ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Тбилиси
2003

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი

თბილისი

2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика и ее приложения. Том 4 (2003). С. 3–116

УДК 517.933

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЗАДАЧИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

© 2003 г. **Т. Г. ВОЗМИЩЕВА**

Аннотация. Механика топологического анализа интегрируемых задач, развитая А. Т. Фоменко, применяется к исследованию некоторых задач небесной механики.

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 1512–1712

Введение

Проблема интегрируемости и неинтегрируемости динамических задач занимает одно из центральных мест математики и механики. Интегрируемые случаи представляют значительный интерес, поскольку на их примере можно исследовать общие закономерности поведения решений уравнений движения. Классический подход к исследованию динамических задач предполагает поиск явных формул для решений уравнений движения и затем их анализ. Этот подход стимулировал развитие новых направлений в математике, таких как алгебраическое интегрирование и теория эллиптических и тэта-функций. Несмотря на это, качественный подход к исследованию динамических систем весьма актуален.

Основателем качественной теории дифференциальных уравнений является Пуанкаре. Разрабатывая качественные методы, Пуанкаре исследовал задачи небесной механики и космологии, в которых особенно важно понять как ведут себя траектории движений, т.е. решения дифференциальных уравнений при бесконечном времени. Именно начиная с Пуанкаре, исследуются системы уравнений (в связи с исследованием задач небесной механики), правые части которых не зависят явно от независимого переменного времени, т.е. динамические системы.

В настоящее время качественные методы исследования динамических систем, в частности гамильтоновых систем, активно развиваются. Согласно сложившейся в последнее время точке зрения, одной из основных качественных характеристик интегрируемой гамильтоновой системы является структура ее лиувиллева слоения, т.е. слоения фазового пространства на инвариантные торы (или цилиндры) Лиувилля и особые интегральные подмногообразия. А. Т. Фоменко предложил новый подход к изучению этой структуры, что позволило затем построить полный топологический инвариант (инвариант Фоменко—Цишанга). На основе нового подхода в качественной теории интегрируемых гамильтоновых систем строится классификация таких слоений на трехмерных изоэнергетических поверхностях. В данной работе также применяется техника топологического анализа интегрируемых задач.

В небесной механике знаменитейшей задачей является задача трех тел, которая может быть сформулирована следующим образом. Три материальные точки взаимно притягиваются по закону Ньютона, согласно которому между каждыми двумя из этих точек действует сила притяжения, прямо пропорциональная массам этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними; точки находятся в любом начальном положении и могут свободно двигаться в пространстве.

Задача трех тел к настоящему времени в общем виде не решена.

Задача о движении материальной точки в евклидовом пространстве под действием поля двух неподвижных ньютоновских центров (частный случай задачи трех тел) впервые рассматривалась Эйлером. Именно Эйлер свел задачу двух неподвижных центров к квадратурам. Вообще говоря, фундамент почти под все достижения современной небесной механики был заложен Эйлером, который был необычайно плодотворен и не только в этой области исследований, хотя С. В. Вавилов говорил о нем, что математическому гению Эйлера явно «не хватало физической интуиции», поэтому математик подавлял в нем физика.

К сожалению, в то время результаты, полученные Эйлером, имели лишь чисто теоретическое значение, так как два неподвижных гравитирующих центра есть система, которую невозможно реализовать в природе. Задачи типа Солнце–Юпитер–Сатурн не могли служить адекватной моделью, поскольку не удовлетворяли условиям движения в поле двух неподвижных центров.

В работе Е. П. Аксенова, Е. А. Гребенникова и В. Г. Демина [18] была найдена неожиданная область применения задачи Эйлера — движение искусственных спутников в поле несферической планеты. Но Земля и есть несферическая планета, которую можно рассматривать не как один центр, а как два мнимых центра. Кроме этого, можно также исследовать движение космического корабля в гравитационном поле двух планет, пренебрегая их смещением за время полета космического корабля. Итак, область применения была найдена, и задача получила новое рождение.

Еще один аспект задачи двух центров — движение материальной точки под действием ньютоновского притяжения неподвижного центра и еще одной силы, постоянной по величине и направлению. Эта задача является предельным случаем задачи двух центров. В процессе предельного перехода второй центр удаляется на бесконечность в направлении силы тяги (причем его масса должна расти так, чтобы обеспечить постоянство тяги, т.е. пропорционально квадрату расстояния). Данная задача впервые исследовалась и была проинтегрирована Лагранжем. Качественный анализ задачи Лагранжа реализован В. В. Белецким [6] для плоского случая. Для космических полетов важно учитывать как однородное поле (под действием которого космический корабль приобретает постоянное ускорение), так и поле, генерируемое гравитационным центром — планетой.

Возникает вопрос о переносимости свойств динамических систем в небесной механике на случай искривленного пространства, в частности, представляет интерес проблема: как влияет кривизна на интегрируемость динамических систем. Естественно рассмотреть случаи пространств постоянной кривизны, отрицательной или положительной. Исследованию динамических систем в пространствах постоянной кривизны посвящено не так много работ, хотя впервые этот вопрос был поставлен еще Н. И. Лобачевским, который изучал обобщения закона притяжения для пространства постоянной отрицательной кривизны. Сама постановка задач динамики в пространствах постоянной кривизны часто весьма нетривиальна. Один из основных вопросов связан с описанием потенциала, который создает гравитирующий центр. Существуют различные подходы к обобщению классических задач на криволинейный случай. Кроме того, рассматриваемые в небесной механике системы имеют особенности и, формально говоря, не являются интегрируемыми по Лиувиллю (векторное поле, порождаемое гамильтонианом, не является полным). В работе описана некоторая регуляризация систем, после которой векторное поле становится полным и ведет себя регулярным (интегрируемым) образом.

Отметим, что интегрируемых случаев очень мало, и большинство их носит имена своих первооткрывателей. Мы представляем читателю интегрируемые задачи небесной механики на сфере и в пространстве Лобачевского. Исследуемые задачи являются естественными обобщениями классических плоских задач небесной механики. Однако интегрируемость аналогичных задач на сфере и плоскости Лобачевского были отмечены сравнительно недавно. Поэтому топологические свойства этих задач пока еще мало исследованы. В работе получен ряд интересных результатов. В частности, некоторые из полученных топологических инвариантов не встречались в исследованных ранее интегрируемых случаях. Топология изоэнергетических поверхностей также сильно отличается от того, что встречалось раньше. В работе обнаружены некоторые новые топологические эффекты в задачах динамики на пространствах постоянной кривизны. В последнее время интерес к задачам подобного рода растет.

Предлагаемый обзор состоит из 5 глав. В первой главе приведены основные понятия, определения и теоремы, посвященные интегрируемости и качественному анализу динамических систем, топологическим свойствам интегрируемых гамильтоновых систем, описанию топологических инвариантов и бифуркаций.

Во второй главе представлено обобщение задачи Кеплера в пространствах постоянной кривизны. В данной главе излагаются результаты исследования задачи Кеплера в плоском пространстве, на сфере и в пространстве Лобачевского.

В третьей главе кратко представлены результаты исследования плоской задачи двух центров, полученные ранее. Исследуется задача о движении точки по сфере (с метрикой постоянной положительной кривизны). Проведена редукция рассматриваемой системы на случай двух степеней свободы, доказана интегрируемость и выписаны интегралы движения. На основе качественных методов проведен бифуркационный и топологический анализ рассматриваемой системы, вычислены инварианты Фоменко—Цишанга, которые полностью описывают топологию лиувиллевых слоений изоэнергетических поверхностей Q^3. Описаны все типы движений (регулярные движения и предельные движения, соответствующие бифуркациям торов Лиувилля) на конфигурационном пространстве. Рассмотрена связь между инвариантами Фоменко—Цишанга (мечеными молекулами) и различными типами движения.

В четвертой и пятой главах изложены результаты исследования интегрируемых задач небесной механики в пространстве Лобачевского.

В четвертой части исследуется задача двух центров в пространстве Лобачевского. Проведена редукция рассматриваемой системы на случай двух степеней свободы, доказана интегрируемость и выписаны интегралы движения. Выполнена классификация областей возможности движения на конфигурационном пространстве (описаны все типы движений: регулярные и предельные движения).

В физике и механике часто возникает следующая задача. Пусть даны две интегрируемые гамильтоновые системы. Необходимо узнать, эквивалентны ли они в топологическом смысле. В большинстве случаев практически единственный способ решить эту задачу состоит в вычислении соответствующих инвариантов Фоменко—Цишанга. В данной главе доказана теорема о лиувиллевой эквивалентности задачи двух центров на сфере, псевдосфере и плоскости при условии ограниченного движения (в случае сферы ограниченное движение соответствует движению по верхней полусфере).

Сделан предельный переход при $\lambda \to 0$ (λ — кривизна рассматриваемого пространства), в результате можно сделать вывод, что интегрируемые задачи, т.е. задача Кеплера и задача двух центров, переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами.

В пятой главе исследуется обобщение задачи Лагранжа на случай пространства Лобачевского. Эта задача является предельным случаем задачи двух центров. В процессе предельного перехода второй центр удаляется на бесконечность в направлении силы тяги. Получен аналог однородного поля в пространстве Лобачевского, выписаны интегралы движения. Проведен бифуркационный и топологический анализ. Описаны псевдосферопараболические координаты, которые возникают в процессе предельного перехода, когда один центр удаляется на бесконечность. Относительно новых координат гамильтониан системы имеет лиувиллев вид.

В заключение выражаю глубокую благодарность заведующему кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ академику А. Т. Фоменко и сотрудникам кафедры А. А. Тужилину, А. О. Иванову, А. И. Шафаревичу, А. А. Ошемкову за полезные обсуждения и поддержку.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

1. Гамильтоновы системы

Рассмотрим векторное поле на гладком многообразии. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты; тогда векторное поле можно записать в виде

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\xi^i(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции, являющиеся компонентами поля. Таким образом, каждое векторное поле интерпретируется как система обыкновенных дифференциальных уравнений на многообразии. Верно и обратное: каждая система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает векторное поле на соответствующем многообразии. В классической механике движение системы может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди механических систем выделен важный класс систем, описываемых при помощи гамильтоновых уравнений. Эти системы реализуются на симплектических многообразиях.

Симплектическое многообразие.

Определение 1.1. *Симплектической структурой на гладком многообразии M* называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма $\omega = \sum\limits_{i<j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$, т.е. выполняются условия:

1) $d\omega = \sum\limits_{i<j} d\omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j = \sum\limits_{k<i<j} \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} \right) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0$ (замкнутость);
2) $\det \Omega(x) \neq 0 \,\forall x$, где $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ — матрица формы (невырожденность).

Определение 1.2. Многообразие, снабженное симплектической структурой (M, ω), называется *симплектическим*.

В отличие от римановой структуры, которая существует на любом многообразии, симплектическую структуру можно задать не на всяком многообразии. Должны выполняться условия, которые являются необходимыми для существования на многообразии симплектической структуры.

Утверждение 1.1. *Симплектическое многообразие четномерно.*

Утверждение 1.2. *Симплектическое многообразие ориентируемо.*

Доказательства этих утверждений приведены в работе [8]. Отметим, что перечисленные условия (четномерность, ориентируемость) не являются достаточными для существования симплектической структуры.

В симплектической геометрии справедлива теорема Дарбу.

Теорема 1.1 (Дарбу). *Для любой точки x_0 на произвольном симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) существует открытая окрестность $U(x_0)$ с регулярными локальными координатами $p_1, \ldots, p_n$, $q^1, \ldots, q^n$, в которых симплектическая форма ω принимает канонический вид $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$.*

Матрица канонической формы соответственно записывается в виде

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты, в которых форма принимает канонический вид, называются *каноническими*.

Приведем некоторые примеры симплектических многообразий.

1. На любом двумерном ориентируемом римановом многообразии можно ввести симплектическую структуру как форму площади.

2. Линейное симплектическое пространство

$$M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n).$$

Симплектическая структура не зависит от точки и записывается в виде

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_n \wedge dq^n, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть M^n — произвольное гладкое многообразие, T^*M — его кокасательное расслоение.

Кокасательным расслоением T^*M к гладкому многообразию M называется совокупность пар вида $\{(x,\xi) | \, x \in M, \, \xi \in T^*_x M\}$, где ковектор ξ — линейный функционал.

Утверждение 1.3. *На кокасательном расслоении T^*M произвольного гладкого многообразия M можно определить естественную симплектическую структуру.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию $p : T^*M \to M$, $p(x,\xi) = x$, т.е. весь слой проектируется в точку x. Далее построим на T^*M некоторую 1-форму α (α — линейный функционал на касательных векторах к T^*M), называемую *формой действия*. Пусть a — касательный вектор к многообразию T^*M в некоторой точке (x,ξ), где $x \in M$, $\xi \in T^*_x M$, $a \in T(T^*M)$. Определим значение формы α на векторе a формулой

$$\alpha(a) = \xi(dp(a)),$$

где $dp\colon T_{(x,\xi)}(T^*M) \to T_x M$. Форма $\omega = d\alpha$ является симплектической структурой на многообразии T^*M.

В локальных координатах вектор скорости и ковектор записываются в виде

$$a = \left(\frac{dx^i}{dt}, \frac{d\xi_i}{dt}\right), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Соответственно форма действия запишется в виде

$$\alpha(a) = \xi(dp(a)) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{dx^i}{dt}.$$

В качестве симплектической структуры на T^*M мы берем форму $\omega = d\alpha = \sum\limits_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx^i$. Очевидно, что она удовлетворяет всем необходимым условиям

$$d\omega = d^2\alpha = 0, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Гамильтоновы векторные поля. Пусть H — гладкая функция на симплектическом многообразии (M^{2n}, w). Определим для этой функции вектор кососимметрического градиента $\operatorname{sgrad} H$ из тождества

$$w = (v, \operatorname{sgrad} H),$$

где v — произвольный касательный вектор, $v(H)$ — производная функции H вдоль v.

В локальных координатах $x^1, \ldots, x^{2n}$ получим следующее выражение:

$$(\operatorname{sgrad} H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Здесь ω^{ij} — коэффициенты матрицы, обратной к Ω (суммирование осуществляется по повторяющимся верхним и нижним индексам).

Определение 1.3. Векторные поля вида $\operatorname{sgrad} H$ называются *гамильтоновыми векторными полями*. Функция H называется *гамильтонианом* векторного поля $\operatorname{sgrad} H$.

В локальных симплектических координатах $q^1, \ldots, q^n$, $p_1, \ldots, p_n$, которые по теореме Дарбу всегда существуют в окрестности любой точки многообразия, гамильтонова система запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, \end{cases} \qquad i = 1, , \ldots, n,$$

$$H(q,p) = H(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n),$$

т.е. компоненты гамильтонова векторного поля в подходящих координатах имеют вид

$$\operatorname{sgrad} H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right).$$

Определение 1.4. Функция f на многообразии называется *первым интегралом* векторного поля v, если она постоянна на всех интегральных траекториях системы, т.е.

$$f(\gamma(t)) = \text{const},$$

где $\gamma(t)$ — интегральная траектория нашей системы.

Определение 1.5. *Интегральной траекторией системы* называется гладкая кривая, вектор скорости которой в каждой ее точке совпадает с вектором поля v в этой точке

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = v(\gamma(t)).$$

Следующее определение эквивалентно.

Определение 1.6. Функция f называется *первым интегралом* векторного поля системы, если ее производная по направлению поля v равна нулю

$$L_v f = 0.$$

(Соответственно, для гамильтоновой системы с гамильтонианом H, $L_{\operatorname{sgrad} H} f \equiv 0$.)

Это обозначение L выбрано в честь Софуса Ли

$$L_v f = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

где производные берутся в точке приложения вектора; здесь x^i — координаты в окрестности этой точки, v_i — компоненты вектора скорости в этой системе координат.

Теорема 1.2. *Функция Гамильтона является первым интегралом гамильтонова векторного поля.*

Доказательство.

$$L_{\operatorname{sgrad} H} H = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}^i \frac{\partial H}{\partial x^i} + \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p^i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} \right) = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Если функция f является интегралом поля v, то это поле касается поверхностей уровня функции f. Следовательно, каждое гамильтоново поле всегда касается поверхности уровня своего гамильтониана, т.е. гиперповерхности, задаваемые уравнением $H = \text{const}$, инвариантны относительно поля v, интегральные траектории поля заполняют эти поверхности и не покидают их (рис. 2).

Пусть гамильтоново векторное поле v имеет дополнительный интеграл f, причем интегралы H и f функционально независимы.

Определение 1.7. Две функции называются *функционально независимыми* на многообразии, если их градиенты $\operatorname{grad} H$ и $\operatorname{grad} f$ линейно независимы почти всюду.

Рис. 1

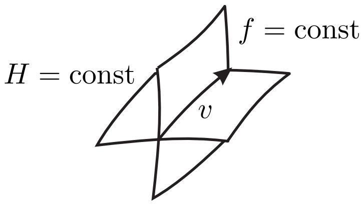


Рис. 2

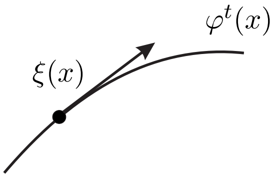


Рис. 3

Тогда поле v касается как поверхностей $H = \mathrm{const}$, так и поверхностей $f = \mathrm{const}$ (обе поверхности инвариантны относительно поля v), которые, очевидно, имеют размерность $2n-1$. Следовательно, поле v касается $(2n-2)$-мерных поверхностей. Эти поверхности являются пересечениями поверхностей $H = \mathrm{const}$ и $f = \mathrm{const}$. Таким образом, мы можем понизить размерность системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гамильтоновы фазовые потоки.

Определение 1.8. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M — это такое гладкое отображение $F\colon \mathbb{R} \times M \to M$, что

1. $\varphi^0(x) = x$, $x \in M$,
2. $\varphi^{t_1+t_2} = \varphi^{t_1} \circ \varphi^{t_2}$, где $\varphi^t(x) = F(t, x)$.

Отображение $\varphi^t : M \to M$ определяет гладкое векторное поле $\xi(x)$ на многообразии M по формуле

$$\xi(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi^t(x) \in T_xM,$$

$\varphi^t(x)$ является орбитой точки x.

Верно и обратное утверждение. По векторному полю $\xi(x)$ можно построить однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия M (по крайней мере, локально). Пусть $\xi^i(x^1, \ldots, x^n)$ — C^1-гладкое векторное поле. Рассмотрим произвольную точку x на многообразии и проведем через нее интегральную кривую $\gamma(t)$ такую, что $\gamma(0) = x$. Тогда мы можем восстановить однопараметрическую группу φ^t, полагая $\varphi^t(x) = \gamma(t)$. Здесь φ^t — это сдвиг вдоль интегральной траектории $\gamma(t)$ векторного поля $\xi(t)$ за время t.

Определение 1.9. Векторное поле $\xi(x)$ называется *полным*, если каждая интегральная траектория продолжается от $-\infty$ до ∞.

Утверждение 1.4. *Если условие полноты выполнено, то существует взаимно однозначное соответствие между однопараметрическими группами диффеоморфизмов φ^t и полными векторными полями.*

Скобки Пуассона.

Определение 1.10. Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие и $C^\infty(M^{2n})$ — пространство всех гладких функций на симплектическом многообразии. Пусть f, g — две гладкие функции, $f,\ g \in C^\infty(M^{2n})$. Положим по определению

$$\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g), \quad \{f, g\} \in C^\infty(M^{2n}).$$

В локальных координатах скобки Пуассона приобретают следующий вид:

$$\{f, g\} = \omega_{\alpha\beta}(\operatorname{sgrad} f)^\alpha (\operatorname{sgrad} g)^\beta =$$
$$= \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha i}\frac{\partial f}{\partial x^i}\omega^{\beta j}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \omega^{\beta j}\delta^i_\beta\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$$

(мы воспользовались тем, что $(\operatorname{sgrad} f)^i = \sum\limits_j w^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}$).

Утверждение 1.5. $\{f, g\} = (\operatorname{sgrad} f)g = -(\operatorname{sgrad} g)f$.

Доказательство.

$$\{f, g\} = w(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = (\operatorname{sgrad} f)g.$$

Утверждение доказано. □

Сформулируем теперь свойства скобки Пуассона в виде теоремы.

Теорема 1.3. *Скобка Пуассона удовлетворяет следующим свойствам*:

1) *кососимметричность*
$$\{f, g\} = -\{g, f\};$$
2) *билинейность над полем вещественных чисел*
$$\{\alpha f + \beta h, g\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{h, g\} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$
3) *скобка Пуассона* $\{\cdot, \cdot\}$ *удовлетворяет тождеству Якоби*
$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \equiv 0;$$
4) *верна формула Лейбница*
$$\{h, fg\} = \{h, f\}g + f\{h, g\}.$$

Доказательство. Билинейность и кососимметричность скобки Пуассона очевидны. Докажем тождество Якоби. Хорошо известна формула Картана

$$dw(\xi, \eta, \zeta) = \xi w(\eta, \zeta) - w([\xi, \eta], \zeta) + (\text{цикл. перестановка}),$$

где w — произвольная 2-форма, ξ, η, ζ — произвольные векторные поля. Пусть $\xi = \operatorname{sgrad} f$, $\eta = \operatorname{sgrad} g$, $\zeta = \operatorname{sgrad} h$, ω — симплектическая структура. Так как по определению симплектическая структура замкнута, то

$$\operatorname{sgrad} f(\omega(\operatorname{sgrad} g, \operatorname{sgrad} h)) - \omega([\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g], \operatorname{sgrad} h) +$$
$$+ (\text{цикл. перестановка}) = 0.$$

В силу определения скобки Пуассона можно переписать это выражение в виде

$$\operatorname{sgrad} f(\{g, h\}) - [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g](h) +$$
$$+ (\text{цикл. перестановка}) = 0.$$

Переписывая еще раз, получим тождество Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} - \operatorname{sgrad} f(\operatorname{sgrad} g(h)) + \operatorname{sgrad} g(\operatorname{sgrad} f(h)) +$$

$$+(\text{цикл. перестановка}) = \{g, \{f, h\}\} + (\text{цикл. перестановка}) = 0.$$

Получим теперь правило Лейбница

$$\{h, fh\} = (\operatorname{sgrad} h)(fh) = ((\operatorname{sgrad} h)f)g + f(\operatorname{sgrad} h)g = \\ = \{h, f\}g + f\{h, g\}.$$

□

Замечание 1. Свойство 3), т.е. тождество Якоби для скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ эквивалентно тому, что 2-форма ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$.

Замечание 2. При построении гамильтоновой механики вместо симплектической структуры на многообразии в качестве исходной структуры берут скобку Пуассона. При этом скобка Пуассона не предполагается обязательно невырожденной.

Определение 1.11. Если скобка Пуассона $\{f, g\}$ двух функций f и g на симплектическом многообразии (M, ω) обращается в нуль, то говорят, что функции f и g находятся *в инволюции*.

Утверждение 1.6. *Функция f является первым интегралом гамильтонова векторного поля, если и только если*

$$\{f, H\} \equiv 0.$$

Доказательство. Напомним, что функция f называется первым интегралом гамильтонова векторного поля, если $v(f) \equiv 0$. Имеем следующее равенство:

$$\{f, H\} = (\operatorname{sgrad} H)f = v(f) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие. *Гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ всегда имеет первый интеграл — гамильтониан H. Фактически, мы сформулировали теорему* 1.2.

Доказательство. Докажем теорему 1.2 на языке скобок Пуассона. Действительно, $\{H, H\} = \omega(\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} H) = 0$. □

Утверждение 1.7. *Пусть f и g — два первых интеграла гамильтонова векторного поля* $\operatorname{sgrad} H$*, тогда их скобка Пуассона также является первым интегралом.*

Доказательство. Доказательство следует из тождества Якоби. Действительно, используя утверждение (1.6), получим

$$\{H, \{f, g\}\} = \{f, \{H, g\}\} - \{g, \{H, f\}\} = 0.$$

□

Утверждение 1.8. *Любая линейная комбинация первых интегралов $\lambda f + \mu g$ и их произведение fg также являются первыми интегралами.*

Доказательство. Из свойства билинейности скобки Пуассона следует

$$\{\lambda f + \mu g, H\} = \lambda\{f, H\} + \mu\{g, H\} \equiv 0,$$

так как f и g — первые интегралы.

Из формулы Лейбница следует

$$\{fg, H\} = f\{g, H\} + \{f, H\}g \equiv 0,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 1.4 (Нетер). *Пусть H — гамильтониан динамической системы, σ^t — однопараметрическая группа, порожденная гамильтонианом f, H инвариантен относительно σ^t. Тогда f — первый интеграл гамильтоновой системы* $\operatorname{sgrad} H$.

Доказательство. По предположению теоремы, H — первый интеграл для потока f, т.е. $\{f, H\} = 0$. Тогда верно и обратное: f является первым интегралом для потока H. $\square$

Определение 1.12. Многообразие M размерности n (не обязательно четной) называется *пуассоновым*, если задана линейная операция $\{\cdot, \cdot\}$, которая определена на множестве гладких функций $\{\cdot, \cdot\}\colon C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} A^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

где A^{ij} — кососимметрическая матрица, не обязательно невырожденная, или, иначе, кососимметрическое тензорное поле, т.е. 2-форма на кокасательном пространстве к многообразию, гладко зависящая от точки. Эта операция удовлетворяет тождеству Якоби.

Операция $\{\cdot, \cdot\}$ определяет Пуассонову структуру, а соотношение на компоненты тензоры A^{ij} в точности эквивалентно тождеству Якоби.

Замечание 3. Термины «скобка Пуассона» и «пуассонова структура» часто употребляют как синонимы.

Замечание 4. Пуассонова структура может быть вырожденной.

Замечание 5. Любое симплектическое многообразие является Пуассоновым, обратное утверждение неверно (например, нечетномерное многообразие не является симплектическим).

Замечание 6. Условие записи формы в каноническом виде можно эквивалентным образом переписать на языке скобок Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{p_i, q^j\} = \delta_{ij}, \qquad \{q^i, q^j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Замечание 7. На кокасательном расслоении $T^*\mathbb{R}^n$ уравнения Гамильтона переписываются на языке скобок Пуассона в следующем виде:

$$\frac{dq}{dt} = \{q, H\}, \qquad \frac{dp}{dt} = \{p, H\}. \tag{2}$$

Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, $C^\infty(M)$ — пространство гладких функций на M. Пусть на этом пространстве определена скобка Пуассона $\{f, g\}$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Теорема 1.5. *Гамильтонова система* $\operatorname{sgrad} H$ *сохраняет симплектическую структуру, т.е.*

$$L_{\operatorname{sgrad} H}\omega = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Мы хотим доказать, что форма на любых двух векторах равна нулю. Рассмотрим произвольные функции f и g. Поскольку форма невырождена, то, без ограничения общности, можно считать, что векторы $\operatorname{sgrad} g$ и $\operatorname{sgrad} f$ — произвольные.

Имеем

$$L_{\operatorname{sgrad} H}[\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)] = L_{\operatorname{sgrad} H}\{g, f\} = \{H, \{g, f\}\}.$$

Воспользуемся правилом Лейбница и запишем

$$L_{\operatorname{sgrad} H}[\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)] = (L_{\operatorname{sgrad} H}\omega)(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) +$$
$$+ \omega(L_{\operatorname{sgrad} H}\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) + \omega(\operatorname{sgrad} f, L_{\operatorname{sgrad} H}\operatorname{sgrad} g)$$

(здесь мы использовали свойство $L_{\operatorname{sgrad} H}\operatorname{sgrad} f = \operatorname{sgrad}\{H, f\}$). Тогда, используя тождество Якоби, получим искомый результат. $\square$

Следствие (Теорема Лиувилля)**.** *Гамильтонова система* $\operatorname{sgrad} H$ *сохраняет гладкую меру (форму объема)*

$$L_{\operatorname{sgrad} H}\omega \wedge \ldots \wedge \omega = 0.$$

Определение 1.13. Рангом скобки Пуассона в фиксированной точке $x \in M$ называется ранг тензора $A^{ij}(x)$. Рангом скобки Пуассона на всем многообразии M называется число $R = \max\limits_{x \in M} \operatorname{rank} A^{ij}(x)$.

Определение 1.14. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *центральной функцией* или *функцией Казимира* скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, если $\{f,g\}=0$ для любой гладкой функции g.

Если скобка Пуассона невырождена, т.е. ее ранг равен $\dim M$, то центральными функциями являются лишь константы.

Каждой гладкой функции H на пуассоновом многообразии M можно поставить в соответствие векторное поле $v = \operatorname{sgrad} H$, задаваемое соотношением

$$v(g) = \{H, g\}$$

для любой гладкой функции g или в локальных координатах

$$v^i = (\operatorname{sgrad} H)^i = A^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Векторные поля вида $v = \operatorname{sgrad} H$ называются *гамильтоновыми*.

Следующая теорема помогает понять устройство пуассоновых многообразий и их связь с симплектическими. Пуассоново многообразие разбивается на симплектические слои, каждый из которых является локально симплектическим подмногообразием, размерность которого равна рангу скобки Пуассона в любой его точке. Касательное пространство к симплектическому слою в точке $x \in M$ образовано векторами вида $\operatorname{sgrad} H(x)$. Приведем определение симплектического слоя. Назовем две точки $x,\ y \in M$ пуассонова многообразия эквивалентными, если существует соединяющая их кусочно-гладкая кривая, каждый сегмент которой является траекторией гамильтонова векторного поля. Тогда симплектический слой, проходящий через точку x, есть класс эквивалентности этой точки.

Ясно, что если скобка Пуассона невырождена, то пуассоново многообразие является симплектическим.

2. Группы и алгебры Ли. Теорема Нетер

При изучении гамильтоновых систем мы неизбежно сталкиваемся с таким явлением как симметрии. Одним из важнейших свойств гамильтоновой системы с симметрией является наличие интегралов движения. Рабочим инструментом для изучения симметрий служит теория групп и алгебр Ли.

Приведем формальное определение алгебры Ли.

Определение 2.1. Пусть G — линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел. Пространство G называется *алгеброй Ли*, если в нем задана операция $[X, Y]$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]$ для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (билинейность);
2) $[X,Y] = -[Y,X]$ — кососимметричность;
3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ — тождество Якоби.

Определение 2.2. Пусть G — конечномерная алгебра Ли, а $e_1, \ldots, e_n$ — ее базис. Тогда $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$. Набор c^k_{ij} является тензором, который называется структурным. На языке структурного тензора свойство 2) переписывается в виде $c^k_{ij} = -c^k_{ji}$, а свойство 3) — в виде

$$c^b_{pk}c^p_{ij} + c^b_{pi}c^p_{jk} + c^b_{pj}c^p_{ki} = 0.$$

Замечание. Скобка Пуассона превращает пространство гладких функций на многообразии M в бесконечномерную алгебру Ли.

Простейшим примером алгебры Ли служит алгебра матриц $M(n, \mathbb{R}^n)$ порядка n, умножение Ли в которой задается правилом

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Пусть ξ, η — два векторных поля на многообразии M. Векторное поле можно понимать как дифференциальный оператор на скалярных полях φ. Рассмотрим коммутатор $[\xi,\eta]=\xi\eta-\eta\xi$ (здесь $\xi\eta$ — композиция операторов ξ, η).

Утверждение 2.1. *Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — локальная система координат на многообразии M^n, относительно которой вычисляются координаты векторных полей $\xi=(\xi^1,\dots,\xi^n)$ и $\eta=(\eta^1,\dots,\eta^n)$ на нем, тогда $[\xi,\eta]$ — векторное поле с компонентами $[\xi,\eta]^i=\xi^k\dfrac{\partial\eta^i}{\partial x^k}-\eta^k\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x^k}$.*

Доказательство. Вычислим коммутатор

$$[\xi,\eta]\varphi=\xi\eta\varphi-\eta\xi\varphi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\eta^j\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)-\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\xi^j\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)=$$
$$=\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}.$$

Здесь мы учли, что

$$\xi^i\eta^j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}-\xi^j\eta^i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j\partial x^i}=0$$

в силу соотношения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j\partial x^i}.$$

Утверждение доказано. □

Определение 2.3. Векторное поле $[\xi,\eta]$ называется *коммутатором* полей ξ и η.

Очевидно, пространство $V(M)$ векторных полей на гладком многообразии M относительно коммутатора векторных полей $[\xi,\eta]$ образует алгебру Ли. Алгебра Ли векторных полей бесконечномерна.

Определение 2.4. Для произвольной алгебры Ли G определим линейное отображение $\mathrm{ad}_\xi\colon G\to G$, $\xi\in G$, формулой $\mathrm{ad}_\xi(\eta)=[\xi,\eta]$. Отображение ad_ξ является дифференцированием алгебры Ли G

$$\mathrm{ad}_\xi([\eta,\zeta])=[\mathrm{ad}_\xi(\eta),\zeta]+[\eta,\mathrm{ad}_\xi(\zeta)].$$

Определение 2.5. Подпространство H в алгебре Ли G называется *подалгеброй*, если $[\xi,\eta]\in H$ для любых ξ, $\eta\in H$.

Определение 2.6. Подалгебра K в алгебре Ли G называется *идеалом*, если $[\xi,\eta]\in K$ для любых $\xi\in K$, $\eta\in G$.

Определение 2.7. Алгебра Ли G называется *коммутативной* (или *абелевой*), если $[\xi,\eta]=0$ для любых ее элементов.

Если G — коммутативная алгебра Ли, то любое ее подпространство является подалгеброй и идеалом. Пространство $Z(G)=\{\xi\in G|ad_\xi=0\}$ называется *центром* алгебры Ли G, $Z(G)$ — идеал в G.

Определение 2.8. Гомоморфизм алгебры Ли G_1 в алгебру Ли G_2 — это такое линейное отображение $f\colon G_1\to G_2$, что $f[\xi,\eta]=[f(\xi),f(\eta)]$. Подпространство $\mathrm{Ker}\, f=\{\xi\in G_1|f(\xi)=0\}$ называется *ядром* гомоморфизма f.

Утверждение 2.2. *Ядро любого гомоморфизма является идеалом.*

Пусть G — произвольная алгебра Ли. Определим цепочку идеалов

$$G\supset G^{(1)}\supset\dots\supset G^{(i)}\supset\cdots$$

формулой $G^{(i)}=(G^{(i-1)})^{(1)}$, где $G^{(1)}$ — подалгебра, которая является линейной оболочкой коммутаторов $[\xi,\eta]$, $\xi,\eta\in G$. Для конечномерной алгебры Ли G эта цепочка стабилизируется, т.е. найдется такой номер i, что $G^{(i)}=G^{(i+1)}=\dots$.

Определение 2.9. Если цепочка производных алгебр Ли $G \supset G^{(1)} \supset \dots \supset G^{(i)} \supset \cdots$ стабилизируется на нуле, то G называется *разрешимой* алгеброй Ли.

Определение 2.10. *Радикалом* алгебры Ли G называется максимальный разрешимый идеал в G.

Определение 2.11. Алгебра Ли называется *полупростой*, если форма Киллинга невырождена.

Определение 2.12. Значение формы Киллинга на двух элементах алгебры Ли определяется по формуле

$$(\xi, \eta) = \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_\xi \operatorname{ad}_\eta.$$

Утверждение 2.3. *Если радикал J алгебры Ли G равен нулю, то G является полупростой алгеброй Ли.*

Определение 2.13. Алгебра Ли G называется *редуктивной*, если $G = H \oplus G_1$, где H — абелева алгебра Ли, а G_1 — полупростая алгебра Ли и $[\xi, \eta] = 0$ для $\xi \in H$, $\eta \in G$.

Определение 2.14. Многообразие $\mathfrak{G}$ называется *группой Ли*, если оно является группой, причем отображения φ и ψ, задающие групповую структуру, являются гладкими

$$\varphi \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}, \quad \text{где} \quad \varphi(g) = g^{-1},$$
$$\psi \colon \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}, \quad \text{где} \quad \psi(g, h) = gh.$$

Для каждого элемента $g \in \mathfrak{G}$ группы Ли $\mathfrak{G}$ определены два диффеоморфизма $R_g \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $L_g \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, называемые, соответственно, правым и левым сдвигом и определяемые равенствами $R_g(x) = xg$ и $L_g(x) = gx$ соответственно, где $x \in \mathfrak{G}$.

Определение 2.15. Векторное поле ξ на группе Ли $\mathfrak{G}$ называется *левоинвариантным* (*правоинвариантным*), если $(L_a)_*\xi = \xi$ для любого $a \in \mathfrak{G}$ ($(R_a)_*\xi = \xi$).

Каждое левоинвариантное векторное поле однозначно определяется своим значением в единице $e \in \mathfrak{G}$ группы Ли $\mathfrak{G}$.

Пространство левоинвариантных векторных полей на группе Ли является конечномерным линейным подпространством в пространстве всех векторных полей. Его размерность равна размерности группы Ли. Если ξ, η — левоинвариантные векторные поля, то их коммутатор $[\xi, \eta]$ — левоинвариантное векторное поле.

Определение 2.16. Алгебра Ли $\mathfrak{G}$ левоинвариантных векторных полей на группе Ли $\mathfrak{G}$ называется алгеброй Ли группы Ли $\mathfrak{G}$.

Утверждение 2.4. *Оператор* sgrad *осуществляет гомоморфизм алгебры Ли гладких функций на многообразии в алгебру Ли векторных полей, т.е. для любых двух функций f, g на симплектическом многообразии выполняется равенство*

$$\operatorname{sgrad} \{f, g\} = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g].$$

Доказательство. Запишем тождество Якоби

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0$$

в виде

$$-(\operatorname{sgrad} \{f, g\})h - (\operatorname{sgrad} g)(\operatorname{sgrad} f)h + (\operatorname{sgrad} f)(\operatorname{sgrad} g)h = 0.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}(\operatorname{sgrad} \{f, g\})h = -(\operatorname{sgrad} g)(\operatorname{sgrad} f)h + (\operatorname{sgrad} f)(\operatorname{sgrad} g)h = \\ = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g]h,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Следствие. *Гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли всех векторных полей.*

Определение 2.17. Гладкое отображение $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathfrak{G}$ называется однопараметрической подгруппой в группе Ли $\mathfrak{G}$, если

1) $f(t_1+t_2) = f(t_1)f(t_2)$ для всех t_1, $t_2 \in \mathbb{R}^1$;
2) $f(0) = e$, где e — единица группы Ли $\mathfrak{G}$.

Говорят, что группа Ли $\mathfrak{G}$ действует на многообразии M, если задано такое гладкое отображение $h\colon \mathfrak{G} \times M \to M$, что

1) $\widehat{g_1 g_2} = \hat{g}_1 \cdot \hat{g}_2$, $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$;
2) $\hat{e} = id$, где $\hat{g}(x) = h(g,x)$ и $id(x) = x$ — тождественное отображение.

Имеется естественное соответствие между следующими объектами:

1) однопараметрические подгруппы в группе Ли $\mathfrak{G}$;
2) касательные векторы на группе Ли $\xi \in T_e\mathfrak{G}$ в единице группы Ли $\mathfrak{G}$;
3) левоинвариантные векторные поля на группе Ли $\mathfrak{G}$.

Все однопараметрические подгруппы группы Ли $\mathfrak{G}$ можно собрать в одно универсальное отображение $\exp\colon G \to \mathfrak{G}$, при котором $\exp t\xi\colon \mathbb{R}^1 \to G \to \mathfrak{G}$ задает однопараметрическую подгруппу с вектором скорости ξ в единице $e \in \mathfrak{G}$. Отображение $\exp$ называется *экспоненциальным отображением* группы Ли $\mathfrak{G}$ (G — алгебра Ли группы Ли $\mathfrak{G}$).

Пусть группа Ли $\mathfrak{G}$ действует на многообразии M. Тогда определен касательный гомоморфизм $\xi \to \hat{\xi}$, $\xi \in G$, $\hat{\xi} \in V(M)$, алгебры Ли G группы Ли $\mathfrak{G}$ в алгебру Ли $V(M)$ векторных полей на многообразии M

$$\hat{\xi}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \widehat{\exp(t\xi)}(x).$$

Группа Ли $\mathfrak{G}$ действует на $\mathfrak{G}$ посредством сопряжения $\hat{g}(x) = gxg^{-1}$, $x \in \mathfrak{G}$. Оператор $\hat{g}(x)$ переводит единичный элемент группы $\mathfrak{G}$ в себя. Это действие называется присоединенным и обозначается $i_g(x) = \hat{g}(x)$. Оно порождает линейное действие группы Ли $\mathfrak{G}$ на алгебре G, обозначаемое Ad. Это представление называется присоединенным представлением группы Ли $\mathfrak{G}$

$$\mathrm{Ad}_g x = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g\exp(tx)g^{-1}.$$

Пусть G^* — пространство, дуальное к G, т.е. пространство всех линейных отображений $\alpha\colon G \to \mathbb{R}$. Коприсоединенное представление Ad^* группы Ли $\mathfrak{G}$ определяется равенством

$$\mathrm{Ad}^*_g\xi(x) = \xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}x),$$

где $g \in \mathfrak{G}$, $\xi \in G^*$, $x \in G$.

Пусть M — многообразие, $\mathcal{F}(M)$ — пространство функций на M, снабженное пуассоновой структурой и на M действует группа Ли $\mathfrak{G}$. Тогда на M действует также алгебра Ли G группы $\mathfrak{G}$ (как алгебра Ли векторных полей на M). Т.е. элементу $\xi \in G$ мы ставим в соответствие векторное поле $\hat{\xi}(x)$ на M. Предположим дополнительно, что действие таково, что каждому полю $\hat{\xi}(x)$ можно сопоставить функцию f_ξ на M такую, что

$$\hat{\xi}(x) = \operatorname{sgrad} f_\xi(x), \qquad f_{\xi+\eta} = f_\xi + f_\eta.$$

Такое действие группы $\mathfrak{G}$ назовем гамильтоновым, если имеет место равенство

$$f_{[\xi,\eta]} = \{f_\xi, f_\eta\},$$

(т.е. соответствие $\xi \to f_\xi$ — гомоморфизм алгебры Ли G и алгебры Ли функций на M).

Сформулируем теорему Нетер в следующем виде.

Теорема 2.1 (Нетер)**.** *Если гамильтониан H инвариантен относительно группы $\mathfrak{G}$, которая действует на M гамильтоново, то векторное поле* $\operatorname{sgrad} H$ *имеет алгебру первых интегралов, изоморфную алгебре G. Эти первые интегралы называются интегралами Нетер и являются как раз f_ξ.*

3. Интегрируемость

Какую систему дифференциальных уравнений можно считать интегрируемой (разрешимой)? Ответ зависит от того, что мы понимаем под интегрируемостью. Хорошо известен классический подход: система дифференциальных уравнений интегрируема, если решение может быть получено за конечное число алгебраических операций (включая решение систем алгебраических уравнений) и квадратур, т.е. считая неопределенные интегралы от известных функций данными. Такие системы называются интегрируемыми в квадратурах.

Пусть динамическая система, заданная на многообразии M, описывается гладким векторным полем $v(x) = (v_1, \ldots, v_n)$:

$$\dot{x}_i = v_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{4}$$

Его фазовый поток есть однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\sigma^t \colon M \to M$.

Приведем достаточно простую, но важную теорему об интегрируемости.

Теорема 3.1. *Если система n дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = v(x) \tag{5}$$

имеет $n-1$ независимых почти всюду первых интегралов, то она интегрируема в квадратурах.

Доказательство. Для доказательства сделаем замену переменных, принимая $n-1$ интегралов за новые координаты $x_2, \ldots, x_n$. Тогда система уравнений (5) запишется в виде

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_n = 0.$$

Следовательно, $x_k = c_k = \mathrm{const}$ $(k \leqslant 2)$, а координата x_1 может быть найдена обращением квадратуры

$$t = \int \frac{dx_1}{v_1(x_1, c)}.$$

□

В соответствии с теоремой о выпрямлении траекторий в малой окрестности неособой точки фазового потока v (в которой v отлично от нуля) всегда существуют $n-1$ независимых интегралов. Однако только в исключительных случаях эти локальные интегралы могут быть распространены до функций на всем фазовом пространстве.

Приведем еще одну важную теорему об интегрируемости, доказательство которой основывается на предыдущей теореме.

Теорема 3.2 (Эйлера—Якоби). *Если система n дифференциальных уравнений имеет инвариантную меру и $n-2$ независимых почти всюду первых интегралов, то она интегрируется в квадратурах.*

3.1. Разделение переменных. Уравнение Гамильтона—Якоби. Некоторые интегрируемые гамильтоновы системы могут быть явно решены с помощью простого и эффективного метода разделения переменных. Согласно Якоби, проблема решения канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (p, q) \in \mathbb{R}^{2n},$$

сводится к нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби [2, 21]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q}, q, t\right) = 0. \tag{6}$$

Полный интеграл представляет собой n-параметрическое семейство решений $V(t,q,x)$, удовлетворяющее условию невырожденности

$$\det\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial x}\right\| \neq 0.$$

Если гамильтониан $H(p,q)$ не зависит явно от времени, то заменой $V(q,t) = -Kt + W(q)$ уравнение (6) сводится к

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q}, q\right) = K(x). \tag{7}$$

Функция $W(q,x)$ является полным интегралом (7). Ее можно принять в качестве производящей функции канонического преобразования $(p,q) \to (y,x)$:

$$y = \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad p = \frac{\partial W}{\partial q};$$

причем выполняется условие

$$\det\left\|\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial x}\right\| = \det\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial x}\right\| \neq 0.$$

В новых канонических координатах x, y функция $H(p,q) = K(x)$ не зависит от y и, следовательно, уравнения Гамильтона сразу интегрируются:

$$x = x_0, \qquad y = y_0 + \omega(x_0)t, \qquad \omega(x) = \frac{\partial K}{\partial x}.$$

Для однозначного задания функции K используются дополнительные условия. Обычно выбирают $K(x_1,\ldots,x_n) = x_n$: траектории системы с таким гамильтонианом — прямые линии в $\mathbb{R}^2 = (x,y)$.

Если уравнение Гамильтона—Якоби обладает полным интегралом вида

$$W(q,x) = \sum_{k=1}^{n} W_k(q_k, x_1, \ldots, x_n),$$

то говорят, что переменные $q_1,\ldots,q_n$ *разделяются*.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Предположим, что в некоторых симплектических координатах* $(p,q) = (p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$ *функция Гамильтона* $H(p,q)$ *имеет один из следующих видов*:

1) $H = f_n(f_{n-1}(\ldots f_2(f_1(p_1,q_1),p_2,q_2),\ldots,p_{n-1},q_{n-1}),p_n,q_n)$,
2) $H = \sum f_s(p_s,q_s) \Big/ \sum g_s(p_s,q_s)$.

Тогда функции

1) $F_1 = f_1(p_1,q_1)$, $F_2 = f_2(f_1(p_1,q_1),p_2,q_2),\ldots,F_n = H$,
2) $F_0 = H$, $F_s = f_s(p_s,q_s) - Hg_s(p_s,q_s)$, $1 \leqslant s \leqslant n$,

образуют полный набор интегралов в инволюции гамильтоновой системы с гамильтонианом H.

Лиувиллевы системы.

Определение 3.1. Динамическая система называется *лиувиллевой системой*, если существуют координаты q_j, в которых гамильтониан записывается как сумма потенциальной U и кинетической энергии T:

$$H = T + U,$$

где

$$T = \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot q_j^2}{a_j} = \frac{1}{2C}\sum_{j=1}^{n} a_j p_j^2, \qquad U = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{n} u_j, \qquad C = \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Функции a_j, c_j, u_j зависят только от переменных q_j.

Для этих систем

$$\dot{q}_j = \frac{a_j}{C} p_j.$$

Такие системы можно легко проинтегрировать. Не трудно проверить, что величины

$$I_j = \frac{1}{2} a_j p_j^2 + u_j - Hc_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

являются интегралами движения.

Эти интегралы называются интегралами Лиувилля. Следует отметить, что только $(n-1)$ интегралов являются независимыми, так как

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0.$$

Таким образом, с учетом гамильтониана H, мы имеем n квадратичных интегралов движения. Очевидно, что все эти интегралы находятся в инволюции

$$\{I_j, I_k\} = 0,$$

и, следовательно, система вполне интегрируема.

Уравнения движения можно, например, проинтегрировать следующим образом. Из равенств $I_j = \alpha_j = \mathrm{const}$ получим систему дифференциальных уравнений для величин q_j

$$\frac{dq_j}{a_j p_j} = \frac{dt}{C(q_1, \ldots, q_n)}, \qquad p_j^2 = \frac{2(\alpha_j + Ec_j - u_j)}{\alpha_j}.$$

Здесь E — значение полной энергии. Следовательно,

$$\frac{dq_j}{\sqrt{2a_j(\alpha_j + Ec_j - u_j)}} = \frac{dt}{C(q_1, \ldots, q_n)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Перейдем к новому локальному времени τ, согласно формуле

$$d\tau = \frac{dt}{C(q_1, \ldots, q_n)}.$$

Тогда приходим к системе

$$\frac{dq_j}{\sqrt{2a_j(\alpha_j + Ec_j - u_j)}} = d\tau.$$

В результате с помощью квадратур находим $q_j = f_j(\tau)$. Затем, используя квадратуру

$$t = \int^{\tau} C(q_1(\tau'), \ldots, q_n(\tau'))\, d\tau',$$

выразим τ через t. Т.е. решение задачи свелось к решению последовательных одномерных задач.

Системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Конфигурационное пространство в данной задаче есть $M^2(x_1, x_2)$. Лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2))(\alpha_1(x_1)\dot{x}_1^2 + \alpha_2(x_2)\dot{x}_2^2) - \frac{\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2}{\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)},$$

где

$$\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2) \neq 0, \quad \alpha_1(x_1) > 0, \quad \alpha_2(x_2) > 0.$$

Рассматриваемая система имеет интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha_1 \dot{x}_1^2 + \alpha_2 \dot{x}_2^2) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

и дополнительный интеграл (интеграл Лиувилля)

$$L = \frac{1}{2}(\lambda_2 \alpha_1 \dot{x}_1^2 - \lambda_1 \alpha_2 \dot{x}_2^2) + \frac{\varphi_1 \lambda_2 - \varphi_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Решая систему первых интегралов относительно обобщенных скоростей $\dot{x_1}$, $\dot{x_2}$, из условий $H = h$, $L = l$ получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)]a_1(x_1)\dot{x_1}^2 + \Phi_1(x_1, h, l) = 0,\\ \frac{1}{2}[\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)]a_2(x_2)\dot{x_2}^2 + \Phi_2(x_2, h, l) = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_1(x_1, h, l) = \varphi_1(x_1) - h\lambda_1(x_1) - l,\\ \Phi_2(x_2, h, l) = \varphi_2(x_2) - h\lambda_2(x_2) + l.\end{gathered} \tag{9}$$

Из уравнений (8) видно, что области возможности движения определяются условием

$$\Phi_1(x_1, h, l) \leqslant 0, \qquad \Phi_2(x_2, h, l) \leqslant 0.$$

Пусть

$$\begin{gathered}\Omega_1 = \{x_1 \colon \Phi_1(x_1, h, l) \leqslant 0\} \subset \mathbb{R},\\ \Omega_2 = \{x_2 \colon \Phi_2(x_2, h, l) \leqslant 0\} \subset \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{10}$$

Тогда имеем

$$\Omega_{h,l} = \Omega_1 \times \Omega_2. \tag{11}$$

Ясно, что граница [33] областей возможности движения (ОВД) определяется в данной задаче условием (в случае двух степеней свободы)

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(h, l)}{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2)} < 2,$$

т.е. имеем

$$[\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)]a_1(x_1)a_2(x_2) \det \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \lambda_2(x_2)\dot{x}_1 & -\lambda_1(x_1)\dot{x}_2 \end{pmatrix} < 2.$$

Очевидно, что это условие выполняется в двух случаях. Если $\dot{x}_1 = 0$, то из формулы (8) следует, что $\Phi_1(x_1, h, l) = 0$, если $\dot{x}_2 = 0$, то $\Phi_2(x_2, h, l) = 0$.

Из равенств (10), (11) следует, что тип движения меняется только при переходе через такие значения первых интегралов h, l, при которых хотя бы одна из функций $\Phi_1(x_1, h, l)$, $\Phi_2(x_2, h, l)$ имеет кратный корень. В этом случае векторы $\operatorname{grad} h$ и $\operatorname{grad} l$ зависимы.

Если множества (10) ограничены, то каждая связная компонента ОВД при $(h, l) \in \Sigma$ есть прямоугольник, внутри которого четыре допустимые скорости, на сторонах — две, а в вершинах прямоугольника — одна (нулевая скорость). Траектории в прямоугольнике подобны фигурам Лиссажу. В общем случае изменение типа ОВД может происходить и при (h, l), не являющихся критическими значениями отображения момента (см. § 5).

Системы Штеккеля. Лиувиллевы системы являются частным случаем систем Штеккеля. Эти системы были открыты Штеккелем в 1891 г.

Теорема 3.3. *Пусть Φ — определитель матрицы $\|\varphi_{ij}(q_j)\|$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, а Φ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента φ_{ij}. Предположим, что в канонических координатах $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ функция Гамильтона имеет следующий вид*:

$$H(p, q) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\Phi_{1s}(q) f_s(p_s, q_s)}{\Phi(q)}. \tag{12}$$

Тогда уравнения Гамильтона имеют n независимых интегралов в инволюции

$$F_k = \sum_{s=1}^{n} \frac{\Phi_{ks} f_s}{\Phi}, \quad k = 1, \ldots, n$$

и могут быть явно проинтегрированы.

Пусть $K(x) = x_1$; запишем уравнение (7)

$$\sum \Phi_{1m}\left[\sum_k x_k\varphi_{km}(q_m) - f_m\left(\frac{\partial W}{\partial q_m}, q_m\right)\right] = 0.$$

Его полный интеграл можно найти в виде суммы

$$W(q, x) = \sum_m W_m(q_m, x_1, \dots, x_n),$$

где W_m (как функция q_m) удовлетворяет уравнению

$$f_m\left(\frac{\partial W}{\partial q_m}, q_m\right) = \sum_k x_k\varphi_{km}(q_m).$$

Остается решить это обыкновенное дифференциальное уравнение.

Если система лиувиллева (частный случай), то функция Гамильтона имеет вид

$$\frac{1}{2\sum A_j}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{p_j^2}{B_j} + C_j\right],$$

где функции A_j, B_j, C_j зависят только от координаты q_j, и $\sum B_j$, $\sum C_j$ отличны от нуля. При $n = 2$ каждая система Штеккеля может быть приведена к лиувиллевой форме. Оба типа систем часто встречаются в приложениях в небесной механике.

Некоторые сведения из теории эллиптических функций. Приведем определения эллиптических функций Якоби, так как в дальнейшем они будут использоваться при интегрировании уравнений движения.

Интеграл

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}} \tag{13}$$

называется эллиптическим интегралом первого рода. Величина k называется модулем эллиптического интеграла. Обычно считается, что k удовлетворяет неравенству $0 \leqslant k < 1$. Величина

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}} \tag{14}$$

называется полным эллиптическим интегралом первого рода. Его можно представить в виде сходящегося ряда по степеням k:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \cdots\right). \tag{15}$$

Функция, являющаяся результатом обращения эллиптического интеграла первого рода, называется амплитудой и обозначается

$$\varphi = \mathrm{am}u. \tag{16}$$

Функции $z = \mathrm{sn}(u, k)$ (эллиптический синус) и $z = \mathrm{cn}(u, k)$ (эллиптический косинус) определяются так:

$$z = \mathrm{sn}(u, k) = \sin\varphi = \sin\mathrm{am}u, \tag{17}$$

$$z = \mathrm{cn}(u, k) = \cos\varphi = \cos\mathrm{am}u. \tag{18}$$

Так как $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ имеют период 2π по φ, то согласно (13) и (14), эллиптический синус и косинус имеют по u период, равный $4K(k)$.

Функция дельта-амплитуды $z = \mathrm{dn}(u, k)$ определяется таким образом

$$z = \mathrm{dn}(u, k) = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1 - k^2\sin^2(u, k)}. \tag{19}$$

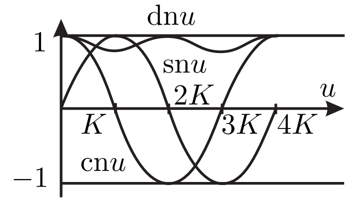


Рис. 4

Функция дельта-амплитуды имеет период $2K(k)$ по u. Функции $\varphi = \mathrm{am}u$, $z = \mathrm{sn}(u,k)$, $z = \mathrm{cn}(u,k)$, $z = \mathrm{dn}(u,k)$ аналитичны относительно k и при $k \to 0$ стремятся к функциям $\varphi = u$, $z = \sin u$, $z = \cos u$, $z = 1$ соответственно.

Эллиптические функции Якоби удовлетворяют тождествам

$$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1, \qquad \mathrm{dn}^2 u + k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1. \tag{20}$$

Справедливы следующие формулы дифференцирования эллиптических функций:

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}u = \mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u, \qquad \frac{d}{du}\mathrm{cn}u = -\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u,$$
$$\frac{d}{du}\mathrm{dn}u = -k^2\mathrm{sncn}u.$$

Графики эллиптических функций представлены на рисунке 4.

3.2. Интегрируемость по Лиувиллю. Пусть $\dot{x} = \mathrm{sgrad}\, H$ — гамильтонова система на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω).

Определение 3.2 (см. [8]). Система гамильтоновых уравнений $\dot{x} = \mathrm{sgrad}\, H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существуют гладкие функции $f_1, \ldots, f_n$ на многообразии M^{2n} такие, что:

1) функции $f_1, \ldots, f_n$ — первые интегралы потока $\dot{x}$, т.е. $\{H, f_i\} = 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2) функции $f_1, \ldots, f_n$ находятся попарно в инволюции, $\{f_i, f_j\} = 0$;
3) функции $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы почти всюду на M^{2n}, т.е. их дифференциалы линейно независимы на открытом всюду плотном множестве полной меры в M^{2n};
4) векторные поля $\mathrm{sgrad}\, f_i$ полны, т.е. определены в любой момент времени.

Семейство функций $f_1, \ldots, f_n$, удовлетворяющее свойствам определения, называется полным инволютивным набором первых интегралов.

Определение 3.3. Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \ldots, f_n$.

Каждый слой слоения Лиувилля — инвариантная поверхность.

Основную роль в качественном исследовании интегрируемых гамильтоновых систем играет теорема Лиувилля.

Теорема 3.4. *Пусть $M^{2n} = \{p, q\}$ — фазовое пространство гамильтоновой системы со стандартной скобкой Пуассона и гамильтонианом $H(p,q,t)$. Пусть канонические уравнения*

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{21}$$

обладают n интегралами движения $f_1, \ldots, f_n$ в инволюции, т.е.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \{f_i, H\} = 0, \qquad \{f_i, f_j\} = 0.$$

Если на множестве $M_\xi = \{(p,q,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \colon f_i(p,q,t) = \xi_i, i = 1,\dots,n\}$ *функции* $f_1,\dots,f_n$ *независимы, то уравнения (21) интегрируются в квадратурах.*

Обобщением этой теоремы является теорема, сформулированная в работе [23].

Теорема 3.5. *Пусть* R^{2n} — *фазовое пространство гамильтоновой системы со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом* $H(p,q,t)$. *Пусть данная система обладает* n *интегралами движения* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *таких, что*

$$\{f_i, f_j\} = \sum_k c_{ij}^k f_k, \quad c_{ij}^k = \mathrm{const}.$$

Если на множестве $M_\xi = \{(p,q,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \colon f_i(p,q,t) = \xi_i, i = 1,\dots,n\}$ *функции* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *независимы, алгебра Ли со структурными константами* c_{ij}^k *разрешима, причем* $c_{ij}^k \xi_k = 0$ *для всех* i, $j = 1,\dots,n$, *то решения системы, лежащие на* M_ξ, *можно найти в квадратурах.*

Сформулируем обобщенную теорему Лиувилля, которая описывает структуру топологии слоения Лиувилля в окрестности регулярного слоя.

Теорема 3.6 (см. [3,8]). *Пусть на симплектическом* $2n$-*мерном многообразии задана вполне интегрируемая гамильтонова система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *и* T_ξ — *регулярная поверхность уровня интегралов* $f_1,\dots,f_n$. *Тогда*

1) T_ξ — *гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока* $v = \operatorname{sgrad} H$;
2) *если многообразие* T_ξ *связно и компактно, то* T_ξ *диффеоморфно* n-*мерному тору* T^n; *этот тор называется тором Лиувилля;*
3) *слоение Лиувилля в некоторой окрестности* U *тора Лиувилля* T_ξ *тривиально, т.е. диффеоморфно произведению тора* T^n *на диск* D^n;
4) *в окрестности* $U = T^n \times D^n$ *существует система координат*

$$s_1,\dots,s_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n,$$

называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
   - $s_1,\dots,s_n$ — *координаты на диске* D^n, $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — *стандартные угловые координаты на торе* T^n, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
   - $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$;
   - *переменные действия* s_i *являются функциями от интегралов* $f_1,\dots,f_n$;
   - *в переменных действие-угол гамильтонов поток* v *выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности* U, *т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид*

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1,\dots,s_n), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

На каждом торе поток v *задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).*

Подробное доказательство этой теоремы приведено в работе [8].

Замечание 1. Если многообразие T_ξ не является компактным, то оно диффеоморфно произведению k-мерного тора и $(n-k)$-мерного евклидова пространства $T_\xi \simeq T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Замечание 2. В теореме Лиувилля основную роль играет коммутативность набора функций $f_1,\dots,f_n$, т.е. линейное пространство G функций, натянутое на $f_1,\dots,f_n$, является коммутативной алгеброй Ли размерности n.

В некоторых ситуациях гамильтоновы системы обладают набором интегралов $f_1,\dots,f_n$, которые не образуют коммутативной алгебры Ли, т.е. не находятся в инволюции. Теорема Мищенко, Фоменко обобщает теорему Лиувилля. Пусть M — симплектическое многообразие размерности $2n$ и $f_1,\dots,f_k \colon M \to \mathbb{R}$ — гладкие независимые функции. Линейная оболочка G над полем $\mathbb{R}$ функций $f_1,\dots,f_k$ имеет размерность k. Пусть G замкнута относительно скобки Пуассона, $\{f_i, f_j\} = c_{ij}^k f_k$.

Теорема 3.7. *Предположим, что на множестве уровня* $M_\xi = \{x \in M\colon f_i(x) = \xi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *дифференциалы* df_i *линейно независимы и алгебра* G *удовлетворяет условию*

$$\dim G + \operatorname{rank} G = \dim M. \tag{22}$$

Если M_ξ *связно и компактно, то оно диффеоморфно* r*-мерному тору* T^r*, где* $r = \operatorname{rank} G$*. Если функции* $f_1, \ldots, f_k$ *являются первыми интегралами гамильтоновой системы, то на* M_ξ *можно выбрать угловые координаты* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \mod 2\pi$ *так, чтобы уравнения Гамильтона* $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ *на* T^r *приняли следующий вид:* $\dot{\varphi}_s = \omega_s = \mathrm{const}$*. Интегральные траектории определяют условно-периодическое движение системы, т.е. задают прямолинейную обмотку тора* T^r*.*

Замечание 3. Если алгебра Ли G первых интегралов коммутативна, то условие $\dim G + \operatorname{rank} G = \dim M$ переходит в условие $k + k = 2n$. Таким образом, если $k = n$, то мы получим классическую коммутативную теорему Лиувилля.

4. Отображение момента. Бифуркационная диаграмма

Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова система, интегрируемая в смысле Лиувилля, на симплектическом многообразии M^{2n}. Пусть система v имеет полный набор инволютивных функционально независимых на M (почти всюду) интегралов $f_1 = H,\ f_2, \ldots, f_n$.

Тогда можно определить гладкое отображение

$$\mathcal{F} : M^{2n} \to \mathbb{R}^n.$$

Определение 4.1. Отображение $\mathcal{F}$ называется *отображением момента*.

Определение 4.2. Точка x из M называется *критической* (для $\mathcal{F}$), если ранг $d\mathcal{F}(x)$ меньше n. Ее образ $\mathcal{F}(x)$ в $\mathbb{R}^n$ называется *критическим значением*.

Определение 4.3. Пусть K — совокупность всех критических точек отображения момента в M. Тогда множество $\Sigma = \mathcal{F}(K) \subset \mathbb{R}$ называется *бифуркационной диаграммой* [8].

Таким образом, бифуркационная диаграмма — это совокупность всех критических значений отображений момента.

Рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы; тогда множество K критических точек отображения момента описывается следующим образом:

$$K = \{x \in M^4 \colon \operatorname{rank} d\mathcal{F}(x) < 2\}.$$

Бифуркационное множество Σ разбивает образ отображения момента на открытые связные двумерные множества, области. Граница области состоит из некоторого числа гладких дуг из Σ и из особых точек Σ. Особые точки бифуркационной диаграммы Σ — это точки пересечения, касания, излома гладких дуг или же изолированные точки, которые этим дугам не принадлежат. Если точка из образа отображения момента лежит строго внутри области, то ее полный прообраз состоит из какого-то числа 2-торов Лиувилля в M^4. Когда рассматриваемая точка меняется внутри области, эти торы изотопно смещаются (деформируются) внутри M^4. Если точка пересекает Σ трансверсально, переходя в соседнюю область, то возникает бифуркация торов Лиувилля, соответствующих точке из образа отображения момента. Таким образом, бифуркационная диаграмма позволяет следить за перестройками торов Лиувилля при изменении значений первых интегралов.

Определение бифуркационной диаграммы приведено для случая компактного фазового пространства гамильтоновой системы. В задачах небесной механики мы сталкиваемся также с некомпактными фазовыми пространствами. Поэтому нам понадобится более общее определение так называемой расширенной бифуркационной диаграммы.

Отображение момента для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы определяется как отображение $\mathcal{F}\colon M \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющее точке $x \in M$ фазового пространства системы пару чисел (h, l), где h — значение гамильтониана H, а l — значение дополнительного интеграла L в точке x.

Точка (h, l) называется *регулярным* значением отображения момента $\mathcal{F}$, если ее прообраз не содержит критических точек отображения $\mathcal{F}$.

Назовем точку $(h, l) \in \mathbb{R}^2$ *правильной*, если для некоторой окрестности U этой точки в плоскости значений отображения момента $\mathcal{F}$ ее прообраз $\mathcal{F}^{-1}(U)$ гомеоморфен прямому произведению $U \times \mathcal{F}^{-1}(h, l)$, а отображение $\mathcal{F}$ на этом прообразе есть проекция на первый сомножитель.

В общем случае точка (h, l) может быть правильной, но не являться регулярным значением, а также может являться регулярным значением, но не быть правильной (однако в случае, когда фазовое пространство M компактно, из регулярности следует правильность).

Бифуркационной диаграммой отображения момента называется множество точек в образе, для которых нарушается либо условие регулярности, либо условие правильности. (Иногда это множество называют также расширенной бифуркационной диаграммой Σ', а бифуркационной диаграммой — образ множества критических точек; для компактного фазового пространства эти понятия совпадают.)

В дальнейшем мы будем использовать одно и то же обозначение Σ для бифуркационной диаграммы для случая компактного и некомпактного фазового пространства, т.е. для бифуркационной диаграммы и расширенной бифуркационной диаграммы.

Отметим, что с помощью бифуркационной диаграммы можно построить классификацию областей возможности движения исследуемой системы и определить тип движения для каждой области [33]. Таким образом, мы, фактически, можем провести полный анализ динамической системы.

5. Топологические инварианты Фоменко—Цишанга

Теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем была построена А. Т. Фоменко и Х. Цишангом в цикле работ [30–32, 38]. Дальнейшее развитие эта тема получила в работах С. В. Матвеева, А. В. Болсинова, А. В. Браилова, А. А. Ошемкова [7, 9, 11, 26].

В этом параграфе мы приведем основные обозначения, определения и результаты этой теории, необходимые для топологического анализа интегрируемых задач небесной механики.

Результатом теоремы Лиувилля является утверждение, что неособая компактная поверхность уровня первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы есть объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Возникает вопрос, как перестраиваются торы Лиувилля в окрестности критических поверхностей уровня первых интегралов.

Рассмотрим гамильтонову систему $v = \operatorname{sgrad} H$ на четырехмерном симплектическом многообразии M^4. Как известно, в случае двух степеней свободы для интегрируемости системы v достаточно иметь два первых интеграла, т.е. интеграл энергии и только один дополнительный интеграл F, функционально независимый, с интегралом энергии (почти всюду на многообразии M^4).

Траектории интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы лежат на совместных поверхностях уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла F. Каждая неособая компактная связная компонента совместной поверхности уровня функций H и F является 2-мерным тором. Таким образом, все фазовое пространство системы является объединением этих торов (торов Лиувилля) и некоторых особых слоев (содержащих точки, где функции H и F зависимы). Напомним, что разбиение фазового пространства интегрируемой системы называется слоением Лиувилля. Его слоями являются связные компоненты множеств $\{H(x) = h,\ F(x) = f\}$.

Топология слоения Лиувилля содержит информацию о качественном поведении системы. Можно дать достаточно удобное и компактное описание этой топологии, рассматривая слоение Лиувилля не во всем (4-мерном) фазовом пространстве, а на его 3-мерных подмногообразиях. Естественно, эти подмногообразия должны содержать каждый слой Лиувиллева слоения целиком. Поэтому их можно представлять как прообразы некоторых кривых (на плоскости) при отображении момента $x \mapsto (H(x), F(x))$. В частности, в качестве этих кривых можно рассматривать прямые $\{h = \mathrm{const}\}$. В этом случае говорят о лиувиллевом слоении на (трехмерной) *изоэнергетической поверхности* $Q_h^3 = \{H(x) = h\}$. Очевидно, его слоями являются связные компоненты множеств $\{\tilde{F}(x) = f\}$, где $\tilde{F}$ — ограничение интеграла F на Q_h^3. Мы будем рассматривать в работе только нерезонансные системы.

Определение 5.1. Гамильтониан H называется *нерезонансным* на изоэнергетической поверхности Q_h^3, если в Q_h^3 всюду плотны торы Лиувилля, на которых траектории системы образуют плотные иррациональные обмотки.

Тор Лиувилля является нерезонансным тогда и только тогда, когда замыкание любой интегральной траектории поля, лежащей на нем, совпадает со всем тором. В резонансном случае замыкание траектории является тором строго меньшей размерности.

Определение 5.2. Интегрируемая система называется *нерезонансной* на многообразии M^{2n}, если почти все торы нерезонансны. Соответственно система называется *резонансной*, если все ее торы Лиувилля резонансны.

Определение 5.3. Дополнительный интеграл F называется *боттовским* на изоэнергетической поверхности Q_h^3, если критические точки функции f организованы в невырожденные критические подмногообразия.

Критическое подмногообразие называется «невырожденным», если ограничение функции f на любое трансверсальное к нему подмногообразие дополнительной размерности имеет морсовскую особенность в точке пересечения.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.1. *Любое критическое подмногообразие является либо окружностью S^1 (мы будем называть ее «невырожденной критической окружностью»), либо двумерным тором T^2, либо бутылкой Клейна K^2.*

В данной работе рассматриваются такие интегрируемые системы, у которых на изоэнергетических поверхностях Q_h^3 нет критических торов и бутылок Клейна.

Заметим, что любая невырожденная критическая окружность является периодической траекторией, и, следовательно, на ней имеется естественная ориентация, заданная системой.

В физике и механике возникает следующая задача. Пусть даны две интегрируемые гамильтоновы системы. Необходимо узнать, эквивалентны ли они в топологическом смысле. В большинстве случаев практически единственный способ решить эту задачу состоит в вычислении соответствующих инвариантов Фоменко—Цишанга.

Определение 5.4. Пусть (v_1, Q_1) и (v_2, Q_2) — две нерезонансные интегрируемые гамильтоновы системы с боттовскими интегралами, рассматриваемые на своих изоэнергетических поверхностях. Пусть ориентация изоэнергетических поверхностей Q_1 и Q_2 фиксирована. Скажем, что системы (v_1, Q_1) и (v_2, Q_2) лиувиллево эквивалентны, если существует диффеоморфизм $\tau\colon Q_1 \to Q_2$, который сохраняет структуру слоения Лиувилля (т.е. является послойным). Дополнительно к этому мы будем требовать, чтобы τ сохранял ориентацию 3-многообразий и ориентацию критических окружностей, задаваемую гамильтоновым векторным полем.

Определение 5.5. Будем говорить, что интегрируемая гамильтонова система топологически устойчива на данном уровне энергии $Q_h = \{H = h\}$, если при малом шевелении уровня энергии структура лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности не меняется, другими словами, при малых ε системы (v, Q_h) и $(v, Q_{h+\varepsilon})$ топологически эквивалентны.

Замечание 1. Топологическая устойчивость является свойством общего положения.

Действительно, топологический тип системы может меняться лишь в некоторых изолированных точках, т.е. имеется лишь конечное число бифуркационных значений энергии, при которых топология лиувиллевых слоений меняется скачком. Общий метод проверки топологической устойчивости состоит в исследовании бифуркационной диаграммы Σ отображения момента $\mathcal{F}\colon M^4 \to \mathbb{R}^2$. В реальных ситуациях бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких кривых, которые могут пересекаться и касаться в конечном числе точек. Именно эти точки и являются особыми точками бифуркационной диаграммы Σ. Следовательно, топологическая устойчивость уровня энергии $Q_h = \{H = h\}$ означает, что прямая $\{H = h\}$ в плоскости интегралов движения пересекает бифуркационную диаграмму трансверсально в неособых точках.

Для того чтобы описать топологическую структуру лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности Q_h, достаточно описать это слоение в (малых) инвариантных окрестностях особых слоев и указать, как из этих окрестностей склеено все многообразие Q_h.

Рассмотрим все критические значения $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ функции F и отвечающие им особые уровни $F^{-1}(c_i)$. Из предположения компактности Q_h^3 и боттовости интеграла F следует, что критических подмногообразий конечное число, в частности, критических значений функции F тоже конечное число. Выберем настолько малое положительное число ε, чтобы отрезки

$$I_k = [c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon], \quad k = 1, \ldots, n,$$

не пересекались. Прообразы $F^{-1}(I_k)$ состоят из конечного числа связных кусков. Фиксируем некоторое критическое значение c и обозначим через Q_c^3 некоторую связную компоненту прообраза $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Край подмногообразия Q_c^3 состоит из конечного числа торов Лиувилля. Обозначим через L_c множество $Q_c^3 \cap F^{-1}(c)$. Скажем, что L_c есть «связный критический уровень, отвечающий критическому значению c» или просто будем называть L_c «особым слоем». Подмногообразие Q_c^3 назовем «регулярной окрестностью особого слоя».

Определение 5.6. Окрестность Q_c^3 со структурой лиувиллева слоения называется 3-атомом. Или скажем так: класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя называется 3-атомом.

Топологическое строение Q_c^3 подробно описано в работах [8, 9].

Отметим, что если две регулярные окрестности особых слоев имеют эквивалентные атомы, то существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм одной окрестности на другую, который сохраняет слоение Лиувилля и переводит невырожденные критические окружности в невырожденные критические окружности с сохранением естественной на них ориентации, заданной полем системы.

В исследуемых задачах встречаются лишь следующие 4 атома (см. рис. 5):

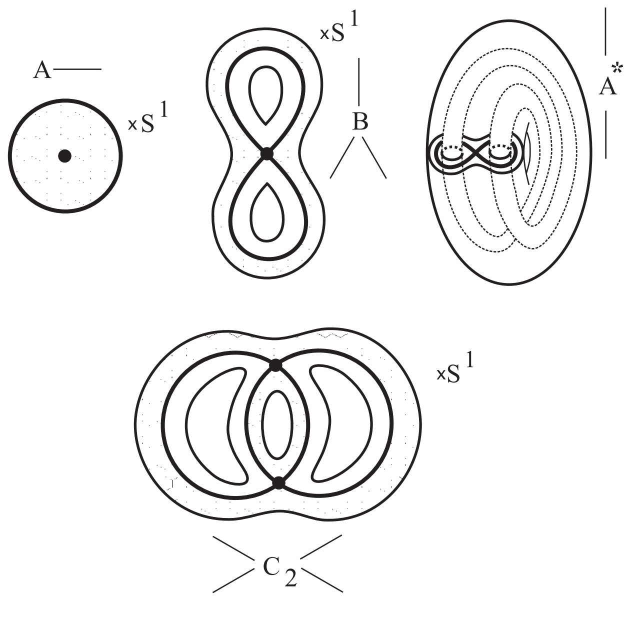


Рис. 5. Атомы A, B, A^*, C_2.

1) атом A — полноторие ($S^1 \times D^2$), расслоенное на концентрические торы (особый слой — окружность, ось полнотория);
2) атом B — полноторие, из которого вырезаны два тонких полнотория, ($N^2 \times S^1$) (особый слой — прямое произведение «восьмерки» на окружность, N^2 — окрестность «восьмерки»);
3) атом A^* — полноторие, из которого вырезано одно тонкое полноторие, обходящее два раза вдоль оси, ($N^2 \tilde{\times} S^1$) (особый слой — косое произведение «восьмерки» на окружность);

4) атом C_2 — полноторие, из которого вырезаны три тонких полнотория, $(M^2 \times S^1)$ (особый слой — прямое произведение «двух пересекающихся окружностей» на окружность, M^2 — окрестность «двух пересекающихся окружностей»).

Атомы описывают бифуркации торов Лиувилля при прохождении критического значения функции $\tilde{F}$. Атому A соответствует рождение или исчезновение тора, атому B — распад одного тора на два или слияние двух торов в один, атому A^* — перестройка одного тора в один тор, атому C_2 — перестройка двух торов в два тора.

Границы атомов склеиваются при помощи однопараметрических семейств торов Лиувилля, не содержащих особых слоев. Схему этой склейки можно описать при помощи ориентированного графа, каждой вершине которого сопоставлен некоторый атом, а ребрам — однопараметрические семейства торов. Такой граф называется *молекулой* данной изоэнергетической поверхности.

Молекула описывает структуру слоения Лиувилля с точностью до так называемой грубой лиувиллевой эквивалентности. Это означает, что склейки граничных торов атомов вдоль ребер неоднозначны. Однако эти склейки можно однозначно охарактеризовать при помощи некоторых числовых меток [8]. В результате получается *меченая молекула* (или *инвариант Фоменко—Цишанга*), которая уже определяет тип лиувиллева слоения однозначно с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Глава 2

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

6. Исторический очерк

Этому параграфу о построении «неевклидовой геометрии» (термин был придуман немецким математиком Гауссом) можно предпослать слова философа XVIII века П. Бейля: «...Воззрение, будто взгляд, переходящий из века в век, от поколения к поколению, не может быть всецело ложным, — чистейшая иллюзия».

«Общеизвестно, что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает нормальные определения понятий, тогда как существенные свойства определенных объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно также a priori, возможна ли такая связь» (Риман).

«Среди аксиом Евклида была одна, которая казалась математикам непосредственно менее очевидной, чем другие; в течение долгого времени они стремились свести ее к другим, т.е. доказать ее с их помощью» (Эйнштейн). Это была так называемая аксиома о параллельных (пятый постулат).

Точная формулировка постулата, данная Евклидом, следующая: Если две прямые, встречающиеся с третьею, составляют по одну сторону ее внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти две прямые, продолженные неограниченно, встречаются с той стороны, с которой сумма углов меньше двух прямых.

Во многих изданиях это положение фигурирует в числе аксиом.

Следующие три постулата преподаются в средней школе.

1) Между двумя точками можно провести лишь одну прямую.
2) Прямая линия есть кратчайший путь между двумя точками.
3) Через данную точку на плоскости можно провести лишь одну прямую, не пересекающую данную.

Формулировка последнего постулата эквивалентна пятому постулату Евклида в формулировке, данной английским математиком Plaifair (1748–1819) в 1797 г. в «Elements of mathematics»: через точку, лежащую вне прямой, может быть проведена только одна прямая — параллельная, т.е. не пересекающаяся с данной. Выдающийся русский математик В. Я. Буняковский сформулировал пятый постулат таким образом: наклонная и перпендикуляр к одной и той же прямой линии, по достаточном их продолжении, всегда пересекутся.

Тысячи лет математики пытались доказать аксиому о параллельных, но не добились успеха. Как сказал Анри Пуанкаре (1854-1912): «Долгое время тщетно искали доказательства аксиомы, известной под именем постулата Евклида. Сколько было потрачено сил в этой химерической надежде, положительно не поддается описанию. Наконец, в начале прошлого столетия и почти одновременно двое ученых (русский Лобачевский и венгерский Больяи) установили неопровержимо, что это доказательство невозможно; этим они почти совсем избавили нас от изобретателей геометрии без постулата Евклида; с тех пор парижская Академия Наук получает не более одного-двух новых доказательств в год.»

Лобачевский по поводу доказательства пятого постулата в учебнике геометрии, написанном им в 1823 г. в главе «Об измерении прямоугольников» пишет: «Измерение плоскостей основывается на том, что две линии сходятся, когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна перпендикулярна, а другая наклонена под острым углом, обращенным к перпендикуляру. Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать; какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами.» (Рукопись учебника, которая называлась «Геометрия», была представлена в Казанский университет для издания на казенный счет, но коллеги Лобачевского не дали положительный отзыв, и рукопись была направлена на рассмотрение попечителю Казанского учебного округа М. Л. Магницкому. Магницкий, в свою очередь, направил рукопись академику Н. И. Фуссу с просьбой дать на нее отзыв. Фусс дал резко отрицательный отзыв, и учебник геометрии Лобачевского не был напечатан. Впервые рукопись «Геометрия» была опубликована в 1909 г. благодаря профессору Н. П. Загосскину.)

Установить невозможность доказательства постулата Евклида можно было только одним способом: предположить, что такое доказательство невозможно, т.е. что эта аксиома не сводится к другим. Следовательно, для этого необходимо было построить новую непротиворечивую геометрию, отличающуюся только тем, что аксиома о параллельных заменена другой. Первым к этому выводу пришел Лобачевский, независимо от него новую геометрию открыл венгерский математик, военный инженер Янош Больяи (1802–1860). Оригинальные результаты своего исследования проблемы параллельных он опубликовал в 1832 г. в виде приложения к первому тому курса математики, который написал и издал его отец Фаркаш Больяи (1775–1856). Поэтому исследование Я. Больяи вошло в историю науки под названием «Аппендикс».

Н. И. Лобачевский впервые выступил о своем новом учении 12 февраля 1826 г. с докладом «Exposition succinte des princpes de la Geometrie, avec une demonstration rigoureuse du theoreme des paralleles» на заседании физико-математического отделения Казанского университета (доклад не был напечатан и не дошел до нас). Извлечение из этого доклада Лобачевский опубликовал в 1829 г. в «Казанском вестнике, издаваемом при Императорском Казанском Университете» под названием «О началах геометрии».

Ученый мир не принял нового учения. Роковую роль в этом сыграл академик М. В. Остроградский. Совет Казанского университета направил (по инициативе Лобачевского) 19 августа 1832 г. экземпляр сочинения «О началах геометрии» в Императорскую Санкт-Петербургскую Академию наук. Академия наук 5 сентября передала это сочинение на рассмотрение академику М. В. Остроградскому. Через месяц 7 ноября академик дал ответ: сочинение не заслуживает внимания академии.

Труды Лобачевского, посвященные Воображаемой геометрии, подвергались осмеянию. О геометрических исследованиях Лобачевского говорилось, что гора мышь родила, его современники считали эти исследования ничтожными перед тем научным авторитетом, которым пользовался Лобачевский по другим отраслям математики, настолько необычен и нетрадиционен был его взгляд на геометрию пространства. Лишь спустя много лет, после смерти Лобачевского его учение было признано ученым миром. Лобачевский сделал первый шаг к изменению традиционных взглядов на пространство.

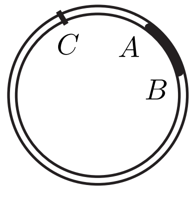


Рис. 6

Английский математик Вильям Кингдон Клиффорд (1845–1879) писал о Лобачевском: «Чем Везалий был для Галена, чем Коперник был для Птолемея, тем был Лобачевский для Евклида. Между Коперником и Лобачевским существует поучительная параллель. Коперник и Лобачевский — оба славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных идеях, и значение каждой из этих революций одинаково велико. Причина громадного значения и той и другой революции заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса... До Лобачевского казалось, что мы имеем реальное знание чего-то, относящегося ко всему космосу, чего-то верного во всех неизмеряемостях и во всей вечности. Это убеждение опровергнуто Лобачевским и его преемниками. Современный геометр не знает ничего о природе действительно существующего пространства на бесконечно большом расстоянии, он не знает ничего о свойствах существующего пространства в прошедшем или будущем вечности. Он знает, конечно, что законы, данные Евклидом, верны с точностью, до которой не может достичь точнейший опыт, не только в том месте, где мы находимся, но и в местах, находящихся на расстоянии, недоступном представлению астронома. Но он знает только *Здесь и Теперь*. За ним есть *Там и Тогда*, о которых он ничего не знает, но о которых, может быть, узнают больше после нас. Обе революции — и Коперника и Лобачевского — заменили знание неизмеримого и вечного знанием *Здесь и Теперь*, и в результате этих революций идея вселенной, макрокосмоса, как чего-то доступного человеческому знанию, разбита в мелкие куски.» («Philosophy of the pure science» в собрании статей Клиффорда «Lectures and Essays», Second edition, London, Macmillan, 1886, pp. 212–214).

Взгляды Клиффорда на геометрию Лобачевского соответствуют его пространственной теории материи, в которой справедливо видят предвидение общей теории относительности. Чтобы не быть голословными, представим читателю некоторые рассуждения Клиффорда.

Пусть мы имеем тонкую трубку, согнутую в виде окружности, и пусть внутри нее ползет бесконечно тонкий червь длиной AB, тогда мы получим пространство одного измерения. Мы также поставим метку C на окружности.

«Что испытывает червь, путешествуя по трубке?»

1) Червь замечает, когда он проползает метку и когда он вновь возвращается в нее (в точку C).
2) Червь всюду имеет дело с одинаковой кривизной.

Следующий вопрос «Какие выводы он может сделать?»

1) Пространство ограничено, а положение относительно (его можно определить по длине дуги между C и червем).
2) Пространство всюду одинаково, т.е. обладает всюду одинаковыми свойствами.

Выводы червя более справедливы, чем наши выводы относительно пространства (которое мы считаем Евклидовым). Мы делаем выводы на основе опыта по исследованию лишь окружающего пространства, хотя распространяем их на весь мир, червь же, в отличие от нас, побывал во всех точках пространства. Более того, если мы уберем метку C, то червь будет считать свое пространство бесконечным.

Так как червь имеет дело лишь с постоянной кривизной, то он свяжет ее с некоторыми физическими свойствами, а не с самим пространством. Тогда нет никакой разницы (для червя) между окружностью и прямой, он лишь ощутит странность в своем физическом состоянии (нет никаких преимуществ между состояниями на окружности и на прямой). Таким образом, конечность или бесконечность пространства вытекает из постулата о возможности определения положения в нем точки.

Пусть теперь червь ползет по трубке переменной кривизны, тогда он может определять свое положение по степени кривизны, по степени сгиба трубки, следовательно, понятие относительности положения мы можем связать с понятием физического состояния червя. Пойдем еще дальше в выводах червя. Червь может решить, что пространство тождественно во всех точках, а кривизна трубки связана с изменениями в его организме. Чем больше кривизна, тем лучше он себя чувствует (или наоборот).

Аналогичные рассуждения мы можем провести и с пространством двух измерений. Таким образом, «плоский» человечек может сделать вывод, что организм его чрезвычайно изменчив, а пространство тождественно. И надо сказать, что жители, живущие, например, на сфере (и их рассуждения) ничем не лучше жителей, живущих на плоскости.

Что мы можем сказать о пространстве трех измерений, в котором мы живем? Мы делаем вывод о том, что оно тождественно, основываясь на опыте и наблюдениях об ограниченной части пространства, что в действительности неверно. Мы говорим вслед за Евклидом, что параллельные плоскости или две параллельные прямые, продолженные как угодно далеко, не пересекаются. Возможно, мы, как червь Клиффорда, приписываем изменения кривизны каким либо физическим действиям, либо изменениям в нашем организме. Следует отметить также, что кривизна может меняться не только в зависимости от положения, но и от времени.

Большую роль в развитии новых взглядов на пространство сыграл немецкий математик Бернгард Риман (1826-1866). Риман показал, что, как существуют разного рода линии и поверхности, так существуют и разного рода пространства трех измерений, и что мы можем лишь опытным путем установить, какого рода то пространство, в котором мы живем. В частности, в рамках опытов на поверхности листа бумаги верны аксиомы геометрии на плоскости, но мы знаем, что в действительности лист испещрен множеством малых рубчиков и бороздок, на которых эти аксиомы несправедливы.

Клиффорд на основании теории, развитой Риманом, делает следующие выводы.

1) Малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно, там несправедливы обычные законы геометрии.
2) Свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.
3) Изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи.

Проблема изучения динамики в пространствах постоянной кривизны также была поставлена впервые Н. И. Лобачевским, который изучал обобщения закона притяжения для пространства постоянной отрицательной кривизны.

Лобачевский пишет «... в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии. Чтобы пояснить эту мысль, полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной Геометрии величину сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r, отчего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой Геометрии нашел я поверхность шара

$$\pi(\exp^r - \exp^{-r})^2,$$

и такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы...».

Вообще говоря, Лобачевский рассуждает не о потенциале, а о силе. «Силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы. С силами все находится в тесной связи ...». «Некоторые случаи уже говорят в пользу такого мнения: величина притягательной силы, например, выражается массою, разделенной на квадрат расстояния.» «Теперь спрашивается, как же расстояние производит эту силу? как эта связь между двумя столько разнородными предметами существует в природе? ...» «...мы познаем одну зависимость из опытов, а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно, либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений.»

Первообразная функции

$$\frac{1}{(e^r - e^{-r})^2},$$

выписанной Лобачевским, есть (с точностью до коэффициента) $\coth r$. Именно такой потенциал рассматривается в настоящее время как правильное обобщение ньютоновского потенциала $\dfrac{1}{r}$ для пространства Лобачевского.

Дальнейшее развитие тема получила в работе Н. Е. Жуковского [20] о движении материальной псевдосферической пластинки на плоскости Лобачевского.

Аналог ньютоновского потенциала для $\mathbb{S}^3$ ($\mathbb{S}^3$ — трехмерная сфера, вложенная в евклидово пространство стандартным образом), по-видимому, был получен Шредингером [35]. Э. Шредингер рассматривал движение электрона в кулоновском поле ядра водорода. В своей работе он пишет, что правильная форма кулоновского потенциала на сфере, отвечающая $1/r$, соответствует виду

$$V = -\gamma \cot \theta. \tag{23}$$

Здесь γ — постоянная, определяющая притяжение, θ — длина дуги большого круга, соединяющего гравитирующие материальные точки на $\mathbb{S}^3$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

7. Плоская задача Кеплера

7.1. Описание системы. Теорема Бертрана. Фундамент, на котором построена небесная механика и механика космического полета — это ньютоновский закон тяготения. В ньютоновской теории гравитация описывается потенциалом $V = -\gamma\dfrac{1}{r}$. Градиент потенциала, взятый с обратным знаком, равен ускорению материальной точки, которая находится в гравитационном поле. Закон, описывающий поле V в случае отсутствия тяготеющей материи, определяется уравнением Лапласа

$$\Delta V = 0.$$

В случае, когда имеется тяготеющая материя с плотностью ρ, имеем уравнение Пуассона

$$\Delta V = 4\pi\gamma\rho.$$

Ясно, что последнее уравнение является более общим и содержит предыдущее уравнение как частный случай.

Рассмотрим классическую задачу небесной механики, задачу Кеплера, результаты исследования которой хорошо известны, но совершенно необходимы для дальнейшего изложения.

Исследуем сначала движение материальной точки в центральном поле.

Определение 7.1. Векторное поле называется *центральным* с центром в точке O, если оно инвариантно относительно группы движений, оставляющих точку O на месте.

Хорошо известна следующая теорема.

Теорема 7.1. *При движении в центральном поле кинетический момент $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$ относительно центра поля O не меняется со временем, т.е. $\dot{\mathbf{M}} = 0$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор с началом в центре поля O, r — его длина.*

Действительно,

$$\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}].$$

В центральном поле векторы $\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{r}} = -\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$ коллинеарны, отсюда следует, что $\dot{\mathbf{M}} = 0$.

Из теоремы о сохранении кинетического момента материальной точки относительно точки O следует, что

$$[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{c} \tag{24}$$

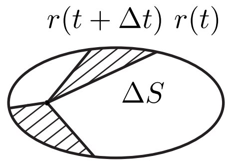


Рис. 7

Это соотношение носит название *интеграла площадей*. Здесь $\mathbf{c}$ — векторная константа интеграла площадей. Проекции вектора $\mathbf{c}$ на оси системы $Oxyz$

$$\begin{cases} c_1 = y\dot{z} - z\dot{y}, \\ c_2 = z\dot{x} - x\dot{z}, \\ c_3 = x\dot{y} - y\dot{x}. \end{cases}$$

Умножая эти равенства на x, y, z соответственно, и складывая, получим $c_1x + c_2y + c_3z = 0$ для любого момента времени.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2. *Под действием центральной силы точка всегда движется по плоской траектории.*

Действительно, в векторном виде можно записать

$$[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]\mathbf{r} = \mathbf{M}\mathbf{r} = 0.$$

Плоскость траектории проходит через центр силы и перпендикулярна постоянному кинетическому моменту точки. Ясно, что положение ее определяется начальными условиями.

Уравнение движения материальной точки единичной массы в $\mathbb{R}^3$ в задаче Кеплера имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \qquad V(r) = -\frac{\gamma}{r}, \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma}{r^3}\mathbf{r}. \tag{25}$$

Выпишем компоненты ускорения по осям x, y, z неподвижной системы координат

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma x}{r^3}, \qquad \ddot{y} = -\frac{\gamma y}{r^3}, \qquad \ddot{z} = -\frac{\gamma z}{r^3},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Рассмотрим теперь движение точки в центральном поле на плоскости (в силу теоремы 7.2). Пусть движение происходит в плоскости xOy. В задаче Кеплера естественно перейти к полярным координатам r, φ. Тогда закон сохранения кинетического момента запишется в виде

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi} = l,$$

и значение кинетического момента l является первым интегралом.

Впервые закон сохранения кинетического момента был найден Кеплером из наблюдений за движением Марса. Кеплер формулировал его в следующем виде.

Секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна. В равные времена радиус-вектор заметает равные площади (второй закон Кеплера).

Доказательство. Кеплер называл *секторной скоростью* C скорость изменения площади $S(t)$, заметенной радиус-вектором, $C = \dfrac{dS}{dt}$. Имеем выражение

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\Delta t + o(\Delta t).$$

Следовательно, секторная скорость

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}l.$$

Так как величина l является первым интегралом, то отсюда следует, что секторная скорость постоянна и равна половине значения кинетического момента. □

Запишем закон сохранения энергии в полярных координатах

$$h = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + V(r).$$

Таким образом, рассматриваемая система допускает два интеграла движения

$$\begin{cases} h = \dfrac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}\,, \quad V_{\text{eff}}\,(r) = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + V(r), \\ l = r^2\dot{\varphi}. \end{cases} \tag{26}$$

Отсюда можно получить выражение для скорости

$$\dot{r} = \sqrt{2(h - V_{\text{eff}}\,(r))}. \tag{27}$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(h - V_{\text{eff}}\,(r))}}. \tag{28}$$

Так как

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dr}\dot{r} = \frac{l^2}{r^2}, \tag{29}$$

то

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dfrac{l}{r^2}}{\sqrt{2(h - V_{\text{eff}}\,(r))}}.$$

В результате получаем уравнение орбиты материальной точки в центральном поле

$$\varphi = \int \frac{l/r^2}{\sqrt{2(h - V_{\text{eff}}\,(r))}}dr. \tag{30}$$

В общем случае орбита не замкнута: точка колеблется между $r_{\min}$ и $r_{\max}$, где $r = r_{\min}$ — перицентр, а $r = r_{\max}$ — апоцентр

$$\Delta\varphi = l\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2(h - V_{\text{eff}}\,)}}. \tag{31}$$

Ясно, что такая орбита замкнута, если $\dfrac{\Delta\varphi}{\pi}$ является рациональным числом, т.е.

$$\Delta\varphi = \frac{m}{n}\pi,$$

где m и n — целые числа.

Сформулируем теорему Бертрана.

Теорема 7.3. *Все ограниченные орбиты в центральном поле замкнуты только в двух случаях*:

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r}, \quad \gamma \geqslant 0 \quad (\textit{потенциал Ньютона});$$
$$V(r) = kr^2, \quad k \geqslant 0 \quad (\textit{потенциал Гука}).$$

Доказательство. Следуя В. И. Арнольду [2], разобьем доказательсто на три задачи.

1. Сделаем следующую замену $x = l/r$ и перепишем уравнение 31 в виде

$$\Delta\varphi = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(h - W)}}, \tag{32}$$

где $W(x) = V\left(\dfrac{l}{x}\right) + \dfrac{x^2}{2}$, т.е. угол между перицентром и апоцентром равен полупериоду колебаний в одномерной системе с потенциальной энергией W.

2. Найдем угол φ для орбиты, близкой к круговой, радиуса a. Так как потенциал $V(r)$ является притягивающим, то эффективный потенциал обладает локальным минимумом при $r = a$

$$V'_{\text{eff}}(r) = V'(r) - \frac{l^2}{r^3} = 0, \quad r = a. \tag{33}$$

Подберем начальные условия таким образом, чтобы частица двигалась по круговой орбите $r = a$. Ясно, что в этом случае

$$V'(a) = \frac{l^2}{a^3}, \qquad l^2 = a^3 V'(a). \tag{34}$$

Угловая частота вращения по орбите определяется из выражения (31)

$$\frac{l^2}{a^4} = \omega_0^2, \qquad \omega_0^2 a = V'(a), \qquad \omega_0^2 = \frac{V'(a)}{a}. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь траекторию, близкую к круговой. Разложим потенциал в ряд по степеням r в малой окрестности точки $r = a$, ограничиваясь первыми членами разложения. Из условия равновесия следует, что ненулевой является лишь вторая производная потенциала. Тогда частота радиальных колебаний определяется соотношением

$$\omega_1^2 = V''_{\text{eff}}(r)\big|_{r=a} = V''(a) + 3\frac{l^2}{a_4} = V''(a) + \frac{3V'(a)}{a} \tag{36}$$

или

$$\varphi \approx \varphi_{\text{circle}} = \pi \frac{l}{r^2\sqrt{W''}}\bigg|_{r=a}. \tag{37}$$

3. Траектория частицы будет замкнутой кривой, если эти частоты соизмеримы, т.е.

$$\omega_1 = \frac{m}{n}\omega_0 = \nu\omega_0, \tag{38}$$

где ν — рациональное число не зависит от формы орбиты и является характеристикой потенциала.

Из уравнений (35), (36) и (38) получим

$$\begin{gathered} V''(r) + \frac{3V'(r)}{r} = \nu^2 \frac{V'(r)}{r}, \\ V''(r) = \frac{\nu^2 - 3}{r} V'(r). \end{gathered} \tag{39}$$

Следовательно, потенциал $V(r)$ является степенным

$$V(r) = c\beta^{-1} r^{\beta}, \quad \beta = \nu^2 - 2.$$

Действительно, $V'(r) = cr^{\beta-1}$, $V''(r) = c(\beta-1)r^{\beta-2}$. Рассмотрим теперь произвольную орбиту. Из соотношения (31) получим

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\nu} = l \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2(h - V_{\text{eff}})}}. \tag{40}$$

Сделаем замену переменных $r = r_{\min}/\rho$, тогда $dr = -\dfrac{r_{\min}}{\rho^2}d\rho$, и уравнение (40) перепишется в виде

$$\Delta\varphi = \int\limits_{\rho_0}^{1} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2hr_{\min}^2}{l^2} - \dfrac{2r_{\min}^2}{l^2}V - \rho^2}} = \frac{\pi}{\nu}. \tag{41}$$

Пусть $\beta > 0$, $V = kr^{\nu^2-2}$, $k > 0$. При $h \to \infty$ имеем $\rho_0 \to 0$, тогда мы получим

$$\Delta\varphi = \int\limits_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \arcsin\rho\big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \tag{42}$$

Следовательно, $\nu = 2$, $V = kr^2$. Пусть теперь $\nu^2 - 2 < 0$, $V(r) = -\gamma\rho^{2-\nu^2}$, $\gamma > 0$. Устремим h к нулю, тогда получим

$$\Delta\varphi = \int\limits_0^1 \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^{-\nu^2}-1}} = \int\limits_0^1 \frac{\rho^{\frac{\nu^2}{2}-1}}{\sqrt{1-\rho^{\nu^2}}}\,d\rho = \frac{\pi}{\nu^2} = \frac{\pi}{\nu}.$$

Следовательно, $\nu = 1$. Таким образом, только для двух потенциалов финитные орбиты замкнуты

$$V(r) = kr^2 \quad \text{и} \quad V(r) = -\frac{\gamma}{r}, \quad k, \gamma > 0.$$

Что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы приведено в работе [28].

7.2. Законы Кеплера. Исследуем движение материальной точки единичной массы в центральном поле вида

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r}$$

с неподвижным центром силы. В этом случае эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2r^2} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{l^2}{2r^2}$$

изображен на рис. 8. Из формулы (41) получим

$$\varphi = \arccos\frac{\dfrac{l}{r} - \dfrac{\gamma}{l}}{\sqrt{2h + \dfrac{\gamma^2}{l^2}}}.$$

Введем обозначения

$$p = \frac{l^2}{\gamma}, \qquad \sqrt{1 + \frac{2hl^2}{\gamma^2}} = \varepsilon. \tag{43}$$

Тогда

$$\varphi = \arccos\frac{\dfrac{p}{r} - 1}{\varepsilon}, \qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{44}$$

Уравнение (44) является уравнением кривой 2-го порядка, в фокусе которой находится начало координат, постоянная p называется *параметром орбиты*, постоянная ε — ее *эксцентриситетом*. Значение постоянной при интегрировании зависит от выбора полярной оси в плоскости орбиты. Если полярную ось направить на ближайшую к центру силы точку траектории, то постоянная интегрирования равна нулю.

Из аналитической геометрии известно, что траектория вида (44) является гиперболой при $\varepsilon > 1$, параболой при $\varepsilon = 1$, эллипсом при $\varepsilon < 1$ или окружностью при $\varepsilon = 0$. Таким образом, учитывая соотношение (44) и вид потенциала $V = -\gamma/r$, можно сделать вывод: траекторией точки будет гипербола, если $h > 0$; парабола, если $h = 0$; эллипс, если $(V_{\text{eff}})_{\min} < h < 0$; окружность, если $h = (V_{\text{eff}})_{\min}$. В случае отталкивания ($\gamma < 0$) точка может двигаться только по гиперболе, так как $h > 0$.

Рассмотрим движение по эллипсу. Из уравнения (44) следует, что

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \qquad r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}. \tag{45}$$

Полуоси эллипса определяются выражениями

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \qquad b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) \tag{46}$$

или

$$a = \frac{\gamma}{2h}, \qquad b = \frac{l}{\sqrt{2h}}. \tag{47}$$

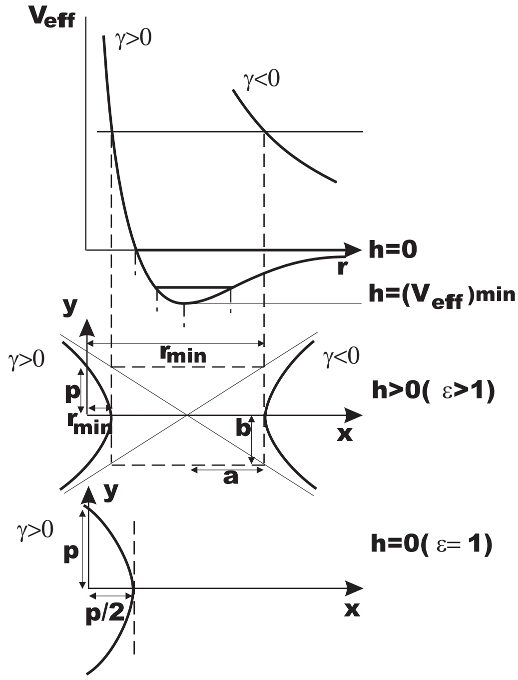


Рис. 8

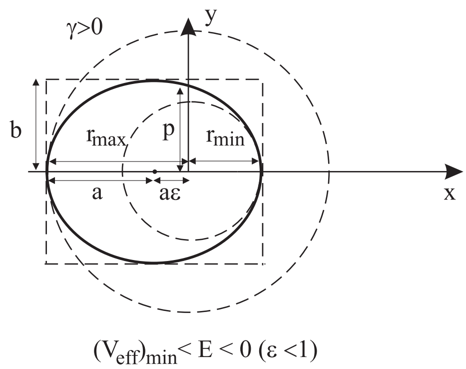


Рис. 9

Следовательно, большая полуось эллипса a зависит только от полной энергии. В случае круговой орбиты, когда $h = (V_{\text{eff}})_{\min}$,

$$\dot{r} = 0, \qquad r = r_0 = a = b.$$

В первом законе Кеплера, открытом им из наблюдений за движением Марса, утверждается, что *каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце* (I закон Кеплера).

Эксцентриситеты орбит планет очень малы, поэтому Кеплер сформулировал свой первый закон следующим образом. *Планеты движутся вокруг Солнца по окружности, но Солнце находится не в центре.* Кстати, если считать, что планеты движутся в центральном поле тяготения, то из первого закона Кеплера следует закон тяготения Ньютона

$$V = -\frac{\gamma}{r}.$$

Введем еще одну переменную — *эксцентрическую аномалию* ξ, которая связана с φ соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{\cos\xi - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\xi}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sin\xi}{1 - \varepsilon\cos\xi}\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{48}$$

Тогда верно соотношение

$$r = a(1 - \varepsilon\sin\xi). \tag{49}$$

Эксцентрическая аномалия связана со временем уравнением Кеплера

$$\xi - \varepsilon\sin\xi = n(t - t_0), \tag{50}$$

где $n = \sqrt{\dfrac{\gamma}{a^3}}$ — так называемое *среднее движение*, постоянная t_0 обозначает момент прохождения через *перигелий* орбиты (ближайшую точку орбиты; самая удаленная точка орбиты называется *афелий*). Из формулы (50) следует, что период полного оборота планеты по эллипсу определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma}}. \tag{51}$$

Из последнего выражения получим третий закон Кеплера

$$T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{\gamma}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma}. \tag{52}$$

Отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково (III закон Кеплера).

7.3. Первые интегралы. Алгебра первых интегралов. Пусть $\mathbb{R}^6 = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — фазовое пространство задачи Кеплера. Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\gamma}{r}$$

инвариантен относительно группы вращений трехмерного пространства $\mathrm{SO}(3)$. Следовательно, сохраняются компоненты вектора момента количества движения

$$\mathbf{l} = [\mathbf{q}, \mathbf{p}]. \tag{53}$$

В теореме Бертрана утверждается, что все финитные траектории, которые при $\gamma > 0$ существуют и отвечают энергии $h < 0$, являются замкнутыми. Этот факт указывает на существование скрытой симметрии в задаче Кеплера и, следовательно, на существование дополнительных интегралов движения.

Действительно, в задаче Кеплера интегралами движения являются также компоненты вектора Лапласа—Рунге—Ленца

$$\mathbf{A} = [\mathbf{l}, \mathbf{p}] - \frac{\gamma}{r}\mathbf{q}. \tag{54}$$

Полное число функционально независимых интегралов движения равно пяти.

Вектор $\mathbf{A}$ лежит в плоскости орбиты, причем его направление совпадает с главной или фокальной осью орбиты. Эксцентриситет пропорционален модулю вектора Лапласа

$$\varepsilon = \frac{|\mathbf{A}|}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{M}] - \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Скобки Пуассона для интегралов движения $\mathbf{A}$, $\mathbf{l}$ имеют вид

$$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk}l_k, \qquad \{l_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk}A_k, \qquad \{A_i, A_j\} = -2h\varepsilon_{ijk}l_k, \tag{55}$$

где ε_{ijk} — полностью кососимметрический тензор, $\varepsilon_{123} = 1$. Пусть

$$\mathbf{m} = -2h^{-1/2}\mathbf{A}.$$

Тогда, переходя к вектору $\mathbf{m}$, при $h < 0$ получаем

$$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk}l_k, \qquad \{l_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk}m_k, \qquad \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk}l_k. \tag{56}$$

Видно, что эта алгебра есть алгебра Ли группы $\mathrm{SO}(4)$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.1. *В кеплеровой задаче алгебра Ли интегралов A_i, l_j при фиксированной энергии h изоморфна*

1) $\mathrm{so}(4)$ *при* $h < 0$;
2) *алгебре Ли группы движений в* $\mathbb{R}^3$ *при* $h = 0$;
3) $\mathrm{so}(1,3)$ *при* $h > 0$.

Теорема Бертрана является частным случаем более общего утверждения. Гамильтониан в случае движения нерелятивистской материальной точки в N-мерном евклидовом пространстве под действием консервативной центральной силы выдерживает симметрию группы Ли, большей чем $\mathrm{SO}(N)$, группы вращений относительно центра силы, лишь в двух случаях: это случай задачи Кеплера, для которой группа высшей симметрии есть $\mathrm{SO}(N+1)$ для ограниченных состояний и $\mathrm{SO}(N,1)$ для неограниченных состояний, и случай изотропного осциллятора, для которого группа симметрии есть $\mathrm{SU}(N)$.

7.4. Регуляризация.

Некоторые решения уравнений движения классической задачи Кеплера при $\gamma > 0$ имеют сингулярность, что соответствует падению материальной точки на центр. В точке сингулярности скорость движения бесконечна (т.е. векторные поля неполны). Однако после подходящей регуляризации эта сингулярность может быть устранена. Вопрос о регуляризации занимает одно из центральных мест в небесной механике.

Одномерный случай. Чтобы понять, что происходит в точке сингулярности, рассмотрим систему с одной степенью свободы. Пусть материальная точка притягивается гравитационным центром, расположенным в начале координатной оси Ox, по закону Ньютона

$$V = -\frac{\gamma}{|x|},$$

где $|x|$ — расстояние от материальной точки до гравитирующего центра. Тогда уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\gamma}{|x|^3}\mathbf{x}.$$

Полная энергия определяется выражением

$$h = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\gamma}{|x|}. \tag{57}$$

Введем новую независимую переменную таким образом, чтобы растянуть масштаб времени, причем, чем ближе частица подходит к центру, тем больше замедление времени

$$dt = |x| d\tau; \quad d\tau = \frac{dt}{|x|}. \tag{58}$$

Далее определим новую скорость следующим образом:

$$x' = \frac{dx}{d\tau}$$

(где штрих обозначает дифференцирование по новой независимой переменной τ) и запишем полную энергию относительно скорости x'

$$\frac{x'^2}{2|x|^2} - \frac{\gamma}{|x|} = h. \tag{59}$$

Сделаем также замену переменной x по формуле

$$x = \pm\omega^2. \tag{60}$$

Тогда скорость и энергия преобразуются к виду

$$x' = \pm 2\omega\omega', \qquad \frac{4\omega^2\omega'^2}{2\omega^4} - \frac{\gamma}{\omega^2} = h.$$

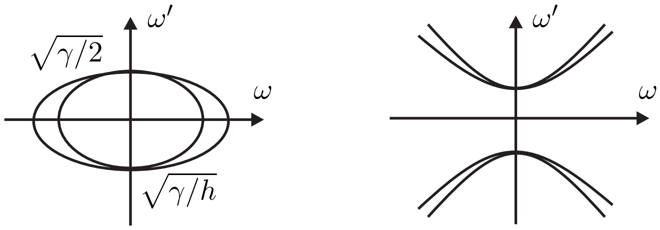


Рис. 10

И окончательно получим

$$2\omega'^2 - h\omega^2 = \gamma. \tag{61}$$

Рассмотрим два случая: ограниченное и неограниченное движение.

1. Пусть $h < 0$; следовательно, потенциальная энергия больше кинетической. Тогда из выражения (61) получим

$$2\omega'^2 + |h|\omega^2 = \gamma.$$

Видно, что это уравнение эллипса с центром в начале координат

$$\frac{\omega'^2}{\frac{\gamma}{2}} + \frac{\omega^2}{\frac{\gamma}{|h|}} = 1. \tag{62}$$

Чем больше h, тем менее вытянутый эллипс. Из последнего выражения легко получить, что сингулярное состояние переходит в регулярное состояние с конечной скоростью ($\omega = 0$, $\omega' = \sqrt{\gamma/2}$), т.е. при падении на центр материальная точка имеет конечную скорость.

Изобразим рассматриваемый случай на плоскости (ω, ω') (Рис. 10).

2. Пусть $h > 0$. Тогда из уравнения (61) получим уравнение гиперболы

$$2\omega'^2 - h\omega^2 = \gamma. \tag{63}$$

(Материальная точка уходит на бесконечность.)

Более реальной ситуация выглядит, когда при падении на центр материальная точка имеет нулевую скорость. Пусть энергия материальной точки определяется соотношением (59). Рассмотрим снова два случая.

1. Пусть $h < 0$; тогда выражение (59) можно записать в виде

$$\frac{x'^2}{2} + |h|\left(|x|^2 - \frac{\gamma}{|h|}|x|\right) = 0.$$

После несложных преобразований получим уравнение эллипса

$$\frac{x'^2}{2} + |h|\left(|x| - \frac{\gamma}{2|h|}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4|h|^2}, \qquad \frac{x'^2}{\frac{\gamma^2}{2|h|}} + \frac{\left(|x| - \frac{\gamma}{2|h|}\right)^2}{\frac{\gamma^2}{4|h|^2}} = 1. \tag{64}$$

Центр эллипса имеет координаты $(\gamma/2|h|, 0)$ (см. рис. 11). Очевидно, что чем больше энергия, тем меньше величина большой полуоси эллипса. При $x = 0$ скорость $x' = 0$. Таким образом, мы устранили сингулярность.

2. Пусть $h > 0$. Тогда из формулы (59) получим уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{2} - h\left(|x| + \frac{\gamma}{2h}\right)^2 = -\frac{\gamma^2}{4h}. \tag{65}$$

Ясно, что в этом случае движение неограничено, материальная точка уходит на бесконечность.

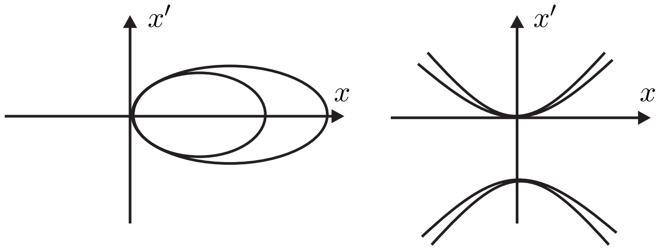


Рис. 11

Двумерный случай. Приведем способ устранения сингулярности в двумерном случае [3]. Введем независимую переменную $z = q_1 + iq_2$. Тогда уравнение движения задачи Кеплера будет иметь вид

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\frac{\gamma \mathbf{z}}{|z|^3}. \tag{66}$$

Выпишем интеграл энергии относительно новой переменной

$$h = \frac{|\dot{z}|^2}{2} - \frac{\gamma}{|z|}. \tag{67}$$

Далее сделаем замену независимой переменной z и времени t по формулам

$$z = \omega^2, \qquad t' = \frac{dt}{d\tau} = 4|\omega^2| = 4|z| \tag{68}$$

и запишем интеграл энергии в виде

$$\frac{|\omega'|^2}{2} = 4\gamma + 4h|\omega^2|. \tag{69}$$

Видно, что точка $\omega = 0$ является регулярной. Из формулы (69) получим

$$\omega'' + 8|h|\omega = 0. \tag{70}$$

Это уравнение описывает колебания гармонического осциллятора. Таким образом, отображение (68) переводит кеплеровские орбиты с постоянной энергией $h < 0$ в орбиты гармонического осциллятора, расположенные на энергетическом уровне (69).

Регуляризация Мозера. n-мерный случай. В работе Мозера [25] описана естественная регуляризация уравнений движения. Мозером было показано, что после подходящей компактификации поверхность постоянной энергии ($h < 0$) топологически эквивалентна касательному расслоению единичных векторов к n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$. Он доказал следующую теорему.

Теорема 7.4. *При $h < 0$ поверхность энергии $H = h$ можно отобразить топологически и взаимно однозначно на касательное расслоение единичных векторов к $\mathbb{S}^n$ при условии, что одна точка сферы* (*северный полюс, соответствующий центру сил*) *выколота.*

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^n$, стандартно вложенную в $(n+1)$-мерное пространство,

$$\mathbb{S}^n = \left\{ \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \colon |\xi|^2 = \sum_0^n \xi_j^2 = 1 \right\}. \tag{71}$$

Рассмотрим в объемлющем пространстве динамическую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}|\eta|^2|\xi|^2,$$

где $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ — $(n+1)$-мерные векторы координаты и импульса. Уравнения движения можно получить, используя уравнения Гамильтона

$$\xi' = |\xi|^2\eta, \qquad \eta' = -|\eta|^2\xi. \tag{72}$$

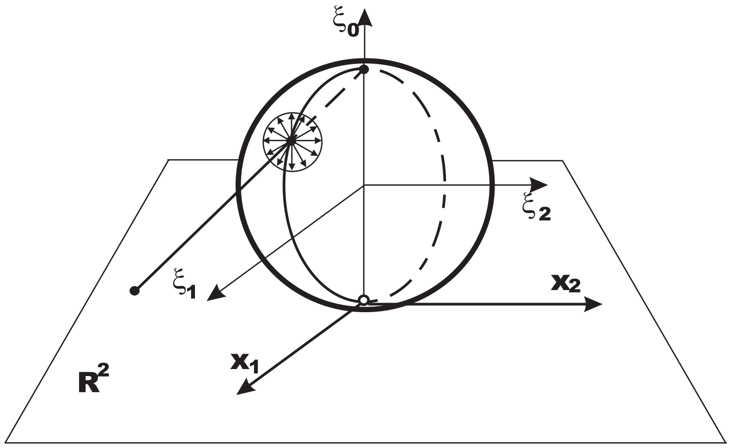


Рис. 12. Регуляризация Мозера в двумерном случае.

Здесь дифференцирование производится по величине s, играющей роль времени. Из (72) следует, что если в начальный момент времени выполнялись условия

$$|\xi|^2 = 1, \qquad (\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \eta_j = 0, \tag{73}$$

то они будут выполняться и во все последующие моменты времени. Многообразие, определяемое уравнениями (73), представляет касательное расслоение $T\mathbb{S}^n$ к сфере $\mathbb{S}^n$. Учитывая, что $|\xi|^2 = 1$, перепишем уравнение (72) в виде

$$\xi'' + |\eta|^2 \xi = 0.$$

Это уравнение описывает геодезический поток на сфере $\mathbb{S}^n = \{\xi \colon |\xi|^2 = 1\}$ с энергией $H = \dfrac{1}{2}|\eta|^2$. Единичные касательные векторы $\{\eta \colon (\eta, \xi) = 0,\ |\eta|^2 = 1\}$ образуют поверхность постоянной энергии $H = h = 1/2$.

Рассмотрим стереографическую проекцию, которая отображает сферу $\mathbb{S}^n$ с выколотой точкой $(1, 0, \ldots, 0)$ на n-мерное евклидово пространство (рис. 12). Стереографическая проекция описывается формулами

$$x_k = \frac{\xi_k}{1 - \xi_0}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{74}$$

При стереографической проекции также спроектируем касательное расслоение в пространство $\mathbb{R}^{2n} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}^n\}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{m=0}^{n} \eta_m d\xi_m = \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k. \tag{75}$$

Величины y_k ищутся в виде

$$y_k = a(\xi, \eta)\eta_k + b(\xi, \eta)\xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{76}$$

Здесь $a(\xi,\eta)$ и $b(\xi,\eta)$ — функции двух переменных. Выпишем необходимые соотношения

$$\begin{gathered} d\xi_0 = -\frac{\xi_l d\xi_l}{\xi_0}, \\ dx_k = \frac{d\xi_k(1-\xi_0) - \xi_k(-d\xi_0)}{(1-\xi_0)^2} = \frac{d\xi_k}{1-\xi_0} - \frac{\xi_k(\xi_l d\xi_l)}{\xi_0(1-\xi_0)^2}, \\ \sum_0^n \eta_\mu d\xi_\mu = \eta_0 d\xi_0 + \sum_1^n \eta_k d\xi_k = \\ = -\eta_0 \frac{\xi_k d\xi_k}{\xi_0} + \sum_1^n \eta_k d\xi_k = \sum_1^n \left(\eta_k - \frac{\eta_0}{\xi_0}\xi_k\right) d\xi_k. \end{gathered} \tag{77}$$

Тогда из формулы (76) получим ответ: $y_k = (1-\xi_0)\eta_k + \eta_0\xi_k$. Формулы для обратного отображения из пространства $\mathbb{R}^n$ на сферу $\mathbb{S}^n$ имеют вид

$$\xi_k = \frac{2x_k}{|\xi|^2+1}, \qquad \xi_0 = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}, \tag{78}$$

$$\eta_k = \frac{(|x|^2+1)^2}{2} y^k - (x,y)x_k, \quad \eta_0 = (x,y). \tag{79}$$

Гамильтониан перепишется в виде

$$F = \frac{(|x|^2+1)^2}{8}|y|^2 = \frac{1}{2}|\xi|^2|\eta|^2. \tag{80}$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$x' = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{81}$$

Сделаем далее замену

$$G = \sqrt{2F} - 1 = \frac{(|x|^2+1)|y|}{2} - 1. \tag{82}$$

Тогда уравнения (81) переходят в уравнения

$$x' = \frac{\partial G}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial G}{\partial x}, \tag{83}$$

а условие $F = 1/2$ переходит в условие $G = 0$. Перейдем теперь от переменной s к переменной t по формуле

$$t = \int |y|\,ds. \tag{84}$$

Тогда получим

$$\dot{x} = |y|^{-1}\frac{\partial G}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -|y|^{-1}\frac{\partial G}{\partial x}. \tag{85}$$

При $G = 0$

$$|y|^{-1}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad |y|^{-1}\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

где

$$H = |y|^{-1}G - \frac{1}{2} = \frac{1}{|y|}(\sqrt{2F}-1) = \frac{1}{2}|x|^2 - |y|^{-1}. \tag{86}$$

Наконец, сделаем замену $(x,y) \to (-p,q)$, после которой получим гамильтониан задачи Кеплера

$$H = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|} = -\frac{1}{2}. \tag{87}$$

Геодезические потоки на сфере изоморфны задаче Кеплера. Таким образом, преобразования (74), (77) и (84) отображают расслоение единичных касательных векторов к сфере в $2n$-мерное фазовое пространство, а большие окружности сферы $\mathbb{S}^n$ — в кеплеровские эллипсы на поверхности энергии $H = h = -1/2$. Для того чтобы описать поток вблизи сингулярной точки $q = 0$, соответствующей северному полюсу сферы, воспользуемся преобразованием, которое переводит северный полюс в южный, т.е.

$$\xi_0 \to -\xi_0, \quad \eta_0 \to -\eta_0, \quad \xi_k \to \xi_k, \quad \eta_k \to \eta_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{88}$$

Этому преобразованию соответствует преобразование в пространстве (p, q)

$$q \to |p|^2 q - 2(pq)p, \quad p \to \frac{p}{|p|^2}. \tag{89}$$

При этом преобразовании кеплеровские орбиты переходят в кеплеровские орбиты. Сингулярные состояния системы ($|p| = \infty$, $q = 0$) преобразуются в состояния ($p = 0$, $|q| = 0$).

8. Динамика в пространствах постоянной кривизны. Обобщенная теорема Бертрана

Опишем два подхода к обобщению ньютоновского потенциала на случай искривленных пространств на примере пространств постоянной кривизны.

1. Один из подходов к определению ньютоновского потенциала V в плоском пространстве заключается в решении уравнения Пуассона, которое для нулевой плотности материи превращается в уравнение Лапласа $\Delta V = 0$. Кроме констант существуют лишь следующие сферически симметричные решения уравнения Лапласа в n-мерном евклидовом пространстве (с точностью до умножения на константу): r^{2-n} при $n \geqslant 3$ и $\ln r$ при $n = 2$. Таким образом, в трехмерном евклидовом пространстве гармонической является функция $\frac{1}{r}$. Если рассматривать плоское движение под действием гравитационного потенциального поля (например, в обычной задаче Кеплера) как редукцию трехмерной задачи, то и в двумерном случае можно определять ньютоновский потенциал как $-\frac{1}{r}$.

Для n-мерной сферы (постоянной кривизны 1) и n-мерного пространства Лобачевского (постоянной кривизны -1) решениями уравнения Лапласа (инвариантными относительно вращений вокруг притягивающего центра) являются функции $(\tan r)^{2-n}$ и $(\tanh r)^{2-n}$ при $n \geqslant 3$ и функции $\ln\tan r$ и $\ln\tanh r$ при $n = 2$ (здесь r — это расстояние до притягивающего центра; постоянная, которая входит в решение уравнения Лапласа, очевидно, несущественна). Как и в плоском случае, для двумерной сферы можно считать, что аналог ньютоновского потенциала есть (с точностью до коэффициента) $-\cot r$, т.е. гармоническая функция на трехмерной сфере. Для двумерного пространства Лобачевского также аналогом ньютоновского потенциала является функция $-\coth r$ (с точностью до коэффициента).

2. Рассмотрим движение материальной точки единичной массы p в поле силы с потенциалом V, зависящим от расстояния между частицей и фиксированным гравитационным центром P в 3-мерном пространстве постоянной кривизны. Мы рассматриваем его как сферу $\mathbb{S}^3$ или верхнюю полу гиперболоида $\mathbb{H}^3$ (в зависимости от знака кривизны), стандартно вложенную в $\mathbb{R}^4$, или пространство Минковского M^4 с координатами q_0, q_1, q_2, q_3. Основное внимание мы уделим случаю отрицательной кривизны, когда уравнение гиперболоида имеет вид

$$q_0^2 - \mathbf{q}^2 = R^2, \qquad R^2 = \frac{1}{\lambda},$$

делая необходимые замечания для случая положительной кривизны. Здесь λ — кривизна, R — радиус кривизны. Для сферы соответствующее уравнение имеет вид

$$q_0^2 + \mathbf{q}^2 = R^2, \qquad R^2 = \frac{1}{\lambda},$$

где λ — кривизна.

Рассматриваемая задача является аналогом классической задачи движения в центральном поле. Пусть θ — длина дуги гиперболы, соединяющей точки p и P. Поместим центр в вершину гиперболоида. Тогда потенциал V — функция, зависящая только от угла θ. Уравнение Лапласа—Бельтрами имеет вид

$$\Delta = R^2 \sinh^{-2}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sinh^2\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{90}$$

Решением этого уравнения является функция

$$V = -\frac{\gamma}{R}\coth\theta + \mathrm{const}. \tag{91}$$

Постоянная, очевидно, несущественна, параметр γ играет роль гравитационной постоянной.

При положительной кривизне в формулах (90), (91) нужно заменить функции, содержащие переменную θ, на соответствующие тригонометрические функции.

Функция V имеет сингулярную точку ньютоновского типа при $\theta = 0$. Для сферы потенциал является антисимметричным между двумя полусферами. Если γ положительна, то имеем притягивающую сингулярность $\theta = 0$ (северный полюс) и равную отталкивающую сингулярность в антиподальной точке $\theta = \pi$ (южный полюс). Эти две сингулярные точки можно трактовать как источник и сток, так как фазовый поток через границу любой замкнутой области, которая не содержит гравитационные центры, равен нулю.

Функция Лагранжа в рассматриваемой задаче имеет вид

$$L = \frac{1}{2}[-(\dot q_0)^2 + (\dot q_1)^2 + (\dot q_2)^2 + (\dot q_3)^2] - V.$$

Лагранжиан определен в объемлющем пространстве, где метрика является индефинитной. Он должен быть ограничен на касательное пространство к $\mathbb{H}^3$. Метрика, индуцированная псевдоевклидовой метрикой на $\mathbb{H}^3$, положительно определена, и поэтому кинетическая энергия также является положительно определенной квадратичной формой. Сигнатура метрики пространства Минковского в данной задаче имеет вид $g(-1,1,1,1)$. Если сигнатура метрики в пространстве Минковского определяется как $g(1,-1,-1,-1)$, то метрика, индуцированная на $\mathbb{H}^3$, отрицательно определена. Для того чтобы получить положительную кинетическую энергию в этом случае, мы должны взять индуцированную метрику с обратным знаком.

Введем псевдосферическую систему координат. Формулы перехода запишутся в виде

$$\begin{aligned} q_0 &= R\cosh\theta, & q_1 &= R\sinh\theta\cos\varphi, \\ q_2 &= R\sinh\theta\sin\varphi\cos\psi, & q_3 &= R\sinh\theta\sin\varphi\sin\psi. \end{aligned} \tag{92}$$

Здесь θ определяет длину гиперболы («меридиана») в псевдоевклидовой метрике, идущей из полюса верхней полы гиперболоида к переменной точке, т.е. псевдосферические координаты аналогичны сферическим координатам (для сферических координат θ — длина меридиана большого круга, идущего из северного полюса сферы к переменной точке). Метрика, индуцированная в пространстве $\mathbb{H}^3$ (относительно координат R, θ, φ, ψ), имеет вид

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sinh^2\theta d\varphi^2 + \sinh^2\theta\sin^2\varphi\psi^2).$$

Лагранжиан в этих координатах определяется формулой

$$L = \frac{1}{2}R^2(\dot\theta^2 + \sinh^2\theta(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\dot\psi^2) - V. \tag{93}$$

(При положительной кривизне в формуле (93) нужно заменить функцию, $\sinh\theta$ на соответствующую тригонометрическую функцию.)

Оказывается, что для потенциальной функции вида (91) (с положительной постоянной γ) все ограниченные орбиты материальной точки замкнуты.

Хорошо известно, что для ньютоновского потенциала все финитные орбиты замкнуты (они являются эллипсами) (см. § 7). Как было доказано Ж. Бертраном (1873 г.), кроме ньютоновского существует еще ровно одно центральное потенциальное поле, для которого все финитные траектории замкнуты. Это поле, создаваемое потенциалом Гука $V = kr^2/2$, где k — положительная константа.

Для сферы и пространства Лобачевского задача описания потенциалов, для которых все финитные траектории замкнуты, была решена в работах [22, 37, 39, 40].

Рассмотрим обобщенную задачу Бертрана в пространствах постоянной кривизны: *найти все потенциалы $V(\theta)$, для которых все ограниченные орбиты материальной точки замкнуты.*

Теорема 8.1. *Решением обобщенной задачи Бертрана являются следующие потенциалы*:

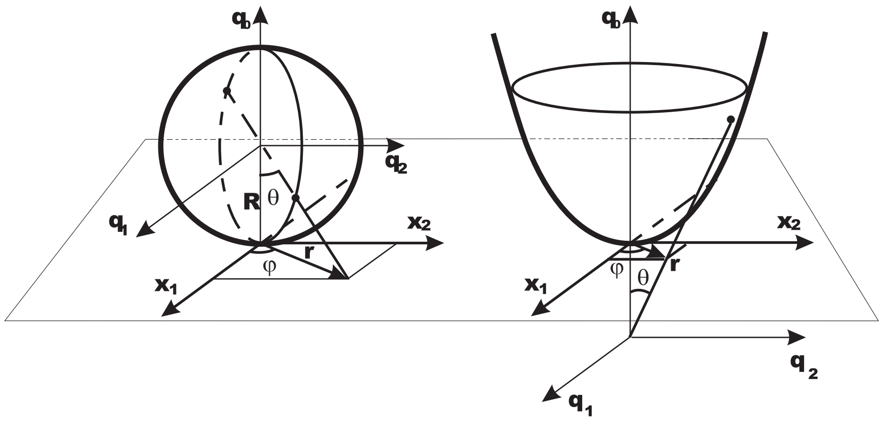


Рис. 13. Гномонические координаты для сферы и псевдосферы.

$V=-\gamma\lambda^{1/2}\coth\theta$, $\gamma>0$, $V=k\lambda^{-1}\tanh^2\theta/2$, $k>0$, *в пространстве Лобачевского* $\mathbb{H}^3$;
$V=-\gamma\lambda^{1/2}\cot\theta$, $\gamma>0$, $V=k\lambda^{-1}\tan^2\theta/2$, $k>0$, *на сфере* $\mathbb{S}^3$.

Доказательство. 1. Доказательство обобщенной теоремы Бертрана для задачи Кеплера на сфере было предложено в работе [39] (1978). Приведем аналогичное доказательство для пространства Лобачевского.

Пусть гравитационный центр размещен в вершине верхней полы гиперболоида $q_0^2 - q_iq_i = 1/\lambda$ (суммирование по повторяющимся индексам). Рассмотрим проекцию гиперболоида на касательную плоскость в объемлющее пространство. Обозначим декартовы координаты этой проекции через x_i и будем называть их гномоническими координатами. Соотношения между гномоническими координатами x_i и координатами пробной частицы q_0, q_i на гиперболоиде имеют вид

$$q_i=\frac{x_i}{\sqrt{1-\lambda|\mathbf{x}|^2}},\qquad q_0=\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{3}q_i^2}=\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda|\mathbf{x}|^2}}.\tag{94}$$

Для сферы в формуле (94) перед λ должен стоять противоположный знак.

Выпишем метрику в касательном пространстве в гномонических координатах. Имеем следующие соотношения:

$$dq_0=\frac{\sqrt{\lambda}(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})}{(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)^{3/2}},\qquad dq_i=\frac{dx_i}{(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)^{1/2}}+\frac{\lambda x_i(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})}{(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)^{3/2}}.$$

Тогда метрика запишется в виде

$$ds^2=-dq_0^2+dq_idq_i=\frac{d\mathbf{x}d\mathbf{x}}{1-\lambda|\mathbf{x}|^2}+\frac{(\mathbf{x}d\mathbf{x})^2}{(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)^2}\lambda.\tag{95}$$

Для сферы в выражении для метрики знак перед кривизной λ изменится на противоположный

$$ds^2=\frac{d\mathbf{x}d\mathbf{x}}{1+\lambda|\mathbf{x}|^2}-\frac{(\mathbf{x}d\mathbf{x})^2}{(1+\lambda|\mathbf{x}|^2)^2}\lambda.\tag{96}$$

Легко проверить, что в пределе, когда $\lambda\to0$, метрика принимает форму

$$ds^2=d\mathbf{x}d\mathbf{x}.$$

Очевидно результаты могут быть обобщены на любую размерность пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ и сферы $\mathbb{S}^n$, вложенных в соответствующие пространства $\mathbb{R}_1^n$ и $\mathbb{S}^{n+1}$ размерности $n+1$.

Функция Лагранжа нерелятивистской частицы единичной массы в потенциальном поле V определяется выражением

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-V,$$

где $\dot{s}^2$ определяется из формул (95), (96).

Следовательно, импульс, сопряженный с x, определяется выражением

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{1-\lambda|\mathbf{x}|^2} + \frac{\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})}{(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)^2}\lambda,$$

$$L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i = (1-\lambda r^2)^{-1}(x_i\dot{x}_j - x_j\dot{x}_i).$$

Гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(1-\lambda r^2)(p^2 - \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})^2) + V(r). \tag{97}$$

Каждая спроектированная орбита лежит в плоскости

$$L_{ij}x_j = 0.$$

В полярных координатах (r,θ) в этой плоскости угловой момент имеет вид

$$\frac{r^2\dot{\theta}}{1-\lambda r^2} = L, \quad \text{где} \quad \mathbf{L}^2 = \frac{1}{2}L_{ij}L_{ij}.$$

Закон сохранения энергии в полярных координатах запишется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\lambda r^2)^2}\dot{r}^2 + \frac{1}{1-\lambda r^2}r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = h.$$

Дифференциальное уравнение орбиты имеет вид

$$\frac{1}{2}\mathbf{L}^2\left(r^{-4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^{-2}\right) + V(r) = h + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{L}^2, \tag{98}$$

где h — полная энергия. Аналогичное выражение было получено в работе [39] для сферы. Отсюда следует, что спроектированные орбиты — такие же, как и для рассматриваемого потенциала в евклидовой геометрии, так как кривизна входит лишь в правую часть уравнения в виде $\frac{1}{2}\lambda\mathbf{L}^2$. Следовательно, все орбиты на псевдосфере замкнуты, незамкнутые проекции орбит соответствуют замкнутым орбитам на сфере, которые пересекают экватор.

2. Приведем еще одно решение задачи Бертрана в пространстве Лобачевского [22] (в отличие от работы [22] будем полагать, что кривизна определяется неединичным радиусом $\lambda = \frac{1}{R^2}$).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 8.1 (см. [22]). *Если потенциальная энергия зависит лишь от координаты θ, то каждая орбита лежит в некоторой двумерной плоскости $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$, проходящей через точку $\theta = 0$.*

Для фиксированной плоскости $\mathbb{H}^2$ угловые координаты φ, ψ можно выбрать так, чтобы эта плоскость определялась уравнением $\psi = \mathrm{const}$. Таким образом, имеем систему с двумя степенями свободы. Лагранжиан определяется формулой

$$L = \frac{1}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sinh^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(\theta).$$

Очевидно, что φ — циклическая координата. По теореме Нетер циклической координате отвечает первый интеграл

$$R^2\sinh^2\theta\dot{\varphi} = c.$$

Функция Рауса R_c имеет вид

$$R_c = p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2 - \frac{c^2}{2R^2\sinh^2\theta} - V(\theta) = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}.$$

Функция

$$V_{\text{eff}} = V(\theta) + \frac{c^2}{2R^2\sinh^2\theta}$$

является приведенным потенциалом. Из уравнения Рауса получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_c}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R_c}{\partial \theta} = 0, \qquad R^2\ddot{\theta} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta}.$$

Введем новые переменные r и ρ по формулам

$$r = R\,\tanh\theta, \qquad \rho = \frac{1}{r} = \frac{1}{R\,\tanh\theta}.$$

Если $c = 0$, то движение будет проходить по прямой в $\mathbb{H}^2$, проходящей через точку $\theta = 0$. Пусть $c \neq 0$, тогда из выражения для первого интеграла вытекает, что φ является монотонной функцией времени. Возьмем в качестве параметра на орбите угловую переменную φ и будем искать уравнение орбиты в виде $\rho = \rho(\varphi)$. Пусть штрих обозначает дифференцирование по переменной φ, тогда получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{d\varphi}, \qquad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{R^2\sinh^2\theta}{c}, \qquad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\dot{\theta}}{R\sinh^2\theta},$$

$$\rho' = -\frac{\dot{\theta}R}{c}, \qquad \rho'' = \frac{d}{dt}(\rho')\frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\ddot{\theta}\sinh^2\theta}{c^2}R^3.$$

Подставим полученные выражения в уравнение Рауса, получим

$$\rho'' + \rho = \frac{\sinh^2\theta}{c^2}R\frac{dV}{d\theta}. \tag{99}$$

Это уравнение можно переписать в виде уравнения Клеро в задаче о движении в центральном поле по евклидовой плоскости, если переписать правую часть уравнения в форме

$$V(\theta) = U(r), \qquad \frac{dV}{d\theta} = \frac{dU}{d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)}\frac{d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)}{d\theta} = U'\left(\frac{1}{\rho}\right)R\frac{1}{\cosh^2\theta}.$$

Тогда получим

$$\rho'' + \rho = \frac{1}{c^2\rho^2}U'\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{100}$$

Интеграл энергии записывается в виде

$$h = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2R^2 - \frac{\gamma}{r} + \frac{c^2}{2R^2\sinh^2\theta}.$$

Учитывая, что

$$-\frac{\gamma}{r} = -\gamma\rho, \qquad \dot{\theta} = -\frac{\rho' c}{R},$$

перепишем интеграл энергии в виде

$$\frac{c^2}{2}(\rho'^2 + \rho^2) - \gamma\rho = h + \frac{c^2}{2}\lambda. \tag{101}$$

Фактически, мы получили уравнение вида (98). (Для сферы можно записать аналогичное уравнение, в этом случае перед кривизной λ будет стоять противоположный знак.) Таким образом, уравнение для орбиты имеет такую же форму, как и в задаче о движении материальной точки в центральном поле силы с потенциалом $U(r)$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Кажется маловероятным, чтобы для произвольной метрики существовали (притягивающие) потенциалы, для которых все финитные траектории были бы замкнуты. С геометрической точки зрения, интересна обратная задача: описать метрики, для которых существуют такие потенциалы.

Замечание 2. Отметим еще одну из возможных интерпретаций выражений для ньютоновских потенциалов в плоском пространстве ($1/r$), на сфере ($\cot r$) и в пространстве Лобачевского ($\coth r$). Рассмотрим функцию r в каждом из этих пространств, равную расстоянию до притягивающего центра. Тогда легко проверяется, что функция Δr, где Δ — оператор Лапласа, совпадает (с точностью до коэффициента) с $\dfrac{1}{r}$ в плоском пространстве, с $\cot r$ на сфере и с $\coth r$ в пространстве Лобачевского, причем, для любой размерности.

9. Обобщенные законы Кеплера

Обобщение законов Кеплера для сферы и пространства Лобачевского произведено Н. А. Черниковым [37], В. В. Козловым [22].

Приведем законы Кеплера для пространств постоянной кривизны.

1) Каждая планета движется по эллипсу (эллипс определяется как множество точек, от которых до заданных двух точек, фокусов сумма расстояний постоянна), в одном из фокусов которого находится Солнце

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2hl^2}{\gamma^2}}, \qquad p = \frac{l^2}{\gamma},$$

где h — полная энергия планеты, $\gamma = \mathrm{const}$, l — кинетический момент, является интегралом движения и зависит от начальных условий, угол φ отсчитывается в направлении из центра Земли к ближайшей к Солнцу точке орбиты, перигею.

Для сферы имеем

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2l^2}{\gamma^2}\left(h-\frac{l^2}{2}\lambda\right)}.$$

Очевидно, что если $\varepsilon < 1$, то орбиты материальной точки — квадрики на $\mathbb{S}^2$ (это движение соответствует движению по эллипсу на касательной плоскости, на которую проектируется сфера), если $\varepsilon = 1$, то траектория материальной точки касается экватора сферы (это движение соответствует движению по параболе на касательной плоскости), если $\varepsilon > 1$, то траектория пересекает экватор (это движение соответствует движению по гиперболе на касательной плоскости).

Для пространства Лобачевского

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2l^2}{\gamma^2}\left(h+\frac{l^2}{2}\lambda\right)}.$$

Кривизна пространства не нарушает первый закон Кеплера.

2) Второй закон Кеплера формулируется, фактически, одинаково для плоского пространства и для пространства Лобачевского. Секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна (равна половине от кинетического момента).

Небольшое отличие существует для сферы. Дуга большой окружности, соединяющая гравитирующий центр и воображаемую точку, которая отстоит от центра на вдвое большее расстояние, чем реальная материальная точка (если угол $\theta > \pi/2$, то гравитирующий и антиподальный центр следует поменять местами), в равные промежутки времени заметает на сфере равные площади.

3) Если третий закон Кеплера сформулировать следующим образом: период обращения планеты по орбите зависит только от полной энергии (от большой оси орбиты), то он звучит одинаково для всех рассматриваемых случаев.

10. Бифуркационные диаграммы. Геометрия фазового пространства для обобщенной задачи Кеплера

Рассмотрим бифуркационные диаграммы для задачи Кеплера для плоского пространства [44], сферы и пространства Лобачевского.

Бифуркационная диаграмма для плоской задачи Кеплера приведена в работе Смейла [44]. Интегралы движения в данной задаче определяются формулами (26).

Пользуясь определением, найдем множество критических значений отображения момента

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} p_r & \dfrac{\gamma}{r^2}-\dfrac{p_\varphi^2}{r^3} & \dfrac{p_\varphi}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 2,$$

где $p_r = \dot r$, $p_\varphi = \dot\varphi r^2$ — обобщенные импульсы, соответствующие полярным координатам (r,φ). Отсюда следует, что множество критических значений Σ_1 есть

$$h = -\frac{\gamma^2}{2l^2}, \quad l = 0. \tag{102}$$

В бифуркационное множество входят также точки, для которых нарушается условие «правильности». Следовательно, бифуркационное множество Σ представляется в виде $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Σ_2 состоит из оси $h = 0$.

Для задачи Кеплера на сфере интегралы движения в полярных координатах (r,φ) записываются в виде

$$\begin{cases} h = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(1+\lambda r^2)^2}\dot r^2 + \dfrac{1}{1+\lambda r^2} r^2\dot\varphi^2\right) + V(r), \\ l = \dfrac{r^2\dot\varphi}{1+\lambda r^2}. \end{cases} \tag{103}$$

Эффективная энергия определяется выражением

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{l^2}{2r^2} + \frac{l^2}{2}\lambda. \tag{104}$$

Множество критических значений отображения момента можно определить из условия

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} p_r(1+\lambda r^2)^2 & 2\lambda r(1+\lambda r^2)p_r^2 + \dfrac{\gamma}{r^2} - \dfrac{p_\varphi^2}{r^3} & (1+\lambda r^2)\dfrac{p_\varphi}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 2,$$

где $p_r = \dot r$, $p_\varphi = \dot\varphi r^2$ — обобщенные импульсы, соответствующие полярным координатам (r,φ). Следовательно, множество критических значений определяется выражением

$$h = -\frac{\gamma^2}{2l^2} + \frac{l^2}{2}\lambda, \quad l = 0. \tag{105}$$

Отметим, что в данной задаче *все* орбиты замкнуты, так как сфера (конфигурационное пространство) является компактным многообразием. Те проекции траекторий на касательной плоскости, которые незамкнуты (гиперболы), соответствуют замкнутым орбитам на сфере, пересекающим экватор. В пределе, когда $\lambda \to 0$, орбиты на сфере переходят в кеплеровские плоские орбиты: ограниченные (с верхней полусферы) и неограниченные (с нижней полусферы, где расположена отталкивающая сингулярность). В данном случае множество критических значений отображения момента определяет бифуркационную диаграмму.

Для задачи Кеплера в пространстве Лобачевского интегралы движения записываются в виде

$$\begin{cases} h + \dfrac{l^2}{2}\lambda = \dfrac{l^2}{2}(\rho'^2+\rho^2) - \gamma\rho, \qquad \rho = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R\tanh\theta}, \\ l = \dfrac{\dot\varphi}{\rho^2}. \end{cases} \tag{106}$$

Аналогично находим множество критических значений отображения момента. Из условия

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{p_\rho}{l^2} & l^2\rho-\gamma & \dfrac{p_\varphi}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 2$$

(здесь p_ρ, p_φ — обобщенные импульсы, соответствующие полярным координатам (ρ,φ)) получим

$$h = -\frac{\gamma^2}{2l^2} - \frac{l^2}{2}\lambda, \quad l = 0.$$

В бифуркационное множество войдет также прямая $h = -\dfrac{\gamma}{R}$, которая разделяет ограниченное и неограниченное движение.

Определение 10.1. Будем называть движение ограниченным (движением эллиптического типа по аналогии с плоской задачей Кеплера), если материальная точка всегда остается в некоторой конечной области, т.е. $\sup\limits_{t\geqslant t_0}|r| < \infty$ (где $|r|$ — расстояние между материальной точкой и притягивающим центром), и неограниченным, если это условие не выполняется.

Определение 10.2. Будем называть движение материальной точки в задаче Кеплера в пространстве Лобачевского движением параболического типа, если $h = -\dfrac{\gamma}{R}$, $|r| \to \infty$, и движением гиперболического типа, если $h > -\dfrac{\gamma}{R}$, $|r| \to \infty$. Соответственно, начальная скорость называется параболической и гиперболической скоростью.

Утверждение 10.1. *В задаче Кеплера в пространстве Лобачевского имеем следующие типы движений*:

при $h < -\dfrac{\gamma}{R}$ — *эллиптический тип*;
при $h = -\dfrac{\gamma}{R}$ — *параболический тип*;
при $h > -\dfrac{\gamma}{R}$ — *гиперболический тип.*

Доказательство. Так как кинетическая энергия есть величина всегда неотрицательная, то во все время движения, естественно, должно выполняться неравенство

$$-V + h \geqslant 0. \tag{107}$$

Следовательно,

$$h \geqslant -\frac{\gamma}{R}\coth r.$$

При $|r| \to \infty$ получим

$$h \geqslant -\frac{\gamma}{R}. \tag{108}$$

При значениях энергии, удовлетворяющих неравенству (108), материальная точка уйдет на бесконечность независимо от того, какое начальное положение она занимала, т.е. движение является неограниченным; параболическим при $h = -\dfrac{\gamma}{R}$ и гиперболическим при $h > -\dfrac{\gamma}{R}$. Очевидно, что при $h < -\dfrac{\gamma}{R}$ выполняется условие $\sup\limits_{t\geqslant t_0}|r| < \infty$, т.е. движение является эллиптическим. В пределе, при $R \to \infty$, получим плоскую задачу, когда значение энергии $h = 0$ разделяет ограниченное и неограниченное движение. □

Несложно вычислить, что прямая $h = -\dfrac{\gamma}{R}$ касается кривой $h = -\dfrac{\gamma^2}{2l^2} - \dfrac{l^2}{2}\lambda$ в точках с координатами

$$\left(-\gamma\sqrt{\lambda},\, \sqrt{\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}}\right), \qquad \left(-\gamma\sqrt{\lambda},\, -\sqrt{\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}}\right).$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 10.2. *Бифуркационное множество для задачи Кеплера имеет вид*:

для задачи Кеплера в евклидовом пространстве

$$h = -\frac{\gamma^2}{2l^2}, \quad l = 0, \quad h = 0;$$

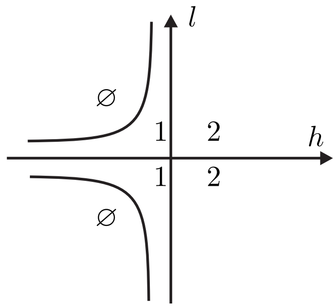


Рис. 14. Бифуркационная диаграмма для плоской задачи Кеплера.

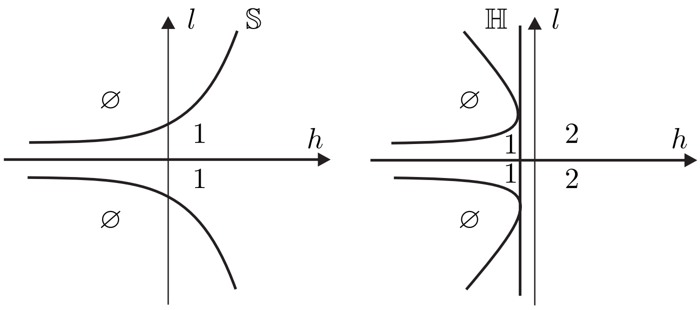


Рис. 15. Бифуркационная диаграмма для задачи Кеплера на сфере и в пространстве Лобачевского.

для задачи Кеплера на сфере

$$h = -\frac{\gamma^2}{2l^2} + \frac{l^2}{2}\lambda, \quad l = 0;$$

для задачи Кеплера в пространстве Лобачевского

$$h = -\frac{\gamma^2}{2l^2} - \frac{l^2}{2}\lambda, \quad h = -\frac{\gamma}{R}, \quad l = 0.$$

Очевидно, что бифуркационные диаграммы в задаче Кеплера для сферы и пространства Лобачевского переходят друг в друга при изменении кривизны λ. Если мы будем под λ понимать величину, которая принимает как положительные, так и отрицательные значения, то бифуркационные множества для пространств постоянной кривизны совпадают (за исключением прямой $h = 0$, которая разделяет ограниченные и неограниченные движения). Если $\lambda = 0$, то получим плоскую задачу Кеплера.

Введем теперь понятие интегрального многообразия. Пусть дана динамическая система, т.е. гладкое векторное поле на гладком многообразии M

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x). \tag{109}$$

Многообразие M есть фазовое пространство рассматриваемой динамической системы. Пусть система (109) обладает первыми интегралами

$$I_1, \ldots, I_n \colon M \to R.$$

Тогда их совместный уровень

$$I_k = \{x \in M \colon I_i(x) = k_i,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{110}$$

(где $k_i = \mathrm{const}$) является подмножеством фазового пространства, инвариантным относительно фазового потока системы (109), т.е. всякая траектория, проходящая через точку, принадлежащую множеству (110), целиком в нем содержится. Множества (110) называются интегральными многообразиями системы (109).

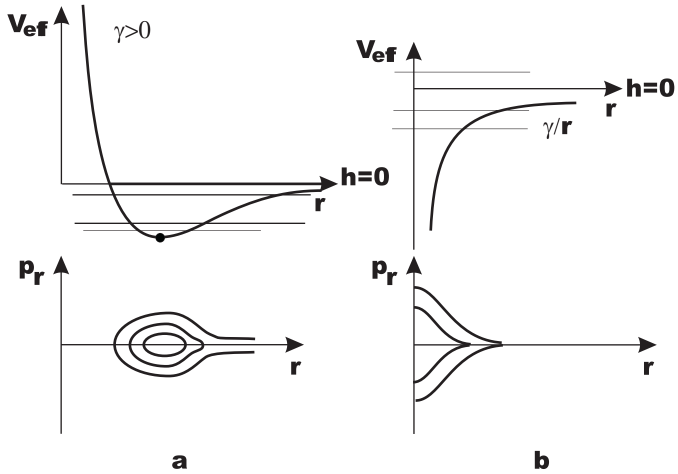
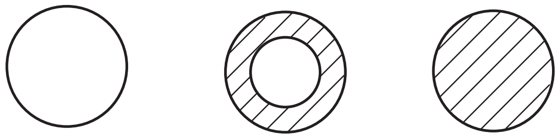


Рис. 16



$(h, l) \in \Sigma_1$ (1) (1) $l = 0$

Рис. 17. Проекции торов и цилиндров Лиувилля на конфигурационное пространство (при $h < 0$).

Теперь наша цель — изучение топологии отображения фазового пространства системы в линейное пространство для задачи Кеплера в евклидовом пространстве, на сфере и в пространстве Лобачевского, т.е. нахождение топологического типа интегрального многообразия. При фиксированных значениях первых интегралов h, l система (26) определяет в $\mathbb{R}^4$ поверхность $I_{h,l}$, инвариантную относительно фазового потока и являющуюся интегральным многообразием.

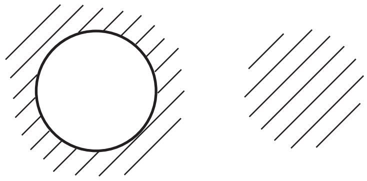
Предложение 10.1. *Для интегрального многообразия плоской задачи Кеплера имеет место один из следующих случаев*:

1) *цилиндр* $I_{h,l} = \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}$, *если* $h \geqslant 0$;
2) *тор* $I_{h,l} = S^1 \times S^1$, *если* $V_{\mathrm{eff\,(min)}} < h < 0$;
3) *окружность, если* (h, l) *принадлежит кривой* $h = -\dfrac{\gamma^2}{2l^2}$;
4) $I_{h,l} = \varnothing$, *если* $h < V_{\mathrm{eff\,(min)}}$.

Доказательство достаточно очевидно, оно приведено в работе [44] и наглядно представлено на рис. 16a. Слоение Лиувилля устроено как прямое произведение расслоенного 2-диска на окружность в случае, если $h < 0$. При пересечении точки в образе (h, l) прямой $h = 0$ меняется тип движения: ограниченное движение переходит в неограниченное, при этом меняется тип интегрального многообразия, тор перестраивается в цилиндр, причем производная эффективного потенциала стремится к нулю при $r \to \infty$. Рассмотрим также случай, когда $l = 0$, т.е. $p_\varphi = 0$. В этом случае эффективная потенциальная энергия представлена на рис. 16b. Слоение Лиувилля при $h < 0$ устроено аналогично, как прямое произведение расслоенного 2-диска, изображенного на рис. 16b, на окружность. При $h \geqslant 0$ движение возможно для любых значений координат.

Проекции торов и цилиндров Лиувилля на конфигурационное пространство представлены на рисунках 17, 18.

Рассмотрим задачу Кеплера на сфере, используя гномонические координаты, т.е. рассмотрим проекцию на касательную плоскость из центра сферы в объемлющее пространство. Преимущество этой проекции состоит в том, что в этом случае свободное движение материальной точки по сфере



(2) $\qquad$ (2) $l = 0$

Рис. 18. Проекции торов и цилиндров Лиувилля на конфигурационное пространство (при $h \geqslant 0$).

(равномерное движение по большому кругу) проектируется в прямолинейное движение (неравномерное) по касательной плоскости. Т.е. спроектированные орбиты такие же, как в евклидовой геометрии: кривизна влияет только на скорость спроектированного движения. Как уже говорилось раньше, в задаче Кеплера на сфере все орбиты замкнуты (в бифуркационное множество не входит прямая, разделяющая ограниченное и неограниченное движение). Если орбита на сфере пересекает экватор, это соответствует уходу на бесконечность в евклидовом пространстве. В прообразе отображения момента находится тор (область 1). В случае, если (h, l) принадлежит кривой $h = -\dfrac{\gamma^2}{2l^2} + \dfrac{l^2}{2}\lambda$, то прообразом является квадрика или окружность в гномонических координатах, так как $p_r = 0$.

Предложение 10.2. *Для интегрального многообразия задачи Кеплера на псевдосфере имеет место один из следующих случаев*:

1) *цилиндр, если* $h \geqslant -\dfrac{\gamma}{R}$ *(область 2)*;
2) *тор* $I_{h,l} = S^1 \times S^1$, *если* $V_{\mathrm{eff\,(min)}} < h < -\dfrac{\gamma}{R}$ *(область 1)*;
3) *квадрика, если* (h, l) *принадлежит кривой* $h = -\dfrac{\gamma^2}{2l^2} - \dfrac{l^2}{2}\lambda$;
4) $I_{h,l} = \varnothing$, *если* $h < V_{eff(min)}$.

11. Регуляризация задачи Кеплера на сфере

Проведем регуляризацию задачи Кеплера на двумерной сфере [48]. Рассмотрим гравитационный центр, размещенный в полюсе сферы $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 = \dfrac{1}{\lambda}$ с координатами $(q_0, q_1, q_2) = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0, 0\Big)$, и локально перейдем к гномоническим координатам x_1, x_2.

Введем комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$. Тогда в гномонических переменных энергия системы может быть представлена в форме

$$h = (1 + \lambda r^2)(\dot{z}^2 + \lambda(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})^2) + V(r). \tag{111}$$

Введем замену переменной z и времени t по формулам

$$\begin{gathered} z = \omega^2, \qquad t' = \frac{dt}{d\tau} = 4|\omega^2| = 4|z|; \\ \dot{z} = 2\omega\dot{\omega} = \frac{1}{2|\omega^2|}\omega\omega'; \\ r = |z|; \qquad V(r) = \frac{\gamma}{r}. \end{gathered} \tag{112}$$

Тогда выражение для h может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\left(1 + \lambda|\omega^2|^2\right)\Big\{|\omega'|^2 + \lambda|\omega^2|\left[\mathrm{Re}(\omega\overline{\omega}')\right]^2\Big\} + 4\gamma = 4h|\omega^2|. \tag{113}$$

Очевидно, что после замены координат и времени уравнения движения не имеют сингулярности.

12. Алгебра Ли первых интегралов

Как было отмечено выше, в задаче Кеплера в евклидовом пространстве существуют 5 независимых первых интегралов. Вектор Рунге—Ленца—Лапласа, который в каждой точке кеплеровской орбиты лежит в ее плоскости параллельно главной оси, имеет декартовы компоненты

$$A_i = -L_{ij}p_j + \frac{\gamma x_i}{r}. \tag{114}$$

Обобщение выражения (114) для сферы было найдено в работе [39]. Первая величина в выражении для A_i сохраняется при свободном движении частицы, она состоит из генераторов L_{ij} и импульсов p_j. При свободном движении частицы по сфере закон сохранения линейного момента заменяется законом сохранения вектора

$$\pi = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}). \tag{115}$$

Компоненты этого вектора пропорциональны соответствующим генераторам геометрической группы симметрии $\mathrm{SO}(N+1)$. Эти генераторы являются компонентами углового момента в объемлющем пространстве

$$\pi_i = \lambda^{1/2}L_{0i}.$$

Делая такую же замену в выражении (114), можно получить желаемое обобщение вектора Рунге—Ленца—Лапласа в задаче Кеплера на сфере

$$A_i = -L_{ij}\pi_j + \frac{\gamma x_i}{r}. \tag{116}$$

Длина вектора Рунге—Ленца—Лапласа определяется выражением

$$\mathbf{A}^2 = \gamma^2 + 2H\mathbf{L}^2 - \lambda(\mathbf{L}^2)^2. \tag{117}$$

Гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(\pi^2 + \lambda\mathbf{L}^2) - \frac{\gamma}{r}. \tag{118}$$

Коммутирующие соотношения между $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ имеют следующий вид [16, 17, 39]:

$$\begin{gathered} \{A_i, A_j\} = -2\varepsilon_{ijk}L_k(H - \lambda\mathbf{L}^2), \\ \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k, \qquad \{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk}A_k \end{gathered} \tag{119}$$

(здесь мы использовали обозначение $L_{ij} = \varepsilon_{ijk}L_k$). В пространстве отрицательной постоянной кривизны знак внутри скобок положительный.

13. Задача Неймана

Рассмотрим задачу Неймана о движении точки по n-мерной единичной сфере

$$\mathbb{S}^n = \{(x,x) = 1\}, \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{120}$$

в силовом поле с потенциалом — аналогом потенциала Гука на сфере. Напомним, что задача Бертрана на $\mathbb{S}^3$ имеет два решения

$$V = -\gamma\cot\theta, \qquad V = \frac{k}{2}\tan^2\theta, \quad \gamma, k > 0.$$

Второе решение является аналогом потенциала Гука, или, иначе, аналогом потенциала упругой пружины. Эта функция имеет сингулярность на экваторе $\theta = \pi/2$.

Поместим центры упругого притяжения (или отталкивания) в точки с координатами

$$(\pm1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \pm1). \tag{121}$$

Пусть $\mathbf{r}_p = (x_0, \ldots, x_n)$ — радиус-вектор частицы, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор центра упругого притяжения. Тогда можно выписать следующие соотношения:

$$\cos\theta_i = \langle \mathbf{r_i}, \mathbf{r_p} \rangle = x_i, \qquad \sin\theta_i = \sqrt{1 - x_i^2},$$
$$\tan^2\theta_i = \frac{1 - x_i^2}{x_i^2} = \frac{1}{x_i^2} - 1.$$

Отсюда следует (см. обобщение теоремы Бертрана на пространства постоянной кривизны), что аналогом потенциала Гука на сфере с точностью до несущественной аддитивной постоянной является функция

$$V(x) = -\frac{\alpha_i}{x_i^2}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{122}$$

Будем рассматривать теперь движение по $\mathbb{S}^n$ в поле с потенциалом, равным сумме потенциалов, созданных каждым из $n+1$ центров упругого притяжения (или отталкивания)

$$W(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i^2}.$$

Из уравнения связи $(x, x) = 1$ находим

$$(\dot{x}, \dot{x}) + (x, \ddot{x}) = 0. \tag{123}$$

Запишем уравнения Лагранжа [50] со множителем λ

$$\ddot{x}_i = \frac{\alpha_i}{x_i^2} + \lambda x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{124}$$

Тогда из уравнений (123) и (124) можно найти множитель λ:

$$\lambda = -(\dot{x}, \dot{x}) - 2W(x).$$

Из последнего уравнения видно, что множитель λ есть величина постоянная и равна удвоенной энергии системы, взятой со знаком минус. Таким образом, система на $\mathbb{S}^n$ распадется на $n+1$ несвязанных осцилляторов и может быть проинтегрирована в квадратурах.

Действительно, каждое из уравнений в (124) имеет первый интеграл

$$\dot{x}_i^2 - \lambda x_i^2 + \frac{\alpha_i}{x_i^2} = h_i, \tag{125}$$

где

$$h_i = \mathrm{const}, \quad h_0 + h_1 + \cdots + h_n = -2\lambda.$$

Из уравнений (125) легко получить уравнения движения

$$\frac{d}{dt}(x_i^2) = 2\sqrt{\lambda x_i^4 + h_i x_i^2 - \alpha_i}. \tag{126}$$

В общем случае данные уравнения на $2n$-мерном фазовом пространстве $T\mathbb{S}^n$ имеют $n(n+1)$ квадратичных интегралов

$$M_{ij} = (\dot{x}_i x_j - \dot{x}_j x_i j)^2 + x_i\frac{\alpha_j}{x_j^2} + x_j\frac{\alpha_i}{x_i^2}, \quad i, j = 0, 1 \ldots n.$$

Из этих интегралов $2n-1$ независимы, что является следствием наличия симметрии. Наличие симметрии приводит, в свою очередь, к тому, что все траектории рассматриваемой системы являются замкнутыми кривыми.

Отметим, что система с $n+1$ гравитационными центрами на сфере с потенциалом — аналогом кеплеровского потенциала на сфере, не является интегрируемой.

Глава 3

ЗАДАЧА ДВУХ ЦЕНТРОВ НА СФЕРЕ

Задача двух неподвижных центров заключается в определении движения материальной точки, притягиваемой по закону Ньютона двумя неподвижными точечными массами. Эта задача впервые исследовалась и была сведена к квадратурам Эйлером в 1760 г. Качественный анализ этой задачи в плоском случае рассматривался К. Шарлье [34] (1907), Тальквистом [45] (1927), Н. К. Бадаляном [5] (1934, 1939; этот анализ приведен также в книге А. Г. Дубошина [19], 1964). В работе В. М. Алексеева [1] исследуется обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров, проведен качественный анализ и классификация типов движения.

На трехмерной сфере (постоянной кривизны 1) аналог ньютоновского потенциала, создаваемого гравитационным центром, есть $\cot\theta$, где угол θ равен расстоянию до центра. Интегрируемость задачи Кеплера на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ была доказана Э. Шредингером [35]. Шредингер рассматривал движение электрона в потенциальном поле ядра водородоподобного атома с точки зрения квантовой механики. В. В. Козловым и О. А. Хариным была доказана интегрируемость задачи о движении материальной точки по сфере $\mathbb{S}^2$ в поле двух неподвижных ньютоновских центров [40].

В работах [14, 46, 48, 49] исследуется задача двух центров в пространствах постоянной кривизны: на сфере и в пространстве Лобачевского. В работе Т. Г. Возмищевой и А. А. Ошемкова [13] проведен топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере. Построены инварианты Фоменко—Цишанга, которые полностью описывают топологию лиувиллевых слоений изоэнергетических поверхностей Q^3. Описаны все типы движения (регулярные движения и предельные движения, соответствующие бифуркациям торов Лиувилля) на конфигурационном пространстве.

Проведенный топологический анализ задачи двух центров на сфере показывает, что эта задача и задача двух центров на плоскости достаточно похожи с топологической точки зрения. В некотором смысле плоская задача является пределом задачи двух центров на сфере при стремлении радиуса сферы к бесконечности. Аналогичная ситуация имеет место и для задачи Кеплера. В то же время, отметим, что исследование (в частности, компьютерный анализ) задачи двух тел в пространствах постоянной кривизны, проведенное в [43], позволяет предположить, что эта задача неинтегрируема.

14. Плоская задача двух неподвижных центров

В этом параграфе описана постановка задачи двух центров на плоскости, приведены различные формы записи этой системы в лиувиллевом виде, а также дано описание бифуркационной диаграммы для отображения момента, задаваемого гамильтонианом и дополнительным интегралом.

14.1. Постановка задачи. Гамильтониан натуральной механической системы равен сумме кинетической и потенциальной энергий

$$H = T + V.$$

Будем рассматривать задачу о движении материальной точки в плоском пространстве в поле, создаваемом двумя неподвижными притягивающими центрами. Кинетическая энергия T в этом случае задается евклидовой метрикой, а потенциальная энергия V равна сумме потенциалов, создаваемых каждым из центров. В плоском случае (для плоской метрики) в качестве потенциала, создаваемого одним притягивающим центром, рассматривается ньютоновский потенциал $V = -\dfrac{\gamma}{r}$, где γ — постоянный положительный коэффициент, характеризующий силу притяжения.

Рассмотрим два неподвижных центра P_1 и P_2 соответственно. Проведем ось абсцисс Ox через эти центры в направлении $\overline{P_1P_2}$ и расположим начало координат O в середине отрезка, соединяющего два центра. Обозначим расстояние от центра до начала координат через c.

Силовая функция в данной задаче, очевидно, имеет вид

$$V = -\frac{\gamma_1}{r_1} - \frac{\gamma_2}{r_2}. \tag{127}$$

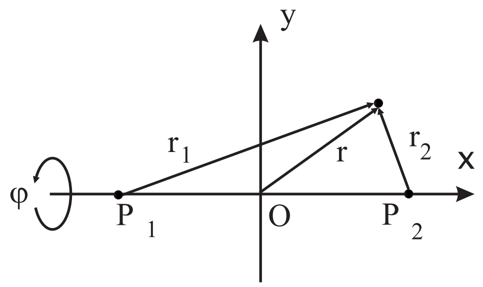


Рис. 19. Задача двух центров в плоском пространстве.

Здесь постоянные γ_1, γ_2 характеризуют силу притяжения между материальной точкой и гравитационными центрами P_1 и P_2 соответственно, r_1 и r_2 — расстояния от движущейся точки до центров и, как видно из рис. 19, определяются выражениями

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x+c)^2 + y^2, \\ r_2^2 &= (x-c)^2 + y^2. \end{aligned} \tag{128}$$

Запишем лагранжиан этой системы. Мы рассматриваем ньютонову потенциальную систему, которая является частным случаем лагранжевой. Лагранжева механическая система задается конфигурационным пространством (в данном случае конфигурационное пространство — евклидово) и функцией Лагранжа на его касательном расслоении. Функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергий

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V.$$

Введем новые координаты (см. рис. 19)

$$x = x', \qquad y = y' \cos\varphi, \qquad z = y' \sin\varphi. \tag{129}$$

Тогда получим следующее выражение для лагранжиана:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + y'^2\dot{\varphi}) + \frac{\gamma_1}{r_1} + \frac{\gamma_2}{r_2}. \tag{130}$$

В силу осевой симметрии задачи угловая координата φ не входит в функцию Лагранжа, следовательно, она является циклической (напомним, что координата — циклическая тогда и только тогда, когда она не входит в функцию Лагранжа, т.е. $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$). Согласно теореме Нетер, соответствующий циклической координате импульс — первый интеграл

$$p_\varphi = \mathrm{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = y^2\dot{\varphi}.$$

При этом изменение остальных координат со временем такое же, как в системе с 2 независимыми координатами, в которой p_φ играет роль параметра.

С помощью метода Рауса циклическую координату можно исключить

$$R = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{p_\varphi^2}{y^2}\right) + \frac{\gamma_1}{r_1} + \frac{\gamma_2}{r_2}. \tag{131}$$

Главная трудность при интегрировании дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных. Замена переменных делает задачу наглядной, упрощает анализ. Так, например, хорошо известная задача Кеплера значительно упрощается при переходе к полярным координатам (r, φ). Многие задачи гамильтоновой механики решаются с помощью эллиптических координат, которые были введены и изучены Якоби.

В случае двух неподвижных центров также естественно перейти от декартовых координат к эллиптическим координатам Якоби, корням (относительно ω) уравнения

$$\frac{x^2}{a_1^2-\omega}+\frac{y^2}{a_2^2-\omega}=1, \tag{132}$$

где константы a_1, a_2 мы впоследствии определим так, чтобы соотношение (132) при любом ω определяло коническое сечение, фокусы которого совпадали бы с неподвижными центрами притяжения. Полагая $\omega=0$, найдем, что полуоси эллипса (132) a_1, a_2 и полуфокусное расстояние c связаны соотношением

$$a_1^2-a_2^2=c^2.$$

Далее, из уравнения (132) получим для корней ω_1, ω_2 формулы перехода

$$x^2=\frac{(a_1^2-\omega_1)(a_1^2-\omega_2)}{a_1^2-a_2^2}, \qquad y^2=\frac{(a_2^2-\omega_1)(a_2^2-\omega_2)}{a_2^2-a_1^2}. \tag{133}$$

Тогда выражения (128) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} r_1^2&=(x+c)^2+y^2=\left(\sqrt{a_1^2-\omega_1}+\sqrt{a_1^2-\omega_2}\right)^2,\\ r_2^2&=(x-c)^2+y^2=\left(\sqrt{a_1^2-\omega_1}-\sqrt{a_1^2-\omega_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{134}$$

Положим теперь $a_1=0$ (тогда $a_2=ic$) и $-\omega_1=\lambda^2$, $-\omega_2=\mu^2$. В результате уравнения (134) примут вид

$$r_1=\lambda+\mu, \qquad r_2=\lambda-\mu. \tag{135}$$

Обратные формулы записываются в виде

$$\lambda=\frac{1}{2}(r_1+r_2), \qquad \mu=\frac{1}{2}(r_1-r_2). \tag{136}$$

Геометрическое истолкование этих формул следующее. Уравнение $\lambda=\mathrm{const}$ представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси Ox, фокусы которого находятся в гравитационных центрах. Уравнение $\mu=\mathrm{const}$ представляет собой гиперболоид вращения вокруг оси Ox с этими же фокусами. Уравнение $\varphi=\mathrm{const}$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Ox. Координаты точки определяются пересечением этих поверхностей. Наименьшее значение r_1+r_2 соответствует случаю, когда пробная частица находится на линии, соединяющей два центра $r_1+r_2=2c$. Наибольшее значение r_1-r_2 соответствует случаю, когда пробная частица находится на одном из центров, т.е. $r_1-r_2=c$. Отсюда следует, что полученные величины изменяются в пределах

$$-c\leqslant\mu\leqslant c\leqslant\lambda. \tag{137}$$

При этом эллиптические и декартовы координаты связаны соотношениями

$$x^2=\frac{\lambda^2\mu^2}{c^2}\geqslant 0, \qquad y^2=\frac{(\lambda^2-c^2)(\mu^2-c^2)}{-c^2}\geqslant 0.$$

С учетом (135), запишем функцию Рауса (131) в новых координатах

$$\begin{aligned} R&=T-V_{\text{eff}}\,,\\ R&=\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{\dot\lambda^2}{\lambda^2-c^2}+\frac{\dot\mu^2}{c^2-\mu^2}\right)+\\ &+\frac{k_1\lambda-k_2\mu}{\lambda^2-\mu^2}-\frac{p_\varphi^2}{2}\frac{c^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}, \end{aligned} \tag{138}$$

где

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{\dot\lambda^2}{\lambda^2-c^2}+\frac{\dot\mu^2}{c^2-\mu^2}\right),\\ V_{\text{eff}}&=-\frac{k_1\lambda-k_2\mu}{\lambda^2-\mu^2}+\frac{p_\varphi^2}{2}\frac{c^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}. \end{aligned} \tag{139}$$

Здесь $k_1 = \gamma_1 + \gamma_2$, $k_2 = \gamma_1 - \gamma_2$. Соответствующий интеграл энергии имеет вид

$$h = T + V_{\text{eff}}\,. \tag{140}$$

Система с функцией Рауса (138) может быть приведена к лиувиллевой форме еще одной заменой переменных [50]

$$\eta = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}, \qquad \xi = \int \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}}, \tag{141}$$

так что $\lambda = c\cosh\eta, \mu = c\cos\xi$. В результате получим следующую функцию Рауса

$$R = \frac{1}{2}(c^2\cosh^2\eta - c^2\cos^2\xi)(\dot\eta^2 + \dot\xi^2) + \frac{k_1 c\cosh\eta - k_2 c\cos\xi}{c^2\cosh^2\eta - c^2\cos^2\xi} - \\ - \frac{\dfrac{p_\varphi^2 c^2}{2}}{(c^2\cosh^2\eta - c^2)(c^2 - c^2\cos^2\xi)}. \tag{142}$$

Таким образом, переменные разделились.

Предложение 14.1. *Система с функцией Рауса* (142) *имеет помимо интеграла* (140) *дополнительный интеграл*

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\Big((c^2 - \mu^2)\dot\eta^2 + (\lambda^2 - c^2)\dot\xi^2\Big) + \\ + \frac{k_1\lambda(c^2 - \mu^2) + k_2\mu(\lambda^2 - c^2)}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{p_\varphi^2 c^2}{2}\left(\frac{1}{f_1(\eta)} - \frac{1}{f_2(\xi)}\right) = L. \tag{143}$$

Доказательство. Обозначим через $f_1(\eta) = \lambda^2 - c^2$, $f_2(\xi) = c^2 - \mu^2$ и запишем уравнение Рауса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot\eta}\right) - \frac{\partial R}{\partial\eta} = 0.$$

А именно,

$$\frac{d}{dt}\left[(f_1 + f_2)\dot\eta\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial\eta}\left(\dot\eta^2 + \dot\xi^2\right) + \\ + \frac{k_1\lambda - k_2\mu}{(f_1 + f_2)^2}\frac{\partial f_1}{\partial\eta} - \frac{k_1}{f_1 + f_2}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta} - \frac{\dfrac{p_\varphi^2 c^2}{2}}{f_1^2 f_2}\frac{\partial f_1}{\partial\eta} = 0.$$

Умножим последнее равенство на $(f_1 + f_2)\dot\eta$, в результате получим выражение

$$(f_1 + f_2)\dot\eta\frac{d}{dt}\left((f_1 + f_2)\dot\eta\right) - \\ - \frac{\partial f_1}{\partial\eta}\dot\eta\left\{\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\left(\dot\eta^2 + \dot\xi^2\right) - \frac{k_1\lambda - k_2\mu}{f_1 + f_2} + \frac{\dfrac{p_\varphi^2 c^2}{2}}{f_1 f_2}\right\} - \\ - k_1\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\dot\eta - \frac{\dfrac{p_\varphi^2 c^2}{2}}{f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial\eta}\dot\eta = 0.$$

Величина, стоящая в фигурных скобках в полученном выражении, является в силу уравнения для η полной энергией системы h и поэтому является константой. Таким образом, выражение (143) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2)^2\dot\eta^2 - f_1 h - k_1\lambda + \frac{\dfrac{p_\varphi^2 c^2}{2}}{f_1}\right) = 0.$$

Выражение в скобках есть интеграл, независимый от h. Подставляя затем в эту формулу выражение для h и используя уравнение (141), окончательно получим соотношение (143). Последнее можно вновь выразить через переменные λ, μ

$$\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{c^2-\mu^2}{\lambda^2-c^2}\dot\lambda^2-\frac{\lambda^2-c^2}{c^2-\mu^2}\dot\mu^2\right)-\frac{k_1\lambda(c^2-\mu^2)+k_2\mu(\lambda^2-c^2)}{\lambda^2-\mu^2}$$
$$+\frac{p_\varphi^2c^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2-c^2}-\frac{1}{c^2-\mu^2}\right)=L. \tag{144}$$

□

Для приведения задачи к квадратурам умножим интеграл энергии на (λ^2-c^2) и сложим полученное выражение с выражением (144). В результате получим

$$\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)\left(1+\frac{c^2-\mu^2}{\lambda^2-c^2}\right)\dot\lambda^2-k_1\lambda+\frac{p_\varphi^2c^2}{2(\lambda^2-c^2)}=L+h(\lambda^2-c^2).$$

Далее, после домножения на (λ^2-c^2) получим

$$\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)^2\dot\lambda^2=(\lambda^2-c^2)(n+h(\lambda^2-c^2)+\gamma k_1\lambda)-\frac{p_\varphi^2c^2}{2}. \tag{145}$$

Потенциал в данной задаче имеет сингулярность в точке с координатой $\lambda=0$, $\mu=0$. Введем новую независимую переменную τ

$$dt=(\lambda^2-\mu^2)\,d\tau.$$

Введенная переменная монотонно возрастает с ростом t.

Для координаты μ проведем аналогичные выкладки и выпишем уравнения движения

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}=d\tau,\qquad \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}=d\tau, \tag{146}$$

где $R(\lambda)$, $S(\mu)$ — полиномы четвертой степени

$$R(\lambda)=2(\lambda^2-c^2)(\lambda^2h+k_1\lambda+(L-hc^2))-p_\varphi c^2,$$
$$S(\mu)=2(\mu^2-c^2)(\mu^2h-k_2\mu+(L-hc^2))-p_\varphi c^2.$$

Интегрируя уравнения (146), можно получить выражения для $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$ в эллиптических функциях.

14.2. Качественный анализ. Очевидно, что движение возможно лишь в тех областях пространства, в которых справедливы условия $R\geqslant 0$, $S\geqslant 0$, и, кроме того, выполняются условия (137). Иначе говоря, эллиптичекие координаты μ, ν должны удовлетворять неравенствам

$$\max\{\lambda_1,c\}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2,\qquad \max\{\mu_1,-c\}\leqslant\mu\leqslant\min\{\mu_2,c\}. \tag{147}$$

где λ_1, λ_2 — ближайшие друг к другу действительные корни уравнения $R(\lambda)=0$, между которыми $R(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)\geqslant 0$, причем, $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$. Для μ_1, μ_2 аналогично.

Таким образом, границы изменения переменных λ, μ могут зависеть от констант первых интегралов сложным образом, что и обуславливает различные типы движений.

Построим бифуркационную диаграмму на плоскости первых интегралов h, $l=L-hc^2$ для специального случая $p_\varphi=0$, при котором точка совершает движение в одной фиксированной плоскости.

Принимая во внимание условие (137), находим, что величины λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 являются корнями квадратных трехчленов $R^*(\lambda)=h\lambda^2+k_1\lambda+l$ и $S^*(\mu)=-h\mu^2+k_2\mu+l$, причем, в реальном движении должно быть $R^*(\lambda)\geqslant 0$, $S^*(\mu)\geqslant 0$. На рис. 20 приведена одна из возможных ситуаций (при $h<0$) поведения функций R^*, S^*.

Заштрихованные области соответствуют зонам возможности движений. Указанным зонам соответствует на конфигурационном пространстве движение, изображенное на рис. 21.

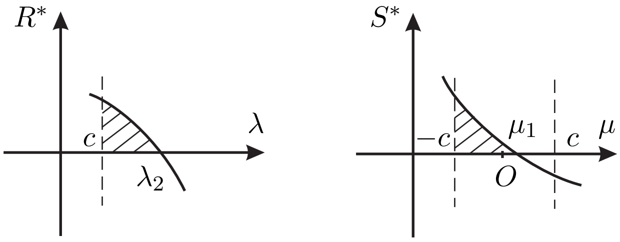


Рис. 20

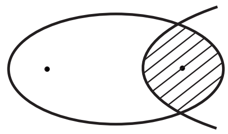


Рис. 21

Представленный тип движения соответствует области 1 на бифуркационной диаграмме (рис. 22). Рассмотрим следующие ситуации. Из выражений $R^*(\lambda) = 0$, $S^*(\mu) = 0$ следует, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2h}\left(-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4lh}\right),$$
$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2h}\left(k_1 \pm \sqrt{k_2^2 - 4lh}\right);$$

если $h = 0$, то $\lambda_1 = -\dfrac{l}{k_1}$, $\lambda_2 = \infty$ и $\mu_1 = \dfrac{l}{k_2}$, $\mu_2 = \infty$. Наша задача состоит в том, чтобы изобразить на плоскости (h, l) множество таких пар констант, которые соответствуют особым типам движения точки. Последние возникают, когда мы имеем кратные корни, т.е. в следующих случаях:

1) λ_1 или $\lambda_2 = c$;
2) μ_1 или $\mu_2 = -c$, или μ_1 или $\mu_2 = c$;
3) $\lambda_1 = \lambda_2$ или $\mu_1 = \mu_2$.

Указанным случаям соответствуют линии

1) $l = -c^2h - ck_1$;
2) $l = -c^2h - ck_2$ и $l = -c^2h + ck_2$;
3) $4lh = k_1^2$ и $4lh = k_2^2$.

Предложение 14.2. *Бифуркационное множество в задаче двух центров на плоскости состоит из двух гипербол*

$$4lh = k_1^2, \quad 4lh = k_2^2 \tag{148}$$

и прямых

$$l = -c^2h - ck_1, \quad l = -c^2h - ck_2, \quad l = -c^2h + ck_2, \quad h = 0.$$

Прямая $h = 0$ разделяет ограниченное и неограниченное движение. Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 22. Всего имеем 8 различных областей возможности движения (ОВД отмечены цифрами). Мы не будем останавливаться на анализе типов движения на конфигурационном пространстве, поскольку такой анализ подробно представлен в книге [19].

15. Описание системы на сфере. Редукция

Пусть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы (с началом в центре сферы) неподвижных притягивающих центров, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор пробной частицы. Тогда потенциал задачи двух центров на сфере имеет вид

$$V = -\frac{\gamma_1}{R}\cot\theta_1 - \frac{\gamma_2}{R}\cot\theta_2, \tag{149}$$

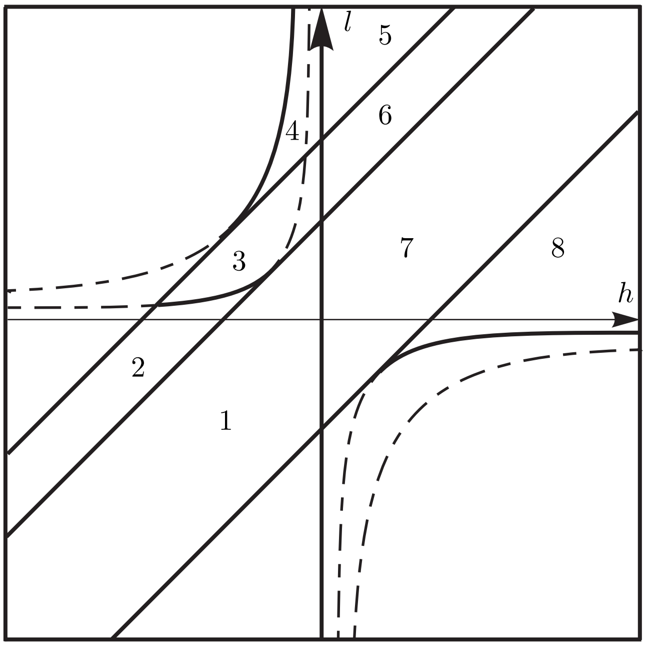


Рис. 22. Бифуркационная диаграмма для задачи двух центров в плоском случае.

где R — радиус сферы, γ_1, γ_2 — положительные константы, характеризующие силу притяжения, а θ_i — угол между векторами $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}$.

Обозначим притягивающие центры через P_1, P_2, а диаметрально противоположные им точки — через Q_1, Q_2. Из формулы для потенциала V видно, что в точках P_1, P_2 этот потенциал имеет особенности типа $-\dfrac{1}{r}$, а в точках Q_1, Q_2 — особенности типа $\dfrac{1}{r}$, т.е. для ньютоновского потенциала на сфере наличие притягивающего центра приводит к появлению дополнительного отталкивающего центра (в антиподальной точке).

Рассмотрим трехмерную сферу радиуса R, стандартно вложенную в пространство $\mathbb{R}^4$ с координатами q_0, q_1, q_2, q_3. Ее уравнение имеет вид $(q_0)^2+(q_1)^2+(q_2)^2+(q_3)^2 = R^2$. Пусть притягивающие центры P_1 и P_2 расположены на сфере в точках с координатами $\mathbf{r}_1 = (\alpha, \beta, 0, 0)$ и $\mathbf{r}_2 = (-\alpha, \beta, 0, 0)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, под действием ньютоновского притяжения которых движется материальная точка.

Введем сферическую систему координат. Формулы перехода запишутся в виде

$$q_0 = R\cos\theta, \qquad q_1 = R\sin\theta\cos\varphi,$$
$$q_2 = R\sin\theta\sin\varphi\cos\psi, \qquad q_3 = R\sin\theta\sin\varphi\sin\psi.$$

Тогда матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & 0 \\ \sin\theta\sin\varphi\cos\psi & R\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & R\sin\theta\cos\varphi\cos\psi & -R\sin\theta\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & R\cosh\theta\sin\varphi\sin\psi & R\sin\theta\cos\varphi\sin\psi & R\sin\theta\sin\varphi\cos\psi \end{pmatrix}.$$

После вычисления получим якобиан, равный $J = R^3\sin^2\theta\sin\varphi$. Метрика, индуцированная на трехмерной сфере, запишется следующим образом:

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 + \sin^2\theta\sin^2\varphi d\psi^2). \tag{150}$$

Относительно сферических координат R, θ, φ, ψ лагранжиан L определяется выражением

$$L = \frac{1}{2}R^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\dot\psi^2)) - V. \tag{151}$$

Теорема 15.1. *Материальная точка в задаче двух центров в пространстве $\mathbb{S}^3$ движется так же, как в двумерной системе (на единичной двумерной сфере $\mathbb{S}^2 : y^2 + x^2 + z^2 = 1$) с энергией*

$$h = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2) + V_{\text{eff}}\,,$$

где эффективная потенциальная энергия определяется выражением

$$V_{\text{eff}} = -\gamma_1 \cot\theta_1 - \gamma_2 \cot\theta_2 + \frac{p_\varphi^2}{2z^2}.$$

Доказательство. (Здесь без потери общности полагаем, что радиус сферы — единичный.) Пусть материальная точка движется по единичной трехмерной сфере в поле двух неподвижных центров. Перейдем к новым переменным $q_0 = x$, $q_1 = y$, $q_2 = z\cos\varphi$, $q_3 = z\sin\varphi$. Функция Лагранжа относительно новых переменных определяется выражением

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2) - V. \tag{152}$$

Так как лагранжиан не зависит от переменной φ, то система допускает группу симметрий $g^\alpha\colon \varphi \to \varphi + \alpha$, $x \to x$, $y \to y$, $z \to z$. Этой группе соответствует векторное поле $\partial/\partial\varphi$. Согласно теореме Нетер, сохраняется величина $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$. В механике координата φ называется циклической. Мы можем исключить ее с помощью метода Рауса

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}^2} = p_\varphi = \text{const}, \tag{153}$$

где p_φ — обобщеннный импульс, соответствующий координате φ и зависящий от начальных условий. В результате мы имеем следующую функцию Рауса:

$$R = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V_{\text{eff}}\,, \tag{154}$$

где V_{eff} — приведенный потенциал вида

$$V_{\text{eff}} = -\gamma_1 \cot\theta_1 - \gamma_2 \cot\theta_2 + \frac{p_\varphi^2}{2z^2}. \tag{155}$$

Таким образом, мы свели нашу задачу о движении материальной точки на трехмерной сфере в поле двух неподвижных центров к двумерному случаю, т.е. к движению на двумерной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в поле с приведенным потенциалом (155). □

16. Интегралы системы

Координаты на сфере, в которых гамильтониан задачи двух центров имеет лиувиллев вид, были указаны в работе [40]. Это сфероконические координаты ξ, η. Они определяются следующим образом. Рассмотрим уравнение (относительно λ)

$$\frac{x^2}{\lambda - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda + \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda} = 0.$$

Легко проверяется, что корни имеют разные знаки. Обозначая их через ξ^2 и $-\eta^2$, получаем координаты (ξ, η), где $0 \leqslant \xi \leqslant \alpha$ и $0 \leqslant \eta \leqslant \beta$.

Координатными линиями этой системы координат являются линии ($\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$) пересечения сферы с двумя семействами конфокальных конусов с вершиной в центре сферы, квадрики. Геометрические свойства этих линий на сфере во многом аналогичны свойствам обычных эллипсов и гипербол на плоскости. Кроме того, они являются «кеплеровскими» орбитами в задаче о движении точки по сфере в поле, создаваемом одним центром (см. [22]).

Формулы, выражающие декартовы координаты через сфероконические, имеют вид

$$x^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 + \eta^2),$$

$$y^2 = \frac{1}{\beta^2}(\beta^2+\xi^2)(\beta^2-\eta^2),$$
$$z^2 = \frac{R^2}{\alpha^2\beta^2}\xi^2\eta^2.$$

Очевидно, извлекая корни, мы получим различные знаки для x и y в зависимости от того, какую половину сферы мы рассматриваем: правую или левую, верхнюю или нижнюю. Поэтому мы получим следующие выражения для формул преобразования:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\alpha}\operatorname{sign}(x)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)},\\ y &= \frac{1}{\beta}\operatorname{sign}(y)\sqrt{(\beta^2+\xi^2)(\beta^2-\eta^2)},\\ z &= \frac{R}{\alpha\beta}\xi\eta. \end{aligned} \tag{156}$$

Введенные криволинейные переменные ортогональны и удовлетворяют условиям

$$\xi^2 \leqslant \alpha^2, \quad \eta^2 \leqslant \beta^2. \tag{157}$$

Рассмотрим потенциал (149).

$$V = \frac{-\gamma_1\cos\theta_1\sin\theta_2 - \gamma_2\cos\theta_2\sin\theta_1}{R\sin\theta_1\sin\theta_2}.$$

Ясно, что

$$\cos\theta_i = \pm\alpha x + \beta y, \qquad \sin^2\theta_i = 1-\cos^2\theta_i.$$

Тогда получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\sin\theta_1\sin\theta_2 = \xi^2+\eta^2,\\ &\cos\theta_1 = \operatorname{sign}(x)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)} + \operatorname{sign}(y)\sqrt{\beta^2+\xi^2)(\beta^2-\eta^2)},\\ &\sin\theta_1 = \operatorname{sign}(x)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\xi^2)} - \operatorname{sign}(y)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\eta^2)},\\ &\cos\theta_2 = -\operatorname{sign}(x)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)} + \operatorname{sign}(y)\sqrt{\beta^2+\xi^2)(\beta^2-\eta^2)},\\ &\sin\theta_2 = \operatorname{sign}(x)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\xi^2)} + \operatorname{sign}(y)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\eta^2)}. \end{aligned}$$

Функция Гамильтона относительно новых координат определяется выражением

$$\begin{aligned} H &= T + V_{\text{eff}}\,,\\ T &= \frac{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)}{2(\xi^2+\eta^2)}p_\xi^2 + \frac{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)}{2(\xi^2+\eta^2)}p_\eta^2,\\ V_{\text{eff}} &= \frac{-\operatorname{sign}(y)(\gamma_1+\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)}}{R(\xi^2+\eta^2)} +\\ &\quad + \frac{-\operatorname{sign}(x)(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)}}{R(\xi^2+\eta^2)} + \frac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2(\xi^{-2}+\eta^{-2})}{2R(\xi^2+\eta^2)}, \end{aligned} \tag{158}$$

где T, V_{eff} — кинетическая и приведенная потенциальная энергии, p_ξ, p_η — импульсы, соответствующие координатам ξ и η. (Коэффициент γ_1 соответствует притягивающему центру с координатами $(\alpha,\beta,0,0)$, а коэффициент γ_2 — притягивающему центру с координатами $(-\alpha,\beta,0,0)$.) Функции $\operatorname{sign}(x)$ и $\operatorname{sign}(y)$ описывают потенциал в четверти сферы: $x>0$, $y>0$; $x<0$, $y<0$; $x>0$, $y<0$; $x<0$, $y>0$.

В координатах (ξ,η) гамильтониан имеет лиувиллев вид, что позволяет выписать интегралы рассматриваемой системы: интеграл энергии

$$h = T + V_{\text{eff}}\,, \tag{159}$$

и два интеграла Лиувилля (которые являются зависимыми)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)\dot{p}_\xi^2- \\ &- \frac{\mathrm{sign}(x)(\gamma_1-\gamma_2)}{R}\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)}+\frac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2\xi^{-2}}{2R}-h\xi^2, \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)\dot{p}_\eta^2- \\ &- \frac{\mathrm{sign}(y)(\gamma_1+\gamma_2)}{R}\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)}+\frac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2\eta^{-2}}{2R}-h\eta^2. \end{aligned} \tag{160}$$

Дополнительный интеграл можно записать в следующем симметричном виде:

$$\begin{aligned} L &= \frac{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)\eta^2}{2(\xi^2+\eta^2)}p_\xi^2 - \frac{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)\xi^2}{2(\xi^2+\eta^2)}p_\eta^2+ \\ &+\frac{\left(\mathrm{sign}(y)(\gamma_1+\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)}-\dfrac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2\eta^{-2}}{2}\right)\xi^2}{R(\xi^2+\eta^2)}+ \\ &+\frac{\left(-\mathrm{sign}(x)(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)}+\dfrac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2\xi^{-2}}{2}\right)\eta^2}{R(\xi^2+\eta^2)}. \end{aligned}$$

В данной задаче потенциал имеет сингулярность в точке с коодинатами $\xi=0$, $\eta=0$. Введем вместо t новую независимую переменную τ (новое время монотонно возрастает с ростом t)

$$dt=\frac{\xi^2+\eta^2}{\sqrt{2(\gamma_1+\gamma_2)}}\,d\tau.$$

Сделаем замену $h\to\dfrac{h}{\gamma_1+\gamma_2}$, $l\to\dfrac{l}{\gamma_1+\gamma_2}$ и сведем задачу к квадратурам

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\sqrt{R(\xi)},\qquad \frac{d\eta}{d\tau}=\sqrt{S(\eta)}, \tag{161}$$

где $R(\xi)$ и $R(\eta)$ — иррациональные функции

$$\begin{aligned} R(\xi)&=(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)R^*(\xi), \\ S(\eta)&=(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)S^*(\eta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R^*(\xi)&=l+h\xi^2+\frac{\mathrm{sign}(x)K\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)}}{R}, \\ S^*(\eta)&=-l+h\eta^2+\frac{\mathrm{sign}(y)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)}}{R}. \end{aligned} \tag{162}$$

Здесь $K=\dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$ — параметр, h и l — интегралы, зависящие от начальных данных. Как было сказано выше, функции R^* и S^* описывают движение в одной четверти сферы: $x>0$, $y>0$; $x<0$, $y<0$; $x>0$, $y<0$; $x<0$, $y>0$. При достижении координатами ξ, η значений $\pm\alpha$ и $\pm\beta$ соответственно, частица переходит из одной четверти в другую (156). При достижении этих величин функции R^* и S^*, описывающие изменение ξ и η, должны измениться, и мы имеем четыре функции R_+^*, R_-^*, S_+^*, S_-^*, т.е. четыре комбинации R^*S^* для каждой четверти сферы в зависимости от $\mathrm{sign}(x)$ и $\mathrm{sign}(y)$.

Как уже отмечалось, свойства координатных линий системы координат (ξ,η) аналогичны свойствам эллипсов и гипербол на плоскости. Например, для каждой точки координатной линии $\{\eta=\mathrm{const}\}$ сумма расстояний (по сфере) от этой точки до притягивающих центров P_1 и P_2, а также разность расстояний от этой точки до точек P_1 и Q_2 постоянны. Аналогичное свойство выполнено и для координатных линий $\{\xi = \mathrm{const}\}$. Используя этот факт, можно записать гамильтониан и интеграл рассматриваемой задачи в более наглядных координатах q_1 и q_2, где

$$q_1 = \theta_2 - \theta_1, \qquad q_2 = \theta_2 + \theta_1,$$

а θ_1 и θ_2 — угловые величины дуг, соединяющих рассматриваемую точку с центрами P_1 и P_2.

Пусть $p_\varphi = 0$. Вводя импульсы p_1 и p_2, соответствующие координатам q_1 и q_2, гамильтониан и интеграл можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{2(\cos q_1 - \cos\delta)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_1^2 + \frac{2(\cos\delta - \cos q_2)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_2^2 - \\ & - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)\sin q_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)\sin q_2}{R(\cos q_1 - \cos q_2)}, \\ L = {} & \frac{2\cos q_2(\cos\delta - \cos q_1)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_1^2 - \frac{2\cos q_1(\cos\delta - \cos q_2)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_2^2 + \\ & + \frac{\gamma_1 \sin(q_1 + q_2) + \gamma_2 \sin(q_2 - q_1)}{R(\cos q_1 - \cos q_2)}, \end{aligned}$$

где через δ обозначена угловая величина дуги между центрами P_1 и P_2.

Координаты q_1, q_2 (как и координаты ξ, η), естественно, не являются глобальными координатами на сфере (таких координат на сфере не существует). Система координат (q_1, q_2) имеет особенности в точках пересечения сферы с плоскостью, содержащей центры. В частности, точкам сферы, симметричным относительно этой плоскости, соответствуют одинаковые координаты q_1, q_2.

Однако, если переменные разделяются, то их координатные линии определены однозначно (если система нерезонансна) самой системой, поскольку они ограничивают проекции торов Лиувилля на конфигурационное пространство. Поэтому для рассматриваемой системы любые другие «хорошие» (т.е. разделяющиеся) переменные должны иметь вид функций $\tilde{q}_1(q_1)$, $\tilde{q}_2(q_2)$.

Опишем координаты u, v на сфере (с теми же координатными линиями), которые более удобны для вычисления топологических инвариантов системы.

Хорошо известно, что двумерную сферу можно двулистно накрыть двумерным тором с четырьмя точками ветвления. Накрытие можно выбрать так, что точками ветвления будут притягивающие центры P_1, P_2 и диаметрально противоположные им точки Q_1, Q_2, а прообразами «эллипсов» $\{q_1 = \mathrm{const}\}$ и $\{q_2 = \mathrm{const}\}$ будут координатные линии (глобальных) угловых координат u, v на торе.

Это накрытие можно описать при помощи эллиптических функций Якоби (см., например, [4]). Рассмотрим отображение тора T^2 с угловыми координатами u, v в пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z, задаваемое соотношениями

$$\begin{aligned} x &= R\,\mathrm{sn}(u, k_1)\,\mathrm{dn}(v, k_2), \\ y &= R\,\mathrm{sn}(v, k_2)\,\mathrm{dn}(u, k_1), \\ z &= R\,\mathrm{cn}(u, k_1)\,\mathrm{cn}(v, k_2) \end{aligned} \tag{163}$$

(где, как и выше, δ — угловая величина дуги между центрами P_1 и P_2). В дальнейшем, для краткости, мы не будем указывать модуль, подразумевая, что для функций Якоби от переменной u модуль равен k_1, а для функций Якоби от переменной v модуль равен k_2.

Используя свойства функций Якоби, легко проверить, что при отображении, задаваемом соотношениями (163), образ любой точки тора (u, v) есть точка на сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. При этом в каждую точку сферы (кроме точек P_1, P_2, Q_1, Q_2) отображается по две точки тора. Таким образом, отображение (163) есть двулистное накрытие $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$, разветвленное в четырех точках.

Это накрытие удобно представлять следующим образом. Первые две из формул (163) задают непрерывное взаимно однозначное отображение прямоугольника $\{|u| \leqslant K_1, |v| \leqslant K_2\}$ на круг $\{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, где K_1, K_2 — полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие модулям k_1, k_2. При этом вершины прямоугольника переходят в точки граничной окружности

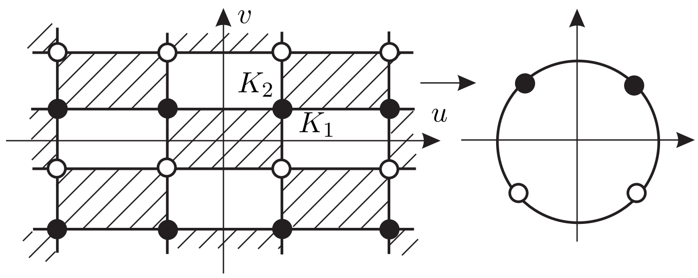


Рис. 23

с координатами $(\pm\alpha, \pm\beta)$. Это отображение продолжается на всю плоскость $\mathbb{R}^2(u,v)$ при помощи симметрий относительно сторон прямоугольника. Учитывая третью формулу (163), получаем отображение плоскости $\mathbb{R}^2(u,v)$ на сферу $\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$.

На рис. 23 изображено разбиение плоскости $\mathbb{R}^2(u,v)$ на прямоугольники со сторонами $2K_1$, $2K_2$, каждый из которых отображается на полусферу (заштрихованные — на «верхнюю» полусферу $\{z \geqslant 0\}$, незаштрихованные — на «нижнюю» полусферу $\{z \leqslant 0\}$). При этом «черные» вершины прямоугольников отображаются в притягивающие центры P_1, P_2, а «белые» — в отталкивающие центры Q_1, Q_2. Поскольку функции $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$ имеют период $4K_1$, а функции $\mathrm{sn}v$, $\mathrm{cn}v$ — период $4K_2$, описанное отображение плоскости $\mathbb{R}^2(u,v)$ на сферу $\mathbb{S}^2$ задает отображение $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$, где тор $\mathbb{T}^2$ можно представлять как прямоугольник в плоскости $\mathbb{R}^2(u,v)$ со сторонами $4K_1$, $4K_2$ (состоящий из двух заштрихованных и двух незаштрихованных прямоугольников с общей вершиной), у которого пары противоположных сторон отождествлены при помощи сдвигов.

Центральная симметрия плоскости $\mathbb{R}^2(u,v)$ относительно любой из вершин прямоугольников (см. рис. 23) задает инволюцию $\sigma\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ с четырьмя неподвижными точками. Факторпространство $\mathbb{T}^2/\sigma$ есть конфигурационное пространство $\mathbb{S}^2$ рассматриваемой задачи. Поэтому вместо движения точки по сфере $\mathbb{S}^2$ можно рассматривать движение точки по тору $\mathbb{T}^2$, учитывая затем действие инволюции σ. Более точно эта процедура будет описана в § 17.

Гамильтониан и интеграл в переменных u, v (т.е. описывающие движение точки по тору $\mathbb{T}^2$) имеют вид

$$H = \frac{p_u^2+p_v^2}{2\bigl(\sin^2\delta\,\mathrm{cn}^2u+\cos^2\delta\,\mathrm{cn}^2v\bigr)} - \frac{(\gamma_1-\gamma_2)\sin\delta\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u+(\gamma_1+\gamma_2)\cos\delta\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{dn}v}{R\bigl(\sin^2\delta\,\mathrm{cn}^2u+\cos^2\delta\,\mathrm{cn}^2v\bigr)},$$

$$L = \frac{\cot\delta\,\mathrm{cn}^2v\,p_u^2-\tan\delta\,\mathrm{cn}^2u\,p_v^2}{2\bigl(\tan\delta\,\mathrm{cn}^2u+\cot\delta\,\mathrm{cn}^2v\bigr)} - \frac{(\gamma_1-\gamma_2)\cos\delta\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u\,\mathrm{cn}^2v-(\gamma_1+\gamma_2)\sin\delta\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{dn}v\,\mathrm{cn}^2u}{R\bigl(\tan\delta\,\mathrm{cn}^2u+\cot\delta\,\mathrm{cn}^2v\bigr)},$$

где p_u, p_v — импульсы, соответствующие координатам u, v.

17. Регуляризация

Потенциал V рассматриваемой задачи имеет особенности в четырех точках на сфере (притягивающие центры P_1, P_2 и отталкивающие центры Q_1, Q_2). При этом в точках P_1, P_2 функция V стремится к $-\infty$, а в точках Q_1, Q_2 — к $+\infty$. Так как кинетическая энергия T всегда положительна, а полная энергия $H=T+V$ постоянна вдоль траекторий системы, отсюда следует, что частица, движущаяся по сфере в поле, создаваемом потенциалом V, никогда не попадает в точки Q_1 и Q_2. Для точек P_1 и P_2 ситуация противоположная: для любого положения частицы на сфере можно задать такую начальную скорость, что частица за конечное время попадет в притягивающий центр. При этом скорость частицы «в момент попадания в притягивающий центр» станет бесконечно большой (поскольку $T+V=\mathrm{const}$).

Таким образом, задача двух центров на сфере описывается гамильтоновой системой на кокасательном расслоении к двумерной сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H=T+V$, где T — квадратичная функция по импульсам (стандартная метрика на сфере), а V — функция на сфере, задаваемая формулой (149). Однако при таком подходе фазовым пространством этой системы будет не все многообразие $T^*\mathbb{S}^2$, поскольку функция V не определена в четырех точках сферы P_1, P_2, Q_1, Q_2

(а значит, функция H не определена на четырех плоскостях, являющихся слоями кокасательного расслоения $T^*\mathbb{S}^2$ над этими четырьмя точками).

Обозначим сферу $\mathbb{S}^2$ с четырьмя выброшенными точками P_1, P_2, Q_1, Q_2 через S_0. Тогда фазовое пространство системы есть T^*S_0. Как уже отмечалось выше, гамильтоново векторное поле $w = \operatorname{sgrad} H$ на T^*S_0, задающее систему, не является полным. Поэтому, хотя система и обладает дополнительным интегралом L, она не является интегрируемой по Лиувиллю. Тем не менее, как будет показано ниже, после некоторой регуляризации качественное поведение системы будет таким же, как и для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем (почти все траектории являются условно периодическими обмотками торов).

Отметим, что описанный ниже способ регуляризации системы аналогичен регуляризации, предложенной Леви-Чивита для классической задачи Кеплера (см. [41]).

Рассмотрим гамильтониан H как функцию переменных (u, v, p_u, p_v). Систему с таким гамильтонианом можно рассматривать как гамильтонову систему на кокасательном расслоении к тору $\mathbb{T}^2$. Введем обозначение

$$\lambda(u, v) = \sin^2\delta \mathrm{cn}^2 u + \cos^2\delta \mathrm{cn}^2 v. \tag{164}$$

Тогда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2\lambda(u, v)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)\sin\delta \mathrm{sn}u\mathrm{dn}u + (\gamma_1 + \gamma_2)\cos\delta \mathrm{sn}v\mathrm{dn}v}{R \cdot \lambda(u, v)},$$

а координаты поля $W = \operatorname{sgrad} H$ на $T^*\mathbb{T}^2$ равны $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_u}, \dfrac{\partial H}{\partial p_v}, -\dfrac{\partial H}{\partial u}, -\dfrac{\partial H}{\partial v}\right)$.

В фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^2$ векторное поле W имеет особенности в точках, где $\lambda(u, v) = 0$, т.е. в точках вида $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$. Рассмотрим векторное поле $\tilde{W} = \lambda(u, v) \cdot \operatorname{sgrad} H$. В координатах (u, v, p_u, p_v) оно имеет вид

$$\begin{gathered}\left(p_u, p_v, \sin\delta \mathrm{cn}u \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R}(2\mathrm{dn}^2 u - 1) - 2\sin\delta \mathrm{sn}u\mathrm{dn}u \cdot h\right),\right. \\ \left.\cos\delta \mathrm{cn}v \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}(2\mathrm{dn}^2 v - 1) - 2\cos\delta \mathrm{sn}v\mathrm{dn}v \cdot h\right)\right),\end{gathered} \tag{165}$$

где $h = H(u, v, p_u, p_v)$ — значение гамильтониана в точке (u, v, p_u, p_v). Векторное поле $\tilde{W}$ также имеет особенности в точках $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$, поскольку гамильтониан H не определен в точках, где $\lambda(u, v) = 0$. Обозначим через W_h ограничение векторного поля $\tilde{W}$ на изоэнергетическую поверхность $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{T}^2$. Векторное поле W_h уже не имеет особенностей (оно определено лишь на трехмерной поверхности Q_h). Оно задается формулой (165) и, в частности, определено в точках вида $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$, лежащих на поверхности Q_h:

$$W_h(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v) = (p_u, p_v, 0, 0).$$

Ясно, что интегральные траектории поля W_h совпадают (с точностью до замены параметра) с интегральными траекториями исходного векторного поля $W = \operatorname{sgrad} H$ на $T^*\mathbb{T}^2$, поскольку умножение поля W на функцию $\lambda(u, v)$ можно интерпретировать как замену времени $\dfrac{dt}{d\tau} = \lambda(u(t), v(t))$, где $(u(t), v(t), p_u(t), p_v(t))$ — траектория поля W.

С другой стороны, векторное поле W_h на поверхности Q_h совпадает с ограничением на эту поверхность некоторого гамильтонова векторного поля, определенного во всем фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^2$. Ясно, что такое продолжение неоднозначно. Например, в качестве такого поля можно взять поле $\operatorname{sgrad} F_h$, где

$$\begin{gathered}F_h = \lambda(H - h) = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2} - h\left(\sin^2\delta \mathrm{cn}^2 u + \cos^2\delta \mathrm{cn}^2 v\right) - \\ - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R}\sin\delta \mathrm{sn}u\mathrm{dn}u - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}\cos\delta \mathrm{sn}v\mathrm{dn}v.\end{gathered} \tag{166}$$

Тогда $\operatorname{sgrad} F_h = \lambda \operatorname{sgrad} H + (H - h)\operatorname{sgrad}\lambda$. Поскольку $\{F_h = 0\} = \{H = h\}$, векторное поле $\operatorname{sgrad} F_h$ касается поверхности Q_h и совпадает на ней с полем W_h.

Интеграл L исходной системы, очевидно, является интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом F_h на поверхности $\{F_h = 0\}$. Поэтому после описанной регуляризации топологические свойства системы с гамильтонианом H на $T^*\mathbb{T}^2$ на каждой изоэнергетической поверхности Q_h будут такими же, как и для обычных интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, неособые инвариантные многообразия системы являются торами Лиувилля, а перестройки этих торов можно описать при помощи инвариантов Фоменко—Цишанга.

До сих пор мы, фактически, говорили о регуляризации системы на $T^*\mathbb{T}^2$, которая возникла из рассмотрения (разветвленного) накрытия сферы $\mathbb{S}^2$ тором $\mathbb{T}^2$. Это накрытие определяется инволюцией $\sigma\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, описанной в § 16. Инволюция σ естественным образом продолжается до инволюции $\sigma^*\colon T^*\mathbb{T}^2 \to T^*\mathbb{T}^2$. Чтобы вернуться теперь к системе на сфере (а именно эта система является основным объектом нашего изучения), нужно учесть действие инволюции σ^* на $T^*\mathbb{T}^2$.

Поскольку инволюция $\sigma\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ порождается центральной симметрией плоскости $\mathbb{R}^2(u,v)$ относительно точки (K_1, K_2) (или любой другой вершины прямоугольников на рис. 23), инволюция σ^* в координатах (u, v, p_u, p_v) имеет вид

$$\sigma^*\colon (u, v, p_u, p_v) \to (2K_1 - u, 2K_2 - v, -p_u, -p_v). \tag{167}$$

Поэтому инволюция σ^* имеет ровно 4 неподвижные точки $(\pm K_1, \pm K_2, 0, 0)$. Отметим, что факторпространство $T^*\mathbb{T}^2/\sigma^*$ не является многообразием.

Теперь зафиксируем некоторое значение h и рассмотрим функцию F_h, задаваемую равенством (166). Легко видеть, что поверхность $\{F_h = 0\}$ инвариантна относительно инволюции σ^* и не содержит точек $(\pm K_1, \pm K_2, 0, 0)$ (непосредственным вычислением проверяется, что в этих 4 точках значения функции F_h равны $\pm\dfrac{\gamma_i}{R}\sin\delta$, где $i = 1, 2$). Таким образом, факторпространства $\{F_h = 0\}/\sigma^*$ можно рассматривать как изоэнергетические поверхности исходной системы на сфере после регуляризации.

Более того, также легко проверяется, что и векторное поле W_h на поверхности $\{F_h = 0\}$ инвариантно относительно инволюции σ^*, что позволяет рассматривать векторное поле $w_h = W_h/\sigma^*$ как результат регуляризации исходного векторного поля $w = \operatorname{sgrad} H$ на изоэнергетической поверхности $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{S}^2$.

Итак, проведенные рассуждения приводят к следующему утверждению, описывающему регуляризацию задачи двух центров на сфере, т.е. гамильтоновой системы $w = \operatorname{sgrad} H$ на кокасательном расслоении к сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H = T + V$, где квадратичная по импульсам функция T определяется стандартной метрикой на сфере радиуса R в $\mathbb{R}^3$, а функция V задана соотношением (149).

Теорема 17.1 (о регуляризации). *Пусть h — регулярное значение гамильтониана H, а $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{S}^2$ — соответствующая изоэнергетическая поверхность. Рассмотрим на поверхности Q_h векторное поле $w_h = \lambda \operatorname{sgrad} H$, где λ — функция* (164) *на сфере $\mathbb{S}^2$.*

Пусть $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ — (разветвленное) двулистное накрытие (163)*, $\sigma^*\colon T^*\mathbb{T}^2 \to T^*\mathbb{T}^2$ — соответствующая инволюция* (167)*, а F_h — функция, определенная равенством* (166) *на кокасательном расслоении к тору $T^*\mathbb{T}^2$. Рассмотрим на поверхности $\{F_h = 0\} \subset T^*\mathbb{T}^2$ векторное поле $W_h = \operatorname{sgrad} F_h$.*

Тогда

1) *поверхность $\{F_h = 0\} \subset T^*\mathbb{T}^2$ является замкнутым трехмерным многообразием, на котором инволюция σ^* действует без неподвижных точек*;
2) *векторное поле W_h на поверхности $\{F_h = 0\}$ не имеет особенностей и инвариантно относительно инволюции σ^**;
3) *отображение* (163) *индуцирует диффеоморфизм факторпространства (относительно инволюции σ^*) поверхности $\{F_h = 0\}$ без точек, лежащих в 4 слоях над точками ветвления отображения f, на поверхность $\{H = h\}$, причем этот диффеоморфизм переводит векторное поле W_h в векторное поле w_h.*

Отметим, что нерегулярные значения h гамильтониана H явно выписаны при построении бифуркационных диаграмм.

Отметим также, что указанную процедуру регуляризации системы можно было описать и без перехода к двулистному накрытию $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$. Однако, как оказалось, рассмотрение такой «накрывающей» системы сильно упрощает вычисление инвариантов Фоменко—Цишанга.

18. Бифуркационные диаграммы

Для рассматриваемой задачи фазовое пространство не является компактным. Более того, некомпактны даже изоэнергетические поверхности из-за того, что гамильтониан имеет особенности (как функция на $T^*\mathbb{S}^2$). Однако мы будем исследовать топологию «регуляризованной» системы, для которой изоэнергетические поверхности уже компактны. А именно, вместо поверхности $\{H = h\}$ будем рассматривать поверхность $\{F_h = 0\}$ и исследовать ее слоение на поверхности уровня дополнительного интеграла. После этого, учитывая действие инволюции, мы получим описание аналогичного слоения для регуляризованной изоэнергетической поверхности исходной системы.

При этом в качестве дополнительного интеграла на поверхности $\{F_h = 0\}$ можно взять вместо функции L, которая имеет особенности, другую функцию, не имеющую особенностей. Например, в качестве такой функции можно взять функцию

$$K_h = 2L + \frac{\sin^2\delta \mathrm{cn}^2 u - \cos^2\delta \mathrm{cn}^2 v}{\sin^2\delta \mathrm{cn}^2 u + \cos^2\delta \mathrm{cn}^2 v} F_h.$$

Вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} K_h = \frac{p_u^2 - p_v^2}{2} + h\Big(\cos^2\delta \mathrm{cn}^2 v - \sin^2\delta \mathrm{cn}^2 u\Big) - \\ - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R}\sin\delta \mathrm{sn} u \mathrm{dn} u + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}\cos\delta \mathrm{sn} v \mathrm{dn} v. \end{aligned} \tag{168}$$

Следующее утверждение легко проверяется прямым вычислением.

Лемма 18.1. *Пусть F_h и K_h — функции на $T^*\mathbb{T}^2$, заданные, соответственно, формулами* (166) *и* (168). *Тогда*

1) $\{F_h, K_h\} \equiv 0$;
2) *множество $\{F_h = 0,\ K_h = k\}$ задается уравнениями*

$$\begin{aligned} p_u^2 &= 2h\sin^2\delta \mathrm{cn}^2 u + \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{R}\sin\delta \mathrm{sn} u \mathrm{dn} u + k, \\ p_v^2 &= 2h\cos^2\delta \mathrm{cn}^2 v + \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)}{R}\cos\delta \mathrm{sn} v \mathrm{dn} v - k; \end{aligned} \tag{169}$$

3) *при диффеоморфизме, описанном в п.* 3) *теоремы* 17.1*, точки множества $\{F_h = 0,\ K_h = 2l\}$ переходят в точки множества $\{H = h,\ L = l\}$.*

Таким образом, построение бифуркационной диаграммы отображения момента для (регуляризованной) задачи двух центров на сфере можно провести следующим образом. Для каждого значения h найти критические точки функции K_h, ограниченной на поверхность $\{F_h = 0\}$, а затем объединить полученные критические значения в кривые с параметром h на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Второе утверждение леммы, фактически, означает, что эти критические значения соответствуют «кратным корням» функций, стоящих в правых частях уравнений (169). Находя те пары (h, l) (где $k = 2l$), для которых такие корни существуют, получаем ответ.

Бифуркационные диаграммы изображены на рис. 24. Верхняя диаграмма — для случая $0 < \delta < \pi/2$. При $\delta > \pi/2$ качественный вид бифуркационной диаграммы такой же, но особые точки (т.е. точки касания и точки пересечения бифуркационных кривых) могут быть расположены по-разному в зависимости от соотношения величин $\cos\delta$ и γ_1/γ_2. Два примера бифуркационных диаграмм для случая $\delta > \pi/2$ приведены на рис. 25. Как будет ясно из дальнейшего, для исследования топологии рассматриваемой системы на некоторой изоэнергетической поверхности $Q_h^3 = \{H = h\}$ существенным является лишь взаимное расположение вертикальной прямой $\{h = \mathrm{const}\}$ и особых точек бифуркационной диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, l)$. Используя приведенные ниже явные формулы, несложно проверить, что всего возможно 12 вариантов такого расположения. Они

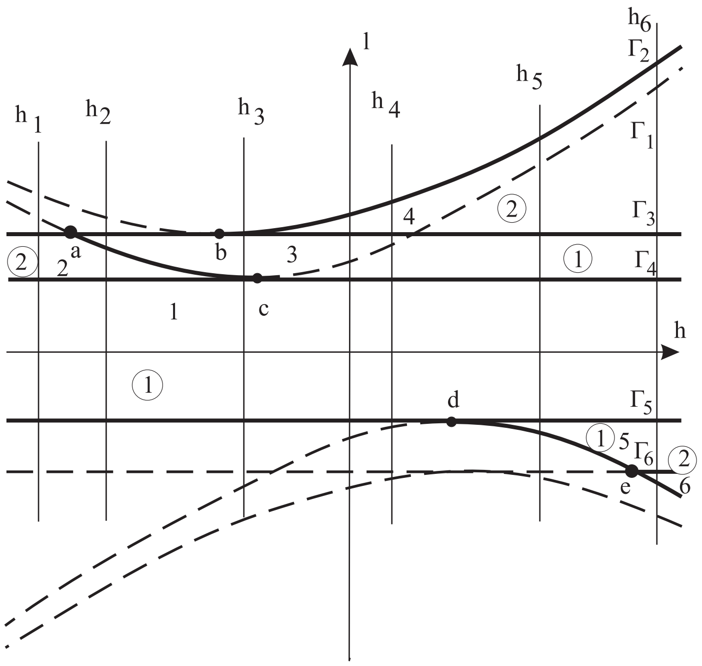


Рис. 24. Бифуркационная диаграмма для случая $0 < \delta < \pi/2$.

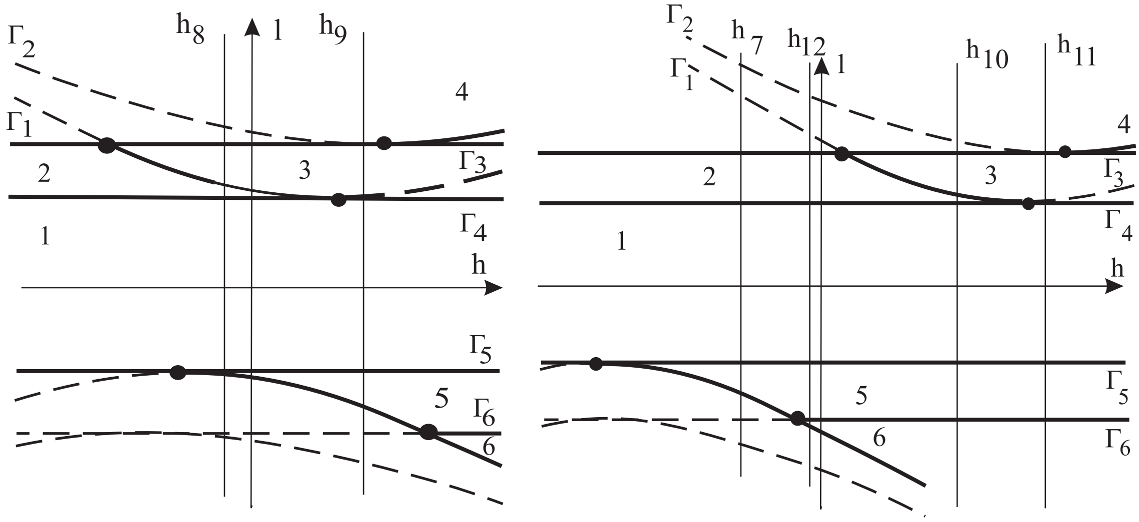


Рис. 25. Бифуркационные диаграммы для случая $\delta > \pi/2$.

соответствуют изоэнергетическим поверхностям с различными инвариантами Фоменко—Цишанга (см. гл. 1). Вертикальные прямые h_i, $1 \leqslant i \leqslant 12$, указаны на рис. 24. При этом здесь (и всюду в дальнейшем) предполагается, что $\gamma_1 > \gamma_2$.

Теорема 18.1. *Уравнения бифуркационных кривых в задаче двух центров на сфере имеют вид*:

$$\Gamma_1: \ (2l - h\cos\delta)^2 - h^2 = \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{R^2}, \qquad \Gamma_4: \ l = \frac{\gamma_1-\gamma_2}{2R}\sin\delta,$$

$$\Gamma_2: \ (2l - h\cos\delta)^2 - h^2 = \frac{(\gamma_1+\gamma_2)^2}{R^2}, \qquad \Gamma_5: \ l = -\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2R}\sin\delta,$$

$$\Gamma_3: \ l = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2R}\sin\delta, \qquad \Gamma_6: \ l = -\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2R}\sin\delta.$$

Запишем также бифуркационное множество в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1: \ \frac{1}{R^2}4h^2\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{R^2}4lh(\beta^2-\alpha^2) - \frac{1}{R^2}4l^2 + K^2 = 0,\\
&\Gamma_2: \ \frac{1}{R^2}4h^2\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{R^2}4lh(\beta^2-\alpha^2) - \frac{1}{R^2}4l^2 + 1 = 0,\\
&\Gamma_3: \ l = \frac{\alpha\beta}{R}, \qquad \Gamma_4: \ l = \frac{K\alpha\beta}{R},\\
&\Gamma_5: \ l = -\frac{\alpha\beta}{R}, \qquad \Gamma_6: \ l = -\frac{K\alpha\beta}{R}.
\end{aligned}
\tag{170}
$$

Точки касания гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_4 и Γ_5 имеют координаты

$$
c = \left(-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{R}\cot\delta, \frac{\gamma_1-\gamma_2}{2R}\sin\delta\right), \qquad d = \left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{R}\cot\delta, -\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2R}\sin\delta\right).
$$

Точка касания гиперболы Γ_2 с прямой Γ_3 имеет координаты

$$
b = \left(-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{R}\cot\delta, \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2R}\sin\delta\right).
$$

Точки пересечения гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_3 и Γ_6 имеют координаты

$$
\begin{aligned}
a &= \left(-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)\cos\delta + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{R\sin\delta}, \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2R}\sin\delta\right),\\
e &= \left(\frac{(\gamma_1+\gamma_2)\cos\delta + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{R\sin\delta}, -\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2R}\sin\delta\right).
\end{aligned}
$$

Последним двум точкам соответствуют два нерегулярных значения h гамильтониана. Остальные значения гамильтониана регулярны.

Бифуркационное множество разбивает образ отображения момента на области так, что при движении точки внутри такой области торы Лиувилля в прообразе этой точки не испытывают бифуркаций. Таким образом, каждой области соответствует определенное число торов Лиувилля. Эти числа можно определить, исследуя функции (169). На рис. 24 отмечены номера областей (цифрами 1–6) и указаны соответствующие им количества торов Лиувилля в прообразе (в областях 1, 3, 5 — по одному тору, а в областях 2, 4, 6 — по два тора).

19. Топологический анализ задачи двух центров на 2-сфере

В этом параграфе мы вычисляем инварианты Фоменко—Цишанга для рассматриваемой интегрируемой гамильтоновой системы.

19.1. Боттовость интеграла. Как было отмечено выше, инварианты Фоменко—Цишанга определены для изоэнергетических поверхностей, на которых дополнительный интеграл является боттовским. Для произвольных интегрируемых систем проверка боттовости дополнительного интеграла обычно нетривиальна. Однако для систем, в которых переменные разделяются (как в рассматриваемой задаче), вычисления значительно упрощаются.

В рассматриваемой задаче проверка боттовости интеграла, фактически, сводится к проверке невырожденности критических точек функций (от одной переменной), определяемых правыми частями формул (169). Вычисляя, получаем следующее утверждение.

Предложение 19.1. *Дополнительный интеграл является боттовским на всех изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$ кроме тех, для которых h является абсциссой одной из точек касания бифуркационных кривых.*

19.2. Области возможности движения. Исследование топологии натуральных механических систем удобно проводить при помощи проекции на конфигурационное пространство. Каждый тор Лиувилля при этом проектируется в некоторую область, которая называется *областью возможности движения* (для значений h и k гамильтониана H и интеграла K, определяющих данный тор).

Рассмотрим сначала проекции торов Лиувилля на конфигурационное пространство $\mathbb{T}^2$, т.е. для «накрывающей системы».

Каждый такой тор задается в $T^*\mathbb{T}^2$ уравнениями (169) с некоторыми константами h и k, т.е. уравнениями вида

$$p_u^2 = f(u), \qquad p_v^2 = g(v).$$

Так как f и g — функции от разных переменных, проекция тора Лиувилля есть некоторая область на торе $\mathbb{T}^2$, ограниченная линиями вида $\{u = \mathrm{const}\}$ и $\{v = \mathrm{const}\}$. При этом в каждую внутреннюю точку (u, v) этой области проектируется по 4 точки $\left(u, v, \pm\sqrt{f(u)}, \pm\sqrt{g(v)}\right) \in T^*\mathbb{T}^2$, а на границе области эти точки попарно склеиваются в 2 точки или 1 точку.

Таким образом, вид проекции тора Лиувилля, задаваемого константами h и k, полностью определяется знаками выражений $f(u)$ и $g(v)$ из формул (169) и одинаков для всех точек (h, k), лежащих в одной и той же области, на которые бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$ на 6 областей, отмеченных цифрами на рис. 24 (здесь $k = 2l$; см. лемму 18.1). Определяя знаки выражений $f(u)$ и $g(v)$ для каждой из этих областей, получаем следующие проекции торов Лиувилля (см. рис. 26).

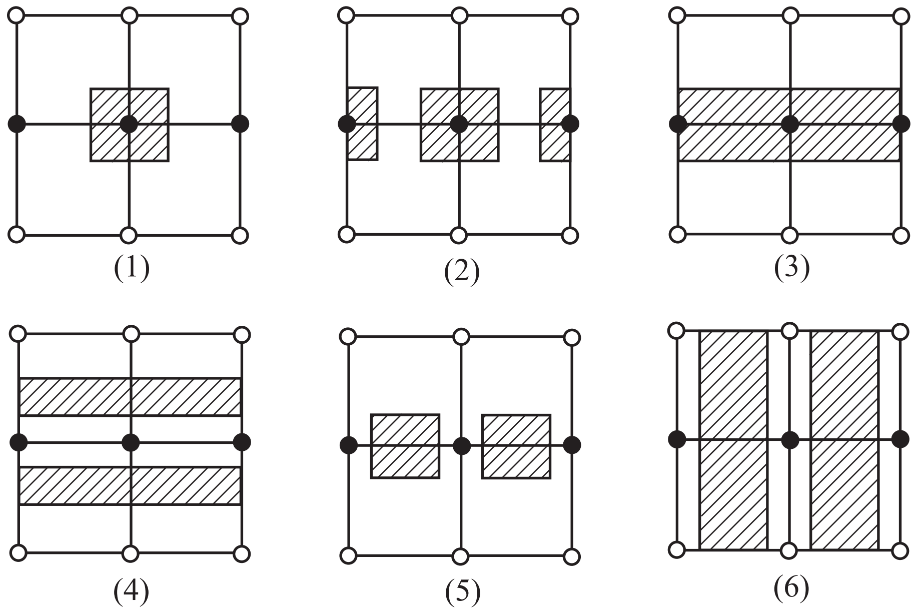


Рис. 26. Проекции торов Лиувилля на $\mathbb{T}^2$.

На рис. 26 тор $\mathbb{T}^2$ изображается в виде прямоугольника, состоящего из четырех прямоугольников плоскости с координатами (u, v) (см. рис. 23). При этом черные и белые вершины имеют тот же смысл, что и на рис. 23, а заштрихованным прямоугольникам на рис. 23 соответствуют левый нижний и правый верхний прямоугольники на рис. 26. Заштрихованные области на рис. 26 изображают проекции торов Лиувилля.

В некоторые из заштрихованных областей на рис. 26 проектируются сразу несколько торов Лиувилля. В каждом из 6 случаев их количество однозначно определяется видом проекции. Действительно, 4 точки $\left(u, v, \pm\sqrt{f(u)}, \pm\sqrt{g(v)}\right)$, проектирующиеся во внутреннюю точку (u,v) заштрихованной области, при подходе этой точки к границе области склеиваются следующим образом: на горизонтальных отрезках точка $\left(u,v,\sqrt{f(u)},\sqrt{g(v)}\right)$ склеивается с точкой $\left(u,v,\sqrt{f(u)},-\sqrt{g(v)}\right)$, а точка $\left(u,v,-\sqrt{f(u)},\sqrt{g(v)}\right)$ склеивается с точкой $\left(u,v,-\sqrt{f(u)},-\sqrt{g(v)}\right)$; на вертикальных отрезках точка $\left(u,v,\sqrt{f(u)},\sqrt{g(v)}\right)$ склеивается с $\left(u,v,-\sqrt{f(u)},\sqrt{g(v)}\right)$, а точка $\left(u,v,\sqrt{f(u)},-\sqrt{g(v)}\right)$ склеивается с $\left(u,v,-\sqrt{f(u)},-\sqrt{g(v)}\right)$. Отсюда получаем, что в область на рис. 26 (1) проектируется 1 тор, в каждую из двух областей на рис. 26 (2) и рис. 26(5) — тоже по 1 тору, в область на рис. 26 (3) — 2 тора и в каждую из двух областей на рис. 26 (4) и рис. 26 (6) — по 2 тора.

Перестройки торов Лиувилля при переходе точки (h,k) через бифуркационные кривые также можно определить, рассматривая перестройки соответствующих областей возможности движения, изображенных на рис. 26. После этого уже легко вычислить инварианты Фоменко—Цишанга, описывающие слоение Лиувилля на поверхностях $\{F_h=0\}$ при различных значениях h.

Напомним, что наша основная цель — исследование топологии системы на $T^*\mathbb{S}^2$, а не на $T^*\mathbb{T}^2$, т.е. на поверхностях $\{F_h=0\}/\sigma^*$. (Вычисления для этого случая более сложные и подробно описаны ниже.) Поэтому для «системы на торе $\mathbb{T}^2$» приведем лишь ответ.

Теорема 19.1. *Для системы с гамильтонианом F_h на $T^*\mathbb{T}^2$ полный список инвариантов Фоменко—Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на поверхностях* $\{F_h=0\}$ (*при различных значениях параметров γ_1, γ_2, δ и h*), *состоит из* 12 *молекул, перечисленных в таблице* 1 (*см.* § 21) (*номер i в таблице соответствует прямой h_i на рис.* 24).

Области возможности движения для (регуляризованной) задачи двух центров на сфере получаются из областей возможности движения, изображенных на рис. 26, в результате факторизации их по действию инволюции $\sigma\colon \mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$. Они приведены в § 20 (см. рис. 37). Количество торов Лиувилля для каждого из 6 случаев, соответствующих 6 областям на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$, можно установить, учитывая, как действует инволюция $\sigma^*\colon T^*\mathbb{T}^2\to T^*\mathbb{T}^2$ (см. (167)). В результате получаем, что в случаях 1, 2, 3, 5 на рис. 37 в каждую из областей (дисков) проектируется по одному тору Лиувилля, а в случаях 4 и 6 в каждую из областей (колец) проектируется по два тора. Отметим, что в случаях 4 и 6 проекции траекторий, лежащих на одном торе, при изменении направления на них переходят в проекции траекторий, лежащих на втором торе, который проектируется в то же кольцо.

19.3. Построение допустимых систем координат. Для того чтобы вычислить инварианты Фоменко—Цишанга (меченые молекулы), описывающие топологию слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q_h=\{H=h\}$, необходимо сделать следующее:

1) определить тип перестроек торов Лиувилля в прообразе точки (h,k), движущейся вдоль прямой $\{h=\mathrm{const}\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$, при пересечении этой точкой бифуркационной диаграммы;

2) описать склейки граничных торов Лиувилля для прообразов отрезков вида $\{|k-k_1|\leqslant\varepsilon\}$, $\{|k-k_2|\leqslant\varepsilon\}$, лежащих на прямой $\{h=\mathrm{const}\}$, где значения k_1, k_2 соответствуют двум последовательным бифуркациям (т.е. для пары атомов молекулы, соединенных ребром).

Для описания склеек граничных торов Лиувилля нужно специальным образом выбрать на них базисные циклы (построить *допустимые системы координат*) и после этого выписать матрицы склейки в этих базисах. Общее правило для выбора таких циклов описано в [8]. При вычислениях, проводимых ниже, в каждом конкретном случае будет сформулировано нужное условие на эти циклы.

Ясно, что для построения молекул, соответствующих произвольным значениям h, достаточно описать бифуркации и допустимые системы координат для каждой бифуркационной кривой, т.е. для всех возможных переходов $i\to j$ (из области с номером i в область с номером j) через некоторую бифуркационную кривую. При этом будем считать, что мы всегда переходим из «нижней» области в «верхнюю» (это корректно, так как в рассматриваемом случае бифуркационные кривые не имеют вертикальных касательных; см. рис. 24, 25). Из рис. 24, 25, видно, что всего возникает

12 вариантов:

$$\begin{array}{cccccc} 1 \to 2, & 2 \to 3, & 3 \to 4, & 1 \to 3, & 5 \to 1, & 6 \to 5, \\ \varnothing \to 1, & 2 \to \varnothing, & 3 \to \varnothing, & 4 \to \varnothing, & \varnothing \to 5, & \varnothing \to 6, \end{array}$$

где через $\varnothing$ обозначена область, состоящая из точек с пустым прообразом.

Проекции торов Лиувилля, изображенные на рис. 26, имеют простой вид (грубо говоря, при этих проекциях торы «складываются» по двум или четырем циклам, превращаясь в «прямоугольные» области). Кроме того, их перестройки также хорошо описываются в терминах этих проекций. Однако, чтобы описать допустимые системы координат на каком-либо торе, его удобно «развернуть», превратив в плоский прямоугольник (соответственно, в два или четыре раза больший, чем проекция). После этого надо еще учесть действие инволюции σ^* на этой «развертке», чтобы получить уже изображение тора Лиувилля для рассматриваемой системы на сфере.

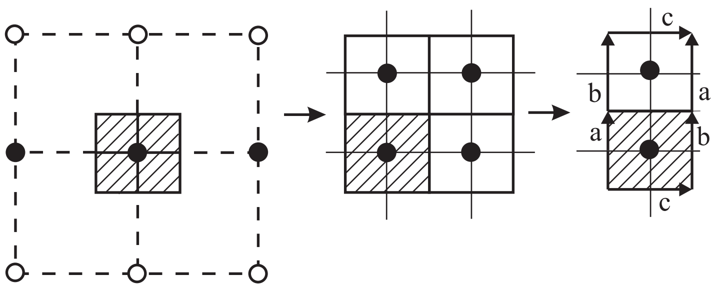


Рис. 27. «Разворачивание» и факторизация торов Лиувилля.

На рис. 27 изображена описанная процедура для случая (1) из рис. 26 Сначала мы «разворачиваем» тор, получая из 4 маленьких прямоугольников, наложенных друг на друга, один прямоугольник, в 4 раза больший. При этом будем считать, что положение одного из маленьких прямоугольников не изменилось (он на рисунке заштрихован), т.е. что для него, по-прежнему, горизонтальная ось есть ось u, а вертикальная — ось v. Пусть этот прямоугольник состоит из точек, для которых p_u, $p_v \geqslant 0$. Таким образом, после первого шага тор изображен в виде большого прямоугольника, противоположные стороны которого отождествляются при помощи сдвигов, параллельных осям. На втором шаге мы факторизуем этот тор по инволюции σ^*. Здесь надо учесть, что мы рассматриваем именно инволюцию σ^*, а не σ. Поэтому надо рассмотреть не просто центральную симметрию относительно центра заштрихованного прямоугольника, а ее композицию с центральной симметрией относительно центра большого прямоугольника (которая соответствует замене (p_u, p_v) на $(-p_u, -p_v)$). Получаем, что инволюция σ^* на данном торе есть сдвиг на вектор, совпадающий с диагональю заштрихованного прямоугольника. Таким образом, тор Лиувилля для системы на сфере изображается в виде прямоугольника (состоящего из двух маленьких прямоугольников), стороны которого склеиваются так, как показано на рис. 27 (надо отождествить стороны, отмеченные одинаковыми буквами).

Аналогичным образом (в виде *разверток*) мы будем изображать торы Лиувилля и для остальных случаев (2)–(6) из рис. 26. Здесь нужно отметить, что мы изображаем развертки торов Лиувилля *после* факторизации по инволюции σ^*. При этом в заштрихованную часть на развертке при факторизации попадают те точки, для которых p_u, $p_v > 0$. Единственный случай, где при таком подходе возникает неоднозначность, — это случай (5) на рис. 26. Здесь предполагается, что в заштрихованную часть развертки при факторизации попадают те точки, удовлетворяющие условию p_u, $p_v > 0$, которые проектировались в *левый* (заштрихованный) прямоугольник на рис. 26 (5). Кроме того, для всех разверток, кроме случаев (1) и (2), стороны прямоугольников отождествляются горизонтальными и вертикальными сдвигами, а для случаев (1) и (2) — так, как показано на рис. 27. Эти соглашения всегда будут использоваться в дальнейшем при изображении допустимых систем координат на развертках торов Лиувилля.

Сделаем еще одно замечание. Для каждого из граничных торов атомов базисные циклы λ, μ допустимой системы координат должны быть подходящим образом ориентированы. Если считать, что ориентация в фазовом пространстве гамильтоновой системы задается формой $\omega \wedge \omega$ (где ω — симплектическая структура), а ориентация на изоэнергетических поверхностях определяется «нормалью» $\operatorname{grad} H$ (относительно какой-нибудь метрики), то на торах Лиувилля возникает естественная ориентация, определяемая «нормалью» $\operatorname{grad} K$.

Оказывается, что при описанном выше способе изображения торов Лиувилля, эту ориентацию на развертках можно определить следующим образом: *ориентацию, задаваемую на заштрихованном прямоугольнике развертки тора координатами u, v, будем считать положительной*. Ясно, что тем самым ориентация определена на всех торах.

Далее, на граничных торах атома будем выбирать базисные циклы λ, μ таким образом, чтобы на «верхних» торах они задавали положительную ориентацию, а на «нижних» — отрицательную (напомним, что в данной задаче мы всегда рассматриваем бифуркации при переходе из «нижней» области бифуркационной диаграммы в «верхнюю»). Пару циклов на каждом верхнем торе атома будем обозначать (λ^-, μ^-), а на каждом нижнем торе — (λ^+, μ^+).

Теперь перейдем к описанию допустимых систем координат для перечисленных 12 случаев.

Случаи вида $i \to \varnothing$ или $\varnothing \to i$. Эти бифуркации соответствуют атому A. У этого атома только один граничный тор, который либо стягивается на осевую окружность, либо, наоборот, рождается из нее в процессе бифуркации. При проекции на конфигурационное пространство эта окружность проектируется в вертикальный или горизонтальный отрезок. Эти две возможности соответствуют тому, что при подходе точки к граничной бифуркационной кривой либо функция $f(u)$, либо функция $g(v)$ стремится к нулю. Определяя, какая из этих двух возможностей реализуется, получаем, что в случаях $\varnothing \to 1$, $\varnothing \to 5$, $\varnothing \to 6$ критические окружности проектируются в вертикальные отрезки, а в случаях $2 \to \varnothing$, $3 \to \varnothing$, $4 \to \varnothing$ — в горизонтальные.

Правило выбора цикла λ для атома A следующее: этот цикл должен стягиваться в точку при стягивании тора на ось полнотория (атома A). Дополнительный цикл μ выбирается так, чтобы при этом стягивании тора его направление стремилось к направлению потока $\operatorname{sgrad} H$ на критической окружности (и чтобы пара λ, μ была правильно ориентирована, см. выше). Отметим, что цикл μ определен неоднозначно.

Отсюда, учитывая правило выбора ориентации и то, что для заштрихованного прямоугольника p_u, $p_v \geqslant 0$, получаем допустимые системы координат на граничном торе атома A для всех 6 случаев. Ответ приведен на рис. 28.

Напомним, что для первых двух перестроек, изображенных на рис. 28, склейки прямоугольников производятся так, как показано на рис. 27. Поэтому, в частности, цикл λ для перестройки $\varnothing \to 1$ на рис. 28 состоит из двух кусков.

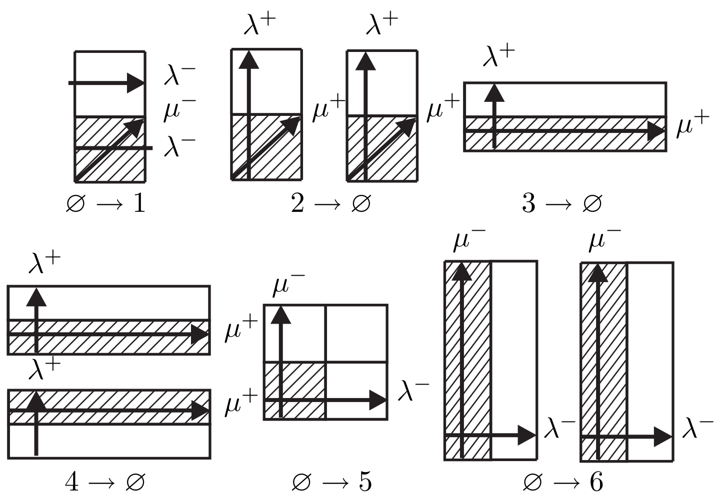


Рис. 28. Допустимые системы координат на атомах A.

Случай $1 \to 2$. В этом случае происходит следующее: один тор (который был в области 1) не изменяется, но появляется второй тор. Это происходит точно так же, как и при перестройке $\varnothing \to 1$, описанной выше (см. рис. 28).

Случай $2 \to 3$. В этом случае два тора перестраиваются в один. Эта бифуркация описывается атомом B.

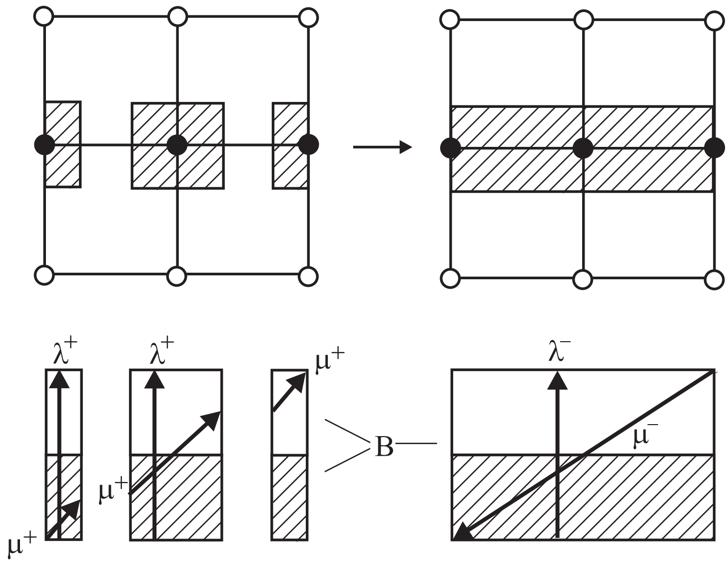


Рис. 29. Допустимая система координат на атоме B (случай $2 \to 3$).

Правило выбора циклов для атома B следующее: если рассматривать атом B как (тривиальное) расслоение на окружности над окрестностью восьмерки N^2, то циклы λ должны совпадать со слоем этого расслоения и быть сонаправленными потоку на критической окружности, а циклы μ должны ограничивать некоторую двумерную поверхность, являющуюся трансверсальным сечением этого расслоения. Кроме того, как и выше, остается условие правильной ориентации базиса λ, μ.

Аналогично предыдущему, устанавливается, что критическая окружность проектируется в вертикальный отрезок. Поэтому в качестве слоев можно взять вертикальные отрезки.

Тогда циклы μ, высекаемые на трех граничных торах атома B глобальным сечением расслоения, можно представить следующим образом. Если рассматривать на торах Лиувилля циклы $a = \{u = \mathrm{const}\}$ и $b = \{v = \mathrm{const}\}$, то циклы μ имеют вид $a + b$ (пока без ориентации). Указанное семейство циклов μ склеивается в глобальное сечение и при этом трансверсально слоям $\{u = \mathrm{const}\}$. Учитывая соглашения об ориентации, получаем допустимые системы координат в рассматриваемом случае (рис. 29).

Случай $3 \to 4$. Эта бифуркация, как и в предыдущем случае, описывается атомом B, но здесь, наоборот, один тор распадается на два тора.

Правило выбора циклов λ, μ в данном случае — такое же, как и для атома B в случае $2 \to 3$.

Критическая окружность, очевидно, проектируется в горизонтальный отрезок. Поэтому циклы λ имеют вид $\{v = \mathrm{const}\}$.

Каждый из заштрихованных прямоугольников на рис. 26 (3,4) изображает проекции двух торов Лиувилля (для одного $p_u > 0$, для другого $p_u < 0$), но при факторизации эти торы отождествляются. Поэтому можно считать, что для разверток граничных торов Лиувилля (рассматриваемого атома B) заштрихованная часть, как обычно, соответствует точкам, где p_u, $p_v > 0$.

В качестве циклов μ, высекаемых глобальным сечением, можно взять циклы $\{u = \mathrm{const}\}$. Учитывая сформулированное выше правило выбора ориентаций на циклах λ, μ, получаем допустимые системы координат на трех граничных торах атома B (см. рис. 30).

Случай $6 \to 5$. Здесь, как и в двух предыдущих случаях, перестройка двух торов в один описывается атомом B. Критическая окружность проектируется в горизонтальный отрезок, поэтому

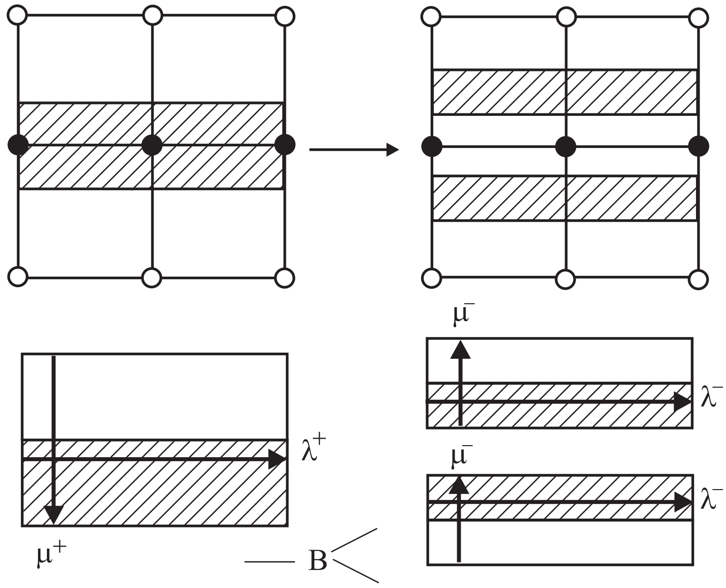


Рис. 30. Допустимая система координат на атоме B (случай $3 \to 4$).

циклы λ задаются условием $\{v = \mathrm{const}\}$. Глобальное сечение можно выбрать так, что высекаемые им циклы на всех торах (циклы μ) будут изображаться вертикальными отрезками.

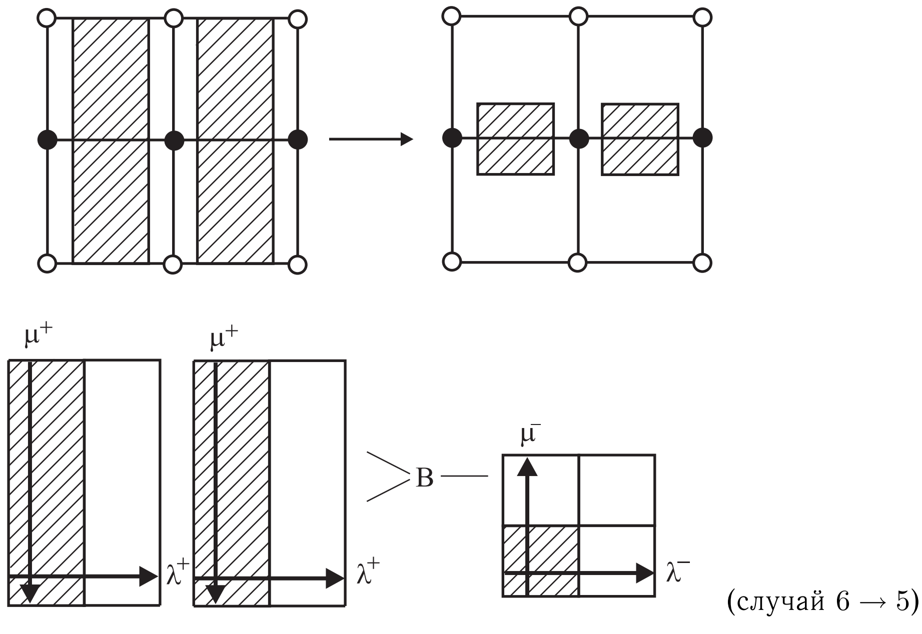


Рис. 31. Допустимая система координат на атоме B (случай $6 \to 5$).

Как и выше, учитывая правило ориентации циклов λ, μ, получаем ответ (см. рис. 31).

Случай $1 \to 3$. В данном случае происходит перестройка одного тора в один тор, описываемая атомом A^*.

На этом атоме определена структура ориентированного слоения Зейферта с одним особым слоем (критическая окружность). Циклы λ в данном случае однозначно определены как слои этого слоения. Очевидно, что при изображении торов в виде разверток в качестве слоев можно рассматривать вертикальные отрезки. При этом циклы λ ориентированы снизу вверх (так как на заштрихованной части развертки p_u, $p_v > 0$).

Один из циклов μ^+, μ^- можно выбрать произвольно (но, конечно, так, чтобы соответствующая пара циклов λ, μ образовывала базис на торе и была правильно ориентирована). Выберем цикл μ^- на верхнем торе атома A^* в виде горизонтального отрезка (см. рис. 32).

После того, как цикл μ^- зафиксирован, правило выбора цикла μ^+ следующее. На границе окрестности критической окружности (особого слоя слоения Зейферта) имеются два однозначно определенных цикла: λ — слой; $\varkappa$ — цикл, который стягивается в этой окрестности в точку. Ориентируем цикл $\varkappa$ так, чтобы пара циклов λ, $\varkappa$ была положительно ориентирована (напомним, что цикл λ ориентирован, так как на особом слое задано направление потоком $\operatorname{sgrad} H$). Тогда на границе окрестности особого слоя однозначно определяется некоторый цикл μ из условия $\lambda + 2\mu = \varkappa$. Теперь, удалив из 3-атома A^* окрестность особого слоя, необходимо построить сечение слоения Зейферта (уже без особых слоев), совпадающее на верхнем торе атома A^* с циклом μ^-, а на границе окрестности особого слоя — с циклом μ. Такое сечение определено однозначно и тем самым высекает некоторый цикл на втором (нижнем) торе атома A^*. Ориентировав этот цикл в соответствии с правилом ориентации, получим цикл μ^+.

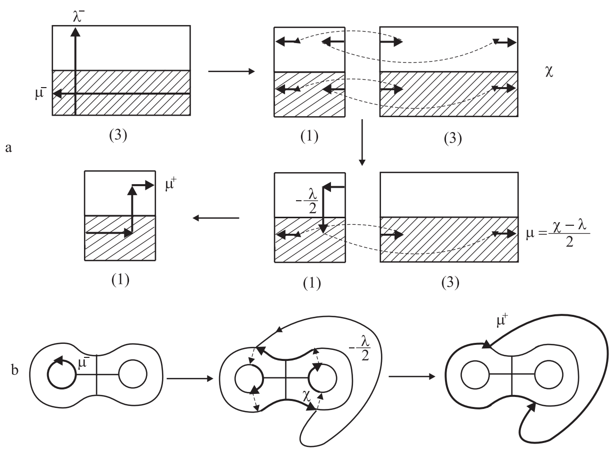


Рис. 32. Построение допустимой системы координат для атома A^*.

Процесс построения цикла μ^+ изображен на рис. 32 (a) в виде разверток, а на рис. 32 (b) — в более наглядном виде с использованием «удвоенного» сечения слоения Зейферта (см. [8]). Пунктирные стрелки на рис. 32 (a) изображают сдвиг по направлению, трансверсальному семейству торов Лиувилля (вдоль потока $\pm\operatorname{grad} K$); они соответствуют пунктирным частям цикла $\varkappa$ на рис. 32 (b). Отметим также, что боковые стороны разверток на рис. 32 (a) соответствуют циклам, высекаемым сепаратрисами на граничных торах Лиувилля атома A^*. При этом надо учитывать, что для развертки (3) боковые стороны склеиваются, как обычно, горизонтальными сдвигами, а для развертки (1) — так, как показано на рис. 27.

Окончательный ответ — допустимая система координат на атоме A^* в случае $1 \to 3$ — изображен на рис. 33.

Случай $5 \to 1$. Здесь, как и в предыдущем случае, происходит перестройка одного тора в один тор, описываемая атомом A^*.

Правило выбора циклов λ, μ и рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Поэтому приведем лишь окончательный ответ (см. рис. 34).

19.4. Построение молекул и вычисление меток. Итак, для всех возможных бифуркаций торов Лиувилля мы описали допустимые системы координат на граничных торах соответствующих атомов. Изоэнергетическую поверхность можно представлять как результат склеек граничных торов атомов. Тогда на каждом таком торе возникают две пары базисных циклов λ^-, μ^- и λ^+, μ^+. Выражая циклы λ^+, μ^+ через циклы λ^-, μ^-, получаем матрицы склейки для каждого ребра молекулы.

Пример построения молекулы изображен на рис. 35. Эта молекула соответствует прямой h_4 на рис. 24. Прямая h_4 пересекает бифуркационную диаграмму в четырех точках, в которых происходят

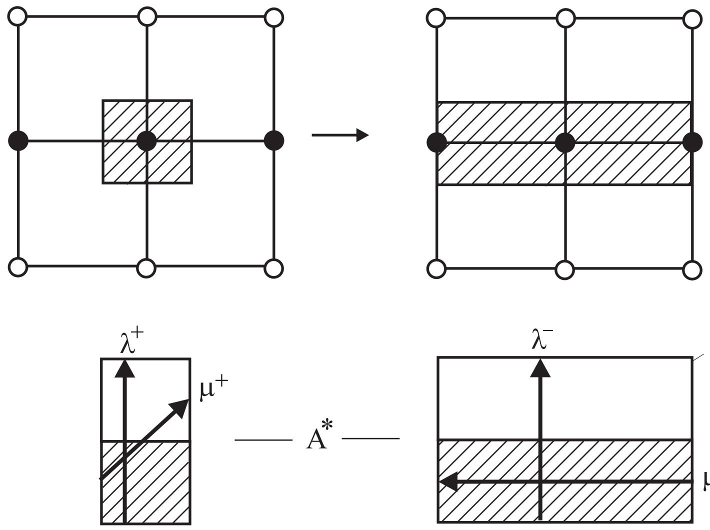


Рис. 33. Допустимая система координат на атоме A^* (случай $1 \to 3$).

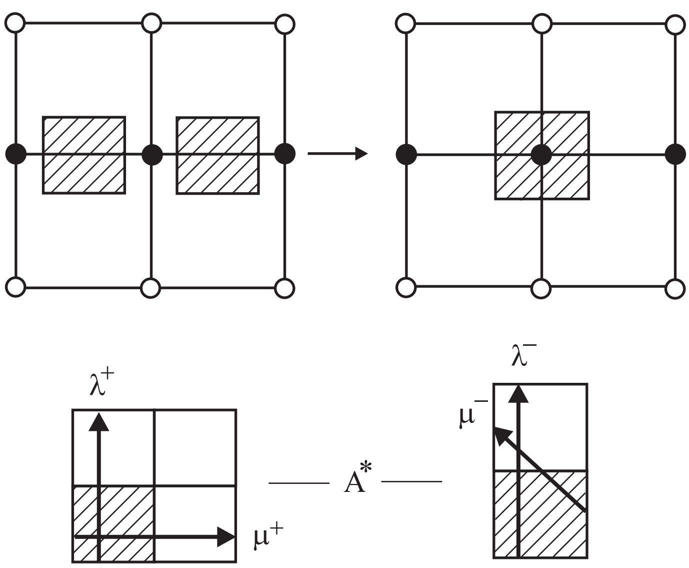


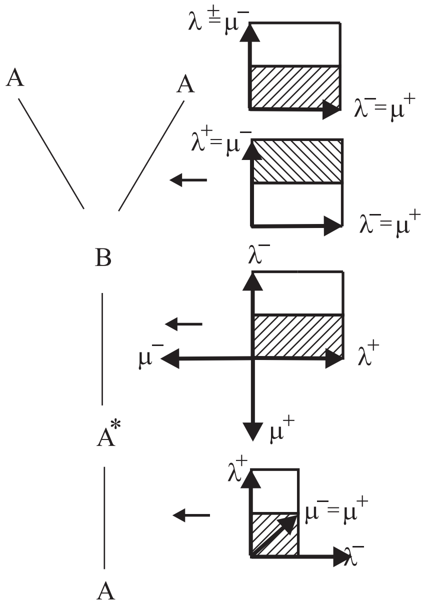
Рис. 34. Допустимая система координат на атоме A^* (случай $5 \to 1$).

следующие перестройки: $\varnothing \to 1 \to 3 \to 4 \to \varnothing$. Для каждого из трех однопараметрических семейств торов Лиувилля нужно взять циклы λ^-, μ^- и λ^+, μ^+, построенные в п. 19.3 (для данного примера см. рис. 28, 30, 33).

Аналогичным образом строятся молекулы для всех прямых h_1–h_{12}, отмеченных на рис. 24, 25.

Молекулы с матрицами склейки полностью описывают топологию слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях. Однако матрицы склейки определены неоднозначно (в силу неоднозначности выбора допустимых систем координат). Поэтому окончательный ответ удобно привести в виде меченых молекул (инвариантов Фоменко—Цишанга). Метки, кодирующие информацию о матрицах склейки, определены уже однозначно. Определение меток и формулы для их вычисления см. в [8].

Теорема 19.2. *Для задачи двух центров на двумерной сфере полный список инвариантов Фоменко—Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на изоэнергетических поверхностях* $\{H = h\}$ (*при различных значениях параметров* γ_1, γ_2, δ *и* h), *состоит из* 12 *молекул, перечисленных в таблице* 2 (*см.* § 21) (*номер* i *в таблице соответствует прямой* h_i *на рис.* 24).



$$\begin{pmatrix}\lambda^+\\ \mu^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^-\\ \mu^-\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^+\\ \mu^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^-\\ \mu^-\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^+\\ \mu^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^-\\ \mu^-\end{pmatrix}$$

Рис. 35. Пример построения молекулы (для прямой h_4).

Для каждого из 12 случаев в таблице 2, кроме молекул с метками, приведенных во втором столбце, в третьем столбце изображены те же молекулы с матрицами склеек для допустимых систем координат, построенных в п. 19.3.

Отметим, что в случае пространства Лобачевского для ограниченного движения в задаче двух центров ($h < -1$; см. [49]), мы также имеем молекулы 1, 2, 3 из таблицы 2 (см. гл. 2).

Бифуркационная диаграмма для рассматриваемой задачи имеет особые точки (точки трансверсального пересечения и точки касания бифуркационных кривых). Топологию слоения Лиувилля в окрестности таких точек удобно описывать при помощи круговых молекул, которые соответствуют трехмерным поверхностям в фазовом пространстве системы, являющимся прообразами маленьких окружностей с центрами в этих особых точках (см. [8, 10]).

Напомним, что мы исследуем топологию системы, полученной в результате регуляризации задачи двух центров (см. § 17). В частности, топология слоения Лиувилля исследовалась отдельно на каждой изоэнергетической поверхности, а не во всем фазовом пространстве. Поэтому, строго говоря, при таком подходе круговые молекулы для рассматриваемой системы не являются обычными круговыми молекулами. Однако формально мы можем их построить аналогично тому, как это было сделано для изоэнергетических молекул.

Круговые молекулы (с r-метками) для всех пяти особых точек, отмеченных на рис. 24 буквами a, b, c, d, e, приведены на рис. 36. Они имеют тот же вид, что и круговые молекулы для типичных особых точек, встречающихся в классических случаях интегрируемости (см. [8, 10]). Для точек a и e круговые молекулы совпадают с круговыми молекулами точек типа центр-седло, для точки b — с круговой молекулой особенности, называемой «вилка» («pitch-fork»), а для точек c и d — с круговыми молекулами особенностей, являющихся, соответственно, гиперболическим и эллиптическим «удвоением периода» («period-doubling»).

20. Движения на конфигурационном пространстве

Рассмотрим движения и предельные движения, которые возникают при бифуркациях торов Лиувилля, на конфигурационном пространстве.

Каждой области на бифуркационной диаграмме соответствует определенный тип движения на конфигурационном пространстве. Проекции торов Лиувилля для каждой из этих 6 областей приведены на рис. 37 (номера на рис. 37 соответствуют номерам областей на рис. 24).

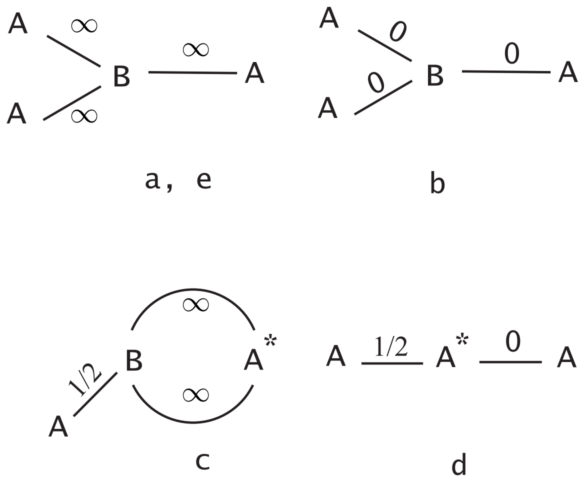


Рис. 36. Круговые молекулы.

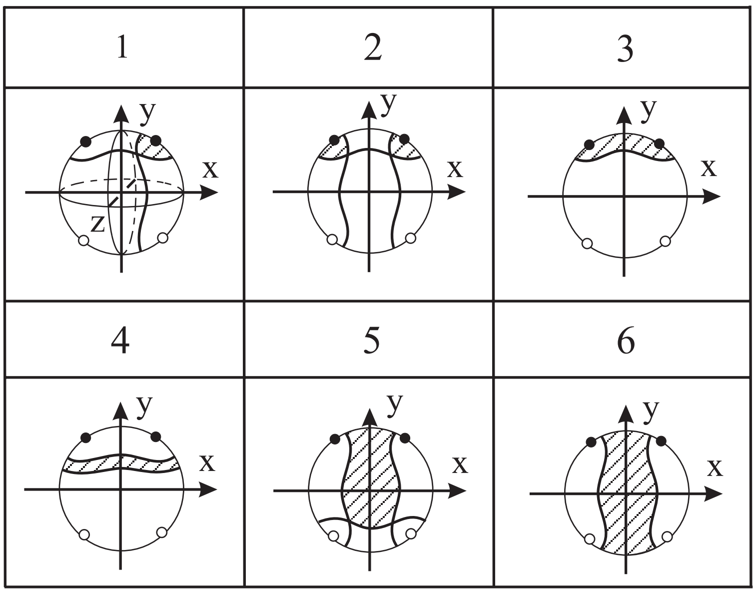


Рис. 37

Отметим, что проекции торов Лиувилля могут заходить за экватор сферы, что в случаях плоского пространства и пространства Лобачевского соответствует уходу на бесконечность. Случаи, когда материальная точка заходит за экватор и когда она остается все время в верхней полусфере, разделяются прямой $l = h\beta^2$, являющейся одной из асимптот гипербол. Действительно, при $\eta^2 = \beta^2$ материальная точка пересекает экватор (что соответствует уходу на бесконечность). В частности, в случаях 1, 3, 4 проекции торов Лиувилля могут иметь вид, изображенный на рис. 38.

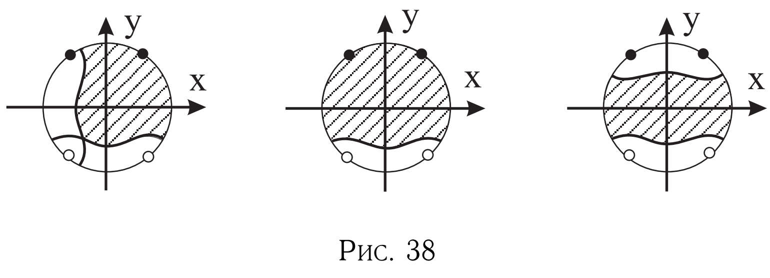


Рис. 38

Опишем тип движения для каждой области.

В области 1 (рис. 24) мы имеем спутниковое движение (аналогичное движение существует для плоского пространства и пространства Лобачевского [19, 49]), планета движется около одного центра, орбита всюду плотно заметает всю область (рис. 37 (1)). Если точка $x \in \mathbb{R}^2$ находится слева от прямой $l = -h\alpha^2$, то на конфигурационном пространстве этот случай соответствует движению только на правой полусфере. При пересечении прямой материальная точка заходит на левую полусферу.

В области 2 наблюдаем аналогичное спутниковое движение, которое возможно уже около двух центров.

В области 3 движение лемнискатоподобное, траектория может всюду плотно заметать область. Если точка $x \in \mathbb{R}$ находится справа от прямой $l = h\beta^2$, то получим область, содержащую всю верхнюю полусферу. В случае пространств Евклида и Лобачевского соответствующая область совпадает со всем конфигурационным пространством.

В области 4 проекция тора на конфигурационное пространство является кольцом, которое охватывает два притягивающих центра. Справа от прямой $l = h\beta^2$ при аналогичном движении в плоском пространстве и пространстве Лобачевского траектория уходит на бесконечность.

В области 5 точка движется в криволинейном прямоугольнике, сторонами которого являются квадрики. В случае пространств Евклида и Лобачевского этому прямоугольнику всегда соответствует неограниченная область на конфигурационном пространстве (между двумя гиперболами).

В области 6 мы, как и в случае 4, имеем кольцо, но в этом случае оно расположено между притягивающими центрами. Эта область также соответствует уходу на бесконечность. Оба случая 5 и 6 соответствуют одному и тому же случаю в пространствах Евклида и Лобачевского.

Представляет интерес также рассмотреть предельные движения, так как они дают наглядное представление о перестройках торов Лиувилля при бифуркациях, закодированных с помощью инвариантов Фоменко—Цишанга.

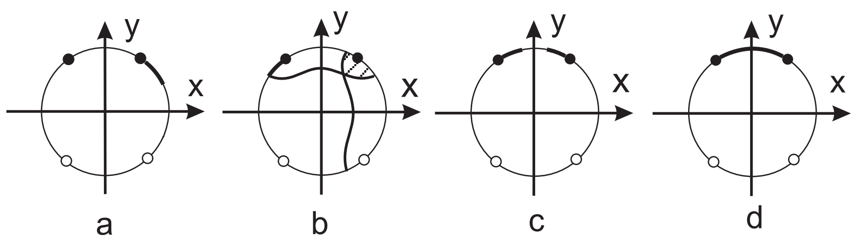


Рис. 39

Рассмотрим движения, связанные с падением на центр. Точкам на линии Γ_5 при $h < \dfrac{\gamma_1 - \gamma_2}{R(\gamma_1 + \gamma_2)} \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta}$ (т.е. слева от точки касания с гиперболой) соответствует корень функции R, равный нулю. Здесь материальная точка двигается по части дуги, соединяющей притягивающий и антиподальный центры. Движение на дуге ограничено квадрикой $\eta = \mathrm{const}$ — корнем функции S (см. рис. 39(a)). Этому движению соответствует 3-атом A (минимальная критическая окружность интеграла, рождение тора Лиувилля). При пересечении линии Γ_4,

$$h < -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2R\alpha\beta},$$

рождается еще один тор Лиувилля (3-атом A). Движение следующее: материальная точка либо движется около одного из центров (спутниковое движение), либо по части дуги, соединяющей притягивающий и антиподальный центры в другой полусфере (см. рис. 39(b)). При пересечении линии Γ_3,

$$h < \frac{-(\beta^2 - \alpha^2) - R^2\sqrt{1 - \left(\dfrac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right)^2}}{2R\alpha\beta},$$

имеем аналогичное движение, только уже вдоль частей дуги, соединяющей два притягивающих центра (см. рис. 39(c)). Если

$$\frac{-(\beta^2-\alpha^2)-R^2\sqrt{1-\left(\dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\right)^2}}{2R\alpha\beta} < h < -\frac{\beta^2-\alpha^2}{2R\alpha\beta},$$

то движение вдоль всей дуги (см. рис. 39(d).

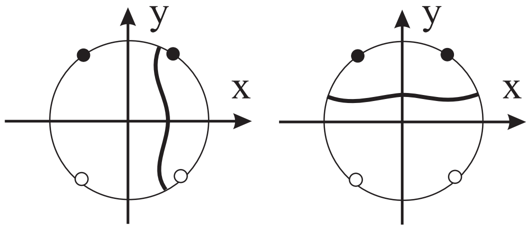


Рис. 40

Точкам на гиперболах Γ_1 и Γ_2 соответствуют кратные корни ($\xi_1=\xi_2$) функции R и кратные корни ($\eta_1=\eta_2$) функции S (этим точкам также соответствуют бифуркации торов Лиувилля, описываемые 3-атомами A). В первом случае две квадрики вырождаются в одну. Таким образом, материальная точка движется периодически вдоль квадрики, окружающей притягивающий и антиподальный центры (часть кривой Γ_1 между областями $\varnothing$ и 6). Во втором случае материальная точка движется вдоль квадрики, окружающей два притягивающих центра, движение тоже периодическое (часть кривой Γ_2 между областями $\varnothing$ и 4; рис. 40).

Теперь рассмотрим движения для бифуркаций, описываемых седловыми атомами (неустойчивые периодические траектории и соответствующие им асимптотические траектории).

В случае, когда корень функции S равен нулю, часть линии Γ_3,

$$h > -\frac{\beta^2-\alpha^2}{2R\alpha\beta},$$

материальная точка асимптотически стремится, двигаясь по спирали, к дуге, соединяющей два центра, наматываясь на нее и не достигая за конечный момент времени (с другой стороны движение ограничено квадрикой $\eta=\mathrm{const}$, рис. 41(a)).

Точкам на участке кривой Γ_1 (между областями 2 и 3) ($l>0$) соответствуют кратные корни функции R ($\xi_1=\xi_2$) и один корень функции S. Возможно следующее асимптотическое движение: точка совершает маятникообразные колебания внутри квадрики, определяемой корнем S, и асимптотически приближается к квадрике ($\xi=\xi_1=\xi_2$) со стороны одного из центров (рис. 41(b)).

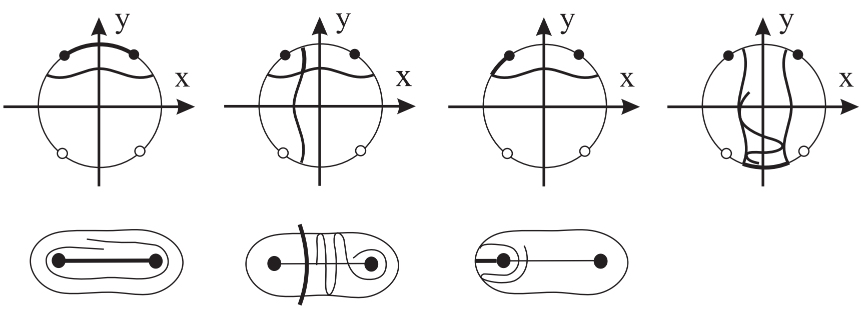


Рис. 41

Точкам на участке кривой Γ_4 между областями 1 и 3,

$$h > -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta R}, \quad l > 0,$$

соответствует нулевой корень функции R $(\xi_1 = \xi_2)$ и один корень функции S. Возможно следующее асимптотическое движение: точка совершает маятникообразные колебания внутри квадрики, определяемой корнем S, и асимптотически приближается к части дуги, соединяющей гравитирующий и антиподальный центры (рис. 41(c)).

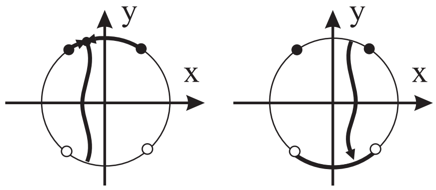


Рис. 42

Точкам на участке кривой Γ_6 (между областями 5 и 6) $(l < 0)$ соответствует нулевой корень функции S и два корня функции R. Возможно следующее асимптотическое движение: точка совершает маятникообразные колебания внутри квадрик, определяемых корнями R, и асимптотически приближается к дуге, соединяющей два антиподальных центра (рис. 41(d)).

Рассмотрим, наконец, точки равновесия.

Точка 1 (точка пересечения гиперболы Γ_1 и линии Γ_3). Эта точка устойчивого равновесия (рис. 42) находится на дуге, соединяющей два притягивающих центра, на таком расстоянии, что гравитационные силы уравновешены.

Точка 2 (точка пересечения гиперболы Γ_1 и линии Γ_6) расположена с противоположной стороны.

Глава 4

ЗАДАЧА ДВУХ ЦЕНТРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Впервые проблема исследования динамики в пространстве постоянной отрицательной кривизны была поставлена Н. И. Лобачевским. Аналогом ньютоновского потенциала $\left(\frac{1}{r}\right)$ в пространстве Лобачевского является, как хорошо известно [37], функция $\coth r$. Дальнейшее развитие эта тема получила в работе Н. Е. Жуковского [20] о движении псевдосферической («плоской») пластинки на плоскости Лобачевского.

В этой части мы рассмотрим обобщение задачи двух центров на пространство Лобачевского [46, 47, 49], т.е. на $\mathbb{H}^3$. Здесь $\mathbb{H}^3$ — пространство Лобачевского, определенное как верхняя пола трехмерного гиперболоида, вложенная в пространство Минковского M^4.

21. Описание системы. Редукция

Рассмотрим верхнюю полу гиперболоида $\mathbb{H}^3$, стандартно вложенную в четырехмерное пространство Минковского M^4 с координатами x^1, x^2, x^3, x^4. Уравнение гиперболоида имеет вид

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = R^2. \tag{171}$$

Пусть материальная точка двигается под действием ньютоновского притяжения двух неподвижных центров, которые расположены в точках с координатами $\mathbf{r}_1 = (\beta, \alpha, 0, 0)$, $\mathbf{r_2} = (\beta, -\alpha, 0, 0)$, где $\beta^2 - \alpha^2 = R^2$. Потенциальная энергия материальной точки в поле этих центров равна

$$V = -\frac{\gamma_1}{R}\coth\theta_1 - \frac{\gamma_2}{R}\coth\theta_2, \tag{172}$$

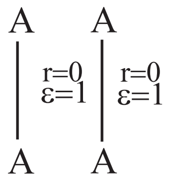
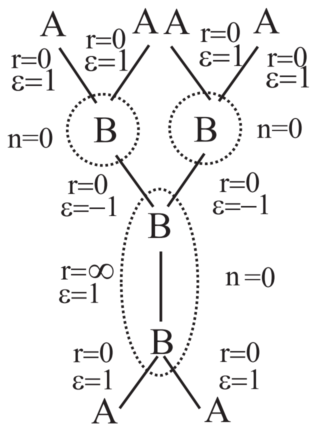
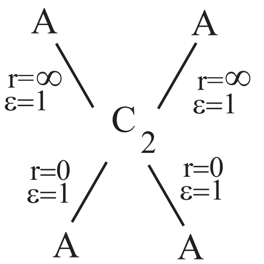
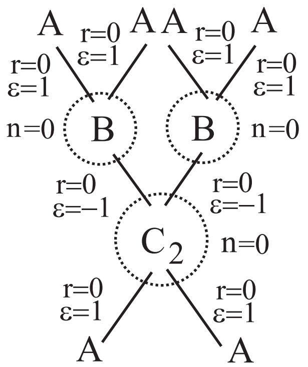
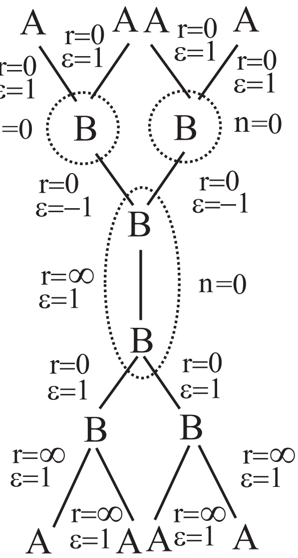
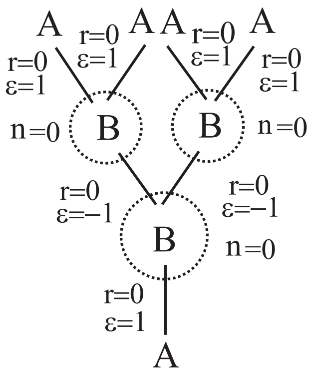
N	молекула (изонергетическая)	N	молекула (изоэнергетическая)
1		5	
2			
3		6	
4			

Таблица 1.

где θ_i — угол между радиус-векторами гравитирующего центра и движущейся материальной точки; мощность двух центров обозначим через γ_i. Здесь

$$\cosh\theta_i = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \rangle}{|\mathbf{r}||\mathbf{r_i}|} = \frac{1}{R^2}(x^1x_i^1 - x^2x_i^2 - x^3x_i^3 - x^4x_i^4),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в пространстве Минковского. Функция Лагранжа имеет форму

$$L = \frac{1}{2}[-(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 + (\dot{x}^4)^2] - V.$$

Введем псевдосферическую систему координат. Формулы замены таковы, что

$$x^1 = R\cosh\theta, \qquad x^2 = R\sinh\theta\cos\varphi,$$

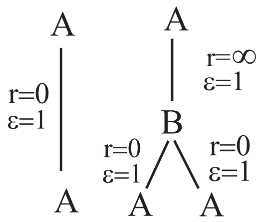
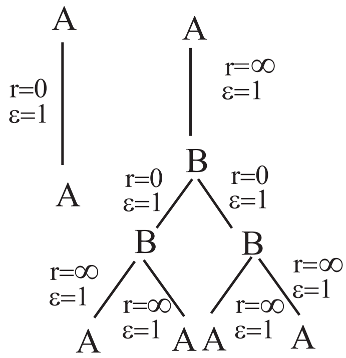
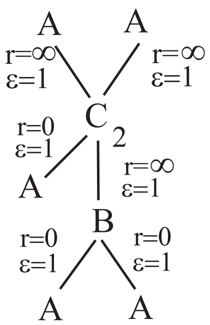
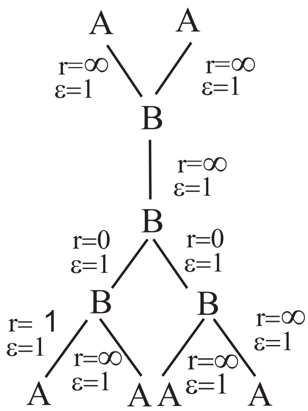
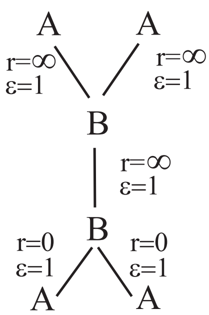
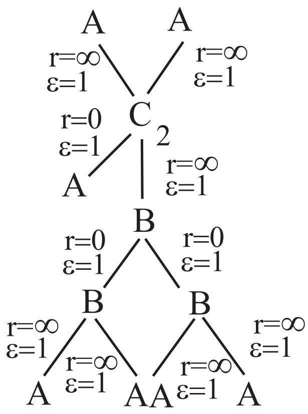
<table>
<tr><th>N</th><th>молекула
(изоэнергетическая)</th><th>N</th><th>молекула
(изоэнергетическая)</th></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>10</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>
</td><td>11</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td><td>12</td><td>
</td></tr>
</table>

Таблица 1(продолжение).

$$x^3 = R\sinh\theta\sin\varphi\cos\psi, \qquad x^4 = R\sinh\theta\sin\varphi\sin\psi.$$

Матрица Якоби имеет вид, аналогичный случаю сферы, только вместо $\sin\theta$, $\cos\theta$ мы должны написать $\sinh\theta$, $\cosh\theta$.

Напомним, что θ определяет длину гиперболы («меридиана») в псевдоевклидовой метрике от полюса верхней полы гиперболоида до переменной точки, т.е. псевдосферические координаты аналогичны сферическим координатам (для сферических координат θ — длина меридиана большой

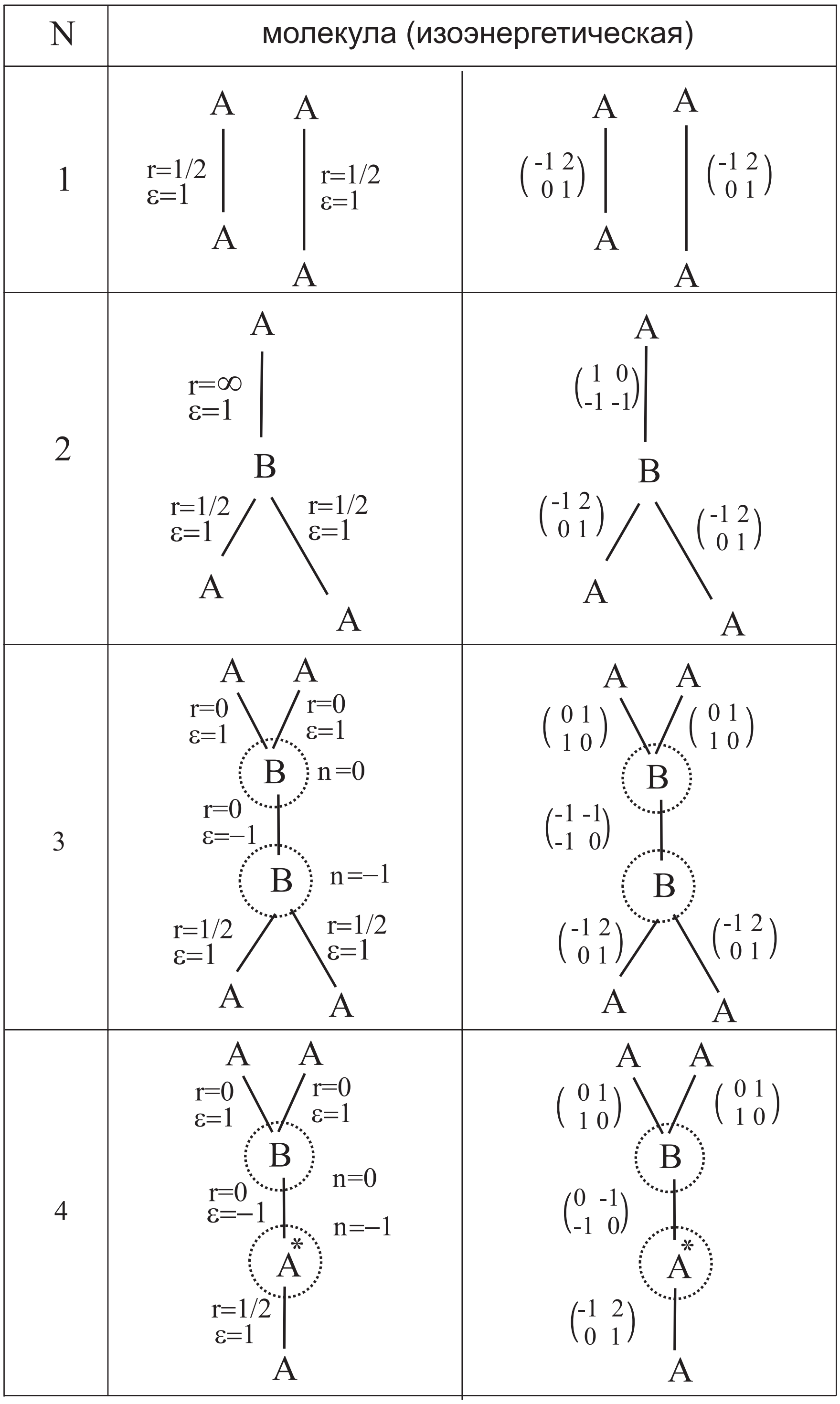


Таблица 2.

окружности от северного полюса сферы до переменной точки). Метрика, индуцированная в пространстве $\mathbb{H}^3$ (относительно координат R, θ, φ, ψ), записывается в виде

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sinh^2\theta d\varphi^2 + \sinh^2\theta\sin^2\varphi d\psi^2). \tag{173}$$

Функция Лагранжа L в псевдосферических координатах перепишется следующим образом:

$$L = \frac{1}{2}R^2(\dot\theta^2 + \sinh^2\theta(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\dot\psi^2) - V. \tag{174}$$

Без потери общности будем рассматривать единичную псевдосферу.

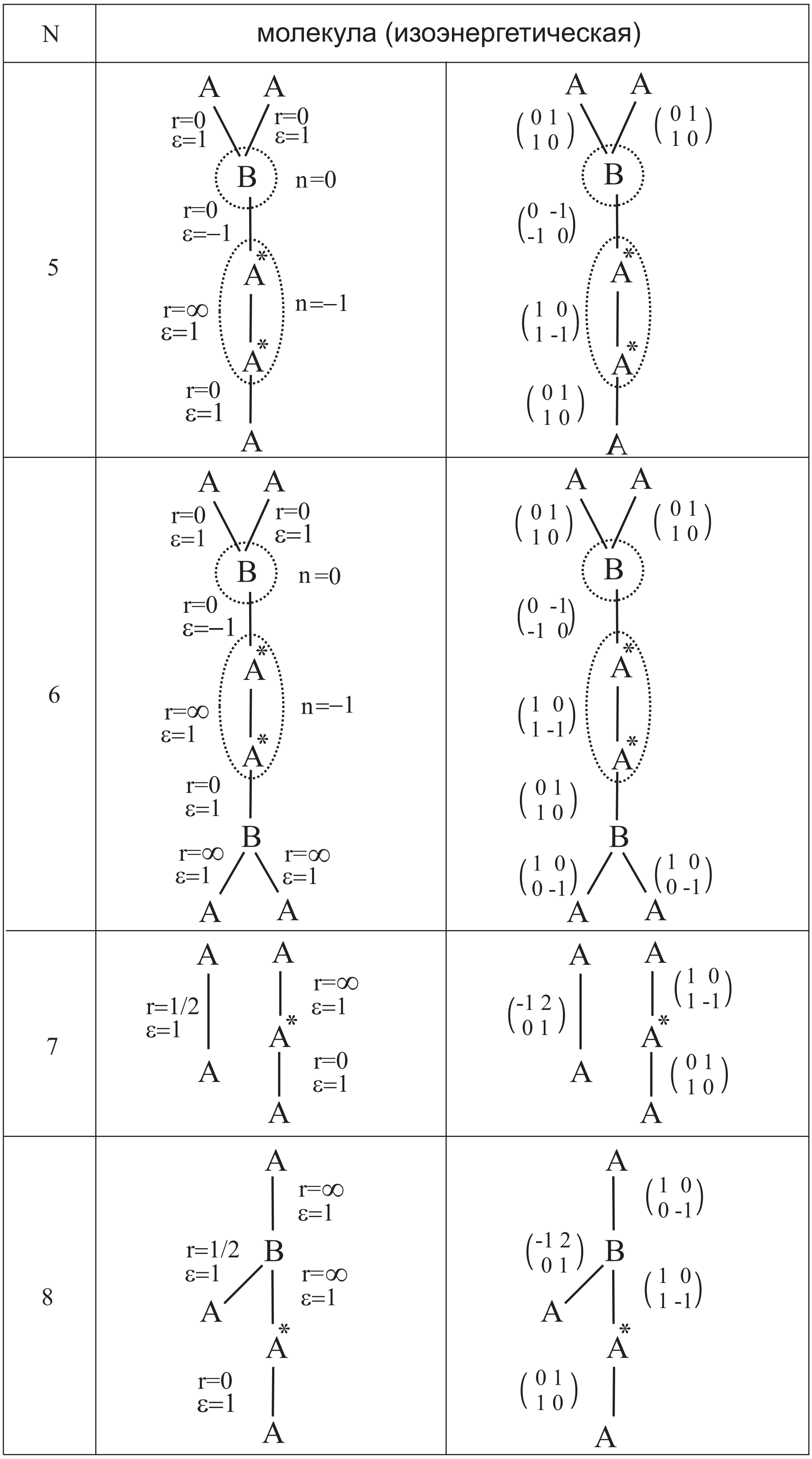


Таблица 2(продолжение).

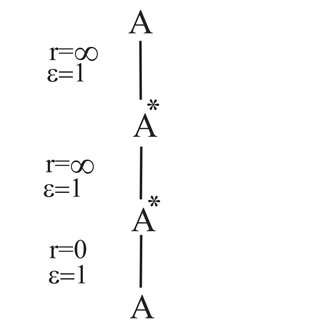
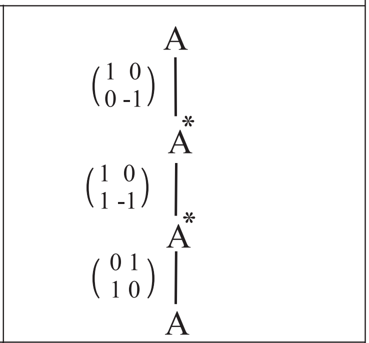
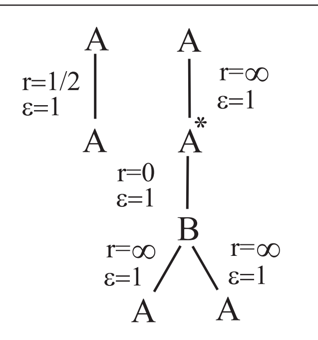
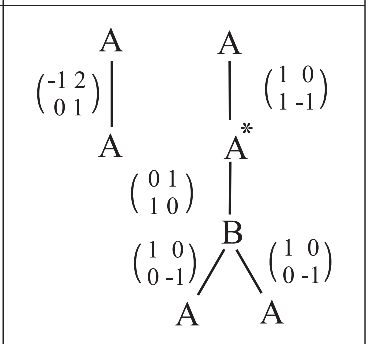
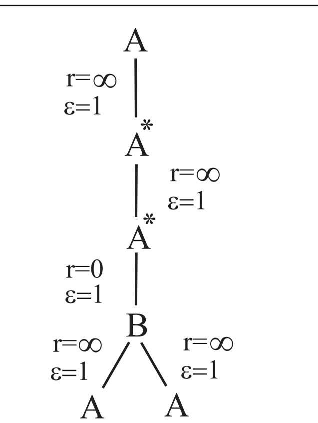
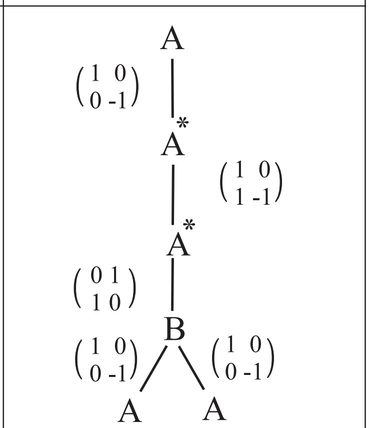
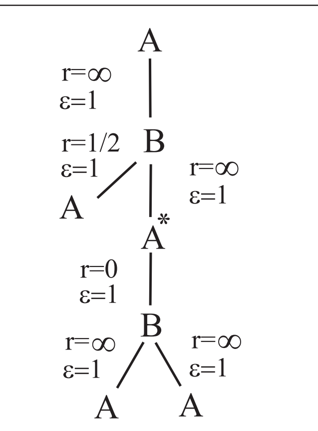
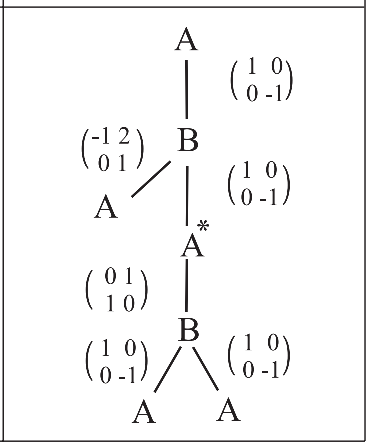
N	молекула (изоэнергетическая)	
9		
10		
11		
12		

Таблица 2(продолжение).

Теорема 21.1. *Материальная точка в задаче двух центров в пространстве $\mathbb{H}^3$ движется так же, как в двумерной системе (на единичной двумерной псевдосфере $\mathbb{H}^2 : \{y^2 - x^2 - z^2 = 1\}$) с энергией*

$$h = \frac{1}{2}(-\dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2) + V_{\text{eff}}\,,$$

где эффективная потенциальная энергия определяется выражением

$$V_{\text{eff}} = -\gamma_1 \coth\theta_1 - \gamma_2 \coth\theta_2 + \frac{p_\varphi^2}{2z^2}.$$

Доказательство. В силу симметрии задачи введем новые переменные по формулам

$$x^1 = y, \quad x^2 = x, \quad x^3 = z\cos\varphi, \quad x^4 = z\sin\varphi. \tag{175}$$

Тогда функция Лагранжа в этих переменных при $L = T - V$ будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2) + \gamma_1 \coth\theta_1 + \gamma_2 \coth\theta_2. \tag{176}$$

Очевидно, координата φ является циклической, следовательно, согласно теореме Нетер, существует интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = z^2\dot{\varphi} = p_\varphi.$$

Запишем функцию Рауса в следующем виде:

$$R = \frac{1}{2}(-\dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2) - V_{\text{eff}}\,,$$

где

$$V_{\text{eff}} = V + \frac{p_\varphi^2}{2z^2}.$$

Отсюда следует, что энергия частицы имеет вид

$$h = \frac{1}{2}(-\dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2) + V + \frac{p_\varphi^2}{2z^2}. \tag{177}$$

Таким образом, мы свели нашу проблему к задаче о движении материальной точки на единичной двумерной псевдосфере $\mathbb{H}^2 : \{y^2 - x^2 - z^2 = 1\}$ в поле с приведенным потенциалом V_{eff}. Теорема доказана. □

22. Интегралы системы

Гамильтониан данной задачи имеет лиувиллев вид в псевдосфероконических координатах ξ, η [49]. Мы определяем ξ и η как корни уравнения

$$f(\lambda) = \frac{x^2}{\lambda - \alpha^2} - \frac{y^2}{\lambda^- \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda} = \frac{-(\lambda - \xi^2)(\lambda + \eta^2)}{\lambda(\lambda - \alpha^2)(\lambda - \beta^2)}. \tag{178}$$

Координатные поверхности описываются уравнениями

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{\xi^2 - \beta^2} = \frac{x^2}{\xi^2 - \alpha^2} + \frac{z^2}{\xi^2}; \qquad \frac{y^2}{\eta^2 + \beta^2} = \frac{x^2}{\eta^2 + \alpha^2} + \frac{z^2}{\eta^2}; \\ y^2 - x^2 - z^2 = R^2. \end{gathered} \tag{179}$$

Формулы перехода от декартовых координат к псевдосфероконическим координатам можно получить из соотношений 178:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha^2 - \xi^2\right)\left(\alpha^2 + \eta^2\right), \\ y^2 &= \frac{1}{\beta^2}\left(\beta^2 - \xi^2\right)\left(\beta^2 + \eta^2\right), \\ z^2 &= \frac{R^2}{\alpha^2\beta^2}\xi^2\eta^2. \end{aligned} \tag{180}$$

При этом выполняются условия

$$\xi^2 \leqslant \alpha^2, \quad 0 \leqslant \eta < \infty. \tag{181}$$

Извлекая корни, получим выражения

$$\begin{gathered} x = \operatorname{sign}(x)\frac{\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)}}{\alpha}, \\ y = \frac{\sqrt{(\beta^2-\xi^2)(\beta^2+\eta^2)}}{\beta}, \quad z = \frac{R\xi\eta}{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{182}$$

Координатными линиями в данной задаче являются линии пересечения псевдосферы с двумя семействами конфокальных конусов. Координаты ξ и η ортогональны в смысле метрики псевдоевклидова пространства.

Ясно, что

$$\cosh\theta_{1,2} = \mp\alpha x + \beta y = \mp\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)} + \sqrt{(\beta^2-\xi^2)(\beta^2+\eta^2)},$$
$$\cosh^2\theta_{1,2} - \sinh^2\theta_{1,2} = 1.$$

Гамильтониан задачи относительно псевосфероконических координат имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)}{\xi^2+\eta^2}p_\xi^2 + \frac{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)}{\xi^2+\eta^2}p_\eta^2\right] + V_{\text{eff}}\,, \tag{183}$$

где

$$\begin{gathered} V_{\text{eff}} = \frac{-(\gamma_1+\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)} - \operatorname{sign}(x)(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)}}{R(\xi^2+\eta^2)} + \\ + \frac{p\varphi^2\alpha^2\beta^2(\xi^{-2}+\eta^{-2})}{2R(\xi^2+\eta^2)}; \end{gathered} \tag{184}$$

здесь p_ξ, p_η — импульсы, соответствующие координатам ξ, η. Функция $\operatorname{sign}(x)$ описывает потенциал на половине верхней полы гиперболоида ($x > 0$ или $x < 0$). Эта неоднозначность связана с различными способами извлечения корня в формулах (180).

Очевидно, гамильтониан в координатах ξ, η имеет лиувиллев вид, следовательно, можно выписать дополнительный интеграл

$$\begin{gathered} L = \frac{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)\eta^2}{2(\xi^2+\eta^2)}p_\xi^2 - \frac{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)\xi^2}{2(\xi^2+\eta^2)}p_\eta^2 + \\ + \frac{\left((\gamma_1+\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)} - \dfrac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2\eta^{-2}}{2}\right)\xi^2}{R(\xi^2+\eta^2)} - \\ - \frac{\left(\operatorname{sign}(x)(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)} + \dfrac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2\xi^{-2}}{2}\right)\eta^2}{R(\xi^2+\eta^2)}. \end{gathered}$$

Выпишем также два зависимых интеграла Лиувилля в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\frac{\dot\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2}{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)} + \frac{\operatorname{sign}(x)(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)}}{R} + \frac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2(\xi^{-2})}{2R} - h\xi^2, \\ I_2 &= \frac{1}{2}\frac{\dot\eta^2(\xi^2+\eta^2)^2}{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)} + \frac{(\gamma_1+\gamma_2)\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)}}{R} + \frac{p_\varphi^2\alpha^2\beta^2(\eta^{-2})}{2R} - h\eta^2. \end{aligned} \tag{185}$$

Так как $I_1 + I_2 = 0$, введем обозначение $l = I_1 = -I_2$.

Рассмотрим случай, когда $p_\varphi = 0$. Вводя вместо t новую независимую переменную τ с помощью подстановки $dt = \dfrac{\xi^2+\eta^2}{\sqrt{2(\gamma_1+\gamma_2)}}d\tau$ и делая замену $h \to \dfrac{h}{\gamma_1+\gamma_2}$, $l \to \dfrac{l}{\gamma_1+\gamma_2}$, сведем уравнения движения к виду

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{R(\xi)}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \sqrt{S(\eta)}, \tag{186}$$

где $R(\xi)$ и $S(\eta)$ — иррациональные функции

$$R(\xi) = (\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 - \xi^2)R^*(\xi), \qquad S(\eta) = (\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 + \eta^2)S^*(\eta), \tag{187}$$

и мы определяем

$$R^*(\xi) = l + h\xi^2 + \frac{\operatorname{sign}(x)K\sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 - \xi^2)}}{R},$$
$$S^*(\eta) = -l + h\eta^2 + \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 + \eta^2)}}{R}.$$

Здесь $K = \dfrac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ — параметр, h и l — значения интегралов, зависящие от начальных условий. Функция R описывает движение на половине гиперболоида $x > 0$ и $x < 0$, соответственно: при достижении величины $\pm\alpha$ координатой ξ частица переходит из одной области в другую (см. уравнение (182)). При этих величинах функция R, описывающая изменение ξ, должна измениться. Ясно, что функция S одинакова в обеих областях.

Определение 22.1. Будем называть движение материальной точки в задаче двух центров на псевдосфере движением параболического типа, если $h = -\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$, $|r_i| \to \infty$, и движением гиперболического типа, если $h > -\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$, $|r_i| \to \infty$. Соответственно, начальная скорость называется параболической и гиперболической скоростью.

Утверждение 22.1. *В задаче двух центров на псевдосфере имеем следующие типы движений*:

при $h < -\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$ — *эллиптический тип*;

при $h = -\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$ — *параболический тип*;

при $h > -\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$ — *гиперболический тип.*

Доказательство. Так как кинетическая энергия есть величина всегда неотрицательная, то во все время движения, естественно, должно выполняться неравенство

$$-V + h \geqslant 0. \tag{188}$$

Следовательно,

$$h \geqslant -\frac{\gamma_1}{R}\coth r_1 - \frac{\gamma_2}{R}\coth r_2.$$

При $|r_i| \to \infty$ получим

$$h \geqslant -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}. \tag{189}$$

При значениях энергии, удовлетворяющих неравенству (189), материальная точка уйдет на бесконечность независимо от того, какое начальное положение она занимала, т.е. движение является неограниченным; параболическим при $h = -\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$ и гиперболическим при $h - \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R}$. В пределе, при $R \to \infty$, получим плоский случай, когда значение энергии $h = 0$ разделяет ограниченное и неограниченное движение. □

Задача двух центров на псевдосфере описывается гамильтоновой системой на кокасательном расслоении к псевдосфере $T^*\mathbb{H}^2$ с гамильтонианом (172). В данной задаче, как и в случае сферы [13], потенциал имеет особенности в точках, где расположены притягивающие центры. Для любого положения частицы на псевдосфере можно задать такую начальную скорость, что частица за конечное время попадает в притягивающий центр, скорость частицы в момент падения на центр становится бесконечной, т.е. векторное поле неполно и, формально говоря, система не является интегрируемой в смысле Лиувилля. Пусть $\omega = \operatorname{sgrad} H$ — векторное поле на $T^*\mathbb{H}^2$ с координатами $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_\xi}, \dfrac{\partial H}{\partial p_\eta}, -\dfrac{\partial H}{\partial \xi}, -\dfrac{\partial H}{\partial \eta}\right)$. В фазовом пространстве векторное поле $\omega = \operatorname{sgrad} H$ имеет особенности в точках, где $\lambda(\xi,\eta) = \xi^2+\eta^2 = 0$. Рассмотрим векторное поле $\tilde{\omega} = \lambda(\xi,\eta)\operatorname{sgrad} H$ и его ограничение ω_h на изоэнергетическую поверхность $\{Q_h = H = h\} \subset T^*\mathbb{H}^2$.

Регуляризация проводится аналогично работе [13]. В данном случае замена времени имеет следующий вид:

$$\frac{dt}{d\tau} = \lambda(\xi(t), \eta(t)).$$

В результате регуляризации векторное поле $\omega_h = \lambda \operatorname{sgrad} H$ не имеет особенностей. Интегральные траектории поля ω_h совпадают с интегральными траекториями исходного векторного поля ω на $T^*\mathbb{H}^2$. Векторное поле ω_h на поверхности Q_h совпадает с ограничением на эту поверхность векторного гамильтонового поля, определенного на всем фазовом пространстве. В качестве такого поля берется поле $\operatorname{sgrad} F_h$, где

$$\begin{gathered}
F_h = \lambda(H-h) = \frac{1}{2}\big[(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)p_\xi^2 + \\
+(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)p_\eta^2\big] - h(\xi^2+\eta^2) - \\
-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{R}\sqrt{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2+\eta^2)} - \frac{\operatorname{sgn}(x)(\gamma_1-\gamma_2)}{R}\sqrt{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2-\xi^2)}
\end{gathered}$$

(здесь мы положили $p_\varphi = 0$). Дополнительный интеграл исходной системы является интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом $F_h = \lambda(H-h)$ на поверхности $F_h = 0$.

Боттовость дополнительного интеграла рассматриваемой задачи проверяется аналогично тому, как и в задаче двух центров на сфере [13], т.е. проверяется невырожденность критических точек функций R и S. Справедливо аналогичное утверждение. Дополнительный интеграл является боттовским на всех изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$, кроме тех, которые соответствуют линиям $h = \mathrm{const}$, проходящим через точки касания бифуркационных кривых.

23. Бифуркационные диаграммы

Пусть M^{2n} — гладкое симплектическое многообразие, и $v = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова динамическая система с гамильтонианом H. Рассмотрим совместную регулярную поверхность M_ξ уровня функций $f_1, \ldots, f_n$, находящихся попарно в инволюции, независимых почти всюду на M, т.е. $M_\xi = \{x \in M | f_i = \xi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Известно, что если подмногообразие M_ξ не является компактным, то каждая связная компонента M_ξ диффеоморфна $\mathbb{R}^k \times T^{n-k}$; если подмногообразие M_ξ компактно, то каждая связная компонента M_ξ диффеоморфна n-мерному тору T^n.

В данной задаче мы имеем оба случая.

Теорема 23.1. *Бифуркационное множество в задаче двух центров на псевдосфере имеет вид*

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 : \frac{1}{R^2}4h^2\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{R^2}4lh(\alpha^2+\beta^2) + K^2 + \frac{1}{R^2}4l^2 = 0, \\
&\Gamma_2 : \frac{1}{R^2}4h^2\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{R^2}4lh(\alpha^2+\beta^2) + 1 + \frac{1}{R^2}4l^2 = 0, \\
&\Gamma_3 : l = -\frac{K\alpha\beta}{R}, \qquad \Gamma_4 : h = -1, \qquad \Gamma_5 : l = \frac{\alpha\beta}{R}, \qquad \Gamma_6 : l = \frac{K\alpha\beta}{R}.
\end{aligned} \tag{190}$$

Прямая $h = -1$ (после переобозначения) разделяет ограниченное и неограниченное движение.

Точки касания гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_3 и Γ_6 имеют, соответственно, координаты

$$\left(\frac{K(\alpha^2+\beta^2)}{2R\alpha\beta}, -\frac{K\alpha\beta}{R}\right), \qquad \left(\frac{-K(\alpha^2+\beta^2)}{2R\alpha\beta}, \frac{K\alpha\beta}{R}\right). \tag{191}$$

Точка пересечения гиперболы Γ_1 с прямой Γ_5 имеет координаты

$$\left(\frac{-(\alpha^2+\beta^2) - \sqrt{1-K^2}}{2R\alpha\beta}, \frac{\alpha\beta}{R}\right).$$

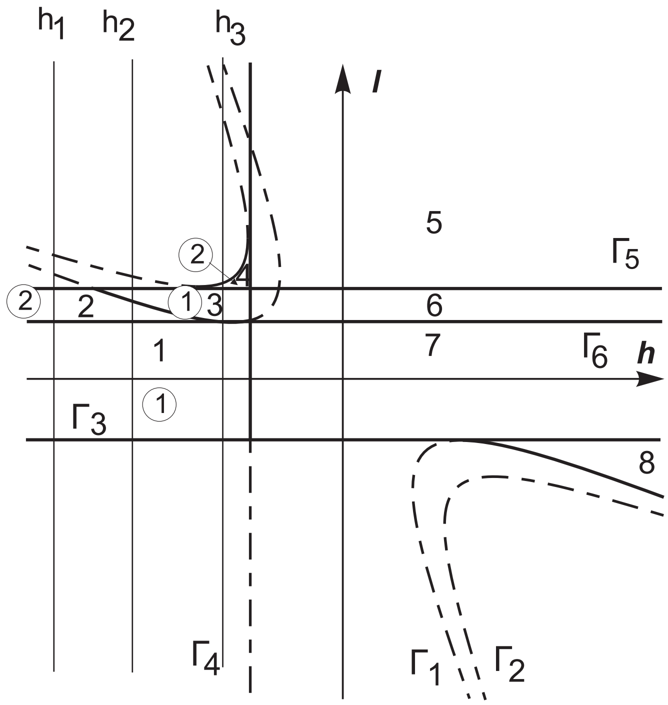


Рис. 43. Бифуркационная диаграмма для задачи двух центров на псевдосфере.

Бифуркационная диаграмма изображена на рис. 43. Области возможности движения отмечены номерами. Вертикальные линии на бифуркационной диаграмме соответствуют изоэнергетическим поверхностям Q_h.

24. Классификация движений на конфигурационном пространстве. Предельные движения

Классификация областей возможности движения представлена на рис. 44 (под номерами 1–4 — ограниченное движение, под номерами 5–8 — неограниченное движение).

Координаты точек касания (191) зависят от параметра K. Если неподвижные центры сравнимы по массе, то параметр K мал, и точка касания гиперболы Γ_1 с прямой Γ_3 находится правее прямой $h = -1$, которая разграничивает ограниченное и неограниченное движение (см. рис. 45). В этом случае появляется еще один тип движения, который возникает из спутникового движения (см. рис. 44(N2)) при $\eta \to \infty$; это движение аналогично движению в области 7. В пределе, когда центры тождественны, т.е. $K = 0$, в бифуркационном множестве гипербола Γ_1 вырождается в асимптоты, а прямые Γ_3 и Γ_6 сольются в прямую $l = 0$.

В плоском случае также имеются 8 областей с различным типом движения. Бифуркационное множество имеет вид (используем те же обозначения, что и выше)

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 : 4lh = K^2, && \Gamma_2 : 4lh = 1, \\ &\Gamma_3 : l = -hc^2 - c, && \Gamma_4 : l = -hc^2 - cK^2, \\ &\Gamma_5 : l = -hc^2 + cK^2, && \Gamma_6 : h = 0. \end{aligned} \tag{192}$$

Здесь притягивающие центры размещены в точках с координатами $(c, 0)$, $(-c, 0)$, $c = \mathrm{const}$.

Классификация областей возможности движения аналогична, т.е. мы имеем те же типы движения для соответствующих областей как в плоском случае, так и в случае плоскости Лобачевского. Области возможности движения на конфигурационном пространстве одинаковы, если учесть, что «эллипсы» и «гиперболы» на плоскости Лобачевского определяются так же, как на евклидовой плоскости. Однако из рисунков 43 и 22 видно, что их расположение отличается от плоского случая: в искривленном пространстве область 5 граничит с областью невозможности движения, а в

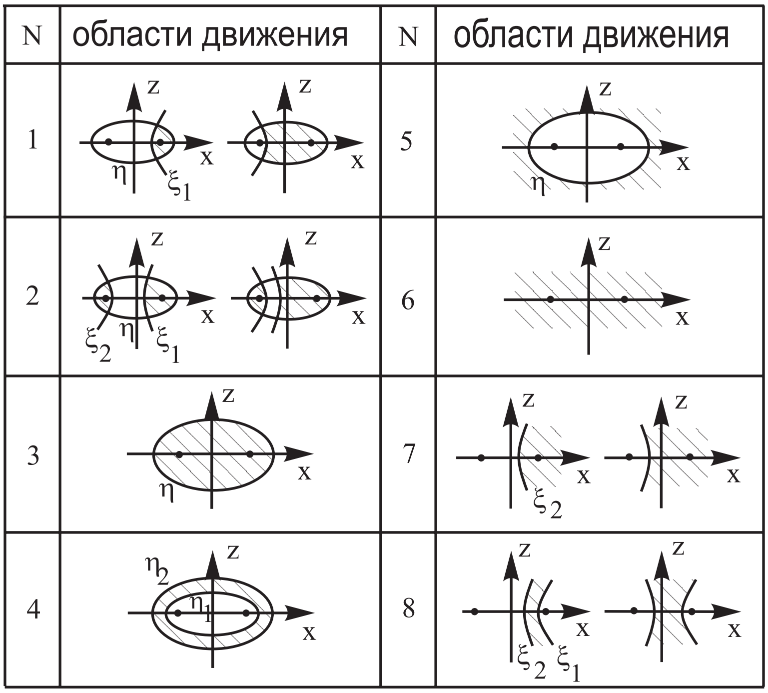


Рис. 44. Области возможности движения для задачи двух центров на плоскости Лобачевского.

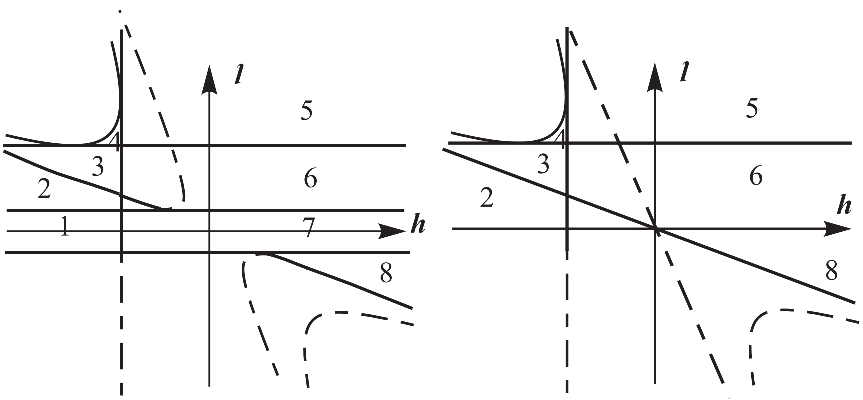


Рис. 45. Бифуркационные диаграмма для задачи двух центров на псевдосфере (когда центры тождественны).

плоском случае они не имеют общих точек. Очевидно, что траектории движения в этих задачах различны.

В случае отталкивающих центров мы получим аналогичные результаты при отражении относительно оси Oz.

Точка равновесия находится на бифуркационной диаграмме в точке пересечения гиперболы Γ_1 и линии Γ_5.

В задаче двух центров на сфере бифуркационное множество имеет вид, представленный в [13]. Рассмотрим предельный переход, когда радиус сферы устремляется к бесконечности $R \to \infty$. Воспользуемся гномоническими координатами и формулами (195) (примененными для случая сферы), тогда имеем соотношения

$$\alpha^2 = \frac{R^2 c^2}{R^2 + c^2}, \qquad \beta = R^2 - \alpha^2 = \frac{R^4}{R^2 + c^2}.$$

Подставив эти соотношения в формулы (170) и учитывая, что $R \to \infty$, получим следующее множество:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 : 4h^2c^2 + 4lh + K^2 = 0,\\
&\Gamma_2 : 4h^2c^2 + 4lh + 1 = 0,\\
&\Gamma_3 : l = c, \qquad \Gamma_4 : l = Kc,\\
&\Gamma_5 : h = 0, \qquad \Gamma_6 : l = -Kc.
\end{aligned} \tag{193}$$

Кривые Γ_1 и Γ_2 являются гиперболами с асимптотами $h = 0$ и $h = -\dfrac{l}{c^2}$, причем прямая $h = 0$ будет входить в бифуркационное множество, поскольку для плоского случая она является разделяющей между ограниченным и неограниченным движениями. Кроме того, как видно из квадратур (186), одна из координат η становится неограниченной, что служит причиной исчезновения прямой Γ_5 из бифуркационного множества при предельном переходе.

Опишем движения на конфигурационном пространстве. Мы не будем описывать ограниченные движения, так как они аналогичны движениям в случае плоского пространства и сферы для областей 1, 2, 3, 4, описанным в [13].

В областях 5, 6, 7, 8, согласно определению, наблюдается движение гиперболического типа ($h > -1$, см рис. 43).

В области 5 имеем $\xi^2 \leqslant \alpha^2$, $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \infty$, т.е. движение возможно во всей части гиперболоида, которая находится вне эллипса $\eta = \eta_1$. Если в начальный момент времени материальная точка двигается в сторону притягивающих центров, то траектория наматывается на эллипс, касается его в определенный момент времени ($\dot{\eta} = 0$) и затем, сматываясь с эллипса, уходит на бесконечность.

В области 6 координаты удовлетворяют неравенствам $\xi^2 \leqslant \alpha^2$, $0 \leqslant \eta \leqslant \infty$. В этом случае движение возможно на всем конфигурационном пространстве.

В области 7 имеем $-\alpha \leqslant \xi \leqslant \xi_1$, $0 \leqslant \eta \leqslant \infty$, т.е. область возможности движения ограничена гиперболой $\xi = \xi_1$. Движение происходит в той части плоскости Лобачевского, где находится центр P_1, и область движения ограничена либо ветвью гиперболы, расположенной в левой части псевдосферы, либо ветвью гиперболы, расположенной в правой части псевдосферы. Движение следующее: частица огибает притягивающий центр и удаляется на бесконечность, колеблясь между двумя ветвями «гиперболы» (движение колебательного типа).

В области 8 имеем $0 \leqslant \eta \leqslant \infty$ и $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$, т.е. область возможности движения заключена между гиперболами, движение колебательного типа между двумя ограничивающими гиперболами.

25. Описание некомпактных бифуркаций

Опишем некомпактные бифуркации.

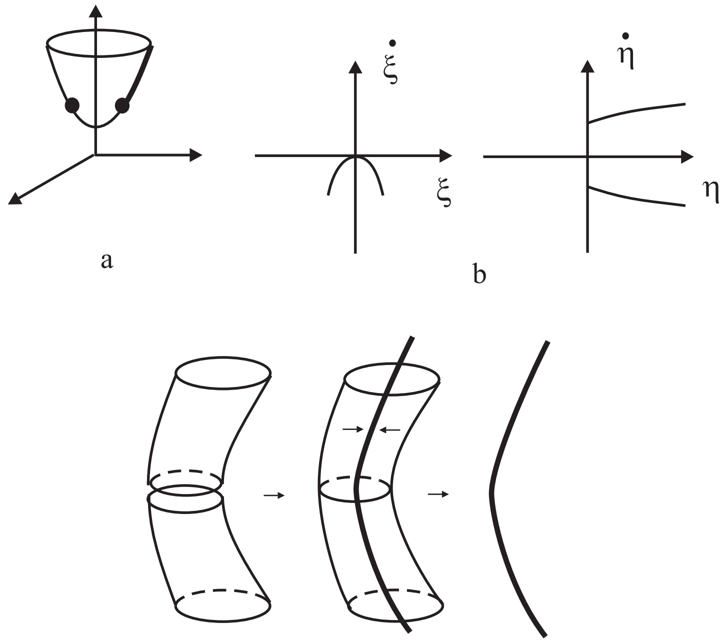
Будем полагать, что мы переходим из «нижней» области в «верхнюю» и из «правой» области — в «левую», пересекая линию $h = -1$ на бифуркационной диаграмме. Очевидно, что возникают следующие варианты:

$$\begin{array}{lllll}
\varnothing \to 7, & 8 \to 7, & 7 \to 6, & 6 \to 5, & \varnothing \to 8,\\
5 \to 4, & 6 \to 3, & 7 \to 1, & 5 \to \varnothing. &
\end{array}$$

Случай $\varnothing \to 7$. При пересечении бифуркационной линии $l = -\dfrac{K\alpha\beta}{R}$, $\xi = 0$, когда выполняется условие

$$-1 < h < \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{2R\alpha\beta},$$

составляющая скорости $\dfrac{d\xi}{d\tau} = 0$ (что легко вычисляется, см. рис. 46(b)). В этом случае предельное движение на конфигурационном пространстве изображено на рис. 46(a) и представляет собой падение на центр, т.е. если скорость материальной точки направлена в сторону увеличения расстояния от центра, то частица уходит на бесконечность; если скорость направлена в противоположную сторону, то частица падает на центр, отражается от него (в центре псевдосфероконические координаты равны нулю, $\xi = 0$, $\eta = 0$, составляющие скорости, соответственно, $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta}$ меняет знак, см.



a b

c

Рис. 46. Случай $\varnothing \to 7$.

рис. 46(b)) и уходит на бесконечность. В момент бифуркации фазовое пространство представляет собой прямую линию. При пересечении линии $l = -\dfrac{K\alpha\beta}{R}$ рождается цилиндр.

В области 7 регулярная поверхность представляет собой цилиндр. Так как координата η удовлетворяет условияю $0 \leqslant \eta \leqslant \infty$, эта поверхность устроена следующим образом: два полуцилиндра получаются при умножении окружности на два луча (когда $\dot{\eta} > 0$, $0 \leqslant \eta < \infty$ и $\dot{\eta} < 0$, $0 \leqslant \eta < \infty$), затем эти два полуцилиндра склеиваются по основанию, и мы получаем поверхность $S^1 \times \mathbb{R}^1$ (на двух полуцилиндрах скорость $\dot{\eta}$ имеет противоположные знаки; на конфигурационном пространстве это соответствует движению, когда материальная точка пересекает координату $\eta = 0$).

Рассмотрим неособую линию уровня, близкую к точке минимума или максимума. Эта линия гомеоморфна окружности. Когда регулярное значение стремится к максимуму или минимуму, окружность стягивается в точку. При этом двумерный диск расслаивается на концентрические окружности с общим центром. Этот случай соответствует бифуркации типа A в компактном случае. Если фазовое пространство некомпактно, то особым слоем является не окружность, а прямая, ось цилиндра, который расслоен на концентрические цилиндрические поверхности ($\mathbb{R}^1 \times D^2$). При бифуркации цилиндр либо стягивается на свою ось, либо рождается цилиндр. Это движение соответствует периодическому в компактном случае, если удалить одну точку. Назовем бифуркацию такого вида A_n.

Случай $\varnothing \to 8$. Точки на гиперболе Γ_1 из бифуркационного множества соответствуют кратным корням функции R^*. При пересечении точки (h, l) гиперболы Γ_1 материальная точка на конфигурационном пространстве пересекает линию, соединяющую два центра и уходит на бесконечность, при этом составляющая скорости $\dot{\xi} = 0$ (рис. 47(b)). В фазовом пространстве в момент бифуркации два цилиндра сжимаются на свои оси при переходе $8 \to \varnothing$ (или, соответственно, рождаются два цилиндра при переходе $\varnothing \to 8$), т.е. имеем две прямые, для которых выполняются соотношения $\dot{\xi} = 0$, $\xi = \pm\xi_1$ (см. рис. 47(a)). Регулярная поверхность в области 8 представляет собой два цилиндра (т.е. две компоненты связности), каждый из которых устроен точно таким же образом, как и компонента связности в области 7, каждый цилиндр склеивается из двух полуцилиндров по основанию.

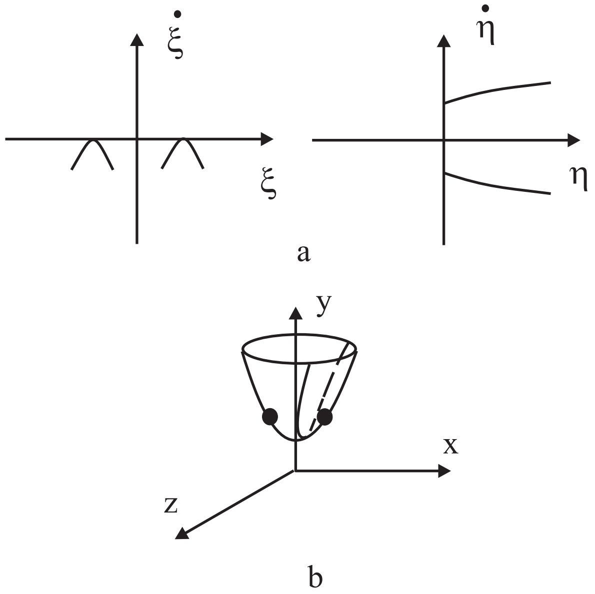


Рис. 47. Случай $\varnothing \to 8$.

Случай $8 \to 7$. При пересечении бифуркационной линии $l = -\dfrac{K\alpha\beta}{R}$, $\xi = 0$, когда выполняется условие

$$h > \frac{K(\alpha^2+\beta^2)}{2R\alpha\beta},$$

одна из «гипербол» на конфигурационном пространстве (см. рис. 44(N 8)) вырождается в положительную часть оси Ox с началом в соответствующем центре (проекция кривой $x^2 - y^2 = -1$ на плоскость zOx). Материальная точка пересекает линию, соединяющую центры, и асимптотически приближается к оси Ox (движение ограничено второй «гиперболой»), коснувшись ограничивающей «гиперболы» (см. рис. 48(a)). В момент бифуркации два цилиндра перестраиваются в один (или наоборот), как показано на рис. 48(c). Два цилиндра получаются следующим образом: восьмерка умножается на луч $[0,\infty)$, который определяет положительную составляющую скорости $\dot{\eta}$ и на луч $[0,\infty)$, определяющий отрицательную составляющую скорости $-\dot{\eta}$, затем получившиеся полуцилиндры с общей образующей склеиваются по основанию.

В этом случае в момент бифуркации линией уровня является восьмерка (см. рис. 48(b)), а критической линией — прямая. Данная бифуркация соответствует бифуркации типа B в компактном случае (напомним, что атом B — полноторие, из которого вырезаны два тонких полнотория $(N^2 \times S^1)$, особый слой — прямое произведение «восьмерки» на окружность, N^2 — окрестность «восьмерки»). В некомпактном случае класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя представляет собой полный цилиндр, из которого вырезаны два тонких цилиндра $(N^2 \times \mathbb{R}^1)$, особым слоем является прямое произведение восьмерки на прямую. Обозначим бифуркацию такого вида через B_n.

Случай $7 \to 6$. При пересечении точки (h,l) прямой Γ_6 $(h > -1)$ мы наблюдаем следующее движение на конфигурационном пространстве. «Гипербола», изображенная на рис. 44(N 7), вырождается в луч, выходящий из гравитационного центра $(x < 0)$, материальная точка пересекает линию, соединяющую центры, и асимптотически приближается к лучу, уходя на бесконечность (см. рис. 49(a)). В фазовом пространстве рождается еще один цилиндр (рис. 49(b)). (Сравним ограниченное движение, когда аналогично при пересечении прямых Γ_3 и Γ_6 рождается сначала один тор, а затем — второй.)

Случай $6 \to 5$. При пересечении точки (h,l) линии $l = \alpha\beta$ на конфигурационном пространстве существуют траектории двух видов: одна траектория представляет собой отрезок, соединяющий два центра $(\eta = 0)$, движение периодическое вдоль этого отрезка; вторая траектория представляет

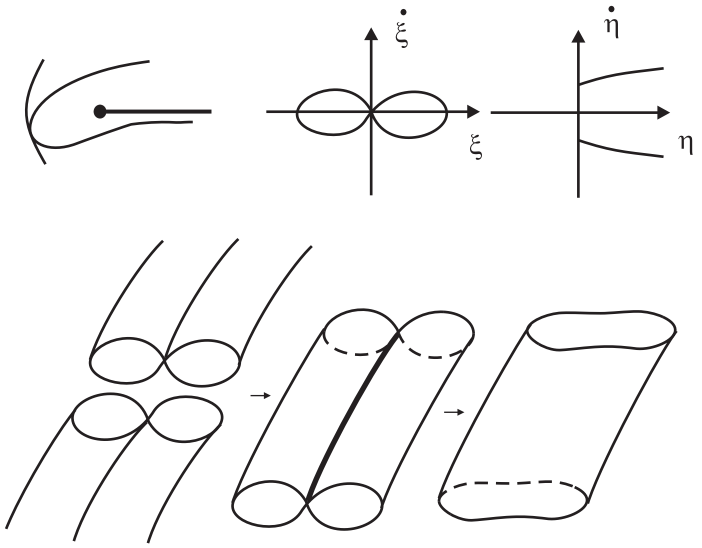
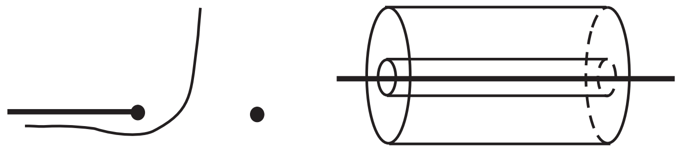


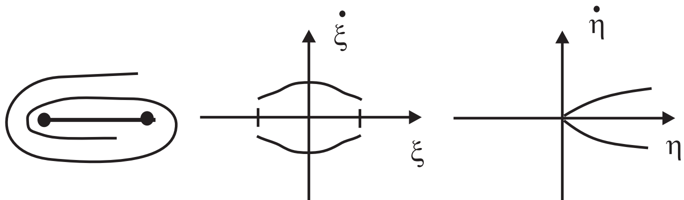
Рис. 48. Случай $7 \to 8$.



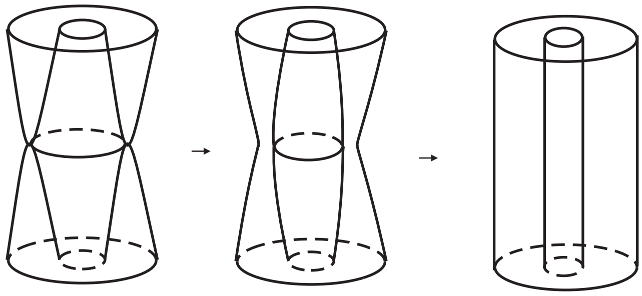
a b

Рис. 49. Случай $7 \to 6$.

собой спираль, витки которой тем чаще, чем ближе траектория подходит к вышеупомянутому отрезку (рис. 50(a)). В областях 5 и 6 мы имеем по две связные компоненты — два цилиндра, в момент бифуркации два цилиндра перестраиваются в два цилиндра (рис. 50(c)).



a b



c

Рис. 50. Случай $6 \to 5$.

Как уже было указано выше, линия $h = -1$ разделяет ограниченное и неограниченное движение. На рис. 51 показаны перестройки цилиндров в торы (в случае компактного фазового пространства) при пересечении точки образа отображения момента разделяющей линии $h = -1$. Соответственно, при $l > \dfrac{\alpha\beta}{R}$ (случай $5 \to 4$) два цилиндра перестраиваются в два тора (рис. 51(a)). Стенки каждого цилиндра касаются на бесконечности, в результате получается тор. При $\dfrac{K\alpha\beta}{R} < l < \dfrac{\alpha\beta}{R}$ (случай $6 \to 3$) два цилиндра перестраиваются в один тор таким образом, как показано на рис. 51(b). При $-\dfrac{K\alpha\beta}{R} < l < -\dfrac{K\alpha\beta}{R}$ (случай $7 \to 1$) один цилиндр перестраивается в один тор, в этом случае касание происходит следующим образом: касаются точки, где $\dot\eta > 0$, $\eta \to \infty$ и $\dot\eta < 0$, $\eta \to \infty$ (как и в случае $5 \to 4$, рис. 51(a)).

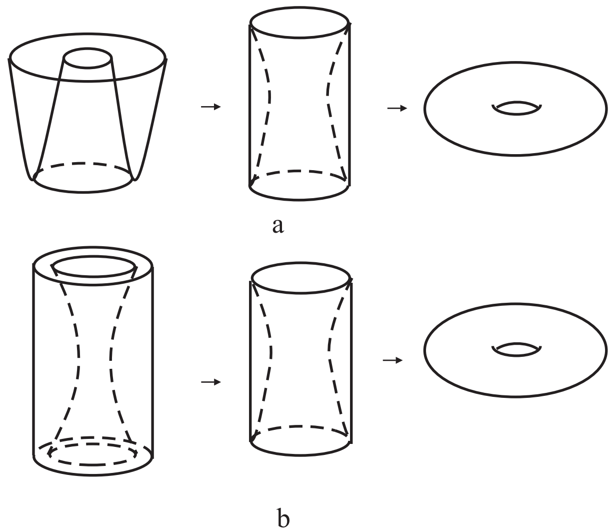


Рис. 51. Перестройка цилиндров в торы.

26. Предельный переход

Запишем метрику и потенциальную энергию системы в гномонических координатах (рассматривается проекция псевдосферы на касательную плоскость из центра псевдосферы в объемлющее пространство), декартовы координаты этой проекции будем обозначать через x_1, x_2. Пусть в гномонических координатах притягивающие центры находятся в точках с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$ (где $a = \dfrac{\alpha R}{\beta}$). Известно, что

$$\cosh\theta_i = \frac{(\mathbf{r}^{(i)}\cdot\mathbf{r})}{|\mathbf{r}^{(i)}|\,|\mathbf{r}|}, \quad i = 1, 2, \tag{194}$$

где скалярное произведение понимается в смысле метрики пространства $\mathbb{R}^2_1$.

Выпишем координаты векторов пробной частицы $\mathbf{r}$ и одного из центров для псевдосферы $\mathbf{r_1}$ (запись для второго центра аналогична, отличие состоит лишь в знаке перед параметром a):

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)}}, \frac{x_1}{\sqrt{1-\lambda|\mathbf{x}|^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1-\lambda|\mathbf{x}|^2}}\right), \\ \mathbf{r}^{(1)} = \left(\sqrt{R^2+\alpha^2}, \alpha, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda a^2)}}, \frac{a}{\sqrt{1-\lambda a^2}}, 0\right).\end{gathered} \tag{195}$$

В результате, используя формулу (194), получим

$$\begin{aligned}
\cosh\theta_1 &= \frac{1-\lambda a x_1}{\sqrt{1-\lambda|\mathbf{x}|^2}\sqrt{1-\lambda a^2}},\\
\sinh\theta_1 &= \frac{\sqrt{(1-\lambda a x_1)^2-(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)(1-\lambda a^2)}}{\sqrt{1-\lambda|\mathbf{x}|^2}\sqrt{1-\lambda a^2}},\\
\coth\theta_1 &= \frac{1-\lambda a x_1}{\sqrt{(1-\lambda a x_1)^2-(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)(1-\lambda a^2)}},\\
\coth\theta_2 &= \frac{1+\lambda a x_1}{\sqrt{(1+\lambda a x_1)^2-(1-\lambda|\mathbf{x}|^2)(1-\lambda a^2)}}.
\end{aligned}$$

Используя полученные формулы, можно написать выражение для потенциальной энергии.

Если $a=0$, то мы должны получить задачу Кеплера. Действительно, в этом случае гравитирующие центры смещаются в начало координат, и мы получим

$$V = -\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2}} = -\frac{\gamma}{r}.$$

Если $\lambda\to 0$, т.е. радиус сферы стремится к бесконечности, то получаем

$$V = -\gamma_1\frac{1}{\sqrt{(a-x_1)^2+x_2^2}} - \gamma_2\frac{1}{\sqrt{(a+x_1)^2+x_2^2}} = -\frac{\gamma_1}{r_1}-\frac{\gamma_2}{r_2}.$$

Таким образом, мы снова получили кеплеровский потенциал.

Для сферы можно получить аналогичные выражения, если заменить гиперболические функции на соответствующие тригонометрические и знак перед λ заменить на противоположный.

Следовательно, в результате можно сделать вывод, что интегрируемые задачи, т.е. задача Кеплера и задача двух центров, переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами. В частности, показано, что задача Кеплера и задача двух центров переходят в классические задачи на плоскости при нулевой кривизне.

Замечание 1. Легко видеть, что результаты предельного перехода обобщаются на любую размерность сферы $\mathbb{S}^n$ и псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{n-1}_1$, вложенные в соответствующие пространства размерности $n+1$, т.е. в $\mathbb{S}^{n+1}$ и $\mathbb{R}^n_1$.

27. Сравнительный анализ топологии лиувиллевых слоений задачи двух центров

Напомним, что разбиение многообразия Q^3_h на торы Лиувилля (в компактном случае), цилиндрические поверхности (в некомпактном случае) и связные компоненты критических поверхностей уровня дополнительного интеграла l (т.е. связные компоненты прообразов критических значений интеграла l) называется *лиувиллевым слоением* на Q^3_h.

Системы лиувиллево эквивалентны, если они имеют одинаковое слоение Лиувилля.

Пусть v_1 — интегрируемая гамильтонова система на M^4_1 (соответственно, на Q^3_1), где M^4_1 — кокасательное расслоение к сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H_{\mathbb{S}^2} = T+V$, где квадратичная по импульсам функция T определяется стандартной метрикой на сфере $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$, а функция V задана формулой (149).

Пусть v_2 — интегрируемая гамильтонова система на M^4_2 (соответственно, на Q^3_2), где M^4_2 — кокасательное расслоение к псевдосфере $T^*\mathbb{H}^2$ с гамильтонианом $H_{\mathbb{H}^2} = T+V$, где кинетическая энергия T определяется стандартной метрикой на псевдосфере $\mathbb{H}^2$ в $\mathbb{R}^2_1$, а потенциальная энергия задается формулой (172).

Пусть v_3 — интегрируемая гамильтонова система на M^4_3 (соответственно, на Q^3_3), где M^4_3 — фазовое пространство в задаче двух неподвижных центров на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гамильтонианом $H_{\mathbb{R}^2} = T+V$, где кинетическая энергия T определяется стандартной евклидовой метрикой на плоскости $\mathbb{R}^2$, а потенциал является ньютоновским, т.е. задается формулой

$$V = -\frac{\gamma_1}{r_1} - \frac{\gamma_2}{r_2}.$$

Теорема 27.1. *Система v_1 при условии, что материальная точка находится все время в верхней полусфере, т.е. при энергиях, удовлетворяющих условию $h < \frac{l}{\beta^2}$, система v_2 при условии $h < -1$ и система v_3 при условии $h < 0$, т.е. в случае ограниченного движения, являются лиувиллево эквивалентными.*

Доказательство. Как было отмечено в работе [13], проекции торов Лиувилля в задаче двух неподвижных центров на сфере могут заходить за экватор сферы, что в случаях плоского пространства и пространства Лобачевского соответствует уходу на бесконечность. Случаи, когда материальная точка заходит за экватор и остается все время в верхней полусфере, разделяются прямой $l = \frac{h\beta^2}{R}$ на бифуркационной диаграмме (l — значение дополнительного интеграла). При $\eta^2 = \beta^2$ материальная точка пересекает экватор, что соответствует уходу на бесконечность.

При $h < -1$ все траектории в задаче двух центров на псевдосфере ограничены, т.е. мы имеем движение эллиптического типа. Фазовое пространство для таких энергий является компактным (после регуляризации), следовательно, система удовлетворяет теореме Лиувилля. Изоэнергетические поверхности расслоены на торы Лиувилля. Аналогично для плоской задачи двух центров при $h < 0$ все траектории ограничены, и существует движение только эллиптического типа. Фазовое пространство для таких энергий также является компактным (после регуляризации), и система удовлетворяет теореме Лиувилля. Изоэнергетические поверхности также расслоены на торы Лиувилля.

Именно поэтому такие условия накладываются на энергию.

Известно, что если две регулярные окрестности особых слоев имеют эквивалентные атомы, то существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм одной на другую, который сохраняет слоение Лиувилля и переводит невырожденные критические окружности в невырожденные критические окружности с сохранением естественной на них ориентации, заданной полем динамической системы.

Для того, чтобы описать топологическую структуру лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности Q_h, достаточно описать это слоение в малых инвариантных окрестностях особых слоев и указать, как из этих окрестностей склеено все многообразие Q_h, т.е. построить топологические инварианты — инварианты Фоменко—Цишанга.

Чтобы доказать лиувиллеву эквивалентность двух динамических систем, нужно показать, что топологические инварианты одинаковы для этих систем.

Исследование топологии натуральных механических систем проводится при помощи проекции на конфигурационное пространство. Каждый тор Лиувилля проектируется в область возможного движения. Проекции торов для систем v_1, v_2 и v_3 (при наложенных на энергию условиях) на конфигурационное пространство (сферу, псевдосферу и плоскость) топологически одинаковы, как одинаковы и типы движений для этих областей (1, 2, 3, 4). Каждой из указанных областей соответствует определенное число торов Лиувииля, число торов совпадает для трех рассматриваемых систем для каждой области возможного движения в прообразе (в областях 1, 3 — один тор, в областях 2, 4 — два тора). Число торов для системы v_1 было определено в [13], для системы v_2 определяется из анализа функций R, S, для системы v_3 число торов определяется на основе анализа квадратур, приведенных в работе [19]. Кроме того, совпадают число критических точек и критических окружностей и их проекции на конфигурационное пространство при предельных движениях. Выбор базисных циклов допустимой системы координат при склейке инвариантных окрестностей особых слоев также аналогичен. Таким образом, топологические инварианты для рассматриваемых систем одинаковы (при наложенных на энергию условиях), это молекулы 1, 2, 3 (см. часть 3). Мы показали, что рассматриваемые системы имеют одинаковое слоение Лиувилля, следовательно, они являются лиувиллево эквивалентными. $\square$

Глава 5

ДВИЖЕНИЕ В НЬЮТОНОВСКОМ И ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

28. Редукция. Аналог однородного поля

Для плоскости $\mathbb{R}^2$ существует предельный случай задачи двух центров, когда один из центров удаляется на бесконечность. При этом масса центра растет так, чтобы тяга была постоянна. Возникает задача о движении материальной точки в поле ньютоновского центра и однородного поля.

Впервые эта задача исследовалась Лагранжем, он свел ее к квадратурам. Классификация областей возможности движения была выполнена В. В. Белецким [6]. Существует аналог задачи Лагранжа в квантовой механике, задача о расщеплении энергетических уровней водорода в однородном электрическом поле (эффект Штарка) [36].

Плоская задача Лагранжа описывается гамильтонианом [6, 28]

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \qquad V = -\frac{\gamma}{r} + fq_1. \tag{196}$$

Ось q_1 направлена вдоль постоянного вектора $\mathbf{f}$ ускорения. Ясно, что уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{q}_1 = -\gamma\frac{q_1}{r^3} - f, \qquad \ddot{q}_2 = -\gamma\frac{q_2}{r^3}, \qquad r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}.$$

Эта задача допускает дополнительный интеграл движения

$$I = A_1 + \frac{1}{2}fq_2^2,$$

где A_1 — компонента вектора Лапласа—Рунге—Ленца.

Следовательно, уравнения движения интегрируются методом разделения переменных. Наиболее естественна в задаче Лагранжа параболическая система координат. Действительно, на достаточно большом расстоянии от центра притяжения $f \gg \frac{1}{r^2}$ (так как f постоянно, а величина $\frac{1}{r^2}$ может быть сколь угодно малой). Значит, движение будет близко к движению под действием вектора $\mathbf{f}$ постоянного ускорения. А движение в однородном поле сил, когда $\mathbf{f} = \mathrm{const}$, происходит по параболической траектории, причем ось параболической траектории направлена вдоль $\mathbf{f}$. Перейдем к параболическим координатам по формулам

$$\xi = \frac{1}{2}(r + q_1), \qquad \eta = \frac{1}{2}(r - q_1). \tag{197}$$

Отсюда получим соотношения

$$r = \xi + \eta, \qquad q_1 = \xi - \eta, \qquad q_2 = 2\sqrt{\xi\eta}.$$

Гамильтониан относительно новых переменных принимает вид

$$H = \frac{1}{2(\xi + \eta)}(\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2) + \frac{1}{\xi + \eta}(f(\xi^2 - \eta^2) - \gamma), \tag{198}$$

где p_ξ, p_η — импульсы, соответствующие координатам ξ, η. Таким образом, система имеет лиувиллев вид, и ее интегрирование производится методом разделения переменных. В результате получаем квадратуры

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{R(\xi)}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \sqrt{S(\eta)}, \qquad dt = (\xi + \eta)d\tau, \tag{199}$$

где

$$R = 2\xi\left(l + h\xi + \frac{\gamma}{2} - f\xi^2\right),$$

$$S = 2\eta\left(-l + h\eta + \frac{\gamma}{2} + f\eta^2\right).$$

На рисунке 52 изображена бифуркационная диаграмма для плоской задачи Лагранжа.

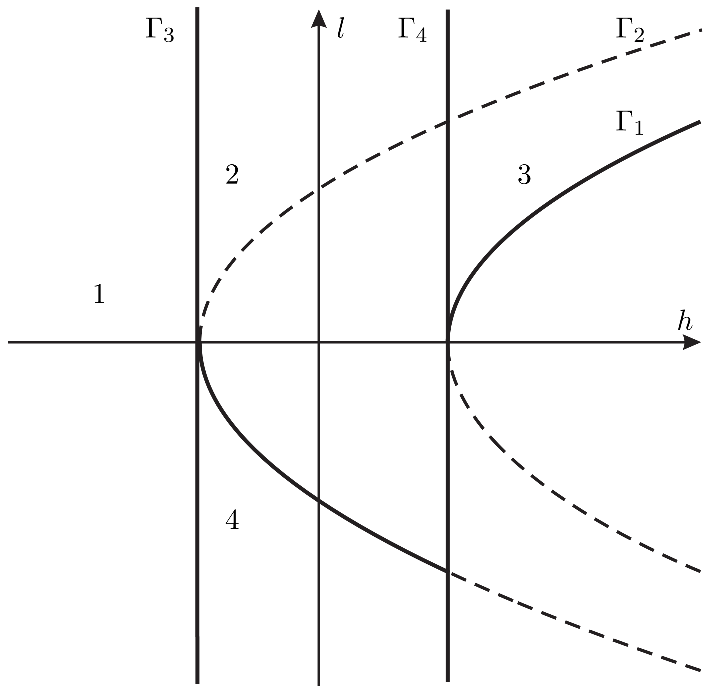


Рис. 52. Бифуркационная диаграмма для плоской задачи Лагранжа [6].

Рассмотрим задачу Лагранжа в пространстве Лобачевского (не нарушая общности, будем полагать, что радиус псевдосферы равен единице).

Теорема 28.1. *Материальная точка в задаче Лагранжа в пространстве Лобачевского* $\mathbb{H}^3$ *движется так же, как в двумерной системе* (*на единичной двумерной псевдосфере* $\mathbb{H}^2$: $y^2 - x^2 - z^2 = 1$) *с энергией*

$$h = \frac{1}{2}(-\dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2) + V_{\text{eff}}\,,$$

где эффективная потенциальная энергия определяется выражением

$$V_{\text{eff}} = -\gamma_1\frac{y}{\sqrt{y^2-1}} - \gamma_2\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{\beta_\varphi^2}{2z^2}.$$

Здесь функция

$$V_h = -\gamma_2\frac{1}{(y-x)^2}$$

является аналогом однородного поля в пространстве постоянной отрицательной кривизны.

Доказательство. Рассмотрим предельный переход в задаче двух центров в пространстве $\mathbb{H}^3$, удаляя один из притягивающих центров на бесконечность. Поместим сначала притягивающие центры в точки с координатами $\mathbf{r_1} = (1, 0, 0, 0)$ и $\mathbf{r_2} = (\cosh\varphi, \sinh\varphi, 0, 0)$. Потенциальная энергия материальной точки в данной задаче определяется как сумма двух величин: потенциальной энергии центра, помещенного в вершину гиперболоида, и потенциальной энергии центра, удаленного на бесконечность. Пусть координаты материальной точки задаются как $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$. Тогда мы можем вычислить

$$\cosh\theta_1 = \langle\mathbf{r_1}, \mathbf{r}\rangle = x^1,$$

$$\begin{aligned}
&\sinh\theta_1 = \sqrt{\cosh^2\theta_1 - 1} = \sqrt{(x^1)^2 - 1},\\
&\cosh\theta_2 = \langle \mathbf{r_2}, \mathbf{r}\rangle = x^1\cosh\varphi - x^2\sinh\varphi,\\
&\sinh\theta_2 = \sqrt{\cosh^2\theta_2 - 1} = \sqrt{(x^1\cosh\varphi - x^2\sinh\varphi)^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Потенциальная энергия точки имеет форму

$$\begin{aligned}
&V_1 = -\gamma_1\coth\theta_1 = -\gamma_1\frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2-1}},\\
&V_2 = -\gamma_2\coth\theta_2 = -\gamma_2\frac{x^1\cosh\varphi - x^2\sinh\varphi}{\sqrt{(x^1\cosh\varphi - x^2\sinh\varphi)^2 - 1}},\\
&V = V_1 + V_2.
\end{aligned} \tag{200}$$

Пусть $\varphi \to \infty$. Пренебрегая величиной порядка $e^{-4\varphi}$ и принимая во внимание, что $\tanh\varphi \approx 1 - 2e^{-2\varphi}$, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
V_2 &= -\gamma_2\frac{x^1 - x^2\tanh\varphi}{\sqrt{(x^1 - x^2\tanh\varphi)^2 - 1 + \tanh^2\varphi}} =\\
&= -\gamma_2\frac{x^1 - x^2 + 2x^2e^{-2\varphi}}{\sqrt{(x^1-x^2)^2 + 4x^2(x^1-x^2)e^{-2\varphi} - 4e^{-2\varphi}}} =\\
&= -\gamma_2\frac{x^1 - x^2 + x^2e^{-2\varphi}}{x^1 - x^2}\left(1 - \frac{2x^2}{x^1-x^2}e^{-2\varphi} + \frac{2}{(x^1-x^2)^2}e^{-2\varphi}\right) =\\
&= -\gamma_2\left(1 + \frac{2}{(x^1-x^2)^2}e^{-2\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Сделаем замену $2\exp(-2\varphi)\gamma_2 \to \gamma_2$. Пренебрегая постоянной величиной и переходя к пределу $\varphi \to \infty$, мы получим выражение для потенциальной энергии центра, удаленного на бесконечность, аналог однородного поля в искривленном пространстве

$$V_2 = -\gamma_2\frac{1}{(x^1-x^2)^2}. \tag{201}$$

Сведем задачу к двум степеням свободы аналогично тому, как была проведена редукция в задаче двух центров. Введем новые координаты по формулам, аналогичным (175), и используем метод Рауса для того, чтобы исключить циклическую координату. В результате рассматриваемая задача сведется к движению материальной точки на двумерной псевдосфере $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ в редуцированном поле

$$V_{\text{eff}} = -\gamma_1\frac{y}{\sqrt{y^2-1}} - \gamma_2\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{\beta_\varphi^2}{2z^2}. \tag{202}$$

Теорема доказана. □

29. Псевдосферопараболические координаты

Проведем замену координат таким образом, чтобы получить лиувиллеву форму гамильтониана.

Воспользуемся для этого уравнениями координатных поверхностей задачи двух центров и сделаем аналогичный предельный переход. Уравнение для первой координатной поверхности имеет вид

$$\frac{x'^2}{\alpha^2 - \xi'^2} = \frac{y'^2}{\beta^2 - \xi'^2} + \frac{z'^2}{\xi'^2}.$$

Теперь воспользуемся следующей подстановкой (см. рис. 53)

$$x' \to x\cosh\varphi - y\sinh\varphi, \quad y' \to y\cosh\varphi - x\sinh\varphi, \quad z' \to z, \quad \xi' \to \xi\sinh\varphi. \tag{203}$$

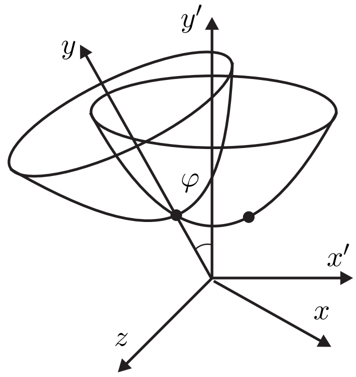


Рис. 53. Поворот верхней полы гиперболоида.

Для того чтобы сделать предельный переход, повернем систему координат таким образом, чтобы притягивающий центр, расположенный в точке с координатами $(-\alpha, \beta, 0)$, сместился в точку с координатами $(0, 1, 0)$. Ясно, что при этом выполняются соотношения

$$\beta = \cosh\varphi, \quad \alpha = \sinh\varphi.$$

Тогда

$$\frac{(x\cosh\varphi - y\sinh\varphi)^2}{\sinh^2\varphi(1-\xi^2)} = \frac{(y\cosh\varphi - x\sinh\varphi)^2}{\cosh^2\varphi(1-\xi^2\tanh^2\varphi)} + \frac{z^2}{\sinh^2\varphi\xi^2}.$$

После несложных преобразований, принимая во внимание, что справедливы соотношения $\tanh\varphi \approx 1 - 2e^{-2\varphi}$, $\coth\varphi \approx 1 + 2e^{-2\varphi}$, и пренебрегая величиной порядка $e^{-4\varphi}$, мы получим следующее уравнение координатной поверхности:

$$2x(y-x) = \frac{\xi^2}{1-\xi^2}(y-x)^2 - \frac{1-\xi^2}{\xi^2}z^2. \tag{204}$$

Введем новую переменную μ и в результате получим уравнение для первой координатной поверхности в задаче Лагранжа на псевдосфере

$$\mu^2 = \frac{\xi^2}{1-\xi^2}, \qquad 2x(y-x) = \mu^2(y-x)^2 - \frac{z^2}{\mu^2}. \tag{205}$$

Для второй координатной поверхности мы имеем уравнение

$$\frac{y'^2}{\beta^2+\eta'^2} = \frac{x'^2}{\alpha^2+\eta'^2} + \frac{z'^2}{\eta'^2}.$$

Тогда, используя подстановку $\eta' \to \eta\cosh\varphi$, получим уравнение

$$\frac{(y\cosh\varphi - x\sinh\varphi)^2}{\cosh^2\varphi(1+\eta^2)} = \frac{(x\cosh\varphi - y\sinh\varphi)^2}{\sinh^2\varphi(1+\coth^2\varphi)} + \frac{z^2}{\eta^2\cosh^2\varphi}.$$

После аналогичных преобразований (как и для первой координатной поверхности) получим уравнение для второй координатной поверхности

$$2x(y-x) = -\frac{\eta^2}{1+\eta^2}(y-x)^2 + \frac{1+\eta^2}{\eta^2}z^2. \tag{206}$$

Введя новую переменную

$$\nu^2 = \frac{\eta^2}{1+\eta^2},$$

наконец, получим

$$2x(y-x) = -\nu^2(y-x)^2 + \frac{z^2}{\nu^2}. \tag{207}$$

Очевидно, уравнение для третьей координатной поверхности — это уравнение гиперболоида

$$x^2 - y^2 + z^2 = -1.$$

Видно, что новые координаты определены таким образом, что выполняются следующие соотношения:

$$\nu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu < \infty. \tag{208}$$

Обратные соотношения для декартовых координат определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x =& \frac{1}{2}\frac{\mu^2-\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)(1+\mu^2)}}, & y =& \frac{2+\mu^2-\nu^2}{2\sqrt{(1-\nu^2)(1+\mu^2)}}, \\ z =& \frac{1}{2}\frac{\mu\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(1+\mu^2)}}, & y-x =& \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)(1+\mu^2)}}. \end{aligned} \tag{209}$$

30. Интегралы системы

Выпишем гамильтониан относительно переменных μ, ν

$$\begin{aligned} H = \frac{(1-\nu^2)(1+\mu^2)}{\mu^2+\nu^2}\Bigg[\frac{1}{2}\left((1+\mu^2)p_\mu^2+(1-\nu^2)p_\nu^2\right) - \\ - \gamma_1\left(\frac{1}{1+\mu^2}+\frac{1}{1-\nu^2}\right) - \gamma_2(\mu^2+\nu^2)\Bigg]. \end{aligned} \tag{210}$$

Так как в псевдосферопараболических координатах Гамильтониан имеет лиувиллев вид, то можно выписать дополнительный интеграл

$$l = \frac{1}{2}\frac{(1+\mu^2)^3}{\mu^2+\nu^2}p_\mu^2 + \frac{1}{2}\frac{(1-\nu^2)^3}{\mu^2+\nu^2}p_\nu^2 + \frac{2\gamma_1}{\mu^2+\nu^2} + \gamma_2(\mu^2-\nu^2+1) \tag{211}$$

или два интеграла Лиувилля, которые являются зависимыми (они понадобятся для сведения задачи к квадратурам)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\frac{\dot{\mu}^2\left[\dfrac{1}{1-\nu^2}-\dfrac{1}{1+\mu^2}\right]^2}{1+\mu^2} - \gamma_1\frac{1}{1+\mu^2} - \gamma_2\mu^2 + h\frac{1}{1+\mu^2}, \\ I_2 &= \frac{1}{2}\frac{\dot{\nu}^2\left[\dfrac{1}{1-\nu^2}-\dfrac{1}{1+\mu^2}\right]^2}{1-\nu^2} - \gamma_1\frac{1}{1-\nu^2} - \gamma_2\nu^2 - h\frac{1}{1-\nu^2}. \end{aligned} \tag{212}$$

Так как $I_1+I_2=0$, введем обозначение $l = I_1 = -I_2$.

Регуляризация проводится с помощью введения новой независимой переменной τ по формуле

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2\gamma_2}}\left[\frac{1}{1-\nu^2}-\frac{1}{1+\mu^2}\right]d\tau.$$

Задача сводится к квадратурам [49]

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \sqrt{R(\nu)}; \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \sqrt{S(\mu)}, \tag{213}$$

где

$$\begin{aligned} R(\nu) &= -l(1-\nu^2)+h+K+\nu^2(1-\nu^2), \\ S(\mu) &= l(1+\mu^2)-h+K+\mu^2(1+\mu^2). \end{aligned}$$

31. Бифуркационные диаграммы

Теорема 31.1. *Бифуркационное множество имеет вид*

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 : (l-1)^2+4h-4K=0, \qquad \Gamma_2 : (l-1)^2+4h+4K=0, \\ &\Gamma_3 : l=h+K, \qquad \Gamma_4 : l=h-K, \qquad \Gamma_5 : h=-K, \quad K=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \end{aligned} \tag{214}$$

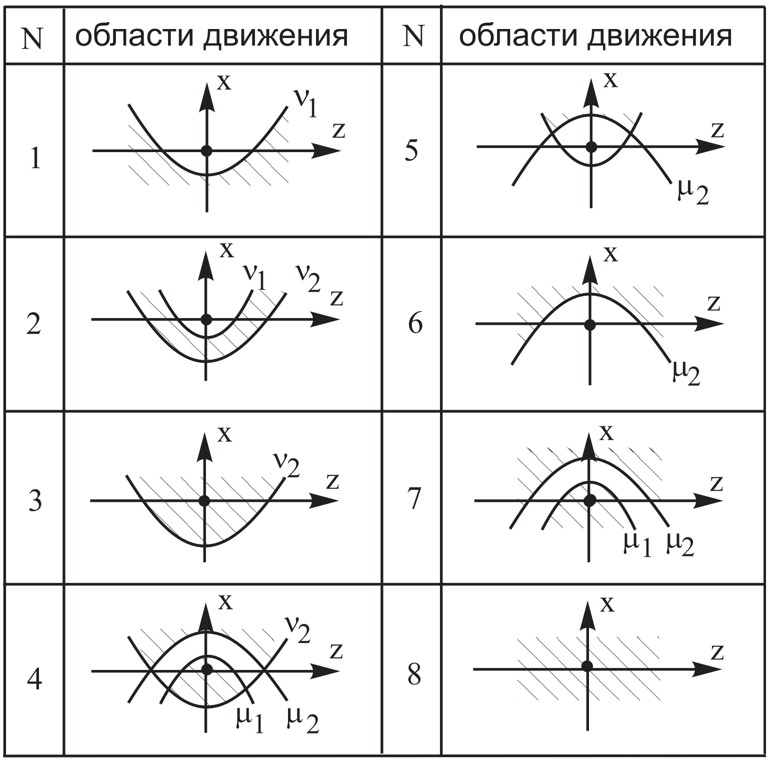


Рис. 54. Области возможного движения для задачи Лагранжа на псевдосфере.

Бифуркационная диаграмма и классификация областей возможности движения представлены на рисунках 54, 55. Точки касания гипербол Γ_2 и Γ_1, соответственно, с прямыми Γ_3 и Γ_4 имеют координаты

$$(-1, -(K+1)), \quad (-K, 1), \quad (K-1, -1).$$

При наличии только одного поля ($\gamma_1 = 0$) прямые Γ_3 и Γ_4, параболы Γ_1 и Γ_2 сливаются (рис. 55). Соответственно, области, расположенные между этими кривыми, схлопываются (3, 4, 7, 8). Тогда область, где движение неограничено, будет расположена на прямой $l = h$. Таким образом, даже при незначительном изменении интегралов h и l материальная точка «падает» либо в область 1, либо в область 4, в которых поле бесконечно удаленного центра искривляет траекторию движущейся материальной точки, например, траекторию точки, двигающейся вдоль оси Ox (см. рис. 56).

Будем называть движение ограниченным по одной из переменных, если выполняются условия: либо $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \nu^2 < 1$, либо $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \mu^2 < \infty$.

Утверждение 31.1. *При $h < -K$ движение ограничено по переменной ν и неограничено по переменной μ. При $h \geqslant -K$ движение неограничено по двум переменным.*

Таким образом, движение ограничено по переменной ν в областях 2, 3, 4, 5.

Пусть функция S имеет два корня $\mu_1 < \mu_2$. Будем называть движение частично ограниченным, если $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \mu_1 < \infty$.

Утверждение 31.2. *В областях 4 и 7 движение частично ограничено.*

Доказательство. В области 4 имеем $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \infty$, $\nu^2 \leqslant \nu_2^2 < 1$, т.е. выполняются условия $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \mu_1 < \infty$ и $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \nu < \infty$. В области 7 для координаты μ имеем то же самое соотношение, а для координаты ν имеем $\nu^2 \leqslant 1$. Т.е. также выполняются условия $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \mu_1 < \infty$ и $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \nu < \infty$. Следовательно, по определению, в этих областях существуют ограниченные траектории. □

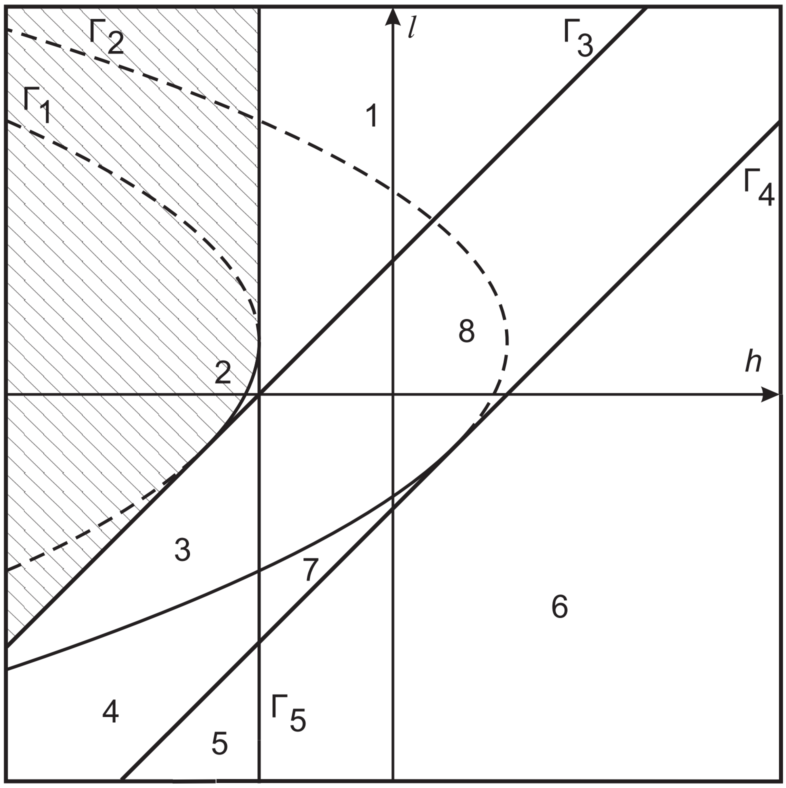


Рис. 55. Бифуркационная диаграмма для задачи Лагранжа на псевдосфере (области, где движение невозможно заштрихованы).

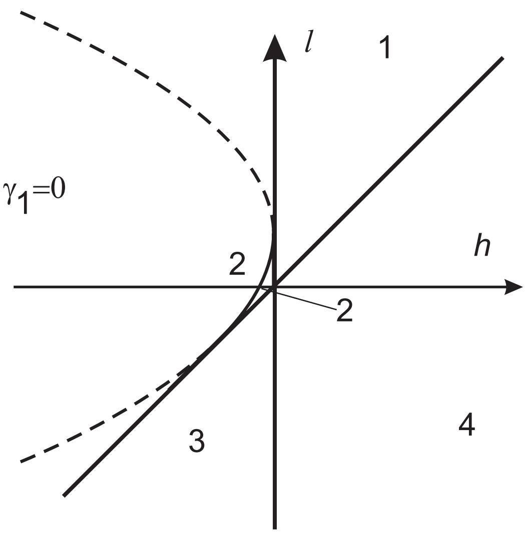


Рис. 56. Бифуркационная диаграмма для задачи движения частицы в «однородном поле» на псевдосфере.

32. Описание некомпактных бифуркаций, движения на конфигурационном пространстве

Из рисунка 55 видно, что возникают следующие бифуркации:

$$
\begin{array}{cccccc}
2 \to \varnothing, & 2 \to 3, & 3 \to 4, & 4 \to 5, & 6 \to 7, & 7 \to 8, \\
8 \to 1, & 5 \to 6, & 4 \to 7, & 3 \to 8, & 2 \to 1, & \varnothing \to 1.
\end{array}
$$

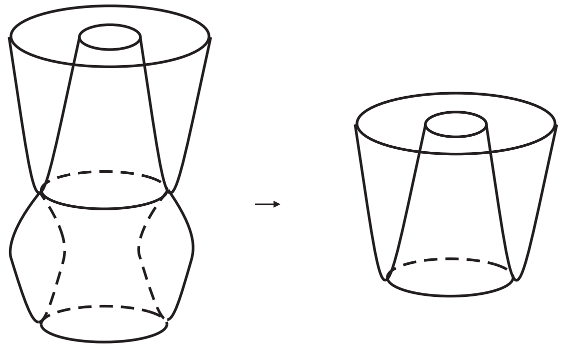


Рис. 57

Случай $2 \to \varnothing$. Для области 2 имеем две цилиндрические поверхности. Каждый такой цилиндр получается при склеивании по основанию двух полуцилиндров $S^1 \times [0, \infty)$ (окружность умножается на луч). При $\mu = 0$ скорость меняет знак на противоположный, так как координата μ неотрицательна. В результате получаем цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}^1$, при пересечении точки (h, l) гиперболы Γ_1 цилиндр сжимается на свою ось и затем исчезает. Эта бифуркация соответствует периодическому движению в компактном случае, если добавить бесконечно удаленную точку (A_n).

Случай $2 \to 3$. В этом случае имеем следующую бифуркацию. Координата ν проходит через нулевое значение, два цилиндра перестраиваются в один аналогично тому, как происходит перестройка для задачи двух центров при бифуркации $8 \to 7$ (т.е. бифуркация типа B_n). Предельное движение имеет траектории двух типов: материальная точка движется по лучу, выходящему из центра притяжения в направлении «однородного» поля; вторая траектория — асимптотическая, материальная точка асимптотически стремится к этому лучу, уходя на бесконечность.

Случай $3 \to 4$. В области 4 мы имеем две компоненты связности: один тор и цилиндрическую поверхность. В первом случае траектория ограничена двумя параболами $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_2$. Если влияние добавочной тяги велико, то движение носит колебательный характер, т.е. материальная точка, обогнув центр притяжения и затем колеблясь между ветвями параболы $\nu = \nu_2$, движется в сторону увеличения значения μ вплоть до μ_1. Достигнув этой границы, точка начнет двигаться в обратном по μ направлении по колебательной траектории, вновь приблизится к центру, обогнет его и т.д. Если слагаемое, обусловленное потенциальной энергией однородного поля, мало по сравнению с энергией, то траектория меняет свою форму, приобретая квазиэллиптический тип. Это вызвано малостью влияния однородного поля по сравнению с силой притяжения ньютоновского центра в вершине гиперболоида. Если в процессе движения материальная точка попадает в точку пересечения двух парабол $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_2$, то скорость материальной точки здесь будет равна нулю, и дальнейшее движение будет происходить по уже пройденной траектории, но в обратном направлении. Если траектория проходит вблизи точки пересечения парабол, то все равно происходит смена направления. Наряду с ограниченными траекториями в этой области существуют неограниченные траектории (гамильтонов поток течет по цилиндрической поверхности). Неограниченность траектории в данном случае вызвана удаленностью притягивающего центра и, в связи с этим, увеличением влияния однородного поля (постоянной тяги). При бифуркации корень уравнения $S = 0$ является кратным. На границе областей 3 и 4 мы имеем три траектории. Появляется периодическая траектория $\mu = \mathrm{const} = \mu_1 = \mu_2$. Движение материальной точки происходит по ограниченной дуге этой параболы, по участку, заключенному внутри некоторой параболы $\nu = \nu_1$. Материальная точка, колеблясь, движется туда и обратно по дуге $\mu = \mu_1 = \mu_2$ между двумя точками с координатами $\mu = \mu_1 = \mu_2$, $\nu = \nu_2$. Снизу к этой траектории асимптотически стремится змееобразная ограниченная траектория. При приближении к значению кратного корня $\mu = \mu_1 = \mu_2$ петли траектории все теснее и теснее приближаются друг к другу. Сверху от дуги $\mu = \mu_1 = \mu_2$ уходит еще одна траектория, сначала колеблющаяся вблизи асимптотической траектории и затем уходящая на бесконечность.

Бифуркация представлена на рис. 57.

Случай $4 \to 5$. При переходе точки (h, l) через бифуркационную линию, разделяющую области возможности движения 4 и 5 ($h < -K$), в фазовом пространстве тор Лиувилля вырождается. В этом случае имеем бифуркацию типа А (в компактном случае). Предельное движение следующее: материальная точка движется вдоль отрезка между притягивающим центром и вершиной параболы $\nu = \nu_2$. В области 5 траектории, как видно, не огибают притягивающего центра. В этой области существуют самовозвращающиеся траектории, когда материальная точка попадает в точку пересечения ограничивающих движение парабол, корней функций R и S. В этих точках скорость равна нулю, но равновесия нет, так как силы ненулевые, поэтому точка пойдет в обратном направлении по той же самой траектории. Существуют также траектории, которые носят колебательный характер, материальная точка колеблется между ветвями параболы $\nu = \nu_2$ и удаляется на бесконечность.

Случай $6 \to 7$. При пересечении точки (h, l) линии Γ_4 рождаются два тора, в этом случае мы имеем бифуркацию типа А. Предельное движение определяется траекторией, которая проходит через центр, составляющая скорости при этом движении $\dot{\mu} = 0$, координата $\mu = 0$.

Случай $7 \to 8$. В области 7 имеем следующие компоненты связности: два тора и два цилиндра. При бифуркации, когда точка (h, l) переходит из области 7 в область 8, каждый тор касается цилиндра, в результате получается один цилиндр (перестройка аналогична изображенной на рис. 57). И в области 8 имеем две компоненты связности — два цилиндра. В области 8 движение возможно на всем конфигурационном пространстве, т.е. $\nu^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu < \infty$. В области 7 при удалении материальной точки от притягивающего центра $\mu > \mu_2$ движение происходит по цилиндрам, в этом случае превалирующую роль играет «однородное поле»; соответственно, если начальное положение точки близко от притягивающего центра, т.е. $\mu < \mu_1$, то большее влияние оказывает притягивающий центр, и движение происходит по тору; на одном торе составляющая скорости $\dot{\nu} > 0$, на втором — $\dot{\nu} < 0$.

Случай $8 \to 1$. При переходе точки (h, l) через линию Γ_3 при условии, что $h > -K$, два цилиндра перестраиваются в один цилиндр. При этом бифуркация типа B_n. Предельное движение асимптотическое. На конфигурационном пространстве материальная точка асимптотически стремится к лучу, выходящему из ньютоновского центра ($\nu = 0$, $\dot{\nu} = 0$).

Наконец, рассмотрим бифуркации, которые возникают при пересечении точки (h, l) линии $h = -K$ (Γ_5).

При переходе точки (h, l) через линию $h = -K$, разделяющую области 3 и 8 и 5 и 6, один цилиндр перестраивается в два цилиндра, бифуркация типа B_n. При переходе $2 \to 1$ точки (h, l), наоборот, два цилиндра перестраиваются в один.

При переходе точки (h, l) через линию $h = -K$, разделяющую области 4 и 7, один тор перестраивается в два тора (атом B), и один цилиндр перестраивается в два цилиндра, бифуркация типа B_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М.* Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений// Бюл. Ин-та теор. астрономии. — 1965. — *10*, № 4. — С. 241–272.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 431 с.
3. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — ВИНИТИ. — 1985. — *3*. — С. 5–304.
4. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. — М.: Наука, 1977.
5. *Бадалян Н. К.* О форме траекторий в задаче двух неподвижных центров. Тр. Всес. мат. съезда. — М.: АН СССР. — 1937. — *2*. — С. 239–241.
6. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. — М.: Наука, 1972.
7. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Успехи мат. наук. — 1990. — *45*, № 2. — 49 с.
8. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1, 2. — Ижевск: Удмур. гос. ун-т, 1999.

9. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Мат. сб. — 1994. — *185*, № 4. — С. 27–80; Мат. сб. — 1994. — *185*, № 5. — С. 27–78.
10. *Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 2. — С. 1–42.
11. *Браилов А. В., Фоменко А. Т.* Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем// Мат. сб. — 1987. — *133*, № 3. — С. 375–385.
12. *Возмищева Т. Г.* Классификация движений для обобщения задачи Эйлера на сферу// Изв. Ин-та мат. и информат./ Удмур. гос. ун-т. — 1998. — № 1. — С. 34–40.
13. *Возмищева Т. Г., Ошемков А. А.* Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 8. — С. 3–38.
14. *Возмищева Т. Г.* Топологический анализ интегрируемых задач небесной механики на сфере и псевдосфере// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Тематические обзоры/ ВИНИТИ (в печати).
15. *Возмищева Т. Г.* Некоторые интегрируемые задачи механики в пространствах постоянной кривизны// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-12/ ВИНИТИ. — 2001. — *88.* — С. 145-198.
16. *Грановский Я. И., Жеданов А. С., Луценко И. М.* Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве. I Осциллятор// Теор. и мат. физ. — 1992. — *91*, № 2. — С. 207–216.
17. *Грановский Я. И., Жеданов А. С., Луценко И. М.* Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве. II Задача Кеплера// Теор. и мат. физ. — 1992. — *91*, № 3. — С. 396–410.
18. *Гребеников Е. А., Демин В. Г., Аксенов Е. П.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли// Сб.« Искусственные спутники Земли». — 1961. — № 8.
19. *Дубошин А. Г.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. — М.: Наука, 1964. — 560 с.
20. *Жуковский Н. Е.* О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы// Полн. собр. соч. Т. 1, 1937. — С. 490–535.
21. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Удмур. гос. ун-т, 1995.
22. *Козлов В. В.* О динамике в пространствах постоянной кривизны// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1994. — № 2. — С. 28–35.
23. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* Об интегрируемости гамильтоновых систем// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1979. — № 6. — С. 88–91.
24. *Лобачевский Н. И.* Новые начала геометрии с полной теорией параллельных// Полн. собр. соч. Т. 2. — М.-Л.:ГИТТЛ, 1949.
25. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. — *36*, № 5. — С. 109–151.
26. *Ошемков А. А.* Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. Вып. 23. — М.: Изд-во МГУ, 1988, — С. 122–132.
27. *Ошемков А. А.* Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела// Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. Вып. 25. Часть 2. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — С. 23–109.
28. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука, 1990.
29. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, изд-во «Просперус», 1995.
30. *Фоменко А. Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости// Изв. АН СССР. — 1986. — *50*. — С. 1276–1307.
31. *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем// Изв. АН СССР. — 1988. — *52*, № 2. — С. 378–407.
32. *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Изв. АН СССР. — 1990. — *54*, № 3. — С. 546–575.
33. *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тело// Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
34. *Шарлье К.* Небесная механика. — М.: Наука, 1966. — 627 с.

35. *Шредингер Э.* Метод определения квантовомеханических собственных значений и собственных функций// Избранные труды по квантовой механике. — М.: Наука, 1976. — С. 239–247.
36. *Born M.* Vorlesungen über Atommechanik, 1934.
37. *Chernikov N. A.* The Kepler problem in the Lobachevsky space and its solution// Acta phys. pol. B. — 1992. — *23.* — С. 115–119.
38. *Fomenko A. T.* Topological classification of all integrable Hamiltonian differential equations of general type with two degrees of freedom// The Geometry of Hamiltonian Systems. Proc. Workshop Held, June 5-16, 1989. — USA, Berkeley: Springer-Verlag, 1991. — С. 131-339.
39. *Higgs P. W.* Dynamical symmetries in a spherical geometry. I// J. Phys. A. — 1979. — *12*, № 3. — С. 309–323.
40. *Kozlov V. V., Harin O. A.* Kepler's problem in constant curvature spaces// Celest. Mech. and Dynam. Astronom. — 1992. — *54.* — С. 393–399.
41. *Levi-Chivita T.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps// Acta math. — 1906. — *30.* — С. 305–327.
42. *Shepetilov A.V.* Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature// J. Phys. A. — 1998. — *31.* — С. 6279–6291.
43. *Shepetilov A. V.* Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature// J. Phys. A. — 1998. — *31.* — С. 6279–6291.
44. *Smale S.* Topology and mechanics// Invent. math. — 1970. — *10.* — С. 305–331.
45. *Tallquist H.J.* Über die Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Zentren nach dem Newtonischen Yesetze angezogen wird// Acta Soc. sci. fenn. A. — 1927. — *1*, № 5.
46. *Vozmischeva T. G.* The two center and Lagrange problem in the Lobachevsky space// Proc. Int. Conf. «Geometry, Integrability, and Quantization», Bulgaria, 1999.
47. *Vozmischeva T. G., Mamaev I. S.* Classification of motions for generalization of Euler and Lagrange problems on Lobachevsky plane//Int. Conf. «Geometrization of Physics III», Kazan State Univ., Kazan, October 1997.
48. *Vozmischeva T. G.* Classification of motions for generalization of the two center problem on a sphere// Celest. Mech. and Dynam. Astronom. — 2000. — *77.* — С. 37–48.
49. *Vozmischeva T. G.* The Lagrange and Two-center Problems in the Lobachevsky Space// Celest. Mech. and Dynam. Astronom. — 2002. — *84*, № 1. — С. 65–85.
50. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A Course of Modern Analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.

Т. Г. Возмищева
Ижевский государственный технический университет
E-mail: tavo@mail.ru

Современная математика и ее приложения. Том 4 (2003). С. 117–139

УДК 517.977.1, 517.977.57

ФОРМУЛА СДВИГА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ГЛАДКИМ НЕЛИНЕЙНЫМ УПРАВЛЯЕМЫМ СИСТЕМАМ

© 2003 г. **С. А. ВАХРАМЕЕВ**

Аннотация. Приводятся инвариантные условия выпуклости векторграммы (по управлению и состоянию) управляемой системы. Дается характеризация точек переключения экстремальных управлений соответствующей задачи быстродействия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В [19] автором было доказано алгебраическое условие выпуклости векторграммы

$$\mathfrak{F}(x) = f(x, U) = \{f(x, u)\,|u \in U\}$$

нелинейной гладкой управляемой системы вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad x \in M, \tag{1}$$

где M — n-мерное гладкое многообразие, регулярно вложенное в $\mathbb{R}^d$, U — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$, а $\{f(\cdot, u); u \in U\}$ — семейство гладких векторных полей на M, гладко зависящее от параметра u (в естественной топологии; см., например, [26]). Это условие имеет вид

$$\frac{\partial^2 f(x,u)}{\partial u^2}(v, w) = a_\Gamma(x, u; v)\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} w \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

и должно выполняться для любого (ненулевого) касательного вектора w к (относительной) внутренности каждого ребра Γ многогранника U, локально, в некоторой окрестности O_x точки x в M. Здесь $a_\Gamma(x, u; v)$ — семейство линейных функционалов на $\mathbb{R}^m$, гладко зависящее от $(x, u) \in O_x \times U$.

Недавно в [23] автором была найдена инвариантная форма этого условия в более общем случае, когда вместо многогранника U рассматривается так называемое *многообразие с углами* U (см. [17, 23, 39]). Это условие называется *формулой сдвига* (см. [23]). Приведем это условие.

Пусть Γ — одномерный страт (ребро) многообразия с углами U, а Z_u, $u \in U$, — ненулевое векторное поле, касательное к относительной внутренности этого ребра (являющейся на самом деле одномерным гладким подмногообразием). Тогда в [23] было установлено, что локальная форма

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 02-01-0034).

ISSN 1512–1712

условия (2) (с очевидной заменой фразы «выпуклый многогранник U» на «связное компактное многообразие с углами U») эквивалентно формуле сдвига: для любых точек u' и u'', достаточно близких друг к другу (лежащих в малой окрестности O_{u_0}) некоторой (произвольной) точки $u_0 \in U$), и для любого ребра $\Gamma \subset U$ существует гладкая *положительная* функция $a_\Gamma(x, u', u'')$, определенная на $O_x \times O_{u_0} \times O_{u_0}$, такая, что

$$f_{x,u'}(x, \cdot)Z_{u'} = a_\Gamma(x, u', u'')f_{*,u''}(x, \cdot)Z_{u''}, \tag{3}$$

где Z_u, $u \in U$, — ненулевое гладкое векторное поле, касательное к относительной внутренности Γ; равенство в (3) понимается в смысле равенства векторов объемлющего пространства, естественным образом отождествляемого с пространством $\mathbb{R}^d$.

С помощью этой формулы, теоремы выпуклости Титце [40], а также критерия выпуклости, установленного в [19], автор доказал в [23] выпуклость векторграммы $\mathfrak{F}(x)$ в случае многообразия с углами U. Конечно, непосредственным следствием этого результата является *теорема существования* для следующей *двуточечной задачи быстродействия*, ассоциированной с системой (1) (дополнительно предполагается, что f удовлетворяет естественным условиям роста по x):

$$\begin{cases} T \to \inf, \\ \dot{x} = f(x, u), \qquad u \in U, \quad x \in M, \\ x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \\ u(\cdot) \in \mathcal{D}_U^{\max}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathcal{D}_U^{\max}$ — (максимальный) класс допустимых управлений, состоящий из измеримых функций, принимающих значения в многообразии с углами U.

Попытка обобщить локальное условие (2) была предпринята в [34] с целью доказать более общую теорему существования для двуточечной задачи быстродействия (4).

А именно, вместо (2) было предложено следующее условие: существуют гладкие функции $a_{ij}^k :$ $M \times U \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2} = \sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k(x, u)\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}w_k, \tag{5}$$

где $w_1, \ldots, w_m$ — линейно независимые векторы, касательные к (относительным) внутренностям ребер многогранника U (предполагается, что U телесен: $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} U = \mathbb{R}^m$). Кроме того, эти функции должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} a_{ii}^i(x, u) = a_{ij}^j(x, u) + a_{ji}^j(x, u), \quad i \neq j; \\ a_{ij}^k(x, u) = 0, \quad i \neq j \neq k, \\ i,\ j,\ k, = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{6}$$

Конечно, функции a_{ij}^k можно трактовать как символы Кристоффеля некоторой связности на U (впервые это было замечено в [22] в случае локального условия (2); см. также [23]). К сожалению, автор [34] никак не объясняет, что означают эти условия (6) для такой связности.

Цель данной статьи состоит во введении более общего условия, гарантирующего выпуклость векторграммы $\mathfrak{F}(x)$. Это условие также называется *формулой сдвига*, а само доказательство выпуклости — чисто тавтологическое в отличие от громоздких вычислений в [34]. Кроме того, это новое условие выпуклости значительно более общее, чем условия (5) и (6), поскольку кроме некоторых условий положительности коэффициентов соответствующего представления не накладывается никаких условий типа (6). Возможно, что это новое условие вообще нельзя ослабить. Наряду с этим, в статье изучаются точки переключения экстремальных управлений и их характеризация в свете новой формулы сдвига. Следует отметить, что важный вспомогательный результат (который, конечно, имеет и самостоятельное значение) о существовании нетривиальной замкнутой гладкой (класса C^2) геодезической на $\mathfrak{F}(x)$ доказан без рассмотрения связности и соответствующей метрики, происходящих из коэффициентов формулы сдвига, как в [23]; само доказательство очень простое и основано только на теореме Шаудера о неподвижной точке.

Статья построена следующим образом. В первом параграфе вводятся обозначения и даются необходимые определения и факты (относящиеся, в основном, к многообразиям с углами). Во втором параграфе приводится формула сдвига и поясняется ее локальный (кординатный) смысл. Кроме того, здесь же доказывается выпуклость векторграммы с помощью этой формулы. В третьем параграфе изучаются точки переключения и функции переключения для задачи оптимального управления (4), ассоциированной с рассматриваемой системой.

Благодарности. Автор выражает признательность академику РАН Р. В. Гамкрелидзе за внимание к этой работе, посвященной памяти профессора Н. А. Бобылева, известного математика и друга автора, трагически погибшего в декабре 2002 г.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе вводятся основные обозначения и приводятся некоторые определения и факты, которые потребуются в дальнейшем.

Как обычно, через $\mathbb{R}^n$ обозначается n-мерное арифметическое пространство вектор-столбцов

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix},$$

снабженное нормой

$$|x| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x^i|.$$

Вектор-строка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ трактуется как элемент двойственного пространства $\mathbb{R}^{n*}$, а матричное произведение

$$\xi \cdot x = \xi \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot x^i$$

рассматривается как значение линейной формы ξ на векторе x. В качестве нормы на $\mathbb{R}^{n*}$ рассматривается норма

$$|\xi| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|,$$

совместимая с нормой на $\mathbb{R}^n$ в том смысле, что $|\xi \cdot x| \leqslant |\xi| \cdot |x|$.

Касательное пространство $T_x\mathbb{R}^n$ к $\mathbb{R}^n$ в точке x отождествляется с аффинной плоскостью $x + \mathbb{R}^n$. Все рассматриваемые многообразия предполагаются гладкими и конечномерными (если не оговорено противное, то термин «гладкость» всегда «бесконечную дифференцируемость»). Касательное пространство к гладкому многообразию M в точке x обозначается через T_xM; TM — касательное расслоениее, $\mathrm{Der}(M)$ — множество всех гладких векторных полей на M, рассматриваемое как $C^\infty(M)$-модуль дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$ всех гладких функций на M: оно также трактуется как алгебра Ли с коммутатором

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \quad \forall X, Y \in \mathrm{Der}(M);$$

$\mathrm{Der}^*(M)$ — двойственный модуль, состоящий из всех гладких дифференциальных 1-форм ω на M. Обозначим через $\langle \omega, X \rangle$ значение 1-формы ω на векторном поле X; пусть $\langle \omega_x, X_x \rangle = \langle \omega, X \rangle_x$ — значение ковектора $\omega_x \in T_x^*M$ на векторе $X_x \in T_xM$. (Заметим, что, обратно, для любого вектора (или ковектора) в данной точке существует единственное векторное (ковекторное) поле, совпадающее с этим вектором (ковектором) в этой точке.) Если $\omega = d\phi$, $\phi \in C^\infty(M)$, то

$$\langle d\phi, X\rangle = X\phi \quad \forall \omega \in \mathrm{Der}^*(M).$$

Если f — гладкое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N, то через f_* обозначается его касательное отображение; это отображение сопоставляет касательный вектор $f_{*,x}X_x \in T_{f(x)}N$ любому касательному вектору $X_x \in T_xM$. Если ограничить рассмотрение координатной окрестностью многообразия M и если N вложено в некоторое пространство $\mathbb{R}^d$, то вместо $f_{*,x}$ часто используется «классическое» обозначение касательного отображения

$$f_{*,x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Если $X \in \mathrm{Der}(M)$, то определена производная Ли L_X по направлению этого поля. Как известно (см., например, [26]), на гладких функциях $a \in C^\infty(M)$ она определяется как $L_Xa = Xa$, а на гладких 1-формах $\omega \in \mathrm{Der}^*(M)$ — как

$$L_X\omega = X \circ \omega - \omega \circ \mathrm{ad}\, X,$$

где $\mathrm{ad}\, X : \mathrm{Der}(M) \to \mathrm{Der}(M)$ — дифференцирование модуля $\mathrm{Der}(M)$, определенное как

$$\mathrm{ad}\, XY = [X, Y] \quad \forall Y \in \mathrm{Der}(M).$$

Через $\mathrm{ad}^k X$, $k = 0, 1, \ldots$, обозначаются степени (итерации) этого оператора:

$$\mathrm{ad}^0 X = \mathrm{Id}, \quad \mathrm{ad}^k X = \mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}^{k-1} X = \mathrm{ad}^{k-1} X \circ \mathrm{ad}\, X, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Здесь Id — тождественное отображение $\mathrm{Der}(M)$.

Приведем теперь некоторые факты о (под)многообразиях с углами. Они были введены А. А. Аграчевым и автором в [39]. Подробное изложение их свойств можно найти, например, в [17]. Понятие многообразия с углами играет важную роль в теории оптимизизации, поскольку, например, в современном математическом программировании рассматриваются задачи, содержащие так называемые ограничения типа неравенств

$$f_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, ..., m,$$

где f_j — гладкие функции на конечномерном многообразии M. Кроме того, неравенства такого типа очень часто задают область управления в теории оптимального управления (т.е. множество, в котором управление принимает свои значения). Оказывается, что такие многообразия в точности состоят из множеств, локально определяемых такими неравенствами, вместе с некоторым «условием линеализации», которое будет сформулировано ниже. С топологической точки зрения многообразия с углами — это топологические многообразия с негладким краем. Нетривиальный пример многообразия с углами доставляет множество M-матриц; см. следующий параграф.

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие без края. Замкнутое подмножество $V \subset M$ называется *(под)многообразием с углами* (в M), если для любой точки $x_0 \in V$ существует карта (O_{x_0}, ϕ_{x_0}) многообразия M такая, что $\phi_{x_0}(x_0) = 0$ и

$$K_{x_0} = \phi_{x_0}(O_{x_0} \cap V)$$

— выпуклый многогранный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат. Всегда предполагается, что область значений ϕ_{x_0} есть все пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_{x_0}(O_{x_0}) = \mathbb{R}^n.$$

В этом определении не предполагается телесность конуса K_{x_0}. В случае, когда K_{x_0} — полупространство или подпространство в $\mathbb{R}^n$, получаем определения гладкого подмногообразия M, соответственно, с краем и без края.

Любая такая тройка $(O_{x_0}, \phi_{x_0}, K_{x_0})$ называется *картой многообразия с углами* V, O_{x_0} называется *носителем этой карты*, а диффеоморфизм ϕ_{x_0} — *картирующим отображением* этой карты или *локальной системой координат*.

Как известно, любой выпуклый многогранный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат задается конечной системой линейных однородных неравенств

$$\langle \xi_i, y\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

а значит, локально, в окрестности O_{x_0} любой точки $x_0 \in V$, многообразие с углами V задается системой гладких неравенств

$$g_i(x) \equiv \langle \xi_i, \phi_{x_0}(x)\rangle \leqslant 0, \quad x \in O_{x_0}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Далее, поскольку замкнутый выпуклый конус K в $\mathbb{R}^n$, не являющийся подпространством, гомеоморфен полупространству в $\mathbb{R}^k$, где k — размерность *несущей плоскости* $\hat{K} = K - K$ этого конуса, то многообразие с углами есть топологическое многообразие с краем.

Пусть V — многообразие с углами в M. Касательный вектор $X_x \in T_xM$ называется *касательным* к V в точке $x \in V$, если существует гладкая кривая $\gamma : [0, \varepsilon_0] \to M$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(\varepsilon) \in V$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, такая, что

$$\left.\frac{d\gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = X_x.$$

Множество всех касательных векторов X_x к V в точке $x \in V$ обозначается через T_xV и называется *касательным конусом к V в точке x*.

Предложение 1.1. *Касательный конус T_xV есть выпуклый многогранный конус в T_xM. Кроме того, если $(O_{x_0}, \phi_{x_0}, K_{x_0})$ — карта V в точке x_0, то конусы T_xV и $T_xK_{x_0}$ изоморфны*

$$(\phi_{x_0})_{*,x} T_xV = x + T_xK_{x_0} \quad \forall x \in O_{x_0}.$$

Любой многогранный выпуклый конус K в $\mathbb{R}^n$ порождается его ребрами $w_1, \dots, w_N$, где $N \geqslant k = \dim \hat{K}$ в общем случае, т.е. он совпадает с множеством всех *неотрицательных* линейных комбинаций этих ребер (в случае, когда он *острый*, т.е. не содержит нетривиальных подпространств)

$$K = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j w_j, \quad \alpha_j \geqslant 0 \right\}.$$

Всегда можно найти максимальное множество линейно независимых ребер, линейная оболочка которых $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \dots, w_k\}$ (т.е. множество *всех* линейных комбинаций) порождает несущую плоскость $\hat{K}$ этого конуса: $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \dots, w_k\} = \hat{K}$. Согласно предложению 1.1, это означает, что существуют гладкие векторные поля $W_1, \dots, W_k$ на M, порождающие T_xV в x; это поля

$$W_{ix} = (\phi_{x_0}^{-1})_{*,x}(x + w_i), \quad i = 1, \dots k,$$

определенные локально в O_{x_0}. Они продолжаются до глобально определенных полей с помощью некоторого разбиения единицы.

Оказывается, что касательный конус к многообразию с углами, определенный таким образом, есть в точности *касательный конус Кларка* в случае, когда касательное пространство T_xM естественно отождествляется с некоторым $\mathbb{R}^p$ (определяемым вложением M).

Напомним (см. [29]), что касательный конус Кларка $T_K(x)$ к замкнутому множеству $K \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in K$ определяется как множество

$$T_K(x) = \{v \in \mathbb{R}^n |\, d_K^0(x; v) = 0\},$$

где

$$d_K(x) = \min_{y \in K} |x - y|,$$

а $d_K^0(x; v)$ — обобщенная производная функции $x \mapsto d_K(x)$ по направлению v. Кроме того, этот конус может быть охарактеризован следующим «внутренним» образом.

Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $T_K(x)$ в том и только том случае, если для любой монотонно убывающей последовательности t_i, $t_i \to 0$ при $i \to \infty$, существует последовательность точек $v_i \in \mathbb{R}^n$ такая, что $v_i \to v$ при $i \to \infty$ и $x + t_i v_i \in K$, $i = 1, 2, \dots$.

Соответствие $x \mapsto T_xV$ может быть рассмотрено как многозначное отображение из V в T_xV. Оказывается, что если V — многообразие с углами, то оно полунепрерывно снизу.

Напомним, что многозначное отображение F из M в TM называется *полунепрерыным снизу* в точке x_0, если для любой карты (O_x, ϕ) на M отображение

$$\phi(x) \mapsto \phi_{*,x}F(x) : \mathbb{R}^n \to 2^{T\mathbb{R}^n}$$

полунепрерывно снизу в точке $\phi(x_0)$ как многозначное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ ($T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n = \phi(x) + \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$).

Все сказанное выше является простым следствием следующей леммы.

Лемма 1.1. *Касательный конус T_xK к выпуклому многогранному конусу K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат совпадает с касательным конусом Кларка $T_K(x)$ к K в точке x при естественном отождествлении $T_x\mathbb{R}^n$ с $\mathbb{R}^n$. Кроме того, многозначное отображение*

$$x \mapsto T_xK : \mathbb{R}^n \to 2^{T\mathbb{R}^n}$$

полунепрерывно снизу, а его несущие плоскости $\widehat{T_xK} = T_x - T_xK$ образуют вполне интегрируемое регулярное (т.е постоянной размерности) распределение

$$\widehat{T_xK} = x + \hat{K}, \quad x \in K, \tag{1.1}$$

на K. Далее, конус T_xK обладает следующим свойством «локальной минимальности»: существует окрестность $U_x \subset K$ такая, что $T_xK \subset T_yK$ при всех $y \in U_x$ (включение понимается в смысле объемлющего пространства).

Замечание 1.1. Эта лемма справедлива также и для любого замкнутого выпуклого конуса K, если под касательным конусом к K в точке x понимать замыкание множества всех касательных векторов к K в точке x, определенных с помощью гладких кривых. Берется замыкание, поскольку множество таких касательных векторов может быть и незамкнутым, если конус K не многогранный. Касательный конус к многогранному конусу K замкнут ввиду формулы

$$T_xK = x + \hat{L}_x + K,$$

где $\hat{L}_x$ — несущая плоскость грани L_x максимальной размерности конуса K, содержащая точку x в своей относительной внутренности, $\hat{L}_x = L_x - L_x$.

Из этой леммы легко вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть V — многообразие с углами. Тогда существует гладкое вполне интегрируемое распределение Π_x, $x \in M$, на M, имеющее постоянную размерность на каждой компоненте связности V такое, что $\Pi_x = T_xV - T_xV$ при $x \in V$. Кроме того, отображение $x \mapsto T_xV$ полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in V$. Далее, конус T_xV наследует свойство локальной минимальности: существует окрестность $O_x \subset M$ такая, что для всех $y \in O_x \cap V$ имеем $T_xV \subset T_yV$ (включение понимается в смысле объемлющего пространства).*

В частности, из предложения 1.2 следует, что каждая компонента связности любого многообразия с углами V содержится в некотором связном гладком подмногообразии в M; это подмногообразие есть интегральное многообразие построенного выше распределения Π_x, $x \in M$.

Многообразие с углами V, для которого

$$\dim \widehat{T_xV} = \dim M,$$

называется *телесным*.

Пусть V — многообразие с углами. Связное гладкое подмногообразие $\Gamma \subset M$ называется *открытой гранью* V, если $\Gamma \subset V$ и не существует гладкого подмногообразия M, строго содержащего Γ и также лежащего в V. Другими словами, Γ максимально по включению.

Замкнутой гранью V называется замыкание некоторой открытой грани многообразия с углами V.

Предложение 1.3. *Каждая точка многообразия с углами V содержится в единственной открытой грани наименьшей размерности. Каждая замкнутая грань сама является многообразием с углами; кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между замкнутыми гранями V и гранями конуса T_xV соответствующей размерности; это соотвествие, конечно, устанавливается с помощью картирующего отображения, входящего в определение карты V. Т.е. часть k-мерной грани V, «вырезаемая» из носителя этой карты, отображается на некоторую грань той же размерности конуса, входящего в определение карты V. В частности, V — стратифицированное по Уитни пространство* [41].

По поводу доказательства этого утвеждения см. [17]. Отметим здесь только то, что относительные внутренности k-стратов (k-мерных граней) V определяются как

$$\Gamma^{(k)} = \{x \in V | \dim T_xV \cap (-T_xV) = k\}, \quad k = 1, \dots, \dim \widehat{T_xV}.$$

Нульмерные страты такой стратификации, естественно, называются *вершинами* многообразия с углами V, а замыкания относительных внутренностей одномерных стратов — его *ребрами*.

Конечно, вершины и ребра многообразия с углами находятся во взаимно однозначном соответствии с таковыми конуса, входящего в определение карты многообразия с углами.

Заметим, что в случае компактного многообразия с углами V число граней любой размерности конечно. Это легко следует из взаимно однозначного соответствия, устанавливаемого в предложении 1.3. В частности, конечно и число вершин.

Замкнутое подмножество V n-мерного гладкого многообразия M называется *трансверсально выпуклым*, если для любой точки $x \in V$ существуют карта (O_x, ϕ_x) многообразия M, $\phi(x) = 0$, замкнутый выпуклый конус $K_x \subset \mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат и сохраняющее начало координат гладкое отображение $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, трансверсальное конусу K_x, т.е. $\forall y \in \mathbb{R}^n : \Phi_x(y) \in K_x$,

$$\Phi_{*,y} T_y \mathbb{R}^n + T_{\Phi(y)} K_x = T_{\Phi(y)} \mathbb{R}^m,$$

и

$$\phi(O_x \cap V) = \Phi^{-1}(K_x).$$

Эти объекты были введены автором в [8] (см. также [7]). Касательный конус к трансверсально выпуклому множеству определяется с помощью гладких кривых; в частности, он совпадает с касательным конусом Кларка. Можно естественным образом ввести понятие трансверсальности гладких отображений трансверсально выпуклым подмножествам; трансверсальное пересечение трансверсально выпуклых подмножеств оказывается *всегда* трансверсально выпуклым, а прообраз трансверсально выпуклого подмножества при трансверсальном гладком отображении — трансверсально выпуклым подмножеством. В частности, любое выпуклое множество трансверсально выпукло.

Приведем теперь некоторые критерии выпуклости.

Теорема 1.1 (Титце). *Если замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ связно и локально выпукло (в индуцированной топологии), то оно само выпукло.*

Вторая теорема принадлежит автору (см. [19], а также [18]). Пусть K — *замкнутое выпуклое тело* в $\mathbb{R}^n$ (телом называется множество с непустой внутренностью). Тогда можно определить так называемый *опорный конус* к этому телу. Опорный конус в точке $x \in K$, обозначаемый через T_xK, состоит из замыкания множества всех секущих, проведенных из точки x, и принадлежит $T_x\mathbb{R}^n = x + \mathbb{R}^n$. Легко доказать следующее представление для этого конуса:

$$T_xK = x + T_K(x),$$

где, как и выше, $T_K(x)$ — касательный конус Кларка к K в точке x. Кроме того, по определению опорного конуса справедливо включение

$$K \subset T_xK \quad \forall x \in K.$$

Справедливо следующее «геометрически ясное» утверждение.

Теорема 1.2 (С. А. Вахрамеев). *Замкнутое линейно связное тело K в $\mathbb{R}^n$ выпукло в том и только том случае, если конус $x + T_K(x)$ содержит K при каждом $x \in K$:*

$$K \subset x + T_K(x).$$

Теорема 1.2 была недавно обобщена в [28]. Окончательный результат, получающийся здесь, содержит следующая теорема.

Теорема 1.3. *Замкнутое линейно связное тело $K \subset \mathbb{R}^m$ выпукло в том и только том случае, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $x \in \partial K$*

$$B_\varepsilon(x) \cap K \subset x + T_{K \cap B_\varepsilon(x)}(x) = T_x(K \cap B_\varepsilon(x)).$$

Из включения $K \subset T_x K$ следует, что любой элемент $p \in K$ допускает представление

$$p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x) w_x^{(i)}, \tag{1.2}$$

где все $\alpha_i(x) \geqslant 0$, если $T_x K$ — острый, а $w_x^{(i)}$ — ребра конуса $T_x K$. В случае, когда $T_x K$ не острый, можно разложить его в прямую сумму максимального подпространства, лежащего в нем, и острого (многогранного) конуса. Кроме того, из множества $\{w_x^{(i)}\}$ можно выбрать максимальное подмножество такое, что представление (1.2) единственно (в остром случае); см. [38]. На самом деле, коэффициенты α_i — гладкие функции от x, а $x + w_x^{(i)}$ можно интерпретировать как касательные векторы к K. Конечно, из (1.2) вытекает, что локально, в окрестности любой точки $x \in K$, существуют гладкие векторные поля $Z_x^{(i)}$, $x \in K$, $i = 1, \ldots, m$, $m = \dim \operatorname{span}_{\mathbb{R}} K$, такие, что $\forall p \in K$

$$p = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(x) Z_x^{(i)}, \tag{1.3}$$

и, кроме того, эти поля $Z_x^{(i)}$ линейно независимы в этой окрестности. Коэффициенты β_i — гладкие функции, определенные в этой окрестности, необязательно неотрицательные.

2. Формула сдвига и ее первое приложение: выпуклость векторграммы и теорема существования для задачи быстродействия

Пусть U — компактное связное многообразие с углами. Тогда U имеет конечное число вершин и ребер. Обозначим последние через Γ_i, $i = 1, \ldots, N$, где, возможно, $N \geqslant m$, m — размерность $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} T_u U$, которая постоянна (см. § 1). Обозначим через $Z_u^{(i)}$, $u \in U$, гладкие векторные поля на U, касательные к (относительным) внутренностям ребер Γ_i (последние являются гладкими одномерными подмногообразиями U).

2.1. Формула сдвига. Будем говорить, что семейство векторных полей $\{f(\cdot, u), u \in U\}$ удовлетворяет *формуле сдвига*, если для любой точки (x_0, u_0) и для любого ребра Γ_i существуют окрестность $O_{x_0} \times O_{u_0}$ и гладкие *неотрицательные* функции $a^i_{\Gamma_j}$, определенные в $O_{x_0} \times O_{u_0} \times O_{u_0}$, такие, что соотношение

$$f_{*,u'}(x, \cdot) Z_{u'}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} a^i_{\Gamma_j}(x, u', u'') f_{*,u''}(x, \cdot) Z_{u''}^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.1}$$

выполняется для всех $x \in O_{x_0}$ и u', $u'' \in O_{u_0}$.

Соотношение (2.1) понимается в смысле объемлющего пространства, отождествляемого с пространством $\mathbb{R}^d$, в которое регулярно вложено многообразие M. Кроме того, обратим внимание на то, что функции $a^i_{\Gamma_j}$ определены на открытом множестве.

Заметим, что соотношение (2.1) в некотором симысле симметрично. А именно, в соотношении (2.1) точки u' и u'' равноправны, а потому, меняя их местами, получим формулу

$$f_{*,u''}(x, \cdot) Z_{u''}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} a^{(i)}_{\Gamma_k}(x, u'', u') f_{*,u'}(x, \cdot) Z_{u'}^{(k)}. \tag{2.2}$$

Формулы (2.1) и (2.2) показывают, что $N \times N$ матрица

$$A(x, u', u'') = \left(a^j_{\Gamma_i}(x, u', u'')\right)_{i,i=1}^N$$

есть M-*матрица* (см. [2, с. 327]), что означает, что она имеет неотрицательные внедиагональные элементы, и выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий:

1) матрица $A(x, u', u'')$ обратима и ее обратная матрица

$$A^{-1}(x, u', u'') = A(x, u'', u') = \left(a^j_{\Gamma_i}(x, u'', u')\right)_{i,j=1}^N$$

имеет неотрицательные элементы;
2) все главные миноры матрицы $A(x, u', u'')$ положительны;
3) существует N-мерный вектор e с положительными компонентами такой, что

$$\sum_{j=1}^N a^j_{\Gamma_i}(x, u', u'') e_j > 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Заметим, что класс M-матриц дает важный пример многообразия с углами. Кроме того, этот класс содержит подкласс матриц с неотрицательными диагональными элементами, который допускает естественную групповую структуру (относительно матричного произведения) и даже структуру группы Ли в некотором точно определенном смысле. Изложение этих вопросов выходит за рамки данной статьи: теория типа Ли для таких *групповых многообразий с углами* будет предметом последующих публикаций.

2.2. Глобальная формула сдвига. Покажем, что формула сдвига глобальна, т.е. справедлива при *любых* u', $u'' \in U$. В заключительном параграфе именно эта глобальная версия формулы сдвига будет использована для доказательства существования нетривиальной замкнутой гладкой геодезической на векторграмме $\mathfrak{F}(x)$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Если формула* (2.1) *справедлива для любых u' и u'' из окрестности каждой точки $u_0 \in U$ и для x из окрестности каждой точки $x_0 \in M$, то она справедлива глобально: для любого ребра Γ_i существуют неотрицательные гладкие функции a^i_j, определенные на открытой окрестности $M \times U \times U$ такие, что для всех u', u'' из U и для любого ненулевого векторного поля $Z^{(i)}_u$, $u \in U$, касательного к Γ_i, справедлива формула* (2.1).

Доказательство. Пусть u' и u'' — две произвольные точки многообразия с углами U. Так как U локально линейно связно и связно, то оно линейно связно, а значит, существует непрерывная кривая $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, соединяющая u' с u'': $u(0) = u'$ и $u''(1) = u''$. Рассмотрим специальное *инцидентное* открытое покрытие $\{O_i\}$ компактного множества $\{u(s) | 0 \leqslant s \leqslant 1\}$, т.е. такое покрытие, что

(1) в $O_i \cap U$ справедлива формула сдвига с коэффициентами ${}^i a^j_k(x, u'_i, u''_i)$:

$$f_{*,u'_i}(x, \cdot) Z^{(j)}_{u'_i} = \sum_{k=1}^N {}^i a^j_k f_{*,u''_i}(x, \cdot) Z^{(k)}_{u''_i};$$

(2) центр $u_i = u(s_i) \in U$ каждой из окрестностей O_i принадлежит $O_i \cap O_{i+1} \cap U$ при всех i.

Выберем конечное подпокрытие $O_0, O_1, \dots O_{M+1}$ из этого покрытия с $u_0 = u'$ и $u_{M+1} = u''$ и последовательно применим формулу (2.1):

$$f_{*,u'}(x,\cdot)Z^{(i)}_{u'} = \sum_{j_1=1}^{N} {}^1a^i_{j_1}(x,u',u_1)f_{*,u_1}(x,\cdot)Z^{(j_1)}_{u_1} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N} {}^1a^i_{j_1}(x,u',u_1){}^2a^{j_1}_{j_2}(x,u_1,u_2)f_{*,u_2}(x,\cdot)Z^{(j_2)}_{u_2} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\cdots\sum_{j_M=1}^{N} {}^1a^i_{j_1}(x,u',u_1){}^2a^{j_1}_{j_2}(x,u_1,u_2)\cdots{}^{M+1}a^{j_{M+1}}_{j_M}(x,u_M,u'')Z^{(j_M)}_{u''} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}^i_j(x,u',u'')Z^{(j)}_{u''},$$

где

$$\tilde{a}^i_j(x,u',u'') = \sum_{j_1=1}^{N}\cdots\sum_{j_M=1}^{N} {}^1a^i_{j_1}(x,u',u_1)\cdots{}^Ma^{j_{M-1}}_{j_M}(x,u_M,u'') \geqslant 0.$$

Это завершает доказательство предложения. □

2.3. Координатная форма формулы сдвига. Приступим теперь к координатной расшифровке формулы (2.1). Не ограничивая общности, считаем, что окрестность O_{u_0}, рассмотренная выше, содержится в носителе некоторой карты $\phi_{u_0} : U_{u_0} \to K_{u_0}$ с центром в u_0, где K_{u_0} — многогранный конус в $\mathbb{R}^m$, входящий в определение карты многообразия с углами (см. § 1). Положим

$$u' = u = \phi^{-1}_{u_0}(y), \quad y \in K_{u_0}, \qquad u'' = u_0 = \phi^{-1}(0),$$

и

$$b^i_j(y) = a^i_{\Gamma_j}(x;\phi^{-1}_{u_0}(y),\phi^{-1}_{u_0}(0)), \quad i,\, j = 1,\dots,N.$$

Далее, пусть

$$g(y) = f(x,\phi^{-1}_{u_0}(y)), \quad y \in K_{u_0},$$

а

$$w^{(i)}_y = \phi_{*,\phi^{-1}_{u_0}(y)}Z^{(i)}_{\phi^{-1}_{u_0}(y)}.$$

Тогда $w^{(i)}_y$, $y \in K_{u_0}$, — ненулевые векторы, касательные к ребрам конуса K_{u_0}, изоморфного конусу $T_0K_{u_0}$.

В этих обозначениях перепишем (2.1) как

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y}w^{(i)}_y = \sum_{j=1}^{N} b^i_j(y)\frac{\partial g(0)}{\partial y}w^{(j)}_0, \quad b^i_j(y) \geqslant 0, \quad i,\, j = 1,\dots,N. \tag{2.3}$$

Продифференцируем (2.3) в направлении любого вектора $v \in \mathbb{R}^m$:

$$\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}(w^{(i)}_y, v) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{grad} b^i_j(y)v\frac{\partial g(0)}{\partial y}w^{(j)}_0. \tag{2.4}$$

Как и выше, воспользуемся «симметрией» формулы (2.1) (переменные u' и u'' равноправны). А именно, так как

$$f_{*,u_0}(x,\cdot)Zu_0{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} a^i_{\Gamma_j}(x,u_0,u)f_{*,u}(x,\cdot)Z^{(j)}_u$$

в силу (2.1), то полагая

$$d^j_k(y) = a^j_{\Gamma_k}(x;\phi^{-1}_{u_0}(0),\phi^{-1}_{u_0}(y)),$$

получаем отсюда, что

$$\frac{\partial g(0)}{\partial y} w_0^{(j)} = \sum_{k=1}^{N} d_k^j(y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} w_y^{(k)}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}(w_y^{(i)}, v) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{grad} b_j^i(y) v d_k^j(y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} w_y^{(k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{N} e_k^i(y,v) \frac{\partial g(y)}{\partial y} w_y^{(k)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$e_k^i(y,v) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{grad} b_j^i(y) v d_k^j(y) \tag{2.7}$$

— линейные функционалы на $\mathbb{R}^m$, гладко зависящие от y (и от x).

Полагая

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i(x;y) = \sum_{l=1}^{N} \operatorname{grad} b_l^i(y) w_y^{(j)} d_k^l(y), \tag{2.8}$$

получаем окончательную формулу

$$\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}(w_y^i, w_y^k) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x;y) \frac{\partial g(y)}{\partial y} w_y^{(j)}. \tag{2.9}$$

Выбирая максимально возможную линейно независимую систему из системы векторов $\{w_y^{(y)}\}$ (на самом деле она состоит из m векторов в случае, когда U телесно) и выражая остальные векторы этой системы через выбранные линейно независимые векторы, получаем новые коэффициенты $\Gamma_{ij}^k(x;y)$, являющиеся гладкими функциями в некоторой окрестности конуса K_{u_0} и допускающие естественную интерпретацию как символов Кристоффеля некоторой связности ∇, определенной в некоторой (открытой) окрестности U (которая, конечно, является гладким многообразием). Эта связность — *внутренняя* для рассматриваемой управляемой системы. Свойства этой связности будут рассмотрены в последующей публикации; здесь же они вообще не рассматриваются, поскольку они не нужны в дальнейшем.

2.4. Выпуклость векторграммы $\mathfrak{F}(x)$. Формула сдвига (2.1) позволяет дать очень простое и ясное доказательство выпуклости векторграммы $\mathfrak{F}(x)$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть семейство гладких векторных полей $\{f(\cdot,u), u \in U,\}$ на M, гладко зависящее от параметра u со значениями в связном компактном многообразии с углами U, удовлетворяет формуле сдвига* (2.1); *тогда векторграмма*

$$\mathfrak{F}(x) = \{f(x,u); u \in U\}$$

есть выпуклое компактное множество объемлющего пространства $\mathbb{R}^d$, куда регулярно вложено многообразие M.

Доказательство. Как и в [19] (см. также [20] и [21]), легко проверяется, что отображение $u \mapsto f(x,u)$ имеет постоянный ранг как отображение, определенное в некоторой окрестности многообразия с углами U и принимающее значения в пространстве $\mathbb{R}^d$. Это означает, в частности, что существует гладкое регулярное распределение $\Pi(x)$, $x \in M$, такое, что $\mathfrak{F}(x) \subset \Pi(x)$ для всех $x \in M$, и, кроме того, множество $\mathfrak{F}(x)$ имеет в нем непустую внутренность. Рассмотрим $\Pi(x)$ как новое объемлющее пространство для $\mathfrak{F}(x)$, в котором последнее есть локально линейно связное, связное и компактное тело (локальная линейная связность $\mathfrak{F}(x)$ легко следует из того, что U — многообразие с углами, а потому локально линейно связно в силу того, что локально оно является многогранным выпуклым конусом). Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить другие свойства теоремы 1.3 в § 1, а именно, условие, что для некоторой окрестности O_{u_0} произвольной точки $u_0 \in U$ справедливо следующее включение:

$$f(x, O_{u_0} \cap U) \in f(x, u_0) + T_{f(x,u_0)} f(x, O_{u_0} \cap U). \tag{2.10}$$

Выберем окрестность O_{u_0} так, чтобы она лежала в носителе некоторой карты ϕ_{u_0} многообразия с углами U с центром в точке u_0 и, кроме того, содержалась в окрестности точки u_0, входящей в формулировку формулы сдвига (2.1). Пусть $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, — гладкая кривая, целиком лежащая в $O_{u_0} \cap U$ и соединяющая точку u_0 с произвольной точкой $u \in O_{u_0} \cap U$: $u(0) = u_0$, $u(1) = u$. Образ этой кривой при картирующем отображении ϕ_{u_0} целиком лежит в конусе K_{u_0}, входящем в определение этой карты. Производная кривой $y(s) = \phi_{u_0}^{-1}(u(s))$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, таким образом, допускает представление

$$\dot{y}(s) = \sum \alpha_i(s) w_0^{(i)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

с гладкими функциями α_i, неотрицательными при всех s, при которых эта кривая лежит в острой части конуса K_{u_0}. Ввиду локальной минимальности $T_0 K_{u_0} \approx K_{u_0}$, касательные векторы $w_0^{(i)}$ можно рассматривать как элементы конуса $T_{y(s)} K_{u_0}$ при всех $0 \leqslant s \leqslant 1$. Все это означает, что для кривой $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, имеет место прдставление

$$\dot{u}(s) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x, s) Z_{u(s)}^{(i)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \tag{2.11}$$

с гладкими коэффициентами a_i, неотрицательными, как только кривая $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, лежит в образе при отображении $y \mapsto \phi_{u_0}^{-1}(y)$ острой части конуса K_{u_0}.

Напомним, что поскольку отображение $u \mapsto f(x, u)$ имеет постоянный ранг и, более того, является сюръективной субмерсией как отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\Pi(x)$, то $\mathfrak{F}(x)$ — трансверсально выпуклое множество, а значит, $f(x, O_{u_0} \cap U)$ — трансверсально выпукло, и касательный конус $T_{f(x,u)} f(x, U \cap O_{u_0})$ совпадает с $f_{*,u} T_u U \cap O_{u_0}$ при любом $u \in U$ (см. [12]).

Теперь, используя формулу сдвига (2.1) и представление (2.11), имеем

$$f(x, u) = f(x, u_0) + \int_0^1 f(x, u(s))\, ds = f(x, u_0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 a_i(x, s) f_{*,u(s)}(x, \cdot) Z_{u(s)}^{(i)}\, ds =$$

$$= f(x, u_0) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i(x, s) a_j^i(x, s) f_{*,u_0}(x, \cdot) Z_{u_0}^{(j)}\, ds = f(x, u_0) + \sum_{i=1}^{N} c_i(x) f_{*,u_0}(x, \cdot) Z_{u_0}^{(i)}, \tag{2.12}$$

где

$$c_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 a_j^i(x, s) a_i(x, u(s)) a_i(x, s)\, ds, \tag{2.13}$$

а a_j^i определяются функциями $a_{\Gamma_j}^i$, входящими в формулу сдвига

$$a_j^i(x, s) = a_{\Gamma_j}^i(x, u(s), u_0) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{2.14}$$

Теперь, принимая во внимание предыдущее замечание о знаке коэффициентов в представлении (2.11), выводим из (2.12) и (2.13), что

$$f(x, O_{u_0} \cap U) \subset f(x, u_0) + T_{f(x,u_0)}(f(x, O_{u_0} \cap U)) = T_{f(x,u_0)} f(x, O_{u_0} \cap U).$$

Теорема доказана. □

В качестве простого следствия этой теоремы получаем следующую *теорему существования* для двуточечной задачи быстродействия (4) (см. введение).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *пусть*

$$|(f(x,u),x)| \leqslant K(t)(1+\|x\|^2), \tag{2.15}$$

где $\|\cdot\|$ — *норма в* $\mathbb{R}^d$, *определяемая евклидовым скалярным произведением* $(\cdot,\cdot)$ *на* $\mathbb{R}^d$, *а* K — *скалярная неотрицательная локально интегрируемая по Лебегу функция на* $\mathbb{R}$, *и пусть существует, по крайней мере, одно допустимое управление* $u(\cdot) \in \mathcal{D}_U^{\max}$ *такое, что траектория* $x(t,u(\cdot))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *системы* (1), *соответствующая этому управлению и начальному состоянию* $x(0,u(\cdot))$, *удовлетворяет условию* $x(T,u(\cdot)) = x_T$.

Тогда существует решение (*оптимальное управление*) $\tilde{u}(\cdot) \in D_u^{\max}$ *двуточечной задачи быстродействия* (4).

3. Второе приложение формулы сдвига: характеризация точек переключения экстремальных управлений

Результаты, полученные в этом параграфе, являются ественным обобщением результатов [20,23] и [24]. Подчеркнем, что не накладывается *никаких* условий на кривизну и кручение связности, естественным образом происходящей из (2.9) (с очевидной группировкой линейно зависимых векторов и коэффициентов для получения символов Кристоффеля последней); более того, эта связность вообще не будет рассматриваться здесь в силу ограниченных рамок данной статьи. Она будет рассмотрена в последующей публикации.

3.1. Точки переключения. Понятие точки переключения было точно определено в работе [45] Г. Дж. Суссмана для случая гладкой аффинной управляемой системы с одним входом

$$\dot{x} = a(x) + ub(x), \quad x \in M, \ u \in \mathbb{R}, \ |u| \leqslant 1$$

(a и b — гладкие векторные поля на многообразии M), хотя это понятие было известно и использовано значительно раньше (например, в классической книге [33], где оно не было точно определено).

Напомним определение Суссмана.

Пусть $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — допустимое управление (т.е. измеримая функция, удовлетворяющая неравенству $|u(t)| \leqslant 1$ почти всюду на отрезке $[0,T]$).

Точка $\hat{t} \in [0,T]$ называется *точкой переключения* управления $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, если для любого $\varepsilon > 0$ множества

$$E_\varepsilon^+ = \{t \in [0,T] \mid |t-\hat{t}| < \varepsilon, \, u(t) = +1\}$$

и

$$E_\varepsilon^- = \{t \in [0,T] \mid |t-\hat{t}| < \varepsilon, \, u(t) = -1\}$$

имеют положительную меру Лебега.

Наша основная цель — изучить многомерное обобщение и вариационную характеризцию этого понятия для чисто нелинейной системы (1), описанной во введении.

Рассмотрим для системы (1) двуточечную задачу быстродействия (4). Напомним, что она формулируется следующим образом: *для заданных точек* x_0 *и* x_T *требуется найти допустимое управление* $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *переводящее* x_0 *в* x_T *за минимальное время*:

$$\begin{cases} T \to \inf, \\ x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \\ \dot{x} = f(x,u), \qquad u(\cdot) \in \mathcal{D}_U^{\max}, \end{cases}$$

где $\mathcal{D}_U^{\max}$ — максимальный класс допустимых управлений, т.е. он состоит из всех измеримых функций $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, принимающих значения в многообразии с углами U при почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Принцип максимума Понтрягина (см. [33]) утверждает, что если $\tilde{u}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — допустимое управление, решающее двуточечную задачу быстродействия (4), то существует нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi f_{*,\tilde{x}(t)}(\cdot, \tilde{u}(t)) \tag{3.1}$$

такое, что функция Гамильтона—Понтрягина

$$H(x,\psi,u)=\psi f(x,u)$$

вдоль процесса $(\tilde{x}(t),\tilde{\psi}(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$, достигает своего максимального значения в точке $\tilde{u}(t)$ при почти всех $t\in[0,T]$:

$$\mathcal{H}(x(t),u(t))=\max_{u\in U}\tilde{\psi}(t)f(\tilde{x}(t),u)=\tilde{\psi}(t)f(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)). \tag{3.2}$$

Кроме того, максимизированный гамильтониан $\mathcal{H}$ постоянен вдоль этого процесса

$$\mathcal{H}(\tilde{x}(t),\tilde{\psi}(t))=\mathrm{const}\geqslant 0. \tag{3.3}$$

Решения $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t),\tilde{\psi}(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$, уравнений (1), (3.1) и (3.2), удовлетворяющие краевым условиям

$$\tilde{x}(0)=x_0,\quad \tilde{x}(T)=x_T, \tag{3.4}$$

station называются *экстремалями*, а управление $\tilde{u}(\cdot)$ — *экстремальным управлением*.

Инвариантную формулировку принципа максимума, выраженную в терминах производных Ли и экспоненциального представления потоков, ассоциированных с полями системы (1), можно найти, например, в [16].

Точки переключения важны в связи с так называемыми *теоремами релейности*, поскольку естественно возникает вопрос о регулярности этих решений. Они являются специфическими теоремами регулярности, поскольку нельзя ожидать, что управление $\tilde{u}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, будет гладким или даже непрерывным. Первая теорема такого типа была доказана Р. В. Гамкрелидзе; она известна под названием *теоремы о конечности числа переключений* или *теоремы релейности с конечным числом переключений* (см. [44]). Эта теорема справедлива для линейной управляемой системы

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad u\in U,\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

(где A и B — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а U — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$), удовлетворяющей *условию общности положения* (такая система называется *линейной системой общего положения*), т.е. для любого вектора w, имеющего направление одного из ребер многогранника U (т.е. вектора, касательного к относительной этого ребра), векторы

$$Bw,ABw,\dots,A^{n-1}Bw$$

линейно независимы. Теорема утверждает, что любое экстремальное управление принимает значения только в множестве вершин $\{u_1,\dots,u_N\}$ многогранника U и существует не более конечного числа точек переключения этого управления. Оригинальная формулировка этой теоремы (см. [33]) имеет несколько иную форму, не содержащую понятия точки переключения. А именно, утверждается, что каждое экстремальное управление — кусочно-постоянная функция на каждом конечном отрезке, принимающая значения в множестве вершин многогранника U, а под моментами (точками) переключения понимаются точки разрыва этого управления.

Обобщение теоремы Р. В. Гамкрелидзе получено (в нелинейном случае) автором в [13] (см. также [14, 16]).

Теперь приходим к основной теме этого параграфа — введению и обсуждению понятия точки переключения в многомерном чисто нелинейном случае.

Пусть $u\in\mathcal{D}_U^{\max}$ — допустимое управлениме для системы (1).

Точка $\hat{t}\in[0,T]$ называется *точкой переключения* этого управления, если существуют две различные вершины u' и u'' многообразия с углами U (т.е. его нульмерные страты) такие, что для любого $\varepsilon>0$ множества

$$E'_\epsilon=\{t\in[0,T]\mid |t-\hat{t}|<\varepsilon,u(t)=u'\}$$

и

$$E''_\epsilon=\{t\in[0,T]\mid |t-\hat{t}|<\varepsilon,u(t)=u''\}$$

имют положительную меру Лебега.

В дальнейшем всегда предполагается, что

$$f_{*,u}(x,\cdot)Z_u^{(i)}\neq 0\quad \forall(x,u)\in M\times U,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rank} f_{*,u}(x,\cdot) \geqslant 1 \quad \text{для всех } (x,u) \in M \times U, \tag{3.6}$$

потому что в соответствующей теореме релейности из соответствующего условия общности положения следует последнее неравенство (см. [23]).

Сформулируем теперь один из основных результатов данной статьи.

Теорема 3.1. *Пусть семейство векторных полей, определяющих систему* (1)*, удовлетворяет* (*глобальной*) *формуле сдвига* (2.1)*, а* $\hat{t} \in [0,T]$ — *точка переключения экстремального управления* $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{D}_U^{\max}$ *системы* (1)*. Тогда существуют ребро* Γ *многообразия с углами* U *и точка* $\hat{u} \in U$ *такие, что для любого ненулевого касательного вектора* $Z_{\hat{u}}$ *к внутренности этого ребра*

$$\tilde{\psi}(\hat{t})\ f_{*,\hat{u}}(\tilde{x}(\hat{t}),\cdot)Z_{\hat{u}} = 0, \tag{3.7}$$

где $\tilde{x}(\cdot)$ *и* $\tilde{\psi}(\cdot)$ — *решения систем* (1) *и* (3.2)*, соответствующие этому управлению и краевым условиям* (3.4) *соответственно.*

Доказательство. Так как $\hat{t} \in [0,T]$ — точка переключения экстремального управления $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{D}_U$, то существуют вершины u' и u'' многообразия с углами U такие, что для любого $\varepsilon > 0$ множества точек E'_ε и E''_ε имеют положительную меру Лебега. Поэтому, переходя к пределу при $t \in E'_\varepsilon$, $t \to \hat{t}$ и $t \in E''_\varepsilon$, $t \to \hat{t}$ в соотношении

$$\mathcal{H}(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t)) = \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \equiv \mathrm{const},$$

получаем

$$\tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u') = \tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u'').$$

Пусть

$$f(\tilde{x}(\hat{t}), u') \neq f(\tilde{x}(\hat{t}), u'').$$

Тогда для любого $\theta \in (0,1)$ рассмотрим точку

$$f(\tilde{x}(\hat{t}), u') + \theta(f(\tilde{x}(\hat{t}), u'') - f(\tilde{x}(\hat{t}), u')).$$

Так как множество $\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))$ выпукло по теореме 2.1, то существует точка $v_\theta \in U$ такая, что

$$f(\tilde{x}(\hat{t}), v_\theta) = f(\tilde{x}(\hat{t}), u') + \theta(f(\tilde{x}(\hat{t}), u'') - f(\tilde{x}(\hat{t}), u')).$$

Можно выбрать θ так, что точка v_θ отлична от любой вершины U. В самом деле, множество $\{f(\tilde{x}(\hat{t}), v_\theta); 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ — отрезок, не вырождающийся в точку по условию, и существует только конечное число вершин многообразия с углами U. Поэтому существует $\hat{\theta} \in (0,1)$ такое, что $\hat{u} = v_{\hat{\theta}}$ лежит в относительной внутренности некоторой грани $\tilde{U}$ многообразия с углами U (она может быть несобственной, т.е. самим многообразием с углами U). Так как

$$\tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), \hat{t}) = \tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u') +$$
$$+ \hat{\theta}(\tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u'') - \tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u')) = \tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u'),$$

то видим, что функция $u \mapsto \psi(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u)$ достигает максимального значения в относительно внутренней точке $\hat{u} = v_{\hat{\theta}}$ грани $\tilde{U}$. Поэтому

$$\tilde{\psi}(\hat{t}) f_{*,\hat{u}}(\tilde{x}(\hat{t}), \cdot) W_{\hat{u}} = 0$$

для любого $W_{\hat{u}} \in T_{\hat{u}}\tilde{U}$, и, в частности, это выполняется для касательного вектора $Z_{\hat{u}}$ к внутренности некоторого ребра Γ, принадлежащего этой грани. Это завершает доказательство в случае, когда $f(\tilde{x}(\hat{t}), u') \neq f(\tilde{x}(\hat{t}), u'')$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$f(\tilde{x}(\hat{t}), u') = f(\tilde{x}(\hat{t}), u''). \tag{3.8}$$

Справедливо следующее важное утверждение.

Предложение 3.1. *Если*

$$f(\tilde{x}(\hat{t}), u') = f(\tilde{x}(\hat{t}), u'') = y_0,$$

то существует нетривиальная гладкая (класса C^2) замкнутая геодезическая $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, лежащая в множестве

$$\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t})) = f(\tilde{x}(\hat{t}), U)$$

и проходящая через точку y_0.

Доказательство предложения 3.1. Пусть u' и u'' — вершины многообразия с углами U такие, что выполнено (3.8). Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |\dot{y}|^2\,dt \to \inf, \\ y(0) = y(T), \quad y(t) \in f(\tilde{x}(\hat{t}), U) = \mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t})), \quad y(\cdot) \in W_1^2([0,1];\mathbb{R}^d), \end{gathered} \tag{3.9}$$

где $W_1^2([0,1];\mathbb{R}^d)$ — пространство Соболева абсолютно непрерывных функций на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}^d$, квадраты производных которых интегрируемы по Лебегу, снабженное обычной нормой

$$\|y(\cdot)\| = |y(0)| + \left(\int\limits_0^1 |\dot{y}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Эта задача имеет решение, поскольку ее функционал строго выпукл на выпуклом замкнутом ограниченном множестве в $W_1^2([0,1];\mathbb{R}^d)$, определяемым условиями (3.9), коэрцитивен, т.е. его норма стремится к бесконечности при $|\dot{y}| \to \infty$, а также ограничен снизу (он неотрицателен).

Запишем уравнение Эйлера—Лагранжа для нее

$$\frac{d}{dt}\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left[f_{*,u(t)}(\tilde{x}(\hat{t}),\cdot)\dot{u}(t)\right] = 0 \tag{3.10}$$

и покажем, что

(1) оно допускает C^2-решение (кривую) $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$;
(2) любое его C^2-решение — кривая, целиком лежащая в U.

По предположению, справедлива глобальная формула сдвига: для любых u' и u'' в U, $x \in M$, и для любого ребра $\Gamma_i \subset U$, $i = 1, \dots, N$, многообразия с углами U существуют неотрицательные функции $a^i_{\Gamma_j}(x, u', u'')$, определенные на $M \times U \times U$, такие, что

$$f_{*,u'}(x,\cdot)Z^{(i)}_{u'} = \sum_{j=1}^N a^i_{\Gamma_j}(x,u',u'') f_{*,u''}(x,\cdot)Z^{(j)}_{u''}, \tag{3.11}$$

$$f_{*,u''}(x,\cdot)Z^{(j)}_{u''} = \sum_{k=1}^N a^i_{\Gamma_k}(x,u'',u') f_{*,u'}(x,\cdot)Z^{(k)}_{u'} \tag{3.12}$$

и

$$\det A(x,u',u'') \geqslant c(x) > 0, \tag{3.13}$$

где $A(x,u',u'') = \big(a^i_k(x,u',u'')\big)$ — $N \times N$ матрица с элементами

$$a^i_k(x,u',u'') = a^i_{\Gamma_k}(x,u',u'') \geqslant 0, \tag{3.14}$$

которая обратима, и ее обратная матрица есть $A(x,u'',u')$; элементы последней матрицы также неотрицательны (т.е. (Ax,u',u'') — M-матрица).

Представим производную искомой кривой $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, в виде

$$\dot{u}(s) = \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(s) Z^{(i)}_{u(s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{3.15}$$

Подставим (3.14) в *уравнение геодезических* (3.10) и воспользуемся (3.11) с $u' = u(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\dot y(t) = \frac{d}{dt}\left[f_{*,u(t)}(\tilde x(\hat t),\cdot)\dot u(t)\right] = \\ = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N \dot u_i(t) f_{*,u(t)}(\tilde x(\hat t),\cdot) Z^{(i)}_{u(t)} = \\ = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \dot u_i(t) a^i_j(\tilde x(\hat t), u(s), u'') f_{*,t''}(\tilde x(\hat t),\cdot) Z^{(i)}_{u''} = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Таким образом, обозначая $u(s) = (u_1(s),\ldots,u_N(s))^T$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, видим, что $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, конечно, удовлетворяет уравнению геодезических (3.10), если

$$\frac{d}{ds}\sum_{i=1}^N \dot u_i(s) a^i_k(\tilde x(\hat t), u(s), u'') = 0,$$

что эквивалентно неявному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{ds}\left[A(\tilde x(\hat t), u(s), u'')\dot u(s)\right] = 0 \tag{3.17}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u' \quad u(1) = u''. \tag{3.18}$$

Докажем существование C^2-решения краевой задачи (3.17), (3.18) с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке (см., например, [35]). Для нас достаточна банахова версия этой теоремы, которая утверждает, что *непрерывное отображение замкнутого выпуклого подмножества банахова пространства в компактное его подмножество имеет неподвижную точку*.

В самом деле, в силу обратимости матрицы $A(\tilde x(\hat t), u(t), u'')$ нелинейная краевая задача (3.17), (3.18) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u(t) = u' + \left(\int_0^1 A(\tilde x(\hat t), u'', u(s))\,ds\right)^{-1}\left(\int_0^t A(\tilde x(\hat t), u'', u(s))\,ds\right)(u'' - u'). \tag{3.19}$$

Рассмотрим это уравнение как нелинейное операторное уравнение

$$u = \mathcal F(u), \quad u \in C([0,1];\mathbb R^N), \tag{3.20}$$

где оператор $\mathcal F$ определяется правой частью уравнения (3.19). Легко проверяется, что этот оператор есть (вполне) непрерывное отображение $C([0,1];\mathbb R^N)$ в компактное множество $C([0,1];\mathbb R^N)$; кроме того, из уравнения (3.19) сразу получаем, что *любое решение уравнения* (3.19) *принадлежит классу* $C^2([0,1];\mathbb R^N)$. Поэтому, чтобы применить теорему Шаудера о неподвижной точке к (3.20), достаточно доказать, что, например, $\mathcal F$ отображает выпуклое замкнутое множество

$$\mathcal W = \{u(\cdot) \in C([0,1];\mathbb R^N) \;\Big|\; \|u(\cdot) - u'\|_{C([0,1];\mathbb R^N)} \leqslant |u'' - u'|\} \subset C([0,1];\mathbb R^N)$$

в компактное подмножество в $C([0,1];\mathbb R^N)$.

В самом деле, функция

$$t \mapsto \left\|\int_0^t A(\tilde x(\hat t), u'', u(t))\,dt\left(\int_0^1 A(\tilde x(\hat t), u'', u(t))\,dt\right)^{-1}\right\|, \quad [0,1] \to [0,1] \tag{3.21}$$

монотонно возрастает:

$$\left\|\left(\int_0^t A(\tilde x(\hat t), u'', u(t))\,dt\right)\left(\int_0^1 a(\tilde x(\hat t), u'', u(t))\,dt\right)^{-1}\right\| =$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\int_0^t a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u'',u(s))\,ds\int_0^1 a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u(s),u'')\,ds\right|\right) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_0^t a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u'',u(s))\,ds\int_0^1 a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u(s),u'')\,ds\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_0^{t'} a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u'',u(s))\,ds\int_0^1 a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u(s),u'')\,ds\right),$$

если $t' \geqslant t$ в силу неотрицательности функций $a_i^j(\tilde{x}(\hat{t}),u(s),u'')$ и $a_i^j(\tilde{x}(\hat{t}),u'',u(s))$ как функций от s, а потому максимальное значение этой функции достигается при $t=1$ и равно 1. Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{F}u(\cdot)-u'\|_{C([0,1],\mathbb{R}^N)} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\mathcal{F}u(t)-u'| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\max_{1\leqslant i\leqslant N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\int_0^1 a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u'',u(s))\,ds\int_0^1 a_j^i(\tilde{x}(\hat{t}),u(s),u'')\,ds\right|\right)|u''-u'| =$$
$$= |u''-u'|.$$

Оценка

$$\|\mathcal{F}u(\cdot)\|_{C^1([0,1],\mathbb{R}^N)} \leqslant C$$

справедлива как только

$$\|u(\cdot)\|_{C([0,1];\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1 = \mathrm{const} = |u''-u'|.$$

Эта оценка и теорема Арцела приводят к компактности образа $\mathcal{F}(\mathcal{W}) \subset C([0,1];\mathbb{R}^N)$.

Поэтому оператор $\mathcal{F}$ — (вполне) непрерывное отображение выпуклого замкнутого множества $\mathcal{W}$ банахова пространства $C([0,1];\mathbb{R}^N)$ в компактное его подмножество, и применима теорема Шаудера о неподвижной точке. Предложение доказано. □

Докажем теперь (2), используя выпуклость $\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))$, вместе с тем доказывая и оставшуюся часть теоремы. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Если $u(s)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, — C^2-решение уравнения геодезических* (3.10)*, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0)=u', \quad u(1)=u'', \tag{3.22}$$

то $u(s)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, целиком лежит в U.

Доказательство. Обозначим через $c(\psi,\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t})))$ *опорную функцию* выпуклого множества $\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))$:

$$c(\psi,\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))) = \max_{y\in\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))}\psi y.$$

Как известно, вектор $e\in T^*_{\tilde{x}(\hat{t})}M$ принадлежит $\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))$ в том и только том случае, если

$$\psi e \leqslant c(\psi,\mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))) \quad \forall\psi\in T^*_{\tilde{x}(\hat{t})}M.$$

Докажем сначала, что для любого $\psi\in T^*_{\tilde{x}(\hat{t})}M \approx \mathbb{R}^{d*}$

$$\psi f(\tilde{x}(\hat{t}),u(s)) \equiv \mathrm{const} \quad \text{на}\,[0,1]. \tag{3.23}$$

С этой целью обозначим $z(s)=\psi f(\tilde{x}(\hat{t}),u(s))$, $0\leqslant s\leqslant 1$. Тогда $z(\cdot)\in C^2[0,1]$ и

$$z(0)=\psi f(\tilde{x}(\hat{t}),u(0))=\psi f(\tilde{x}(\hat{t}),u(1))=z(1).$$

Поэтому, в силу теоремы Ролля существует точка $\hat{s}\in(0,1)$ такая, что

$$\dot{z}(\hat{s})=0.$$

Так как $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, — C^2-решение уравнения геодезических, то в силу (3.10), имеем

$$\ddot{z}(s) \equiv 0 \quad \text{на } [0,1],$$

а, следовательно,

$$\dot{z}(s) \equiv \mathrm{const} = 0. \tag{3.24}$$

Отсюда следует, что

$$z(s) \equiv \mathrm{const} \quad \text{на } [0,1].$$

Поскольку

$$f(\tilde{x}(\hat{t}), u') = f(\tilde{x}(\hat{t}), u'') \in \mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t})),$$

то имеем, например, что

$$\psi f(\tilde{x}(\hat{t}), u') \leqslant c(\psi, \mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))) \quad \forall \psi \in T^*_{\tilde{x}(\hat{t})}M.$$

Принимая во внимание (3.23), видим, что для всех s, $0 \leqslant s \leqslant 1$,

$$\psi f(\tilde{x}(\hat{t}), u(s)) = \psi f(\tilde{x}(\hat{t}), u') \leqslant c(\psi, \mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))) \quad \forall \psi \in T^*_{\tilde{x}(\hat{t})}M,$$

что доказывает включение $f(\tilde{x}(\hat{t}), u(s)) \in \mathfrak{F}(\tilde{x}(\hat{t}))$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, а значит, $u(s) \in U$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Предложение доказано. □

Теперь утверждение теоремы следует из (3.23), если положить $\psi = \tilde{\psi}(\hat{t})$. В самом деле, (3.23) означает в этом случае, что максимальное значение функции

$$u \mapsto \tilde{\psi}(\hat{t}) f(\tilde{x}(\hat{t}), u), \quad U \to \mathbb{R}$$

достигается, например, в точке $\hat{u} = u(\hat{s})$, $0 < \hat{s} < 1$, не совпадающей ни с одной из вершин многообразия с углами U, поскольку кривая $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, не может состоять только из вершин U (кривая $y(s) = f(\tilde{x}(\hat{t}), u(s))$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, — *нетривиальная* геодезическая, т.е. не сводится к точке). Значит, существует грань $\hat{U}$ многообразия с углами U положительной размерности такая, что $\hat{u} \in \hat{U}$ и

$$f_{*,\hat{u}}(\tilde{x}(\hat{t}), \cdot) Z_{\hat{u}} = 0 \quad \forall Z_{\hat{u}} \in T_{\hat{u}}U. \tag{3.25}$$

В частности, существует ребро $\Gamma \subset \hat{U}$ такое, что (3.25) выполняется для некоторого касательного вектора $Z_{\hat{u}}$ к (относительной) внутренности этого ребра. Теорема доказана. □

Заметим, что множество всех точек переключения имеет меру нуль. Мы не будем доказывать здесь это утверждение, а только отметим, что впервые утверждение такого рода было доказано Суссманом в [45] для аналитической линейной по управлению системы со скалярным управлением.

Таким образом, ничего не изменится, если переопределить экстремальное управление $\tilde{u}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, полагая его равным соответствующей точке $\hat{u}$ из теоремы 3.1 в каждой точке переключения. Обозначим через $\hat{u}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, это переопределенное экстремальное управление.

Функция

$$s_\Gamma(t) = \tilde{\psi}(t) f_{*,\hat{u}(t)}(\tilde{x}(t), \hat{u}(t)) Z_{\hat{u}(t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

называется *функцией переключения*, соответствующей ребру Γ (и экстремальному управлению $\hat{u}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$).

Воспользуемся теперь формулой сдвига (2.1) для дальнейшей характеризации точек переключения. Заметим, что определенная выше функция переключений только измерима, а потому нельзя говорить о ее нулях в общем случае, потому что значение измеримой функции в отдельной точке не имеет смысла.

Пусть u_0 — *произвольная* точка U. Определим новую функцию переключений $s^0_\Gamma(\cdot)$ (соответствующую ребру Γ многообразия с углами U) как

$$s^0_\Gamma(t) = \tilde{\psi}(t) f_{*,u_0}(\tilde{x}(t), \cdot) Z_{u_0}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ — все ребра многообразия с углами U (напомним, что в случае компактного U существует только конечное число его ребер и вершин). Запишем формулу сдвига

$$f_{*,u_0}(\tilde{x}(t), \cdot) Z_{u_0}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} a_j^i(\tilde{x}(t), u_0, \hat{u}(t)) f_{*,\hat{u}(t)}(\tilde{x}(t), \cdot) Z_{\hat{u}(t)}^{(j)}.$$

Умножая это соотношение на $\tilde{\psi}(t)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $s_{\Gamma_i}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1, \ldots, N$:

$$s_{\Gamma_i}^0(t) = \sum_{j=1}^{N} a_i^j(\tilde{x}(t), u_0, \hat{u}(t)) s_{\Gamma_j}(t). \tag{3.26}$$

Теперь можно использовать правило Крамера для решения системы (3.26), поскольку матрица

$$A(t) = \bigl(a_j^i(\tilde{x}(t), u_0, \hat{u}(t))\bigr)_{i,j=1}^{N}$$

невырождена. Обозначим через $\Delta(t)$ определитель этой матрицы, а через $\Delta_j(t)$ — определитель матрицы $A_j(t)$, полученной из матрицы $A(t)$ заменой ее j-того столбца на вектор

$$\begin{pmatrix} s_{\Gamma_1}^0(t) \\ \vdots \\ s_{\Gamma_N}^0(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с правилом Крамера,

$$s_{\Gamma_j}(t) = \frac{\Delta_j(t)}{\Delta(t)}, \quad j = 1, \ldots N, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.27}$$

Напомним, что в силу предположений § 2 матрица

$$A(x, u', u'') = \bigl(a_j^i(x, u', u'')\bigr)_{i,j=1}^{N}$$

есть M-матрица. Поэтому, используя явное представление ее обратной

$$A^{-1}(x, u', u'') = A(x, u'', u') = \left(\frac{b_j^i(x, u', u'')}{\det A(x, u', u'')}\right),$$

видим, что *алгебраическое дополнение* $b_j^i(x, u', u'')$ *любого элемента матрицы* $A(x, u', u'')$ *либо тождественно равно нулю, либо положительно.* Например, если $A(x, u', u'')$ — диагональна с положительными диагональными компонентами

$$\begin{gathered} A(x, u', u'') = \operatorname{diag}\{a_1^1(a, u', u''), \ldots, a_N^N(x, u', u'')\}, \\ a_i^i(x, u', u'') > 0, \quad i = 1, \ldots, N, \end{gathered} \tag{3.28}$$

то она — M-матрица.

Покажем, что можно говорить о нулях измеримой функции $s_\Gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Ограничим здесь рассмотрение только *диагональным случаем* (3.28). Функция $\dfrac{\Delta_j(\cdot)}{\Delta(\cdot)}$ обращается в нуль в том и только том случае, если обращается в нуль функция $\Delta_j(t)$. Разложим определитель $\Delta_j(t)$ по j-тому столбцу:

$$\Delta_j(t) = \sum_{i=1}^{N} b_j^i(t) c_{\Gamma_i}^0(t) = a_j^j(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), u^0) s_{\Gamma_j}^0(t). \tag{3.29}$$

Функции $a_j^j(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), u^0)$ (хотя они только измеримы) положительны, а потому $\Delta_j(t) = 0$ в том и только том случае, если обращается в нуль *абсолютно непрерывная* фукция $s_{\Gamma_j}^0(t)$.

Суммируем все сказанное в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть семейство векторных полей, входящих в систему* (1)*, удовлетворяет* (*глобальной*) *формуле сдвига и имеет место диагональный случай* (3.28)*. Тогда множество всех точек переключения произвольного экстремального управления* $\tilde{u}(t)$*,* $0 \leqslant t \leqslant T$*, содержится в множестве нулей функций*

$$\frac{\Delta_j(t)}{\Delta(t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad j = 1, \ldots, N,$$

т.е. в множестве

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{Z}_j,$$

где

$$\mathcal{Z}_j = \left\{ t \in [0, T] | \frac{\Delta_j(t)}{\Delta(t)} = 0 \right\}.$$

На самом деле, обращение в нуль $\Delta_j(t)$ означает, что

$$s^0_{\Gamma_i}(t) = 0 \tag{3.30}$$

при $i = j$.

В заключение отметим, что при выполнении дополнительных условий на коммутаторы векторных полей, входящих в систему (1), можно показать, что все множества Z_j — конечные множества. Это делается в духе предыдущих работ автора (см., например, [13, 14] и [16]. Автор намерен рассмотреть эти условия с использованием формулы сдвига в следующей публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.–Л.: ОГИЗ, 1948. — 387 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976. — 351 с.
3. *Берже М.* Геометрия. I, II. — М.: Мир, 1984. — 559 с., 366 с.
4. *Вахрамеев С. А.* Гладкие управляемые системы постоянного ранга и линеаризуемые системы// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Новейшие достиж./ ВИНИТИ. — 1989. — *35*. — С. 135–178.
5. *Вахрамеев С. А.* Теория Пале—Смейла для многообразий с углами. I. Случай конечной коразмерности// Успехи мат. наук. — 1990. — *45*, № 1. — С. 141–142.
6. *Вахрамеев С. А.* Гильбертовы многообразия с углами конечной коразмерности и теория оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия/ ВИНИТИ. — 1990. — *28*. — С. 96–171.
7. *Вахрамеев С. А.* Теория Морса и теория Люстерника—Шнирельмана в геометрической теории управления// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Новейшие достиж./ ВИНИТИ. — 1991. — *39*. — С. 41–117.
8. *Вахрамеев С. А.* Теория Люстерника—Шнирельмана для трансверсально-выпкулых подмножеств гильбертовых многообразий и ее приложения к теории оптимального управления// Докл. АН СССР. — 1991. — *319*, № 1. — С. 18–21.
9. *Вахрамеев С. А.* Теория Морса для одного класса задач оптимального управления// Докл. АН СССР. — 1992. — *326*, № 3. — С. 404–408.
10. *Вахрамеев С. А.* Теория критических точек для гладких функций на гильбертовом многобразии с особенностями и ее приложение к некоторым задачам оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Анализ-1/ ВИНИТИ, 1993. (в печати); пер на англ. яз.: *J. Soviet Math.* — 1993. — *67*, № 1. — С. 2713–2811.
11. *Вахрамеев С. А.* Геометрические и топологические методы в теории оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Анализ-5/ ВИНИТИ, 1993 (в печати); пер. на англ. яз.: *J. Math. Sci.* — 1995. — *76*, № 5. — С. 2555–2719.
12. *Вахрамеев С. А.* О трансверсальной выпуклости множеств достижимости некоторых классов гладких управляемых систем постоянного ранга// Докл. АН СССР. — 1994. — *338*, № 1. — С. 7–9.
13. *Вахрамеев С. А.* Теорема о конечности числа переключений для нелинейных гладких управляемых систем// Успехи мат. наук. — 1994. — *49*, № 6. — С. 197–198.

14. *Вахрамеев С. А.* Теорема релейности с конечным числом переключений для гладких управляемых систем// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-4/ ВИНИТИ, 1995 (в печати); пер. на англ. яз. *J. Math. Sci.*. — 1997. — *85*, № 3 — С. 2000–2016.
15. *Вахрамеев С. А.* Теорема существования для нелинейной задачи быстродействия в классе релейных управлений с конечным числом переключений// Успехи мат. наук. — 1996. — *51*, № 2. — С. 151–152.
16. *Вахрамеев С. А.* Теоремы релейности и смежные вопросы// Труды Мат. ин-та РАН — - 1998. — *220*. — С. 49–112.
17. *Вахрамеев С. А.* Леммы Морса для гладких функций на многообразиях с углами// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-8/ ВИНИТИ, 1998 (в печати): пер. на англ. яз.: *J. Math. Sci.*. — 2001. — *100*, № 4. — С. 2428–2445.
18. *Вахрамеев С. А.* Теорема существования для нелинейной задачи быстродействия// Дифференц. уравнения. — 1999. — *35*, № 4. — С. 565–567.
19. *Вахрамеев С. А.* Замечание о выпуклости в гладких управляемых системах// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Оптимальное управление-1/ ВИНИТИ. — 1999. — *60*. — С. 42–73; пер. на англ. яз.: *J. Math. Sci.* (в печати).
20. *Вахрамеев С. А.* Замечание о точках переключения в гладких нелинейных системах// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-10/ ВИНИТИ. — 2000 (в печати); пер на англ. яз.: *J. Math. Sci.*. — 2002. — *110*, № 2. — С. 2423–2429.
21. *Вахрамеев С. А.* О существовании гладкой замкнутой геодезической на одном многообразии с негладким краем// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-10/ ВИНИТИ, 2000 (в печати); пер. на англ. яз.: *J. Math. Sci.* — 2002. — *110*, № 2. — С. 2430–2437.
22. *Вахрамеев С. А.* Об одной связности, возникающей в некотором классе нелинейных гладких управляемых систем// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-11/ ВИНИТИ, 2001 (в печати); пер. на англ. яз.: *J. Math. Sci* (в печати).
23. *Вахрамеев С. А.* О геометрии векторграмм для одного класса нелинейных гладких управляемых систем// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы/ ВИНИТИ, 2992 (в печати); пер. на англ. яз.: *J. Mat. Sci.* (в печати).
24. *Вахрамеев С. А., Топунов М. В.* О вариационной характеризации критических точек// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Динамические системы-11/ ВИНИТИ, 2001 (в печати); пер. на англ. яз.: *J. Math. Sci* (в печати).
25. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. — 230 с.
26. *Гамкрелидзе Р. В., Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Новейшие достижения/ ВИНИТИ. — 1989. — *35*. — С. 3–107.
27. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: теория и приложения. — М.: Наука, 1979. — 759 с.
28. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Бобылев Н. А.* О выпуклости образов выпуклых множеств при гладких отображениях// Докл. РАН — 2002. — *385*, № 3. — С. 302–304.
29. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
30. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
31. *Лейхтвес К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 335 с.
32. *Милнор Дж.* Теория Морса. — М.: Мир, 1965. — 115 с.
33. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
34. *Топунов М. В.* Об одной нелинейной задаче быстродействия// Автомат. и телемех. — 2002. — *7*. — С. 24–32.
35. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.
36. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Риманова геометрия// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Геометрия-8/ ВИНИТИ. — 2002. — *76*. — С. 5–262.
37. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. — М.: Мир, 1987. — 302 с.
38. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. — Киев: Вища школа, 1978. — 190 с.
39. *Agrachev A. A.. Vakharameev S. A.* Morse theory and optimal control problems// Nonlinear Synth.: Proc. IIASA Workshop, Sopron, June, 1989. — Boston: Birkhäuser, 1991. — C. 1–11.

40. *Cel J.* A generalization of Titze's theorem on local convexity for convex sets// Bull. Soc. roy. sci. Liège. — 1998. — *67*, № 1. — С. 31–33.
41. *Lu Yung-Chen* Singularity theory. — New York: Springer, 1976. — 199 с.
42. *Nirenberg L.* Topics in nonlinear functional analysis. — New York, 1983.
43. *Shida M.* Fundamental theorems of Morse theory for optimization on manifolds with corners// J. Optimiz. Theory and Appl. — 2000. — *106*, № 3. — С. 683–688.
44. *Sussmann H. J.* A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings// SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1979. — *17*, № 5. — С. 629–651.
45. *Sussmann H. J.* A weak regularity theorem for real analytic optimal control problems// Rev. mat. iberoam. — 1986. — *2*. — С. 307–317.

С. А. Вахрамеев
Всероссийский институт научной и технической информации
E-mail: `math@viniti.ru`

Современная математика и ее приложения. Том 4 (2003). С. 140–161

УДК 517.925.52

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ И ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2003 г. **С. А. АГАФОНОВ**

Аннотация. Исследуется устойчивость механических систем, на которые действуют диссипативная, гироскопическая и неконсервативная позиционные силы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Исследуется устойчивость механических систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил (НПС). В дальнейшем механические системы, на которые действуют все перечисленные выше силы, включая НПС, назовем *системами общего вида*. Отметим, что впервые некоторые общие результаты об устойчивости систем общего вида получены в работах [1, 2, 4, 11, 18, 22, 26]. С помощью аппарата функций Ляпунова анализируется устойчивость линейных нестационарных систем общего вида, а также влияние диссипации в циркуляционных системах. Устойчивость последних изучалась в [6]. Всем этим вопросам посвящена глава 1. В главе 2 рассматриваются приложения теоретических результатаов к различным конкретным механическим системам. К ним относятся спутник-гиростат и роторные системы. Для спутника-гиростата решается задача стабилизации относительного равновесия и стационарного движения. Автор здесь ограничился ссылками, непосредственно связанными с рассматриваемыми здесь задачами. В задачах устойчивости роторных систем, на которые действуют диссипативные силы, имеющие различную природу, в соответствующих уравнениях движения появляются члены, характеризующие НПС. Используя математический аппарат, развитый в [3,5], мы исследуем зволюцию собственных частот колебаний спутника-гиростата, вызванную переменной угловой скоростью вращения ротора.

Работа рассчитана на научных работников, которые занимаются прикладными задачами и решают задачу устойчивости. Результаты об устойчивости систем общего вида позволяют провести качественный анализ устойчивости конкретной системы, что особенно важно на этапе проектирования.

Работа поддержана NATO Science Fellowship Program.

Автор надеется, что результаты, изложенные в работе, дадут стимул для дальнейших исследований в области устойчивости систем общего вида.

Глава 1

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

В этой главе рассмотрены нестационарные линейные системы общего вида с ляпуновскими матрицами [6]. С помощью функции Ляпунова исследуется устойчивость этих систем. Анализируется влияние диссипативных сил на устойчивость циркуляционной системы. Получена оценка снизу на величину линейных диссипативных сил, при которой устойчивая циркуляционная система становится асимптотически устойчивой.

В работах [16–18] развивается подход, основанный на преобразованиях, исключающих неконсервативные позиционные силы с последующим применением теорем Кельвина—Четаева.

1. Анализ устойчивости линейных нестационарных систем

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + hG(t)\dot{x} + K(t)x + F(t)x = 0, \tag{1.1}$$

в которой все матрицы являются матрицами Ляпунова.

В [1, 2, 26] была рассмотрена стационарная система и было установлено, что в анализе устойчивости существенную роль играет положительная определенность матрицы $S = G^TF + F^TG + KG - GK$. Применительно к нестационарной системе (1.1) будем предполагать, что квадратичная форма $x^TS(t)x$ удовлетворяет обобщенному критерию Сильвестра, т.е. существует постоянная $\mu > 0$ такая, что $x^TS(t)x \geqslant \mu x^Tx$. Предположим также, что существует постоянная $b > 0$ такая, что $\dot{x}^TB(t)\dot{x} \geqslant b\dot{x}^T\dot{x}$. Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} V = (\dot{x} - h^{-1}P^Tx)^T(\dot{x} - h^{-1}P^Tx) + x^T(G^TG - h^{-2}PP^T)x, \\ P = (K - F)G^{-1} + G. \end{gathered} \tag{1.2}$$

(В (1.2) и далее зависимость матриц от t опущена.)

Существуют постоянные $g_0 > 0$ и $c_0 > 0$ такие, что имеют место неравенства

$$g_0x^Tx \leqslant x^TG^TGx, \qquad x^TPP^Tx \leqslant c_0x^Tx. \tag{1.3}$$

Принимая во внимание (1.3), получим

$$x^T(G^TG - h^{-2}PP^T)x \geqslant (g_0 - h^{-2}c_0)x^Tx,$$

а условием положительной определенности функции (1.2) является неравенство

$$h > \sqrt{\frac{c_0}{g_0}}. \tag{1.4}$$

Производная $\dot{V}$ в силу системы (1.1) имеет вид

$$-\dot{V} = \dot{x}(2B + h^{-1}(P + P^T))\dot{x} + x^T(h^{-1}S - (\dot{G}^TG + G^T\dot{G}))x - 2h^{-1}x^T(PB - \dot{P})\dot{x}. \tag{1.5}$$

Так как матрица G является матрицей Ляпунова, то G и $\dot{G}$ ограничены при $t \geqslant t_0$: $\sup\|G(t)\| < \infty$ и $\sup\|\dot{G}(t)\| < \infty$. Отсюда следует, что существует постоянная $g_0 \geqslant 0$ такая, что имеет место неравенство

$$x^T(\dot{G}^TG + G^T\dot{G})x \leqslant gx^Tx. \tag{1.6}$$

Кроме того, существует постоянная $p_0 \geqslant 0$ такая, что

$$\dot{x}^T(P + P^T)\dot{x} \geqslant -p\dot{x}^T\dot{x}. \tag{1.7}$$

Принимая во внимание неравенства (1.6) и (1.7), из (1.5) получим

$$-\dot{V} \geqslant (2b - h^{-1}p)\dot{x}^T\dot{x} + (h^{-1}\mu - g)x^Tx - 2h^{-1}x^T(PB - \dot{P})\dot{x}. \tag{1.8}$$

Необходимым условием отрицательной определенности производной $\dot V$ является выполнение неравенств

$$2b - h^{-1}p > 0 \tag{1.9}$$

и

$$h^{-1}\mu - g > 0. \tag{1.10}$$

Предполагая, что выполнены неравенства (1.9) и (1.10), правую часть неравенства (1.8) представим в виде

$$\begin{gathered}(2b - h^{-1}p)\dot x^T\dot x + (h^{-1}\mu - g)x^Tx - 2h^{-1}x^T(PB - \dot P)\dot x = \\ = \left[(2b - h^{-1}p)^{1/2}\dot x + \frac{1}{2}(2b - h^{-1}p)^{-1/2}Q_3^Tx\right]^T \times \\ \times \left[(2b - h^{-1}p)^{1/2}\dot x + \frac{1}{2}(2b - h^{-1}p)^{-1/2}Q_3^Tx\right] + \\ + x^T\big[(h^{-1}\mu - g)E - h^{-2}(2b - h^{-1}p)^{-1}(PB - \dot P)(BP^T - \dot P^T)\big]x,\end{gathered} \tag{1.11}$$

где $Q_3 = -2h^{-1}(PB - \dot P)$.

Далее, поскольку матрицы P и B являются матрицами Ляпунова, то существует постоянная $q > 0$ такая, что справедливо неравенство

$$x^T(PB - \dot P)(BP^T - \dot P^T)x \leqslant qx^Tx. \tag{1.12}$$

Используя неравенство (1.12), из (1.11) получим условие отрицательной определенности производной $\dot V$

$$(2b - h^{-1}p)(h^{-1}\mu - g) - h^{-2}q > 0. \tag{1.13}$$

Заметим, что из неравенств (1.13) и (1.9) следует (1.10). Из неравенства (1.13) следует, что параметр $h \in (h_1, h_2)$, где h_1, h_2 — корни уравнения

$$2bgh^2 - (2b\mu + pg)h + p\mu + q = 0,$$

причем, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$(2b\mu - pg)^2 > 8bgq.$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть в системе* (1.1) *матрицы* $B(t)$, $G(t)$, $K(t)$ *и* $F(t)$ *являются матрицами Ляпунова и выполнены следующие условия*:

1) *матрица* $S(t) = G^TF + F^TG + KG - GK$ *удовлетворяет обобщенному критерию Сильвестра*;
2) *параметр* $h \in \left(\max\left(h_1, \sqrt{\frac{c_0}{g_0}}\right), h_2\right)$, *где* h_1 *и* h_2 — *корни уравнения*
$$2bgh^2 - (2b\mu + pg)h + p\mu + q = 0;$$
3) *выполнены неравенства*
$$2b\mu > pg, \qquad (2b\mu - pg)^2 > 8bgq.$$

Тогда система (1.1) *асимптотически устойчива.*

Следствие. *Пусть гироскопическая матрица* G *не зависит от времени* $t : G = \mathrm{const}$. *Тогда постоянная* $g = 0$ *и условие асимптотической устойчивости системы* (1.1) *значительно упрощается и имеет вид*

$$h > \max\left(\sqrt{\frac{c_0}{g_0}}\,\frac{p\mu + q}{2b\mu}\right). \tag{1.14}$$

2. Устойчивость системы при отсутствии потенциальных сил

Рассмотрим систему общего вида без действия потенциальных сил и введем скалярный параметр $b > 0$ при матрице диссипативных сил B:

$$\ddot{x} + bB\dot{x} + G\dot{x} + Fx = X(x\dot{x}). \tag{2.1}$$

Предположим, что $\det G \neq 0$, $\det F \neq 0$.

Для анализа устойчивости системы (2.1) рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} V = b^{-1}(\dot{x} + Gx)^T B^{-1}(\dot{x} + Gx) + V_1, \\ V_1 = (b^{1/2}B^{1/2}x + b^{-1/2}B^{-1/2}\dot{x})^T(b^{1/2}B^{1/2}x + b^{-1/2}B^{-1/2}\dot{x}) + b^{-1}\dot{x}^T(E - B^{-1})\dot{x}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Условием положительной определенности функции (2.2) является неравенство $b_0 > 1$ (b_0 — наименьшее собственное значение матрицы B).

Производная $\dot{V}$ в силу системы (2.1) имеет вид

$$\begin{gathered} -\dot{V} = 2\dot{x}^T B\dot{x} + b^{-1}x^T S_1 x - 2b^{-1}x^T F(E + B^{-1})\dot{x} - \\ -2b^{-1}(\dot{x} + Gx)^T B^{-1}X - 2b^{-1}\dot{x}^T X - 2x^T X, \\ S_1 = G^T B^{-1}F + F^T B^{-1}G. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Квадратичную часть функции (2.3) представим в виде

$$\begin{gathered} 2\dot{x}^T B\dot{x} + b^{-1}x^T S_1 x - 2b^{-1}x^T F(E + B^{-1})\dot{x} = \\ = \left(\sqrt{2}B^{1/2}\dot{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}B^{-1/2}Q_2^T x\right)^T \left(\sqrt{2}B^{1/2}\dot{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}B^{-1/2}Q_2^T x\right) + \\ +x^T\left(b^{-1}S_1 - \frac{1}{8}Q_2 B^{-1}Q_2^T\right)x, \qquad Q_2 = -2b^{-1}F(E + B^{-1}). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Предположим, что матрица S_1 положительно определена, и обозначим через $\gamma > 0$ ее минимальное собственное значение, а через $\delta > 0$ — максимальное собственное значение матрицы $F^T F$.

Из (2.4) получим условие отрицательной определенности производной $\dot{V}$:

$$b > \frac{(1 + b_0)^2\delta}{2\gamma b_0^3}.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *матрица* $S_1 = G^T B^{-1}F + F^T B^{-1}G$ *положительно определена и* $\det F \neq 0$, $\det G \neq 0$;
2) $b > \dfrac{(1 + b_0)^2\delta}{2\gamma b_0^3}$, $b_0 > 1$, *где* b_0 *и* γ — *минимальные собственные значения матриц* B *и* S_1, *соответственно, а* $\delta > 0$ — *максимальное собственное значение матрицы* FF^T.

Тогда система (2.1) *асимптотически устойчива.*

Теорема 2.1 обобщает и развивает результаты [1, 2].

Отметим, что предположение положительной определенности матрицы S_1 существенно. Рассмотрим пример системы с $n = 2$. Матрицы G, F и B равны

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{Vmatrix}, \qquad F = \begin{Vmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \operatorname{diag}(b_1, b_2).$$

Матрица $S_1 = G^T BF + F^T BG = \operatorname{diag}(2gfb_2^{-1}, 2gfb_1^{-1})$ является положительно определенной при $gf > 0$. С другой стороны, коэффициент при λ в характеристическом уравнении равен $2gf$ и необходимо должен быть положительным. Таким образом, условие положительной определенности матрицы S_1 отбросить нельзя. Если матрица S_1 не является положительно определенной, то система (2.1) может быть неустойчивой.

Теорема 2.2. *Если матрица*

$$S_2 = G^T F + F^T G + b(BF - FB)$$

отрицательно определена, то система (2.1) *неустойчива.*

Для доказательства рассмотрим функцию

$$V = x^T(bB - G)\dot{x} + \frac{1}{2}x^T[b^2B^2 - G^2 - b(GB - BG)]x. \tag{2.5}$$

Производная $\dot{V}$ в силу системы (2.1) имеет вид

$$\dot{V} = b\dot{x}^T B\dot{x} - \frac{1}{2}x^T S_2 x + x^T(bB - G)X,$$

при выполнении условия теоремы 2.2 является положительно определенной функцией. Утверждение теоремы следует из первой теоремы Ляпунова о неустойчмвости.

Заметим, что $S_2 = S_1$ при $B = E$.

3. Эффект диссипации в циркуляционных системах

Рассмотрим систему, на которую действуют потенциальные и неконсервативные позиционные силы (циркуляционную систему):

$$\ddot{x} + Kx + Fx = 0. \tag{3.1}$$

Предположим, без ограничения общности, что $K = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и, кроме того, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и среди λ_i нет равных: $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$. В [7] с помощью построения функции Ляпунова в виде

$$V = \dot{x}^T(E + C)\dot{x} + x^T D x \tag{3.2}$$

получено условие устойчивости системы (3.1)

$$\|F\| < \frac{1}{2}[(\lambda_1 + \lambda_n)^2 + 2\lambda_n s]^{1/2} - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_n). \tag{3.3}$$

В $s = \min|\lambda_i - \lambda_j|$, $i \neq j$, $\|F\| = \max_i \sum |f_{ij}|$. Симметричная матрица C с нулевыми элементами на главной диагонали удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова, которое выводим из условия, что производная $\dot{V} \equiv 0$. Из анализа этого уравнения получим неравенство, которому удовлетворяет матрица C:

$$\|C\| < \frac{2\|F\|}{s - 2\|F\|}. \tag{3.4}$$

Условием положительной определенности матрицы $E + C$ является неравенство

$$\|F\| < \frac{s}{4}, \tag{3.5}$$

а условием положительной определенности матрицы D является неравенство (3.3). Можно показать [7], что из неравенства (3.3) следует (3.5).

Наряду с системой (3.1) рассмотрим циркуляционную систему, на которую действуют диссипативные силы с полной диссипацией

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Kx + Fx = 0, \tag{3.6}$$

где $B = B^T$ — положительно определенная матрица. Если $B = bE$, $b > 0$ (скалярная матрица), то устойчивая циркуляционная система (3.1) становится асимптотически устойчивой.

Если $B \neq bE$, то система (3.6) может быть неустойчивой. Иными словами, устойчивость циркуляционной системы разрушается при действии диссипативных сил.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + \lambda_1 x_1 + f x_2 = 0,\\ &\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + \lambda_2 x_2 - f x_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В (3.7) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $b_1 > b_2 > 0$, $f > 0$. Если $b_1 = b_2 = 0$, то система (3.7) устойчива при выполнении неравенства $\lambda_1 - \lambda_2 > 2f$. Легко показать, что при $b_1 > 0$, $b_2 = 0$ система (3.7) неустойчива. В силу непрерывности неустойчивость сохранится при достаточно малом $b_2 \sim \varepsilon$, $0 <$

$\varepsilon \ll 1$. Возникает задача получения нижней оценки величины диссипативных сил. Для решения этой задачи рассмотрим функцию (3.2). Производная $\dot V$ в силу системы (3.6) имеет вид

$$\dot V = -x^T(2B + CB + BC)\dot x. \tag{3.8}$$

Используя неравенство (3.4), получим

$$\|CB + BC\| \leqslant 2\|B\|\|C\| < \frac{4\|B\|\|F\|}{s - 2\|F\|}. \tag{3.9}$$

Тогда условие, что производная $\dot V \leqslant 0$, с учетом неравенства (3.9), будет иметь вид

$$\mu > \frac{2\|F\|}{s - 2\|F\|}, \qquad \mu = \frac{b_0}{b} < 1, \tag{3.10}$$

где $b_0 > 0$, $b > 0$ — соответственно, минимальные и максимальные собственные значения матрицы B.

Неравенство (3.10) можно рассматривать как ограничение снизу на величину диссипативных сил, при которой устойчивая циркуляционная система (3.1) становится асимптотически устойчивой при присоединении к ней диссипативных сил.

Заметим в заключение, что при $b_0 = b$ $(B = bBE)$ неравенство (3.10) совпадает с (3.5), которое является достаточным условием положительной определенности матрицы $E + C$.

4. Влияние нелинейных диссипативных сил на устойчивую циркуляционную систему

Рассмотрим циркуляционную систему с двумя степенями свободы под действием нелинейных диссипативных сил

$$\begin{aligned} \ddot x_1 + \lambda_1 x_1 + f x_2 &= -\frac{\partial R}{\partial \dot x_1}, \\ \ddot x_2 + \lambda_2 x_2 - f x_1 &= -\frac{\partial R}{\partial \dot x_2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Диссипативная функция Рэлея R в (4.1) имеет вид

$$R = \frac{1}{2} b(x_1^2 \dot x_1^2 + x_2^2 \dot x_2^2) + \frac{1}{4} c(\dot x_1^4 + \dot x_2^4), \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Для удобства введем безразмерное время $\tau = (\lambda_1 + \lambda_2)^{1/2} t$ (неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ — необходимое условие линейной циркуляционной системы) и параметры $\mu = \dfrac{f}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\varkappa = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\beta = \dfrac{b}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{1/2}}$, $\gamma = (\lambda_1 + \lambda_2)^{1/2} c$. При подстановке система (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} x_1'' + \varkappa x_1 + \mu x_2 + \beta x_1^2 x_1' + \gamma {x'}_1^3 &= 0, \\ x_2'' + (1 - \varkappa) x_2 - \mu x_1 + \beta x_2^2 x_2' + \gamma {x'}_2^3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Штрих в (4.2) означает производную по τ.

Линейная система (4.1) $(\beta = \gamma = 0)$ устойчива при $\delta < \dfrac{1}{4}$, $\varkappa(1 - \varkappa) + \mu^2$. Мы изучаем случай, когда характеристическое уравнение при $\delta < \dfrac{1}{4}$ имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, $i^2 = 1$, а также критическмй случай.

После линейного невырожденного преобразования имеем

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_1 + a_0 u_2 + a_0 v_2),\\
x_2 &= \frac{1}{2}(a_0 u_1 + a_0 v_1 + u_2 + v_2),\\
x_1' &= \frac{1}{2} i(\omega_1 u_1 - \omega_1 v_1 + a_0\omega_2 u_2 - a_0\omega_2 v_2),\\
x_2' &= \frac{1}{2} i(a_0\omega_1 u_1 - a_0\omega_1 v_1 + \omega_2 u_2 - \omega_2 v_2),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - \delta}$, $a_0 = \dfrac{1 - \varkappa - \omega_2^2}{\mu}$, $v_1 = \bar{u}_1$, $v_2 = \bar{u}_2$ (черта здесь и далее означает комплексное сопряжение). После линейного преобразования (4.3) нелинейная система (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
u_1' &= i\omega_1 u_1 + U_1(u, v),\\
u_2' &= i\omega_2 u_2 + U_2(u, v), \quad u = (u_1, u_2), \quad v = \bar{u},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где U_1, U_2 — множества членов третьей степени по u, v. Уравнения для комплексно-сопряженных переменных v_1 и v_2 мы здесь не приводим.

Пусть $\omega_1 \neq 3\omega_2$. Тогда с помощью полиномиального преобразования

$$u_1 = y_1 + Y_1(y, \bar{y}), \qquad u_2 = y_2 + Y_2(y, \bar{y})$$

(Y_1, Y_2 — однородные формы третьего порядка) систему (4.4) можно нормализовать до членов третьего порядка включительно.

Преобразованное множество уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
y_1' &= i\omega_1 y_1 + a y_1^2 \bar{y}_1 + b y_1 y_2 \bar{y}_2,\\
y_2' &= i\omega_2 y_2 + c y_1 y_2 \bar{y}_1 + d y_2^2 \bar{y}_2,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где $b = c = 0$, $a = -\dfrac{1 + a_0^2}{8}(\beta + 3\omega_1^2) < 0$, $d = -\dfrac{1 + a_0^2}{8}(\beta + 3\omega_2^2) < 0$. Из критерия устойчивости Каменкова [13] следует, что устойчивая циркуляционная система становится асимптотически устойчивой под действием нелинейных диссипативных сил.

Рассмотрим внутренний резонанс четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ $\left(\delta = \dfrac{9}{100}\right)$. В этом случае нормальная форма с точностью до третьего порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
y_1' &= i\omega_1 y_1 + a y_1^2 \bar{y}_1 + b y_1 y_2 \bar{y}_2 + r_1 y_2^3,\\
y_2' &= i\omega_2 y_2 + c y_1 y_2 \bar{y}_1 + d y_2^2 \bar{y}_2 + r_2 y_1 \bar{y}_2^2,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $r_1 = \dfrac{a_0}{24}(\beta - \gamma\omega_2^2)$, $r_2 = \dfrac{a_0}{8}(9\gamma\omega_2^2 - \beta)$.

Используя достаточное условие асимптотической устойчивости [23], можно показать, что система (4.6) асимптотически устойчива. Эти утверждения справедливы не только для модельных систем (4.5) и (4.6), но и для первоначальной нелинейной системы [24]. Главный результат: устойчивая линейная циркуляционная система асимптотически устойчива под действием нелинейных диссипативных сил с диссипативной функцией Рэлея R.

Глава 2

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ СТАБИЛИЗАЦИИ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА И К РОТОРНЫМ СИСТЕМАМ

Теоретические положения, изложенные в главе 1, применяются здесь для решения задачи стабилизации спутника-гиростата под действием внешних моментов. Решается также задача стабилизации относительного равновесия спутника-гиростата, на который действуют постоянные моменты [28].

Устойчивость положений равновесия и стационарных движений спутника-гиростата изучалась в [21, 22, 30, 31]. Анализ устойчивости проводился с помощью функции Ляпунова в виде обобщенного интеграла энергии. При действии постоянных моментов этот интеграл не существует. В [32] найдены все положения относительного равновесия спутника-гиростата и проведен в первом приближении анализ их устойчивости. С помощью теоремы, доказанной в [4], в § 5 решается задача стабилизации одного из положений равновесия спутника-гиростата. В §§ 8, 9 с помощью подхода, развитого в [3, 5, 25], исследуется эволюция собственных частот спутника-гиростата, а также ротора, вращающегося с переменной угловой скоростью.

5. Стабилизация стационарного движения спутника-гиростата с помощью внешних моментов

Рассматривается движение динамически симметричного спутника-гиростата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$. Два главных центральных момента инерции равны друг другу $A = B$, момент инерции относительно оси симметрии равен C. Вдоль этой оси расположен динамически симметричный ротор. За обобщенные координаты удобно принять углы Эйлера θ, φ и ψ, причем, при $\theta = 0$ ось динамической симметрии спутника направлена вдоль радиус-вектора орбиты центра масс [9]. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\begin{gathered}L = \frac{1}{2}A(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2 - \omega_0^2\cos^2\psi\sin^2\theta + 2\dot\psi\omega_0\cos\psi\sin\theta\cos\theta + 2\omega_0\dot\theta\sin\psi) +\\ + \frac{1}{2}C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi - \omega_0\cos\psi\sin\theta)^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2(C - A)\cos^2\theta +\\ + \frac{1}{2}J(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi_0 - \omega_0\cos\psi\sin\theta)^2. \qquad (5.1)\end{gathered}$$

В (5.1) J — момент инерции ротора относительно оси симметрии, $\dot\varphi_0$ — его угловая скорость. После исключения циклических координат φ и φ_0 уравнения движения гиростата приводятся к виду

$$\begin{gathered}A(\ddot\theta + \omega_0\cos\psi\dot\psi - \dot\psi^2\sin\theta\cos\theta +\\ + \omega_0^2\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta - \dot\psi\omega_0\cos\psi\cos 2\theta) +\\ + (C\Omega - J\Omega_0)(\dot\psi\sin\theta + \omega_0\cos\psi\cos\theta) - 3\omega_0^2(C - A)\cos\theta\sin\theta = M_\theta,\\ A(\sin^2\theta\ddot\psi + \sin 2\theta\dot\theta\dot\psi + \omega_0\cos\psi\cos 2\theta\dot\theta -\\ - \omega_0^2\cos\psi\sin\psi\sin^2\theta - \omega_0\cos\psi\dot\theta) -\\ - (C\Omega - J\Omega_0)(\dot\theta\sin\theta + \omega_0\sin\psi\sin\theta) = M_\psi.\end{gathered} \qquad (5.2)$$

Здесь $C\Omega$, $-J\Omega_0$ — циклические постоянные, отвечающие циклическим координатам φ и φ_0; M_θ и M_ψ — стабилизирующие внешние моменты, формирующиеся по известным значениям компонет p и q угловой скорости спутника, а также по значениям углов Эйлера, полученным из решения задачи Дарбу [15]. Эти моменты имеют вид

$$\begin{aligned}M_\theta &= -b_0(p\cos\varphi - q\sin\varphi) - J\Omega_0\omega_0\cos\psi\cos\theta =\\ &= -b_0(\dot\theta + \omega_0\sin\psi) - J\Omega_0\omega_0\cos\psi\cos\theta;\\ M_\psi &= -b_0(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + J\Omega_0\omega_0\sin\psi\sin\theta =\\ &= -b_0(\dot\psi\sin\theta + \omega_0\cos\psi\cos\theta) + J\Omega_0\omega_0\sin\psi\sin\theta.\end{aligned} \qquad (5.3)$$

Уравнения движения (5.2) с учетом выражений для внешних моментов (5.3) имеют решение

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot\theta = 0, \quad \psi = \pi, \quad \dot\psi = 0. \tag{5.4}$$

Оно отвечает стационарному движению, которое называется цилиндрической прецессией [9]. В настоящей работе решается задача о стабилизации (до асимптотической устойчивости) стационарного движения (5.4) с нахождением оценки области притяжения. С этой целью применим теорему об устойчивости систем общего вида [4, 26]. Эта система имеет вид

$$\ddot x + B\dot x + hG\dot x + Kx + Fx = X(x, \dot x), \tag{5.5}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$; $B = B^T$, $G^T = -G$, $K^T = K$, $F^T = -F$ — постоянные матрицы, характеризующие диссипативные, гироскопические, потенциальные и неконсервативные позиционные силы соответственно; $h > 0$ — скалярный параметр; $X(x, \dot x)$ — совокупность нелинейных членов не ниже второго порядка относительно x, $\dot x$, удовлетворяющая неравенству

$$\|X(x, \dot x)\| \leqslant a_0(x^T x + \dot x^T \dot x). \tag{5.6}$$

В (5.6), $a_0 > 0$, а $\|X(x, \dot x)\| = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}$. Будем предполагать, что диссипация полная, т.е. $\dot x^T B \dot x > 0$ при $\dot x \neq 0$ и $\det G \neq 0$. Предположим также, что матрица $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ положительно определена.

Анализ устойчивости проводится с помощью функции

$$V = (\dot x - h^{-1}P^T x)^T(\dot x - h^{-1}P^T x) + x^T(G^T G - h^{-2}PP^T)x, \tag{5.7}$$

где

$$P = (K - F)G^{-1} + G.$$

Условием положительной определенности функции (5.7) является неравенство

$$h > \sqrt{\frac{c_0}{g_0}},$$

где c_0 и g_0 — соответственно, максимальное и минимальное собственные значения матриц PP^T и $G^T G$. Имеет место следующая теорема [26].

Теорема 5.1. *Если матрица $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ положительно определена, то при $h > h_0$ система* (5.5) *асимптотически устойчива и, кроме того, область $V < \frac{1}{4}\gamma^2$ принадлежит области притяжения равновесия $x = 0$, $\dot x = 0$.*

В формулировке теоремы h_0 и γ вычисляются по формулам

$$h_0 = \max\left(\sqrt{\frac{c_0}{g_0}}, \frac{c_1\mu + b_0^2 c_0}{2b\mu}\right), \tag{5.8}$$

$$\gamma = \frac{1}{2a_0}\left\{\frac{\mu - c_1}{h} + 2b - \sqrt{\left(\frac{\mu - c_1}{h} + 2b\right)^2 - 4\left[\left(2b - \frac{c_1}{h}\right)\frac{\mu}{h} - \frac{b_0^2 c_0}{h^2}\right]}\right\}. \tag{5.9}$$

В (5.8) и (5.9) μ и b — наименьшие собственные значения матриц S и B, b_0 — наибольшее собственное значение матрицы B и c_1 — наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы $P + P^T$.

Уравнения возмущенного движения спутника-гиростата получим из уравнений движения (5.2) с помощью подстановки

$$\theta = \frac{\pi}{2} = x_1, \quad \dot\theta = \dot x_1, \quad \psi = \pi + x_2, \quad \dot\psi = \dot x_2.$$

Эти уравнения запишем в безразмерном виде

$$
\begin{gathered}
x_1'' + bx_1' - h\left(1 + \frac{2-\beta}{h}\right)x_2' + (3\alpha - 4 + \beta)x_1 - bx_2 = X_1, \\
x_2'' + bx_2' + h\left(1 + \frac{2-\beta}{h}\right)x_1' + (\beta - 1)x_2 + bx_1 = X_2
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

Здесь введены обозначения $\alpha = \dfrac{C}{A}$, $\beta = \dfrac{C\Omega}{A\omega_0}$, $h = \dfrac{J\Omega_0}{A\omega_0}$, $b = \dfrac{b_0}{A\omega_0}$; штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, X_1 и X_2 — совокупность членов не ниже второго порядка относительно x_1, x_1', x_2, x_2'

$$
\begin{gathered}
X_1 = -x_2'^2 \sin x_1 \cos x_1 + 2\left(2\sin^2\frac{x_2}{2} + \cos x_2 \sin^2 x_1\right)x_2' + \\
+\left[2(3\alpha - 4)\sin^2\frac{x_1}{2} - \sin^2 x_2 \cos x_1\right]\sin x_1 + \\
+(3\alpha - 4 + \beta)(x_1 - \sin x_1) + b(x_2 - \sin x_2), \\
X_2 = 2\tan x_1 x_1' x_2' - \frac{2\sin^2\dfrac{x_1}{2}}{\cos x_1}x_2' - (h + 2 - \beta)\tan^2 x_1 x_1' + \\
+2\left(2\sin^2\frac{x_2}{2}\cos^2 x_1 + \sin^2 x_1\right)\frac{x_1'}{\cos^2 x_1} + (\beta - 1)(x_2 - \sin x_2) - \\
-\left(\beta\cos x_1 \tan^2 x_1 - 2\beta\sin^2\frac{x_1}{2} + 2\sin^2\frac{x_2}{2}\right)\sin x_2 + \\
+b\left(2\sin^2\frac{x_2}{2} - \tan^2 x_1 \cos x_2\right)\sin x_1 + b(x_1 - \sin x_1).
\end{gathered}
\tag{5.11}
$$

Уравнения возмущенного движения (5.10) можно записать в векторной форме (5.5), где $x = (x_1, x_2)^T$ и

$$
B = bE, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & -\left(1 + \dfrac{2-\beta}{h}\right) \\ 1 + \dfrac{2-\beta}{h} & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
F = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 3\alpha - 4 + \beta & 0 \\ 0 & \beta - 1 \end{bmatrix}.
$$

Вычисления приводят к следующим выражениям для параметров c_0, g_0, b_0, b, μ и c_1:

$$
\begin{gathered}
c_0 = \frac{1}{2}[d_1 + d_2 + \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + 4c^2}], \\
d_1 = \frac{b^2}{\eta^2} + \left(\frac{\lambda_1}{\eta} - \eta\right)^2, \qquad d_2 = \frac{b^2}{\eta^2} + \left(\frac{\lambda_2}{\eta} - \eta\right)^2, \\
c = \frac{b(\lambda_2 - \lambda_1)}{\eta^2}, \qquad \lambda_1 = 3\alpha - 4 + \beta, \qquad \lambda_2 = \beta - 1, \\
g_0 = \eta^2, \qquad b_0 = b, \qquad \mu = \eta(2b - 3|1 - \alpha|), \\
c_1 = \frac{2b + |\lambda_1 - \lambda_2|}{\eta}, \qquad \eta = 1 + \frac{2-\beta}{h}.
\end{gathered}
\tag{5.12}
$$

Условием положительной определенности матрицы $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ является выполнение неравенств

$$
\eta > 0, \quad 2b > 3|1 - \alpha|. \tag{5.13}
$$

Так как в выражения (5.11) для X_1 и X_2 входят члены порядка не ниже третьего относительно x_1, x_1', x_2, x_2', то оценка вида (5.6) искалась в области $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$. Опуская громоздкие вычисления, приведем выражение для этой оценки

$$
\|X(x_1, x_1', x_2, x_2')\| \leqslant a_0(x_1^2 + x_2^2 + x'2_1 + x_2'^2),
$$

где

$$
\begin{gathered}
a_0 = \max(a_1, a_2, a_3, a_4),\\
a_1 = 1 + \frac{1}{2}|3\alpha - 4| + \frac{1}{6}|3\alpha - 4 + \beta| + \frac{1}{4\cos 1} + \frac{1}{2\cos^2 1}|h + 2 - \beta| +\\
+\frac{1}{2\cos^2 1} + \beta\left(\tan 1 + \frac{1}{2}\sin 1\right) + \frac{b}{\cos^2 1} + \frac{1}{6}b,\\
a_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}b\right) + \frac{1}{2\cos^2 1} + \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{6}|\beta - 1| + \frac{1}{2}b,\\
a_3 = \tan 1 + \frac{|h+2-\beta|}{2\cos^2 1} + \frac{1}{\cos^2 1}, a_4 = \frac{5}{2} + \tan 1 + \frac{1}{4\cos 1}.
\end{gathered}
$$

Применяя теорему 5.1, сформулируем окончательный результат.

Пусть матрица $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ является положительно определенной (т.е. выполнены неравенства (5.13)) и

$$
h > h_0, \quad h_0 = \max\left(\sqrt{\frac{c_0}{g_0}}, \frac{c_1\mu + b_0^2 c_0}{2b\mu}\right),
$$

где параметры c_0, g_0, c_1, μ, b_0 вычисляются по формулам (5.12). Тогда стационарное движение (5.4) асимптотически устойчиво, а область

$$
\begin{gathered}
x_1'^2 + x_2'^2 + \eta^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2b}{h\eta}(x_1 x_1' - x_2 x_2')\\
-\frac{2}{h}\left(\frac{3\alpha - 4 + \beta}{\eta} - \eta\right)x_1 x_2' - \frac{2}{h}\left(-\frac{\beta - 1}{\eta} + \eta\right)x_2 x_1' < \frac{1}{4}\gamma^2,
\end{gathered}
$$

где γ вычисляется по формуле (5.9), принадлежит области притяжения стационарного движения (5.4).

6. Одна теорема об устойчивости

Рассмотрим систему (5.5), пренебрегая нелинейными слагаемыми и с параметрами $d > 0$ при матрице диссипативных сил B

$$
\ddot{x} + dD\dot{x} + G\dot{x} + Kx + Fx = 0. \tag{6.1}
$$

Будем предполагать,что $x^T K x > 0$ при $x \neq 0$.

В [14] доказано, что при достаточно большом $d > 0$ система (6.1) асимптотически устойчива. При решении прикладных задач необходимо знать нижнюю границу для параметра $d > 0$. Для решения этой задачи рассмотрим функцию

$$
V = \frac{1}{2}(\dot{x} + \varepsilon x)^T(\dot{x} + \varepsilon x) + \frac{1}{2}\varepsilon x^T(dD - \varepsilon E)x + \frac{1}{2}x^T K x. \tag{6.2}
$$

В (6.2) E — единичная матрица, параметр $\varepsilon > 0$ подлежит определению.

Производная $\dot{V}$, вычисленная в силу системы (6.1), имеет вид

$$
\begin{gathered}
-\dot{V} = \left[\varepsilon^{1/2}K^{1/2}x + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}(F + \varepsilon G)\dot{x}\right]^T \cdot \left[\varepsilon^{1/2}K^{1/2}x + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}(F + \varepsilon G)\dot{x}\right] +\\
+\dot{x}^T\left[dD - \varepsilon E - \frac{1}{4\varepsilon}(F + \varepsilon G)K^{-1}(F + \varepsilon G)^T\right]\dot{x}.
\end{gathered} \tag{6.3}
$$

Если квадратичная форма

$$
\dot{x}^T\left[dD - \varepsilon E - \frac{1}{4\varepsilon}(F + \varepsilon G)K^{-1}(F + \varepsilon G)^T\right]\dot{x}
$$

положительно определена, то $V > 0$, а $\dot{V} < 0$; на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [19] система (6.1) асимптотически устойчива.

Параметр $\varepsilon > 0$ выбирается из условия максимального расширения области устойчивости в пространстве параметров.

Имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\dot{x}^T(F+\varepsilon G)K^{-1}(F+\varepsilon G)^T\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon}\dot{x}^T[FK^{-1}F^T + \varepsilon^2 GK^{-1}G^T +$$
$$+\varepsilon(GK^{-1}F^T + FK^{-1}G^T)]\dot{x} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(a_0\varepsilon^2 + c_0\varepsilon + b_0)\dot{x}^T\dot{x}. \tag{6.4}$$

В (6.4) $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ и c_0 — максимальные собственные значения матриц $GK^{-1}G^T$, $FK^{-1}F^T$ и $GK^{-1}F^T + FK^{-1}G^T$ соответственно.

Минимального значения функция

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(a_0\varepsilon^2 + c_0\varepsilon + b_0)$$

достигает при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{b_0}{a_0}}$, а значение $f(\varepsilon_0) = 2\sqrt{a_0 b_0} + c_0$.

Тогда

$$\dot{x}^T\left[dD - \varepsilon E - \frac{1}{4\varepsilon}(F+\varepsilon G)K^{-1}(F+\varepsilon G)^T\right]\dot{x} \geqslant$$
$$\geqslant \left[d\lambda_0 - \varepsilon_0 - \frac{1}{4}(2\sqrt{a_0 b_0} + c_0)\right]\dot{x}^T\dot{x}. \tag{6.5}$$

В (6.5) $\lambda_0 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы D.

Таким образом, при выполнении неравенства

$$d > \lambda_0^{-1}\left[\sqrt{\frac{b_0}{a_0}} + \frac{1}{4}(2\sqrt{a_0 b_0} + c_0)\right] \tag{6.6}$$

система (6.1) асимптотически устойчива.

Теорема 6.1. *Если матрицы D и K положительно определены, то при выполнении неравенства* (6.6) *система* (6.1) *асимптотически устойчива.*

Эта теорема применяется в § 7 для решения задачи стабилизации относительного равновесия спутника-гиростата.

7. Стабилизация относительного равновесия спутника-гиростата, находящегося под действием постоянного момента

Рассмотрим трехосный спутник-гиростата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью ω_0. По главным центральным осям инерции расположены три ротора с кинетическими моментами $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$. Для вывода уравнений движения введем в рассмотрение две декартовы системы координат с началом O, совпадающим с центром масс спутника. Орбитальная система $OX_1X_2X_3$ определена следующим образом: ось OX_1 направлена вдоль скорости спутника, ось OX_3 по радиус-вектору, ось OX_2 по нормали к орбите. Система координат $Ox_1x_2x_3$ жестко связана со спутником, а оси направлены по главным центральным осям инерции. Взаимная ориентация системы координат определяется тремя углами α, β, γ последовательных поворотов вокруг осей 2, 3 и 1. Направляющие косинусы имеют вид

	Ox_1	Ox_2	Ox_3
OX_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
OX_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
OX_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$
\begin{gathered}
a_{11} = \cos\alpha\cos\beta, \qquad a_{12} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma, \\
a_{13} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma, \qquad a_{21} = \sin\beta, \\
a_{22} = \cos\beta\cos\gamma, \qquad a_{23} = -\cos\beta\sin\gamma, \qquad a_{31} = -\sin\alpha\cos\beta, \\
a_{32} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \qquad a_{33} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

На спутник действуют три постоянных момента $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, направленные по осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно.

Уравнения движения спутника-гиростата запишем в безразмерной форме

$$
\begin{gathered}
\theta_A p' + (\theta_C - 1)qr + qh_3 - rh_2 = 3(\theta_C - 1)a_{32}a_{33} + a, \\
q' + (\theta_A - \theta_C)rp + rh_1 - ph_3 = 3(\theta_A - \theta_C)a_{33}a_{31} + b, \\
\theta_C r' + (1 - \theta_A)pq + ph_2 - qh_1 = 3(1 - \theta_A)a_{31}a_{32} + c, \\
p = \alpha' a_{21} + \gamma' + a_{21}, \qquad q = \alpha' a_{22} + \beta' \sin\gamma + a_{22}, \\
r = \alpha' a_{23} + \beta' \cos\gamma + a_{23}.
\end{gathered} \tag{7.2}
$$

В (7.2) штрих обозначает производную по $\tau = \omega_0 t$; p, q, r — безразмерные проекции мгновенной угловой скорости спутника на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3; $h_j = \dfrac{\bar{h}_j}{\omega_0 B}$, $j = 1, 2, 3$;

$$
a = \frac{\bar{a}}{\omega_0^2 B}, \quad b = \frac{\bar{b}}{\omega_0^2 B}, \quad c = \frac{\bar{c}}{\omega_0^2 C}, \quad \theta_A = \frac{A}{B}, \quad \text{and} \quad \theta_C = \frac{C}{B}.
$$

Если выполнены соотношения

$$
a = h_3, \quad b = 0, \quad \text{and} \quad c = -h_1,
$$

то уравнения движения (7.2) имеют решение

$$
\alpha = \beta = \gamma = 0, \qquad \alpha' = \beta' = \gamma' = 0, \tag{7.3}
$$

соответствующее относительному равновесию спутника-гиростата в орбитальной системе координат.

Для анализа устойчивости равновесия (7.3) рассмотрим уравнения возмущенного движения, линеаризованные в окрестности равновесия (7.3):

$$
\begin{gathered}
\alpha'' + 3(\theta_A - \theta_C) - c\beta' - a\gamma' + c\gamma - a\beta = 0, \\
\theta_C \beta'' + (1 - \theta_A + h_2)\beta + c\alpha' + (1 - \theta_A - \theta_C + h_2)\gamma' = 0, \\
\theta_A \gamma'' + (4 - 4\theta_C + h_2)\gamma + a\alpha' + (-1 + \theta_A + \theta_C - h_2)\beta' = 0.
\end{gathered} \tag{7.4}
$$

В характеристическом уравнении системы (7.4)

$$
\begin{gathered}
a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0, \\
a_1 = 0, \quad a_3 = ac(\theta_A - \theta_C), \quad a_5 = ac(3 + \theta_A - 4\theta_C).
\end{gathered} \tag{7.5}
$$

Необходимым условием устойчивости является выполнение равенств $a_3 = a_5 = 0$; отсюда следует, что $\theta_A = \theta_C = 1$ или $A = B = C$, т.е. спутник должен быть динамически симметричным. В этом случае характеристическое уравнение (7.5) имеет две пары чисто мнимых корней и двойной нулевой корень с непростым элементарным делителем. Для анализа устойчивости в этом критическом по Ляпунову случае [19] необходимо рассмотреть нелинейные члены. Эта задача здесь не решается, поскольку она не представляет интереса с практической точки зрения. Если $\theta_A \neq \theta_C \neq 1$, то равновесие (7.3) неустойчиво. Отсюда возникает задача о стабилизации этого равновесия с помощью приложения демпфирующих моментов, пропорциональных проекциям угловой скорости спутника:

$$
\begin{gathered}
M_1 = -d_1\bar{p}, \qquad M_2 = -d_2\bar{q}, \qquad M_3 = -d_3\bar{r}, \\
\bar{p} = p - a_{21}, \qquad \bar{q} = q - a_{22}, \qquad \bar{r} = r - a_{23}.
\end{gathered}
$$

Тогда система уравнений (7.4) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\alpha'' + d_2\alpha' - c\beta' - a\gamma' + 3(\theta_A - \theta_C)\alpha + c\gamma - a\beta = 0,\\ \theta_C\beta'' + d_3\beta' + c\alpha' + (1 - \theta_A - \theta_C + h_2)\gamma' + (1 - \theta_A + h_2)\beta = 0,\\ \theta_A\gamma'' + d_1\gamma' + a\alpha' - (1 - \theta_A - \theta_C + h_2)\beta' + (4 - 4\theta_C + h_2)\gamma = 0.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Из (7.6) следует, что механическая система находится под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Анализ устойчивости системы (7.6) проведем с помощью теоремы, доказанной в § 6.

Систему уравнений (7.6) запишем в матричной форме:

$$M\ddot{y} + dD_0\dot{y} + G_0\dot{y} + K_0y + F_0y = 0, \quad y = (\alpha, \beta, \gamma)^T, \quad M = \mathrm{diag}(1, \theta_C, \theta_A), \tag{7.7}$$

где

$$D_0 = \mathrm{diag}(d_2^0, d_3^0, d_1^0), \quad d_j^0 = d_jd^{-1}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & -c & -a \\ c & 0 & 1 - \theta_A - \theta_C + h_2 \\ a & -1 + \theta_A + \theta_C - h_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 3(\theta_A - \theta_C) & -\dfrac{a}{2} & \dfrac{c}{2} \\ -\dfrac{a}{2} & 1 - \theta_A + h_2 & 0 \\ \dfrac{c}{2} & 0 & 4(1 - \theta_C) + h_2 \end{bmatrix}, \qquad F_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a}{2} & \dfrac{c}{2} \\ \dfrac{a}{2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{c}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Замена $y \to x$,

$$x = M^{1/2}y, \qquad M^{1/2} = \mathrm{diag}(1, \theta_C^{1/2}, \theta_A^{1/2}),$$

приводит систему (7.7) к (6.1) с матрицами

$$D = M^{-1/2}D_0M^{-1/2} = \mathrm{diag}\left(d_2^0, \frac{d_3^0}{\theta_C}, \frac{d_1^0}{\theta_A}\right),$$

$$G = M^{-1/2}G_0M^{-1/2}, \quad K = M^{-1/2}K_0M^{-1/2},$$
$$F = M^{-1/2}F_0M^{-1/2}.$$

В теореме 6.1 предполагается, что матрица K положительно определена. Это условие может быть достигнуто выбором соответствующего значения параметра h_2.

Заметим, что матрица K может быть положительно определенной для значений параметров θ_A и θ_C, отвечающих неустойчивости равновесия (7.3) спутника при отсутствии гироскопов.

Достаточным условием асимптотической устойчивости равновесия (7.3) является неравенство (6.6). Предварительно необходимо найти максимальные собственные значения матриц

$$GK^{-1}G^T, \quad FK^{-1}F^T, \quad \text{и} \quad GK^{-1}F^T + FK^{-1}G^T,$$

а также

$$\lambda_0 = \min\left(d_2^0, \frac{d_3^0}{\theta_C}, \frac{d_1^0}{\theta_A}\right).$$

8. Влияние нестационарной угловой скорости ротора на собственные частоты колебаний спутника-гиростата

Исследуется влияние переменной угловой скорости ротора на собственные частоты колебаний динамически симметричного спутника-гиростата. Центр масс спутника движется по круговой орбите с угловой скоростью ω_0. Ось вращения ротора совпадает с осью симметрии спутника. Рассматриваемая механическая система может совершать стационарное движение (цилиндрическая прецессия), при котором ось динамической симметрии перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается вокруг оси с определенной угловой скоростью [9].

Для решения задачи применяется подход, разработанный в [3, 5] и основанный на редукции с заданной точностью линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений в стандартной форме к автономной системе с последующим ее анализом.

Излагаются теоретические положения, применяемые для решения поставленной задачи. Показано, что переменная угловая скорость ротора приводит к следующему изменению частот колебаний спутника-гиростата: нижняя частота увеличивается, а верхняя уменьшается. Такое изменение частот может приводить к потере устойчивости стационарного движения.

Рассмотрим линейную неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + \varepsilon(G_0 + \dot{\psi}(t)G_1)\dot{x} + \varepsilon(K_0 + \varepsilon\dot{\psi}(t)K_1)x = 0. \tag{8.1}$$

В (8.1), $x = (x_1, \dots, x_n)$, G_0, G_1, K_0, K_1 — постоянные матрицы, $\varepsilon \ll 1$, а функция $\psi(t)$ является непрерывно дифференцируемой с нулевым средним

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \psi(t)\,dt = 0,$$

ограниченной при $t \geqslant 0$.

Систему (8.1) запишем в виде

$$\dot{u} = (\varepsilon^{1/2}D + \varepsilon D_0 + \varepsilon^{3/2}D_1)u, \tag{8.2}$$

где $u = (x, \varepsilon^{-1/2}\dot{x})$,

$$D_0 = \begin{bmatrix} O_n & O_n \\ O_n & -G_0 - \dot{\psi}(t)G_1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} O_n & E_n \\ -K_0 & O_n \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} O_n & O_n \\ -\dot{\psi}(t)K_1 & O_n \end{bmatrix},$$

где O_n, E_n — нулевая и единичная матрицы порядка n сответственно. В (8.2) сделаем замену переменных

$$u = (E_{2n} + \varepsilon^{1/2}X_1(t) + \varepsilon X_2(t) + \varepsilon^{3/2}X_3(t) + \varepsilon^2 X_4(t))v + O(\varepsilon^{5/2}), \tag{8.3}$$

чтобы преобразовать (8.2) к автономной системе

$$\dot{v} = (\varepsilon^{1/2}M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2}M_3 + \varepsilon^2 M_4)v + O(\varepsilon^{5/2}). \tag{8.4}$$

В (8.3), (8.4) матрицы $X_i(t)$, M_i подлежат определению, причем, матрицы M_i — постоянные. Отметим, что для класса квазипериодических функций $\psi(t)$ преобразование (8.3) при выполнении диофантова условия является сходящимся, а погрешность экспоненциально мала по ε [33].

Подставляя (8.3) в (8.2) и приравнивая матрицы при $\varepsilon^{1/2}$, ε, $\varepsilon^{3/2}$ и ε^2 в этом уравнении и уравнении (8.4), получим систему матричных уравнений для определения X_i:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= D - M_1, \\ \dot{X}_2 &= D_0 + DX_1 - X_1M_1 - M_2, \\ \dot{X}_3 &= D_1 + D_0X_1 + DX_2 - X_1M_2 - X_2M_1 - M_3, \\ \dot{X}_4 &= D_1X_1 + D_0X_2 + DX_3 - X_1M_3 - X_2M_2 - X_3M_1 - M_4. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Этим приближением и ограничимся. Матрицы $M_1, M_2, \dots$ находятся из условия отсутствия циркулярных членов в $X_1, X_2, \dots$. Например,

$$M_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T (D_0 + DX_1 - X_1M_1)\,dt.$$

Опуская вычисления, приведем выражения матриц $M_1, M_2, \ldots$:

$$M_1 = D, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} O_n & O_n \\ O_n & -G_0 \end{bmatrix}, \qquad M_3 = 0,$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} -2g_0 G_1 K_0 & O_n \\ O_n & (K_0 G_1 + G_1 K_0) g_0 \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

$$g_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \left[\int\limits_0^t \psi(t_1)\, dt_1 \right] dt.$$

Если $g_0 = 0$, то влияние слагаемых $\dot\psi(t)G_1$ и $\dot\psi(t)K_1$ в системе уравнений (8.1) требует рассмотрения членов более высоких порядков. Ограничимся этим приближением, предполагая, что в (8.6) предел существует и отличен от нуля. Обозначив $v = (\xi, \eta)$, из (8.4) с учетом выражений (8.6) после исключения переменной η с точностью до ε^2 включительно получим

$$\ddot\xi + \varepsilon[G_0 + \varepsilon g_0(G_1K_0 - K_0G_1)]\dot\xi + \varepsilon K_0 \xi = 0. \tag{8.7}$$

Система дифференциальных уравнений (8.7) является автономной, и к ней может быть применен частотный анализ. Заметим, что в рамках указанной точности матрица K_1 не вошла в систему (8.7).

Рассмотрим уравнения малых колебаний динамически симметричного спутника-гиростата в окрестности стационарного движения (цилиндрической прецессии). Как показано в [9], за обобщенные координаты удобно взять углы Эйлера θ, φ, ψ, причем, при $\theta = 0$ (угол нутации) ось динамической симметрии спутника направлена вдоль радиус-вектора центра масс. Ось вращения ротора совпадает с осью симметрии спутника, а сам ротор вращается с угловой скоростью $\dot\varphi_0 = \Omega_0$.

Не выписывая полные уравнения спутника-гиростата, отметим лишь, что они имеют решение

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot\theta = 0, \quad \psi = \pi, \quad \dot\psi = 0, \tag{8.8}$$

соответствующее стационарному движению спутника (цилиндрическая прецессия [9]). Уравнения возмущенного движения получаются после исключения циклических координат φ, φ_0 с помощью подстановки

$$\theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \dot\theta = \dot x_1, \quad \psi = \pi + x_2, \quad \dot\psi = \dot x_2. \tag{8.9}$$

Будем считать, что ротор вращается не с постоянной угловой скоростью Ω_0, а с переменной $\Omega_0 + \dot\psi_0(t)$, где $\psi_0(t)$ — непрерывно дифференцируемая и ограниченная при $t \geqslant t_0$ функция.

Линейные уравнения возмущенного движения спутника-гиростата представляют собой неавтономную систему, которую можно привести к виду

$$\begin{cases} x_1'' + \varepsilon(\alpha + \varepsilon\chi^2 - 2\delta + \chi\psi'(\tau))x_2' + \varepsilon(\alpha\delta\varepsilon + \varepsilon\chi\delta\psi'(\tau) + \delta^2\varepsilon(3\alpha - 4))x_1 = 0, \\ x_2'' - \varepsilon(\alpha + \varepsilon\chi^2 - 2\delta + \chi\psi'(\tau))x_1' + \varepsilon(\alpha\delta\varepsilon - \delta^2\varepsilon + \chi\delta\varepsilon\psi'(\tau))x_2 = 0. \end{cases} \tag{8.10}$$

В (8.10) введены обозначения: $\alpha = C/A \neq 1$, $\delta = \omega_0/\Omega$ (Ω — угловая скорость спутника на невозмущенном движении); $\chi = \Omega_0/\Omega$, $\varepsilon = J\Omega/A\Omega_0$; штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tau = A\Omega_0 t/J$; A, C, J — экваториальный и полярный моменты инерции спутника и ротора сответственно;

$$\psi'(\tau) \equiv \psi_0'\left(\frac{J}{\Omega_0 A}\tau\right).$$

Уравнения (8.10) имеют вид системы (8.1), где

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}, \qquad g = \alpha + \varepsilon\chi^2 - 2\delta,$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & \chi \\ -\chi & 0 \end{bmatrix}, \qquad K_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad K_1 = \mathrm{diag}(\chi\delta, \chi\delta),$$

$$\lambda_1 = \delta\varepsilon[\alpha + \delta(3\alpha - 4)], \qquad \lambda_2 = \delta\varepsilon[\alpha - \delta], \qquad x = (x_1, x_2)^T.$$

Переменная угловая скорость ротора приводит к изменению матрицы G_0, характеризующей гироскопические силы.

Матрица $G_1K_0 - K_0G_1$ равна

$$G_1K_0 - K_0G_1 = \begin{bmatrix} 0 & \chi(\lambda_2-\lambda_1) \\ \chi(\lambda_2-\lambda_1) & 0 \end{bmatrix}$$

и является матрицей-девиатором (матрицей с нулевым следом).

Возмущения такими матрицами приводят к эволюции собственных частот системы, при которой происходит потеря устойчивости. Покажем это. Уравнение частот, которое получается из характеристического уравнения заменой $\lambda = i\omega$, $i^2 = -1$, имеет вид

$$\omega^4 - \varepsilon[\lambda_1 + \lambda_2 + \varepsilon(g^2 - \varepsilon^2 g_0^2 \chi^2(\lambda_2-\lambda_1)^2)]\omega^2 + \varepsilon\lambda_1\lambda_2 = 0. \tag{8.11}$$

Из (8.11) следует, что влияние переменной угловой скорости ротора, которое в системе (8.7) характеризуется интегральным параметром g_0, приводит к эволюции частот, а именно, нижняя частота увеличивается, а верхняя уменьшается. При увеличении параметра g_0 они могут совпасть, а при его дальнейшем увеличении характеристическое уравнение будет иметь корень с положительной действительной частью. Это означает неустойчивость системы (8.7). Значение параметра g_0, при котором частоты совпадают, равно

$$g_0^2 = \frac{\varepsilon g^2 + (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})^2}{\varepsilon^3\chi^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}. \tag{8.12}$$

Из (8.12) следует, что значение параметра g_0 должно быть достаточно большим.

9. К динамике ротора, вращающегося с переменной угловой скоростью

Объектом исследования является уравновешенный ротор, расположенный посередине вращающегося с переменной угловой скоростью упругого вала. Учитывается влияние на ротор как внешнего, так и внутреннего трения. Анализ устойчивости прямолинейного расположения вала при вращении его с постоянной скоростью проведен в [11], и получено условие устойчивости.

В [15] рассмотрен случай нестационарного вращения вала и проведен с помощью построения функции Ляпунова анализ устойчивости установившегося движения. В этом параграфе рассмотрен случай нестационарного вращения вала. Используя результаты работы [5], проведена редукция линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений к системе с постоянными коэффициентами с заданной точностью. Исследование последней позволило провести не только анализ устойчивости установившегося движения вала, а также эволюцию частот собственных колебаний ротора, вызванных переменной угловой скоростью вала. На комплексной плоскости представлена динамика корней характеристического уравнения, и показано снижение мнимой составляющей, вызванной нестационарностью угловой скорости вала.

Уравнения движения уравновешенного ротора, расположенного посередине вращающегося с переменной угловой скоростью $\Omega(t)$ упругого вала, приводятся к виду (см. [12,15])

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2(b_i+b_e)\dot{x} - 2b_e\Omega(t)y + (v_0^2 - \Omega^2(t))x - 2\Omega(t)\dot{y} - \dot{\Omega}(t)y = 0 \\ \ddot{y} + 2(b_i+b_e)\dot{y} + 2b_e\Omega(t)x + (v_0^2 - \Omega^2(t))y + 2\Omega(t)\dot{x} + \dot{\Omega}(t)x = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Здесь x, y — составляющие прогиба вала в направлениях осей x и y; $v_0^2 = \dfrac{k}{m}$, k — коэффициент жесткости вала на изгиб; m — масса ротора; $b_i > 0$, $b_e > 0$ — коэффициенты внутреннего и внешнего трения, причем, сила внутреннего трения пропорциональна относительной скорости ротора $\bar{v} = (\dot{x}, \dot{y})$, а внешнего трения — абсолютной скорости $\bar{V} = (\dot{x} - \Omega y, \dot{y} + \Omega x)$. С помощью замены [15]

$$x = \xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta, \qquad y = -\xi_1\sin\theta + \xi_2\cos\theta, \qquad \theta = \int\limits_0^t \Omega(t)\,dt, \tag{9.2}$$

система уравнений (9.1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + 2(b_e + b_i)\dot{\xi}_1 + v_0^2\xi_1 + 2b_i\Omega(t)\xi_2 = 0, \\ \ddot{\xi}_2 + 2(b_e + b_i)\dot{\xi}_2 + v_0^2\xi_2 - 2b_i\Omega(t)\xi_1 = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Уравнения (9.3) можно рассматривать как уравнения движения механической системы, находящейся под действием диссипативных, потенциальных и неконсервативных позиционных сил, причем, последние появляются из-за учета внутреннего трения ($b_i > 0$). Анализ системы (9.3) имеет смысл проводить только при $b_i > 0$, поскольку при $b_i = 0$ система (9.3) вырождается в два тривиальных уравнения.

Предположим, что переменная угловая скорость вращения вала $\Omega(t)$ представлена в виде $\Omega(t) = \Omega_0 + \dot{\psi}(\omega t)$, где $\Omega_0 = \mathrm{const}$, а функция $\psi(\omega t)$ непрерывно дифференцируема и ограничена вместе с производной при $t \geqslant 0$. Кроме того, предполагается, что среднее значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \psi(\omega t)\, dt = 0,$$

и существует конечный предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \psi^2(\tau)\, d\tau.$$

В системе уравнений (9.3) перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega t$. В результате получим

$$\begin{cases} \xi_1'' + 2\varepsilon(1+\beta)\xi_1' + \gamma\varepsilon\xi_1 + 2\varepsilon(\chi + \psi'(\tau))\xi_2 = 0, \\ \xi_2'' + 2\varepsilon(1+\beta)\xi_2' + \gamma\varepsilon\xi_2 - 2\varepsilon(\chi + \psi'(\tau))\xi_1 = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

В (9.4) введены обозначения

$$\beta = \frac{b_e}{b_i}, \quad \chi = \frac{\Omega_0}{\omega}, \quad \frac{v_0^2}{\omega^2} = \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{b_i}{\omega};$$

штрих обозначает производную по τ.

Будем предполагать, что введенный параметр $\varepsilon = \dfrac{b_i}{\omega}$ мал: $\varepsilon \ll 1$.

Систему уравнений (9.4) перепишем в виде

$$y'' + \varepsilon B y' + \varepsilon C_0 y + \varepsilon\psi'(\tau) C y = 0, \tag{9.5}$$

где

$$y = (\xi_1, \xi_2)^T, \qquad B = 2(1+\beta)E_2, \qquad C_0 = \begin{bmatrix} \gamma & 2\chi \\ -2\chi & \gamma \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(E_2 — единичная матрица второго порядка).

В свою очередь, систему уравнений (9.5) запишем в виде

$$U' = (\varepsilon^{1/2} D + \varepsilon D_0) U, \tag{9.6}$$

где

$$U = (y, \varepsilon^{-1/2} y')^T, \qquad D = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ -C_0 - \psi'(\tau) C & O_2 \end{bmatrix},$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -B \end{bmatrix}$$

(O_2 — нулевая матрица второго порядка).

В системе (9.6) сделаем замену переменных (см. [3])

$$U = [E_4 + \varepsilon^{1/2} X_1(\tau) + \varepsilon X_2(\tau) + \varepsilon^{3/2} X_3(\tau) + \varepsilon^2 X_4(\tau)] V + O(\varepsilon^{5/2}), \tag{9.7}$$

чтобы преобразовать ее к виду

$$V' = (\varepsilon^{1/2}M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2}M_3 + \varepsilon^2 M_4)V + O(\varepsilon^{5/2}). \tag{9.8}$$

В (9.8) постоянные матрицы M_1, M_2, M_3, M_4 подлежат определению. Подставляя (9.7) в (9.6), получим систему матричных уравнений для определения матриц $X_1(\tau), \ldots, X_4(\tau)$, $M_1, \ldots, M_4$:

$$\begin{cases} X_1' = D - M_1, \\ X_2' = D_0 + DX_1 - X_1M_1 - M_2, \\ X_3' = D_0X_1 + DX_2 - X_1M_2 - X_2M_1 - M_3, \\ X_4' = D_0X_2 + DX_3 - X_1M_3 - X_2M_2 - X_3M_1 - M_4. \end{cases} \tag{9.9}$$

Этим приближением и ограничимся.

Постоянные матрицы $M_1, \ldots, M_4$ находятся из условия отсутствия секулярных членов в выражениях для элементов матриц $X_1(\tau), \ldots, X_4(\tau)$. Опуская вычисления, приведем только выражения для матриц $M_1, \ldots, M_4$:

$$\begin{gathered} M_1 = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ -C_0 & O_2 \end{bmatrix}, \\ M_2 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -B \end{bmatrix}, \\ M_3 = \begin{bmatrix} O_2 & 2gC \\ (C_0C + CC_0)g - g_0C^2 & O_2 \end{bmatrix}, \\ M_4 = \begin{bmatrix} BCg + (C_0C + 3CC_0)g_1 + C^2g_2 & O_2 \\ O_2 & (CB - 2BC)g - (3C_0C + CC_0)g_1 - C^2g_2 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{9.10}$$

где

$$\begin{gathered} g_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi^2(\tau)\,d\tau, \\ g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^\tau \psi(\tau_1)\,d\tau_1 \right) d\tau, \\ g_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_0^\tau \left(\int_0^{\tau_1} \psi(\tau_2)\,d\tau_2 - g \right) d\tau_1 \right\} d\tau, \\ g_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_0^\tau \left[\left(\psi'(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \psi(\tau_2)\,d\tau_2 + g_0 \right) \right] d\tau_1 \right\} d\tau. \end{gathered}$$

Подставляя выражения (9.10) для матриц $M_1, \ldots, M_4$ в (9.8), с точностью до ε^2 включительно, получим ($V = (p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} p' = A_1p + A_2q, \\ q' = A_3p + A_4q, \end{cases} \tag{9.11}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \varepsilon^2[BCg + (C_0C + 3CC_0)g_1 + C^2g_2], \\ A_2 &= \varepsilon^{1/2}E_2 + 2gC\varepsilon^{3/2}, \\ A_3 &= -C_0\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2}[(C_0C + CC_0)g - g_0C^2], \\ A_4 &= -\varepsilon B + \varepsilon^2[(CB - 2BC)g - (3C_0C + CC_0)g_1 - C^2g_2]. \end{aligned}$$

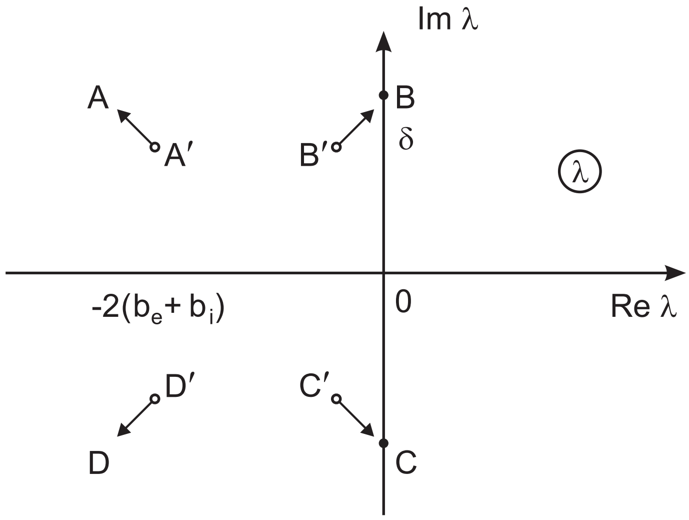


Рис. 1

Исключая из системы (9.11) переменную q, получим

$$p'' + \varepsilon\{B - \varepsilon[(BC - CB)g + 2(CC_0 - C_0C)g_1]\}p' + \\ + \varepsilon[C_0 + \varepsilon(CC_0 - C_0C)g + C^2 g_0]p = 0. \tag{9.12}$$

Подставляя в (9.12) выражения для матриц B, C_0, C, окончательно будем иметь

$$\begin{cases} \eta_1'' + 2\varepsilon(1+\beta)\eta_1' + \varepsilon(\gamma - 4\varepsilon g_0)\eta_1 + 2\varepsilon\chi\eta_2 = 0, \\ \eta_2'' + 2\varepsilon(1+\beta)\eta_2' + \varepsilon(\gamma - 4\varepsilon g_0)\eta_2 - 2\varepsilon\chi\eta_1 = 0. \end{cases} \tag{9.13}$$

Наличие переменной составляющей в угловой скорости вала приводит к ослаблению потенциальных сил, так как в (9.13) параметр $g_0 > 0$. Применяя к уравнениям (9.13) критерий Рауса—Гурвица, получим условие асимптотической устойчивости

$$\Omega_0^2 < \left(1 + \frac{b_e}{b_i}\right)^2 v_0^2 - 4g_0(b_e + b_i)^2. \tag{9.14}$$

При $g_0 = 0$, $\psi(\tau) \equiv 0$ условие (9.14) вырождается в соответствующее условие, полученное в [11]. При выполнении равенства

$$\Omega_0^2 = \left(1 + \frac{b_e}{b_i}\right)^2 v_0^2 - 4g_0(b_e + b_i)^2 \tag{9.15}$$

характеристическое уравнение системы (9.13) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\delta$ и два корня $\lambda_{3,4} = -2(b_e + b_i) \pm i\delta$, $\delta = \sqrt{v_0^2 - 4b_i^2 g_0}$ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (см. рис. 1).

При выполнении неравенства (9.14) корни характеристического уравнения системы (9.13) схематично изображены на рис. 1 (A', B', C', D'). При увеличении параметра g_0, когда неравенство (9.14) переходит в равенство (9.15), поведение корней показано на рис. 1 стрелками. Кроме того, наличие переменной составляющей в угловой скорости вала приводит к уменьшению частоты колебаний ротора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных механических систем// Докл. РАН. — 1992. — *332*, № 6. — С. 1040–1042.
2. *Агафонов С. А.* Об устойчивости движения неконсервативных механических систем// Прикл. мат. и мех. — 1992. — *56*, № 2. — С. 212–217.
3. *Агафонов С. А.* О стабилизации движения неконсервативных систем параметрическим возбуждением// Изв. РАН Мех. тверд. тела. — 1992. — *2*. — С. 199–202.

4. *Агафонов С. А.* Устойчивость неконсервативных систем и оценка области притяжения// Прикл. мат. и мех. — 2003. — *67*, № 2.
5. *Агафонов С. А.* О сведении неавтономных систем к автономным и механические приложения// Воронежская зимняя мат. школа «Соврем. методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, 27янв.–4фев., 1999: Тез. докл. — 8 с.
6. *Агафонов С. А.* Об устойчивости нестационарных неконсервативных механических систем// Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. — М.: Изд-во ВЦ РАН, 2001. — *2*, № 1. — С. 38–41.
7. *Агафонов С. А.* К устойчивости неконсервативных систем// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1986. — *2*. — С. 47–51.
8. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
9. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: МГУ, 1975. — 308 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
11. *Диментберг М. Ф.* Изгибные колебания вращающихся валов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 347 с.
12. *Жбанов Ю. К.* Об устойчивости вращающегося вала// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1981. — *3*. — С. 157–161.
13. *Каменков Г. В.* Избранные труды. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. — М.: Наука, 1971. — 256 с.; Т. 2. Устойчивость и колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1972. — 214 с.
14. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1975. — *4*. — С. 109–113.
15. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. — М.: Наука, 1985. — 286 с.
16. *Кошляков В. Н.* О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами// Прикл. мат. и мех. — 1997. — *61*, № 5. — С. 774–780.
17. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Структурный анализ некоторого класса динамических систем// Укр. мат. ж. — 2000. — *52*, № 8. — С. 1089–1096
18. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* К теории гироскопических систем с неконсервативными силами// Прикл. мат. и мех. — 2001. — *65*, № 4. — С. 698–704.
19. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.–Л.: Гостехиздат, 1935. — 386 с.
20. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации// Докл. АН СССР. — 1952. — *86*, № 1. — С. 31–34.
21. *Робертсон Р. Е., Сарычев В. А., Яковлев Н. И.* Динамика гравитационно-ориентированного спутника с роторами// Космич. исслед. — 1975. — *13*, № 5. — С. 619–631.
22. *Румянцев В. В.* Устойчивость относительных равновесий и стационарных движений спутника-гиростата// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1968. — *4*. — С. 15–21.
23. *Хазин Л. Г., Шноль Е. Е.* Исследование асимптотической устойчивости равновесия при резонансе 3:1// Препр. № 67/ М.: Ин-т прикл. мат. АН СССР, 1978.
24. *Хазин Л. Г., Шноль Е. Е.* Устойчивость критических равновесий// Препр./ Пущино: Исслед. центр биол. исслед. АН СССР, 1985.
25. *Agafonov S. A.* Some problems of motion stabilization of nonconservative systems by means of stochastic and deterministic control// In: *Proc. 2nd Int. Conf. Automat. Control, Sept. 11–13, 1996, Abstr. Rep.*. — Portugal, Porto, 1996. — C. 401–403.
26. *Agafonov S. A.* On the stability of nonconservative systems with estimation of the attraction domain// J. Dyn. Contr. Syst. — 2000. — *6*, № 4. — C. 503–510.
27. *Agafonov S. A.* To the dynamics of a rotating shaft with time-varying angular velocity// In: *Compendium "Some mechanical problems and their applications"* (*dedicated to the 80th anniversary of Academician V. N. Koshlyakov*), Institute of Mathematics NAS Ukraine, 2002. — C. 11–17.
28. *Agafonov S. A., Guerman A. D.* Stabilization of gyrostat satellite subject to constant torque// In: *Proc. 5th Int. Conf. Automat. Control, CONTROLO 2002, Thes. Conf. Rep.* — Portugal, Aveiro, 2002. — C. 641–645.
29. *Li J.* On the stability of dissipative mechanical systems with circulatory forces// ZAMP. — 1997. — *48*, № 1. — C. 161–164.
30. *Longman R. W.* Stability analysis of all possible equilibria for gyrostat satellite under gravitational torques// AIAA J. — 1972. — *10*, № 6. — C. 800-806
31. *Sarychev V. A., Murer S. A.* Relative equilibria of a gyrostat satellite with internal angular momentum along the principal axis// Acta Astronautica. — 2001. — *49*, № 11. — C. 641–644.

32. *Sarychev V. A., Paglione P., Guerman A. D.* Equilibria of a satellite subject to a constant torque: analysis of stability// Adv. Astronaut. Sci. — 2001. — *108*. — С. 555–571.
33. *Simo C.* Averaging under fast quasi-periodic forcing// In: *Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior, NATO ASI, Series B: Physics,* New York: Plenum Press, 1994. — С. 13–34.

С. А. Агафонов
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана