла для свободной энергии по Гиббсу $\Psi(c, T, 0)$, по которому значения концентраций \widehat{c}^\pm в равновесном состоянии должны однозначно определяться равенством на фронте Γ_t давлений двух фаз

$$\partial_c \Psi(\widehat{c}^+, T^+|_{\Gamma_t}, 0) = \partial_c \Psi(\widehat{c}^-, T^-|_{\Gamma_t}, 0), \quad T^+|_{\Gamma_t} = T^-|_{\Gamma_t},$$

температуры

$$T^+|_{\Gamma_t} = T^-|_{\Gamma_t}$$

и непрерывностью свободной энергии по Гиббсу

$$\Psi(\widehat{c}^+, T^+|_{\Gamma_t}, 0) = \Psi_0(\widehat{c}^-, T^-|_{\Gamma_t}, 0).$$

Напомним, что в диффузионном уравнении (6.3.2) первая (конфигурационная) часть диффузионного потока предложена Фикке [48], вторая часть составляет расширение в диффузионном уравнении, предложенное в [36]. Тепловая часть $Q(T)$ введена в [30]. Для простоты будем считать, что областей сформировавшихся фаз только две и $\kappa = 1$. Начальные данные имеют следующий вид:

$$T|_{t=0} = T^0(x, \varepsilon), \quad c|_{t=0} = c^0(x, \varepsilon). \quad (6.3.5)$$

Здесь гладкие (для $\varepsilon > 0$) функции T^0 , c^0 таковы, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c^0 = c_0^\pm(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^0 = T_0^\pm(x), \quad x \in \Omega_0^\pm.$$

Подобласти $\Omega_0^\pm \subset \Omega$ такие, что $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^-$, достаточно гладкая замкнутая поверхность Γ_0 коразмерности 1 определяет начальное положение фронта Γ_t раздела фаз. Будем считать, что Γ_0 не пересекает границу $\partial\Omega$ области Ω и $\partial\Omega_0^+ \cap \partial\Omega = \partial\Omega$. Функции $T_0^\pm, c_0^\pm \in C^\infty(\Omega_0^\pm)$, $c_0^\pm|_{\Gamma_0} = \widehat{c}^\pm$,

$$[T]_{\Gamma_0} = (T_0^+)|_{\Gamma_0} - (T_0^-)|_{\Gamma_0} = 0, \quad [\partial_\nu T]_{\Gamma_0} = (\partial_\nu T_0^+)|_{\Gamma_0} - (\partial_\nu T_0^-)|_{\Gamma_0} = 0.$$

В дальнейшем через $[f]_{\Gamma_t}$, $t \geq 0$, будем обозначать скачок функции f на фронте Γ_t , ∂_{ν_t} — производная по нормали к Γ_t . Формулировка математической модели завершается определением граничных условий

$$\partial_N T|_\Sigma = \partial_N c|_\Sigma = \partial_N \Delta c|_\Sigma = 0; \quad (6.3.6)$$

здесь N — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T_0)$, $0 < t < T_0$.

Для построения асимптотического решения мы применим модифицированный метод Уизема [18] двухмасштабных разложений. Построение асимптотического решения проводится в предположении существования гладкого решения $T^\pm(x, t)$, $\Phi^\pm(x, t)$, $\phi(x)$ сингулярно-предельной задачи:

$$\partial_t T_0^\pm = \Delta T_0^\pm + f(x, t), \quad \Delta(\Phi_1^\pm) = 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T_0), \quad (6.3.7)$$

$$T_0^\pm|_{t=0} = T_0^\pm(x), \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad (6.3.8)$$

$$\partial_N T_0^+|_\Sigma = 0, \quad \partial_N \Phi_1^+|_\Sigma = 0, \quad (6.3.9)$$

$$[T_0]_{\Gamma_t} = 0, \quad [\Phi_1]_{\Gamma_t} = 0, \quad (6.3.10)$$

$$[\partial_{\nu_t} T_0]_{\Gamma_t} = 2V_{\nu_t}, \quad [\partial_{\nu_t} \Phi_1]_{\Gamma_t} = (\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-)V_{\nu_t}, \quad (6.3.11)$$

$$(\Phi_1 - Q(T_0))|_{\Gamma_t} = \frac{1}{3}(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-)^4 \left[2\sqrt{\psi_0(T_0)}\partial_{\nu_t} + \text{div} \left(\sqrt{\psi_0(T_0)} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] (\sqrt{\psi_0(T_0)}). \quad (6.3.12)$$

Здесь $\Gamma_t = \{x \in \Omega, \phi(x) = t\}$ — положение фронта фазового перехода в текущее время t ; $\nu_t = \nabla \phi / |\nabla \phi|$ — нормаль к Γ_t ; $V_{\nu_t} = -1/|\nabla \phi|$ — нормальная скорость движения фронта Γ_t ; $\partial_{\nu_t} = (\nu_t, \nabla)$; γ, σ_1 — постоянные.

Из закона сохранения концентрации следует, что для любого $t \in (0, T_0)$

$$\int_{\Omega} c(x, t, \varepsilon) dx = \int_{\Omega} c^0(x, \varepsilon) dx.$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \widehat{c}^+ |\Omega_t^+| + \widehat{c}^- |\Omega_t^-| &= K_0, \\ \int_{\Omega_t^+} \left(\Phi_1^+ + \frac{1}{2} Q(T_0^+) \right) dx + \int_{\Omega_t^-} \left(\Phi_1^- + \frac{1}{2} Q(T_0^-) \right) dx &= K_1, \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

где постоянная K_j , $j = 0, 1$, является первым коэффициентом разложения

$$\int_{\Omega} c^0(x, \varepsilon) dx = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i K_i.$$

Единственность функций Φ_1^\pm следует из условий нормировки (6.3.11).

Приведем основной результат этого параграфа [45].

Теорема 6.3.1. Пусть существует достаточно гладкое решение сингулярно-предельной задачи (6.3.7)–(6.3.12) и пусть $\text{dist}(\Gamma_t, \partial\Omega) \geq \text{const}$ для любого $t \in [0, T_0)$. Тогда существует формально асимптотическое решение с любой точностью, главный член которого имеет вид

$$\begin{cases} T(x, t, \varepsilon) = T_{0,\varepsilon}^-(x, t) + \frac{T_{0,\varepsilon}^+(x, t) - T_{0,\varepsilon}^-(x, t)}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} \chi(\eta, x) + O(\varepsilon), \\ c(x, t, \varepsilon) = \chi(\eta, x) + O(\varepsilon), \end{cases} \quad (6.3.14)$$

$$\chi(\eta, x) = \widehat{c}^- + \frac{1}{2}(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) \left(\text{th}(\eta + \phi_1(x)) + 1 \right),$$

$$\eta = \beta \frac{(t - \phi(x))}{\varepsilon}, \quad \beta = (\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-)^2 \sqrt{2\psi_0(\widehat{T}_0^+) |\nabla\psi|^{-1}},$$

функции $T_{0,\varepsilon}^\pm(x, t)$ — любое гладкое продолжение решения $T_0^\pm(x, t)$ сингулярно-предельной задачи (6.3.7)–(6.3.12) в область $\Omega \times (0, T_0)$.

Здесь мы использовали обозначение

$$\widehat{F}(x) = F(x, \psi(x)),$$

для любой гладкой функции $F(x, t)$.

Замечание 6.3.3. Нетрудно видеть, что (6.3.14) определяет так называемое самоподобное асимптотическое решение [18]. Это предполагает специальный выбор начальных данных (6.3.5). Функция c^0 должна обладать специальным поведением (не только в главном члене, но также и в младших членах разложения $c^0(x, \varepsilon)$ по параметру ε), в то время, как начальная температура может быть любой гладкой функцией в главном члене асимптотики (в силу условия (6.3.8)). Ее младшие члены должны иметь специальное поведение в ε -окрестности Γ_0 .

Комментарий. Сингулярно-предельная задача (6.3.7)–(6.3.12) является сплетением хорошо известных задач со свободной границей: задачи Меллина—Сикерка [18] (сингулярно-предельной задачи классического уравнения Кана—Хилларда) и так называемой капиллярной задачи со свободной границей (модификации задачи Стефана) [45].

Как будет показано ниже, функции Φ^\pm являются первыми поправками для концентрации. Из (6.3.8) следуют непрерывность температуры, первой поправки для концентрации на фронте фазового перехода и справедливость закона Гиббса—Томпсона. Однако, в силу непрерывности поправки концентрации на фронте фазового перехода, основной закон Гиббса о пропорциональности скачка давления на фронте фазового перехода не выполнен. Таким образом, модель (6.3.1)–(6.3.4) только частично (пропорциональность ширины зоны фазового перехода параметру ε , равенство концентрации ее равновесным значениям \widehat{c}^\pm вне узкой зоны фазового

перехода с точностью $O(\varepsilon^\infty)$, справедливость закона Гиббса—Томпсона) моделирует теорему Гиббса.

Теперь докажем теорему 6.3.1 и рассмотрим общий метод построения самоподобного асимптотического решения задачи (6.3.3)–(6.3.7) с любой точностью.

Введем следующие классы функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{f(\eta, x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1 \times \overline{\mathcal{Q}}), f^\pm(x, t) = \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} f \in C^\infty(\overline{\mathcal{Q}}), \\ &\quad \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \eta^m D^{r\alpha\delta}(f(\eta, x, t) - f^\pm(x, t)) = 0\}; \\ \mathcal{S} &= \{f(\eta, x, t) \in \mathcal{K}, f^+ = f^- = 0\}; \\ \mathcal{P} &= \{f(\eta, x', t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^1 \times \Sigma), \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^m D^{r\alpha'\delta} f(\eta, x', t) = 0\}, \\ D^{r\alpha\delta} &= \frac{\partial^r}{\partial \eta^r} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\delta}{\partial t^\delta} \quad \forall m \geq 0, r \geq 0, \delta \geq 0, |\alpha| \geq 0, \\ D^{r\alpha'\delta} &= \frac{\partial^r}{\partial \eta^r} \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^\delta}{\partial t^\delta} \quad \forall m \geq 0, r \geq 0, \delta \geq 0, |\alpha'| \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\mathcal{Q} = \Omega \times (0, T_0)$.

Лемма 6.3.1. 1) Пусть $S(x, t) \in C^\infty(\overline{\mathcal{Q}})$ такая, что $\partial_t S|_{\Gamma_t} \neq 0$, где $\Gamma_t = \{(x, t) \in \mathcal{Q}, S(x, t) = 0\}$. Тогда для любой функции $f(\eta, x, t) \in \mathcal{K}$ имеем

$$f\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) = f\left(\beta \frac{t - \phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) + O(\varepsilon),$$

где $t = \phi(x)$ — уравнение свободной границы, $S(x, t) = 0$ и $\beta = \partial_t S|_{\Gamma_t}$.

2) Пусть функция $\chi(\eta, x, t) \in \mathcal{K}$ такая, что $\chi^\pm = \widehat{c}^\pm = \text{const}$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{K}$ справедливо представление

$$f(\eta, x, t) = f^- + (f^+(x, t) - f^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x, t) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} + \Xi(\eta, x, t),$$

где $\Xi \in \mathcal{S}$.

3) Соотношения

$$\begin{aligned} (t - \phi(x))^k f\left(\frac{t - \phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) &= O(\varepsilon^k) \quad \forall k \geq 0, \\ g(x, t) f\left(\frac{t - \phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) &= g(x, \phi(x)) f\left(\frac{t - \phi(x)}{\varepsilon}, x, \phi(x)\right) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

справедливы для любой функции $f(\eta, x, t) \in \mathcal{S}$, $g(x, t) \in C^\infty(\overline{\mathcal{Q}})$.

Доказательство, очевидно, является простым следствием определений (см., например, [14]).

Теперь перейдем к построению двухмасштабного асимптотического решения задачи (6.3.3)–(6.3.6). Заметим, что функция $c(x, t, \varepsilon)$ является гладкой аппроксимацией разрывной на фронте Γ_t кусочно-постоянной функции $c_{\text{lim}}(x, t)$, равной $c^\pm(x, t)$ в $\mathcal{Q}^\pm = \Omega^\pm \times (0, T_0)$, т.е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(x, t, \varepsilon) = c_{\text{lim}}$, в то время, как предел $T(x, t, \varepsilon)$ является гладкой аппроксимацией решения сингулярно-предельной задачи $T^\pm(x, t)$, имеющего слабый разрыв на фронте. В таких случаях двухмасштабная асимптотика определяется как разложение по параметру и по гладкости

$$T(x, t, \varepsilon) = \vartheta^M(x, t, \varepsilon) + \mathcal{V}^M\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{M+1}), \quad (6.3.15)$$

$$c(x, t, \varepsilon) = \varepsilon \Phi^M(x, t, \varepsilon) + \mathcal{W}^M\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) + O(\varepsilon^M),$$

$$\begin{aligned}\vartheta(x, t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^M \varepsilon^j T_{j,e}^-(x, t), & \Phi^M(t, x, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^M \Phi_{j,e}^-(x, t), \\ \mathcal{V}^M(\eta, x, t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^M \varepsilon^j \mathcal{V}_j, & \mathcal{W}^M(\eta, x, t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^M \varepsilon^j \mathcal{W}_j, \\ \mathcal{V}_0(\eta, x, t) &= (T_{j,e}^+(x, t) - T_{j,e}^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-},\end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_j(\eta, x, t) = (T_{j,e}^+(x, t) - T_{j,e}^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} + \Xi_j^T(\eta, x) + \Pi_j^T(\tau, x', t), \quad j \geq 1,$$

$$\mathcal{W}_j(\eta, x, t) = (\Phi_{j,e}^+(x, t) - \Phi_{j,e}^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} + \Xi_j^c(\eta, x) + \Pi_j^c(\tau, x', t).$$

Здесь погранслоиная быстрая переменная $\tau = x_N/\varepsilon$, x_N – расстояние от x до $\partial\Omega$, $x' \in \partial\Omega$,

$$T_{j,e}^\pm(x, t), c_{j,e}^\pm(x, t) \in C^\infty(\mathcal{Q}), \quad T_{j,e}^+(x, t)|_{\Gamma_t} = T_{j,e}^-(x, t)|_{\Gamma_t},$$

$$\Phi_j^T(\tau, x', t), \Phi_j^c(\tau, x', t) \in \mathcal{P}, \quad \chi(\eta, x) \in \mathcal{K}, \quad \Xi_j^T(\eta, x), \Xi_j^c(\eta, x) \in \mathcal{S}.$$

В силу леммы 6.3.1 можно считать, что

$$S(x, t, \varepsilon) = t - \phi(x) - \varepsilon\phi_1(x), \quad \phi_j \in C^\infty(\Omega),$$

и, как мы проверим в дальнейшем,

$$\chi(\eta, x) = \widehat{c}^- + \frac{1}{2}(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) \left(\text{th}(\beta\eta + \phi_1(x)) + 1 \right),$$

$$\eta = \frac{t - \phi(x)}{\varepsilon}, \quad \beta = (\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-)^2 \sqrt{2\psi_0(\widehat{T})} |\nabla\psi|^{-1},$$

$$T_{0,e}^-(x, t)|_{\Gamma_t} = T^-(x, t)|_{\Gamma_t}, \quad c_{0,e}^-(x, t)|_{\Gamma_t} = \widehat{c}^-, \quad c_{0,e}^+(x, t)|_{\Gamma_t} = \widehat{c}^+.$$

6.3.1. Асимптотическое решение. Подставляя (6.3.15) в (6.3.3), получим соотношение

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)\vartheta^M - f &= \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{\mathcal{L}}_2 \mathcal{V}^M - \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_\eta \left((1 + \widehat{\Pi}) \mathcal{V}^M - \frac{2}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} \mathcal{W}^M \right) - \partial_\tau \widehat{\Pi}_b \mathcal{V}^M \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\partial_t - \Delta) \mathcal{V}^M - \partial_t \mathcal{W}^M - \varepsilon \partial_t \Phi^M \right\} \Big|_{\eta = \beta \frac{t - \phi}{\varepsilon} - \phi_1}.\end{aligned}\tag{6.3.16}$$

Заметим, что операторы дифференцирования ∂_η , τ , ∂_t , ∂_x в фигурных скобках независимы.

Также, подставляя (6.3.15) в (6.3.4), получим соотношение

$$\begin{aligned}0 &= \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{\mathcal{L}}_2 (\widehat{\partial}_c \Psi(\mathcal{W}^M) - \widehat{\mathcal{L}}_2 \mathcal{W}^M) + \frac{1}{\varepsilon} \left(- \widehat{\mathcal{L}}_2 \widehat{\mathcal{L}}_1 + \widehat{\mathcal{L}}_1 \widehat{\mathcal{L}}_2 \right) \mathcal{W}^M + \widehat{\partial}_c^2 \Psi(\mathcal{W}^M) \widehat{\mathcal{L}}_1 \mathcal{W}^M + \right. \\ &\quad \left. + 2\partial_\eta \left(\widehat{\partial}_c \partial_T \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla\phi, \nabla) (\vartheta^M + \mathcal{V}^M) \right) + 2\partial_\tau \left(\widehat{\partial}_c \partial_T \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla x_N, \nabla) (\vartheta^M + \mathcal{V}^M) \right) \right\} + \\ &\quad + \widehat{\mathcal{L}}_2 (\widehat{\partial}_c^2 \Psi(\mathcal{W}^M) \Phi^M - \Delta) \mathcal{W}^M - \widehat{\mathcal{L}}_1 \widehat{\mathcal{L}}_1 \mathcal{W}^M + 2\partial_\eta \left(\widehat{\partial}_c^2 \partial_T \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla\phi, \nabla) (\Phi^M (\vartheta^M + \mathcal{V}^M)) \right) + \\ &\quad + 2\partial_\tau \left(\widehat{\partial}_c \partial_T \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla x_N, \nabla) (\Phi^M (\vartheta^M + \mathcal{V}^M)) \right) - \Delta \widehat{\mathcal{L}}_2 \mathcal{W}^M + \\ &\quad + \widehat{\partial}_c^2 \Psi(\mathcal{W}^M) \Delta \mathcal{W}^M + \widehat{\partial}_c \partial_T \Psi(\mathcal{W}^M) \Delta (\vartheta^M + \mathcal{V}^M) + \\ &\quad + 2\widehat{\partial}_c \partial_T \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla \mathcal{W}^M, \nabla (\vartheta^M + \mathcal{V}^M)) - \gamma \partial_\eta \mathcal{W}^M \Big\} + \varepsilon \left(- \gamma \partial_t \mathcal{W}^M - (\widehat{\mathcal{L}}_1 \Delta + \Delta \widehat{\mathcal{L}}_1) \mathcal{W}^M + \right. \\ &\quad \left. + \partial_\eta (\widehat{\partial}_c^3 \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla\phi, \nabla) (\mathcal{W}^M \Phi^M)) + \partial_\tau (\widehat{\partial}_c^3 \Psi(\mathcal{W}^M) (\nabla x_N, \nabla) (\mathcal{W}^M \Phi^M)) + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\partial_\eta(\widehat{\partial_c^2 \partial_T \Psi}(\mathcal{W}^M)(\nabla\phi, \nabla)((\vartheta^M + \mathcal{V}^M)\Phi^M)) + \partial_\tau(\widehat{\partial_c^2 \partial_T \Psi}(\mathcal{W}^M)(\nabla x_N, \nabla)((\vartheta^M + \mathcal{V}^M)\Phi^M)) + \\
& + \Delta(\partial_c^2 \Psi(\mathcal{W}^M)\Phi^M) + \varepsilon^2 \left(-\gamma \partial_t \Phi^M - \Delta^2 \mathcal{W}^M + \frac{1}{2} \widehat{\partial_c^3 \Psi}(\mathcal{W}^M) \Delta(\Phi^M)^2 \right) \Big|_{\eta=\beta(t-\phi)/\varepsilon, \tau=x_N/\varepsilon} - \\
& - \varepsilon^3 \Delta \left(\frac{1}{3!} \partial_c^4 \Psi(\Phi^M)^3 - \Delta \Phi^M \right). \tag{6.3.17}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\widehat{\mathcal{L}}_2 = |\nabla\phi|^2 \partial_\eta^2 + |\nabla x_N|^2 \partial_\tau^2, \quad \widehat{\mathcal{L}}_1 = \partial_\eta \widehat{\Pi} - \partial_\tau \widehat{\Pi}_b,$$

$$\widehat{\Pi} = 2(\nabla\phi, \nabla) + \Delta\phi, \quad \widehat{\Pi}_b = 2(\nabla x_N, \nabla) + \Delta x_N.$$

Теперь рассмотрим регулярные члены разложений (6.3.16), (6.3.17). Переходя к пределу при $\eta \rightarrow \pm\infty$, $\tau \rightarrow \infty$, из (6.3.16), (6.3.17) получим

$$(\partial_t - \Delta)(\vartheta + (\mathcal{V}^M)^\pm) - f = -\partial_t(\mathcal{W}^M + \varepsilon\Phi^M), \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0);$$

$$\begin{aligned}
& \Delta(\psi_0(\vartheta^M + (\mathcal{V}^M)^\pm) \partial_c \Psi_0((\mathcal{W})^\pm)) + \\
& + \varepsilon \left(-\partial_t(\mathcal{W}^M)^\pm + \Delta(\psi_0(\vartheta^M + (\mathcal{V}^M)^\pm)) \partial_c^2 \Psi_0((\mathcal{W}^M)^\pm) \Phi^M + Q(\vartheta^M + (\mathcal{V}^M)^\pm)((\mathcal{W})^\pm - c_0) \right) + \\
& + \varepsilon^2 \left(\Delta(\psi_0(\vartheta^M + (\mathcal{V}^M)^\pm)) \frac{1}{2} \partial_c^3 \Psi_0((\mathcal{W})^\pm) (\Phi^M)^2 + \right. \\
& \left. + Q(\vartheta^M + (\mathcal{V}^M)^\pm) \Phi^M - \Delta(\mathcal{W}^M)^\pm \right) - \varepsilon^3 \Delta \left(\frac{1}{3!} \partial_c^4 \Psi(\Phi^M)^3 - \Delta \Phi^M \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, прежде всего, имеем

$$\Delta(\psi_0(T_{0,e}^\pm) \partial_c \Psi_0(\widehat{c}^\pm)) = 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0),$$

что не противоречит условию $\partial_c \Psi_0(\widehat{c}^\pm) = 0$, и

$$(\partial_t - \Delta)T_{0,e}^\pm - f = 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0). \tag{6.3.18}$$

Положим

$$\Phi_j^\pm = \psi_0(T_{0,e}^\pm) \partial_c^2 \Psi_0(\widehat{c}^\pm) c_{j,e}^\pm + Q(T_{0,e}^\pm), \quad j \geq 1,$$

где $c_{0,e}^\pm = \widehat{c}^\pm$. Очевидно, функции $\Phi^\pm = \Phi_1^\pm$ непрерывны на Γ_t и удовлетворяют условию (6.3.10). Отсюда следует, что $\mathcal{W}_1^\pm = 0$, т.е. $\mathcal{W}_1 \in \mathcal{S}$.

Далее, приравнявая нулю члены порядка $O(\varepsilon^j)$, из (6.3.16), (6.3.17) получаем уравнения

$$\Delta(\Phi^\pm) = 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0), \tag{6.3.19}$$

а также

$$(\partial_t - \Delta)T_{j,e}^\pm = f_{j,T}^\pm, \quad \Delta(\Phi_j^\pm) = f_{j,c}^\pm,$$

функции $f_{j,T}^\pm, f_{j,c}^\pm$ зависят от функций $T_{k,e}^\pm, \Phi_k^\pm, 0 \leq k \leq (j-1)$ и их производных. В частности,

$$f_{1,T}^\pm = -\partial_t c_{1,e}^\pm, \quad f_{2,c}^\pm = \gamma \partial_t c_{1,e}^\pm - \frac{1}{2} \partial_c^2 \Psi_0(\widehat{c}^\pm) \Delta(\psi_0(T_{0,e}^\pm) (\Phi^\pm)^2).$$

Таким образом, мы получили уравнения (6.3.7) сингулярно-предельной задачи. Функции $T_{0,e}^\pm$ — любые гладкие продолжения решений T^\pm в область \mathcal{Q} .

6.3.2. Уравнения на фронте. Теперь заметим, что носители по быстрой переменной функций \mathcal{P} погранслоя и функций \mathcal{S} , быстро меняющихся в окрестности Γ_t , не пересекаются с точностью до $O(\varepsilon^\infty)$, если $\text{dist}(\Gamma_t, \partial\Omega) \geq \text{const} > 0$. Следовательно, асимптотические решения в окрестности Γ_t и в окрестности $\partial\Omega$ можно строить независимо.

Сначала построим так называемое внутреннее разложение в окрестности $\Omega_\delta \subset \Omega$ такой, что $\Gamma_t \subset \Omega_\delta$, $t \in (0, \mathcal{T}_0)$. Теперь можно применить методы, развитые в [18, 45], разлагая коэффициенты при ε^j в (6.3.16), (6.3.17) в ряд Тэйлора в точке $t = \phi(x)$ на фронте и используя соотношение $(t - \phi(x)) = \varepsilon\eta + \phi_1(x)$. Далее, переходя к функциям от независимых переменных η , x , получим асимптотическое решение на фронте Γ_t . В заключение построим достаточно гладкое продолжение этого решения на \mathcal{Q} так, что младшие члены асимптотического разложения принадлежат пространству \mathcal{K} .

Рассмотрим члены порядка $O(\varepsilon^{-2})$ в (6.3.17):

$$\partial_\eta^2 \left(\psi_0(\widehat{T}_{0,e}) \partial_c \Psi_0(\widehat{\chi}) - \beta^2 |\nabla \phi|^2 \partial_\eta^2 \widehat{\chi} \right) = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^1. \quad (6.3.20)$$

В классе решений $\chi \in \mathcal{K}$, $\chi^- = \widehat{c}^-$, интегрируя (6.3.20), получим

$$\psi_0(\widehat{T}_{0,e}) \partial_c \Psi_0(\widehat{\chi}) - \beta^2 |\nabla \phi|^2 \partial_\eta^2 \widehat{\chi} = 0.$$

Сделав замену

$$\chi(\eta, x) = \widehat{c}^- + (\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) Y(\beta\eta + \phi_1(x)), \quad \beta = (\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-)^2 \frac{\sqrt{2\psi_0(\widehat{T}_{0,e})}}{|\nabla \phi|},$$

мы сведем уравнение (6.3.20) к уравнению

$$\partial_\xi^2 Y = Y(1 - Y)(1 - 2Y), \quad \xi = \beta\eta + \phi_1,$$

решение которого $Y(\xi) = (\text{th}(\xi + \phi_1) + 1)/2$. Постоянная интегрирования $\phi_1 = \phi_1(x)$ является любой гладкой функцией из $C^\infty(\Omega)$. Таким образом, с точностью до трансляции существует единственное решение стандартного уравнения (6.3.20) такое, что $\chi^\pm = \widehat{c}^\pm$.

Теперь возникает вторая проблема построения двухмасштабного разложения — проблема продолжения функции χ , построенной на фронте, по медленным переменным (x, t) из Γ_t в \mathcal{Q} . Как мы увидим ниже, в этом случае достаточно продолжить $\chi(\eta, x)$ тождественно по медленным переменным, положив $\chi(\eta, x, t) = \chi(\eta, x)$. Где возникает необходимость рассмотрения продолжения χ только в некоторой окрестности $\mathcal{Q}_\delta = \{\text{dist}(x, \Gamma_t) < \delta, t \in (0, \mathcal{T}_0)\}$ фронта? Существование функций $\phi(x)$, $\phi_1(x)$ как решений некоторых уравнений будет доказано в достаточно малой окрестности $\Omega_{\delta_0} = \{\text{dist}(x, \Gamma_0) < \delta_0\}$ начального фронта Γ_0 . Это определит выбор постоянной $\delta = \delta(\delta_0)$.

Полагая равными нулю члены порядка $O(\varepsilon^{k-2})$, из (6.3.16), (6.3.17) получаем следующие уравнения на фронте:

$$\partial_\eta^2 \Xi_k^T = \widehat{F}_k^T, \quad (\widehat{V}_k)^- = 0, \quad (6.3.21)$$

$$\partial_\eta^2 \widehat{\mathcal{L}} \widehat{W}_k = \widehat{F}_k^c, \quad (\widehat{W}_k^c)^- = 0. \quad (6.3.22)$$

Здесь

$$\widehat{\mathcal{L}} = |\nabla \phi|^2 \partial_\eta^2 - \psi_0(\widehat{T}_{0,e}) \partial_c^2 \Psi_0(\chi),$$

$\widehat{F}_k^c, \widehat{F}_k^T$ — функции от $T_{j,e}, c_{j,e}, \mathcal{V}_j, \mathcal{W}_j$ и их производных на фронте, т.е. при $t = \phi(x)$, $j = 0, 1, \dots, M-1$. Так, например,

$$\widehat{F}_1^c(\eta, x) = \left\{ \beta\eta \partial_t \partial_\eta^2 (\partial_c \Psi(\chi, T_0)) + \beta \partial_\eta \Pi \partial_c \Psi(\chi, T_0) - \partial_\eta^3 \Pi \chi \right\} \Big|_{t=\phi}, \quad (6.3.23)$$

$$\widehat{F}_1^T(\eta, x) = \left\{ 2(\nabla \phi, \nabla) \partial_\eta \mathcal{V}_0 - \frac{2}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} \partial_\eta \mathcal{W}_0 + |\nabla \phi|^2 \eta \partial_\eta^2 \partial_t \mathcal{V}_0 \right\} \Big|_{t=\phi} \quad (6.3.24)$$

Нетрудно доказать справедливость следующих утверждений (см. [14]).

Лемма 6.3.2. Решения $\widehat{\Xi}_k^T \in \mathcal{S}$, $\widehat{\mathcal{W}}_k \in \mathcal{K}$ уравнений (6.3.21), (6.3.22) существуют тогда и только тогда, когда

$$\widehat{F}_k^c, \widehat{F}_k^T \in \mathcal{S}, \quad (6.3.25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}_k^T d\eta = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}_k^c d\eta = 0, \quad (6.3.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k^c \partial_\eta \chi d\eta = 0, \quad (6.3.27)$$

$$\widehat{f}_k^c = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta'} \widehat{F}_k^c(\eta'', x) d\eta'' - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta'} \widehat{F}_k^c(\eta'', x) d\eta''. \quad (6.3.28)$$

Очевидно, что условие (6.3.25) выполнено для $k = 1$. Теперь рассмотрим условие (6.3.26) для $k = 1$. Из формулы для \mathcal{V}_0 и (6.3.23) первый интеграл в (6.3.26) приводит к соотношению

$$\left(2(\nabla\phi, \nabla)(T_{j,e}^+(x, t) - T_{j,e}^-(x, t)) + |\nabla\phi|^2 \partial_t (T_{j,e}^+(x, t) - T_{j,e}^-(x, t)) \right) \Big|_{t=\phi} + 2 = 0. \quad (6.3.29)$$

Заметим, что для любой гладкой функции $\varrho(x, t)$, равной нулю на фронте,

$$\nabla\varrho|_{t=\phi} = -\partial_t\varrho|_{t=\phi}\nabla\phi. \quad (6.3.30)$$

Это позволяет упростить (6.3.29)

$$\partial_\nu(T_{j,e}^+(x, t) - T_{j,e}^-(x, t)) = 2V_\nu, \quad \partial_\nu = \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \nabla \right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что нормальная скорость фронта $V_\nu = -2/|\nabla\phi|$. Таким образом, мы получили условие типа Стефана в (6.3.11) на фронте. Равенство нулю второго интеграла в (6.3.26) следует из соотношения $\partial_c\Psi_0(\chi^\pm) = 0$. Далее, учитывая, что

$$f_1^c = (\partial_c^2\Psi(\chi, T_0) - \partial_c^2\Psi(\widehat{c}^-, T_0))\Phi_{1,e}^- - \beta\partial_\eta\Pi\chi,$$

простыми вычислениями получаем условие (6.3.12).

Лемма 6.3.3. Условие (6.3.27) для $k = 1$ эквивалентно аналогу условия Меллина—Сикерка [45] на фронте

$$(\Phi_1 - Q(T_0))|_{\Gamma_t} = \frac{1}{3}(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-)^4 \left[2\sqrt{\psi_0(T_0)}\partial_{\nu_t} + \operatorname{div} \left(\sqrt{\psi_0(T_0)} \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) \right] (\sqrt{\psi_0(T_0)}).$$

Далее, так как условия (6.3.25)–(6.3.27) справедливы при $k = 1$, мы можем решить уравнения (6.3.21), (6.3.22), решения которых

$$\Xi_1^T(\eta, x) = \frac{1}{\beta} \left(\xi\chi(\xi) - \ln 2 \cosh \xi \right) \Big|_{\xi=\eta+\phi_1},$$

$$\widehat{\mathcal{W}}_1 = (c_{j,e}^+(x, t) - c_{j,e}^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} + \Xi_j^c(\eta, x),$$

$$\Xi_1^c(\eta, x) = \omega(\eta, x) + \alpha_1(x)\partial_\eta\chi(\eta, x) \in \mathcal{S},$$

где $\alpha_1(x)$ является «постоянной» интегрирования. Таким образом, функции $\widehat{\mathcal{W}}_1^\pm = 0$, откуда следует второе условие непрерывности в (6.3.10).

Теперь определим продолжения $\mathcal{V}_0(\eta, x, t)$, $\mathcal{V}_1(\eta, x, t)$, $\mathcal{W}_1(\eta, x, t)$ функций $\widehat{\mathcal{V}}_0(\eta, x)$, $\widehat{\mathcal{V}}_1(\eta, x)$, $\widehat{\mathcal{W}}_1(\eta, x)$ из фронта в \mathcal{Q}_δ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_j(\eta, x, t) &= (T_{j,e}^+(x, t) - T_{j,e}^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} + \Xi_j^T(\eta, x), \quad j = 0, 1, \\ \mathcal{W}_1(\eta, x, t) &= (\Phi_{1,e}^+(x, t) - \Phi_{1,e}^-(x, t)) \frac{\chi(\eta, x) - \widehat{c}^-}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} + \Xi_1^T(\eta, x),\end{aligned}\tag{6.3.31}$$

где функции $\widehat{\Xi}_j^T(\eta, x)$, $\widehat{\Xi}_j^c(\eta, x)$ продолжены в окрестность \mathcal{Q}_δ фронта тождественно по t . Здесь $T_{0,e}^\pm(x, t)$, $\Phi_{1,e}^\pm(x, t)$, $T_{1,e}^\pm(x, t)$ определяются любым достаточно гладким продолжением решений T_0^\pm , Φ_1^\pm сингулярно-предельной задачи. Для того, чтобы определить функции $T_{1,e}^\pm(x, t)$, необходимо найти первые поправки $\Phi_2^\pm(x, t)$, $T_1^\pm(x, t)$ к решению сингулярно-предельной задачи. Для этого рассмотрим уравнения (6.3.21), (6.3.22) для $k = 2$. Правые части уравнений в этом случае имеют вид:

$$\widehat{\mathcal{F}}_2^T(\eta, x) = \left\{ |\nabla\phi|^2 \eta \partial_t \partial_\eta^2 \mathcal{V}_1 - 2(\nabla\phi, \nabla) \partial_\eta \mathcal{V}_1 + f_2^T \right\} \Big|_{t=\phi},\tag{6.3.32}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{F}}_2^c(\eta, x) &= \left\{ \beta \eta \partial_\eta \partial_t [\partial_c^2 \Psi(\chi, T_0)(\Phi_{1,e}^- + \mathcal{W}_1) + Q(T_{0,e} + \mathcal{V}_0)] - \beta \partial_\eta \mathcal{W}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \beta \partial_\eta \Pi [\partial_c^2 \Psi(\chi, T_0)(\Phi_{1,e}^- + \mathcal{W}_1) + Q(T_{0,e} + \mathcal{V}_0)] \partial_\eta^2 f_2^c \right\} \Big|_{t=\phi}.\end{aligned}\tag{6.3.33}$$

Здесь функции f_2^c , f_2^T зависят от Ξ_1^c , Ξ_1^T , η , χ и их производных на фронте (в точке $t = \phi$). Нетрудно проверить, что условие (6.3.25) справедливо при $k = 2$. В силу условия типа Стефана (6.3.30), второе условие в (6.3.26) легко преобразовать во второе условие типа Стефана (6.3.10). После простых вычислений условие (6.3.27) для $k = 2$ можно трансформировать в линейное неоднородное уравнение для поправки к фазе ϕ_1

$$\mathcal{K}_{\text{var}} \phi_1 = f^{\phi_1}(x), \quad \phi_1|_{\Gamma_0} = 0,\tag{6.3.34}$$

Здесь \mathcal{K}_{var} — уравнение в вариациях для \mathcal{K} из (6.3.11), правая часть $F^{\phi_1}(x)$ зависит от уже известного решения ϕ , T_0^\pm , Φ_1^\pm сингулярно-предельной задачи.

Аналогично получаются следующие утверждения:

1) вычисление $\widehat{\mathcal{V}}_j$, $\widehat{\mathcal{W}}_j$ позволяет найти условия возникновения скачка функций T_j^\pm , Φ_j^\pm на фронте, удовлетворяющие уравнениям

$$(\partial_t - \Delta) T_j^\pm = F_j^\pm, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0),$$

$$\Delta \Phi_j^\pm = F_j^\pm, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0),$$

с правыми частями, зависящими от функций T_k^\pm , Φ_k^\pm , $k = 1, \dots, j-1$, ϕ , ϕ_1 и их производных;

2) аналог равенства (6.3.31) определяет продолжения $\mathcal{V}_j(\eta, x, t)$, $\mathcal{W}_j(\eta, x, t)$ функций, заданных на фронте, в достаточно малую окрестность \mathcal{Q}_δ фронта;

3) равенство (6.3.26) определяет соотношения для нормальных производных типа неоднородных условий Стефана для функций T_j^\pm , Φ_j^\pm на фронте;

4) равенство (6.3.27) определяет соотношение (аналогичное (6.3.34)) для постоянных интегрирования α_k . Действительно, так как

$$f(\eta + \phi_1) + \varepsilon \partial_\eta f \alpha_2 + \varepsilon^2 \partial_\eta f \alpha_3 + \dots = f(\eta + \phi_1 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots) + O(\varepsilon^2),$$

то функции α_j позволяют описать фронт (свободную границу) более точно.

6.3.3. Погранслоное разложение. Теперь перейдем к рассмотрению граничных условий на внешней границе $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T_0)$ и построению функции погранслоя. Справедливость первых двух условий (6.3.6) до порядка $O(\varepsilon^3)$ следует из граничного условия в (6.3.10) для решения сингулярно-предельной задачи Φ_1^+ и граничных условий

$$\partial_N(\Pi_j^c)|_\Sigma = \partial_N\Phi_j^+|_\Sigma = 0, \quad j = 1, 2,$$

для первых двух приближений. Главная часть χ асимптотического решения, построенного выше (аналога внутреннего разложения), удовлетворяет двум граничным условиям (6.3.6) по модулю $O(\varepsilon^\infty)$. Но, вообще говоря,

$$\partial_N\Delta\Phi_1^+|_\Sigma \neq 0.$$

Положим $\Pi_j^c = 0$, $j = 0, 1, 2, 3$. Так как

$$\partial_N\Delta\varepsilon^4\Pi_4^c\left(\frac{x_N}{\varepsilon}, x', t\right)\Big|_{x_N=0} = \varepsilon\partial_\tau^3\Phi_4^c(0, x', t) + O(\varepsilon^2),$$

можно определить $\partial_\tau^3\Phi_4^c(0, x')$ из равенства

$$\partial_\tau^3\Phi_4^c(0, x', t) = \partial_N\Delta\Phi_1^+|_\Sigma. \quad (6.3.35)$$

Стандартное уравнение для погранслоной функции получим из (6.3.4)

$$\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})\Pi_4^c - \partial_\tau^2\Pi_4^c = 0, \quad \tau \geq 0, \quad \Pi_4^c \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (6.3.36)$$

Отсюда

$$\Pi_4^c(\tau, x', t) = b_4(x', t) \exp\left(-\sqrt{\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})}\tau\right). \quad (6.3.37)$$

Тогда из (6.3.35) получаем

$$b_4(x', t) = -\frac{\partial_N\Delta\Phi_1^+|_\Sigma}{\left(\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})\right)^{3/2}}.$$

Далее замечаем, что введение погранслоной функции $\varepsilon^4\Pi_4^c$ влечет появление невязки в условии Неймана в (6.3.6) порядка $O(\varepsilon^3)$. Это позволяет определить неоднородное условие Неймана для поправки $(\Phi_3^c)^+$:

$$\partial_N(\Phi_3^c)^+ = \partial_\tau\Pi_4^c|_{\tau=0} = -\frac{\partial_N\Delta\Phi_1^+|_\Sigma}{\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})}. \quad (6.3.38)$$

Теперь отметим, что введение пограничных функций Π_k^c приводит к появлению невязок в уравнении (6.3.3) для температуры, которые можно компенсировать за счет введения погранслоных функций в асимптотическом разложении (6.3.15). Положим $\Pi_k^T = 0$, $k = 1, \dots, 5$. Тогда для Π_6^T , в силу (6.3.3), получим уравнение

$$\partial_\tau^2\Pi_6^T(\tau, x') = \partial_t\Pi_4^c(\tau, x', t), \quad \Pi_6^T \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (6.3.39)$$

Отсюда следует, что

$$\Pi_6^T(\tau, x', t) = -\partial_t b_4(x', t) \left(\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})\right)^{-1} e\left(-\sqrt{\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})}\tau\right).$$

Теперь появляется погранслоная функция Π_6^T . Она вводит невязку в условие Неймана для температуры (6.3.6) порядка $O(\varepsilon^5)$, что определит неоднородное условие Неймана для поправки T_5^+ решения сингулярно-предельной задачи вида

$$\partial_N T_5^+ = \partial_\tau\Pi_6^T|_{\tau=0} = -\partial_t b_4(x', t) \left(\psi_0(T_{0,e}^+|\Sigma)\partial_c^2\Psi(\widehat{c^+})\right)^{-1/2}.$$

Таким образом, появляется обратная связь между погранслоными асимптотическими разложениями для концентрации и температуры и граничными данными для поправок решения

сингулярно-предельной задачи. Окончательно получаем, что асимптотическое разложение в малой окрестности Σ имеет следующий вид:

$$T^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = T_0^+(x, t) + \sum_{k=1}^5 \varepsilon T_k^+(x, t) + \sum_{k=6}^M \varepsilon^k \left(T_k^+(x, t) + \Pi_k^T \left(\frac{x_N}{\varepsilon}, x', t \right) \right) + O(\varepsilon^{M+1}),$$

$$c^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \widehat{c}^+ + \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j \Phi_j^+(x, t) + \sum_{j=4}^M \varepsilon^j \left(\Phi_j^+ + \Pi_j^c \left(\frac{x_N}{\varepsilon}, x', t \right) \right) + O(\varepsilon^{M+1}).$$

Функции $\Pi_4^c, \Pi_6^T \in \mathcal{P}$ построены выше, $\Pi_j^T, j \geq 7$, и $\Pi_j^c, j \geq 5$, являются решениями линейных неоднородных уравнений типа (6.3.36), (6.3.39). Суммируя, мы получим граничные условия для задачи (6.3.19):

1) условие (6.3.9) для функций $T_0^+ \Phi_1^+$;

2) условия

$$\partial_N T_j^+|_{\Sigma} = 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \partial_N \Phi_2^+|_{\Sigma} = 0;$$

3) условия (6.3.37), (6.3.38) для Φ_3^+, T_5^+ ;

4) условия

$$\partial_N T_j^+|_{\Sigma} = \partial_{\tau} \Pi_{j+1}^T|_{\tau=0}, \quad \partial_N \Phi_k^+|_{\Sigma} = \partial_{\tau} \Pi_{k+1}^c, \quad j \geq 6, \quad k \geq 4.$$

Теорема 6.3.1 доказана. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.3.2. Пусть выполнены предположения теоремы 6.3.1. Тогда для любого $M \geq 0$ на времени существования классического решения сингулярно-предельной задачи существуют асимптотические разложения:

$$T_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = T_{0,e}^- + (T_{0,e}^+ - T_{0,e}^-) \frac{\chi - \widehat{c}^-}{c^+ - c^-} +$$

$$+ \sum_{j=1}^M \left(T_{0,e}^- + (T_{0,e}^+ - T_{0,e}^-) \frac{\chi - \widehat{c}^-}{c^+ - c^-} + \Xi_j^T + \Pi_j^T \right),$$

$$c_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \chi + \sum_{j=1}^M \left(\Phi_{0,e}^- + (\Phi_{0,e}^+ - \Phi_{0,e}^-) \frac{\chi - \widehat{c}^-}{c^+ - c^-} + \Xi_j^c + \Pi_j^c \right)$$

такие, что

$$\partial_t \left(T^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) + \varphi(c_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)) \right) - \Delta T^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) - f(x, t) = \varepsilon^M \mathcal{F}_M^T(x, t, \varepsilon), \quad (6.3.40)$$

$$\gamma \varepsilon \partial_t c_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) \Delta \left(\partial_c \Psi(c_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon), T_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)) - \varepsilon^2 \Delta c_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) \right) = \varepsilon^{M+1} \mathcal{F}_M^c(x, t, \varepsilon), \quad (6.3.41)$$

$$\partial_N T^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)|_{\Sigma} = \varepsilon^{M+1} F_M^T(x, t, \varepsilon), \quad (6.3.42)$$

$$\partial_N c^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)|_{\Sigma=0}, \quad \partial_N \Delta c^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)|_{\Sigma} = \varepsilon^M F_M^c(x, t, \varepsilon),$$

$$T_M^{\text{as}}(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = T^0(x, t) + \varepsilon \tilde{T}.$$

Здесь $\tilde{T}, \mathcal{F}_M^c, \mathcal{F}_M^T$ — гладкие при $\varepsilon > 0$ функции такие, что

$$\sup_{t \in (0, \mathcal{T}_0)} \|\tilde{T}; L_2(\Omega)\| \leq c_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad (6.3.43)$$

$$\|\mathcal{F}_M^T; C(\overline{\mathcal{Q}})\| + \|\mathcal{F}_M^c; C(\overline{\mathcal{Q}})\| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon},$$

$$\|F_M^T; C(\Sigma)\| + \|F_M^c; C(\Sigma)\| \leq c_2 \sqrt{\varepsilon}, \quad (6.3.44)$$

$$\sup_{t \in (0, \mathcal{T}_0)} \left[\|\mathcal{F}_M^c; L_2(\Omega)\| + \|\mathcal{F}_M^T; L_2(\Omega)\| \right] \leq c_2 \sqrt{\varepsilon},$$

где постоянные c_j не зависят от ε .

Соотношения (6.3.43), (6.3.44) предполагают, что начальные значения $T^0(x, t)$ являются произвольными достаточно гладкими функциями вне ε -окрестности Γ_0 . Однако $T^{\text{as}}|_{t=0}$ должна иметь специальную форму в этой окрестности, начиная с членов порядка $O(\varepsilon)$.

6.4. НУКЛЕАЦИЯ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ

В этом параграфе мы рассмотрим задачу нуклеации (зарождения капли) в двухкомпонентной несжимаемой изотропной системе, свободную энергию которой по Гельмгольцу (в безразмерных переменных) определим функционалом Кана—Хилларда

$$\mathcal{F}(c) = \int_V \left(f_0(c) + \varepsilon^2 \kappa(c) (\nabla c)^2 \right) dV, \quad (6.4.1)$$

где ε — коэффициент поверхностного натяжения. В терминах функционала (6.4.1) определим все свойства решения задачи нуклеации. Для малых возмущений концентрации $c < c^\alpha$, сохраняющих среднее значение концентрации метастабильной системы,

$$\int_V (c - c_0) dV = 0, \quad c_0 = \text{const}, \quad (6.4.2)$$

функционал (6.4.1) возрастает независимо от степени протяженности (степени дальности действия) возмущения. Однако, как мы установим, с возрастанием разности концентраций внешней фазы $c = c^\alpha$ и ее возмущения, т.е. разности $c_0 - c^\alpha > 0$, значение конфигурационной части $\int_V f_0 dV$ убывает быстрее, чем возрастает вклад градиентной энергии. Когда это случается, нет дальнейшего сопротивления (препятствия) к непрерывному росту возмущения, т.е. мы переходим в зону неустойчивости. Как оценить момент равенства двух вкладов в энергию, насколько он связан с результатом Гиббса, касающимся размера критического ядра (капли)? Бесконечно много путей, по которым начально неустойчивое возмущение может быть переведено в более устойчивую фазу (здесь $f_0(c^\alpha) < f_0(c^\beta)$), но нас интересуют только те пути, которые проходят через минимальный барьер свободной энергии, определяемый, как мы уже отмечали выше, седловой точкой, когда возмущение концентрации становится критической каплей. В седловой точке система находится в равновесии (хотя и неравновесна тоже). Следовательно, для замкнутой системы с постоянными температурой и объемом свободная энергия по Гельмгольцу должна быть стационарной относительно возмущений концентрации в любой точке системы. Тогда распределение концентрации критической капли определяется решением задачи минимизации функционала (6.4.1) при ограничении (6.4.2).

Нас будет интересовать динамика процесса нуклеации для средних значений $c^\alpha < c_0 < c_s$, где равновесное значение c^α и спиновальная точка c_s определяются (см. выше) конфигурационной f_0 частью распределения свободной энергии.

Теперь рассмотрим работу, которая требуется для формирования критической капли. В замкнутой изотермической системе с постоянным объемом эта работа определяется изменением свободной энергии (6.4.1), связанным с формированием критической капли в системе с начально-однородной концентрацией c_0 , т.е. с минимумом функционала

$$W = \int_V \left(f_0(c) - f_0(c_0) + \kappa(c) (\nabla c)^2 \right) dV, \quad (6.4.3)$$

при ограничении (6.4.2). Удобно перейти в (6.4.3) от свободной энергии по Гельмгольцу к свободной энергии Гиббса

$$W = \int_V \left(E_{\mathbf{G}}(c) + \kappa(c) (\nabla c)^2 \right) dV, \quad E_{\mathbf{G}} = f_0(c) - f_0(c_0) - \partial_c f_0(c_0) (c - c_0).$$

Здесь мы воспользовались ограничением (6.4.2). В качестве модели, описывающей динамику нуклеации, опять рассмотрим уравнения Кана—Хилларда

$$\begin{aligned} \partial_t c - \operatorname{div} \nabla \mathcal{D}_{\text{var}} c &= 0, & \mathcal{D}_{\text{var}}(c) &= \partial_c E_{\mathbf{G}}(c) - \varepsilon^2 \Delta c, \\ c|_{t=0} &= c^0(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Следуя Гиббсу, предположим, что система достаточно большая, чтобы пренебречь возмущением внешней фазы в течение процесса нуклеации, т.е. предположим, что

$$c = c_0, \quad \partial_N c = 0, \quad (x, t) \in \Sigma = \partial V \times (0, \mathcal{T}_0). \quad (6.4.5)$$

Для простоты будем считать, что $V = \mathbb{R}^3$, тогда условия (6.4.5) примут вид

$$c \rightarrow c_0, \quad \nabla_x c \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (6.4.6)$$

Асимптотическое решение задачи (6.4.4), (6.4.6) будем искать в виде

$$c_{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = c_0(x, t) + \chi\left(\frac{x - R(t)}{\varepsilon}, t\right) + O(\varepsilon), \quad c_0(x, t) = c_0 + C_0(x, t).$$

Здесь вектор $x = R(t)$ описывает траекторию центра капли, функция $\chi(\xi, t) \in \mathcal{S}$, $t \rightarrow (0, \mathcal{T}_0)$, откуда следует, что $\int_{\mathbb{R}^3} |\chi((x - R(t))/\varepsilon)| dx = O(\varepsilon^3)$. Следовательно, в силу (6.4.2) среднее $\int_{\mathbb{R}^3} C_0 dx = 0$. Приравнявая нулю члены порядка $O(1/\varepsilon^2)$ в разложении уравнения (6.4.4), получим стандартное уравнение для определения профиля концентрации

$$\partial_\xi(\kappa(\widehat{c}_0(t) + \chi(\xi, t))\partial_\xi \chi(\xi, t)) - \partial_c E_{\mathbf{G}}(\widehat{c}_0(t) + \chi(\xi, t)) = 0, \quad c^\alpha < \widehat{c}_0(t) < c_s. \quad (6.4.7)$$

Заметим, что (6.4.7) при $\widehat{c}_0 = \text{const}$ является уравнением Эйлера задачи о минимизации функционала (6.4.3) при ограничении (6.4.2), описывающим стационарный процесс нуклеации в изотропной, изотермической системе при постоянном объеме. Положительные решения уравнения (6.4.7) с граничными условиями

$$\chi \rightarrow 0, \quad \nabla_x \chi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (6.4.8)$$

называются *основным состоянием*.

6.4.1. Свойства основного состояния. Как видим, это уравнение можно трактовать как квантование уравнения (Гиббса) классического условия равновесия. Основное преимущество этого уравнения в том, что здесь нет ограничений однородности системы внутри капли. Для изотропной среды решение (6.4.7) будет сферически симметричным, т.е. определяется решением ОДУ

$$2\kappa(c_0 + \chi) \frac{d^2}{dr^2} \chi + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \chi + \partial_c \kappa(c_0 + \chi) \left(\frac{d}{dr} \chi \right)^2 - \partial_c E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi) = 0, \quad (6.4.9)$$

$$\frac{d}{dr} \chi|_{r=0} = \frac{d}{dr} \chi|_{r=\infty} = \chi|_{r=\infty} = 0, \quad r = |\xi| \geq 0. \quad (6.4.10)$$

Необходимые и достаточные условия существования единственного неотрицательного решения (6.4.9), (6.4.10), т.е. существования единственного основного состояния, описываются неравенствами $c^\alpha < \widehat{c}_0(t) < c_s$.

Предложение 6.4.1. *Значение энергии по Гиббсу $E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi)$ для основного состояния отрицательно в центре капли.*

Это более ограничительное условие, чем очевидное, что $\partial_c E_{\mathbf{E}}(c_0 + \chi)|_{r=0} < 0$. Концентрация в центре капли должна быть не только больше c_a , свободная энергия $E_{\mathbf{G}}$ достигает максимума в этой точке на интервале c^α, c^β и убывает с возрастанием c , но вещество в центре должно быть уже устойчивым, т.е. $c > c_b$, относительно конфигурационной части f_0 распределения свободной энергии. Здесь c_b — ближайший к c_0 нуль функции $E_{\mathbf{G}}(c_b) = 0$.

Умножая (6.4.9) на $\partial_r \chi$ и интегрируя, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{r} \kappa(c_0 + \chi) (\partial_r \chi)^2 dr = -E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi)|_{r=0}. \quad (6.4.11)$$

Здесь мы воспользовались граничными условиями (6.4.10). Так как интеграл в (6.4.11), в силу условия $\partial_r \chi < 0$, $r > 0$, всегда положителен, то имеем $E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi)|_{r=0} < 0$.

Предложение 6.4.2. В области низкой перенасыщенности $c_0 > c^\alpha$, c_0 близко к c^α , решение (6.4.9) близко по своим свойствам к решению классической теории в следующем отношении:

- концентрация c_n в центре капли близка к значению равновесной концентрации c^β ;
- работа (6.4.3) по формированию капли W стремится к поверхностной энергии (энергии переходной зоны, см. предыдущий параграф) динамического равновесия двух фаз

$$\lim_{c_0 \rightarrow c^\alpha} W = \int_{c^\alpha}^{c^\beta} \lim_{c_0 \rightarrow c^\alpha} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{G}}(c)}{\kappa(c)}} dc;$$

- «радиус» капли стремится к нулю.

Из предыдущего предложения следует, что значение концентрации c_n в центре капли $c_b < c_n < c_\beta$. Но, если $c_0 \rightarrow c^\alpha$, то, как видим, $c_b \rightarrow c^\beta$, откуда следует, что $c_n \rightarrow c^\beta$.

Сделав замену переменных $r = r(c)$, $c = c_0 + \chi$, $dc = \partial_r dr$ в интеграле (6.4.11), получим

$$\int_{c_0}^{c_n} \frac{2\kappa(c)}{r(c)\partial_c r} dc = -E_{\mathbf{G}}(c_0 + c_b) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad c_0 \rightarrow c^\alpha. \quad (6.4.12)$$

Так как $\frac{2\kappa(c)}{r(c)\partial_c r}$ отрицательно всюду, то должно поточечно стремиться к нулю. Отсюда поточечно

$$\frac{2\kappa(c_0 + \chi)\partial_r \chi}{r} \rightarrow 0 \quad \forall r \geq 0. \quad (6.4.13)$$

Следовательно, этим членом можно пренебречь в (6.4.9) по сравнению с другими членами в (6.4.9), которые остаются конечными. Таким образом, при $c_0 \rightarrow c^\alpha$, $c_b \rightarrow c^\beta$ уравнение (6.4.9) сводится к уравнению

$$2\kappa(c^\alpha + \chi) \frac{d^2}{dr^2} \chi + \partial_c \kappa(c^\alpha + \chi) \left(\frac{d}{dr} \chi \right)^2 - \partial_c E_{\mathbf{G}}(c^\alpha + \chi) = 0, \quad r \geq 0,$$

с граничными значениями

$$\chi|_{r=0} = c^\beta - c_0, \quad \chi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.4.14)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\kappa(\partial_r \chi)^2 = E_{\mathbf{G}}. \quad (6.4.15)$$

Решение уравнения (6.4.15), как мы показали в предыдущем параграфе, описывает профиль распределения концентрации при динамическом равновесии фаз. Применим теорему о среднем к интегралу в (6.4.11) и сравним результат с (6.4.15). Получим

$$-E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi)|_{r=0} = \int_0^{\infty} \frac{2}{r} \kappa(c_0 + \chi) (\partial_r \chi)^2 dr = -\frac{2}{\bar{r}} \int_0^{\infty} \kappa(c_0 + \chi) (\partial_r \chi)^2 dr. \quad (6.4.16)$$

Отсюда

$$\bar{r} = \frac{2(\sigma + O(c_0 - c^\alpha))}{|E_{\mathbf{G}}(c_0 + c_b)|}.$$

Так как $E_{\mathbf{G}}(c_0 + c_b) \rightarrow 0$, когда $c_0 \rightarrow c^\alpha$, то получаем

$$\bar{r} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad c_0 \rightarrow c^\alpha.$$

Предложение 6.4.3. *Средний радиус капли*

$$\bar{r}(c_0) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad c_0 \rightarrow c_s,$$

где c_s — спинодал, т.е. $\partial_c^2 f_0(c_s) = 0$, $c^\alpha < c_s < c_m$, c_m — точка локального максимума f_0 .

Таким образом, существует критическое значение \bar{r}_* , равное минимуму средних значений $\bar{r}(c_0)$ радиуса капли, $c^\alpha < c_0 < c_s$.

Теперь исследуем свойства основного состояния в окрестности спинодала $c_s - \delta < c_0 < c_s$, $0 < \delta \ll 1$. В этой окрестности можно разложить E_G в ряд Тейлора. Первый и второй члены этого разложения равны нулю, так как одновременно $E_G(c_0) = \partial_c E_G(c_0) = 0$. В силу $\partial_c^2 E_G(c_s) = 0$ получим

$$E_G(c_0) = \nu \left(3(c_s - c_0)(c - c_0) - (c - c_0)^2 \right), \quad \nu = -\frac{1}{6} \partial_c^3 E_G|_{c=c_s}.$$

При достаточно малом δ членом $\partial_c \kappa$ в (6.4.9) можно пренебречь и считать κ постоянной $\kappa_s = \kappa(c_s)$. Сделав замену

$$Y = \frac{\chi}{c_s - c_0}, \quad \tau = \left[\frac{\nu(c_s - c_0)}{\kappa_s} \right]^{1/2} r, \quad (6.4.17)$$

получим уравнение

$$\partial_\tau^2 Y + \frac{2}{\tau} \partial_\tau Y - \frac{3}{2} (2Y - Y^2) = 0, \quad (6.4.18)$$

для энергии в окрестности спинодала работа формирования капли

$$W = 4\pi\nu^{-1/2} \kappa_s^{3/2} (c_s - c_0)^{3/2} I_s,$$

где I_s — безразмерный интеграл

$$I_s = \frac{1}{2} \int_0^\infty Y^3 \tau^2 d\tau = 15.7,$$

который не зависит от параметров c_0 , c_s . Отсюда

$$W_s = 197\nu^{-1/2} \kappa_s^{3/2} (c_s - c_0)^{3/2}. \quad (6.4.19)$$

Для решения (6.4.18) в центре капли имеем $Y(0) = 8.1$. Из (6.4.17) следует, что

$$c_n - c_0 = 8.1(c_s - c_0),$$

где c_n — концентрация в центре капли. Обозначим через $r_{1/2}$ значение r , для которого концентрация равна половине амплитуды $(c_n - c_0)/2$. Тогда из второго уравнения в (6.4.17) получим

$$r_{1/2} = \left(\frac{\kappa_s}{\nu(c_s - c_0)} \right)^{1/2} \tau_{1/2} = 0.73 \left(\frac{\kappa_s}{\nu} \right)^{1/2} (c_s - c_0)^{-1/2}.$$

Неожиданным результатом является то, что работа формирования капли в окрестности спинодала стремится к нулю при $c_0 \rightarrow c_s$. Более того, радиус капли стремится к бесконечности, когда $c_0 \rightarrow c_s$, в то время, как амплитуда профиля $A = c_n - c_0 \rightarrow 0$. Таким образом, в окрестности спинодала возмущение однородной концентрации в капле мало по амплитуде и большое по протяженности, т.е. принадлежит первой категории возмущений по Гиббсу. В спинодале система неустойчива и может самопроизвольно переходить в более устойчивую фазу.

Теперь вернемся к исследованию окрестности равновесного значения концентрации c^α . Как мы отмечали выше, здесь свойства капли близки к свойствам, полученным в рамках классической теории. В частности, радиус капли большой по сравнению с толщиной размытой границы (переходной зоны), и распределение концентрации близко к распределению концентрации динамического равновесия. Положим разность давлений ΔP в (6.2.1) (в предыдущем пункте) равной минимуму свободной E_{\min}^G энергии Гиббса на интервале c_b , c_d , где она отрицательна. Тогда получим

$$W_{cl} = \left(16 \frac{\pi}{3} \right) (E_{\min}^G)^{-2} \sigma^3,$$

где теперь мы можем считать, что σ — поверхностная энергия (энергия переходной зоны между двумя фазами, находящимися в динамическом равновесии). Тогда

$$E_{\min}^G \sim -(c^\beta - c^\alpha) \partial_c E_{\mathbf{G}}|_{c=c_0} \sim \psi(c^\beta - c^\alpha)(c_0 - c^\alpha),$$

где $\psi = \partial_c^2 E_{\mathbf{G}}|_{c=c^\alpha}$. Отсюда в силу (6.1.1) для классического радиуса капли имеем

$$r = \left(\frac{2\sigma}{\psi(c^\beta - c^\alpha)} \right) (c_0 - c^\alpha)^{-1}.$$

Следовательно, если $c_0 \rightarrow c^\alpha$, то работа $W_{cl} \rightarrow \infty$, как $(c_0 - c^\alpha)^{-2}$, и радиус также стремится к бесконечности, как $(c_0 - c^\alpha)^{-1}$.

Комментарий. Таким образом, классическая теория представляется как предел трактовки нуклеации Канна—Хилларда при стремлении c_0 к равновесному значению концентрации c^α (малая перенасыщенность). Из свойств основного состояния следует, что при возрастании перенасыщения распределение концентрации капли постепенно теряет классический характер. При приближении к спинодалу все сходства с классической теорией нуклеации исчезают.

6.4.2. Уравнения движения центра капли. Теперь рассмотрим следующую аппроксимацию уравнения (6.4.4).

Предложение 6.4.4. *Сингулярно-предельная задача модели нуклеации (6.4.4), (6.4.6) описывается задачей Коши для фоновой функции*

$$\partial_t c_0(x, t) = \Delta_x \partial_c E_{\mathbf{G}}(c_0(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0),$$

$$c_0|_{t=0} = c^0(x) = c_0 + C^0(x), \quad \int_{\mathbb{R}^3} C^0 dx = 0,$$

и системой уравнений, описывающих движение центра капли

$$\overset{\circ}{R}(t) = A^{-1}(c_0(R, t))G(c_0(R, t)), \quad \overset{\circ}{R}|_{t=0} = R^0, \quad t \in (0, \mathcal{T}_0).$$

Здесь коэффициенты симметричной невырожденной матрицы

$$A_{j,k}(R, t) = \int_{\mathbb{R}^3} Z_k \partial_{\xi_j} \widehat{\chi} d\xi,$$

компоненты вектора G

$$G_j(R, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[(\xi, \nabla_x c_0(x, t)) \mathcal{L}(\chi) - \left(a(c_0(R, t) + \chi) (\nabla_x c_0(R, t), \partial_\xi) + \partial_c a(c_0(R, t) + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_x c_0(R, t)) \right) \partial_{c_0} \chi \right] \partial_{\xi_j} \widehat{\chi} d\xi.$$

Функции $\widehat{\chi}(\xi, t)$, $Z_j(\xi, t) \in \mathcal{S}$ типа солитона являются решениями уравнений

$$2\kappa(c_0(R(t), t) + \chi) \frac{d^2}{dr^2} \chi + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \chi + \partial_c \kappa(c_0(R(t), t) + \chi) \left(\frac{d}{dr} \chi \right)^2 - \partial_c E_{\mathbf{G}}(c_0(R(t), t) + \chi) = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \chi|_{r=0} = \frac{d}{dr} \chi|_{r=\infty} = \chi|_{r=\infty} = 0, \quad r = |\xi| \geq 0,$$

$$\Delta_\xi Z_j = \partial_{\xi_j} \widehat{\chi}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \quad j = 1, 2, 3,$$

соответственно.

Приравняем нулю члены порядка $O(1/\varepsilon)$ в (6.4.4). Получим соотношение вида

$$\Delta_\xi \mathcal{L}_{\text{var}} \widehat{\chi}_1 = \widehat{\mathcal{F}}_1. \quad (6.4.20)$$

Здесь оператор в вариациях

$$\mathcal{L}_{\text{var}} Y = \partial_c^2 E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi) Y - a(c_0 + \chi) \Delta_\xi Y - \\ - \partial_c a(c_0 + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_\xi) Y - \partial_c a(c_0 + \chi) \Delta_\xi(\chi) Y - (\nabla_\xi \chi, \nabla_\xi) (\partial_c a(c_0 + \chi)) Y,$$

$$\mathcal{F}_1 = -(\overset{\circ}{R}, \nabla_\xi \chi) + (\xi, \nabla_x c_0(x, t)) \partial_{c_0} \Delta_\xi \mathcal{L}(\chi) + 2(\nabla_x c_0(x, t), \partial_\xi) \partial_{c_0} \mathcal{L}(\chi) - \\ - 2\Delta_\xi \left(a(c_0 + \chi) (\nabla_x c_0(x, t), \partial_\xi) + \partial_c a(c_0 + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_x c_0) \right) \partial_{c_0} \chi = \\ = \Delta_\xi \left\{ (\xi, \nabla_x c_0(x, t)) \mathcal{L}(\chi) - \left(a(c_0 + \chi) (\nabla_x c_0(x, t), \partial_\xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_c a(c_0 + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_x c_0) \right) \partial_{c_0} \chi \right\} - (\overset{\circ}{R}, \nabla_\xi \chi),$$

$$\mathcal{L}(\chi) = E_{\mathbf{G}}(c_0 + \chi) - a(c_0 + \chi) \Delta_\xi \chi - \partial_c a(c_0 + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_\xi) \chi.$$

Как получить условия ортогональности — условия разрешимости уравнения в вариациях (6.4.20)? Функция $\widehat{\chi} \in \mathcal{S}$, поэтому существует единственное решение уравнения

$$\Delta_\xi Z_j = \partial_{\xi_j} \widehat{\chi}, \quad Z \in \mathcal{S}.$$

Интегрируя (6.4.20) в классе \mathcal{S} , получим единственное решение

$$\mathcal{L}_{\text{var}} \widehat{\chi}_1 = \widehat{f}_1, \quad (6.4.21)$$

$$f_1 = (\xi, \nabla_x c_0(x, t)) \mathcal{L}(\chi) - \left(a(c_0 + \chi) (\nabla_x c_0(x, t), \partial_\xi) + \right. \\ \left. + \partial_c a(c_0 + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_x c_0) \right) \partial_{c_0} \chi - (\overset{\circ}{R}_j, Z_j).$$

Лемма 6.4.1. *Условие разрешимости (ортогональности) для уравнения (6.4.21) в классе решений \mathcal{S} имеет вид*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_1 \partial_{\xi_j} \widehat{\chi} d\xi = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.4.22)$$

Из (6.4.22) получаем уравнение, описывающее динамику центра капли

$$\sum_{k=1}^3 A_{jk} \overset{\circ}{R}_k = G_j(t), \quad j = 1, 2, 3,$$

где коэффициенты симметричной матрицы

$$A_{j,k}(R, t) = \int_{\mathbb{R}^3} Z_k \partial_{\xi_j} \widehat{\chi} d\xi,$$

и координаты вектора $G(R, t)$

$$G_j(R, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[(\xi, \nabla_x c_0(x, t)) \mathcal{L}(\chi) - \right. \\ \left. - \left(a(c_0 + \chi) (\nabla_x c_0(x, t), \partial_\xi) + \partial_c a(c_0 + \chi) (\nabla_\xi \chi, \nabla_x c_0) \right) \partial_{c_0} \chi \right] \Big|_{x=R(t)} \partial_{\xi_j} \widehat{\chi} d\xi.$$

Покажем, что матрица A — невырожденная. Для любого единичного вектора $\lambda \in \mathbb{R}^3$

$$A_{jk} \lambda_j \lambda_k = \int_{\mathbb{R}^3} (Z, \lambda) (\nabla_\xi \widehat{\chi}, \lambda) d\xi = - \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_\xi, \lambda) (Z, \lambda) \widehat{\chi} d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\eta, \lambda)^2}{|\eta|^2} |\mathcal{F}_{\xi \rightarrow \eta}(\widehat{\chi})|^2 \geq b_0 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^3, \quad |\lambda| = 1, d\eta,$$

где $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow \eta}(\widehat{\chi})$ — преобразование Фурье функции $\widehat{\chi}$. Отсюда следует уравнение динамики центра капли в нормальном виде

$$\dot{R}(t) = A^{-1}(c_0(R, t))G(c_0(R, t)), \quad \dot{R}|_{t=0} = R^0, \quad t \in (0, T_0). \quad (6.4.23)$$

Чтобы замкнуть предельную задачу, перейдем к пределу $\xi \rightarrow \infty$ в членах порядка $O(1)$ в разложении (6.4.3). Тогда получим следующую задачу Коши для фоновой функции $c_0(x, t)$:

$$\partial_t c_0(x, t) = \Delta_x \partial_c E_{\mathbf{G}}(c_0(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T_0), \quad (6.4.24)$$

$$c_0|_{t=0} = c^0(x) = c_0 + C^0(x), \quad \int_{\mathbb{R}^3} C^0 dx = 0.$$

Задача (6.4.23), (6.4.24) определяет сингулярно-предельную задачу проблемы нуклеации в двухфазной изотермической изотропной среде.

Комментарий. Интересной задачей является описание поведения траектории центра капли в окрестности критического радиуса, когда для некоторого $t_* \in (0, T_0)$ имеем $c(R(t_*), t_*) = c_{\text{cr}}$ (см. предыдущий пункт).

6.5. Сингулярно-предельная задача расширенного уравнения Кана—Хилларда

Введение В этом параграфе мы исследуем математическую модель сепарации в двухкомпонентном сплаве свинец—олово с различными кристаллическими структурами компонент. Описание процесса возникновения и роста кристалла остается на сегодняшний день одной из труднейших задач математической физики. Рассматриваемая в этом параграфе модель, предложенная в [48], является обобщением широко признанной модели Кана—Хилларда [36], описывающей кристаллизацию однородных смесей. Важнейшую роль в исследовании классической модели Кана—Хилларда сыграла ее сингулярно-предельная задача — так называемая задача Меллина—Сикерка со свободной границей, позволившая на сегодняшний момент только численно описать неустойчивость процесса кристаллизации. Целью параграфа является вывод сингулярно-предельной задачи для модели [48].

Будем считать, что двухкомпонентный сплав заполняет область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, разделенную на три части: области, заполненные разными фазами (α и β) и межфазную зону (зону фазового перехода). Предполагается что фаза α , насыщенная свинцом, имеет кубическую симметрию, фаза β , которая насыщена оловом, — четырехугольную (т.е. симметрию преобладающего вещества: свинца или олова). Требуется определить распределение концентраций чистых веществ $c_{\text{Pb}}(x, t)$, $c_{\text{Sn}}(x, t)$ (свинец, олово) в области Ω . В силу предположения о сохранении масс в двухкомпонентной смеси

$$c_{\text{Pb}}(x, t) + c_{\text{Sn}}(x, t) = 1,$$

достаточно определить распределение только одной концентрации, например свинца $c(x, t) = c_{\text{Pb}}(x, t)$. В этом параграфе мы рассмотрим упрощенную модель [50] без учета полей напряжений, описываемых уравнениями статического равновесия сил.

Эволюция распределения концентрации $c(x, t)$ описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t} c + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{J}_i = 0, \quad (6.5.1)$$

\mathbf{J}_i является расширенным диффузионным потоком вида

$$\mathbf{J}_i = -M(c) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\partial_c \Psi(c) - \varepsilon^2 a_{kl}(c) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} c \right] \quad \text{на } B_T = \Omega \times (0, T). \quad (6.5.2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\varepsilon \ll 1$. Функция M является скалярным коэффициентом мобильности, который характеризует подвижность α - и β -фаз:

$$M(c) = M^\alpha + (M^\beta - M^\alpha) \frac{c(x, t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \quad M^\alpha, M^\beta > 0, \quad (6.5.3)$$

c^α, c^β являются концентрациями α - и β -фаз в равновесном состоянии соответственно. Тензор поверхностных напряжений

$$a_{kl}(c) = a_{kl}^\alpha + (a_{kl}^\beta - a_{kl}^\alpha) \frac{c(x, t) - c^\alpha}{c^\beta - c^\alpha}, \quad (6.5.4)$$

где $a_{kl}^\alpha, a_{kl}^\beta$ являются положительными постоянными такими, что выполняется условие эллиптичности

$$a_{kl}(c) \xi_k \xi_l > d_0 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad |\xi| = 1, \quad c \in [0, 1]. \quad (6.5.5)$$

Предположим, что

$$a_{ij}^\alpha = \begin{pmatrix} a^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & a^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & a^\alpha \end{pmatrix}, \quad a_{ij}^\beta = \begin{pmatrix} a_1^\beta & 0 & 0 \\ 0 & a_1^\beta & 0 \\ 0 & 0 & a_3^\beta \end{pmatrix}, \quad (6.5.6)$$

т.е. фазы обладают существенно разными симметриями. Так (см. [48]), возможны следующие соотношения:

$$a_1^\beta : a^\alpha : a_3^\beta = 1 : 1.5 : 14. \quad (6.5.7)$$

Основные вопросы, на которые предстоит ответить:

- 1) каково влияние несимметрии на структуру решения вблизи фронта фазового перехода?
- 2) в чем отличие этой модели от классической модели Кана—Хилларда [36], описывающей феномен сепарации фаз?

Чтобы было гарантировано сосуществование обеих фаз, плотность свободной энергии Гиббса должна быть невыпуклой функцией концентрации, например, (см. [36]):

$$\Psi = \psi_0 \left(\left([c^\alpha - c_0]^2 - [c - c_0]^2 \right)^2 - b[c - c_0] \right), \quad c_0 = \frac{1}{2}(c^\alpha + c^\beta), \quad (6.5.8)$$

где ψ_0 и b являются постоянными. Тогда постоянные $c^\alpha, c^\beta \in (0, 1)$ являются классическими равновесными концентрациями, однозначно определяемыми по схеме Максвелла [12] системой уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_c \Psi(c^\alpha) &= \partial_c \Psi(c^\beta), \\ \Psi(c^\beta) - \Psi(c^\alpha) &= \partial_c \Psi(c^\alpha)(c^\beta - c^\alpha). \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Рассматриваемая модель описывает процесс кристаллизации, когда первая стадия разделения фаз завершена, и существуют области с двумя разными фазами. Для простоты будем считать, что в рассматриваемом случае имеются две такие связанные области $\Omega_{t,\varepsilon}^\pm$, разделенные зоной фазового перехода, являющейся в любое время окрестностью поверхности $\Gamma_{t,\varepsilon}$ фронта фазового перехода. Такие процессы называются жестко фронтными.

Обычные граничные условия завершают постановку задачи:

$$\partial_N c = 0, \quad \partial_N \left(\partial_c \Psi(c) - \varepsilon^2 a_{kl}(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_l} \right) = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad (6.5.10)$$

где N — вектор нормали к фиксированной границе $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

Начальное значение концентрации

$$c(x, t; \varepsilon)|_{t=0} = c^0(x; \varepsilon). \quad (6.5.11)$$

Для определенности будем считать, что

$$0 < c^\alpha < c^\beta < 1. \quad (6.5.12)$$

Как было отмечено выше, целью этого параграфа является вывод сингулярно-предельной задачи для (6.5.1), (6.5.10), (6.5.12) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Как мы покажем ниже, сингулярно-предельная задача описывается обобщенной задачей Стефана со свободной границей:

$$\frac{\partial}{\partial t} c^\pm - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(M(c) \frac{\partial}{\partial x_i} \partial_c \Psi(c^\pm) \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{t,0}^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (6.5.13)$$

$$c^\pm = \widehat{c}^\pm(\nu), \quad (x, t) \in \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0, T), \quad (6.5.14)$$

$$\begin{aligned} (\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) V_\nu &= M(c^+) \partial_\nu (\partial_c \Psi(c^+)) - \\ &- M(c^-) \partial_\nu (\partial_c \Psi(c^-)), \quad (x, t) \in \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

Здесь вектор ν — единичная нормаль к $\Gamma_{t,0}$, внешняя для области $\Omega_{t,0}^-$, V_ν — нормальная скорость фронта, и для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\Omega_{t,0}^+ \cup \Gamma_t \cup \Omega_{t,0}^- = \Omega, \quad \Omega_{t,0}^+ \cap \Omega_{t,0}^- = \emptyset, \quad \partial \Omega_t^+ = \Gamma_{t,0} \cup \Omega, \quad \partial \Omega_t^- = \Gamma_{t,0},$$

V_ν — нормальная скорость свободной границы $\Gamma_{t,0}$. Несимметрия тензора поверхностных натяжений приводит к зависимости предельных значений концентрации $\widehat{c}^\pm(\nu)$ на фронте фазового перехода от геометрии фронта в отличие от классической задачи Стефана.

На фиксированной границе имеем

$$\partial_N c^\pm = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad \Sigma_T \cap \Gamma_{0,0} = \emptyset. \quad (6.5.16)$$

Начальное значение предельных концентраций

$$c^\pm(x, t)|_{t=0} = c_\pm^0(x). \quad (6.5.17)$$

Численные эксперименты, проведенные О. А. Васильевой (МГУ), показали, что в 3-D случае задача (6.5.13)–(6.5.17) неустойчива. Решение, начиная с *радиально-симметричных* начальных данных в области Ω (шаре) с начальной свободной поверхностью $\Gamma_{0,0}$ (сферой), теряет свою симметрию. Этот процесс подобен феномену типа *роста дендрита*. В 2-D случае отмечен эффект *перетяжки* границы раздела фаз. Окружность $\Gamma_{0,0}$ трансформируется в эллипс $\Gamma_{t,0}$ с главной осью, параллельной главной кристаллографической оси, совпадающей с собственным вектором тензора поверхностного натяжения, соответствующим максимальному собственному значению. Бесспорно, эти свойства связаны с особенностями решений задачи (6.5.13)–(6.5.17).

Теорема 6.5.1. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с C^∞ -границей $\partial\Omega$, начальными функциями $c_\pm^0 \in C^{\alpha+1}$, $\alpha > 3$, целой частью $[\alpha] \neq 0$, начальным фронтом Γ_0 класса $C^{\alpha+2}$, и выполнены условия согласования до порядка $[\alpha] + 1$. Дополнительно потребуем, чтобы было выполнено условие разрешимости

$$\partial_{\nu_0} c_\pm^0|_{\Gamma_0} > 0, \quad (6.5.18)$$

где ν_0 — единичная нормаль к Γ_0 , внешняя для области Ω_0^- . Тогда на достаточно малом временном интервале $(0, T_0)$ существует единственное классическое решение двумерной расширенной задачи Стефана

$$c^\pm(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(Q_{T_0}), \quad Q_{T_0} = \Omega \times (0, T_0) \quad (6.5.19)$$

с фронтом $\Gamma_t, t \in (0, T_0)$, локально описываемым уравнением $y = \varrho(x, t)$, где функция

$$\varrho \in C^{\alpha/2}([0, T_0], C^1(\mathbb{R}^1)) \cap C^{1/2}([0, T_0], C^{\alpha-1}(\mathbb{R}^1)). \quad (6.5.20)$$

Теорема 6.5.2. На временном интервале существования классического решения сингулярно-предельной задачи (6.5.13)–(6.5.17) существует стабилизирующееся асимптотическое решение задачи (6.5.1), (6.5.10), (6.5.11) с любой точностью.

Доказательство существования классического решения расширенной задачи Стефана в 2-D случае аналогично приведенному в [22] для доказательства существования классического решения модифицированной задачи Стефана (метод *модельных* операторов). Расширенная задача Стефана — нелинейная задача. Стандартная процедура локализации (на малых временах) позволяет выбрать *диффеоморфизм* $\mathcal{F}_t(x, y)$ окрестности свободной границы (фронта) Γ_t в полуплоскости $\mathbb{R}^\pm = \{x \in \mathbb{R}^1, \pm y > 0\}$ следующего вида:

$$\mathcal{F}_t(x, y) = (x, y + \varrho(t, x)).$$

Здесь функция $\varrho(t, x)$ описывает в локальных координатах положение фронта Γ_t (если начальное положение фронта Γ_0 для $t = 0$ совпадает с границей полуплоскостей). Используя эти локальные координаты, можно описать нормальный вектор к фронту ν , внешний для области Ω_t^- , нормальную скорость фронта и значения *предельных* концентраций c^\pm на фронте:

$$\begin{aligned} \nu(x, t) &= \frac{(\partial_x \varrho(t, x), -1)}{\sqrt{1 + |\partial_x \varrho|^2}}, \\ V_\nu(t, x) &= -\frac{\partial_t \varrho}{\sqrt{1 + |\partial_x \varrho|^2}}, \\ c^\pm|_{y=0} &= \widehat{c}^\pm(q(\nu)), \\ q(\nu) &= \frac{1}{a^\alpha} \left(a_1^\beta - a^\alpha + (a_3^\beta - a_1^\beta) \frac{(\partial_x \varrho(t, x))^2}{1 + |\partial_x \varrho|^2} \right). \end{aligned}$$

Тогда линеаризованная задача для расширенной задачи Стефана в любой точке \mathcal{P} начального положения фронта Γ_0 определяет следующую *модельную смешанную граничную* задачу в полупространствах $\mathbb{R}^\pm = \mathbb{R}_x^1 \times \{\pm y > 0\}$:

$$\begin{aligned} \partial_t C^\pm - M^\pm \Delta C^\pm &= F^\pm, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^\pm, \\ \partial_t \varrho &= M^+ \partial_y C^+|_{y=0} - M^- \partial_y C^-|_{y=0} + g, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ C^\pm|_{y=0} &= (a \partial_x + b) \varrho + f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ C^\pm|_{t=0} &= 0, \quad \varrho|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Постоянные

$$\begin{aligned} M^\pm &= M(c_\pm^0(\mathcal{P})) \partial_c \Psi^2(c_\pm^0(\mathcal{P})) > 0, \quad \gamma = c_+^0(\mathcal{P}) - c_-^0(\mathcal{P}), \\ b &= \partial_{\nu_0} c_\pm^0(\mathcal{P}), \quad a = 2(a_3^\beta - a_1^\beta) \partial_x \varrho(0, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Центральным местом доказательства теоремы 6.5.1 (см. [22]) являются следующие утверждения о решениях *модельной* задачи.

Теорема 6.5.3. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $1 < p < \infty$ и $p \neq 3/2, 3$. Тогда для решения $C^\pm(x, y, t)$, $\varrho(x, t)$ модельной задачи следующие утверждения эквивалентны:

1) *имеем*

$$\begin{aligned} C^\pm &\in H_p^1((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap L_p((0, \infty), H_p^2(\mathbb{R}^\pm)), \\ \varrho &\in B_p^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap B^{1 - \frac{1}{2p}}((0, \infty), H^2(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B^{3 - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)); \end{aligned}$$

2) *имеем*

$$\begin{aligned} F &\in L_p((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)), \\ f &\in B_p^{1 - \frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{2 - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)), \\ g &\in B_p^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{1 - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)), \end{aligned}$$

если выполнены условия согласования для функций F , f , g . Здесь B_p^s — пространства Бесова.

Теорема 6.5.4. Пусть $b > 0$, $a = 0$, $1 < p < \infty$ и $p \neq 3/2$. Тогда описанная выше модельная задача совпадает с модельной задачей классической задачи Стефана. В этом случае (см. [22]) для решения $C^\pm(x, y, t)$, $\varrho(x, t)$ модельной задачи эквивалентны следующие утверждения:

1) *имеем*

$$C^\pm \in H_p^1((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap L_p((0, \infty), H_p^2(\mathbb{R}^\pm)),$$

$$\varrho \in B_p^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^\pm)) \cap B_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1));$$

2) *имеем*

$$F \in L_p((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)),$$

$$f \in B_p^{1-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)),$$

$$g \in B_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}((0, \infty), L_p(\mathbb{R}^1)) \cap L_p((0, \infty), B_p^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^1)),$$

если выполнены условия согласования для функций F, f, g .

Модельная задача при $b > 0$ сводится к параболическим псевдодифференциальным операторам на границе порядка 2, $a \neq 0$, и порядка 1, $a = 0$. Стандартная процедура [22] позволяет доказать локальную разрешимость нелинейной задачи, используя точные оценки решений модельной задачи.

Открытым остается вопрос о неустойчивости решения трехмерной расширенной задачи Стефана. Расширенная задача Стефана станет предметом исследований нашей ближайшей публикации. Исследование классических решений сингулярно-предельной задачи [44, 45] позволяет провести селекцию начальных данных (6.5.11) задачи (6.5.1), (6.5.10), (6.5.11) так, чтобы соответствующие решения этой задачи были бы гладкими аппроксимациями решений сингулярно-предельной задачи (6.5.13)–(6.5.17) [22]. Это означает, что они стремятся к решениям сингулярно-предельной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это позволит нам описать свойства фронта $\Gamma_{\varepsilon, T}$, разделяющего фазы, и свойства решений начальной задачи в окрестности фронта.

6.5.1. Асимптотическое решение. Перейдем к построению асимптотического решения для концентрации $c(x, t; \varepsilon)$, являющейся гладкой аппроксимацией сильного разрыва. Мы рассмотрим случай, когда фронт фазового перехода Γ_t не имеет пересечения с фиксированной границей Σ_T для любого $t \in [0, T]$. Тогда асимптотические решения в окрестности $\Omega_{\Gamma, \delta} \in B_T$ фронта Γ_T и в окрестности $\Omega_{\Sigma_T, \delta}$ фиксированной границы Σ_T строятся независимо. В этом случае (см. [45]) носитель быстрого изменения функции типа погранслоя и носитель быстрого изменения решения в окрестности фронта Γ_T не пересекаются (с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^\infty)$). Построение функций погранслоя аналогично приведенному в [45]. В настоящей статье мы сосредоточим основное внимание на внутреннем разложении в окрестности $\Omega_{\Gamma, \delta}$ фронта, на внешнем разложении (фоне) и их сравнении в области пересечения носителей. Что же касается функций типа погранслоя и связанной с ними задачи описания поведения решения в окрестности фиксированной границы, то сошлемся на результаты [45].

Анзатц гладкой аппроксимации сильного разрыва для концентрации c в окрестности $\Omega_{\Gamma, \delta} = \{x \in B, |t + \varphi(x)| < \delta\}$, $t \in (0, T)$, будем искать в виде:

$$c_{\text{as}}(x, t; \varepsilon) = \varepsilon \Phi^M(x, t; \varepsilon) + \mathcal{W}^M(\xi, x, t; \varepsilon),$$

$$\xi = \gamma(x) \eta(x) \tau + \varphi_1(x), \quad \tau = \frac{t + \varphi(x)}{\varepsilon},$$

$$\eta = \frac{1}{|\nabla_x \varphi|}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}}, \quad \nabla_x \varphi \neq 0, \quad \gamma \neq 0; \quad (6.5.21)$$

здесь вектор нормали к фронту $\nu = \eta \nabla_x \varphi$, фоновые функции Φ^M являются гладкими, ограниченными в B_T , имеющими следующее разложение:

$$\Phi^M = \sum_{j=1}^M \varepsilon^{j-1} \Phi_j(x, t).$$

Функции \mathcal{W}^M , быстро меняющиеся вблизи фронта Γ_t , аналогичные внутреннему разложению в окрестности $\Omega_\Gamma \in B_T$ фронта фазового перехода Γ_T , рассматриваются в виде

$$\mathcal{W}^M(\xi, x, t; \varepsilon) = y(\xi, x, t) + \sum_{j=1}^M \varepsilon^j Y_j^c(\xi, x, t),$$

где

$$(Y_j^c)^- = 0 \quad \text{и} \quad \hat{y} \neq 0. \quad (6.5.22)$$

Функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\gamma(x)$ также являются гладкими, ограниченными в B .

Определение 6.5.1. В дальнейшем мы используем следующее обозначение

$$\hat{G}(t, \xi) = G(x, t, \xi) \Big|_{t=-\varphi(x)}$$

для оператора следа гладкой функции G на поверхность фронта Γ_T сингулярно-предельной задачи, где

$$\Gamma_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_{t,0} \quad \Gamma_{t,0} = \{x \in \Omega, t + \varphi(x) = 0\}.$$

Фронт фазового перехода $\Gamma_{t,\varepsilon}$ рассматривается как возмущение Γ_T вида

$$\Gamma_{T,\varepsilon} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_{t,\varepsilon}, \quad \Gamma_{t,\varepsilon} = \{x \in \Omega, \gamma(x)\eta(x)(t + \varphi(x)) + \varepsilon\varphi_1(x) = 0\}.$$

Теперь определим используемые в дальнейшем классы быстрых функций. Положим $\mathcal{S} = S(\mathbb{R}_\xi^1; C^\infty(\overline{B}_T))$ (класс так называемых функций типа солитона), где S — пространство функций Шварца, $\mathcal{K} = \{f(\xi, x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^1 \times \overline{B}_T), \partial_\xi f \in \mathcal{S}\}$ (класс так называемых функций типа кинка). Имеется в виду, что здесь справедливо следующее условие стабилизации на бесконечности:

$$\xi^k \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{\partial^i}{\partial x^i} (f - f^\pm) = 0 \quad \forall k, j, i \geq 0, \quad \text{если} \quad \xi \rightarrow \pm\infty \quad (6.5.23)$$

равномерно на любом компакте $G \in B_T$, где

$$f^\pm(x, t) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi, x, t).$$

Для функций типа солитона f имеем $f^\pm = 0$.

Таким образом, потребуем, чтобы функции $y(\xi, x)$, $Y_{st,j}^c \in \mathcal{K}$. Условия (6.5.21), (6.5.22) имеют в виду рассмотрение гладкой аппроксимации сильного разрыва. Тогда функции y , $Y_{st,j}^c$ являются гладкими аппроксимациями сильных разрывов.

Лемма 6.5.1. Для любой функции типа солитона $Y(\xi, x, t) \in \mathcal{S}$ справедливо следующее соотношение:

$$Y(\xi, x, t) \Big|_{\xi = \frac{\gamma\eta(x)(t+\varphi(x))}{\varepsilon} + \varphi_1(x)} = \left\{ \hat{Y}(\xi, x) + \frac{\varepsilon}{\gamma\eta} (\xi - \varphi_1) \frac{\widehat{\partial}}{\partial t} Y(\xi, x) \right\} \Big|_{\xi = \frac{\eta\gamma(t+\varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(\varepsilon^2). \quad (6.5.24)$$

Доказательство. Разложим функцию Y в ряд Тейлора по медленной переменной в окрестности фронта Γ_T . Получим

$$\begin{aligned} Y(\xi, x, t) &= \hat{Y}(\xi, x) + \widehat{\partial}_t Y(\xi, x)(t + \varphi(x)) + \partial_t^2 Y(\xi, t_*, x)(t + \varphi(x))^2 = \\ &= \hat{Y}(\xi, x) + \frac{\varepsilon}{\eta\gamma} \widehat{\partial}_t Y(\xi, x)(\xi - \varphi_1) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

так как, в силу (6.5.23), $|\xi^2 \partial_t^2 Y(\xi, t_*, x)| < C_2$ и, следовательно, имеем

$$(t + \varphi(x))^2 \partial_t^2 Y(\xi, t_*, x) = O(\varepsilon^2).$$

Последнее завершает доказательство леммы. \square

Приведем ряд следствий леммы 6.5.1 для производных функций типа Y_w и Y_{st} , а именно, функций $Y_w, Y_{st} \in \mathcal{K}$ таких, что справедливы следующие условия:

$$\widehat{Y}_w(\xi, x) = 0, \quad \widehat{\partial_t Y}_w(\xi, x) \neq 0, \quad \widehat{Y}_{st}(\xi, x) \neq 0.$$

Отметим, что

$$\eta \widehat{\nabla_x \varrho} = \widehat{\varrho_t} \nu, \quad \nu = \eta \nabla_x \varphi \quad (6.5.25)$$

для любой гладкой функции ϱ такой, что $\varrho = 0$ на фронте, где ν является нормалью к фронту. В силу леммы 6.5.1 получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} Y_w \left(\gamma \eta \frac{t + \varphi}{\varepsilon} + \varphi_1, x, t \right) = \\ & = \left\{ \partial_{x_k} Y + \frac{\eta}{\varepsilon} \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi Y_w + \partial_{x_k} (\gamma \eta) (t + \varphi) \partial_\xi Y_w \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t + \varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} = \\ & = \left\{ \partial_{x_k} Y_w(\xi, x, t) + (\xi - \varphi_1) \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi \widehat{\partial_t Y}_w(\xi, x) \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t + \varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.5.26)$$

Используя (6.5.25), можно переписать (6.5.26) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} Y_w \left(\gamma \eta \frac{t + \varphi}{\varepsilon} + \varphi_1, x, t \right) = \\ & = \left\{ \partial_{x_k} Y_w(\xi, x, t) + (\xi - \varphi_1) \partial_\xi \widehat{\partial_{x_k} Y}_w(\xi, x) \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t + \varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Также получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} Y_{st} \left(\gamma \eta \frac{t + \varphi}{\varepsilon} + \varphi_1, x, t \right) = \\ & = \left\{ \partial_{x_k} Y + \frac{\gamma \eta}{\varepsilon} \partial_{x_k} \varphi \partial_\xi Y_w + \partial_{x_k} (\gamma \eta) (t + \varphi) \partial_\xi Y_w \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t + \varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \gamma \eta \partial_{x_k} \varphi \left\{ \partial_\xi Y_w \right\} \Big|_{\xi = \frac{\gamma \eta (t + \varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1} + O(1). \end{aligned}$$

Комментарий. Отметим, что в выражении в фигурных скобках медленные переменные t и x и быстрая переменная ξ предполагаются независимыми. Тогда производные ∂_{x_j} и ∂_ξ рассматриваются независимыми также.

В то же время выбор значения быстрой переменной $\xi = \frac{\eta(t + \varphi)}{\varepsilon} + \varphi_1$ осуществляется после операции ограничения на фронт «hat», введенной выше.

6.5.2. Профиль распределения концентрации. Установим, что несимметрия тензора поверхностного натяжения в расширенной модели (6.5.1)–(6.5.12) Кана–Хилларда приводит к необходимости изменения процедуры Максвелла нахождения равновесных значений концентрации.

Из приближения уравнения (6.5.1) порядка $O(1/\varepsilon^2)$, в силу оценок леммы 6.5.1, следует, что главная часть $y(\xi, x, t)$ асимптотического разложения для распределения концентрации удовлетворяет следующему уравнению на фронте:

$$\partial_\xi \left(M(\hat{y}) \partial_\xi \left(\partial_{\hat{y}} \Psi(\hat{y}) - (1 + q(\nu)) (\hat{y} - c^\alpha) \partial_\xi^2 \hat{y} \right) \right) = 0, \quad (6.5.27)$$

где $\nu = \eta \nabla_x \varphi$ является нормалью к фронту,

$$\begin{aligned} \hat{y}(\xi, x) &= y(\xi, q(\nu)), \quad \xi = \gamma \eta \tau + \varphi_1(x), \quad \tau = \frac{t + \varphi(x)}{\varepsilon}, \\ \gamma(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}}, \quad q(\nu) = \frac{a_{kl}^\beta \nu_k \nu_l - a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}{(c^\beta - c^\alpha) a_{kl}^\alpha \nu_k \nu_l}. \end{aligned}$$

В силу эллиптичности тензора поверхностных натяжений $a_{kl}(c)$ имеем

$$\gamma(\nu) \geq c_0 > 0, \quad 1 + q(\nu)(c - c^\alpha) > c_0 > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^3, \quad |\nu| = 1, \quad \forall c \in [c_{\min}^-, c_{\min}^+],$$

где постоянная c_0 не зависит от ε . Тогда справедливы следующие оценки:

$$\max\left(0, c^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)}\right) < y < \min\left(1, c^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)}\right), \quad (6.5.28)$$

где

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c^\alpha} < q < \frac{1}{\max(0, c^\alpha - c_{\min}^-)}.$$

Из последней оценки следует, что

$$c_{\min}^\pm \in I_\Psi(q) = \left(\max\left(0, c_\Psi^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)}\right), \min\left(1, c_\Psi^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)}\right) \right)$$

для любых

$$q \in \mathcal{J}_\Psi = \left(-\frac{1}{c_{\min}^+ - c_\Psi^\alpha}, \frac{1}{\max(0, c_\Psi^\alpha - c_{\min}^-)} \right).$$

Здесь другая «постоянная» интегрирования $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ является функцией класса $C^\infty(\bar{B})$.

Комментарий. Уравнение (6.5.28) может быть рассмотрено как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно быстрой переменной ξ , в котором вектор ν является вектор-параметром.

Интегрируя уравнение (6.5.28) относительно ξ , имея в виду класс рассматриваемых решений $y(\xi) \in \mathcal{K}$ уравнения (6.5.28), в силу условия стабилизации на бесконечности (6.5.23), получим

$$(1 + q(y - c^\alpha)) \left\{ \partial_y \Psi_1(y) - \frac{\partial_c \Psi(y^-)}{1 + q(y - c^\alpha)} - \partial_\xi^2 y \right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\partial_\xi^2 y - \partial_y W_1(y, q) = 0,$$

где потенциал

$$W_1(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1(y, q) - \frac{1}{q} \partial_c \Psi(y^-) \ln \left(\frac{1 + q(y - c^\alpha)}{1 + q(y^- - c^\alpha)} \right) - \Psi_1(y^-) = \int_{y^-}^y \frac{\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(y^-)}{1 + q(c - c_\Psi^\alpha)} dc,$$

$$\partial_y \Psi_1(y, \nu) = \frac{\partial_y \Psi(y)}{1 + q(\nu)(y - c^\alpha)}.$$

Здесь $y^\pm = \lim_{\xi \rightarrow 0^\pm} y$ являются предельными значениями функции $y \in \mathcal{K}$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Определение 6.5.2. Гладкий потенциал $\Psi(c)$ будем называть допустимым, если существуют только три критические точки $0 < c_{\min}^- < c_{\max} < c_{\min}^+ < 1$ такие, что

$$\begin{aligned} \partial_c \Psi(c_{\min}^\pm) = \partial_c \Psi(c_{\max}) = 0, \quad \partial_c^2 \Psi(c_{\min}^\pm) > 0, \quad \partial_c^2 \Psi(c_{\max}) < 0, \\ \partial_c^2 \Psi(c) > 0 \quad \forall c \in [0, c_{\min}^-] \text{ и } c \in [c_{\min}^+, 1], \end{aligned} \quad (6.5.29)$$

и только две точки перегиба c_i^\pm , $c_{\min}^- < c_i^- < c_i^+ < c_{\min}^+$. Дополнительно потребуем, чтобы

$$\partial_c \Psi(1) \geq \partial_c \Psi(c_i^+) \quad \text{и} \quad \partial_c \Psi(0) \leq \partial_c \Psi(c_i^-).$$

Комментарий. Классический метод Максвелла [48] построения равновесных значений концентрации использует факт существования опорной прямой к графику допустимого потенциала. Точки касания опорной прямой и графика потенциала определяют предельные значения концентрации $c = c_{\Psi}^{\alpha}$, $c = c_{\Psi}^{\beta}$, удовлетворяющие системе (6.5.28), которые являются постоянными. Как мы покажем ниже, введение несимметрии в тензор поверхностных натяжений приводит к необходимости изменения конструкции Максвелла. Более того, в этом случае равновесные значения концентраций будут зависеть от геометрии области, что обуславливает существенное различие в поведении классической модели Кана—Хилларда (симметричный тензор поверхностных напряжений $a_{kl} = \delta_{kl}$ в (6.5.4)) и решений уравнения (6.5.1) в окрестности фронта фазового перехода.

Лемма 6.5.2. Для любого допустимого потенциала $\Psi(c)$ и любого значения постоянной q из интервала

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c_{\Psi}^{\alpha}} < q < \frac{1}{\max(0, c_{\Psi}^{\alpha} - c_{\min}^-)}$$

существует логарифмическая опорная кривая к графику потенциала $\Psi_1(c, q)$. Имеется в виду существование двух предельных значений $c = \widehat{c}_{\Psi}^{\pm}(q) \in (0, 1)$, определяемых системой уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_c \Psi(\widehat{c}_{\Psi}^-(q)) &= \partial_c \Psi(\widehat{c}_{\Psi}^+(q)), \\ \Psi_1(\widehat{c}_{\Psi}^+(q), q) - \Psi_1(\widehat{c}_{\Psi}^-(q), q) &= \frac{1}{q} \partial_c \Psi(\widehat{c}_{\Psi}^-(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}_{\Psi}^+(q) - c_{\Psi}^{\alpha})}{1 + q(\widehat{c}_{\Psi}^-(q) - c_{\Psi}^{\alpha})} \right). \end{aligned} \quad (6.5.30)$$

Тогда потенциал

$$W_1(c, q) = \int_{\widehat{c}_{\Psi}^-(q)}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c}_{\Psi}^-(q))}{1 + q(c_1 - c_{\Psi}^{\alpha})} dc_1$$

имеет два кратных корня $c = \widehat{c}_{\Psi}^{\pm}(q)$ уравнения $W_1 = 0$ таких, что справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} W_1(c, q) &> 0 \quad \forall c \in I_{\Psi}(q), \quad c \neq \widehat{c}_{\Psi}^{\pm}(q), \\ \partial_c^2 W_1(c, q) \Big|_{c=\widehat{c}_{\Psi}^{\pm}(q)} &= \frac{\partial_c^2 \Psi(c)}{1 + q(c - c_{\Psi}^{\alpha})} \Big|_{c=\widehat{c}_{\Psi}^{\pm}(q)} > 0 \end{aligned}$$

для любого допустимого значения $q \in \mathcal{J}_{\Psi}$.

Лемма 6.5.3. Для любого допустимого потенциала $\Psi(c)$ уравнение

$$\partial_{\xi}^2 y - \frac{\partial_c \Psi(y) - \partial_c \Psi(\widehat{c}_{\Psi}^-(q))}{1 + q(y - c_{\Psi}^{\alpha})} = 0 \quad (6.5.31)$$

с вектор-параметром $q \in \mathcal{J}_{\Psi}$ имеет единственное с точностью до трансляции ограниченное строго монотонное решение $y(\xi, q) \in \mathcal{K}$, удовлетворяющее условию стабилизации (6.5.23).

Для уравнения (6.5.28) требуется выполнение следующей равномерной оценки:

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c_{\Psi}^{\alpha}} < q(\nu) < \frac{1}{\max(0, c_{\Psi}^{\alpha} - c_{\min}^-)} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^3, \quad |\nu| = 1,$$

для определения допустимых значений q .

Лемма 6.5.4. Функции \widehat{c}_{Ψ}^{\pm} , полученные в лемме 6.5.2, являются решением обыкновенных дифференциальных уравнений относительно q вида

$$\frac{d\widehat{c}_{\Psi}^{\pm}}{dq} = \frac{W_2(\widehat{c}_{\Psi}^{\pm}, q)}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}_{\Psi}^{\pm}(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}_{\Psi}^{\pm} - c_{\Psi}^{\alpha})}{1 + q(\widehat{c}_{\Psi}^{\pm} - c_{\Psi}^{\alpha})} \right)}, \quad (6.5.32)$$

$$\widehat{c_{\Psi}^-}|_{q=0} = c^\alpha,$$

где функция $\widehat{c_{\Psi}^+}(q) = \widehat{c_{\Psi}^+}(\widehat{c_{\Psi}^-}(q))$ является композицией функций $\widehat{c_{\Psi}^+}(\widehat{c_{\Psi}^-})$ и $\widehat{c_{\Psi}^-}(q)$. Функция $\widehat{c_{\Psi}^-}(q)$ является решением уравнения

$$\partial_c \Psi(\widehat{c_{\Psi}^+}) = \partial_c \Psi(\widehat{c_{\Psi}^-}), \quad \widehat{c_{\Psi}^+} \neq \widehat{c_{\Psi}^-},$$

таким, что

$$\partial_c^2 \Psi(\widehat{c_{\Psi}^\pm}) > 0.$$

Справедливо неравенство

$$\frac{d\widehat{c_{\Psi}^-}}{dq} > 0 \quad \forall q \in \mathcal{J}_{\Psi}. \quad (6.5.33)$$

Доказательство существования логарифмической опорной кривой к графику потенциала W_1 заменой переменных

$$z = \frac{1}{q} \ln(1 + q(c - c_{\Psi}^\alpha)), \quad J_{\Psi}(q) \rightarrow \mathcal{Z}_{\Psi}(q), \quad (6.5.34)$$

сводится к классическому случаю существования опорной прямой к графику допустимого потенциала.

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\Psi}(q) &= (\mathcal{Z}_{\Psi}^+(q), \mathcal{Z}_{\Psi}^-(q)), \\ \mathcal{Z}_{\Psi}^-(q) &= \frac{1}{q} \ln \left(1 + q \left(\max \left(0, c_{\Psi}^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)} \right) - c_{\Psi}^\alpha \right) \right), \\ \mathcal{Z}_{\Psi}^+(q) &= \frac{1}{q} \ln \left(1 + q \left(\min \left(1, c_{\Psi}^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

В тоже время

$$\mathcal{Z}_{\Psi}^-(q) < \mathcal{Z}_{\Psi}^+(q),$$

так как $(1 + q(c - c_{\Psi}^\alpha)) > 0$ для любого $q \in \mathcal{J}_{\Psi}$. Очевидно, $\mathcal{Z}_{\Psi}(0) = (-c_{\Psi}^\alpha, 1 - c_{\Psi}^\alpha)$. В переменной z получим

$$\Psi_1(z, q) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1(c(z), q) = \int_{c^\alpha}^{c(z)} \frac{\partial_c \Psi(c)}{1 + q(c - c_{\Psi}^\alpha)} dc, \quad c(z) = c_{\Psi}^\alpha + \frac{e^{qz} - 1}{q}.$$

Теперь мы используем факт существования опорной прямой к графику потенциала $\Psi_1(z, q)$, допустимого на интервале $\mathcal{Z}_{\Psi}(q)$. Проверим относительно переменной $z \in \mathcal{Z}_{\Psi}(q)$ условия допустимости потенциала Ψ_1 . Имеем

$$\partial_z \Psi_1(z, q) = \frac{\frac{dc}{dz} \Psi_c(c(z), q)}{1 + q(c - c_{\Psi}^\alpha)} = \partial_c \Psi(c(z)).$$

Следовательно, уравнение $\partial_z \Psi_1(z, q) = 0$ имеет три различных корня $z = z_{\min}^\pm = z(c_{\min}^\pm)$, $z = z_{\max} = z(c_{\max}) \in \mathcal{Z}_{\Psi}(q)$, определяемых корнями $c_{\min}^\pm, c_{\max} \in I_{\Psi}(q)$ уравнения $\partial_c \Psi(c) = 0$ и

$$\partial_z^2 \Psi_1|_{z=z_{\min}^\pm} = \frac{dc}{dz} \partial_c^2 \Psi(c(z))|_{z=z^\pm} > 0,$$

$$\partial_z^2 \Psi_1|_{z=z_{\max}} = \frac{dc}{dz} \partial_c^2 \Psi(c(z))|_{z=z_{\max}} < 0.$$

Последнее является следствием свойств потенциала $\Psi(c)$. Также получим

$$\partial_x^2 \Psi_1 > 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}_{\Psi}(q) \cup \{z < z_{\min}^-\} \quad \text{и} \quad z \in \mathcal{Z}_{\Psi}(q) \cup \{z > z_{\max}^+\}.$$

Более того, функция $\Psi_1(z, q)$ имеет только две точки перегиба $z_i^\pm = z(c_i^\pm) \in \mathcal{Z}_{\Psi}(q)$.

Если потенциал $\Psi_1(z)$ ограничен на интервале $\mathcal{Z}_\Psi(q)$, то рассмотрим его гладкое продолжение с интервала $\mathcal{Z}_\Psi(q)$ в \mathbb{R}_z^1 такое, что

$$\partial_z^2 \Psi_1 > 0 \quad \forall z \neq \mathcal{Z}_\Psi(q).$$

Желаемый результат следует из существования опорной прямой к графику $\Psi_1(z, q)$. Тогда существуют два значения $z = z^\pm(q)$, для которых справедливы уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_z \Psi_1(z^+(q), q) &= \partial_z \Psi_1(z^-(q), q), \\ \Psi_1(z^+(q), q) - \Psi_1(z^-(q), q) &= \partial_z \Psi_1(z^-(q), q)(z^+(q) - z^-(q)). \end{aligned} \quad (6.5.35)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} W_1(z, q) &= \int_{z^-(q)}^z \partial_z \Psi_1(c(z_1)) dz_1 - \partial_z \Psi_1(z^-(q), q)(z - z^-(q)) = \\ &= \left\{ \int_{\widehat{c^-(q)}}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{1 + q(c - c^\alpha)} dc_1 \right\} \Big|_{c=c(z)} > 0. \end{aligned}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^1$, $z \neq z^\pm$, где

$$\widehat{c^\pm(q)} \stackrel{\text{def}}{=} c(z^\pm(q)).$$

Дополнительные условия определения 6.5.2 позволяют показать, что

$$\begin{aligned} \partial_z \Psi_1(z_i^-) &< \partial_z \Psi_1 \Big|_{z=\frac{1}{q} \ln \left(1+q \left(\max \left(0, c_\Psi^\alpha - \frac{1}{\max(0, q)} \right) - c^\alpha \right) \right)}, \\ \partial_z \Psi_1(z_i^+) &> \partial_z \Psi_1 \Big|_{z=\frac{1}{q} \ln \left(1+q \left(\min \left(1, c_\Psi^\alpha + \frac{1}{\max(0, -q)} \right) - c^\alpha \right) \right)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$z^\pm \in \mathcal{Z}_\Psi(q) \implies \widehat{c^\pm} \in I_\Psi(q).$$

Таким образом,

$$W_1(c, q) = \int_{\widehat{c^-(q)}}^c \frac{\partial_c \Psi(c_1) - \partial_c \Psi(\widehat{c^-(q)})}{1 + q(c - c^\alpha)} dc_1 > 0 \quad \forall c \in I_\Psi(q), \quad c \neq \widehat{c^\pm(q)}$$

и $c = \widehat{c^\pm(q)}$ являются кратными корнями уравнения $W_1(c, q) = 0$, что завершает доказательство леммы 6.5.3. \square

В силу теоремы о неявной функции (см. [11]), функции $\widehat{c^\pm(q)}$ являются гладкими на интервале $q \in \mathcal{J}_\Psi$. Дифференцируя второе уравнение в (6.5.35), получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\widehat{c^-(q)}}^{\widehat{c^+(q)}} \frac{\partial_c \Psi(c) - \Psi(\widehat{c^-(q)})}{(1 + q(c - c_\Psi^\alpha))^2} (c - c_\Psi^\alpha) dc - \\ & - \frac{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c^-(q)})}{q} \frac{d\widehat{c^-(q)}}{dq} \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c^+(q)})}{1 + q(\widehat{c^-(q)})} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу соотношения

$$W_1(\widehat{c^+(q)}, q) \equiv 0, \quad q \in \mathcal{J}_\Psi,$$

имеем

$$\frac{d\widehat{c}^-(q)}{dq} = \frac{W_2(\widehat{c}^+(q), q)}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^-(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}^+(q))}{1 + q(\widehat{c}^-(q))} \right)},$$

где

$$W_2(c, q) = \int_{\widehat{c}^-(q)}^c \frac{\partial_c \Psi(c) - \Psi(\widehat{c}^-(q))}{(1 + q(c - c_\Psi^\alpha))^2} dc.$$

Можно показать, что

$$W_2(\widehat{c}^+(q), q) > (1 + q(c_*(q) - c_\Psi^\alpha)) \int_{\widehat{c}^-(q)}^c \frac{\partial_c \Psi(c) - \Psi(\widehat{c}^-(q))}{1 + q(c - c_\Psi^\alpha)} dc = 0.$$

Последнее является следствием второго уравнения в (6.5.35). Здесь $c_*(q)$ является третьим корнем ($\widehat{c}^-(q) < c_*(q) < \widehat{c}^+(q)$) уравнения

$$\partial_c \Psi(c) = \partial_c \Psi(\widehat{c}^-(q)).$$

Таким образом, неравенство (6.5.33) справедливо при $q \in \mathcal{J}_\Psi$, $q \neq 0$. В то же время имеем

$$\begin{aligned} & \frac{W_2(\widehat{c}^+(q), q)}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^-(q)) \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}^+(q))}{1 + q(\widehat{c}^-(q))} \right)} \Big|_{q=0} = \\ & \frac{\int_{c_\Psi^\alpha}^{c_\Psi^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c_\Psi^\alpha))(c - c_\Psi^\alpha) dc + \partial_c^2 \Psi(c_\Psi^\alpha)(c_\Psi^\beta - c_\Psi^\alpha) \frac{d\widehat{c}^-(q)}{dq} \Big|_{q=0}}{\partial_c^2 \Psi(c_\Psi^\alpha)(c_\Psi^\beta - c_\Psi^\alpha)}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\frac{d\widehat{c}^-(q)}{dq} \Big|_{q=0} = - \frac{\int_{c_\Psi^\alpha}^{c_\Psi^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c_\Psi^\alpha))(c - c_\Psi^\alpha) dc}{\partial_c^2 \Psi(c_\Psi^\alpha)(c_\Psi^\beta - c_\Psi^\alpha)}.$$

В силу соотношения

$$\int_{c_\Psi^\alpha}^{c_\Psi^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c_\Psi^\alpha)) dc = 0$$

получаем, что

$$\int_{c_\Psi^\alpha}^{c_\Psi^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c_\Psi^\alpha)) dc < (c_*(0) - c_\Psi^\alpha) \int_{c_\Psi^\alpha}^{c_\Psi^\beta} (\partial_c \Psi(c) - \partial_c \Psi(c_\Psi^\alpha)) dc = 0,$$

где $c_*(0)$ является третьим корнем уравнения

$$\partial_c \Psi(c) = \partial_c \Psi(c_\Psi^\alpha),$$

где $c_\Psi^\alpha < c_*(0) < c_\Psi^\beta$. Это доказывает лемму 6.5.4. □

Для тензора поверхностных натяжений (6.5.14) имеем

$$q(\nu) = \frac{(a_1^\beta - a^\alpha)(1 - n_3^2) + (a_3^\beta - a^\alpha)n_3^2}{a^\alpha} = \frac{a_1^\beta - a^\alpha + (a_3^\beta - a_1^\beta)n_3^2}{a^\alpha} \quad (6.5.36)$$

Как мы отмечали выше [48], возможны следующие соотношения:

$$a_1^\beta : a^\alpha : a_3^\beta = 1 : 1.5 : 14.$$

Тогда функция

$$q(\nu)|_{\nu_3=0} = \frac{a_1^\beta - a^\alpha}{a^\alpha} < 0, \quad q(\nu)|_{\nu_3=1} = \frac{a_3^\beta - a^\alpha}{a^\alpha} > 0$$

меняет знак. Основное ограничение на коэффициенты тензора поверхностных натяжений, определяемое леммой 6.5.3, может быть сформулировано в виде

$$-\frac{1}{c_{\min}^+ - c_\Psi^\alpha} < \max_{|\nu_3| \leq 1} \frac{a_1^\beta - a^\alpha + (a_3^\beta - a_1^\beta)n_3^2}{a^\alpha} < \frac{1}{\max(0, c_\Psi^\alpha - c_{\min}^-)}. \quad (6.5.37)$$

Отметим, что расширение (6.5.1) классической задачи Кана—Хилларда чрезвычайно чувствительно к структуре оператора поверхностных натяжений и геометрическим свойствам фронта Γ_T . Так, например, если оператор поверхностных натяжений в (6.5.1) вводится в самосопряженной форме

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} c = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ M(c) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \Psi(c)}{\partial c} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kl}(c) \frac{\partial}{\partial x_l} c \right) \right] \right\}, \quad (6.5.38)$$

то стандартное уравнение для главной части асимптотического разложения для концентрации имеет вид

$$\partial_\xi \left(M(c) \partial_\xi \left(\partial_\xi \left((1 + q(y - c_\Psi^\alpha)) \partial_\xi y \right) - \partial_c \Psi(y) \right) \right) = 0. \quad (6.5.39)$$

Отсюда, как и выше, получим

$$\partial_\xi \left((1 + q(y - c_\Psi^\alpha)) \partial_\xi y \right) - \partial_c \Psi(y) + \partial_c \Psi(\widehat{c_\Psi^-}) = 0. \quad (6.5.40)$$

Сделав замену функций

$$\partial_\xi Y(y) = (1 + q(y - c_\Psi^\alpha)) \partial_\xi y \implies \frac{d}{dy} Y(y) = 1 + q(y - c_\Psi^\alpha),$$

получим

$$\partial_\xi^2 Y - \partial_c \Psi(y(Y)) + \partial_c \Psi(\widehat{c_\Psi^-}) = 0.$$

Вводя потенциал $\Psi_1(Y, q) = \Psi(y(Y), q)$ такой, что

$$\partial_y \Psi_1 = (1 + q(y - c^\alpha - \Psi)) \partial_y \Psi(y),$$

сведем исследование разрешимости уравнения (6.5.40) к исследованию стандартного уравнения классической задачи Кана—Хилларда. Так же, как выше, доказывается следующая лемма.

Лемма 6.5.5. Для любого допустимого потенциала $\Psi(c)$ уравнение (6.5.40) с вектор-параметром $q \in \mathcal{J}_\Psi$ имеет единственное с точностью до трансляции ограниченное строго монотонное решение $y(\xi, q) \in \mathcal{K}$, удовлетворяющее условию стабилизации (6.5.23).

Предельные значения $\widehat{c_\Psi^\pm} = y^\pm$ решения $y(\xi, q)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_c \Psi(\widehat{c_\Psi^-}) = \partial_c \Psi(\widehat{c_\Psi^+}), \quad (6.5.41)$$

$$\frac{d\widehat{c_\Psi^-}}{dq} = - \frac{\int_{\widehat{c_\Psi^+}}^{\widehat{c_\Psi^-}} \left(\partial_c \Psi(y) - \Psi(\widehat{c_\Psi^-}) \right) dy}{\partial_c^2 \Psi(\widehat{c_\Psi^-}(q)) \left[(1 + q(c - c_\Psi^\alpha))^2 \right] \Big|_{\widehat{c_\Psi^-}}}, \quad (6.5.42)$$

где

$$\widehat{c_\Psi^-}|_{q=0} = c^\alpha.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\frac{d\widehat{c}_\Psi^-}{dq} < 0 \quad \forall q \in \mathcal{J}_\Psi, \quad q \neq 0, \quad \left. \frac{d\widehat{c}_\Psi^-}{dq} \right|_{q=0} = 0. \quad (6.5.43)$$

Как видим, знак производной в (6.5.43) противоположен знаку (6.5.33) такой же производной в лемме 6.5.4. Более того, производная функции \widehat{c}^- при $q = 0$ равна нулю.

6.5.3. Сингулярно-предельная задача. Теперь рассмотрим первое приближение к старшей аппроксимации уравнения (6.5.1). Для этого мы должны определить продолжение быстрой функции $\widehat{y}(\xi, q(\nu))$ с фронта Γ_T в некоторую окрестность $\Omega_{\Gamma, \delta} \in \Omega$ фронта фазового перехода, которая зависит от области существования неизвестной функции $\varphi(x)$, описывающей движение фронта Γ_T . Продолжение $y_e(\xi, x, t)$ функции $\widehat{y}(\xi, q(\nu))$ с фронта в область $\Omega_{\Gamma, \delta}$ будем искать в следующем виде:

$$y_e(\xi, x, t) = c_e^-(x, t) + \frac{c_e^+(x, t) - c_e^-(x, t)}{\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-} \left(\widehat{y}(\xi, q) - \widehat{c}^- \right),$$

где функция $\widehat{y}(\xi, q(\nu))$ считается продолженной тождественно по t с фронта в область $\Omega_{\Gamma, \delta}$. Функции $c_e^\pm(x, t)$ должны обладать двумя свойствами:

$$\begin{aligned} c_e^\pm(x, t)|_{\Gamma_{t,0}} &= \widehat{c}^\pm, \\ \partial_c^2 \Psi(c_e^\pm) &> 0 \quad \text{в } \Omega_{\Gamma, \delta}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (6.5.44)$$

Как мы покажем ниже, функции $c_e^+(x, t)$, $c_e^-(x, t)$ можно определить как любые гладкие продолжения из областей $\Omega_{t,0}^\pm$, $t \in (0, T)$, в области $\Omega_{t,0}^+ \cap \Omega_{\Gamma, \delta}$ и $\Omega_{t,0}^- \cap \Omega_{\Gamma, \delta}$, соответственно, решений $c^+(x, t)$, $c^-(x, t)$ уравнения

$$\partial_t c^\pm = \nabla_x \left(M(c^\pm) \nabla_x \left(\partial_c \Psi(c^\pm) \right) \right), \quad \text{в } \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (6.5.45)$$

с граничным условием на фронте

$$c^+ = \widehat{c}^+, \quad c^- = \widehat{c}^- \quad \text{на } \Gamma_t, \quad t \in (0, T), \quad (6.5.46)$$

и граничным условием на неподвижной границе вида

$$\partial_N c^+ = 0 \quad \text{на } \Sigma_T. \quad (6.5.47)$$

Функция в (6.5.44), в силу свойств потенциала $\Psi(c)$, меняет знак. Поэтому условие (6.5.44) является условием параболичности уравнения (6.5.45). Из построения предельных значений \widehat{c}^\pm следует справедливость неравенств (6.5.44) на фронте

$$\partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^\pm) > 0 \quad \text{на } \Gamma_{t,0}, \quad t \in (0, T). \quad (6.5.48)$$

Тогда, в силу принципа максимума, имеем

$$\min_{\Gamma_t} \widehat{c}^\pm \leq c^\pm \leq \max_{\Gamma_t} \widehat{c}^\pm \quad \text{в } B_t^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (6.5.49)$$

следовательно, $\partial_c^2 \Psi(c^\pm(x, t)) > 0$ в Ω_t^\pm , $t \in (0, T)$. Таким образом, существование продолжения $c_e^+(x, t)$, $c_e^-(x, t)$ со свойством (6.5.44) является следствием невырожденности уравнения (6.5.45) при справедливости (6.5.48). Это условие позволяет обойти трудности, связанные с неустойчивостью в общем случае так называемой обратнопараболической предельной задачи (6.5.45)–(6.5.47).

Приближение уравнения (6.5.1) (порядка $O(1/\varepsilon)$) порождает следующее уравнение на фронте:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \partial_\xi \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[(1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha)) \left(\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q) \right) \widehat{Y}_1^c \right] \right\} + \gamma \eta \partial_\xi \widehat{y}_e = \\ & = -\gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - \eta \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right] \Big|_{t=-\varphi} - \gamma \partial_\xi \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) + \right. \\ & \quad \left. + \eta(\xi - \varphi_1) M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) \right\} \Big|_{t=-\varphi} + \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi (f_1^c). \end{aligned} \quad (6.5.50)$$

Здесь имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_e, q) &= (1 + q(y_e - c^\alpha))\partial_\xi^2 y_e - \partial_c \Psi(y_e), \\ f_1^c(y_e, x, t) &= -\partial_y^2 W_{1,e}(y_e, x, t)\Phi_1(x, t) + a_{kl}(y_e) \left[\partial_{x_k}(\gamma \nu_l) \partial_\xi y_e + 2\gamma \nu_l \partial_{x_k} \partial_\xi y_e \right]. \end{aligned} \quad (6.5.51)$$

Мы воспользовались тем, что в силу лемм 6.5.1, 6.5.3 имеем

$$\begin{aligned} \gamma^2 \eta^2 \partial_\xi \left(M(y_e) \partial_\xi \left(\mathcal{L}(y_e, q) \right) \right) &= \varepsilon \eta \gamma (\xi - \varphi_1) \partial_\xi \left(M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) \Big|_{t=-\varphi} + O(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon \eta \gamma \partial_\xi \left((\xi - \varphi_1) M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) \Big|_{t=-\varphi} - \varepsilon \eta \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \Big|_{t=-\varphi} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Далее, в силу соотношения (6.5.31), имеем

$$\eta \left(\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q))^- \right) \Big|_{t=-\varphi} = \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_t \mathcal{L}(y_e, q))^- \right) \Big|_{t=-\varphi},$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned} &M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) - \eta \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) \right) \Big|_{t=\varphi} = \\ &= M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_t \mathcal{L}(y_e, q))^- - \eta \left(\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - (\partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q))^- \right) \right) \Big|_{t=\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (6.5.52)$$

Интегрируя (6.5.50) по ξ , принимая во внимание условие стабилизации (6.5.23) и (6.5.52), преобразуем уравнение (6.5.50) к виду

$$\begin{aligned} &\gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left[(1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha)) \left(\partial_\xi^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q) \widehat{Y}_1^c \right) \right] = \\ &= -\eta(\widehat{y}_e - \widehat{c}^-) - \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) - \left(M(\widehat{y}_e) \partial_\nu \mathcal{L}(y_e, q) \right)^- - \right. \\ &\quad \left. - \eta(\xi - \varphi_1) M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\partial_t \mathcal{L}(y_e, q) \right) - \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \left(\widehat{f}_1^c \right) \right\} \Big|_{t=-\varphi} = \\ &= \widehat{F}_1^c + \eta \varphi_1 M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \partial_t \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{y}_e, q) - \gamma M(\widehat{y}_e) \partial_\xi \widehat{f}_1^c. \end{aligned} \quad (6.5.53)$$

Стабилизирующиеся решения уравнения (6.5.53) типа кинка \widehat{Y}_1^c существуют, если правая часть (6.5.53) является функцией типа солитона, т.е.

$$(F_1^c|_{t=-\varphi})^+ = (F_1^c|_{t=-\varphi})^-. \quad (6.5.54)$$

Из предположения (6.5.22) для быстрых функций следует, что

$$(F_1^c)^-|_{t=-\varphi} = 0.$$

Тогда (6.5.54) влечет граничное условие (аналог условия Ранкина—Гюгонио) на фронте фазового перехода вида

$$(F_1^c)^+|_{t=-\varphi} = M(\widehat{c}^+) (\partial_\nu \widehat{\partial}_c \Psi(y_e))^+ - M(\widehat{c}^-) (\partial_\nu \widehat{\partial}_c \Psi(y_e))^- + \eta(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) = 0.$$

В силу определения продолжения y_e , имеем

$$(\partial_\nu \widehat{\partial}_c \Psi(y_e))^\pm = \partial_c^2 \Psi(\widehat{c}^\pm) \partial_\nu \widehat{c}_e^\pm.$$

Отсюда получаем расширенное условие Стефана (6.5.15) на фронте

$$\eta(\widehat{c}^+ - \widehat{c}^-) + M(\widehat{c}^+) \partial_\nu \widehat{\partial}_c \Psi(\widehat{c}^+) - M(\widehat{c}^-) \partial_\nu \widehat{\partial}_c \Psi(\widehat{c}^-) = 0, \quad (6.5.55)$$

где нормальная скорость фронта

$$V_\nu = -\frac{\partial_t(t + \varphi)}{|\partial_x \varphi|} = -\eta.$$

Далее, деля (6.5.53) на $\gamma M(\widehat{y}_e)$ и интегрируя по ξ , получим

$$\begin{aligned} \left(\partial_\xi^2 - \widehat{\partial_y^2 W_1}(\widehat{y}_e, q) \right) \widehat{Y}_1^c &= \frac{\eta}{\gamma} \varphi_1 \left(\partial_\xi^2 \widehat{\partial_t y}_e - \frac{\partial_t \partial_c \Psi(\widehat{y}_e) - \partial_t \partial_c \Psi(c_e^-)}{1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha)} \right) + \\ &+ \frac{1}{1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M(\widehat{y}_e)} d\xi + \frac{\widehat{f}_1^c - (\widehat{f}_1^c)^-}{1 + q(\widehat{y}_e - c^\alpha)} = G_1^c. \end{aligned} \quad (6.5.56)$$

Напомним, что мы должны решать уравнение (6.5.56) в классе функций $\widehat{Y}_1^c \in \mathcal{K}$ таких, что $(\widehat{Y}_1^c)^- = 0$. Положим

$$Y_1^c = H_1^c(x, t) \frac{y_e(\xi, x, t) - c_e^-(x, t)}{c_e^+(x, t) - c_e^-(x, t)} + \mathcal{A}_1^c(\xi, x), \quad (6.5.57)$$

где $\mathcal{A}_1^c \in \mathcal{S}$ являются функциями типа солитона. Нетрудно доказать следующее утверждение (см. [53]).

Лемма 6.5.6. *Решение $\widehat{Y}_1^c \in \mathcal{K}$ уравнения (6.5.56) существует тогда и только тогда, когда $\widehat{G}_1^c \in \mathcal{S}$ и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_1^c \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi = 0. \quad (6.5.58)$$

Тогда

$$\widehat{Y}_1^c = \partial_\xi \widehat{y}_e \left(\int_0^\xi \frac{d\xi_1}{(\partial_\xi \widehat{y}_e)^2} \int_{-\infty}^{\xi_1} \widehat{G}_1^c \partial_\xi \widehat{y}_e d\xi_2 + c_1(x) \right),$$

где функция $c_1(x)$ является «постоянной» интегрирования.

В силу первого условия разрешимости ($\widehat{G}_1^c \in \mathcal{K}$), можно определить единственным образом функцию \widehat{H}_1^c :

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1^c &= -\frac{1}{(\widehat{\partial_y^2 W_1})^+} (G_1)^+, \quad (G_1)^+ = a\varphi_1 + b\widehat{\Phi}_1 + f, \\ a &= -\frac{\eta}{\gamma} \frac{\partial_c^2 \Psi(c_e^+) \widehat{\partial_t c}_e^+ - \partial_c^2 \Psi(c_e^-) \widehat{\partial_t c}_e^-}{1 + q(c^+ - c^\alpha)}, \\ f &= \frac{1}{1 + q(c^+ - c^\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M(\widehat{y}_e)} d\xi, \\ b &= \frac{\partial_c^2 \Psi(c^+) - \partial_c^2 \Psi(c^-)}{1 + q(c^+ - c^\alpha)}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим интеграл в уравнении (6.5.57), который определит функцию $\widehat{\Phi}_1$ на фронте. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi_1 + \mathcal{B}\widehat{\Phi}_1 &= \mathcal{F}_1, \quad (6.5.59) \\ \mathcal{A}(\widehat{c}^+, \widehat{c}^-, \varphi) &= \frac{\eta}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_c^2 \Psi(\widehat{y}) \widehat{\partial_t y}_e - \partial_c^2 \Psi(c^-) \widehat{\partial_t c}_e^-}{1 + q(\widehat{y} - c^\alpha)} \partial_\xi \widehat{y} d\xi, \\ \mathcal{B}(\widehat{c}^+, \widehat{c}^-, \varphi) &= \frac{\partial_c^2 \Psi(c^-)}{q} \ln \left(\frac{1 + q(\widehat{c}^+ - c^\alpha)}{1 + q(\widehat{c}^- - c^\alpha)} \right), \\ \mathcal{F}(\widehat{c}^+, \widehat{c}^-, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + q(\widehat{y} - c^\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\widehat{F}_1^c}{\gamma M(\widehat{y}_e)} d\xi_1 \partial_\xi \widehat{y} d\xi + \end{aligned}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{kl}(\widehat{y}_e) \left[\partial_{x_k}(\gamma \nu_l) \partial_{\xi} \widehat{y} + 2\gamma \nu_l \partial_{\xi} \widehat{\partial_{x_k} y_e} \right]}{1 + q(\widehat{y} - c^{\alpha})} \partial_{\xi} \widehat{y} d\xi.$$

Зная значения функций H_1^c , Φ_1 на фронте $\Gamma_{t,0}$, мы можем определить значения на фронте решений c_1^+ , c_1^- вариации сингулярно-предельной задачи

$$c_1^-|_{t=-\varphi} = \widehat{\Phi}_1 = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\varphi_1 + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{B}}, \quad c_1^+|_{t=-\varphi} = \widehat{\Phi}_1 + \widehat{H}_1^c = \mathcal{A}_1\varphi_1 + \mathcal{F}_1, \quad (6.5.60)$$

$$\mathcal{F}_1 = f + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{B}}(1+b), \quad \mathcal{A}_1 = a - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}(1+b).$$

Для окончательного вывода сингулярно-предельной задачи осталось получить уравнение (6.5.13). Для этого рассмотрим следующее приближение уравнения (6.5.1) порядка $O(1)$. Как и выше, результаты леммы 6.5.1 позволяют получить соотношение

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \partial_{\xi} \left\{ M(\widehat{y}_e) \partial_{\xi} \left[(1 + q(\widehat{y}_e - c^{\alpha})) \left(\partial_{\xi}^2 - \partial_y^2 W_1(\widehat{y}_e, q) \right) \widehat{Y}_2^c \right] \right\} + \gamma \eta \partial_{\xi} \widehat{y}_e = \\ & = \partial_t y_e - \partial_{x_k} \left(M(y_e) \partial_{x_k} \partial_c \Psi(y_e) \right) + S(\xi, x)|_{\xi=\gamma\eta\frac{(t+\varphi)}{\varepsilon}+\varphi_1} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (6.5.61)$$

где $S(\xi, x)$ — функция типа солитона, определенная на фронте $\Gamma_{t,0}$. Так как решение уравнения мы ищем в классе стабилизирующихся функций (6.5.23), то должны выполняться следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial_t y_e - \partial_{x_k} \left(M(y_e) \partial_{x_k} \partial_c \Psi(y_e) \right) \right\}^{\pm} = \\ & = \partial_t c^{\pm} - \partial_{x_k} \left(M(c^{\pm}) \partial_{x_k} \partial_c \Psi(c^{\pm}) \right) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_t^{\pm}, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Отсюда следует (6.5.13). При выводе формулы требуется определение продолжения функции \widehat{Y}_1^c с фронта $\Gamma_{t,0}$ в область $\Omega_{\delta,\Gamma}$ или, что равносильно в силу определения (6.5.57), необходимо построить продолжение функций $\widehat{\Phi}_1$, \widehat{H}_1^c , заданных на фронте, в окрестность фронта $\Omega_{\delta,\Gamma}$. Эти функции, по аналогии с продолжением функции y_e , будем искать в виде

$$\Phi_1 = (c_1^-)_e, \quad H_1^c = (c_1^+)_e - (c_1^-)_e,$$

где функции $(c_1^+)_e(x, t)$, $(c_1^-)_e(x, t)$ (поправки к предельным концентрациям c_e^{\pm}) можно определить как любые гладкие продолжения из областей $\Omega_{t,0}^{\pm}$, $t \in (0, T)$ в области $\Omega_{t,0}^+ \cap \Omega_{\Gamma,\delta}$ и $\Omega_{t,0}^- \cap \Omega_{\Gamma,\delta}$, соответственно, решений $c_1^+(x, t)$, $c_1^-(x, t)$ задачи в вариациях к сингулярно-предельной задаче (6.5.13)–(6.5.17)

$$\partial_t c_1^{\pm} = \nabla_x \left(M(c^{\pm}) \partial_c^2 \Psi(c^{\pm}) \nabla_x c_1^{\pm} + \partial_c (M \partial_c \Psi)(c^{\pm}) c_1^{\pm} \nabla_x c^{\pm} \right) \quad (6.5.62)$$

в области Ω_t^{\pm} , $t \in (0, T)$. Граничные условия на фронте

$$\begin{aligned} & 1 + \left(M(c^+) \nabla_x c_1^+ - M(c^-) \nabla_x c_1^- + M_c(c_1^+ \nabla_x c^+ - c_1^- \nabla_x c^-) \right) \nabla_x \varphi = \\ & = - \left(M(c^+) \nabla_x c^+ - M(c^-) \nabla_x c^- \right) \nabla \varphi_1 + g_1 \quad \text{на } \Gamma_t, \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (6.5.63)$$

являются вариацией условия (6.5.14), где функция g_1 зависит от функций c^{\pm} и их производных на фронте с граничными условиями на неподвижной границе, вида

$$\partial_N c_1^+ = 0 \quad \text{на } \Sigma_T, \quad (6.5.64)$$

и начальным условием

$$c_1^{\pm}|_{t=0} = 0.$$

Процедура вывода задачи (6.5.60), (6.5.62)–(6.5.64) аналогична проведенной выше процедуре при выводе сингулярно-предельной задачи. Очевидно, что решение линейной задачи (6.5.60), (6.5.62)–(6.5.64) существует на времени существования классического решения расширенной задачи Стефана. Как видно, процедура построения следующих поправок c_j^{\pm} устойчива, на каждом

шаге мы будем получать задачу (6.5.60), (6.5.62)–(6.5.64) с правыми частями в (6.5.60), (6.5.62), (6.5.63), зависящими от функций φ , φ_1 и c_k^\pm , $k \leq j - 1$, и их производных, полученных на предыдущих шагах.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 6.5.5. *На временном интервале существования классического решения сингулярно-предельной задачи (6.5.13)–(6.5.17), существует стабилизирующееся асимптотическое решение задачи (6.5.1), (6.5.10), (6.5.11) с любой точностью. Более того, возмущение $\Gamma_{t,\varepsilon}$ фронта Γ_t однозначно определяется первыми тремя приближениями. Функции c_1^\pm , φ_1 являются классическим решением задачи в вариациях для сингулярно-предельной задачи. На следующих приближениях роль свободных параметров в условиях разрешимости для обыкновенного стандартного уравнения на фронте для функции \hat{Y}_j , $j \geq 2$, вместо φ , φ_1 будут играть постоянные интегрирования $c_k(x)$, $k \leq j - 1$, полученные при решении этих стандартных уравнений на фронте на предыдущих шагах.*

Комментарий. Необходимо заметить, что новая задача со свободной границей, полученная в этом параграфе, по природе неустойчивости связана с задачей Меллина—Сикерка, являющейся сингулярно-предельной для классической изотропной модели Кана—Хилларда. Если тензор поверхностных натяжений имеет вид $a_{kl}(c, \varepsilon) = a(c)\delta_{kl} + \varepsilon A_{kl}(c, \varepsilon)$, то нетрудно показать, что расширенная задача Стефана (сингулярно-предельная задача неизотропной модели) переходит в задачу Меллина—Сикерка. На этом сравнении можно доказать устойчивость расширенной задачи Стефана в 2-D случае. Интереснейшая задача — исследование неустойчивости этой задачи в 3-D случае в окрестности критического радиуса шаровой области неустойчивости задачи Меллина—Сикерка.

ЧАСТЬ 7

СИСТЕМА ФАЗОВОГО ПОЛЯ

ВВЕДЕНИЕ

В последней главе будет решена нестандартная задача выбора начальных данных для системы фазового поля, описывающей медленные процессы кристаллизации (например, в системе вода—лед), когда на некотором независимом от ε временном интервале существует неустойчивая область промежуточного агрегатного состояния (область ПАС). Важнейшим вопросом в этой задаче является процедура предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$. Безусловно, такой предельный переход может быть совершен только в слабом смысле. Таким образом, мы должны получить корректное (допустимое) определение слабого решения (или, что то же самое, слабую постановку) задачи для системы фазового поля, в которой возможен предельный переход для решений типа цуга волн. Чтобы дать обоснование предельного перехода для решений типа цуга волн [16], мы предложим [24] другое определение слабого решения системы фазового поля, в основе которого лежат условия разрешимости (условия ортогональности) для линейаризованного стандартного уравнения, возникающие при построении стабилизирующегося асимптотического решения. Условие ортогональности играет центральную роль в нелинейном асимптотическом анализе, в частности, именно это условие приводит к граничному условию Стефана—Гиббса—Томпсона на свободной границе [18, 35]. Суть слабого решения в том, что слабая постановка задачи есть интегральная аппроксимация условий ортогональности, упомянутых выше. Так, например, граничное условие Стефана—Гиббса—Томпсона слабо аппроксимируется интегральным тождеством, которое допускает слабый предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. В пределе эта новая слабая постановка задачи приводит к слабой постановке граничного условия Гиббса—Томпсона как части определения слабого решения сингулярно-предельной задачи со свободной границей, что позволит дать определение слабого решения системы фазового поля, описывающего диффузию области ПАС.

Мы уверены, что этот результат, касающийся слабой постановки задачи для системы фазового поля, чрезвычайно важен. Видимо, устойчивость нового определения слабого решения более важна, чем вывод сингулярно-предельной задачи в ситуации «диффузии в области ПАС». Дело в том, что наш подход к определению слабого решения применим к решению других задач (например, задачи Маскета, задачи волн горения, приведенной выше расширенной задачи Стефана и т.д.). Получив условие ортогональности при построении стабилизирующегося асимптотического решения (как этапа нелинейного асимптотического анализа), можно применить это условие для построения корректного определения слабого решения задачи как гладкой аппроксимации сингулярно-предельной задачи. Последнее позволит построить соответствующее определение слабого решения самой сингулярно-предельной задачи. Пара слабых постановок дает иерархию свойств их решений при предельном переходе, что можно назвать *корректностью гладкой аппроксимации*. Очень может быть, что метод тестирования допустимых слабых трактовок нелинейных задач, который стал результатом осмысления трудностей, с которыми мы столкнулись при определении регуляризации процессов в области ПАС, является аналогом двухмасштабной сходимости в задачах усреднения. Идеология двухмасштабной сходимости в задачах усреднения коренным образом изменила (см., например, работы В. Жикова) подходы к их исследованию и, как следствие, расширила возможности применения методов усреднения.

В этой главе методами нелинейного асимптотического анализа будет исследована математическая модель механики сплошных сред, описывающая фазовые переходы первого рода (например, вода–лед). Предложенная в [33] модель описывает процессы медленных фазовых переходов первого рода [26]; это так называемая система фазового поля (ФП система). Рассмотрим простейшую форму системы фазового поля

$$\ell \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \Delta \theta,$$

$$\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta \varphi + \frac{\varphi - \varphi^3}{a} + \kappa \theta,$$

где θ — температурой, φ — функция порядка, и значения $\varphi = \pm 1$ соответствуют двум состояниям среды (твердой и жидкой фазам). Коэффициенты τ , ξ , a считаются малыми. Предельный переход по малым параметрам определяет сингулярно-предельные задачи для различных соотношений между τ , ξ , и a . В частности, если $a, \tau, \xi \rightarrow 0$, $\tau \xi^{-2} = \text{const}$, $\tau a^{-1} = \text{const}$, то предельным переходом получается так называемая модифицированная задача Стефана [34]. В случае $a \rightarrow 0$, $\tau \sim \xi^2 \rightarrow 0$, $\xi a^{-1/2} \rightarrow 0$, предельным переходом получаем классическую задачу Стефана. Эти и другие соотношения между параметрами допредельной задачи (системы фазового поля) и соответствующие им сингулярно-предельные задачи рассмотрены в [35]. В последние годы появилось много работ, посвященных обоснованию предельного перехода по малым параметрам в системе фазового поля. В нашу задачу не входит описание и сравнение этих результатов. Приведем лишь некоторые из них, наиболее интересные с нашей точки зрения: [20, 29, 34, 35, 49, 58–61, 66]. Цель главы — ознакомить читателя с проблемами слабого предельного перехода в системе фазового поля и в моделях механики сплошных сред, описывающих фазовые переходы первого рода. Мы приведем способ тестирования возможных определений слабых решений сингулярных систем (систем уравнений с малыми параметрами) таких, как, например, система фазового поля и расширенные модели Кана–Хилларда, на предмет их корректности и, прежде всего, возможности предельного перехода в слабом определении решений по малым параметрам. Базовый безразмерный малый параметр ε характеризует длину зоны фазового перехода. В стандартной ситуации при наличии только одного фронта фазового перехода (одной свободной границы для сингулярно предельной задачи) корректные определения слабых решений позволяют получить предельным переходом по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ допустимые (энтропийные) слабые решения сингулярно-предельных задач. Более того, в случае большого числа $M(\varepsilon)$ фронтов ($M(\varepsilon) \rightarrow \infty$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$), который соответствует интерпретации области смеси («mushy region») как «цуга волн» («wave-train»), этот подход позволяет получить соответствующую сингулярно-предельную задачу ($\varepsilon \rightarrow 0$) и ее допустимое слабое решение. Прежде всего, мы приведем формулировку

теоремы о существовании стабилизирующегося асимптотического решения системы фазового поля [8], аналога результатов, полученных выше для расширений модели Кана—Хилларда.

7.1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ФП

Системой фазового поля называется следующая задача нахождения пары гладких C^∞ -функций $\theta > 0$, φ таких, что

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial}{\partial t}(\theta + \varphi) = \Delta \theta, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi(1 - \varphi^2) + \varepsilon \kappa_1 \theta, \end{cases} \quad (7.1.1)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(x, \varepsilon), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi^0(x, \varepsilon), \quad (7.1.2)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \theta}{\partial n} + k_2 \theta|_\Sigma = g(x, t)|_\Sigma, \quad \varphi|_\Sigma = \sigma. \quad (7.1.3)$$

Здесь $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $t \in [0, T]$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T]$, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $\kappa > 0$, $\kappa_1 > 0$ — некоторые константы, $g \in C^\infty(\Sigma)$ — заданная функция, $\sigma = 1$ (либо $\sigma = -1$), $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к $\partial\Omega$. Предположим, что при $t = 0$ задана гладкая замкнутая неособая поверхность Γ_0 размерности $m - 1$, лежащая в Ω , и $\Gamma_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$. Обозначим через Ω_0^- подобласть Ω , ограниченную поверхностью Γ_0 , и $\Omega_0^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega_0^-}$.

Сформулируем предположения относительно начальных функций $\theta^0 > 0$, φ^0 :

A_0) поточечный предел $\theta^0(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ является положительной непрерывной функцией $x \in \Omega$;

B_0) поточечный предел $\varphi^0(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен единице при $x \in \Omega_0^+$ и минус единице при $x \in \Omega_0^-$ в случае $\sigma = 1$ (либо в случае $\sigma = -1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^0(x, \varepsilon) = -1$ при $x \in \Omega_0^+$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^0(x, \varepsilon) = 1$ при $x \in \Omega_0^-$).

В дальнейшем для определенности будем считать, что $\sigma = 1$. Предположения A_0), B_0) являются предварительными, и их недостаточно для постановки корректных граничных условий на подвижной границе для предельной задачи. Уточнение условий на θ , φ как при $t = 0$, так и при $t > 0$ является, по существу, основной целью этого параграфа.

Замечание 7.1.4. Предположения ограниченности Ω , замкнутости Γ_0 и условие $\Gamma_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$ не являются существенными.

Замечание 7.1.5. Ниже будет показано, что, выбирая, как в классической задаче Стефана, $\theta|_{\Gamma_0} = 0$ для поверхности Γ_0 с нулевой средней кривизной, приходим к стабилизации свободной границы и тем самым к появлению переходной зоны. С физической точки зрения предположение $\theta > 0$ означает, что нормировка температуры θ в уравнениях (7.1.1) произведена по шкале Кельвина.

Приведем формулировку сингулярно-предельной задачи системы ФП (модифицированной задачи Стефана). Для этого обозначим через Γ_t $(m - 1)$ -мерную гладкую неособую поверхность, при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ задающую положение границы раздела фаз. Пусть Ω_t^- — подобласть Ω , ограниченная Γ_t , и $\Omega_t^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega_t^-}$. Введем функции $\theta^\pm = \theta^\pm(x, t)$ и $\psi = \psi(x)$ как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta^\pm = \Delta \theta^\pm, \quad (x, t) \in \Omega_t^\pm, \quad (7.1.4)$$

$$\theta^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^0(x), \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad (7.1.5)$$

$$\theta^+|_{\Gamma_t^+} = \theta^-|_{\Gamma_t^-}, \quad (7.1.6)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial \nu_t} \Big|_{\Gamma_t^+} - \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu_t} \Big|_{\Gamma_t^-} = 2\mathcal{D}_\nu, \quad (7.1.7)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \theta^+}{\partial n} + k_2 \theta^+|_\Sigma = g(x, t)|_\Sigma, \quad (7.1.8)$$

$$|\nabla\psi|\operatorname{div}\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} + \kappa - \kappa_2|\nabla\psi|\check{\theta}(x, \psi) = 0, \quad \psi|_{\Gamma_0} = 0, \quad (7.1.9)$$

где Γ_t — поверхность, задаваемая уравнением $t = \psi(x)$, $f^\pm|_{\Gamma_t^\pm}$ — предел f^\pm при $x \rightarrow x_t \pm 0$, $x_t \in \Gamma_t$, $\check{\theta}(x, \psi) = \theta^+|_{\Gamma_t} = \theta^-|_{\Gamma_t}$, $\theta_\pm^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta^0(x, \varepsilon)$, $x \in \Omega_0^\pm$, $\kappa_2 = 3\kappa_1/\sqrt{2}$, $\partial/\partial\nu_t = \langle \nabla\psi/|\nabla\psi|, \nabla \rangle$ — производная по нормали к Γ_t , $\mathcal{D}_\nu = -1/|\nabla\psi|$ — скорость движения Γ_t в направлении нормали $\nabla\psi/|\nabla\psi|$.

Отметим важное обстоятельство. При неособой поверхности Γ_0 с ненулевой средней кривизной уравнение (7.1.9) является квазилинейным параболическим, в котором роль времени играет параметр вдоль нормали к Γ_t . Тем самым (7.1.9) — задача Коши с начальными данными на замкнутом многообразии Γ_0 , заведомо разрешимая при $0 < \psi \leq T$ для некоторого $T > 0$. Уравнение (7.1.9) можно переписать в виде, допускающем геометрическое истолкование:

$$\check{\theta}|_{\Gamma_t} = \frac{1}{\kappa_2} H_t - \frac{\kappa}{\kappa_2} \mathcal{D}_\nu, \quad (7.1.9')$$

где H_t — средняя кривизна Γ_t . Однако предпочитаем вид (7.1.9), подчеркивая тем самым, что это — уравнение, «определяющее» положение свободной границы в момент времени t и замыкающее условия (7.1.5)–(7.1.8).

Вопросы разрешимости модифицированной задачи Стефана обсуждались в работах [33, 59] и здесь не рассматриваются. Для нас важно условие согласования [33] начальных и граничных условий, которое сформулируем следующим образом:

C_0) поверхность Γ_0 и предел $\theta^0(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяет вектор $\nabla\psi|_{\Gamma_0}$, совпадающий с соответствующим вектором, определяемым из (7.1.9).

Теорема 7.1.1. Пусть выполнены предположения $A_0)$, $B_0)$, $C_0)$, и при $t \leq T$ существует гладкое решение задачи (7.1.4)–(7.1.9). Тогда при $t \in [0, T]$ существует такое асимптотическое по $\bmod O(\varepsilon)$ решение $\theta(x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x, t, \varepsilon)$ задачи (7.1.1)–(7.1.3), что при $(x, t) \in \Omega_t^\pm$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta = \theta^\pm, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi = \pm 1$$

в случае $\sigma = 1$, либо $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi = \mp 1$ в случае $\sigma = -1$.

Нам потребуются два класса функций. Обозначим

$$\mathcal{S} = \{f(\tau, x, t) \in C^\infty(R^1 \times \Omega \times [0, T]), \exists f^\pm(x, t) \in C^\infty(\Omega \times [0, T]),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \tau^n \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} (f(\tau, x, t) - f^\pm(x, t)) = 0,$$

$$\forall n \geq 0, r \geq 0, \gamma \geq 0, |\alpha| \geq 0\}, \mathbf{S} = \{f(\tau, x, t) \in \mathcal{S}, f^+ = f^- = 0\}.$$

Напомним лемму, приведенную выше.

Лемма 7.1.1. 1. Для любых функций $S(x, t) \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$ таких, что $\partial S/\partial t|_{\Gamma_t} \neq 0$, где $\Gamma_t = \{(x, t) \in \Omega \times [0, T], S(x, t) = 0\}$, и любых функций $f(\tau, x, t) \in \mathcal{S}$ справедливо соотношение $f(S(x, t)/\varepsilon, x, t) = f(\beta(t - \psi(x))/\varepsilon, x, t) + O(\varepsilon)$, где $t = \psi(x)$ — уравнение поверхности $S(x, t) = 0$, $\beta = \partial S/\partial t|_{\Gamma_t}$.

2. Пусть $\chi(\tau, x, t)$ — некоторая функция из \mathcal{S} такая, что $\chi^\pm = \pm 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{S}$ справедливо равенство

$$f = \frac{(f^+ + f^-)}{2} + \frac{(f^+ - f^-)}{2} \chi(\tau, x, t) + \omega(\tau, x, t), \quad (7.1.10)$$

где ω — некоторая функция из \mathbf{S} .

3. Для любых функций $f(\tau, x, t) \in \mathbf{S}$, $g(x, t) \in C^\infty$ справедливы соотношения

$$(t - \psi)^k f\left(\frac{(t - \psi)}{\varepsilon}, x, t\right) = O(\varepsilon^k), \quad k \geq 0,$$

$$g(x, t) f\left(\frac{(t - \psi)}{\varepsilon}, x, t\right) = g(x, \psi) f\left(\frac{(t - \psi)}{\varepsilon}, x, \psi\right) + O(\varepsilon).$$

Перейдем к построению стабилизирующегося асимптотического решения задачи (7.1.1)–(7.1.3). Прежде всего заметим, что в силу предположения A_0), B_0), предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ главного члена асимптотики φ является разрывным на Γ_t , т.е. типа функции Хевисайда, предел главного члена асимптотики θ — непрерывная функция, и в то же время его производная по нормали к Γ_t , в общем случае, также имеет сильный разрыв на Γ_t . Тем самым предположения A_0) и B_0) определяют вид предполагаемого асимптотического решения

$$\begin{cases} \theta(x, t, \varepsilon) = \Xi^N(x, t, \varepsilon) + \mathcal{V}^N\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \Xi^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \theta_j(x, t), \end{cases} \quad (7.1.11)$$

$$\mathcal{V}^N(\tau, x, t, \varepsilon) = \rho(x, t)V_0(\tau, x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j (\rho_j(x, t)V_j(\tau, x, t) + U_j(\tau, x, t)),$$

$$\varphi(x, t, \varepsilon) = \mathcal{W}^N\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) + \varepsilon\Phi^N(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$\mathcal{W}^N(\tau, x, t, \varepsilon) = \chi(\tau, x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j W_j(\tau, x, t), \quad \Phi^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} \varphi_j(x, t).$$

Здесь подлежащие определению функции $S, \rho, \rho_j, \theta_j, \varphi_j \in \mathbf{C}^\infty(\Omega \times [0, T])$, $V_j(\tau, x, t), U_j(\tau, x, t), W_j(\tau, x, t), \chi(\tau, x, t) \in \mathcal{S}$, причем

$$\begin{aligned} \chi^\pm = 1, \quad \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{\Gamma_t} \neq 0, \quad \Gamma_t = \{t = \varphi(x), S(x, \psi(x)) = 0\}, \\ \rho|_{\Gamma_t} = 0, \quad \rho_j|_{\Gamma_t} = 0. \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

В силу утверждения леммы 7.1.1 и (7.1.12) полагаем без потери общности

$$\begin{cases} S = t - \psi(x), \quad V_i = \alpha_i^+ + \alpha_i^- \chi(\tau, x, t), \\ \alpha_i^+ = \frac{V_i^+(x, t) + V_i^-(x, t)}{2}, \quad \alpha_i^- = \frac{V_i^+(x, t) - V_i^-(x, t)}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (7.1.13)$$

Подставим разложения (7.1.11) в уравнения (7.1.1). Умножая первое уравнение (7.1.1) на ε^2 , получим соотношения

$$\begin{aligned} |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}^N}{\partial \tau^2} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{V}^N}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{W}^N}{\partial \tau} + \varepsilon \{2\langle \nabla S, \nabla \rangle + \Delta S\} \frac{\partial \mathcal{V}^N}{\partial \tau} + \\ + \varepsilon^2 \Delta(\Xi^N + \mathcal{V}^N) - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t}(\Xi^N + \mathcal{V}^N + \mathcal{W}^N + \varepsilon\Phi^N)|_{\tau=S/\varepsilon} = O(\varepsilon^{N+3}), \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^N(1 - (\mathcal{W}^N)^2) + |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{W}^N}{\partial \tau^2} + \varepsilon \{\Phi^N(1 - 3(\mathcal{W}^N)^2) + \\ + (2\langle \nabla S, \nabla \rangle + \Delta S) \frac{\partial \mathcal{W}^N}{\partial \tau} - \kappa \frac{\partial \mathcal{W}^N}{\partial \tau} + \kappa_1(\Xi^N + \mathcal{V}^N)\} + \\ + \varepsilon^2 \{(\Delta - \kappa \frac{\partial}{\partial t})\mathcal{W}^N - 3(\Phi^N)^2 \mathcal{W}^N\} + \\ + \varepsilon^2 \{(\Delta - \kappa \frac{\partial}{\partial t})\Phi^N - (\Phi^N)^3\}|_{\tau=S/\varepsilon} = O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Определим вначале регулярные члены разложений (7.1.11). Переходя к пределу при $\tau \rightarrow \pm\infty$ в (7.1.14), (7.1.15), получаем соотношения

$$\Delta(\Xi^N + (\mathcal{V}^N)^\pm) - \frac{\partial}{\partial t}(\Xi^N + (\mathcal{V}^N)^\pm + (\mathcal{W}^N)^\pm + \varepsilon\Phi^N) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad (7.1.16)$$

$$(\mathcal{W}^N)^\pm(1 - ((\mathcal{W}^N)^\pm)^2) + \varepsilon\{\Phi^N(1 - 3((\mathcal{W}^N)^\pm)^2) + \kappa_1(\Xi^N + (\mathcal{V}^N)^\pm)\} + \\ + \varepsilon^2(\Delta - \kappa\partial/\partial t - 3(\Phi^N)^2)(\mathcal{W}^N)^\pm + \varepsilon^3(\Delta - \kappa\partial/\partial t - (\Phi^N)^2)\Phi^N = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Отсюда, приравнявая нулю члены одного порядка по ε , получаем равенства $\chi^\pm = \pm 1$ (с учетом начальных условий), соотношения между φ_{j+1} , W_{j+1}^\pm и θ_j , $\mathcal{V}_0^\pm = \rho V_0^\pm$, $\mathcal{V}_i^\pm = \rho V_i^\pm + U_i^\pm$, $i \geq 1$:

$$\varphi_1 + W_1^\pm = \frac{\kappa_1}{2}(\theta_0 + \mathcal{V}_0^\pm), \quad (7.1.17)$$

$$\varphi_{j+1} + W_{j+1}^\pm = \frac{\kappa_1}{2}(\theta_j + \mathcal{V}_j^\pm) + f_j^\pm, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (7.1.18)$$

а также уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(\theta_0 + \mathcal{V}_0^\pm) = 0, \quad (7.1.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(\theta_j + \mathcal{V}_j^\pm) = -\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_j + W_j^\pm), \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.1.20)$$

Здесь f_i^\pm — полиномы от $\varphi_i + W_i^\pm$, $i = 1, 2, \dots, j$. В частности, $f_1^\pm = \mp(3/2)(\varphi_1 + W_1^\pm)^2$. Теперь левые части в соотношениях (7.1.14), (7.1.15) — некоторые функции из \mathbf{S} . Построение \mathcal{V}^N , \mathcal{W}^N проведем по схеме, развитой в [3]: последовательно для всех членов (7.1.14), (7.1.15) порядка $O(\varepsilon^j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, раскладываем их в ряд Тейлора по t в точке $t = \psi(x)$ и используем равенство $\tau = (t - \psi(x))/\varepsilon$. Затем переходим к функциям с независимыми переменными τ , x и находим их на поверхности $t = \psi(x)$. После этого определяем бесконечно дифференцируемое продолжение этих функций вне поверхности Γ_t . При этом продолжение строится таким образом, чтобы обеспечить существование младших членов асимптотики, обладающих требуемыми свойствами.

Рассмотрим члены порядка $O(1)$ в соотношении (7.1.15). Приравнявая их нулю и учитывая (7.1.12), получаем модельное уравнение для $\check{\chi} = \chi(\tau, x, \psi(x))$

$$\beta^{-2} \frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \tau^2} + \check{\chi}(1 - \check{\chi}^2) = 0, \quad \beta = \frac{1}{|\nabla S|} = \frac{1}{|\nabla \psi|}, \quad \check{\chi} \rightarrow 1 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (7.1.21)$$

Отсюда на Γ_t имеем $\check{\chi}(\tau, x) = \text{th}((\beta/\sqrt{2})(\tau + s))$, где $s = s(x) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ — «постоянная» интегрирования уравнения (7.1.21). Определим продолжение $\check{\chi}$ при всех $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ как тождественное, т.е. $\chi = \check{\chi}(\tau, x)$.

Далее заметим, что в силу (7.1.12) и леммы 7.1.1, выполнены соотношения $\partial \mathcal{V}^N / \partial \tau = O(\varepsilon)$, $\partial^2 \mathcal{V}^N / \partial \tau^2 = O(\varepsilon)$. Поэтому, приравнявая нулю члены порядка $O(\varepsilon)$ в (7.1.14), (7.1.15) и используя равенства (7.1.17), (7.1.19), получаем

$$\frac{\beta^{-2} \partial^2 \check{U}_k}{\partial \tau^2} = G_k(\tau, x), \quad (7.1.22)_k$$

$$\widehat{L} \omega_k = F_k(\tau, x). \quad (7.1.23)_k$$

Здесь $k = 1$, $\widehat{L} = \beta^{-2} \partial^2 / \partial \tau^2 + 1 - 3\chi^2$, для функций U_j , $W_j \in \mathcal{S}$, используется представление вида (7.1.11), т.е.

$$U_j = \gamma_j^+ + \gamma_j^- \chi + u_j, \quad W_j = \mu_j^+ + \mu_j^- \chi + \omega_j, \quad \gamma_j^\pm = \frac{U_j^+ \pm U_j^-}{2},$$

$$\mu_j^\pm = \frac{W_j^+ \pm W_j^-}{2}, \quad u_j = u_j(\tau, x) \in \mathbf{S}, \quad \omega_j = \omega_j(\tau, x) \in \mathbf{S}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7.1.24)$$

$$G_1 = \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \left\{ 2\langle \nabla \psi, \nabla \rho \rangle \frac{\partial V_0}{\partial \tau} - \rho_t \beta^{-2} \tau \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} \right\} \Big|_{t=\psi},$$

$$F_1 = (2\langle \nabla \psi, \nabla \rangle + \Delta \psi + \kappa) \frac{\partial \chi}{\partial \tau} - \frac{3}{2} \kappa_1 \theta_0 (1 - \chi^2),$$

используется обозначение $\check{f} = f(\tau, x, t)|_{t=\psi(x)}$.

Лемма 7.1.2. Для разрешимости уравнения (7.22)_k в \mathcal{S} и (7.23)_k в \mathbf{S} необходимо и достаточно выполнение условий

$$G_k \in \mathbf{S}, \quad F_k \in \mathbf{S}, \quad (7.1.25)_k$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_k(\tau, x) d\tau = 0, \quad (7.1.26)_k$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_k(\tau, x) \frac{\partial \chi}{\partial \tau} d\tau = 0. \quad (7.1.27)_k$$

Условия (7.25)₁ выполнены в силу (7.1.17), (7.1.19), условие (7.26)₁ приводит нас к соотношению

$$\alpha_0^- \left(\frac{\rho_t}{\beta^2} + 2\langle \nabla \psi, \nabla \rho \rangle \right) \Big|_{\Gamma_t} + 1 = 0.$$

Заметим, что для функций ρ , обращающихся в нуль на поверхности Γ_t , справедливо равенство

$$\nabla \rho|_{\Gamma_t} = -\rho_t \nabla \psi|_{\Gamma_t}. \quad (7.1.28)$$

Поэтому последнее соотношение можно переписать в виде

$$\rho_t |\nabla \psi|^2 \alpha_0^-|_{\Gamma_t} = 1. \quad (7.1.29)$$

Отметим, что отсюда следует условие $\rho_t|_{\Gamma_t} \neq 0$, т.е. нормальная производная предельного решения обязательно терпит разрыв на Γ_t . Эквивалентной формой записи (7.1.29) является

$$\left\langle \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}, \nabla \right\rangle \rho (V_0^+ - V_0^-)|_{\Gamma_t} = -\frac{2}{|\nabla \psi|}. \quad (7.1.30)$$

Обозначим через $\theta^\pm(x, t)$ поточечный предел $\theta(x, t, \varepsilon)$ в Ω_t^\pm при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, учитывая непрерывность фона $\theta_0(x, t)$, условие (7.1.30) преобразуется к виду (7.1.7).

Далее, рассматривая условие (7.27)₁ и проводя несложные вычисления, приходим к утверждению.

Лемма 7.1.3. Условие (7.27)₁ эквивалентно равенству

$$\beta^{-1} \operatorname{div}(\beta \nabla \psi) + \kappa - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \beta^{-1} \kappa_1 \check{\theta}_0 = 0. \quad (7.1.31)$$

Так как $\rho|_{\Gamma_t} = 0$, то $\theta^+|_{\Gamma_t} = \theta^-|_{\Gamma_t} = \check{\theta}_0$, и из (7.1.31) следует уравнение (7.1.9).

Теперь можем проинтегрировать уравнения (7.22)₁, (7.23)₁ и получить, что

$$\check{U}_1 = \check{\gamma}_1^+(x) + \check{\gamma}_1^-(x) \chi + u_1(\tau, x), \quad \omega_1 = \omega_{11}(\tau, x) + s_1 \chi_\tau,$$

где $\omega_{11} \in \mathbf{S}$ — частное решение (7.23)₁,

$$\check{\gamma}_1^- = \frac{s}{|\nabla \psi|^2}, \quad u_1 = \sqrt{2} \beta^{-1} (\xi \chi - \ln \cosh \xi) \Big|_{\xi = \beta(\tau+s)/\sqrt{2}} \in \mathcal{S}, \quad (7.1.32)$$

$\check{\gamma}_1^+$, s_1 — некоторые произвольные функции.

Определим продолжение $\mathcal{V}_0^N = \rho V_0$ вне поверхности Γ_t . Для этого обозначим $\theta^\pm = \theta^\pm(x, t)$ — решение задачи (7.1.4)–(7.1.9) в Ω_t^\pm , и пусть $\tilde{\theta}^\pm = \tilde{\theta}^\pm(x, t)$ — гладкие продолжения θ^\pm в области Ω_t^\mp соответственно, такие, что $\tilde{\theta}^\pm$ также удовлетворяют уравнению теплопроводности.

Тогда полагаем $\rho \alpha_0^- = (\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-)/2$, $\theta_0 + \rho \alpha_0^+ = (\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-)/2$, $\mu_1^- = \kappa_1 \rho \alpha_0^-/2$, $\varphi_1 + \mu_1^+ = \kappa_1(\theta_0 + \rho \alpha_0^+)/2$ и определяем в Ω главный член асимптотики θ

$$\theta(x, t, \varepsilon) = \frac{\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-}{2} + \frac{\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-}{2} \chi(\tau, x) + O(\varepsilon), \quad (7.1.33)$$

$$\tau = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{t - \psi + \varepsilon s}{\varepsilon},$$

а также первую поправку в асимптотическом разложении φ

$$\varphi(x, t, \varepsilon) = \chi(\tau) + \varepsilon \left\{ \frac{\kappa_1}{4}(\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-) + \frac{\kappa_1}{4}(\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-)\chi(\tau, x) + \omega_1(\tau, x) \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (7.1.34)$$

Рассмотрим члены порядка $O(\varepsilon^2)$ в соотношениях (7.1.14), (7.1.15). Используя (7.1.18), (7.1.20) при $j = 1$, получаем уравнения (7.22)₂, (7.23)₂ при $k = 2$, где $G_2 = \alpha_1^- (|\nabla\psi|^2 \rho_{1t} \tau \chi_{\tau\tau} - 2\langle \nabla\psi, \nabla\rho_1 \rangle \chi_\tau)|_{\Gamma_t} + s_1 \chi_{\tau\tau} + g_2(\tau, x)$, g_2, F_2 — некоторые функции от $\omega_{11}, u_1, \tau, \chi, \tilde{\theta}^\pm$ при $t = \psi(x)$.

Аналогично предыдущему убеждаемся, что (7.25)₂ выполнено в силу (7.1.18), (7.1.20) при $j = 1$, а условие (7.26)₂ приводит к равенству

$$\rho_{1t} \alpha_1^- |\nabla\psi|^2|_{\Gamma_t} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau, x) d\tau. \quad (7.1.35)$$

Обозначим $\theta_1^\pm = \theta_1 + \rho_1 V_1^\pm + U_1^\pm$ — предельное значение при $\tau \rightarrow \pm\infty$ первой поправки в асимптотическом разложении $\theta(x, t, \varepsilon)$ и заметим, что для величины $\tilde{\gamma}_1^- = [(U_1^+ - U_1^-)/2]|_{\Gamma_t}$ нами уже получена формула (7.1.32). Тогда, используя (7.1.29) и равенство, аналогичное (7.1.28), условие (7.1.35) можно преобразовать к виду, аналогичному (7.1.7):

$$\frac{\partial}{\partial \nu_t} \theta_1^+|_{\Gamma_t^+} - \frac{\partial}{\partial \nu_t} \theta_1^-|_{\Gamma_t^-} = -p_1 \mathcal{D}\nu, \quad (7.1.36)$$

где $p_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau, x) d\tau + 2\langle \nabla\psi, \nabla \rangle (s/|\nabla\psi|^2)$.

Далее, условие (7.27)₂ в результате несложных, но громоздких вычислений можно преобразовать к виду линейного неоднородного уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}}s = f(x), \quad (7.1.37)$$

где $\widehat{\mathcal{L}}$ — вариация оператора из (7.1.31), правая часть f вычисляется с помощью функций, определенных в (7.1.33), (7.1.34). Дополняя (7.1.37) начальным условием

$$s|_{\Gamma_0} = s^0(x)|_{\Gamma_0} \quad (7.37')$$

с некоторой функцией $s^0 \in \mathbf{C}^\infty(\Gamma_0)$, получаем задачу Коши для определения первой поправки $s(x)$ к фазе ψ , разрешимую в той же окрестности поверхности Γ_0 , что и задача (7.1.9).

Теперь можем проинтегрировать уравнения (7.22)₂, (7.23)₂ и получить, что $\check{U}_2 = \tilde{\gamma}_2^+(x) + \tilde{\gamma}_2^-(x)\chi + u_2(\tau, x)$, $\omega_2 = \omega_{21}(\tau, x) + s_2(x)\chi_\tau$, где $u_2 \in \mathbf{S}$, $\omega_{21} \in \mathbf{S}$ и коэффициент $\tilde{\gamma}_2^-$ — некоторые конкретные функции, $\tilde{\gamma}_2^- = s\rho_{1t}\alpha_1^-|_{\Gamma_t} - s_1 + f_2^-(x)$, а $\tilde{\gamma}_2^+$ и s_2 — некоторые пока произвольные функции.

Определим продолжение $(\mathcal{V}_1^N - \mathcal{V}_0^N)/\varepsilon = \rho V_1 + U_1$ вне поверхности Γ_t . Для этого обозначим через $\theta_1^\pm = \theta_1^\pm(x, t)$ решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1^\pm}{\partial t} - \Delta \theta_1^\pm &= -\frac{\kappa_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \theta^\pm, \quad (x, t) \in \Omega_t^\pm, \quad \theta_1^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^1(x), \\ x \in \Omega_0^\pm, \quad \theta_1^+|_{\Gamma_t} &= \theta_1^-|_{\Gamma_t}, \end{aligned} \quad (7.1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_t} \theta_1^+|_{\Gamma_t^+} - \frac{\partial}{\partial \nu_t} \theta_1^-|_{\Gamma_t^-} = -p_1 \mathcal{D}\nu, \quad k_1 \frac{\partial \theta_1^+}{\partial n} + k_2 \theta_1^+|_\Sigma = 0,$$

где $\theta_\pm^1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\theta^0(x, \varepsilon) - \theta_\pm^0(x))/\varepsilon$, $x \in \Omega_0^\pm$.

Пусть $\tilde{\theta}_1^\pm(x, t)$ — гладкое продолжение θ_1^\pm в области Ω_t^\mp , соответственно, такие, что каждая из функций $\tilde{\theta}_1^\pm$ удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности с правой частью $\tilde{f}_1^\pm = -(\kappa_1/2)\partial\tilde{\theta}_1^\pm/\partial t$.

Полагаем $\rho_1 \alpha_1^- + \gamma_1^- = (\tilde{\theta}_1^+ - \tilde{\theta}_1^-)/2$, $\theta_1 + \rho_1 \alpha_1^+ + \gamma_1^+ = (\tilde{\theta}_1^+ + \tilde{\theta}_1^-)/2$, $\mu_2^- = (\kappa_1/4)(\theta_1^+ - \tilde{\theta}_1^-) - (3/16)\kappa_1^2[(\tilde{\theta}_1^+)^2 + (\tilde{\theta}_1^-)^2]$, $\varphi_2 + \mu_2^+ = (\kappa_1/4)(\tilde{\theta}_1^+ + \tilde{\theta}_1^-) - (3/16)\kappa_1^2[(\tilde{\theta}_1^+)^2 - (\tilde{\theta}_1^-)^2]$ и определяем в Ω

асимптотику θ с точностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\theta(x, t, \varepsilon) = \frac{\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-}{2} + \frac{\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-}{2} \chi + \varepsilon \left\{ \frac{\tilde{\theta}_1^+ + \tilde{\theta}_1^-}{2} + \frac{\tilde{\theta}_1^+ - \tilde{\theta}_1^-}{2} \chi + u_1(\tau, x) \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (7.1.39)$$

а также асимптотику φ с точностью $O(\varepsilon^3)$:

$$\varphi(x, t, \varepsilon) = \chi + \varepsilon \left\{ \frac{\kappa_1}{4} \frac{\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-}{2} + \frac{\kappa_1}{4} (\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-) \chi + \omega_1 \right\} + \varepsilon^2 \{ \varphi_2 + \mu_2^+ + \mu_2^- \chi + \omega_2(\tau, x) \} + O(\varepsilon^3). \quad (7.1.40)$$

Таким образом, вычисление младшего члена асимптотического разложения θ и φ сводится к решению модифицированной задачи Стефана (7.1.38), (7.1.37) и решению обыкновенных уравнений (7.22)₂, (7.23)₂. При этом уравнение (7.1.37) является поправочным условием Гиббса—Томпсона и служит для уточнения положения поверхности раздела фаз с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Для разрешимости задачи (7.1.38), (7.1.37) мы должны наложить условия на начальные функции $\theta_{\pm}^1(x)$, $\varphi_{\pm}^1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi^0(x, \varepsilon) \mp 1) / \varepsilon$, $x \in \Omega_0^{\pm}$, и $s^0(x)|_{\Gamma_0}$, аналогичные условиям A_0 , B_0 , C_0):

A_1) $\theta_{\pm}^1(x) \in \mathbf{C}(\Omega)$;

B_1) $\varphi_{\pm}^1(x) = (\kappa_1/2)\theta_{\pm}^0(x)$, $x \in \Omega_0^{\pm}$;

C_1) начальные данные $s^0(x)$ и $\theta_{\pm}^1(x)$ согласованы на Γ_0 .

Асимптотическое решение (7.1.39), (7.1.40) является стабилизирующимся. Соответственно, начальные значения (7.1.2) θ^0 , φ^0 должны быть специальными, удовлетворяющими условию

D) $\theta^0(x, \varepsilon) - \theta(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = O(\varepsilon^2)$, $\varphi^0(x, \varepsilon) - \varphi(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = O(\varepsilon^3)$, где $\theta(x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x, t, \varepsilon)$ — функции, определенные в (7.1.39), (7.1.40).

Теорема 7.1.2. Пусть выполнены предположения A_i), B_i), C_i), D), $i = 0, 1$, и пусть при $t \leq T$ существует гладкое решение задачи (7.1.4)–(7.1.9). Тогда при $t \in [0, T]$ существует асимптотическое по mod $O(\varepsilon^2)$ решение $\theta(x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x, t, \varepsilon)$ задачи (7.1.1)–(7.1.3). При $(x, t) \in \Omega_t^{\pm}$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta = \theta^{\pm}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta - \theta^{\pm}}{\varepsilon} = \theta_1^{\pm},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi = \pm 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi \mp 1}{\varepsilon} = \left(\frac{\kappa_1}{2} \right) \theta^{\pm}.$$

Построение следующих членов асимптотического разложения проводится аналогично. Отметим, что на каждом шаге асимптотической процедуры остаются неопределенными две «константы» интегрирования, $s_i(x)$ и $\tilde{\gamma}_i^+(x)$, которые определяются на следующем шаге с помощью условий (7.22)_{k+1}, (7.23)_{k+1}.

7.2. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим ряд примеров, относящихся к двумерному случаю, $x \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через λ , ζ локальные координаты в окрестности кривой Γ_0 , и пусть $\zeta \in [0, \zeta_0]$ — координаты на Γ_0 . Отметим, что условие (7.1.7) при $t = 0$ и начальные данные определяют вектор $\nabla\psi|_{\Gamma_0}$. Выберем λ так, что $\lambda > 0$ вдоль $\nabla\psi|_{\Gamma_0}$. Перейдем в уравнении (7.1.9) к координатам (λ, ζ) и сделаем преобразование Мизеса, т.е. перейдем от (λ, ζ) к переменным (ψ, ζ) . Обозначим $\lambda = R(\psi, \zeta)$ и перепишем (7.1.9) в следующем виде:

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = a \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} + b \check{\theta}(\omega, x(R, \zeta)) - F, \quad \psi > 0, \quad (7.2.1)$$

$$R|_{\psi=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^k R|_{\zeta=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^k R|_{\zeta=\zeta_0}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $a = \kappa^{-1}\{\lambda, \zeta\}^2 A^{-1}$, $\{\lambda, \zeta\} = \lambda_1 \zeta_2 - \lambda_2 \zeta_1|_{x=x(R, \zeta)}$, $A = |\nabla_x \zeta|^2 (R_\zeta)^2 - 2\langle \nabla_x \zeta, \nabla_x \lambda \rangle R_\zeta + |\nabla \lambda|^2|_{x=x(R, \zeta)}$, $b = \kappa_2 A^{1/2}$, $F(\kappa A)^{-1}((\lambda_{11} - R_\zeta \zeta_{11}) \times (\lambda_2 - R_\zeta \zeta_2)^2 + (\lambda_{22} - R_\zeta \zeta_{22})(\lambda_1 - R_\zeta \zeta_1)^2 - 2(\lambda_{12} - R_\zeta \zeta_{12})(\lambda_1 - R_\zeta \zeta_1)(\lambda_2 - R_\zeta \zeta_2))|_{x=x(R, \zeta)}$, $f_i = \partial f / \partial x_i$, $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$, $R_\zeta = \partial R / \partial \zeta$. Как нетрудно установить, при неособой кривой Γ_0 коэффициент $a > 0$.

Пример 1. Γ_0 — окружность радиуса $c = \text{const}$. После несложных преобразований получаем

$$a = \frac{a_1}{c^2}, \quad a_1 = (\kappa A)^{-1}, \quad a = \left(\frac{R_\zeta}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{R}{c}\right)^2,$$

$$b = \kappa_3 A^{1/2} \left(1 - \frac{R}{c}\right)^{-1}, \quad F = \frac{F_1}{c}, \quad \kappa_3 = \frac{\kappa_2}{\kappa}, \quad (7.2.2)$$

$$F_1 = -\left(\kappa A \left(1 - \frac{R}{c}\right)\right)^{-1} \left(\left(1 - \frac{R}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{R_\zeta}{c}\right)^2\right).$$

С целью еще большего упрощения задачи предположим, что начальное значение θ в окрестности Γ_0 радиально симметрично. Тогда при достаточно малых t и ψ можем считать, что $\check{\theta} = \check{\theta}(\psi, \lambda)$ и $R = R(\psi)$. Соответственно, (7.2.1) превращается в обыкновенное уравнение

$$\frac{dR}{d\psi} = \kappa_3 \check{\theta}(\psi, R) + \frac{1}{\kappa c} \left(1 - \frac{R}{c}\right)^{-1}. \quad (7.2.3)$$

Пример 2. Γ_0 — окружность радиуса $c = 1/\delta \gg 1$. Полагая δ малым параметром, получаем задачу построения асимптотики решения следующего уравнения:

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = \delta^2 a_1 \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} + b \check{\theta}(\psi, x(R, \zeta, \delta)) - \delta F_1. \quad (7.2.4)$$

Пусть $\check{\theta}$ — медленно меняющаяся функция ζ , т.е. $\check{\theta} = \check{\theta}_0(R, \psi, \zeta) + O(\delta)$. Тогда решение уравнения (7.2.4) можно строить по регулярной теории возмущений. Полагая $R = R_0(\psi, \zeta) + \delta R_1(\psi, \zeta) + \dots$, получаем в главном члене

$$\frac{\partial R_0}{\partial \psi} = \kappa_3 \check{\theta}_0(R_0, \psi, \zeta). \quad (7.2.5)$$

Пример 3. Γ_0 — прямая $x_1 = 0$. Полагая $\lambda = x_1$, $\zeta = x_2$, получаем $a = (\kappa A)^{-1}$, $A = 1 + (R_\zeta)^2$, $b = \kappa_3 A^{1/2}$, $F = 0$.

Пусть в некоторой окрестности Γ_0 $\check{\theta}$ не зависит от ζ . Тогда в этой окрестности $R = R(\psi)$, и уравнение (7.2.1) приобретает вид

$$\frac{dR}{d\psi} = \kappa_3 \check{\theta}(\psi, R). \quad (7.2.6)$$

Таким образом, мы видим существенно различное поведение границы Γ_t в случае ненулевой кривизны Γ_0 и в случаях малой и нулевой кривизны. Если в первом случае движение границы определяется параболическими уравнениями (7.2.1), (7.2.2), то во втором случае движение границы происходит с большей скоростью в соответствии с обыкновенными уравнениями (7.2.5), (7.2.6). Далее, если мы выберем, как в классической задаче Стефана, $\check{\theta} = 0$, то в случаях малой и нулевой кривизны получим равенство $R_\psi = 0$. Тем самым, происходит стабилизация границы, и, как следствие, возникает переходная зона. При конечной кривизне в соответствии с уравнением (7.2.3) стабилизация границы не происходит.

Обоснование асимптотического решения и проблемы предельного перехода по малому параметру будут детально рассмотрены в следующем параграфе.

7.3. КОРРЕКТНОСТЬ И СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

В этом параграфе, на примере системы ФП, мы приведем метод тестирования определений слабого решения на предмет их корректности — устойчивости относительно слабого предельного перехода по малому параметру в системе фазового поля. Основное внимание будет уделено проблеме предельного перехода по малому параметру в системе фазового поля в случае, когда предел $\overline{\varphi^0(x)}$ начальных данных функции порядка $\varphi^0(x, \varepsilon)$ принадлежит подпространству функций с ограниченной вариацией $BVC(\Omega)$ (мы используем стандартное обозначение BV для пространства функций с ограниченной вариацией, и $BVC(\Omega) = \{\varphi, \varphi \in BV(\Omega), |\varphi| = 1\}$). Для таких начальных данных при дополнительных предположениях предел функции порядка $\varphi(x, t, \varepsilon)$ также принадлежит $BVC(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$. Таким образом, в этом случае предельная функция имеет не более конечного числа поверхностей Γ_t коразмерности 1, на которых предельная температура $\overline{\theta}$ имеет слабый разрыв ($\overline{\theta} \in C$ и $\overline{\theta} \notin C^1$). Эти поверхности разделяют область Ω на области Ω_t^\pm , заполненные различными агрегатными состояниями. В таких областях предельная функция порядка $\varphi_{\text{lim}}(x, t)$ принимает одно из значений ± 1 . Такие состояния среды называются *жестко фронтовыми*.

В теории фазовых переходов первого рода возможно существование состояния другого рода, когда вместе с областями Ω_t^\pm , заполненными твердой или жидкой фазами (однородные агрегатные состояния), существует также стратифицированная (слоистая) область Ω_t^* так называемого промежуточного агрегатного состояния область ПАС. В литературе, насколько нам известно, проблема области ПАС, с точки зрения предельного перехода (цепочки сингулярно-предельных задач со свободной границей), обсуждается в [8, 23, 43, 55, 60, 64]. Чрезвычайно интересна проблема, связанная с описанием процессов в окрестности спинодала, где, как мы отмечали во введении к модели Кана—Хилларда, малые возмущения по амплитуде могут быть большими по протяженности, т.е. процесс теряет свойство локализованности, перестает быть жестко фронтовым. Одним из замечательных свойств системы фазового поля, как гладкой аппроксимации модификаций задачи Стефана со свободной границей, является возможность описания области ПАС как результата предельного перехода в системе фазового поля со специальными начальными данными. Проверка этой гипотезы является главной целью этого параграфа.

Мы ограничимся детальным рассмотрением только одного из возможных соотношений между параметрами τ, ξ и a , когда $\tau = \xi^2 = a, \ell = 1$ и $K = 1$. Положим $a = \varepsilon \ll 1$. Сделав необходимые переобозначения в начальных и граничных условиях, можно переписать систему фазового поля в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta, \quad (x, t) \in Q, \tag{7.3.1}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 + \varepsilon \kappa \theta,$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi^0(x, \varepsilon), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x, \varepsilon), \quad \varphi|_\Sigma = 1, \quad \theta|_\Sigma = \theta_b.$$

Здесь $\kappa = \text{const}$, $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной областью с гладкой C^∞ -границей, $n \leq 3$, $\Sigma = [0, T] \times \partial\Omega$, функции φ^0 и θ^0 — достаточно гладкие для $\varepsilon \geq \text{const} > 0$, и функция θ_b также достаточно гладкая.

Пусть Γ_0 является гладкой поверхностью коразмерности 1, и $\Gamma_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$, которая разделяет Ω на две части, подобласти Ω_0^\pm так, что $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^-$. Также предположим, что φ^0, θ^0 — специальные начальные данные такие, что $\varphi^0 = \pm 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ вне ε -окрестности поверхности Γ_0 и $\theta^0 \in C(\Omega)$ (более детально см. [3] и комментарий, который будет приведен ниже). Сингулярно-предельная задача в этом случае

$$\frac{\partial \theta^\pm}{\partial t} = \Delta \theta^\pm, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t > 0, \tag{7.3.2}$$

$$\theta^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^0(x), \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad \theta^+|_\Sigma = \theta_b,$$

$$[\theta^\pm]|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left[\frac{\partial \theta^\pm}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_t} = -2V_\nu, \tag{7.3.3}$$

$$\kappa_1 \theta^\pm \Big|_{\Gamma_t} = \mathcal{K}_t - V_\nu \quad (7.3.4)$$

— хорошо известная задача Стефана—Гиббса—Томпсона. Здесь $\theta_\pm^0(x) = \overline{\theta^0}(x)$ для $x \in \Omega_0^\pm$. Через $[f] \Big|_{\Gamma_t}$ обозначен скачок функции f на свободной границе Γ_t ; ν обозначает нормаль к Γ_t (внешняя к области Ω_t^-), V_ν — нормальная скорость фронта Γ_t , $\mathcal{K}_t = -\operatorname{div}(\nu) \Big|_{\Gamma_t}$ обозначает среднюю кривизну поверхности Γ_t , и постоянная $\kappa_1 = 3\kappa/\sqrt{2}$. Предположим, что $\Gamma_t \cap \partial\Omega = \emptyset$ для любых $t \geq 0$, т.е. что фронт не пересекает фиксированную границу $\partial\Omega$.

Для описания области ПАС введем следующие принципиальные предположения:

- 1) функция порядка $\varphi(x, t, \varepsilon)$ должна быть такой, что ее слабый предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен тождественно нулю для $x \in \Omega_t^*$, принадлежащих переходной зоне Ω_t^* ;
- 2) в допредельной области $\Omega_{t,\varepsilon}^*$, соответствующей регуляризации области ПАС (диффузии области ПАС), решение системы фазового поля может быть описано в терминах структуры «цуга волн». В этом случае область Ω разбита на достаточно большое число областей «малого» объема, заполненных «чистыми фазами», твердой или жидкой, и переходными зонами между ними.

Первое предположение приводит, в частности, к результату, что для почти всех t предельная функция порядка $\overline{\varphi}$ принадлежит $BV(\Omega)$, но $\overline{\varphi} \notin BVC(\Omega)$.

Второе предположение основывается на концепции, предложенной в [43, 53, 55], согласно которой структура «цуга волн» описывается цепочкой модифицированных задач Стефана внутри областей «малого» объема, заполненных «чистыми фазами» (твердой или жидкой), и может быть использована для описания аппроксимации температуры в области ПАС. Такую структуру мы назвали диффузией области ПАС.

Таким образом, в этом параграфе будет решена нестандартная задача выбора начальных данных для (7.3.1), так что диффузионные процессы в области ПАС существуют на некотором независимом от ε временном интервале, и это позволит получить сингулярно-предельную задачу, описывающую процессы в предельной области (области ПАС). Важнейшим вопросом в этой задаче является предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Безусловно, такой предельный переход может быть совершен только в слабом смысле. Таким образом, мы должны получить корректное (допустимое) определение слабого решения (7.3.1) (или, что то же самое, слабую постановку задачи для системы фазового поля), для которого возможен предельный переход для решений типа цуга волн. Слабая постановка должна удовлетворять следующим естественным предположениям:

1) в жестко фронтовой ситуации невзаимодействующих переходных зон, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, предельный переход по малому параметру должен, грубо говоря, приводить к предельной модифицированной задаче Стефана с несколькими непересекающимися границами (в частности, начальная функция φ^0 должна быть выбрана такой, чтобы предельная функция $\overline{\varphi^0} \in BVC(\Omega)$);

2) в случае диффузии в области ПАС предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этом определении должен привести к «корректно поставленному» определению слабого решения предельной задачи для решений типа цуга волн;

3) слабая постановка должна быть устойчивой относительно достаточно малых возмущений начальных данных.

Классический метод проверки корректности слабой постановки задачи широко используется в теории распределений. А именно, слабое определение (например, производной в \mathcal{D}') для «допустимых» функций (из C^∞) должно привести к тому же результату в классическом определении. В этом параграфе мы покажем, что *стандартная \mathcal{D}' -процедура определения слабого решения системы фазового поля непригодна (недопустима). Она неустойчива даже для жестко фронтовой ситуации.*

Чтобы дать обоснование предельного перехода для решений типа цуга волн [16], предложим [24] другое определение слабого решения системы фазового поля. Как будет показано ниже, главным в новом определении являются условия разрешимости (условия ортогональности) для линеаризованного стандартного уравнения, возникающие при построении стабилизирующегося

асимптотического решения. Условие ортогональности играет центральную роль в нелинейном асимптотическом анализе, в частности, именно это условие приводит к граничному условию Стефана—Гиббса—Томпсона на свободной границе [18, 35]. Основным в определении слабого решения 1) будет тот факт, что слабая постановка есть интегральная аппроксимация условий ортогональности, упомянутых выше. Так, например, граничное условие Стефана—Гиббса—Томпсона слабо аппроксимируется интегральным тождеством, которое допускает слабый предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тестовая проверка, проводимая ниже в § 7.4, показывает, что даже в простейшей жестко-фронтальной ситуации новая слабая постановка позволяет перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, более того, эта формулировка слабого решения устойчива относительно малых возмущений. В пределе эта новая слабая постановка приводит к слабой постановке граничного условия Гиббса—Томпсона как части определения слабого решения сингулярно-предельной задачи со свободной границей, что позволит дать определение слабого решения системы фазового поля для решений, описывающих диффузию в области ПАС (см. § 7.4).

Мы уверены, что этот результат, касающийся слабой постановки задачи для системы фазового поля, чрезвычайно важен. Видимо, устойчивость нового определения слабого решения — более важный результат, чем вывод сингулярно-предельной задачи в ситуации «диффузии в области ПАС». Дело в том, что наш подход к определению слабого решения полезен при решении других задач (например, задачи Маскета, волн горения, приведенной выше расширенной задачи Стефана и т.д.). Получив условие ортогональности при построении стабилизирующегося асимптотического решения (как этапа нелинейного асимптотического анализа), можно применить это условие для построения корректного определения слабого решения модели как гладкой аппроксимации сингулярно-предельной задачи. Последнее позволит построить соответствующее определение слабого решения самой сингулярно-предельной задачи. Пара слабых постановок дает иерархию свойств их решений при предельном переходе, что можно назвать *корректностью гладкой аппроксимации*.

Закончим введение двумя замечаниями.

1. Грубо говоря, ситуация, когда предельная функция порядка $\bar{\varphi}$ равна нулю на множестве не нулевой меры, «очень» плоха, так как это значение функции порядка соответствует неустойчивым решениям изотермического уравнения диффузии (зоне спинодала). Таким образом, заранее ясно, что такие решения могут существовать только в очень специальных случаях. Поэтому абсолютно естественно, что мы получим жесткие ограничения одновременно на геометрию областей Ω и Ω_t^* и на начальные и граничные условия.

2. Кроме того, с точки зрения теории распределений задачи со свободной границей являются задачами о распространении особенностей. Действительно, в жестко фронтальной ситуации предельная функция порядка есть функция типа Хевисаида ($\bar{\varphi} = 1$ на Ω_t^+ и $\bar{\varphi} = -1$ на Ω_t^-), и предельная температура остается непрерывной, но имеющей слабый разрыв на свободной границе $\Gamma_t = \overline{\Omega_t^+ \cap \Omega_t^-}$. С этой точки зрения граничные условия (7.3.3), (7.3.4) можно интерпретировать как условия типа Гюгонио, соответствующие задаче о распространении строгого разрыва предельной функции порядка $\bar{\varphi}$ и задаче о распространении слабого разрыва предельной температуры $\bar{\theta}$. Эта интерпретация может быть обоснована следующим фактом. Хорошо известно, что необходимые условия существования решений типа ударной волны для квазилинейных гиперболических уравнений порождают неустойчивую цепочку условий типа Гюгонио [13, 19]. Те же условия неустойчивости мы получим для граничных условий на свободной границе, если используем классическое определение слабого решения [15] для системы фазового поля. Так как здесь нет общепризнанной терминологии, то в дальнейшем будем называть граничные условия, возникающие при интерпретации области ПАС как предела решений типа цуга волн, условиями типа Гюгонио.

7.4. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ И УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Начнем с классического (стандартного) определения слабого решения, которое используется при исследовании линейных дифференциальных уравнения (например, см. [6]). Определим слабое решение системы фазового поля (7.3.1) следующим образом.

Определение 7.4.1. Функции $\theta \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ и $\varphi \in L^\infty(0, T; W_2^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ называются *слабым решением* задачи (7.3.1), если для любых тестовых функций

$$\xi, g \in C^1(\bar{Q}), \quad \xi|_\Sigma = g|_\Sigma = 0, \quad \xi|_{t=T} = g|_{t=T} = 0, \quad (7.4.1)$$

функции θ, φ удовлетворяют интегральным тождествам

$$I_\theta = \int_Q (\langle \nabla \theta, \nabla \xi \rangle - (\theta + \varphi)\xi_t) dxdt + \int_\Omega (\theta^0 + \varphi^0)\xi(x, 0) dx = 0, \quad (7.4.2)$$

$$I_\varphi = \int_Q \left(\varepsilon \langle \nabla \varphi, \nabla g \rangle - \frac{1}{\varepsilon}(\varphi - \varphi^3)g - \kappa \theta g - \varepsilon \varphi g_t \right) dxdt + \\ + \varepsilon \int_\Omega \varphi^0 g(x, 0) dx = 0. \quad (7.4.3)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}^n , W_2^1 — пространство Соболева.

Как обычно, для гладких функций θ и φ , соотношения (7.4.2), (7.4.3) могут быть получены умножением уравнений (7.3.1) на тестовые функции ξ и g и интегрированием по частям. Это соответствует, в терминах распределений, так называемому D' -определению слабого решения системы (7.3.1). Заметим, что такое же определение слабого решения предложено в [15]. (В [15] исследуется версия системы фазового поля без φ_t во втором уравнении, отвечающая сингулярно-предельной задаче, так называемой капиллярной задаче со свободной границей. Но последнее совершенно не существенно для приводимого ниже анализа.)

Это определение выглядит чрезвычайно разумным. Тем не менее давайте проверим, позволяет ли определение 7.4.1 получить сингулярно-предельную задачу (7.3.2)–(7.3.4). Для этого используем тот факт, что в жестко фронтовой ситуации, когда $V_\nu \neq 0$, решение, получаемое при обосновании асимптотического решения [1], имеет следующий простой вид:

$$\theta_0^{\text{as}} = \frac{1}{2}(\theta_c^+(x, t) + \theta_c^-(x, t)) + \frac{1}{2}(\theta_c^+(x, t) - \theta_c^-(x, t))\chi(\eta), \quad (7.4.4)$$

$$\varphi_1^{\text{as}} = \chi(\eta) + \varepsilon \left\{ \frac{\kappa}{2}\theta_0^{\text{as}} + \omega(\eta, x) \right\}, \quad \eta = \frac{s(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \chi(\eta) = \text{th} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right). \quad (7.4.5)$$

Здесь θ_0^{as} является главным членом асимптотического разложения θ^{as} для температуры, и φ_1^{as} обозначает первые два члена асимптотического разложения φ^{as} функции порядка, $s(x, t, \varepsilon) = s_0(x, t) + \varepsilon s_1(x)$ — функция расстояния между фронтом Γ_t и точками $x \in \Omega$. Функция s_0 имеет представление $s_0 = (t + \psi(x))/|\nabla \psi|$. Функция $\psi(x)$ и сферически симметричная функция θ^\pm являются классическим решением (7.3.2)–(7.3.4) с фронтом, нормальной скоростью и средней кривизной

$$\Gamma_t = \{x, \psi(x) = -t\}, \quad \nu = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}, \quad V_\nu = -\frac{1}{|\nabla \psi|}, \quad \mathcal{K}_t = -\text{div} \nu, \quad (7.4.6)$$

Обозначим гладкие продолжения функций $\theta^\pm(x, t)$ через θ_c^\pm , $\omega = \omega(\eta, x) \in \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = C^\infty(\Omega; S(\mathbb{R}_\eta^1))$, S — пространство Шварца, $s_1 = \psi_1(x)/|\nabla \psi|$ — гладкая функция. Как мы отмечали выше, главная часть асимптотического решения не зависит от способа продолжения. Построение поправки ψ_1 и низших членов асимптотического разложения также было приведено в предыдущем параграфе.

Рассмотрим задачу (7.3.1) с начальными данными вида:

$$\varphi|_{t=0} = \chi(\eta^0) + \varepsilon \left\{ \frac{\kappa}{4}\theta_0^{\text{as}}|_{t=0} + \omega_1^0(\eta^0, x) \right\}, \quad (7.4.7)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0^{\text{as}}|_{t=0}, \quad (7.4.8)$$

где $\eta^0 = s^0(x)/\varepsilon$, $s^0(x)$ определяет расстояние от Γ_0 , функция $\omega_1^0(\eta^0, x) \in \mathbf{S}$ отличается от фиксированной функции $\omega(\eta, x)|_{\eta=\eta^0}$ в формуле для асимптотического решения φ_1^{as} с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, см. (7.4.4). Заметим, что слабый предел любой функции $\varepsilon^{-1}\omega((t+\psi)/\varepsilon, x)$, $\omega(\eta, x) \in \mathbf{S}$, является δ -функцией Дирака на поверхности $\mathcal{T} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma_t \subset Q$.

Лемма 7.4.1. *Предположим, что $\omega(\eta, x) \in \mathbf{S}$, $\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $|\nabla\psi| \neq 0$, $\text{dist}(\Gamma_t, \partial\Omega) \geq \text{const} > 0$. Тогда для любой функции $g \in C^1(\bar{Q})$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_Q \omega\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) g(x, t) dx dt = \int_{\Omega_T} A_\omega(x) \beta^{-1}(x) g(x, -\psi) dx, \quad (7.4.9)$$

где $s = (t + \psi)\beta + \varepsilon s_1$, $\beta = |\nabla\psi|^{-1}$, $A_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta, x) d\eta$, и Ω_T — область между поверхностями Γ_0 и Γ_T .

Результаты этой леммы — следствие хорошо известных теорем теории распределений (например, см. [6]).

Очевидно, правая часть (7.4.9) может быть переписана в виде

$$\int_{\Omega_T} A_\omega(x) \beta^{-1}(x) g(x, -\psi) dx = (A_\omega \delta(\mathcal{T}), g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{T}} A_\omega g d\sigma,$$

где $\delta(\mathcal{T})$ — δ -функция на поверхности \mathcal{T} , $\beta^{-1}dx$ — мера Лере $d\sigma$ на \mathcal{T} , определяемая равенством $d(\beta(t+\psi)) \wedge d\sigma|_{t=-\psi} = dt dx$, см. [6].

Тестирование слабого определения начнем с вычисления интегралов в (7.4.2), (7.4.3). Из (7.4.4), (7.4.6) и (7.4.9) имеем

$$\begin{aligned} & - \int_Q \varphi \xi_t dx dt + \int_\Omega \varphi^0 \xi(x, 0) dx = \\ & = \varepsilon^{-1} \int_Q (\beta \dot{\chi} + \varepsilon v) \xi dx dt + \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 2 \int_{\mathcal{T}} \beta \xi d\sigma \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь $v = v_0(s/\varepsilon, x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, функция $v_0(\eta, x) \in \mathbf{S}$ вычислена в силу (7.4.6), и учтено, что $A_{\dot{\chi}} = 2$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} I_\theta \rightarrow \int_0^T \left\{ - \int_{\Omega_t^+} (\Delta\theta^+ - \theta_t^+) \xi dx - \int_{\Omega_t^-} (\Delta\theta^- - \theta_t^-) \xi dx \right\} dt - \\ - \int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\partial\theta^+}{\partial\nu} - \frac{\partial\theta^-}{\partial\nu} - 2\beta \right) \xi d\sigma = 0, \end{aligned}$$

если $\varepsilon \rightarrow 0$. Это порождает (7.3.2) и классическое условие Стефана (7.3.3).

Более того, подставляя (7.4.7)–(7.4.8) в (7.4.3), мы можем переписать (7.4.3) в виде:

$$\begin{aligned} I_\varphi = -\varepsilon^{-1} \int_Q (\ddot{\chi} + \chi - \chi^3) g dx dt - \int_Q (F + \varepsilon^{1/2}(1 - 3\chi^2)\omega_1) g dx dt + \\ + \varepsilon^{1/2} \int_Q \langle \varepsilon \nabla \omega_1, \varepsilon \nabla g \rangle dx dt + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

где

$$\begin{aligned} F = 2 \left(\eta \langle \nabla \psi, \nabla \beta \rangle + \beta^2 \langle \nabla \psi, \nabla \psi_1 \rangle \right) \ddot{\chi} + \\ + \left(2 \langle \nabla \psi, \nabla \beta \rangle + \beta (\Delta \psi - 1) \right) \dot{\chi} + \frac{3}{2} \kappa \theta_0^{\text{as}} (1 - \chi^2). \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Первый интеграл в (7.4.10) равен нулю, так как $\chi = \text{th}(\eta/\sqrt{2})$. Вычисляя оставшиеся интегралы, получим

$$I_\varphi = -\varepsilon \int_{\Omega_T} \left\{ 2\beta(\Delta\psi - 1) + \frac{3}{2}\kappa\theta^\pm(x, -\psi)A_{(1-\chi^2)} \right\} g(x, -\psi)\beta^{-1} dx - \\ -\varepsilon^{1/2} \int_Q f_1(\eta, x, t, \varepsilon)g dxdt + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) = 0. \quad (7.4.12)$$

Здесь

$$f_1(\eta, x, t, \varepsilon) = (1 - 3\chi^2(\eta))\omega_1(\eta, x, t, \varepsilon), \quad A_{(1-\chi^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \chi^2) d\eta = 2\sqrt{2},$$

так что

$$\|f_1; C(0, T; L^2(\Omega))\| \leq \text{const}$$

равномерно по ε . Однако мы не можем гарантировать $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция $f_1(x, t, \varepsilon)$ локализована в окрестности свободной границы, так как линейризованное изотермическое уравнение диффузии

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \varphi + (\varphi - \varphi^3)$$

в окрестности φ^{as} имеет непрерывный спектр. Если функция $f_1((t + \psi)/\varepsilon, x, t, \varepsilon) \bmod \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ не локализованная, то в противоположность (7.3.4) из (7.4.12) мы получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_1\left(\frac{(t + \psi)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) = 0, \quad (7.4.13)$$

где предел понимается в смысле $\mathcal{D}'(Q)$ и, вообще говоря, соотношение (7.4.13) должно быть выполнено в целой области Q . Если функция $f_1((t + \psi)/\varepsilon, x, t, \varepsilon) \bmod \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ — локализованная, то в смысле $\mathcal{D}'(Q)$ она порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$. В этом случае (7.4.12) справедливо, сумма интегралов обращается в нуль, и мы получаем

$$\kappa_1\theta^\pm(x, -\psi) = V_\nu(\Delta\psi - 1) - \frac{1}{2}\bar{A}_{f_1}|_{t=-\psi}. \quad (7.4.14)$$

Здесь использованы (7.3.4), (7.4.5) и тот факт, что $\bar{A}_{f_1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta, x, t, \varepsilon) d\eta$ в $\mathcal{D}'(Q)$.

Очевидно, оба условия (7.4.13) и (7.4.14) отличаются от условия Гиббса—Томпсона (7.3.4). Более того, здесь мы получили неизвестную функцию \bar{A}_{f_1} (или \bar{f}_1), зависящую от первой поправки ω_1 в (7.4.7)–(7.4.8). Таким образом (в противоположность (7.3.4)), соотношение (7.4.14) (или (7.4.13)) не дополняет систему (7.3.2), (7.3.3) до замкнутой системы, поэтому мы не можем вычислить положение свободной границы.

7.5. ДОПУСТИМОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

Теперь рассмотрим структуру жестко фронтального решения, привязанного к асимптотическому решению начальными данными $\theta|_{t=0} = \theta_1^{\text{as}}|_{t=0}$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_2^{\text{as}}|_{t=0} + \varepsilon^2\omega_2^0(\eta^0, x)$, где $\omega_2^0 \in \mathbf{S}$ — любая функция. Тогда получим, что $\varepsilon^{1/2}\omega_1 = \omega$ является функцией из представления (7.4.4). Следовательно, последние два интеграла в (7.4.10) равны нулю в силу определения ω в структуре асимптотического решения. Полагая члены порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ равными нулю, получим линейризацию (7.4.14) в окрестности локализованной f_2 . Однако это соотношение содержит новую функцию \bar{A}_{f_2} . Продолжая эту процедуру, получим бесконечную цепочку связанных соотношений, подобных цепочке условий Гюгонио для ударных волн. Мы уже отмечали, что мы не можем определить динамику фронта Γ_t из этой цепочки соотношений. Более того, мы не можем оборвать эту цепочку, используя точное решение предельной задачи в Ω_t^\pm , как и для уравнения Хопфа.

Однако мы можем изменить определение слабого решения системы ФП так, чтобы необходимое условие существования жестко фронтового решения стало точно условием Гиббса—Томпсона (7.3.4) скорее, чем (7.4.13) (или (7.4.14)).

Определение 7.5.1. Пара функций $\theta \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0, T; W_2^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ называется *слабым решением задачи (7.3.1)*, если для любых пробных функций $\xi(x, t)$, $g(x, t) = (g_1(x, t), \dots, g_n(x, t))$, удовлетворяющих (7.4.1), функции θ и φ удовлетворяют (7.4.2) и интегральному тождеству

$$J_\varphi = \varepsilon \int_Q \varphi_t \langle g, \nabla \varphi \rangle dxdt - \int_Q e_\varepsilon(\varphi) \operatorname{div} g dxdt + \\ + \int_Q (\varepsilon \langle \nabla \varphi, g_x \nabla \varphi \rangle + \kappa \varphi \operatorname{div}(g\theta)) dxdt = 0, \quad (7.5.1)$$

где $e_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(\varphi)$, $W(\varphi) = (\varphi^2 - 1)^2/4$ и g_x — матрица $(g_x)_{ik} = \partial g_i / \partial x_k$.

Тождество (7.5.1) может быть получено для гладких функций φ , θ умножением второго уравнения в (7.3.1) на $\langle g, \nabla \varphi \rangle$ и интегрированием по частям.

Теперь протестируем это определение, следуя процедуре, примененной при тестировании определения 7.4.1. Очевидно, достаточно вычислить интеграл J_φ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя представление (7.4.7)–(7.4.8) решения задачи (7.3.1), (7.4.8), получим

$$J_\varphi = \varepsilon^{-2} \int_Q (\ddot{\chi} + \chi - \chi^3)(\beta \langle g, \nabla \psi \rangle \dot{\chi} + \varepsilon G) dxdt + \\ + \varepsilon^{-1} \int_Q \beta \langle g, \nabla \psi \rangle (\varepsilon^{1/2} \omega_1 L + F) \dot{\chi} dxdt + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 - 3\chi^2, \quad (7.5.2)$$

где использовано обозначение (7.4.11), G — ограниченная функция в $C(0, T; L^2(\Omega))$. Так как $\chi = \operatorname{th}(\eta/\sqrt{2})$ и $L\dot{\chi} = 0$, то в силу леммы 7.4.1 получаем, что соотношение (7.5.2) может быть преобразовано в следующее

$$J_\varphi = \int_{\Omega_T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F \dot{\chi} d\eta \right\} \langle g, \nabla \psi \rangle \Big|_{t=-\psi} dx + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) = 0. \quad (7.5.3)$$

Очевидно, чтобы (7.5.3) было выполнено, необходимо, чтобы выражение в фигурных скобках обратилось в нуль. Используя точное выражение (7.4.11) для функции F , мы выводим как раз условие Гиббса—Томпсона (7.3.4).

Разлагая φ^{as} , θ^{as} , и J_φ в ряды по ε , нетрудно заметить, что полученная цепочка соотношений, в отличие от цепочки определения 7.4.1, треугольная.

Таким образом, для определения 7.4.1 вклад малых, типа солитона, возмущений решения в уравнение динамики свободной границы имеет порядок $\mathcal{O}(1)$, в то время, как для определения 7.5.1, вклад тех же возмущений в этот же закон движения будет порядка ε . Другими словами, предельная задача, порожденная определением 7.5.1, является устойчивой относительно малых возмущений.

Однако мы проверили определение 7.5.1 только для специальных начальных данных (7.4.8) с возмущениями типа солитона. Результаты [20, 66] подтверждают возможность предельного перехода в определении 7.5.1 в общем случае, результатом которого является слабое определение сингулярно-предельной задачи. Таким образом, это определение корректно.

7.6. Решения типа «цуга волн» и отвечающая им сингулярно-предельная задача

Теперь рассмотрим более общий случай, когда $\overline{\varphi^0} \in BV$, но $\overline{\varphi^0} \notin BVC$. Это случай диффузии в области ПАС. Наши рассуждения базируются на трактовке так называемой «mushy region»,

предложенной в [53, 64], в которой область смеси рассматривается как большое число M областей чистых фаз, жидких и твердых, малых объемов порядка v_ε ($M = M(\varepsilon) \rightarrow \infty$ и $v_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Макроскопическое описание области смеси предлагается получить вычислением слабого предела решений типа цуга волн при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Начнем с описания начальной геометрической структуры. Предположим, что для $t = 0$ область Ω содержит области чистых фаз (жидкой и твердой) $\Omega_{0,\varepsilon}^\pm$ и области смеси $\Omega_{0,\varepsilon}^*$ (области расплава), заполненные большим числом областей чистых фаз (также твердой и жидкой) малого объема $\Omega_{0,\varepsilon}^i$, $i = 1, 2, \dots, M$, разделенные поверхностями фазового перехода. Здесь M — число четное. Чтобы упростить задачу, рассмотрим случай квазисферической симметрии. Пусть $\Gamma_{0,\varepsilon}^i$, $i = 1, \dots, M-1$, обозначают поверхности раздела между областями $\Omega_{0,\varepsilon}^i$ такие, что $\partial\Omega_{0,\varepsilon}^i = \Gamma_{0,\varepsilon}^{i-1} \cup \Gamma_{0,\varepsilon}^i$, и пусть $\Gamma_{0,\varepsilon}^0 = \partial\Omega_{0,\varepsilon}^-$ и $\partial\Omega_{0,\varepsilon}^+ = \Gamma_{0,\varepsilon}^M \cup \partial\Omega$. Через $D_{0,\varepsilon}^i$ обозначим области, ограниченные $\Gamma_{0,\varepsilon}^i$, и предположим, что $D_{0,\varepsilon}^i \subset D_{0,\varepsilon}^{i+1}$, $i = 0, \dots, M$, где $D_{0,\varepsilon}^0 = \Omega_{0,\varepsilon}^-$ и $D_{0,\varepsilon}^{M+1} \equiv \Omega$. Также будем считать, что $\Gamma_{0,\varepsilon}^i$ — гладкие поверхности коразмерности 1 такие, что

$$c_1\varepsilon^\alpha \leq \text{dist}(\Gamma_{0,\varepsilon}^{k-1}, \Gamma_{0,\varepsilon}^k) \leq c_2\varepsilon^\alpha, \quad (7.6.1)$$

$$c_1^\pm \leq |\Omega_{0,\varepsilon}^\pm| \leq c_2^\pm, \quad \text{dist}(\Gamma_{0,\varepsilon}^M, \partial\Omega) \geq c_3, \quad (7.6.2)$$

где $k = 1, \dots, M$, $\alpha \in (0, 1)$, постоянные $c_l^\pm, c_j > 0$ не зависят от ε .

Также предположим выполнение следующих геометрических условий.

А. Система поверхностей $\Gamma_{0,\varepsilon}^i$, $i = 0, \dots, M$, такова, что каждая $\Gamma_{0,\varepsilon}^i \in C^3$ равномерна для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $M \rightarrow \infty$ и $M\varepsilon^\alpha \rightarrow L = \text{const}$, если $\varepsilon \rightarrow 0$, и в пределе эти поверхности заполняют область смеси Ω_0^* , ограниченную C^3 -поверхностью Γ_0^- и Γ_0^+ .

Если условие А выполнено, то существует функция $s^0(x, \varepsilon) \in C^3(\bar{\Omega})$ такая, что любая $\Gamma_{0,\varepsilon}^i$ является линией уровня этой функции.

Выберем специальные начальные условия для допредельной системы ФП как базовой для построения жестко фронтовых асимптотических решений. Очевидно, (7.6.1) предполагает, что начальные данные локально представляются разложениями типа (7.4.4) при $t = 0$.

К тому же, формула (7.4.4) показывает, что здесь нет взаимодействия (с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$) между соседними волнами (решениями типа кинка) до расстояний между ними не меньше, чем $\mathcal{O}(\varepsilon^{1-\delta})$ с любой постоянной $\delta > 0$. Таким образом, для достаточно малых t асимптотическое решение рассматриваемой задачи выражается суперпозицией локальных решений (7.4.4). А именно,

$$\varphi_1^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^M (-1)^i \chi(\eta_i) + \varepsilon \left\{ \frac{\kappa}{2} \theta_0^{\text{as}}(x, t, h) + \sum_{i=0}^M \omega_i(\eta_i, x) \right\}. \quad (7.6.3)$$

Здесь мы предположили существование двух функций $s^{(1)}(x, t, \varepsilon)$ и $s^{(2)}(x, t, \varepsilon)$, которые описывают, соответственно, поверхности $\Gamma_{t,\varepsilon}^i$ с четными и нечетными номерами для $t \geq 0$. Через $\Omega_{t,\varepsilon}^i$ мы обозначили области между поверхностями $\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}$ и $\Gamma_{t,\varepsilon}^i$, $i = 1, \dots, M$, и тогда $\Omega_{t,\varepsilon}^* = \bigcup_{i=1}^M \Omega_{t,\varepsilon}^i$.

При построении формального асимптотического решения мы получим $s^{(j)}(x, t, \varepsilon) = s_0^{(j)}(x, t, h) + \varepsilon c_1^{(j)}(x, t, h)$, $h = \varepsilon^\alpha$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $j = 1, 2$, так что $|\nabla_x s^{(j)}| > 0$ равномерно в $x \in \Omega_{t,\varepsilon}^*$ для любого $h \in [0, h_0 = \varepsilon_0^\alpha]$ и

$$\Gamma_{t,\varepsilon}^i = \{x, s_0^{(n_i)}(x, t, h) = ih\}, \quad n_i = 1, \text{ если } i = 2k, \quad n_i = 2, \text{ если } i = 2k + 1, \quad (7.6.4)$$

для $0 \leq i \leq M$.

Очевидно, $s^{(1)}|_{t=0} = s^{(2)}|_{t=0} = s^0(x, \varepsilon)$ и, с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\nu_i = \nabla s_0^{(n_i)} / |\nabla s_0^{(n_i)}| \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i}$ — внешние нормали к $D_{t,\varepsilon}^i$.

К тому же мы использовали следующее обозначение в (7.6.3): $\eta_i = (s^{(n_i)}(x, t, \varepsilon) - ih) / (|\nabla s_0^{(n_i)}| \varepsilon)$, $\omega_i \in \mathbf{S}$. Здесь θ_0^{as} — гладкая функция (для фиксированного $\varepsilon > 0$), локальное представление которой

имеет вид

$$\theta_0^{\text{as}} = \frac{1}{2}(\theta_{i-1,c} + \theta_{i,c}) + \frac{1}{2}(\theta_{i-1,c} - \theta_{i,c})\chi(\eta_i), \quad \text{если } x \in \Omega_{t,\varepsilon}^{i-1} \cup \Omega_{t,\varepsilon}^i.$$

По аналогии с жестко фронтовым решением здесь $\theta_{i,c}$ — достаточно гладкое продолжение вспомогательных функций $\theta_i = \theta_i(x, t, h)$. Напомним, что семейство функций $\{\theta_i\}$ и $s_0^{(j)}$, $j = 1, 2$, определяется как решение цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \Delta \theta_i, \quad x \in \Omega_{t,\varepsilon}^i, \quad t > 0, \quad (7.6.5)$$

$$\theta_{i-1}|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}-0} = \theta_i|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}+0}, \quad \theta_i|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i-0} = \theta_{i+1}|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i+0}, \quad (7.6.6)$$

$$\frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial \nu_{i-1}} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}-0} - \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu_{i-1}} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}+0} = (-1)^{i+1} 2V_{\nu_{i-1}}, \quad (7.6.7)$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \nu_i} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i-0} - \frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial \nu_i} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i+0} = (-1)^i 2V_{\nu_i},$$

$$(-1)^{i-1} \kappa_1 \theta_i \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}-0} = \mathcal{K}_t^{i-1} - V_{\nu_{i-1}}, \quad (-1)^i \kappa_1 \theta_i \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i+0} = \mathcal{K}_t^i - V_{\nu_i}, \quad (7.6.8)$$

замыкаемой начальными и граничными (на $\partial\Omega$) условиями. Здесь $i = 0, \dots, M+1$; мы положили $\Gamma_{t,\varepsilon}^{-1} = \Gamma_{t,\varepsilon}^{M+1} = \emptyset$, так что первое (второе) условие в (7.6.6)–(7.6.8) исчезает для $i = 0$ ($i = M+1$). Дополнительно

$$V_{\nu_i} = -(|\nabla s_0^{(n_i)}|)^{-1} \frac{\partial s_0^{(n_i)}}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i}, \quad \mathcal{K}_t^i = -\text{div} \nu_i \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i}.$$

Через $\Omega_{t,\varepsilon}^0 = \Omega_{t,\varepsilon}^-$ мы обозначили область, ограниченную $\Gamma_{t,\varepsilon}^0$. Область $\Omega_{t,\varepsilon}^{M+1} = \Omega_{t,\varepsilon}^+$ ограничена $\Gamma_{t,\varepsilon}^M$ и $\partial\Omega$. Малые поправки $c_1^{(j)}(x, t, h)$ также являются поправками порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ для температуры, которые могут быть вычислены как решения линеаризованной цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона (см. [35]).

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ и достаточно малого $t > 0$ классическая разрешимость цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона получается аналогично [44].

В то же время на основе приведенной выше предельной задачи нельзя сформулировать условия на начальные данные для температуры $\theta^0(x, \varepsilon)$ такие, чтобы эти условия имели смысл при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как классическая разрешимость задачи Стефана—Гиббса—Томпсона предполагает условия согласования на поверхностях $\Gamma_{0,\varepsilon}^i$ для любого $M \rightarrow \infty$. Однако мы можем обойти эти трудности, если найдем модельную задачу для слабого предела температуры при $\varepsilon \rightarrow 0$. Итак, выбираем начальные данные

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_1^{\text{as}}(x, 0, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0^{\text{as}}(x, 0, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (7.6.9)$$

$$s^{(j)}|_{t=0} = s^0(x, \varepsilon),$$

где $\theta_0^{\text{as}}(x, 0, \varepsilon)$, $\varphi_1^{\text{as}}(x, 0, \varepsilon)$, и гладкие функции $s^0(x, \varepsilon)$ таковы, что условия согласования выполнены для фиксированного $\varepsilon > 0$. Сделаем эти условия более точными, выявив предельную задачу в этом случае.

Для эволюции решения мы имеем две существенно разные возможности (определяемые по начальным данным)

$$\frac{\partial s_0^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial s_0^{(2)}}{\partial t} < 0, \quad (7.6.10)$$

$$\frac{\partial s_0^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial s_0^{(2)}}{\partial t} > 0. \quad (7.6.11)$$

В случае (7.6.10) границы движутся в противоположных направлениях. Как следствие структура типа цуга волн существует только в течение малого временного интервала, так как области $\Omega_{t,\varepsilon}^{2k}$ или $\Omega_{t,\varepsilon}^{2k+1}$ исчезают при $t \sim \varepsilon^\alpha$. Подобная ситуация для классической задачи Стефана рассмотрена в [53]. Для системы ФП можно доказать, что из (7.6.10) следует выполнение одного из двух условий: либо «перегретая» область, либо «переохлажденная» область появляется в Ω_t^* .

Чтобы определить условия, при которых существует решение задачи «типа цуга волн» на некотором интервале времени, не зависящем от ε , рассмотрим случай (7.6.11), в котором границы движутся в одном направлении. Предположим справедливость следующих предварительных условий.

В. Если $T > 0$, то для любого $0 \leq t \leq T$ существует семейство функций $\theta_i(x, t, h)$, $i = 0, \dots, M+1$, такое, что функция $\tilde{\theta}(x, t, \varepsilon)$ (определяемая по значениям $\tilde{\theta} = \theta_i$ для $x \in \overline{\Omega_{t,\varepsilon}^i}$) является непрерывной и равномерно ограниченной для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Более того, пусть $\theta_i \in C^1(Q_\varepsilon^i)$ равномерно для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $Q_\varepsilon^i = \bigcup_{t \in [0, T]} \overline{\Omega_{t,\varepsilon}^i}$, и пусть $\Gamma_{t,\varepsilon}^i \in C^3$.

Рассмотрим следствие этого предположения. Очевидно, следствием гладкости функций θ_i является $\theta_i|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i-0} - \theta_i|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}+0} = \mathcal{O}(h)$. Это утверждение и закон Гиббса—Томпсона (7.6.8) ведут к соотношению $\mathcal{K}_t^i - V_{\nu_i} + \mathcal{K}_t^{i-1} - V_{\nu_{i-1}} = \mathcal{O}(h)$. Однако в силу наших предположений поверхности $\Gamma_{t,\varepsilon}^i$ — гладкие, и $V_{\nu_{i-1}} V_{\nu_i} > 0$. Отсюда

$$s_0^{(j)}(x, t, h) = s_0(x, t) + h \tilde{s}_0^{(j)}(x, t, h), \quad j = 1, 2, \quad (7.6.12)$$

где функции s_0 , $\tilde{s}_0^{(j)}$ и их производные третьего порядка равномерно ограничены для $h \in [0, h_0]$. Как следствие получаем, что

$$V_{\nu_i} = \mathcal{K}_t^i + \mathcal{O}(h). \quad (7.6.13)$$

На основании (7.6.13) и (7.6.8) получим $\theta_i|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i} = \mathcal{O}(h)$. Тогда из условия В следует, что

$$\tilde{\theta}(x, t, \varepsilon) = h \tilde{\theta}^1, \quad \tilde{\theta}^1 = \mathcal{O}(1), \quad x \in \overline{\Omega_{t,\varepsilon}^*}, \quad t \in [0, T], \quad (7.6.14)$$

где $\tilde{\theta}^1$ определяется по $\tilde{\theta}^1 = \tilde{\theta}_i^1$ для $x \in \overline{\Omega_{t,\varepsilon}^i}$.

К тому же по закону Гиббса—Томпсона

$$\frac{\mathcal{K}_t^i - \mathcal{K}_t^{i-1}}{h} - \frac{V_{\nu_i} - V_{\nu_{i-1}}}{h} = (-1)^i \kappa_1 \left(\tilde{\theta}_i^1|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i-0} + \tilde{\theta}_i^1|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}+0} \right).$$

Так как $\Gamma_{t,\varepsilon}^i \in C^3$ равномерно по h , получим $\tilde{\theta}_i^1 \in C^1(Q_\varepsilon^i)$.

Для дальнейшего анализа необходимо следующее утверждение.

Лемма 7.6.1. а) Пусть ζ_i — точки разбиения интервала $[0, L]$, $\zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_M$, и пусть $h = \max_i(\zeta_i - \zeta_{i-1})$. Предположим, что число M — четное, $F(\zeta) \in C([0, L])$ и $F(\zeta) \in C^1([\zeta_{i-1}, \zeta_i])$ для любого $i = 1, \dots, M$. Тогда

$$\left| \sum_{i=0}^M (-1)^i F(\zeta_i) \right| \leq \text{const}$$

равномерно по $M \geq 2$.

б) Предположим, что $F(\zeta) \in C([0, L])$ и $F(\zeta) \in C^2([\zeta_{i-1}, \zeta_i])$ для любого $i = 1, \dots, M$. Тогда

$$\sum_{i=0}^M (-1)^i F(\zeta_i) = \frac{1}{2} (F(\zeta_0) + F(\zeta_M)) + \mathcal{O}(h)$$

равномерно для четных $M \geq 2$.

Чтобы доказать эту лемму, мы должны сгруппировать члены в $F(\zeta_i) - F(\zeta_{i-1})$ так, чтобы представить их как разность производных.

Теперь рассмотрим интегральное тождество (7.5.1). Обозначая $\mathcal{T}_\varepsilon^i = \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma_{t,\varepsilon}^i$, $i = 0, \dots, M$, и

$\mathcal{T}_\varepsilon^{M+1} \equiv \mathcal{T}^{M+1} = \partial\Omega \times [0, T]$, подставляя (7.6.3) в (7.5.1) и применяя лемму 7.4.1, получим

$$J_\varphi = \sum_{i=0}^M (\langle g, \nabla s_0 \rangle (\mathcal{K}_t^i - V_{\nu_i}) A_{\chi^2}, \delta(\mathcal{T}_\varepsilon^i)) -$$

$$-\sum_{i=0}^M (-1)^i (\langle g, \nabla s_0 \rangle \theta A_{\dot{\chi}}, \delta(\mathcal{T}_\varepsilon^i)) + \mathcal{O}(\varepsilon h^{-1} + h) = 0.$$

Применение утверждения а) леммы 7.6.1 ко второй сумме и использование (7.6.14) и условия В дает следующее:

$$J_\varphi = \sum_{i=0}^M (\langle g, \nabla s_0 \rangle (\mathcal{K}_t^i - V_{\nu_i}) A_{\dot{\chi}^2}, \delta(\mathcal{T}_\varepsilon^i)) + \mathcal{O}(\varepsilon h^{-1} + h) = 0. \quad (7.6.15)$$

Следовательно, мы снова получаем соотношение (7.6.13), так как первая сумма в (7.6.15) имеет порядок $\mathcal{O}(h^{-1})$. Учитывая (7.6.12) и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, мы видим, что (7.6.15) влечет справедливость (7.6.13) в полной области $\Omega_t^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_{t,\varepsilon}^*$. Отсюда получаем соотношение

$$|\nabla s_0|^{-1} \frac{\partial s_0}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla s_0}{|\nabla s_0|} \right), \quad x \in \Omega_t^*, \quad t > 0.$$

Теперь перейдем к рассмотрению интегрального тождества (7.4.2). Во-первых, мы вычисляем слабый предел цуга волн в производной $-\varphi_t$ уравнения теплопроводности.

Лемма 7.6.2. Пусть $\varphi(x, t, \varepsilon) = \varphi_1^{\text{as}}(x, t, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, где φ_1^{as} определяется (7.6.3), и $c_1 h \leq \operatorname{dist}(\mathcal{T}_\varepsilon^i, \mathcal{T}_\varepsilon^{i+1}) \leq c_2 h$, $i = 0, \dots, M-1$, с постоянными c_1 и c_2 , не зависящими от ε . Тогда имеем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \xi \right) = 2 \left(\left\{ \sum_{j=0}^M (-1)^{j+1} V_{\nu_j} \delta(\mathcal{T}_\varepsilon^j) \right\}, \xi \right) + C_1 + \mathcal{O}(\varepsilon h^{-1} + h) \quad (7.6.16)$$

для любой функции $\xi \in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющей (7.4.1). Здесь $C_1 = \mathcal{O}((\tilde{s}_0^{(1)} - \tilde{s}_0^{(2)})|_{h=0})$ является возможным вкладом членов, зависящих от первой поправки к фазе s_0 относительно h .

Положим $F(\zeta_k) = \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^k} V_{\nu_k} d\sigma_k$, тогда можно применить утверждение б) леммы 7.6.1 к (7.6.16) и получить

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \xi \right) = - \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^0} \xi V_{\nu_0} d\sigma_0 - \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^M} \xi V_{\nu_M} d\sigma_M + C_1 + \mathcal{O}(\varepsilon h^{-1} + h). \quad (7.6.17)$$

Напомним, что по условию В семейство $\{\tilde{\theta}(x, t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничено по ε в $L^\infty(0, T; W_2^1(\Omega_t^*))$; следовательно, это семейство *-слабо сходится в $L^\infty(0, T; W_2^1(\Omega_t^*))$ и, в силу (7.6.14), $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$ для $x \in \Omega_t^*$ в смысле $L^2((0, T) \times \Omega_t^*)$ -сходимости. Это влечет $\bar{\theta}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\theta}(x, t, \varepsilon) = 0$ для $x \in \Omega_t^*$.

Очевидно, (7.6.14) не противоречит (7.6.17), если только знак главного члена поправок (зависящих от $\tilde{s}_0^{(j)}$) к скоростям не зависит от j , тогда $C_1 = 0$. С другой стороны, в области Ω_t^* предел уравнения теплопроводности имеет в качестве правой части C_1 . Чтобы проверить это, мы должны доказать, что $\tilde{s}_0^{(1)} = \tilde{s}_0^{(2)} + \mathcal{O}(h)$. Это будет доказано позднее в сферически симметричном случае, так как специальная геометрия необходима для существования рассматриваемой структуры. Теперь продолжим вычисления в интегральном тождестве (7.4.2). Имеем

$$\tilde{I}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \int_Q \{ -\xi_t \theta + \langle \nabla \xi, \nabla \theta \rangle \} dx dt + \int_\Omega \xi(x, 0) \theta^0 dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\tilde{I}_\theta = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_{t,\varepsilon}^0} \xi \left(\frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial t} - \Delta \theta_{(0)} \right) dx + \int_{\Omega_{t,\varepsilon}^{M+1}} \xi \left(\frac{\partial \theta_{(M+1)}}{\partial t} - \Delta \theta_{(M+1)} \right) dx \right\} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^0} \xi \frac{\partial \theta_{(0)}}{\partial \nu_0} d\sigma_0 - \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^M} \xi \frac{\partial \theta_{(M+1)}}{\partial \nu_M} d\sigma_M + \\
& + \sum_{i=1}^M \int_0^T \int_{\Omega_{t,\varepsilon}^i} \theta_{(i)} \left(-\frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta \xi \right) dx dt + \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^i} \theta_{(i)} \frac{\partial \xi}{\partial \nu_i} d\sigma_i - \\
& - \int_{\mathcal{T}_\varepsilon^{i-1}} \theta_{(i)} \frac{\partial \xi}{\partial \nu_{i-1}} d\sigma_{i-1} + \int_{\Omega_{0,\varepsilon}^*} \xi(x, 0) \theta^0 dx,
\end{aligned} \tag{7.6.18}$$

где $\theta_{(i)} = \theta|_{Q_\varepsilon^i}$. В силу (7.6.14) интегралы по $\Omega_{t,\varepsilon}^i$ и $\mathcal{T}_\varepsilon^i$, $i = 1, \dots, M$, стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее напомним, что по определению 7.5.1

$$I_\theta = \tilde{I}_\theta - \int_Q \varphi \xi_t dx dt + \int_\Omega \varphi^0 \xi(x, 0) dx = 0.$$

Тогда, учитывая (7.6.13), (7.6.17) и (7.6.18), предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем желаемый результат

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= \Delta \bar{\theta}, \quad x \in \Omega \setminus \Omega_t^*, \quad t > 0, \\
\bar{\theta} &= 0, \quad x \in \Omega_t^*, \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{7.6.19}$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial t} = |\nabla s_0| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla s_0}{|\nabla s_0|} \right), \quad x \in \Omega_t^*, \quad t > 0, \tag{7.6.20}$$

$$\bar{\theta} \Big|_{\partial \Omega_t^*} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_t^*} = V_n, \quad t \geq 0, \tag{7.6.21}$$

$$\bar{\theta} \Big|_{t=0} = \bar{\theta}^0(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_0^*, \quad s_0 \Big|_{t=0} = s^0(x), \quad x \in \Omega_0^*, \quad \bar{\theta} \Big|_{\partial \Omega} = \theta_b,$$

где $\partial \Omega_t^* = \Gamma_t^- \cup \Gamma_t^+$, $\Gamma_t^- = \{x \in \Omega, s_0(x, t) = 0\}$, $\Gamma_t^+ = \{x \in \Omega, s_0(x, t) = L\}$, n обозначает внешнюю нормаль к Ω_t^* , $V_n = |\nabla s_0|^{-1} \partial s_0 / \partial t|_{\partial \Omega_t^*}$ и $s^0(x) \equiv s^0(x, 0)$.

Задача (7.6.19)–(7.6.21) может быть интерпретирована как две классические однофазные задачи Стефана, объединенные уравнением (7.6.20). Такая интерпретация приводит нас к постановке задачи об области смеси («mushy region») для процессов с поверхностным натяжением (см. [43, 53, 55]). К тому же условия (7.6.20), (7.6.21) и соотношение $\bar{\theta} = 0$ на Ω_t^* являются условиями типа Гюонио, так как они должны быть выполнены для существования рассматриваемого решения.

Сделаем некоторые замечания. Оператор в правой части (7.6.20) является вырожденным в направлении ∇s_0 , т.е. вдоль y_1 , если мы введем новые координаты $y_1 = s_0, y_2, \dots, y_n$, где y_2, \dots, y_n — координаты на поверхности $s_0 = \text{const}$. Это уравнение (7.6.20) — ультрапараболическое. Хорошо известно [46], что однородное ультрапараболическое уравнение не имеет вещественно-аналитических решений по t и y_1 , исключая случай, когда решение не зависит от касательных переменных. Далее, для уравнения теплопроводности (7.6.19) мы должны решить задачу Коши (7.6.21) относительно y_1 с начальными данными на поверхности $\partial \Omega_t^*$. Для достаточно малых y_1 и t эта плохо поставленная задача имеет решение только для вещественно-аналитических поверхностей и начальных данных [17], и в этом случае значения $\bar{\theta}$ на внешней границе и для начального значения времени однозначно определяются значениями на $\partial \Omega_t^*$. Отсюда, видимо, для $n = 3$ решение существует только в сферически симметричном случае со специальными начальными и граничными данными (на внешней границе).

Пусть $n = 3$ и $\Omega = \{x, R_- < r < R_+\}$, где $r = |x|$, $R_- > 0$, и $\Omega_0^* = \{r_-(0) < r < r_+(0)\}$. Тогда (7.6.20) — уравнение первого порядка

$$\frac{\partial s_0}{\partial t} = \frac{2}{r} \frac{\partial s_0}{\partial r}, \quad r \in \Omega_t^* = \{r_-(t) < r < r_+(t)\}, \quad t > 0. \tag{7.6.22}$$

Очевидно, (7.6.22), дополненное начальным условием $s_0|_{t=0} = s^0(r)$, может быть легко решено. А именно, $s_0(r, t) = s^0(r^0)$ вдоль характеристик $r(r^0, t) = \sqrt{(r^0)^2 - 4t}$, $r_-(0) \leq r^0 \leq r_+(0)$ для любой гладкой функции $s^0(r)$ такой, что $s_r^0 > 0$.

Теперь задача (7.6.19), (7.6.21), где $V_n = 2/r|_{\partial\Omega_t^*}$, есть задача Коши (относительно r) в двух областях $Q_1 = \{R_- < r < r_-(t), t > 0\}$ и $Q_2 = \{r_+(t) < r < R_+, t > 0\}$. Чтобы сформулировать условия разрешимости для этой плохо поставленной (некорректной) задачи, напомним хорошо известный факт (например, см. [9, 17]). А именно, для локального существования решения (7.6.19), (7.6.21) достаточно, чтобы кривые $r_{\pm}(t)$ были вещественно аналитическими по t , т.е. $r_-(0) > 0$ и $t < r_-^2(0)/4$. Следовательно, для достаточно малого $\delta_0 > 0$ и $T_0 = T_0(\delta_0)$, в областях $Q_1^* = \{r_-(0) - \delta_0 < r < r_-(t), t < T_0\}$ и $Q_2^* = \{r_+(t) < r < r_+(0) + \delta_0, t < T_0\}$ существует вещественно аналитическое решение $\bar{\theta}$ соответствующей задачи Коши. Таким образом, чтобы предельная задача (7.6.19)–(7.6.21) была решена, мы должны предположить, что следующие условия выполнены.

С. Пусть Ω — сферически симметричный слой в \mathbb{R}^3 . Пусть начальные и граничные данные задачи (7.3.1) — тоже сферически симметричны, и пусть $\Gamma_{0,\varepsilon}^i = \{x \in \Omega, |x| = r_i^0\}$, где $0 < R_- < r_0^0 < r_1^0 < \dots < r_M^0 < R_+$. Пусть $r_{j+1}^0 - r_j^0 = h$ и разности $r_0^0 - R_-$ и $R_+ - r_M^0$ достаточно малы. Также пусть $s^0(r)$ вещественно аналитичны, $\partial s^0/\partial r > 0$; пусть $\bar{\theta}^0(x)$ и θ_b — специальные данные, соответствующие решению задачи Коши для уравнения теплопроводности (7.6.19), (7.6.21).

Теперь вернемся к основной задаче (7.6.5)–(7.6.8), чтобы доказать справедливость предположения В при условии С и того, что C_1 в (7.6.17) равно нулю. Через $\rho_i = \rho_i(t, h)$ обозначим функции, описывающие положение свободных границ $\Gamma_{t,\varepsilon}^i$ во время t , так что $\Gamma_{t,\varepsilon}^i = \{r, r = \rho_i(t, h)\}$. Очевидно, в сферически симметричном случае $\mathcal{K}_t^i = -2/\rho_i$ и в силу (7.6.13) имеем $V_{\nu_i} = -2/\rho_i + \mathcal{O}(h)$, если выбрать противоположные нормальям (w.r.t. $D_{t,\varepsilon}^i$) направления ν_i .

Сделаем замену переменных $\theta_i = w_i/r$. Тогда (7.6.5) примет вид

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}, \quad r \in (\rho_{i-1}(t), \rho_i(t)), \quad t > 0, \quad (7.6.23)$$

и, так как $V_{\nu_i} = -2\rho_i^{-1}(1 + hv_{\nu_i})$, $v_{\nu_i} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_i(\mathcal{K}_t^i - V_{\nu_i})/2h$, то условия (7.6.6), (7.6.7) могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{i-1}}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}-0} - \frac{\partial w_i}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}+0} &= (-1)^i 4(1 + hv_{\nu_{i-1}}), \\ \frac{\partial w_i}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i-0} - \frac{\partial w_{i+1}}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i+0} &= (-1)^{i+1} 4(1 + hv_{\nu_i}), \end{aligned} \quad (7.6.24)$$

$$w_{i-1} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}-0} = w_i \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^{i-1}+0}, \quad w_i \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i-0} = w_{i+1} \Big|_{\Gamma_{t,\varepsilon}^i+0}.$$

Теперь нам необходимо показать, что задача (7.6.23), (7.6.24) имеет решение, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) $w_i = \mathcal{O}(h)$ равномерно по i ;
- 2) для любого t значения $\{\hat{w}_i = (-1)^i w_i|_{r=\rho_i}\}$ с точностью $\mathcal{O}(h^2)$ определяются значениями некоторой функции $\hat{w} \in C^1[\rho_0, \rho_M]$ на решетке $\{\rho_0, \dots, \rho_M\}$.

Заметим, что первое свойство относится к условию (7.6.8) и соотношению (7.6.13).

Решение w_i задачи (7.6.23), (7.6.24) будем искать в виде

$$w_i = a_i(r - \rho_{i-1}) + b_i(t) + u_i(t, r, h), \quad (7.6.25)$$

где первые два члена соответствуют условиям Стефана (7.6.24) и u_i — решение связанной цепочки задач:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} = a_i \dot{\rho}_{i-1} - \dot{b}_i, \quad i = 1, \dots, M, \quad (7.6.26)$$

$$(u_j - u_{j+1}) \Big|_{r=\rho_j} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{\partial u_{j+1}}{\partial r} \right) \Big|_{r=\rho_j} = 0, \quad j = 0, \dots, M.$$

Заметим, что эта цепочка задач аналогична цепочке, рассмотренной в [51]. Отличие в том, что правые части в (7.6.26)

$$f_i = a_i \dot{\rho}_{i-1} - \dot{b}_i$$

зависят от t , но, очевидно, вклад в решение цепочки в силу этой зависимости будет порядка $\mathcal{O}(h^2)$.

Чтобы решить (7.6.26), мы сначала вычислим коэффициенты a_i и b_i . Из (7.6.24) и (7.6.26) получаем

$$a_i = 2(-1)^{i+1}(1 + hv_{\nu_i}), \quad b_1 = 0,$$

$$b_j = 2 \sum_{k=2}^j (-1)^k [(1 + hv_{\nu_{k-1}})\rho_{k-1} - (1 + hv_{\nu_{k-2}})\rho_{k-2}], \quad j = 2, \dots, M.$$

Пусть *априори* имеем

$$\tilde{s}_0^{(j)}(x, t, h) = s_1(x, t) + \mathcal{O}(h), \quad j = 1, 2, \quad (7.6.27)$$

где функции $\tilde{s}_0^{(j)}$ определены в (7.6.12). Это предположение может привести к противоречию в уравнении для поправки к скорости (линеаризованное уравнение Гиббса—Томпсона для функций $\tilde{s}_0^{(j)}$), если функции ω_i , вычисленные в силу этого предположения, не удовлетворяют выше поставленным условиям 1) и 2). Однако, как мы покажем ниже, противоречия здесь нет.

Через $R(z, t, h)$ обозначим решение неявного уравнения

$$s_0(R, t) + hs_1(R, t) = z.$$

Тогда, по построению, $\rho_i = R(ih, t, h)$, и равномерно по i до порядка $\mathcal{O}(h)$ функции v_{ν_i} являются следами некоторой C^1 -функции v на поверхностях $r = \rho_i$. Заметим, что $\partial R / \partial z > 0$.

Также имеем

$$b_j = 2h \sum_{k=2}^j (-1)^k \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=h(k-2)} + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h).$$

В силу леммы 7.6.1 последняя оценка равномерна по j . Далее имеем

$$b_{j+2} - b_j = 2(-1)^{j+1}(\rho_{j+1} - 2\rho_j + \rho_{j-1}) + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2), \quad (7.6.28)$$

и эта оценка также равномерна по j . Теперь видим, что

$$b_{j+1} - b_j = 2(-1)^{j+1} \left(h \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + h^2 \frac{\partial}{\partial z} (Rv) \right) \Big|_{z=(j-1)h} + \mathcal{O}(h^3). \quad (7.6.29)$$

К тому же из (7.6.28) в силу леммы 7.6.1 получим

$$b_{j+2l} - b_j = \mathcal{O}(h^2),$$

где оценка $\mathcal{O}(h^2)$ равномерна по j и l . В частности, эта оценка, равенство (7.6.29) и условие $b_1 = 0$ влекут, что

$$b_{2l} = 2h \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=(2l-1)h} + \mathcal{O}(h^2), \quad b_{2l+1} = \mathcal{O}(h^2).$$

Рассмотрим ломаную \mathcal{L} , чьи линейные части определяются уравнениями $a_i(r - \rho_{i-1}) + b_i$ на сегментах $[\rho_{i-1}, \rho_i]$. Очевидно, b_i являются значениями \mathcal{L} в точках $r = \rho_{i-1}$. Следовательно, ломаная \mathcal{L} несимметрична относительно нулевой линии (она направлена в область положительных значений). Однако ломаная может быть центрирована за счет уменьшения ее значений

$h \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=h(i-1)}$ на каждом сегменте $[\rho_{i-1}, \rho_i]$. Очевидно, это эквивалентно существованию функции $m = h \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=z(r,t,h)}$ из \mathcal{L} . Здесь $z = z(r, t, h)$ удовлетворяет уравнению $R(z, t, h) = r$.

Напишем $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - m$ и $U_i = u_i + m$. Тогда для U_i имеем задачи вида (7.6.26) с правыми частями f_i , замененными на G_i :

$$G_i = a_i \dot{\rho}_{i-1} - \dot{b}_i + \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\partial^2 m}{\partial r^2}, \quad r \in (\rho_{i-1}, \rho_i).$$

Чтобы построить асимптотическое разложение U_i , решим цепочку задач. А именно, будем искать решение в виде

$$U_i = c_i(r - \rho_{i-1})(\rho_i - r) + c_{i1}(r - \rho_{i-1})^2(\rho_i - r) + c_{i2}(r - \rho_{i-1})(\rho_i - r)^2 + \dots,$$

где точками обозначены полиномы высшего порядка. Заметим, что полиномы порядка выше, чем 2, допускают оценку $O(h^3)$, и коэффициенты c_i определяются соотношениями

$$c_i = 2(-1)^{i+1} \dot{\rho}_{i-1} + O(h), \quad i = 1, \dots, M.$$

Вклад в решение U_i слагаемых порядка $O(h)$ в правой части G_i имеет порядок $O(h^3)$. Следовательно, $U_i = \hat{U}_i + O(h^3)$, и функция $\hat{U}_i = c_i(r - \rho_{i-1})(\rho_i - r)$ определяется последовательностью симметричных относительно нулей парабол порядка $\text{mod}O(h^3)$, так как $a_i \dot{\rho}_{i-1} + a_{i+1} \dot{\rho}_i = O(h)$. Отсюда получаем, что $\hat{U}_i = O(h^2)$ для $r \in (\rho_{i-1}, \rho_i)$ и значения ломаной \mathcal{L}_1 в точках ρ_j определяются соотношением

$$\mathcal{L}_1 \Big|_{r=\rho_j} = (-1)^j h \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=(j-1)h} + O(h^2), \quad j = 1, \dots, M. \quad (7.6.30)$$

Таким образом, задача (7.6.23), (7.6.24) имеет решение со свойствами 1) и 2).

Осталось построить θ в областях $R_- \leq r \leq \rho_0(t)$ и $\rho_M(t) \leq r \leq R_+$. Заметим, что при построении ломаной \mathcal{L}_1 мы определили $\text{mod}O(h)$ значения θ и $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ в точках $r = \rho_0(t)$ и $r = \rho_M(t)$. По аналогии с (7.6.19)–(7.6.21) это завершает построение θ , и нам снова необходимо решить задачу Коши относительно r для уравнения теплопроводности. Тем не менее в силу условия С условие аналитичности, т.е. необходимое условие разрешимости, уже выполнено.

Таким образом, как следует из (7.6.30), с точностью $O(h^2)$ функции $\hat{\theta}_i(t) = (-1)^i \theta \Big|_{r=\rho_i}$ являются следами на поверхностях $\Gamma_{t,\varepsilon}^i$ некоторой C^1 -функции $\hat{\theta}(x, t, h) = O(h)$. Этот факт позволяет вычислить первую поправку для фазы $s_0(r, t)$. Действительно, подставляя разложение (7.6.12) в (7.6.8), получим линеаризованные условия Гиббса—Томпсона

$$\left(\frac{\partial \tilde{s}_0^{(n_i)}}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{s}_0^{(n_i)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=\rho_i} = (-1)^i \theta_i \frac{\kappa_1}{h} \frac{\partial s_0}{\partial r} \Big|_{r=\rho_i} + O(h). \quad (7.6.31)$$

Наш анализ показал, что с точностью $O(h)$ правая часть (7.6.31) является следом C^1 -функции. Этот факт, соотношение (7.6.30) и условия $\tilde{s}_0^{(1)} \Big|_{t=0} = \tilde{s}_0^{(2)} \Big|_{t=0} = 0$ влекут

$$\left(\frac{\partial s_1}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial s_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=\rho_i} = \frac{\kappa_1}{r} \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=(i-1)h} \frac{\partial s_0}{\partial r} \Big|_{r=\rho_i} + O(h). \quad (7.6.32)$$

Теперь можем написать $\rho_i(t, h) = r_i(t) + h \tilde{r}_i(t, h)$ так что $\tilde{r}_i(t, h)/r_i(t) = O(1)$ равномерно по $i = 0, \dots, M$. Принимая во внимание уравнение (7.6.22), получим $r_i = \sqrt{g^2(ih) - 4t}$, где $g(z)$ — обратная к s^0 функция, т.е. $s^0(g(z)) = z$. Таким образом, пренебрегая членами порядка $O(h)$, можно преобразовать (7.6.32) в следующее

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = \frac{2}{r} \frac{\partial s_1}{\partial r} + \frac{\kappa_1}{r}, \quad s_1 \Big|_{t=0} = 0.$$

Поскольку мы не пришли к противоречию, наше предположение о функции $s_1(r, t)$ выполнено. Сразу заметим, что в силу (7.6.27) значение C_1 в (7.6.16), (7.6.17) равно нулю, и, следовательно, уравнение теплопроводности в Ω_t^* не имеет правой части. Таким образом, условие В выполнено при справедливости условия С. Это позволяет получить (7.6.19)–(7.6.21) как предел цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона в смысле определения 7.5.1.

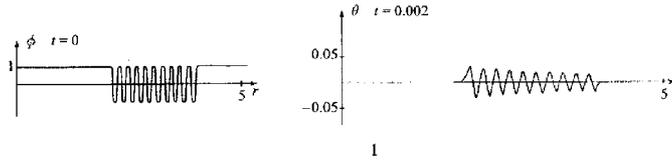


Рис. 1

Суммируя предыдущие рассуждения, мы можем сформулировать условия на начальные данные. А именно, пусть условия А и С справедливы, и пусть $\varphi|_{t=0}$ вида (7.6.9), где $s^0(x, \varepsilon) = s^0(r)$. Пусть также $\theta|_{t=0}$ в областях $\Omega_{0,\varepsilon}^i = \{r_{i-1}^0 < r < r_i^0\}$, $i = 1, \dots, M$, определена соотношениями

$$\theta_{(i)}|_{t=0} = (-1)^{i+1} \frac{2}{r} \left(-\frac{h}{2(s^0)'_r} + (r - r_{i-1}^0) + \mathcal{O}(h^2) \right).$$

В областях $R_- < r < r_0^0$ и $r_M^0 < r < R_+$ положим $\theta|_{t=0} = \Xi|_{t=0}$, где Ξ — решение специальной задачи Коши (относительно r) для уравнения теплопроводности (7.6.19).

Теорема 7.6.1. *При предположениях, сформулированных выше, асимптотическое решение системы ФП, удовлетворяющее условию В, существует, и в системе (7.3.1) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле определения 7.5.1. Решение предельной задачи (7.6.19)–(7.6.21) существует по крайней мере для достаточно малых (но ε -независимых) значений времени.*

Рассмотренный случай определяется тем, что вне стратифицированного слоя $r_0 \leq r \leq r_M$ функция порядка первоначальной задачи принимает разные значения: $\varphi \sim -1$ для $r < r_0$ и $\varphi \sim 1$ для $r > r_M$. Очевидно, все аргументы, которые были использованы в этом случае, применимы и тогда, когда φ принимает те же значения: $\varphi \sim -1$ или $\varphi \sim 1$ для $r \notin [r_0, r_M]$. Это предполагает, что число M — нечетное. Тогда нетрудно заметить, что мы снова получим предельную задачу вида (7.6.19)–(7.6.21). Этот предельный переход можно обосновать подобно рассмотренному выше, решая цепочку задач (7.6.5)–(7.6.8), которые можно свести к цепочке задач (7.6.26). В обоих случаях (M — четно или нечетно) задачи некорректны. Однако, как отмечалось в [24], авторы были удивлены, увидев, что именно описанные выше структуры типа цуга волн появляются как решения

системы ФП для начальных данных вида: $\theta^0 = 0$ при $R_- \leq r \leq R_+$ и $\varphi^0 = 1 + \sum_{j=0}^M (-1)^j \text{th} \left(\frac{r - r_j^0}{\varepsilon} \right)$

для нечетного M и $\varphi^0 = \sum_{j=0}^M (-1)^j \text{th} \left(\frac{r - r_j^0}{\varepsilon} \right)$ для M четного при компьютерном эксперименте.

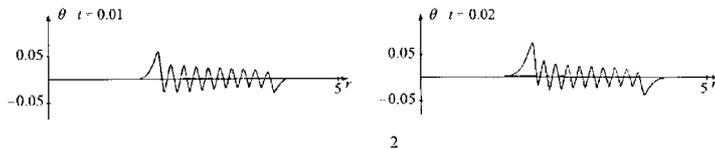


Рис. 2

Рисунки показывают графики решения системы ФП со сферически симметричными начальными данными при $M = 19$ и $\varepsilon = 10^{-2}$ в различные значения времени. Можно видеть, что температура в области смеси имеет пило-зубчатую форму. Как раз такая функция является главной частью асимптотического разложения (7.6.25) решения цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона (7.6.5)–(7.6.8). В численном счете, проведенном О. Васильевой (МГУ), температура $\theta = 0$ на внешних границах. Это приводит к эффекту, показанному на рисунках для $t = 0.02$: пило-зубчатая структура начинает разрушаться под влиянием этих неспециальных граничных данных. Однако функция порядка более устойчива и сохраняет форму.

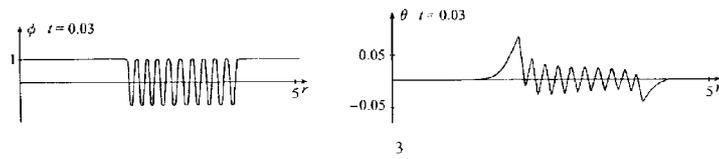


Рис. 3

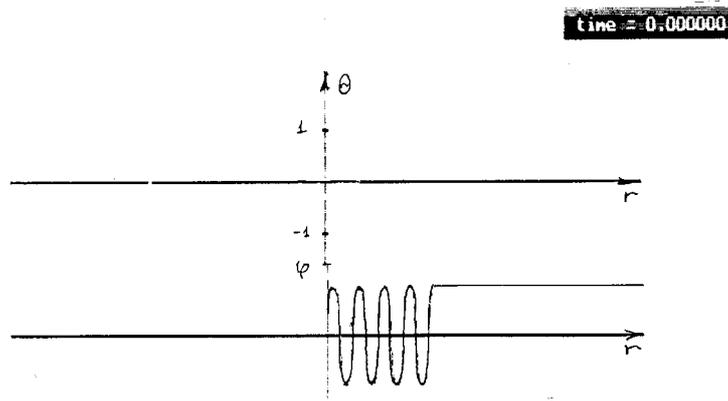


Рис. 4

7.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы установили, что стандартное определение слабого решения для нелинейных задач может быть некорректным. На примере системы ФП показано, что в пределе можно не получить закон Гиббса—Томпсона о движении фронта фазового перехода даже в обычной жестко фронтовой ситуации, описывающей динамическое равновесие фаз. Эту ситуацию можно скорректировать введением допустимого (корректного) определения слабого решения. Особенно необходимо иметь корректное, хорошо поставленное определение слабого решения в нелинейных задачах, которые, вообще говоря, не имеют классического решения. Примером такой задачи может быть область промежуточного агрегатного состояния (mushy region) в интерпретации цуга волн. Мы установили, что решение типа цуга волн может существовать только для специальной геометрии граничных данных и специальных начальных данных. Эти ограничения гарантируют существование асимптотического решения цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона для достаточно малых (но ε -независимых) значений времени. Это позволило перейти к пределу в слабой постановке цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона (в смысле определения 7.5.1) и получить предельную задачу (7.6.19)–(7.6.21). Заметим, что в рассмотренных примерах мы установили, что температура $\theta(x, t, \varepsilon)$ мала ($\theta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) и имеет специальную «периодическую» структуру в стратифицированной области ПАС (промежуточного агрегатного состояния). В случае радиальной симметрии ($n = 2$) техника, развитая в этой главе, приводит к двумерной предельной задаче (7.6.19)–(7.6.21). Тогда, если параметры $\ell \sim K$ достаточно большие в первоначальной модели системы ФП, получаем уравнение теплопроводности в (7.3.1) с $\partial\theta/\partial t$, замененной на $\delta\partial\theta/\partial t$, где $\delta \ll 1$ — малый параметр. Повторяя построения в этом случае, мы получим уравнение теплопроводности (7.6.19) с членом $\delta\partial\bar{\theta}/\partial t$ в правой части. Тогда при $\delta \rightarrow 0$ уравнение (7.6.19) перейдет в уравнение Лапласа.

В этом случае предельная задача (7.6.19)–(7.6.21) описывает соответственно два специальных течения Хил-Шоу (задача Лейбензона), разделенные областью стагнации (т.е. областью ПАС). Тогда нормальная скорость фронта $V_n(t)$ внутреннего течения удовлетворяет уравнению $\dot{V}_n = V_n^{-1}$ на внешней границе. Можно получить более общее уравнение для $V_n(t)$, умножив оператор Лапласа в уравнении для функции порядка на положительную вещественно аналитическую

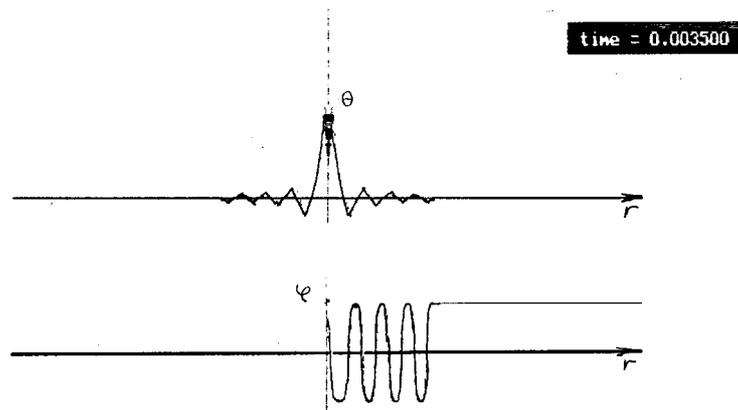


Рис. 5

функцию. Таким образом, система (7.3.1), формально модифицированная указанным приемом, является регуляризацией некоторого класса задач, описывающих течение Хил-Шоу. Это позволяет трактовать регуляризацию как задачу Кочкиной—Лейбензона.

Приведем еще один интереснейший пример численного счета (проведенный также О. Васильевой (МГУ)), так называемого решения типа пульсара, радиально симметричного, когда областью стратификации является шар с центром в начале координат. Тогда значение функции порядка в центре пульсара во времени имеет периодическую структуру. Мы приведем график для температуры и функции порядка для $t = 0$ (начальные условия), $t = 0.0035$ и 0.0137 . Температура $\theta = 0$, $\varphi = 1$ на внешней границе шара.

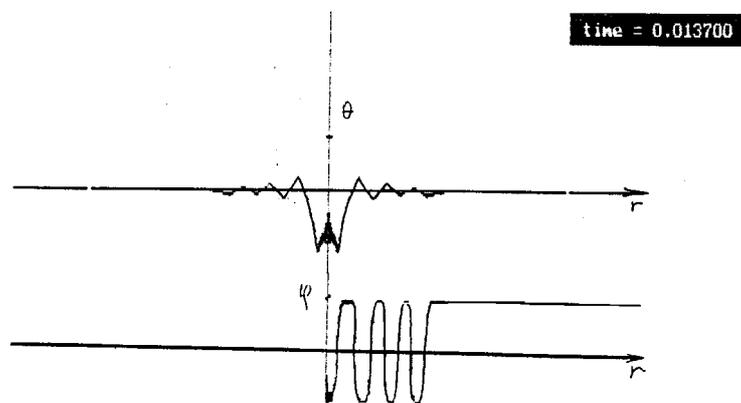


Рис. 6

Рисунки показывают графики решения системы ФП со сферически симметричными начальными данными при $M = 7$ и $\varepsilon = 10^{-2}$ в различные значения времени. Можно видеть, что температура в области ПАС имеет пило-зубчатую форму, в центре она периодична с амплитудой $l = 1$, что дает структуру пульсара. Как раз такая функция является главной частью асимптотического разложения (7.6.25) решения цепочки задач Стефана—Гиббса—Томпсона (7.6.5)–(7.6.8) в этом случае. Пило-зубчатая структура съезжает к центру и начинает разрушаться под влиянием неспециальных граничных данных. Функция порядка более устойчива и сохраняет форму и в этом случае.

Автор благодарен В. Г. Данилову, W. Dreyer и Л. Р. Волевичу за полезные дискуссии и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева О. А., Радкевич Е. В., Хиллхорст Д. Классическая задача Веригина—Маскета, проблема регуляризации и внутренние слои// Тр. Моск. мат. об-ва. — 61. — С. 25–74.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Успехи мат. н. — 1957ю — 12, № 5. — С. 3–120.
3. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
4. Волевич Л. Р., Джавадов М. Г. Равномерные оценки решений гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных// Дифференц. уравн. — 1983. — 19, № 12. — С. 2082–2090.
5. Волевич Л. Р., Радкевич Е. В. Равномерные оценки решений Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных// Дифференц. уравн. — 2003. — 39, № 3. — С. 1–14.
6. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Распределения и операции с ними 1. — М.: Физматлит, 1959.
7. Годунов С. Г. Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1978.
8. Данилов В. Г., Омелянов Г. А., Радкевич Е. В. Асимптотическое решение системы фазового поля и модифицированная задача Стефана// Дифференц. уравн. — 1995. — 31, № 3. — С. 483–491.
9. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. — М.: Наука, 1984.
10. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
11. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
12. Лоренц Г.А. Лекции по термодинамике. — М.: НИЦ, 2001.
13. Маслов В. П. Распространение ударных волн в изэнтропическом невязком газе// Итоги науки и техн. Сер. соврем. пробл. мат./ ВИНТИ. — 1976. — 8. — С. 199–271.
14. Маслов В. П., Омелянов Г. А. Условия типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн// Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 5. — С. 172–182.
15. Маслов В. П., Омелянов Г. А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией// Успехи мат. н. — 1981. — 36, № 3. — С. 73–149.
16. Маслов В. П., Цупин В. А. Необходимые условия существования бесконечно тонких солитонов в газовой динамике// Докл. АН СССР. — 1979. — 246, № 9.
17. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Об аналитичности решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными// Мат. сб. — 1973. — 90, № 4. — С. 592–607.
18. Петровский И. Т. О проблеме Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. — М.: Наука, 1986.
19. Плотников П. И. Сингулярные пределы решений уравнения Кана—Хилларда// Сиб. мат. ж. — 1997. — 38, № 3. — С. 329–348.
20. Плотников П. И., Старовойтов В. Н. Задача Стефана как предел системы фазового поля// Дифференц. уравн. — 1993. — 29, № 3. — С. 461–471.
21. Постников М. М. Устойчивые полиномы. — М.: Наука, 1981
22. Радкевич Е. В. Условия существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса—Томпсона)// Мат. сб. — 1992. — 183, № 2. — С. 77–101.
23. Радкевич Е. В. Об асимптотическом решении системы фазового поля// Дифференц. уравн. — 1993. — 29, № 3. — С. 487–500.
24. Радкевич Е. В. Корректность математических моделей механики сплошных сред и термодинамика// Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры/ ВИНТИ (в печати).
25. Румер Ю., Рывкин М. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977. — 532 с.
26. Толедано Ж. К., Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов. — М.: Мир, 1994.
27. Узем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
28. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
29. Alikakos N., Bates P. On the singular limit in a phase field model of a phase transition// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 1988. — 5. — С. 1–38.
30. Alt H. W., Pawlow I. Existence of solutions for non-isothermal phase separation// Adv. Math. Sci. and Appl. — 1992. — 1, № 2. — С. 319–409.
31. Babich V. M., Klimova A. A. Hyperbolic equation with large parameter at lower terms, and the hierarchy of waves// St. Petersburg Math. J. — 1995. — 6, № 5. — С. 1001–1038.

32. *Bailly J.* Local existence of classical solutions to first-order parabolic equations describing free boundaries// University de Paris-Sud Mathematiques Batiment 425 91405 Orsay, France, 1996.
33. *Caginalp G.* Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations// *Phys. Rev. A.* — 1989. — 39. — C. 5887–5896.
34. *Caginalp G.* Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations// *Phys. Rev. A.* — 1990. — 39. — C. 101–111.
35. *Caginalp G., Chen X.* Convergence of the phase field model to its sharp interface limits// *Eur. J. Appl. Math.* — 2000. — 12. — C. 20–42.
36. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a nonuniform system/ Part I: Interfacial free energy// *J. Chemical Physics.* — 1958. — 28, № 1. — C. 258–267.
37. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid// *J. Chem. Phys.* — 1959. — 31, № 3. — C. 688–699.
38. *Chandrasekhar S.* Stochastic problem in physics and astronomy// *Rev. Modern. Phys.* — 1943. — 15. — C. 2–87.
39. *Chapman S. C., Cowling T. C.* The mathematical theory of non-uniform gases. — Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
40. *Chen G. Q.* Quasidecoupling method for discontinuous solutions to conservation law// *Commun. Pure and Appl. Math.* — 1993. — 46. — C. 755–781.
41. *Chen G. Q., Levermore C. D., Lui T. P.* Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy// *Commun. Pure and Appl. Math.* — 1994. — 47. — C. 787–830.
42. *Chen G. Q., Lu Y. G.* A study on application of the theory of compensated compactness// *Chinese Sci. Bull.* — 1989. — 34. — C. 15–19.
43. *Crowley A. R., Ockendon J. R.* Modeling mushy regions// *Appl. Sci. Res.* — 1987. — 44. — C. 1–7.
44. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// *Eur. J. Appl. Math.* — 1999. — 10. — C. 55–77.
45. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Asymptotic solution of the conserved phase field system in the fast relaxation case// *Eur. J. Appl. Math.* — 1998. — 9. — C. 1–21.
46. *DiPerna R.* Convergence of approximate solution to conservation laws// *Arch. Ration. Mech. and Anal.* — 1983. — 82. — C. 27–70.
47. *Dreyer W., Junk M., Kunik M.* On the approximation of the Fokker–Planck equation by moments system// *Nonlinearity.* — 2001. — 14. — C. 881–906.
48. *Dreyer W., Müller W. H.* A study of the coarsening in tin/lead solders// *Int. J. Solids and Struct.* — 2000. — 37. — C. 3841–3871.
49. *Elliott C. M., Ockendon J. R.* Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems. — Boston: Pitman, 1982.
50. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases// *Commun. Pure and Appl. Math.* — 1949. — 2.
51. *Hermite Ch.* Oeuvres I. — Paris, 1905. — C. 397–414.
52. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. Mathematics and Applications. — Springer-Verlag, 1997.
53. *Howison S. D., Lacey A. A., Ockendon J. R.* Hele–Shaw free-boundary problems with suction// *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* — 1988. — 41. — C. 183–193.
54. *Junk M.* Domain of definition of Levermore's five-moment system// *J. Statist. Phys.* — 1998. — 93. — C. 1143–1167.
55. *Lacey A. A., Taylor A. B.* A mushy region in a Stefan problem// *IMA J. Appl. Math.* — 1983. — 30. — C. 303–314.
56. *Lax P.* Hyperbolic System of Conservation Laws II// *Commun. Pure and Appl. Math.* — 1957. — 10. — C. 537–566.
57. *Levermore C. D.* Moment closure hierarchies for kinetic theories// *J. Statist. Phys.* — 1996. — 83. — C. 1021–1065.
58. *Luckhaus S.* Solutions of the two-phase Stefan problem with the Gibbs–Thomson law for the melting temperature// *Eur. J. Appl. Math.* — 1990. — 1. — C. 101–111.
59. *Luckhaus S., Modica L.* The Gibbs–Thomson relation within the gradient theory of phase transitions// *Arch. Ration. Mech. and Anal.* — 1989. — 107. — C. 71–83.
60. *Meirmanov A. M.* An example of nonexistence of a classical solution of the Stefan problem// *Soviet Math. Dokl.* — 1981. — 23. — C. 564–566.
61. *Modica L.* The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion// *Arch. Ration. Mech. and Anal.* — 1986. — 98. — C. 123–142.

62. Müller I., Ruggeri T. Extended Thermodynamics. — Springer-Verlag, 1993.
63. Murat F. L'injection du cone positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$ est compacte pour tout $q < 2$ // J. Math. Pures et Appl. — 1981. — 60. — С. 309–322.
64. Primisario M. Mushy region in phase-change problem, In: Applied Nonlinear Functional Analysis (K. H. Hoffmann, R. Gorenflo, Eds.). — Frankfurt/Main: P. Lang Verlag, 1982.
65. Radkevich E., Wilanski K. A Riemann problem for poroelastic materials with the balance equation for porosity. — Berlin: Weierstrass Institute. — 2000. — 593. — 20 с.
66. Soner H. M. Convergence of the phase field equations to the Mullins–Sekerka problem with kinetic undercooling// Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1995. — 131. — С. 139–197.
67. Struchtrup H., Weiss W. Temperature jump and velocity slip in the moment method// Contin. Mech. and Thermodyn. — 2000. — 12. — С. 1–18.
68. Treves F. Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, Vol. 1, The university Series in Mathematics. — New York and London: Plenum Press, 1982.

Е. В. Радкевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: radk@mech.math.msu.su

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА, ПРОБЛЕМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ВНУТРЕННИЕ СЛОИ

© 2003 г. **О. А. ВАСИЛЬЕВА**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение		146
2. Априорная оценка типа Фридрихса		147
3. Лемма Х. Чена		149
Список литературы		158

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья посвящена проблеме обоснования асимптотического решения системы фазового поля [7], т.е. построению специального ее решения:

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial}{\partial t}(\theta + \varphi) = \Delta \theta, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi(1 - \varphi^2) + \varepsilon \kappa_1 \theta, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(\theta - \theta_{as})|_{t=0} = w^0, \quad (\varphi - \varphi_{as})|_{t=0} = \omega^0, \quad (1.2)$$

$$(\theta - \theta_{as})|_{\Sigma} = 0, \quad (\varphi - \varphi_{as})|_{\Sigma} = 0, \quad (1.3)$$

Здесь $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $t \in [0, T]$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T]$, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $\kappa > 0$, $\kappa_1 > 0$ — некоторые константы, $g \in C^\infty(\Sigma)$ — заданная функция, $\sigma = 1$ (либо $\sigma = -1$), $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к $\partial\Omega$. Будем предполагать, что при $t = 0$ задана гладкая, замкнутая неособая поверхность Γ_0 размерности $m-1$, лежащая в Ω , и $\Gamma_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$. Обозначим через Ω_0^- подобласть Ω , ограниченную поверхностью Γ_0 , и $\Omega_0^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega_0^-}$.

Для ненулевой скорости фронта фазового перехода $V_\nu \neq 0$ в [2, 4] показано, что в жесткофронтном случае стабилизирующееся асимптотическое решение имеет следующую структуру

$$\theta_0^{as} = \frac{1}{2}(\theta_c^+(x, t) + \theta_c^-(x, t)) + \frac{1}{2}(\theta_c^+(x, t) - \theta_c^-(x, t))\chi(\eta), \quad (1.4)$$

$$\varphi_1^{as} = \chi(\eta) + \varepsilon \left\{ \frac{\kappa}{2} \theta_0^{as} + \omega(\eta, x) \right\}, \quad \eta = s(x, t, \varepsilon)/\varepsilon, \quad \chi(\eta) = \text{th}(\eta/\sqrt{2}).$$

Здесь θ_0^{as} — главная часть асимптотического разложения, θ^{as} для температуры и φ_1^{as} обозначает главную часть асимптотического разложения φ^{as} функции порядка, $s(x, t, \varepsilon) = s_0(x, t) + \varepsilon s_1(x)$ — функция расстояния между свободной границей (фронтом фазового перехода) Γ_t и точкой $x \in \Omega$ за время t . Для простоты, можно считать, что функция s_0 имеет представление $s_0 = (t + \psi(x))/|\nabla\psi|$. Здесь $\psi(x)$ и функции θ^\pm определяются решением сингулярно предельной задачи для (1.1)–(1.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta^\pm = \Delta \theta^\pm, \quad (x, t) \in \Omega_t^\pm, \quad (1.5)$$

$$\theta^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^0(x), \quad x \in \Omega_\pm^0, \quad (1.6)$$

$$\theta^+|_{\Gamma_t^+} = \theta^-|_{\Gamma_t^-}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial \nu_t} \Big|_{\Gamma_t^+} - \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu_t} \Big|_{\Gamma_t^-} = 2\mathcal{D}_\nu \quad (1.8)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \theta^+}{\partial n} + k_2 \theta^+ \Big|_\Sigma = g(x, t) \Big|_\Sigma, \quad (1.9)$$

$$|\nabla \psi| \div \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \right) + \kappa - \kappa_2 |\nabla \psi| \check{\theta}(x, \psi) = 0, \quad \psi|_{\Gamma_0} = 0, \quad (1.10)$$

где Γ_t — поверхность, задаваемая уравнением $t = \psi(x)$, $f^\pm|_{\Gamma_t^\pm}$ — предел f^\pm при $x \rightarrow x_t \pm 0$, $x_t \in \Gamma_t$, $\check{\theta}(x, \psi) = \theta^+|_{\Gamma_t} = \theta^-|_{\Gamma_t}$, $\theta_\pm^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta^0(x, \varepsilon)$, $x \in \Omega_0^\pm$, $\kappa_2 = 3\kappa_1/\sqrt{2}$, $\partial/\partial \nu_t = \langle \nabla \psi / |\nabla \psi|, \nabla \rangle$ — производная по нормали к Γ_t , $\mathcal{D}_\nu = -1/|\nabla \psi|$ — скорость движения Γ_t в направлении нормали $\nabla \psi / |\nabla \psi|$. Функции θ_c^\pm — гладкие продолжения функций θ^\pm в область $\Omega \times (0, T)$.

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТИПА ФРИДРИХСА

В [5] при тестировании допустимых определений слабого решения (1.1)–(1.3), для которых возможен слабый переход по малому параметру, существенно использовалась возможность выбора тестовыми функциями специальных решений (1.1)–(1.3), связанных с обоснованием асимптотического решения. Следуя методике, предложенной в [1], можно получить обоснование асимптотического разложения [10], доказав следующее утверждение. Если

$$\|(\theta - \theta^{\text{as}})|_{t=0}; L^2(\Omega)\| + \|(\varphi - \varphi^{\text{as}})|_{t=0}; L^2(\Omega)\| \leq c\varepsilon^{3/2},$$

то для достаточно малого ε существует специальное решение задачи (1.1)–(1.3) с начальными данными θ^0, φ^0 , для которого справедлива оценка

$$\|\varphi - \varphi^{\text{as}}; C(0, T; L^2(\Omega))\| + \|\theta - \theta^{\text{as}}; L^2(Q)\| \leq c_1 \varepsilon^{3/2} \quad (2.1)$$

с постоянными c, c_1 , не зависящими от ε . Оценка (2.1) позволяет применить метод тестирования [9] для определения допустимого слабого решения задачи (1.1)–(1.3). Специальное решение нашей задачи ищется в виде

$$\theta = \theta_{\text{as}, M} + w, \quad \varphi = \varphi_{\text{as}, M} + \omega,$$

так что

$$\varepsilon \partial_t \omega = \varepsilon^2 \Delta \omega - 2\omega + 3(1 - \varphi_{\text{as}, M}^2)\omega - 3\varphi_{\text{as}, M}\omega^2 - \omega^3 + \varepsilon \kappa \omega + \mathcal{F}_\varphi \quad \text{в } Q \quad (2.2)$$

и

$$\partial_t(w + \omega) = \Delta w + \mathcal{F}_w \quad \text{в } Q,$$

где в силу свойств асимптотического решения

$$\mathcal{F}_\varphi = O(\varepsilon^M), \quad \mathcal{F}_w = O(\varepsilon^{M-1}) \quad \text{в } Q.$$

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением условия Дирихле, в силу которого имеем:

$$\omega|_\Sigma = w|_\Sigma = 0, \quad \omega|_{t=0} = \omega^0, \quad w|_{t=0} = w^0.$$

Методом Галеркина получаем слабое решение задачи (1.1)–(1.3). Обозначим через $y_j = y_j(x)$ собственные функции оператора Лапласа в Ω :

$$\Delta y_j \Big|_{\partial \Omega} = -\lambda_j y_j \Big|_{\partial \Omega}.$$

Фиксируем число $m \geq 1$ и рассмотрим приближенное решение нашей задачи в форме

$$\omega_m = \sum_{j=1}^m \omega_{j,m}(t) y_j, \quad w_m = \sum_{j=1}^m w_{j,m}(t) y_j,$$

Функции $\omega_{j,m}$, $w_{j,m}$ определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}((w_m, y_j) + (\omega_m, y_j)) + \lambda_j(w_m, y_j) &= (\mathcal{F}_u, y_j), \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\omega_m, y_j) + \varepsilon^2 \lambda_j(\omega_{mx}, y_{jx}) &= -2(\omega_m, y_j) + 3((1 - \varphi_{as,M}^2)\omega_m \\ - 3\varphi_{as,M}\omega_m^2 - \omega_m^3, y_j) + (\mathcal{F}_\varphi, y_j) + \varepsilon \kappa(w_m, y_j) + (\mathcal{F}_\varphi, y_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Дополним систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} \omega_m|_{\tau=0} = \omega_m^0, \quad \omega_m^0 &= \sum_{j=1}^m \omega_{j,m}(0) y_j \rightarrow \omega^0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad \text{в } L_2(\Omega), \\ w_m|_{\tau=0} = w_m^0, \quad w_m^0 &= \sum_{j=1}^m w_{j,m}(0) y_j \rightarrow w^0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad \text{в } L_2(\Omega). \end{aligned}$$

Теорема Пикара—Линделёфа утверждает, что существует классическое решение задачи (2.3) на некотором интервале $[0, \tau_m]$, $\tau_m \leq T$. Здесь T — время существования асимптотического решения, построенного выше, т.е. время существования классического решения задачи со свободной границей (1.4)–(1.10). Для доказательства разрешимости задачи на конечном временном интервале, не зависящем от ε , получаем априорные оценки. Умножая первое уравнение в (2.3) на $\omega_{j,m}$, второе уравнение в (2.3) на $\omega_{j,m}$, суммируя по j , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|(w_m + \omega_m), L_2\|^2 + \int_{\Omega} (|\nabla_x w|^2 + (\nabla_x \omega, \nabla_x)) dx &= \int_{\Omega} \mathcal{F}_w w_m dx, \\ \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \|\omega_m, L_2\|^2 + \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla_x \omega|^2 dx + 2 \|\omega_m, L_2\|^2 + \int_{\Omega} \omega_m^4 dx &= \\ = 3 \int_{\Omega} (1 - (\varphi_{as,M})^2) \omega_m^2 dx - 3 \int_{\Omega} \varphi_{as,M} \omega_m^3 dx + \int_{\Omega} \mathcal{F}_\varphi \omega_m dx + \varepsilon \kappa \int_{\Omega} w_m \omega_m dx. \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\|\cdot, L_2\|$ обозначает норму в $L_2(\Omega)$.

Наша цель состоит в определении условий на функции \mathcal{F}_u , \mathcal{F}_φ , ω_0 и w_0 , при которых решение задачи (2.2) остается малым в течении конечного (не зависящего от ε) времени T . Подчеркнем, что, в отличие от [8], в данной работе исследуется полная (нелинейная) проблема устойчивости. Кроме того, в отличие от анализа спектра линеаризованной задачи, проведенного в этой работе, мы развиваем подход, основанный на энергетических неравенствах.

В ситуации, когда возмущение ω обращается в нуль на фронте, энергетический метод получения априорной оценки был развит Бергером и Френкелем [6]. Однако метод этой работы в нашей ситуации непосредственно неприменим, так как функция ω_m в системе (2.3), вообще говоря, не обращается в нуль на фронте. Более того, из работы [8] следует, что линейная часть второго уравнения в (2.2) имеет в спектре минимальное собственное число $\sim O(\varepsilon^2)$, знак которого, вообще говоря, априори неизвестен. Влияние на спектр члена $\varepsilon \kappa w$ линеаризованного уравнения для фазовой функции также априори неизвестно. С другой стороны, наличие множителя ε при производной по t приводит к тому, что на конечных временах (не зависящих от ε) вклад собственной функции, отвечающей первому собственному значению $\sim O(\varepsilon^2)$, в решение оказывается существенным. Эта собственная функция — чётная относительно свободной границы «в главном» и поэтому метод работы [6] в данном случае неприменим.

Существенным шагом в доказательстве оценки (2.1) (см. [9]) явилась лемма из [8] об оценке первого собственного значения линеаризованного уравнения диффузии. Здесь мы приведем модификацию доказательства этой леммы, которую можно применить для получения оценки первого собственного значения оператора в вариациях для потенциалов Зельдовича и уравнения КПП. Полное доказательство оценки получается техникой, разработанной в [1]

3. ЛЕММА Х. ЧЕНА

Приведем модификацию доказательства леммы Х. Чена об оценке на фронте функционала (см. [8])

$$\mathcal{J}(\mu, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + W''(\chi) y^2 \right\} F d\varrho$$

для любых $t \in (0, T)$, $\mu \in \Gamma_t$,

$$y \in W_2^1(Q), \quad Q = (-\delta_0, \delta_0).$$

Здесь мы будем придерживаться обозначений, введенных в [1]. Будем считать, что фаза $S(x, t)$ гладко продолжена в некоторую симметричную относительно фронта Γ_t окрестность $Q_t^0 \subset \Omega$, $Q_{\delta_0} = \{x \in \Omega; |\varrho| \leq \delta_0\}$, в которой существует система координат $\varrho = S(x, t)$, μ , где μ — некоторая система координат на Γ_t и $dx = F(\varrho, \mu) d\varrho d\mu$. Очевидно, оценку (2.2) достаточно получить в окрестности фронта Γ_t , точнее, достаточно (см. [1]) оценить снизу интеграл на фронте.

Лемма 3.1. Для любой четной по ϱ функции $y \in \mathcal{W}$, где \mathcal{W} состоит из функций

$$y \in W_2^1(Q)$$

таких, что

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0} y Y d\varrho = 0, \quad (3.1)$$

справедливо неравенство

$$\min_{y \in \mathcal{W}} \mathcal{J}(\mu, t) \geq c_3 \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left[\left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + y^2 \right] F d\varrho, \quad (3.2)$$

где постоянная $c_3 > 0$ не зависит от μ , ε, t . Здесь $Y = \chi'(S(x, t)/\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$, функция $\chi(\xi)$ — решение стандартного уравнения

$$\chi''(\xi) - W'(\chi(\xi)) = 0$$

системы фазового поля,

$$W(\chi) = \frac{1}{4}(\chi^2 - 1)^2 \implies \chi = \text{th}(\xi/\sqrt{2}).$$

Рассмотрим подобласть

$$Q_1 = \{x \in Q_t^0, |\varrho| \leq R_0 \varepsilon\}$$

для достаточно большого $R_0 > \delta$. Введём разбиение единицы $\alpha_1^{(1)} = \alpha(\varrho/R_0\varepsilon)$, $\alpha_2^{(1)}$ на интервале $(-\delta_0, \delta_0)$ такое, что $(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_2^{(1)})^2 \equiv 1$ на этом интервале. Положим

$$y_1 = \alpha_1^{(1)} y, \quad y_2 = \alpha_2^{(1)} y.$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + W''(\chi) y^2 \right\} F d\varrho \geq \\ & \geq \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_1 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y_1^2 \right\} F d\varrho + \\ & + \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_{x\varrho}|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y_2^2 \right\} F d\varrho. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если R_0 достаточно мало, то

$$\begin{aligned} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y^2 \right\} F d\varrho &\geq \\ &\geq \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \frac{1}{2} c_0 y^2 \right\} F d\varrho. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что для достаточно большого R_0

$$\begin{aligned} &\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + W''(\chi) y^2 \right\} F d\varrho \geq \\ &\geq \int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_1 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y_1^2 \right\} F d\varrho + \\ &\quad + \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \frac{1}{2} c_0 y^2 \right\} F d\varrho, \end{aligned}$$

где $W''(\chi) \geq c_0$ в дополнении области Q_* .

Теперь положим

$$y_1 = c_1^y Y + z_y,$$

где

$$c_1^y = \frac{\int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} y_1 Y d\varrho}{\int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} Y^2 d\varrho}.$$

Тогда, в силу условия (2.3.6) в [1], имеем

$$\begin{aligned} (c_1^y)^2 &= \left(\int_{-\delta_0}^{-R_0 \varepsilon} y Y d\varrho + \int_{R_0 \varepsilon}^{\delta_0} y Y d\varrho + \int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} y_2 Y d\varrho \right)^2 (B_*)^{-2} \leq \\ &\leq \frac{A_*}{B_*^2} \left(\int_{-\delta_0}^{-R_0 \varepsilon} y^2 d\varrho + \int_{R_0 \varepsilon}^{\delta_0} y^2 d\varrho + \int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} y_2^2 d\varrho \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_* &= \int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} Y^2 d\varrho = \int_{-R_0}^{R_0} (\chi'(s))^2 ds, \\ A_* &= \int_{-\delta_0}^{-R_0 \varepsilon} Y^2 d\varrho + \int_{R_0 \varepsilon}^{\delta_0} Y^2 d\varrho = \int_{-\delta_0/\varepsilon}^{-R_0} (\chi'(s))^2 ds + \int_{R_0}^{\delta_0/\varepsilon} (\chi'(s))^2 ds. \end{aligned}$$

Очевидно, постоянная $A_*/B_* \rightarrow 0$, если $R_0 \rightarrow \infty$. Далее имеем

$$\int_{-R_0 \varepsilon}^{R_0 \varepsilon} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_1 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y_1^2 \right\} F d\varrho =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) z_y^2 \right\} F d\varrho + \\
 &\quad + \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ |\nabla_x \varrho|^2 \varepsilon^2 ((c_1^y)^2 Y_\varrho^2 + 2c_1^y Y_\varrho(z_y)_\varrho) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) \right\} F d\varrho.
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
 &\int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \left\{ |\nabla_x \varrho|^2 \varepsilon^2 ((c_1^y)^2 Y_\varrho^2 + 2c_1^y Y_\varrho(z_y)_\varrho) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) \right\} F d\varrho = \\
 &= \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \left\{ |\nabla_x \varrho|^2 ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) \frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right\} F d\varrho + \\
 &\quad + \varepsilon \left[\frac{\chi''}{\chi'} F ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) \Big|_{\varrho=R_0\varepsilon} - \frac{\chi''}{\chi'} F ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) \Big|_{\varrho=-R_0\varepsilon} \right] - O(\varepsilon^2) \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_1^2 F d\varrho.
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$-\varepsilon \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) d\varrho \geq -O(\varepsilon^2) \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_1^2 F d\varrho.$$

Полагая $(c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y = y_1^2 - z_y^2$ и учитывая, что

$$y_1|_{\varrho=-R_0\varepsilon} = y_1|_{\varrho=-R_0\varepsilon} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned}
 &\int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \left\{ |\nabla_x \varrho|^2 \varepsilon^2 ((c_1^y)^2 Y_\varrho^2 + 2c_1^y Y_\varrho(z_y)_\varrho) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2} |\nabla_x \varrho|^2 ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) ((c_1^y)^2 Y^2 + 2c_1^y Y z_y) \right\} F d\varrho = \\
 &= - \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \left\{ |\nabla_x \varrho|^2 ((y_1)^2 - z_y^2) \frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right\} F d\varrho - \\
 &\quad - \varepsilon \left[\frac{\chi''}{\chi'} F z_y^2 \Big|_{\varrho=R_0\varepsilon} - \frac{\chi''}{\chi'} F z_y^2 \Big|_{\varrho=-R_0\varepsilon} \right] - O(\varepsilon^2) \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_1^2 F d\varrho.
 \end{aligned}$$

В то же время

$$\frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) |(y_1)^2 - z_y^2| \geq -2B_* D_* (c_1^y)^2 - \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) z_y^2 d\varrho \geq$$

$$\geq - \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) z_y^2 d\varrho - \frac{2A_*}{B_*} \left(\int_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon} y^2 d\varrho + \int_{R_0\varepsilon}^{\delta_0} y^2 d\varrho + \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_2^2 d\varrho \right),$$

где

$$D_*(\mu, t) = \frac{1}{R_0^2} \max_{-R_0\varepsilon < \varrho < R_0\varepsilon} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2).$$

Отсюда для достаточно большого R_0 имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + W''(\chi) y^2 \right\} F d\mu d\varrho \geq \\ & \geq \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} ((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) z_y^2 \right\} F d\mu d\varrho + \\ & \quad + \sqrt{2} \varepsilon \int_{\Gamma_t} \left[\chi F z_y^2 \Big|_{\varrho=R_0\varepsilon} - \chi F z_y^2 \Big|_{\varrho=-R_0\varepsilon} \right] d\mu + \\ & \quad + \frac{1}{4} c_0 \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \int_{\Gamma_t} (c_1^y) Y^2 F d\mu d\varrho - O(\varepsilon^2) \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \int_{\Gamma_t} y_1^2 F d\mu d\varrho + \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \frac{1}{4} c_0 y_2^2 \right\} F d\mu d\varrho. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon} y^2 d\varrho + \int_{R_0\varepsilon}^{\delta_0} y^2 d\varrho + \int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_2^2 d\varrho \leq C_1 \int_{-\delta_0}^{\delta_0} y_2^2 F d\varrho.$$

Таким образом, мы свели исследование неравенства (3.2) к функциям z_y с носителем в ε окрестности Q_1 фронта Γ_t .

Далее разобьем область Q_1 на подобласти

$$Q_j^* = \{x \in Q_1, -(R_0 - j\sigma_0)\varepsilon < \varrho < (R_0 - j\sigma_0)\varepsilon\},$$

где $j = 1, \dots, N$, $N = [R_0/\sigma_0]$, постоянные δ , σ_0 выберем ниже. Через Σ_j^* обозначим интервалы $\Sigma_j^* = \{(R_0 - j\sigma_0)\varepsilon < \varrho < (R_0 - j\sigma_0)\varepsilon\} \subset \mathbb{R}_\varrho^1$ для $j = 0, 1, \dots, N_1$, $\delta = R_0 - N\sigma_0$.

На первом шаге положим

$$z_y = c_1^z Y + x_1^z,$$

где

$$c_1^z = \int_{\Sigma_1} z_y Y d\varrho / \int_{\Sigma_1} Y^2 d\varrho.$$

Тогда, в силу условия

$$\int_{\Sigma_0} z_y Y F d\varrho d\mu = 0,$$

так же, как выше, имеем

$$(c_1^z)^2 = \left[\int_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} z_y Y d\varrho \right]^2 B_1^{-2} \leq \frac{A_1}{B_1^2} \int_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} z_y^2 F d\varrho, \quad (3.7)$$

где

$$B_1 = \int_{\Sigma_1} Y^2 F d\varrho = \int_{-(R_0-\sigma_0)}^{(R_0-\sigma_0)} (\chi'(s))^2 F ds,$$

$$A_1 = \int_{Q_0 \setminus \Sigma_1} Y^2 F d\varrho = \int_{-R_0}^{-(R_0-\sigma_0)} (\chi'(s))^2 F ds + \int_{(R_0-\sigma_0)}^{R_0} (\chi'(s))^2 F ds.$$

Отсюда следует возможность повторения предыдущих рассуждений, в силу которых, как результат редукции, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + W''(\chi) z_y^2 \right\} F d\varrho &= \int_{\Sigma_1} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_1^z \right)^2 + W''(\chi) (x_1^z)^2 \right\} F d\varrho + \\ &+ \int_{\Sigma_1} \left\{ |\nabla_{x\varrho}|^2 \varepsilon^2 \left((c_1^z)^2 Y_\varrho^2 + 2c_1^z Y_\varrho (x_1^z)_\varrho \right) + W''(\chi) \left((c_1^z)^2 Y^2 + 2c_1^z Y x_1^z \right) \right\} F d\varrho. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, в силу равенства $(c_1^z)^2 Y^2 + 2c_1^z Y x_1^z = z_y^2 - (x_1^z)^2$, так же, как выше, получим

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_1} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} \left((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 \right) \right) z_y^2 \right\} F d\varrho \geq \\ &\geq \int_{\Sigma_1} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_1^z \right)^2 + (W''(\chi) - 2D_1^*) (x_1^z)^2 \right\} F d\varrho - \\ &- \sqrt{2} \varepsilon \left[\chi F (z_y^2 - (x_1^z)^2) \Big|_{\varrho=(R_0-\sigma_0)\varepsilon} - \chi F (z_y^2 - (x_1^z)^2) \Big|_{\varrho=-(R_0-\sigma_0)\varepsilon} \right] - 2D_1^* (c_1^z)^2 B_1 - O(\varepsilon^2) \int_{\Sigma_1} z_y^2 F d\varrho, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$D_1^*(\mu, t) = \max_{\Sigma_1} \left((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 \right).$$

В то же время

$$\begin{aligned} \varepsilon (z_y^2 - (x_1^z)^2) \Big|_{\varrho=\pm(R_0-\sigma_0)\varepsilon} &\leq \delta_1 \frac{B_1^2}{4A_1^2} (c_1^z)^2 + \varepsilon^2 \frac{4A_1^2}{\delta_1 B_1^2} (x_1^z)^2 \Big|_{\varrho=\pm(R_0-\sigma_0)\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \varepsilon \int_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} z_y^2 F d\varrho + \varepsilon \frac{4A_1^2}{B_1^2} (x_1^z)^2 \Big|_{\varrho=\pm(R_0-\sigma_0)\varepsilon}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\frac{4A_1^2}{\delta_1 B_1^2} = O(\sigma_0^2).$$

Нетрудно видеть, что из условия

$$\int_{\Sigma_1} x_1^z Y F d\varrho = 0$$

и четности функции x_1^z следует, что расстояние от любой точки интервала $(-R_0 + \sigma_0)\varepsilon, (R_0 - \sigma_0)\varepsilon$ до ее нулей не превосходит $(R_0 - \sigma_0)\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon (x_1^z)^2 F \Big|_{\varrho=\pm\delta\varepsilon} \leq (R_0 - \sigma_0) \varepsilon^2 \int_{\Sigma_1} (x_1^z \sqrt{F})_\varrho^2 d\varrho \leq 2C_1 \varepsilon^2 R_0 \int_{\Sigma_1} \left((x_1^z)^2 + (x_1^z)_\varrho^2 \right) F d\varrho,$$

где $C_1 = \max_{Q_1} F^{-1} F_\varrho$. Отсюда следует, что

$$-\sqrt{2} \varepsilon \left[\chi F (z_y^2 - (x_1^z)^2) \Big|_{\varrho=(R_0-\sigma_0)\varepsilon} - \chi F (z_y^2 - (x_1^z)^2) \Big|_{\varrho=-(R_0-\sigma_0)\varepsilon} \right] \geq$$

$$\geq -\max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon \int_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} z_y^2 F d\varrho + R_0 \frac{16A_1^2}{B_1^2} C_1 \varepsilon^2 \int_{\Sigma_1} \left((x_1^z)^2 + (x_1^z)_\varrho^2 \right) F d\varrho.$$

Эти оценки позволяют на первом шаге получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} \left((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 \right) \right) z_y^2 \right\} F d\varrho \geq \\ & \geq \int_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_* - \right. \right. \\ & \left. \left. - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_1}{B_1} \right) z_y^2 \right\} F d\varrho + \int_{\Sigma_1} \left\{ \left(1 - \frac{16A_1^2}{\delta_1 B_1^2} C_1 \right) \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_1^z \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_1^* \right) (x_1^z)^2 \right\} F d\varrho - O(\varepsilon^2) \int_{\Sigma_1} z_y^2 F d\varrho. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Положим

$$\mathcal{N}_1 = W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_* - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_1}{B_1}$$

и

$$\mathcal{H}_1^{(1)} = W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_1^*, \quad \mathcal{H}_1^{(2)} = 1 - R_0 \frac{16A_1^2}{\delta_1 B_1^2} C_1.$$

Постоянные R_0, σ_0 выберем из условия

$$\min_{Q_1 \setminus Q_*} \mathcal{N} \geq a_0, \quad \min_{Q_1} \mathcal{H}_1^{(1)} \geq a_0, \quad \min_{Q_1^*} \mathcal{N} \geq a_0$$

для некоторой постоянной $a_0 > 0$, не зависящей от $\varepsilon, R_0, \sigma_0, t$.

Очевидно, этот процесс можно продолжить. Нетрудно видеть, что на N шаге мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho \geq \\ & \geq \left[\int_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \right] \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \left(\mathcal{H}_{N-1}^{(1)} - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_N}{B_N} \right) (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho + \\ & + \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(\mathcal{H}_{N-1}^{(2)} - \frac{16A_1^2}{\delta_1 B_1^2} C_1 \right) \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho - O(\varepsilon^2) \int_{-(R_0-\sigma_0)\varepsilon}^{(R_0-\sigma_0)\varepsilon} z_y^2 F d\varrho, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$(c_j^z)^2 = \left(\int_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} z_y Y F d\varrho \right)^2 B_j^{-2} \leq \frac{A_j}{B_j^2} \int_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} z_y^2 F d\varrho \quad (3.11)$$

и

$$B_j = \int_{\Sigma_j} Y^2 F d\varrho = \int_{-(R_0-j\sigma_0)}^{(R_0-j\sigma_0)} (\chi'(s))^2 F ds,$$

$$A_j = \int_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} Y^2 F d\varrho = \left(\int_{-(R_0-j\sigma_0)}^{-(R_0-(j-1)\sigma_0)} + \int_{R_0-j\sigma_0}^{R_0-(j-1)\sigma_0} \right) (\chi'(s))^2 F ds.$$

Нетрудно видеть, что равномерно по j

$$\frac{A_j}{B_j} \leq C_0 \sigma_0,$$

где постоянная C_0 не зависит от σ_0, ε, t при фиксированном R_0 . Таким образом, для $j \geq 2$ имеем

$$\mathcal{N}_j = \mathcal{H}_{j-1}^{(1)} - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_j}{B_j} = W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_1^* - D_1^* \frac{A_j}{B_j},$$

и

$$\mathcal{H}_j^{(1)} = \mathcal{H}_{j-1}^{(1)} = W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_1^*,$$

$$\mathcal{H}_j^{(2)} = \mathcal{H}_{j-1}^{(2)} - R_0 \frac{16A_j^2}{B_j^2} C_1.$$

Таким образом, постоянную R_0 можно выбрать из условия

$$\min_{Q_1} \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_1^* \right) \geq 2a_0 > 0.$$

Зафиксировав R_0 , выберем σ_0 из условий

$$\max_{j=1, \dots, N} D_1^* \frac{A_j}{B_j} < \frac{1}{2} a_0,$$

$$\sum_1^N R_0 \frac{16A_j^2}{B_j^2} C_1 \leq 16C_1 R_0 C_0^2 N \sigma_0^2 < a_0.$$

Теперь выберем $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ из условия

$$\varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2} a_0.$$

Теперь рассмотрим область Q_* . Положим

$$x_{N-1}^z = c_N^z Y + x_N^z,$$

где

$$c_N^z = \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} x_{N-1}^z Y d\varrho / \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} Y^2 d\varrho.$$

Тогда, в силу условия

$$\int_{\Sigma_{N-1}} x_{N-1}^z Y F d\varrho d\mu = 0,$$

так же, как выше, имеем

$$(c_N^z)^2 = \left(\int_{\Sigma_{N-1} \setminus \Sigma_N} x_{N-1}^z Y F d\varrho \right)^2 B_N^{-2} \leq \frac{A_N}{B_N^2} \left(\int_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon} \right) (x_{N-1}^z)^2 d\varrho, \quad (3.12)$$

где

$$B_N = \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} Y^2 F d\varrho = \int_{-\delta}^{\delta} (\chi'(s))^2 F ds,$$

$$A_N = \left(\int_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon} \right) Y^2 F d\varrho = \left(\int_{-(\delta+\sigma_0)}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\delta+\sigma_0} \right) Y^2 F ds.$$

Отсюда следует возможность повторения предыдущих рассуждений, в силу которых, как результат редукции, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_N} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_* \right) (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho \geq \\ & \geq \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + (W''(\chi) - D_1^*) (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho - \\ & - \sqrt{2}\varepsilon \left[\chi F ((x_{N-1}^z)^2 - (x_N^z)^2) \Big|_{\varrho=\delta\varepsilon} - \chi F ((x_{N-1}^z)^2 - (x_N^z)^2) \Big|_{\varrho=-\delta\varepsilon} \right] - \\ & - D_1^* (c_N^z)^2 B_N - O(\varepsilon^2) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} (x_{N-1}^z)^2 F d\varrho. \end{aligned}$$

Теперь оценим последний интеграл

$$\int_{\varrho=-\delta\varepsilon}^{\varrho=\delta\varepsilon} \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho.$$

В силу условия

$$\int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} x_N^z Y F d\varrho = 0$$

и четности функции x_N^z , расстояние от любой точки интервала $(-\delta\varepsilon, \delta\varepsilon)$ до ближайшей точки ($\varrho = \varrho_*$) нулевой линии уровня функции x_N^z не больше, чем δ . Тогда

$$x_N^z \sqrt{F} = \int_{\varrho_*}^{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (x_N^z \sqrt{F}) ds.$$

Отсюда получим

$$(x_N^z)^2 F \leq (\varrho - \varrho_*) \int_{\varrho_*}^{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} (x_N^z \sqrt{F}) \right)^2 ds.$$

Интегрируя по ϱ , получим неравенство

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_1) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} (x_N^z)^2 F d\varrho \leq \\ & \leq (1 - \delta_1) \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \left[(1 + \delta_2) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 F d\varrho + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\delta_2} \right) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left(\frac{F_\varrho}{F} \right)^2 (x_N^z)^2 F d\varrho \right] \end{aligned}$$

с произвольной постоянной $\delta_2 > 0$. Положим

$$\Lambda = \frac{1}{1 + \delta_2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \delta^2 (1 + \delta_2)}{8\delta_2} \max_{Q^*, 0 < t < T} \left(\frac{F_\varrho}{F} \right)^2 \right) = \frac{1 - O_{\delta_2}(\varepsilon)}{1 + \delta_2}.$$

Тогда имеем

$$(1 - \delta_1) \Lambda \frac{2}{\delta^2} \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} (x_N^z)^2 F d\varrho \leq \varepsilon^2 (1 - \delta_1) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 F d\varrho.$$

Это позволяет показать

$$\begin{aligned} & \left(\min_{Q_*} \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} - \delta_1 - \check{O}(\varepsilon) \right) \varepsilon^2 \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right|^2 F d\varrho + \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \mathcal{H}_{N-1}^{(1)}(x_N^z)^2 F d\varrho \geq \\ & \geq \left(\min_{Q_*} \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \delta_1 - \check{O}(\varepsilon) \right) \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right|^2 dx + \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left((1 - \delta_1) \Lambda \min_{Q_*} \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \frac{2}{\delta^2} + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} - \check{O}(\varepsilon) \right) (x_N^z)^2 F d\varrho. \end{aligned}$$

Как мы показали выше, при оценке нечетной функции,

$$(1 - \delta_1) \Lambda \frac{2}{\delta^2} + W''(\chi) - \check{O}(\varepsilon) \geq c_0 > 0$$

на интервале $-\delta\varepsilon < \varrho < \delta\varepsilon$ для некоторой постоянной c_0 и некоторого $1 < \delta < \sqrt{2}$, не зависящих от ε, μ, t . Отсюда следует, что для достаточно большого R_0 и достаточно малого $\sigma_0 \leq \sigma_0^*$ существует

$$\delta = \delta(R_0, \sigma_0) \in (1, \sqrt{2})$$

такое, что

$$\left[(1 - \delta_1) \Lambda \frac{2}{\delta^2} \min_{Q_*} \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} - \check{O}(\varepsilon) \right] \Big|_{\varepsilon=0} \geq a_0 > 0$$

для некоторого $a_0 > 0$. Так же, как при исследовании нечетных функций, отметим, что в этом случае $\mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \geq c_1 > 0$ вне интервала $-\delta\varepsilon < \varrho < \delta\varepsilon$ для некоторой постоянной c_1 , не зависящей от ε, μ, t . Следовательно, в этом случае имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + W''(\chi) (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho \geq a_0 \int_{-\delta}^{\delta} \left(\delta_1 \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + (x_N^z)^2 \right) F d\varrho. \quad (3.13)$$

Суммируя оценки (3.13) и (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho \geq \\ & \geq \left[\int_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \right] \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \left(\mathcal{H}_{N-1}^{(1)} - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_N}{B_N} \right) (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho + \\ & + \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(\mathcal{H}_{N-1}^{(2)} - \frac{16A_N^2}{B_N^2} C_1 \right) \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho - O(\varepsilon^2) \int_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon} (x_N^z)^2 F d\varrho \geq \\ & \geq a_0 \left[\int_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \right] \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho + \\ & + \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho - O(\varepsilon^2) \int_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon} (x_N^z)^2 F d\varrho \Big]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Суммируя эти оценки по j , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W'''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_* \right) z_y^2 \right\} F d\varrho \geq \\ & \geq a_0 \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + (x_{N-1}^z)^2 \right\} F d\varrho + \right. \\ & \left. + \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + (x_N^z)^2 \right\} F d\varrho \right] - O(\varepsilon^2) \int_{\Sigma_0} z_y^2 F d\varrho. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из оценок (3.12), (3.11) следует, что

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_j} (c_j^z)^2 Y^2 F d\varrho \leq \sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} (x_{j-1}^z)^2 F d\varrho. \quad (3.16)$$

Как следствие оценок (3.15) и (3.16) получаем требуемый результат:

$$\int_{\Sigma_0} \left\{ \left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W'''(\chi) - 2 \frac{1}{R_0^2} D_* \right) z_y^2 \right\} F d\varrho \geq a_1 \int_{\Sigma_0} \left[\left(|\nabla_{x\varrho}| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + z_y^2 \right] F d\varrho$$

для некоторой постоянной $a_1 > 0$, не зависящей от $R_0, \sigma_0, \varepsilon, \mu, t$. Отсюда следует справедливость неравенства (3.2) леммы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева О. А., Радкевич Е. В., Хилхорст Д. Классическая задача Веригина—Маскета, проблема регуляризации, внутренние слои// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2000. — 61. — С. 25–74.
2. Данилов В. Г., Омелянов Г. А., и Радкевич Е. В. Асимптотическое решение системы фазового поля и модифицированная задача Стефана// Дифференц. уравн. — 1995. — 31, № 3. — С. 483–491.
3. Радкевич Е. В. Об условиях существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса—Томпсона)// Мат. сб. — 1992. — 183, № 2.
4. Радкевич Е. В. Асимптотические решения системы фазового поля// Дифференц. уравн. — 1993. — 29, № 3. — С. 487–500.
5. Радкевич Е. В. Корректность моделей механики сплошных сред и термодинамика// в этом томе.
6. Berger M. S., Fraenkel L. E. On the asymptotic solution of a nonlinear Dirichlet problem// J. Math. Mech. — 1970. — 19. — С. 553–585.
7. Caginalp G. An analysis of a phase field model of a free boundary// Arch. Mech. Anal. — 1986. — 92. — С. 205–245.
8. Chen X. Spectrum for the Allen–Cahn, Cahn–Hilliard, and Phase-field equations for general interfaces// Commun. Part. Differ. Equat. — 1994. — 19, № 7,8. — С. 1371–1395.
9. Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// Eur. J. Appl. Math. — 1999.
10. Oleinik O., Primicerio M., Radkevich E. Stefan-like problems// Meccanica. — 1993. — 28. — С. 129–143.

О. А. Васильева

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова