ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 6

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Тбилиси
2003

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 6

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

О локальной геометрии порождающих подмногообразий в C^n и аналитическом принципе отражения, I (*Дж. Меркер*) 3

Принцип отражения и граничные свойства голоморфных отображений (*Б. Купе, А. Сухов*) . 80

Современная математика и ее приложения. Том 6 (2003). С. 3–79

УДК 515.171.1, 517.553

О ЛОКАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОРОЖДАЮЩИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В C^n И АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРИНЦИПЕ ОТРАЖЕНИЯ, I

© 2003 г. **ДЖ. МЕРКЕР**

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Общее введение в часть I . . . 3
1.1. Краткий исторический очерк . . . 3
1.2. Общее идейное описание тем, исследуемых в части I . . . 5
Глава 2. Геометрия комплексифицированных порождающих подмногообразий и цепи Сегре . . . 9
2.1. Элементарная локальная геометрия подмногообразий Коши–Римана . . . 9
2.2. Многообразия Сегре и внешняя комплексификация . . . 17
2.3. Комплексифицированные многообразия Сегре и комплексифицированные CR векторные поля . . . 19
2.4. Кратные потоки и цепи Сегре . . . 21
2.5. Тип Сегре и мультитип Сегре . . . 24
2.6. Внешняя комплексификация CR-орбит . . . 27
2.7. Цепи Сегре и множества Сегре в объемлющем пространстве . . . 30
2.8. Порождающий мультитип Сегре . . . 32
2.9. Локальное представление неминимальных порождающих подмногообразий . . . 34
Глава 3. Условия невырожденности порождающих подмногообразий . . . 36
3.1. Отображение Сегре . . . 36
3.2. Пять поточечных условий невырожденности . . . 37
3.3. Биголоморфная инвариантность . . . 44
3.4. Многообразия без условий невырожденности . . . 46
3.5. Струи многообразий Сегре и глобальные условия невырожденности . . . 48
3.6. Правила преобразования струй многообразий Сегре . . . 56
3.7. Локальная геометрия CR-подмногообразий в порождающей точке по Зарискому . . . 58
Глава 4. Условия невырожденности для CR-отображений степенных рядов . . . 59
4.1. Условия CR-горизонтальной невырожденности CR-отображений, задаваемых степенными рядами . . . 59
4.2. Условия невырожденности Сегре для CR-отображений степенных рядов . . . 61
4.3. Изучение CR-трансверсальных CR-отображений степенных рядов . . . 65
Список литературы . . . 78

Глава 1

ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ В ЧАСТЬ I

1.1. Краткий исторический очерк

1.1.1. Локальные группы Ли и отсутствие теоремы об отображении Римана. Воодушевленный общей идеей, что, по аналогии с теорией групп Галуа алгебраических уравнений, групповой анализ дифференциальных уравнений должен давать ценную информацию об их разрешимости, С. Ли примерно в 1873–80 гг. начал изучать классификацию всех непрерывных локальных групп преобразований, действующих на $\mathbb{C}^n$. Он быстро достиг успеха при $n = 1$ и дошел до случая

ISSN 1512–1712

$n = 2$ (см. [23]), но непреодолимые сложность и насыщенность картины при $n = 3$ исчерпали его усилия; более того, и даже больше, чем столетие спустя эта цель не была достигнута. Тем не менее, именно при $n = 2$ классификация Ли обладает огромной силой для всевозможных приложений к изучению преобразований, сохраняющих произвольные типы геометрических структур. Благодаря влиянию Дарбу, работы Ли стали быстро известны французским математикам. Основываясь на общем подходе С. Ли, А. Пуанкаре (см. [25]) обнаружил в 1907 г., что группы автоморфизмов двумерного единичного шара $\mathbb{B}^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ и бидиска $\Delta^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ представимы рациональными, но не изоморфными преобразованиями, откуда он сделал вывод, что $\mathbb{B}^2$ и Δ^2 не биголоморфно эквивалентны. Это открытие явилось исходной точкой *теоремы об отсутствии отображения Римана* в случае многих комплексных переменных.

В начале двадцатого века зарождение плюрикомплексной геометрии совпало также с появлением двух других фундаментальных работ Ф. Гартогса [20] (1906) и Е. Леви [21] (1910). Тем не менее, хотя это направление дало важные ответвления в 1930–50 гг., особенно в работах В. Осгуда, Г. Кнезера, Р. Фуетера, Е. Мартинелли, К. Бенке, Ф. Зоммера и С. Бохнера, его кульминацией было полное решение так называемой проблемы Леви, данное К. Ока в 1951–52 гг. Это направление, начатое Пуанкаре в 1907 г., оставалось в дремлющем состоянии приблизительно шестьдесят лет, за исключением четырех последовательных и исторически изолированных работ Б. Сегре [26, 27] и Э. Картана [12, 13] в 1931–32 гг. Основываясь на работах С. Ли, А. Трессе (французского ученика С. Ли), а также молодого математика Б. Сегре, Э. Картан (который также защитил диссертацию под руководством С. Ли) дал существенно полную классификацию всех невырожденных вещественно-аналитических локальных гиперповерхностей Леви в $\mathbb{C}^2$, которая в конечном счете основана на далеко идущих работах С. Ли о классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Примерно тридцать лет спустя в 1974 г. алгоритм эквивалентности Э. Картана был применен в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 2$ С. С. Чженем и Ю. К. Мозером в [14] для получения *априори* полного списка дифференциальных инвариантов невырожденных вещественно-аналитических гиперповерхностей Леви в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 2$; см. также дальнейшее развитие этих работ А. Г. Витушкиным [1] и Н. Г. Кружилиным [2]. Тем не менее, ввиду анализа, проведенного в [14], задача классификации (в смысле С. Ли) вещественно-аналитических невырожденных гиперповерхностей Леви в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 3$ остается в сущности нерешенной, потому что список дифференциальных инвариантов не приводит непосредственно к списку всех возможных групп автоморфизмов.

1.1.2. Принцип отражения и регулярность CR-отображений. Рождение геометрии Коши–Римана относится к началу 1970 гг., в особенности, когда в 1974 г., Ч. Фефферман (см. [17]) установил, что любой биголоморфизм ограниченных сильно псевдовыпуклых отображений гладко продолжается до CR-диффеоморфизма их границ. В настоящее время имеется гипотеза, до сих пор не доказанная, что этот результат остается в силе без предположения о псевдовыпуклости. Таким образом, задача классификации ограниченных областей с точностью до биголоморфизмов сводится к классификации границ с точностью до CR-диффеоморфизмов. В то же время, С. Пинчук доказал в [4–6] важную теорему о локальном продолжении CR-отображений вещественно-аналитических гиперповерхностей, в которой и принцип отражения Шварца, и теорема продолжения Гартогса используются для аналитического продолжения CR-отображений. В 1977 г., обобщая основополагающий результат Пуанкаре, С. М. Вебстер установил в [34] общий результат, согласно которому CR отображения локально комплексно алгебраичны, если исходная гиперповерхность и её образ алгебраичны. Таким образом, имея ввиду обобщения теорем Каратеодори о граничной регулярности конформных отображений комплексной плоскости, основополагающие работы Ч. Феффермана, С. Пинчука и С. М. Вебстера привели к возникновению совершенно нового предмета о регулярности (или аналитической продолжимости) биголоморфных (или собственных) отображений (или локальных CR-отображений). С тех пор этот предмет в течении тридцати лет активно разрабатывался и в результате усилий многих математиков были получены некоторые замечательные уточнения оригинальных утверждений[1].

1.2. Общее идейное описание тем, исследуемых в части I

1.2.1. Деление на две части. Данная работа посвящена синтетическому изложению некоторых недавних результатов о так называемом *аналитическом принципе отражения*. Эта терминология оправдана тем, что большинство рассуждений и доказательств основано на рассмотрении рядов Тейлора. Главные темы части I этой работы, — это изучение *ab initio* локальной геометрии произвольных вещественно-алгебраических или аналитических подмногообразий $\mathbb{C}^n$, которые являются порождающими, т.е. они удовлетворяют условию $T_pM + iT_pM = T_p\mathbb{C}^n$ для любого $p \in M$. Основная цель — это объяснение того как обойти классическое понятие невырожденности Леви, принимая во внимание сложность, происходящую из произвольности размерности и коразмерности, для формулировки приемлемых обобщений принципа отражения. Часть II этой статьи (в одном из следующих томов этой серии) с собственным введением будет специально посвящена изучению аналитического принципа отражения. Настоящая же часть I является своего рода пространным предварительным материалом, краткое изложение которого будет дано ниже.

1.2.2. Канонические пары слоений, связанные с внешней комплексификацией многообразия локально общего положения. Как будет установлено в теореме 2.1.22, заданное вещественно-аналитическое порождающее подмногообразие M в $\mathbb{C}^n$, коразмерности d и CR-размерности $m = n - d$ может быть локально представлено в окрестности одной из его точек p в подходящих локальных координатах $t = (z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, обращающихся в нуль в p, с помощью d комплексных определяющих фундаментальных уравнений вида

$$\bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, z, w), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{1.2.3}$$

Здесь предполагается, что ряды Тейлора комплексно-аналитических функций $\Theta_j(\bar{z}, z, w) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m,\,\gamma\in\mathbb{N}^m,\,\delta\in\mathbb{N}^d} \Theta_{j,\beta,\gamma,\delta}\, \bar{z}^\beta\, z^\gamma\, w^\delta$ нормально сходятся в некотором полидиске с центром в начале координат в $\mathbb{C}^{m+m+d}$. Как будет очевидно далее, более предпочтительно рассматривать комплексные определяющие уравнения, а не вещественные. Конечно, сопряженные уравнения

$$w_j = \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \bar{w}) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m,\,\gamma\in\mathbb{N}^m,\,\delta\in\mathbb{N}^d} \overline{\Theta}_{j,\beta,\gamma,\delta}\, z^\beta\, \bar{z}^\gamma\, \bar{w}^\delta$$

определяют то же самое вещественное порождающее подмногообразие M, а неоднозначность, возникающая из-за комплексного характера определяющих уравнений, исчезает благодаря наличию следующих фундаментальных функциональных уравнений, полученных в теореме 2.1.32:

$$\bar{w}_j \equiv \Theta_j(\bar{z}, z, \overline{\Theta(\bar{z}, z, w)}), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{1.2.4}$$

Будем говорить, что M *алгебраическое* (в смысле Дж. Нэша) если ряды $\Theta_j(\bar{z}, z, w)$ алгебраические (степенной ряд $\varphi(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ называется *алгебраическим* (по Нэшу), если существует ненулевой многочлен $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ такой, что $P(x, \varphi(x)) \equiv 0$).

Следуя общей философии С. М. Вебстера (см. [37]), пусть $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ — новые независимые координаты, соответствующие $\bar{t} = (\bar{z}, \bar{w})$; определим *внешнюю комплексификацию* M как комплексное подмногообразие $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^{2n}$ коразмерности d, заданное уравнениями

$$\xi_j = \Theta_j(\zeta, z, w), \qquad j = 1, \ldots, d, \tag{1.2.5}$$

или, что эквивалентно, уравнениями $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \zeta, \xi)$, $j = 1, \ldots, d$. Заметим, что выражения $\Theta_j(\zeta, z, w) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m,\,\gamma\in\mathbb{N}^m,\,\delta\in\mathbb{N}^d} \Theta_{j,\beta,\gamma,\delta}\, \zeta^\beta\, z^\gamma\, w^\delta$ имеют смысл только потому, что Θ_j — сходящиеся

[1]Тем не менее, следует помнить об историческом расхождении между задачей классификации и принципом отражения. Возможно, что столь большее внимание в последнее десятилетие было сосредоточено на принципе отражения, который скрыт в исходной постановке задачи классификации областей. Хотя эта работа посвящена исключительно так называемому *аналитическому принципу отражения*, есть надежда, что придет время к возвращению к исходной программе исследований, заложенной в математических идеях С. Ли и Е. Картана, как считается, например, в недавних работах [30, 32].

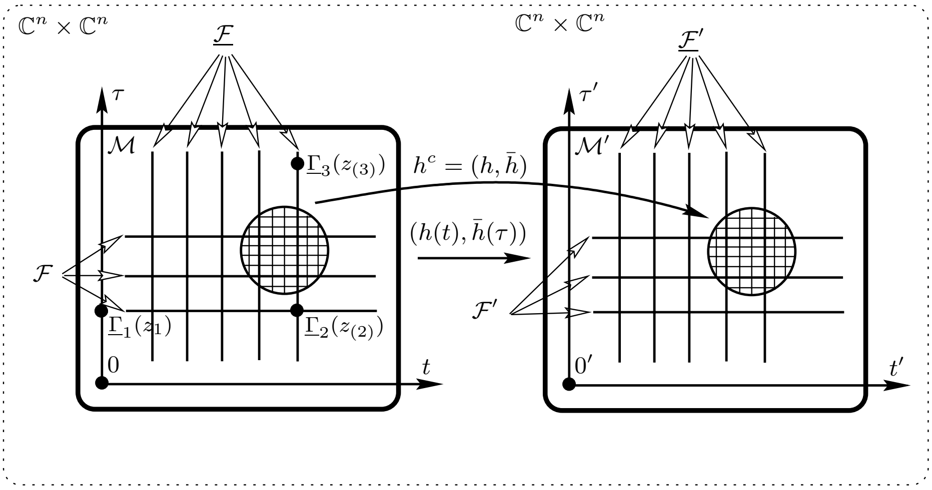

Рис. 1.2.8. Комплексифицированные отображения, сохраняющие пары слоений

степенные ряды. На этом подмногообразии $\mathcal{M}$ сразу возникают два слоения $\mathcal{F} =: \mathcal{M} \cap \{\tau = ct.\}$ и $\underline{\mathcal{F}} = \mathcal{M} \cap \{t = ct.\}$ на m-мерные комплексные подмногообразия, которые в сущности были открыты Б. Сегре в [26, 27] (см. также [12, 34]). Назовем листы слоения $\mathcal{F}$ *комплексифицированными множествами Сегре*, а листы слоения $\underline{\mathcal{F}}$ — *сопряженно-комплексифицированными множествами Сегре*. Как мы увидим далее в работе, главные черты геометрии M скрыты в переплетении этой пары слоений ($\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$), лежащих на комплексификации $\mathcal{M}$.

Поскольку нас интересует, в основном, изучение отображений, то пусть M' — другое порождающее подмногообразие коразмерности d' в $\mathbb{C}^{n'}$, аналогично заданное комплексными определяющими уравнениями $\bar{w}'_{j'} = \Theta'_{j'}(\bar{z}', z', w')$, $j' = 1, \dots, d'$, где $m' = n' - d'$ и $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$; пусть локальное CR-отображение $t' = h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n'}(t))$ из $M^d \subset \mathbb{C}^n$ в $M^{d'} \subset \mathbb{C}^{n'}$ задается *локальным степенным рядом*. Это означает в точности, что существует $d' \times d$-матрица степенных рядов $a(t, \bar{t})$ такая, что если $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$, то имеет место следующее соотношение векторных формальных степенных рядов в $\mathbb{C}[\![t, \bar{t}]\!]^{d'}$:

$$\bar{g}(\bar{t}) - \Theta'(\bar{f}(\bar{t}), f(t), g(t)) \equiv a(t, \bar{t}) \, [\bar{w} - \Theta(\bar{z}, z, w)]. \tag{1.2.6}$$

В данной статье мы будем предполагать, что M и M' вещественные алгебраические или аналитические. Рассмотрим три различных класса регулярности для отображения h, а именно, случаи когда $h(t)$ — формальный степенной ряд, когда он комплексно аналитический или комплексно алгебраический. Комплексифицируя (1.2.6) мы легко получим следующее тождество в $\mathbb{C}[\![t, \tau]\!]^{d'}$:

$$\bar{g}(\tau) - \Theta'(\bar{f}(\tau), f(t), g(t)) \equiv a(t, \tau) \, [\xi - \Theta(\zeta, z, w)]; \tag{1.2.7}$$

оно в точности означает, что отображение $(t', \tau') = (h(t), \bar{h}(\tau))$ отображает комплексификации $\mathcal{M}$ в комплексификации $\mathcal{M}'$. Это комплексифицированное отображение обозначим через $h^c(t, \tau) := (h(t), \bar{h}(\tau))$. Непосредственное, но решающее наблюдение состоит в том, что h^c сохраняет две пары слоений, а именно, оно удовлетворяет условиям $h^c(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$ и $h^c(\underline{\mathcal{F}}) \subset \underline{\mathcal{F}}'$. Символический рисунок 1.2.8 представляет собой попытку иллюстрации этого свойства[1].

Ввиду того, что $h^c = (h, \bar{h})$, некоторые свойства жесткости должны быть связаны с этими двумя парами слоений. Например, теорема С. М. Вебстера [34] утверждает, что каждое локально биголоморфное отображение $h : M \to M'$ между двумя вещественными алгебраическими гиперповерхностями, *невырожденными по Леви*, должно быть комплексно-алгебраическим отображением. Эта теорема может быть интуитивно интерпретирована так, что h^c (априори являющееся только

[1]Тем не менее, мы предупреждаем читателя, что это представление не вполне корректно, потому что коразмерности d и d' в объемлющем пространстве $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ объединения слоений $\mathcal{F} \cup \underline{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}' \cup \underline{\mathcal{F}}'$ невидимы на этом рисунке. Можно представить себе, например, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ — трехмерные пространства, снабженные парами слоений на горизонтальные ортогональные вещественные прямые.

комплексно-аналитическим) обязано быть столь же гладким, как и две пары слоений $(\mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}})$ и $(\mathcal{F}', \underline{\mathcal{F}}')$, а именно быть комплексно-алгебраическим.

1.2.9. Минимальность и конечная невырожденность наряду с невырожденностью по Леви. В теореме С. М. Вебстера, наряду с невырожденностью Леви, скрыты два существенно различных и независимых понятия: понятие *минимальности* (в смысле Ж.-М. Трепро и А. Е. Туманова, следующее общему подходу Г. Дж. Суссмана [33], (см. также [11]) и понятие *конечной невырожденности* (впервые введенное К. Диедерихом и С. М. Вебстером в [16], а также С. К. Ханом в [19], которое затем было изучено С. М. Баоенди, П. Эбенфельтом и Л. П. Ротшильдом в [10]).

Первое основное понятие минимальности имеет геометрическую природу и легко описывается с помощью пар слоений $(\mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}})$. Пусть $z_1 \in \mathbb{C}^m$. Обозначим через $\underline{\Gamma}_1(z_1)$ точку, лежащую в (вертикальном) m-мерном комплексном слое $\underline{\mathcal{F}}_0$, проходящем через начало координат на расстоянии z_1 от начала координат; см. рис. 1.2.8. Конечно, $\underline{\Gamma}_1(z_1)$ принадлежит $\mathcal{M}$. Другими словами, мы двигаемся из начала координат в вертикальном направлении на расстояние $z_1 \in \mathbb{C}^m$. Пусть $z_2 \in \mathbb{C}^m$. Затем из этой точки $\underline{\Gamma}_1(z_1)$ двигаемся в горизонтальном направлении на расстояние z_2, следуя комплексному m-мерному слою $\mathcal{F}_{\underline{\Gamma}_1(z_1)}$. Обозначим через $\underline{\Gamma}_2(z_{(2)})$ полученную точку; см. снова рис. 1.2.8, где используется обозначение $z_{(2)} := (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{2m}$. Конечно, точка $\underline{\Gamma}_2(z_{(2)})$ также принадлежит $\mathcal{M}$. Пусть $z_3 \in \mathbb{C}^m$. Далее двигаемся в вертикальном направлении на расстояние z_3; обозначим через $\underline{\Gamma}_3(z_{(3)})$, $z_{(3)} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^{3m}$, получившуюся точку. Более общо, следуя попеременно вдоль слоений $\underline{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно определить точку $\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})$, $z_{(k)} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^{km}$, принадлежащую $\mathcal{M}$. Легко видеть, что отображение $z_{(k)} \mapsto \underline{\Gamma}_k(z_{(k)})$ удовлетворяет соотношению $\underline{\Gamma}_k(0) = 0$ и обладает той же регулярностью, что и $\mathcal{M}$, а именно, оно является либо комплексно-алгебраическим, либо аналитическим. Назовем это отображение *k-й сопряженной цепью Сегре*. Точная конструкция $\underline{\Gamma}_k$ приводится в главе 2, где также даны комбинаторные формулы для $\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})$ через фундаментальные степенные ряды $\Theta_j(\zeta, z, w)$.

Комплексификация $\mathcal{M}$ называется *минимальной в начале координат*, если существует целое k такое, что для любой окрестности $\mathcal{V}_k$ начала координат в $\mathbb{C}^{km}$ ее образ $\underline{\Gamma}_k(\mathcal{V}_k)$ содержит окрестность начала координат в $\mathcal{M}$. Понятие минимальности интуитивно означает, что можно достичь любой точки окрестности начала координат в $\mathcal{M}$, двигаясь попеременно по каноническим слоениям. Так как слоения $\mathcal{F}$ и $\underline{\mathcal{F}}$ биголоморфно инвариантны, то так определенное понятие минимальности в одной точке $p \in M$ не зависит от выбора системы координат, обращающихся в нуль в точке p. Элементарно проверяется, что вещественно-аналитическая гиперповерхность, невырожденная по Леви в $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$, минимальна в любой ее точке.

Второе основное понятие — конечная невырожденность — аналитическое и может быть легко описано с помощью разложения в степенные ряды определяющих уравнений для $\mathcal{M}$:

$$\xi_j = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \zeta^\beta \, \Theta_{j,\beta}(t). \tag{1.2.10}$$

Здесь $\Theta_{j,\beta}(t) = \Theta_{j,\beta}(z, w)$ — комплексно-алгебраические или аналитические степенные ряды, нормально сходящиеся в равномерном полидиске с центром в начале координат. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Под *k-ым отображением Сегре* понимается локальное комплексно-алгебраическое или аналитическое отображение

$$\mathcal{Q}_k : \mathbb{C}^n \ni t \longmapsto \big(\Theta_{j,\beta}(t)\big)_{1 \leqslant j \leqslant d,\, |\beta| \leqslant k} \in \mathbb{C}^{N_{d,n,k}}, \tag{1.2.11}$$

где целое $N_{d,n,k}$ обозначает число k-х струй d-мерного векторного отображения n от n независимых переменных: $N_{d,n,k} = d\,\frac{(n+k)!}{n!\,k!}$. Многообразие M общего положения называется *конечно невырожденным в начале координат*, если существует целое k такое, что k-е отображение Сегре имеет (максимально возможный) ранг n в начале координат. Хотя отображение $\mathcal{Q}_k$ определяется через некоторую систему координат и, казалось бы, зависит от выбора комплексных определяющих уравнений для M, можно показать, что его свойства существенно биголоморфно и инвариантно связаны с M и, в частности, так определенное понятие конечной невырожденности в точке $p \in M$ не зависит от выбора координат, обращающихся в нуль в p. Можно показать, что невырожденность M в смысле Леви в начале координат (в том смысле, что ядро векторной формы Леви для M нулевое) эквивалентна тому, что отображение $\mathcal{Q}_1$ имеет ранг n в начале координат, а следовательно, понятие конечной невырожденности является обобщением понятия невырожденности по Леви. Более общо, M называется *голоморфно невырожденным в начале координат* (в смысле Н. Стэнтона; см. [29]), если существует целое k такое, что порождающий ранг $\mathcal{Q}_k$ равен n. Дальнейшее изучение условий невырожденности отображения $\mathcal{Q}_k$ проводится в главе 3. Поскольку эта тема предложена в [15] и [16],то мы также стремимся к замкнутому в себе изучению *струй многообразий Сегре* — фундаментальной проблеме, относительно которой нам не известны основополагающие источники.

1.2.12. Локальная геометрия в порождающей точке по Зарискому. Почему минимальность и конечная невырожденность являются адекватными понятиями с точки зрения локальной геометрии Коши–Римана? Во-первых, потому что можно показать, что для всякого связанного вещественно-алгебраического или аналитического подмногообразия M в $\mathbb{C}^n$ существует целое инвариантное $d_{2,M}$ и собственное вещественно-алгебраическое или аналитическое подмногообразие $E \subset M$ такие, что для любой точки $p \in M \backslash E$ найдутся окрестность V_p этой точки p в $\mathbb{C}^n$ и система комплексно-алгебраических или аналитических координат $(t_1, \dots, t_n)$ с центром в p такие, что $M \cap V_p$ содержится в трансверсальном пересечении $d_{2,M}$ плоских гиперповерхностей Леви, определенных по формулам $\{\bar{t}_1 = t_1, \dots, t_{d_{2,M}} = t_{d_{2,M}}\}$ и, кроме того, для любой постоянной $(c_1, \dots, c_{d_{2,M}}) \in \mathbb{R}^{d_{2,M}}$ пересечение $M_c := M \cap \{t_1 = c_1, \dots, t_{d_{2,M}} = c_{d_{2,M}}\} \cap V_p$ минимально в каждой точке (следствие 2.8.5). Здесь M_c — элементарные «блоки», и не существует «комплексных звеньев» между ними. Следовательно, минимальность можно рассматривать как хорошее «общее» предположение.

Во-вторых, можно установить далее, что существуют инвариантное целое n_M, $d \leqslant n_M \leqslant n$, а также другое собственное подмногообразие $F \subset M$ такие, что для всякой точки $p \in M \backslash F$ существуют окрестность V_p этой точки p в $\mathbb{C}^n$ и система координат с центром в p, относительно которой $M \cap V_p$ является произведением $M'_p \times \Delta^{n-n_M}$ порождающего подмногообразия $\underline{M'_p}$ коразмерности d в $\mathbb{C}^{n_M}$ на комплексный полидиск Δ^{n-n_M} такие, что $\underline{M'_p}$ конечно невырожден в его центральной точке (теорема 3.5.48). В частности, M голоморфно невырождено в том и только том случае, если $n = n_M$; в этом случае M конечно невырождено во всякой точке $M \backslash F$. Вообще говоря, с точки зрения CR-геометрии «вещественные» и «комплексные» понятия должны быть правильно согласованы, сомножитель Δ^{n-n_M}, в сущности, не нужен, а значит, конечная невырожденность должна представляться как хорошее «общее» предположение.

В то время как минимальность и конечная невырожденность не накладывают ограничений на размерность, хорошо известно, что предположение о невырожденности по Леви требует, чтобы $d \leqslant m^2$. Кроме того, существуют некоторые классы гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, форма Леви которых имеет ранг единица в каждой точке и которые конечно невырождены в каждой точке (см. примеры 3.2.15 и 3.2.20). В целом, мы уверены, что минимальность и конечная невырожденность — адекватные предположения.

1.2.13. Условия невырожденности CR-отображений степенных рядов. В главе 4 части I этой статьи будут введены различные условия невырожденности CR-отображений степенных рядов. Как и в § 1.2.2, пусть h — CR-отображение степенных рядов M в M', комплексификация которого $h^c = (h, \bar{h})$ удовлетворяет фундаментальным тождествам (1.2.7), которые после замены ξ на $\Theta(\zeta, t)$ дают следующие формальные тождества в $\mathbb{C}[\![\zeta, t]\!]$:

$$\bar{g}_{j'}(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv \Theta_{j'}(\bar{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)), \quad j' = 1, \dots, d'. \tag{1.2.14}$$

Рассмотрим следующие попарно коммутирующие m векторных полей, касательных к $\mathcal{M}$:

$$\underline{\mathcal{L}}_k := \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \tag{1.2.15}$$

которые порождают слои $\underline{\mathcal{F}}$ в каждой точке. Для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$ введем дифференцирование $\underline{\mathcal{L}}^\beta := \underline{\mathcal{L}}_1^{\beta_1} \cdots \underline{\mathcal{L}}_m^{\beta_m}$ порядка $|\beta|$, которое применим к уравнениям (1.2.14). После некоторых вычислений это даст выражение вида $R'_{j',\beta}(t,\tau,(\partial^\alpha_\tau \bar{h}(\tau))_{|\alpha|\leqslant|\beta|} : h(t))$, где $R'_{j',\beta}$ — некоторое выражение, аналитическое по переменным. Основываясь на свойствах бесконечного семейства функций $R'_{j',\beta}$, будут сформулированы пять технических условий невырожденности h. Дальнейшее интуитивное объяснение можно найти в начале введения к части II этой статьи.

Глава 2

ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННЫХ ПОРОЖДАЮЩИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ И ЦЕПИ СЕГРЕ

2.1. Элементарная локальная геометрия подмногообразий Коши–Римана

2.1.1. Формальные, аналитические и алгебраические ряды. Поскольку в двух частях этой статьи существенно рассматриваются локальные степенные ряды в начале координат, то начнем с классических определений. Пусть $\mathbb{K}$ — поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — положительное целое. Пусть $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$. Обозначим $|x| := \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$. Пусть $\mathbb{K}[\![x]\!]$ обозначает локальное кольцо формальных степенных рядов от n переменных $(x_1,\dots,x_n)$. По определению, элемент $\varphi(x) \in \mathbb{K}[\![x]\!]$ записывается в виде $\varphi(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \varphi_\alpha\, x^\alpha$, где $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ и $\varphi_\alpha \in \mathbb{K}$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Будем говорить, что φ — $\mathbb{K}$-*формальный степенной ряд*. Такой степенной ряд $\varphi(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \varphi_\alpha\, x^\alpha$ *тождественно равен нулю*, если все его коэффициенты φ_α равны нулю. Запишем это свойство как $\varphi(x) \equiv 0$. Если $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс из $\mathbb{N}^n$, то обозначим его *длину* через $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, соответствующую частную производную степенного ряда через $\partial^\alpha_x \varphi(x) := \partial^{\alpha_1}_{x_1}\cdots\partial^{\alpha_n}_{x_n}\varphi(x)$. Иногда будет также использоваться эквивалентное обозначение $\partial^{|\alpha|}\varphi(x)/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$. Имеем $\varphi_\alpha = [1/\alpha!]\,\partial^\alpha_x\varphi(x)|_{x=0}$. Если коэффициенты удовлетворяют оценке типа Коши $|\varphi_\alpha| \leqslant C\,\rho^{-|\alpha|}$, где $C > 0$ и $\rho > 0$, то ряд *нормально сходится* в полидиске $\Delta_n(\rho) = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| < \rho\}$. Будем говорить в этом случае, что ϕ $\mathbb{K}$–*аналитичен* и запишем это как $\varphi(x) \in \mathbb{K}\{x\}$. Если, кроме того, существует ненулевой многочлен $P(X_1,\dots,X_n,\Phi) \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n,\Phi]$ такой, что $P(x_1,\dots,x_n,\varphi(x_1,\dots,x_n)) \equiv 0$ при всех $x \in \ \Delta_n(\rho)$, то будем говорить, что φ $\mathbb{K}$-*алгебраичен* (в смысле Дж. Нэша) и писать $\varphi(x) \in \mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$. В силу классической теории исключения, получаем, что если, более общо, степенной ряд $\varphi(x) \in \mathbb{K}\{x\}$ удовлетворяет полиномиальному уравнению $P(\varphi(x)) \equiv 0$, где $P(\Phi) \in \mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}[T]$ — многочлен от неопределенных переменных Φ с коэффициентами в $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$, то $\varphi(x)$ $\mathbb{K}$–алгебраичен. Справедливы включения

$$\mathbb{K}[\![x]\!] \supset \mathbb{K}\{x\} \supset \mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}, \tag{2.1.2}$$

каждое из которых строгое. Все три кольца $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ и $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$ локальны, нётеровы и для них справедлива теорема деления Вейерштрасса.

2.1.3. Суперпозиция, дифференцирование и теорема о неявной функции. Далее, кольца $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ и $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$ устойчивы относительно элементарных алгебраических операций: суперпозиции и дифференцирования, и для них справедлива теорема о неявной функции. И только $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$ очень не устойчиво относительно интегрирования. Эти свойства собраны в следующую известную теорему.

Теорема 2.1.4. *Справедливы следующие три утверждения:*

(1) *Пусть n и d — положительные целые, $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^d$, пусть $\varphi(x)$ принадлежит $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ или $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$, а $\psi_1(y),\dots,\psi_n(y)$ принадлежит $\mathbb{K}[\![y]\!]$, $\mathbb{K}\{y\}$ или $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{y\}$ и обращается в нуль в начале координат. Тогда $\varphi(\psi_1(y),\dots,\psi_n(y))$ принадлежит $\mathbb{K}[\![y]\!]$, $\mathbb{K}\{y\}$ или $\mathcal{A}_\mathbb{K}(y)$.*

(2) *Пусть n — положительное целое и пусть $x \in \mathbb{K}^n$. Если степенной ряд $\varphi(x)$ принадлежит $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$, или $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$, то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}^n$ частная производная $\partial^\alpha_x\varphi(x)$ также принадлежит $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ или $\mathcal{A}_\mathbb{K}\{x\}$.*

(3) *Пусть n и d — положительные целые, $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^d$ и пусть $H_1(x,y), \dots, H_d(x,y)$ — множество формальных, аналитических или алгебраических степенных рядов, обращающихся в нуль в начале координат, а именно, $H_j(x,y)$ принадлежит $\mathbb{K}[\![x,y]\!]$, $\mathbb{K}\{x,y\}$ или $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{x,y\}$ и $H_j(0,0) = 0$ при $j = 1, \dots, d$. Предположим, что функциональный определитель $(\partial H_{j_1}/\partial y_{j_2}(0))_{1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant d}$ не обращается в нуль. Тогда существует единственное $\mathbb{K}^d$-значное отображение степенных рядов $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x))$, где $\varphi_j(x)$ принадлежат $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ или $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{x\}$ и обращаются в нуль в начале координат, такое что $H_j(x, \varphi(x)) \equiv 0$, $j = 1, \dots, d$.*

2.1.5. Локальные подмногообразия и их отображения. *Локальное подмногообразие M* в $\mathbb{K}^n$ определяется заданием $d \leqslant n$ степенных рядов $r_1(x), \dots, r_d(x)$, обращающихся в нуль в начале координат и принадлежащих $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ или $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{x\}$, такие что линейные формы $dr_1(0), \dots, dr_d(0)$ линейно независимы. Два набора $r(x) = (r_1(x), \dots, r_d(x))$ и $\widehat{r}(x) = (\widehat{r}_1(x), \dots, \widehat{r}_d(x))$ определяют *одно и то же подмногообразие*, если существует обратимая $d \times d$ матрица $a(x) = (a_{j_1,j_2}(x))_{1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant d}$ степенных рядов из $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ или $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{x\}$ такая, что $\widehat{r}_j(x) \equiv \sum_{l=1}^{d} a_{j,l}(x)\, r_l(x)$, или в матричных обозначениях $\widehat{r}(x) \equiv a(x)\, r(x)$. Ясно, что это — отношение эквивалентности между d-наборами степенных рядов $r(x) = (r_1(x), \dots, r_d(x))$, дифференциалы которых независимы в начале координат. Подмногообразие отождествляется с классом эквивалентности. Будем писать $M : r_1(x) = \dots = r_d(x) = 0$, помня, что отождествление M с его «нулевым множеством» не имеет смысла в формальной категории. Назовем d *коразмерностью* M. Пусть $x' = \Phi(x)$ — формальная, алгебраическая или аналитическая обратимая замена координат с центром в начале координат, а $x = \Phi'(x')$ обозначает обратную к ней. *Преобразованное подмногообразие* $M' := \Phi(M)$ определяется набором $r'(x') := (r_1(\Phi'(x')), \dots, r_d(\Phi'(x')))$. Из формальной аналитической или алгебраической теоремы о неявной функции следует, что существует локально обратимое преобразование $x' = \Phi(x)$ такое, что $r_1(\Phi'(x')) = x_1', \dots, r_d(\Phi'(x')) = x_d'$, при этом образ $M' := \Phi(M)$ записывается в виде $M' : x_1' = \dots = x_d' = 0$.

Пусть n и n' — положительные целые. Формальное, аналитическое или алгебраическое *локальное отображение из* $\mathbb{K}^n$ *в* $\mathbb{K}^{n'}$ состоит из множества n'–наборов $h(x) = (h_1(x), \dots, h_{n'}(x))$ степенных рядов $h_{i'}(x)$ из $\mathbb{K}[\![x]\!]$, $\mathbb{K}\{x\}$ или $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\{x\}$, с $h_{i'}(0) = 0$ при $i' = 1, \dots, n'$. Пишем $x' = h(x)$. Если n'' — третье положительное целое и $x'' = g(x')$ — еще одно формальное, аналитическое или алгебраическое отображение, то *суперпозиция* $x'' = g(h(x))$ — это набор степенных рядов $(g_1(h(x)), \dots, g_{n''}(h(x)))$, являющийся локальным отображением из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^{n''}$. Если $\widetilde{x} = \Phi(x)$ и $\widetilde{x}' = \Psi(x')$ — замены координат в $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^{n'}$, то *преобразованное отображение* $\widetilde{h}$ — это отображение $\widetilde{x}' = \widetilde{h}(\widetilde{x})$, где $\widetilde{h}(\widetilde{x}) := \Psi(h(\Phi^{-1}(\widetilde{x})))$. *Ранг в начале координат* отображения h — это ранг матрицы Якоби $(\partial h_{i'}(0)/\partial x_i)_{1 \leqslant i' \leqslant n', 1 \leqslant i \leqslant n}$. Обозначим его через $\mathrm{rk}_0(h)$. *Порождающий ранг* отображения h — это наибольшее целое $e \leqslant \min(n, n')$ такое, что существует $e \times e$ минор матрицы Якоби $\mathrm{Jac}\, h(x)$, не обращающийся тождественно в нуль, а все $(e+1) \times (e+1)$ миноры тождественно равны нулю. Обозначим его через $\mathrm{genrk}_{\mathbb{K}}(h)$.

Пусть теперь d и d' — положительные целые числа, а $M : r_1(x) = \dots = r_d(x) = 0$ и $M' : r_1'(x') = \dots = r_{d'}'(x') = 0$ — формальные, аналитические или алгебраические подмногообразия. Скажем, что *h отображает M в M'*, если существует $d' \times d$ матрица $b(x) = (b_{j',j}(x))_{1 \leqslant j' \leqslant d', 1 \leqslant j \leqslant d}$ из формальных, аналитических или алгебраических степенных рядов такая, что $r_{j'}'(h(x)) \equiv \sum_{j=1}^{d} b_{j',j}\, r_j(x)$, или в матричных обозначениях $r'(h(x)) \equiv b(x)\, r(x)$. Это определение имеет смысл, поскольку если $\widehat{r}(x) = a(x)\, r(x)$ и $\widehat{r}'(x') = a'(x')\, r'(x')$ обозначают эквивалентные определяющие формальные, аналитические или алгебраические степенные ряды для M и M', то $\widehat{r}'(h(x)) \equiv a'(h(x))\, r'(h(x)) \equiv a'(h(x))\, b(x)\, [a(x)]^{-1}\, \widehat{r}(x)$, так что $\widehat{r}'(h(x)) \equiv \widehat{b}(x)\, \widehat{r}(x)$ с $\widehat{b}(x) := a'(h(x))\, b(x)\, [a(x)]^{-1}$.

2.1.6. Подмногообразия Коши–Римана в $\mathbb{C}^n$. Мы намерены изучить некоторые аспекты геометрии вещественных подмногообразий в $\mathbb{C}^n$. Весьма часто в этой статье внимание будет сосредоточено в основном на локальном изучении кусков подмногообразий с центром в одной точке. *Тем не менее, подчеркнем, что язык ростков нигде не будет использован, так как иногда он может привести к недоразумениям.* Значит, нужно рассматривать точные окрестности центральных точек.

Не ограничивая общности, можно считать, что центральная точка — это начало некоторой подходящей системы координат $z = x+iy \in \mathbb{C}^n$. Таким образом, рассмотрим (локальное) *вещественное* подмногообразие M коразмерности d в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, проходящее через начало координат и определяемое уравнениями $r_1(x,y) = \cdots = r_d(x,y) = 0$, в которых дифференциалы $dr_1, \ldots, dr_d$ линейно независимы в начале координат. Если $z = x+iy \in \mathbb{C}$ или, эквивалентно, $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$, то используем кубические нормы $|x| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$, $|y| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k|$ и норму полидиска $|z| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |z_k|$, где $|z_k| = (x_k^2 + y_k^2)^{1/2}$. Для заданных $\nu \in \mathbb{N}$ с $\nu \geqslant 1$ и $\rho \in \mathbb{R}$ с $\rho > 0$ обозначим через $\mathbb{I}_\nu(\rho)$ вещественный куб $(-\rho,\rho)^\nu$ в $\mathbb{R}^\nu$. Если $\rho > 0$, то обозначим через $\Delta_n(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \rho\}$ открытый полидиск радиуса ρ с центром в начале координат. *Всюду в этой статье рассматриваются только кубы и полидиски.*

По поводу полезного и полного изложения теории структур Коши–Римана (CR-структур для краткости) мы отсылаем читателя к [9, 10]. Здесь же мы дадим только определения в целях замкнутости изложения. Пусть J обозначает комплексную структуру $T\mathbb{C}^n$, действующую на вещественные векторы как умножение на $\sqrt{-1}$, а следовательно, удовлетворяющую соотношению $J^2 = -\mathrm{Id}$. Пусть M — связное локальное вещественно-алгебраическое или аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ коразмерности d. Для $p \in M$ наименьшее J–инвариантное подпространство касательного пространства T_pM задается как $T_p^cM := T_pM \cap JT_pM$ и называется *комплексным касательным пространством к M в точке p.*

Определение 2.1.7. Подмногообразие M называется:

(1) *голоморфным*, если $T_p^cM = T_pM$ в каждой точке $p \in M$;
(2) *вполне вещественным*, если $T_p^cM = \{0\}$ в каждой точке $p \in M$;
(3) *порождающим*, если $T_pM + JT_pM = T_p\mathbb{C}^n$ в каждой точке $p \in M$;
(4) *многообразием Коши–Римана* (CR-многообразием для краткости), если размерность T_p^cM равна фиксированной постоянной в каждой точке $p \in M$.

В частности, голоморфные и вполне вещественные подмногообразия очевидно являются CR-подмногообразиями. Порождающие подмногообразия — также CR-подмногообразия (и в действительности минимально возможной CR-размерности), ввиду того, что с помощью формулы для размерности $\dim_{\mathbb{R}}(E+F) = \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E\cap F)$ вещественных векторных подпространств из $\dim_{\mathbb{R}}(T_pM + JT_pM) = 2n$ выводится, что $= dim_{\mathbb{R}}(T_pM \cap JT_pM) = 2n - 2d$, что постоянно. Напомним, что для порождающих подмногообразий CR-размерность равна $m = n - d$.

Используя формулу размерности, видим также, что $\dim_{\mathbb{R}} M \leqslant n$; кроме того, если M порождающее, то $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant n$. Если M вполне вещественно или порождающее, то $\dim_{\mathbb{R}} M = n$. В этом случае M называется *максимально вещественным*.

Два J–инвариантных подпространства $T_pM \cap JT_pM$ и $T_pM + JT_pM$, очевидно, имеют четную вещественную размерность. Обозначим через m_p целое $\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(T_pM \cap JT_pM)$ и назовем его *CR-размерностью M в точке p*. Обозначим через c_p целое $n - \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(T_pM + JT_pM)$ и назовем его *голоморфной коразмерностью M в точке p*. Конечно, $c_p = d - n + m_p$. В терминах этих целых чисел m_p и c_p можно переформулировать предыдущее определение следующим образом.

Определение 2.1.8. Вещественное подмногообразие $M \subset \mathbb{C}^n$ коразмерности d:

(1′) голоморфно, если $2n - d = \dim_{\mathbb{R}} M = 2m_p$ в каждой точке $p \in M$;
(2′) вполне вещественно, если $m_p = 0$ в каждой точке $p \in M$;
(3′) порождающее, если $m_p = n - d$ в каждой точке $p \in M$; в этом случае m_p мало, насколько это возможно, и целое $m := n - d$ называется *CR-размерностью* M;
(4′) CR-подмногообразие, если m_p равно фиксированной постоянной m в каждой точке $p \in M$; в этом случае целое m называется *CR-размерностью* M; кроме того, голоморфная коразмерность $c_p := d-n+m_p = d-n+m$ постоянна и называется *голоморфной коразмерностью* M.

По поводу доказательства следующей теоремы о локальном представлении в форме графика см. [9, 10].

Теорема 2.1.9. *Пусть M — вещественно–алгебраическое или аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ коразмерности d.*

(1) *Пусть M голоморфно, $m = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M$ — CR-размерность M, а $d_1 := \frac{1}{2}\,d$. Тогда для каждой точки $p_0 \in M$ существуют локальные комплексно–алгебраические или аналитические координаты $(z,w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d_1}$, обращающиеся в нуль в p_0, а также $\rho_1 > 0$ такое, что $M \cap \Delta_n(\rho_1)$ задается d_1 комплексными уравнениями $w_j = 0$, $j = 1,\ldots,d_1$ или, эквивалентно, d вещественными уравнениями $\operatorname{Re} w_j = \operatorname{Im} w_j = 0$, $j = 1,\ldots,d_1$.*

(2) *Пусть M вполне вещественно, $c = d - n \geqslant 0$ — голоморфная коразмерность M, а $d_1 := d - 2c$. Тогда для каждой точки $p_0 \in M$ существуют комплексно-алгебраические или аналитические координаты $(w,v) \in \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^c$ с центром в p_0, а также $\rho_1 > 0$ такое, что $M \cap \Delta_n(\rho_1)$ задается d вещественными уравнениями*

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_j = 0, & j = 1,\ldots,d_1, \\ \operatorname{Re} v_k = \operatorname{Im} v_k = 0, & k = 1,\ldots,c. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

(3) *Пусть M — порождающее подмногообразие и $m = d - n$ — CR-размерность M. Тогда для каждой точки $p_0 \in M$ при любом выборе комплексных аффинных координат $(z,w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ с центром в p_0 таких, что $T^c_{p_0}M \cap \{w = 0\} = \{0\}$, существуют $\rho_1 > 0$ и однозначно определенные вещественно-алгебраические или аналитические функции φ_j, $j = 1,\ldots,d$, нормально сходящиеся в кубе $\mathbb{I}_{2m+d}(2\rho_1)$ и обращающиеся в нуль в начале координат такие, что $M \cap \Delta_n(\rho_1)$ задается d вещественными уравнениями*

$$\operatorname{Im} w_j = \varphi_j(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} w), \qquad j = 1,\ldots,d. \tag{2.1.11}$$

При этом можно выбрать координаты так, чтобы T_0M задавалось бы уравнениями $\operatorname{Im} w_j = 0$, $j = 1,\ldots,d$; в этом случае, $d\varphi_j(0) = 0$ при $j = 1,\ldots,d$.

(4) *Пусть M — CR-подмногообразие, m — CR-размерность M, $c = d - n + m$ — голоморфная коразмерность M, а $d_1 := d - 2c \geqslant 0$. Тогда для каждой точки $p_0 \in M$ существуют локальные комплексно-алгебраические или аналитические координаты $(z,w,v) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^c$ с центром в p_0 с $T^c_{p_0}M \cap \{w = v = 0\} = \{0\}$, а также вещественно-алгебраические или аналитические функции φ_j, нормально сходящиеся в кубе $\mathbb{I}_{2m+d_1}(2\rho_1)$ для некоторого $\rho_1 > 0$ и обращающиеся в нуль в начале координат, такие что $M \cap \Delta_n(\rho_1)$ задается d вещественными уравнениями*

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_j = \varphi_j(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} w), & j = 1,\ldots,d_1, \\ \operatorname{Re} v_k = \operatorname{Im} v_k = 0, & k = 1,\ldots,c. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

В частности, M содержится (и является порождающим) в комплексном линейном подпространстве $(\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d_1} \times \{0\}) \cap \Delta_n(\rho_1)$, называемом внутренней комплексификацией подмногообразия M. Можно дополнительно выбрать координаты так, что T_0M задается уравнениями $\operatorname{Im} w_j = 0$, $j = 1,\ldots,d_1$, $\operatorname{Re} v_k = \operatorname{Im} v_k = 0$, $k = 1,\ldots,c$; в этом случае $d\varphi_j(0) = 0$ при $j = 1,\ldots,d_1$.

2.1.13. Комплексные определяющие уравнения. Рассмотрим теперь вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие M в $\mathbb{C}^n$, заданное как в теореме 2.1.9 вещественными определяющими уравнениями $v_j = \varphi_j(x,y,u)$, $j = 1,\ldots,d$, где $(z,w) = (x+iy, u+iv) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Если явно не оговорено противное, *рассматриваемые порождающие подмногообразия будут всегда иметь положительную коразмерность $d \geqslant 1$ и положительную CR-размерность $m \geqslant 1$*. Не нарушая общности, можно считать, что $d\varphi_j(0) = 0$ при $j = 1,\ldots,d$. Заменяя x на $(z+\bar{z})/2$, y — на $(z-\bar{z})/2i$, u — на $(w+\bar{w})/2$, а v — на $(w-\bar{w})/2i$ в определяющих уравнениях M, получим

$$w_j - \frac{\bar{w}_j}{2i} = \varphi_j\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}, \frac{w+\bar{w}}{2}\right), \tag{2.1.14}$$

при $j = 1,\ldots,d$, с помощью алгебраической или аналитической теоремы о неявной функции выразим $\bar{w}_j$ через $(\bar{z},z,w)$, что дает

$$\bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z},z,w), \quad j = 1,\ldots,d, \tag{2.1.15}$$

для некоторых комплексных алгебраических или аналитических функций Θ_j, обращающихся в нуль в начале координат, которые определены в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^{2m+d}$. Уменьшая, если нужно, $\rho_1 > 0$, можно считать, что Θ_j нормально сходятся в $\Delta_{2m+d}(2\rho_1)$. Эти новые уравнения называются *комплексными определяющими уравнениями* для M; сравним их с вещественными определяющими уравнениями.

Вообще говоря, для заданного произвольного ряда $\Phi(t) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n} \Phi_\gamma t^\gamma$ с комплексными коэффициентами $\Phi_\gamma \in \mathbb{C}$ нужно определить ряд $\overline{\Phi}(t) := \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n} \overline{\Phi}_\gamma t^\gamma$ с помощью одного только сопряжения его комплексных коэффициентов. При таком определении оператор сопряжения (черта сверху) можно независимо применять к функциям и переменным, как это следует из функционального уравнения $\overline{\Phi(t)} \equiv \overline{\Phi}(\bar{t})$. Это свойство будет очень часто применяться в дальнейшем.

Пусть $(z, w) \in M$. Сопрягая определяющие уравнения M, получаем $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \bar{w})$ и, заменяя $\bar{w}_l$ на их значения Θ_l, имеем следующее уравнение, справедливое для всех (z, w), принадлежащих M:

$$w_j = \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \Theta(\bar{z}, z, w)), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{2.1.16}$$

Однако поскольку можно записать, что $(z, w) = (z, u+i\varphi(x, y, u)) \in M$, где $u = (u_1, \ldots, u_d) = \operatorname{Re} w$, можно заменить их в (2.1.16), что даст тождество степенных рядов от переменных (x, y, u) при всех $(x, y, u) \in \mathbb{I}_{2m+d}(\rho_1)$. Так как $(2m + d)$-мерное вещественное алгебраическое или аналитическое подмногообразие $\{(x, y, u + i\varphi(x, y, u))\}$ в $\mathbb{C}^{2m+d}$ максимально вещественно, то по принципу единственности для порождающих, получаем следующие тождества степенных рядов:

$$w_j \equiv \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \Theta(\bar{z}, z, w)), \qquad j = 1, \ldots, d, \tag{2.1.17}$$

в $\mathbb{C}\{z, \bar{z}, \bar{w}\}$ или для всех $(\bar{z}, z, w) \in \Delta_{2m+d}(\rho_1)$.

Обратно, допустим, что справедливы эти тождества степенных рядов (2.1.17). По теореме о неявной функции, существуют единственные комплексные алгебраические или аналитические решения $\varphi_j((z + \zeta)/2, (z - \zeta)/2i, w)$, $j = 1, \ldots, d$, $z \in \mathbb{C}^m$, $\zeta \in \mathbb{C}^m$, $w \in \mathbb{C}^d$, функциональных уравнений

$$w_j - i\varphi_j((z + \zeta)/2, (z - \zeta)/2i, \zeta, w) \equiv \Theta_j(\zeta, z, w + i\varphi((z + \zeta)/2, (z - \zeta)/2i, w)), \tag{2.1.18}$$

при $j = 1, \ldots, d$. Покажем, что $\varphi_j(x, y, u)$ вещественно при $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ и $u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$. В самом деле, заменяя первые w на $u + i\varphi((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i, u)$ в функциональных уравнениях (2.1.17), получаем

$$u_j + i\varphi_j((z + \bar{z})/2,\ (z - \bar{z})/2i, u) \equiv \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \Theta(\bar{z}, z, u + i\varphi((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i, u))), \tag{2.1.19}$$

при $j = 1, \ldots, d$. Используя неявные уравнения (2.1.18), определяющие φ с заменой ζ на $\bar{z}$ и с w — на u, можно упростить члены в Θ в (2.1.19), что приводит к тождествам

$$u_j + i\varphi_j(x, y, u) \equiv \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, u - i\varphi(x, y, u)), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{2.1.20}$$

Переходя к комплексно сопряженным выражения, получаем

$$u_j - i\overline{\varphi}_j(x, y, u) \equiv \Theta_j(\bar{z}, z, u + i\overline{\varphi}(x, y, u)), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{2.1.21}$$

Сопоставляя их с неявными уравнениями (2.1.18) с заменой ζ на $\bar{z}$ и w — на u, видим, что $\varphi(x, y, u)$ и $\overline{\varphi}(x, y, u)$ — решения этих же неявных уравнений. Ввиду единственности в теореме о неявной функции, получаем $\overline{\varphi}(x, y, u) \equiv \varphi(x, y, u)$, что и утверждалось. Наконец, тождества $u_j - i\varphi_j(x, y, u) \equiv \Theta_j(z, \bar{z}, u + i\varphi(x, y, u))$ показывают, что множество точек (z, w) таких, что $\bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, z, w)$, $j = 1, \ldots, d$, совпадает с вещественным алгебраическим или аналитическим подмногообразием, заданным уравнениями $v_j = \varphi_j(x, y, u)$ при $j = 1, \ldots d$. Таким образом, доказана следующая теорема, которая будет очень часто использоваться в дальнейшем.

Теорема 2.1.22. *Пусть M — вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие коразмерности $d \geqslant 1$ и CR-размерности $m = n - d \geqslant 1$ в $\mathbb{C}^n$. Тогда для каждой точки $p_0 \in M$ при любом выборе комплексных аффинных координат $t = (z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ с центром в p_0 таких, что $T^c_{p_0} M \cap \{w = 0\} = \{0\}$, существуют $\rho_1 > 0$ и единственные комплексные алгебраические или аналитические функции Θ_j, $j = 1, \ldots, d$, обращающиеся в нуль в начале координат, определенные и нормально сходящиеся в $\Delta_{2m+d}(2\rho_1)$ такие, что $M \cap \Delta_n(\rho_1)$ задается d комплексными определяющими уравнениями*

$$\bar{w}_j = \Theta_j(z, \bar{z}, w), \quad j = 1, \ldots, d, \tag{2.1.23}$$

или, эквивалентно, d сопряженными комплексными определяющими уравнениями

$$w_j = \overline{\Theta}_j(z, \bar{z}, \bar{w}), \quad j = 1, \ldots, d. \tag{2.1.24}$$

Здесь векторное отображение $\Theta := (\Theta_1, \ldots, \Theta_d)$ удовлетворяет следующим сопряженным векторным функциональным уравнениям

$$\begin{cases} \bar{w} \equiv \Theta(\bar{z}, z, \overline{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w})), \\ w \equiv \overline{\Theta}(z, \bar{z}, \Theta(\bar{z}, z, w)). \end{cases} \tag{2.1.25}$$

Обратно, пусть задан набор $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_d)$ комплексных алгебраических или аналитических функций, обращающихся в нуль в начале координат, нормально сходящихся в $\Delta_{2m+d}(2\rho_1)$ для некоторого $\rho_1 > 0$ и удовлетворяющих функциональным уравнениям (2.1.25). *Тогда множество $M := \{(z, w) \in \Delta_n(\rho_1) : \bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, z, w),\ j = 1, \ldots, d\}$, — вещественное порождающее подмногообразие коразмерности d. Наконец, с помощью этих уравнений базис $(0, 1)$ векторных полей, касательных к M, задается следующими соотношениями при $k = 1, \ldots, m$:*

$$\overline{L}_k := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \bar{z}_k}(\bar{z}, z, w)\, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}. \tag{2.1.26}$$

Пусть $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ — новые комплексные переменные. Как и в § 2.2.10 ниже, определим *внутреннюю комплексификацию $\mathcal{M}$ подмногообразия M* как комплексно аналитическое или алгебраическое подмногообразие коразмерности d в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, определенное уравнениями $\xi_j - \Theta_j(\zeta, t) = 0$, $j = 1, \ldots, d$. Следующая лемма, эквивалентная функциональным уравнениям (2.1.25), также будет очень полезна в дальнейшем.

Лемма 2.1.27. *Существует обратимая $d \times d$ матрица $a(t, \tau)$ алгебраических или аналитических степенных рядов такая, что*

$$\xi - \Theta(\zeta, t) \equiv a(t, \tau)\,[w - \overline{\Theta}(w, \tau)]. \tag{2.1.28}$$

Доказательство. Рассмотрим инволюцию σ, определенную по формуле $\sigma(t, \tau) := (\tau, t)$. Будем говорить, что идеал $\mathcal{J}$ в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t, \tau\}$ или в $\mathbb{C}\{t, \tau\}$ *инвариантен относительно инволюции σ*, если для любого элемента $\psi(t, \tau) \in \mathcal{J}$ имеем $\overline{\psi}(\sigma(t, \tau)) = \overline{\psi}(\tau, t) \in \mathcal{J}$. Тогда идеал $\mathcal{J}$, порожденный функциями $(w_j - \xi_j)/2i - \varphi_j((z + \zeta)/2, (z - \zeta)/2i, (w + \xi)/2)$, при $j = 1, \ldots, d$, очевидно, инвариантен относительно инволюции σ, поскольку φ_j — вещественные функции. По теореме о неявной функции их можно представить как функции от ξ; тогда

$$\mathcal{J} = \langle \xi_j - \Theta(\zeta, t) \rangle_{1 \leqslant j \leqslant d} = \sigma_*(\mathcal{J}) = \left\langle w_j - \overline{\Theta}(z, \tau) \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant d}, \tag{2.1.29}$$

откуда следует существование матрицы $a(t, \tau)$. □

2.1.30. Существование нормальных координат. Для удобства обозначений в вещественной алгебраической или аналитической категории представляется приемлемым рассматривать степенные ряды не от $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, а от $(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$, что эквивалентно, поскольку $(x, y) = ((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i)$ и $(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy)$.

Соглашение 2.1.31. Так как локальное порождающее многообразие M алгебраично, аналитично или формально, то будем записывать его определяющие уравнения $v_j = \varphi_j(z, \bar{z}, u)$, при $j = 1, \ldots, d$ в координатах $(z, w) = (x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, где φ_j — степенные ряды от $(z, \bar{z}, u)$ с центром в начале координат. В таком представлении вещественные и комплексные переменные перемешаны.

Теперь можно установить существование *нормальных координат*, которые являются такими координатами, для которых выполнены условия (2.1.34). Легко проверяется, что такие координаты не единственны.

Теорема 2.1.32. *Пусть M такое же, как в теореме* 2.1.22. *Тогда существует комплексная алгебраическая или аналитическая замена координат $t' = h(t)$ специального вида*

$$z' = z, \quad w' = g(z, w), \tag{2.1.33}$$

такая что образ $M' := h(M)$ допускает вещественные определяющие уравнения вида $v'_j = \varphi'_j(z', \bar{z}', u')$, $j = 1, \ldots, d$, а также комплексные определяющие уравнения вида $\bar{w}'_j = \Theta'_j(\bar{z}', z', w')$, $j = 1, \ldots, d$, удовлетворяющие тождествам

$$\begin{cases} \varphi'_j(0, \bar{z}', u') \equiv \varphi'_j(z', 0, u') \equiv 0, \\ \Theta'_j(0, z', w') \equiv \Theta'_j(\bar{z}', 0, w') \equiv w'_j. \end{cases} \tag{2.1.34}$$

Доказательство. После линейного преобразования вида (2.1.33) можно считать, что $T_0M = \{v = 0\}$, а следовательно, $d\varphi_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, d$. Далее, локальное преобразование, заданное по формулам $z = z'$, $w = w' + i\varphi(0, 0, w')$, выпрямляет максимальное вещественное d-мерное подмногообразие

$$\{(0, v + i\varphi(0, 0, v)) : j = 1, \ldots, d\} \subset \{0\} \times \Delta_d(\rho_1) \tag{2.1.35}$$

в d-мерную плоскость $\{(0, v')\}$. Таким образом, можно считать также, что $\varphi_j(0, 0, v) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, d$. Тогда $\Theta_j(0, 0, w) \equiv w_j$. Продолжим доказательство с помощью комплексных определяющих уравнений M.

Однако прежде чем идти дальше, отметим, во-первых, что ввиду вещественности степенных рядов φ'_j, имеем $\varphi'_j(z', \bar{z}', u') \equiv \overline{\varphi}'_j(\bar{z}', z', u')$, откуда следует, что множество соотношений $\varphi'_j(0, \bar{z}', u') \equiv 0$, $j = 1, \ldots, d$, эквивалентно множеству соотношений $\varphi'_j(z', 0, u') \equiv 0$, $j = 1, \ldots, d$. Во-вторых, с помощью функциональных соотношений (2.1.25) сразу видим, что множество соотношений $\Theta'_j(0, z', w') \equiv w'_j$, $j = 1, \ldots, d$, также эквивалентно множеству соотношений $\Theta'_j(\bar{z}', 0, w') \equiv w'_j$, $j = 1, \ldots, d$. В-третьих, проследив, как вещественные и комплексные определяющие уравнения M' связаны между собой (см. доказательство теоремы 2.1.22), легко заметить, что множество соотношений в первой строке в (2.1.34) эквивалентно множеству соотношений во второй строке в (2.1.34). Следовательно, достаточно найти замену координат вида (2.1.33) такую, что $\Theta'_j(\bar{z}', 0, w') \equiv w'_j$ при $j = 1, \ldots, d$.

Далее, утверждается, что преобразование $(z', w') := (z, \Theta(0, z, w))$ — подходящее. В самом деле, во внутренней комплексификации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, $(z, w, \zeta, \xi) \in \mathcal{M}$ в том и только том случае, если $(z, \Theta(0, z, w), \zeta, \overline{\Theta}(0, \zeta, \xi)) \in \mathcal{M}'$, откуда

$$\overline{\Theta}(0, \zeta, \xi) = \xi' = \Theta'(\zeta, z, \Theta(0, z, w)) \tag{2.1.36}$$

снова для $(z, w, \zeta, \xi) \in \mathcal{M}$. Заменяя ξ на его значение $\Theta(\zeta, z, w)$ на $\mathcal{M}$ и полагая $z = 0$, получаем следующее тождество степенных рядов

$$\overline{\Theta}(0, \zeta, \Theta(\zeta, 0, w)) \equiv \Theta'(\zeta, 0, \Theta(0, 0, w)). \tag{2.1.37}$$

Напомним, однако, что справедливы функциональные уравнения (2.1.25), которые позволяют упростить левую часть, а также напомним, что уже имеется соотношение $\Theta(0, 0, w) \equiv w$, позволяющее упростить правую часть; получаем тогда требуемое соотношение для степенных рядов

$$w \equiv \Theta'(\zeta, 0, w). \tag{2.1.38}$$

Это завершает доказательство теоремы 2.1.32. □

2.1.39. Формальный случай. Все предыдущие вычисления имеют смысл в формальном случае. Специально подчеркнем, что теоремы 2.1.22 и 2.1.32 верны в формальной категории.

2.1.40. Заключение. Как будет отмечено и обосновано далее, представление M с помощью комплексных определяющих уравнений существенно более удобно и гибко, чем представление с помощью вещественных определяющих уравнений. Напомним, что если явно не оговорено противное, *рассматриваемые порождающие подмногообразия всегда имеют положительную коразмерность $d \geqslant 1$ и положительную CR-размерность $m \geqslant 1$.*

Обозначения 2.1.41. Всюду в этой статье, зафиксируем следующие обозначения:

(1) Подмногообразие M в $\mathbb{C}^n$ будет иметь коразмерность $d \geqslant 1$ и CR-размерность $m = n - d \geqslant 1$. Координаты на $\mathbb{C}^n$ будут обозначаться через

$$t = (t_1, \ldots, t_n) = (z_1, \ldots, z_k, w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^n, \tag{2.1.42}$$

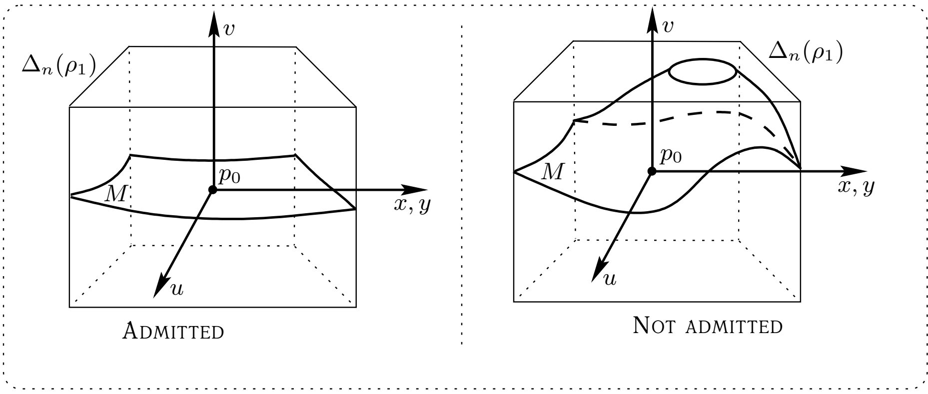

Рис. 2.1.47. Локальное порождающее подмногообразие

а комплексные определяющие уравнения M — через $\bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, z, w)$, $j = 1, \ldots, d$.

(2) Индекс $i \in \mathbb{N}$ будет меняться от 1 до n, а именно, $i = 1, \ldots, n$, например, в обозначении векторного поля $L = \sum_{i=1}^n a_i(t)\,\partial_{t_i}$. Буквой i будет обозначаться также и $\sqrt{-1}$.

(3) Индекс $j \in \mathbb{N}$ будет меняться от 1 до d, а именно, $j = 1, \ldots, d$.

(4) Индекс $k \in \mathbb{N}$ будет меняться от 1 до m, а именно, $k = 1, \ldots, m$. Буква k также часто будет использоваться для обозначения другого целого, меняющегося в $\mathbb{N}$.

(5) Обозначим также $z_k = x_k + iy_k$, $w_j = u_j + iv_j$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $u = (u_1, \ldots, u_d)$ и $v = (v_1, \ldots, v_d)$.

2.1.43. Точное определение локального порождающего многообразия. Всюду в этой статье часто будет нужна локализация геометрических построений. Поэтому необходимо раз и навсегда сформулировать жесткий и точный выбор локального представления.

Определение 2.1.44. *Локальное порождающее подмногообразие M в $\mathbb{C}^n$* коразмерности $d \geqslant 1$ и CR-размерности $m = n - d \geqslant 1$ определяется в координатах $t = (z, w) = (x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, обращающихся в нуль в точке $p_0 \in M$ как график

$$M = \{(z, w) \in \Delta_n(\rho_1) : v_j = \varphi_j(x, y, u),\ j = 1, \ldots, d\}, \tag{2.1.45}$$

где функции φ_j — вещественные алгебраические или аналитические при $|(x, y, u)| < 2\rho_1$. Требуется также, что для всех ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$, выполнено соотношение $|\varphi(x, y, u)| < \rho$, если $|(x, y, u)| < \rho$, а именно, M — «хороший график», изображенный на рис. 2.1.47. Конечно, после возможного уменьшения $\rho_1 > 0$, это условие будет выполняться автоматически, если взять координаты такими, что $T_0 M = \{v = 0\}$. На самом деле, более предпочтительно представление с помощью комплексных определяющих уравнений

$$M = \{(z, w) \in \Delta_n(\rho_1) : \bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, z, w),\ j = 1, \ldots, d\}, \tag{2.1.46}$$

где M — снова хороший график и Θ_j нормально сходятся при $|(\bar{z}, z, w)| < 2\rho_1$.

Процесс локализации состоит в последовательном выборе полидисков $\Delta_n(\rho_2)$, $\Delta_n(\rho_3)$, $\Delta_n(\rho_4)$, $\ldots$, $0 < \cdots < \rho_4 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$, где выбор меньших радиусов ρ_2, ρ_3, ρ_4 зависит от построения дальнейших геометрических объектов, связанных с M. Говорят, что p_0 — *центральная точка*. Этот процесс можно проиллюстрировать символически рисунком 2.1.48.

Если задано глобально определенное связное порождающее подмногообразие M, то для любой точки $p_0 \in M$, очевидно, можно *локализовать M в точке p_0*, выбирая комплексные аффинные координаты, обращающиеся в нуль в точке p_0 такие, что M в окрестности точки p_0 представимо, как в определении 2.1.44.

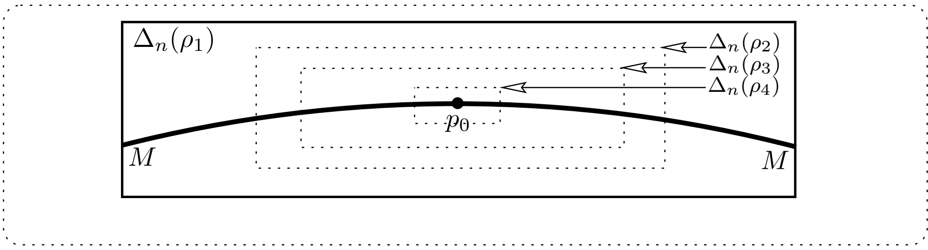

Рис. 2.1.48. Локальное порождающее подмногообразие M в полидиске $\Delta_n(\rho_1)$

2.2. Многообразия Сегре и внешняя комплексификация

2.2.1. Условие вещественности. Хотя в основном рассматриваются комплексные определяющие уравнения, иногда полезно рассматривать и произвольные вещественные определяющие уравнения. Рассмотрим поэтому произвольное множество d вещественных определяющих уравнений M, $\rho_j(t,\bar t)=0$, $j=1,\dots,d$, например, $\rho_j(t,\bar t):=v_j-\varphi_j(z,\bar z,u)$ с $\rho_j(0)=0$. Здесь предполагается, что комплексные дифференциалы $\partial\rho_1,\dots,\partial\rho_d$ линейно независимы в начале координат, так что M — порождающие. Ввиду вещественности ρ_j, имеем $\rho_j(t,\bar t)\equiv\overline{\rho_j(t,\bar t)}$. Разлагая ρ_j в степенные ряды, можно написать $\rho_j(t,\bar t)\equiv\sum_{\mu,\,\nu\in\mathbb{N}^n}\rho_{j,\mu,\nu}\,t^\mu\,\bar t^\nu$, где $\rho_{j,\mu,\nu}\in\mathbb{C}$. Из этого функционального уравнения выводим, что $\rho_{j,\mu,\nu}=\overline{\rho_{j,\nu,\mu}}$ при всех j,μ,ν. Обратно, всякий такой степенной ряд с комплексными коэффициентами, удовлетворяющими соотношению $\rho_{j,\mu,\nu}=\overline{\rho_{j,\nu,\mu}}$, принимает только вещественные значения. В качестве приложения можно написать, что $\overline{\rho_j(t,\bar t)}\equiv\bar\rho_j(\bar t,t)$, так что условие вещественности на ρ_j просто есть

$$\rho_j(t,\bar t)\equiv\bar\rho_j(t,\bar t),\qquad j=1,\dots,d. \tag{2.2.2}$$

Пусть теперь $\tau\in\mathbb{C}^n$ — новая независимая переменная, соответствующая внешней комплексификации переменной $\bar t$. Будем записывать это символически: $\tau:=(\bar t)^c$, где буква «c» обозначает слово «комплексификация». Поскольку (2.2.2) эквивалентно $\rho_{j,\mu,\nu}=\overline{\rho_{j,\nu,\mu}}$, то видим, что комплексифицированные ряды $\rho_j(t,\tau)$ удовлетворяют функциональному уравнению симметрии

$$\rho_j(t,\tau)\equiv\bar\rho_j(\tau,t),\qquad j=1,\dots,d, \tag{2.2.3}$$

которое легко получается заменой $\bar t$ на τ в (2.2.2). Суммируем эти наблюдения следующим образом.

Лемма 2.2.4. *Так как определяющие функции $\rho_j(t,\bar t)=\sum_{\mu,\nu\in\mathbb{N}^n}\rho_{j,\mu,\nu}\,t^\mu\,\bar t^\nu$, $j=1,\dots,d$, — вещественные степенные ряды, то $\rho_{j,\mu,\nu}=\overline{\rho_{j,\nu,\mu}}$ для всех j,μ,ν и*

(1) $\rho_j(t,\tau)\equiv\bar\rho_j(\tau,t)$.
(2) $\rho_j(t,\tau)=0$ *тогда и только тогда, когда* $\rho_j(\bar\tau,\bar t)=0$.

Свойство **(2)** тривиально следует из **(1)** и будет полезно в дальнейшем.

2.2.5. Классические многообразия Сегре и сопряженные многообразия Сегре. Пусть $\rho_1>0$ таково, что ряды ρ_j нормально сходятся в $\Delta_{2n}(2\rho_1)$; рассмотрим множество нулей $M:=\{t\in\Delta_n(\rho_1):\ \rho_j(t,\bar t)=0\}$. Пусть $\rho'_j(t,\bar t)=0$ — другие определяющие уравнения для этого же порождающего подмногообразия. Тогда существует обратимая $d\times d$ матрица $a(t,\bar t)$ вещественных степенных рядов (той же регулярности, что и M, а именно, алгебраическая или аналитическая) такая, что $\rho'(t,\bar t)\equiv a(t,\bar t)\,\rho(t,\bar t)$. С помощью этого соотношения леко видеть, что (классическое) *многообразие Сегре*, ассоциированное с точкой $p\in\Delta_n(\rho_1)$ с координатами $t_p=(t_{1p},\dots,t_{np})\in\mathbb{C}^n$, определенное, как в [34]

$$S_{\bar t_p}:=\{t\in\Delta_n(\rho_1):\ \rho_j(t,\bar t_p)=0,\ j=1,\dots,d\}, \tag{2.2.6}$$

не зависит от выбора определяющих уравнений M, а именно, имеем также $S_{\bar t_p}=\{t\in\Delta_n(\rho_1):\ \rho'(t,\bar t_p)=0\}$. В литературе это многообразие Сегре обычно обозначается через Q_p; см. [5,6,10,15,16,19,28,31,32,34–36]. Здесь же выбрана буква «S», потому что она — начальная в фамилии Сегре.

Что более более важно, обозначаем $S_{\bar{t}_p}$ или $S_{\bar{p}}$, а не S_p *с чертой комплексного сопряжения над* t_p, как в выражении $\rho_j(t,\bar{t}_p)$.

Фактически, ввиду симметрии, приходим также к определению *сопряженного многообразия Сегре* как

$$\overline{S}_{t_p} := \{\bar{t} \in \Delta_n(\rho_1) : \rho_j(t_p,\bar{t}) = 0,\ j = 1,\dots,d\}. \tag{2.2.7}$$

Насколько известно автору, сопряженные многообразия Сегре не рассматривались в литературе. На самом деле, если для любого подмножества $E \subset \mathbb{C}^n$ определить множество сопряженных точек E как $\overline{E} := \{\bar{t} : t \in E\}$, то $\overline{S}_{t_p}$ — множество сопряженных точек $S_{\bar{t}_p}$; читатель может проверить это с помощью леммы 2.2.4. Поэтому можно написать, что

$$\overline{S}_{t_p} = \overline{S}_{\bar{\bar{t}}_p} = \overline{S_{\bar{t}_p}} \qquad \text{и} \qquad S_{\bar{t}_p} = \overline{\overline{S}}_{\bar{t}_p} = \overline{\overline{S}_{t_p}}. \tag{2.2.8}$$

с оператором комплексного сопряжения, действующим отдельно как инволюция на букву S и ее аргумент t_p. Наконец, заметим, что третье определение $\{t \in \Delta_n(\rho_1) : \rho_j(t_p,\bar{t}) = 0, 1,\dots,d\}$ (вместо (2.2.7)) не дает корректного определения сопряженного многообразия Сегре, потому что из леммы 2.2.4 следует, что это множество на самом деле совпадает с $S_{\bar{t}_p}$.

Утверждается, что и многообразие Сегре и сопряженное многообразие Сегре — биголоморфные инварианты M. В самом деле, пусть $t' = h(t)$ — локальная биголоморфная замена координат; обозначим через $t = h'(t')$ ее обратную, и пусть $M' := h(M)$ и $\rho'_j(t',\bar{t}') := \rho_j(h'(t'),\bar{h}'(\bar{t}'))$ — определяющие уравнения M' при $j = 1,\dots,d$. Так как h отображает M в M', В соответствии с § 2.1.5, существует обратимая $d\times d$ матрица $a(t,\bar{t})$ степенных рядов такая, что $\rho'(h(t),\bar{h}(\bar{t})) \equiv a(t,\bar{t})\,\rho(t,\bar{t})$. Из этого соотношения легко следует, что $h(S_{\bar{t}_p}) = S'_{\bar{h}(\bar{t}_p)}$ и $h(\overline{S}_{t_p}) = \overline{S}'_{\bar{h}(\bar{t}_p)}$, что и утверждалось. Приведем, наконец, некоторые классические свойства.

Лемма 2.2.9. *Справедливы следующие свойства:*

(1) $q \in S_{\bar{t}_p}$ *в том и только том случае, если* $p \in S_{\bar{t}_q}$*;*
(2) $p \in S_{\bar{t}_p}$ *в том и только том случае, если* $p \in M$*;*
(3) $\bar{q} \in \overline{S}_{t_p}$ *в том и только том случае, если* $\bar{p} \in \overline{S}_{t_q}$*;*
(4) $\bar{p} \in \overline{S}_{t_p}$ *в том и только том случае, если* $p \in M$*.*

Доказательство. В самом деле, применяя лемму 2.2.4 **(2)**, получаем, что $\rho(t_q,\bar{t}_p) = 0$ в том и только том случае, если $\rho(t_p,\bar{t}_q) = 0$, что дает **(1)** и **(3)**. Кроме того, $\rho(t_p,\bar{t}_p) = 0$ в том и только том случае, если $t_p \in M$, что дает **(2)** и **(4)**. □

2.2.10. Внешняя комплексификация. Пусть теперь $\zeta \in \mathbb{C}^m$ и $\xi \in \mathbb{C}^d$ — некоторые новые независимые координаты, соответствующие комплексификации переменных $\bar{z}$ $\bar{w}$, обозначаемые символически через $\zeta := (\bar{z})^c$ и $\xi := (\bar{w})^c$, где буква «c» обозначает слово «комплексифицированное». Пишем также $\tau := (\bar{t})^c$, так что $\tau = (\zeta,\xi) \in \mathbb{C}^n$. *Внешняя комплексификация* $\mathcal{M} := (M)^c$ подмногообразия M — это комплексное подмногообразие коразмерности d, определенное как

$$\mathcal{M} := \{(z,w,\zeta,\xi) \in \Delta_n(\rho_1)\times\Delta_n(\rho_1) : \xi_j = \Theta_j(\zeta,z,w),\ j = 1,\dots,d\}. \tag{2.2.11}$$

Пусть σ — антиголоморфная инволюция, определенная как $\sigma(t,\tau) := (\bar{\tau},\bar{t})$. Поскольку по лемме 2.1.27 существует обратимая $d\times d$ матрица $a(t,\tau)$ степенных рядов такая, что $w - \overline{\Theta}(z,\zeta,\xi) \equiv a(t,\tau)[\xi - \Theta(\zeta,z,w)]$, то σ — биантиголоморфно отображает $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$. В этой главе рассматривается, в основном, $\mathcal{M}$ а не M. Действительно, M, очевидно, вложено в $\mathcal{M}$ как пересечение $\mathcal{M}$ с антиголоморфной диагональю $\underline{\Lambda} := \{(t,\tau) \in \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n : \tau = \bar{t}\}$. Кроме того, будем часто использовать то, что $\mathcal{M}$ представимо следующими эквивалентными семействами d комплексных определяющих уравнений:

$$\mathcal{M}: \quad w_j = \overline{\Theta}_j(z,\zeta,\xi), \qquad j = 1,\dots,d, \qquad \text{или} \qquad \xi_j = \Theta_j(\zeta,z,w), \qquad j = 1,\dots,d. \tag{2.2.12}$$

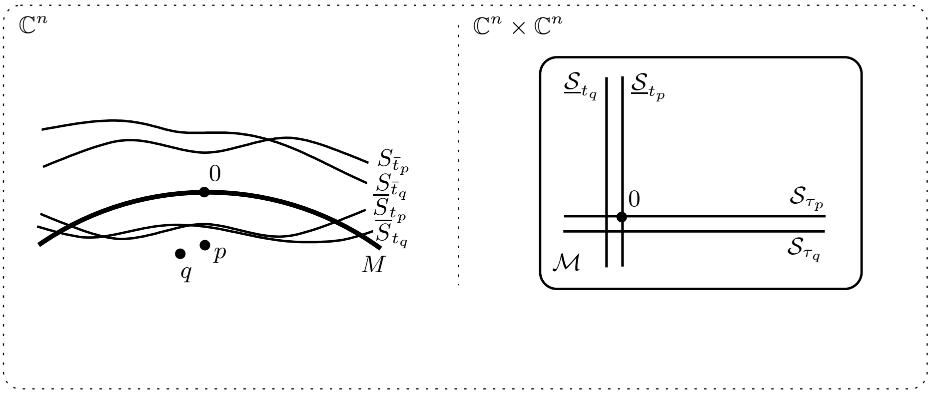

Рис. 2.3.4. Свойство не-расслоения в окружающем пространстве. Комплексификация как раздутие, дающее два слоения.

2.3. Комплексифицированные многообразия Сегре и комплексифицированные CR векторные поля

2.3.1. Комплексифицированные многообразия Сегре. Далее при фиксированных $\tau_p \in \Delta_n(\rho_1)$ определим ассоциированное *комплексифицированное многообразие Сегре* по формулам

$$\mathcal{S}_{\tau_p} := \{(t,\tau) \in \Delta_{2n}(\rho_1) :\, \tau = \tau_p,\, w_j = \overline{\Theta}_j(z,\tau_p),\, j = 1,\dots,d\}. \tag{2.3.2}$$

Будем символически записывать это как $\mathcal{S}_{\tau_p} = (S_{\bar{t}_p})^c$. Ясно, что $\mathcal{S}_{\tau_p}$ — m-мерное подмногообразие, лежащее в $\mathcal{M}$ и совпадающее, на самом деле, с пересечением $\mathcal{M}$ и горизонтального среза $\{(t,\tau) : \tau = \tau_p\}$. Аналогично, для фиксированного $t_p \in \Delta_n(\rho_1)$ определим ассоциированное *сопряженное комплексифицированное многообразие Сегре* как

$$\underline{\mathcal{S}}_{t_p} := \{(t,\tau) \in \Delta_{2n}(\rho_1) :\, t = t_p,\, \xi_j = \Theta_j(\zeta,t_p),\, j = 1,\dots,d\}. \tag{2.3.3}$$

Опять ясно, что $\underline{\mathcal{S}}_{t_p}$ — m–мерное подмногообразие, лежащее в $\mathcal{M}$ и совпадающее с пересечением $\mathcal{M}$ и вертикального слоя $\{(t,\tau) : t = t_p\}$.

Важно отметить, что объемлющие многообразия Сегре $S_{\bar{t}_p}$ и $\overline{S}_{t_p}$ — внешние по отношению к M: вообще говоря, они лежат вне M даже в плоском по Леви случае. Кроме того, объединение $\cup_{p\in\Delta_n(\rho_1)} S_{\bar{p}}$ никогда не образует слоения на m-мерные подмногообразия. Эти утверждения легко проверяются с помощью рассмотрения плоской по Леви гиперплоскости $\{\operatorname{Im} w = 0\}$ в $\mathbb{C}^n$ и сферы Гейзенберга $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2$ в $\mathbb{C}^n$. К счастью, пользуясь удивительным свойством внешней комплексификации, *раздуем объединения $\cup_p S_{\bar{p}}$ и $\cup_p \overline{S}_p$ в двойное слоение $\mathcal{M}$ на комплексные m-мерные многообразия Сегре* (как это объясняется в теореме 2.3.9 ниже). Это важнейшее геометрическое свойство символически иллюстрируется на рис. 2.3.4 и будет более подробно объяснено в следующих пунктах.

2.3.5. Комплексифицированные CR-векторные поля. Рассмотрим следующий «естественный» базис $(1,0)$ векторных полей, касательных к M:

$$L_k := \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z,\bar{z},\bar{w})\, \frac{\partial}{\partial w_j}, \qquad k = 1,\dots,m. \tag{2.3.6}$$

Сразу проверяется, что $L_k(w_j - \overline{\Theta}_j(z,\bar{z},\bar{w})) \equiv 0$ при $k = 1,\dots,m$ и $j = 1,\dots,d$. Рассмотрим также сопряженные к этим векторным полям, также образующие базис $(0,1)$ векторных полей, касательных к M:

$$\overline{L}_k := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \bar{z}_k}(\bar{z},z,w)\, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}, \qquad k = 1,\dots,m. \tag{2.3.7}$$

Снова очевидно, что $\overline{L}_k(\bar{w}_j - \Theta_j(\bar{z},z,w)) \equiv 0$ при $k = 1,\dots,m$ и $j = 1,\dots,d$. Конечно, вторая система соотношений сопряжена с первой.

В силу комплексификации, эти векторные поля ведут себя следующим образом: пишем $[\chi(t,\bar{t})]^c = \chi(t,\tau)$, если $\chi(t,\bar{t})$ — вещественно-аналитическая функция от $(t,\bar{t})$, и

$$\left[\sum_{j=1}^{n} a_j(t,\bar{t})\,\partial/\partial t_j + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,\bar{t})\,\partial/\partial \bar{t}_j\right]^c := \sum_{j=1}^{n} a_j(t,\tau)\,\partial/\partial t_j + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,\tau)\,\partial/\partial \tau_j.$$

Тогда $(L\chi)^c = L^c\chi^c$.

Следовательно, можно комплексифицировать пару сопряженных порождающих семейств CR-векторных полей, касательных к M и определенных соотношениями (2.3.6) и (2.3.7), а именно, векторных полей $L_1, \ldots, L_m$ и их сопряженных $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$ выше. Их комплексификация дает пару наборов векторных из m векторных полей, явно определенных на $\Delta_n(\rho_1) \times \Delta_n(\rho_1)$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k := \dfrac{\partial}{\partial z_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z,\zeta,\xi)\,\frac{\partial}{\partial w_j}, & k = 1, \ldots, m, \\ \underline{\mathcal{L}}_k := \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta,z,w)\,\frac{\partial}{\partial \xi_j}, & k = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Положим $\mathcal{L}_k = (L_k)^c$ и $\underline{\mathcal{L}}_k = (\overline{L}_k)^c$. Читатель может непосредственно проверить, что $\mathcal{L}_k(w_j - \overline{\Theta}_j(z,\zeta,\xi)) \equiv 0$ (это соотношение справедливо также ввиду комплексификации), показывающее, что векторные поля $\mathcal{L}_k$ касательны к $\mathcal{M}$. Аналогично, $\underline{\mathcal{L}}_k(\xi_j - \Theta_j(\zeta,z,w)) \equiv 0$, а потому векторные поля $\underline{\mathcal{L}}_k$ также касательны к $\mathcal{M}$. Все это, конечно, очевидно, но предпочтительней двигаться медленно. Можно проверить далее, что справедливы коммутаторные соотношения $[L_{k_1}, L_{k_2}] = 0$, $[\overline{L}_{k_1}, \overline{L}_{k_2}] = 0$, $[\mathcal{L}_{k_1}, \mathcal{L}_{k_2}] = 0$ и $[\underline{\mathcal{L}}_{k_1}, \underline{\mathcal{L}}_{k_2}] = 0$ при всех $k_1, k_2 = 1, \ldots, m$. По теореме Фробениуса, m-мерные распределения, порожденные семействами m векторных полей $\{\mathcal{L}_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ и $\{\underline{\mathcal{L}}_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$, допускают интегральные многообразия. Это не удивительно, поскольку векторные поля $\mathcal{L}_k$ — это в точности векторные поля, касательные к пересечению $\mathcal{M}$ с множествами $\{\tau = \tau_p = ct.\}$, являющимися m-мерными комплексифицированными многообразиями Сегре $\mathcal{S}_{\tau_p}$, определенными выше. Аналогично, $\underline{\mathcal{L}}_k$ имеют сопряженные комплексифицированные многообразия Сегре $\underline{\mathcal{S}}_{t_p}$ в качестве интегральных многообразий. Следовательно, на самом деле, теорему Фробениуса применять необязательно.

Только что отмеченные геометрические свойства можно собрать в утверждение, сформулированное ниже. В дальнейшем часто будут использоваться сокращенные обозначения $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ и $\underline{\mathcal{L}} = \{\underline{\mathcal{L}}_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$. Обозначим через $\pi_t : (t,\tau) \mapsto t$ и $\pi_\tau : (t,\tau) \mapsto \tau$ канонические проекции.

Теорема 2.3.9. *Пусть $\mathcal{M} = (M)^c$ — то же, что и выше, $\mathcal{L}_k$, $k = 1, \ldots, m$, — базис комплексифицированных $(1,0)$ векторных полей, касательных к M, а $\underline{\mathcal{L}}_k$, $k = 1, \ldots, m$, — их комплексные сопряженные. Напомним, что $\{\mathcal{L}_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ и $\{\underline{\mathcal{L}}_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ интегрируемы по Фробениусу. Тогда справедливы следующие четыре свойства:*

(1) *$\mathcal{L}$ и $\underline{\mathcal{L}}$ индуцируют естественным образом два слоения локальных потоков $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$ на $\mathcal{M}$;*

(2) *если $\sigma(t,\tau) := (\bar{\tau},\bar{t})$, то $\sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}) = \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$, и их слои, проходящие через точку $p^c = (t_p,\bar{t}_p) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, удовлетворяют соотношению $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(p^c) \cap \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}(p^c) = p^c$;*

(3) *слои проекций π_t и π_τ совпадают со слоями слоения потоков $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ соответственно;*

(4) *слои слоения $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ — многообразия Сегре $\mathcal{S}_{\tau_p}$, а слои слоения $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$ — сопряженные многообразия Сегре $\underline{\mathcal{S}}_{t_p}$:*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \bigcup_{\tau_p \in \Delta_n(\rho_1)} \mathcal{S}_{\tau_p} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}} = \bigcup_{t_p \in \Delta_n(\rho_1)} \underline{\mathcal{S}}_{t_p}. \tag{2.3.10}$$

Другими словами, слои этих слоений — семейства комплексифицированных (сопряженных) многообразий Сегре. Символически эти соответствия слоений таковы:

$$\textit{слоения CR-потоков } \mathcal{M} \iff \textit{слоения на комплексифицированные многообразия Сегре.} \tag{2.3.11}$$

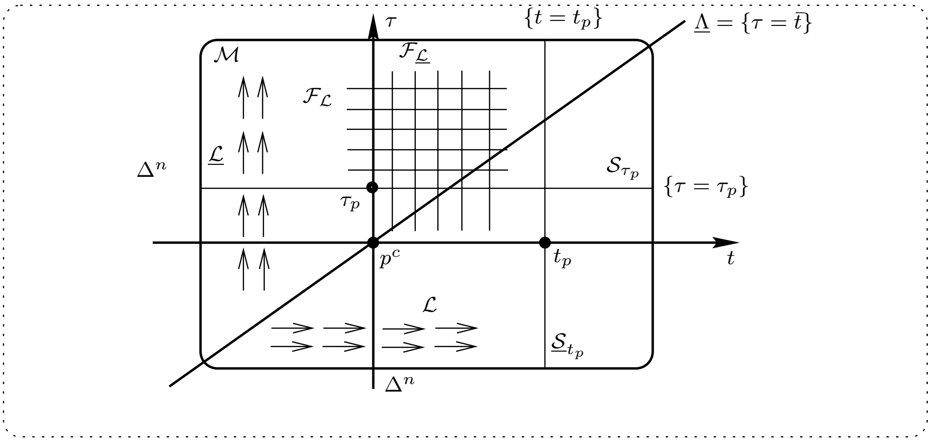

Рис. 2.3.13. Геометрия комплексификации $\mathcal{M}$

2.3.12. Заключение. Эта геометрическая теорема иллюстрируется следующим символическим рисунком рис. 2.3.13. Тем не менее, предупреждаем читателя, что коразмерность $d \geqslant 1$ объединения слоений $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$ в $\mathcal{M}$ не видна на этом двумерном рисунке.

2.4. Кратные потоки и цепи Сегре

2.4.1. Пары комплексных потоков. Введем теперь «кратные» потоки семейств сопряженных векторных полей $(\mathcal{L}_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ и $(\underline{\mathcal{L}}_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$. Эти кратные потоки будут часто использоваться в следующих главах части II. А именно, для любой точки $p = (w_p, z_p, \zeta_p, \xi_p) \in \mathcal{M}$ и для произвольного «многовременного» параметра $z_1 = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,m}) \in \mathbb{C}^m$ определим

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{z_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) & := \exp(z_1\mathcal{L})(p) := \exp(z_{1,1}\mathcal{L}_1(\cdots(\exp(z_{1,m}\mathcal{L}_m(p)))\cdots)) := \\ & := \big(z_p + z_1,\, \overline{\Theta}(z_p + z_1, \zeta_p, \xi_p),\, \zeta_p,\, \xi_p\big)\,. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Согласно этому формальному определению, существует максимальное связное открытое подмножество Ω of $\mathcal{M}\times\mathbb{C}^m$, содержащее $\mathcal{M}\times\{0\}$ такое, что $\mathcal{L}_{z_1}(p) \in \mathcal{M}$ для всех $(z_1, p) \in \Omega$. Аналогично, при (ζ_1, p), изменяющемся в аналогичном открытом множестве $\underline{\Omega}$, можно определить отображение

$$\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := (z_p,\, w_p,\, \zeta_p + \zeta_1,\, \Theta(\zeta_p + \zeta_1, z_p, w_p))\,. \tag{2.4.3}$$

Отображения (2.4.2)и (2.4.3) конечно обладают той же регулярностью, что M, а именно, они алгебраичны или аналитичны.

2.4.4. Цепи Сегре. Начнем с точки p — начала координат и будем двигаться попеременно в (горизонтальном) направлении $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ (а именно, в направлении $\mathcal{S}$) и в (вертикальном) направлении $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$ (а именно в направлении $\underline{\mathcal{S}}$). Более точно, рассмотрим два отображения $\Gamma_1(z_1) := \mathcal{L}_{z_1}(0)$ и $\underline{\Gamma}_1(z_1) := \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)$, где $z_1 \in \mathbb{C}^m$. Далее начнем с этих концевых точек и будем двигаться в других направлениях. Более точно, рассмотрим два отображения

$$\Gamma_2(z_1, z_2) := \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(0)), \qquad \underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)), \tag{2.4.5}$$

где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^m$. Определим также $\Gamma_3(z_1, z_2, z_3) := \mathcal{L}_{z_3}(\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(0)))$ и т.д. Конкретно, рассмотрим полные выражения Γ_1, Γ_2 и Γ_3, которые получаются повторным применением формул (2.4.2) и (2.4.3):

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{z_1}(0) = \big(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1, 0, 0),\, 0,\, 0\big)\,. \\ \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(0)) = \big(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1, 0, 0),\, z_2,\, \Theta(z_2, z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0, 0))\big)\,. \\ \mathcal{L}_{z_3}(\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(0))) = \big(z_1 + z_3,\, \overline{\Theta}(z_1 + z_3, z_2, \Theta(z_2, z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0, 0))),\, z_2,\, \Theta(z_2, z_1, \overline{\Theta}(z_1, 0, 0))\big)\,. \end{cases} \tag{2.4.6}$$

По индукции, для всякого целого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, получим два отображения $\Gamma_k(z_1, \ldots, z_k)$ и $\underline{\Gamma}_k(z_1, \ldots, z_k)$, где $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^m$. Ясно, что существуют точные комбинаторные формулы, обобщающие (2.4.6). В дальнейшем часто будет использоваться обозначение $z_{(k)} := (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^{mk}$. Назовем отображение Γ_k *k-й сопряженной цепью Сегре*, а отображение $\underline{\Gamma}_k$ — *сопряженной k-й цепью Сегре*. Поскольку $\Gamma_k(0) = \underline{\Gamma}_k(0) = 0$, то для любого $k \in \mathbb{N}_*$ существует достаточно малый открытый полидиск $\Delta_{mk}(\delta_k)$ с центром в начале координат $\mathbb{C}^{mk}$ и с $\delta_k > 0$ такой, что $\Gamma_k(z_{(k)})$ и $\underline{\Gamma}_k(z_{(k)})$ принадлежат $\mathcal{M}$ при всех $z_{(k)} \in \Delta_{mk}(\delta_k)$.

Предъявим также простую связь отображений Γ_k и $\underline{\Gamma}_k$. Пусть σ — антиголоморфная инволюция, определенная как $\sigma(t, \tau) := (\bar{\tau}, \bar{t})$. Так как $w = \overline{\Theta}(z, \zeta, \xi)$ в том и только том случае, если $\xi = \Theta(\zeta, z, w)$, то эта инволюция отображает $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$ и оставляет поточечно неподвижной антидиагональ $\underline{\Lambda}$. Используя определения (2.4.2) и (2.4.3), видим, что $\sigma(\mathcal{L}_{z_1}(0)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{z}_1}(0)$. Вообще, поэтому $\sigma(\Gamma_k(z_{(k)})) = \underline{\Gamma}_k(\overline{z_{(k)}})$. Для конкретной иллюстрации можно вычислить явные выражения для $\underline{\Gamma}_1$, $\underline{\Gamma}_2$ и $\underline{\Gamma}_3$, а также сравнить их с (2.4.6):

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0) = (0,\, 0,\, z_1,\, \Theta(z_1, 0, 0))\,, \\ \mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)) = \big(z_2,\, \overline{\Theta}(z_2, z_1, \Theta(z_1, 0, 0)),\, z_1,\, \Theta(z_1, 0, 0)\big)\,, \\ \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0))) = \big(z_2,\, \overline{\Theta}(z_2, z_1, \Theta(z_1, 0, 0)),\, z_1 + z_3,\, \Theta(z_1 + z_3, z_2, \overline{\Theta}(z_2, z_1, \Theta(z_1, 0, 0)))\big)\,. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Заметим также, что $\Gamma_{k+1}(z_{(k)}, 0) = \Gamma_k(z_{(k)})$, поскольку $\mathcal{L}_0$ и $\underline{\mathcal{L}}_0$ совпадают с тождественным отображением в силу (2.4.2) и (2.4.3). Значит, при возрастании k ранги в начале координат отображений Γ_k возрастают. Введем теперь следующее важное определение.

Определение 2.4.8. Порождающее подмногообразие M называется *минимальным* в точке p, если отображения Γ_k имеют (максимально возможные) ранги, равные $2m + d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$ в начале координат в $\Delta_{mk}(\delta_k)$ при всех достаточно больших k.

Другими словами, M минимально в точке p в том и только том случае, если цепи Сегре достаточно высокого порядка субмерсивны. Эквивалентно, сопряженные цепи Сегре достаточно высокого порядка субмерсивны. В следующем параграфе 2.5 будет показано, что минимальность характеризуется тем, что эти отображения имеют порождающий ранг равный $2m + d$ при всех достаточно больших k. Прежде всего, чтобы прояснить определение, докажем общую *теорему о локальных орбитах* в духе Г. Дж. Суссмана [33].

2.4.9. Теорема о локальных орбитах в $\mathbb{K}$–аналитической категории. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и пусть $\Delta := \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}$ и $r\Delta := \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. В Δ^n, снабженном координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, рассмотрим начало координат как центральную точку. Пусть $\mathbb{L} = \{L^a\}_{1 \leqslant a \leqslant A}$, $A \geqslant 1$, — *конечная* ненулевых векторных полей, определенных на Δ^n. *Не требуется, чтобы это множество было бы устойчивым относительно взятия линейных комбинаций его элементов с аналитическими или алгебраическими в Δ^n коэффициентами.* Пусть $L \in \mathbb{L}$. Как и ранее, поток поля L обозначается через $(t, x) \mapsto L_t(x) \equiv \exp(tL)(x)$.

Напомним определяющие свойства потока: $L_0(x) = x$ и $\frac{d}{dt}(L_t(x)) = L(L_t(x))$, где $L(x')$ — значение поля L в точке x'. Как известно, $\mathbb{K}$-алгебраический случай исключителен потому, что поток векторного поля L с $\mathbb{K}$-алгебраическими коэффициентами, вообще говоря, трансцендентен. Поэтому делаем два точных предположения регулярности.

Алгебраичность. Коэффициенты всех элементов $\mathbb{L}$ $\mathbb{K}$-алгебраичны и, кроме того, их потоки также $\mathbb{K}$-алгебраичны. На самом деле, из $\mathbb{K}$-алгебраичности потока вытекает $\mathbb{K}$-алгебраичность коэффициентов.

Аналитичность. Коэффициенты всех элементов $\mathbb{L}$ — $\mathbb{K}$-аналитические ряды с центром в начале координат, сходящиеся в Δ^n, откуда следует $\mathbb{K}$-аналитичность их потоков.

Выберем теперь r, $0 < r \leqslant 1/2$. Определим сначала конечные сшивания потоков векторных полей из $\mathbb{L}$ следующим образом. Если $k \in \mathbb{N}_*$, $L = (L^1, \ldots, L^k) \in \mathbb{L}^k$, $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{K}^k$ и $x \in (r\Delta)^n$, то воспользуемся опять обозначением $L_t(x) = L^k_{t_k}(\cdots(L^1_{t_1}(x))\cdots)$, если только суперпозиция определена. Так или иначе, при $k \leqslant 3n$ ясно, что существует $\delta > 0$ такое, что все отображения $(t,x)\mapsto L_t(x)$ корректно определены при $t\in(2\delta\Delta)^k$, $x\in(\frac{r}{2}\Delta)^n$ и $L_t(x)\in(r\Delta)^n$. По определению, точка $x'=L^k_{t_k}\circ\cdots\circ L^1_{t_1}(x)$ — концевая точка кусочно-гладкой алгебраической или аналитической кривой с началом в точке x: эта кривая идет по потоку поля L^1 в течение времени t_1, потоку поля L^2 в течение времени t_2 ... и потоку поля L^k в течение времени t_k.

Далее, будем говорить, что вложенный малый кусок $\mathbb{K}$-многообразия $N\subset\Delta^n$, проходящий через начало координат (либо $\mathbb{K}$-алгебраичный, либо $\mathbb{K}$-аналитичный), является *слабым $\mathbb{L}$-интегральным многообразием*, если $T_xN\supset\mathbb{L}(x)$ при всех $x\in N$. Тем не менее, в формальном случае это условие не имеет смысла. Эквивалентная формулировка: для каждого $L\in\mathbb{L}$, $L|_N$ касательно к N. Тогда это новое условие имеет смысл в формальном случае. Действительно, формальный случай здесь рассмотрен позже как обобщение алгебраического и аналитического случаев. В частности, из касания $L|_N$ к N легко вытекает тот факт, что любая интегральная кривая элемента $L\in\mathbb{L}$ с началом в точке $x\in N$, принадлежащей N, лежит в N.

Введем теперь следующие специальные определения. *$\mathbb{L}$-орбита точки* 0 *в* Δ^n, обозначаемая $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}(0)$, — это множество всех точек $L_t(0)\in(r\Delta)^n$ при всех $t\in(\delta\Delta)^k$, $k\leqslant 3n$. Смысл условия $k\leqslant 3n$ будет ясен в дальнейшем. Скажем, что открытое множество $(r\Delta)^n$ *$\mathbb{L}$–минимально в* 0, если $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}(0)$ содержит полидиск $(\varepsilon\Delta)^n$, где $\varepsilon>0$. Если $L=(L^1,\dots,L^k)\in\mathbb{L}^k$, $k\leqslant 3n$, то через $\Gamma_L(t)$ будем обозначать отображение $t\mapsto L^k_{t_k}(\cdots(L^1_{t_1}(0))\cdots)$.

Теперь можно сформулировать *теорему о локальных орбитах*. По индукции, построим специальную последовательность векторных полей $L^{*k}:=(L^{*1},\dots,L^{*k})\in\mathbb{L}^k$, $k\in\mathbb{N}_*$. Сформулируем длинную, но вполне объяснимую теорему с целью предоставления всей соответствующей информации.

Теорема 2.4.10. *Как и выше, пусть $\mathbb{L}=\{L^a\}_{1\leqslant a\leqslant A}$, $A\in\mathbb{N}_*$, — непустое конечное семейство векторных полей, определенных на Δ^n и удовлетворяющих одному из предположений **Алгебраичность** или **Аналитичность**. Тогда существуют целое $e\geqslant 1$ и набор векторных полей $L^*=(L^{*1},\dots,L^{*e})\in\mathbb{L}^e$ такой, что выполняются следующие семь свойств*:

(1) *Для любого $k=1,\dots,e$ отображение $(t_1,\dots,t_k)\mapsto L^{*k}_{t_k}(\cdots(L^{*1}_{t_1}(0))\cdots)$ имеет порождающий ранг, равный k.*

(2) *Для произвольного элемента $L'\in\mathbb{L}$ отображение $(t_1,\dots,t_e,t')\mapsto L'_{t'}(L^{*e}_{t_e}(\cdots(L^{*1}_{t_1}(0))\cdots))$ имеет порождающий ранг e, а следовательно, e — максимально возможный порождающий ранг.*

(3) *Существует элемент $t^*\in\Delta^e$, как угодно близкий к началу координат, имеющий специальную форму $(t^*_1,\dots,t^*_{e-1},0)$, а именно, $t^*_e=0$, а также существует открытая связная окрестность ω^* точки t_* в Δ^e такая, что отображение $\Gamma_{L^*}:t\mapsto L^{*e}_{t_e}(\cdots(L^{*1}_{t_1}(0)))$ имеет постоянный ранг e на ω^*.*

(4) *Полагая $L^*:=(L^{*1},\dots,L^{*e})$, $K^*:=(L^{*e-1},\dots,L^{*1})$ и $s^*:=(-t^*_{e-1},\dots,-t^*_1)$, имеем $K^*_{s^*}\circ L^*_{t^*}(0)=0$. Далее, отображение $\psi:\omega^*\to\Delta^n$, определенное как $\psi:t\mapsto K^*_{s^*}\circ L^*_t(0)$, имеет постоянный ранг e в области ω^*.*

(5) *Тогда образ $\psi(\omega^*)$ — кусок $\mathbb{K}$-многообразия, проходящего через начало координат, $\mathbb{K}$-алгебраичного или $\mathbb{K}$-аналитичного, потому что потоки элементов $\mathbb{L}$ $\mathbb{K}$-алгебраичны или $\mathbb{K}$-аналитичны.*

(6) *Этот кусок $\mathbb{K}$-многообразия — слабое $\mathbb{L}$-интегральное многообразие. Далее, очень слабое $\mathbb{L}$-интегральное многообразие, проходящее через* 0*, должно содержать $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}(0)$ в окрестности точки* 0.

(7) *Существует $\varepsilon>0$ такое, что $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}(0)\cap(\varepsilon\Delta)^n=\psi(\omega^*)$.*

*Наконец, локальная орбита $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}(0)$ представима малым $\mathbb{K}$-многообразием $\psi(\omega^*)$, а ее размерность характеризуются свойствами порождающего ранга **(1)** и **(2)**.*

Доказательство. Если все векторные поля из $\mathbb{L}$ обращаются в нуль в начале координат, то $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}(0)=\{0\}$. Исключим эту возможность. Выберем векторное поле $L^{*1}\in\mathbb{L}$, не обращающееся в нуль в точке 0. Отображение $t_1\mapsto L^{*1}_{t_1}(0)$ имеет порождающий ранг один. Если существует $L'\in\mathbb{L}$ такое, что отображение $(t_1,t')\mapsto L'_{t'}(L^{*1}_{t_1}(0))$ имеет порождающий ранг два, то выберем одно такое L' и обозначим его через L^{*2}. Продолжая эту процедуру, получим векторные поля

$L^{*1}, \dots, L^{*e}$, удовлетворяющие свойствам **(1)** и **(2)**. Поскольку порождающий ранг отображения $\Gamma_{L^*} : (t_1, \dots, t_e) \mapsto L^{*e}_{t_e}(\cdots(L^{*1}_{t_1}(0))\cdots)$ равен e и это отображение либо $\mathbb{K}$-алгебраично, либо $\mathbb{K}$-аналитично, то существует элемент $t^* \in \Delta^e$, как угодно близкий к началу координат, такой, что его ранг в t_* равен e. Утверждается, что можно, кроме того, выбрать t^* в специальной форме $(t_1^*, \dots, t_{e-1}^*, 0)$, т.е. с $t_e^* = 0$. Это является следствием следующей леммы.

Лемма 2.4.11. *Пусть $n \in \mathbb{N}_*$, $e \in \mathbb{N}_*$, $t \in \mathbb{K}^e$ и пусть $t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ — отображение порождающего ранга $(e-1)$, либо $\mathbb{K}$-алгебраическое, либо $\mathbb{K}$-аналитическое. Пусть $L' \in L$ и пусть отображение $\psi : (t, t') \mapsto L'_{t'}(\varphi(t))$ имеет порождающий ранг e. Тогда существует точка $(t^*, 0)$, в которой ранг ψ равен e.*

Доказательство. Предположим противное: во всех точках $(t^*, 0)$ отображение $(t, t') \mapsto L'_{t'}(\varphi(t))$ имеет ранг $\leqslant e-1$. Выберем точку t^*, как угодно близкую к нулю, в которой φ имеет максимальный ранг $(e-1)$, который, следовательно, локально постоянен. По теореме о ранге, существует окрестность ω^* точки $t^* \in \mathbb{K}^e$ такая, что $N := \varphi(\omega^*)$ — малый кусок $\mathbb{K}$-многообразия, $\mathbb{K}$-алгебраического или $\mathbb{K}$-аналитического. Пусть $L' \in \mathbb{L}$. Поскольку, по предположению, ранг отображения $(t, t') \mapsto L'_{t'}(\varphi(t))$ равен $(e-1)$ в каждой точке $(t^*, 0) \in \omega^* \times \mathbb{K}$, то отсюда следует, что L' касательно к N. Следовательно, поток поля L' стабилизирует N. Наконец, при $\varphi(t) \in N$ имеем $L'_{t'}(\varphi(t)) \in N$, откуда получается также, что ранг отображения $(t, t') \mapsto L'_{t'}(\varphi(t))$ меньше или равен $\dim_{\mathbb{K}} N = e-1$ в каждой точке окрестности $(t^*, 0)$ в $\mathbb{K}^{\times}\mathbb{K}$. Доказано, что отображение $(t, t') \mapsto L'_t(\varphi(t))$ имеет ранг общего положеия $(e-1)$ в окрестности точки $(t^*, 0)$ в $\mathbb{K}^e \times \mathbb{K}$, а потому и всюду, в силу принципа аналитического продолжения, что противоречит предположению, что оно имеет ранг общего положения e. Этим доказательство завершено. □

Конец доказательства теоремы 2.4.9. Выберем точку $(t_1^*, \dots, t_{e-1}^*, 0) \in \Delta^e$, произвольно близкую к 0, в которой ранг отображения $t \mapsto L^{*e}_{t_e}(\cdots(L^{*1}_{t_1}(0))\cdots)$ максимален и равен e, так что получаем **(3)**. В **(4)** свойство $K^*_{s^*} \circ L^*_{t^*}(0)$ очевидно, поскольку отображение

$$L^{*1}_{-t_1^*} \circ \cdots \circ L^*_{-t^*_{e-1}} \circ L^{*e}_0 \circ L^*_{t^*_{e-1}} \circ \cdots \circ L^*_{t_1^*}(\cdot) = \mathrm{Id} \tag{2.4.12}$$

— тождественное отображение. В силу **(2)** отображение $(t, s) \mapsto K^*_s \circ L^*_t(0)$ также имеет порождающий ранг e, откуда получается, что его сужение на $\omega^* \times \{s^*\}$ имеет постоянный ранг e, поскольку отображение $K^*_{s^*}(\cdot)$ — локальный диффеоморфизм. Получаем **(4)**, а тогда **(5)** очевидно. Таким образом, построен кусок N $\mathbb{K}$-многообразия, проходящий через начало координат. Пусть $L' \in \mathbb{L}$. Утверждается, что L' касательно к N. В противном случае, если L' не касательно, то отображение $(t, s, t') \mapsto L'_{t'}(K_s(L_t(0)))$ имеет порождающий ранг $\geqslant e+1$, вопреки определению e. Это завершает доказательство теоремы 2.4.9. □

2.5. Тип Сегре и мультитип Сегре

Применим теперь общие утверждения теоремы 2.4.9 к специфической ситуации, когда $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Δ^n заменяется на $\mathcal{M}$, а семейство $\mathbb{L}$ векторных полей есть семейство комплексифицированных векторных полей $\{\mathcal{L}_k, \underline{\mathcal{L}}_k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$. Получим также некоторые уточнения.

2.5.1. Возрастающие порождающие ранги. Обозначим через $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Phi)$ *порождающий ранг* $\mathbb{C}$-алгебраического или $\mathbb{C}$-аналитического отображения $\Phi : X \to Y$ связных комплексных многообразий. Конечно,здесь $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_1) = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}_1) = m$ и $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_2) = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}_2) = 2m$, что очевидно в уравнениях (2.4.6) и (2.4.7). Положим $e_1 := m$ и $e_2 := m$. Далее положим $e_3 := \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_3) - 2m$ и, индуктивно, $e_{k+1} := \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{k+1}) - e_3 - \cdots - e_k - 2m$, откуда $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_k) = 2m + e_3 + \cdots + e_k$, если $k \geqslant 3$ и, аналогично, можно определить последовательность $\underline{e}_k$ при $\underline{\Gamma}_k$. Отметим, что $\underline{e}_k = e_k$, поскольку $\sigma(\Gamma_k(z_{(k)})) = \underline{\Gamma}_k(\overline{z_{(k)}})$.

Утверждается, что $e_l = 0$ при всех $l \geqslant k+1$, если $e_{k+1} = 0$ и $e_k \neq 0$. Другими словами, порождающий ранг обладает свойством стабилизации. В самом деле, выберем сначала точку $z^*_{(k)}$ как угодно близкую к началу координат в $\mathbb{C}^{mk}$, такую, что Γ_k имеет (необходимо локально постоянный) ранг, равный $2m + e_3 + \cdots + e_k$ в $z^*_{(k)}$, и положим $q := \Gamma_k(z^*_{(k)}) \in \mathcal{M}$. Тогда, по теореме о ранге, образ $\mathcal{H}$ окрестности $\mathcal{W}^*$ точки $z^*_{(k)}$ — подмногообразие в $\mathcal{M}$ размерности $2m + e_3 + \cdots + e_k$. Утверждается, что векторные поля $\mathcal{L}_k$ и $\underline{\mathcal{L}}_k$ касательны к $\mathcal{H}$. Например, чтобы показать идею доказательства, предположим, что k четно (нечетный случай аналогичен). Тогда $\Gamma_k(z_{(k)}) = \underline{\mathcal{L}}_{z_k}(\cdots(\mathcal{L}_{z_1}(0))\cdots)$, т.е. цепь Γ_k заканчивается на $\underline{\mathcal{L}}$. Это показывает, что $\mathcal{H}$ расслаивается на слои $\mathcal{F}_{\underline{\mathcal{L}}}$, так что $\underline{\mathcal{L}}_k$ касательны к $\mathcal{H}$ в каждой точке. Дифференцируя $\Gamma_{k+1} = \mathcal{L}_{z_{k+1}}(\Gamma_k(z_{(k)}))$ по z_{k+1} при $z_{k+1} = 0$, получаем m–мерное пространство $\mathcal{L}(\Gamma_k(z_{(k)}))$, а именно, касательное пространство слоения $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ в точке $\Gamma_k(z_{(k)})$. Тогда предположение, что $e_{k+1} = 0$, дает, что это пространство $\mathcal{L}(\Gamma_k(z_{(k)}))$ необходимо содержится в касательном пространстве к $\mathcal{H}$ в точке $\Gamma_k(z_{(k)})$, что и доказывает утверждение. Наконец, поскольку $\mathcal{L}_k$ и $\underline{\mathcal{L}}_k$ касательны к $\mathcal{H}$, то их локальный поток в q содержится в $\mathcal{H}$, откуда следует, что область значений следующих Γ_l, $l \geqslant k+1$, содержится в $\mathcal{H}$. Так как они либо алгебраичны, либо аналитичны, то это показывает, что их порождающий ранг не превосходит $2m + e_3 + \cdots + e_k$, что и доказывает утверждение.

В заключение отметим, что существует корректно определенное целое $\mu_0 \geqslant 2$ с $\mu_0 \leqslant d+2$ такое, что $e_3 > 0, \ldots, e_{\mu_0} > 0$ и $e_l = 0$ при $l \geqslant \mu_0 + 1$. Назовем целое μ_0 *типом Сегре* подмногообразия $\mathcal{M}$ в начале координат, а μ_0–набор $(m, m, e_3, \ldots, e_{\mu_0})$ — *мультитипом Сегре* подмногообразия $\mathcal{M}$. Этот мультитип Сегре просто пересортирует скачки порождающих рангов Γ_k. Ясно, что тип и мультитип Сегре — биголоморфные инварианты, потому что таковы слоения Сегре, определяемые $\mathcal{L}$ и $\underline{\mathcal{L}}$. Резюмируя, получаем, что

(a) $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_k) = 2m + e_3 + \cdots + e_k = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}_k)$ при r $2 \leqslant k \leqslant \mu_0$,
(b) $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_k) = 2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0} = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\underline{\Gamma}_k)$ при $k \geqslant \mu_0$.

Основное преимущество использования $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$, $\underline{\mathcal{L}}$, Γ_k и $\underline{\Gamma}_k$ состоит в том, что все эти объекты можно понимать в бескоординатной форме. Даже проекции π_t и π_τ можно определить абстрактно, поскольку их слои — слои слоений Сегре. Как и в 2.4.9, можно определить орбиту $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M}, 0)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.2. *Предположим, что M — вещественное алгебраическое порождающее или аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, пусть $p_0 \in M$, $\mathcal{M} := (M)^c$ — его комплексификация, а $(p_0)^c := (p_0, \bar{p}_0)$ отождествляется с началом координат для координат (t, τ). Пусть $\mathcal{L}_k$ и $\underline{\mathcal{L}}_k$, $k = 1, \ldots, n$, — векторные поля, порождающие пару слоений Сегре. Тогда существуют точка $z^*_{(\mu_0)} \in \mathbb{C}^{m\mu_0}$, произвольно близкая к началу координат, $z^*_{(\mu_0)} = (z^*_1, \ldots, z^*_{\mu_0 - 1}, 0)$, а также некоторая малая окрестность $\mathcal{W}^*$ точки $z^*_{(\mu_0)}$, в $\Delta_{m\mu_0}(\delta_{\mu_0})$, такие, что если ввести обозначение $\omega^*_{(\mu_0-1)} := (-z^*_{\mu_0-1}, \ldots, -z^*_1)$, то справедливы следующие утверждения*:

(c) *Комплексное алгебраическое или аналитическое отображение Γ_{μ_0} имеет ранг $2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$ в $z^*_{(\mu_0)}$.*
(d) $\Gamma_{2\mu_0-1}(z^*_{(\mu_0)}, \omega^*_{(\mu_0-1)}) = 0$.
(e) *Ограниченное отображение $\Gamma_{2\mu_0-1} : \mathcal{W}^* \times \omega^*_{(\mu_0-1)} \to \mathcal{M}$ имеет постоянный ранг $2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$.*
(f) *Образ $\Gamma_{2\mu_0-1}(\mathcal{W}^* \times \omega^*_{(\mu_0-1)})$ — кусок комплексного алгебраического или аналитического многообразия, обозначаемый через $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M}, 0)$ и называемый $\{\mathcal{L}, \underline{\mathcal{L}}\}$–орбитой начала координат, обладает тем свойством, что векторные поля $\mathcal{L}_k$ и $\underline{\mathcal{L}}_k$ касательны к нему.*
(g) *Целое $2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$ равно $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M}, 0)$.*

Такое же утверждение, конечно, справедливо для $\underline{\Gamma}_{2\mu_0-1}$ вместо $\Gamma_{2\mu_0-1}$.

Доказательство. Доказательство с некоторыми небольшими изменениями аналогично доказательству теоремы 2.4.10. В соответствии с **(b)**, Γ_{μ_0} имеет порождающий ранг $2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$. Следовательно, для каждой точки $z^*_{(\mu_0)} \in \Delta_{m\mu_0}(\delta_{\mu_0})$, лежащей вне некоторого собственного комплексного подмногообразия, отображение Γ_{μ_0} имеет ранг $2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$ *at* $z^*_{(\mu_0)}$. На самом деле, можно выбрать даже такую $z^*_{(\mu_0)}$ вида $(z^*_1, \ldots, z^*_{\mu_0-1}, 0)$, т.е. с $z^*_{\mu_0} = 0$. В самом деле, поскольку $\Gamma_{(k)}(z_{(k)}) = [\mathcal{L} \,\mathrm{or}\, \underline{\mathcal{L}}]_{z_k}(\Gamma_{(k-1)}(z_{(k-1)}))$, то можно применить следующую лемму, непосредственно вытекающую из леммы 2.4.11.

Лемма 2.5.3. *Пусть $z \in \mathbb{C}^m$, $z' \in \mathbb{C}^{m'}$, пусть $\Gamma(z') \in \mathcal{M}$ — формальное, алгебраическое или аналитическое отображение от z', $\Gamma(0) = 0$ и пусть $\varphi(z, z') := \mathcal{L}_z(\Gamma(z'))$ или $\varphi(z, z') :=$*

$\underline{\mathcal{L}}_z(\Gamma(z'))$. *Тогда* φ *достигает своего максимального порождающего ранга в некоторых точках вида* $(0, z'^*) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{m'}$.

Фиксируем такое $z^*_{(\mu_0)}$ вида $(z^*_1, \dots, z^*_{\mu_0-1}, 0)$, удовлетворяющее **(c)**, и проверим, что оно удовлетворяет остальным требованиям. Пусть $\omega^*_{(\mu_0-1)} := (-z^*_{\mu_0-1}, \dots, -z^*_1)$. Во-первых, **(d)** доказывается просто: предположим, например, что μ_0 четно; тогда $\Gamma_{2\mu_0-1}(z^*_{(\mu_0)}, \omega^*_{(\mu_0-1)}) = \mathcal{L}_{-z^*_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{-z^*_{\mu_0-1}} \circ \underline{\mathcal{L}}_0 \circ \mathcal{L}_{z^*_{\mu_0-1}} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{z^*_1}(0) = 0$, потому что $\underline{\mathcal{L}}_0(q) = q$, $\mathcal{L}_{-w} \circ \mathcal{L}_w = \mathrm{Id}$ и $\underline{\mathcal{L}}_{-\zeta} \circ \underline{\mathcal{L}}_\zeta = \mathrm{Id}$. Нечетный случай аналогичен. Докажем теперь **(e)**. Ограничение $z_{(\mu_0)} \mapsto \mathcal{L}_{-z^*_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{-z^*_{\mu_0-1}} \circ \Gamma_{\mu_0}(z_{(\mu_0)})$ (опять в случае четного μ_0), очевидно, имеет ранг $2m + e_3 + \dots + e_{\mu_0}$ в точке $z^*_{(\mu_0)}$, потому что отображение $q \mapsto \mathcal{L}_{-z^*_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{-z^*_{\mu_0-1}}(q)$ локально биголоморфно по определению потоков. Заметим, что тогда $\Gamma_{2\mu_0-1}$ имеет *постоянный ранг* $2m + e_3 + \dots + e_{\mu_0}$ в окрестности точки $(z^*_{(\mu_0)}, \omega^*_{(\mu_0-1)})$ в $\mathcal{W}^* \times \omega^*_{(\mu_0-1)}$, поскольку, в силу **(b)**, $2m + e_3 + \dots + e_{\mu_0}$ — максимальное значение порождающих рангов отображений Γ_k. Это доказывает **(e)**. По определению, орбита $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M}, 0)$ есть объединение областей значений отображений Γ_k и $\underline{\Gamma}_k$. Легко проверяется, что это двойное объединение, на самом деле, совпадает с объединением только Γ_k (или только $\underline{\Gamma}_k$), просто потому, что, полагая $z_1 = 0$, имеем $\Gamma_k(0, z_2, \dots, z_k) \equiv \underline{\Gamma}_{k-1}(z_2, \dots, z_k)$. Ввиду свойства **(e)** постоянства ранга, эта орбита содержит часть $(2m + e_3 + \dots + e_{\mu_0})$–мерного многообразия, проходящего через 0: $\mathcal{N} := \Gamma_{2\mu_0-1}(\mathcal{W}^* \times \omega^*_{(\mu_0-1)})$. Так как в силу **(b)** последующие порождающие ранги при $k \geqslant 2\mu_0 - 1$ не возрастают; в силу принципа аналитического продолжения, выводим, что все эти области значений последующих отображений Γ_k содержатся в многообразии-куске $\mathcal{N}$ и, значит, $\mathcal{L}$ и $\underline{\mathcal{L}}$ касательны к этому многообразию-куску. Наконец, получаем **(f)** и **(g)**, что и завершает доказательство теоремы 2.5.2. □

В случае гиперповерхностей справедлив следующий простой критерий минимальности, доказательство которого предоставляется читателю.

Следствие 2.5.4. *Пусть* M — *вещественная алгебраическая или аналитическая гиперповерхность, т.е.* $d = 1$; *тогда:*

- **(h)** M *минимально в* $0 \iff \mu_0 = 3$.
- **(i)** M *не минимально в* $0 \iff \mu_0 = 2$.

2.5.5. Пример. Приведем простой пример в случае гиперповерхности, иллюстрирующий утверждения **(e)** и **(f)** теоремы 2.5.2 весьма конкретным образом. Пусть M — гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ с уравнением $z = \bar{z} + iw^2\bar{w}^2$. Возьмем $p = 0$ и $2\mu_0 - 1 = 5$. Имеем:

$$\begin{cases} \Gamma_1(z_1) = (z_1,\, 0,\, 0,\, 0), \\ \Gamma_2(z_1, z_2) = (z_1,\, 0,\, z_2,\, -iz_1^2 z_2^2), \\ \Gamma_3(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_3,\, iz_2^2[z_3^2 + 2z_1z_3],\, z_2,\, -iz_1^2z_2^2), \\ \Gamma_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 + z_3,\, iz_2^2[z_3^2 + 2z_1z_3],\, z_2 + z_4, \\ \qquad\qquad iz_2^2[z_3^2 + 2z_1z_3] - i[(z_2 + z_4)(z_1 + z_3)]^2), \\ \Gamma_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (z_1 + z_3 + z_5,\, iz_2^2[z_3^2 + 2z_1z_3] - \\ \qquad - i[(z_2 + z_4)(z_1 + z_3)]^2) + i[(z_1 + z_3 + z_5)(z_2 + z_4)]^2, \\ \qquad z_2 + z_4,\, iz_2^2[z_3^2 + 2z_1z_3] - i[(z_2 + z_4)(z_1 + z_3)]^2). \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Области значений отображений Γ_k лежат в $\mathcal{M}$, на котором можно взять координаты (z, w, ζ) или (ζ, ξ, z). Выберем их, как в первом случае, при четном k и, как во втором случае, при нечетном k. Таким образом, рассматриваем Γ_5 как отображение $\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3_{(z,\zeta,\xi)}$, т.е. забываем про вторую w-координату в выражении для Γ_5. Теперь вычисляя 3×5 матрицу Якоби отображения Γ_5 в точке $(z^*_{(3)}, \omega^*_{(2)})$, как в теореме 2.5.2, которая необходимо имеет координаты $(z^*_1, z^*_2, 0, -z^*_2, -z^*_1)$ и для которой очевидно $\Gamma_5(z^*_1, z^*_2, 0, -z^*_2, -z^*_1) = 0$, видим, что определитель первой 3×3 подматрицы равен $2iz^*_1(z^*_2)^2$. Значит, он не равен нулю при любом выборе $z^*_1 \neq 0$ и $z^*_2 \neq 0$. Между прочим, возникает вопрос об оптимальности целого $(2\mu_0 - 1)$ в теореме 2.5.2. Как раз этот пример и показывает, что оно оптимально. В самом деле, спрашивается существует ли $z^*_{(4)} = (z^*_1, z^*_2, z^*_3, z^*_4)$ такое, что $\Gamma_4(z^*_{(4)}) = 0$, и ранг дифференциала Γ_4 в точке $z^*_{(4)}$ равен 3 (размерности $\mathcal{M}$), тогда из уравнений (2.5.6), получаем, $z^*_1 + z^*_3 = 0$, $(z^*_2)^2 z^*_3[z^*_3 + 2z^*_1] = 0$ и $z^*_2 + z^*_4 = 0$; поэтому $z^*_{(4)}$ необходимо имеет вид $(0, z^*_2, 0, -z^*_2)$ или $(z^*_1, 0, -z^*_1, 0)$. Рассматривая теперь Γ_4 как отображение $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3_{(z,w,\zeta)}$ и вычисляя его 3×4 матрицу Якоби в таких точках, видим, что оно имеет ранг 2, что и доказывает утверждение.

2.5.7. Геометрия Сегре в формальной категории. Заменяя комплексные определяющие уравнения (2.1.15) на чисто формальные степенные ряды, читатель может убедиться в том, что все приведенные выше результаты имеют смысл и могут быть выражены в терминах формальных степенных рядов.

2.6. Внешняя комплексификация CR-орбит

2.6.1. Внутренние CR-орбиты и их гладкость. Комплексное касательное расслоение T^cM подмногообразия M порождается $2m$ сечениями $\mathrm{Re}\ L_1$, $\mathrm{Im}, L_1, \ldots, \mathrm{Re}\, L_m$, $\mathrm{Im}\, L_m$. В формальном случае их поток является формальным. В аналитическом случае их поток аналитичен. Однако, в алгебраическом случае возможны «тонкие места» (subtle points). Мы видели, что комплексные потоки комплексифицированных векторных полей $\mathcal{L}_k$, заданные формулами (2.4.2) и (2.4.3), алгебраичны. Как показывает следующий пример, это уже не так для вещественных потоков вещественной и мнимой частей векторных полей L_k.

Пример 2.6.2. Пусть M — вещественно аналитическая гиперповерхность, проходящая через начало координат в $\mathbb{C}^2$ и определенная уравнением $\mathrm{Im}\, w = \sqrt{1 + z\bar{z}} - 1$. Векторное поле $\overline{L} := \partial_{\bar{z}} + iz(1 + z\bar{z})^{-1/2}\, \partial_{\bar{w}}$ порождает $T^{0,1}M$. Его вещественная и мнимая части задаются соотношениями

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\,\overline{L} = \partial_x - y(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}\, \partial_u + x(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}\, \partial_v, \\ 2\,\mathrm{Im}\,\overline{L} = \ -\partial_y + x(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}\, \partial_u + y(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}\, \partial_v. \end{cases} \tag{2.6.3}$$

Покажем, что поток $2\,\mathrm{Re}\,\overline{L}$ не алгебраичен. В самом деле, пусть s обозначает вещественный временной параметр, а $(x(s), y(s), u(s), v(s))$ — единственная интегральная кривая поля $2\,\mathrm{Re}\,\overline{L}$ с $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $u(0) = u_0$ и $v(0) = v_0$ с $(x_0 + iy_0, u_0 + iv_0) \in M$. Вычислим сначала $x(s) = x_0 + s$, $y(s) = y_0$, $v(s) = (1 + y_0^2 + (x_0 + s)^2)^{1/2} - 1$; тогда $u(s)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$du(s)/ds = -y_0(1 + y_0^2(x_0 + s)^2)^{-1/2}, \tag{2.6.4}$$

которое можно проинтегрировать:

$$u(s) = u_0 - y_0 \left[\mathrm{Arcsh}\left(\frac{x_0 + s}{\sqrt{1 + y_0^2}} \right) - \mathrm{Arcsh}\left(\frac{x_0}{\sqrt{1 + y_0^2}} \right) \right] \tag{2.6.5}$$

Следовательно, поток поля $2\,\mathrm{Re}\,\overline{L}$ не алгебраичен. Тем не менее, *подчеркнем, что комплексный поток комплексифицированного векторного поля $\underline{\mathcal{L}} = \partial_\zeta + iz(1 + z\zeta)^{-1/2}\, \partial_\xi$ комплексно алгебраичен*, как это показывает общее выражение (2.4.3), дающее в этом частном случае $\underline{\mathcal{L}}_\zeta(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) = (z_p, w_p, \zeta_p + \zeta, w_p + 2i(\sqrt{1 + z\zeta} - 1)))$. Действительно, это выражение, очевидно, алгебраично.

Рассмотрим теперь множество $\mathbb{L} := \{\mathrm{Re}\, L_1, \mathrm{Im}\, L_1, \ldots, \mathrm{Re}\, L_m, \mathrm{Im}\, L_m\}$ из $2m$ вещественных векторных полей, порождающих T^cM. Применяя теорему 2.4.10, можно построить *локальные CR-орбиты точек p из M*, которые обозначим через $\mathcal{O}_{CR}(M, p)$. Поскольку они — слабые T^cM–интегральные многообразия, то их CR-размерность та же, что и у M. В соответствии с только что приведенным примером 2.6.2, известно только то, что $\mathcal{O}_{CR}(M, p)$ — вещественно аналитическое подмногообразие, проходящее через p. Алгебраичность кажется потерянной, однако естественно, в соответствии с принципом Лейбница о достаточности, можно ожидать, что $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$ алгебраично, если M алгебраично.

Приведенный выше пример 2.6.2 показывает, что алгебраичность CR-орбит вещественно алгебраического порождающего многообразия не может быть установлена с помощью сечений комплексного касательного расслоения $T^cM = \mathrm{Re}\, T^{0,1}M$. К счастью, при переходе к внешней комплексификации, эта трудность преодолевается.

Теорема 2.6.6. *Существует взаимнооднозначное соответствие между CR-орбитами и их внешней комплексификацией, а именно, для всех p из окрестности начала координат имеем*

(1) $\mathcal{O}_{CR}(M,p)^c = \mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)$ *и*
(2) $\mathcal{O}_{CR}(M,p) = \pi_t(\underline{\Lambda} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c))$,

где $p^c = (p,\bar{p}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. В частности, если M — вещественно алгебраическое порождающее подмногообразие, то комплексифицированная орбита $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)$ является комплексно алгебраческой, откуда из ***(2)*** *вытекает, что CR-орбита $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$ вещественно алгебраическая.*

Доказательство. По теореме 2.4.10, $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$ — вещественно-аналитическое замкнутое подмногообразие в M, проходящее через p. Даже если M вещественно-аналитично, то потоки элементов $\mathbb{L}$, вообще говоря, не алгебраичны, как показывает пример 2.6.2, так что ничего не известно, кроме аналитичности $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$. Поэтому пусть $\mathcal{O}$ — малый открытый связный кусок многообразия $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$, проходящий через p, а $\mathcal{O}^c$ — его внешняя комплексификация. Так как $L_k|_{\mathcal{O}}$ и $\bar{L}_k|_{\mathcal{O}}$ касательны к $\mathcal{O}$, то *принцип единственности для порождающих* (с $\mathcal{O} \subset \underline{\Lambda}$, где $\underline{\Lambda}$ максимально вещественно, а значит, $\mathcal{O}$ порождающее многообразие в $\mathcal{O}^c$) дает, что $\mathcal{L}_k|_{\mathcal{O}^c}$ и $\underline{\mathcal{L}}_k|_{\mathcal{O}^c}$ касательны к $\mathcal{O}^c$. Следовательно, $\mathcal{O}^c$ — интегральное многообразие $\{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}\}$, проходящее через p^c, откуда $\mathcal{O}^c \supset \mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)$, поскольку по характеристическому свойству орбиты $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)$ она есть *наименьший кусок интегрального многообразия* $\{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}\}$, проходящий через p^c.

Обратно, пусть $\mathcal{N}$ — кусок многообразия $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)$, проходящий через p^c. Только что было показано, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}^c$, а значит, для завершения доказательства нужно установить, что $\mathcal{N} \supset \mathcal{O}^c$. Утверждается, что $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ в окрестности точки p^c. В самом деле, по определению, орбита — это множество концов сшиваний потоков $\mathcal{L}$ и потоков $\underline{\mathcal{L}}$ (заметим, что в силу того, что $\mathcal{L}_{z_2} \circ \mathcal{L}_{z_1} = \mathcal{L}_{z_1+z_2}$ и $\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_2} \circ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1} = \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1+\zeta_2}$, но $\mathcal{L}$ и $\underline{\mathcal{L}}$ не коммутируют, могут существовать различные типы сшитых потоков; здесь сокращенное обозначение Γ_k использоваться не будет):

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c) = \{\mathcal{L}_{z_k} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_2} \circ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1} \circ \mathcal{L}_{z_1}(p^c) : \\ \qquad\qquad : z_1, \zeta_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C} \text{ малы}, k \in \mathbb{N}\} \bigcup \\ \qquad \bigcup \{\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_k} \circ \cdots \circ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_2} \circ \mathcal{L}_{z_1} \circ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(p^c) : \\ \qquad\qquad : \zeta_1, z_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k \in \mathbb{C} \text{ малы}, k \in \mathbb{N}\} := E \cup F. \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Теперь анализ (2.4.2) и (2.4.3) показывает, что $\sigma(\mathcal{L}_w(q)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}}(\sigma(q))$ и $\sigma(\underline{\mathcal{L}}_\zeta(q)) = \mathcal{L}_{\bar{\zeta}}(\sigma(q))$ для каждого $q \in \mathcal{M}$. Следовательно,

$$\begin{cases} \sigma(\mathcal{L}_{z_k} \circ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_1}(p^c)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}_k}(\sigma(\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_1}(p^c))) = \\ = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}_k} \circ \mathcal{L}_{\bar{\zeta}_{k-1}} \circ \cdots \circ \sigma(\mathcal{L}_{z_1}(p^c)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}_k} \circ \mathcal{L}_{\bar{\zeta}_{k-1}} \circ \cdots \circ \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}_1}(p^c), \end{cases} \tag{2.6.8}$$

поскольку $\sigma(p^c) = p^c$. Это доказывает, что $F = \sigma(E)$, а потому $\sigma(\mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)) = \mathcal{O}_{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{M},p^c)$, так что $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$, что и утверждалось. По теореме 2.4.10, $\mathcal{N}$ гладко в точке p^c и $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$.

Для завершения доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма 2.6.9. *Существует взаимнооднозначное соответствие между вещественно-аналитическими подмножествами $\Sigma \subset M$ и комплексно-аналитическими подмногообразиями Σ_1 в $\mathcal{M}$, удовлетворяющими условию $\sigma(\Sigma_1) = \Sigma_1$ и заданными с помощью отображений $\Sigma \mapsto \Sigma^c =: \Sigma_1$ с обратными $\Sigma_1 \mapsto \pi_t(\Sigma_1 \cap \underline{\Lambda}) =: \Sigma$. Далее, Σ — гладкое подмногообразие в том и только том случае, если Σ_1 гладко.*

Доказательство. Пусть $\Sigma \subset M$ задано вещественно аналитическими уравнениями $\chi_l(t,\bar t) = 0$, $l = 1,\dots,c$. Если Σ гладко,то можно считать, что $d\rho_1 \wedge \dots \wedge d\rho_d \wedge d\chi_1 \wedge \dots \wedge d\chi_l(0) \neq 0$. Пусть $\Sigma^c \subset \mathcal{M}$ определяется уравнением $\chi_l(t,\tau) = 0$. Ясно, что Σ^c снова гладко, и $\Sigma = \pi_t(\Sigma^c \cap \underline{\Lambda})$.

Обратно, пусть $\Sigma_1 \subset \mathcal{M}$ задано уравнениями $\chi_l(t,\tau) = 0$, $l = 1,\dots,c$. Если Σ_1 гладко, то можно считать, что $d\rho_1 \wedge \dots \wedge d\rho_d \wedge d\chi_1 \wedge \dots \wedge d\chi_l(0) \neq 0$. По предположению, Σ_1 σ–инвариантно, т.е. $\chi_l(t,\tau) = 0$, $l = 1,\dots,c$, в том и только том случае, если $\chi_l(\bar\tau,\bar t) = 0$, $l = 1,\dots,c$. Отсюда следует, что если положить $\Sigma := \{t \in M : \chi_l(t,\bar t) = 0, l = 1,\dots,c\} = \pi_t(\Sigma_1 \cap \underline{\Lambda})$, то Σ вещественно, т.е. $t \in \Sigma$ в том и только том случае, если $\bar t \in \Sigma$ и $(\Sigma)^c = \Sigma_1$. Наконец, Σ гладко, если Σ_1 гладко. $\square$

Продолжая доказательство теоремы 2.6.6, напомним, что нам уже известно, что $N := \pi_t(\mathcal{N} \cap \underline{\Lambda})$ — единственный кусок вещественно аналитического подмногообразия $N \subset M$, проходящего через p такой, что $N^c = \mathcal{N}$.

Обозначим $\mathcal{N} = \{\rho(t,\tau) = 0, \chi(t,\tau) = 0\}$, так что $N = \{\rho(t,\bar t) = 0, \chi(t,\bar t) = 0\}$. Тогда $\mathcal{L}_k\rho = 0$, $\underline{\mathcal{L}}_k\rho = 0$, $\mathcal{L}_k\chi = 0$, $\underline{\mathcal{L}}_k\chi = 0$ на $\{\rho = \chi = 0\}$, поскольку $\mathcal{N}$ есть $\{\mathcal{L},\underline{\mathcal{L}}\}$-интегральное многообразие. Таким образом, после ограничения на антидиагональ $\{\tau = \bar t\} = \underline{\Lambda}$ имеем $L_k\rho = 0$, $\bar L_k\rho = 0$, $L_k\chi = 0$ и $\bar L_k\chi = 0$ на $\{\rho(t,\bar t) = 0, \chi(t,\bar t) = 0\} = N$, так что N — $\{L,\bar L\}$-интегральное многообразие. Тогда по свойству минимальности CR-орбит, $N \supset \mathcal{O}$ как ростки в p. С помощью комплексификации получаем $\mathcal{N} \supset \mathcal{O}^c$, что и требовалось. $\square$

Ввиду теоремы 2.6.4, эквивалентное определение минимальности таково (см. определение 2.4.8).

Определение 2.6.10. Порождающее подмногообразие M называется *минимальным в* $p \in M$, если CR-орбита $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$ имеет максимальную размерность, равную $\dim_{\mathbb{R}} M$.

2.6.11. Тип Сегре подмногообразия M. Определим теперь отображения $\psi^1(z_1) := \pi_t(\Gamma_1(z_1))$, $\psi^2(z_1,z_2) := \pi_\tau(\Gamma_2(z_1,z_2))$ и, более общо,

$$\psi^{2j}(z_{(2j)}) := \pi_\tau(\Gamma_{2j}(z_{(2j)})) \quad \text{и} \quad \psi^{2j+1}(z_{(2j+1)}) := \pi_t(\Gamma_{2j+1}(z_{(2j+1)})). \tag{2.6.12}$$

Заметим, что по определениям 2.4.2 и 2.4.3), действие потока поля $\mathcal{L}$ не изменяет (ζ,ξ)–координаты, и обратно, действие потока $\underline{\mathcal{L}}$ не меняет (z,w)-координат. Аналогично можно определить отображения $\underline{\psi}^k$ by $\underline{\psi}^{2j}(z_{(2j)}) := \pi_t(\underline{\Gamma}_{2j}(z_{(2j)}))$ и $\underline{\psi}^{2j+1}(z_{(2j+1)}) := \pi_\tau(\underline{\Gamma}_{2j+1}(z_{(2j+1)}))$. Нам потребуется следующая лемма (конечно, аналогичное утверждение справедливо с $\underline{\Gamma}_{k+2}$ и $\underline{\psi}^{k+1}$):

Лемма 2.6.13. *При* $0 \leqslant k \leqslant \mu_0$ *имеем*:

$$m + \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\psi^{k+1}) = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{k+2}) = 2m + e_3 + \dots + e_k, \tag{2.6.14}$$

и $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\psi^{k+1}) = m + e_3 + \dots + e_{\mu_0}$ *для* $k \geqslant \mu_0$.

Доказательство. При $k = 0$ имеем $\psi^1(z_1) = (z_1, i\bar\Theta(z_1,0,0))$, откуда, очевидно, $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\psi^1) = m$. Напомним, что в силу (2.4.6)

$$\Gamma_2(z_1,z_2) = \left(z_1,\, \overline{\Theta}(z_1,0,0),\, z_2,\, \Theta(z_2,z_1,\overline{\Theta}(z_1,0,0))\right), \tag{2.6.15}$$

так что $m + \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\psi^1) = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_2) = 2m$. Более общо, при $k = 2j$ имеем

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{z_{2j+1}}(\Gamma_{2j}(z_{(2j)})) = \mathcal{L}_{z_{2j+1}}(z(z_{(2j)}), w(z_{(2j)}), \zeta(z_{(2j)}), \xi(z_{(2j)})) = \\ \qquad = \left(z_{2j+1} + z(z_{(2j)}),\, \bar\Theta(z_{2j+1} + z(z_{(2j)}), \zeta(z_{(2j)}), \xi(z_{(2j)})),\, \zeta(z_{(2j)}),\, \xi(z_{(2j)})\right). \end{cases} \tag{2.6.16}$$

Выберем координаты (z,ζ,ξ) на $\mathcal{M}$, откуда следует, что область значений отображения $\Gamma_{2j+1}(z_{(2j+1)})$ в (2.6.16) содержится в $\mathbb{C}^{2m+d}_{(z,\zeta,\xi)}$. Значит, это отображение есть отображение $(z_{(2j)}, z_{2j+1}) \mapsto \left(z_{2j+1} + z(z_{(2j)}), \zeta(z_{(2j)}),\, \xi(z_{(2j)})\right)$. Поэтому сразу получаем

$$\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{2j+1}) = m + \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}[z_{(2j)} \mapsto (\zeta(z_{(2j)}), \xi(z_{(2j)}))] = m + \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\psi^{2j}. \tag{2.6.17}$$

Это завершает доказательство леммы 2.6.13. $\square$

Определим теперь *тип Сегре подмногообразия* M *в точке* $p \in M$ (не надо его путать с μ_0) как наименьшее целое ν_0, для которого $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\psi^{\nu_0}) = \mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\psi^{\nu_0+1})$. В силу (2.6.17), видим, что на самом деле $\nu_0 = \mu_0 - 1$. Тип Сегре *подмногообразия* M связан с его CR-орбитами, как это будет объяснено ниже.

2.6.18. Внутренняя комплексификация CR-орбит. Под *внутренней комплексификацией* N^{i_c} *вещественного CR-многообразия* N понимается наименьшее алгебраическое или аналитическое многообразие, содержащее N, в $\mathbb{C}^n$. Оно существует и $\dim_{\mathbb{C}} N^{i_c} = \mathrm{CRdim}\, N + \mathrm{Hcodim}\, N$ (*голоморфная коразмерность;* см. 2.1.6). Пусть $\mathcal{O}$ — кусок многообразия $\mathcal{O}_{CR}(M,p)$, проходящий через p, а $\mathcal{O}^{i_c}$ — его *внутренняя комплексификация*, а именно, наименьшее комплексное многообразие объемлющего пространства $\mathbb{C}^n$, содержащее $\mathcal{O}$. По построению, области значений ψ^{2j} содержатся в $\mathbb{C}^n_\tau$, однако предпочтительней действовать в $\mathbb{C}^n$ (хотя в принципе можно эквивалентно действовать в $\mathbb{C}^n_\tau$); следовательно, рассмотрим вместо этого $\underline{\psi}^{2j}$. Теперь можно установить, что $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\underline{\psi}^{\nu_0}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}^{i_c}$ и что область значений $\underline{\psi}^{2\nu_0}$ — кусок многообразия $\mathcal{O}^{i_c}$, проходящий через p.

Теорема 2.6.19. *Существуют некоторые точки* $\underline{z}^*_{(2\nu_0)} \in \mathbb{C}^{m2\nu_0}$, *произвольно близкие к началу координат, и малые окрестности* $\mathcal{V}^*$ *точек* $\underline{z}^*_{(2\nu_0)}$ *в* $(\delta\Delta^m)^{2\nu_0}$ *такие, что справедливы следующие утверждения,*

- **(j)** $\underline{\psi}^{2\nu_0}(\underline{z}^*_{(2\nu_0)}) = p$.
- **(k)** *Отображение* $\underline{\psi}^{2\nu_0}$ *имеет постоянный ранг* $m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$ *в* $\mathcal{V}^*$.
- **(l)** $\underline{\psi}^{2\nu_0}(\mathcal{V}^*)$ *есть кусок многообразия* $\mathcal{O}^{i_c}$ *внутренней комплексифицированной CR-орбиты подмногообразия* M, *проходящей через* p.
- **(m)** $m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^{i_c} = \mathrm{CRdim}\,\mathcal{O} + \mathrm{Hcodim}\,\mathcal{O}$.

Доказательство. Напомним, что, ввиду теоремы 2.5.2, существует $\underline{z}^*_{(2\mu_0-1)} \in (\delta\Delta^m)^{2\mu_0-1}$, $\underline{\Gamma}_{2\mu_0-1}(\underline{z}^*_{(2\mu_0-1)}) = p^c$, такая что отображение $\underline{\Gamma}_{2\mu_0-1}$ имеет ранг $2m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$ в $\underline{z}^*_{(2\mu_0-1)}$. Рассматривая опять (2.6.17) (при нечетном $k = 2j+1$, которое не выписывается, но для которого соответствующее уравнение аналогично) и пользуясь цепным правилом, выводим, что $\underline{\psi}^{2\mu_0-2}$ имеет ранг $m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$ в точке $\underline{z}^*_{2\nu_0} := (\underline{z}^*_1, \ldots, \underline{z}^*_{2\mu_0-2})$ и $\underline{\psi}^{2\nu_0}(\underline{z}^*_{(2\nu_0)}) = p$ (напомним, что $\nu_0 = \mu_0 - 1$). Это дает **(j)** и **(k)**. Из соображений размерности знаем, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^{i_c}$ должно равняться $m + e_3 + \cdots + e_{\mu_0}$, поскольку $\mathrm{CRdim}\ \mathcal{O} = m$ и $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^c = m + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^{i_c}$. Это дает **(m)**. Наконец, для вывода **(l)** утверждается, что область значений $\underline{\psi}^{2\nu_0}$ *априори* содержится в $\mathcal{O}^{i_c}$, и, опять по соображениям размерности, образ $\underline{\psi}^{2\nu_0}(\mathcal{V}^*)$ необходимо будет куском многообразия $\mathcal{O}^{i_c}$, проходящим через p. Далее, введем голоморфные координаты $(z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{e_3+\cdots+e_{\mu_0}} \times \mathbb{C}^{n-m-e_3-\cdots-e_{\mu_0}}$, обращающиеся в нуль в точке p, в которых уравнение $\mathcal{O}^{i_c}$ есть $\{w_2 = 0\}$ и которые возможны. Используя предположение о том, что $M \cap \{w_2 = 0\}$ гладко, а также предположение о CR-размерности m, доказываем, что уравнение для $\mathcal{M}$ можно записать в виде $w_1 = \overline{\Theta}_1(z, \zeta, \xi_1, \xi_2)$ и $w_2 = \overline{\Theta}_2(z, \zeta, \xi_1, \xi_2)]$ с $\overline{\Theta}_2(z, \zeta, \xi_1, 0) \equiv 0$. Тогда рассмотрение индуктивного построения отображений $\underline{\Gamma}_k$ показывает, что их область значений содержится в $\{w_2 = 0, \xi_2 = 0\}$, откуда следует, что отображения $\underline{\psi}_{2j}$ имеют области значений в $\{w_2 = 0\}$, что и утверждалось. Теорема 2.6.19 доказана. □

Пример 2.6.20. Рассматривая отображение Γ_4 в (2.5.6), видим, что целое $2\nu_0 = 2\mu_0 - 2$, удовлетворяющее предположениям **(j)** и **(k)** теоремы 2.6.19, вообще говоря, оптимально.

2.7. Цепи Сегре и множества Сегре в объемлющем пространстве

2.7.1. Цепи Сегре как цепи k-х орбит векторных полей. В этом пункте определяются некоторые подмножества $\mathcal{M}$, являющиеся образами цепей Сегре Γ_k. Последние результаты завершают изложение общей теории цепей Сегре. Хотя они и не используются в дальнейшем, их определение интересно с геометрической точки зрения. Вот иллюстрация этого (см. рис. 2.7.2.

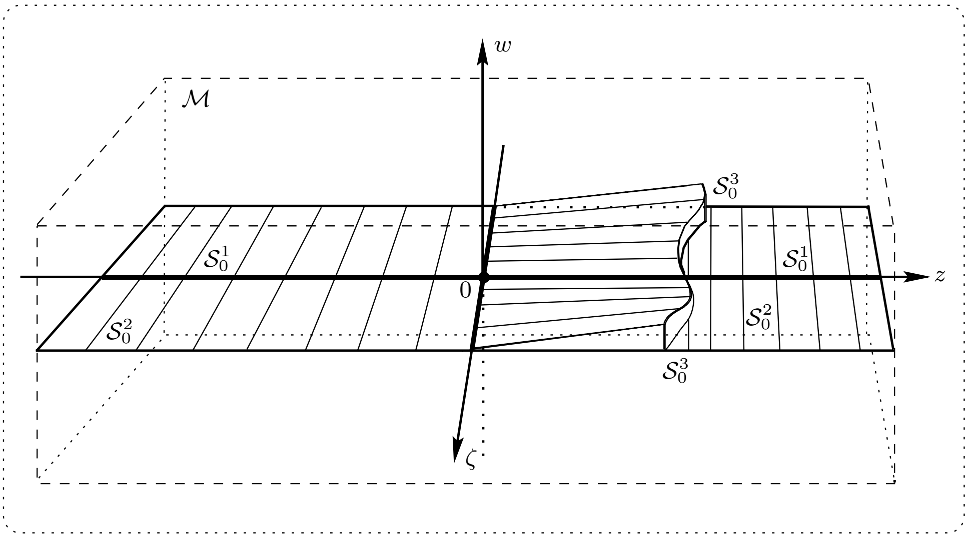

Рис. 2.7.2. Поднятие цепи Сегре

Сначала вернемся к сшитым потокам в (2.4.2) и (2.4.3). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем заранее $\delta_k > 0$ настолько малым, что $[\mathcal{L} \,\mathrm{or}\, \underline{\mathcal{L}}]_{z_k}(\cdots(\mathcal{L}_{z_1}(p^c))\cdots)$ принадлежит $\Delta_{2n}(\rho_1)$ при всех $z_{(k)} \in \Delta_{mk}(\delta_k)$ и всех $(t_p, \tau_p) \in \mathcal{M}$ с $(t_p, \tau_p) \in \Delta_{2n}(\rho_1/2)$. Рассматривая (2.5.2) и (2.5.3), видим, что (с точностью до сжатия) комплексифицированные многообразия Сегре точки $(t_p, \tau_p) \in \mathcal{M}$ могут быть определены как $\mathcal{S}_{\tau_p} := \{\mathcal{L}_{z_1}(t_p, \tau_p) \in \Delta_{2n}(\rho_1) : z_1 \in \Delta_m(\delta_1)\}$ и $\underline{\mathcal{S}}_{t_p} := \{\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(t_p, \tau_p) \in \Delta_{2n}(\rho_1) : z_1 \in \Delta_m(\delta_1)\}$. В порядке $k = 2$ можно определить

$$\begin{cases} \mathcal{S}^2_{\tau_p} = \{\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\mathcal{L}_{z_1}(t_p, \tau_p)) \in \Delta_{2n}(\rho_1) : (z_1, z_2) \in \Delta_{2m}(\delta_2)\}, \\ \underline{\mathcal{S}}^2_{t_p} = \{\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(t_p, \tau_p)) \in \Delta_{2n}(\rho_1) : (z_1, z_2) \in \Delta_{2m}(\delta_2)\}. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Более общо, определим множества $\mathcal{S}^k_{\tau_p}$ и $\underline{\mathcal{S}}^k_{t_p}$. Несколько неточно, назовем эти множества также k-й *цепью Сегре* и *сопряженной* k*-й цепью Сегре*. Поскольку используются только отображения Γ_k и $\underline{\Gamma}_k$, а не их образы, то это не приведет к недоразумениям.

Напомним сначала, что поскольку только два «начальных действия» $\mathcal{L}_{z_1}(t_p, \tau_p)$ и $\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(t_p, \tau_p)$ могут привнести различие в сшивание потоков $\mathcal{L}$ и $\underline{\mathcal{L}}$, то существуют только два различных семейства k-х цепей Сегре. Точное определение $\mathcal{S}^k_{\tau_p}$ и $\mathcal{S}^k_{t_p}$ таково:

$$\begin{cases} \mathcal{S}^{2j}_{\tau_p} := \{\underline{\mathcal{L}}_{z_{2j}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_1}(t_p, \tau_p) : \ (z_1, \ldots, z_{2j}) \in \Delta_{2mj}(\delta_{2j})\}, \\ \mathcal{S}^{2j+1}_{\tau_p} := \{\mathcal{L}_{z_{2j+1}} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_1}(t_p, \tau_p) : \ (z_1, \ldots, z_{2j+1}) \in \Delta_{2mj+m}(\delta_{2j+1})\}, \\ \underline{\mathcal{S}}^{2j}_{t_p} := \{\mathcal{L}_{z_{2j}} \circ \cdots \circ \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(t_p, \tau_p) : \ (z_1, \ldots, z_{2j}) \in \Delta_{2mj}(\delta_{2j})\}, \\ \underline{\mathcal{S}}^{2j+1}_{t_p} := \{\underline{\mathcal{L}}_{z_{2j+1}} \cdots \circ \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(t_p, \tau_p) : \ (z_1, \ldots, z_{2j+1}) \in \Delta_{2mj+m}(\delta_{2j+1})\}, \end{cases} \tag{2.7.4}$$

при $k = 2j$ или $k = 2j + 1$, где $j \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\mathcal{S}^k_{\tau_p} \subset \mathcal{M}$ и $\underline{\mathcal{S}}^k_{t_p} \subset \mathcal{M}$. Поскольку $\sigma(\mathcal{L}_w(q)) = \underline{\mathcal{L}}_{\bar{w}}(\sigma(q))$, то $\sigma(\mathcal{S}^k_{\tau_p}) = \underline{\mathcal{S}}^k_{\bar{t}_p}$.

2.7.5. Множества Сегре в объемлющем пространстве. Определим теперь множества Сегре в объемлющем пространстве как некоторые проекции цепей Сегре. Рисунок 2.7.6 демонстрирует идею определения цепей Сегре как объединение многообразий Сегре в случае минимальной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$.

Множества $S^{2j+1}_{\bar{t}_p} := \pi_t(\mathcal{S}^{2j+1}_{\bar{t}_p}) \subset \Delta_n(\rho_1)$, $\overline{S}^{2j+1}_{t_p} := \pi_\tau(\underline{\mathcal{S}}^{2j+1}_{t_p}) \subset \Delta_n(\rho_1)$, $S^{2j}_{\bar{t}_p} := \pi_\tau(\mathcal{S}^{2j}_{\bar{t}_p}) \subset \Delta_n(\rho_1)$ и $\overline{S}^{2j}_{t_p} := \pi_t(\underline{\mathcal{S}}^{2j}_{t_p}) \subset \Delta_n(\rho_1)$ будут называться *k-ми множествами Сегре и k-ми сопряженными множествами Сегре* с $k = 2j$ или $k = 2j + 1$. Заметим, что, согласно определениям 2.4.2 и 2.4.3), действие потока поля $\mathcal{L}$ не изменяет (ζ, ξ)–координат, и, наоборот, действие потока поля $\underline{\mathcal{L}}$ не

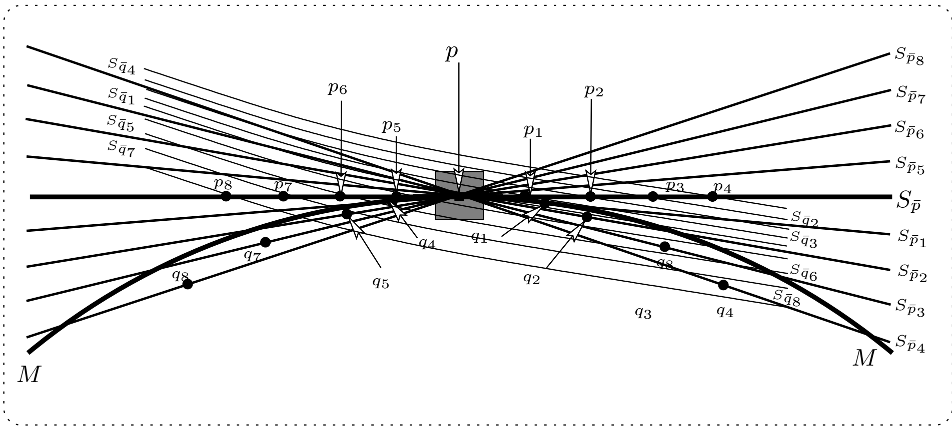

Рис. 2.7.6. Множества Сегре как объединение многообразий Сегре $p \in M$, $p_1 \in S_{\bar p}$, $\dots$, $p_8 \in S_{\bar p}$, $q_1 \in S_{\bar p_1}$, $\dots$, $q_8 \in S_{\bar p_8}$

меняет (z, w)-координат. Вот почему в определении множеств Сегре осуществляется попеременное проектирование на пространства $\mathbb{C}^n_t$ и $\mathbb{C}^n_\tau$.

Эквивалентное, чисто теоретико-множественное определение таково. Определим $S^0_{\bar t_p} := \{\bar t_p\}$ и $S^1_{\bar t_p} := S_{\bar t_p} = \bigcup_{\bar t \in S^0_{\bar t_p}} S_{\bar t}$, $S^2_{\bar t_p} = \bigcup_{t \in S^1_{\bar t_p}} \overline{S}_t$, а далее — индуктивно, при $j \in \mathbb{N}_*$, $S^{2j}_{\bar t_p} = \bigcup_{t \in S^{2j-1}_{\bar t_p}} \overline{S}_t$ и $S^{2j+1}_{\bar t_p} = \bigcup_{\bar t \in S^{2j}_{\bar t_p}} S_{\bar t}$. С другой стороны, определим также $\overline{S}^0_{t_p} := \{t_p\}$ и $\overline{S}^1_{t_p} := \overline{S}_t = \bigcup_{t \in \overline{S}^0_{t_p}} \overline{S}_t$, $\overline{S}^2_{t_p} := \bigcup_{\bar t \in \overline{S}^1_{t_p}} S_{\bar t}$ и, по индукции, при $j \in \mathbb{N}_*$, $\overline{S}^{2j}_{t_p} := \bigcup_{\bar t \in \overline{S}^{2j-1}_{t_p}} S_{\bar t}$ и $\overline{S}^{2j+1}_{t_p} = \bigcup_{t \in \overline{S}^{2j}_{t_p}} \overline{S}_t$. Отметим, наконец, следующие два элементарных свойства:

(1) $\overline{S^k_{\bar t_p}} = \overline{S}^k_{t_p}$ и $S^k_{\bar t_p} = \overline{\overline{S}^k_{t_p}}$, $k \in \mathbb{N}$.

(2) $\overline{h}(S^{2j}_{\bar t_p}) = S'^{2j}_{\overline{h}(\bar t_p)}$, $h(S^{2j+1}_{\bar t_p}) = S'^{2j+1}_{\overline{h}(\bar t_p)}$, $h(\overline{S}^{2j}_{t_p}) = \overline{S}'^{2j}_{h(t_p)}$, $\overline{h}(\overline{S}^{2j+1}_{t_p}) = \overline{S}'^{2j+1}_{h(t_p)}$.

2.8. Порождающий мультитип Сегре

2.8.1. Цепи Сегре с изменяющейся базовой точкой. Как и ранее, пусть M — связное вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$. Пусть $p_0 \in M$. В окрестности точки p_0 можно рассмотреть пару слоений Сегре локальной комплексификации $\mathcal{M}$ подмногообразия M. Пусть $p = (t_p, \tau_p) \in \mathcal{M}$. Отождествляя точку p_0 с началом координат некоторой системы координат, обозначим через $\Gamma_k(z_{(k)})$ отображение $[\mathcal{L} \,\mathrm{or}\, \underline{\mathcal{L}}]_{z_k} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_1}(p_0, \bar p_0)$, а именно, цепь Сегре с базовой точкой $(p_0)^c = (0, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Поскольку мы хотим, чтобы базовая точка была переменной, то нам понадобится новое обозначение. Для точки $p = (t_p, \tau_p)$ из окрестности $(p_0)^c$ в $\mathcal{M}$ определим

$$\Gamma_k(z_{(k)}, t_p, \tau_p) := [\mathcal{L} \,\mathrm{or}\, \underline{\mathcal{L}}]_{z_k} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{z_1}(t_p, \tau_p). \tag{2.8.2}$$

Аналогично, определим $\underline{\Gamma}_k(z_{(k)}, t_p, \tau_p)$. Для того, чтобы отметить зависимость типа Сегре от p, обозначим его через μ_p. Обозначим также мультитип Сегре в точке p через $(m, m, e_{3,p}, \dots, e_{\mu_p,p})$.

По теореме 2.5.2, порождающий ранг отображения Γ_k стабилизируется при $k \geqslant \mu_p$. Мы знаем, что $\mu_p \leqslant d + 2$ для всех p из окрестности точки p_0 и что отображение $z_{(k)} \mapsto \Gamma_k(z_{(k)}, t_p, \tau_p)$ определяет открытый кусок $\{\mathcal{L}, \underline{\mathcal{L}}\}$–орбиты, проходящей через $p \in \mathcal{M}$ при всех $k \geqslant 2\mu_p - 1$. Так как $2\mu_p - 1 \leqslant 2d + 3$ и $2d + 3 \leqslant 3(m + d) = 3n$, в силу того, что $m \geqslant 1$ и $d \geqslant 1$ по предположению, то отображение $\Gamma_{3n}(z_{(3n)}, t_p, \tau_p)$ с единым $k = 3n$ достаточно для построения $\{\mathcal{L}, \underline{\mathcal{L}}\}$–орбит всех точек p в окрестности $(p_0)^c$ в $\mathcal{M}$.

Ввиду этого наблюдения и алгебраичности или аналитичности отображения $\Gamma_{3n}(z_{(3n)}, t_p, \tau_p)$, легко видеть, что существует собственное комплексно-алгебраическое или комплексно-аналитическое подмногообразие $\mathcal{E}$ в $\mathcal{M}$ с тем свойством, что тип и мультитип Сегре комплексификации $\mathcal{M}$ постоянны в каждой точке $p \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{E}$. Обозначим эти постоянные через $(m, m, e_{3,M}, \dots, e_{\mu_M,M})$, где μ_M — постоянный тип Сегре комплексификации $\mathcal{M}$ вне $\mathcal{E}$. В частности, размерность орбиты $2m + e_{1,M} + \cdots + e_{\mu_M,M}$ постоянна в окрестности точки p. Кроме того, из алгебраичности или аналитичности отображений $\Gamma_{3n}(z_{(3n)}, t_p, \tau_p)$ вытекает также, что функции $p \mapsto \mu_p$ и $p \mapsto e_{3,p}, \ldots, p \mapsto e_{\mu_p,p}$ полунепрерывны снизу. Наконец, используя σ-инвариантность CR-орбит комплексифицированных точек $p^c = (t_p, \bar{t}_p) \in \mathcal{M} \cap \underline{\Lambda}$ с $p \in M$, получаем следующую теорему, утверждающую, что геометрия Сегре допускает постоянные инварианты над открытом по Зарискому множестве в M.

Теорема 2.8.3. *Пусть M — связное вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ коразмерности $d \geqslant 1$ и CR-размерности $m = n - d \geqslant 1$. Тогда существует собственное вещественное алгебраическое или аналитическое подмногообразия E в M такое, что для каждой точки $p \in M \backslash E$ тип Сегре подмногообразия M в точке p постоянен и равен целому $\nu_M = \mu_M - 1 \leqslant d + 1$, мультитип Сегре подмногообразия M в точке p также постоянен и равен $(m, e_{3,M}, \ldots, e_{M,\mu_M})$. В частности, размерность CR-орбиты $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{CR}(M, p)$ постоянна и равна $2m + e_{3,M} + \cdots + e_{\mu_M,M}$ при всех $p \in M \backslash E$.*

Назовем μ_M *порождающим типом Сегре комплексификации* $\mathcal{M}$, а набор $(m, m, e_{3,M}, \ldots, e_{\mu_M,M})$ — *порождающим мультитипом Сегре комплексификации* $\mathcal{M}$. Пусть

$$d_M := e_{3,M} + \cdots + e_{\mu_M,M}. \tag{2.8.4}$$

Назовем целое $2m + d_M$ *размерностью порождающей орбиты по Зарискому* подмногообразия M. Назовем целое $d - d_M$ *порождающей коразмерностью по Зарискому* подмногообразия M. Тогда, снова используя отображение $\Gamma_{3n}(z_{(3n)}, t_p, \tau_p)$, можно вывести следующую алгебраическую или аналитическую теорему о CR-слоении, которая показывает, что $d - d_M$ совпадает с голоморфной порождающей коразмерностью по Зарискому внутренней комплексификации CR-орбит.

Следствие 2.8.5. *Пусть $p \in M \backslash E$ и пусть $d_{2,M} := d - e_{3,M} - \cdots - e_{\mu_M,M}$. Тогда окрестность точки p в M расслоена алгебраически или аналитически на CR-орбиты, а именно, существуют $d_{2,M}$ комплексных алгебраических или аналитических функций $h_1, \ldots, h_{d_{2,M}}$ с $\partial h_1 \wedge \cdots \wedge \partial h_{d_{2,M}}(p) \neq 0$ таких, что выполнены следующие условия:*

(1) *M содержится в $\{h_1 = \bar{h}_1, \ldots, h_{d_{2,M}} = \bar{h}_{d_{2,M}}\}$. Другими словами, M содержится в трансверсальном пересечении $d_{2,M}$ плоских гиперповерхностей Леви в общем положении.*

(2) *Для каждого $c = (c_1, \ldots, c_{d_{2,M}}) \in \mathbb{R}^{d_{2,M}}$ многообразие $M_c := M \cap \{h_1 = c_1, \ldots, h_{d_{2,M}} = c_{d_{2,M}}\}$ является CR-орбитой многообразия M.*

Доказательство. С помощью отображения $\Gamma_{3n}(z_{(3n)}, t_p, \tau_p)$ находим вещественные алгебраические или аналитические функции $h_1, \ldots, h_{d_{2,M}}$ с линейно независимыми вещественными дифференциалами такие, что множества уровня $\{h_1 = c_1, \ldots, h_{d_{2,M}} = c_{d_{2,M}}\}$ — CR-орбиты многообразия M в окрестности точки p. Поскольку функции $h_1, \ldots, h_{d_{2,M}}$ постоянны на каждой CR-орбите, то, в частности, они — тривиальные CR-функции. По теореме продолжения Севери–Томассини, они комплексно алгебраически или аналитически продолжаются в окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$. Это и доказывает следствие. □

Беря функции $h_1, \ldots, h_{d_{2,M}}$ в качестве части системы комплексных координат и применяя теорему 2.1.32, получаем такое следствие.

Следствие 2.8.6. *Для каждой точки $p \in M \backslash E$ существуют комплексные алгебраические или аналитические нормальные координаты $(z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d-d_{2,M}} \times \mathbb{C}^{d_{2,M}}$, обращающиеся в нуль в точке p, такие, что комплексные определяющие уравнения многообразия M имеют вид*

$$\begin{cases} 0 &= \bar{w}_2 - w_2, \\ 0 &= \bar{w}_1 - \Theta_1(\bar{z}, z, w_1, w_2), \end{cases} \tag{2.8.7}$$

где $\Theta_1(0,z,w_1,w_2)\equiv w_1$, и для достаточно малого $u_{2,q}\in\mathbb{R}^{d_{2,M}}$ множества $M\cap\{w_2=u_{2,q}=ct.\}$ совпадают с локальной CR-орбитой точки $q=(0,0,u_{2,q})\in M$, а порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^{m+d-d_{2,M}}$, определенное уравнениями

$$0=\bar{w}_1-\Theta_1(\bar{z},z,w_1,u_{2,q}), \tag{2.8.8}$$

минимально в $(z,w_1)=(0,0)$ для каждого $u_{2,q}$.

2.9. Локальное представление неминимальных порождающих подмногообразий

В заключение можно дать общую сводку важных результатов, которые будут постоянно использоваться ниже. Они априори формулируются в наиболее приемлемом виде для последующего использования. Как и в определении 2.1.44, пусть $M\subset\mathbb{C}^n$ — локальное подмногообразие общего положения.

2.9.1. Минимальные порождающие подмногообразия. Следующая теорема является следствием теорем 2.5.2 и 2.6.19 в минимальном случае, когда $2m+e_2+\cdots+e_{\mu_0}=2m+d$. Для дальнейших приложений к изучению CR-отображений наиболее удобно сформулировать ее для сопряженной цепи Сегре $\underline{\Gamma}_{2\nu_0}$.

Теорема 2.9.2. *Если M минимально в точке p_0, то существуют положительное целое $\nu_0\leqslant d+1$ — тип Сегре многообразия M в точке p_0, элемент $\underline{z}^*_{(2\nu_0)}\in\mathbb{C}^{2m\nu_0}$, произвольно близкий к началу координат, n-мерное комплексное аффинное подпространство H^*, проходящее через $\underline{z}^*_{(2\nu_0)}$ in $\mathbb{C}^{2m\nu_0}$, а также комплексная аффинная параметризация $s\mapsto\underline{z}_{(2\nu_0)}(s)$ of H^* с $\underline{z}_{(2\nu_0)}(0)=\underline{z}^*_{(2\nu_0)}$, такие что отображение, определенное суперпозицией проекции на первый сомножитель и $(2\nu_0)$-й цепью Сегре, а именно, отображение*

$$\mathbb{C}^n\ni s\longmapsto\pi_t(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(\underline{z}_{(2\nu_0)}(s)))\in\mathbb{C}^n \tag{2.9.3}$$

имеет ранг n и обращается в нуль при $s=0$.

Эта формулировка очень плодотворно будет использована в части II этой статьи.

2.9.4. Общие порождающие подмногообразия. В случае, когда M не обязательно минимально, голоморфная коразмерность локальной CR-орбиты $\mathcal{O}_{CR}(M,p_0)$ в $\mathbb{C}^n$ — произвольное целое d_2, $0\leqslant d_2\leqslant d$, и $d_2=0$ в том и только том случае, если M минимально в точке p_0. Положим $d_1:=d-d_2$, так что $\mathcal{O}_{CR}(M,p_0)$ имеет размерность $2m+d_1$. По теореме 2.6.20 внутренняя комплексификация $[\mathcal{O}_{CR}(M,p_0)]^{i_c}$ — комплексное алгебраическое или аналитическое CR-подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, проходящее через p_0, комплексная коразмерность которого равна d_2. Выпрямляя его, можно считать, что в координатах $(z,w_1,w_2)\in\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^{d_1}\times\mathbb{C}^{d_2}$ оно совпадает с $\{z_2=0\}$, так что существуют локальные определяющие уравнения M вида

$$\begin{cases}\bar{w}_{1,j_1}=\Theta_{1,j_1}(\bar{z},z,w_1,w_2), & j_1=1,\dots,d_1,\\ \bar{w}_{2,j_2}=\Theta_{2,j_2}(\bar{z},z,w_1,w_2), & j_2=1,\dots,d_2,\end{cases} \tag{2.9.5}$$

где $\Theta_{2,j_2}(\bar{z},z,w_1,0)\equiv 0$, а порождающее подмногообразие M_1 в $\mathbb{C}^{m+d_1}$, определенное как пересечение

$$M_1:=M\cap\{w_2=0\}, \tag{2.9.6}$$

минимально в начале координат и его тип Сегре равен ν_0. Комплексифицируя $(M)^c:=\mathcal{M}$, получаем уравнения

$$\begin{cases}\xi_{1,j_1}=\Theta_{1,j_1}(\zeta,z,w_1,w_2), & j_1=1,\dots,d_1,\\ \xi_{2,j_2}=\Theta_{2,j_2}(\zeta,z,w_1,w_2), & j_2=2,\dots,d_2,\end{cases} \tag{2.9.7}$$

при $k = 1, \ldots, m$, комплексифицированные $(1,0)$ векторные поля

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k := \dfrac{\partial}{\partial z_k} + \displaystyle\sum_{j_1=1}^{d_1} \dfrac{\partial \Theta_{1,j_1}}{\partial z_k}(\zeta, z, w_1, w_2)\, \dfrac{\partial}{\partial w_{1,j_1}} + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j_2=1}^{d_2} \dfrac{\partial \Theta_{2,j_2}}{\partial z_k}(\zeta, z, w_1, w_2)\, \dfrac{\partial}{\partial w_{2,j_2}}, \end{cases} \tag{2.9.8}$$

при $k = 1, \ldots, m$, а также комплексифицированные $(1,0)$ векторные поля

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}_k := \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k} + \displaystyle\sum_{j_1=1}^{d_1} \dfrac{\partial \overline{\Theta}_{1,j_1}}{\partial \zeta_k}(z, \zeta, \xi_1, \xi_2)\, \dfrac{\partial}{\partial \xi_{1,j_1}} + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j_2=1}^{d_2} \dfrac{\partial \overline{\Theta}_{2,j_2}}{\partial \zeta_k}(z, \zeta, \xi_1, \xi_2)\, \dfrac{\partial}{\partial \xi_{2,j_2}}, \end{cases} \tag{2.9.9}$$

В объемлющем пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ комплексификации $\mathcal{M}$ обозначим шесть координат в $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^{d_2} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^{d_2}$ через

$$(z, w_1, w_2, \zeta, \xi_1, \xi_2). \tag{2.9.10}$$

Множество

$$\mathcal{T} := \{(0, 0, w_2, 0, \Theta_1(0,0,0,w_2), \Theta_2(0,0,0,w_2), w_2)\} \tag{2.9.11}$$

в $\mathbb{C}^{2n}$ трансверсально в $\mathcal{M}$ комплексификации $\mathcal{M}_1 := (M_1)^c$, заданной формулами

$$\mathcal{M}_1 : \quad w_2 = \xi_2 = 0, \qquad \xi_1 = \Theta_1(\zeta, w_1, 0), \tag{2.9.12}$$

а именно, имеем $T_0\mathcal{M}_1 \oplus T_0\mathcal{T} = T_0\mathcal{M}$. Эта трансверсаль зависит, конечно, от выбора координат. Для небольшого упрощения выражения при выборе $\mathcal{T}$, не нарушая общности, можно считать, что координаты (z, w_1, w_2) нормальны, как описано в теореме 2.1.32, следовательно, $\Theta_1(0, z, w_1, w_2) \equiv w_1$ и $\Theta_2(0, z, w_1, w_2) \equiv w_2$. Тогда

$$\mathcal{T} = \{(0, 0, w_2, 0, 0, w_2)\}. \tag{2.9.13}$$

При таком выборе можно обобщить определение цепей Сегре введением параметра трансверсальности w_2 следующим образом. Во-первых, для $z_{(1)} \in \mathbb{C}^m$, положим

$$\begin{cases} \underline{\Gamma}_1(z_{(1)} : w_2) := \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0, 0, w_2, 0, 0, w_2) = \\ \qquad = (0, 0, w_2, z_1, \Theta_1(z_1, 0, 0, w_2), \Theta_2(z_1, 0, 0, w_2)). \end{cases} \tag{2.9.14}$$

Во-вторых, для $z_{(2)} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{2m}$ положим

$$\begin{cases} \underline{\Gamma}_2(z_{(2)} : w_2) & := \mathcal{L}_{z_2}(\Gamma_1(z_1 : w_2)), \\ \underline{\Gamma}_3(z_{(3)} : w_2) & := \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\underline{\Gamma}_2(z_{(2)} : w_2)) \end{cases} \tag{2.9.15}$$

и продолжим этот процесс по индукции. В качестве небольшого обобщения теоремы 2.5.2 получаем следующую теорему, описывающую геометрию локальной цепи Сегре в окрестности произвольной точки p_0 многообразия M, без каких–либо условий невырожденности M в наиболее общем виде.

Теорема 2.9.16. *Если d_2 — голоморфная коразмерность CR-орбиты точки p_0 в $\mathbb{C}^n$ и если координаты $(z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^{d_2}$ выбраны так, что $M_1 := M \cap \{w_2 = 0\}$ — CR-орбита точки p_0, а целое ν_0, $\nu_0 \leqslant d_2 + 1$, обозначает тип Сегре многообразия M в точке p_0, то существуют элемент $\underline{z}^*_{(2\nu_0)} \in \mathbb{C}^{2m\nu_0}$, произвольно близкий к началу координат, $(n - d_2)$-мерное комплексное аффинное подпространство H^*, проходящее через $\underline{z}^*_{(2\nu_0)}$ в $\mathbb{C}^{2m\nu_0}$, а также комплексная аффинная параметризация $s \mapsto \underline{z}_{(2\nu_0)}(s)$ подпространства H^* с $\underline{z}_{(2\nu_0)}(0) = \underline{z}^*_{(2\nu_0)}$ такие, что проекция сопряженных цепей Сегре с началом в трансверсали $\mathcal{T}$ к комплексификации $\mathcal{M}_1$, т.е.*

$$\mathbb{C}^{n-d_2} \times \mathbb{C}^{d_2} \ni (s, w_2) \longmapsto \pi_t(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(\underline{z}_{(2\nu_0)}(s) : w_2)) =: t \in \mathbb{C}^n, \tag{2.9.17}$$

имеет ранг n и обращается в нуль в точке $(s, w_2) = (0, 0)$.

В частности, если M вещественно-алгебраично или вещественно-аналитично, а локальные CR-орбиты точки p, меняющиеся в окрестности точки p_0, имеют голоморфную коразмерность d_2, то из следствия 2.8.6 вытекает, что M в окрестности точки p_0 представимо уравнениями

$$\begin{cases} \bar{w}_{1,j_1} = \Theta_{1,j_1}(\bar{z}, z, w_1, w_2), & j_1 = 1, \dots, d_1, \\ \bar{w}_{2,j_2} = w_{2,j_2}, & j_2 = 1, \dots, d_2, \end{cases} \tag{2.9.18}$$

где последние два уравнения задают трансверсальное пересечение d_2 плоских гиперповерхностей Леви, находящихся в общем положении.

Следствие 2.9.19. *Если M вещественно-алгебраично или аналитично, а коразмерность орбит постоянна в окрестности точки p_0, то для каждого фиксированного $u_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ образ отображения*

$$\mathbb{C}^{n-d_2} \ni s \longmapsto \pi_t(\underline{\Gamma}_{2\nu_0}(\underline{z}_{(2\nu_0)}(s) : u_2)) =: t \in \mathbb{C}^n \tag{2.9.20}$$

покрывает локальный кусок внутренней комплексификации CR-орбиты точки M, имеющей координаты $(0, 0, u_2)$.

Глава 3

УСЛОВИЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ПОРОЖДАЮЩИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

3.1. Отображение Сегре

3.1.1. Определение. Пусть M — связное порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, коразмерность которого равна $d \geqslant 1$, а CR-размерность равна $m = n - d \geqslant 1$, и пусть $p_0 \in M$. По теореме 2.1.9, можно выбрать координаты $t = (t_1, \dots, t_n) = (z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, обращающиеся в нуль в точке p_0, в которых M задается d комплексными определяющими уравнениями

$$z, t) = \Theta_j(\bar{z}, z, w), \qquad j = 1, \dots, d. \tag{3.1.2}$$

Напомним, что при любом выборе координат (z, w), обращающихся в нуль в точке p_0 и таких, что $T^c_{p_0}M \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^d_w) = \{0\}$, существует единственный набор степенных рядов $\Theta_j(\bar{z}, t)$ таких, что M задается уравнениями (3.1.2). Здесь предполагается, что степенные ряды $\Theta_j(\bar{z}, z, w)$ комплексные алгебраические или аналитические, т.е. принадлежат $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{\bar{z}, z, w\}$ или $\mathbb{C}\{\bar{z}, z, w\}$. В этом параграфе рассмотрение ведется только в центральной точке p_0, совпадающей с началом этих координат.

Разлагая ряды $\Theta_j(\bar{z}, t)$ по степеням $\bar{z}$, можно написать, что $\bar{w}_j = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \bar{z}^\beta \, \Theta_{j,\beta}(t)$. В терминах такого разложения *бесконечное отображение Сегре подмногообразия M* определяется как отображение

$$\mathcal{Q}_\infty : \quad \mathbb{C}^n \ni t \longmapsto (\Theta_{j,\beta}(t))_{1 \leqslant j \leqslant d, \, \beta \in \mathbb{N}^m} \in \mathbb{C}^\infty. \tag{3.1.3}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. По соображениям конечности, удобно оборвать это бесконечное множество и определить *k-е отображение Сегре подмногообразия M* как

$$\mathcal{Q}_k : \quad \mathbb{C}^n \ni t \longmapsto (\Theta_{j,\beta}(t))_{1 \leqslant j \leqslant d, \, |\beta| \leqslant k} \in \mathbb{C}^{N_{d,n,k}}, \tag{3.1.4}$$

где целое $N_{d,n,k}$ есть число k-джетов d-векторного отображения от n независимых переменных $(t_1, \dots, t_n)$, т.е. $N_{d,n,k} = d\frac{(n+k)!}{n! \; k!}$. Пусть $k_2 \geqslant k_1$, а π_{k_2,k_1} — каноническая проекция $\mathbb{C}^{N_{d,n,k_2}} \to \mathbb{C}^{N_{d,n,k_1}}$. Очевидно, тогда $\pi_{k_2,k_1}(\mathcal{Q}_{k_2}(t)) = \mathcal{Q}_{k_1}(t)$.

В дальнейшем будет видно, что эти отображения Сегре $\mathcal{Q}_k$ и $\mathcal{Q}_\infty$ — наиболее важные среди биголоморфно инвариантных объектов, связанных с вещественным алгебраическим или аналитическим порождающим подмногообразием M.

3.1.5. Преобразование отображения Сегре при замене координат. Очевидно, что определение отображений $\mathcal{Q}_k$ сильно зависит от выбора координат, а потому $\mathcal{Q}_k$ не являются аналитико-геометрическими понятиями. Тем не менее, будут установлены некоторые правила канонического преобразования, которые покажут, что определения, данные в этой главе, биголоморфно инварианты.

Необходимые ингредиенты для биголоморфного преобразования следующие. Пусть $t' = h(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t))$ — обратимое преобразование, где ряды $h_i(t)$ принадлежат $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t\}$ или $\mathbb{C}\{t\}$ и удовлетворяют $h_i(0) = 0$ и $\det([\partial h_{i_1}/\partial t_{i_2}](0)_{1\leqslant i_1,i_2\leqslant n}) \neq 0$. Пусть $t = h'(t')$ — обратное отображение и $h' = (f', g') = (f'_1, \ldots, f'_m, g'_1, \ldots, g'_d)$ расщепление отображения в соответствии с расщеплением $t = (z, w)$ координат t. Далее, подставляя t вместо $h'(t')$ и $\bar{t}$ вместо $\bar{h}'(\bar{t}')$ в (3.1.2), получаем

$$\bar{g}'_j(\bar{t}') = \Theta_j(\bar{f}'(\bar{t}'), h'(t')), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{3.1.6}$$

Если необходимо, перенумеруем координаты с тем, чтобы после расщепления $t' = (z'_1, \ldots, z'_m, w'_1, \ldots, w'_d)$ и применения алгебраической или аналитической теоремы о неявной функции, можно было бы разрешить $\bar{w}'$ в терминах $(\bar{z}', z', w')$ в следующем виде, аналогичном (3.1.2):

$$\bar{w}'_j = \Theta'_j(\bar{z}', t') = \Theta'_j(\bar{z}', z', w'), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{3.1.7}$$

Это дает алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие M' в $\mathbb{C}^n$. Наконец, разложим эти ряды по степеням $\bar{z}'$, что даст $\bar{w}'_j = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m} (\bar{z}')^\beta\, \Theta'_{j,\beta}(t')$, и определим *преобразованное k-е отображение Сегре подмногообразия M'* как

$$\mathcal{Q}'_k:\quad \mathbb{C}^n \ni t' \longmapsto (\Theta'_{j,\beta}(t'))_{1\leqslant j\leqslant d,\, |\beta|\leqslant k} \in \mathbb{C}^{N_{d,n,k}}, \tag{3.1.8}$$

а также определим *преобразованное бесконечное отображение Сегре $\mathcal{Q}'_\infty$ of M'*. При таких обозначениях можно сформулировать следующие важные правила преобразования, которые будут доказаны в параграфе 3.6.

Теорема 3.1.9. *Для каждого $j = 1, \ldots, d$ и каждого $\beta \in \mathbb{N}^m$ существует отображение $R_{j,\beta}$, комплексно-алгебраическое или аналитическое по своим переменным, такое, что*

$$\begin{cases} \Theta'_{j,\beta}(h(t)) + \displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m\setminus\{0\}} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\;\gamma!}\,(\bar{f}(0,\Theta(0,t)))^\gamma\, \Theta'_{j,\beta+\gamma}(h(t)) \equiv \\ \qquad\qquad \equiv Q_{j,\beta}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(t)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|}). \end{cases} \tag{3.1.10}$$

Здесь левая часть — разложение в степенной ряд ряда $\frac{1}{\beta!}\,[\partial_{\zeta'}^{\beta}\Theta'_{j,\beta}](\bar{f}(0,\Theta(0,t)), h(t))$. Для каждого $j = 1, \ldots, d$ и каждого $\beta \in \mathbb{N}^m$ множество соотношений, эквивалентных множеству (3.1.10)*, имеет вид*

$$\begin{cases} \Theta'_{j,\beta}(h(t)) \equiv \displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} (-1)^\gamma\, \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\;\gamma!}\,(\bar{f}(0,\Theta(0,t)))^\gamma\, Q_{j,\beta+\gamma}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(t)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|+|\gamma|}) \\ \qquad\qquad \equiv R_{j,\beta}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(t)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,\beta_1\in\mathbb{N}^m}). \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Предполагая эту теорему справедливой, в параграфе 3.3 мы убедимся, что каждое условие невырожденности M, определенное в терминах отображения Сегре $\mathcal{Q}_\infty$, инвариантно относительно замен координат, т.е. справедливо для $(M, \mathcal{Q}_\infty)$ в том и только том случае, если оно справедливо для $(M', \mathcal{Q}'_\infty)$. Прежде всего, приведем пять условий невырожденности.

3.2. Пять поточечных условий невырожденности

3.2.1. Невырожденность по Леви. Скажем, что подмногообразие M *невырождено по Леви в точке p_0*, если первое отображение Сегре $\mathcal{Q}_1$ имеет ранг n в начале координат.

Во-первых, проверим, что это определение совпадает с обычным в случае $d = 1$. После диагонализации его эрмитовой формы данная гиперповерхность M, проходящая через начало координат в $\mathbb{C}^n$, может быть представлена уравнением $\bar{w} = w + i\sum_{k=1}^r \varepsilon_k\,|z_k| + \mathrm{O}(3)$, где $0 \leqslant r \leqslant n-1$ — ранг формы Леви подмногообразия M в начале координат и $\varepsilon_k = \pm 1$. Тогда $\mathcal{Q}_1(t) = (w, i\varepsilon_1 z_1, \ldots, i\varepsilon_r z_r, 0, \ldots, 0) + \mathrm{O}(2)$. Ясно, что ранг $\mathcal{Q}_1$ в 0 равен n в том и только том случае, если $r = n-1$, как и утверждалось.

Во-вторых, в случае $d \geqslant 2$, порождающее подмногообразие коразмерности d может быть представлено уравнениями $\bar{w}_j = w_j + i\sum_{k_1,k_2=1}^m a_{j,k_1,k_2}\, z_{k_1}\, \bar{z}_{k_2} + \mathrm{O}(3)$, где $a_{j,k_1,k_2} = \overline{a_{j,k_2,k_1}} \in \mathbb{C}$. Если $\langle A_j(z), \bar{z}\rangle := \sum_{k_1,k_2=1}^m a_{j,k_1,k_2}\, z_{k_1}\, \bar{z}_{k_2}$ — эрмитовы формы, где $A_j(z) =$

$\left(\sum_{k_1=1}^{m} a_{j,k_1,1}\, z_{k_1}, \dots, \sum_{k_1=1}^{m} a_{j,k_1,m}\, z_{k_1}\right)$ — комплексные линейные автоморфизмы $\mathbb{C}^m$, то по определению, M невырождено по Леви в начале координат в том и только том случае, если $\bigcap_{j=1}^{d} \operatorname{Ker} A_j = \{0\}$. С другой стороны, можно написать

$$\mathcal{Q}_1(t) = (w_j, iA_j(z))_{1 \leqslant j \leqslant d} + \mathrm{O}(2), \tag{3.2.2}$$

а следовательно, ранг $\mathcal{Q}_1$ в начале координат равен n в том и только том случае, если снова $\bigcap_{j=1}^{d} \operatorname{Ker} A_j = \{0\}$. Наконец, данные два определения невырожденности по Леви эквивалентны.

Эквивалентно, напомним, что невырожденность по Леви подмногообразия M может быть явно описана семейством d определяющих уравнений $r_1(t,\bar{t}) = \cdots = r_d(t,\bar{t}) = 0$ для M в окрестности точки p_0 просто условием, что пересечение ядер форм Леви определяющих функций $r_1, \dots, r_d$ в начале координат сводится к $\{0\}$. Этот критерий обобщается в лемме 3.2.6.

3.2.3. Конечная невырожденность. Более общо, будем говорить, что M *конечно невырождено в точке* p_0, если существует целое k такое, что k-е отображение Сегре $\mathcal{Q}_k$ имеет ранг n в начале координат. Конечно, отсюда следует, что $\mathcal{Q}_l$ также имеет ранг n при всех $l \geqslant k$. Если ℓ_0 — наименьшее целое k такое, что $\mathcal{Q}_k$ имеет ранг n в начале координат, то будем говорить, что M *ℓ_0–конечно невырождено в точке* p_0. Очевидно, что M 1–конечно невырождено в точке p_0 в том и только том случае, если оно невырождено по Леви. На мгновение допустим, что ℓ_0–невырожденность не зависит от выбора координат и определяющих уравнений (это будет доказано в параграфе 3.3 ниже и следует из доказательства леммы 3.2.6). Из определения $\mathcal{Q}_k$ сразу получаем следующую характеризацию.

Лемма 3.2.4. *Порождающее подмногообразие M ℓ_0-конечно невырождено в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^n \in \mathbb{N}^m$, $|\beta_*^i| \leqslant \ell_0$, $i = 1, \dots, n$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^n$, $1 \leqslant j_*^i \leqslant d$, $i = 1, \dots, n$, такие, что ранг в начале координат отображения*

$$t \mapsto (\Theta_{j_*^1, \beta_*^1}(t), \dots, \Theta_{j_*^n, \beta_*^n}(t)) \tag{3.2.5}$$

равен n, но это свойство невозможно для мультииндексов, удовлетворяющих неравенству $|\beta_*^i| \leqslant \ell_0 - 1$.

Конечная невырожденность M в начале координат может быть выражена непосредственно в терминах набора d определяющих уравнений $r_1(t,\bar{t}) = \cdots = r_d(t,\bar{t}) = 0$ для M в окрестности точки p_0. В самом деле, пусть $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_m$ — базис $(0,1)$ векторных полей, касательных к M в окрестности точки p_0. Если $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$, то используем сокращенное обозначение $\overline{L}^\beta$ для дифференцирования порядка $|\beta|$, определенного как $\overline{L}_1^{\beta_1} \cdots \overline{L}_m^{\beta_m}$. Пусть $\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})$ — комплексный градиент $r_j(t,\bar{t})$, т.е. $([\partial r_j/\partial t_1](t,\bar{t}), \dots, [\partial r_j/\partial t_n](t,\bar{t}))$.

Лемма 3.2.6. *Порождающее подмногообразие M ℓ_0-конечно невырождено в точке p_0 в том и только том случае, если комплексная линейная оболочка всех дифференцирований $\overline{L}^\beta[\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})]|_{t=p_0}$ при $|\beta| \leqslant \ell_0$ и при $1 \leqslant j \leqslant d$ порождает $\mathbb{C}^n$ — свойство, которое можно записать символически в виде*

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{L}^\beta[\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})]|_{t=0} : \beta \in \mathbb{N}^m,\, |\beta| \leqslant \ell_0,\, j = 1, \dots, d\} = \mathbb{C}^n, \tag{3.2.7}$$

однако это свойство не может выполняться для мультииндексов, удовлетворяющих неравенству $|\beta| \leqslant \ell_0 - 1$.

Доказательство. Во-первых, непосредственно проверяем, что это новое условие не зависит от выбора базиса $(0,1)$ векторных полей, касательных к M. В самом деле, если $\overline{L}_1', \dots, \overline{L}_m'$ — другой базис, то существует обратимая $m \times m$ матрица степенных рядов $b(t,\bar{t})$ такая, что $\overline{L}_k' = \sum_{l=1}^{m} b_{k,l}(t,\bar{t})\, \overline{L}_l$. Далее, вычисляя $(\overline{L}')^\beta\, [\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})]|_{t=0}$, получаем линейную комбинацию с постоянными коэффициентами векторов $(\overline{L})^{\beta_1}\, [\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})]|_{t=0}$, где $|\beta_1| \leqslant |\beta|$. Тогда имеем включение

$$\begin{cases} \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{L'}^\beta[\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})]|_{t=0} : |\beta| \leqslant \ell_0,\, j = 1, \dots, d\} \subset \\ \subset \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{L}^\beta[\nabla_t(r_j)(t,\bar{t})]|_{t=0} : |\beta| \leqslant \ell_0,\, j = 1, \dots, d\}. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Так как b обратима, то можно поменять ролями векторные поля $\overline{L}_k$ и $\overline{L}'_k$, что дает противоположное включение, а значит, и равенство в (3.2.8).

Во-вторых, проверим, что новое условие (3.2.7) не зависит ни от выбора определяющих уравнений для M, ни от выбора координат. Это немного утомительно, но принцип доказательства также достаточно прост. В самом деле, пусть $t' = h(t)$ — замена координат с $h(0) = 0$ и пусть образ $M' := h(M)$ представлен уравнениями $r'_1(t', \bar{t}') = \cdots = r'_d(t', \bar{t}') = 0$. Эквивалентно, существует обратимая $d \times d$ матрица $a(t, \bar{t})$ комплексных алгебраических или аналитических степенных рядов такая, что $r'(h(t), \bar{h}(\bar{t})) \equiv a(t, \bar{t})\, r(t, \bar{t})$. Так как уже установлено, что условие (3.2.7) не зависит от выбора базиса $(0,1)$ векторных полей, касательных к M', то можно выбрать базис $\overline{L}'_k := (\bar{h})_*(\overline{L}_k)$, т.е. $\overline{L}'_k := \sum_{i=1}^n \overline{L}_k(\bar{h}_i)\, \partial_{\bar{t}'_i}$. Если обозначить комплексный градиент $\nabla_t(r_j)$ через $([\partial r_j/\partial t_i](t, \bar{t}))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, то можно вычислить градиент от обеих частей в векторном тождестве $r'(h(t), \bar{h}(\bar{t})) \equiv a(t, \bar{t})\, r(t, \bar{t})$, что при $j = 1, \ldots, d$ дает

$$\left(\sum_{i'=1}^{n} \frac{\partial h_{i'}}{\partial t_i}(t)\, \frac{\partial r'_j}{\partial t'_{i'}}(h(t), \bar{h}(\bar{t})) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \equiv \left(\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial a_{j,l}}{\partial t_i}(t, \bar{t})\, r_l(t, \bar{t}) + \sum_{l=1}^{d} a_{j,l}(t, \bar{t})\, \frac{\partial r_l}{\partial t_i}(t, \bar{t}) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n}. \tag{3.2.9}$$

Далее, применим дифференцирование $(\overline{L})^\beta$ к этому тождеству. Принимая во внимание то, что голоморфные члены не дифференцируются, используя определение $\overline{L}'_k$ и правило Лейбница дифференцирования произведения, получаем следующее выражение:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_{i'=1}^{n} \frac{\partial h_{i'}}{\partial t_i}(t)\, (\overline{L'}^{\beta}) \left(\frac{\partial r'_j}{\partial t'_{i'}} \right) (h(t), \bar{h}(\bar{t})) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \equiv \\ & \equiv \left(\sum_{\gamma \leqslant \beta} \frac{\beta!}{\gamma!\, (\beta - \gamma)!} \left(\sum_{l=1}^{d} \left(\overline{L}^{\gamma} \left(\frac{\partial a_{j,l}}{\partial t_i} \right) (t, \bar{t})\ \overline{L}^{\beta-\gamma}(r_l)(t, \bar{t}) + \right. \right. \right. \\ & \qquad \left. \left. \left. + \overline{L}^{\gamma}(a_{j,l})(t, \bar{t})\ \overline{L}^{\beta-\gamma} \left(\frac{\partial r_l}{\partial t_i} \right) (t, \bar{t}) \right) \right) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n}. \end{aligned} \right. \tag{3.2.10}$$

Здесь для мультииндекса $\gamma \in \mathbb{N}^m$ принимаем обозначение $\gamma \leqslant \beta$, если $\gamma_k \leqslant \beta_k$ при $k = 1, \ldots, m$. В этом выражении положено $t = 0$. Так как векторные поля $\overline{L}_k$ касательны к M, то все выражения $\overline{L}^{\beta-\gamma}(r_l)(0,0)$ в правой части обращаются в нуль. Используя обратимость матрицы Якоби $(\partial h_{i'}/\partial t_i(0))_{1 \leqslant i, i' \leqslant n}$, убеждаемся, что векторы $\left((\overline{L'})^{\beta} \left(\partial r'_j/\partial t'_{i'} \right) (0,0) \right)_{1 \leqslant i' \leqslant n}$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами векторов $\left((\overline{L}^{\beta_1})\, (\partial r_{j_1}/\partial t_i)\, (0,0) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, где $j_1 = 1, \ldots, d$ и $|\beta_1| \leqslant |\beta|$. Отсюда следует включение

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ (\overline{L'})^{\beta} [\nabla_{t'}(r'_j)(t', \bar{t}')]|_{t'=0} : |\beta| \leqslant \ell_0,\ j = 1, \ldots, d \} \subset \\ & \qquad \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ \overline{L}^{\beta} [\nabla_t(r_j)(t, \bar{t})]|_{t=0} : |\beta| \leqslant \ell_0,\ j = 1, \ldots, d \}. \end{aligned} \right. \tag{3.2.11}$$

Пусть $t = h'(t')$ — обратное к $t' = h(t)$. Рассуждая, как и выше, получаем противоположное включение, а значит, равенство в (3.2.11), что и требовалось. Заметим, что предыдущее рассуждение показывает также, что для фиксированной системы координат условие (3.2.7) не зависит от выбора d определяющих уравнений для M.

Проверим, наконец, что определение конечной невырожденности совпадает с определением, данным в начале п. 3.2.3. Так как показано, что второе определение ℓ_0–конечной невырожденности не зависит от выбора определяющих уравнений, то можно считать, что $r_j(t, \bar{t}) := \Theta_j(\bar{z}, t) - \bar{w}_j$. Тогда $\nabla_t(r_j)(t, \bar{t}) = ([\partial \Theta_j/\partial t_1](\bar{z}, t), \ldots, [\partial \Theta_j/\partial t_n](\bar{z}, t))$. Можно предположить также, что базис $(0,1)$ векторных полей, касательных к M, — обычный базис, как и в главе 2; он задается по формулам $\overline{L}_k := \partial_{\bar{z}_k} + \sum_{j=1}^d \Theta_{j, \bar{z}_k}(\bar{z}, t)\, \partial_{\bar{w}_j}$, для $k = 1, \ldots, m$. Далее, используя разложение $\Theta_j(\bar{z}, t) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} (\bar{z})^\gamma\, \Theta_{j,\gamma}(t)$, можно вычислить

$$\overline{L}^{\beta} [\nabla_t(r_j)(t, \bar{t})]|_{t=0} = \beta!\, ([\partial \Theta_{j,\beta}/\partial t_1](0), \ldots, [\partial \Theta_{j,\beta}/\partial t_n](0)). \tag{3.2.12}$$

Так как правая часть с точностью до ненулевого сомножителя совпадает с (j,β)-м столбцом матрицы Якоби отображения Сегре $\mathcal{Q}_{\ell_0} : t \mapsto (\Theta_{j,\beta}(t))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant \ell_0}$, то видим, что $\mathcal{Q}_{\ell_0}$ имеет ранг n в начале координат в том и только том случае, если выполнено (3.2.7). Лемма 3.2.6 доказана. □

Пример 3.2.13. Приведем некоторые элементарные примеры конечно невырожденных гиперповерхностей в начале координат:

(1) $\bar{w} = w + i[z^5\bar{z} + \bar{z}^5 z]$ в $\mathbb{C}^2$ 5–конечно невырождена.
(2) $\bar{w} = w + i[z_1\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2 + \bar{z}_1^2 z_2]$ в $\mathbb{C}^3$ 2–конечно невырождена.
(3) $\bar{w} = w + i[z_1\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2 + \bar{z}_1^2 z_2 + z_1^3\bar{z}_3 + \bar{z}_1^3 z_3]$ в $\mathbb{C}^4$ 3–конечно невырождена.

Более общо, пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)$ — семейство голоморфных функций, обращающихся в нуль в начале координат в $\mathbb{C}^m$, и таких, что отображение $z \mapsto (\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z))$ имеет ранг m в начале координат. Пусть $\psi_1(z), \dots, \psi_m(z)$ — произвольный набор непостоянных голоморфных функций с различным порядком обращения в нуль и пусть ℓ_0 — наивысший порядок обращения в нуль функций ψ_k. Тогда гиперповерхность

$$\bar{w} = w + i\left[\varphi_1(z)\overline{\psi_1(z)} + \overline{\varphi_1(z)}\psi_1(z) + \dots + \varphi_m(z)\overline{\psi_m(z)} + \overline{\varphi_m(z)}\psi_m(z)\right] \tag{3.2.14}$$

ℓ_0-конечно невырождена в начале координат. Напротив, $\bar{w} = w + iz^2\bar{z}^2$ не конечно невырождена в начале координат (на самом деле, она существенно конечна; см. п. 3.2.25 ниже).

Конечная невырожденность M не является просто обобщением невырожденности Леви типа «форма Леви высшего порядка». Напротив, она является очень естественным условием невырожденности. В частности, будет установлено, что произвольное вещественное-алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие M локально в окрестности порождающей по Зарискому точки $p \in M$ биголоморфно эквивалентно произведению $\underline{M'_p} \times \Delta^\kappa$ конечно невырожденного порождающего подмногообразия $\underline{M'_p} \subset \mathbb{C}^{n-\kappa}$ и некоторого полидиска Δ^κ. Это свойство означает, что, если пренебречь «плоской частью» Δ^κ, то вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие конечно невырождено в порождающей точке по Зарискому. Далее, некоторые классические CR-многообразия (такие, как трубка над двумерным световым конусом) вырождены по Леви в каждой точке, но конечно невырождены.

Пример 3.2.15. Трубка над двумерным световым конусом $\Gamma_{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{C}^3$ — это сингулярная поверхность, определенная как $u^2 = x_1^2 + x_2^2$, где $u = \operatorname{Re} w$ и $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $k = 1, 2$. Рассмотрим регулярную часть $\Gamma_{\mathbb{C}}$, совпадающую с $\Gamma_{\mathbb{C}} \cap \{(x_1, x_2) \neq (0,0)\}$. В окрестности точки гладкости $(1,0,1)$ проверяется,что $\Gamma_{\mathbb{C}}$ вырождена по Леви. $(0,1)$ векторные поля, касательные к $\Gamma_{\mathbb{C}}$, порождаются следующим образом

$$\begin{cases} \overline{L}_1 := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \dfrac{x_1}{u}\,\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}}, \\[2mm] \overline{L}_2 := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + \dfrac{x_2}{u}\,\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}}. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Заметим, что векторное поле дилатации

$$\overline{T} := x_1\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + x_2\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + u\,\frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \tag{3.2.17}$$

совпадающее с $x_1\,\overline{L}_1 + x_2\,\overline{L}_2$ на M, лежит в ядре формы Леви, поскольку $[\overline{L}_1, T] = \frac{1}{2}\,L_1$ и $[\overline{L}_2, T] = \frac{1}{2}\,L_2$. Заметим также, что, в соответствии с [9,18], $\Gamma_{\mathbb{C}}$ необходимо расслаивается на комплексные кривые. На самом деле, регулярная часть $\Gamma_{\mathbb{C}}$ глобально расслаивается на комплексные прямые: $z_1 := (r+is)\cos\theta + i\lambda$, $z_2 := (r+is)\sin\theta + i\mu$, $z_3 := r+is$, где $r, s, \theta, \lambda, \mu$ — вещественные параметры. Наконец, применяя лемму 3.2.6, можно проверить, что $\Gamma_{\mathbb{C}}$ 2–конечно невырождена в каждой точке.

Пример 3.2.18. Обобщением этого примера является регулярная часть M в М. Кубика Фримана $x_1^3 + x_2^3 - u^3 = 0$, см. [18]. На $\{u \neq 0\}$, $(0,1)$ векторные поля, касательные к M, порождаются полями

$$\begin{cases} \overline{L}_1 := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \dfrac{x_1^2}{u^2}\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}}, \\ \overline{L}_2 := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + \dfrac{x_2^2}{u^2}\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}}. \end{cases} \tag{3.2.19}$$

Векторное поле дилатации опять лежит в ядре формы Леви, M расслаивается на комплексные прямые, но M (2- или 3-) конечно невырождена в каждой точке.

Пример 3.2.20. Другой пример всюду вырожденной по Леви вещественной алгебраической поверхности в $\mathbb{C}^3$ дает гиперповерхность M_0, определенная в области $\{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 : |z_2| < 1\}$ уравнением

$$\bar{w} = w + i\left[\frac{2z_1\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2 + \bar{z}_1^2 z_2)}{(1 - z_2\bar{z}_2)}\right]. \tag{3.2.21}$$

$(0,1)$ векторные поля, касательные к M_0, порождаются полями

$$\begin{cases} \overline{L}_1 := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + i\left[\dfrac{2z_1 + 2\bar{z}_1 z_2}{1 - z_2\bar{z}_2}\right]\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}}, \\ \overline{L}_2 := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + i\left[\dfrac{(z_1 + \bar{z}_1 z_2)^2}{(1 - z_2\bar{z}_2)^2}\right]\dfrac{\partial}{\partial \bar{w}}. \end{cases} \tag{3.2.22}$$

Ядро формы Леви порождено векторным полем

$$\overline{T} := -\left[\frac{z_1 + \bar{z}_1 z_2}{1 - z_2\bar{z}_2}\right]\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - i\left[\frac{(z_1 + \bar{z}_1 z_2)^2}{(1 - z_2\bar{z}_2)^2}\right]\frac{\partial}{\partial \bar{w}}. \tag{3.2.23}$$

В самом деле,

$$[\overline{L}_1, T] = -\left(\frac{1}{1 - z_2\bar{z}_2}\right) L_1, \qquad [\overline{L}_2, T] = -\left(\frac{z_1 + \bar{z}_1 z_2}{(1 - z_2\bar{z}_2)^2}\right) L_1. \tag{3.2.24}$$

Наконец, согласно [9, 18], M_0 необходимо расслаивается на комплексные кривые. На самом деле, M_0 расслаивается на комплексные прямые $z_1 := z_0 - \bar{z}_0\zeta$, $z_2 := \zeta$, $w := -iz_0\bar{z}_0 + i\zeta\bar{z}_0^2 + \lambda$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а комплексная переменная $\zeta \in \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству $|\zeta| < 1$. Наконец, непосредственно применяя лемму 3.2.4, видим, что M_0 2-конечно невырождено в каждой точке.

3.2.25. Существенная конечность. Более общо, скажем, что M *конечно невырождено в точке* p_0, если существует целое k такое, что отображение Сегре $\mathcal{Q}_k$ локально конечно в окрестности начала координат. Естественно, отсюда следует, что $\mathcal{Q}_l$ также локально конечно при всех $l \geqslant k$. Кроме того, из локальной конечности тривиально следует существенная конечность. Допустим на мгновение, что существенная конечность не зависит от выбора координат и определяющих уравнений (это будет доказано в параграфе 3.3). Скажем, что M *ℓ_0-существенно конечно в точке* p_0, если ℓ_0 — максимальное такое целое. В силу теоремы Гильберта о нулях очевидна следующая характеризация.

Лемма 3.2.26. *Порождающее подмногообразие M ℓ_0-существенно конечно в начале координат в том и только том случае, если комплексное алгебраическое или аналитическое множество, определенное уравнениями*

$$\Theta_{j,\beta}(t) - \Theta_{j,\beta}(0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, d, \quad |\beta| \leqslant \ell_0, \tag{3.2.27}$$

имеет нулевую размерность в 0, *но это же комплексное алгебраическое или аналитическое множество при* $|\beta| \leqslant \ell_0 - 1$ *имеет положительную размерность в* 0.

Известно, что это свойство эквивалентно тому, что идеал, порожденный функциями в левой части (3.2.27), имеет конечную коразмерность в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t\}$ или в $\mathbb{C}\{t\}$. Более точно, определим целые числа ℓ_1 и ε_1 так: $\ell_1 \geqslant \ell_0$ — наименьшее целое такое, что идеал, порожденный всеми $\Theta_{j,\beta}(t) - \Theta_{j,\beta}(0)$, совпадает с идеалом, порожденным $\Theta_{j,\beta}(t) - \Theta_{j,\beta}(0)$, $|\beta| \leqslant k$. Это целое существует ввиду нётеровости $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t\}$ или $\mathbb{C}\{t\}$. Определим также целое ε_1 как коразмерность идеала $\langle \Theta_{j,\beta}(t) - \Theta_{j,\beta}(0) \rangle_{1 \leqslant j \leqslant d,\, |\beta| \leqslant \ell_1}$ в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t\}$ или $\mathbb{C}\{t\}$. В силу существенной конечности $\varepsilon_1 < \infty$.

В параграфе 3.3 мы увидим, что ε_1 есть биголоморфный инвариант M в точке p_0. Назовем ε_1 *существенным типом M в точке p_0* и обозначим его через $\operatorname{Ess\,Type}(M, p_0)$.

Существенная конечность M в начале координат может быть охарактеризована геометрически. Введем множество совпадения многообразий Сегре

$$\mathbb{A}_{p_0} := \{t \in \Delta_n(\rho_1) : S_{\bar{t}} = S_{\bar{p}_0}\}. \tag{3.2.28}$$

Лемма 3.2.29. *Множество $\mathbb{A}_{p_0}$ есть комплексно-алгебраическое или аналитическое подмножество в окрестности точки p_0 в $\mathbb{C}^n$, содержащейся в M, которое задается в локальных координатах уравнениями $\mathbb{A}_{p_0} = \{t \in \Delta_n(\rho_1) : \Theta_{j,\beta}(t) = \Theta_{j,\beta}(0),\ j = 1, \dots, d,\ \beta \in \mathbb{N}^m\}$.*

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{A}_{p_0}$. Так как $p_0 \in M$, то $p_0 \in S_{\bar{p}_0}$ по лемме 2.2.9. Значит, $p_0 \in S_{\bar{t}}$, откуда, снова по лемме 2.2.9, $t \in S_{\bar{p}_0} = S_{\bar{t}}$, откуда $t \in M$. Это показывает, что $\mathbb{A}_{p_0}$ содержится в M. Далее, в координатах, $S_{\bar{p}_0} = \{(z,w) \in \Delta_n(\rho_1) : w_j = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} z^\beta\, \overline{\Theta}_{j,\beta}(0),\ j = 1, \dots, d\}$ и $S_{\bar{t}} = \{(z,w) \in \Delta_n(\rho_1) : w_j = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} z^\beta\, \overline{\Theta}_{j,\beta}(\bar{t}),\ j = 1, \dots, d\}$. Два m-мерных комплексных многообразия $S_{\bar{p}_0}$ и $S_{\bar{t}}$ совпадают в том и только том случае, если совпадают все их определяющие функции, т.е. $\overline{\Theta}_{j,\beta}(\bar{t}) = \overline{\Theta}_{j,\beta}(0)$ при всех j и всех β, что и завершает доказательство. □

Пример 3.2.30. Дадим некоторые элементарные примеры существенно конечных гиперповерхностей в 0.

(1) $\bar{w} = w + i[z^N \bar{z}^N]$ в $\mathbb{C}^2$ имеет существенный тип N.
(2) $\bar{w} = w + i[z_1^3 \bar{z}_1^3 + z_2^4 \bar{z}_2^4]$ в $\mathbb{C}^3$ имеет существенный тип 12.

Более общо, пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)$, — произвольный набор голоморфных функций таких, что

$$\dim \left(\mathbb{C}\{z\} / \left\langle (\varphi_k(z))_{1 \leqslant k \leqslant m} \right\rangle\right) =: \varepsilon_1 < \infty. \tag{3.2.31}$$

Тогда существенный тип $w = \bar{w} + i[\varphi_1(z)\overline{\varphi_1(z)} + \dots + \varphi_m(z)\overline{\varphi_m(z)}]$ в начале координат равен ε_1. Напротив, гиперповерхность $\bar{w} = w + i[z_1 \bar{z}_1(1 + z_2 \bar{z}_2)]$ не существенно конечна в начале координат (на самом деле, она невырождена по Сегре; см. п. 3.2.32).

3.2.32. Невырожденность по Сегре. Более общо, скажем, что M *невырождено по Сегре в точке* p_0, если существует целое k такое, что ограничение k-го отображения Сегре на $S_{\bar{p}_0}$ имеет максимально возможный порождающий рангm:

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \left(S_{\bar{p}_0} \ni t \mapsto \mathcal{Q}_k(t)\right) = m, \tag{3.2.33}$$

что означает более точно, что

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \left(z \mapsto \left(\Theta_{j,\beta}(z, \overline{\Theta}(z,0))_{1 \leqslant j \leqslant d,\, |\beta| \leqslant k}\right)\right) = m. \tag{3.2.34}$$

Скажем, что M *ℓ_0–невырождено по Сегре в точке* p_0, если ℓ_0 есть наименьшее такое целое. Сразу получается следующая характеризация.

Лемма 3.2.35. *Порождающее подмногообразие M ℓ_0-невырождено по Сегре в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^m \in \mathbb{N}^m$, $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0$, $k = 1, \dots, m$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^m$, $1 \leqslant j_*^k \leqslant d$, $k = 1, \dots, m$, такие, что определитель*

$$\det \left(\left([L_{k_1} \Theta_{j_*^{k_2}, \beta_*^{k_2}}](z, \overline{\Theta}(z,0)) \right)_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant m} \right) \tag{3.2.36}$$

не обращается тождественно в нуль как степенной ряд от z, но это свойство не справедливо для мультииндексов, удовлетворяющих неравенству $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0 - 1$.

Пример 3.2.37. Пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)$ — набор голоморфных функций, определенных в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^m$ таких, что порождающий ранг для $z \mapsto (\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z))$ равен m. Тогда гиперповерхность $\bar{w} = w + i[\varphi_1(z)\overline{\varphi_1(z)} + \dots + \varphi_m(z)\overline{\varphi_m(z)}]$ невырождена по Сегре в начале координат. Напротив, вещественная алгебраическая гиперповерхность M в $\mathbb{C}^3$, определенная уравнением

$$\operatorname{Im} w = \frac{|z_1|^2 |1 + z_1 \bar{z}_2|^2}{1 + \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)} - \operatorname{Re} w\, \frac{\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2)}{1 + \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)} \tag{3.2.38}$$

не является невырожденной по Сегре в начале координат (на самом деле, она голоморфно невырождена; см. п. 3.2.40). Действительно, находя $\bar{w}$, можно вычислить ее определяющее уравнение, что дает

$$\bar{w} = -2i\, z_1\bar{z}_1(1 + z_1\bar{z}_2) + w\,(1 + z_1\bar{z}_2)/(1 + \bar{z}_1 z_2). \tag{3.2.39}$$

Тогда $S_{\bar{0}} = \{(z,0)\}$ и отображения $\mathcal{Q}_k|_{S_{\bar{0}}}$ при $k \geqslant 2$ равны (с точностью до нулевых членов) $(z_1, z_2) \mapsto (-2iz_1, -2iz_1^2)$, а значит, имеют порождающий ранг $1 < 2$.

3.2.40. Голоморфная невырожденность. Более общо, будем говорить, что M *голоморфно невырождено в точке* p_0, если существует целое k такое, что k-е отображение Сегре имеет максимальный порождающий ранг n. Это означает, что

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto (\Theta_{j,\beta}(t))_{1\leqslant j\leqslant d,\, |\beta|\leqslant k}\right) = n. \tag{3.2.41}$$

Скажем, что M ℓ_0-голоморфно невырождено в точке p_0, если ℓ_0 — наименьшее возможное такое целое. Сразу получаем следующую характеризацию.

Лемма 3.2.42. *Порождающее подмногообразие M голоморфно невырождено в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^n \in \mathbb{N}^n$, $|\beta_*^i| \leqslant \ell_0$, $i = 1, \dots, n$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^n$ с $1 \leqslant j_*^i \leqslant d$, $i = 1, \dots, n$, такие, что определитель*

$$\det\left(\left(\frac{\partial\Theta_{j_*^{i_1},\beta_*^{i_1}}}{\partial t_{i_2}}(t)\right)_{1\leqslant i_1,i_2\leqslant m}\right) \tag{3.2.43}$$

тождественно не обращается в нуль как степенной ряд от t, но это не так для мультииндексов, удовлетворяющих неравенству $|\beta_*^i| \leqslant \ell_0 - 1$.

3.2.44. Связи между пятью условиями невырожденности. Наконец, установим иерархию между пятью условиями невырожденности, данными в этой главе.

Теорема 3.2.45. *Пусть M — вещественно-алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ и пусть $p_0 \in M$. Тогда справедливы следующие четыре импликации:*

$$\left\{\begin{aligned} &\quad M\ \ell_0\text{-голоморфно невырождено в точке } p_0 \Longleftarrow \\ &\Longleftarrow M\ \ell_0\text{-невырождено по Сегре в точке } p_0 \Longleftarrow \\ &\Longleftarrow M\ \ell_0\text{-существенно конечно в точке } p_0 \Longleftarrow \\ &\Longleftarrow M\ \ell_0\text{-конечно невырождено в точке } p_0 \Longleftarrow \\ &\Longleftarrow M \text{ невырождено по Леви в точке } p_0. \end{aligned}\right. \tag{3.2.46}$$

Доказательство. Докажем первую импликацию. Заметив, что остальные три следуют из известных результатов локальной комплексной аналитической геометрии (см. лемму 4.1.4). Специализируя функциональные уравнения (2.1.25), получаем $\Theta(0, z, \overline{\Theta}(z, 0, 0)) \equiv 0$ и $w \equiv \overline{\Theta}(0, 0, \Theta(0, 0, w))$. Напомним, что $\Theta_{j,0}(z, w) \equiv \Theta_j(0, z, w)$. Отображение $(0, w) \mapsto (\Theta_{j,0}(0, w))_{1\leqslant j\leqslant d}$ имеет ранг d в начале координат. Далее, ограничение отображения Сегре нулевого ранга на $S_{\bar{0}}$ тождественно равно нулю: $\mathcal{Q}_0(z, \overline{\Theta}(z, 0)) = (\Theta_{j,0}(z, \overline{\Theta}(z, 0)))_{1\leqslant j\leqslant d} \equiv 0$.

Допустим теперь, что M ℓ_0-невырождено по Сегре, а значит, ℓ_0 — наименьшее целое, такое что порождающий ранг отображения $z \mapsto (\Theta_{j,\beta}(z, \overline{\Theta}(z, 0))_{1\leqslant j\leqslant d,\ 1\leqslant|\beta|\leqslant\ell_0})$ равен m (заметим, что $1 \leqslant |\beta| \leqslant \ell_0$, но не $|\beta| \leqslant \ell_0$). Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$. Сразу получаем, что порождающий ранг отображения

$$(z, w) \mapsto \left((\Theta_{j,0}(0, w))_{1\leqslant j\leqslant d}, (\Theta_{j,\beta}(z, \overline{\Theta}(z, 0)))_{1\leqslant j\leqslant d,\ 1\leqslant|\beta|\leqslant k}\right) \tag{3.2.47}$$

равен n в том и только том случае, если $k \geqslant \ell_0$, а значит, M ℓ_0-голоморфно невырождено. Это завершает доказательство теоремы 3.2.45. □

3.2.48. Выражение пяти условий невырожденности в нормальных координатах. Пусть теперь координаты (z, w) нормальны, т.е. $\Theta_j(0, z, w) \equiv w_j$ и $\Theta_j(\bar{z}, 0, w) \equiv w_j$; см. теорему 2.1.32. В разложении $\bar{w}_j = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^m} (\bar{z})^\beta\, \Theta_{j,\beta}(t)$ определяющих уравнений для M имеем $\Theta_{j,0}(t) \equiv w_j$ и $\Theta_{j,\beta}(0) = 0$ для всех j и всех β. Тогда можно слегка упростить выражение для пяти условий невырожденности, что иногда полезно в приложениях.

Лемма 3.2.49. *В нормальных координатах справедливы следующие характеризации:*

(1) *M невырождено по Леви в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^m \in \mathbb{N}^m$, $|\beta_*^k| = 1$, $k = 1, \dots, m$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^m$, $1 \leqslant j_*^k \leqslant d$, $k = 1, \dots, m$, такие, что* $\det\Big([\partial\Theta_{j_*^{k_1},\beta_*^{k_1}}/\partial z_{k_2}](0)\Big)_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant m} \neq 0.$

(2) *M ℓ_0-конечно невырождено в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^m \in \mathbb{N}^m$, $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0$, $k = 1, \dots, m$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^m$, $1 \leqslant j_*^k \leqslant d$, $k = 1, \dots, m$, такие, что* $\det\Big([\partial\Theta_{j_*^{k_1},\beta_*^{k_1}}/\partial z_{k_2}](0)\Big)_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant m} \neq 0$, *но это свойство не имеет места для мультииндексов β_*^k, удовлетворяющих неравенству $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0 - 1$.*

(3) *M существенно конечно в начале координат в том и только том случае, если существует целое ℓ_0 такое, что идеал, порожденный $\Theta_{j,\beta}(z, 0)$ при $j = 1, \dots, d$ и $|\beta| \leqslant \ell_0$, имеет конечную коразмерность в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{z\}$ или в $\mathbb{C}\{z\}$, но этот же идеал при $|\beta| \leqslant \ell_0$ имеет бесконечную коразмерность.*

(4) *M невырождено по Сегре в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^m \in \mathbb{N}^m$, $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0$, $k = 1, \dots, m$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^m$, $1 \leqslant j_*^k \leqslant d$, $k = 1, \dots, m$, такие, что* $\det\Big([\partial\Theta_{j_*^{k_1},\beta_*^{k_1}}/\partial z_{k_2}](z, 0)\Big)_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant m} \not\equiv 0$ *в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{z\}$ или в $\mathbb{C}\{z\}$, но это свойство невозможно для мультииндексов β_*^k, удовлетворяющих неравенству $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0 - 1$.*

(5) *M голоморфно невырождено в начале координат в том и только том случае, если существуют мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^m \in \mathbb{N}^m$, $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0$, $k = 1, \dots, m$, и целые $j_*^1, \dots, j_*^m$, $1 \leqslant j_*^k \leqslant d$, $k = 1, \dots, m$, такие, что* $\det\Big([\partial\Theta_{j_*^{k_1},\beta_*^{k_1}}/\partial z_{k_2}](z, w)\Big)_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant m} \not\equiv 0$ *в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{z, w\}$ или в $\mathbb{C}\{z, w\}$, но это свойство не имеет места для мультииндексов β_*^k, удовлетворяющих неравенству $|\beta_*^k| \leqslant \ell_0 - 1$.*

Доказательство. Ввиду $\Theta_{j,0}(t) \equiv w_j$, замечаем, что отображение Сегре нулевого порядка дает подмножество степенных рядов ранга d. Тогда каждое из пяти условий легко проверяется. □

3.3. Биголоморфная инвариантность

3.3.1. Конечная невырожденность. Пусть $t' = h(t)$ — замена координат с центром в начале координат и пусть $M' := h(M)$ — такое же, как в п.3.1.5. Наша цель — проверить, что пять условий невырожденности, приведенных выше, биголоморфно инвариантны. Относительно решающую роль играет следующая лемма.

Лемма 3.3.2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ ранги в начале координат отображений Сегре $t \mapsto \mathcal{Q}_k(t)$ и $t' \mapsto \mathcal{Q}'_k(t')$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{1}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^m$ — мультииндекс, в котором 1 стоит на k-м месте, а остальные позиции заняты нулями. Дифференцируя (3.1.10) по t_i при $t_i = 0$, получаем следующие соотношения для всех $j = 1, \dots, d$ и всех $\beta \in \mathbb{N}^m$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i'=1}^{n} \frac{\partial\Theta'_{j,\beta}}{\partial t'_{i'}}(0)\, \frac{\partial h_{i'}}{\partial t_i}(0) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{d} (\beta_k + 1)\, \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial w_l}(0)\, \frac{\partial\Theta_{0,l}}{\partial t_i}(0)\, \Theta'_{j,\beta+\mathbf{1}_k}(0) = \\ \displaystyle\qquad = \sum_{j_1=1}^{d}\sum_{|\beta_1|\leqslant|\beta|} \frac{\partial Q_{j,\beta}}{\partial\Theta_{j_1,\beta_1}}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(0)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\, |\beta_1|\leqslant|\beta|})\, \frac{\partial\Theta_{j_1,\beta_1}}{\partial t_i}(0). \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Так как матрица Якоби $([\partial h_{i'}/\partial t_i](0))_{1\leqslant i,i'\leqslant n}$ обратима, то сразу выводим из этих соотношений, что каждая частная производная $[\partial\Theta'_{j,\beta}/\partial t'_{i'}](0)$ является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами частных производных $[\partial\Theta_{j_1,\beta_1}/\partial t_i](0)$, $i=1,\dots,n$, $j_1=1,\dots,d$ и $|\beta_1|\leqslant|\beta|$. Следовательно, при всех $k\in\mathbb{N}$ имеем следующее неравенство:

$$\mathrm{rk}_0\left(t'\mapsto(\Theta'_{j,\beta}(t'))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right)\leqslant\mathrm{rk}_0\left(t\mapsto(\Theta_{j,\beta}(t))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right). \tag{3.3.4}$$

Применяя это же рассуждение к обратному преобразованию $t=h'(t')$, получаем также и противоположное неравенство. Окончательно имеем равенство рангов

$$\mathrm{rk}_0\left(t'\mapsto(\Theta'_{j,\beta}(t'))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right)=\mathrm{rk}_0\left(t\mapsto(\Theta_{j,\beta}(t))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right), \tag{3.3.5}$$

что завершает доказательство леммы 3.3.2. □

В частности, сразу получается, что M ℓ_0-конечно невырождено в точке p_0 в том и только том случае, если M' ℓ_0-конечно невырождено в точке $p'_0=h(p_0)$. Это доказывает, что определение, данное в п.3.2.3, инвариантно относительно комплексной алгебраической или аналитической замены координат.

3.3.6. Мультитип Леви в начале координат. Более общо, поскольку ранги отображений Сегре $\mathcal{Q}_k$ инвариантны, то можно ввести последовательные инвариантные целые $\lambda_{k,0}$ такие, что ранг в начале координат отображения $\mathcal{Q}_k$ равен $\lambda_{0,0}+\lambda_{1,0}+\dots+\lambda_{k,0}$. Так как отображение $w\mapsto\Theta(0,0,w)$ обратимо, то $\lambda_{0,0}=d$. Поскольку M ℓ_0-конечно невырождено в начале координат, то

$$d+\lambda_{1,0}+\dots+\lambda_{\ell_0,0}=n. \tag{3.3.7}$$

Если M ℓ_0-конечно невырождено в точке p_0, то назовем набор $(d,\lambda_{1,0},\dots,\lambda_{\ell_0,0})$ *мультитипом Леви M в точке p_0*.

3.3.8. Существенная конечность. Проверим теперь, что существенная конечность есть биголоморфно инвариантное свойство. Достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3.3.9. *Если $p'_0=h(p_0)$, то $h(\mathbb{A}_{p_0})=\mathbb{A}'_{p'_0}$.*

Доказательство. Пусть $t\in\mathbb{A}_{p_0}$, т.е. $\Theta_{j,\beta}(t)=\Theta_{j,\beta}(0)$ при всех $j=1,\dots,d$ и всех $\beta\in\mathbb{N}^m$. Рецепт снова состоит в рассмотрении (3.1.10). Так как $\Theta_0(t)=\Theta_0(0)=0$ и $\bar f(0)=0$, то из (3.1.10) получаем

$$\begin{cases}\Theta'_{j,\beta}(h(t))\equiv R_{j,\beta}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(t)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|})\\ \qquad\qquad\equiv R_{j,\beta}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(0)\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|})\equiv\Theta'_{j,\beta}(h(0));\end{cases} \tag{3.3.10}$$

значит, $h(t)\in\mathbb{A}'_{p'_0}$, где $p'_0=h(p_0)$ — начало координат системы координат t'. Другими словами, показано, что $h(\mathbb{A}_{p_0})\subset\mathbb{A}'_{p'_0}$. Поскольку h обратимо, то аналогично получаем $h'(\mathbb{A}'_{p'_0})\subset\mathbb{A}_{p_0}$. Окончательно, $h(\mathbb{A}_{p_0})=\mathbb{A}'_{p'_0}$, что и утверждалось. Это завершает доказательство. □

3.3.11. Невырожденность Сегре. Проверим далее, что невырожденность Сегре — биголоморфно инвариантное свойство. Во-первых, заметим, что из первого функционального уравнения в (2.1.25) следует, что $\Theta(0,z,\overline{\Theta}(z,0))\equiv0$, или, эквивалентно, $\Theta_0(z,\overline{\Theta}(z,0))\equiv0$. Рецепт опять состоит в рассмотрении (3.1.10) с заменой t на $(z,\overline{\Theta}(z,0))$, что дает

$$\Theta'_{j,\beta}(h(z,\overline{\Theta}(z,0)))\equiv R_{j,\beta}(\{\Theta_{j_1,\beta_1}(z,\overline{\Theta}(z,0))\}_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|}). \tag{3.3.12}$$

Поскольку h обратимо и отображает многообразие Сегре $S_{\bar p_0}$ на многообразие Сегре $S'_{\bar p'_0}$, то получаем неравенство

$$\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left(z'\mapsto\mathcal{Q}'_k(z',\overline{\Theta}'(z',0))\right)\leqslant\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left(z\mapsto\mathcal{Q}_k(z,\overline{\Theta}(z,0))\right). \tag{3.3.13}$$

Меняя ролями t и t', получаем также и противоположное неравенство, а значит, и равенство. В частности, M невырождено по Сегре в точке p_0 в том и только том случае, если M' невырождено по Сегре в точке p'_0.

3.3.14. Голоморфная невырожденность. Снова используя (3.1.10) и аналогичное соотношение, в котором t заменено на t', можно установить, что при $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left(t' \mapsto \mathcal{Q}'_k(t')\right) = \operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left(z \mapsto \mathcal{Q}_k(t)\right). \tag{3.3.15}$$

В частности, M голоморфно невырождено в точке p_0 в том и только том случае, если M' голоморфно невырождено в точке p'_0.

3.4. Многообразия без условий невырожденности

3.4.1. Отображение отражения. Интересно также изучить порождающие подмногообразия, не требуя никакого условия невырожденности для них, как это будет видно при изучении обобщенного принципа отражения в части II этой статьи. Пусть $t' = h(t)$ — локально-комплексная алгебраическая или аналитическая эквивалентность, определенная в окрестности точки $p_0 \in M$ и удовлетворяющая тем же условиям, что и в п.3.1.5. Обратимость h не предполагается. Пусть $\bar{w}'_j = \Theta'_j(\bar{z}', t')$, $j = 1, \ldots, d$, — уравнения M'. и $\bar{\nu}' := (\bar{\lambda}', \bar{\mu}') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Определим *отображение отражения*, ассоциированное с этими определяющими уравнениями, как векторный степенной ряд

$$\mathcal{R}'_h(t, \bar{\nu}') := \left(\bar{\mu}'_j - \Theta'_j(\bar{\lambda}', h(t))\right)_{1 \leqslant j \leqslant d}, \tag{3.4.2}$$

принадлежащий $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t, \bar{\nu}'\}^d$ или $\mathbb{C}\{t, \bar{\nu}'\}^d$. Разлагая правую часть по степеням $\bar{\lambda}'$, получаем более явную формулу

$$\mathcal{R}'_h(t, \bar{\nu}') = \left(\bar{\mu}'_j - \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} (\bar{\lambda}')^\beta \, \Theta'_{j,\beta}(h(t))\right)_{1 \leqslant j \leqslant d}. \tag{3.4.3}$$

Задание $\mathcal{R}'_h$ существенно эквивалентно заданию бесконечного семейства комплексных алгебраических или аналитических функций $\Theta'_{j,\beta}(h(t))$, или же суперпозиции бесконечного отображения Сегре подмногообразия M' с h, т.е. отображения $t \mapsto \mathcal{Q}'_\infty(h(t))$.

Заметим, что $\mathcal{R}'_h$ биголоморфно инвариантно в следующем смысле. Пусть $t'' = h'(t')$ — второе локальное отображение, которое предполагается обратимым (не нужно путать здесь h' с обозначением, использованным в п.3.1.5 для обратного к h). Пусть $M'' := h'(M')$; предположим, что его уравнения имеют вид $\bar{w}''_j = \Theta''_j(\bar{z}'', z'', w'')$, $j = 1, \ldots, d$. Рассмотрим суперпозицию $t'' = h'(h(t))$. Применяя теорему 3.1.9 и (3.1.11), получаем $\Theta''_{j,\beta}(h'(t')) \equiv R'_{j,\beta}(\{\Theta'_{j,\beta}(t')\}_{1 \leqslant j \leqslant d, \, \beta \in \mathbb{N}^m})$, где $R'_{j,\beta}$ — некоторые алгебраические или аналитические выражения, зависящие только от h'. Тогда можно написать

$$\begin{cases} \mathcal{R}''_{h' \circ h}(t, \bar{\nu}'') = \bar{\mu}'' - \displaystyle\sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} (\bar{\lambda}'')^\beta \, \Theta''_{j,\beta}(h'(h(t))) \\ \qquad\qquad\qquad = \bar{\mu}'' - \displaystyle\sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} (\bar{\lambda}'')^\beta \, R'_{j,\beta}(\{\Theta'_{j,\beta}(h(t))\}_{1 \leqslant j \leqslant d, \, \beta \in \mathbb{N}^m}). \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Значит, отображение отражения $\mathcal{R}''_{h' \circ h}(t, \bar{\nu}'')$ существенно выражается через отображение отражения $\mathcal{R}'_h(t, \bar{\nu}')$ по модулю алгебраических или аналитических выражений $R'_{j,\beta}$, зависящих только от замены координат $t'' = h'(t')$. В частности, $R'_{j,\beta'}$ алгебраичны, если M', h' и M'' алгебраичны, а соотношение (3.4.4) показывает, что если $\mathcal{R}'_h(t, \bar{\nu}')$ было алгебраическим в начале, то его алгебраичность сохраняется и после алгебраической замены координат $t'' = h'(t')$. В этом смысле и говорят, что $\mathcal{R}'_h$ — биголоморфно инвариантный объект. Отображение отражения будет всесторонне изучено в части II этой работы.

3.4.5. Касательные голоморфные векторные поля. Желательно получить ранговые свойства, аналогичные (3.3.5) для точек t_p, близких к началу координат. В то время как для фиксированного целого k, вообще говоря, неверно, что (3.3.5) выполняется с первым rk_0, замененным на $\mathrm{rk}_{h(t_p)}$, и вторым rk_0, замененным на rk_{t_p} (см. пример 3.5.16), соответствующее свойство выполняется для $k = \infty$.

Следствие 3.4.6. *Для всех t_p из окрестности начала координат ранг в t_p бесконечного отображения Сегре $t \mapsto \mathcal{Q}_\infty(t)$ подмногообразия M совпадает с рангом в точке $t'_{p'} = h(t_p)$ бесконечного отображения Сегре $t' \mapsto \mathcal{Q}'_\infty(t')$ подмногообразия M'.*

Доказательство. Существует целое ℓ_p такое, что ранг n_p в точке t_p бесконечного отображения Сегре $t \mapsto \mathcal{Q}_\infty(t)$ совпадает с рангом в точке t_p ℓ_p-го отображения Сегре $t \mapsto \mathcal{Q}_{\ell_p}(t)$. Следовательно, для каждого $l = 1, \ldots, d$ и каждого $|\beta| \geqslant \ell_p + 1$ градиент $\Theta_{j,\beta}(t)$ в точке t_p является линейной комбинацией столбцов матрицы Якоби для $\operatorname{Jac} \mathcal{Q}_{\ell_p}(t_p)$. Используя этот факт, обратимость h и дифференцируя обе части (3.1.10), получаем, что ранг $n'_{p'}$ в точке $t'_{p'}$ бесконечного отображения Сегре $t' \mapsto \mathcal{Q}'_\infty(t')$ меньше или равен n_p, т.е. $n'_{p'} \leqslant n_p$. Так как h обратимо, то рассматривая обратное отображение $t = h'(t')$, можно поменять ролями t_p и $t'_{p'}$ и получить противоположное неравенство $n_p \leqslant n'_{p'}$, что и завершает доказательство. □

В частности, порождающий ранг $n_M = \max_{p \in M} n_p$ бесконечного отображения Сегре подмногообразия M — биголоморфный инвариант M. Назовем это целое *существенной голоморфной размерностью* M. Конкретно, n_M есть наименьшее целое такое, что существует $n_M \times n_M$ минор бесконечной матрицы Якоби

$$\operatorname{Jac} \mathcal{Q}_\infty(t) = \left([\partial \Theta_{j,\beta} / \partial t_i](t)\right)^{1 \leqslant i \leqslant n}_{1 \leqslant j \leqslant d,\, \beta \in \mathbb{N}^m}, \tag{3.4.7}$$

не обращающийся в нуль тождественно, но все ее $(n_M + 1) \times (n_M + 1)$ тождественно обращаются в нуль.

Теорема 3.4.8. *Для этого целого n_M существуют $(n - n_M)$ голоморфных векторных полей*

$$\mathcal{T}_k = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i}, \qquad k = 1, \ldots, n - n_M, \tag{3.4.9}$$

имеющих комплексные алгебраические или аналитические коэффициенты $a_i(t)$, определенные в окрестности V_0 начала координат, которые касательны к $M \cap V_0$ и линейно независимы в порождающей точке $p \in V_0$ по Зарискому. Обратно, целое $(n - n_M)$ есть максимальное число голоморфных векторных полей с комплексными алгебраическими или аналитическими коэффициентами, определенными в окрестности V_0 начала координат, которые касательны к $M \cap V_0$ и линейно независимы в порождающей точке по Зарискому.

Доказательство. Выберем целые $j^1_*, \ldots, j^{n_M}_*$, $1 \leqslant j^i_* \leqslant d$, $i = 1, \ldots, n_M$, и мультииндексы $\beta^1_*, \ldots, \beta^{n_M}_* \in \mathbb{N}^m$ такие, что порождающий ранг отображения $t \mapsto (\Theta_{j^l_*, \beta^l_*}(t))_{1 \leqslant l \leqslant n_M}$ был бы равен n_M. Другими словами, матрица Якоби $([\partial \Theta_{j^l_*, \beta^l_*}(t)/\partial t_i](t))_{1 \leqslant l \leqslant n_M, 1 \leqslant i \leqslant n}$ допускает $n_M \times n_M$ минор, тождественно не обращающийся в нуль. Если $n - n_M > 0$, то применяя классическую линейную алгебру (правило Крамера решения системы линейных уравнений), видим, что существуют $(n - n_M)$ независимых векторных решений — степенных рядов $(a_{k,1}(t), \ldots, a_{k,n}(t))$, $k = 1, \ldots, n - n_M$, системы из n_M уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(t) \frac{\partial \Theta_{j^l_*, \beta^l_*}}{\partial t_i}(t) \equiv 0, \qquad l = 1, \ldots, n_M. \tag{3.4.10}$$

Эквивалентно, $(n - n_M)$ векторных полей

$$\mathcal{T}_k := \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(t) \frac{\partial}{\partial t_i}, \tag{3.4.11}$$

$k = 1, \ldots, n - n_M$, линейно независимы в порождающей точке по Зарискому в V_0 и удовлетворяют тождеству $\mathcal{T}_k \Theta_{j^l_*, \beta^l_*}(t) \equiv 0$ при $k = 1, \ldots, n - n_M$ и $l = 1, \ldots, n_M$. Так как M порождающее, то ограничение на M векторных полей $\mathcal{T}_k$ также линейно независимы в порождающей точке по Зарискому.

Пусть теперь $(j, \beta) \neq (j^l_*, \beta^l_*)$ при $l = 1, \ldots, n_M$. По определению,

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \left(t \longmapsto \left((\Theta_{j^l_*, \beta^l_*}(t))_{1 \leqslant l \leqslant n_M},\, \Theta_{j,\beta}(t) \right) \right) = n_M. \tag{3.4.12}$$

В окрестности V_p точки $t_p \in V_0$, в которой этот ранг равен его максимуму n_M, существует комплексно-алгебраическое или аналитическое отображение $R_{j,\beta}$ такое, что

$$\Theta_{j,\beta}(t) \equiv R_{j,\beta}(\Theta_{j_*^1,\beta_*^1}(t), \ldots, \Theta_{j_*^{n_M},\beta_*^{n_M}}(t)) \tag{3.4.13}$$

при всех $t \in V_p$. Так как $\mathcal{T}_k \Theta_{j_*^l,\beta_*^l}(t) \equiv 0$, то $\mathcal{T}_k \Theta_{j,\beta}(t) \equiv 0$ при $t \in V_p$; следовательно, при всех $t \in V_0$, ввиду принципа аналитического продолжения. В итоге, показано, что $\mathcal{T}_k \Theta_{j,\beta}(t) \equiv 0$ при всех $k = 1, \ldots, n - n_M$, всех $j = 1, \ldots, d$ и всех $\beta \in \mathbb{N}^m$. Отсюда заключаем, что $\mathcal{T}_k$ касательны к M, поскольку

$$\mathcal{T}_k(\bar{w}_j - \Theta_j(\bar{z}, t)) \equiv \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} (\bar{z})^\beta \, \mathcal{T}_k \Theta_{j,\beta}(t) \equiv 0. \tag{3.4.14}$$

Обратно, допустим, что существуют χ голоморфных векторных поля $\mathcal{T}_k$, $k = 1, \ldots, \chi$, аналогичных (3.4.9) с комплексными алгебраическими или аналитическими коэффициентами, которые линейно независимы в порождающей точке по Зарискому в V_0 и таковы, что $\mathcal{T}_k$ касательны к $M \cap V_0$. По условию касания (3.4.14), получаем $\mathcal{T}_k \Theta_{j,\beta}(t) \equiv 0$ при всех $k = 1, \ldots, \chi$, всех $j = 1, \ldots, d$, и всех $\beta \in \mathbb{N}^m$. Рассматривая эти уравнения в точке, в которой векторные поля $\mathcal{T}_k$ линейно независимы, выводим неравенство $\chi \leqslant n - n_M$. Этим завершается доказательство теоремы 3.4.8. □

Следствие 3.4.15. *Вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие M голоморфно невырождено в 0, т.е. $n_M = n$ в том и только том случае, если не существует никакого голоморфного векторного поля, определенного в окрестности V_0 точки 0, которое касается $M \cap V_0$.*

Это свойство можно рассматривать как эквивалентное определение голоморфной невырожденности, как это было сделано Стэнтоном в [29]. Тем не менее есть уверенность, что предыдущее определение в терминах порождающего ранга отображения Сегре более адекватно.

3.4.16. Исключительное множество для M. Определим *внешнее исключительное множество для M* как собственное комплексное аналитическое множество $\mathcal{E}^{\mathrm{exc}}$, являющееся нулевым множеством для всех $n_M \times n_M$ миноров матрицы Якоби $\mathrm{Jac}\, \mathcal{Q}_\infty(t)$. По предложению 3.4.6, $\mathcal{E}^{\mathrm{exc}}$ — инвариантное комплексное алгебраическое или аналитическое множество, не зависящее от координат. Определим *внутреннее исключительное множество для M как собственное вещественное алгебраическое или аналитическое подмножество в $M \cap \mathcal{E}^{\mathrm{exc}}$*. По определению, ранг $t \mapsto \mathcal{Q}_\infty(t)$ в точке $t_p \in V_0$ равен n_M в том и только том случае, если $t_p \in M \backslash \mathcal{E}^{\mathrm{exc}}$. Мы вернемся к $\mathcal{E}^{\mathrm{exc}}$ в следствии 3.5.53 ниже.

3.5. Струи многообразий Сегре и глобальные условия невырожденности

3.5.1. Основные определения. Пусть $\mathcal{M}$ — внешняя комплексификация M, заданная уравнениями $\xi_j = \Theta_j(\zeta, t)$, $j = 1, \ldots, d$. Будем предполагать, что $\mathcal{M}$ комплексно-алгебраично или аналитично и определено в полидиске $\Delta_{2n}(\rho_1)$, как в определении 2.1.44. Напомним, что сопряженное комплексифицированное многообразие Сегре $\underline{\mathcal{S}}_t$ является m−мерным комплексным алгебраическим или аналитическим подмногообразием, определенным уравнениями $\xi_j = \Theta_j(\zeta, t)$, $j = 1, \ldots, d$, где t фиксировано. Рассмотрим отображение струй k-го порядка подмногообразия $\underline{\mathcal{S}}_t$ в одной из его точек $(\zeta, \Theta(\zeta, t))$, которое определяется как

$$J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t := \left(\zeta, \left(\frac{1}{\beta!} \, \partial_\zeta^\beta \Theta_j(\zeta, t) \right)_{1 \leqslant j \leqslant d, \, |\beta| \leqslant k} \right). \tag{3.5.2}$$

В этом параграфе будет всесторонне изучаться отображение $J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$. Оно комплексно-алгебраично или аналитично и принимает значения в $\mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}}$. Если $k_2 \geqslant k_1$ и если π_{k_2,k_1} — каноническая проекция $\mathbb{C}^{m+N_{d,m,k_2}} \to \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k_1}}$, то, очевидно, имеем $\pi_{k_2,k_1}(J_\tau^{k_2} \underline{\mathcal{S}}_t) = J_\tau^{k_1} \underline{\mathcal{S}}_t$.

По сравнению с отображением Сегре, введенным в п. 3.1.1, отметим здесь, что имеется член ζ, мы очевидным образом имеем $J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t|_{\zeta=0} = \mathcal{Q}_k(t)$.

Иногда это отображение будет обозначаться через $(t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$, где неявно предполагается, что $(t, \tau) \in \mathcal{M}$.

Аналогично, можно также рассмотреть отображение струй k-го порядка комплексифицированного многообразия Сегре $\mathcal{S}_\tau$, определенного уравнениями $w_j = \overline{\Theta}_j(z,\tau)$, $j = 1,\ldots,d$, где τ фиксировано. Его явное выражение аналогично

$$J_t^k \mathcal{S}_\tau := \left(z, \left(\frac{1}{\beta!}\,\partial_z^\beta \overline{\Theta}_j(z,\tau)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right). \tag{3.5.3}$$

Связь между этими двумя отображениями очень проста

$$J_{\bar t}^k \underline{\mathcal{S}}_{\bar\tau} \equiv \overline{J_t^k \mathcal{S}_\tau}. \tag{3.5.4}$$

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle J_\bullet^k \mathcal{S}_\bullet}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_\bullet^k \underline{\mathcal{S}}_\bullet} \\ \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} & \xrightarrow{\ (\overline{\bullet})\ } & \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} \end{array},$$

где $(\overline{\bullet})$ обозначает оператор комплексного сопряжения. Поскольку два отображения струй, следовательно, существенно эквивалентны, то будем изучать условия невырожденности отображения $J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$.

3.5.5. Инвариантность относительно замен координат. Как и в п.3.1.5, пусть $t' = h(t)$ — замена комплексных алгебраических или аналитических координат. Следующая теорема будет доказана в параграфе 3.6 ниже. Заметим, что при $\zeta = 0$ из нее выводится теорема 3.1.9.

Теорема 3.5.6. *Для каждого $j = 1,\ldots,d$ и каждого $\beta \in \mathbb{N}^m$ существует комплексное алгебраическое или аналитическое отображение по переменным $Q_{j,\beta}$ такое, что*

$$\frac{1}{\beta!}\,\frac{\partial^{|\beta|}\Theta'_j}{\partial(\zeta')^\beta}\left(\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t)), h(t)\right) \equiv Q_{j,\beta}\left(\zeta,\ \left(\frac{1}{\beta_1!}\,\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|}\right). \tag{3.5.7}$$

Здесь точки (ζ,t) принадлежат окрестности начала координат, скажем, полидиску $\Delta_{2m+d}(\rho_1)$. Фиксируем $p = (t_p,\tau_p) \in \mathcal{M}$, которое отождествим с $(\zeta_p,t_p) \in \mathbb{C}^{2m+d}$ и обозначим $t'_{p'} := h(t_p)$ и $\zeta'_{p'} := \bar f(\tau_p)$. Локально, в окрестности (ζ_p,t_p) отображение

$$(\zeta,t) \mapsto (\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t)), h(t)) =: (\zeta',t') \tag{3.5.8}$$

обратимо по предположению (напомним, что $\zeta \mapsto \bar f(\zeta,\Theta(\zeta,0))$ обратимо в $\zeta = 0$). Применяя теорему 3.5.6, выводим следующее

Следствие 3.5.9. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство для рангов:*

$$\begin{cases} \operatorname{rk}_{(\zeta_p,t_p)}\left((\zeta,t) \mapsto (\zeta,\,(1/\beta!)\,(\partial_\zeta^\beta\Theta_j(\zeta,t))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k})\right) = \\ \qquad = \operatorname{rk}_{(\zeta'_{p'},t'_{p'})}\left((\zeta',t') \mapsto (\zeta',\,(1/\beta!)\,(\partial_{\zeta'}^\beta\Theta'_j(\zeta',t'))_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k})\right). \end{cases} \tag{3.5.10}$$

Доказательство. В самом деле, используя замену координат (3.5.8), достаточно показать, что порождающий ранг отображения $(\zeta,t) \mapsto \left(\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t)),\ \frac{1}{\beta!}\,\partial_{\zeta'}^\beta\Theta'_j(\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t))\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}$ в точке (ζ_p,t_p) меньше или равен рангу отображения $(\zeta,t) \mapsto \left(\zeta,\ \frac{1}{\beta!}\,\partial_\zeta^\beta\Theta_j(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}$ в точке (ζ_p,t_p), потому что после перемены ролями t и t', получаем и противоположное неравенство. Но это неравенство непосредственно получается с помощью дифференцирования обеих частей (3.5.7) по (ζ,t) в точке (ζ_p,t_p). □

Пусть $p \in M$. Ранги отображений $(t,\tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$ в точке $(p,\bar p)$ инвариантны относительно замен координат. Значит, можно ввести несколько поточечных инвариантов M в точке p следующим образом. Обозначим через $m+n_p \leqslant m+n$ максимальный ранг отображения $(t,\tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$ at $(t_p,\bar t_p)$ при $k = 0,1,\ldots,$ а через ℓ_p — наименьшее целое k такое, что ранг в точке $(t_p,\bar t_p)$ отображения

$(t,\tau)\mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ равен $m+n_p$. Более общо, при $k=0,\dots,\ell_M$ обозначим через $\lambda_{k,p}$ неотрицательные целые, удовлетворяющие соотношению

$$\mathrm{rk}_{(t_p,\bar t_p)}\Big((t,\tau)\mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\Big)=m+\lambda_{0,p}+\cdots+\lambda_{k,p}. \tag{3.5.11}$$

Очевидно, что функции $p\mapsto n_p$, $p\mapsto \ell_p$, $p\mapsto \lambda_{k,p}$ полунепрерывны снизу в топологии Зариского.

3.5.12. Порождающие ранги. Для начала заметим, что из следствия 3.5.9 следует, что порождающие ранги отображений $(t,\tau)\mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$, которые возрастают вместе с k, инвариантны относительно замен координат. Нам потребуется следующий результат о стабилизации.

Лемма 3.5.13. *Если* $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left((t,\tau)\mapsto J^{k+1}_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\right)=\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left((t,\tau)\mapsto J^{k}_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\right)$*, то при всех* $l\geqslant 1$ *имеем также* $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left((t,\tau)\mapsto J^{k+l}_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\right)=\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left((t,\tau)\mapsto J^{k}_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\right)$.

Доказательство. По предположению, в окрестности $\mathcal{V}_p$ точки $(t_p,\tau_p)\in\mathcal{M}$, в которой ранги первых двух отображений равны их порождающему рангу, а следовательно, максимальны и локально постоянны, из теоремы о постоянном ранге следует, что для каждого $j=1,\dots,d$ и каждого мультииндекса β, $|\beta|=k+1$, существует комплексная алгебраическая или аналитическая функция $R_{j,\beta}$ такая, что

$$\frac{1}{\beta!}\,\partial^\beta_\zeta\Theta_j(\zeta,t)=R_{j,\beta}\left(\zeta,\,\left(\frac{1}{\beta_1!}\,\partial^{\beta_1}_\zeta\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|k|}\right) \tag{3.5.14}$$

для всех $(t,\tau)\in\mathcal{V}_p$. Дифференцируя эти соотношения по ζ и делая подстановки, получаем, что при каждом $j=1,\dots,d$ и каждом мультииндексе β, $|\beta|=k+l$, $l\geqslant 1$, существует комплексная алгебраическая или аналитическая функция $R_{j,\beta}$, удовлетворяющая соотношению типа (3.5.14). Отсюда следует, что порождающий ранг отображения $\mathcal{V}_p\ni(t,\tau)\mapsto J^{k+l}_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ тот же, что и порождающий ранг отображения $\mathcal{V}_p\ni(t,\tau)\mapsto J^{k}_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$. Так как порождающий ранг распространяется по принципу аналитического продолжения, то отсюда вытекает утверждение леммы. □

3.5.15. Переформулировка пяти условий невырожденности. Сейчас будет видно, что пять условий невырожденности, введенных в § 3.2, могут быть также выражены в терминах морфизмов струй многообразий Сегре. Эта формулировка значительно лучше, чем потому что она имеет смысл не только для центральной точки p_0, но также и для произвольной точки p. Прежде чем формулировать теорему, заметим, что напротив, k-е отображение Сегре $t\mapsto\mathcal{Q}_k(t)$ непригодно для выражения условий невырожденности для точек, отличных от начала координат.

Пример 3.5.16. Первое отображение Сегре $\mathcal{Q}_1$ вещественной алгебраической поверхности M в $\mathbb{C}^3$, заданной уравнением (которое является кубической касательной к примеру 3.2.20)

$$\bar w=w+i[2z_1\bar z_1+z_1^2\bar z_2+\bar z_1^2 z_2], \tag{3.5.17}$$

— это отображение

$$(z_1,z_2,w)\longmapsto(w,\,2iz_1,\,iz_1^2), \tag{3.5.18}$$

которое имеет только ранг 2 в каждой точке. Это показывает, что ранг формы Леви подмногообразия M в начале координат равен 1. Влечет ли это, что ранг формы Леви подмногообразия M равен 1 в каждой точке? Конечно нет, поскольку матрица Леви

$$\mathcal{H}(\varphi)(z,\bar z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial\bar z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar z_1}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial\bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar z_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2z_1\\ 2\bar z_1 & 0\end{pmatrix} \tag{3.5.19}$$

имеет ранг 2 в каждой точке с $z_1\neq 0$, а следовательно, M невырождено по Леви вне $\{z_1=0\}$. Этот пример показывает, что k-е отображения Сегре $\mathcal{Q}_k$ пригодны для определения условий невырожденности только в начале координат.

Поэтому необходимо сделать некоторые переносы. Пусть $p=t_p=(z_p,w_p)$ — точка, меняющаяся в окрестности центральной точки p_0. Для выражения пяти условий невырожденности с помощью оригинальных определений, данных в § 3.2, нужно выбрать координаты, обращающиеся в нуль в точке p. Поскольку уже установлено, что тогда условия невырожденности не зависят от выбора координат, обращающихся в нуль в точке p, можно просто сделать преобразование переноса координат, полагая

$$t_1 := t - t_p, \qquad \text{или, эквивалентно,} \qquad t = t_p + t_1. \tag{3.5.20}$$

Будем предполагать, что t_p принадлежит M, а значит, $p^c = (t_p, \bar{t}_p)$ принадлежит $\mathcal{M}$. Точные замены координат, следовательно, таковы:

$$\begin{cases} z_1 = z - z_p, & z = z_1 + z_p, \\ w_1 = w - w_p, & w = w_1 + w_p, \\ \zeta_1 = \zeta - \bar{z}_p, & \zeta = \zeta_1 + \bar{z}_p, \\ \xi_1 = \xi - \bar{w}_p, & \xi = \xi_1 + \bar{w}_p. \end{cases} \tag{3.5.21}$$

В координатах $t_1 = (z_1, w_1)$, обращающихся в нуль в точке t_p, можно представить перенос $\mathcal{M}_1$ подмногообразия $\mathcal{M}$ с помощью комплексных определяющих уравнений

$$\xi_{1,j} = \Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1), \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{3.5.22}$$

Конечно, можно вычислить $\Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1)$ в терминах $\Theta_j(\zeta, t)$ следующим образом. Так как $\bar{w}_{j,p} = \Theta_j(\bar{z}_p, t_p)$, то

$$\Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1) = \xi_{1,j} = \xi_j - \bar{w}_{j,p} = \Theta_j(\zeta, t) - \Theta_j(\bar{z}_p, t_p), \tag{3.5.23}$$

что при $j = 1, \ldots, d$ дает

$$\Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1) = \Theta_j(\zeta_1 + \bar{z}_p, t_1 + t_p) - \Theta_j(\bar{z}_p, t_p). \tag{3.5.24}$$

Если теперь разложить $\Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1)$ по степеням ζ_1 (как это делалось для $\Theta(\zeta, t)$)

$$\Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} (\zeta_1)^\beta \, \Theta_{1,j,\beta}(t_1), \tag{3.5.25}$$

то, полагая $\zeta_1 = 0$ в (3.5.24), при $\beta = 0 \in \mathbb{N}^m$, получаем формулу

$$\Theta_{1,j,0}(t_1) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} (\bar{z}_p)^\beta \, [\Theta_{j,\beta}(t_1 + t_p) - \Theta_{j,\beta}(t_p)], \tag{3.5.26}$$

а дифференцируя (3.5.24) в точке $\zeta_1 = 0$, для всех ненулевых мультииндексов $\beta \in \mathbb{N}^m \backslash \{0\}$ получаем общие формулы

$$\begin{cases} \Theta_{1,j,\beta}(t_1) = \displaystyle\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!} (\bar{z}_p)^\gamma \, \Theta_{j,\beta+\gamma}(t_1 + t_p) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\frac{1}{\beta!} \left[\partial_\zeta^\beta \Theta_j(\zeta, t) \right]_{\zeta = \bar{z}_p,\, t = t_1 + t_p}. \end{cases} \tag{3.5.27}$$

Таким образом с помощью этих формул $\Theta_{1,j}(\zeta_1, t_1)$ выражено через $\Theta(\zeta, t)$.

Следовательно, можно ввести k-ое отображение Сегре в координатах t_1:

$$\mathcal{Q}_{1,k}: \quad \mathbb{C}^n \ni t_1 \longmapsto (\Theta_{1,j,\beta}(t_1))_{1 \leqslant j \leqslant d,\, |\beta| \leqslant k} \in \mathbb{C}^{N_{d,n,k}} \tag{3.5.28}$$

и говорить о пяти условиях невырожденности в терминах $\mathcal{Q}_{1,k}$, поскольку координаты t_1 центрированы в точке t_p.

Тем не менее, лучший путь рассмотрения условий невырожденности в точке p из окрестности точки p_0 состоит в их выражении в одной системе координат.

Следующая теорема дает желаемую характеризацию условий невырожденности с помощью морфизма струй многообразий Сегре, выраженном в одной системе координат.

Теорема 3.5.29. *Пусть M — вещественное алгебраическое или аналитическое локальное порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, заданное, как обычно, уравнениями* (3.1.2) *и пусть $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ — морфизм k-струй сопряженных многообразий Сегре, заданный явно как*

$$\begin{cases} (\zeta, t) \longmapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t := \left(\zeta,\ \left(\dfrac{1}{\beta!}\,\partial^\beta_\zeta \Theta_j(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right) \\ \qquad\qquad\qquad = \left(\zeta,\ \left(\displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \dfrac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,(\zeta)^\gamma\,\Theta_{j,\beta+\gamma}(t)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}\right), \end{cases} \tag{3.5.30}$$

который является комплексным алгебраическим или аналитическим отображением, определенным в $\Delta_{m+n}(\rho_1)$ и принимающим значения в $\mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}}$. Пусть $t_p \in M$, $|t_p| < \rho_1$, пусть $(t_p, \bar{t}_p) \in \mathcal{M}$ и пусть $\ell_0 \in \mathbb{N}$, $\ell_0 \geqslant 1$. Тогда:

(1) *M невырождено по Леви в точке t_p в том и только том случае, если $J^1_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ имеет ранг, равный $m+n$ в точке $(\bar{z}_p, t_p)$.*

(2) *M ℓ_0– конечно невырождено в точке t_p в том и только том случае, если ℓ_0 — наименьшее целое k такое, что $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ имеет ранг, равный $m+n$ в точке $(\bar{z}_p, t_p)$.*

(3) *M ℓ_0–существенно конечно в точке t_p в том и только том случае: если ℓ_0 — наименьшее целое k такое, что $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ — локально конечное комплексно-алгебраическое или аналитическое отображение в окрестности точки $(\bar{z}_p, t_p)$.*

(4) *M ℓ_0–невырождено по Сегре в точке t_p в том и только том случае, если ℓ_0 — наименьшее целое k такое, что ограничение $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ на вторую цепь Сегре, т.е.*

$$\begin{cases} \mathcal{S}^2_{\bar{t}_p} = \big\{\big(z_1+z_p,\, \overline{\Theta}(z_1+z_p, \bar{t}_p),\, \zeta_1+\bar{z}_p, \\ \qquad\qquad \Theta(\zeta_1+\bar{z}_p, z_1+z_p, \overline{\Theta}(z_1+z_p,\bar{t}_p))\big) \in \Delta_{2n}(\rho_1) :\ z_1\in\mathbb{C}^m,\ \zeta_1\in\mathbb{C}^m\big\} \end{cases} \tag{3.5.31}$$

имеет порождающий ранг, равный $2m$ в точке $(z_1, \zeta_1) = (0,0)$, следовательно, всюду на $\mathcal{S}^2_{\bar{t}_p}$.

(5) *M ℓ_0-голоморфно невырождено в точке t_p в том и только том случае, если ℓ_0 — наименьшее целое k такое, что $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ имеет ранг общего положения $m+n$ в окрестности $(\bar{z}_p, t_p)$, а значит, и всюду на $\Delta_{m+n}(\rho_1)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть пять определений, данных в § 3.2 в удобной системе координат $t_1 = t - t_p$, обращающейся в нуль в точке t_p, которая была введена перед формулировкой теоремы.

В самом деле, ввиду выражений (3.5.26) и (3.5.27) для $\Theta_{1,j,\beta}(t_1)$, видим, что, кроме $\beta = 0$, компоненты $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ в (3.5.30) следующие после m компонент $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ совпадают с компонентами $\Theta_{1,j,\beta}(t_1)$ выражения $\mathcal{Q}_{1,k}(t_1)$, после замены $(\zeta)^\gamma$ на $(\bar{z}_p)^\gamma$. При $\beta = 0$, в соответствии с (3.5.26), разность между двумя отображениями есть только постоянная $-\sum_{\beta\in\mathbb{N}^m} (\bar{z}_p)^\beta\,\Theta_{j,\beta}(t_p) = -\bar{w}_p$, которая исчезает при дифференцировании.

Проверим теперь следующее соотношение между матрицей Якоби отображения $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ в точке $(\zeta, t) = (\bar{z}_p, t_p)$ и матрицей Якоби отображения $\mathcal{Q}_{1,k}$ в точке $t_1 = 0$, т. е. в $t = t_p$:

$$\mathrm{Jac}(J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t)(\bar{z}_p, t_p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{m\times m} & 0 \\ *** & \mathrm{Jac}\,\mathcal{Q}_{1,k}(0) \end{pmatrix}, \tag{3.5.32}$$

где $\mathrm{I}_{m\times m}$ обозначает единичную $m\times m$ матрицу, а $***$ — некоторые члены, которые вычислять не нужно. Выводим сразу, что

$$\mathrm{rk}_{\bar{z}_p, t_p}\left((\zeta, t) \mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\right) = m + \mathrm{rk}_0\left(t_1 \mapsto \mathcal{Q}_{1,k}(t_1)\right). \tag{3.5.33}$$

Записывая условия невырожденности Леви и ℓ_0-конечной невырожденности в терминах $\mathcal{Q}_{1,k}(t_1)$ в координатах t_1, обращающихся в нуль в точке t_p, получаем характеризации **(1)** и **(2)** теоремы 3.5.29.

Поскольку, более общо, в точке $(z_1+\bar z_p, t_1+t_p)$, меняющейся в окрестности точки $(\bar z_p, t_p)$,

$$\operatorname{Jac}(J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t)(z_1+\bar z_p, t_1+t_p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{m\times m} & 0 \\ *** & \operatorname{Jac}\mathcal{Q}_{1,k}(t_1) \end{pmatrix}, \tag{3.5.34}$$

то получаем

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left((\zeta,t)\mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t\right) = m + \operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left(t_1 \mapsto \mathcal{Q}_{1,k}(t_1)\right). \tag{3.5.35}$$

Выражая голоморфную невырожденность в терминах $\mathcal{Q}_{1,k}(t_1)$ в координатах t_1, обращающихся в нуль в точке t_p, сразу получаем характеризацию **(5)** теоремы 3.5.29.

Далее заметим также, что

$$\left\{\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t_1\}/\ \langle \Theta_{1,j,\beta}(t_1)\rangle_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k} = \\ &\qquad\qquad = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\zeta-\bar z_p,\, t-t_p\}\Big/\Big\langle j^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t - j^k_{\bar t_p}\underline{\mathcal{S}}_{t_p}\Big\rangle. \end{aligned}\right. \tag{3.5.36}$$

Отсюда выводим характеризацию **(3)** теоремы 3.5.29.

По поводу последнего случая **(4)**, нуждающегося в рассмотрении, отметим, что ограничение отображения $\mathcal{Q}_{1,k}(t_1)$ на многообразия Сегре для M_1, проходящего через начало координат t_1, которое, по определению, является отображением

$$z_1 \longmapsto \left(\Theta_{1,j,\beta}(z_1, \overline{\Theta}_1(z_1,0))\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}, \tag{3.5.37}$$

в силу (3.5.27) совпадает с

$$z_1 \longmapsto \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,(\bar z_p)^\gamma\, \Theta_{j,\beta+\gamma}(z_1+z_p, \overline{\Theta}_1(z_1,0)+w_p)\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}. \tag{3.5.38}$$

Отметим, что мы пренебрегли постоянной $-\bar w_p$, появляющейся при $\beta=0$. Но тогда в силу (3.5.23) имеем

$$\overline{\Theta}_1(z_1,0)+w_p = \overline{\Theta}(z_1+z_p, \bar t_p), \tag{3.5.39}$$

и можно переписать (3.5.38) следующим образом

$$z_1 \longmapsto \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,(\bar z_p)^\gamma\, \Theta_{j,\beta+\gamma}(z_1+z_p, \overline{\Theta}(z_1+z_p,\bar t_p))\right)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|\leqslant k}. \tag{3.5.40}$$

Утверждается, что это отображение совпадает с последней компонентой сужения отображения $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$ на вторую цепь Сегре (3.5.31). В самом деле, вычисляя в явном виде это ограничение, получаем в точности, что

$$\left\{\begin{aligned} &(z_1,\zeta_1) \longmapsto \Bigg(\zeta_1+\bar z_p, \Bigg(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,(\zeta_1+\bar z_p)^\gamma \\ &\qquad\qquad \Theta_{j,\beta+\gamma}(z_1+z_p, \overline{\Theta}(z_1+z_p,\bar t_p))\Bigg)_{1\leqslant j\leqslant d,\,|\beta|<k}\Bigg). \end{aligned}\right. \tag{3.5.41}$$

Следовательно,

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left((z_1,\zeta_1)\longmapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t|_{\mathcal{S}^2_{\bar t_p}}\right) = m + \operatorname{genrk}_{\mathbb{C}}\left(z_1 \mapsto \mathcal{Q}_{1,k}(z_1, \overline{\Theta}_1(z_1,0))\right). \tag{3.5.42}$$

Записывая условия невырожденности Сегре в терминах $\mathcal{Q}_{1,k}(t_1)$ в координатах t_1, обращающихся в нуль в точке t_p, сразу получаем характеризацию **(4)** теоремы 3.5.29.

Теорема 3.5.29 доказана. □

3.5.43. Существенная голоморфная размерность и мультитип Леви. Если M — локальная часть подмногообразия, как и выше, то обозначим через ℓ_M наименьшее целое k такое, что справедлива лемма 3.5.13, и назовем его *типом Леви подмногообразия* M. Обозначим через $m + n_M \leqslant m + n$ порождающий ранг отображения $(t, \tau) \mapsto J_\tau^{\ell_M} \underline{\mathcal{S}}_t$ и назовем n_M *существенной голоморфной размерностью* M. Эта терминология оправдана тем, что локально, в окрестности порождающей по Зарискому точки $p \in M$ M биголоморфно эквивалентно произведению $\underline{M}'_p \times \Delta^{n-n_M}$, где $\underline{M}'_p$ — порождающее подмногообразие коразмерности d в $\mathbb{C}^{n_M}$ (см. теорему 3.5.48 ниже).

Специализируя второе функциональное уравнение (2.1.25), которое дает $w \equiv \overline{\Theta}(0, 0, \Theta(0, 0, w))$, видим, что отображение $w \mapsto \Theta(0, 0, w)$ обратимо. Следовательно, ранг и порождающий ранг отображения струй нулевого порядка $\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \left((t, \tau) \mapsto J_\tau^0 \underline{\mathcal{S}}_t\right) = (\zeta, \Theta(\zeta, z, w))$ равны $m + d$. Таким образом, целое n_M всегда удовлетворяет неравенству $d \leqslant n_M \leqslant n$.

Вообще говоря, можно определить $\lambda_{0,M} := \operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \left((t, \tau) \mapsto J_\tau^0 \underline{\mathcal{S}}_t\right) = d$ и для $k = 1, \ldots, \ell_M$,

$$\lambda_{k,M} := \operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \Big((t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t\Big) - \operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \Big((t, \tau) \mapsto J_\tau^{k-1} \underline{\mathcal{S}}_t\Big). \tag{3.5.44}$$

По лемме 3.5.13 имеем $\lambda_{1,M} \geqslant 1, \ldots, \lambda_{\ell_M,M} \geqslant 1$. При этих определениях имеем соотношения

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \Big((t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t\Big) = d + \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{k,M}, \tag{3.5.45}$$

при $k = 0, 1, \ldots, \ell_M$, и

$$\operatorname{genrk}_{\mathbb{C}} \Big((t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t\Big) = n_M = d + \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{\ell_M,M}, \tag{3.5.46}$$

при всех $k \geqslant \ell_M$. Тогда имеем неравенство

$$\ell_M \leqslant \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{\ell_M,M} = n_M - d. \tag{3.5.47}$$

Теперь можно сформулировать и доказать основную теорему этой главы, в которой используются все существенные предположения. До сих пор рассмотрения были локальными, в окрестности точки $p_0 \in M$. В следующей теореме показывается, что для связного M можно сделать глобальными.

Теорема 3.5.48. *Пусть M — связное вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ коразмерности $d \geqslant 1$ и CR-размерности $m = n - d \geqslant 1$. Тогда существуют корректно определенные целые n_M, ℓ_M и $\lambda_{0,M}, \lambda_{1,M}, \ldots, \lambda_{\ell_M,M}$, а также собственное вещественное алгебраическое или аналитическое подмногообразие E в M такие, что для каждой точки $p \in M \backslash E$ и для любой системы координат (z, w), обращающихся в нуль в точке p, в которой M представляется определяющими уравнениями $\bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, t)$, $j = 1, \ldots, d$, выполняются следующие четыре свойства*:

(1) *$\lambda_{0,M} = d$, $d \leqslant n_M \leqslant n$ и $\ell_M \leqslant n_M - d$.*

(2) *Для каждого $k = 0, 1, \ldots, \ell_M$ отображение струй k-го порядка комплексифицированных многообразий Сегре $(t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$ имеет ранг равный $m + \lambda_{0,M} + \cdots + \lambda_{k,M}$ в точке $(t_p, \bar{t}_p) = (0, 0)$.*

(3) *$n_M = d + \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{\ell_M,M}$ и для каждого $k \geqslant \ell_M$ отображение струй k-го порядка сопряженных комплексифицированных многообразий Сегре $(t, \tau) \mapsto J_\tau^k \underline{\mathcal{S}}_t$ имеет ранг, равный n_M в точке $(t_p, \bar{t}_p) = (0, 0)$.*

(4) *Существует комплексная алгебраическая или аналитическая замена координат $t' = h(t)$, обращающаяся в нуль в точке p и определенная в окрестности точки p такая, что образ $M'_p := h(M)$ является произведением $\underline{M}'_p \times \Delta^{n-n_M}$ вещественно-алгебраического или аналитического порождающего подмногообразия коразмерности d в $\mathbb{C}^{n_M}$ на комплексный полидиск Δ^{n-n_M}. Кроме того, в центральной точке $\underline{p}' \in \underline{M}'_p \subset \mathbb{C}^{n_M}$ порождающее подмногообразие $\underline{M}'_p$ ℓ_M-конечно невырождено, следовательно, в частности, его существенная голоморфная размерность $n_{\underline{M}'_p}$ совпадает с n_M.*

Доказательство. Фиксируем $p_0 \in M$ и координаты (z, w), как и выше, обращающиеся в нуль в точке p_0. Пусть V_{p_0} — малая окрестность точки p_0 в M. Определим сначала $E \cap V_{p_0}$: оно состоит из множества точек $p \in V_{p_0}$ таких, что ℓ_p не минимально, n_p не максимально и $\lambda_{k,p}$ также не максимальны. Ясно, что это множество может быть описано с помощью обращения в нуль семейства миноров матрицы Якоби отображения струй $J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$, а значит, оно есть собственное вещественное алгебраическое или аналитическое подмногообразие E_{p_0} в V_{p_0}. Далее, проверим, что различные множества E_{p_0} склеены между собой. В самом деле, предположим, что V_{p_0} и V_{q_0} налегают друг на друга. Пусть $p \in V_{p_0} \cap V_{q_0}$. В пересечении $V_{p_0} \cap V_{q_0}$ нужно сравнить три вещественно-алгебраических или аналитических подмногообразия E_{p_0}, E_p и E_{q_0}, определенных в терминах трех морфизмов струй k-го порядка сопряженных многообразий Сегре. Используя важное соотношение из теоремы 3.5.6 (см. также следствие 3.5.9) и явное описание упомянутого выше семейства миноров, легко устанавливаем, что E_{p_0} и E_{q_0} совпадают с E_p в $V_{p_0} \cap V_{q_0}$. Следовательно, различные E_{p_0} склеены между собой. Все рассмотрения, предшествующие формулировке 3.5.48, доказывают свойства **(1)**, **(2)** и **(3)**.

Докажем теперь **(4)**. Пусть $p \in M \backslash E$. Выберем координаты $t = (z, w)$, обращающиеся в нуль в точке p. По предположению, для каждого $k \geqslant \ell_M$ отображение Сегре k-го порядка $(\zeta, t) \mapsto (\zeta, \frac{1}{\beta!}(\partial_\zeta^\beta \Theta_j(\zeta, t))1 \leqslant j \leqslant d,\, |\beta| \leqslant k)$ имеет постоянный ранг $m + n_M$ в окрестности начала координат в точке p в $\mathbb{C}^{m+n}$. В частности, отсюда следует, что в каждой точке с координатами $(0, t_p)$ в окрестности начала координат отображение $t \mapsto (\Theta_{j,\beta}(t))_{1 \leqslant j \leqslant d,\, |\beta| \leqslant k}$ имеет постоянный ранг n_M. Из теоремы о постоянном ранге следует, что существует открытая окрестность V_0 начала координат в $\mathbb{C}^n$ такая, что объединение множеств уровня $\mathcal{F}_q := \{t \in V_0 : \Theta_{j,\beta}(t) = \Theta_{j,\beta}(q),\, j = 1, \ldots, d,\, \beta \in \mathbb{N}^m\}$ по всем q из V_0 образует локальное комплексно-алгебраическое или аналитическое слоение V_0 на $(n - n_M)$-мерные комплексные многообразия. Можно выпрямить это слоение в произведение $\Delta^{n_M} \times \Delta^{n-n_M}$, где второй сомножитель соответствует слоям этого слоения. Пусть $t' = h(t)$ обозначает такую выпрямляющую замену координат. Пусть $M'_0 := h(M)$ — уравнение для $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$. Ввиду теоремы 3.1.9, видим, что это слоение опять определяется множествами уровня функций $\Theta'_{j,\beta}(t')$, а именно, $\mathcal{F}_{p'} = \{t' \in V'_0 : \Theta'_{j,\beta}(t') = \Theta'_{j,\beta}(p'),\, j = 1, \ldots, d,\, \beta \in \mathbb{N}^m\}$. Для того, чтобы доказать, что в этих координатах M'_0 есть произведение $\underline{M}'_0 \times \Delta^{n-n_M}$, достаточно установить следующую лемму.

Лемма 3.5.49. *Если точка $p' \in V'_0$ принадлежит M'_0, то ее слой $\mathcal{F}_{p'}$ целиком содержится в M'_0.*

Доказательство. В самом деле, пусть $q' \in \mathcal{F}_{p'}$, т.е. $\Theta'_{j,\beta}(t'_{q'}) = \Theta'_{j,\beta}(t'_{p'})$ при всех j и всех β. Во-первых,

$$0 = \bar{w}'_{p'} - \Theta'(\bar{z}'_{p'}, t'_{p'}) = \bar{w}'_{p'} - \Theta'(\bar{z}'_{p'}, t'_{q'}). \tag{3.5.50}$$

Далее, ввиду вещественности M'_0, по лемме 2.1.27 существует обратимая $d \times d$ матрица степенных рядов $a'(t', \tau')$, определяемая условием $w' - \overline{\Theta}'(z', \tau') \equiv a'(t', \tau')\,[\xi' - \Theta'(\zeta', t')]$, так что $0 = w'_{q'} - \overline{\Theta}'(z'_{q'}, \bar{t}'_{p'})$, а после комплексного сопряжения получаем

$$0 = \bar{w}'_{q'} - \Theta'(\bar{z}'_{q'}, t'_{p'}). \tag{3.5.51}$$

Наконец, снова используя свойство $\Theta'_{j,\beta}(t'_{q'}) = \Theta'_{j,\beta}(t'_{p'})$ при всех j и всех β, выводим, что

$$0 = \bar{w}'_{q'} - \Theta'(\bar{z}'_{q'}, t'_{q'}), \tag{3.5.52}$$

откуда следует, что $q' \in M'_0$. Это завершает доказательство леммы 3.5.49. □

Теорема 3.5.48 доказана. □

В порождающей точке по Зарискому порождающее подмногообразие M включает сомножитель Δ^{n-n_M}, который в некотором смысле является «плоским» с точки зрения CR-геометрии. Опуская этот несущественный множитель, приходим к изучению конечно невырожденного порождающего подмногообразия. Таким образом, в некотором смысле невырожденные подмногообразия M являются «порождающими» моделями. По этой причине интересно установить непосредственное следствие теоремы 3.5.48 о голоморфно невырожденных подмногообразиях.

Следствие 3.5.53. *Пусть M — связное вещественное алгебраическое или аналитическое порождающее подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ коразмерности $d \geqslant 1$ и CR-размерности $m = n - d \geqslant 1$. Предположим, что M голоморфно невырождено. Тогда:*

(1) *Существуют целое ℓ_M, $1 \leqslant \ell_M \leqslant m$, и собственное вещественно-алгебраическое или аналитическое подмножество E в M такое, что M ℓ_M-конечно невырождено в каждой точке $M\backslash E$.*

(2) *Существует собственное комплексно-алгебраическое или аналитическое подмножество $\mathcal{E}^{\rm exc}$, определенное в окрестности M в $\mathbb{C}^n$ и зависящее только от M, такое что M конечно невырождено в точке p в том и только том случае, если $p \in M\backslash\mathcal{E}^{\rm exc}$.*

(3) *В общем случае вложение $(\mathcal{E}^{\rm exc} \cap M) \subset E$ строгое.*

Доказательство. В полидисковой окрестности $V_0 \subset \mathbb{C}^n$ произвольной точки $p_0 \in M$ было определено в п.3.4.16 локальное исключительное множество $\mathcal{E}_{p_0}^{\rm exc} \subset V_0$ такое,что $M \cap \mathcal{E}_{p_0}^{\rm exc}$ состоит в точности из конечно вырожденных точек. В силу их биголоморфной инвариантности, эти локальные комплексные алгебраические или аналитические подмножества $\mathcal{E}_{p_0}^{\rm exc}$ склеены в корректно определенное глобальное исключительное множество $\mathcal{E}^{\rm exc}$, определенное в окрестности подмногообразия M в $\mathbb{C}^n$. Наконец, $E\backslash(\mathcal{E}^{\rm exc} \cap M)$ состоит из точек, которые k-конечно невырождены для некоторого $k \geqslant \ell_M + 1$, а значит, очевидно не пусты в общем случае. Это завершает доказательство следствия 3.5.53. □

3.6. Правила преобразования струй многообразий Сегре

Установим теперь голоморфную инвариантность отображения струй многообразий Сегре. Как и в п.3.1.5, пусть $t' = h(t)$ с обратным $t = h'(t')$ — комплексно-алгебраический или аналитический биголоморфизм, оставляющий неподвижным начало координат, и пусть $M' := h(M)$. Теорема 3.1.9 вытекает из соотношений 8.5.2 и 8.5.3, если положить $\zeta = 0$ и принять во внимание то, что $\Theta_j(0,t)$ совпадает с $\Theta_{j,0}(t)$ (в обозначениях $\Theta_{j,\beta}(t)$)? теорема 3.5.6 сразу следует из соотношений 8.5.2 и 8.5.3, если рассматривать последиий аргумент $Q_{j,\beta}$ просто как функции от $(\zeta, (\Theta_j(\zeta,t))_{1\leqslant j\leqslant d})$.

Теорема 3.6.1. *Для каждого $j = 1,\dots,d$ и для каждого $\beta \in \mathbb{N}^m$ существует универсальное рациональное по своим переменным $Q_{j,\beta}$ отображение такое, что*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\beta!}\,\dfrac{\partial^{|\beta|}\Theta'_j}{\partial(\zeta')^\beta}\left(\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t)), h(t)\right) \equiv \\ \qquad \equiv Q_{j,\beta}\left(\left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|},\ \left(\partial_t^{\alpha_1}\bar h_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,|\alpha_1|\leqslant|\beta|}\right). \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Здесь $Q_{j,\beta}$ алгебраичны или аналитичны в окрестности постоянной струи

$$((\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(0,0))_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|},\ (\partial_t^{\alpha_1}\bar h_{i_1}(0,0))_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,|\alpha_1|\leqslant|\beta|}).$$

Эквивалентно, имеем следующие соотношения для всех $j = 1,\dots,d$ и всех $\beta \in \mathbb{N}^m$:

$$\begin{cases} \Theta'_{j,\beta}(h(t)) \equiv \displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m}(-1)^\gamma\,\frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t))^\gamma \\ Q_{j,\beta+\gamma}\left(\left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|+|\gamma|},\ \left(\partial_t^{\alpha_1}\bar h_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,|\alpha_1|\leqslant|\beta|+|\gamma|}\right). \end{cases} \tag{3.6.3}$$

Доказательство. Как и в п. 3.1.5, можно считать, что комплексные определяющие уравнения для M' имеют вид $\bar w'_j = \Theta'_j(\bar z', t')$, $j = 1,\dots,d$, в координатах $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^d$. На геометрическом языке это означает, что линейное отображение $\pi'_{z'} \circ dh : T_0^c M \to \mathbb{C}^m_{z'}$ — субмерсия, где $\pi'_{z'} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m_{z'}$ — естественная проекция на z'-пространство. Разложим это отображение: $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Комплексифицируя фундаментальные соотношения $\bar g_j(\tau) = \Theta'_j(\bar f(\tau), h(t))$, $j = 1,\dots,d$, выражающие то, что h отображает M в M', и заменяя ξ на $\Theta(\zeta,\tau)$, получаем следующее тождество степенных рядов:

$$\bar g_j(\zeta,\Theta(\zeta,t)) \equiv \Theta'_j(\bar f(\zeta,\Theta(\zeta,t)), h(t)), \qquad j = 1,\dots,d. \tag{3.6.4}$$

Продифференцируем это соотношение по ζ_k, для $k=1,\ldots,m$. Вспоминая, что явные выражения естественного базиса комплексифицированных $(0,1)$–векторных полей задаются как

$$\underline{\mathcal{L}}_k=\frac{\partial}{\partial\zeta_k}+\sum_{j=1}^{1}\frac{\partial\Theta_j}{\partial\zeta_k}(\zeta,t)\,\frac{\partial}{\partial\xi_j}, \tag{3.6.5}$$

при $k=1,\ldots,m$, сразу видим, что дифференцирование по ζ_k степенного ряда $\psi(\zeta,\Theta(\zeta,t))$ эквивалентно применению векторного поля $\underline{\mathcal{L}}_k$ к ψ, рассматриваемого как дифференцирование. Значит, получаем по цепному правилу, что

$$\underline{\mathcal{L}}_k\bar{g}_j(\zeta,\Theta(\zeta,t))\equiv\sum_{l=1}^{m}\underline{\mathcal{L}}_k\bar{f}_l(\zeta,\Theta(\zeta,t))\,\frac{\partial\Theta'_j}{\partial\zeta'_l}(\bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t)). \tag{3.6.6}$$

Так как $\pi'_{z'}\circ dh:T_0^cM\to\mathbb{C}^m_{z'}$ — субмерсия, то следующий определитель не обращается в нуль:

$$\det\left(\underline{\mathcal{L}}_{k_1}\bar{f}_{k_2}(0)\right)_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant m}\neq 0. \tag{3.6.7}$$

Следовательно, локально можно поделить для (ζ,t) в окрестности начала координат на определитель

$$\mathcal{D}(\zeta,t):=\det\left(\underline{\mathcal{L}}_{k_1}\bar{f}_{k_2}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right)_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant m}. \tag{3.6.8}$$

Рассматривая (3.6.6) как неоднородную линейную систему и применяя классическое правило Крамера, для каждого $j=1,\ldots,d$ можно выделить первую частную производную $\Theta'_j/\partial\zeta'_k$ из остальных членов, что дает выражение вида

$$\frac{\partial\Theta'_j}{\partial\zeta'_k}(\bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t))\equiv\frac{R_{j,k}\left((\underline{\mathcal{L}}_{k'_1}\bar{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t)))_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,1\leqslant k'_1\leqslant m}\right)}{\mathcal{D}(\zeta,t)}. \tag{3.6.9}$$

Здесь по правилу Крамера члены $R_{j,k}$ — универсальные полиномы детерминантного типа (некоторые миноры). Снова дифференцируя (3.6.9) по переменным ζ_k и снова используя правило Крамера, получаем, что для каждой пары целых чисел (k_1,k_2), $1\leqslant k_1$, $k_2\leqslant m$, и для каждого $j=1,\ldots,d$ существует универсальный полином R_{j,k_1,k_2} такой, что

$$\frac{\partial^2\Theta'_j}{\partial\zeta'_{k_1}\partial\zeta'_{k_2}}\left(\bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t)\right)\equiv\frac{R_{j,k_1,k_2}\left((\underline{\mathcal{L}}_{k'_1,k'_2}\bar{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t)))_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,1\leqslant k'_1,k'_2\leqslant m}\right)}{\mathcal{D}(\zeta,t)^3}. \tag{3.6.10}$$

Читатель должен заметить, что показатель 3 в знаменателе с разложением «3»=«2»+«1», где «2» возникает из-за дифференцирования частного $R_{j,k}/\mathcal{D}$ в (3.6.9), а «1» возникает из-за второго применения правила Крамера.

Напомним, что для произвольного мультииндекса $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in\mathbb{N}^m$ через $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ обозначается антиголоморфное дифференцирование порядка $|\beta|$, определенное оператором $(\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1}\cdots(\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}$.

Более общо, дифференцируя соотношения (3.6.4) по $\zeta^\beta=\zeta_1^{\beta_1}\cdots\zeta_m^{\beta_m}$, по индукции убеждаемся, что для каждого мультииндекса $\beta\in\mathbb{N}^m$ и для каждого $j=1,\ldots,d$ существует сложный, но универсальный многочлен $R_{j,\beta}$ такой, что справедливо следующее тождество:

$$\frac{1}{\beta!}\,\frac{\partial^{|\beta|}\Theta'_j}{\partial(\zeta')^\beta}\left(\bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t)\right)\equiv\frac{R_{j,\beta}\left((\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}\bar{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t)))_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,1\leqslant|\beta_1|\leqslant|\beta|}\right)}{[\mathcal{D}(\zeta,t)]^{2|\beta|-1}}. \tag{3.6.11}$$

Важное наблюдение состоит в следующем. Суперпозиции дифференцирований $\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}$ — это некоторые дифференциальные операторы с непостоянными коэффициентами. Используя явные выражения для $\underline{\mathcal{L}}_k$, видим, что все эти коэффициенты — универсальные многочлены от набора частных производных $(\partial^{|\beta_2|}\Theta_{j_2}(\zeta,t)/\partial z^{\beta_2})_{1\leqslant j_2\leqslant d,\,1\leqslant|\beta_2|\leqslant|\beta_1|}$. Таким образом, числитель (3.6.11) — некоторая универсальная (вычисляемая с помощью комбинаторных формул) алгебраическая или аналитическая функция от набора

$$\left(\left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|},\ \left(\partial_t^{\alpha_1}\bar{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,|\alpha_1|\leqslant|\beta|}\right) \tag{3.6.12}$$

Аналогичное свойство справедливо и для знаменателя. Таким образом, построено рациональное отображение $Q_{j,\beta}$, удовлетворяющее (3.6.2).

Для второй части теоремы 3.6.1 запишем соотношения (3.6.2) в следующей более явной форме, получающейся с помощью разложения левой части по степеням $(\bar{f})^\gamma$:

$$\begin{cases} \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\ \bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t))^\gamma\,\Theta'_{j,\beta+\gamma}(h(t)) \equiv \\ \qquad\qquad \equiv Q_{j,\beta}\left(\left(\partial_\zeta^{\beta_1}\Theta_{j_1}(\zeta,t)\right)_{1\leqslant j_1\leqslant d,\,|\beta_1|\leqslant|\beta|},\ \left(\partial_t^{\alpha_1}\bar{h}_{i_1}(\zeta,\Theta(\zeta,t))\right)_{1\leqslant i_1\leqslant n,\,|\alpha_1|\leqslant|\beta|}\right). \end{cases} \tag{3.6.13}$$

Можно интерпретировать это бесконечное семейство тождеств как бесконечную верхнетреугольную неоднородную линейную систему с неизвестными $\Theta'_{j,\beta}(h(t))$. На самом деле, обращение этой бесконечной треугольной матрицы достаточно элементарно. В самом деле, интерпретируя формулу Тейлора на чисто формальном уровне, видим, что если задан бесконечный набор равенств с комплексными коэффициентами и с $\zeta\in\mathbb{C}^m$, имеющим вид

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,\zeta^\gamma\,\Theta'_{j,\beta+\gamma} = Q_{j,\beta}, \tag{3.6.14}$$

при всех $j=1,\dots,d$ и всех $\beta\in\mathbb{N}^m$, то можно найти неизвестные $\Theta'_{j,\beta}$ в терминах членов правой части $Q_{j,\beta}$ с помощью вполне аналогичной формулы, отличающейся только знаками:

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} (-1)^\gamma\,\frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\ \gamma!}\,\zeta^\gamma\,Q_{j,\beta+\gamma} = \Theta'_{j,\beta}, \tag{3.6.15}$$

при всех $j=1,\dots,d$ и всех $\beta\in\mathbb{N}^m$. Применяя это наблюдение к (3.6.13), получаем представление (3.6.3) в теореме 3.6.1, что и завершает доказательство. □

3.7. Локальная геометрия CR-подмногообразий в порождающей точке по Зарискому

Пусть $M\subset\mathbb{C}^n$ — связное вещественное алгебраическое или аналитическое CR-подмногообразие *не обязательно порождающее* коразмерности d, CR-размерности m и голоморфной коразмерности $c=d-n+m$. Комбинируя теорему 2.1.9, теорему 2.1.32, следствие 2.8.6 и теорему 3.5.48, получаем следующее локальное явное координатное представление M в окрестности порождающей точки по Зарискому. Эта теорема будет полезна в части II этой работы.

Теорема 3.7.1. *Существуют собственное вещественное алгебраическое или аналитическое подмножество E в M и целые m_1, m_2, d_1, d_2, c, зависящие только от M такие, что*

$$\begin{cases} d = d_1+d_2+2c, \\ m = m_1+m_2, \end{cases} \tag{3.7.2}$$

а в случае, когда $m_1\geqslant 1$, существуют, кроме того, два целых ℓ_M и ν_M такие, что

$$\begin{cases} \ell_M \leqslant m_1, \\ \nu_M \leqslant d_1+1, \end{cases} \tag{3.7.3}$$

и для любой точки $p_0\in M\backslash E$ существуют локальные комплексные аналитические или алгебраические координаты

$$(z_1,z_2,w_1,w_2,w_3)\in\mathbb{C}^{m_1}\times\mathbb{C}^{m_2}\times\mathbb{C}^{d_1}\times\mathbb{C}^{d_2}\times\mathbb{C}^c, \tag{3.7.4}$$

обращающиеся в нуль в точке p_0, и комплексно-аналитические или алгебраические определяющие функции $\Theta_{1,j_1}(\bar{z}_1,z_1,w_1,w_2)$, $j_1=1,\dots,d_1$, нормально сходящиеся в $\Delta_{2m_1+d_1+d_2}(2\rho_1)$ для некоторого $\rho_1>0$,удовлетворяющего соотношению $\Theta_{1,j_1}(0,z_1,w_1,w_2)\equiv 0$ при $j_1=1,\dots,d_1$

и не зависящего от $(\bar{z}_2, z_2)$ *такие, что* M *представимо локально в окрестности точки* p_0 *комплексными определяющими уравнениями*

$$\begin{cases} 0 = w_3, \\ 0 = \bar{w}_2 - w_2, \\ 0 = \bar{w}_1 - \Theta_1(\bar{z}_1, z_1, w_1, w_2), \end{cases} \tag{3.7.5}$$

в полидиске $\Delta_n(\rho_1)$ *и, кроме того, такие что для любой постоянной* $u_{2,q} \in \mathbb{R}^{d_2}$*, порождающее подмногообразие* $M_{1,u_{2_q}}$ *в* $\mathbb{C}^{m_1} \times \mathbb{C}^{d_1}$*, определенное комплексными уравнениями*

$$0 = \bar{w}_1 - \Theta_1(\bar{z}_1, z_1, w_1, u_{2,q}), \tag{3.7.6}$$

которое отождествляется с пересечением M *и комплексного подпространства* $\{w_2 = u_{2,q} = ct., w_3 = 0\}$*, минимально типа Сегре* ν_M *и* ℓ_M*–конечно невырождено в* $(z_1, w) = (0, 0)$*. В случае, когда* $m_1 = 0$*, третье уравнение в* (3.7.5) *должно быть заменено на более простое векторное уравнение* $\bar{w}_1 = w_1$*, а следовательно, в этом случае* M *отождествляется в окрестности точки* p_0 *с пересечением* $\Delta_n(\rho_1)$ *с плоским по Леви произведением* $\mathbb{C}^{m_2} \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \{0\}$ *в* $\mathbb{C}^{m_2} \times \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^{d_2} \times \mathbb{C}^{c}$.

Глава 4

УСЛОВИЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ДЛЯ CR-ОТОБРАЖЕНИЙ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

4.1. Условия CR-горизонтальной невырожденности CR-отображений, задаваемых степенными рядами

4.1.1. Условия невырожденности для отображений, задаваемых степенными рядами. Задание формального или комплексно алгебраического, или комплексно-аналитического отображения $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n'}$ с $h(0) = 0$ эквивалентно заданию набора n' степенных рядов $(h_1(t), \dots, h_{n'}(t))$, где $t \in \mathbb{C}^n$ с $h_{i'}(t)$ — скалярным степенным рядом, обращающимся в нуль в начале координат и принадлежащим $\mathbb{C}[\![t]\!]$, $\mathbb{C}\{t\}$ или $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\{t\}$. Введем пять классических условий невырожденности, которые сформулируем в случае, когда $h(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^{n'}$.

Определение 4.1.2. Формальное отображение степенных рядов $h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n'}(t))$ с компонентами $h_{i'}(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$, $i' = 1, \dots, n'$, называется:

(1) *Обратимым*, если $n' = n$ и $\det\left([\partial h_{i_1}/\partial t_{i_2}](0)\right)_{1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant n} \neq 0$.
(2) *Субмерсивным*, если $n \geqslant n'$, и существуют целые $1 \leqslant i(1) < \dots < i(n') \leqslant n$ такие, что $\det\left([\partial h_{i'_1}/\partial t_{i(i'_2)}](0)\right)_{1 \leqslant i'_1, i'_2 \leqslant n'} \neq 0$.
(3) *Конечным*, если идеал, порожденный компонентами $h_1(t), \dots, h_{n'}(t)$, имеет конечную коразмерность в $\mathbb{C}[\![t]\!]$. Отсюда следует, что $n' \geqslant n$.
(4) *Доминирующим*, если $n \geqslant n'$, и существуют целые $1 \leqslant i(1) < \dots < i(n') \leqslant n$ такие, что $\det([\partial h_{i'}/\partial t_{i(i'_2)}](t))_{1 \leqslant i'_1, i'_2 \leqslant n'} \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}[\![t]\!]$.
(5) *Трансверсальным*, если не существует ненулевого степенного ряда $G(t'_1, \dots, t'_{n'}) \in \mathbb{C}[\![t'_1, \dots, t'_{n'}]\!]$ такого, что $G(h_1(t), \dots, h_{n'}(t)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}[\![t]\!]$.

Элементарно проверяется, что из обратимости следует субмерсивность, которая влечет доминируемость. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1.3. *Если формальный степенной ряд либо обратим, либо субмерсивен, либо доминирующий, то он трансверсален.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение в случае, когда h доминирующий. Предположим от противного, что существует ненулевой степенной ряд $G(t'_1, \dots, t'_{n'}) \in \mathbb{C}[\![t'_1, \dots, t'_{n'}]\!]$ такой, что $G(h_1(t), \dots, h_{n'}(t)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}[\![t]\!]$. Дифференцируя это тождество по t_i и рассматривая линейную однородную систему, полученную таким образом, выводим, что все $n' \times n'$ миноры (максимальной размерности) матрицы Якоби $([\partial h_{i'}/\partial t_i](t))_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant i'\leqslant n'})$ тождественно обращаются в нуль в $\mathbb{C}[\![t]\!]$, что противоречит доминируемости. $\square$

Лемма 4.1.4. *В равноразмерностном случае $n' = n$ обратимость влечет (и, на самом деле, эквивалентна) субмерсивность, из которой следует конечность, которая влечет доминируемость, и из которой, наконец, следует трансверсальность.*

Доказательство. Это классический результат локальной комплексной аналитической геометрии, который может быть легко передоказан читателем, либо может быть найден, например, в [8, 10] или в ссылках, приведенных там. $\square$

4.1.5. CR-отображения степенных рядов и CR-горизонтальные условия невырожденности. Пусть M и M' — вещественные алгебраические или аналитические порождающие подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n'}$. Пусть $r_j(t,\bar t) := \bar w_j - \Theta_j(\bar z, t)$, $j = 1,\dots,d$ и $r'_{j'}(t',\bar t') := \bar w'_{j'} - \Theta'_{j'}(\bar z', t')$, $j' = 1,\dots,d'$, — определяющие уравнения для M и M'. Следуя определению, данному в п.2.1.5, скажем, что h — (*локальное*) *CR-отображение степенных рядов из M в M'*, если существует $d' \times d$ матрица $a(t,\bar t)$ формальных, аналитических или алгебраических степенных рядов такая, что в векторных обозначениях

$$r'(h(t), \bar h(\bar t)) \equiv a(t,\bar t)\, r(t,\bar t). \tag{4.1.6}$$

Полагая $\bar t = 0$ в этом матричном тождестве, получаем

$$r'(h(t), 0) \equiv a(t,0)\, r(t,0). \tag{4.1.7}$$

Множество, определяемое уравнениями $r_j(t,0) = 0$, конечно, многообразие Сегре $S_{\bar p_0}$, проходящее через начало координат. Аналогично, множество, определяемое уравнениями $r'_{j'}(t',0) = 0$, $j' = 1,\dots,d'$, — многообразие Сегре $S_{\bar p'_0}$. Тогда (4.1.7) показывает, что h индуцирует отображение степенных рядов из многообразия Сегре $S_{\bar p_0}$ в $S'_{\bar p'_0}$. Можно поэтому применить определение 4.1.2 на уровне многообразий Сегре.

Определение 4.1.8. CR-отображение степенных рядов $h : M \to M'$ называется:

(1) *CR-обратимым в точке p_0*, если $m = m'$ и если индуцированное формальное отображение $h|_{S_{\bar p_0}} : S_{\bar p_0} \to S'_{\bar p'_0}$ многообразий Сегре, проходящих через начало координат, есть формальное обратимое отображение в точке 0.

(2) *CR-субмерсивным в точке p_0*, если $m \geqslant m'$ и если индуцированное формальное отображение $h|_{S_{\bar p_0}} : S_{\bar p_0} \to S'_{\bar p'_0}$ многообразий Сегре, проходящих через начало координат, есть формальная субмерсия в точке 0.

(3) *CR-конечным в точке p_0*, если индуцированное формальное отображение $h|_{S_{\bar p_0}} : S_{\bar p_0} \to S'_{\bar p'_0}$ многообразий Сегре, проходящих через начало координат, конечно в точке 0.

(4) *CR-доминирующим в точке p_0*, если индуцированное формальное отображение $h|_{S_{\bar p_0}} : S_{\bar p_0} \to S'_{\bar p'_0}$ многообразий Сегре, проходящих через начало координат, доминирующее в точке 0.

(5) *CR-трансверсальным в точке p_0*, если индуцированное формальное отображение $h|_{S_{\bar p_0}} : S_{\bar p_0} \to S'_{\bar p'_0}$ многообразий Сегре, проходящих через начало координат, трансверсально в точке 0.

4.1.9. Комплексифицированное отображение. Можно переформулировать эти определения более конкретно следующим образом. Прежде всего, конечно, можно комплексифицировать определяющие уравнения (4.1.6), что даст $r'(h(t), \bar h(\tau)) \equiv a(t,\tau)\, r(t,\tau)$. Эти комплексифицированные тождества показывают, что *комлексифицированное отображение*

$$h^c(t,\tau) := (h(t), \bar h(\tau)) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^n \times \mathbb{C}[\![\tau]\!]^n \tag{4.1.10}$$

индуцирует отображение степенных рядов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}'$. Как объяснялось в п.1.2.2, комплексифицированное отображение h^c стабилизирует две пары слоений $(\mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}})$ и $(\mathcal{F}', \underline{\mathcal{F}}')$, а именно, h^c переводит (сопрягает) комплексифицированные многообразия Сегре для $\mathcal{M}$ в (сопряженные) комплексифицированные многообразия Сегре для $\mathcal{M}'$.

Заменяя ξ на $\Theta(\zeta,t)$ в (4.1.10), получаем следующее тождество степенных рядов в $\mathbb{C}[\![\zeta,t]\!]$:

$$\bar{g}_{j'}(\zeta,\Theta(\zeta,t)) \equiv \Theta'_{j'}(\bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t)), \qquad j'=1,\dots,d'. \tag{4.1.11}$$

На самом деле, как это легко установить, эти тождества эквивалентны существованию $d'\times d$ матрицы формальных степенных рядов $a(t,\tau)$, удовлетворяющей (4.1.6). Тем не менее, *всюду в этой статье будут рассматриваться более удобные фундаментальные тождества степенных рядов* (4.1.11).

Конечно, многообразие Сегре, проходящее через p_0, представляется в виде

$$S_{\bar{p}_0}: \qquad w_j=\overline{\Theta}_j(z,0), \qquad j=1,\dots,d. \tag{4.1.12}$$

Аналогично, многообразие Сегре, проходящее через p'_0, представляется в виде

$$S'_{\bar{p}'_0}: \qquad w'_{j'}=\overline{\Theta}'_{j'}(z',0), \qquad j'=1,\dots,d'. \tag{4.1.13}$$

Если расщепить $h=(f,g)\in\mathbb{C}^{m'}\times\mathbb{C}^{d'}$, то ограничение h на $S_{\bar{p}_0}$ совпадает с CR отображением степенных рядов

$$\mathbb{C}^n\ni z\longmapsto \Big(f(z,\overline{\Theta}(z,0)),\, \overline{\Theta}'(f(z,\overline{\Theta}'(z,0)),\,0)\Big)\in\mathbb{C}^{m'}\times\mathbb{C}^{d'}. \tag{4.1.14}$$

Проектируя на $\mathbb{C}^{m'}\times\{0\}$, можно, конечно, отождествить это отображение с CR-горизонтальной частью отображения, определенного по формуле

$$\mathbb{C}^n\ni z\longmapsto f(z,\overline{\Theta}(z,0))\in\mathbb{C}^{m'}. \tag{4.1.15}$$

В специальном случае, когда M' задается в нормальных координатах, имеем $\Theta'(z',0)\equiv 0$, следовательно, последние d' членов в (4.1.7) обращаются в нуль и в этом случае отождествление $h|_{S_{\bar{p}_0}}$ с ее CR-горизонтальной частью тривиально (однако мы пока избегаем использования нормальных координат). При этих обозначениях можно более конкретно переформулировать предыдущие пять условий невырожденности.

Определение 4.1.16. Такое CR-отображение степенных рядов $h: M\to M'$:

(1) *CR-обратимо в точке* p_0, если его CR-горизонтальная часть есть формальное обратимое отображение в точке 0.
(2) *CR-субмерсивно в точке* p_0, если его CR-горизонтальная часть есть формальная субмерсия в точке 0.
(3) *CR-конечно в точке* p_0, если его CR-горизонтальная часть конечна в точке 0.
(4) *CR-доминирующее в точке* p_0, если его CR-горизонтальная часть доминирующая в точке 0.
(5) *CR-трансверсально в точке* p_0, если его CR-горизонтальная часть трансверсальна в точке 0.

В заключение как прямое следствие лемм 4.1.3 и 4.1.4 имеем следующее утверждение.

Лемма 4.1.17. *Если формальное CR-отображение степенных рядов $h: M\to M'$ либо CR-обратимо, либо CR-субмерсивно, либо CR-доминирующее, то оно CR-трансверсально. Кроме того, в CR-равноразмерностном случае $m'=m$ CR-обратимость влечет* (*и, на самом деле, эквивалентна*) *CR-субмерсивность, из которой вытекает CR-конечность, из которой следует CR-доминирование и которая влечет CR-трансверсальность.*

4.2. Условия невырожденности Сегре для CR-отображений степенных рядов

4.2.1. Предварительные сведения. После введения пяти условий CR-горизонтальной невырожденности на CR-отображения h степенных рядов можно ввести *условия невырожденности Сегре* на h, которые связаны с принципом отражения, который будет изучаться в следующих главах части II этой статьи. Следовательно, *этот параграф 4.2 наиболее важен для понимания всей статьи в целом.*

Как и в п.4.1.9, пусть $h^c:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ — комплексифицированное CR-отображение степенных рядов, а именно, начинаем со следующего фундаментального тождества степенных рядов в $\mathbb{C}[\![\zeta,t]\!]$:

$$\bar{g}_{j'}(\zeta,\Theta(\zeta,t))-\Theta'_{j'}(\bar{f}(\zeta,\Theta(\zeta,t)),h(t))\equiv 0, \tag{4.2.2}$$

при $j' = 1, \dots, d'$. Как и в (2.3.8), пусть $\underline{\mathcal{L}}_1, \dots, \underline{\mathcal{L}}_m$ — базис комплексифицированных $(0,1)$ векторных полей, касательных к $\mathcal{M}$, заданный как

$$\underline{\mathcal{L}}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, t)\, \frac{\partial}{\partial \xi_j}. \tag{4.2.3}$$

Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$. Применяя дифференцирования $\underline{\mathcal{L}}^\beta = \underline{\mathcal{L}}_1^{\beta_1} \cdots \underline{\mathcal{L}}_m^{\beta_m}$ к (4.2.2) и не выписывая аргументы, получаем

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}_{j'} - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta (\bar{f}^\gamma)\, \Theta'_{j',\gamma'}(h) \equiv 0, \tag{4.2.4}$$

при всех $\beta \in \mathbb{N}^m$, для $j' = 1, \dots, d'$ и $(t, \tau) \in \mathcal{M}$. Разлагая дифференцирования $\underline{\mathcal{L}}^\beta$, замечаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2.5. *Для каждого $i' = 1, \dots, n'$ и для каждого $\beta \in \mathbb{N}^m$ существует полином $P_{i',\beta}$ от струи $J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(\tau)$ с коэффициентами — степенными рядами по (t, τ), которые зависят только от определяющих функций $\xi_j - \Theta_j(\zeta, t)$ подмногообразия $\mathcal{M}$ и которые можно вычислить с помощью некоторой комбинаторной формулы*

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{h}_{i'}(\tau) \equiv P_{i',\beta}(t, \tau, J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(\tau)). \tag{4.2.6}$$

Доказательство. При $|\beta| = 1$ это следует из рассмотрения коэффициентов векторных полей $\underline{\mathcal{L}}_k$ в (4.2.4). По индукции, предполагая, что такая формула справедлива для всех $\beta \in \mathbb{N}^m$ с $|\beta| = k \geqslant 1$, применяя векторные поля $\underline{\mathcal{L}}_1, \dots, \underline{\mathcal{L}}_m$ к (4.2.6) и используя цепное правило, получаем формулу аналогичного типа для всех $\beta \in \mathbb{N}^m$, $|\beta| = k + 1$. Ясно, что коэффициенты $P_{i',\beta}$ зависят от частных производных $\Theta_j(\zeta, t)$, и можно улучшить формулировку, используя явную комбинаторную формулу (которая не потребуется). □

В формуле (4.2.6) первые два аргумента $P_{i',\beta}$ — это (t, τ). На самом деле, рассматривая коэффициенты векторных полей $\underline{\mathcal{L}}_k$, видим, что эти первые два аргумента есть (ζ, t). Тем не менее, поскольку всегда рассматриваются переменные (t, τ), принадлежащие $\mathcal{M}$, заменяем всюду τ на $\Theta(\zeta, t)$ или w на $\overline{\Theta}(z, t)$. Следовательно, функция от (t, τ) отождествляется с функцией от (ζ, t) или с функцией от (z, τ). Прежде чем двигаться дальше, примем следующее соглашение, которое позволит несколько упростить обозначения.

Соглашение 4.2.7. Пусть $k, l \in \mathbb{N}$. На комплексификации $\mathcal{M}$ отождествим (в смысле обозначений) степенной ряд, записанный в полной форме

$$R(t, \tau, J^k h(t), J^l \bar{h}(\tau)), \tag{4.2.8}$$

со степенным рядом, записанным в одной из следующих четырех форм:

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \;\; R\left(t, \zeta, \Theta(\zeta, t), J^k h(t), J^l \bar{h}(\zeta, \Theta(\zeta, t))\right), \\ \textbf{(2)} \;\; R\left(t, \zeta, J^k h(t), J^l \bar{h}(\zeta, \Theta(\zeta, t)\right), \\ \textbf{(3)} \;\; R\left(z, \overline{\Theta}(z, \tau), J^k h(z, \overline{\Theta}(z, \tau)), J^l \bar{h}(\tau)\right), \\ \textbf{(4)} \;\; R\left(z, \tau, J^k h(z, \overline{\Theta}(z, \tau)), J^l \bar{h}(\tau)\right). \end{cases} \tag{4.2.9}$$

Принимая это соглашение, применяя лемму 4.2.5 и используя цепное правило, получаем, что для каждого $j' = 1, \dots, d'$ и каждого $\beta \in \mathbb{N}^m$ существуют формальные степенные ряды $R'_{j',\beta} = R'_{j',\beta}(t, \tau, J_\tau^{|\beta|} : t')$, зависящие только от определяющих уравнений подмногообразия $\mathcal{M}$ и от определяющих уравнений подмногообразия $\mathcal{M}'$, такие, что можно переписать уравнения (4.2.4) в общем виде

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{g}_{j'}(\tau) - \Theta_{j'}(\bar{f}(\tau), h(t))] =: R'_{j',\beta}(t, \tau, J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(\tau) : h(t)) \equiv 0, \tag{4.2.10}$$

при $j' = 1, \ldots, d'$, где «$\equiv 0$» понимается как обозначение «на $\mathcal{M}$», а именно, после замены ξ на $\Theta(\zeta, t)$ как тождество для формальных степенных рядов в $\mathbb{C}[\![\zeta, t]\!]$ или, эквивалентно, после замены w на $\overline{\Theta}(z, \tau)$ как тождество формальных для степенных рядов в $\mathbb{C}[\![z, \tau]\!]$. В дальнейшем будем постоянно ссылаться на эти тождества (4.2.10).

Важно то, что гладкость степенного ряда $R'_{j',\beta}$ минимальна среди двух гладкостей M и M'. Это важное замечание послужит основой для различных формальных принципов отражения, развитых в следующих главах части II.

Например, степенные ряды $R'_{j',\beta}$ комплексно аналитичны, если M вещественно-аналитично, а M' вещественно-алгебраично, даже если CR-отображение $h(t)$ степенных рядов предполагается чисто формальным и не сходящимся.

Тщательно рассматривая применение цепного правила в разложении (4.2.5), видим даже то, что каждое $R'_{j',\beta}$ относительно полиномиально по производным положительного порядка $(\partial_\tau^\alpha \bar{h}(\tau))_{1\leqslant|\alpha|\leqslant|\beta|}$.

4.2.11. Невырожденность Сегре для CR-отображений. Теперь все готово для определения условий невырожденности для CR-отображений степенных рядов, которые обобщают условия невырожденности подмногообразий общего положения, введенные в главе 3. В уравнениях (4.2.10) заменим $h(t)$ на новую независимую переменную $t' \in \mathbb{C}^{n'}$, положим $(t, \tau) = (0, 0)$ и определим следующий набор степенных рядов:

$$\Psi'_{j',\beta}(t') := \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}_{j'} - \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{f}^{\gamma'})\,\Theta'_{j',\beta}(t')\right]_{t=\tau=0}, \tag{4.2.12}$$

при $j' = 1, \ldots, d'$ и $\beta \in \mathbb{N}^m$. Здесь при $\beta = 0$ понимается, что $\Psi'_{j',0}(t') = -\Theta'_{j'}(0, t')$. Очевидно, что эквивалентный путь определения $\Psi'_{j',\beta}(t')$ следующий:

$$\Psi'_{j',\beta}(t') := R'_{j',\beta}(0, 0, J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(0) : t'). \tag{4.2.13}$$

Теперь прежде чем вводить пять определений, сделаем следующее важное эвристическое замечание. При $n = n'$, $M = M'$ и $h = \mathrm{Id}$ опускаем штрих и обозначаем через T (вместо t') новую независимую переменную, а значит,

$$\left\{\begin{aligned} \Psi_{j,\beta}(T) &= \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \xi_j - \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^m} \underline{\mathcal{L}}^\beta(\zeta)^\gamma\,\Theta_{j,\beta}(T)\right]_{t=\tau=0} \\ &= \left[\underline{\mathcal{L}}^\beta \Theta_j(\zeta, t) - \beta!\,\Theta_{j,\beta}(T)\right]_{t=\tau=0} \\ &= \beta!\,[\Theta_{j,\beta}(0) - \Theta_{j,\beta}(T)]. \end{aligned}\right. \tag{4.2.14}$$

Следовательно, с точностью до аффинной комбинации, $\Psi_{j,\beta}(T)$ представлено компонентой бесконечного отображения Сегре (3.1.3). Далее, используя (4.2.14), легко проверяется, что следующие пять условий невырожденности являются обобщением на случай CR-отображений пяти условий невырожденности, введенных в параграфе 3.2 для порождающих подмногообразий в $\mathbb{C}^n$.

Определение 4.2.15. Формальное, алгебраическое или аналитическое CR-отображение h степенных рядов называется

(1) *невырожденным по Леви* в начале координат, если отображение

$$t' \mapsto \left(R'_{j',\beta}(0, 0, J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(0) : t')\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,|\beta|\leqslant 1} \tag{4.2.16}$$

имеет ранг n' в точке $t' = 0$. Это условие требует выполнения неравенства для размерностей $d'(m + 1) \leqslant n'$.

(2) *ℓ_1–конечно невырожденным* в начале координат, если существует целое ℓ такое. что отображение

$$t' \mapsto \left(R'_{j',\beta}(0, 0, J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(0) : t')\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,|\beta|\leqslant \ell} \tag{4.2.17}$$

имеет ранг n' в точке $t' = 0$ и ℓ_1 — наименьшее такое целое ℓ.

(3) ℓ_1*–конечно по Сегре* в начале координат, если существует целое ℓ такое, что отображение

$$t' \mapsto \Big(R'_{j',\beta}(0,0,J_\tau^{|\beta|}\bar{h}(0) : t')\Big)_{1\leqslant j'\leqslant d',\, |\beta|\leqslant\ell} \tag{4.2.18}$$

локально конечно в точке $t' = 0$ и ℓ_1 — наименьшее такое целое.

(4) ℓ_1*–невырожденным по Сегре*, если существуют целое ℓ, целые ${j'_*}^1, \dots, {j'_*}^{n'}$, $1 \leqslant {j'_*}^{i'} \leqslant d'$, при $i' = 1, \dots, n'$ и мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^{n'}$, $|\beta_*^{i'}| \leqslant \ell$, при $i' = 1, \dots, n'$, такие что определитель

$$\det\left(\frac{\partial R'_{{j'_*}^{i'_1}, \beta_*^{i'_1}}}{\partial t'_{i'_2}}\Big(z, \overline{\Theta}(z,0), 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, \overline{\Theta}(z,0))\Big)\right)_{1\leqslant i'_1, i'_2\leqslant n'} \tag{4.2.19}$$

тождественно не обращается в нуль в $\mathbb{C}[\![z]\!]$ и ℓ_1 — наименьшее такое целое ℓ.

(5) ℓ_1*–голоморфно невырожденным* в начале координат, если существуют целое ℓ, целые ${j'_*}^1, \dots, {j'_*}^{n'}$, $1 \leqslant {j'_*}^{i'} \leqslant d'$, при $i' = 1, \dots, n'$ и мультииндексы $\beta_*^1, \dots, \beta_*^{n'}$, $|\beta_*^{i'}| \leqslant \ell$, при $i' = 1, \dots, n'$ такие, что определитель

$$\det\left(\frac{\partial R'_{{j'_*}^{i'_1}, \beta_*^{i'_1}}}{\partial t'_{i'_2}}\Big(0,0,0,0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(t)\Big)\right)_{1\leqslant i'_1, i'_2\leqslant n'} \tag{4.2.20}$$

не обращается в нуль тождественно в $\mathbb{C}[\![t]\!]$ и ℓ_1 — наименьшее такое целое ℓ.

Эти пять условий невырожденности для CR-отображений степенных рядов наиболее важны для принципа отражения и они будут изучаться в части II этой статьи. Некоторые из них были предложены К. Дьедерихом и С. М. Вебстером в [16]. Понятие ℓ_1-конечной невырожденности унифицирует условия работ [5–7, 10, 15, 22, 28, 31, 34–36].

Заметим, что из невырожденности по Леви следует конечная невырожденность, которая влечет конечность по Сегре. Тем не менее, конечность по Сегре и невырожденность по Сегре вполне независимы, как это показывают следующие два примера.

Пример 4.2.21. Уже известно, что существенная конечность M не влечет невырожденность по Сегре, следовательно, просто рассматривая тождественное отображение гиперповерхности $v = z_1\bar{z}_1(1 + z_1\bar{z}_2)$ в $\mathbb{C}^3$, видим, что из **(3)** не следует **(4)** в только что приведенном определении 4.2.15.

С другой стороны, легко проверяется, что отображение $(z_1, w) \mapsto (z_1, 0, w)$ из $M : \bar{w} = w + i\, z_1^2\bar{z}_1^2$ в $M' : \bar{w}' = w' + i[{z'_1}^2\bar{z}_1'^2 + z'_1\bar{z}_2'^2 + \bar{z}'_1{z'_2}^2]$ конечно по Сегре в начале координат, но не является невырожденным по Сегре.

Упомянем также, что предыдущие пять условий невырожденности имеют смысл для достаточно гладких локальных CR-отображений на основе рассмотрения ряда Тейлора для M в p_0, для h в p_0 и для M' в p'_0.

4.2.22. Необходимые условия. Возвращаясь к (4.2.12) и замечая, что $\bar{f}(0) = 0$, видим, что постоянная $\underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{f}^\gamma)|_{t=\tau=0}$ обращается в нуль при $|\gamma| > |\beta|$, откуда каждый $\Psi'_{j',\beta}(t')$ есть аффинная комбинация с постоянными коэффициентами некоторых (но не всех) степенных рядов $\Theta'_{j'_1,\beta'_1}(t')$ при $1 \leqslant j'_1 \leqslant d'$ и $|\beta'_1| \leqslant |\beta|$. Основываясь на этом наблюдении, получаем свойства **(1)**, **(2)**, **(3)** **(5)** леммы 4.2.23 ниже, которые дают необходимые условия невырожденности h в одном из предыдущих пяти смыслах. Доказательство **(4)** также элементарно.

Лемма 4.2.23. *Пусть $h : M \to M'$ — CR-отображение степенных рядов то же, что и выше.*

(1) *Если h невырождено по Леви в начале координат, то M' невырождено по Леви в начале координат.*

(2) *Если h ℓ_1-конечно невырождено в начале координат, то M' ℓ'_0–конечно невырождено в начале координат при некотором $\ell'_0 \leqslant \ell_1$.*

(3) *Если h ℓ_1-существенно конечно в начале координат, то M' ℓ'_0-существенно конечно в начале координат для некоторого $\ell'_0 \leqslant \ell_1$.*

(4) *Если h ℓ_1-невырождено по Сегре в начале координат, то M' ℓ_0'–невырождено по Сегре в начале координат при некотором $\ell_0' \leqslant \ell_1$.*

(5) *Если h ℓ_1-голоморфно невырождено в начале координат, то M' ℓ_0'-голоморфно невырождено в начале координат при некотором $\ell_0' \leqslant \ell_1$.*

4.3. Изучение CR-трансверсальных CR-отображений степенных рядов

Покажем теперь, что CR-трансверсальность отображения h гарантирует, что оно обладает в точности тем же свойством невырожденности, что и M'. Условие CR-трансверсальности значительно более общее, чем условие доминирования, потому что, например, оно не накладывает никаких неравенств для размерностей m и m' или n и n'. Закончим этот параграф доказательством следующей теоремы, которое достаточно длинно и технично, однако имеет первостепенное значение. Здесь предполагается, что M и M' либо алгебраичны, либо аналитичны и что h алгебраично, аналитично и даже формально. В соответствии с леммой 4.1.17, следующая ниже лемма применима ко многим ситуациям.

Теорема 4.3.1. *Предположим, что h CR-трансверсально в точке p_0. Тогда справедливы следующие свойства:*

(1) *Если M' невырождено по Леви в точке p_0', то h ℓ_1-конечно невырождено в точке p_0 при некотором $\ell_1 \geqslant 1$.*

(2) *Если M' ℓ_0'-конечно невырождено в точке p_0', то h ℓ_1-конечно невырождено в точке p_0 при некотором $\ell_1 \geqslant \ell_0'$.*

(3) *Если M' ℓ_0'-существенно конечно в точке p_0', то h ℓ_1-конечно по Сегре в точке p_0 при некотором $\ell_1 \geqslant \ell_0'$.*

(4) *Если M' ℓ_0'-невырождено по Сегре в точке p_0', то h ℓ_1-невырождено по Сегре в точке p_0 при некотором $\ell_1 \geqslant \ell_0'$.*

(5) *Если M' ℓ_0'-голоморфно невырождено в точке p_0' и, кроме того, h трансверсально в точке p_0, то h ℓ_1-голоморфно невырождено в точке p_0 при некотором $\ell_1 \geqslant \ell_0'$.*

Доказательство. Для того, чтобы немного упростить обозначения и вычисления, предположим, что координаты (z,w) на M вблизи p_0 и координаты (z',w') на M' вблизи p_0' нормальны. Таким образом, многообразие Сегре $S_{\bar{p}_0}$ задается как $\{(z,0)\}$ вместо $\{(z,\overline{\Theta}(z,0))\}$ и аналогично для $S'_{\bar{p}_0'}$, что слегка упрощает формальные вычисления ниже.

Напомним, что по основному определению (4.2.10) функции $R'_{j',\beta}(t,\tau,J^{|\beta|}\bar{h}(\tau)\,:\,t')$ являются разложениями отображений $\underline{\mathcal{L}}^{\beta} r'_{j'}(t',\bar{h}(\tau))$ в степенные ряды. Здесь целое j' удовлетворяет неравенству $1 \leqslant j' \leqslant d'$, а мультииндекс β принадлежит $\mathbb{N}^m$.

Рассмотрим градиент $R'_{j',\beta}$ относительно выделенной переменной t':

$$\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(t,\tau,J^{|\beta|}\bar{h}(\tau)\,:\,t') := \left(\frac{\partial R'_{j',\beta}}{\partial t'_i}(t,\tau,J^{|\beta|}\bar{h}(\tau)\,:\,t')\right)_{1\leqslant i'\leqslant n'}, \tag{4.3.2}$$

рассматриваемый как вертикальный вектор, т.е. как $n' \times 1$ матрица. Кроме того, в дальнейшем рассматриваем фиксированное j' и выражение

$$\left(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(t,\tau,J^{|\beta|}\bar{h}(\tau)\,:\,t')\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m} \tag{4.3.3}$$

как $n' \times \infty$ матрицу. Введем новые обозначения. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 1$, $x = (x_1,\ldots,x_\nu) \in \mathbb{K}^\nu$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant 1$, и пусть $A(x)$ — $\mu \times \infty$ матрица степенных рядов. Через $\mathrm{genMrk}\,A(x)$ обозначим ранг общего положения матрицы $A(x)$, который определяется как наибольшее целое $\kappa \leqslant \mu$ такое, что существует $\kappa \times \kappa$ минор матрицы $A(x)$, не обращающийся тождественно в нуль как степенной ряд в x. Буква «M» в genMrk происходит из слова «матрица». Обозначение genMrk не следует путать с обозначением $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}$, введенным в п. 2.1.5.

В дальнейшем, на самом деле, будет положено $(t,\tau) := (0,0)$ в $R'_{j',\beta}$. Тогда ранг общего положения матрицы

$$\operatorname{genMrk}\left(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):t')\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m}, \tag{4.3.4}$$

конечно, есть наибольшее целое κ' такое, что существует $\kappa'\times\kappa'$ минор (4.3.4), не обращающийся тождественно в нуль как степенной ряд от t'. В случае, когда полагается $t'=0$, мы даже не говорим о ранге общего положения, следовательно, просто обозначаем через

$$\operatorname{Mrk}\left(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0)\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m} \tag{4.3.5}$$

ранг $n'\times\infty$ постоянной матрицы. Конечно, используем те же обозначения genMrk и Mrk для укороченных матриц, где $|\beta|\leqslant k$ для некоторого целого $k\in\mathbb{N}$.

Докажем, прежде всего, часть **(2)** теоремы 4.3.1, которая, конечно, содержит часть **(1)**. Сформулируем техническую лемму, которая справедлива в случае коразмерности $d=1$.

Лемма 4.3.6. *Фиксируем j', $1\leqslant j'\leqslant d'$. Пусть $n'_{j'}$ — целое, определенное как*

$$n'_{j'} := \operatorname{Mrk}\left(\nabla_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}(0)\right)_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}. \tag{4.3.7}$$

Предположим, что h CR-трансверсально в точке p_0. Тогда

$$\operatorname{Mrk}\left(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0)\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m} = n'_{j'}. \tag{4.3.8}$$

Покажем сначала, что из этой технической леммы следует часть **(2)** теоремы. В самом деле, по определению $R'_{j',\beta}$ (см. выражение (4.2.5)) $\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0)$ есть линейная комбинация с комплексными коэффициентами векторов $\nabla_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}(0)$, при $|\gamma'|\leqslant|\beta|$, более точно

$$\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0) = -\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar{f}^{\gamma'})(0)\,[\nabla_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}(0)]. \tag{4.3.9}$$

Заметим, что, на самом деле, эта сумма укорочена с $|\gamma'|\leqslant|\beta|$. Следовательно,

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0) : \beta\in\mathbb{N}^m\right\} \tag{4.3.10}$$

автоматически содержится в

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\nabla_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}(0) : \gamma'\in\mathbb{N}^{m'}\right\}. \tag{4.3.11}$$

Но ввиду рангового условия, сформулированного в лемме 4.3.6 (которое предстоит доказать ниже), получаем, что эти два подпространства должны совпадать. Другими словами, для каждого $j'=1,\dots,d'$ существуют целые $\ell_{1,j'}$ и $\ell'_{0,j'}$, $\ell_{1,j'}\geqslant\ell'_{0,j'}$ такие, что

$$\begin{cases} \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0) : |\beta|\leqslant\ell_{1,j'}\right\} = \\ \qquad\qquad \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\nabla_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}(0) : |\gamma'|\leqslant\ell'_{0,j'}\right\}. \end{cases} \tag{4.3.12}$$

Наконец, по предположению об ℓ'_0-конечной невырожденности M' в точке p'_0, векторное пространство, порожденное членами в правой части (4.3.12), при $j'=1,\dots,d'$ совпадает со всем $\mathbb{C}^{n'}$ и $\ell'_0=\max(\ell'_{0,1},\dots,\ell'_{0,n'})$. Получаем, что векторное пространство, порожденное набором членов в правых частях (4.3.12), при $j'=1,\dots,d'$ также совпадает со всем $\mathbb{C}^{n'}$. Наконец, полагая $\ell_1=\max(\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,n'})\geqslant\ell'_0$, показываем, что h ℓ_1-конечно невырождено в точке p_0. Остается установить техническую лемму.

Доказательство. Итак, фиксируем j'. Рассуждаем от противного. Предположим, что ранг κ' $n'\times\infty$ матрицы

$$\left(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):0)\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m} \tag{4.3.13}$$

строго меньше, чем $n'_{j'}$, а именно, $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$. Эквивалентно, существуют мультииндексы $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa'} \in \mathbb{N}^m$ такие, что для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{N}^m$, отличного от $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa'}$, существуют постоянные $\Lambda^1_\beta, \dots, \Lambda^{\kappa'}_\beta$, такие что

$$\begin{cases} \nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0) : 0) = \Lambda^1_\beta \left[\nabla_{t'} R'_{j',\beta_1}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0) : 0)\right] + \dots + \\ \qquad\qquad + \Lambda^{\kappa'}_\beta \left[\nabla_{t'} R'_{j',\beta_{\kappa'}}(0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0) : 0)\right]. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Теперь заменяя в этих линейных комбинациях члены $\nabla_{t'} R'_{j',\beta}$ на их явные выражения (4.3.9), получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{f}^{\gamma'})(0)\ [\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(0)] = \\ \qquad \Lambda^1_\beta \left(\sum\limits_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar{f}^{\gamma'})(0)\, [\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(0)] \right) + \dots + \\ \qquad \Lambda^{\kappa'}_\beta \left(\sum\limits_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar{f}^{\gamma'})(0)\, [\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(0)] \right). \end{cases} \tag{4.3.15}$$

Поскольку координаты нормальны, то сопряженное комплексифицированное многообразие Сегре, проходящее через начало координат, задается как $\underline{\mathcal{S}}_0 = \{(0,0,\zeta,0)\}$ в (z,w,ζ,ξ) координатах. Пусть $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. Ограничение $\bar{f}^{\gamma'}$ на $\underline{\mathcal{S}}_0$ задается функцией $\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0)$. Разложим ее в ряд Тейлора по степеням ζ:

$$\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \bar{f}_{\gamma',\beta}\, \frac{\zeta^\beta}{\beta!}, \tag{4.3.16}$$

где $\bar{f}_{\gamma',\beta}$ — постоянные в $\mathbb{C}$. Поскольку координаты нормальны, то из формул для векторных полей

$$\underline{\mathcal{L}}_k = \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta,t)\, \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \tag{4.3.17}$$

с учетом соотношений $\Theta_j(\zeta,0,w) \equiv \Theta_j(0,z,w) \equiv 0$ (см. теорему 2.1.32), следует, что

$$\bar{f}_{\gamma',\beta} = \underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{f}^{\gamma'})(0,0,0,0). \tag{4.3.18}$$

Теперь выражение (4.3.15) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \left(\bar{f}_{\gamma',\beta} - \Lambda^1_\beta\, \bar{f}_{\gamma',\beta_1} - \dots - \Lambda^{\kappa'}_\beta\, \bar{f}_{\gamma',\beta_{\kappa'}} \right)\ [\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(0)] = 0. \tag{4.3.19}$$

Временно перепишем это выражение как линейную систему вида

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \overline{F}_{\beta,\gamma'}\ [\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(0)] = 0, \tag{4.3.20}$$

где $\overline{F}_{\beta,\gamma'}$ — комплексные постоянные. Используем теперь предположение (4.3.7). Так как ранг $n' \times \infty$ матрицы $(\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(0))_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}}$ равен $n'_{j'}$, то после взятия некоторых линейных комбинаций строк системы (4.3.20), видим, что существуют $n'_{j'}$ различных мультииндексов $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n'_{j'}} \in \mathbb{N}^{m'}$, таких что для $i' = 1, \dots, n'_{j'}$ можно получить решение системы в виде

$$\overline{F}_{\beta,\gamma'_{i'}} = \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \dots, \gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}\, \overline{F}_{\beta,\gamma'}, \tag{4.3.21}$$

где $A'_{i',\gamma'}$ — комплексные постоянные.

Заменим теперь $\overline{F}_{\beta,\gamma'}$ на их комплексные значения, что даст при $\beta\neq\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}$ и $i'=1,\dots,n'_{j'}$ следующие равенства:

$$\begin{cases}\bar f_{\gamma'_{i'},\beta}-\Lambda^1_\beta\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}-\cdots-\Lambda^{\kappa'}_\beta\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}= \\ =\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\left[\bar f_{\gamma',\beta}-\Lambda^1_\beta\,\bar f_{\gamma',\beta_1}-\cdots-\Lambda^{\kappa'}_\beta\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}}\right].\end{cases}\tag{4.3.22}$$

Преобразуем эту систему к виду (при $i'=1,\dots,n'_{j'}$ и $\beta\neq\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}$)

$$\begin{cases}\bar f_{\gamma'_{i'},\beta}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta}=\Lambda^1_\beta\left[\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta_1}\right] \\ \qquad\qquad +\cdots+ \\ \qquad\qquad \Lambda^{\kappa'}_\beta\left[\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}}\right].\end{cases}\tag{4.3.23}$$

С другой стороны, используя определение постоянных $\bar f_{\gamma',\beta}$ формулой (4.3.16), разложим в степенные ряды по ζ следующие выражения:

$$\begin{cases}\bar f^{\gamma'_i}(\zeta,0)-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f^{\gamma'}(\zeta,0)= \\ \sum\limits_{\beta\neq\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}}\left(\bar f_{\gamma'_{i'},\beta}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta}\right)\dfrac{\zeta^\beta}{\beta!}+ \\ +\left(\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta_1}\right)\dfrac{\zeta^{\beta_1}}{\beta_1!}+\cdots+ \\ +\left(\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}}\right)\dfrac{\zeta^{\beta_{\kappa'}}}{\beta_{\kappa'}!}.\end{cases}\tag{4.3.24}$$

Введем теперь следующие новые комплексные постоянные при $i'=1,\dots,n'_{j'}$:

$$\begin{cases}\Pi_{i',1}:=\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta_1}, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_{i',\kappa'}:=\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}-\sum\limits_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}},\end{cases}\tag{4.3.25}$$

и воспользуемся предыдущими соотношениями (4.3.23) для того, чтобы при $i' = 1, \ldots, n'_{j'}$ более просто записать (4.3.24)

$$\begin{cases} \bar{f}^{\gamma'_{i'}}(\zeta, 0) - \sum\limits_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'} \, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, 0) = \\ \quad = \sum\limits_{\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}} \Big[\Lambda^1_\beta \, \Pi_{i',1} + \cdots + \Lambda^{\kappa'}_\beta \, \Pi_{i',\kappa'} \Big] \, \dfrac{\zeta^\beta}{\beta!} + \Pi_{i',1} \, \dfrac{\zeta^{\beta_1}}{\beta_1!} + \cdots + \Pi_{i',\kappa'} \, \dfrac{\zeta^{\beta_{\kappa'}}}{\beta_{\kappa'}!} \\ \quad = \Pi_{i',1} \left(\dfrac{\zeta^{\beta_1}}{\beta_1!} + \sum\limits_{\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}} \Lambda^1_\beta \, \dfrac{\zeta^\beta}{\beta!} \right) + \cdots + \Pi_{i',\kappa'} \left(\dfrac{\zeta^{\beta_{\kappa'}}}{\beta_{\kappa'}!} + \sum\limits_{\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}} \Lambda^{\kappa'}_\beta \, \dfrac{\zeta^\beta}{\beta!} \right) \\ \quad =: \Pi_{i',1} \, G_1(\zeta) + \cdots + \Pi_{i',\kappa'} \, G_{\kappa'}(\zeta), \end{cases} \tag{4.3.26}$$

где степенные ряды $G_1(\zeta), \ldots, G_{\kappa'}(\zeta)$ определяются последним равенством. Воспользуемся теперь предположением $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$. Так как имеется строго меньше, чем $n'_{j'}$, функций G в (4.3.26), то существуют комплексные постоянные $\mu_1, \ldots, \mu_{n'_{j'}}$, не все равные нулю, такие что

$$\begin{cases} 0 \equiv \mu_1 \left(\bar{f}^{\gamma'_1}(\zeta, 0) - \sum\limits_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A_{1,\gamma'} \, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, 0) \right) + \cdots + \\ \qquad + \mu_{n'_{j'}} \left(\bar{f}^{\gamma'_{n'_{j'}}}(\zeta, 0) - \sum\limits_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A_{n'_{j'},\gamma'} \, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, 0) \right), \end{cases} \tag{4.3.27}$$

и это последнее равенство, очевидно, противоречит предположению, что h CR-трансверсально в точке p_0.

Доказательство леммы 4.3.6 и частей **(1)** и **(2)** теоремы 4.3.1 завершено. □

Докажем теперь часть **(3)** теоремы 4.3.1. Снова рассуждаем от противного. Предположим, что идеал

$$\Big\langle R'_{j',\beta}(0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : t') \Big\rangle_{1 \leqslant j' \leqslant d', \, \beta \in \mathbb{N}^m} \tag{4.3.28}$$

имеет бесконечную коразмерность в $\mathcal{A}_\mathbb{C}\{t'\}$ или в $\mathbb{C}\{t'\}$. По теореме о нулях существует ненулевая алгебраическая и аналитическая дуга кривой, проходящей через начало координат

$$\mathbb{C} \ni s' \mapsto t'(s') \in \mathbb{C}^{n'}, \tag{4.3.29}$$

а именно, $t'(s') \in \mathcal{A}_\mathbb{C}\{s'\}^{n'}$ или $t'(s') \in \mathbb{C}\{s'\}^{n'}$, такая что

$$R'_{j',\beta}(0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : t'(s')) \equiv 0 \tag{4.3.30}$$

при всех $j' = 1, \ldots, d'$ и $\beta \in \mathbb{N}^m$. Заменяя $R'_{j',\beta}$ их определением (4.2.10), имеем

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \, \bar{g}_{j'}(0) - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{f}^{\gamma'})(0) \, \Theta'_{j',\gamma'}(t'(s')) \equiv 0, \tag{4.3.31}$$

при $j' = 1, \ldots, d'$. Но так как координаты (z, w) и (z', w') нормальны, можно утверждать, что

$$\underline{\mathcal{L}}^\beta \, \bar{g}_{j'}(0) = 0 \tag{4.3.32}$$

при всех $\beta \in \mathbb{N}^m$ и $j' = 1, \ldots, d'$. В самом деле, полагая $t = 0$ в фундаментальном тождестве для степенных рядов

$$\bar{g}_{j'}(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv \Theta'_{j'}(\bar{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)), \tag{4.3.33}$$

(ввиду нормальности координат), получаем

$$\bar{g}_{j'}(\zeta, 0) \equiv \Theta'_{j'}(\bar{f}(\zeta, 0), 0) \equiv 0, \tag{4.3.34}$$

а следовательно,

$$\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\,\bar{g}_{j'}(0)=\partial_{\zeta}^{\beta}\bar{g}_{j'}(\zeta,0)|_{\zeta=0}=0, \tag{4.3.35}$$

что и утверждалось. Разлагая

$$\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0)=\sum_{\beta\in\mathbb{N}^m}\bar{f}_{\gamma',\beta}\,\frac{\zeta^{\beta}}{\beta!}, \tag{4.3.36}$$

где (опять ввиду нормальности координат)

$$\bar{f}_{\gamma',\beta}=\underline{\mathcal{L}}^{\beta}\bar{f}^{\gamma'}(0), \tag{4.3.37}$$

можно переписать выражение (4.3.31) в более простом виде

$$\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\bar{f}_{\gamma',\beta}\,\Theta'_{j',\gamma'}(t'(s'))\equiv 0. \tag{4.3.38}$$

Так как M' существенно конечно в точке p_0', то существует наименьшее целое j_0', $1\leqslant j_0'\leqslant d'$, такое что не все $\Theta'_{j_0',\gamma'}(t'(s'))$ тождественно обращаются в нуль при $\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}$. Следовательно, существует $s_0'\in\mathbb{C}$, произвольно близкое к началу координат, такое что бесконечное семейство комплексных постоянных $(\Theta'_{j_0',\gamma'}(t'(s_0')))_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}$ содержит ненулевую постоянную. Положим

$$\theta'_{\gamma'}:=\Theta'_{j_0',\gamma'}(t'(s_0'))\in\mathbb{C}. \tag{4.3.39}$$

Полагая $s':=s_0'$ в (4.3.38), получаем, следовательно, для всех $\beta\in\mathbb{N}^m$ соотношение вида

$$\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\bar{f}_{\gamma',\beta}\,\theta'_{\gamma'}=0, \tag{4.3.40}$$

которое после интегрирования по ζ дает формальное тождество

$$\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\theta'_{\gamma'}\,\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0)\equiv 0. \tag{4.3.41}$$

Но это, очевидно, противоречит CR-трансверсальности h в точке p_0.

Доказательство части **(3)** теоремы 4.3.1 завершено.

Докажем теперь часть **(4)** теоремы 4.3.1. Доказательство имеет некоторые аналогии с доказательством части **(2)**, но менее технично. Будем использовать обозначения, введенные перед доказательством теоремы 4.3.1.

Из параграфа 3.2 (см. в особенности (3.2.47) и лемму 3.2.49) непосредственно следует, что в нормальных координатах и при обозначении $\nabla_{t'}$ для градиента, условие невырожденности по Сегре подмногообразия M' записывается в виде

$$\operatorname{genMrk}\left(\nabla_{t'}\,\Theta'_{j',\gamma'}(z',0)\right)_{1\leqslant j'\leqslant d',\,\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}=n'. \tag{4.3.42}$$

Заметим, что здесь целое j' меняется от 1 до d', однако в следующей лемме j' фиксируется.

Лемма 4.3.43. *Фиксируем j', $1\leqslant j'\leqslant d'$. Пусть $n'_{j'}$ — целое, определенное формулой*

$$n'_{j'}:=\operatorname{genMrk}\left(\nabla_{t'}\,\Theta'_{j',\gamma'}(z',0)\right)_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}. \tag{4.3.44}$$

Предположим, что h CR-трансверсально в точке p_0. Тогда

$$\operatorname{genMrk}\left(\nabla_{t'}\,R'_{j',\beta}(z,0,0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):\,h(z,0))\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m}=n'_{j'}. \tag{4.3.45}$$

Покажем сначала, что из этой технической леммы вытекает часть **(4)** теоремы 4.3.1. В самом деле, по определениям (4.2.5) и (4.2.10) для $R'_{j',\beta}$, после спецификации цепи Сегре $\mathcal{S}_0=\{(z,0,0,0)\}$, имеем

$$\begin{cases}\nabla_{t'}\,R'_{j',\beta}\;(z,0,0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0):\,h(z,0))=\\ \qquad=-\displaystyle\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}\underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar{f}^{\gamma'})(z,0,0,0)\,[\nabla_{t'}\,\Theta'_{j',\gamma'}(h(z,0))].\end{cases} \tag{4.3.46}$$

Заметим, что здесь записан первый аргумент $R'_{j',\beta}$ и аргумент продифференцированного выражения $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar{f}^{\gamma'})$ в виде (z, w, ζ, ξ), а не как (t, τ). В аргументах $(z, 0, 0, 0)$ этого выражения для $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar{f}^{\gamma'})$ член z происходит из коэффициентов векторных полей $\underline{\mathcal{L}}_k$, но $(\zeta, \xi) = (0, 0)$. Получается, что сумма в (4.3.46), на самом деле, обрывается с $|\gamma'| \leqslant |\beta|$, поскольку $\bar{f}^{\gamma'}$ обращается в нуль с порядком $|\gamma'|$ в начале координат. Таким образом, столбцы матрицы $(\nabla_{t'} R'_{j',\beta})_{\beta \in \mathbb{N}^m}$ в левой части (4.3.46) получаются как линейные комбинации (с коэффициентами — некоторыми формальными степенными рядами от z) столбцов матрицы $(\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'})_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}}$ в правой части. По лемме 4.3.43 (доказываемой ниже) формальное линейное пространство, порожденное столбцами матрицы $(\nabla_{t'} R'_{j',\beta})_{\beta \in \mathbb{N}^m}$, в левой части совпадает с формальным линейным пространством, порожденным столбцами матрицы $(\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'})_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}}$, стоящей справа. Наконец, в силу предположения о невырожденности по Сегре (4.3.42) имеем

$$\operatorname{genMrk} \Big(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(z, 0, 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, 0))\Big)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, \beta \in \mathbb{N}^m} = n', \tag{4.3.47}$$

что показывает, что h ℓ_1-невырождено по Сегре при некотором $\ell_1 \geqslant \ell'_0$. Остается доказать техническую лемму 4.3.43.

Доказательство. Итак, зафиксируем j'. Снова рассуждаем от противного. Предположим, что порождающий ранг κ' $n' \times \infty$ матрицы

$$\Big(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(z, 0, 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, 0))\Big)_{\beta \in \mathbb{N}^m} \tag{4.3.48}$$

строго меньше, чем $n'_{j'}$, а именно, $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$. Выберем κ' различных мультииндекса $\beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'} \in \mathbb{N}^m$ таких, что ранг общего положения $n' \times \kappa'$ выделенной матрицы

$$\Big(\nabla_{t'} R'_{j',\beta_{i'}}(z, 0, 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, 0))\Big)_{1 \leqslant i' \leqslant \kappa'} \tag{4.3.49}$$

равен κ'. Пусть $\Lambda(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ обозначает не равный нулю тождественно $\kappa' \times \kappa'$ минор этой матрицы. По правилу Крамера и из предположения о ранге получаем, что для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{N}^m$, отличного от $\beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}$, существуют формальные степенные ряды $\Lambda^1_\beta(z), \ldots, \Lambda^{\kappa'}_\beta(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ такие что

$$\left\{\begin{aligned} &\Lambda(z)\, \nabla_{t'} R'_{j',\beta}\ (z, 0, 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, 0)) \equiv \\ &\qquad \equiv \Lambda^1_\beta(z)\, \nabla_{t'} R'_{j',\beta_1}(z, 0, 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, 0)) + \cdots + \\ &\qquad\quad + \Lambda^{\kappa'}_\beta(z)\, \nabla_{t'} R'_{j',\beta_{\kappa'}}(z, 0, 0, 0, J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(z, 0)). \end{aligned}\right. \tag{4.3.50}$$

Заменяя $R'_{j',\beta}$ на их значения, заданные (4.3.46), получаем

$$\left\{\begin{aligned} &\Lambda(z) \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar{f}^{\gamma'})(z, 0, 0, 0)\, [\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(h(z, 0))] \equiv \\ &\qquad \equiv \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \Big(\Lambda^1_\beta(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar{f}^{\gamma'})(z, 0, 0, 0) + \cdots + \\ &\qquad\quad + \Lambda^{\kappa'}_\beta(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar{f}^{\gamma'})(z, 0, 0, 0)\Big) \left[\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(h(z, 0))\right]. \end{aligned}\right. \tag{4.3.51}$$

Напомним, что в нормальных координатах, $g(z, 0) \equiv 0$, а следовательно,

$$h(z, 0) \equiv (f(z, 0), 0). \tag{4.3.52}$$

Прежде чем двигаться дальше, отметим следующий элементарный факт.

Лемма 4.3.53. *Предположим, что h CR-трансверсально в точке p_0 и зафиксируем j' как в лемме* (4.3.43). *Тогда*

$$\operatorname{genMrk} \left(\nabla_{t'} \Theta'_{j',\gamma'}(f(z, 0), 0)\right)_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} = n'_{j'}. \tag{4.3.54}$$

Доказательство. Предположим противное: этот матричный ранг общего положения равен целому $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$. По определению (4.3.45) величины $n'_{j'}$ существует $n'_{j'} \times n'_{j'}$ минор $d'(z')$ $n' \times \infty$ матрицы $(\nabla_{t'}\, \Theta'_{j',\gamma'}(z',0))_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}}$, который тождественно не обращается в нуль как степенной ряд от z'. Выводим, что $d'(f(z,0)) \equiv 0$, это противоречит CR-трансверсальности h и этим заканчивается доказательство. □

После составления линейной комбинации можно временно переписать соотношения (4.3.51) в виде

$$\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \overline{F}_{\beta,\gamma'}(z)\ \left[\nabla_{t'}\, \Theta'_{j',\gamma'}(h(z,0))\right] \equiv 0. \tag{4.3.55}$$

По лемме 4.3.53 существуют мультииндексы $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n'_{j'}}$ такие, что $n'_{j'} \times n'_{j'}$ минор $A(z)$ $n' \times n'_{j'}$ матрицы

$$\left(\nabla_{t'}\, \Theta'_{j',\gamma'_{i'}}(h(z,0))\right)_{1\leqslant i' \leqslant n'_{j'}} \tag{4.3.56}$$

тождественно не обращается в нуль как степенной ряд от z. Выводим, что после составления линейной комбинации строк системы (4.3.55) для каждого $i' = 1, \dots, n'_{j'}$ существуют формальные степенные ряды $A'_{i',\gamma'}(z)$ такие, что можно решить систему уравнений

$$A(z)\, \overline{F}_{\beta,\gamma'_{i'}}(z) \equiv \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \overline{F}_{\beta,\gamma'}(z). \tag{4.3.57}$$

Заменим теперь $\overline{F}_{\beta,\gamma'}$ на их значения, заданные (4.3.51) и (4.3.55). Получаем следующие формальные тождества, имеющие смысл при $i' = 1, \dots, n'_{j'}$ и $\beta \neq \beta_1, \dots, \beta_{\kappa'}$:

$$\left\{\begin{aligned} & A(z)\, \Lambda(z)\ \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar f^{\gamma'_{i'}})(z,0,0,0) - A(z)\, \Lambda^1_\beta(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar f^{\gamma'_{i'}})(z,0,0,0) - \dots - \\ & \qquad - A(z)\, \Lambda^{\kappa'}_\beta(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar f^{\gamma'_{i'}})(z,0,0,0) \equiv \\ & \quad \equiv \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} \Big(A'_{i',\gamma'}(z)\, \Lambda(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0) - \\ & \qquad - A'_{i',\gamma'}(z)\, \Lambda^1_\beta(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0) - \dots - \\ & \qquad - A'_{i',\gamma'}(z)\, \Lambda^1_\beta(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0) \Big). \end{aligned}\right. \tag{4.3.58}$$

После составления некоторых линейных комбинаций можно переписать эти тождества в виде

$$\left\{\begin{aligned} & A(z)\, \Lambda(z)\ \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar f^{\gamma'_{i'}})(z,0,0,0) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \Lambda(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0) \equiv \\ & \quad \equiv \Lambda^1_\beta(z) \Bigg(A(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar f^{\gamma'_{i'}})(z,0,0,0) - \\ & \qquad - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0) \Bigg) + \dots + \\ & \quad + \Lambda^{\kappa'}_\beta(z) \Bigg(A(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar f^{\gamma'_{i'}})(z,0,0,0) - \\ & \qquad - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0) \Bigg). \end{aligned}\right. \tag{4.3.59}$$

Введем следующее новое обозначение

$$\bar f_{\gamma',\beta}(z) := \underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar f^{\gamma'})(z,0,0,0). \tag{4.3.60}$$

Конечно,

$$\bar{f}^{\gamma'}(\zeta, 0) \equiv \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \bar{f}_{\gamma',\beta}(0)\, \frac{\zeta^\beta}{\beta!} \tag{4.3.61}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta, z, 0)) &\equiv \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \frac{\zeta^\beta}{\beta!} \left[\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \zeta^\beta}\left(\bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta, z, 0))\right)\right]_{\zeta=0} \\ &\equiv \underline{\mathcal{L}}^\beta(\bar{f}^{\gamma'})(z, 0, 0, 0) \\ &\equiv \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \frac{\zeta^\beta}{\beta!}\, \bar{f}_{\gamma',\beta}(z). \end{aligned}\right. \tag{4.3.62}$$

При этих обозначениях можно переписать (4.3.59) следующим образом при $i' = 1, \ldots, n'_{j'}$ и $\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}$:

$$\left\{\begin{aligned} & A(z)\,\Lambda(z)\ \bar{f}_{\gamma'_{i'}}(z) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} \Lambda(z)\, A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}_{\gamma',\beta}(z) \equiv \\ &\equiv \Lambda^1_\beta(z) \left(A(z)\, \bar{f}_{\gamma'_{i'},\beta}(z) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}_{\gamma',\beta}(z)\right) + \cdots + \\ &+ \Lambda^1_\beta(z) \left(A(z)\, \bar{f}_{\gamma'_{i'},\beta}(z) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}_{\gamma',\beta}(z)\right). \end{aligned}\right. \tag{4.3.63}$$

С другой стороны, принимая во внимание определение (4.3.60), для $\bar{f}_{\gamma',\beta}(z)$ и (4.3.62) имеем следующее разложение в степенной ряд:

$$\left\{\begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \frac{\zeta^\beta}{\beta!} \left(A(z)\,\Lambda(z)\, \bar{f}_{\gamma'_{i'},\beta}(z) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} \Lambda(z)\, A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma',\beta}(z)\right) \equiv \\ &\equiv A(z)\,\Lambda(z)\, \bar{f}^{\gamma'_{i'}}(\zeta, \Theta(\zeta, z, 0)) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} \Lambda(z)\, A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta, z, 0)). \end{aligned}\right. \tag{4.3.64}$$

В этом тождестве сумма $\sum_{\beta\in\mathbb{N}^m}$ представлена как сумма $\sum_{\beta\neq\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}}$ плюс κ' оставшихся членов, соответствующих $\beta=\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}$. Подставляем выражение, полученное в (4.3.63), имеем

$$\begin{cases}
\sum_{\beta\in\mathbb{N}^m}\frac{\zeta^\beta}{\beta!}\left(A(z)\,\Lambda(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}\Lambda(z)\,A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta}(z)\right)\equiv\\
\equiv\sum_{\beta\neq\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}}\frac{\zeta^\beta}{\beta!}\left(A(z)\,\Lambda(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}\Lambda(z)\,A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta}(z)\right)+\\
\qquad+\frac{\zeta^{\beta_1}}{\beta_1!}\left(A(z)\,\Lambda(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}\Lambda(z)\,A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta_1}(z)\right)+\\
\qquad+\cdots+\\
\qquad+\frac{\zeta^{\beta_{\kappa'}}}{\beta_{\kappa'}!}\left(A(z)\,\Lambda(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}\Lambda(z)\,A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}}(z)\right).
\end{cases}\tag{4.3.65}$$

Составим некоторую линейную комбинацию, которая даст следующее представление правой части (4.3.65):

$$\begin{cases}
A(z)\,\Lambda(z)\;\bar f^{\gamma'_{i'}}(\zeta,\Theta(\zeta,z,0))-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}\Lambda(z)\,A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f^{\gamma'}(\zeta,\Theta(\zeta,z,0))\equiv\\
\equiv\sum_{\beta\neq\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}}\frac{\zeta^\beta}{\beta!}\left[\Lambda^1_\beta(z)\left(A(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta_1}(z)\right)+\right.\\
\qquad+\cdots+\\
\qquad\left.+\Lambda^{\kappa'}_\beta(z)\left(A(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}}(z)\right)\right]+\\
\qquad+\frac{\zeta^{\beta_1}}{\beta_1!}\left[A(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_1}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta_1}(z)\right]+\\
\qquad+\cdots+\\
\qquad+\frac{\zeta^{\beta_{\kappa'}}}{\beta_{\kappa'}!}\left[A(z)\,\bar f_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}(z)-\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}}A'_{i',\gamma'}(z)\,\bar f_{\gamma',\beta_{\kappa'}}(z)\right].
\end{cases}\tag{4.3.66}$$

Если для $i' = 1, \ldots, n'_{j'}$ положить

$$\left\{ \begin{aligned} &\Pi_{i',1}(z) := A(z)\, \bar{f}_{\gamma'_{i'},\beta_1}(z) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}_{\gamma',\beta_1}(z), \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ &\Pi_{i',\kappa'}(z) := A(z)\, \bar{f}_{\gamma'_{i'},\beta_{\kappa'}}(z) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}_{\gamma',\beta_{\kappa'}}(z), \end{aligned} \right. \tag{4.3.67}$$

то можно переписать (4.3.66) как

$$\left\{ \begin{aligned} &A(z)\,\Lambda(z)\ \ \bar{f}^{\gamma'_{i'}}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} \Lambda(z)\, A'_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) \equiv \\ &\qquad \equiv \Pi_{i',1}(z) \left(\frac{\zeta^{\beta_1}}{\beta_1!}\,\Lambda(z) + \sum_{\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}} \Lambda^1_\beta(z)\, \frac{\zeta^\beta}{\beta!} \right) + \\ &\qquad\quad + \cdots + \\ &\qquad\quad + \Pi_{i',\kappa'}(z) \left(\frac{\zeta^{\beta_{\kappa'}}}{\beta_{\kappa'}!}\,\Lambda(z) + \sum_{\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_{\kappa'}} \Lambda^{\kappa'}_\beta(z)\, \frac{\zeta^\beta}{\beta!} \right) =: \\ &\qquad =: \Pi_{i',1}(z)\, G_1(z,\zeta) + \cdots + \Pi_{i',\kappa'}(z)\, G_{\kappa'}(z,\zeta). \end{aligned} \right. \tag{4.3.68}$$

Положим $C(z) := A(z)\,\Lambda(z)$, for $i' = 1, \ldots, n'_{j'}$ и $\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}$, пусть

$$B_{i',\gamma'} := \Lambda(z)\, A'_{i',\gamma'}(z). \tag{4.3.69}$$

В итоге получено, что при $i' = 1, \ldots, n'_{j'}$

$$\left\{ \begin{aligned} &C(z)\, \bar{f}^{\gamma'_{i'}}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} B_{i',\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv \Pi_{i',1}(z)\, G_1(z,\zeta) + \cdots + \Pi_{i',\kappa'}(z)\, G_{\kappa'}(z,\zeta). \end{aligned} \right. \tag{4.3.70}$$

Так как $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$, то имеем менее чем $n'_{j'}$ функций $G_{i'}(z,\zeta)$ в правой части (4.3.70), значит, существуют степенные ряды $\mu_1(z), \ldots, \mu_{n'_{j'}}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, не все равные нулю, такие что

$$\left\{ \begin{aligned} &0 \equiv \mu_1(z) \left(C(z)\, \bar{f}^{\gamma'_1}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} B_{1,\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) \right) + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + \mu_{n'_{j'}}(z) \left(C(z)\, \bar{f}^{\gamma'_{n'_{j'}}}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) - \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} B_{n'_{j'},\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) \right). \end{aligned} \right. \tag{4.3.71}$$

Наконец упростим немного это выражение, записав его в виде

$$\left\{ \begin{aligned} &0 \equiv \mu_1(z)\, C(z)\, \bar{f}^{\gamma'_1}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) + \cdots + \mu_{n'_{j'}}(z)\, C(z)\, \bar{f}^{\gamma'_{n'_{j'}}}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)) + \\ &\qquad + \sum_{\gamma' \neq \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n'_{j'}}} E_{\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta,z,0)), \end{aligned} \right. \tag{4.3.72}$$

где $E_{\gamma'}(z)$ — формальные степенные ряды по z. Теперь все готово, чтобы закончить доказательство леммы 4.3.53, а именно, придти к противоречию с предположением, сделанным в начале доказательства.

В самом деле, поскольку $C(z) \not\equiv 0$ по построению и так как существует наименьший степенной ряд $\mu_{i'}(z)$, не обращающийся в нуль тождественно, можно применить следующую элементарную лемму для того, чтобы заключить, что $(\zeta, 0)$ удовлетворяет нетривиальному тождеству для степенных рядов, что, очевидно, противоречит предположению о CR-трансверсальности.

Лемма 4.3.73. *Предположим, что имеется набор степенных рядов $E_{\gamma'}(z)$, проиндексированных с помощью $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$ и обладающий тем свойством, что существует наименьший мультииндекс $\gamma'_0 \in \mathbb{N}^{m'}$, $E_{\gamma'_0}(z) \not\equiv 0$, в $\mathbb{C}[\![z]\!]$. Предположим также, что $\bar{f}(\zeta, \Theta(\zeta, z, 0))$ удовлетворяет следующему тождеству для формальных степенных рядов:*

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} E_{\gamma'}(z)\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, \Theta(\zeta, z, 0)) \equiv 0 \tag{4.3.74}$$

в $\mathbb{C}[\![z, \zeta]\!]$. Тогда существует набор постоянных $F_{\gamma'} \in \mathbb{C}$, проиндексированных с помощью $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$, которые не все обращаются в нуль *и таковы, что*

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} F_{\gamma'}\, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, 0) \equiv 0 \tag{4.3.75}$$

в $\mathbb{C}[\![\zeta]\!]$. Другими словами, формальное отображение $\zeta \mapsto \bar{f}(\zeta, 0)$ не *трансверсально в смысле определения* (4.1.2) ***(5)***.

Доказательство. Положим $z = 0$ в (4.3.74). Если существует мультииндекс $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$ такой, что $E_{\gamma'}(0) \neq 0$, то все сделано. В противном случае, продифференцируем (4.3.74) по z и положим $z = 0$. Если существует целое k, $1 \leqslant k \leqslant m$, и мультииндекс $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$ такие, что $[\partial E_{\gamma'}(0)/\partial z_k](0) \neq 0$, то все сделано. В противном случае, снова дифференцируем по z и полагаем $z = 0$. Поскольку $E_{\gamma'_0}(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}[\![z]\!]$, то этот процесс завершится за конечное число шагов. □

Доказательство леммы 4.3.53 и части **(4)** теоремы 4.3.1 закончено. □

Докажем теперь часть **(5)** теоремы 4.3.1. Рассуждая, как для частей **(2)** и **(4)**, будем существенно рассуждать от противного, но очертим основную часть доказательства (лемма 4.3.79 ниже), поскольку оно весьма аналогично доказательству леммы 4.3.53.

По предположению об ℓ'_0-голоморфной невырожденности M' в точке p'_0, имеем

$$\mathrm{genMrk}\left(\nabla_{t'}\, \Theta'_{j',\gamma'}(t')\right)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} = n'. \tag{4.3.76}$$

Заметим, что в **(5)** сделано одно дополнительное предположение о том, что h трансверсально в точке p_0. Это гарантирует выполнение следующего утверждения.

Лемма 4.3.77. *Предположим, что h трансверсально в точке p_0 и что M' голоморфно невырождено в p_0. Тогда*

$$\mathrm{genMrk}\left(\nabla_{t'}\, \Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\right)_{1 \leqslant j' \leqslant d',\, \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} = n'. \tag{4.3.78}$$

Доказательство. Предположим от противного, что этот матричный ранг общего положения равен целому $\kappa' \leqslant n' - 1$. По предположению, существует $n' \times n'$ минор $d'(t')$ $n' \times \infty$ матрицы (4.3.76), который тождественно не обращается в нуль как степенной ряд от t'. Тогда $d'(h(t)) \equiv 0$, что противоречит трансверсальности h в точке p_0; это завершает доказательство. □

Для доказательства части **(5)** теоремы 4.3.1 нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 4.3.79. *Фиксируем j', $1 \leqslant j' \leqslant d'$. Пусть $n'_{j'}$ — целое, определенное как*

$$n'_{j'} := \mathrm{genMrk}\left(\nabla_{t'}\, \Theta'_{j',\gamma'}(t')\right)_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}}. \tag{4.3.80}$$

Предположим, что h CR-трансверсально в точке p_0. Тогда

$$\operatorname{genMrk}\left(\nabla_{t'} R_{j',\beta}(0,0,0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(t))\right)_{\beta\in\mathbb{N}^m} = n'_{j'}. \tag{4.3.81}$$

Как и в абзаце после формулировки леммы 4.3.53, легко проверяется, что из этой технической леммы вытекает часть **(5)** теоремы 4.3.1. Остается только доказать лемму 4.3.79.

Доказательство. Итак, зафиксируем j'. Снова рассуждаем от противного. Резюмируем доказательство. Предполагая, что порождающий ранг $n' \times \infty$ матрицы

$$\left(\nabla_{t'} R'_{j',\beta}(0,0,0,0,J^{|\beta|}\bar{h}(0) : h(t))_{\beta\in\mathbb{N}^m}\right) \tag{4.3.82}$$

равен целому $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$, и принимая во внимание то, что

$$\operatorname{genMrk}\left(\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\right)_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} = n'_{j'} \tag{4.3.83}$$

(небольшое обобщение леммы 4.3.77), поскольку h трансверсально в точке p_0, то выводим, что существуют κ' различных мультииндексов $\beta_1,\dots,\beta_{\kappa'} \in \mathbb{N}^m$ и не равный нулю тождественно степенной ряд $\Lambda(t) \not\equiv 0$, и для каждого мультииндекса $\beta \neq \beta_1,\dots,\beta_{\kappa'}$ степенные ряды $\Lambda^1_\beta(t),\dots,\Lambda^{\kappa'}_\beta(t)$ такие, что

$$\begin{cases} 0 \equiv \displaystyle\sum_{\gamma'\in\mathbb{N}^{m'}} \Big(\Lambda(t)\,\underline{\mathcal{L}}^{\beta}(\bar{f}^{\gamma'})(0) - \Lambda^1_\beta(t)\,\underline{\mathcal{L}}^{\beta_1}(\bar{f}^{\gamma'})(0) - \cdots - \\ \qquad\qquad -\Lambda^{\kappa'}_\beta(t)\,\underline{\mathcal{L}}^{\beta_{\kappa'}}(\bar{f}^{\gamma'})(0)\Big)\left[\nabla_{t'}\Theta'_{j',\gamma'}(h(t))\right]. \end{cases} \tag{4.3.84}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 4.3.53, выводим, что имеется $n'_{j'}$ различных мультииндексов $\gamma'_1,\dots,\gamma'_{j'} \in \mathbb{N}^{m'}$ такие, что существует не равный нулю тождественно степенной ряд $A(t) \not\equiv 0$ такой, что при $i' = 1,\dots,n'_{j'}$ и $\gamma' \neq \gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}$ можно найти степенные ряды $A'_{i',\gamma'}(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ такие, что можно построить степенные ряды $\Pi_{i',1}(t),\dots,\Pi_{i',\kappa'}(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ и степенные ряды $G_1(t,\zeta),\dots,G_{\kappa'}(t,\zeta) \in \mathbb{C}[\![t,\zeta]\!]$ такие, что при $i' = 1,\dots,n'_{j'}$

$$\begin{cases} A(t)\,\Lambda(t)\ \bar{f}^{\gamma'_{i'}}(\zeta,0) - \displaystyle\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} \Lambda(t)\,A'_{i',\gamma'}(t)\,\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0) \equiv \\ \qquad \equiv \Pi_{i',1}(t)\,G_1(t,\zeta) + \cdots + \Pi_{i',\kappa'}(t)\,G_{\kappa'}(t,\zeta). \end{cases} \tag{4.3.85}$$

Поскольку $\kappa' \leqslant n'_{j'} - 1$, то существуют степенные ряды $\mu_1(t),\dots,\mu_{n'_{j'}}(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$, не все равные нулю, такие что, полагая $C(t) := A(t)\,\Lambda(t)$ и $B_{i',\gamma'}(t) := \Lambda(t)\,A'_{i',\gamma'}(t)$, можно написать

$$\begin{cases} 0 \equiv \mu_1(t)\left(C(t)\,\bar{f}^{\gamma'_1}(\zeta,0) - \displaystyle\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} B_{1,\gamma'}(t)\,\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0)\right) + \\ \quad + \cdots + \\ \quad + \mu_{n'_{j'}}(t)\left(C(t)\,\bar{f}^{\gamma'_{n'_{j'}}}(\zeta,0) - \displaystyle\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} B_{n'_{j'},\gamma'}(t)\,\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0)\right). \end{cases} \tag{4.3.86}$$

Упрощая это выражение, записываем его в виде

$$\begin{cases} 0 \equiv \mu_1(t)\,C(t)\,\bar{f}^{\gamma'_1}(\zeta,0) + \cdots + \mu_{n'_{j'}}(t)\,C(t)\,\bar{f}^{\gamma'_{n'_{j'}}}(\zeta,0) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\gamma'\neq\gamma'_1,\dots,\gamma'_{n'_{j'}}} E_{\gamma'}(t)\,\bar{f}^{\gamma'}(\zeta,0), \end{cases} \tag{4.3.87}$$

и применяя те же рассуждения, что и в лемме 4.3.73, выводим, что существует нетривиальное соотношение для степенных рядов

$$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} F_{\gamma'} \, \bar{f}^{\gamma'}(\zeta, 0) \equiv 0, \tag{4.3.88}$$

что противоречит предположению об CR-трансверсальности. Это завершает доказательство леммы 4.3.79. □

Этим заканчивается и доказательство части **(5)**. Теорема 4.3.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витушкин А. Г.* Голоморфные отображения и геометрия поверхностей// Фундам. направления. Итоги науки и техн. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. — *7* — С. 167–226.
2. *Кружилин Н. Г.* Описание групп локальных автоморфизмов вещественных гиперповерхностей// Proc. Int. Congr. Math., Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986). Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. — С. 749–758.
3. *Пинчук С.* Теорема о граничной единственности для голоморфных функций многих комплексных переменных// Мат. заметки. — 1974. — *15*. — С. 205–212.
4. *Пинчук С.* О собственных голоморфных отображениях строго псевдовыпуклых областей// Сиб. мат. ж. — 1974. — *15*. — С. 909–917.
5. *Пинчук С.* Об аналитическом продолжении голоморфных отображений// Мат. сб. — 1975. — *98*, № 3. — С. 416–435, 495–496.
6. *Пинчук С.* Голоморфные отображения вещественно аналитических гиперповерхностей// Мат. сб. — 1978. — *105*, № 4. — С. 574–593.
7. *Хенкин Г. М., Туманов А. Е.* Локальная характеризация голоморфных автоморфизмов областей Зигеля// Функц. анал. и его прил. — 1983. — *17*, № 4. — С. 49–61.
8. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. — М.: Наука, 1985.
9. *Чирка Е. М.* Введение в геометрию CR-многообразий// Успехи мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 81–164.
10. *Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P.* Real submanifolds in complex space and their mappings// Princeton Math. Ser., *47*. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1999. — 404 с.
11. *Bellaïche A.* Sub-Riemannian Geometry// Progr. Math. — Basel: Birkhäuser, 1996. *144*. — С. 1–78.
12. *Cartan É.* Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I// Ann. Mat. — 1932. — *11*. — С. 17–90.
13. *Cartan É.* Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, II// Ann. Scuola norm. super. Pisa. — 1932. — *1*. — С. 333–354.
14. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds// Acta Math. — 1974. — *133*, № 2. — С. 219–271.
15. *Diederich K., Fornaess J. E.* Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$// Math. Ann. — 1988. — *282*, № 4. — С. 681–700.
16. *Diederich K., Webster S. M.* A reflection principle for degenerate real hypersurfaces// Duke Math. J. — 1980. — *47*, № 4. — С. 835–843.
17. *Fefferman C.* The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains// Invent. Math. — 1974. — *26*. — С. 1–65.
18. *Freeman M.* Real submanifolds with degenerate Levi form// Several complex variables/ Proc. Symp. Pure Math. — Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977. — *30*, Part 1. — С. 141–147.
19. *Han C. K.* Analyticity of CR equivalences between some real analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ with degenerate Levi-forms// Invent. Math. — 1983. — *73*, № 1. — С. 51–69.
20. *Hartogs F.* Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten// Math. Ann. — 1906. — *62*. — С. 1–88.
21. *Levi E. E.* Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse// Ann. Mat. — 1910. — *17*. — С. 61–87.
22. *Lewy H.* On the boundary behaviour of holomorphic mappings// Contrib. Centro Linceo Inter. Sc. Mat. e Loro Appl. No. 35, Accad. Naz. Lincei. — 1977. — С. 1–8.
23. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen// Math. Ann. — 1880. — *16*.— С. 441–528.

24. *Merker J.* On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets in the complex euclidean spaces of different dimensions// Bull. Soc. Math. France. — 2001. — *129*, № 4. — С. 547–591.
25. *Poincaré H.* Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme// Rend. Circ. Mat. Palermo, II. — 1907. — *23.* — С. 185–220.
26. *Segre B.* Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme// Rend. Acc. Lincei, VI, Ser. — 1931. — *13.* — С. 676–683.
27. *Segre B.* Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse// Rend. Semin. Mat. Roma, II (memorie), Ser. 7. — 1932. — № 2. — С. 59–107.
28. *Sharipov R., Sukhov A.* On CR mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — *348*, № 2. — С. 767–780.
29. *Stanton N.* Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces// Amer. J. Math. — 1996. — *118*, № 1. — С. 209–233.
30. *Stormark O.* Lie's structural approach to PDE systems/ Encyclopaedia of Math. and Its Appl. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, — *80.* — 572 с.
31. *Sukhov A.* On CR mappings of real quadric manifolds// Mich. Math. J. — 1994. — *41*, № 1. — С. 143–150.
32. *Sukhov A.* Segre varieties and Lie symmetries// Math. Z. — 2001. — *238*, № 3. — С. 483–492.
33. *Sussmann H. J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — *180.* — С. 171–188.
34. *Webster S. M.* On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces// Invent. Math. — 1977. — *43*, № 1. — С. 53–68.
35. *Webster S. M.* On the reflection principle in several complex variables// Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — *71*, № 1. — С. 26–28.
36. *Webster S. M.* Holomorphic mappings of domains with generic corners// Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — *86*, № 2. — С. 236–240.
37. *Webster S. M.* Real submanifolds of $\mathbb{C}^n$ and their complexifications// Topics in several complex variables, Mexico, 1983/ Res. Notes Math. — Boston, MA: Pitman, 1985. — *112.* С. 69–79.

Дж. Меркер
CNRS, Université de Provence, LATP, UMR 6632, CMI, 39 rue Joliot-Curie,
13453 Marseille Cedex 13, France
E-mail: `merker@cmi.univ-mrs.fr`

Современная математика и ее приложения. Том 6 (2003). С. 80–189

УДК 517.172.2, 517.550.2

ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2003 г. **Б. КУПЕ, А. СУХОВ**

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Алгебраический принцип отражения 82
1. Принципы отражения для некоторых классов CR-многообразий 83
2. Мероморфное продолжение на многообразия высокой коразмерности 98
3. Алгебраический принцип отражения и продолжение CR-отображений 104
Глава 2. Геометрический принцип отражения 127
4. Преобразования Ли, расслоения струй, продолжение 127
5. Уравнения Ли 131
6. Решение уравнений Ли 135
7. Многообразия Сегре, голоморфные отображения и симметрии 142
8. Преобразования Ли алгебраических систем 145
9. Интегрируемые голоморфные деформации алгебраических систем 148
10. Геометрия многообразий Сегре и голоморфное продолжение отображений 151
Глава 3. Гладкий принцип отражения 155
11. Регулярность аналитических дисков, приклеенных к тотально вещественному многообразию 155
12. Граничная регулярность голоморфных функций в клиньях 162
13. Теорема об отображении Фефферманa 165
Глава 4. Деформации гладких CR-структур 170
14. Конструкция Картана 172
15. Формы Картана для алгебраических гиперповерхностей 174
16. Голоморфные отображения алгебраических поверхностей 175
17. Голоморфные касательные поля 177
18. Сферический случай 181
19. Конструкция растяжения 182
20. Доказательство основной теоремы 184
Список литературы 185

ВВЕДЕНИЕ

Данная обзорная статья посвящена принципу отражения в случае многих комплексных переменных. В классической теории функций одной переменной следующий результат известен как принцип отражения Шварца: любое биголоморфное отображение ограниченных областей в $\mathbb{C}$ с вещественно–аналитическими границами продолжается до биголоморфного отображения окрестностей их замыканий. В случае, когда границы содержат некоторые дуги специального типа (окружности, отрезки и т.п.), можно получить дополнительную информацию о геометрических свойствах продолженного отображения. Комбинирование принципа отражения Шварца с теоремой униформизации Римана является очень полезным средством теории конформных отображений и ее приложений.

ISSN 1512–1712

Хорошо известно, что между геометрическим комплексным анализом в размерности > 1 и одномерной теорией существует фундаментальное различие, обусловленное отсутствием непосредственного аналога теоремы об униформизации Римана. Инвариантность сигнатуры формы Леви — первое (грубое) препятствие к существованию локального биголоморфного отображения вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Отражением этого обстоятельства является биголоморфная неэквивалентность бидиска и шара в $\mathbb{C}^2$, обнаруженная Пуанкаре в 1907 г. Существенно более тонкий вопрос состоит в решении задачи локальной биголоморфной эквивалентности гиперповерхностей с одной и той же формой Леви в каждой точке, т.е. для заданных вещественных гиперповерхностей X и Y в $\mathbb{C}^n$ требуется выяснить, существует ли отображение f, биголоморфное в окрестности U точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$, такое что $f(X \cap U) \subset Y$. В классической работе [50] Э. Картан доказал, что аналитическая невырожденная по Леви гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ допускает полное конечное семейство биголоморфных инвариантов, которое может быть построено и изучено дифференциально-геометрическими средствами. Биголоморфная эквивалентность такой гиперповерхности вещественной сфере влечет обращение в нуль некоторых из этих инвариантов; однако, в общем случае, эти гиперповерхности не эквивалентны биголоморфно вещественной сфере. Конструкция Картана была обобщена на случай произвольной размерности Н. Танакой [132] и С. С. Черном и Ю. Мозером [54]. В этих работах дано полное решение фундаментальной задачи о локальной биголоморфной эквивалентности гиперповерхностей, невырожденных по Леви.

Одновременно со статьей Чженя–Мозера Ч. Фефферман [83] доказал в 1974 г. следующий важный результат: *любое биголоморфное отображение ограниченных строго псевдовыпуклых областей в $\mathbb{C}^n$ продолжается до диффеоморфизма их замыканий*. В частности, теорема Феффермана сводит задачу о биголоморфной эквивалентности ограниченных гладких строго псевдовыпуклых гиперповерхностей к задаче об эквивалентности их границ, решенной Чженем и Мозером. Статьи Чженя–Мозера и Феффермана очень сильно повлияли на развитие геометрического комплексного анализа в областях пространства в $\mathbb{C}^n$ в течение последних 25 лет. Полное изложение соответствующих методов и результатов не является целью данной работы; в ней рассматриваются вопросы, связанные только с принципом отражения.

Вскоре после появления теоремы Феффермана, в работе [10] в 1975 г. С. Пинчук доказал следующий многомерный аналог принципа отражения Шварца: *любое биголоморфное отображение строго псевдовыпуклых областей с вещественно-аналитическими границами продолжается до биголоморфного отображения их замыканий*. Данное им доказательство интересно и важно само по себе; оно основано на естественном обобщении классической конструкции, приспособленной к нетривиальной внутренней геометрии вещественной гиперповерхности, индуцированной комплексной структурой объемлющего пространства. Позже аналогичный результат был получен Г. Леви в [102] и традиционно он называется принципом Леви–Пинчука. С тех пор конструкция Леви–Пинчука использовалась и обобщалась многими авторами; современное изложение недавних результатов, полученных в этом направлении, является также одной из целей данной статьи.

Следующий важный шаг был сделан С. Вебстером [136] в 1977. Им был доказан следующий неожиданный результат: *биголоморфное отображение ограниченных строго псевдовыпуклых областей в $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) с алгебраическими границами (т.е. с границами, заданными как множества нулей вещественных многочленов) продолжается до алгебраического отображения на $\mathbb{C}^n$*. Хотя этот результат выглядит как естественная версия теорем Феффермана и Леви–Пинчука в алгебраической категории, он имеет другую природу, поскольку не существует его одномерного аналога (конформное отображение области в $\mathbb{C}$, ограниченной эллипсом, на единичный диск не алгебраично). Метод, примененный С. Вебстером, также замечателен. Он основан на подходящей комплексификации границ, которая приводит к семейству комплексных гиперповерхностей (семейству Сегре), биголоморфно-инвариантно ассоциированному с границей. Поэтому теорема Вебстера может рассматриваться как алгебраическая версия классических теорем проективной геометрии о проективности отображения, переводящего любую прямую в прямую. Это является отражением глубокой связи между проективными связностями и биголоморфно-инвариантной геометрической структурой, определенной Картаном и Чженем на вещественной гиперповерхности.

Эти три результата (теорема Феффермана, принцип отражения Леви–Пинчука и теорема Вебстера) будут в центре внимания этой статьи. Будут рассмотрены недавние результаты, связанные с этими теоремами, и будут объяснены наиболее важные технические приемы. Систематически будут изложены и полные доказательства наиболее важных недавних результатов. Изложение замкнуто в себе, и для его понимания нужно иметь лишь общее представление о комплексном анализе многих переменных (в пределах классических книг [18, 27] и обзора [26]).

Современный принцип отражения связан со следующей задачей. Пусть X и Y — вещественные подмногообразия комплексных аффинных пространств (в общем случае разной размерности), удовлетворяющие некоторым условиям невырожденности, и пусть $f : X \longrightarrow Y$ — гладкое отображение Коши-Римана (CR отображение). Спрашивается, как свойства регулярности f связаны с классами регулярности многообразий X и Y? Классические результаты состоят в том, что если X и Y — квадрики, то f продолжается на все пространство как рациональное отображение (А. Пуанкаре, Г. Александер), если X и Y — алгебраические многообразия, то f алгебраично (С. Вебстер, 1977), а если X и Y вещественно-аналитичны, то f голоморфно продолжается в некоторую окрестность X. В этой статье обсуждаются недавние успехи в исследовании этих вопросов.

Существуют два принципиально разных подхода к принципу отражения в случае многих переменных: алгебраический и геометрический. Алгебраический метод (являющийся развитием принципа отражения Леви–Пинчука) позволяет оценивать степень трансцендентности отображения f над некоторыми функциональными полями (например, полями рациональных или мероморфных функций). Основная идея здесь состоит в изучении расширений некоторых промежуточных полей, происходящих из определяющих уравнений X и Y, и алгебры касательных векторных полей Коши–Римана. Алгебраический принцип отражения рассматривается в первой главе и в ней даются полные доказательства нескольких недавних результатов.

Геометрический принцип отражения (введенный С. Вебстером) основан на комплексификации вещественно-аналитической структуры многообразий X и Y. Это приводит к важному понятию семейства Сегре вещественно-аналитического (или алгебраического) многообразия. Оно образовано комплексными многообразиями (многообразиями Сегре), биголоморфно инвариантно ассоциированными с вещественно-аналитическим многообразием. Семейство Сегре вещественно-аналитического многообразия есть общее решение системы дифференциальных уравнений с частными производными, а биголоморфная инвариантность означает, что биголоморфные отображения многообразия являются точечными симметриями Ли этой системы. Это замечание позволяет применять методы геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными для изучения геометрии аналитических CR-структур. Во второй части статьи показывается, как теория аналитических CR-структур может быть систематически развита с точки зрения геометрии аналитических дифференциальных уравнений.

В первых двух главах рассматриваются алгебраические и аналитические CR-структуры. Однако принцип отражения также может быть использован для изучения гладких структур. В главе III дается полное доказательство теоремы об отображениях Феффермана. основанное на подходящей адаптации принципа отражения для гладких CR-многообразий. Это требует привлечения дополнительных средств комплексного анализа (оценок метрики Кобаяси–Роуйдена, метода растяжений и построения аналитических дисков). Это позволяет минимизировать применение средств теории дифференциальных уравнений с частными производными и свести задачу об эллиптической регулярности к элементарному случаю одномерного $\overline{\partial}$-оператора.

Существует другой подход, позволяющий свести изучение гладких CR-структур к алгебраическим или аналитическим. Это так называемый метод растяжения, предложенный С. Пинчуком, который можно рассматривать как подходящую деформацию гладких структур в алгебраические; обычно эта деформация рассматривается вместе с соответствующей деформацией заданного морфизма гладких структур. В главе IV будет дана иллюстрация этого метода при доказательстве топологической жесткости CR-отображений гладких гиперповерхностей. Метод растяжения позволяет свести задачу к алгебраическому случаю, в котором принцип отражения и, в частности, теорема Вебстера, имеют решающее значение.

Глава 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ

1. Принципы отражения для некоторых классов CR-многообразий

В этом параграфе рассматривается следующая общая задача. Пусть X — подмногообразие Коши–Римана в $\mathbb{C}^n$; все рассмотрения локальны, так что читатель может считать X ростком в точке $p \in X$, которая, как правило, будет началом координат. Пусть f — гладкая CR-функция на X. Допустим, что f удовлетворяет следующему соотношению на X:

$$f(Z) = H(Z, \overline{Z}, f(Z), \overline{f}(Z))$$

Свойства регулярности, накладываемые на функцию H, зависят от класса регулярности X. Таким образом, если X — квадратичное CR-многообразие, то функция H рациональна по Z и аналитична по $\overline{Z}$; если X алгебраично, то H алгебраично по Z и аналитично по $\overline{Z}$. В случае, когда X — вещественно-аналитическое CR-многообразие, предполагается, что H — степенной ряд по Z с гладкими анти-CR коэффициентами. Основная цель работы состоит в том, чтобы доказать, что в каждом из этих случаев f необходимо наследует соответствующее свойства: f продолжается на $\mathbb{C}^n$ как рациональная функция в квадратичном случае, как алгебраическая функция — в алгебраическом случае и, наконец, как голоморфная функция в окрестность X — в аналитическом случае. Можно рассматривать эти утверждения как непосредственные многомерные аналоги принципа отражения Шварца.

1.1. Принцип отражения для квадрик. В $\mathbb{C}^n$ рассмотрим координаты $Z = (z, w)$, где $z = (Z_1, \dots, Z_k) \in \mathbb{C}^k$, $w = (Z_{k+1}, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^d$, $k + d = n$, $k, d > 0$. Тогда вещественное многообразие X в $\mathbb{C}^n$, заданное уравнениями $w_j + \overline{w}_j = \langle L_j(z), \overline{z}\rangle$, $j = 1, \dots, d$, называется квадратичным многообразием Коши–Римана (кратко квадрикой) вещественной коразмерности d. Здесь $\langle z, \zeta\rangle = \sum_{j=1}^k z_j\zeta_j$, и каждое отображение $L_j : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ — эрмитов $\mathbb{C}$-линейный оператор. Перепишем эти уравнения в виде $w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle$, где $\langle L(z), \overline{z}\rangle = (\langle L_1(z), \overline{z}\rangle, \dots, \langle L_d(z), \overline{z}\rangle)$. Эта векторнозначная эрмитова форма называется формой Леви подмногообразия X. Свяжем с X выпуклый конус в $\mathbb{R}^d$ вида $\mathrm{Co}\{\langle L(z), \overline{z}\rangle, z \in \mathbb{C}^k\}$, где Co — линейная выпуклая оболочка. Этот конус называется конусом Леви подмногообразия X.

Следующее утверждение дает принцип отражения для квадратичных многообразий.

Теорема 1.1. *Предположим, что конус Леви подмногообразия X имеет непустую внутренность. Пусть h — голоморфная функция в окрестности D начала координат и пусть $R(Z, \overline{Z})$ — рациональная функция в Z, коэффициенты которой — антиголоморфные функции на D. Предположим также, что $p \in X \cap D$ — неособая точка для R и что в окрестности точки p в X имеем $h(Z) = R(Z, \overline{Z}), Z \in X \cap D$. Тогда h продолжается до комплексной рациональной функции на $\mathbb{C}^n$.*

Заметим, что точка p является неособой, если знаменатель отображения R не обращается в ней в нуль; значит, R вещественно-аналитично вблизи точки p.

Доказательство. Фиксируем $\zeta = (\tau, \omega) \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^d$ и рассмотрим комплексное аффинное подпространство в $\mathbb{C}^n$ вида $Q(\zeta) = \{Z \in \mathbb{C}^n : w + \overline{\omega} = \langle L(z), \overline{\tau}\rangle\}$, полученное комплексификацией определяющих уравнений рассматриваемой квадрики. Оно называется многообразием Сегре квадрики X, соответствующим точке ζ.

Так как $Z = (z, w)$, то

$$h(z, \langle L(z), \overline{z}\rangle - \overline{w}) = R(z, \langle L(z), \overline{z}\rangle - \overline{w}, \overline{Z}) \tag{1.1}$$

при $Z \in X \cap D$. Положим $\eta \in \mathbb{C}^k$, $\zeta = ('\zeta, ''\zeta) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^n$ и рассмотрим функции $h^*(\overline{\eta}, \overline{\zeta}) = h(\overline{\eta}, \langle L(\overline{\eta}), \overline{'\zeta}\rangle - \overline{''\zeta})$ и $R^*(\overline{\eta}, \overline{\zeta}) = R(\overline{\eta}, \langle L(\overline{\eta}), \overline{'\zeta}\rangle - \langle\overline{''\zeta}, \overline{\zeta}\rangle)$. Обе эти функции антиголоморфны в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^{n+k}$. Тогда (1.1) означает, что эти функции совпадают на открытом подмножестве многообразия $\hat{X} = \{(\eta, \zeta) \in \mathbb{C}^{n+k} : \eta = \overline{'\zeta}, \zeta \in X\}$. Ясно, что $\hat{X}$ —

подмногообразие общего положения в $\mathbb{C}^{n+k}$. Значит, по теореме единственности [11], получаем, что $h^* = R^*$ в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^{n+k}$. Следовательно, для каждой фиксированной ζ имеем $h(z, \langle L(z), \overline{'\zeta}\rangle - \overline{''\zeta}) = R(z, \langle L(z), \overline{'\zeta}\rangle - \overline{''\zeta}, \overline{\zeta})$. Так как $R(z, \overline{\zeta})$ — рациональная функция от z, то ограничение $h|Q(\zeta) = h(z, \langle L(z), \overline{'\zeta}\rangle - \overline{''\zeta})$ продолжается до комплексной рациональной функции от z для любого фиксированного ζ.

Для завершения доказательства нужно показать, что множество многообразий Сегре подмногообразия X содержит n-семейство линейно независимых прямых. Следующее рассуждение принадлежит Ф. Форстнеричу [88].

Выберем достаточно малую окрестность Ω начала координат вида $\Omega =' U \times'' U$, где $'U \subset \mathbb{C}^k$ и $''U \subset \mathbb{C}^d$. Фиксируем $'\zeta^* \in' U$. Многообразия Сегре $Q(('\zeta^*,''\zeta))$, $''\zeta \in'' U$ образуют семейство параллельных комплексных k-мерных аффинных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Эти плоскости заполняют некоторую полную окрестность начала координат в $\mathbb{C}^n$. Пусть $t \subset Q(('\zeta^*, 0))$ — произвольная комплексная кривая, содержащая начало координат. Тогда для любой точки $p \in \mathbb{C}^n$ из окрестности начала координат прямая $(p+t)$ содержится в некоторой поверхности $Q(('\zeta,''\zeta))$. Как было показано, ограничение $h|(p+t)$ продолжается до комплексного рационального отображения на каждой прямой $(p+t)$.

Рассмотрим базис $t_\nu('\zeta)$, $\nu = 1, \ldots, k$, комплексного линейного подпространства $Q(('\zeta, 0))$, где $t_\nu('\zeta) = (e_\nu| < L(e_\nu, \overline{'\zeta}) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, < L_1(e_\nu, \overline{'\zeta}, \ldots, < L_d(e_\nu), \overline{'\zeta} >)$ (векторы e_k образуют стандартный базис в $\mathbb{C}^k$). Покажем, что векторы $t_\nu('\zeta)$, $\nu = 1, \ldots, k$, $'\zeta \in' U$ порождают $\mathbb{C}^n$.

Предположим, что это не так.Тогда существует ненулевое $\alpha \in \mathbb{C}^n$ такое, что при всех $'\zeta$ и ν имеем $\langle \alpha, t_\nu('\zeta)\rangle = \alpha_\nu + \langle \sum_{j=1}^d \alpha_{k+j} L_j(e_\nu), \overline{'\zeta}\rangle = 0$ Отсюда следует, что $\alpha_\nu = 0$ и $\sum_{j=1}^d \alpha_{k+j} L_j(e_\nu) = 0$ для каждого ν. Значит, операторы L_j линейно зависимы. Это противоречит условию, что конус Леви подмногообразия X имеет непустую внутренность.

Таким образом, существуют линейно независимые комплексные прямые $t^1, \ldots, t^n$, проходящие через начало координат, такие что каждое ограничение $h|(p+t^j)$ продолжается до комплексной рациональной функции на $(p+t^j)$ для любого p из окрестности начала координат. После невырожденного линейного преобразования t^j становятся координатными линиями и, по теореме о сепаратной рациональности [47], h продолжается до рациональной функции на $\mathbb{C}^n$.

Следствие 1.2. *Пусть $p \in X$ и пусть $R(Z, \overline{Z})$ удовлетворяет условиям предыдущего предложения. Предположим, что R является CR-функцией в окрестности точки p на X. Тогда существует комплексная рациональная функция g, такая что $g|X = R$ в окрестности точки p.*

Доказательство. Поскольку R — вещественно-аналитическая CR-функция на X вблизи точки p, то она голоморфно продолжается на окрестность точки p и применимо предыдущее предложение.

1.2. Принцип отражения для алгебраических CR-многообразий

Алгебраические многообразия Коши–Римана. Напомним сначала некоторую стандартную терминологию и обозначения геометрической теории CR-структур, аналогичные используемым в предыдущем разделе.

Пусть X — вещественное алгебраическое или аналитическое подмногообразие в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и пусть p — точка X. Обозначим через $T_p(X)$ вещественное касательное пространство к X в точке $p \in X$, а через $H_p(X) = T_p(X) \cap iT_p(X)$ — голоморфное касательное пространство. Напомним, что X называется многообразием Коши–Римана, если комплексная размерность $H_p(X)$ не зависит от p. Это число называется CR-размерностью X и обозначается $\mathrm{CR}\dim X$. Обозначим через $H(X)$ голоморфное касательное расслоение над X. Как обычно, будем говорить, что X является порождающим в точке p, если локальные определяющие функции r_j, $j = 1, \ldots, d$, подмногообразия X вблизи p удовлетворяют условию $\partial r_1(p) \wedge \cdots \wedge \partial r_d(p) \neq 0$. В этом случае X есть многообразие Коши–Римана и его CR-размерность равна $n - d$.

Замкнутое множество X в $\mathbb{C}^n$ называется вещественно-алгебраическим множеством в $\mathbb{C}^n$, если $X = \{Z \in \mathbb{C}^n : P_j(Z, \overline{Z}) = 0, j = 1, \ldots, d\}$, где P_j — вещественные многочлены в $\mathbb{C}^n$. Пусть p — точка в $\mathbb{C}^n$. Будем говорить, что вещественно-алгебраическое множество X проходит через

p, если $X = \{Z \in \mathbb{C}^n : P_j(Z, \overline{Z}) = 0, j = 1, \dots, d\}$, где P_j — вещественные полиномы от $\mathbb{C}^n$, $P_j(p) = 0$. Если, кроме того, $dP_1 \wedge \dots \wedge dP_d \neq 0$ в точке p, то X называется вещественно-алгебраическим многообразием вблизи p. Если выполнено более сильное условие $\partial P_1(p) \wedge \dots \wedge \partial P_d(p) \neq 0$ (т.е. X — порождающее многообразие в окрестности U точки p), то X называется порождающим алгебраическим многообразием вблизи точки p.

Базовые кольца и расширения алгебраических полей. Обозначим через $\mathcal{O}_p$ кольцо ростков голоморфных функций в точке p в $\mathbb{C}^n$. Как обычно, $\mathcal{O}_p^N$ обозначает кольцо ростков голоморфных отображений из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^N$ в точке p. Пусть X — вещественно алгебраическое многообразие вблизи точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$, а Y — вещественное алгебраическое множество в $\mathbb{C}^{n'}$. Элемент ${}_p\mathbf{f}$ в $\mathcal{O}_p^{n'}$ есть росток голоморфного отображения из X в Y, если существуют связная окрестность U точки p в $\mathbb{C}^n$ и представляющее отображение f ростка ${}_p\mathbf{f}$ голоморфное в U, такое что $f(X \cap U)$ содержится в Y. Обозначим через $\mathcal{M}_p$ кольцо ростков мероморфных функций в точке p, являющееся факторполем $\mathcal{O}_p$. Пусть $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}$ — кольцо ростков комплекснозначных вещественно-аналитических функций в точке p, а $\mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}$ — его фактор в точке p.

Пусть $\mathcal{A}_p$ — кольцо (или поле) ростков функций некоторого класса в точке p; будем обозначать через $\mathcal{A}_p(X)$ кольцо (поле) ограничений ростков $\mathcal{A}_p$ на X. Например, будем рассматривать кольцо $\mathcal{O}_p(X)$ (соответственно, поле $\mathcal{M}_p(X)$) ограничений ростков голоморфных (соответственно, мероморфных) функций на X в точке p. Так как X — порождающее многообразие, то по теореме единственности, $\mathcal{O}_p(X)$ (соответственно, $\mathcal{M}_p(X)$) естественно изоморфно $\mathcal{O}_p$ (соответственно, $\mathcal{M}_p$) с помощью отображения ограничения. В вещественно аналитической категории ситуация иная. Напомним, что коммутативное кольцо A называется целым, если $1 \neq 0$ и не существует делителей нуля в этом кольце. Обозначим через $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$ целое кольцо ростков вещественно–аналитических $\mathbb{C}$-значных функций на X в точке p. Отметим, что естественный эпиморфизм ограничения $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$ имеет нетривиальное ядро — идеал $I(X)$ ростков в $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}$, обращающихся в нуль на X; следовательно, $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$ изоморфно $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}/I(X)$. Под $\mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}(X)$ подразумевается факторполе $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$. В дальнейшем индекс p будет опускаться, если $p = 0$.

Напомним некоторые стандартные алгебраические конструкции и обозначения. Для любого целого кольца K обозначим через $K[X_1, \dots, X_m]$ кольцо многочленов от m переменных с коэффициентами в K. Пусть F — факторполе K; будем рассматривать также и поле $F(X_1, \dots, X_m)$ рациональных функций над F, являющееся факторполем поля $K[X_1, \dots, X_n]$. В случае, когда $K = \mathbb{C}$, будем отождествлять их с кольцом $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ (соответственно, с полем $\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_m)$) полиномиальных (соответственно, рациональных) функций на $\mathbb{C}^m$. Для упрощения обозначений не будем различать рациональные функции и их ростки или их ограничения на M.

Пусть $K \subset R$ — расширение кольца, а $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — элементы R. Обозначим через $K[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ наименьшее подкольцо в R, содержащее K и α_j. Аналогично, если поле E является расширением поля F, а $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — элементы E, то $F(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ обозначает поле рациональных дробей от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ с коэффициентами в F, т.е. расширение F, конечно порожденное элементами α_j. Более общо, пусть $F \subset G$ — расширение поля, а S подмножество G. Обозначим через $F(S)$ пересечение всех подполей G, содержащих F и S; очевидно, что это поле. Если $E = F(S)$, то будем говорить, что E порождено подмножеством S над F. Расширение поля называется алгебраическим, если каждый элемент $x \in E$ алгебраичен над F, т.е. существует ненулевой полином $P \in F[X]$, такой что $P(x) = 0$. Конечное множество $x_1, \dots, x_n \in E$ называется алгебраически зависимым над F, если существует ненулевой многочлен $P \in F[X_1, \dots, X_n]$ такой, что $P(x_1, \dots, x_n) = 0$.

В дальнейшем будем использовать поле ростков мероморфных функций в $p \in \mathbb{C}^n$, которое алгебраично над полем $\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n)$ рациональных функций в $\mathbb{C}^n$; обозначим его через Alg_p и назовем его элементы ростками алгебраических функций над $\mathbb{C}^n$. Как и выше, обозначим через $\mathrm{Alg}_p(X)$ поле ограничений ростков алгебраических функций на X; так как многообразие X — порождающее, то поля Alg_p и $\mathrm{Alg}_p(X)$ изоморфны. Будем говорить, что функция f, голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}^n$ или алгебраическая, если существует точка $p \in D$, такая что росток ${}_p\mathbf{f}$, определенный функцией f в точке p, принадлежит Alg_p.

Пусть $\overline{\mathcal{O}}_p$ — кольцо ростков антиголоморфных функций в точке p, а $\overline{\mathcal{O}}_p(X)$ — целое кольцо ограничений на X ростков из $\overline{\mathcal{O}}_p$; обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_p$ (соответственно, через $\overline{\mathcal{M}}_p(X)$) факторполе поля $\overline{\mathcal{O}}_p$ (соответственно, $\overline{\mathcal{O}}_p(X)$). Рассмотрим поле $\mathcal{M}_p^*(X)$, определенное как расширение поля $\overline{\mathcal{M}}_p(X) \subset \mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}(X)$, конечно порожденного элементами $Z_1, \ldots, Z_n$. Таким образом, поле $\mathcal{M}_p^*(X)$ состоит из дробей $\mathbf{P}/\mathbf{Q}$, где $\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{p}_j(\overline{Z})\mathbf{S}_j(Z)$, $\mathbf{p}_j \in \overline{\mathcal{O}}_p(X)$, и $\mathbf{S}_j$ — (ростки) мономов $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in M$; аналогично, это верно для $\mathbf{Q} \neq 0$ в $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$. Имеется другая интерпретация этого поля. Рассмотрим целое кольцо $\overline{\mathcal{O}}_p(X)[X_1, \ldots, X_n]$ многочленов с коэффициентами в $\overline{\mathcal{O}}_p(X)$ и гомоморфизм подстановки

$$\psi : \overline{\mathcal{O}}_p(X)[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X),$$
$$\psi : X_j \mapsto Z_j$$

Его образ $\psi(\overline{\mathcal{O}}_p(X)[X_1, \ldots, X_n]$ — целое кольцо, обозначаемое через $\overline{\mathcal{O}}_p(X)[Z_1, \ldots, Z_n]$. Тогда его факторполе $\overline{\mathcal{M}}_p(X)[Z_1, \ldots, Z_n]$ есть подполе поля $\mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}(X)$ и совпадает с $\mathcal{M}_p^*(X)$.

Основы геометрии многообразий Сегре и трансверсальность по Сегре. Начнем с понятия многообразия Сегре, ассоциированного с вещественно-алгебраическим (или, более общо, вещественно-аналитическим) подмногообразием и заданной точкой в $\mathbb{C}^n$. Пусть X — вещественно-аналитическое подмногообразие в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, являющееся порождающим в точке $p \in X$. Обозначим через $\Delta^n(p, \varepsilon)$ полидиск в $\mathbb{C}^n$ с центром в p и радиусом $\varepsilon > 0$. Пусть $r_j(Z, \overline{Z})$, $j = 1, \ldots, d,$ — вещественно–аналитические определяющие функции X в окрестности замыкания $\Delta^n(p, \varepsilon)$. Можно выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, что комплексификации $r_j(Z, \overline{\zeta})$ (полученные подстановкой $\overline{\zeta}$ вместо $\overline{Z}$ в степенных рядах для r_j в $\Delta^n(p, \varepsilon)$) определены при всех $(Z, \zeta) \in \Delta^n(p, \varepsilon)$. Фиксируем $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ так, что для каждого $\zeta \in \Delta^n(p, \varepsilon_0)$ множество $Q_X(\zeta) = \{Z \in \Delta^n(p, \varepsilon) : r_j(Z, \overline{\zeta}) = 0, j = 1, \ldots, d\}$ есть связное гладкое комплексное $(n-d)$-мерное подмногообразие в $\Delta^n(p, \varepsilon)$, которое назовем многообразием Сегре подмногообразия X, ассоциированным с ζ.

Следующее предложение содержит основные свойства многообразий Сегре.

Предложение 1.3. (i) *Определение многообразия Сегре $Q_X(\zeta)$ не зависит от выбора локальных определяющих уравнений для X;*
(ii) *$Z \in Q_X(\zeta)$ в том и только том случае, если $\zeta \in Q_X(Z)$;*
(iii) *$Z \in Q_X(Z)$ в том и только том случае, если $Z \in X$;*
(iv) *понятие многообразия Сегре инвариантно относительно биголоморфных отображений: если $f : X \longrightarrow Y$ — росток биголоморфного отображения вещественно-аналитических многообразий, то $f(Q_X(\zeta)) = Q_Y(f(\zeta))$.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве легкого упражнения.

Трансверсальность по Сегре и минимальность. В дальнейшем рассматриваются CR-многообразия с достаточно «богатыми» семействами Сегре. Здесь рассматриваются два принципиально различных класса этих многообразий. Пусть X — вещественно-аналитическое порождающее многообразие в окрестности точки $p \in \mathbb{C}^n$. Рассмотрим многообразия Сегре для X, проходящие через точку p, т.е. многообразия $Q_X(\zeta)$, $\zeta \in Q_X(p)$. Рассмотрим их касательные пространства $H_p(Q_X(\zeta))$; свойство, нужное для них, состоит в порождении $\mathbb{C}^n$. Как обычно, $\operatorname{span}(E)$ обозначает наименьшее $\mathbb{C}$–подпространство в $\mathbb{C}^n$, содержащее множество E. Значит, желаемое свойство трансверсальности выглядит как $\operatorname{span}(\cup_{\zeta \in Q_X(p)} H_p(Q_X(\zeta))) = \mathbb{C}^n$.

К сожалению, такое простое определение не вполне удовлетворительно по следующему соображению. Предыдущее условие эквивалентно существованию n точек $\zeta^k \in Q_X(p)$, $k = 1, \ldots, n$ (не обязательно различных), таких что

$$\operatorname{span}(\cup_{k=1}^n H_p(Q_X(\zeta^k))) = \mathbb{C}^n. \tag{1.2}$$

Тем не менее, определение многообразия Сегре зависит от радиуса ε полидиска сходимости определяющих степенных рядов. Поэтому возникает естественный вопрос: если зафиксировать $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$, то можно ли найти точки $\tau^k \in Q_M(p) \cap \Delta^n(p, \tau)$, удовлетворяющие (1.2)? Ответ утвердительный, если изначальное $\varepsilon > 0$ выбрано достаточно малым.

Пусть X — вещественно–аналитическое порождающее CR-многообразие коразмерности d вблизи точки p в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение $s_p : Q(p) \cap U \longrightarrow \mathrm{Gr}(n-d, n)$ (грассманиан $n-d$ подпространств в $\mathbb{C}^n$ $s_p : \zeta \mapsto H_p(Q(\zeta))$ для каждого $\zeta \in Q(p) \cap U$. Обозначим через $\Sigma_p(U)$ соответствие инцидентности, ассоциированное с образом $s_p(Q(p) \cap U) \subset \mathrm{Gr}(n-d, n)$; по определению, $\Sigma_p(U)$ есть подмножество в $\mathrm{Gr}(n-d, n) \times \mathbb{C}^n$ вида $\Sigma_p(X) = \{(\Lambda, \nu) \in \mathrm{Gr}(n-d, n) \times \mathbb{C}^n : \Lambda \in s_p(Q(p) \cap U), \nu \in \Lambda\}$, снабженное двумя каноническими проекциями $\pi_{\mathrm{Gr}} : \Sigma_p(U) \longrightarrow \mathrm{Gr}(n-d, n)$ и $\pi_{\mathbb{C}^n} : \Sigma_p(U) \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

Определение 1.4. Многообразие X удовлетворяет условию трансверсальности Сегре (условию S–трансверсальности), или просто X S-трансверсально в точке p, если существует база (U_a) окрестностей точки p в $\mathbb{C}^n$, такая что $\mathrm{span}(\pi_{\mathbb{C}^n}(\Sigma_p(U_a)) = \mathbb{C}^n$ для каждого U_a $(n > 1)$.

Предложение 1.5. *Пусть X — вещественно-аналитическое порождающее многообразие вблизи начала координат в $\mathbb{C}^n$ и пусть $\varepsilon, \varepsilon_0$ выбраны достаточно малыми. Допустим, что $U = \Delta^n(0, \varepsilon_0)$ удовлетворяет определению S-трансверсальности. Тогда выполняются следующие свойства.*

(i) *Существует n точек ζ^j на $Q_X(0) \cap U$ (не обязательно различных), удовлетворяющих условию $\mathrm{span}(\cup_j H_0(Q_X(\zeta^j))) = \mathbb{C}^n$.*

(ii) *Существует связная окрестность $V \subset U$ начала координат со следующим свойством: для каждого $\zeta \in X \cap V$ существует открытое плотное подмножество W_ζ комплексного многообразия $Q_X(\zeta)^n := Q_X(\zeta) \times \cdots \times Q_X(\zeta)$ в $\mathbb{C}^{n^2}$ вблизи начала координат, такое что для каждого $(\eta^1, \ldots, \eta^n) \in W_\zeta$ $\mathrm{span}(U_j H_\zeta(Q_X(\eta^j))) = \mathbb{C}^n$.*

(iii) *Многообразие X S-трансверсально в любой точке $X \cap V$, так что трансверсальность по Сегре — открытое (и, очевидно, плотное) условие.*

Пример. Важный класс трансверсальных по Сегре многообразий образуют порождающие многообразия с непустыми конусами Леви. Для того, чтобы доказать это, рассмотрим алгебраическое многообразие X, являющееся порождающим в окрестности точки $p \in \mathbb{C}^n$ с определяющими вещественными многочленами P_j, $j = 1, \ldots, d$. Если формы Леви многочленов P_j линейно независимы, то X S-трансверсально в точке p. В частности, если X — алгебраическая гиперповерхность, форма Леви которой тождественно не обращается в нуль в p, то X S–трансверсально в точке p. Ввиду важности этого примера, приведем некоторые подробности. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$, а X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие коразмерности $d \geqslant 1$ в Ω, определенное, как обычно, уравнениями $X = \{Z \in \Omega : P_j(Z, \overline{Z}) = 0, j = 1, \ldots, d\}$, где P_j — вещественные полиномы и $\partial P_1 \wedge \cdots \wedge \partial P_d \neq 0$. Обозначим через $H_p(P_j, u, v)$ значение формы Леви функции P_j на векторах u, v в точке $p \in X$:

$$H_p(P_j, u, v) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 P_j}{\partial Z_\nu \partial \overline{z}_\mu}(p) u_\nu \overline{v}_\mu. \tag{1.3}$$

Конус Леви в точке $p \in X$ многообразия X — это выпуклая оболочка множества $\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d : \alpha_j = H_p(\rho_j, u, u), u \in H_p(X)\}$. Если конус Леви многообразия X имеет непустую внутренность в $\mathbb{R}^d$, то будем говорить, что X допускает невырожденный конус Леви в точке p. Очевидно, что это условие не зависит от выбора определяющих функций и инвариантно относительно замен координат.

Векторнозначная эрмитова форма $L(p, u, v) = (H_p(P_1, u, v), \ldots, H_p(P_d, u, v))$ называется *формой Леви многообразия X в точке p*. Как и в случае квадрики, операторы Леви $L_j(p) : H_p(X) \longrightarrow H_p(X)$ можно определить равенством $H_p(P_j, u, v) = \langle L_j(p)(u), \overline{v} \rangle$. В случае, когда $p = 0$, просто обозначаем операторы Леви через L_j, а форму Леви $L(0, u, v)$ — через $\langle L(u), \overline{v} \rangle$.

После локально биголоморфной алгебраической замены координат можно считать, что X задано в окрестности начала координат уравнениями $w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z} \rangle + o(|Z|^2)$, в которых используется то же обозначение $Z = (z, w)$, что и в предыдущем пункте. Таким образом, X аппроксимируется с точностью до алгебраических членов третьего порядка квадрикой, конус Леви которой имеет непустую внутренность.

Фиксируем $\theta \in \mathbb{C}^k$ и рассмотрим d–параметрическое семейство многообразий Сегре $Q(\theta, \tau)$, $\tau \in \mathbb{C}^d$.

Лемма 1.6. *Существует окрестность U начала координат в $\mathbb{C}^n$ вида $U = U_z \times U_w$, $U_z \subset \mathbb{C}^k$, $U_w \subset \mathbb{C}^d$, такая что для любого фиксированного $\theta \in U_z$ семейство многообразий Сегре $Q(\theta, \tau)$, $\tau \in U_w$ обладает следующими свойствами:*

(i) *для любого $\tau', \tau'' \in U_w$ пересечение $Q(\theta, \tau') \cap Q(\theta, \tau'')$ пусто;*
(ii) *для любого $Z = (z, w) \in U$ существует единственное $\tau \in U_w$, такое что $(z, w) \in Q(\theta, \tau)$.*

Доказательство. Имеем $Q(\theta, \tau) = \{Z \in U : \overline{\tau} = S(Z, \overline{\theta})\}$, где S — аналитическая функция, а U — окрестность начала координат. Теперь если $Z = (z, w)$ принадлежит $Q(\theta, \tau') \cap Q(\theta, \tau'')$, то $\overline{\tau}' = S(Z, \overline{\theta}) = \overline{\tau}''$; отсюда следует (i). При $Z = (z, w)$ положим $\tau = \overline{S}(Z, \overline{\theta})$. Тогда $Z \in Q(\theta, \tau)$ и получаем (ii).

По теореме о неявной функции

$$Q(\theta, \tau) \cap U = \{(z, w) \in U : w = R(z, \overline{\theta}, \overline{\tau})\},$$

где R — алгебраическая функция, такая что $Q(\theta, \tau)$ есть график над координатной плоскостью $\mathbb{C}^k_z = \mathbb{C}^k_{z_1 \dots z_k}$. Пусть $X^j_{(\theta, \tau)}$ — биголоморфные векторные поля на $Q(\theta, \tau)$, определенные естественным поднятием на $Q(\theta, \tau)$ координатных векторных полей $\partial/\partial z_j$, $j = 1, \dots, k$ в $\mathbb{C}^k_{z_1 \dots z_k}$. Из леммы 1.6 следует, что для любой точки $(z, w) \in U$ существует единственное многообразие $Q(\theta, \tau)$, $\tau = \overline{S}(Z, \overline{\theta})$, проходящее через (z, w). Следовательно, можно рассмотреть голоморфные векторные поля $Y^j_{(\theta)}(Z)$ (зависящие от параметра θ) в U, определенные следующим образом: для заданного Z в U и фиксированной θ полагаем $\tau = \overline{S}(Z, \overline{\theta})$ и $Y^j_\theta(Z) = X^j_{(\theta, \tau)}(Z)$. Их интегральные кривые, очевидно, есть линейные сечения многообразий Сегре параллельными плоскостями, а потому образуют семейства комплексно-алгебраических кривых в $\mathbb{C}^n$, алгебраически зависящих от параметров.

Лемма 1.7. *Множество векторов $Y^j_{(\theta)}(0)$, $j = 1, \dots, k$, где θ меняется в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^k$, порождает $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Если $(\theta, \tau) \in Q(0)$, то из $\rho_j(\theta, \tau, 0, 0) = 0$, $j = 1, \dots, d$, по теореме о неявной функции, следует, что $\tau = o(|\theta|)$. Пусть теперь $0 \in Q(\theta, \tau)$ (напомним, что это эквивалентно соотношению $(\theta, \tau) \in Q(0)$). По теореме о неявной функции, получаем, что $Q(\theta, \tau) = \{(z, w) : w + \overline{\tau} = \phi(z, \overline{\theta}, w, \overline{\tau}\} = \{(z, w) : w + \overline{\tau} = \psi(z, \overline{\theta}, \overline{\tau})\}$. Так как $\tau = o(|\theta|)$, то $\psi = \langle L(z), \overline{\theta} + o(|\theta|)\rangle + o(|\theta|) + o(|z|)$. Следовательно, $Y^j_{(\theta)}(0) = (e_j | \langle L(e_j), \overline{\theta}\rangle + o(|\theta|)) = (0, \dots, 1, \dots, 0, \langle L(e_j), \overline{\theta}\rangle + o(|\theta|))$, где 1 стоит на j-м месте, а e_j, $j = 1, \dots, k$, — стандартный базис $\mathbb{C}^k$.

Предположим, что существует $\alpha \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, такое что $\langle \alpha, Y^j_{(\theta)}(0)\rangle = 0$, $j = 1, \dots, k$, при любом $\theta \in U_z$. Тогда

$$\langle \alpha, \overline{Y}^j_{(\theta)}(0)\rangle = \alpha_j + \sum_{\nu=1}^{d} (\langle L_\nu(e_j), \overline{\theta}\rangle + o(|\theta|))\alpha_{k+\nu} =$$

$$= \alpha_j + \sum_{\nu=1}^{d} \alpha_{k+\nu} \langle L_\nu(e_j), \overline{\theta}\rangle + o(|\theta|) = \alpha_j + (\sum_{\nu=1}^{d} \alpha_{k+\nu} L_\nu(e_j), \overline{\theta} > + o(|\theta|) = 0$$

как функция от $\theta \in \mathbb{C}^k$. Значит, $\alpha_j = 0$ и $\sum_{\nu=1}^{d} \alpha_{k+\nu} L_\nu(e_j) = 0$ при $j = 1, \dots, k$. Это означает, что операторы Леви подмногообразия X линейно зависимы, получаем противоречие.

В качестве следствия выводим, что *любая неплоская по Леви гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) трансверсальна по Сегре.*

Пример. Объясним теперь, как проверяется условие трансверсальности по Сегре для алгебраического жесткого многообразия, проходящего через начало координат, т.е. для случая, когда X определяется уравнениями $w_j + \overline{w}_j = R_j(z, \overline{z})$, где R_j — вещественные многочлены, $R_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, d$; положим $R = (R_1, \dots, R_d)$. Для заданных точек $(a, b) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ и $(\zeta, \omega) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ соотношение $(\zeta, \omega) \in Q_(a, b)$ эквивалентно соотношению $\omega = R(\zeta, \overline{a}) - \overline{b}$. Для такого (ζ, ω) касательное пространство $T_{(a,b)}(Q_X(\zeta, \omega))$ порождается векторами $v_k(a, \overline{\zeta}) =$

$(0,\dots,1,\dots,0,(\partial R_1/\partial Z_k)(a,\overline{\zeta}),\dots,(\partial R_d/\partial Z_k)(a,\overline{\zeta}))$, $k=1,\dots,n-d$. Для каждого a рассмотрим подмножество $E_a=\{v_k(a,\overline{\zeta}) : \zeta\in\mathbb{C}^{n-d}, k=1,\dots,d\}$. Многообразие X удовлетворяет условию трансверсальности Сегре в точке a в том и только том случае, если E_a порождает $\mathbb{C}^n$. Тогда существуют $k_1,\dots,k_n$ (не обязательно различные) и $\eta_1,\dots\eta_n$ такие, что определитель $\Delta(a,\eta)=\det[v_{k_1}(a,\overline{\eta}_1),\dots,v_{k_n}(a,\overline{\eta}_n)]$ отличен от нуля. Это означает, что многочлен от $(a,\overline{\zeta}_1,\dots,\overline{\zeta}_n)$ определяемый функцией $\Delta(a,\zeta)$, тождественно не обращается в нуль на $\mathbb{C}^{n-d}(a)\times\mathbb{C}^{n-d}(\zeta_1)\times\dots\times\mathbb{C}^{n-d}(\zeta_n)$. В частности, в произвольной окрестности начала координат существуют точки $a,\zeta_1,\dots,\zeta_n$, такие что касательные пространства $Q_X((\zeta j,R(\zeta,\overline{a}))$ в точке $(a,0)$ порождают $\mathbb{C}^n$. Отметим также специальный случай, когда $\mathrm{CR}\dim X=1$ $(d=n-1)$. В этом случае X_a образовано векторами $v(a,\overline{\zeta})=(1,(\partial R_1/\partial Z)(a,\overline{\zeta}),\dots,(\partial R_{n-}/\partial Z)(a,\overline{\zeta}))$, а X удовлетворяет условию S-трансверсальности в точке a в том и только том случае, если многочлен $\Delta(a,\zeta)$ тождественно не обращается в нуль в ζ.

Пример. Пусть X в $\mathbb{C}^3$ задано уравнениями $\operatorname{Re}w_1=(z\overline{z})^m$ и $\operatorname{Re}w_2=(z\overline{z})^n$ с целыми $1\leqslant m<n$. Тогда X S-трансверсально в каждой точке открытого плотного подмножества в X.

Если X не жестко, то можно представить его в нормальной форме Блума–Грэхема [45] и проверить трансверсальность по Сегре. Из предыдущего ясно, что трансверсальность по Сегре вещественного алгебраического многообразия есть условие «общего типа» в том смысле, что оно устойчиво при малых возмущениях коэффициентов определяющих многочленов и что любое вещественно-алгебраическое порождающее многообразие X с $\mathrm{CR}\dim X>0$ может быть сделано трансверсальным по Сегре с помощью произвольно малого возмущения коэффициентов.

Напомним следующее важное понятие минимальности многообразия Коши–Римана [21].

Определение 1.8. Многообразие Коши–Римана M называется минимальным, если оно не содержит никакого (ростка) вещественного подмногообразия строго меньшей вещественной размерности и той же CR-размерности, что и $\mathrm{CR}\dim M$.

Это понятие играет фундаментальную роль при анализе CR-многообразий в силу замечательной теоремы продолжения Туманова, которая будет обсуждаться позднее. Поскольку понятие минимальности достаточно просто и геометрично, то интересно сравнить его с понятием трансверсальности по Сегре.

Следующий пример в некотором смысле оправдывает введение понятия S-трансверсальности.

Пример. Пусть многообразие X в $\mathbb{C}^4$ задается уравнением $\operatorname{Re}w_1=(z\overline{z})$, $\operatorname{Re}w_2=(z\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)$ и $\operatorname{Re}w_3=z^3\overline{z}^3$; тогда X имеет конечный тип в смысле Блума–Грэхема, но X не трансверсально по Сегре ни в какой точке.

Естественный вопрос состоит в том, чтобы выяснить, следует ли из трансверсальности по Сегре условие конечности типа. Ответ положителен. Отсылаем читателя к работе Дж. Меркера [108] по поводу его детального обсуждения. Отметим, что класс минимальных не трансверсальных по Сегре многообразий весьма мал в том смысле, что такое многообразие становится трансверсальным по Сегре после произвольно малого общего возмущения. В этом смысле понятия минимальности и трансверсальности по Сегре «почти» совпадают.

Слоения Сегре и принцип отражения. Покажем, прежде всего, что семейство Сегре S-трансверсального многообразия достаточно богато.

Определение 1.9. Пусть p — точка в $\mathbb{C}^n$.

(a) Алгебраическое слоение (коразмерности 1) в точке p — это пара (Φ,U), где U — окрестность точки p, а $\Phi:\Delta^n\longrightarrow U$, $\Phi(0)=p$ — алгебраическое биголоморфное отображение.
(b) Положим $\Delta^n=\Delta\times\Delta^{n-1}$ и для любого $s\in\Delta^{n-1}$ назовем слоем образ $\Phi(\Delta\times\{s\})$.
(c) Пусть $(\Phi_i,U_,)$, $i=1,\dots,n$, — n алгебраических слоений в точке p. Скажем, что они трансверсальны в точке p, если касательные векторы к их слоям в точке p порождают $\mathbb{C}^n$.

Определение 1.10. Пусть X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие вблизи точки $p\in X$ в $\mathbb{C}^n$; фиксируем ε_0 и ε, как в определении многообразий Сегре. Алгебраическое слоение (Φ,U) в точке p называется слоением Сегре, если $U\subset\Delta^n(p,\varepsilon)$, и каждый слой содержится в многообразии Сегре $Q_X(\zeta)$, $\zeta\in\Delta^n(p,\varepsilon_0)$. Говорят, что X допускает n трансверсальных слоений Сегре в точке p, если существует n слоений Сегре, трансверсальных в точке p.

Важным моментом излагаемого подхода является то, что любое S-трансверсальное многообразие допускает n трансверсальных слоений Сегре.

Лемма 1.11. *Пусть X — алгебраическое S-трансверсальное порождающее многообразие в точке p в $\mathbb{C}^n$. Тогда X допускает n трансверсальных слоений Сегре в точке p.*

Не нарушая общности, предположим. что $p = 0$. Пусть $(z, w) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ — координаты в $\mathbb{C}^n$, где $n - d = \operatorname{CR}\dim X$; после линейной замены координат имеем $T_0(X) = \{\operatorname{Re} w = 0\}$. По теореме о неявной функции, в окрестности начала координат имеем $X = \{w + \overline{w} = H(z, \overline{z}, \overline{w})\}$, где $\mathbb{C}^d$-значная функция H, такая что $H(0) = 0$, представляет росток в $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}$ и алгебраична над полем $\mathbb{C}(z, \overline{z}, \overline{w})$. Для заданной точки $(\zeta, \omega) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ соответствующее многообразие Сегре определяется как $Q_X(\zeta, \omega) = \{(z, w) : w + \overline{\omega} = H(z, \overline{\zeta}, \overline{\omega})\}$. Для фиксированного ζ заменим ω на $\overline{\tau}$ и рассмотрим семейство $\{Q_X^{\zeta}(\tau)\}_{\tau} = \{Q_X(\zeta, \overline{\tau})\}_{\tau}$, параметризованное с помощью τ, в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^d$. По теореме о неявной функции, $Q_X^{\zeta}(\tau) = \{(z, w) : F_{\zeta}(z, w) = \tau\}$, где $F_{\zeta} \in \mathcal{O}^d \cap \operatorname{Alg}^d$. Значит, отображение $\Phi : (z, w) \mapsto (\hat{z}, \hat{w}) = (z, F_{\zeta}(z, w))$ алгебраично и биголоморфно в окрестности начала координат; оно переводит семейство $\{Q_X^{\zeta}(\tau)\}$ многообразий Сегре в семейство плоскостей $\Pi_{\tau} = \{(\hat{z}, \hat{w}) : \hat{w} = \tau\}$.

Пусть $v \in T_0(Q(\zeta, \omega))$ — касательный вектор. Фиксируя ζ и меняя $\tau = \overline{\omega}$, рассмотрим определенное выше отображение Φ. В координатах $(\hat{z}, \hat{w})$ определим линейное слоение $\hat{F}$ на комплексные прямые в направлении образа $\Phi_0^*(v)$ вектора v при касательном отображении. Тогда $F = \Phi^{-1} \circ \hat{F}$ — алгебраическое слоение Сегре окрестности нуля со слоем, проходящим через нуль в данном направлении v. Поскольку X S-трансверсально, то $\operatorname{span}(\pi_{\mathbb{C}^n} \Sigma_0)) = \mathbb{C}^n$, и получаем существование n трансверсальных слоений Сегре в точке нуль.

Принцип отражения. Наша основная цель состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1.12. *Пусть X — алгебраическое S-трансверсальное порождающее многообразие в окрестности точки p в $\mathbb{C}^n$. Пусть ${}_p\mathbf{R} \in \mathcal{M}_p^*(X)$ — росток вида ${}_p\mathbf{R} = {}_p\mathbf{P}/{}_p\mathbf{Q}$, где ${}_p\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{s}_j(\overline{Z})_p\mathbf{S}_j(Z)$, ${}_p\mathbf{Q} = \sum_k {}_p\mathbf{t}_j(\overline{Z})_p\mathbf{T}_j(Z)$, ${}_p\mathbf{s}_j$, ${}_p\mathbf{t}_k \in \overline{\mathcal{O}}_p(M), {}_p\mathbf{S}_j$, ${}_p\mathbf{T}_k$ — ростки мономов по $Z_1, \ldots, Z_n$. Фиксируем связную окрестность U точки p такую, что X S-трансверсально в каждой точке $X \cap U$. Пусть s_j, t_k и S_j, T_k — соответствующие представляющие функции, определенные на U. Фиксируем точку $a \in U \cap X$ такую, что $\Sigma_j t_j(\overline{a}) T_j(a) \neq 0$. Рассмотрим вещественно-аналитическую вблизи точки a функцию R, определенную по формуле*

$$R = \frac{\sum_j s_j(\overline{Z}) S_j(Z))}{\sum_k t_k(\overline{Z}) T_k(Z)}. \tag{1.4}$$

Пусть ${}_a\mathbf{R} \in \mathcal{O}_a^{\mathbb{R}}(X)$ — росток, определенный функцией R в точке a.

Если ${}_a\mathbf{R} \in \mathcal{O}_a(X)$, то ${}_a\mathbf{R} \in \operatorname{Alg}_a(X)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если g — голоморфная функция и ограничения $g|X$ и $R|X$ совпадают в окрестности точки a в X, то g есть представляющее отображение ростка Alg_a, т.е. g продолжается до алгебраической функции на $\mathbb{C}^n$. Не нарушая общности, считаем, что $a = 0$. Пусть d — коразмерность X и пусть $Z = (z, w) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ — координаты в $\mathbb{C}^n$. По теореме о неявной функции, можно определить X в окрестности начала координат уравнением $w = H(z, \overline{z}, \overline{w})$, где векторнозначная функция H вещественно-аналитична в окрестности нуля и вещественно-алгебраична, т.е. H представляет росток пересечения $(\mathcal{O}^{\mathbb{R}})^d$ с алгебраическим замыканием $\mathbb{C}(z, \overline{z}, \overline{w})$ в $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$. Так как g и R совпадают на X, то

$$g(z, H(z, \overline{z}, \overline{w})) = R(z, H(z, \overline{z}, \overline{w}), \overline{z}, \overline{w}) \tag{1.5}$$

при $(z, w) \in X$ в окрестности начала координат.

Рассмотрим максимальное тотально вещественное многообразие $\hat{X}$, определенное в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^{2n-d}$ как $\hat{X} = \{(\eta, \zeta, \tau) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d : \eta = \overline{\zeta}, (\zeta, \tau) \in X\}$. Введем также две антиголоморфные функции $g^*(\overline{\eta}, \overline{\zeta}, \overline{\tau}) = g(\overline{\eta}, H(\overline{\eta}, \overline{\zeta}, \overline{\eta}))$ и $R^*(\overline{\eta}, \overline{\zeta}, \overline{\tau}) = R(\overline{\eta}, H(\overline{\eta}, \overline{\zeta}, \overline{\tau}), \overline{\zeta}, \overline{\tau})$. Тогда из (1.5) следует, что g^* и R^* совпадают на $\hat{X}$; значит, по теореме единственности, они совпадают в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^{2n-d}$. Для любой фиксированной (ζ,τ) функция $R(\bullet,\overline{\zeta},\overline{\tau})$ рациональна в силу представления (1.4), а функция $H(\bullet,\overline{\zeta},\overline{\tau})$ алгебраична; таким образом, имея ввиду (1.5) получаем, что функция $z\mapsto g(z,H(z,\overline{\zeta},\overline{\tau}))$ алгебраична. В окрестности начала координат многообразие Сегре $Q_X(\zeta,\tau)$, ассоциированное с (ζ,τ), задается формулой $Q_X(\zeta,\tau)=\{(z,w)\in\mathbb{C}^n : w=H(z,\overline{\zeta},\overline{w})\}$, и, следовательно, ограничение g на любую поверхность Сегре алгебраично. Значит, g продолжается до алгебраической функции на $\mathbb{C}^n$ по теореме о сепаратной алгебраичности.

Теорема о сепаратной алгебраичности. Важный технический момент в доказательстве предыдущей теоремы — это «искривленная» версия классического принципа сепаратной алгебраичности [47]. Рассмотрим n семейств алгебраических кривых в области $D\subset\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} &z_1=R_1^{(m)}(t_m,c_1^{(m)},\dots,c_{n-1}^{(m)}),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &z_n=R_n^{(m)}(t_m,c_1^{(m)},\dots,c_{n-1}^{(m)}) \end{aligned}$$

Здесь $R_j^{(m)}$ — функции, алгебраические по всем переменным; $m(=1,\dots,n)$ — номер семейства, t_m — параметр на каждой кривой m-го семейства, а $c_j^{(m)}$ — параметры.

Определение 1.13. Семейство алгебраических кривых, введенное выше, называется неособым в D, если кривые этого семейства заполняют целиком область D, а отображение $R^{(m)}$: $(t_m,c_1^{(m)},\dots,c_{n-1}^{(m)})\longrightarrow z$ есть локальный диффеоморфизм. Говорят, что неособое семейство находится в общем положении, если для любой точки $z\in D$ касательные векторы ко всем кривым в точке p порождают $\mathbb{C}^n$.

Теорема 1.14. *Пусть $D\subset\mathbb{C}^n$ — область, снабженная n алгебраическими семействами в общем положении. Если голоморфная в D функция f алгебраична вдоль каждой кривой любого семейства, то она продолжается до алгебраической функции на $\mathbb{C}^n$.*

Рассмотрим только m–семейство алгебраических кривых, удовлетворяющих условию теоремы. Ввиду неособости этого семейства, можно трактовать t_m, $c_1^{(m)},\dots,c_{n-1}^{(m)}$ как новые локальные координаты в области D. Определим преобразования $\varphi_m(\tau)$ как сдвиг вдоль t_m-оси в новых координатах:

$$\phi^{(m)}: t_m,c_1^{(m)},\dots,c_{n-1}^{(m)}\longrightarrow t_m+\tau,c_1^{(m)},\dots,c_{n-1}^{(m)}. \tag{1.6}$$

Преобразования $\phi^{(m)}(\tau)$ образуют локальную однопараметрическую группу преобразований, заданную векторным полем, порожденным касательными векторами к кривым m-го семейства. В исходных переменных преобразования (1.6) задаются n алгебраическими функциями от $n+1$ аргумента

$$\begin{aligned} &\hat{z}_1=\phi_1^{(m)}(\tau,z_1,\dots,z_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\hat{z}_n=\phi_n^{(m)}(\tau,z_1,\dots,z_n). \end{aligned}$$

Алгебраичность функций $\phi_i^{(m)}$ есть следствие алгебраичности кривых m-го семейства и их алгебраической зависимости от параметров.

Используя преобразования $z\mapsto\hat{z}=\phi^{(m)}(\tau)z$ вида (1.6), введем новые локальные координаты $t_1,\dots,t_n$ в D следующим образом:

$$z=\phi^{(n)}(t_n)\circ\dots\circ\phi^{(1)}(t_1)z^0, \tag{1.7}$$

где z^0 — фиксированная точка (такая, что координаты, введенные выше, определены в окрестности этой точки). Преобразование переменных $z_1,\dots,z_n$ к переменным $t_1,\dots,t_n$ и его обратное алгебраичны.

Заметим, что часть координатных линий локальных координат $t_1,\ldots,t_n$ совпадает с кривыми рассмотренного выше семейства. Пусть $f(t_1,\ldots,t_n)$ — представление функции $f(z)$ из теоремы в локальных координатах $t_1,\ldots,t_n$. Тогда функции

$$\begin{aligned} &f_1 = f(t,0,\ldots,0)\\ &f_2 = f(t_1,t,0,\ldots,0)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_n = f(t_1,\ldots,t_{n-1},t) \end{aligned}$$

алгебраичны по t и голоморфны по остальным аргументам. Для доказательства теоремы достаточно установить алгебраичность этих функций относительно всех их аргументов. Будем рассуждать по индукции по i (число определенных выше функций f_i). Сначала, однако, нужно провести некоторую подготовительную работу.

Пусть $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — целозначный мультииндекс и пусть $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$. Обозначим через $f_\alpha(z)$ производную

$$f_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_n^{\alpha_n}}. \tag{1.8}$$

Лемма 1.15. *При выполнении условий теоремы, можно найти подобласть $D'\subset D$, такую что все производные $f_\alpha(z)$ алгебраичны по t_m после ограничения на любую кривую каждого семейства.*

Доказательство. Рассматриваемое семейство кривых неособо, а потому преобразование переменных $z_1,\ldots,z_n$ к переменным $t_m, c_1^{(m)},\ldots,c_{n-1}^{(m)}$ и обратное к нему реализуются алгебраическими функциями. Поэтому вместо (1.8) можно рассмотреть производные

$$f_\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}} f}{\partial (c_1^{(m)})^{\alpha_1}\ldots\partial (c_{n-1}^{(m)})^{\alpha_{n-1}}} \tag{1.9}$$

и доказать их алгебраичность по t_m. Дифференцирование по t_m и преобразование к исходным переменным $z_1,\ldots,z_n$ не нарушает их алгебраичность.

Для доказательства алгебраичности производных (1.9) будем использовать алгебраичность функции $f(t_m, c_1^{(m)},\ldots,c_{n-1}^{(m)})$ по t_m при фиксированных значениях остальных аргументов. Это означает, что имеется неприводимый многочлен $P(f,t)$ в кольце $\mathbb{C}[f,t]$ комплексных многочленов от переменных f,t, такой что $f(t_m)$ удовлетворяет уравнению

$$P(f(t_m),t_m) = 0. \tag{1.10}$$

Заметим, что коэффициенты многочлена (1.10) и даже их степени по f и t зависят от параметров $(c_1^{(m)},\ldots,c_{n-1}^{(m)})$. Определим следующие подмножества в области значений этих параметров:

$$C_{qk} = \{(c_1^{(m)},\ldots,c_{n-1}^{(m)}) : \deg_f P = q, \deg_t P = k\}. \tag{1.11}$$

Объединение конечного числа C_{qk} совпадает со всей областью значений параметров $c_1^{(m)},\ldots,c_{n-1}^{(m)}$. Это позволяет использовать теорему Бэра для доказательства того, что замыкание, по крайней мере, одного из множеств C_{qk} имеет непустую внутренность. Выберем область D', естественная проекция которой лежит во внутренности такого C_{qk}. Выберем, кроме того, в области D' кривую из рассматриваемого семейства с параметрами из C_{qk}. Не нарушая общности, можно считать. что эта кривая соответствует параметрам $c_i^{(m)} = 0$ и что точка $t_m = 0$ этой кривой лежит в D'. Для многочлена (1.10) имеем

$$P(f,t) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{k} a_{ij} f^i t^j. \tag{1.12}$$

Нормализуем многочлен (1.12), полагая равными 1 некоторые коэффициенты a_{rs}. Этот многочлен обращается в нуль при подстановке $f = f(t_m)$ и t_m. Рассмотрим функции

$$\phi_{ij} = f(t)^i t^j, \tag{1.13}$$

где $i = 0, \ldots, q$ и $j = 0, \ldots, k$. Они алгебраичны по t и голоморфно зависят от параметров $c_i^{(m)}$. Если эти параметры обращаются в нуль, то эти функции (по t) линейно зависимы. Тем не менее, исключение функции ϕ_{rs} с $a_{rs} = 1$ делает остальные функции линейно независимыми. В противном случае, будем иметь другой ненулевой многочлен $\hat{P}(f,t)$ вида (1.12), для которого выполняется равенство (1.10). Так как P неприводим, имеем $\hat{P}(f,t) = u(P(f,t)$, где $u \in \mathbb{C}[f,t]$. Но $\deg_f \hat{P} \leqslant \deg_f P$ и $\deg_t \hat{P} \leqslant \deg_t P$, а значит, $u \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[f,t]$. Сравнивая коэффициенты $\hat{a}_{rs} = 0$ и $a_{rs} = 1$, находим, что равенство $\hat{P}(f,t) = uP(f,t)$ не может выполняться при $u \neq 0$.

Обозначим через X множество всех функций в (1.13), а через X' — это же множество без ϕ_{rs}. Рассмотрим разложения Тейлора функций (1.13) по t. Их коэффициенты рядов можно трактовать как бесконечномерные векторы (столбцы) линейного пространства $\mathbb{C}^\infty$. Такие векторы (соответствующие функциям из X') образуют $\infty \times N$-матрицу A, где N обозначает число элементов X'. Столбцы A линейно независимы, если $c_i^{(m)} = 0$. Поэтому существует $N \times N$-подматрица $\hat{A}$ матрицы A с ненулевым определителем. Этот минор голоморфен по $c_i^{(m)}$ и потому не обращается в нуль в окрестности начала координат. Следовательно, столбцы A и функции в X' линейно независимы при $c_i^{(m)}$ в окрестности начала координат.

Добавим последний столбец B, соответствующий функции ϕ_{rs}, к матрице A, и рассмотрим миноры порядка $(N+1)$ расширенной матрицы $(A|B)$. Они обращаются в нуль при $c_i^{(m)} = 0$ и для параметров из плотного множества C_{qk}. Значит, они тождественно обращаются в нуль. Поэтому функции в X' линейно независимы, а функции в X линейно зависимы при каждом $c_i^{(m)}$ из окрестности начала координат. Таким образом, ϕ_{rs} есть линейная комбинация функций из X'. С точностью до знака ее коэффициенты совпадают с коэффициентами многочлена (1.12). Они определены единственным образом в силу линейной системы с расширенной матрицей $(\hat{A}|B)$, где N-й столбец $\hat{B}$ образован элементами B, лежащими в строках определяющих $\hat{A}$. Таким образом, коэффициенты многочлена (1.12) голоморфны по $c_i^{(m)}$ в окрестности начала координат. Теперь можно продифференцировать уравнение (1.10) по $c_i^{(m)}$ и на этом закончить рассуждение.

Рассмотрим функции f_j. Можно стянуть D до $D' \subset D$ в соответствии с леммой 1.15. Кроме того, можно считать, что степени многочленов (1.10) по f и t_m зависят только от m в D'. Выберем точку z^0 из (1.7) в области D'. Это определит функции f_j. Для функции f_1 лемма 1.6 дает алгебраичность по t производных

$$\frac{\partial^s f}{\partial t_2^s}|_{(t,0,\ldots,0)}. \tag{1.14}$$

Производные (1.6) совпадают с производными функции f_2 при $t = 0$. В самом деле,

$$\frac{\partial^s f_2(t_1, t, 0, \ldots, 0)}{\partial t^s}|_{t=0} = \frac{\partial^s f}{\partial t_2^s}|_{(t,0,\ldots,0)}. \tag{1.15}$$

Лемма 1.16. *Алгебраическая функция $f(t)$ определяется единственным образом ее значением и значениями конечного числа производных в регулярной точке. Если эти значения зависят алгебраически от параметра τ, то $f = f(t,\tau)$ есть алгебраическая функция от двух переменных t и τ.*

Предположим, что определяющий неприводимый многочлен алгебраической функции $f(t)$ имеет вид (1.12). Повторяя предыдущее рассуждение, снова рассмотрим функции (1.13) и их разложения Тейлора в регулярной точке (можно предполагать, что $t = 0$). Коэффициенты этих разложений алгебраически зависят от f и ее производных в точке $t = 0$. Рассматривая, как и выше, невырожденную подматрицу $\hat{A}$ и соответствующую линейную систему, применим правило Крамера и получим коэффициенты многочлена (1.12). При выполнении второго предположения рассматриваемого утверждения они алгебраичны по τ. По принципу сепаратной алгебраичности [47] завершаем рассуждение.

Применим лемму 1.16 к функции $f_2(t_1, t, 0, \dots, 0)$, принимая во внимание алгебраичность по t и алгебраичность производных (1.15) по t_1. Тогда функция $f_2(t_1, t, 0, \dots, 0)$ алгебраична по обеим переменным. В этом состоит первый шаг индукции.

Предположим, что функции $f_1, \dots, f_m$ алгебраичны. Из леммы 1.15 следует, что производные

$$\frac{\partial^s f}{\partial t_{m+1}^s}|_{(t_1,\dots,t_m,0,\dots,0)} = \frac{\partial^s f_{m+1}(t_1, \dots, t_{m+1}, 0, \dots, 0)}{\partial t_{m+1}^s}|_{t_{m+1}=0} \tag{1.16}$$

также алгебраичны. Лемма 1.16 и алгебраичность производных (1.16) по $t_1, \dots, t_m$ дают индуктивный переход от m к $m+1$. Это завершает доказательство теоремы.

1.2. Отражение и мероморфное продолжение гиперповерхностей. Расширения промежуточных полей. Пусть X — вещественно-аналитическое минимальное (в смысле Туманова [21]) порождающее подмногообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что X определяется векторнозначной функцией $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$, вещественно-аналитической в окрестности p, и что $\partial\rho_1 \wedge \dots \wedge \partial\rho_d \neq 0$ в точке p. Обозначим через $Z = (z, w)$, $z = (Z_1, \dots, Z_{n-d})$, и $w = (Z_{n-d+1}, \dots, Z_n)$ координаты в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что $\det(\frac{\partial\rho}{\partial w})(p) \neq 0$. Рассмотрим операторы Коши–Римана в окрестности точки p в X, заданные как

$$\mathcal{L}_k = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - \sum_{j=1}^{d} a_{jk}(Z)\frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \tag{1.17}$$

с $(a_{jk}) = (\partial\rho/\partial w)^{-1}(\partial\rho/\partial w)$.

Обозначим через $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$ кольцо ростков в точке p вещественно-аналитических функций на X, а через ${}_pC^\infty_{CR}(X)$ (соответственно, через ${}_pC^\infty_{\overline{CR}}(X)$) — кольцо ростков в точке p C^∞-гладких CR (соответственно, анти-CR) функций на X. Если Ω — открытое подмножество в X, то обозначим через $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}(\Omega)$ (соответственно, через $C^\infty_{\overline{CR}}(\Omega)$) кольцо вещественно-аналитических (соответственно анти-CR) функций на Ω.

Обозначим через $\mathcal{P}_p(X)$ множество линейных комбинаций элементов из ${}_pC^\infty_{\overline{CR}}(X)$ с коэффициентами в $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$. Стоит подчеркнуть, что значения вещественно-аналитических коэффициентов и анти-CR функций всегда рассматриваются в одной и той же точке X, а значит, элементы $\mathcal{P}_p(X)$ — это ростки функций на X в точке p.

Заметим, что $\mathcal{P}_p(X)$ есть $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$-модуль и что $\mathcal{L}_j({}_p\mathbf{h}) \in \mathcal{P}_p(X)$ для каждого ростка ${}_p\mathbf{h} \in \mathcal{P}_p(X)$. Нам понадобится следующее свойство кольца $\mathcal{P}_p(X)$.

Лемма 1.17. *Пусть X — вещественно-аналитическое порождающее многообразие в $\mathbb{C}^n$, минимальное в точке $p \in X$, а ${}_p\mathbf{h} \in \mathcal{P}_p(X)$. Пусть U — связная окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$, h — представитель ${}_p\mathbf{h}$ на $X \cap U$ и $E = \{Z \in X \cap U : h = 0\}$. Предположим, что пересечение E с каждой окрестностью точки p имеет положительную меру (относительно X). Тогда ${}_p\mathbf{h} = 0$.*

Доказательство. Из [21] следует, что существуют достаточно малые связные окрестности $U' \subset U$ точки p и открытый выпуклый конус $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}^d$, такие что каждая CR-функция на $X \cap U$ голоморфно продолжается на клин $\mathcal{W} = \{Z \in U' | r(Z) \in \mathcal{V}\}$.

Рассмотрим слоение $X \cap U'$ на вещественно-аналитические максимально тотально вещественные многообразия $\{M_t\}_t$ (т.е. $\dim M_t = n$ при любом t), где параметр t принадлежит области $D \subset \mathbb{R}^{n-d}$. По теореме Фубини–Тонелли, $F := \{t \in D : \mathrm{mes}(M_t \cap E) > 0\}$ есть подмножество в D положительной меры. Пусть $t \in F$ и $h = \sum_{\nu=1}^s a_\nu g_\nu$ с $a_\nu \in \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)$, $g_\nu \in C^\infty_{\overline{CR}}(X \cap U)$.

Каждое ограничение $a_\nu | M_t$ антиголоморфно продолжается на окрестность $\tilde{M}_t$ и каждая g_ν антиголоморфно продолжается на $\mathcal{W}$. Следовательно, $h|M_t$ совпадает с некоторой функцией $\hat{h}$, антиголоморфной в $\mathcal{W}$, и гладко вплоть до $M_t \subset X \cap U$. По теореме о граничной единственности [11], $\hat{h} \equiv 0$, а потому $h|M_t = 0$. Значит, $\cup_{t \in F} M_t \subset E$.

Теперь можно рассмотреть другое слоение $\{M'_t\}$ для $X \cap U$, такое что каждое $M'_t \cap E$ имеет положительную меру и повторить предыдущие рассуждения для доказательства $E = X \cap U$.

В частности, справедливо

Следствие 1.18. *Если X минимально в точке p, то $\mathcal{P}_p(X)$ — целое кольцо.*

Это последнее следствие позволяет ввести фактор-поле кольца $\mathcal{P}_p(X)$, которое обозначим через $\mathcal{M}^*_p(X)$. Пусть U — окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$. Представитель h для ${}_p\mathbf{h}$ из факторполя $\mathcal{M}^*_p(X)$ в $X \cap U$ есть частное φ/ψ, где φ и ψ представители ростков из $\mathcal{P}_p(X)$ в $X \cap U$. Пусть $\mathrm{Sing}_h := \{Z \in X \cap U : \psi = 0\}$ — особое множество h. Если U достаточно мало, то оно является замкнутым подмножеством в $X \cap U$ меры 0, а h — гладкая функция на $(X \cap U) \setminus \mathrm{Sing}_h$. Назовем точки множества $(X \cap U) \setminus \mathrm{Sing}_h$ регулярными точками h.

Определение 1.19. В дальнейшем будем говорить, что подмножество $E \subset (X \cap U)$, проходящее через точку p, является $\mathcal{P}$-множеством, если существует ненулевой росток ${}_p\mathbf{g} \in \mathcal{P}_p(X)$. допускающий представитель g на XU такой, что $E = \{Z \in X \cap U : g = 0\}$.

Отражение и мероморфное продолжение. Следующее утверждение является основным нашим аналитическим средством.

Предложение 1.20. *Пусть X — вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, минимальная в точке $p \in X$. Пусть ${}_p\mathbf{h} \in \mathcal{M}^*(X)$ и пусть h — ее представитель в окрестности U точки p. Предположим, что существует $\mathcal{P}$-множество $E \subset (X \cap U)$, содержащее* Sing_h *такое, что h есть CR-функция на $(X \cap U) \setminus E$. Тогда ${}_p\mathbf{h} \in \mathcal{M}_p(X)$, т.е. ${}_p\mathbf{h}$ мероморфна.*

Доказательство. В дальнейшем будем обозначать через $\Delta^k(a, r)$ полидиск в $\mathbb{C}^k$ с центром в точке a радиуса r (пишем $\Delta(a, r)$, если $k = 1$, и $\Delta^k(r)$, если $a = 0$). Можно считать, что $p = 0$, U — окрестность начала координат в $\mathbb{C}^n$ вида $U = \Delta^n(r)$, $r > 0$. Во избежание сложных обозначений ниже, когда это необходимо, заменим r на меньшее положительное число и сохраним при этом то же обозначение r. Предположим также, что $X \cap U$ определено как $\{Z \in U : \rho(Z) = 0\}$, где ρ — вещественно-аналитическая функция, такая что $\partial\rho/\partial Z_n \neq 0$ на U, а X минимально в каждой точке $X \cap U$.

В силу леммы 1.17, можно считать, что $E \cap U$ имеет меру 0 (относительно X). Будем использовать обозначение $Z = (z, w)$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $w \in \mathbb{C}$, для координат в $\mathbb{C}^n$ и считать, что каждое $z \in \Delta^{n-1}(r)$ есть линейный диск

$$l(z) := \{z\} \times \Delta(r), \tag{1.18}$$

трансверсально пересекающий X в каждой точке.

Если $V \subset U$ — окрестность в $\mathbb{C}^n$ точки $a \in (X \cap U)$, то V^+ (соответственно, V^-) обозначает одностороннюю окрестность $\{Z \in V : \rho(Z) > 0\}$ (соответственно, $\{Z \in V : \rho(Z) < 0\}$).

В соответствии с [21, 130], можно считать, что выполняются следующие свойства:

(a) существует фундаментальная система окрестностей $\{U_s\}_s$, $\{V_s\}_s$ начала координат с $V_s \subset U_s$, такая что для любого s каждая функция, голоморфная в U_s^+, голоморфно продолжается на V_s;

(b) для любой точки $a \in X \cap U$ существуют фундаментальные системы окрестностей $\{{}_aV_s\}_s$, $\{{}_aU_s\}_s$, ${}_aV_s \subset {}_aU_s$ точки a, такие что для любого s каждая функция, голоморфная в ${}_aU_s^+$, голоморфно продолжается на ${}_aV_s$, или для любого s каждая функция, голоморфная в ${}_aU_s^-$, голоморфно продолжается на ${}_aV_s$.

Пусть $h = \varphi/\psi$, где функции φ и ψ имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu g_\nu \tag{1.19}$$

с $a_\nu \in \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)$, $g_\nu \in C^\infty_{\overline{CR}}(X \cap U)$. Проведем доказательство в три шага.

Шаг 1. Отражение. Начнем со следующего следствия принципа отражения Шварца.

Лемма 1.21. *Пусть ϕ^- — функция, голоморфная в U^- и непрерывная вплоть до $X \cap U$. Тогда существует вещественно-аналитическая функция ϕ^+ на U^+, непрерывная вплоть до $X \cap U$, такая что для каждого $z \in \Delta_{n-1}(r)$ ограничение $\phi^+|l(z) \cap U^+$ антиголоморфно и $\phi^-|(X \cap U) = \phi^+|X(\cap U)$.*

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует, что существует вещественно-аналитическое отображение $\Phi(z, w) : U \longrightarrow \Delta$, обладающее следующим свойством: для каждого $z \in \Delta^{n-1}(r)$ существует $\delta_z > 0$, такое что отображение $\Phi_z : \Delta(r) \longrightarrow \Delta(\delta_z)$, $\Phi_z : w \mapsto \Phi(z, w)$ есть биголоморфное отображение областей $\{w \in \Delta(r) : r(z, w) < 0\}$ и $\{\omega \in \Delta(\delta_z) : \operatorname{Im} \omega < 0\}$, и отображает вещественно-аналитическую кривую $\{w \in \Delta : r(z, w) = 0\}$ в $[-\delta_z, \delta_z]$. Пусть $\sigma : \omega \longrightarrow \overline{\omega}$ — стандартное сопряжение в $\mathbb{C}$. Теперь достаточно положить $\phi^+(z, w) = \phi^- \circ \Phi_z^{-1} \circ \sigma \circ \Phi_z(w)$.

Каждый вещественно-аналитический коэффициент в представлении (1.19) функции φ (соответственно, ψ) продолжается вещественно–аналитическим образом на U^+ и голоморфен на каждом диске (1.18). По условию (a), каждая анти-CR-функция на $X \cap U^+$ антиголоморфно продолжается на меньшую окрестность начала координат, которую опять обозначим через U. Применим лемму 1.21 к этим антиголоморфным функциям в представлении (1.19) для φ и ψ. Получаем, что они продолжаются на U^+ как вещественно-аналитические функции, голоморфные на каждом диске $l(z) \cap U^+$. Наконец, получаем, что φ и ψ продолжаются до вещественно-аналитических функций φ^+ и ψ^+ на U^+, голоморфных на каждом диске $l(z) \cap U^+$.

Пусть E' обозначает множество точек z в $\Delta^{n-1}(r)$ таких, что диск $l(z)$ пересекает E вдоль множества положительной линейной меры. Так как каждая функция вида (1.19) антиголоморфно продолжается на $l(z) \cap U^-$, то из теоремы о граничной единственности следует, что для каждого $z \in E'$ имеем $(l(z) \cap X) \subset E$. По теореме Фубини–Тонелли, E' — замкнутое подмножество $\Delta^{n-1}(r)$ меры 0. Следовательно, $h^+ := \varphi^+/\psi^+$ есть частное двух аналитических в U^+ функций, и для каждого $z \in \Delta^{n-1}(r) \backslash E'$ ограничения $h^+|l(z) \cap U^+$ мероморфно и совпадает с h на $l(z) \cap ((X \cap U) \backslash E)$.

Шаг 2. Мероморфное продолжение. Следующий шаг состоит в мероморфном продолжении h на открытое плотное подмножество в U^+. Пусть $S = \{Z = (z, w) \in U^+ : Z \in l(z), z \in E'\}$.

Лемма 1.22. *Функция h^+ мероморфна на $U^+ \backslash S$.*

Доказательство. Пусть (z_0, w_0) — точка в $U^+ \backslash S$. Фиксируем точку $a \in l(z_0) \cap ((X \cap U) \backslash E))$. В силу (b), существует односторонняя окрестность V точки a такая, что h голоморфно продолжается на V. Так как h^+ мероморфно на каждом $l(z)$ и совпадает с CR-функцией h на $(X \cap U) \backslash E$, то она голоморфна в V, если $V \subset U^+$, или голоморфно продолжается на V, если $V \subset U^-$. Предположим, что $V \subset U^+$ (другие случаи рассматриваются аналогично).

Фиксируем точку $\omega \in \Delta(r)$ с $(z_0, \omega) \in V$ и $\delta' > 0$, такую что $\{z_0\} \times \Delta(\omega, \delta')$ содержится в V. Существует односвязная область G в $\mathbb{C}$ такая, что $\{z_0\} \times G$ компактно содержится в $U^+ \backslash E$ и содержит как $\{z_0\} \times \Delta(\omega, \delta')$, так и (z_0, w_0). Фиксируем $\delta'' > 0$ такое, что полидиск $\Delta^{n-1}(z_0, \delta'') \times \Delta(\omega, \delta')$ содержится в V. Функция h^+ в нем голоморфна и для любого фиксированного $z \in \Delta^{n-1}(z_0, \delta'')$ мероморфна в $\{z\} \times G$. Далее из классической леммы Ротштейна [114, 121] следует, что h^+ мероморфна в $\Delta^{n-1}(z_0, \delta'') \times G$. Таким образом, h^+ мероморфна в окрестности любой точки из $U^+ \backslash S$.

Шаг 3. Устранение особенностей. Покажем теперь, что S — устранимая особенность h^+.

Лемма 1.23. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, а φ и ψ — вещественно-аналитические функции в D. Предположим, что $\psi(\zeta^0) \neq 0$ для некоторого $\zeta^0 \in D$? и $h := \varphi/\psi$ голоморфна в окрестности ζ^0. Тогда h мероморфна в D.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму при $D = \Delta = \{|\zeta| < 1\}$ и $\zeta^0 = 0$. Пусть $\zeta' \in \Delta \backslash \{0\}$ и $\gamma = \{\zeta \in \Delta : \zeta = t\zeta', t \in [0, 1/|\zeta'|[\}$. Ограничения $\varphi|\gamma$ и $\psi|\gamma$ допускают голоморфные продолжения $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ на некоторую окрестность Ω множества γ в Δ. Поэтому функция $\hat{\varphi}/\hat{\psi}$ мероморфна в Ω и совпадает с $h = \varphi/\psi$ на γ вблизи 0. По теореме единственности, $h = \hat{\varphi}/\hat{\psi}$ в окрестности 0. В силу аналитичности равенство $\varphi\hat{\psi} = \hat{\varphi}\psi$ выполняется всюду в Ω, а потому h мероморфна по $\zeta' \in \Omega$.

Лемма 1.24. *Функция h^+ мероморфно продолжается на U^+.*

Доказательство. Пусть $Z^0 \in S$ и $\tilde{E} = \{Z \in U^+ : \psi^+(Z) = 0\}$. Можно считать, что $Z^0 = 0$. Кроме того, так как $\tilde{E}$ замкнуто и нигде не плотно в U^+, то можно выбрать аффинную систему координат $Z = (Z_1, 'Z)$, $'Z = (Z_2, \dots, Z_n)$ в $\mathbb{C}^n$ со следующими свойствами.

Существуют точка $a = (a_1, '0) \in U^+ \backslash \tilde{E}$ и положительное $\delta_1 < \delta_2$, такие что выполнены условия:

(i) $U_1 := \Delta^n(a, \delta_1) = \Delta(a_1, \delta_1) \times \Delta^{n-1}('0, \delta_1) \subset U^+ \backslash \tilde{E}$,
(ii) $U_2 := \Delta(a_1, \delta_2) \times \Delta^{n-1}('0, \delta_1) \subset U^+$,
(iii) $0 \in U_2$.

Уже известно, что функция $h^+ = \varphi^+/\psi^+$ голоморфна в U_1. По лемме 1.23 для любого фиксированного $'Z \in \Delta^{n-1}('0, \delta_1)$ она мероморфно продолжается на $\Delta(a_1, \delta_2)$ как функция от Z_1. Следовательно, по лемме Ротштейна она мероморфна в окрестности точки $Z^0 = 0$.

Из (b) следует, что оболочка голоморфности U^+ содержит окрестность начала координат. Поэтому h^+ мероморфно продолжается на окрестность начала координат (см., например, [97, 120]). Это завершает доказательство предложения 1.20.

Обобщение. Описанный выше метод можно использовать для получения мероморфного продолжения более широких классов функциональных полей. Обозначим через ${}_pC^\infty(X)$ кольцо ростков C^∞ гладких функций в окрестности точки p на X, а через ${}_pC^\infty_{CR}(X)$ его подкольцо, образованное CR-функциями. Обозначим также через ${}_p\mathcal{O}(X)$ (соответственно, через ${}_p\mathcal{M}(X)$) кольцо (соответственно, поле) голоморфных (соответственно, мероморфных) функций в окрестности точки p в X. Для $m \in \mathbb{N}$ будем говорить, что функция $h \in {}_pC^\infty(X)$ принадлежит ${}_p\mathcal{A}^m(X)$, если существуют $g \in ({}_pC^\infty_{CR}(X))^m$ и функция $H(z, \zeta, w)$, голоморфная в окрестности точки $(p, \overline{p}, \overline{g}(p))$ в $\mathbb{C}^n(z) \times \mathbb{C}^n(\zeta) \times \mathbb{C}^m(w)$ такие, что $h(z) = H(z, \overline{z}, \overline{g}(z))$ при $z \in X$. Объединение ${}_p\mathcal{A}(X) = \cup_{m\in\mathbb{N}} {}_p\mathcal{A}^m(X)$ является подкольцом кольца ${}_pC^\infty(X)$. Заметим, что каждый оператор $\mathcal{L}_j : {}_p\mathcal{A}(X) \mapsto {}_p\mathcal{A}(X)$ определяет дифференцирование ${}_p\mathcal{A}(X)$.

Будем использовать обозначение $z = ('z, z_n)$, $'z \in \mathbb{C}^{n-1}$. Обозначим через $\Delta_k(a, r)$ полидиск в $\mathbb{C}^k$ с центром в точке $a \in \mathbb{C}^k$ и радиусом $r > 0$. Для любых $r_1, r_2 > 0$ и $t \in \mathbb{C}^{n-1}$ рассмотрим линейный диск $d_t = \{t\} \times \Delta_1(p_n, r_2)$ и семейство $\{d_t\}_t$, $t \in \Delta_{n-1}('p, r_1)$. Пусть U — окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$; обозначим через U^+ (соответственно, через U^-) множество $\{z \in U : \rho(z) > 0\}$ (соответственно, $\{z \in U : \rho(z) < 0\}$. Таким образом, всякая функция из ${}_p\mathcal{A}(X)$, определенная на $X \cap U$, продолжается как вещественно-аналитическая функция на U^- антиголоморфно на каждом диске $d_t \cap U^-$. Это приводит к принципу единственности для $\tau \in {}_p\mathcal{A}(X)$. Если для любой окрестности V точки p множество $\Sigma = \{z \in X \cap V : \tau(z) = 0\}$ имеет непустую внутренность, то $\tau \equiv 0$ в окрестности точки p. В частности, ${}_p\mathcal{A}$ — целое кольцо.

Предложение 1.25. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Пусть ϕ, $\psi \neq 0$ принадлежат ${}_p\mathcal{A}(X)$, а $\{z \in X : \psi(z) = 0\} \subset \Sigma := \{z \in X : \tau(z) = 0\}$. Допустим, что $h = \phi/\psi$ — CR-функция на $X \backslash \Sigma$. Тогда существует $\hat{h} \in {}_p\mathcal{M}(X)$ такая, что $\hat{h}|_{(X\backslash\Sigma)} = h|_{(X\backslash\Sigma)}$.*
(ii) *Каждый элемент ${}_pC^\infty_{CR}(X)$ является алгебраическим над факторполем $\hat{A}$ целого кольца ${}_p\mathcal{A}(X)$, принадлежит ${}_p\mathcal{O}(X)$.*

Доказательство. Часть (i) можно доказать, непосредственно повторяя рассуждение предыдущего пункта с очевидными модификациями.

Докажем (ii). Пусть $h \in {}_pC^\infty_{CR}(X)$ и $P = \sum_{j=0}^{d-1} a_j x^j + x^d$, $a_j \in \hat{A}$ — унитарный многочлен наименьшей степени $d \geqslant 1$ такой, что $P(h) = 0$ на X, кроме множества Σ общих нулей знаменателей его коэффициентов. Применим операторы Коши–Римана $\mathcal{L}_j$ к равенству $P(h) = 0$. Так как P минимален, то в силу (i) $\mathcal{L}_j(a_s) = 0$ на $X \backslash \Sigma$ для любого s и всякого a_s мероморфна в окрестности p. Значит, h алгебраична над ${}_p\mathcal{M}(X)$, и ее график содержится к комплексно-аналитическом подмножестве чистой размерности n в окрестности точки $(p, h(p))$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Следовательно, в силу известных результатов $h \in {}_p\mathcal{O}(X)$ (см., например, [34, 105]).

2. Мероморфное продолжение на многообразия высокой коразмерности

Здесь обобщаются результаты о мероморфном продолжении CR-функций на случай, когда X есть многообразие высокой коразмерности. Предлагаемый метод является непосредственным обобщением подхода предыдущего параграфа. Однако некоторые технические моменты являются существенно более тонкими по сравнению с гиперповерхностным случаем.

Обозначения и предварительные сведения. Предположим, что подмногообразие $X \subset \mathbf{C}^n$ задано вблизи точки p с помощью уравнений

$$\operatorname{Im} w_k = G_k(z, \operatorname{Re} w), \quad k = 1, \dots, d, \tag{2.1}$$

где G_k — вещественно-значные вещественно-аналитические функции в окрестности точки $(z_p, \operatorname{Re} w_p)$. В дальнейшем будет использоваться обозначения $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ и $G = (G_1, \dots, G_d)$.

Определение 2.1. Клином, ассоциированным с подмногообразием X в точке $q \in X$, называется область вида

$$\mathcal{W}(\mathcal{N}, C) := \{Z \in \mathcal{N} : \operatorname{Im} w - G(z, \operatorname{Re} w) \in C\}, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{N}$ — достаточно малая окрестность точки q в $\mathbb{C}^n$, а C — непустой открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^d$ (с вершиной в 0). Ребро $\mathcal{W}(\mathcal{N}, C)$ есть открытое подмножество $X \cap \mathcal{N}$ в X.

Ранее несколько раз использовалась фундаментальная теорема о продолжении А. Туманова [21]; здесь нам понадобится ее точная формулировка:

Теорема 2.2. *Пусть q — точка X, а V — окрестность точки q в X. Если X минимально в точке q, то существуют окрестность $\mathcal{N} = \mathcal{N}(q, V)$ точки q в $\mathbb{C}^n$ и непустой открытый выпуклый конус $C = C(q, V)$ $\mathbb{R}^d$, такие что каждая непрерывная CR-функция на V голоморфно продолжается на клин $\mathcal{W}(\mathcal{N}, C)$.*

Для изучения свойств продолжимости некоторых классов функций, определенных на X, было бы удобно разрезать комплексное аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ на куски. Для точки $a \in \mathbb{C}^m$, достаточно близкой к Z_p, пусть $E_a \subset \mathbb{C}^n$ — комплексное аффинное подпространство $\{z = a\}$ комплексной размерности d. CR подмногообразие $X_a := X \cap E_a$ вещественно-аналитично и вполне вещественно с максимальной вещественной размерностью в E_a. Если $\mathcal{W}$ — клин, ассоциированный с X, то $\mathcal{W}_a := \mathcal{W} \cap E_a$ — клин, ассоциированный с X_a в E_a.

Отображение $s : Z \mapsto (z, \overline{\phi(\overline{z}, z, w)})$ определено вблизи точки p, вещественно-аналитично по z и антиголоморфно по w. Кроме того, оно симметрично относительно X, потому что X инвариантно относительно s, а s — инволюция в окрестности точки p. В самом деле, $\phi(\overline{z}, z, \overline{\phi(\overline{z}, z, w)}) - \overline{w} \equiv 0$, поскольку при фиксированном z это отображение антиголоморфно и обращается в нуль на порождающем подмногообразии X_z в E_z.

Для клина $\mathcal{W}$, ассоциированного с X, симметричный клин $\mathcal{W}$ есть $\mathcal{W}^s := s(\mathcal{W})$. В действительности, он не является клином в смысле определения 2.1, однако содержит настоящий клин конуса, возможно, несколько меньший, чем $-C$. Заметим, что при условии, что $\mathcal{W}$ достаточно мал, выполняется также соотношение $\mathcal{W} = s(\mathcal{W}^s)$.

Свойства кольца функций $\mathcal{R}_p(X)$. Пусть $\mathcal{R}_p(X)$ — кольцо ростков в точке p определенных на X функций вида

$$h(Z) = H(Z, \overline{Z}, \overline{g(Z)}), \tag{2.3}$$

где $g = (g_1, \dots, g_K)$ — ростки в точке p гладких CR-функций на X, а H — росток в точке $(p, \overline{p}, \overline{g(p)})$ голоморфной функции в $\mathbb{C}^{2n+K}$. Заметим, что CR-операторы $\mathcal{L}_j$ есть дифференцирования кольца $\mathcal{R}_p(X)$. Пусть h — представитель ростка $\mathcal{R}_p(X)$, определенный в некоторой связной открытой окрестности U точки p в X. Предположим, что X минимально в точке p и пусть $\mathcal{U} := \mathcal{N}(p, U)$, $\Gamma := C(p, U)$ и $\mathcal{W} := \mathcal{W}(\mathcal{U}, \Gamma)$ — окрестность точки p, конус и клин из теоремы о продолжении Туманова. Пусть $U' := M \cap \mathcal{U} \subset U$ — его остриё, а $\mathcal{W}^s$ — симметричный клин.

Теперь можно сформулировать следующую полезную лемму о продолжении,

Лемма 2.3. *Если X минимально в точке p, то функция h продолжается до вещественно-аналитической функции $\tilde{h}$ в $\mathcal{W}$ (соответственно, $\tilde{h}^s$ в $\mathcal{W}^s$), гладкой вплоть до острия U' и антиголоморфной (соответственно, голоморфной) по y.*

Доказательство. Функция h определена с помощью (2.3) при $Z \in U$. Не нарушая общности, можно считать, что $g(p) = 0$; представим H степенным рядом по $\overline{g}$: $h(Z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^K} c_\nu(Z, \overline{Z})\, \overline{g^\nu(Z)}$, где коэффициенты c_ν — голоморфные функции вблизи $(p, \overline{p})$. Так как каждая g_j есть CR-функция на U, то она допускает голоморфное продолжение $\tilde{g}_j$ на $\mathcal{W}$ в соответствии с теоремой Туманова. Тогда продолжение h на $\mathcal{W}$,

$$\tilde{h}(Z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^K} c_\nu(s(Z), \overline{Z})\, \overline{\tilde{g}^\nu(Z)},$$

очевидно, вещественно-аналитично и антиголоморфно по w.

Продолжение h на $\mathcal{W}^s$,

$$\tilde{h}^s(Z) = \tilde{h}(s(Z)), \tag{2.4}$$

вещественно-аналитично и голоморфно по w.

Функции $\mathcal{R}_p(X)$ не являются ни CR-функциями, ни вещественно-аналитическими функциями. Тем не менее, достаточно аналогично предыдущему параграфу, проверяется, что они удовлетворяют следующему принципу единственности:

Лемма 2.4. *Пусть h — то же, что и выше, а X минимально в точке p.*

(i) *Если h обращается в нуль на непустом открытом подмножестве V в U', то $h \equiv 0$ на U'.*

(ii) *$\mathcal{R}_p(X)$ — область целостности.*

Доказательство. (i). По лемме 2.3 h допускает продолжение $\tilde{h}$ на $\mathcal{W}$, вещественно–аналитическое и антиголоморфное по w. Пусть V' — проекция V на $\mathbb{C}^m_z$ с помощью $\pi : (z, w) \mapsto z$. Для всех $a \in V'$, $\tilde{h}$ антиголоморфно в $\mathcal{W}_a$ и обращается в нуль на множестве $V \cap E_a$, которое есть открытое связное подмножество X_a. Так как X_a — тотально вещественное подмногообразие E_a максимальной размерности, то из теоремы единственности Пинчука [11] следует, что $\tilde{h}|_{\mathcal{W}_a} \equiv 0$. Так как X –= график $\mathbb{C}^m_z \times \mathbb{R}^d_{\operatorname{Re} w}$, то V' — непустое открытое подмножество в $\mathbb{C}^m_z$. Значит, если a меняется в V', то $\mathcal{W}_a$ заполняет открытое подмножество в $\mathcal{W}$. Поэтому $\tilde{h}$ обращается в нуль на открытом подмножестве в $\mathcal{W}$. Так как оно вещественно-аналитично, то оно тождественно обращается в нуль в $\mathcal{W}$. По непрерывности вплоть до острия $h|_{U'} \equiv 0$.

(ii) Пусть h_1 и h_2 принадлежат $\mathcal{R}_p(X)$. Допустим, что $h_1 h_2 = 0$. Если $h_1 \not\equiv 0$ вблизи p, то существует непустое открытое подмножество V в X, достаточно близкое к p, такое что h_2 обращается в нуль на V. Значит, применимо (i) и $h_2 \equiv 0$ вблизи p.

Свойство мероморфного продолжения. Пусть $\hat{\mathcal{R}}_p(X)$ — фактор-поле области целостности $\mathcal{R}_p(X)$, а $\mathcal{S}_p(X)$ — подполе $\hat{\mathcal{R}}_p(X)$, состоящее из CR-функций. Более точно, элементы $\mathcal{S}_p(X)$ имеют вид $\psi = h_1/h_2$, где $h_1, h_2 \in \mathcal{R}_p(X)$, $h_2 \not\equiv 0$ и ψ — CR-функция на $X \setminus \Sigma$ вблизи p с $\Sigma := \{z \in X \text{ вблизи } p : h_2(z) = 0\}$. По принципу единственности, приведенному выше, Σ — замкнутое подмножество в X вблизи p, имеющее непустую внутренность.

Основной результат этого пункта — это следующее

Предложение 2.5. *Если X минимально в точке p, то любой росток $\psi \in \mathcal{S}_p(X)$ мероморфно продолжается на окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$.*

В ситуации, когда ψ не имеет особенностей в точке p, справедлив следующий более сильный результат:

Предложение 2.6. *Если X минимально в точке p, то любой росток $\psi \in \mathcal{R}_p(X)$, являющийся CR-ростком на X вблизи p, голоморфно продолжается на окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство этого результата значительно проще, чем доказательство предложения 2.5; однако, на самом деле, нам необходимо предложение 2.5 для приложений к изучению аналитичности CR-отображений.

Теорема об острие и сепаратная мероморфность Начнем с доказательства следующего утверждения.

Предложение 2.7. *Если X минимально в точке p, то для любого ростка $\psi \in \mathcal{S}_p(X)$ существует клин $\mathcal{W}^s$ в точке p, такой что ψ мероморфно продолжается на $\mathcal{W}^s$.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения состоит из трех шагов.

Шаг 1. Теорема о продолжении Туманова и принцип отражения.

Пусть h_1 и $h_2 \not\equiv 0$ — представители ростков отображения $\mathcal{R}_p(X)$, определенного в некоторой связной открытой окрестности точки p в X. С точностью до стягивания X, можно считать, что h_1 и h_2 определены во всем X и что X минимально в каждой точке $q \in X$, поскольку минимальность — открытое свойство на множестве вещественно-аналитических CR-подмногообразий. Пусть $\Sigma := \{z \in X : h_2(z) = 0\}$ и пусть отношение $\psi := h_1/h_2$ — CR-функция на $X \setminus \Sigma$, т.е., $\psi \in \mathcal{S}_p(X)$. Пусть $U \subset X$ — относительно компактная связная открытая окрестность точки p в X. Как и выше, пусть $\mathcal{U}$, Γ, $\mathcal{W}$, U' и $\mathcal{W}^s$ — соответственно, окрестность точки p, конус, клин, остриё и симметрический клин, ассоциированные с (p, U) по теореме о продолжении Туманова.

По лемме 2.3 h_j допускает продолжение $\tilde{h}_j^s$ на $\mathcal{W}^s$, вещественно-аналитическое и голоморфное по w, при $j = 1, 2$. Таким образом, $g = \tilde{h}_1^s/\tilde{h}_2^s$ — продолжение ψ на $\mathcal{W}^s$, мероморфное по w.

Шаг 2. Теорема об острие клина в каждом сечении.

Будем использовать следующие обозначения: при $a \in \mathbb{C}^m$, $E_a := \{x = a\}$ обозначает сечение $\mathbb{C}^n$; $\Delta^k(a, \rho)$ — открытый полидиск в $\mathbb{C}^k$ с центром в a и радиусом $\rho > 0$, и если $a = 0$, то используем обозначение $\Delta^k_\rho := \Delta^k(0, \rho)$; $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$, $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ и $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, соответственно, обозначают кольца гладких, голоморфных и мероморфных функций в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$.

Пусть q — точка в $U' \setminus \Sigma$ и пусть V — окрестность точки q в $U' \setminus \Sigma$. Так как X минимально в точке q, то теорема продолжения Туманова дает окрестность $\mathcal{V} := \mathcal{N}(q, V)$ точки q, открытый выпуклый конус $\Lambda := C(q, V)$ и клин $\mathcal{W}^* := \mathcal{W}(\mathcal{V}, \Lambda)$ с остриём $V' := M \cap \mathcal{V}$ такие, что каждая CR-функция на V голоморфно продолжается на $\mathcal{W}^*$. В частности, ψ голоморфно продолжается на $\mathcal{W}^*$ и это продолжение также обозначается через g.

Для упрощения обозначений можно считать, что q — начало координат 0. Можно также считать, что g не имеет особенностей в клине $\mathcal{W}^{s\prime} := \mathcal{W}^s \cap \mathcal{V}$ (с точностью до стягивания $\mathcal{V}$). Пусть $\Gamma^\sharp$ — произвольный большой подконус выпуклой оболочки $-\Gamma \cup \Lambda$, а $\mathcal{W}^\sharp$ — клин $\mathcal{W}(\mathcal{V}, \Gamma^\sharp)$. Для всякого $a \in \Delta^m_\epsilon$ и достаточно малого $\epsilon > 0$ используем обозначения: $\mathcal{W}^{s\prime}_a := \mathcal{W}^{s\prime} \cap E_a$, $\mathcal{W}^*_a := \mathcal{W}^* \cap E_a$, $\mathcal{W}^\sharp_a := \mathcal{W}^\sharp \cap E_a$ и $V'_a := V' \cap E_a$.

Лемма 2.8. *Пусть функция $h \in \mathcal{O}(\mathcal{W}^*)$ такая, что для каждого $a \in \Delta^m_\epsilon$, $h_a := h|_{E_a} \in \mathcal{O}(\mathcal{W}^{s\prime}_a \cup \mathcal{W}^*_a) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}^{s\prime}_a \cup \mathcal{W}^*_a \cup V'_a)$. Тогда h голоморфно продолжается на $\mathcal{W}^\sharp$ вблизи 0.*

Доказательство. Пусть $a \in \Delta^m_\epsilon$; обозначим через $\eta_a := (0, \phi(a, 0))$ точку в X_a, такую что $\operatorname{Re} \eta_a = 0$. По теореме об острие клина [1], существует окрестность $\mathcal{N}_a$ точки η_a в $E_a \simeq \mathbb{C}^d$ такая, что ha голоморфно продолжается на $\mathcal{W}^\sharp_a \cap \mathcal{N}_a$. Можно считать, что при всех $a \in \Delta^m_\epsilon$, $\mathcal{N}_a \supset \Delta^d_\delta$, для некоторого $\delta = \delta(\epsilon)$. Таким образом, h голоморфна по y в $\mathcal{W}^\sharp \cap (\Delta^m_\epsilon \times \Delta^d_\delta)$ и голоморфна по всем переменным в $\mathcal{W}^*$. По теореме Гартогса, h голоморфна в пересечении $\mathcal{W}^\sharp$ с окрестностью точки 0.

Доказательство. Применяя лемму 2.8 к функции g, получаем, что g голоморфна в пересечении $\mathcal{W}^\sharp$ с окрестностью точки 0. В частности, g голоморфна в непустой области $\Omega' \subset \mathcal{W}^s$.

Шаг 3. Распространение мероморфности и сепаратная мероморфность.

Лемма 2.9. *Пусть $\Omega' \subset \Omega$ — непустые области в $\mathbb{C}^n$ и пусть h_1 и $h_2 \not\equiv 0$ — вещественно-аналитические функции в Ω. Если $g := h_1/h_2$ мероморфна в Ω', то g мероморфна во всем Ω.*

Доказательство. С точностью до стягивания Ω', не нарушая общности, можно считать, что h_2 не обращается в нуль в Ω'.

Случай 1: $n = 1$, Ω' и Ω — диски. Этот случай рассматривался в предыдущем пункте. Пусть c' — центр Ω'. При $\zeta \in \Omega$ пусть γ обозначает замкнутый отрезок $[c', \zeta]$. Пусть $\tilde{h}_1$ (соответственно, $\tilde{h}_2$) — голоморфное продолжение $h_1|\gamma$ (соответственно, $h_2|\gamma$) на окрестность Γ отрезка γ. Можно считать, что $\tilde{h}_2$ не обращается в нуль в $\Omega' \cap \Gamma$ (с точностью до стягивания Γ). Поэтому $\tilde{g} := \tilde{h}_1/\tilde{h}_2$ голоморфна в $\Omega' \cap \Gamma$ и совпадает с g на $\Omega' \cap \gamma$. По теореме единственности, $\tilde{g} = g$ в $\Omega' \cap \Gamma$. Тогда функция $\tilde{h}_1 h_2 - \tilde{h}_2 h_1$ вещественно-аналитична в Γ и обращается в нуль в $\Omega' \cap \Gamma$. Значит, она обращается в нуль на всем Γ и $g|_\Gamma \equiv \tilde{g}$ мероморфна. Применяя это рассуждение для всех $\zeta \in \Omega$, получаем, что g мероморфна во всем Ω.

Случай 2: $n \geqslant 1$, Ω' и Ω — подидиски

Предположим, что $\Omega' = \Delta^n(c', R')$ и $\Omega = \Delta^n(c, R)$. Докажем по индукции, что мероморфность g распространяется в каждом комплексном направлении из $\mathbb{C}^n$. Рассуждая индуктивно по $k = 0, \ldots, n$, предположим, что g мероморфна в $\Delta^k((c_1, \ldots, c_k), R) \times \Delta^{n-k}((c'_{k+1}, \ldots, c'_n), R')$ при некотором $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Для каждого $\zeta \in \Delta^k((c_1, \ldots, c_k), R)$ и $\zeta' \in \Delta^{n-k-1}((c'_{k+2}, \ldots, c'_n), R')$ такого, что h_2 тождественно не обращается в нуль в $\Delta' := \{\zeta\} \times \Delta^1(c'_{k+1}, R') \times \{\zeta'\}$, применим случай 1 к Δ' и $\Delta := \{\zeta\} \times \Delta^1(c_{k+1}, R) \times \{\zeta'\}$, отсюда вытекает мероморфность $g|_\Delta$. Следовательно, по теореме Ротштейна о сепаратной мероморфности (см. [114] или [120]), получаем, что g мероморфна в $\Delta^{k+1}((c_1, \ldots, c_{k+1}), R) \times \Delta^{n-k-1}((c'_{k+2}, \ldots, c'_n), R')$.

Случай 3: Общий случай.

Пусть c' — точка в Ω'. Для каждого $\zeta \in \Omega$ пусть γ — компактная гладкая простая кривая, соединяющая c' и ζ, а $(\Delta_1^n, \ldots, \Delta_r^n)$ — конечное покрытие этой кривой γ полидисками из Ω. Из случая 2 следует, что мероморфность g распространяется из Δ_ν^n в $\Delta_{\nu+1}^n$, и получается, что g мероморфна в окрестности точки ζ, для всех $\zeta \in \Omega$.

Лемма 2.9, примененная к функции g и областям $\Omega' \subset \mathcal{W}^s$, доказывает, что g мероморфна во всем $\mathcal{W}^s$.

Это доказывает предложение 2.7.

Замечание На этом этапе легко можно заключить, что g мероморфно продолжается вблизи точки p, если направление продолжимости клина в точке p CR-функций на $U \subset X$ не зависимо от U. Это условие выполнено,например, в случае, когда подмногообразие X имеет конечный тип в точке p с одинаковыми числами Хёрмандера (см. [46]) При выполнении этого условия, двигая X в $\mathcal{W}^s$ в направлении, противоположном направлению продолжимости, получаем, что все голоморфные функции в $\mathcal{W}^s$ голоморфно продолжаются вблизи p, и по теореме Ивашковича [97] получаем заключение предложения 2.5.

Мероморфное продолжение на клин, подклеенный к M. Обозначим через $NX := T\mathbb{C}^n|_X/TX$ нормальное расслоение над X. Пусть q — точка в X, $n_q \in N_qX$ — нормальный вектор к X в точке q, а $\mathcal{W}_q = \mathcal{W}(\mathcal{N}_q, C_q)$ — клин в точке q. Отождествляя N_qX с $\mathbb{R}^d$, можно считать, что $C_q \subset N_qX$. Будем говорить, что $\mathcal{W}_q$ имеет направление n_q, если $n_q \in C_q$. По определению, то, что $\mathcal{W}_q$ имеет направление $n_q = 0$, означает, что $\mathcal{W}_q$ — целая окрестность точки q в $\mathbb{C}^n$.

Определение 2.10. Пусть Ω — связное открытое подмножество в X. Область ω называется клином, подклеенным к Ω (см. [109]), если существует гладкое сечение $n : \Omega \mapsto N\Omega$ нормального расслоения, такое что для каждого $q \in \Omega$ область ω содержит клин в точке q с направлением $n(q)$.

Понятие подклеенного клина позволяет дать следующий результат о глобальном мероморфном расширении:

Предложение 2.11. *Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ — порождающее вещественно-аналитическое подмногообразие, минимальное в каждой точке $p \in X$. Пусть $\Sigma \subset X$ — замкнутое подмножество с пустой внутренностью, а ψ — гладкая CR-функция на $X \setminus \Sigma$. Предположим, что для любой точки $p \in X$ существуют клин $\mathcal{W}_p$ с остриём в окрестности U_p точки $p \in X$ и продолжение $g_p \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_p)$ функции $\psi|_{U_p \setminus \Sigma}$. Тогда для любого связного открытого подмножества $\Omega \subset X$ существует клин ω, подклеенный к Ω, содержащий $\mathcal{W}_p$ для всякого $p \in \Omega$, и существует продолжение $g \in \mathcal{M}(\omega)$ функции $\psi|_{\Omega \setminus \Sigma}$.*

Для доказательства предложения 2.11 потребуются некоторые технические леммы. Следующая лемма есть принцип единственности с особенностями на острие.

Лемма 2.12. *Пусть $\mathcal{W}$ — клин с острием U, а $g \in \mathcal{M}(\mathcal{W})$ — продолжение $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U \setminus \Sigma)$. Если $\psi \equiv 0$, то $g \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $p \in U \setminus \Sigma$. Существует окрестность $\mathcal{V}$ точки p, такая что g голоморфна в $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$. По принципу единственности Пинчука [11], $g|_{\mathcal{V}} \equiv 0$. Тогда, по принципу единственности голоморфных отображений связных комплексных многообразий, $g \equiv 0$.

Следующая лемма — теорема об острие клине с особенностями на острие.

Лемма 2.13. *Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ — порождающее вещественно–аналитическое подмногообразие, минимальное в некоторой точке $p \in X$, а U — открытая связная окрестность точки p в X. Пусть $\Sigma \subset X$ — замкнутое подмножество с пустой внутренностью, а ψ — гладкая CR-функция на $X \setminus \Sigma$. Предположим, что существуют клины $\mathcal{W}_j$ с острием U, конусы C_j продолжения $g_j \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_j)$ функции $\psi|_{U\setminus\Sigma}$ при $j = 1, 2$. Тогда существуют клин $\mathcal{W}$ с остриём $U' \subset U$ (окрестность точки $p \in X$) и конус C, почти содержащий выпуклую оболочку $C_1 \cup C_2$ такой, что $\psi|_{U\setminus\Sigma}$ допускает продолжение $g \in \mathcal{M}(\mathcal{W})$.*

Замечание. Будем всегда использовать следующие соглашения:

[(i)] Все рассматриваемые конусы выпуклы;

[(ii)] Фраза «конус C почти содержит конус C'» означает, что C содержит собственный подконус в C' с вершиной в точке 0. На практике этот конус может быть выбран сколь угодно большим, так что это слегка усложняет обозначения, однако не имеет значения для последующего.

Доказательство. Пусть h_1 — голоморфная функция в $\mathcal{W}_1$. Так как X минимально в p, то существует клин $\mathcal{W}'$ острия $U' \subset U$ окрестности точки p в X и конуса C такой, что любые CR-функции в U голоморфно продолжаются на $\mathcal{W}'$.

Можно считать, что положительная ось $\operatorname{Im} Z_n$ лежит в конусе C_1. При $d > 0$ пусть t^d — сдвиг вдоль $\operatorname{Im} Z_n$ длины d, а $U^d := t^d(U)$. Тогда $h_1|_{U^d}$ — CR-функция и она голоморфно продолжается на $\mathcal{W}'^d := t^d(\mathcal{W}')$. Согласно теореме об острие клина Айрапетяна [1], существуют окрестность $U_1' \subset U'$ точки p в X и конус C_1', почти содержащий выпуклую оболочку $C_1 \cup C'$ такие, что h_1 голоморфно продолжается на клин ${\mathcal{W}_1'}^d$ с острием ${U_1'}^d := t^d(U_1')$ и конуса C_1'. Заметим, что ${\mathcal{W}_1'}^d = t^d(\mathcal{W}_1')$, где $\mathcal{W}_1'$ — клин с острием U_1' и конуса C_1'. Устремляя d к нулю, получаем, что h_1 голоморфно продолжается на $\mathcal{W}_1'$. По теореме Ивашковича [97], оболочки голоморфности и мероморфности открытого множества $\mathcal{W}_1$ совпадают. Следовательно, g_1 мероморфно продолжается на $\mathcal{W}_1'$. Аналогично, g_2 мероморфно продолжается на клин $\mathcal{W}_2'$ с острием $U_2' \subset U'$ окрестности точки p в X и конуса C_2', почти содержащего выпуклую оболочку $C_2 \cup C'$. Можно считать, что $U_1' = U_2' =: U_p'$. По принципу единственности (лемма 2.12), продолжения g_1 и g_2 совпадают в $\mathcal{W}_1' \cap \mathcal{W}_2'$. Таким образом, получаем общее продолжение $g \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_1' \cup \mathcal{W}_2')$ для $\psi|_{U_p'\setminus\Sigma}$.

Наконец, применяя теоремы Ивашковича и Айрапетяна к $\mathcal{W}_1' \cup \mathcal{W}_2'$, доказываем, что g мероморфно продолжается на клин $\mathcal{W}''$ с острием $U'' \subset U_p'$ окрестности точки p в M и конуса C'', почти содержащего выпуклую оболочку $C_1' \cup C_2'$. Кроме того, g допускает $\psi|_{U''\setminus\Sigma}$ в качестве гладкого граничного значения на $U'' \setminus \Sigma$.

Следуя обозначениям предложения 2.11, можно считать, что U_p есть следы на X шаров в $\mathbb{C}^n$, т.е., $U_p = B(p, R_p) \cap X$ с $R_p > 0$. Для $\epsilon > 0$ определим ϵ-стягивание U_p как $U_p^\epsilon := B(p, R_p - \epsilon) \cap X$. В дальнейшем, когда клин ω приклеивается к некоторому открытому связному подмножеству Ω в X, всегда предполагаем, что Ω есть конечное объединение некоторых U_p, т.е. $\Omega = \cup_{j=1}^s U_{p_j}$. Поэтому можно определить также и ϵ-стягивание Ω как $\Omega^\epsilon := \cup_{j=1}^s U_{p_j}^\epsilon$.

Замечание. Пусть K — компактное подмножество X и $(U_{p_j})_{j=1,\dots,s}$ — открытое покрытие K. Тогда существует $\epsilon > 0$ такое, что $(U_{p_j}^\epsilon)_{j=1,\dots,s}$ также есть покрытие K.

Следующая лемма позволяет склеить вместе два подклеенных конуса:

Лемма 2.14. *Пусть $X \subset \mathbf{C}^n$ — вещественно-аналитическое порождающее подмногообразие, минимальное в каждой точке $p \in X$. Пусть $\Sigma \subset X$ — замкнутое подмножество с пустой внутренностью и пусть ψ — гладкая CR-функция на $X \setminus \Sigma$. Пусть ω_j — клин, подклеенный к связному открытому подмножеству Ω_j в X, а $g_j \in \mathcal{M}(\omega_j)$ — продолжение $\psi|_{\Omega_j\setminus\Sigma}$ при $j = 1, 2$. Предположим, что $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Тогда для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ существует клин ω^ϵ, подклеенный к $\Omega^\epsilon := \Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon$ и содержащий ограничение ω_j на Ω_j^ϵ при $j = 1, 2$, а также существует продолжение $g^\epsilon \in \mathcal{M}(\omega^\epsilon)$ функции $\psi|_{\Omega^\epsilon\setminus\Sigma}$.*

Доказательство. По определению 2.10, для каждого $p \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, при $j = 1, 2$, существуют клин $\mathcal{W}_{p,j} \subset \omega_j$ с острием $U_{p,j}$ и конус $C_{p,j}$ направления $n_j(p)$, где n_j — гладкое сечение $N\Omega_j$, ассоциированное с ω_j. По лемме 2.13 существует клин $\mathcal{W}_p$ с острием $U'_p \subset U_{p,1} \cap U_{p,2}$ и конусом C_p, почти содержащим выпуклую оболочку $C_{p,1} \cup C_{p,2}$, а также существует функция $g_p \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_p)$, продолжающая $\psi|_{U'_p \setminus \Sigma}$.

Пусть $\epsilon > 0$ и пусть ω_j^ϵ — ограничение ω_j на Ω_j^ϵ, $j = 1, 2$. Пусть $(U'_{p_1}, \ldots, U'_{p_s})$ — конечное открытое покрытие замыкания $\overline{(\Omega_1^\epsilon \cap \Omega_2^\epsilon)} \subset X$. Область $\omega^\epsilon := \omega_1^\epsilon \cup \omega_2^\epsilon \cup \mathcal{W}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{W}_{p_s}$ — это клин, подклеенный к $\Omega^\epsilon := \Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon$. В самом деле, построим гладкое сечение нормального расслоения, используя гладкое разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $\overline{(\Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon)} \subset X$ с помощью Ω_1 и Ω_2, а также используя то, что C_{p_k} почти содержит выпуклую оболочку $C_{p_k,1} \cup C_{p_k,2}$. В силу леммы 2.12, функции g_j в ω_j, $j = 1, 2$, и g_{p_k} в $\mathcal{W}_{p_k}$, $k = 1, \ldots, s$, совпадают на пересечении этих клинов. Следовательно, получаем мероморфное продолжение g^ϵ функции $\psi|_{\Omega^\epsilon \setminus \Sigma}$ на ω^ϵ.

Окончание доказательства предложения 2.11. Пусть $(U_{p_1}, \ldots, U_{p_s})$ — конечное открытое покрытие $\overline{\Omega}$, а $\epsilon > 0$ таково, что $(U^\epsilon_{p_1}, \ldots, U^\epsilon_{p_s})$ — также покрытие $\overline{\Omega}$. Докажем по индукции по $n \in \{1, \ldots, s\}$, что существуют клин ω_n, подклеенный к $\Omega_n = U_{p_1}^{n\epsilon/s} \cup \cdots \cup U_{p_n}^{n\epsilon/s}$, содержащий $\mathcal{W}_{p_k}$, $k = 1, \ldots, n$, и продолжение $g_n \in \mathcal{M}(\omega_n)$ отображения $\psi|_{\Omega_n \setminus \Sigma}$. При $n = 1$ утверждение очевидно с $\omega_1 = \mathcal{W}_{p_1}$ и $g_1 = g_{p_1}$. Предположим, что утверждение верно при некоторых $n \in \{1, \ldots, s-1\}$. В соответствии с леммой 2.14, можно склеить клинья s $\mathcal{W}_{p_{n+1}}$ и ω_n вместе для ϵ/s. Получаем утверждение леммы для $n + 1$.

При $n = s$ получаем клин ω_s, подклеенный к $\Omega_s \supset \Omega$, а также продолжение $g_s \in \mathcal{M}(\omega_s)$ для $\psi|_{\Omega_s \setminus \Sigma}$. Наконец, возьмем ω равным сужению ω_s на Ω и $g := g_s|\omega$. Для улучшения результата склеим ω со всеми $\mathcal{W}_p$, $p \in \Omega$, и продолжим g на эту большую область (используя только теоремы Ивашковича и Айрапетяна).

Предложение 2.11 доказано.

Деформация подмногообразия M**.** Окончание доказательства предложения 2.5.

Предположим, что многообразие X минимально в каждой точке $q \in X$ и что $U \subset X$ — относительно компактная связная открытая окрестность точки p в X. Значит, для каждой точки $q \in U$ выполняется предложение 2.7 т.е. существуют клин $\mathcal{W}_q^s$ с острием U_q и мероморфное продолжение g_q для $\psi|_{U_q \setminus \Sigma}$ на $\mathcal{W}_q^s$.

По предложению 2.11, можно склеить клинья $\mathcal{W}_q^s$ и получить клин ω^s, подклеенный к U, такой что $\psi|_{U \setminus \Sigma}$ продолжается на ω^s как мероморфная функция g^s и ω^s содержит клин $\mathcal{W}_p^s$. С помощью гладкого разбиения единицы, как в лемме 2.14, можно применить достаточно малую деформацию к U в направлении n^s — гладкого сечения нормального расслоения U, ассоциированного с клином ω^s. Предположим, что эта деформация гладко зависит от параметра $d \geqslant 0$ и что деформация тождественна при $d = 0$. Обозначим через $U^d \subset \omega^s$ деформацию U.

Клин $\mathcal{W}_p$ получается из аналитических дисков, подклеенных к U (см. [21]). Значит, существует все еще аналитический диск, подклеенный к U^d, образующий клин $\mathcal{W}_p^d$ и являющийся малой деформацией $\mathcal{W}_p$. В частности, $\mathcal{W}_p^d$ стремится к $\mathcal{W}_p$ при d, стремящемся к нулю. Для достаточно малого $d > 0$, $\mathcal{W}_p^d$ «почти симметричен» $\mathcal{W}_p^s$ в том смысле, что конусы клиньев $\mathcal{W}_p^d$и $\mathcal{W}_p$ пересекаются. При возможно меньшем $d > 0$ можно считать, что конус клина $\mathcal{W}_p^d$ содержит направление $-n^s(p)$, а значит, $p \in \mathcal{W}_p^d$. Таким образом, получаем, что оболочка голоморфности ω^s содержит окрестность точки p. В силу теоремы Ивашковича [97] получаем, что g^s мероморфно продолжается на эту окрестность точки p.

Предложение 2.5 доказано.

В ситуации, когда ψ не имеет особенностей в p, доказательство свойства (голоморфной) продолжимости тривиально.

Доказательство предложения 2.6. Пусть ψ — представитель ростка функции $\mathcal{R}_p(X)$, определенный в некоторой открытой связной окрестности U точки p в X, и пусть ψ — CR-функция на U. По теореме Туманова, ψ голоморфно продолжается на $\mathcal{W}$, а по лемме 2.3 она продолжается на $\mathcal{W}^s$ как функция, голоморфная в w, где $\mathcal{W}$ — клин, ассоциированный с (p, U) и $\mathcal{W}^s$ — его симметричный клин. Теперь по классической теореме об острие клина, примененной в каждом сечении E_a, и по теореме Гартогса получаем, что ψ голоморфно продолжается на окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$.

Это доказывает предложение 2.6.

3. Алгебраический принцип отражения и продолжение CR-отображений

Здесь развивается принципиальная алгебраическая часть принципа отражения Леви–Пинчука. Это позволяет применить предыдущие результаты для изучения свойств регулярности CR-отображений.

3.1. Отображения квадратичных многообразий. Первая теорема о квадриках. По аналогии с предыдущим параграфом, рассмотрим координаты $Z = (z, w)$ в $\mathbb{C}^n$, где $z = (Z_1, \dots, Z_k) \in \mathbb{C}^k$, $w = (Z_{k+1}, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^d$, $k + d = n$, $k, d > 0$. Рассмотрим также квадрику X в $\mathbb{C}^n$, как обычно заданную уравнениями $w_j + \overline{w}_j = \langle L_j(z), \overline{z}\rangle$, $j = 1, \dots, d$. Как и выше, здесь $\langle z, \zeta\rangle = \sum_{j=1}^k z_j\zeta_j$ и каждый $L_j : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ — эрмитов $\mathbb{C}$-линейный оператор. Используем обозначение $w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle$, где $\langle L(z), \overline{z}\rangle = (\langle L_1(z), \overline{z}\rangle, \dots, \langle L_d(z), \overline{z}\rangle)$ — форма Леви квадрики X. Напомним, кроме того, что конус Леви квадрики X — это выпуклая оболочка множества $\{\langle L(z), \overline{z}\rangle, z \in \mathbb{C}^k\}$ в $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим также координаты $Z' = (z', w')$ в $\mathbb{C}^N$, где $z' = (Z'_1, \dots, Z'_m) \in \mathbb{C}^m$, $w' = (Z'_{m+1}, \dots, Z'_N) \in \mathbb{C}^s$, $m + s = N$, $m, s > 0$. Аналогично определим квадрику $Y \subset \mathbb{C}^N$ уравнениями $w' + \overline{w'} = \langle L'(z'), \overline{z'}\rangle'$. Здесь $\langle L'(z'), \overline{z'}\rangle' = (\langle L'_1(z'), \overline{z'}\rangle', \dots, \langle L'_s(z'), \overline{z'}\rangle)$ — форма Леви квадрики Y и каждый $L'_j : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ — эрмитов линейный оператор, а $\langle \tau, \eta\rangle' = \sum_{j=1}^m \tau_j\eta_j$.

Множество всех $z' \in \mathbb{C}^m$ таких, что $\langle L'(z'), \overline{z'}\rangle' = 0$, называется нулевым конусом формы Леви квадрики Y. Говорят, что нулевой конус формы Леви квадрики Y тривиален, если из того, что $\langle L'(z'), \overline{z'}\rangle' = 0$, следует, что $z' = 0$.

Основной результат составляет следующая

Теорема 3.1. *Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^N$ — квадрики, определенные выше, и пусть конус Леви квадрики X имеет непустую внутренность в $\mathbb{R}^d$. Пусть D — окрестность некоторой точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$, а $f : D \longrightarrow \mathbb{C}^N$ — голоморфное отображение, такое что $f(X \cap D) \subset Y$. Предположим, что нулевой конус формы Леви квадрики Y тривиален. Тогда f продолжается до комплексного рационального отображения на все $\mathbb{C}^n$.*

Напомним, что вещественно-аналитическое векторное поле $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \zeta_j(p)\partial_{Z_j}$ типа (1,0) касательно к M в точке p в том и только том случае, если его значение в каждой точке p квадрики X принадлежит голоморфному касательному пространству $H_p(X)$. Для определенного выше квадратичного многообразия X касательные операторы Коши–Римана имеют вид $\mathcal{L}_q = \partial_{z_q} + \sum_{j=1}^d (\sum_{r=1}^k a^j_{rq}\overline{z}_r)\partial_{w_j}$, $q = 1, \dots, k$, где (a^j_{rq}) — матрица оператора L_j. Эти поля образуют базис пространства сечений голоморфного касательного расслоения $H(X)$. Поскольку отображение $F = (F_1, \dots, F_N)$ голоморфно на D, то оно удовлетворяет уравнениям Коши–Римана $\overline{\mathcal{L}_q}F_j(Z) = 0$ при $Z \in X \cap D$. Напомним также, что любая квадрика — однородное многообразие; поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $0 \in X \cap D$, а F голоморфно в окрестности начала координат.

Метод исключения. Рассмотрим, соответственно, поля $\mathbb{C}(Z)$ и $\mathbb{C}(Z, \overline{Z})$ комплексных и вещественных (комплекснозначных) рациональных функций на $\mathbb{C}^n$. Пусть $\overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$ — множество функций, рациональных в точке z с антиголоморфными коэффициентами на D. Предположим, что функции $g_1, \dots, g_t$ голоморфны на D. Говорят, что функции $g_1, \dots, g_t$ линейно независимы на X над $\overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$, если существуют точка $p \in X \cap D$ и функции $a_1, \dots, a_t \in \overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$ такие, что выполнены следующие условия:

(i) p — неособая точка для каждого a_j;
(ii) $a_j(p, \overline{p}) \neq 0$ для некоторого j;
(iii) $\sum_{j=1}^t a_j(Z, \overline{Z})g_j(z) = 0$ при $z \in X$ в окрестности точки p.

Функции $g_1, \dots, g_t$ называются линейно зависимыми на D над $\mathbb{C}(Z)$, если существуют $b_1, \dots, b_t \in \mathbb{C}(Z)$ такие, что $\sum_{j=1}^t b_j(Z)g_j(Z) = 0$ при $Z \in D$ и, по крайней мере, одна b_j не равна тождественно нулю.

Лемма 3.2. *Предположим, что функции $g_1, \dots, g_t$ голоморфны на D, $t \geqslant 1$. Если функции $1, g_1, \dots, g_t$ линейно зависимы на X над $\overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$, то они линейно зависимы на D над $\mathbb{C}(Z)$.*

Доказательство. Рассуждаем по индукции. Пусть $t = 1$. Тогда $a_0(Z, \overline{Z}) + a_1(Z, \overline{Z})g_1(Z) = 0$ при $Z \in X \cap U_p$ для окрестности U_p точки p. Здесь $a_j \in \overline{H(D)}(Z)$ и выполнены (i),(ii),(iii). Очевидно, $a_1(p, \overline{p}) \neq 0$, а потому $g_1(Z) = -a_0(Z, \overline{Z})/a_1(Z, \overline{Z})$. Тогда из принципа отражения следует, что g_t продолжается до комплексной рациональной функции. Следовательно, функции 1 и g_1 линейно зависимы над $\mathbb{C}(Z)$. Предположим, что утверждение справедливо при $t = r - 1$.

Пусть функции $1, g_1, \dots, g_r$ линейно зависимы на X над $\overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$. Имеем для некоторых $p \in X \cap U_p$ и $a_j \in \overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$, что $\sum_{j=1}^r a_j(Z, \overline{Z})g_j(Z) = a_0(Z, \overline{Z})$, где $Z \in X \cap U_p$, а p — неособая точка для всех a_j.

Не нарушая общности, можно считать, что $a_r(p, \overline{p}) \neq 0$. Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^{r-1} a_j'(Z, \overline{Z})g_j(Z) + g_r(Z) = a_0'(Z, \overline{Z}) \tag{3.1}$$

при $Z \in X \cap U_p'$ ($a_j' = a_j/a_r$). Действуя на обе части (3.1) касательными операторами Коши–Римана $\overline{\mathcal{L}_q}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{r-1} (\overline{\mathcal{L}}_q a_j'(Z, \overline{Z}))g_j(Z) = \overline{\mathcal{L}_q} a_0'. \tag{3.2}$$

Возможны два случая.

Случай 1 $\overline{\mathcal{L}_q} a_j'(Z, \overline{Z}) = 0$ при $Z \in X \cap U_p'$, $q = 1, \dots, k$,$j = 1, \dots, r-1$ (а значит, и при $j = 0$). Из следствия 1.2 вытекает, что существуют функции $b_0, b_1, \dots, b_{r-1} \in \mathbb{C}(Z)$ такие, что $b_j(Z) = a_j'(Z, \overline{Z})$ при $Z \in X \cap U_p'$. Следовательно, в соответствии с (3.1), получаем

$$\sum_{j=1}^{r-1} b_j(Z)g_j(Z) + g_r(Z) = b_0(Z) \tag{3.3}$$

при $Z \in X \cap U_p'$. Так как X — порождающее многообразие, то в силу теоремы единственности (3.3) справедливо на X. Это означает, что функции $1, g_1, \dots, g_r$ линейно зависимы на D над $\mathbb{C}(Z)$.

Случай 2. Существуют $p' \in X \cap U_p'$ и $q = q_0$, $j = j_0$ такие, что $\overline{\mathcal{L}_q} a_j'(p', \overline{p'}) \neq 0$ при $q = q_0$,$j = j_0$. Тогда (3.2) (при фиксированном $q = q_0$) означает, что функции $1, g_1, \dots, g_{r-1}$ линейно независимы на X над $\overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$, потому что $\overline{\mathcal{L}_q} a_j' \in \overline{\mathcal{O}(D)}(Z)$. По предположению, получаем, что функции $1, g_1, \dots, g_{r-1}$ линейно зависимы над $\mathbb{C}(Z)$.

Обозначим через $\mathcal{M}(D)$ множество функций, мероморфных на D; рассмотрим его как линейное пространство над полем $\mathbb{C}(Z)$. Кроме того, пусть V — линейное подпространство $\mathcal{M}(D)$, порожденное функциями $1, f_1, \dots, f_N$. Очевидно, что f продолжается до рационального отображения в том и только том случае, если $\dim V = 1$. Значит, цель состоит в том, чтобы доказать, что $\dim V = 1$.

Предположим, что это не так. Тогда для некоторого $q \geqslant 1$ функции $1, f_{i_1}, \dots, f_{i_q}$ образуют базис V (здесь $1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant N$). Это означает, что для всякого $j = 1, \dots, N$ и для всякого $Z \in D$

$$f_j = \sum_{\nu=1}^{q} a_j^\nu f_{i_\nu} + b_j, \tag{3.4}$$

где $a_j^\nu, b_j \in \mathbb{C}(Z)$ (при $j = i_t$ полагаем $a_j^\nu = \delta_t^\nu$ (символ Кронекера) и $b_j = 0$, $t, \nu = 1, \dots, q$). Не нарушая общности, предполагаем, что 0 — неособая точка при всех a_j^ν, b_j.

Рассмотрим определяющие функции

$$r_j(Z', \overline{Z}') = w_j' + \overline{w}_j' - \langle L_j'(z'), \overline{z}'\rangle', \quad j = 1, \dots, s, \tag{3.5}$$

квадрики Y. Так как $f(X \cap D) \subset Y$, то

$$r_j(f(z), \overline{f(z)}) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \tag{3.6}$$

при $Z \in X \cap D$. После подстановки (3.4) в (3.6) можно представить полученное выражение в следующем виде:

$$\sum_{\nu=1}^{q} A_j^{\nu} f_{i_\nu} + A_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, s. \tag{3.7}$$

Здесь

$$A_j^{\nu} = \alpha_j^{\nu} + \sum_{\mu=1}^{q} \beta_j^{\nu\mu} \overline{f}_{i_\mu}, \quad \nu = 0, \dots, q, \tag{3.8}$$

где $\alpha_j^{\nu}, \beta_j^{\nu\mu} \in \mathbb{C}(Z, \overline{Z})$. Следовательно, $A_j^{\nu} \in \overline{H(D)}(Z)$ при $\nu = 0, \dots, q, j = 1, \dots, s$.

Лемма 3.3. *Функции $1, f_{i_1}, \dots, f_{i_q}$ линейно зависимы на X над $\overline{H(D)}(Z)$.*

Доказательство. Если $A_j^q(p, \overline{p}) \neq 0$ для некоторых j и $p \in X \cap D$, то из (3.7) следует нужное утверждение. Пусть $A_j^q(Z, \overline{Z}) = 0$ при $j = 1, \dots, s$ и $z \in X \cap D$. Тогда если $\beta_j^{qq}(p, \overline{p}) \neq 0$ для некоторого j и некоторого $p \in X \cap D$, то из равенства (3.8) (после комплексного сопряжения) вытекает утверждение. Следовательно, осталось изучить случай, когда $A_j^q(Z, \overline{Z}) = 0$ и $\beta_j^{qq}(Z, \overline{Z}) = 0$ при всех $Z \in X \cap D$, $j = 1, \dots, s$.

Рассмотрим комплексную прямую $t \subset \mathbb{C}^N$ вида

$$\{Z' \in \mathbb{C}^N : Z'_j = a_j^q(0)c + b_j(0),\ c \in \mathbb{C},\ j = 1, \dots, N\} \tag{3.9}$$

(это прямая, поскольку $a_{i_q}^q(0) = 1$).

Покажем, что $r_j(Z', \overline{Z}') = 0$, $j = 1, \dots, s$, при $Z' \in t$. В самом деле, сопоставление (3.4) и (3.9) показывает, что $r_j(Z', \overline{Z}')$, $Z' \in t$, совпадает с правой частью (3.7), где $Z = 0$, $f_{i_\nu}(0) = 0$ при $\nu = 1, \dots, q-1$, а $f_{i_q}(0)$ заменено на $c \in \mathbb{C}$. Следовательно, при $Z' \in t$ имеем

$$r_j(Z', \overline{Z}') = (\alpha_j^q(0) + \beta_j^{qq}(0)\overline{c})c + (\alpha_j^0(0) + \beta_j^{0q}(0)\overline{c}). \tag{3.10}$$

По предположению, $\beta_j^{qq}(0) = 0$ и $\alpha_j^q(0) = A_j^q(0) = 0$ (напомним, что $f(0) = 0$). Так как ограничение $r_j(Z', \overline{Z}')|t$ — вещественнозначная функция по $c \in \mathbb{C}$, то получаем, что $\beta_j^{0q}(0) = 0$. Полагая $Z = 0$ в (3.7), заключаем, что $\alpha_j^0(0) = 0$. Следовательно, $r_j(Z', \overline{Z}') = 0$ для любого $Z' \in t$. Это означает, что $t \subset Y$, и получается противоречие с условием тривиальности нулевого конуса формы Леви квадрики Y.

Таким образом, функции $1, f_{i_1}, \dots, f_{i_q}$ линейно зависимы на D над $\mathbb{C}(Z)$. Но это невозможно, поскольку эти функции образуют базис V. Следовательно, $q = 0$ и $\dim V = 1$. Это доказывает теорему.

Вторая теорема о квадриках. Как и выше, рассмотрим квадрику X коразмерности d в $\mathbb{C}^n$, заданную формулой $w + \overline{w} =< L(z), \overline{z} >$, а также квадрику Y в $\mathbb{C}^{n'}$ вида $w' + \overline{w}' = \langle L'(z'), \overline{z}' \rangle'$ и коразмерности d'. Если $f : X \longrightarrow Y$ — отображение класса C^1, то обозначим через df_p дифференциал f в точке $p \in X$.

Теорема 3.4. *Предположим, что конус Леви квадрики X имеет непустую внутренность в $\mathbb{R}^d$. Пусть, кроме того, $f : D \longrightarrow Y$ — CR-отображение класса C^1 из открытого связного подмножества D квадрики X, содержащего начало координат, в квадрику Y. Пусть, далее, $f(0) = 0$ и*

$$\sum_{j=1}^{d'} L'_j(df_0(H_0(X))) = H_0(Y). \tag{3.11}$$

Тогда f продолжается на $\mathbb{C}^n$ как комплексное рациональное отображение.

Доказательство. Можно считать, что f голоморфно в окрестности начала координат. Пусть $f = (h, g)$, где $h = (h_1, \dots, h_{k'}) = (f_1, \dots, f_{k'})$ и $g = (g_1, \dots, g_{d'}) = (f_{k'+1}, \dots, f_{n'})$. Так как $df_0(H_0(X)) = H_0(Y)$, то

$$\frac{\partial g}{\partial z_q}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, d',\ q = 1, \dots, k. \tag{3.12}$$

Из соотношения $f(D) \subset Y$ для $(z, w) \in D$ следует, что

$$\langle L'_j(h), \overline{h}\rangle' = g_j + \overline{g}_j, \quad j = 1, \dots, d'. \tag{3.13}$$

Действуя на обе части (3.13) касательными операторами Коши–Римана $\mathcal{L}_q$, получаем

$$\langle L'_j(\mathcal{L}_q h), \overline{h}\rangle' = \mathcal{L}_q g_j, \quad q = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, d',$$

где $\mathcal{L}_q h = (\mathcal{L}_q h_1, \dots, \mathcal{L}_q h_{k'})$. Тогда из явных выражений для $\mathcal{L}_q$ и (3.12) вытекает, что

$$L'_j(\mathcal{L}_q h)(0) = L'_j(df_0(e_q)), \tag{3.14}$$

где e_q, $q = 1, \dots, k$, — стандартный базис $\mathbb{C}^k$. Из условия (3.11) следует, что ранг системы векторов $L'_j(df_0(e_q))$, $j = 1, \dots, d'$,$q = 1, \dots, k$, равен k'. Следовательно, существуют пары $(j(s), q(s))$,$s = 1, \dots, k'$, $1 \leqslant j(s) \leqslant d'$, $1 \leqslant q(s) \leqslant k$, такие что векторы (3.14) линейно зависимы при $(j, q) = (j(s), q(s))$, $s = 1, \dots, k'$.

Для (z, w) из D имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений для компонент f:

$$\begin{aligned} &\langle L'_j(\mathcal{L}_q h), \overline{h}\rangle' = \mathcal{L}_q g_j, \\ &(j, q) = (j(s), q(s)), \quad s = 1, \dots, k', \\ &\overline{g}_j - \langle L'_j(h), \overline{h}\rangle' = -g_j, \quad j = 1, \dots, d' \end{aligned}$$

Ее определитель, вычисленный в $(z, w) = 0$, отличен от 0. Из правила Крамера следует, что

$$\overline{f}_j(z, w) = R_j(\overline{z}, z, w), \quad j = 1, \dots, n', \tag{3.15}$$

при (z, w) в D. Здесь каждая R_j — вещественно-аналитическая функция в окрестности начала координат. Кроме того, каждая R_j — рациональная функция в $\overline{z}$ с коэффициентами, голоморфными в окрестности начала координат. По принципу отражения получаем, что f рациональна.

3.2. Отображения алгебраических многообразий. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим вещественное алгебраическое многообразие X в Ω коразмерности $d \geqslant 1$,

$$X = \{Z \in \Omega : P_j(Z, \overline{Z}) = 0,\ j = 1, \dots, d\}, \tag{3.16}$$

где P_j — вещественные полиномы, а $\partial P_1 \wedge \dots \wedge \partial P_d \neq 0$.

Рассмотрим также область Ω' в $\mathbb{C}^{n'}$ и вещественное алгебраическое порождающее многообразие Y коразмерности $d' \geqslant 1$ вида

$$Y = \{Z' \in \Omega' : P'_j(Z', \overline{Z}') = 0,\ j = 1, \dots, d'\}, \tag{3.17}$$

где P'_j — вещественные полиномы, а $\partial P'_1 \wedge \dots \wedge P'_d \neq 0$ в Ω'.

Справедлив следующий аналог предыдущей теоремы о квадриках.

Теорема 3.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и $\Omega' \subset \mathbb{C}^{n'}$ — области, $X \subset \Omega$ и $Y \subset \Omega'$ — вещественные алгебраические порождающие многообразия вида* (3.16) *и* (3.17)*, соответственно, причем X имеет невырожденный конус Леви в некоторой точке $p \in X$. Допустим, что $U \subset X$ — открытое связное подмножество X, содержащее точку p, а $f : U \longrightarrow Y$ — CR-отображение класса C^1, удовлетворяющее следующему условию:*

$$\sum_{j=1}^{d'} L^j_{p'}(df_p(H_p(X))) = H_{p'}(Y), \tag{3.18}$$

где $p' = f(p)$. Тогда f продолжается до алгебраического отображения на $\mathbb{C}^n$.

Заметим, во-первых, что (3.18) не зависит от выбора эрмитова скалярного произведения на $\mathbb{C}^{n'}$, с помощью которого были определены операторы Леви $L^j_{p'}$. Если $\hat{L}^j_{p'}$ определяется другим скалярным произведением, то оно связано с $L^j_{p'}$ равенством $\hat{L}^j_{p'} = AL^j_{p'}$, где A — невырожденный $\mathbb{C}$-линейный оператор на $H_p(X)$. Поэтому (3.18) также справедливо для операторов $\hat{L}^j_{p'}$.

Следствие 3.6. *Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — CR-диффеоморфизм класса C^1 вещественных алгебраических многообразий в $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) с невырожденными формами Леви и невырожденными конусами Леви. Тогда f продолжается до алгебраического отображения на $\mathbb{C}^n$.*

В частности, в гиперповерхностном случае получаем классическую теорему Вебстера, сформулированную во введении.

Следствие 3.7. *Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — CR-диффеоморфизм класса C^1 вещественных алгебраических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) с невырожденными формами Леви и невырожденными конусами Леви. Тогда f продолжается до алгебраического отображения на $\mathbb{C}^n$.*

Касательные операторы Коши–Римана и основные уравнения. Не нарушая общности, можно взять $p = 0$ и $f(p) = 0$. Полагая $Z = (z, w)$ и $Z' = (z', w')$, а также обозначая $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k_z \times \mathbb{C}^d_w$ и $\mathbb{C}^{n'} = \mathbb{C}^{k'}_{z'} \times \mathbb{C}^{d'}_{w'}$, можно привести определяющие многочлены для X и Y к виду

$$P_j = w_j + \overline{w}_j + o(|Z|), j = 1, \dots, d, \tag{3.19}$$

$$P'_j = w'_j + \overline{w}'_j + o(|Z|), j = 1, \dots, d'. \tag{3.20}$$

При этом выборе координат имеем $H_0(X) = \mathbb{C}^k_z = \{(z, w) : y = 0\}$ и $H_0(Y) = \mathbb{C}^{k'}_{z'} = \{(z', w') : w' = 0\}$. Рассмотрим теперь касательные операторы Коши–Римана

$$\mathcal{L}_q = \Delta(Z, \overline{Z})\frac{\partial}{\partial z_q} - \sum_{j=1}^{d} a_{jq}(Z, \overline{Z})\frac{\partial}{\partial w_j}, \tag{3.21}$$

где Δ — определитель матрицы

$$\Delta_{sj} = \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial w_j}\right)^{j=1,\dots,d}_{s=1,\dots,d} \tag{3.22}$$

(s — номер строки, а j — номер столбца). Тогда имеем также, что

$$a_{jq} = \sum_{s=1}^{d} \Delta b_{js}\frac{\partial \rho_s}{\partial z_q}, \tag{3.23}$$

где b_{js} — обратная к матрице (3.22). Коэффициенты векторных полей (3.21) являются полиномами по z, w. Имеем также

$$\Delta(0) = 1, a_{jq}(0) = 0, \quad j = 1, \dots, d,\ q = 1, \dots, k, \tag{3.24}$$

а из включений $df_0(H_0(X)) \subset H_0(X)$ и (3.19) следует, что

$$\partial f_j/\partial z_q(0) = 0, \quad j = k' + 1, \dots, n',\ q = 1, \dots, k. \tag{3.25}$$

В соответствии с теоремой Туманова [21], из невырожденности конуса Леви многообразия X в начале координат выводим, что отображение f голоморфно продолжается на клин с острием X. Используя принцип отражения, получаем, что f голоморфно продолжается на окрестность Ω начала координат в $\mathbb{C}^n$; положим $U = X \cap \Omega$.

Условие $f(U) \subset Y$ означает, что $P'_j(f, \overline{f}) = 0$ при $Z \in U$ и $j = 1, \dots, d'$. Применяя операторы Коши–Римана (3.21) к обеим частям этих равенств, получаем

$$\mathcal{L}_q P'_j(f, \overline{f}) = 0, \quad q = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, d', \tag{3.26}$$

при $Z \in U$. Введем теперь векторнозначную функцию $D(f)$, определенную на Ω как

$$D(f) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial f_{n'}}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial Z_n}, \dots, \frac{\partial f_{n'}}{\partial Z_n}\right).$$

Левые части (3.26) можно рассматривать как полиномы по $Z, \overline{Z}, f, \overline{f}$ и $\partial f/\partial Z_j$, $\partial \overline{f}_j/\partial Z_s$. Так как f голоморфно, то $\partial \overline{f}/\partial Z_s = 0$. Значит, выражения

$$\Phi_{qj}(Z, \overline{Z}, f, \overline{f}, D(f)) = \mathcal{L}_q \rho'_j(f, \overline{f}) \tag{3.27}$$

— полиномы по $Z, \overline{Z}, f, \overline{f}, D(f)$. Обозначим через $\hat{0}$ точку $(0,0,0,0,D(f)(0))$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \times \mathbb{C}^{n'} \times \mathbb{C}^{nn'}$.

Лемма 3.8. *В множестве функций* (3.27) *с* $q = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, d'$ *можно выбрать подмножество* $\Phi_1 = \Phi_{q(1)j(1)}, \dots, \Phi_{q(k')j(k')}$ *такое, что матрица Якоби*

$$\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial f_s}(\hat{0})\right)_{j=1,\dots,k'}^{s=1,\dots,k'} \tag{3.28}$$

имеет ранг k'.

Доказательство. Фиксируем j и рассмотри матрицу Якоби

$$\left(\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial \overline{f}_s}(\hat{0})\right)_{j=1,\dots,k'}^{s=1,\dots,k}.$$

Из (3.19), (3.21), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) следует, что эта матрица может быть переписана в виде

$$\left(\sum_{r=1}^{k'} \frac{\partial^2 \rho'_j}{\partial Z'_r \partial \overline{Z}'_s}(0) \frac{\partial f_r}{\partial Z_q}(0)\right)_{j=1,\dots,k'}^{s=1,\dots,k}. \tag{3.29}$$

Условие (3.18) не зависит от выбора скалярного произведения на $\mathbb{C}^{n'}$. Значит, можно взять эрмитово скалярное произведение, которое определяет операторы Леви L_0^j, являющиеся каноническими в координатах (3.19). Тогда каждый оператор L_0^j в стандартном базисе e'_r, $r = 1, \dots, k'$ в $\mathbb{C}^{k'} = H_0(X)$ имеет матрицу вида

$$\left(\frac{\partial^2 \rho'_j}{\partial Z'_j \partial \overline{Z}'_s}(0)\right)_{j=1,\dots,k'}^{s=1,\dots,k'}.$$

Поэтому q-я строка матрицы (3.29) состоит из координат вектора $L_0^j(df_0(e_q))$, где e_q, $q = 1, \dots, k$, — стандартный базис $\mathbb{C}^{k'}$, т.е.

$${}^t(\partial \Phi_{qj}/\partial \overline{f}_1(\hat{0}), \dots, \partial \Phi_{qj}/\partial \overline{f}_k(\hat{0})) = L_0^j(df_0(e_q)), \tag{3.30}$$

где ^{t} обозначает транспозицию. В соответствии с (3.18), ранг множества векторов $L_0^j(df_0(e_q))$, $j = 1, \dots, d'$,$q = 1, \dots, k$, равен k. Это завершает доказательство.

Пусть Φ_j, $j = 1, \dots, k'$, — функции, выбранные в соответствии с леммой 3.8. При $Z \in U$ имеем

$$\Phi_j(z, \overline{z}, f, \overline{f}, D(f)) = 0, \quad \rho'_s(f, \overline{f}) = 0, \quad s = 1, \dots, d'. \tag{3.31}$$

Лемма 3.9. *Ранг матрицы Якоби системы* (3.31) *относительно* $\overline{f}$ *в точке* $\hat{0}$ *равен* n'.

Доказательство. Матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \overline{f}_s}(\hat{0}) & * \\ \hat{0}_{d'}^{k'} & \mathrm{Id}_{d'} \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Верхний левый блок этой матрицы образован матрицей (3.28), $\hat{O}_{d'}^{k'}$ — нулевая $d' \times k'$-матрица, а Id — единичная $d' \times d'$-матрица. По лемме 3.8 ранг матрицы Якоби равен $k' + d' = n'$.

Из леммы 3.9 следует, что можно применить теорему о неявной функции к системе (3.31). Получаем $f(z) = R(z, \overline{z})$ при $Z \in X \cap \Omega$ (где R — вещественно-аналитическая функция в Ω, алгебраическая относительно Z). В силу (3.19) и теоремы о неявной функции, получаем $X \cap \Omega = \{Z = (z, w) \in \Omega : w = \phi(z, \overline{Z})\}$. Поэтому

$$f(z, \phi(z, \overline{Z})) = R(z, \phi(z, \overline{Z}), \overline{Z}) \tag{3.33}$$

при $Z = (z, w) \in X \cap \Omega$. Теперь из алгебраического принципа отражения следует, что f продолжается до алгебраического отображения на $\mathbb{C}^n$. Это завершает доказательство.

Установим теперь алгебраическое обобщение первой теоремы о квадриках. Это требует более мощных методов. Итак, изучим алгебраические свойства голоморфных отображений алгебраических отображений в комплексных аффинных пространствах (вообще говоря, не равной размерности) с точки зрения коммутативной алгебры. Пусть ${}_p\mathbf{f} = ({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_{n'}) : U \longrightarrow \mathbb{C}^{n'}$ — росток голоморфного отображения в точке $p \in \mathbb{C}^n$; допустим, что ${}_p\mathbf{f}$ переводит вещественное-алгебраическое порождающее многообразие X в $\mathbb{C}^n$ в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$; т.е. существуют связная окрестность U точки p в $\mathbb{C}^n$ и представляющее отображение f ростка ${}_p\mathbf{f}$, голоморфное на U, такое что $f(X \cap U) \subset Y$. Рассмотрим поле $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ рациональных функций в $\mathbb{C}^n$ и его расширение $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_{n'})$, конечно порожденное компонентами ${}_p\mathbf{f}$, т.е. поле рациональных дробей в ${}_p\mathbf{f}$ с коэффициентами в $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$ (во избежание сложных обозначений, не будем различать рациональные функции и их ростки в точке p). Алгебраические свойства ростка ${}_p\mathbf{f}$ связаны со степенью трансцендентности $\operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f}) := \operatorname{tr.deg.} \mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_{n'})/\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$ этого расширения поля над $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$. Напомним, что *степень трансцендентности* $\operatorname{tr.deg.}(E/F)$ расширения E поля F есть мощность максимального (относительно теоретико-множественного включения) алгебраически независимого над F подмножества в E. Напомним, что два трансцендентных базиса E имеют одну и ту же мощность, называемую степенью трансцендентности F и обозначаемую через $\operatorname{tr.deg.}(E/F)$. Кроме того, если S порождает E, а S' — подмножество S, алгебраически независимое над F, то существует трансцендентный базис B в E такой, что $S' \subset B \subset S$. По поводу доказательств этих утверждений отсылаем читателя к [100].

Теорема 3.10. *Пусть X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, а ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$. Допустим, что X трансверсально по Сегре в точке p.*

Тогда существуют открытые окрестности U точки p в $\mathbb{C}^n$ и U' точки ${}_p\mathbf{f}(p)$ в $\mathbb{C}^{n'}$, а также представляющее отображение f, голоморфное на U, такое что $f(X \cap U) \subset Y$, и выполнено следующее свойство: для каждой точки a открытого плотного подмножества $X \cap U$ существует комплексное m-мерное алгебраическое многообразие $X_a \subset \mathbb{C}^{n'}$ такое, что $f(a) \in X_a$ и $X_a \cap U' \subset Y$, где $m = \operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$.

Из этого утверждения следуют несколько следствий, касающихся алгебраических свойств ростка ${}_p\mathbf{f}$. Следующий результат — прямое следствие предыдущей теоремы.

Следствие 3.11. *Пусть X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, а ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$. Предположим, что X трансверсально по Сегре в точке p. Пусть q — максимальная размерность комплексно-аналитических многообразий в $\mathbb{C}^{n'}$, открытые части которых содержатся в Y в окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$. Тогда* $\operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f}) \leqslant q$.

Следующий результат — геометрическая версия последнего утверждения.

Следствие 3.12. *Пусть X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, а ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$. Допустим, что*

X трансверсально по Сегре в точке p. Пусть q — максимальная размерность комплексно-алгебраических многообразий в $\mathbb{C}^{n'}$, открытые части которых содержатся в Y в окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$. Тогда график ${}_p\mathbf{f}f$ содержится в комплексно-алгебраическом многообразии размерности $\leqslant (n+q)$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$.

В специальном случае, когда Y не содержит открытых частей комплексно–аналитических многообразий положительной размерности в окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$, справедливо

Следствие 3.13. *Пусть X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, а ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно–алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$. Предположим, что X трансверсально по Сегре в точке p, а Y не содержит открытых частей комплексно–алгебраических многообразий положительной размерности в окрестности точки $p' = {}_p\mathbf{f}(p)$. Тогда ${}_p\mathbf{f}$ алгебраично.*

На самом деле, можно получить более общее и точное утверждение, чем теорема 3.10. Оказывается, что если выполнены предположения этой теоремы, то Y необходимо содержит вещественное подмногообразие, имеющее структуру расслоения с вещественной базой и комплексными слоями размерности $\mathrm{tr.deg.}({}_p\mathbf{f}$ (а не одно многообразие X_a). Более точно, справедлива

Теорема 3.14. *В условиях теоремы* 3.10*, справедливо следующее: в любой окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$ существует вещественно-аналитическое многообразие $N \subset Y$ размерности, не меньшей ранга ${}_p\mathbf{f}$, биголоморфное в декартовом произведении $\Gamma_a \times D$; здесь Γ_a — вещественно–аналитическое многообразие, а D — область в $\mathbb{C}^n$ с $m = \mathrm{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$.*

Алгебраическая зависимость и расширения полей. В этом пункте рассматривается связь между расширениями полей

$$\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n) \subset \mathcal{M}_p(X) \subset \mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}(X),$$
$$\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n) \subset \mathcal{M}_p^*(X) \subset \mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}(X)$$

и условием S-трансверсальности (отметим, что естественное расширение $\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n) \subset \mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n)(X)$ есть изоморфизм, поскольку X — порождающее многообразие).

Основной результат этого пункта состоит в следующем утверждении.

Предложение 3.15. *Пусть X — алгебраическое S-трансверсальное порождающее многообразие вблизи $p \in \mathbb{C}^n$. Тогда любая конечная система ростков в $\mathcal{O}_p(X) \subset \mathcal{M}_p^{\mathbb{R}}(M)$, алгебраически зависимая над $\mathcal{M}_p^*(X)$, также алгебраически зависима над $\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n)$.*

Доказательство. Пусть $\{{}_p\mathbf{g}_1, \dots, {}_p\mathbf{g}_k\} \subset \mathcal{O}_p(M)$ — система, алгебраически независимая над $\mathcal{M}_p^*(X)$. Это означает, что существует ненулевой многочлен ${}_p\mathbf{P}$ в $\mathcal{M}_p^*(X)[X_1, \dots, X_k]$ такой, что ${}_p\mathbf{P}({}_p\mathbf{g}_1, \dots, {}_p\mathbf{g}_k) = 0$. Можно записать ${}_p\mathbf{P}$ в виде ${}_p\mathbf{P} = \sum_{j=1}^m {}_p\mathbf{s}_j(Z, \overline{Z}) s_j(X_1, \dots, X_k)$, где S_j — одночлены, а ${}_p\mathbf{s}_j \in \mathcal{M}_p^*(X)$, любой ${}_p\mathbf{s}_j \neq 0$. Так как ${}_p\mathbf{P} \neq 0$, то $m \geqslant 1$; разделив ${}_p\mathbf{P}$ на ${}_p\mathbf{s}_m$; можно положить, что ${}_p\mathbf{s}_m(Z, \overline{Z}) = 1$. Докажем лемму по индукции по m. Фиксируем связную окрестность U точки p, достаточно малую и такую, что X трансверсально по Сегре во всякой точке $X \cap U$, а представляющие функции g_j ростков ${}_p\mathbf{g}_j$ голоморфны в U. Пусть также s_j — представляющие функции ростков ${}_p\mathbf{s}_j$, определенные на открытом плотном подмножестве $W \subset X \cap U$.

При $m = 1$ имеем $S_1(g_1(Z), \dots, g_k(Z)) = 0$ в W. В силу теоремы единственности отсюда следует, что функции g_j тождественно обращаются в нуль на X, а потому система $\{{}_p\mathbf{g}_1, \dots, {}_p\mathbf{g}_k\}$ алгебраически зависима над $\mathbb{C}(Z_1, \dots, Z_n)$.

Предположим теперь, что утверждение верно для любого многочлена, содержащего меньше, чем $m-1$ члена. Фиксируем базис $\{L\}_k$ пространства $\Gamma(X, H(X))$ локальных сечений $H(X)$ вблизи p такой, что коэффициенты векторного поля $\mathcal{L}_k(Z) = \sum_j \alpha_{jk}(Z, \overline{Z})(\partial/\partial Z_j)$ являются многочленами. Имеем на W

$$\sum_{j=0}^{m-1} s_j(Z, \overline{Z}) S_j(g_1, \dots, g_k) + S_m(g_1, \dots, g_k) = 0. \tag{3.34}$$

Применим к этому уравнению сопряженные векторные поля $\overline{\mathcal{L}}_t$; получим на W

$$\sum_{j=0}^{m-1} \overline{\mathcal{L}}_t(s_j(Z,\overline{Z}))S_j(g_1,\dots,g_k)=0.$$

Рассмотрим два случая. Во-первых, если $\mathcal{L}_t(s_j(Z,\overline{Z}))=0$ для любых t и j, то всякая функция s_j является вещественно-аналитической CR-функцией на открытом плотном подмножестве W в X; следовательно, она голоморфно продолжается на всю окрестность в $\mathbb{C}^n$ всякой точки этого множества. Фиксируем $a\in W$. Тогда из принципа отражения следует, что s_j представляет росток $\mathrm{Alg}_a(X)$. Пусть ${}_a\mathbf{g}_j$ — росток, определяемый g_j в точке a. Тогда равенство (3.34) означает, что множество $\{{}_a\mathbf{g}_1,\dots,{}_a\mathbf{g}_k\}$ алгебраически зависимо над Alg_a. Следовательно, росток ${}_a\mathbf{g}_k$ алгебраичен над полем $E=\mathrm{Alg}_a(X)({}_a\mathbf{g}_1,\dots,{}_a\mathbf{g}_{k-1})$. В самом деле, всякий элемент E есть частное

$$\frac{f({}_a\mathbf{g}_1,\dots,{}_a\mathbf{g}_{k-1})}{h({}_a\mathbf{g}_1,\dots,{}_a\mathbf{g}_{k-1})}, \tag{3.35}$$

где $f,h\in\mathrm{Alg}_a[X_1,\dots,X_{k-1}]$ — многочлены. Поскольку всякий росток Alg_a и каждый ${}_a\mathbf{g}_j$ алгебраичны над K, то E алгебраична над K.

Тогда росток ${}_a\mathbf{g}_k$ алгебраичен над K, а потому система $\{{}_a\mathbf{g}_1,\dots,{}_a\mathbf{g}_{k-1}\}$ алгебраически зависима над $\mathbb{C}(Z_1,\dots,Z_n)$. По теореме единственности система $\{{}_a\mathbf{g}_1,\dots,{}_a\mathbf{g}_k\}$ оказывается алгебраически зависимой над $\mathbb{C}(Z_1,\dots,Z_n)$.

Если существуют j_0 и t_0 такие, что $\overline{\mathcal{L}}_{t_0}(p_{j_0})\neq 0$, то можно использовать (3.35) и применить индукцию к многочлену $Q=\overline{\mathcal{L}}_{t_0}(P)$.

Доказательство основных результатов об алгебраичности отображений. В этом пункте доказываются основные результаты, связанные с алгебраичностью отображений. Всюду предполагается, что выполняется следующее условие: *X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие в окрестности точки $p\in X$ в $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$, трансверсальное по Сегре в этой точке p; ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$, а $m=\mathrm{tr.deg.}(_\mathbf{f})$.*

Вложение графика ростка ${}_p\mathbf{f}$ в комплексно-алгебраическое многообразие.

Условие $m=\mathrm{tr.deg.}(_p)$ означает, что существуют целые $1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n'$, такие что $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{i_m}\}_p$ — трансцендентный базис $\mathbb{C}(Z_1,\dots,Z_n)(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{n'})_p$ над $\mathbb{C}(Z_1,\dots,Z_n)$. После окончательной перенумерации, не ограничивая общности, можно считать, что $i_1=1,\dots,i_m=m$.

Будем использовать обозначение ${}_p\mathbf{f}=({}_p\mathbf{g},{}_p\mathbf{h})$ для ростка отображения ${}_p\mathbf{h}$, где ${}_p\mathbf{g}=({}_p\mathbf{g}_1,\dots,{}_p\mathbf{g}_m)=({}_p\mathbf{f}_1,\dots,{}_p\mathbf{f}_m)$ и ${}_p\mathbf{h}=({}_p\mathbf{h}_1,\dots,{}_p\mathbf{h}_{n'-m})=({}_p\mathbf{f}_{m+1},\dots,{}_p\mathbf{f}_{n'})$. Положим $Z'=(z',w')$, $z'=(z'_1,\dots,z'_n)$, $w'=(w'_1,\dots,w'_{n'-m})$; рассмотрим кольца

$$\begin{gathered}\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_n,{}_p\mathbf{g}_1,\dots,{}_p\mathbf{g}_m]=\mathbb{C}[Z,{}_p\mathbf{g}]\subset\mathcal{O}_p,\\ \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_n,z'_1,\dots,z'_m]=\mathbb{C}[Z,z'].\end{gathered}$$

Лемма 3.16. *Отображение подстановки $s:\mathbb{C}[Z,z']\longrightarrow\mathbb{C}[Z,{}_p\mathbf{g}]$, определенное по формулам $s:Z_j\mapsto Z_j$, $z'_j\mapsto{}_p\mathbf{g}_j$, есть изоморфизм колец.*

Доказательство. Очевидно, что s — эпиморфизм, а из алгебраической независимости системы $\{{}_p\mathbf{g}_1,\dots,{}_p\mathbf{g}_m\}$ следует, что ядро s тривиально.

По определению трансцендентного базиса, существуют ненулевые многочлены Q_j в кольце

$$\mathbb{C}(Z_1,\dots,Z_n,{}_p\mathbf{g}_1,\dots,{}_p\mathbf{g}_m)[X]=\mathbb{C}(Z,{}_p\mathbf{g})[X]$$

такие, что $Q_j({}_p\mathbf{h}_j)=0$ в $\mathcal{M}_p(X)$. Можно выбрать каждый Q_j лежащим в кольце $\mathbb{C}[Z,{}_p\mathbf{g}][X]$, изоморфном $\mathbb{C}[Z,z'][X]$, и, следовательно, по основным теоремам алгебры факториальном. Поэтому можно считать, что каждый многочлен Q_j неприводим в $\mathbb{C}[Z,{}_p\mathbf{g}][X]$ (и, следовательно, неприводим в $\mathbb{C}(Z,{}_p\mathbf{f})[X]$ по лемме Гаусса).

Представим каждый многочлен Q_j в виде $Q_j = \sum_{k=0}^{N_j} q_{jk}(Z, {}_p\mathbf{g})X^k$, где $\deg Q_j = N_j > 0$, $q_{jk} \in \mathbb{C}[Z, {}_p\mathbf{g}]$. Рассмотрим многочлены $\tilde{Q}_j = s^{-1}(Q_j) \in \mathbb{C}[Z, z'][X]$, определенные по формулам

$$\tilde{Q}_j = \sum_{k=0}^{N_j} q_{jk}(Z, z')X^k$$

и по лемме 3.16 неприводимые в $\mathbb{C}[Z, z'][X]$. Для каждого j отображение подстановки $s_j : \mathbb{C}[Z, z'][X] \longrightarrow \mathbb{C}[Z, z'][w'_j]$, соответствие, определенное формулой $X \mapsto w'_j$, есть изоморфизм колец. Следовательно, для всякого j многочлен $\hat{Q}_j = s_j(\tilde{Q}_j)$ имеет вид

$$\hat{Q}_j = \sum_{k=0}^{N_j} q_{jk}(Z, z'){w'_j}^k$$

и является неприводимым в кольце $\mathbb{C}[Z, z', w]$. Сопоставим ${}_p\mathbf{f}$ комплексно-алгебраическое многообразие $\mathcal{A}_f$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} = \mathbb{C}^n(Z) \times \mathbb{C}^m(z') \times \mathbb{C}^{n'-m}(w')$, определенное как множество общих нулей многочлена $\hat{Q}_j$:

$$\mathcal{A}_f = \{(Z, Z') : \hat{Q}_j(Z, z', w'_j) = 0, \ j = 1, \ldots, n' - m\}.$$

Тогда график $\Gamma_{{}_p\mathbf{f}} = \{(Z, Z') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} : Z' = {}_p\mathbf{f}(Z), Z \in X\}$ ростка ${}_p\mathbf{f}$ содержится в $\mathcal{A}_f$. (Вообще говоря, многообразие $\mathcal{A}_f$ приводимо, так что в действительности рассматривается его неприводимая компонента графика f, и для нее мы сохраняем обозначение $\mathcal{A}_f$.) Рассмотрим естественную проекцию $\tau : \mathbb{C}^n(Z) \times \mathbb{C}^m(z') \times \mathbb{C}^{n'-m}(w') \longrightarrow \mathbb{C}^n(Z) \times \mathbb{C}^m(z')$.

Лемма 3.17. *Существует комплексно–алгебраическое подмножество B в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ размерности $< n+m$, такое что ограничение $\tau : \mathcal{A}_f \backslash \tau^{-1}(B) \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ есть локальный биголоморфизм. В частности, $\dim \mathcal{A}_f = n + m$.*

Доказательство. Поскольку каждый многочлен $\hat{Q}_j$ неприводим в $\mathbb{C}[Z, z', w_j] = \mathbb{C}[Z, z'][w_j]$, достаточно взять B равным $\cup_j\{(Z, z') : D_j(Z, z') = 0\}$, где $D_j(Z, z')$ — дискриминант (относительно w_j) многочлена $\hat{Q}_j$.

Обозначим через $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}}$ росток ${}_p\mathbf{g}$, т.е. росток многообразия в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}} = \{(Z, z') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : z' = {}_p\mathbf{g}(Z), Z \in X\}$. Из алгебраической независимости системы $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m\}_p$ над $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$ вытекает, что $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}}$ не содержится ни в каком комплексно-алгебраическом многообразии в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$. В частности, $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}}$ не содержится в B.

Локальная геометрия многообразия $\mathcal{A}_f$. Пусть $f = (g, h)$ — представляющее отображение ростка ${}_p\mathbf{f} \in \mathcal{O}_p^{n'}(X)$, голоморфное в достаточно малой связной окрестности U_p точки p, и такое, что $f(X \cap U_p) \subset Y$ и $X \cap U_p$ трансверсально по Сегре во всякой точке. Тогда существует открытое плотное подмножество S в $X \cap U$, такое что для любого $a \in S$ точка $(a, g(a))$ не принадлежит множеству B. Фиксируем такую точку a. Тогда из леммы 3.17 и теоремы о неявной функции следует, что существуют окрестности U_a точки a в $\mathbb{C}^n$, V_a точки $g(a)$ в $\mathbb{C}^m$ и W_a точки $h(a)$ в $\mathbb{C}^{n'-m}$ такие, что $\mathcal{A}_f$ можно представить в $U_a \times V_a \times W_a$ в виде

$$\mathcal{A}_f \cap (U_a \times V_a \times W_a) = \{(Z, z', w') \in U_a \times V_a \times W_a : w' = H(Z, z')\}.$$

Здесь H голоморфно в $U_a \times V_a$, алгебраично и представляет росток ${}_a\mathbf{H}$ в $\mathcal{O}^{n'-m}_{(a,g(a))} \cap \mathrm{Alg}^{n'-m}_{(a,g(a))}$; кроме того, поскольку график f содержится в $\mathcal{A}_f$, то

$$H(Z, g(Z)) = h(Z), \quad Z \in U_a. \tag{3.36}$$

Пусть $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ — естественная проекция. Отображение

$$\Phi : \mathcal{A}_f \cap U_a \times V_a \times W_a \longrightarrow U_a \times V_a \times \{0\}$$
$$\Phi : Z \mapsto Z, z' \mapsto z', w \mapsto w - H(Z, z')$$

есть глобальный биголоморфизм между $\mathcal{A}_f \cap U_a \times V_a \times W_a$ и прямым произведением $U_a \times V_a \times \{0\}$, снабженным естественной проекцией $\tilde{\pi} : U_a \times V_a \times \{0\} \longrightarrow U_a$ в силу структуры тривиального голоморфного расслоения над U_a. Так как $\tilde{\pi}\circ\Phi\circ\pi^{-1}(Z) = Z$ for $Z\in U_a$, то можно считать $\mathcal{A}_f\cap U_a\times V_a\times W_a$ имеющим проекцию π как у тривиального голоморфного расслоения над U_a.

Таким образом, имеем следующее описание локальной структуры $\mathcal{A}_f$.

Лемма 3.18. *Пересечение $\mathcal{A}_f\cap U_a\times V_a\times W_a$, снабженное проекцией π, допускает структуру тривиального голоморфного расслоения над U_a. Его слои $\pi^{-1}(Z^0) = \{(Z^0, Z') : Z'\in V_a\times W_a, w' = H(Z,z')\}$ — открытые куски комплексно-алгебраических m-мерных многообразий в $\mathbb{C}^{n'}$ при $Z^0\in U_a$.*

Вложение слоев в $\mathcal{A}_f$ в Y. До сих пор мы не рассматривали многообразие-образ Y. Теперь наша основная цель — показать, что слои $\pi^{-1}(Z)\cap\mathcal{A}_f\cap(U_a\times V_a\times W_a)$ в действительности содержатся в Y, если $Z\in X\cap U_a$ (возможно после уменьшения окрестностей U_a, V_a,W_a). Это позволит построить много m-мерных комплексных подмногообразий в Y.

Пусть Y определяется вещественными многочленами $P'_j(Z',\overline{Z}')$, $j=1,\dots,d$, $Z'\in\mathbb{C}^{n'}$. Так как f переводит $X\cap U_p$ в Y, то $P'_j(f,\overline{f}) = 0$, $j=1,\dots,d$, на $X\cap U_p$. Рассмотрим суперпозиции $r_j(Z,\overline{Z},z',\overline{z}') = P'_j(z',H(Z,z'),\overline{z}',\overline{H}(Z,z'))$, являющиеся аналитическими функциями в окрестности точки $(a,g(a))$. Из (3.36) следует выполнение равенств

$$r_j(Z,\overline{Z},g(Z),\overline{g}(Z)) = 0,\quad j=1,\dots,d, \tag{3.37}$$

при $Z\in X\cap U_a$.

Обозначим через ${}_a\mathbf{r}_j$ ростки в точке a, определяемые ограничениями $r_j|(X\cap U_a)\times V_a$. Пусть $\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap U_a)\times V_a)$ — целое кольцо ограничений многочленов из $\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']$ на $X\cap U_a)\times V$ путем естественного эпиморфизма ограничения

$$\varphi : \mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}'] \longrightarrow \mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap U_a)\times V_a),$$
$$\varphi : P\mapsto \mathbf{P} = P|(X\cap U_a)\times V_a.$$

Лемма 3.19. *Для каждого j росток ${}_a\mathbf{r}_j\in\mathcal{O}^{\mathbb{R}}_{(a,g(a))}((X\cap U_a)\times V_a))\subset\mathcal{M}^{\mathbb{R}}_{(a,g(a))}((X\cap U_a)\times V_a)$ алгебраичен над факторполем $\mathbb{C}(Z,\overline{Z},z',\overline{z}')((X\cap U_a)\times V_a)$ поля $\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap U_a)\times V_a)$.*

Доказательство. Росток ${}_a\mathbf{H}\in\mathcal{O}_p(X)$ алгебраичен над $\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_n]$, так что ростки ${}_a\mathbf{H}$, ${}_a\overline{\mathbf{H}}$ алгебраичны над кольцом $\mathbb{C}[Z,\overline{Z}](X\cap U_a)$ ограничений многочленов из $\mathbb{C}[Z,\overline{Z}]$ на $X\cap U_a$. С другой стороны, P'_j — многочлены из $\mathbb{C}[z,\overline{z}'](V_a)[w,\overline{w}']$, где $\mathbb{C}[z',\overline{z}'](V_a)$ — кольцо ограничений многочленов из $\mathbb{C}[z',\overline{z}']$ на V_a. Применив процедуру расширения колец

$$\mathbb{C}[Z,\overline{Z}](X\cap U_a)\subset\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap U_a)\times V_a),$$
$$\mathbb{C}[z',\overline{z}'](V_a)\subset\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap U_a)\times V_a).$$

получаем требуемое утверждение.

Рассмотрим пересечение $\mathcal{A}_f\cap(X\times Y)$ вблизи $(a,f(a))$, которое определяется уравнениями

$$w' = H(Z,z'), r_j(Z,\overline{Z},z,\overline{z}') = 0,$$
$$Z\in X,\ j=1,\dots,d.$$

Рассмотрим росток ${}_a\mathbf{g}$, определенный функцией g в точке a. Фиксируем окрестность $\hat{U}_a\subset U_a$ точки a в $\mathbb{C}^n$ и окрестность $\hat{V}_a\subset V_a$ точки $g(a)$ в $\mathbb{C}^m$.

Лемма 3.20. *Имеем $r_j = 0$ на $(M\cap\hat{U}_a)\times\hat{V}_a$ для всякого j.*

Доказательство. Предположим от противного, что для некоторых k r_k не обращается тождественно в нуль на $(X\cap\hat{U}_a)\times\hat{V}_a$. Из леммы 3.19 следует, что существует ненулевой многочлен $\mathbf{T}\in\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap\hat{U}_a)\times\hat{V}_a)[X]$ (его коэффициенты ограничены, как и выше, на $(X\cap\hat{U})\times\hat{V}_a$), такой что

$$\mathbf{T}(r_k)(Z,\overline{Z},z',\overline{z}') = 0 \tag{3.38}$$

на $X\cap\hat{U}_a)\times\hat{V}_a$. Так как r_k не обращается тождественно в нуль на $(X\cap\hat{U}_a)\times\hat{V}_a$, то $\mathbf{T}\neq 0$ в $\mathbb{C}[Z,\overline{Z},z',\overline{z}']((X\cap\hat{U}_a)\times\hat{V}_a)[X]$; кроме того, разделив, если необходимо, $\mathbf{T}$ на подходящую степень

X, можно считать, что $\mathbf{T}$ имеет нетривиальный член нулевой степени. Пусть $\mathbf{R} \in \mathbb{C}[Z, \overline{Z}, z', \overline{z}']((X \cap \hat{U}_a) \times \hat{V}_a)$ — этот член $\mathbf{T}$ нулевой степени. Таким образом, предполагается, что

$$\mathbf{R} \in \mathbb{C}[Z, \overline{Z}, z', \overline{z}']((X \cap \hat{U}_a) \times \hat{V}_a) \backslash \{0\}. \tag{3.39}$$

Из (3.37),(3.38) следует, что в $\mathcal{O}_a^{\mathbb{R}}(X)$

$$\mathbf{R}(Z, \overline{Z}, {}_a\overline{\mathbf{g}}) = 0. \tag{3.40}$$

Представим $\mathbf{R}$ в виде $\mathbb{R} = \sum_J \mathbf{b}_J(Z, \overline{Z}, \overline{z}') z'^J$, где $\mathbf{b}_j \in \mathbb{C}[Z, \overline{Z}, \overline{z}']((X \cap \hat{U}_a) \times \hat{V}_a)$. Предположим, что существует коэффициент $\mathbf{b}_{J_0}$, такой что $\mathbf{B}_{J_0}(Z, \overline{Z}, {}_a\overline{\mathbf{g}}) \neq 0$ в $\mathcal{M}_a^*(X)$. Тогда, равенство (3.40) означает, что система $\{{}_a\mathbf{g}_1, \ldots, {}_a\mathbf{g}_m\}$ алгебраически зависима над $\mathcal{M}_a^*(X)$. Тогда из предложения 3.15 следует, что эта система алгебраически зависима над $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$. По теореме единственности, это противоречит тому, что система $\{{}_a\mathbf{g}_1, \ldots, {}_a\mathbf{g}_n\}$ является базисом трансцендентности, значит, она алгебраически независима над $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$.

Таким образом, для любого J

$$\mathbf{b}_J(Z, \overline{Z}, {}_a\overline{\mathbf{g}}) = 0 \tag{3.41}$$

в $\mathcal{M}_a^*(X)$. Можно записать $\mathbf{b}_J$ в виде $\overline{\mathbf{b}}_J = \sum_I c_{JI}(Z, \overline{Z}) z'^I$ (после комплексного сопряжения). Если существуют J_0,I_0 такие, что $\mathbf{c}_{J_0, I_0} \neq 0$ в $\mathbb{C}[Z, \overline{Z}](X \cap \hat{U}_a)$, то рассмотрим (3.41) с $J = J_0$; после еще одного применения предложения 3.15, как и выше, получаем противоречие. Таким образомs, $\mathbf{c}_{JI} = 0$ в $\mathbb{C}[Z, \overline{Z}](X \cap \hat{U}_a)$ и $\mathbf{R}(Z, \overline{Z}, z', \overline{z}') = 0$ для любого $(Z, z') \in (X \cap \hat{U}) \times \hat{V}_a$. Это противоречит предположению (3.39). Таким образом, $r_j = 0$ на $(X \cap \hat{U}_a) \times V_a$ для каждого j. Лемма доказана.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{A}_f | X = \{(Z, Z') \in A, Z \in X \cap \hat{U}_p\}. \tag{3.42}$$

Обозначим через $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C}^{n'}$ естественную проекцию. Геометрически последняя лемма означает, что существуют открытые связные окрестности $\tilde{U}_a$ точки a в $\mathbb{C}^n$ и $\tilde{U}'_a$ точки $f(a)$ в $\mathbb{C}^{n'}$, такие что образ $\pi'((\mathcal{A}_f|X) \cap (\tilde{U}_a \times \tilde{U}'_a))$ содержится в Y. Для каждого $Z^0 \in X \cap \tilde{U}_a$ слой $\pi^{-1}(Z^0) = \{(Z^0, Z') \in \tilde{U}_a \cap \tilde{U}'_a : w' = H(Z^0, z')\}$ есть комплексное m-мерное многообразие, содержащее точку $(Z^0, f(Z^0))$. Следовательно, $X_{Z^0} = \pi'(\pi^{-1}(Z^0)) = \{Z' \in \tilde{U}'_a : w' = H(Z^0, z')\}$ — комплексное m-мерное подмногообразие в $Y \cap \tilde{U}'_a$, содержащее $f(Z)$. Кроме того, поскольку отображение H алгебраично, то X_{Z^0} содержится в комплексном m-мерном алгебраическом многообразии в $\mathbb{C}^m$. Ограничение $\pi' : \pi^{-1}(Z^0) \longrightarrow X_{Z^0}$ есть биголоморфизм, так что π' биголоморфно на каждом слое π.

Следующее предложение резюмирует основные свойства приведенной выше конструкции.

Предложение 3.21. *Пусть X — вещественно-алгебраическое порождающее многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$), трансверсальное по Сегре в этой точке p. Пусть ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$, и пусть $m = \operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$. Можно считать (после перенумерации координаты $\mathbb{C}^{n'}$), что ${}_p\mathbf{f} = ({}_p\mathbf{g}, {}_p\mathbf{h})$, где ${}_p\mathbf{g} = ({}_p\mathbf{g}_1, \ldots, {}_p\mathbf{g}_m) = ({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_m)$ — трансцендентный базис расширения $\mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_{n'}) / \mathbb{C}(Z_1, \ldots, Z_n)$, а ${}_p\mathbf{h} = ({}_p\mathbf{h}_1, \ldots, {}_p\mathbf{h}_{n'-m}) = ({}_p\mathbf{f}_{m+1}, \ldots, {}_p\mathbf{f}_{n'})$. Пусть $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ и $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C}^{n'}$ — естественные проекции. Тогда справедливо следующее:*

- (i) *Существует комплексно-алгебраическое многообразие $\mathcal{A}_f$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$ размерности $n + m$, $m = \operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$, содержащее график $\Gamma_{{}_p\mathbf{f}}$. Кроме того, ограничение $\tau | \mathcal{A}_f$ естественной проекции $\tau : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ — конечное отображение и локальный биголоморфизм на $\mathcal{A}_f \backslash \tau^{-1}(B)$, где B — комплексно-алгебраическое подмножество в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$; график $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}}$ не содержится в B.*
- (ii) *Существуют окрестность U_p точки p, такая что X трансверсально по Сегре во всякой точке $X \cap U_p$, представляющее отображение $f = (g, h)$ на U_p, а также открытое плотное подмножество $S \subset X \cap U_a$, обладающее следующими свойствами: для каждой точки $a \in S$ существуют окрестности U_a точки a в $\mathbb{C}^n$, V_a точки $g(a)$ в $\mathbb{C}^m$ и W_a точки $h(a)$ в $\mathbb{C}^{n'-m}$*

такие, что тройка $\{\mathcal{A}_f \cap U_a \times V_a \times W_a, \pi, , U_a\}$ *есть тривиальное голоморфное расслоение. Слои последнего* $\pi^{-1}(Z^0) = \{(Z^0, Z') : Z' \in V_a \times W_a, w' = H(Z^0, z')\}$, $Z^0 \in U_a$ *являются открытыми подмножествами комплексно-алгебраических* m*-мерных многообразий в* $\mathbb{C}^{n'}$.

(iii) *Для всякого* $a \in S$ *существуют окрестности* $\tilde{U}_a$ *точки* a *в* $\mathbb{C}^n$ *и* $\tilde{U}'_a$ *точки* $f(a)$ *в* $\mathbb{C}^{n'}$ *(которые можно выбрать как угодно малыми) такие, что* $\pi'((\mathcal{A}_f|X) \cap (\tilde{U}_a \times \tilde{U}'_a))$ *(с* $\mathcal{A}_f|X$ *определенным* (3.42)*) содержится в* Y. *Следовательно, имеем диаграмму*

$$X \cap \tilde{U}_a \longleftarrow (\mathcal{A}_f|X) \cap (\tilde{U}_a \times \tilde{U}'_a) \longrightarrow Y \cap \tilde{U}'_a. \tag{3.43}$$

(iv) *Образ* $X_{Z^0} = \pi'(\pi^{-1}(Z^0)) = \ Z' \in U'_a : w' = H(Z^0, z')\}$ *каждого слоя* $\pi^{-1}(Z^0)$, $Z^0 \in \tilde{U}_a$ *есть открытый кусок комплексного* m*–мерного алгебраического многообразия в* $\mathbb{C}^n$, *содержащий* $f(Z^0)$.

(v) *Ограничение* $\pi' : \pi^{-1}(Z) \longrightarrow X_Z$ *есть биголоморфизм; т.е.* π' *биголоморфно на каждом слое расслоения* π.

Многообразие $\mathcal{A}_f$, канонически ассоциированное с ${}_p\mathbf{f}$, содержит много информации об алгебраических свойствах отображения ${}_p\mathbf{f}$. Пункт (i) описывает глобальную геометрию $\mathcal{A}_f$, а пункт (ii) — локальную. Диаграмма (3.43) связывает свойства многообразия $\mathcal{A}_f$ с комплексной геометрией Y; ввиду (v), можно рассматривать эту диаграмму как нечто вроде поднятия ростка ${}_p\mathbf{f}$, которое в некотором смысле позволяет перенести структуру расслоения $\{(\mathcal{A}_f|X) \cap U_a \times U'_a, \pi, X \cap U_a\}$ с голоморфными слоями на Y, используя проекцию π'.

Для доказательства первой теоремы 3.10 теперь достаточно рассмотреть многообразия X_a, удовлетворяющие всем нужным свойствам. Отсюда сразу вытекают все следствия. Для последней теоремы 3.14 достаточно применить к диаграмме (3.43) теорему о ранге.

Обозначим через r максимальный ранг ограничения $\pi'|(\mathcal{A}_f|X) \cap (\tilde{U}_a \times \tilde{U}'_a)$, а через Σ — открытое плотное подмножество в $(\mathcal{A}_f|X) \cap (\tilde{U}_a \times \tilde{U}'_a)$, на котором этот ранг равен r. Поскольку график f над X содержится в $\mathcal{A}_f|X$, то r больше или равен порождающему рангу f. Фиксируем точку $(Z^0, Z'^0) \in \Sigma$, достаточно близкую к $(a, f(a))$ и окрестности $W_a \in \tilde{U}_a$ точки Z^0 в $\mathbb{C}^n$ и $W'_a \subset \tilde{U}'_a$ точки Z'^0 в $\mathbb{C}^{n'}$ такие, что пересечение $\Omega = (\mathcal{A}_f|X) \cap (W_a \times W'_a)$ содержится в Σ. Тогда из пункта (v) последнего предложения и вещественно-аналитической версии теоремы о ранге, примененной к ограничению $\pi'|\Omega$, следует, что существуют окрестности $\hat{W}_a \subset W_a$ точки Z^0 в $\mathbb{C}^n$ и $\hat{W}'_a \subset W'_a$ точки Z'^0 в $\mathbb{C}^{n'}$ такие, что $X'_a = \pi'(\Omega)$ — r-мерное вещественно-аналитическое подмногообразие в $Y \cap W'_a$. Кроме того, существует вещественно-аналитическое подмногообразие $\Gamma_a \subset X$, проходящее через Z^0 такое, что ограничение $\pi' : \Omega \cap \pi^{-1}(\Gamma_a) \longrightarrow X'_a$ есть вещественно-аналитический диффеоморфизм. Поскольку проекция π' голоморфна на объемлющем пространстве и так как, в силу последнего предложения (ii) $\Omega \cap \pi^{-1}$ — тривиальное расслоение над Γ_a с голоморфными слоями, то доказательство завершено.

3.3. Голоморфные и мероморфные продолжения CR-отображений. В этом пункте рассматривается задача о голоморфном продолжении гладкого CR-отображения вещественно-аналитических многообразий. Начнем со случая, когда многообразие-образ алгебраично; в этом случае могут быть получены более общие результаты. Затем рассмотрим вещественно–аналитический случай и докажем современную версию принципа отражения Леви–Пинчука.

Формулировки результатов. Пусть X — вещественно-аналитическое порождающее многообразие в $\mathbb{C}^n$, минимальное в точке $p \in X$. Пусть также Y — вещественно–алгебраическое подмножество в $\mathbb{C}^N$, т.е. множество нулей конечного числа вещественных многочленов от $\mathbb{C}^N$. Фиксируем точку $p \in X$ и рассмотрим росток гладкого (всюду ниже гладкость означает принадлежность классу C^∞) CR-отображения ${}_p\mathbf{f} : X \longrightarrow Y$ многообразия X в Y. Это означает, что существуют окрестность U точки p в $\mathbb{C}^n$ представляющее отображение f ростка ${}_p\mathbf{f}$, определенное на $X \cap U$, такие что $f(X \cap U) \subset Y$.

Рассмотрим также поле $\mathcal{M}_p(X)$ ограничений на X ростков мероморфных функций в точке p и расширение $\mathcal{M}_p(X)({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_N)$ конечного типа этого поля, порожденное компонентами ростка ${}_p\mathbf{f}$. Обозначим через $\mathrm{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$ степень трансцендентности этого расширения над $\mathcal{M}_p(X)$ (см. § 2 по поводу определений). Степень трансцендентности измеряет «степень неаналитичности» ${}_p\mathbf{f}$. Если

$\mathrm{tr.deg.}_p\mathbf{f}$ равна m, то будет показано, что график ${}_p\mathbf{f}$ содержится в комплексном $(n+m)$-мерном многообразии в $\mathbb{C}^{n+N}$. В частности, будет показано, что ${}_p\mathbf{f}$ вещественно-аналитично в том и только том случае, если $\mathrm{tr.deg.}_p\mathbf{f} = 0$.

Пусть $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^N$ — гладкое CR-отображение вещественно-аналитической минимальной гиперповерхности. Существует открытое плотное подмножество в X, на котором ранг f достигает своего максимального значения, называемого порождающим рангом отображения f. Как обычно, через $\mathrm{rank}_p\mathbf{f}$ (ранг ростка ${}_p\mathbf{f}$) обозначается порождающий ранг его представляющего отображения; это определение не зависит от выбора представителя. Геометрическое свойство вещественно-аналитических подмногообразий в $\mathbb{C}^n$, изучаемое в этой статье, можно описать следующим образом.

Определение 3.22. Пусть Y — вещественно–аналитическое подмножество $\mathbb{C}^N$ и p — точка в Y. Пусть также r и m — положительные целые. Говорят, что Y (r,m)–плоско в точке p, если существует вещественно-аналитическое подмногообразие $M \subset Y$, проходящее через точку p, имеющее вещественную размерность r, которое биголоморфно декартовому произведению $\Gamma \times D$, где Γ — вещественно-аналитическое подмногообразие в комплексном пространстве меньшей размерности, а D — область в $\mathbb{C}^m$.

Это определение мотивировано рассмотрениями предыдущего пункта. Можно рассматривать многообразие M из определения 3.22 (с точностью до биголоморфной эквивалентности) как тривиальное расслоение с *голоморфными* слоями и базой — вещественно-аналитическим многообразием Γ. Если Y допускает такое расслоение, голоморфно вложенное как подмногообразие, то, вообще говоря, можно построить гладкое CR отображение из X в Y, которое не вещественно-аналитично. Например, если многообразие $\Gamma \times D$, где Γ — вещественное подмногообразие в $\mathbb{C}^k$, а D — область в $\mathbb{C}$, содержится в Y и X — вещественная сфера, то можно рассмотреть CR-отображение из X в $\Gamma \times D$ вида (g,h), где $g : X \longrightarrow \Gamma$ — постоянное отображение, а h — гладкая, но не вещественно-аналитическая CR-функция на X.

Основная цель этого пункта состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 3.23. *Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ — вещественно-аналитическое порождающее многообразие, минимальное в точке $p \in X$, а $Y \subset \mathbb{C}^N$ — вещественно-алгебраическое множество. Пусть ${}_p\mathbf{f} : X \longrightarrow Y$ — росток гладкого CR-отображения в точке p ранга $\mathrm{rank}_p\mathbf{f} = r$, $\mathrm{tr.deg.}_p\mathbf{f} = m$. Тогда в любой окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$ существуют точки, в которых Y (r,m)-плоско.*

Этот результат означает, что существование расслоения, описанного в определении 3.22 — единственная причина неаналитичности CR-отображения и, кроме того, «степень неаналитичности» не превосходит комплексной размерности слоев. Чтобы использовать эту теорему для изучения свойств аналитичности CR-отображений, достаточно найти препятствия к голоморфному вложению таких расслоений в Y. Это даст оценку сверху для степени трансцендентности $\mathrm{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$. Следующий результат есть следствие основной теоремы.

Теорема 3.24. *Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ — вещественно-аналитическое порождающее многообразие, $Y \subset \mathbb{C}^N$ — вещественно-алгебраическое множество, а ${}_p\mathbf{f} : X \longrightarrow Y$ — росток гладкого CR-отображения в точке $p \in X$. Предположим, что X минимально в точке p и обозначим через d максимальную размерность комплексно-аналитических многообразий, содержащихся в Y в окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$. Тогда $\mathrm{tr.deg.}({}_p\mathbf{f}) \leqslant d$ и график ${}_p\mathbf{f}$ содержится в комплексном $(n+d)$-мерном аналитическом многообразии. Если Y не содержит комплексно-аналитических многообразий положительной размерности в окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$, то росток ${}_p\mathbf{f}$ вещественно аналитичен.*

Оценка степени трансцендентности, полученная в теореме 3.24, может быть рассмотрена как результат о частичной аналитичности ${}_p\mathbf{f}$. Если, дополнительно, X алгебраично, то результат, аналогичный теореме 3.24, был получен в предыдущем разделе; существует, однако, важное отличие.

В частности, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.25. *Пусть X и Y — вещественные подмногообразия в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что X вещественно-аналитично и минимально, а Y — вещественно-алгебраично. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — C^∞-гладкое CR-отображение. Если Y не содержит комплексно-аналитических многообразий положительной размерности, то f вещественно аналитично.*

Другие приложения касаются ростков CR-отображений максимального ранга. Это предположение (максимальности ранга) позволяет ослабить условия на Y.

Напомним, что вещественная гиперповерхность M называется голоморфно вырожденной в точке $a \in M$, если существует ненулевой росток голоморфного векторного поля, касательного к M в точке a; M называется голоморфно невырожденным в окрестности U точки $p \in M$, если оно не является голоморфно вырожденным ни в одной точке $U \cap M$. Ясно, что $M \cap U$ голоморфно невырождено в том и только том случае, если в любой окрестности каждой точки $a \in M \cap U$ оно не эквивалентно биголоморфно декартовому произведению $\Gamma \times D$, где Γ — вещественно-аналитическая гиперповерхность в комплексном пространстве меньшей размерности, а D — область в $\mathbb{C}$. Можно естественным образом обобщить это определение. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие в окрестности точки $p \in \mathbb{C}^n$. Говорят, что M d-голоморфно невырождено в окрестности U точки p, если в любой окрестности любой точки $M \cap U$ оно биголоморфно не эквивалентно декартовому произведению $\Gamma \times D$, где D — область в $\mathbb{C}^d$. Заметим, что d-голоморфно невырожденное многообразие может содержать комплексно-аналитические многообразия размерности $\geqslant d$.

Следствие 3.26. *Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ — вещественно-аналитическое порождающее многообразие в точке $p \in X$, а Y — вещественно-алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^N$, d -голоморфно невырожденное в окрестности точки $p' \in Y$. Пусть ${}_p\mathbf{f} : X \longrightarrow Y$ — росток гладкой CR субмерсии с ${}_p\mathbf{f}(p) = p'$. Тогда $\operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f}) < d$ и график ${}_p\mathbf{f}$ содержится в комплексно-аналитическом многообразии размерности $< n + d$.*

В частности, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.27. *Пусть X и Y — порождающие подмногообразия в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что X вещественно-аналитично и минимально в точке $p \in X$, а Y вещественно-алгебраично и голоморфно невырождено. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — гладкое CR-отображение порождающего ранга n. Тогда f вещественно-аналитично.*

Схема доказательства. Опишем общую схему доказательства теоремы 3.23. Оно является непосредственным приложением алгебраической конструкции, применявшейся в предыдущем пункте. Пусть X — порождающее вещественно-аналитическое многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$, а Y — вещественно-аналитическое подмножество в окрестности точки $p' \in \mathbb{C}^N$. Обозначим через $\mathcal{O}_p$ кольцо ростков голоморфных функций в точке p, а через $\mathcal{O}_p(X)$ — кольцо ростков их ограничений на X (так как X — порождающее, то эти кольца изоморфны). Пусть $\mathcal{M}_p$ — поле ростков мероморфных функций в точке p (т.е. факторполе $\mathcal{O}_p$) и $\mathcal{M}_p(X)$ — поле ростков их ограничений на X. Если D — область в $\mathbb{C}^n$, то $\mathcal{O}(D)$ обозначает кольцо голоморфных функций на D, а $\mathcal{M}(D)$ — поле мероморфных функций на D, т.е. поле сечений пучка ростков мероморфных функций на D. Аналогично, $\mathcal{O}(X)$ (соответственно, $\mathcal{M}(X)$) обозначает кольцо (соответственно, поле) их ограничений на X. Для каждой функции h, мероморфной на Ω, существует комплексно-аналитическое множество в Ω такое, что h голоморфно вне этого множества. Наименьшее аналитическое подмножество в Ω с этим свойством называется множеством особых точек h и обозначается через Sing_h. Хорошо известно, что каждая мероморфная функция на области Штейна Ω есть частное двух функций, голоморфных в Ω.

Обозначим через ${}_pC^\infty_{CR}(X)$ кольцо ростков C^∞-гладких CR-функций на X в точке p, а через $({}_pC^\infty_{CR}(X))^N$ — его N-ю декартову степень. Под ростком гладкого CR-отображения ${}_p\mathbf{f} : X \longrightarrow Y$ подразумевается элемент ${}_p\mathbf{f} \in ({}_pC^\infty_{CR}(X))^N$ такой, что для некоторой окрестности U точки p в $\mathbb{C}^n$ существует представляющее отображение f ростка ${}_p\mathbf{f}$, являющееся гладким CR-отображением на $X \cap U$ и такое, что $f(X \cap U) \subset Y$. Как и в предыдущем пункте, рассмотрим расширение $\mathcal{M}_p(X)({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_N)$ поля $\mathcal{M}_p(X)$ ростков мероморфных функций на p, конечно порожденное компонентами ${}_p\mathbf{f}$, и обозначим через $\operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$ его степень трансцендентности над $\mathcal{M}_p(X)$.

Это означает, что для $m = \operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$ существуют целые $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant N$ такие, что $({}_p\mathbf{f}_{i_1}, \ldots, {}_p\mathbf{f}_{i_m})$ — базис трансцендентности $\mathcal{M}_p(X)({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_N)$ над $\mathcal{M}_p(X)$. После перенумерации, не нарушая общности, считаем, что $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$. Будем использовать обозначение ${}_p\mathbf{f} = ({}_p\mathbf{g}, {}_p\mathbf{h})$, где ${}_p\mathbf{g} = ({}_p\mathbf{g}_1, \ldots, {}_p\mathbf{g}_m) = ({}_p\mathbf{f}_1, \ldots, {}_p\mathbf{f}_m)$ и ${}_p\mathbf{h} = ({}_p\mathbf{h}_1, \ldots, {}_p\mathbf{h}_{N-m}) = ({}_p\mathbf{f}_{m+1}, \ldots, {}_p\mathbf{f}_N)$. Обозначим координаты в $\mathbb{C}^N$ через $Z' = (z', w')$, $z' = (z'_1, \ldots, z'_m)$ и $w' = (w'_1, \ldots, w'_{N-m})$.

Фиксируем представляющее отображение $f = (g, h)$ ростка ${}_p\mathbf{f}$ в достаточно малой связной окрестности U точки p в X. Первый шаг конструкции — это вложение графика Γ_f в некоторое комплексное многообразие, канонически определенное с помощью ${}_p\mathbf{f}$.

Так как $\{{}_p\mathbf{g}_1, \ldots, {}_p\mathbf{g}_m\}$ — алгебраически независимая система над кольцом $\mathcal{M}_p(X)$, то морфизм подстановки $\mathcal{O}_p(X)[x_1, \ldots, x_m] \longrightarrow \mathcal{O}_p(X)[{}_p\mathbf{g}_1, \ldots, {}_p\mathbf{g}_m]$ — изоморфизм колец. По определению базиса трансцендентности и по лемме Гаусса, существуют ненулевые неприводимые многочлены Q_j в кольце $\mathcal{O}_p(X)[{}_p\mathbf{g}_1, \ldots, {}_p\mathbf{g}_m][x]$ такие, что $Q_j({}_p\mathbf{h}_j) = 0$ (см. [100], глава V, теорема 10). Представим всякий многочлен Q_j в виде $Q_j = \sum_{k=0}^{N_j} {}_p\mathbf{q}_{jk}(Z, {}_p\mathbf{g}) x^k$, где $\deg Q_j = N_j > 0$ и ${}_p\mathbf{q}_{jk} \in \mathcal{O}_p(X)[z']$. Обозначим через q_{jk} соответствующие представители на $U \times W$, где W — окрестность точки $g(p)$ в $\mathbb{C}^m$. Свяжем с ними голоморфные функции

$$\hat{Q}_j(Z, Z') := \sum_{k=0}^{N_j} q_{jk}(Z, z') {w'}_j^k \tag{3.44}$$

и комплексно-аналитическое многообразие $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}$ в окрестности $U \times U'$ точки $(p, f(p))$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$, определенное как множество их общих нулей:

$$\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}} = \{(Z, Z') : \hat{Q}_j(Z, Z') = 0,\ j = 1, \ldots, N - m\}, \tag{3.45}$$

где $\hat{Q}_j$ представляет неприводимый многочлен относительно w'_j над кольцом $\mathcal{O}_p(X)[z'_1, \ldots, z'_m]$.

График Γ_f отображения f содержится в $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}$. Пусть

$$\lambda : \mathbb{C}^n(Z) \times \mathbb{C}^m(z') \times \mathbb{C}^{N-m}(w') \longrightarrow \mathbb{C}^n(Z) \times \mathbb{C}^m(z')$$

— естественная проекция. Рассмотрим комплексно-аналитическое многообразие $\mathcal{V}$ в окрестности $U \times W$ точки $(p, g(p))$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, определенное как $\cup_s\{D_s(Z, z') = 0\}$, где $D_s \in \mathcal{O}(U)[z']$ — дискриминант $\hat{Q}_s$ относительно w'_j. Тогда ограничение $\lambda : \mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}} \backslash \lambda^{-1}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ есть локальный биголоморфизм. Обозначим через $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}}$ график g в $U \times W$. Так как каждый D_s — элемент $\mathcal{O}(U)[z'_1, \ldots, z'_m]$, то из алгебраической независимости системы $\{{}_p\mathbf{g}_1, \ldots, {}_p\mathbf{g}_m\}$ над $\mathcal{O}_p(X)$ следует, что $\Gamma_{{}_p\mathbf{g}}$ не содержится в $\mathcal{V}$. Рассмотрим множество

$$\Sigma = \cup_s\{Z \in X \cap U : D_s(Z, g(Z)) = 0\}. \tag{3.46}$$

Тогда для любого $a \in X \backslash \Sigma$ точка $(a, g(a))$ не принадлежит $\mathcal{V}$. В следующем разделе будет показано (лемма 3.1), что Σ имеет меру нуль (относительно X).

Замечание. Вообще говоря, многообразие $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}$ приводимо. Пусть $\tilde{\Gamma}_f = \{(Z, Z') : Z \in X \backslash \Sigma, Z' = f(Z)\}$. Так как $\lambda : \mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}} \longrightarrow U \times W$ — локальный биголоморфизм вблизи любой точки $(Z, Z') \in \tilde{\Gamma}_f$, то объединение всех неприводимых компонент $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}$, имеющих непустые пересечения с $\tilde{\Gamma}_f$, есть комплексно-аналитическое множество в $U \times U'$ чистой размерности $n + m$, содержащее график Γ_f (можно легко показать, что на самом деле существует только одна такая компонента, однако нам не придется это использовать).

Следующий шаг состоит в изучении локальной геометрии $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}$ в окрестности точки $a \in (X \cap U) \backslash \Sigma$. Пусть $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^n$ и $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ — естественные проекции. Обозначим через $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X$ ограничение $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}$ на X, определенное дополнительным предположением $Z \in X$ в уравнениях (3.45), т.е. $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}} \cap \pi^{-1}(X)$. Очевидно, что $\pi(\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X) \subset X$.

Из теоремы о неявной функции следует, что существуют окрестность U_a точки a в $\mathbb{C}^n$, окрестность V'_a точки $g(a)$ в $\mathbb{C}^m$ и окрестность V''_a точки $h(a)$ в $\mathbb{C}^{N-m}$ такие, что $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X$ можно представить в $U_a \times V_a$ с $V_a = V'_a \times V''_a$ в виде $w' = H(Z, z')$, $Z \in X \cap U_a$, где H голоморфно в $U_a \times V'_a$. Следовательно, тройка $\{\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X \cap (U_a \times V_a), \pi, X \cap U_a\}$ имеет структуру тривиального расслоения над

$X \cap U_a$ с голоморфными слоями $\pi^{-1}(Z) = \{Z' = (z', w') : w' = H(Z, z')\}$ комплексной размерности m.

Основной вопрос: переводит или нет проекция π' слои π в Y? Таким образом, нам необходимо следующее условие

$$\pi'((\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X) \cap (U_a \times V_a) \subset Y. \tag{3.47}$$

Это условие позволяет перенести структуру расслоения $\{(\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X) \cap (U_a \times V_a), \pi, X \cap U_a\}$ на множество-образ Y. Так как слои π — комплексные многообразия, а проекция π' голоморфна в объемлющем пространстве, то она сохраняет комплексную структуру слоев. Кроме того, ограничение π' на слой π биголоморфно, и это позволяет строить много комплексных подмногообразий в Y.

Следующее предложение показывает, что из условия (3.47) следует (r, m)-плоскость Y, и это является ключевым моментом нашего подхода.

Предложение 3.28. *Пусть выполнено условие* (3.47). *Тогда существуют положительное целое $r = r(a) \geqslant \operatorname{rank}_p\mathbf{f}$ такое, что в любой окрестности точки $f(a)$ найдутся точки, в которых Y (r, m)–плоско.*

Доказательство. Это является непосредственным следствием теоремы о ранге. Обозначим через r максимальный ранг ограничения $\pi'|(\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X) \cap (U_a \times V_a)$, а через S — открытое плотное подмножество в $(\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}(U_a \times V_a)$, на котором этот ранг равен r. Так как график f над X содержится в $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}}|X$, то r больше или равно порождающему рангу отображения f. Фиксируем точку $(Z^0, Z'^0) \in S$, достаточно близкую к $(a, f(a))$, и окрестности $W_a \subset U_a$ точки Z^0 в $\mathbb{C}^n$ и $W'_a \subset V_a$ точки Z'^0 в $\mathbb{C}^N$ такие, что пересечение $\Omega = (\mathcal{A}_f|X) \cap (W_a \times W'_a)$ содержится в S. Из (3.47) и вещественно-аналитической версии теоремы о ранге, примененной к ограничению $\pi'|\Omega$, следует, что существуют окрестности $\hat{W}_a \subset W_a$ точки Z^0 в $\mathbb{C}^n$ и $\hat{W}'_a \subset W'_a$ точки Z'^0 в $\mathbb{C}^N$ такие, что $M_a := \pi'(\Omega)$ есть r–мерное вещественно–аналитическое подмногообразие в $Y \cap W'_a$. Далее, так как ограничение проекции π' на каждый слой π имеет максимальный ранг, то существует вещественно–аналитическое подмногообразие $\Gamma_a \subset X$, проходящее через Z^0, такое что ограничение $\pi' : \Omega \cap \pi^{-1}(\Gamma_a) \longrightarrow M_a$ есть вещественно–аналитический диффеоморфизм. Поскольку проекция π' голоморфна на объемлющем пространстве и $\Omega \cap \pi^{-1}(\Gamma_a)$ — тривиальное расслоение над Γ_a с голоморфными слоями, то получаем требуемое утверждение.

Поскольку $(X \cap U) \backslash \Sigma$ плотно в $X \cap U$, то это доказывает теорему 3.23 при дополнительном предположении (3.47).

Цель оставшейся части этого пункта состоит в доказательстве того, что условие (3.47) будет выполнено как только X — вещественно-аналитическая минимальная гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, а Y — вещественно-алгебраическое множество в $\mathbb{C}^N$.

Алгебраическая зависимость над промежуточными полями. Применим ранее полученные результаты к анализу свойства алгебраической зависимости над некоторыми функциональными полями.

Определение 3.29. Пусть $\{{}_p\mathbf{h}_1, \ldots, {}_p\mathbf{h}_k\}$ — конечное подмножество в ${}_pC^\infty_{CR}(X)$. Говорят, что оно алгебраически зависимо над $\mathcal{M}^*_p(X)$, если существуют ненулевой многочлен ${}_p\mathbf{Q}$ в $\mathcal{M}^*_p(X)[X_1, \ldots, X_k]$, окрестность U точки p, представляющие функции h_j ростка ${}_p\mathbf{h}_j$ на $X \cap U$, представляющий многочлен Q ростка ${}_p\mathbf{Q}$ на $X \cap U$ и $\mathcal{P}$-множество $E \subset X \cap U$, содержащее особое множество каждого коэффициента Q, такие, что $Q(h_1, \ldots, h_k) = 0$ на $(X \cap U) \backslash E$.

Основной результат этого пункта состоит в следующем.

Предложение 3.30. *Если конечное подмножество ${}_pC^\infty_{CR}(X)$ алгебраически зависимо над $\mathcal{M}^*_p(X)$, то оно также алгебраически зависимо над $\mathcal{M}_p(X)$.*

Доказательство. Пусть $\{{}_p\mathbf{h}_1, \ldots, {}_p\mathbf{h}_k\} \subset {}_pC^\infty_{CR}(X)$ — алгебраически зависимая система над $\mathcal{M}^*_p(X)$. Это означает, что существуют окрестность U точки p, система представителей $\{h_1, \ldots, h_k\}$

на $X \cap U$, а также многочлен

$$Q(X_1, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^{m} q_j(Z, \overline{Z}) S_j(X_1, \dots, X_k),$$

где S_j — одночлены, и каждый q_j представляет ненулевой росток в $\mathcal{M}_p^*(X)$, так что $Q(h_1, \dots, h_k) = 0$ на $(X \cap U) \backslash E$. Здесь $E \subset X \cap U$ есть $\mathcal{P}$-множество, содержащее особое множество каждого q_j. После деления Q на q_m имеем дополнительно $q_m(Z, \overline{Z}) = 1$, и степень одночлена S_m отлична от нуля. Докажем это утверждение методом индукции по m.

При $m = 1$ имеем $S_1(h_1, \dots, h_k) = 0$, так что, по крайней мере, один из ${}_p\mathbf{h}_j$ равен нулю и множество $\{{}_p\mathbf{h}_1, \dots, {}_p\mathbf{h}_k\}$ алгебраически зависимо над $\mathcal{M}_p(X)$.

Предположим теперь, что утверждение справедливо для любого многочлена, содержащего $\leqslant m-1$ членов, и применим операторы Коши–Римана (1.17) к уравнению $Q(h_1, \dots, h_k) = 0$. Имеются две возможности:

(a) Если $\mathcal{L}_s(q_j) = 0$ на $(X \cap U) \backslash E$ для любых s и j, тогда из предложений 1.20 и 2.5 следует, что коэффициенты q_j мероморфны, и множество $\{{}_p\mathbf{h}_1, \dots, {}_p\mathbf{h}_k\}$ алгебраически зависимо над $\mathcal{M}_p(X)$.

(b) Если существуют j_0 и s_0 такие, что $\mathcal{L}_{s_0}(q_{j_0}) \neq 0$, то можно применить предположение индукции к многочлену $\sum_{j=0}^{m-1} (\mathcal{L}_{s_0} q_j) S_j$.

Справедливо следующее

Следствие 3.31. *Пусть ${}_p\mathbf{R} \in \mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)[w, \overline{w}]$ — многочлен по $w, \overline{w} \in \mathbb{C}^m$ с вещественно-аналитическими (по $Z \in X$) коэффициентами и ${}_p\mathbf{g} = ({}_p\mathbf{g}_1, \dots, {}_p\mathbf{g}_m)$ — росток отображения с компонентами из ${}_pC^{\infty}_{CR}(X)$, которые алгебраически зависимы над $\mathcal{M}_p(X)$. Предположим, что существуют окрестность U точки p, представляющее отображение g ростка ${}_p\mathbf{g}$, определенное на $X \cap U$, представляющий многочлен $R \in \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)[w, \overline{w}]$ для ${}_p\mathbf{R}$ и $\mathcal{P}$-множество E в $X \cap U$, такие что $R(Z, g, \overline{g})$ обращается в нуль на $(X \cap U) \backslash E$. Тогда ${}_p\mathbf{R} = 0$ в $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)[w, \overline{w}]$.*

Доказательство. Представим R в виде $R = \sum_J b_J(Z, \overline{w}) w^J$ с $b_J \in \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)[\overline{w}]$. Предположим, что существует коэффициент b_{J_0} такой, что $b_{J_0}(Z, \overline{g})$ представляет ненулевой элемент в $\mathcal{M}_p^*(X)$. Следовательно, система $\{{}_p\mathbf{g}_1, \dots, {}_p\mathbf{g}_m\}$ алгебраически зависима над $\mathcal{M}_p^*(X)$. Тогда из предложения 3.30 следует, что эта система алгебраически зависима над $\mathcal{M}_p(X)$ — противоречие. Значит, для любого J коэффициент $b_J(Z, \overline{g})$ представляет нуль в $\mathcal{M}_p^*(X)$. После комплексного сопряжения можно написать $\overline{b_J} = \sum_I c_{JI}(Z) w^I$. Если существуют J_0, I_0 такие, что $c_{J_0 I_0}$ представляет ненулевой элемент в $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)$, то применим предложение 3.30 еще раз и получим противоречие, как и выше. Таким образом, каждые $c_{JI} = 0$ в $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)$ и $R(Z, w, \overline{w}) = 0$ в $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)[w, \overline{w}]$. Это завершает доказательство.

Завершение доказательства. Пусть выполнены условия теоремы 3.23; будем использовать обозначения раздела 3.2. Достаточно доказать, что выполнено условие (3.47).

Пусть вещественно-алгебраическое множество-образ Y определяется вещественными многочленами $P'_k(Z', \overline{Z'})$, $k = 1, \dots, q$, $Z' \in \mathbb{C}^N$. Так как f переводит X в Y, то $P'_k(f, \overline{f}) = 0, k = 1, \dots, q$.

В этом разделе будет использован метод поляризации, так что будем рассматривать вещественно-аналитические функции как функции от $Z, \overline{Z}$. Напомним также, что U — окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$ — выбрана в разделе 3.2, а Σ определено (3.46).

Рассмотрим пересечение $\mathcal{A}_{{}_p\mathbf{f}} \cap (X \times Y)$, определенное уравнениями

$$\hat{Q}_j(Z, z', w'_j) = 0, P'_k(Z', \overline{Z}') = 0,$$

$Z \in X \cap U$. Можно добавить сопряженные уравнения $\overline{\hat{Q}_j} = 0$, что не изменит решения. Рассмотрим комплексифицированную систему

$$\hat{Q}_j(Z, z', w'_j) = 0, \quad \tilde{Q}_j(\zeta, \tau, \omega_j) = 0, \quad P'_k(z', \tau, w', \omega) = 0, \tag{3.48}$$

где $j = 1, \dots, N-m$, $k = 1, \dots, q$, $Z = \overline{\zeta}$, $z' = \overline{\tau}$, $w' = \overline{\omega}$ и $\tilde{Q}_j(\zeta, \tau, \omega_j) := \overline{\hat{Q}}_j(\overline{\zeta}, \overline{\tau}, \overline{\omega}_j)$.

Обозначим через π естественную проекцию на пространство переменных (Z, z', ζ, τ), а через $\mathcal{S}$ — комплексно-аналитическое множество, определенное уравнениями (3.48). Согласно теории устранения (см. [135], [110] и особенно [53]) , существуют окрестность $\mathcal{U}$ точки $(p, \overline{p})$ в $\mathbb{C}^n(Z) \times \mathbb{C}^n(\zeta)$ и функции $R_k(Z, z', \zeta, \tau) \in \mathcal{O}(\mathcal{U})[z', \tau]$, $k = 1, \dots, q$ (являющиеся результантами системы (3.48), относительно переменных w' и ω), обладающие следующим свойством: для любого решения $(Z_0, z'_0, \zeta_0, \tau_0, w'_0, \omega_0)$ уравнений (3.48) такого, что старшие коэффициенты многочленов $\hat{Q}_j$, $\tilde{Q}_j$ в (3.48) отличны от нуля в точках (Z_0, z'_0) и (ζ_0, τ_0), существует окрестность W точки $(Z_0, z'_0, \zeta_0, \tau_0)$, такая что при $(Z, z', \zeta, \tau, w', \omega) \in W \times \mathbb{C}^{N-m} \times \mathbb{C}^{N-m}$ проекция $\pi(\mathcal{S} \cap W \times \mathbb{C}^{N-m} \times \mathbb{C}^{N-m})$ задается уравнениями $R_k(Z, z', \zeta, \tau) = 0$ при $(Z_0, z'_0, \zeta_0, \tau_0) \in W$. В самом деле, поскольку старшие коэффициенты многочленов $\hat{Q}_j$, $\tilde{Q}_j$ в (3.48) отличны от нуля в точках (Z_0, z'_0) и (ζ_0, τ_0), то W можно выбрать так, что проекция $\pi : \mathcal{A}_{p\mathbf{f}} \cap W \times \mathbb{C}^{N-m} \times \mathbb{C}^{N-m} \longrightarrow W$ собственна. Поэтому ограничение $\pi | \mathcal{S} \cap W \times \mathbb{C}^{N-m} \times \mathbb{C}^{N-m}$ также есть собственное отображение и образ $\pi(\mathcal{S} \cap W \times \mathbb{C}^{N-m} \times \mathbb{C}^{N-m})$ есть комплексно-аналитическое подмножество в W, определяемое уравнениями

$$R_k(Z, z', \zeta, \tau) = 0, \quad k = 1, \dots, q \tag{3.49}$$

(явная конструкция этих функций $R_k(Z, z', \zeta, \tau) \in \mathcal{O}(\mathcal{U})[z', \tau]$ с помощью результантов многочленов (3.48) по w', ω приведена в [53]). Кроме того, поскольку проекция собственна, то существует точка $(Z, z', \zeta, \tau, \hat{w}', \hat{\omega})$, удовлетворяющая (3.48), такая, что в окрестности $\hat{W}$ этой точки система (3.48) эквивалентна системе

$$\hat{Q}_j(Z, z', w'_j) = 0, \quad \tilde{Q}_j(\zeta, \tau, \omega_j) = 0, \quad R_k(Z, z', \zeta, \tau) = 0 \tag{3.50}$$

(вообще говоря, эта точка может не лежать на той же ветви, что и начальная точка $(Z, z', \zeta, \tau, w', \omega)$). Рассматривая пересечение с диагональю $Z = \overline{\zeta}$, $z' = \overline{\tau}$, $w' = \overline{\omega}$, получаем следующее предложение.

Предложение 3.32. *Существуют многочлены $R_k \in \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)[z', \overline{z}']$, $k = 1, \dots q$, обладающие следующим свойством: для каждой точки $a \in (X \cap U) \backslash \Sigma$ существуют точка $b \in \mathbb{C}^n$ такая, что $(a, b) \in \mathcal{A}_{p\mathbf{f}}$, и окрестность V точки (a, b) такая, что пересечение $(\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} \cap (X \times Y) \cap V)$ определяется уравнениями*

$$\{(Z, z', w') \in V : Z \in X, \hat{Q}_j(Z, z', w_j) = 0, R_k(Z, \overline{Z}, z', \overline{z}') = 0, j = 1, \dots, N - m, k = 1, \dots, q\}$$

Теперь можно доказать (3.47). Из предложения 3.32 следует, что существуют многочлен $R_k(Z, \overline{Z}, z', \overline{z}') \in \mathcal{O}^{\mathbb{R}}(X \cap U)[z', \overline{z}'], k = 1, \dots, q$ такой, что для каждого $a \in (X \cap U) \backslash \Sigma$ найдутся точка $(a, b) \in \mathcal{A}_{p\mathbf{f}}$ и окрестность V точки (a, b) для $h(a)$ такие, что

$$\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} \cap (X \times Y) \cap V = (\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} | X) \cap \{(Z, z') \in V_1 : R_k(Z, \overline{Z}, z', \overline{z}') = 0, \ Z \in X, \ k = 1, \dots, q\}.$$

Так как график Γ_f содержится в $\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} \cap (X \times Y)$, то из построения функций R_k следует, что $R_k(Z, \overline{Z}, g, \overline{g}') = 0$ на $(X \cap U) \backslash \Sigma$ (в самом деле, точка $(Z, z', \zeta, \tau, w', \omega)$ с координатами $(Z, g(z), \overline{Z}, \overline{g}, h, \overline{h})$ удовлетворяет (3.48), а потому и (3.49)). Система $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ алгебраически независима над $\mathcal{M}_p(X)$ и $\Sigma \subset (X \cap U)$ — $\mathcal{P}$-множество, так что из предложения 3.31 вытекает, что любой R_k представляет нуль в $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}}(X)[z', \overline{z}']$. Значит, для любого $a \in X \backslash \Sigma$, достаточно близкого к p, существуют точка b, удовлетворяющая соотношению $(a, b) \in \mathcal{A}_{\mathbf{f}}$, и окрестность V точки (a, b) в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$, такие что $((\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} | X) \cap V) \cap (X \times Y) = ((\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} | X) \cap V)$. Следовательно, $\pi'((\mathcal{A}_{p\mathbf{f}} | X) \cap V)$ содержится в Y.

Ввиду объясненной выше общей схемы доказательства, это рассуждение дает существование вещественного расслоенного многообразия $N \subset Y$ с комплексными m-мерными слоями. Тем не менее, в настоящий момент ничего нельзя сказать о вещественной размерности N, поскольку в последнем предложении точка (a, b), вообще говоря, не принадлежит графику f. Одна из возможностей здесь состоит в том, чтобы зафиксировать неприводимую ветвь $\mathcal{A}_{p\mathbf{f}}$, а затем применить предыдущее рассуждение с результантом к этой ветви. Другая возможность состоит в использовании того же рассуждения, что и в доказательстве алгебраической версии этой теоремы в предыдущем пункте. основанном на теореме о неявной функции.

Пусть $\mathcal{M}_p[z']$ — кольцо многочленов по z' с мероморфными по Z коэффициентами в окрестности точки p. По теореме о неявной функции, для любого $a \in M \backslash \Sigma$ существуют функции $H_j(Z, z')$ $(1 \leqslant j \leqslant t)$, определенные в окрестности точки $(a, f(a))$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$, голоморфные в Z и алгебраические по z', такие, что $Q_j(Z, z', H_j(Z, z')) = 0$ при (Z, z') в окрестности $(a, g(a))$, т.е. функции H_j алгебраичны над $\mathcal{M}_p[z']$. Рассмотрим подстановку $r'_k(Z, z', \overline{Z}, \overline{z}') := P'_k(Z, \overline{Z}, z', H(Z, z'), \overline{z}', \overline{H}(Z, z'))$. Из алгебраичности $H_j(Z, z')$ над $\mathcal{M}_p[z']$ следует, что существуют ненулевой полином $\sum_{l=0}^{N} A_l(Z, z', \overline{Z}, \overline{z}')X^l$, коэффициенты которого вещественно аналитичны по $(Z, \overline{Z})$ в окрестности Ω of $(p, \overline{p})$, и многочлен по $(z', \overline{z}')$ такие, что

$$\sum_{l=0}^{N} A_l(Z, z', \overline{Z}, \overline{z}')[r'_k(Z, z', \overline{Z}, \overline{z}')]^l \equiv 0.$$

По построению, $r'_k(Z, g(Z), \overline{Z}, \overline{g}(Z)) = 0$ для любого z, достаточно близкого к a. Вполне аналогично алгебраическому случаю, имеем следующее утверждение.

Лемма 3.33. *Имеем $r'_k(Z, z', \overline{Z}, \overline{z}') \equiv 0$ для любого $(Z, z') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ в окрестности точки $(a, g(a))$.*

Доказательство также полностью аналогично алгебраическому случаю, если заметить, что из доказательства принципа отражения следует, что утверждения предложений 1.20 и 2.5 остаются справедливыми, если считать, что функция h в ее условиях является CR-функцией на непустом открытом подмножестве в X (а не обязательно в окрестности точки p). Это завершает доказательство предложения.

Оценка степени трансцендентности и вложение графика отображения в комплексно-аналитическое многообразие в теореме 3.24 вытекают из теоремы 3.23 и замечания в параграфе 2. В частности, пусть размерность этого многообразия равна n, т.е. $\operatorname{tr.deg.}_p \mathbf{f} = 0$. Так как ${}_p\mathbf{f}$ допускает одностороннее голоморфное продолжение и принадлежит классу C^∞, то из известных результатов [34, 105] следует, что ${}_p\mathbf{f}$ вещественно аналитична.

3.4. Характеристическое многообразие и обобщенный принцип отражения Леви–Пинчука. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ — порождающее вещественно-аналитическое подмногообразие в окрестности точки $p \in X$, определенное вещественно-аналитической функцией ρ такой, что $\rho_{z_n}(p) \neq 0$. Предположим, что X минимально в точке p. Обозначим через $\mathcal{L}_j$ касательные операторы Коши–Римана на X. Для любого $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ $\mathcal{L}^\alpha$ обозначает оператор $\mathcal{L}^\alpha = \mathcal{L}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{L}_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. Пусть $X' \subset \mathbb{C}^{n'}$ — вещественно-аналитическое подмножество в окрестности точки $p' \in \mathbb{C}^{n'}$, определенное как множество общих нулей вещественно-аналитических функций $\rho'_k(z', \overline{z}')$, $k = 1, \dots, d$. Пусть $f : X \longrightarrow X'$ — C^∞-гладкое CR-отображение, определенное в окрестности точки p на X и удовлетворяющее равенству $f(p) = p'$. При z' из окрестности p' в $\mathbb{C}^{n'}$ и $k = 1, \dots, d$, функции $z \mapsto \rho'_k(z', \overline{f}(z))$ — гладкие в окрестности точки p на X. Рассмотрим функции $H_k^\alpha : z' \mapsto \mathcal{L}^\alpha \rho'_k(z', \overline{f}(z))|_{z=p}$, голоморфные в окрестности точки p'. Введем понятие *характеристического многообразия* отображения f в точке p, которое, по определению, есть росток в точке p' комплексно-аналитического множества в $\mathbb{C}^{n'}$, определяемого по формуле

$$\mathcal{V}^p(f) = \{z' : H_k^\alpha(z') = 0, \alpha \in \mathbb{N}^{n-1},\ k = 1, \dots, d\}.$$

Отметим, что $p' \in \mathcal{V}^p(f)$, поскольку для любого $z \in X$, $\rho'_k(f(z), \overline{f}(z)) = 0$, а f — CR-отображение, $f(p) = p'$.

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 3.34. *Если $\dim \mathcal{V}^p(f) = 0$, то f вещественно-аналитично в окрестности точки p на X.*

Доказательство является непосредственным обобщением рассуждений Леви–Пинчука.

Разрешение аналитических уравнений. Для любого $m \in N$ и каждого отображения $g \in ({}_pC^\infty_{CR}(X))^m$ мы определим множество ${}_p\mathcal{A}_g^m(X)$: функция h, определенная в окрестности (p, p') на

$X \times \mathbb{C}^{n'}$, принадлежит ${}_p\mathcal{A}_g^m(X)$, если существует функция $H(z,\zeta,\omega,z')$, голоморфная в окрестности $(p,\overline{p},\overline{g}(p),p')$ в $\mathbb{C}^n(z)\times\mathbb{C}^n(\zeta)\times\mathbb{C}^m(\omega)\times\mathbb{C}^{n'}(z')$ такая. что $h(z,z') = H(z,\overline{z},\overline{g}(z),z')$. Пусть $\mathcal{H} = \{h_j\}_{j=1}^J \subset {}_p\mathcal{A}_g^m(X)$ — конечное семейство такое, что $h_j(p,p') = 0$, $j = 1,\dots,J$. Рассмотрим следующую систему аналитических уравнений:

$$h_j(z,f(z)) = 0, \quad j = 1,\dots,J, \tag{3.51}$$

где $f = (f_1,\dots,f_{n'})$ — неизвестные функции, удовлетворяющие условиям $f \in ({}_pC^\infty_{CR}(X))^{n'}$, $f(p) = p'$. Рассмотрим также ростки комплексно-аналитических множеств, определенных в окрестности точки p' в $\mathbb{C}^{n'}$ как $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{z' \in \mathbb{C}^{n'} : h_j(p,z') = 0,\ j = 1,\dots,J\}$ и $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{z' \in \mathbb{C}^{n'} : \mathcal{L}^\alpha h_j(z,z')|_{z=p} = 0, \alpha \in \mathbb{N}^{n-1},\ j = 1,\dots,J\}$.

Предложение 3.35. *Если* $\dim\mathcal{V}(\mathcal{H}) = 0$*, то любое решение* $f \in ({}_pC^\infty_{CR}(X))^{n'}$*,* $f(p) = p'$ *системы* (3.51) *вещественно-аналитично в окрестности точки* p *на* X*.*

Доказательство. (a) Предположим, во-первых, что $\dim\mathcal{U}(\mathcal{H}) = 0$. Пусть $h_j(z,z') = H_j(z,\overline{z},\overline{g}(z),z')$; можно считать, что $p = 0$, $g(p) = 0$, $p' = 0$. Рассмотрим следующую систему голоморфных уравнений: $H_j(z,\zeta,w,z') = 0$, $j = 1,\dots,J$. Согласно фундаментальной теореме о локальной параметризации аналитических многообразий, существуют многочлены

$$Q_j(z,\zeta,w)(x) = \sum_{\nu=0}^{k_j} q_{js}(z,\zeta,w)x^s, \quad q_{jk_j} \equiv 1,\ k_j \geqslant 1,$$

с коэффициентами, голоморфными в окрестности в $\mathbb{C}^n(z)\times\mathbb{C}^n(\zeta)\times\mathbb{C}^m(w)$, такие, что все решения этой системы удовлетворяют в окрестности начала координат уравнению $Q_j(z,\zeta,w)(z'_j) = 0$, $j = 1,\dots,n'$. Значит, решения (3.51) удовлетворяют уравнениям $Q_j(z,\overline{z},\overline{g}(z))(f_j(z)) = 0$ при $z \in X$, $j = 1,\dots,n'$, а потому можно применить обобщенный принцип отражения (предложение 1.25 часть (ii)) (если X не гиперповерхность, то утверждение части (ii) предложения 1.25 остается верным ввиду предложения 2.5) .

(b) Пусть $\dim\mathcal{V}(\mathcal{H}) = 0$. Существует $k \in N$ такое, что $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ определяется уравнениями $\mathcal{L}^\alpha h_j(z,z')|_{z=p} = 0$, $|\alpha| \leqslant k$, $j = 1,\dots,J$. При достаточно большом $m' \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение $g' \in ({}_pC^\infty_{CR}(X))^{m'}$ с компонентами

$$\frac{\partial^{|\beta|}g_j}{\partial z_1^{\beta_1}\dots\partial z_n^{\beta_n}}, \quad |\beta| \leqslant k.$$

Пусть $h_j^\alpha := \mathcal{L}^\alpha h_j \in {}_p\mathcal{A}_g^{m'}(X)$ и $\mathcal{H}' = \{h_j^\alpha\}_{|\alpha|\leqslant k, j=1,\dots,J}$. Так как $h_j^\alpha(z,f(z)) = 0$ и $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{U}(\mathcal{H}')$, то из (a) следует требуемое утверждение.

Для доказательства теоремы положим $h_j(z,z') = \rho'_j(z',\overline{f}(z))$, $g := f$, $\mathcal{H} = \{h_j\}_{j=1,\dots,d}$. Характеристическое многообразие $\mathcal{V}^p(f)$ совпадает с $\mathcal{V}(\mathcal{H})$. Последнее предложение завершает доказательство.

Теорема 3.34 обобщает несколько результатов, связанных с аналитичностью CR-отображений; они были установлены в течение последних 20 лет несколькими авторами. В сущнсти они связаны с проверкой условия $\dim\mathcal{V}^p(f) = 0$, что является чисто алгебраической процедурой.

Следствие 3.36. *Любой* C^1*-гладкий CR-диффеоморфизм вещественно-аналитических невырожденных по Леви гиперповерхностей вещественно-аналитичен.*

Это и есть классическая теорема Леви–Пинчука.

Следствие 3.37. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *и* $\Omega' \subset \mathbb{C}^{n'}$ *— области,* $X \subset \Omega$ *и* $Y \subset \Omega'$ *— порождающее вещественно-аналитические многообразия. Предположим, что* X *минимально в некоторой точке* $p \in X$*. Предположим также, что* $U \subset X$ *— открытое связное подмножество в* X*, содержащее* p*, и пусть* $f : U \longrightarrow Y$ *— CR-отображение класса* C^1*, удовлетворяющее следующему условию:*

$$\sum_{j=1}^{d'} L^j_{p'}(df_p(H_p(X))) = H_{p'}(Y), \tag{3.52}$$

где $p' = f(p)$. Тогда f голоморфно продолжается на окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$.

Другой тип результатов иллюстрируется следующим утверждением, принадлежащим Баоуенди–Якобовичу–Треву [30]:

Следствие 3.38. *Пусть X и Y — порождающее вещественно-аналитические многообразия в $\mathbb{C}^n$. Допустим, что X минимально в некоторой точке $p \in X$ и что Y не содержит ростков голоморфных кривых. Пусть также $U \subset X$ — открытое связное подмножество в X, содержащее p, и пусть $f : U \longrightarrow Y$ — CR-диффеоморфизм класса C^∞. Тогда f голоморфно продолжается на окрестность точки p в $\mathbb{C}^n$.*

Вместо CR-диффеоморфизмов можно рассмотреть более общий класс CR-отображений с дискретными слоями (отображения конечной кратности). Например, справедлив следующий результат, полученный Баоуенди–Ротшильдом [31] и Дьедерихом–Форнаесом [75]:

Следствие 3.39. *Пусть D и D' — ограниченные псевдовыпуклые области с вещественно-аналитическими границами. Предположим, что $f : D \longrightarrow D'$ — собственное голоморфное отображение, C^∞ гладкое на $\overline{D}$. Тогда f голоморфно продолжается на окрестность $\overline{D}$.*

Хорошо известно (см. подробное обсуждение в главе III), что предположения о C^∞ гладкости f вплоть до границы выполняются автоматически. Напомним также, что классический результат Дьедериха и Форнаеса [71] утверждает, что любое компактное вещественно-аналитическое подмножество $\mathbb{C}^n$ не содержит ростков голоморфных кривых.

Замечания к главе I.

1. Как отмечалось во введении, явление рациональности ростков голоморфных отображений сфер не имеет одномерных аналогов. В случае многих переменных это было обнаружено в основополагающей работе А. Пуанкаре [15] в размерности 2: он доказал, что росток биголоморфного отображения открытых частей вещественной единичной сферы в $\mathbb{C}^2$ продолжается до биголоморфизма единичного шара (в частности, он рационален). Позднее этот результат был переоткрыт и передоказан другими методами в работах Чженя–Мозера [54], Г. Александера [28], У. Рудина [18]. В случае единичного шара этот результат можно интерпретировать с различных точек зрения: как следствие транзитивности группы автоморфизмов, специфической геометрии его границы и т.п. Возможно, наиболее естественным является объяснение на языке проективной геометрии. Единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ допускает специальную дифференциально-геометрическую структуру, индуцированную комплексным объемлющим пространством; локальные биголоморфизмы сферы являются морфизмами (изометриями) этой структуры. Как будет видно во второй главе, эта структура тесно связана с понятием проективной связности. С этой точки зрения, интересно сравнить теорему Пуанкаре с результатами Шиффмана [121], утверждающими, что росток отображения аффинного пространства, переводящий любую прямую в прямую, продолжается до проективного отображения. Рациональность голоморфных отображений шаров в других размерностях была доказана Форстнеричем [85].

Первые результаты о рациональности биголоморфных отображений квадратичных многообразий Коши–Римана были получены Г. Хенкиным и А. Тумановым [23], а также А. Тумановым [22] в связи с изучением автоморфизмов классических областей в $\mathbb{C}^n$. Рациональность голоморфных (или CR) отображений некоторых классов квадратичных многообразий Коши–Римана в комплексных пространствах различной размерности была установлена Фортснеричем [88]; он использовал методы С. Вебстера [136] и Дьедериха–Форнаеса [75]. Его условия менее ограничительны, чем условия данной статьи; в настоящей форме эти результаты были установлены в [124, 125].

2. Алгебраическая версия теоремы Пуанкаре была найдена С. Вебстером [136]. Им был доказан следующий замечательный результат.

Теорема 3.40. *Росток голоморфного отображения вещественных гиперповерхностей, невырожденных по Леви, в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$? продолжается на $\mathbb{C}^n$ как алгебраическое отображение.*

Оригинальное доказательство Вебстера не допускает непосредственного обобщения на случай алгебраических многообразий Коши–Римана высокой коразмерности. Обобщение (теорема 3.5) было получено Р. Шапировым и А. Суховым [118]; их доказательство отличается от доказательства Вебстера и основано на «криволинейной» версии теоремы о сепаратной алгебраичности, обобщающей классические результаты [47]. Голоморфные отображения вещественно-алгебраических многообразий изучались в ряде работ Баоуенди, Эбенфельда и Ротшильда [32] (они рассматривали только случай равных размерностей). Как было объяснено ранее, их результаты легко следуют из общей теоремы об оценке степени трансцендентности, полученной Купе–Мейланом–Суховым [59]. Здесь приводится доказательство этой теоремы для случая, когда многообразие X трансверсально по Сегре. Дж. Меркер [108] доказал, что этот результат остается в силе, если предположить, что X только минимально. Таким образом, алгебраический метод, основанный на изучении расширений промежуточных полей, применявшийся в работах Купе–Мейлана–Сухова и Меркера , приводит к следующему общему (и в некотором смысле определяющему) результату, связанному с алгебраичностью голоморфных отображений.

Теорема 3.41. *Пусть X — порождающее вещественно-алгебраическое многообразие в окрестности точки $p \in X$ в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, а ${}_p\mathbf{f}$ — росток голоморфного отображения в точке p, переводящий X в вещественно-алгебраическое множество Y в $\mathbb{C}^{n'}$. Пусть X минимально в точке p. Тогда существуют открытые окрестности U точки p в $\mathbb{C}^n$ и U' точки ${}_p\mathbf{f}(p)$ в $\mathbb{C}^{n'}$, а также представляющее отображение f, голоморфное на U, такие что $f(X \cap U) \subset Y$, и выполнено следующее свойство: В любой окрестности точки ${}_p\mathbf{f}(p)$ существует вещественно-аналитическое многообразие $N \subset Y$ размерности, большей или равной рангу ${}_p\mathbf{f}$, биголоморфное на декартовом произведении $\Gamma_a \times D$; здесь Γ_a — вещественно-аналитическое многообразие, а D — область в $\mathbb{C}^n$ с $m = \operatorname{tr.deg.}({}_p\mathbf{f})$.*

Некоторые частные результаты, использующие другую технику, были получены в работе [140], где применялись методы Форстнерича [85, 88]. Подробности см. также в [108] и [67].

3. Как отмечалось во введении, первый результат, связанный с аналитичностью гладких CR-отображений был получен С. Пинчуком в 1975 г. и Г. Леви в 1977 г.

Теорема 3.42. *C^1–гладкий CR-диффеоморфизм вещественно-аналитических строго псевдовыпуклых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ вещественно аналитичен.*

Этот фундаментальный результат породил ряд работ нескольких авторов. С. Вебстер [136, 137] нашел важное геометрическое доказательство теоремы Пинчука–Леви (которое будет обсуждаться позже во второй главе) и обобщил ее на случай многообразий высокой коразмерности. Случай вырождения по Леви был впервые рассмотрен в работе Дьедериха и Вебстера [80]. Позже оригинальный алгебраический подход Пинчука был развит в работах Баоуенди–Якобовича–Трева [30]. Дьедерих–Форнаес [75] и Баоуенди–Ротшильд [31] доказали, что собственное биголоморфное отображение $f : D \longrightarrow G$ псевдовыпуклых областей с вещественно–аналитическими границами класса C^∞ на $\overline{D}$ голоморфно продолжается на окрестность $\overline{D}$. Как было показано ранее, эти результаты следуют из общей теоремы 3.34, полученной Купе–Пинчуком–Суховым [63] для случая, когда X есть гиперповерхность и С. Дамуром [68] для общего случая. Отметим, что эта теорема позволяет изучать отображения многообразий различной размерности. Тем не менее, до сих пор здесь остается много открытых вопросов.

Один из основных открытых вопросов можно сформулировать следующим образом. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$ — вещественно-аналитическое минимальное многообразие и $Y \subset \mathbb{C}^N$ — еще одно вещественно–аналитическое многообразие. Предположим, что $f : X \longrightarrow Y$ — росток гладкого CR-отображения. При каких условиях f вещественно-аналитичен? Простейший случай, когда ответ неизвестен — это случай, когда X и Y — строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^N$ $(n < N)$, соответственно. Если наложить некоторые условия невырожденности на струю f порядка > 2. то можно легко проверить, что характеристическое многообразие тривиально и применима теорема Купе–Пинчука–Сухова. Однако без дополнительных предположений ничего нельзя сказать. Ф. Форстнерич [87] доказал, что в этой ситуации струя f вещественно-аналитична на открытом плотном подмножестве в X.

Теорема 3.23, полученная Купе–Пинчуком–Суховым [63] для случая , когда X — гиперповерхность, и Купе–Дамуром–Меркером–Суховым [58] в общем случае; она дает определенный ответ на сформулированную выше общую задачу в случае, когда многообразие-образ Y является алгебраическим.

Даже в случае, когда Y не содержит комплексных алгебраических многообразий положительной размерности, теорема 3.24 — новая. Упомянем здесь достаточно специальный случай теоремы 3.24, который ранее рассматривался другими авторами: X — вещественно-аналитическая строго псевдовыпуклая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, а Y — вещественная сфера в $\mathbb{C}^N$ ([10]); X — вещественно-аналитическая строго псевдовыпуклая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, а Y — вещественно-алгебраическое множество в $\mathbb{C}^N$ с $d = 0$ [16]; X и Y — вещественно–алгебраические строго псевдовыпуклые гиперповерхности ([17, 95]); X — вещественно-алгебраическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, содержащая комплексно-аналитические многообразия положительной размерности, а Y — сфера в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Если и X и Y алгебраические и голоморфно невырожденные, то аналогичный результат был получен М. С. Баоуенди, К. Хуангом и Л. П. Ротшильдом [29]. В силу примера Б. Эбенфельта (см. [29]) условие минимальности в следствии 3.27 нельзя заменить на голоморфную невырожденность.

В заключение поясним корни алгебраического метода, применявшегося в этой главе. В конце 70-х С. Пинчук получил важный результат [12] о голоморфном продолжении и распространении CR-отображения строго псевдовыпуклой вещественно-аналитической гиперповерхности на единичную сферу высокой размерности (частичное обобщение этого результата было позже анонсировано А. Пушниковым [16], некоторые специальные случаи были также исследованы В. Работиным [17]). Метод, применявшийся в работах [58,59,63], — прямое алгебраическое обобщение метода Пинчука.

Глава 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ

Эта глава посвящена подходу Вебстера к принципу отражения. Он используется с целью систематического развития основ геометрии аналитических CR-структур, с точки зрения геометрической теории аналитических дифференциальных уравнений.

4. Преобразования Ли, расслоения струй, продолжение

В этом параграфе напоминаются некоторые основные средства метода Ли изучения инфинитезимальных симметрий дифференциальных уравнений. Они хорошо известны в геометрической теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии; для удобства читателя приводится их краткое изложение. По поводу более подробной информации и доказательств всех утверждений этого параграфа см. [44], [9], [8], [15].

1. Локальные группы преобразований и группы симметрий. Будем изучать специальный, но геометрически важный класс голоморфных максимально переопределенных систем дифференциальных уравнений второго порядка с соотношениями первого порядка, т.е. систем вида $(\mathcal{S})$: $u^1_{x_ix_j} = F_{ij}(x, u, u^1_x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $u^k_x = H^k(x, u, u^1_x)$, $k = 2, \dots, m$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные в $\mathbb{C}^n$, $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ — неизвестные голоморфные функции (зависимые переменные в $\mathbb{C}^m$), $u^j_x = (u^j_{x_1}, \dots, u^j_{x_n})$ и F_{ij}, H^k — голоморфные функции (конечно, всегда предполагается, что $F_{ij} = F_{ji}$). Так как эти системы сильно переопределены, то естественно предполагать, что они удовлетворяют некоторым условиям совместности (условия интегрируемости типа Фробениуса). Этот класс систем естественным образом возникает в дифференциальной геометрии и дифференциальных уравнениях.

Решения такой системы — это голоморфные векторнозначные функции $u = u(x)$; обозначим через Γ_u график решения u. Напомним, что *группа симметрий* $\mathrm{Sym}(S)$ системы $(\mathcal{S})$ — это группа локальных комплексных преобразований, действующая на области пространства $\mathbb{C}^n_x \times \mathbb{C}^m_u$ независимых и зависимых переменных и удовлетворяющая следующему условию: для каждого решения $u(x)$ системы $(\mathcal{S})$ и каждого $g \in G$ такого, что образ $g(\Gamma_u)$ определен, оно является графиком решения системы $(\mathcal{S})$. Такое отображение g называется *точечной симметрией Ли* системы $(\mathcal{S})$. Часто наибольший интерес представляет наибольшая группа симметрий (а потому пишем группа симметрий); но для нас это не очень существенно, поскольку развиваемые методы дают описание любой группы симметрий для данной системы. Всюду ниже под группой симметрии понимается максимальная группа. Напомним также, что каждая локальная группа Ли вполне определяется базисом векторных полей $\{X_1, \ldots, X_d\}$ ее алгебры Ли и может быть явно параметризована с помощью экспоненциального отображения $e^{\sum t_j X_j} = \Pi e^{t_j X_j}$, где параметры $t_1, \ldots, t_d$ — локальные координаты на G.

2. Расслоения струй и продолжение групповых действий. Пусть M и N — комплексные многообразия, а $f : M \longrightarrow N$ — отображение, голоморфное в окрестности точки $p \in M$; обозначим через $j^r_p(f)$ его r-струю в точке p. Как обычно. обозначим через $J^r(M,N)$ пространство r-струй отображений из M в N. Оно является голоморфным расслоением над $M \times N$ с естественной проекцией $\pi_{M\times N} : J^r(M,N) \longrightarrow M \times N$, определенной как $\pi_{M\times N}(j^r_p(f)) = (p, f(p))$. Иногда полезны другие естественные проекции $\pi_M : J^r(M,N) \longrightarrow M$ и $\pi_N : J^r(M,N) \longrightarrow N$: $\pi_M(j^r_p(f)) = p$ и $\pi_N(j^r_p(f)) = f(p)$.

Фиксируя локальные координаты $x = (x_1, \ldots, x_n)$ на M и $u = (u^1, \ldots, u^m)$ на N, можно определить естественную локальную систему координат h на $J^r(M,N)$ следующим образом. Положим $u^{(1)} = (u^1_1, \ldots, u^1_n, \ldots, u^m_1, \ldots, u^m_n), \ldots,\ u^{(s)} = (u^j_\alpha)$, $j = 1, \ldots, m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_s)$, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_s$. Будем использовать следующие обозначения (которые сохраним всюду в этой статье): $\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_r}}$ при $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_r$, а $|\alpha| := r$. Карта h определяется следующим образом

$$\begin{aligned} &h : j^r_p(f) \mapsto (x_j, u^k, u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}),\\ &x_j = x_j(p), u^k = u^k(f(p)), u^j_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \partial^\alpha(u^j \circ f \circ x^{-1})(x(p)), \quad 1 \leqslant s \leqslant r. \end{aligned}$$

Эти координаты называются *естественными координатами* на $J^r(M,N)$.

Пусть G — локальная группа биголоморфных преобразований, действующая на $M \times N$. Фиксируем точку $(p,q) \in M \times N$ и функцию f_0, голоморфную вблизи p и удовлетворяющую соотношению $f_0(p)$. Каждый биголоморфизм $g \in G$, $g : M \times N \longrightarrow M \times N$, $g : (x,u) \mapsto (x^*, u^*)$, *достаточно близкий к тождественному*, канонически поднимается на окрестность U струи $j^r_p(f_0)$ в пространстве $J^r(M,N)$ как сохраняющий слой биголоморфизм $g^{(r)}$, определенный следующим образом: если $u = f(x)$ — голоморфная функция вблизи точки p, $q = f(p)$ и $u^* = f^*(x^*)$ — ее образ при отображении g (т.е. график f^* — образ графика f при отображении g вблизи точки $(p^*, q^*) = g(p,q)$), то струя $j^r_{p^*}(f^*)$, по определению, есть образ $j^r_p(f)$ при отображении $g^{(r)}$. Отображение $g^{(r)}$ называется $r-$ *продолжением* (пролонгацией) отображения g. Более общо, это определение сохраняет силу для любого отображения g, голоморфного в окрестности точки $p \in \mathbb{C}^n$ и обладающего следующим свойством: g переводит график $u = f(x)$ в точке p произвольной голоморфной функции f в график $u^* = f^*(x^*)$. Такие преобразования называются *точечными преобразованиями Ли*. В частности, однопараметрическая локальная группа Ли преобразований G канонически поднимается на $J^r(M,N)$ как однопараметрическая группа Ли преобразований $G^{(r)}$, называемая *r–продолжением* G. Инфинитезимальный генератор $X^{(r)}$ группы G называется *r-продолжением* инфинитезимального генератора X группы G.

Дальнейшие рассмотрения будут чисто локальными, так что M и N будут открытыми подмножествами, соответственно, в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$. В этом случае пишем $J^1(n,m)$ вместо $J^1(M,N)$.

Рассмотрим в координатах векторное поле $X(x,u) = \sum_{j=1}^n \theta^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \eta^k(x,u)\frac{\partial}{\partial u^k}$. В естественных координатах на пространстве струй $J^r(n,m)$ его r-продолжение имеет вид $X^{(r)} = X + \sum_{j,\mu} \eta^\mu_j \frac{\partial}{\partial u^\mu_j} + \cdots + \sum_{i_1,\ldots,i_r,\mu} \eta^\mu_{i_1 i_2 \cdots r} \frac{\partial^r}{\partial u^\mu_{i_1 i_2 \cdots r}}$. Для вычисления коэффициентов этого продолжения определим оператор *полной производной*: $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_k u^k_i \frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{\mu,j} u^\mu_{ij}\frac{\partial}{\partial u^\mu_j} + \ldots$. Следующая явная рекуррентная формула для коэффициентов продолжения является основным инструментом вычислений средством в теории Ли (см., например, [44]):

$$\eta_i^\mu = D_i\eta^\mu - \sum_j (D_i\theta^j)u_j^\mu, \eta_{i_1\cdots_{r-1}i_r}^\mu = D_{i_r}\eta_{i_1\cdots_{r-1}}^\mu - \sum_j (D_{i_r}\theta^j)u_{i_1\cdots_{r-1}j}^\mu.$$

В частности, второе продолжение $X^{(2)}$ есть $X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{\mu,i_1,i_2}\eta_{i_1i_2}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2}^\mu}$ с $X^{(1)} = X + \sum_{\mu,i}\eta_i^\mu \frac{\partial}{\partial u_i^\mu}$. Следующее утверждение является очевидным следствием предыдущей рекуррентной формулы.

Лемма 4.1. *Коэффициенты* 1- *и* 2-*продолжений допускают следующие представления:*

(a) *Каждый* $\eta_{i_1i_2}^\mu$ *имеет вид* $\sum_{|\alpha|\leqslant 3} P_{i_1i_2\alpha}^\mu(u^{(1)})^\alpha + \sum_{|\beta|=1} Q_{i_1i_2\beta}^\mu(u^{(2)})^\beta$, *где каждое* $P_{i_1i_2\alpha}^\mu$ — *целочисленная линейная комбинация вторых частных производных* θ^i *и* η^j, *а* $Q_{i_1i_2\beta}^\mu$ — *линейная форма по* $u^{(2)}$.

(b) *Каждый коэффициент* η_i^μ *является многочленом от компонент* $u^{(1)}$ *степени* 2, *коэффициенты которого — целочисленные линейные комбинации частных производных первого порядка* θ^i *и* η^j.

Непосредственное вычисление дает следующую формулу для коэффициентов $X^{(2)}$:

$$\eta_{i_1}^\mu = \eta_{x_{i_1}}^\mu + \sum_k u_{i_1}^k\eta_{u^k}^\mu - \sum_j\left(\theta_{x_{i_1}}^j + \sum_k u_{i_1}^k\theta_{u^k}^j\right)u_j^\mu,$$

$$\begin{aligned}\eta_{i_1i_2}^\mu &= \eta_{x_{i_2}x_{i_1}}^\mu + u_{i_1}^\mu\left[\eta_{x_{i_2}u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2}x_{i_1}}^{i_1}\right] + u_{i_2}^\mu\left[\eta_{x_{i_1}u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2}x_{i_1}}^{i_2}\right] + \sum_{k\neq\mu} u_{i_1}^k\eta_{x_{i_2}u^k}^\mu + \\ &+ \sum_{k\neq\mu} u_{i_2}^k\eta_{x_{i_1}u^k}^\mu - \sum_{k\neq i_1,k\neq i_2} u_k^\mu\theta_{x_{i_2}x_{i_1}}^k - \sum_{k;j\neq i_2} u_{i_1}^k u_j^\mu\theta_{x_{i_2}u^k}^j - \sum_{i;s\neq i_1} u_{i_2}^i u_s^\mu\theta_{x_{i_1}u^i}^s + \\ &+ \sum_{r\neq\mu,p\neq\mu} u_{i_2}^r u_{i_1}^p\eta_{u^ru^p}^\mu + \sum_{t\neq\mu} u_{i_1}^t u_{i_2}^\mu\left[-\theta_{x_{i_2}u^t}^{i_2} + \eta_{u^\mu u^t}^\mu\right] + \sum_{q\neq\mu} u_{i_2}^q u_{i_1}^\mu\left[-\theta_{u^qx_{i_1}}^{i_1} + \eta_{u^qu^\mu}^\mu\right] + \\ &+ \left[\eta_{u^\mu u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2}u^\mu}^{i_2} - \theta_{x_{i_1}u^\mu}^{i_1}\right]u_{i_1}^\mu u_{i_2}^\mu - \sum_{a,b,s} u_{i_2}^a u_{i_1}^b u_s^\mu\theta_{u^au^b}^s + \Lambda_{i_1i_2}^\mu\end{aligned}$$

при $i_1 \neq i_2$ и

$$\begin{aligned}\eta_{ii}^\mu &= \eta_{x_ix_i}^\mu + u_i^\mu\left[2\eta_{x_iu^\mu}^\mu - \theta_{x_ix_i}^i\right] + 2\sum_{k\neq\mu} u_i^k\eta_{x_iu^k}^\mu - \sum_{k\neq i} u_k^\mu\theta_{x_ix_i}^k - 2\sum_{k;j\neq i} u_i^k u_j^\mu\theta_{x_iu^k}^j + \\ &+ \sum_{r\neq\mu;p\neq\mu} u_i^r u_i^p\eta_{u^ru^p}^\mu + 2\sum_{t\neq\mu} u_i^t u_i^\mu\left[-\theta_{x_iu^t}^i + \eta_{u^\mu u^t}^\mu\right] + \left[\eta_{u^\mu u^\mu}^\mu - 2\theta_{x_iu^\mu}^i\right](u_i^\mu)^2 - \\ &- \sum_{a,b,s} u_i^a u_i^b u_s^\mu\theta_{u^au^b}^s + \Lambda_{ii}^\mu\end{aligned}$$

с

$$\Lambda_{i_1i_2}^\mu = \sum_s u_{i_2i_1}^s\eta_{u^s}^\mu - \sum_p u_{i_2p}^\mu\theta_{x_{i_1}}^p - \sum_j u_{i_1j}^\mu\theta_{x_{i_2}}^j - \sum_{p,q} u_{i_2i_1}^q u_p^\mu\theta_{u^q}^p - \sum_{p,q} u_{i_2p}^\mu u_{i_1}^q\theta_{u^q}^p - \sum_{s,j} u_{i_1j}^\mu u_{i_2}^s\theta_{u^s}^j.$$

Продолжение любого порядка точечной симметрии Ли также может быть вычислено достаточно явно с помощью рекуррентного соотношения (см., например, [44]). Рассмотрим преобразование $f : (x,u) \mapsto (x^*,u^*) = (X,U)$ вида $x^* = X(x,u) = (X^1,\ldots,X^n)$ и $u^* = U(x,u) = (U^1,\ldots,U^m)$; имеем

$$\begin{pmatrix} U_1^\mu \\ \ldots \\ U_n^\mu \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} D_1U^\mu \\ \ldots \\ D_nU^\mu \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

и

$$\begin{pmatrix} U^{\mu}_{i_1\cdots_{k-1}1} \\ \cdots \\ U^{\mu}_{i_1\cdots_{k-1}n} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} D_1 U^{\mu}_{i_1\cdots_{k-1}} \\ \cdots \\ D_n U^{\mu}_{i_1\cdots_{k-1}} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $A = (D_i X^j)_{i,j=1,\ldots,n}$ (i обозначает номер строки) (для удобства обозначений в этих формулах принято соглашение, что $U_{i_k i_s} = U_{i_s i_k}$ и $u_{i_k i_s} = u_{i_s i_k}$ для любых индексов).

3. Симметрии дифференциальных уравнений. Голоморфное векторное поле, порождающее однопараметрическую группу симметрий системы дифференциальных уравнений $(\mathcal{S})$, называется *инфинитезимальной симметрией* этой системы. Они образуют алгебру Ли $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})$ относительно скобки Ли. Более общо, точечное преобразование f называется *точечным преобразованием Ли между* $(\mathcal{S})$ *и* $(\hat{\mathcal{S}})$, если оно переводит график любого решения $(\mathcal{S})$ в график решения $(\hat{\mathcal{S}})$.

Пусть $(\mathcal{S})$ — голоморфная система дифференциальных уравнений порядка r; рассмотрим ее решения на M со значениями в N. Она естественным образом определяет комплексное подмногообразие $(\mathcal{S}_r)$ в пространстве струй $J^{(r)}(M,N)$, получаемое заменой производных зависимых переменных на соответствующие естественные координаты в пространстве струй.

Пример 1. Пусть $(\mathcal{S})$ — голоморфное дифференциальное уравнение второго порядка $u_{xx} = F(x,u,u_x)$, $(x,u) \in \mathbb{C}^2$. Пусть (x,u,u_1,u_{11}) — естественные координаты в пространстве струй $J^2(1,1)$. Тогда $(\mathcal{S}_2)$ — комплексное 3-мерное подмногообразие в $J^2(1,1)$, определенное уравнением $u_{11} = F(x,u,u_1)$.

Пример 2. Более общо, пусть $(\mathcal{S})$ — голоморфная максимально переопределенная система второго порядка $u^k_{x_i x_j} = F^k_{ij}(x,u,u_x)$, $k = 1,\ldots,m$, $i,j = 1,\ldots,n$, $(x,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$. Тогда $(\mathcal{S}_2)$ — комплексное подмногообразие в $J^2(n,m)$, определенное уравнениями $u^k_{ij} = F^k_{ij}(x,u,u^{(1)})$ в естественных координатах на $J^2(n,m)$.

Так как $\pi_M : J^r(M \times N) \longrightarrow M$ также является расслоением над M, то каждое голоморфное отображение $u : M \longrightarrow N$ определяет сечение этого расслоения как $p \longrightarrow j^r_p(u)$. Поэтому u — голоморфное решение системы $(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если сечение $p \mapsto j^r_p(u)$ содержится в многообразии $(\mathcal{S}_r)$.

Если $(\mathcal{S}_r)$ — подмногообразие в $J^r(M,N)$, то система $(\mathcal{S})$ называется системой *максимального ранга*. Таким образом, каждая система $(\mathcal{S})$ максимального ранга может быть отождествлена с комплексным подмногообразием голоморфного расслоения $\pi_{M\times N} : J^r(M \times N) \longrightarrow M \times N$ и ее решения можно отождествить с сечениями голоморфного расслоения $\pi_M : J^r(M \times N) \longrightarrow M$. Как было видно в предыдущих примерах, вполне переопределенные системы всегда имеют максимальный ранг. Система $(\mathcal{S})$ называется *локально регулярной*, если для любой точки $P \in (\mathcal{S}_r)$ с естественной проекцией $\pi_{M\times N}(P) = (p,q) \in M \times N$ существует решение $u(x)$ системы $(\mathcal{S})$, голоморфное вблизи p, такое что $j^r_p(u) = P$.

Говорят, что подмножество $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+m}$ инвариантно для голоморфного векторного поля X, если X порождает (локальную) комплексную однопараметрическую группу биголоморфизмов Ω. Если Ω — комплексное подмногообразие, то оно инвариантно для X в том и только том случае, если X касательно к Ω.

Важность этих понятий объясняет следующее простое, но фундаментальное утверждение (см., например, [9,15]):

Предложение 4.2. *Векторное поле X является инфинитезимальной симметрией локально регулярной системы $(\mathcal{S})$ порядка r и максимального ранга в том и только том случае, если многообразие $(\mathcal{S}_r)$ инвариантно для r–продолжения $X^{(r)}$.*

Доказательство. Пусть f — локальный биголоморфизм базы $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, переводящий график любого решения $(\mathcal{S})$ в график другого решения. Поскольку рассматриваемая система локально регулярна, то из определения r–продолжения следует, что $f^{(r)}$ — локальный биголоморфизм $(\mathcal{S}_r)$. Обратно, предположим, что $f^{(r)}$ — локальный биголоморфизм $(\mathcal{S}_r)$. Каждая точка $(\mathcal{S}_r)$ представляет r-струю решения. Рассмотрим сечение $x \mapsto j^r_x(u)$, определенное решением u. Так как $f^{(r)}$ переводит его в сечение $x^* \mapsto j^r_{x^*}(u^*)$ другого решения, то получаем, что f переводит график u в график u^*.

Таким образом, u — симметрия Ли $(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если его r-продолжение есть биголоморфизм $(\mathcal{S}_r)$. Применение этого утверждения к однопараметрической группе, порожденной X, завершает доказательство.

По теореме существования Коши, любая система обыкновенных дифференциальных уравнений (разрешенная относительно производной наивысшего порядка) является локально регулярной. В случае многих независимых переменных нужна теорема Фробениуса, накладывающая дополнительные условия интегрируемости.

Пример 3. Система из примера 2 имеет максимальный ранг, но, вообще говоря, не локально регулярна. Значит, нужно предполагать, что она удовлетворяет условию интегрируемости в следующем смысле: распределение на касательном расслоении пространства струй $J^1(n,m)$, определенное дифференциальными формами $\omega_i^k = du_i^k - \sum_j F_{ij}^k(x,u,u^{(1)})dx_j$, $\phi^k = du^k - \sum_i u_i^k dx_i$, вполне интегрируемо. Такие системы называются *вполне интегрируемыми* или *инволютивными*. Из теоремы Фробениуса следует, что каждая инволютивная система локально регулярна. Таким образом, последнее предложение применимо к этому классу систем.

5. Уравнения Ли

1. Инфинитезимальные уравнения Ли. Рассмотрим голоморфную вполне интегрируемую систему второго порядка $(\mathcal{S})$: $w_{x_{i_1}x_{i_2}} = F_{i_1i_2}(x,u,w_x)$, $i_1,i_2 = 1,\ldots,n$, $\mu = 1,\ldots,m$, $v_{x_j}^k = G_j^k(x,u,w_x)$, $k = 2,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, с n независимыми переменными x и m зависимыми переменными $u=(w,v)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{m-1}$. Удобно представить эту систему в другом виде. Рассмотрим частные производные первого порядка уравнения $v_x = G(x,u,w_x)$ и подставим выражения для $w_{x_{i_1}x_{i_2}}$ и $v^{(1)}$, заданные системой $(\mathcal{S})$, для того, чтобы устранить производные второго порядка функций w и v в правых частях. Добавим полученные уравнения к исходной системе и получим систему вида $(\mathcal{S})$: $u_{x_{i_1}x_{i_2}}^k = F_{i_1i_2}^k(x,u,w_x)$, $k=1,\ldots,m$, $i_1,i_2=1,\ldots,n$, $v_x = G(x,u,w_x)$, очевидно, имеющую то же пространство решений, что и исходная система, а значит, и ту же группу симметрий. Будем рассматривать далее эту систему.

Соответствующее комплексное подмногообразие $(\mathcal{S}_2)$ в пространстве струй $J^2(n,m)$ задается уравнениями $u_{i_1i_2}^\mu = F_{i_1i_2}^\mu(x,u,w^{(1)})$, $v^{(1)} = G(x,u,w^{(1)})$; ввиду условия интегрируемости, эта система локально регулярна. Следовательно, голоморфное векторное поле $X = \sum\theta^j\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum\eta^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu}$ принадлежит $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если его 2–продолжение $X^{(2)}$ касательно к $(\mathcal{S}_2)$. Это эквивалентно следующим уравнениям:

$$X^{(2)}u_{i_1i_2}^\mu = X^{(2)}(F_{i_1i_2}^\mu(x,u,w^{(1)})), \qquad X^{(2)}(v^{(1)} - G(x,u,w^{(1)})) = 0 \tag{5.1}$$

при $(x,u,u^{(1)},u^{(2)})\in(\mathcal{S}_2)$. Это — линейная система второго порядка для коэффициентов θ, η поля X. Назовем эту систему *инфинитезимальными уравнениями Ли* , ассоциированными с системой $(\mathcal{S})$. Объясним теперь, как явно строить инфинитезимальные уравнения Ли. Рассмотрим сначала следующий

Пример 1. Инфинитезимальные уравнения Ли для плоских систем с соотношениями первого порядка. Построим уравнения Ли для системы $(\mathcal{S})_{flat}$ вида $u_{x_ix_j}^k = 0$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,m$, $v_x^k = M^k w_x$, $k = 2,\ldots,m$. Назовем такую систему *плоской системой с соотношениями первого порядка*. Очевидно, что такая система инволютивна.

Многообразие $(\mathcal{S}_2)_{flat}$, определенное $(\mathcal{S})_{flat}$, задается уравнениями $u_{ij}^k = 0$, $k=1,\ldots,m$, $i,j = 1,\ldots,n$, $v^{(1)} = Mw^{(1)}$, где матрица M построена из матриц M^k как вертикальных блоков. Пусть векторное поле $X = \sum_{j=1}^n\theta^j\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\mu=1}^m\eta^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu}$ принадлежит $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})_{flat}$.

Инфинитезимальные уравнения Ли имеют вид

$$\begin{aligned}
&X^{(2)}u_{i_1i_2}^\mu = 0, i_1,i_2 = 1,\ldots,n, \mu = 1,\ldots,m,\\
&X^{(2)}(v^{(1)} - Mw^{(1)}) = X^{(1)}(v^{(1)} - Mw^{(1)}) = 0,\\
&u_{i_1i_2}^\mu = 0, v^{(1)} = Mw^{(1)}.
\end{aligned}$$

Положим $L_2 = \{(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) : u^\mu_{i_1 i_2} = 0\}$ и $L_1 = \{(x, u, u^{(1)}, u^{(2)} : v^{(1)} = Mw^{(1)}\}$, так что $(\mathcal{S}_2)_{flat} = L_1 \cap L_2$.

Из уравнений в первой строке следует, что

$$\eta^\mu_{i_1 i_2} = 0, (x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in (\mathcal{S}_2)_{flat} \tag{5.2}$$

для любого μ и любых $i_1 \leqslant i_2$. Воспользуемся представлением (a) леммы 4.1; из уравнений $u^\mu_{i_1 i_2} = 0$ следует, что $Q^\mu_{i_1 i_2} = 0$, а потому

$$\eta^\mu_{i_1 i_2}|L_2 = \sum_{|\alpha| \leqslant 3} A^\mu_{i_1 i_2 \alpha}[u^{(1)}]^\alpha, \tag{5.3}$$

где коэффициенты $A^\mu_{i_1 i_2 \alpha}$ — целочисленные линейные комбинации вторых частных производных θ, η.

Далее необходимо ограничить многочлены (5.3) на L_1. Заменяя $v^{(1)}$ на $Mw^{(1)}$ в (5.3), получаем $\eta^\mu_{i_1 i_2}|(\mathcal{S}_2)_{flat} = \sum_{|\beta| \leqslant 3} B^\mu_{i_1 i_2 \beta}(w^{(1)})^\beta$, где $B^\mu_{i_1 i_2 \beta} = \sum_\alpha b^{\mu\alpha}_{i_1 i_2 \beta} A^\mu_{i_1 i_2 \alpha}$, а коэффициенты $b^{\mu\alpha}_{i_1 i_2 \beta}$ — многочлены степени $\leqslant 3$ от элементов матрицы M. Поэтому каждый $B^\mu_{i_1 i_2 \beta}$ есть линейная комбинация частных производных второго порядка θ, η: $B^\mu_{i_1 i_2 \beta} = \sum_{j; |\gamma| = 2} c^j_{A\gamma} \partial^\gamma \theta_j + \sum_{k; |\delta| = 2} d^k_{A\delta} \partial^\delta \eta^k$, где для упрощения обозначений $A = (\mu, i_1, i_2, \beta)$.

Поэтому уравнения (5.2) эквивалентны уравнениям $B^\mu_{i_1 i_2 \beta} = 0$ при всех μ, β, i_1, i_2.

Используем теперь часть (b) леммы 4.1 и действуем достаточно аналогично для уравнений $X^{(1)}(v^{(1)} - Mw^{(1)}) = 0$; они эквивалентны условиям $\eta^\mu_i|L_1 - \sum_j m^\mu_{ij} \eta^1_j|L_1 = 0$, $\mu = 2, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, где $M^\mu = (m^\mu_{ij})$.

Можно написать $\eta^\mu_i|L_1 - \sum_j m^\mu_{ij}\eta^1_j|L_1 = \sum_{|\gamma| \leqslant 2} C^\mu_{i\gamma}(w^{(1)})^\gamma$, где $C^\mu_{i\gamma}|L_1 = \sum_{j, |\alpha| = 1} e^{\mu j}_{i\alpha\gamma} \partial^\alpha \theta_j + \sum_{k, |\beta| = 1} f^{\mu j}_{i\beta\gamma} \partial^\beta \eta^k$. Коэффициенты $e^{\mu j}_{i\alpha\gamma}$, $f^{\mu j}_{i\beta\gamma}$ — полиномы от элементов M степени $\leqslant 2$. Рассмотрим теперь вторую систему $(\mathcal{R}_2)$ для неизвестных векторных функций $\tau := (\theta, \eta)$:

$$B^\mu_{i_1 i_2 \beta} = 0, C^\mu_{i\gamma} = 0 \tag{5.4}$$

при всех $\mu, i_1 \leqslant i_2, i, \beta$. Это линейная система второго порядка с постоянными коэффициентами, являющаяся системой уравнений Ли для $(\mathcal{S})_{flat}$. Подчеркнем важное свойство этой системы: *каждое уравнение второго (соответственно, первого) порядка содержит только вторую (соответственно, первую) частные производные.*

Пример 2. Если рассмотреть систему вида $w_{x_{i_1} x_{i_2}} = F_{i_1 i_2}(x, u, w_x)$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, m$, $v^k_{x_j} = G^k_j(x, u, w_x)$, $k = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, с полиномиальными правыми частями, то непосредственное обобщение предыдущего рассуждения позволяет вывести аналог (5.4) для инфинитезимальных уравнений Ли. Ясно, что коэффициенты полученной системы дифференциальных уравнений с частными производными являются многочленами от (x, u).

Пример 3. Инфинитезимальные уравнения Ли для плоских систем. Рассмотрим систему $(\mathcal{S})_{flat}$ вида $u^k_{x_i x_j} = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Назовем такие системы *плоскими системами без соотношений первого порядка*. Многообразие $(\mathcal{S}_2)_{flat}$ определенное системой $(\mathcal{S}_{flat})$, задается уравнениями $u^k_{ij} = 0$, $k = 1, \dots, m$, $i, j = 1, \dots, n$.

Инфинитезимальные уравнения Ли имеют вид $X^{(2)} u^\mu_{i_1 i_2} = 0$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, m$, $u^\mu_{i_1 i_2} = 0$. Это эквивалентно тому, что (при всех возможных значениях индексов) $\eta^\mu_{i_1 i_2} = 0$, $u^\nu_{kl} = 0$ в $J^2(n, m)$. Используя явное представление для коэффициентов $X^{(2)}$, получаем следующую систему (выписываем только линейно независимые уравнения):

$$\begin{aligned}
&\eta^\mu_{x_{i_2} x_{i_1}} = 0, (i_1 \neq i_2) : \eta^\mu_{x_{i_2} u^\mu} - \theta^{i_1}_{x_{i_2} x_{i_1}} = 0, (k \neq \mu) : \eta^\mu_{x_i u^k} = 0,\\
&(k \neq i_1, k \neq i_2) : \theta^k_{x_{i_2} x_{i_1}} = 0, (j \neq i) : \theta^j_{x_i u^k} = 0, \theta^s_{u^a u^b} = 0,\\
&(r \neq \mu, p \neq \mu) : \eta^\mu_{u^r u^p} = 0, (t \neq \mu) : -\theta^i_{x_i u^t} + \eta^\mu_{u^\mu u^t} = 0,\\
&2\eta^\mu_{x_i u^\mu} - \theta^i_{x_i x_i} = 0, \eta^\mu_{u^\mu u^\mu} - 2\theta^i_{x_i u^\mu} = 0.
\end{aligned}$$

2. Общая конструкция инфинитезимальных уравнений Ли. Обобщим теперь этот подход на общую ситуацию. Под вполне интегрируемой голоморфной деформацией системы $(\mathcal{S}^0)$ подразумевается голоморфная система дифференциальных уравнений вида $(\mathcal{S}^\varepsilon)$: $u^k_{x_{i_1}x_{i_2}} = F^k_{i_1i_2}(\varepsilon, x, u, w_x)$, $k = 1, \ldots, m$, $i_1, i_2 = 1, \ldots, n$, $v_x = G(\varepsilon, x, u, w_x)$, вполне интегрируемая при каждом ε и совпадающая с $(\mathcal{S}^0)$ при $\varepsilon = 0$. Эта система определяет комплексное подмногообразие $(\mathcal{S}^\varepsilon_2)$ в пространстве струй $J^2(n, m)$, заданное уравнениями $u^\mu_{i_1i_2} = F^\mu_{i_1i_2}(\varepsilon, x, u, w^{(1)})$, $v^{(1)} = G(\varepsilon, x, u, w^{(1)})$ и, в силу условия интегрируемости этой системы, она локально регулярна. Поэтому инфинитезимальные уравнения Ли имеют вид

$$\eta^\mu_{i_1i_2} = X^{(1)}F^\mu_{i_1i_2}(\varepsilon, x, u, w^{(1)}), \qquad \eta^\mu_i = X^{(1)}G^\mu_i(\varepsilon, x, u, w^{(1)}) \tag{5.5}$$

при $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in (S^\varepsilon_2)$. Рассмотрим векторную функцию $F(\varepsilon, x, u, w^{(1)})$ с компонентами $F^\mu_{i_1i_2}$. Используя естественную локальную параметризацию

$$(x, u, w^{(1)}) \mapsto (x, u, w^{(1)}, v^{(1)}, u^{(2)}) = (x, u, w^{(1)}, G(\varepsilon, x, u, w^{(1)}), F(\varepsilon, x, u, w^{(1)})) \tag{5.6}$$

многообразия $(\mathcal{S}^\varepsilon_2)$, ограничим коэффициенты $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ в уравнениях (5.5) на $(\mathcal{S}^\varepsilon_2)$. Разлагая получившиеся уравнения в степенные ряды по $w^{(1)}$ и сравнивая коэффициенты, получаем (в силу леммы 4.1) линейную систему с частными производными второго порядка $(\mathcal{R}^\varepsilon_2)$. Система $(\mathcal{R}^\varepsilon_2)$ содержит конечное число уравнений в силу условия нётеровости, справедливого в пространстве струй. Если $(\mathcal{S}^0)$ — плоская система из примеров 5.1 или 5.3, то полученная система для $\varepsilon = 0$ совпадает с системой (5.4). Если $(\mathcal{S}^0)$ — алгебраическая система из примера 5.2, то $(\mathcal{R}^\varepsilon_2)$ — также малое возмущение соответствующих уравнений Ли.

3. Конечные уравнения Ли. Развиваемый подход также позволяет изучать точечные преобразования Ли и биголоморфизмы между различными многообразиями. Это приводит к изучению конечных уравнений Ли.

Пусть $(\mathcal{S})$ и $(\hat{\mathcal{S}})$ — голоморфные вполне интегрируемые системы второго порядка с соотношениями первого порядка или без них. Пусть f — точечное преобразование между $(\mathcal{S})$ and $(\hat{\mathcal{S}})$. Пусть также $f : (x, u) \mapsto (x^*, u^*)$ задано как $x^* = X(x, u)$, $u^* = U(x, u)$.

Из условия интегрируемости следует, что $f^{(2)}$ переводит $(\mathcal{S}_2)$ в $(\hat{\mathcal{S}}_2)$, т.е. удовлетворяет соотношению

$$(f^{(2)})^{-1}((\hat{\mathcal{S}}_2)) = (\mathcal{S}_2). \tag{5.7}$$

Назовем это соотношение *конечными уравнениями Ли,* ассоциированными с системами $(\mathcal{S})$ и $(\hat{\mathcal{S}})$. Легко видеть, что конечные уравнения Ли можно переписать как голоморфную *нелинейную* систему дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (с некоторыми уравнениями первого порядка) для компонент f. В самом деле, из рекуррентных формул (4.1),(4.2) следует, что компоненты $f^{(2)}$ — рациональные функции по $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$ и частным производным от компонент f вплоть до второго порядка. Используя параметризацию (5.6) и разлагая уравнения (5.7) в степенные ряды по $w^{(1)}$, после сравнения коэффициентов получаем эквивалентную нелинейную систему второго порядка для f.

Пример 4. Рассмотрим два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка, заданные соответствующими многообразиями в пространстве струй $J^2(1,1)$: $(\mathcal{S}_2) : u_{11} = F(x, u, u_1)$ и $(\hat{\mathcal{S}}_2) : u_{11} = \hat{F}(x, u, u_1)$. Пусть $f : (x, u) \mapsto (x^*, u^*) = (X(x, u), U(x, u))$ — их точечное преобразование Ли, так что его 2–продолжение $f^{(2)} : (x, u, u_1, u_{11}) \mapsto (x^*, u^*, u^*_1, u^*_{11})$ переводит $(\mathcal{S}_2)$ на $(\hat{\mathcal{S}}_2)$. Имеем $u^*_1 = U_1 = (U_x + u_1U_u)/(X_x + u_1X_u)$ и $u^*_{11} = U_{11} = (U_{1_x} + u_1U_{1_u} + u_{11}U_{1_{u_1}})/(X_x + u_1X_u)$. Используя выражение для U_{11}, получаем, что (5.7) эквивалентно соотношению $U_{1_x} + u_1U_{1_u} = (X_x + u_1X_u)\hat{F}(X, U, U_1) - U_{1_{u_1}}F(x, u, u_1)$, которое после подстановки U_1 может быть переписано в виде $\sum_{j=0}^3 A_0(u_1)^j = (X_x + u_1X_u)^3\hat{F}(X(x, u), U(x, u), U_1(x, u, u_1)) - (X_x + u_1X_u)^2U_{1_{u_1}}F(x, u, u_1)$, где $A_0 = U_{xx}X_x - U_xX_{xx}$, $A_1 = U_{xx}X_u - U_uX_{xx} + 2(U_{xu}X_x - U_xX_{xu})$, $A_2 = U_{uu}X_x - U_xX_{uu} + 2(U_{xu}X_u - U_uX_{xu})$ и $A_3 = U_{uu}X_u - U_uX_{uu}$. Разложим теперь правую часть в степенной ряд по u_1; сравнивая коэффициенты вблизи членов степени $\leqslant 3$, получим голоморфную систему $(\mathcal{R}_2)$ вида $A_j = \phi_j(x, u, X, U, X_x, X_u, U_x, U_u)$, которая представляет конечные уравнения Ли для нашего случая.

Пример 5. Конечныне уравнения Ли для систем без соотношений первого порядка. Предположим, что $(\mathcal{S})$: $u_{x_ix_j} = F_{ij}(x,u,u_x)$, $i,j=1,\dots,n$ и $(\hat{\mathcal{S}})$: $u_{x_ix_j} = \hat{F}_{ij}(x,u,u_x)$, $i,j=1,\dots,n$ — две системы с одной независимой переменной. Левая часть определена $U_{ij} = \hat{F}(X,U,U^{(1)})$, где использовано обозначение $U^{(1)} = (U_1,\dots,U_n)$. Подставляя рекуррентные соотношения (4.2) для U_{ij} и умножая на матрицу A, получаем

$$D_iU_j = \Phi_{ij}(x,u,u^{(1)},X,U,D^{(1)}X,U^{(1)}). \tag{5.8}$$

Применяя оператор полной производной в (4.1), имеем

$$\begin{pmatrix} D_iU_1 \\ \dots \\ D_iU_n \end{pmatrix} = (D_iA^{-1})\begin{pmatrix} D_1U \\ \dots \\ D_nU \end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix} D_iD_1U \\ \dots \\ D_iD_nU \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Отсюда вытекает следующее описание D_iU_j.

Лемма 5.1. *Каждый D_iU_j является рациональной функцией вида*

$$P_{ij}/Q = (u^{(1)},u^{(2)},X,U,D^{(1)}X,D^{(1)}U,D^{(2)}X,D^{(2)}U).$$

Знаменатель Q равен $(\det A)^2$. Каждый числитель P_{ij} — полином по $u^{(1)}$, а $u^{(2)}$ имеет вид $P_{ij} = \sum_{|\alpha|\leqslant N} A^\alpha_{ij}[u^{(1)}]^\alpha + B_{ij}$, где B_{ij} — члены ненулевой степени по $u^{(2)}$ и N — универсальная целая постоянная. Коэффициенты A^α_{ij} являются дифференциальными выражениями второго порядка вида

$$\sum_{k,l} a^\alpha_{ijkl}(x,u)U_{x^ku^l} + \sum_{k,l,s} b^\alpha_{ijkls}(x,u)X^s_{x^ku^l} + C, \tag{5.10}$$

где C — члены с частными производными f порядка $\leqslant 1$. Коэффициенты $a^\alpha_{ijkl}(x,u)$, $b^\alpha_{ijkls}(x,u)$ — многочлены по $(D^{(1)}X)(x,u)$, $(D^{(1)}U)(x,u)$.

Доказательство. Выражение для Q очевидно; $\det A$ не обращается в нуль в окрестности начала координат, поскольку $f'(0) = id$. Кроме того, имеем $D_iD_jU = U_{x_ix_j} + U_{x_iu}u_j + U_{x_ju}u_i + U_{uu}u_iu_j + \dots$, где опущены члены, содержащие $u^{(2)}$. Далее, элементы A^{-1} имеют вид $h_{ij}/\det A$, где h_{ij} — многочлены по $D^{(1)}X, D^{(1)}U, u^{(1)}$, а значит, элементы D_iA^{-1} имеют представление вида (5.10). Так как $D_jU = U_{x_j} + u_jU_u$, то получаем (5.10). Отметим, что $N = \max\{n,3\}$, однако нам не придется это использовать.

Подставим получившееся представление $D_iU_j = P_{ij}/Q$ в (5.8) и умножим обе части на Q. Далее подставим $F_{ij}(x,u,u^{(1)})$ вместо u_{ij} в каждом члене B_{ij} и подставим их в правую часть. Получим уравнения $\sum_\alpha A^\alpha_{ij}[u^{(1)}]^\alpha = \Psi_{ij}(x,u,u^{(1)},X,U,D^{(1)}X,D^{(1)}U)$. Разлагая правую часть в степенной ряд по $u^{(1)}$ и сравнивая коэффициенты, получаем уравнения $A^\alpha_{ij} = \psi^\alpha_{ij}(x,u,X,U,D^{(1)}X,D^{(1)}U)$ для $|\alpha| \leqslant N$ и $\psi^\alpha_{ij}(x,u,X,U,D^{(1)}X,D^{(1)}U) = 0$ для $|\alpha| > N$. Ввиду условия нётеровости, последнее соотношение дает только конечное число уравнений.

Ввиду данного выше представления для A^α_{ij}, эта последняя система может быть переписана в виде

$$MD^{(2)}f = \Phi(x,u,f,D^{(1)}f), \tag{5.11}$$

$$\Psi(x,u,f,D^{(1)}f) = 0, \tag{5.12}$$

где M — матрица, элементы которой — полиномы по $D^{(1)}f$. Уравнения (5.11), (5.12) дают конечные уравнения Ли для рассматриваемого случая. Отметим, что они являются системой второго порядка с $(n+1)$ независимыми переменными (x,u) и $(n+1)$ зависимыми переменными $f = (X,U)$.

Случай систем с соотношениями первого порядка может быть рассмотрен вполне аналогично и мы не вникаем в детали. Если $(\mathcal{S}^\varepsilon_2)$ и $(\hat{\mathcal{S}}^\delta_2)$ — голоморфные вполне интегрируемые деформации рассматриваемых систем, то конечные уравнения Ли аналитически зависят от параметров ε и δ. Получаем следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Конечные уравнения Ли, ассоциированные с двумя голоморфными вполне интегрируемыми системами второго порядка (с соотношениями первого порядка или без них) образуют голоморфную систему дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка для компонент точечного преобразования Ли. Если рассматриваемые системы аналитически деформируются с помощью параметра ε, то конечные уравнения Ли аналитически зависят от ε.*

6. Решение уравнений Ли

В этом параграфе общие методы формальной теории дифференциальных уравнений будут применены к рассматриваемому случаю. Это позволит доказать основные результаты. Значительно более общие методы можно найти в [15, 48].

1. Символы и продолжения. Как обычно, под голоморфной системой порядка q с n независимыми переменными y и m зависимыми переменными τ понимается голоморфное векторное расслоение в $J^q(n,m)$. В локальных координатах такая система имеет вид $(\mathcal{R}_q)$: $\sum_{j=1,\dots,m;|\alpha|\leqslant q} a^i_{j\alpha}(y)\partial^\alpha\tau^j=0$, $i=1,\dots,s$, где $a^i_{j\alpha}$ — голоморфные функции. Используем те же обозначения для подмногообразия в пространстве струй $J^q(n,m)$, соответствующем этой системе: $(\mathcal{R}_q)$: $\sum_{j=1,\dots,m;|\alpha|\leqslant q} a^i_{j\alpha}(y)\tau^j_\alpha=0$, $i=1,\dots,s$. (Голоморфное) решение такой системы — это функция $\tau(y)$, голоморфная в области D определения коэффициентов, такая, что $j^q_x(\tau)\in(\mathcal{R}_q)$ для каждого $x\in D$. Обозначим через $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ векторное пространство решений $(\mathcal{R}_q)$. *Символ* $G_q(y^0)$ системы $(\mathcal{R}_q)$ в точке y^0 — это линейное подпространство комплексного аффинного пространства с координатами v^j_α, $j=1,\dots,m$, $|\alpha|=q$, $\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_q$ $\alpha_i\in\{1,\dots,n\}$, определенное уравнениями (G_q): $\sum_{j=1,\dots,m;|\alpha|=q} a^i_{j\alpha}(y^0)v^j_\alpha=0$, $i=1,\dots,s$. r-продолжение $(\mathcal{R}_{q+r})$ системы $(\mathcal{R}_q)$ — это линейная система, которая получается, если добавить к $(\mathcal{R}_q)$ уравнения, полученные вычислением всех частных производных порядка $\leqslant r$ в каждом уравнении системы $(\mathcal{R}_q)$, т.е. $(\mathcal{R}_{q+r})$: $\sum_{j=1,\dots,m;|\alpha|\leqslant q}\partial^\beta(a^i_{j\alpha}(y)\partial^\alpha\tau^j)=0$, $i=1,\dots,s$, $|\beta|\leqslant r$. Очевидно, что она имеет то же пространство решений. Символ $(\mathcal{R}_{q+r})$ в точке y^0 обозначается через $G_{q+r}(y^0)$.

Система $(\mathcal{R}_q)$ называется системой *конечного типа* в точке y^0, если $G_{q+r}(y^0)=\{0\}$ для некоторого r. Если система имеет конечный тип в каждой точке, то говорим просто, что она — система конечного типа. Наименьшее r с этим свойством называется типом системы $(\mathcal{R}_q)$ и обозначается через $\mathrm{type}(\mathcal{R}_q)$.

Лемма 6.1. *Предположим, что система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип в некоторой точке y^0. Тогда размерность пространства решений системы $(\mathcal{R}_q)$, голоморфной в окрестности точки y^0, конечна.*

Доказательство. Из того, что $G_{q+r}(y^0)=\{0\}$ для некоторого r следует, что $(\mathcal{R}_{q+r})$ содержит подсистему, которую можно разрешить относительно всех частных производных порядка $q+r$, а значит, представить ее в следующем виде (в окрестности y^0): $\partial^\alpha\tau^j=\sum_{k=1,\dots,m;|\beta|\leqslant q+r-1}(b^j_{k\beta}(y)\partial^\beta\tau^k)$, $j=1,\dots,m$, $|\alpha|=q+r$. Отсюда, по цепному правилу и рекуррентному соотношению, следует, что все производные τ^j порядка $\geqslant q+r$ в y^0 определяются производными порядка $\leqslant q+r-1$, что означает, что размерность $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ конечна.

Доказательство достаточно конструктивно и позволяет получить явные рекуррентные формулы для разложений Тейлора в точке y^0 решений $(\mathcal{R}_0)$. Это также означает, что размерность $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ мажорируется $\dim J^t(n,m)$, где $d=\mathrm{type}(\mathcal{R}_q)-1$. Конечно, эта оценка не точна, поскольку частные производные в y^0 решения τ порядка $\leqslant d$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений $(\mathcal{L})$, происходящей из уравнений $(\mathcal{R}_{q+r})$ порядка $<(q+r)$. Решая эту систему, можно точно определить размерность пространства $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ для любой конкретной системы $(\mathcal{R}_q)$. Более точно, применяя правило Крамера к $(\mathcal{L})$, можно представить некоторые частные производные τ в точке y^0 порядка $\leqslant d$ (*главные производные*) как линейные комбинации остальных (*параметрических производных*). Число параметрических производных равно размерности $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ и они образуют множество естественных параметров на $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$.

Пусть $(\mathcal{R}_q^\varepsilon)$ — аналитическое семейство линейных систем, заданное как $(\mathcal{R}_q^\varepsilon)$:

$$\sum_{j=1,\ldots,m;|\alpha|\leqslant q} a^i_{j\alpha}(\varepsilon,y)\partial^\alpha\tau^j=0,\quad i=1,\ldots,s,$$

где $a^i_{j\alpha}$ — голоморфные функции по y и вещественно-аналитические по ε с ε, принадлежащим окрестности начала координат в $\mathbb{C}^k$. Следующее очевидное наблюдение оказывается очень полезным:

Лемма 6.2. *Предположим, что система $\mathcal{R}_q^0$ имеет конечный тип. Тогда для каждого ε, достаточно близкого к началу координат, система $(\mathcal{R}_q^\varepsilon)$ имеет конечный тип и* $\operatorname{type}(\mathcal{R}_q^\varepsilon)\leqslant\operatorname{type}(\mathcal{R}_q^0)$. *Далее,* $\dim\operatorname{Sol}(\mathcal{R}_q^\varepsilon)\leqslant\dim\operatorname{Sol}(\mathcal{R}_q^0)$.

Доказательство сразу получается из того, что ранг линейной алгебраической системы, определяющей символ продолженной системы, не убывает относительно малых возмущений коэффициентов, так что $\operatorname{type}(\mathcal{R}_q^\varepsilon)\leqslant\operatorname{type}(\mathcal{R}_q^0)$. Аналогично, если $(\mathcal{L}^\varepsilon)$ — алгебраическая система для частных производных порядка $<\operatorname{type}(\mathcal{R}_q)$, происходящая из уравнений низших порядков, то $\operatorname{rank}(\mathcal{L}^\varepsilon)\geqslant\operatorname{rank}(\mathcal{L}^0)$ и число параметрических производных убывает, так что $\dim\operatorname{Sol}(\mathcal{R}_q^\varepsilon)\leqslant\dim\operatorname{Sol}(\mathcal{R}_q^0)$.

Замечание. Понятия продолжения, главного символа и конечного типа так же, как и аналоги предыдущих лемм, сохраняют смысл для случая нелинейной системы $(\mathcal{R}_q)$ (поскольку продолженная система всегда линейна относительно производных наивысшего порядка). Если k-продолжение нелинейной системы имеет тривиальный главный символ в некоторой точке, то после применения правила Крамера к подсистеме, k-продолжение этой подсистемы может быть записано в виде $D^{(k+q)}\tau=h(y,\tau,\ldots,D^{(k+q-1)}\tau)$ с функцией h, аналитичной вблизи точки $P\in J^{k+q-1}(n,m)$. Из цепного правила следует, что в этом случае существует не более одного решения τ системы $(\mathcal{R}_q)$, голоморфного вблизи p и удовлетворяющего соотношению $j_p^{k+q-1}(\tau)=P$.

Вообще говоря, линейная система порядка q может содержать некоторые уравнения порядка $<q$. Тем не менее, если добавить к такой системе все уравнения порядка $\leqslant q$, полученные из уравнений низших порядков взятием всех частных производных подходящих порядков, то получим систему с тем же пространством решений. Назовем такую систему *пополнением* системы $(\mathcal{R}_q)$ или *пополненной* системой $(\mathcal{R}_q)$ и обозначим ее через $(\mathcal{R}_q)'$. Отметим также, что каждая линейная система может быть приведена к системе первого порядка с помощью введения дополнительных зависимых переменных; значит, можно рассматривать только такие системы.

Применяя эти результаты к пополненным уравнениям Ли, выведенным в предыдущем разделе для инволютивной алгебраической системы $(\mathcal{S}^0)$ из раздела 4 и ее голоморфной инволютивной деформации, получаем следующее

Предложение 6.3. *Предположим, что пополненные инфинитезимальные уравнения Ли для $(\mathcal{S}^0)$ образуют систему конечного типа. Тогда размерность* $\dim\operatorname{Lie}(\mathcal{S}^0)$ *конечна и для любого ε, достаточно близкого к началу координат, инфинитезимальные уравнения Ли голоморфной вполне интегрируемой деформации на $(\mathcal{S}^\varepsilon)$,* $\operatorname{type}(\mathcal{S}^\varepsilon)\leqslant\operatorname{type}(\mathcal{S}^0)$, *имеют тот же тип, и* $\dim\operatorname{Lie}(\mathcal{S}^\varepsilon)\leqslant\dim\operatorname{Lie}(\mathcal{S}^0)$.

Конечно, аналогичное утверждение остается в силе для конечных уравнений Ли.

Замечание. В свете этого результата ясно, что вызывает интерес вопрос о том, как проверить, что данная система является системой конечного типа. Одна из возможностей здесь состоит в том, чтобы рассмотреть *характеристическое многообразие*. Пусть λ — вектор из $\mathbb{C}^n$. Будем использовать обозначение $\lambda^\alpha=\lambda^{\alpha_1}\ldots\lambda^{\alpha_n}$. Вектор λ называется *характеристическим* (ко) вектором в точке y, если линейное отображение $\sigma_\lambda(y):\mathbb{C}^m\longrightarrow\mathbb{C}^s$, заданное матрицей $\sigma_\lambda(y):\sum_{|\alpha|=q}a^i_{j\alpha}(y)\lambda^\alpha$, не инъективно. Множество таких λ есть алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^n$, которое называется *характеристическим многообразием* в точке y и обозначается через $\operatorname{Char}_y(\mathcal{R}_q)$. Полезен следующий критерий (см. [15], с.195): система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип в том и только том случае, если $\operatorname{Char}_y(\mathcal{R}_q)$ равно нулю при каждом y (это не будет использоваться в данной статье).

Конечно, это утверждение не говорит ничего о значении типа системы $(\mathcal{R}_q)$. Однако если известно, что система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип, то этот тип может быть вычислен непосредственно с помощью изучения конечного числа продолжений и их символов, т.е. средствами элементарной линейной алгебры. Возможное число таких продолжений может быть мажорировано методами линейной алгебры и теории когомологий Спенсера [15].

Пример 1. Рассмотрим инфинитезимальные уравнения Ли для плоской системы без соотношений первого порядка, рассмотренной в примере 3 предыдущего раздела. Непосредственное вычисление показывает, что главный символ 1-продолжения тривиален. Значит, их решения — многочлены второго порядка, и легко видеть, что размерность пространства решений равна $(n+m+2)(n+m)$. Поэтому любая инфинитезимальная симметрия возмущенной системы однозначно определяется ее 2-струей в данной точке; размерность группы симметрии этой возмущенной системы мажорируется числами $(n+m+2)(n+m)$. Как это было видно в разделе 3, системы, определяющие семейства Сегре гиперповерхностей, невырожденных по Леви в $\mathbb{C}^{n+1}$, образуют специальный подкласс малых интегрируемых деформаций систем из примера 5.3 (с $m=1$). В частности, размерность группы автоморфизмов такой гиперповерхности мажорируется числом n^2+4n+3.

В качестве примера рассмотрим уравнения Ли в простейшем классическом случае, когда это — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Обозначим через $x \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathbb{C}$ соответственно независимые и зависимые переменные и рассмотрим голоморфное уравнение $(\mathcal{S}) : u_{xx} = F(x, u, u_x)$. Это уравнение определяет гиперповерхность в пространстве струй $J^2(1,1) : (\mathcal{S}_2) : u_{11} = F(x, u, u_1)$.

Голоморфное векторное поле $X = \theta\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u}$ является инфинитезимальной симметрией $(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если его 2-продолжение $X^{(2)} = X + \eta_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_{11}\frac{\partial}{\partial u_{11}}$ касательно к $(\mathcal{S}_2)$, т.е. $X^{(2)}(u_{11} - F(x,u,u_1)) = 0, (x,u,u_1,u_{11}) \in (\mathcal{S}_2)$.

Коэффициенты имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \eta_x + (\eta_u - \theta_x)\, u_1 - \theta_u (u_1)^2,\\
&\eta_{11} = \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \theta_{xx})\, u_1 + (\eta_{uu} - 2\theta_{xu})\,(u_1)^2 - \theta_{uu}(u_1)^3 + (\eta_u - 2\theta_x)\, u_{11} - 3\theta_u u_1 u_{11}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение $F(x,u,u_1) = \sum_{\nu\geqslant 0} f^\nu(x,u)(u_1)^\nu$; после элементарных вычислений, следуя описанному выше общему методу, получим следующую систему $(\mathcal{R}_2)$ инфинитезимальных уравнений Ли:

$$\begin{aligned}
&\eta_{xx} = 2f^0\theta_x + f^1\eta_x - f^0\eta_u + f^0_x\theta + f^0_u\eta,\\
&2\eta_{xu} - \theta_{xx} = f^1\theta_x - 3f^0\theta_u + f^1_x\theta + f^1_u\eta,\\
&\eta_{uu} - 2\theta_{xu} = 2f^1\theta_u + 3f^3\eta_x + f^2_x\theta + f^2_u\eta,\\
&-\theta_{uu} = -f^3\theta_x + f^2\theta_u + 4f^4\eta_x + f^3_x\theta + f^3_u\eta,\\
&(2-\nu)f^\nu\theta_x + (4-\nu)f^{\nu-1}\theta_u + (\nu+1)f^{\nu+1}\eta_x + f^\nu_x\theta + f^\nu_u\eta = 0, \nu \geqslant 4.
\end{aligned}$$

На самом деле только конечное число этих уравнений независимо. Покажем, однако, что первые 4 уравнения образуют систему конечного типа. Рассмотрим систему $(\mathcal{R}'_2)$

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= 2f^0\theta_x + f^1\eta_x - f^0\eta_u + f^0_x\theta + f^0_u\eta,\\
2\eta_{xu} - \theta_{xx} &= f^1\theta_x - 3f^0\theta_u + f^1_x\theta + f^1_u\eta,\\
\eta_{uu} - 2\theta_{xu} &= 2f^1\theta_u + 3f^3\eta_x + f^2_x\theta + f^2_u\eta,\\
-\theta_{uu} &= -f^3\theta_x + f^2\theta_u + 4f^4\eta_x + f^3_x\theta + f^3_u\eta.
\end{aligned}$$

Символ G'_2 этой системы есть двумерное линейное подпространство пространства $\mathbb{C}^6$ с координатами v^1_{11}, v^1_{12}, v^1_{22}, v^2_{11}, v^2_{12}, v^2_{22}, определяемое уравнениями

$$v^2_{11} = 0,\ 2v^2_{12} - v^1_{11} = 0,\ v^2_{22} - 2v^1_{12} = 0,\ v^1_{22} = 0.$$

Вектор $\lambda \in \mathbb{C}^2$ — характеристический в том и только том случае, если матрица со строками $(0,\lambda_1^2)$, $(\lambda_1^2, 2\lambda_1\lambda_2)$, $(-2\lambda_1\lambda_2, \lambda_2^2)$, $(\lambda_2^2, 0)$ имеет ранг $\leqslant 1$; отсюда следует, что характеристическое многообразие равно нулю, а значит, рассматриваемая система имеет конечный тип.

Ее 1-продолжение G'_3 — подпространство в $\mathbb{C}^8$ с координатами v^1_{111}, v^1_{112}, v^1_{122}, v^1_{222}, v^2_{111}, v^2_{112}, v^2_{122}, v^2_{222}, заданное уравнениями

$$\begin{aligned}&v^2_{111}=0, v^2_{112}=0, v^1_{122}=0, v^1_{222}=0,\\ &2v^2_{112}-v^1_{111}=0, 2v^2_{122}-v^1_{112}=0,\\ &v^2_{122}-2v^1_{112}=0, v^2_{222}-2v^1_{122}=0,\end{aligned}$$

так что сразу видим, что $G'_3=\{0\}$, т.е. $(\mathcal{R}'_2)$ имеет тип 1. Решая ее 1-продолжение $(\mathcal{R}'_3)$ относительно частных производных третьего порядка, получаем явное представление этих частных производных в терминах компонент 2-струи.

Фиксируем точку (x_0,u_0) и зададим значения $a_1:=\theta(x_0,u_0)$, $a_2:=\eta(x_0,u_0)$, $a_3:=\theta_x(x_0,u_0)$, $a_4:=\theta_u(x_0,u_0)$, $a_5:=\eta_x(x_0,u_0)$, $a_6:=\eta_u(x_0,u_0)$, $a_7=\theta_{xx}(x_0,u_0)$, $a_8=\theta_{xu}(x_0,u_0)$ параметрических производных. Тогда значения всех производных второго порядка θ, η в точке (x_0,u_0) определяются полученными выражениями, а значения всех производных порядка $\geqslant 3$ в точке (x_0,u_0) определяются этими выражениями для производных третьего порядка, полученными с помощью цепного правила. Это означает, что $\dim\mathrm{Lie}(\mathcal{S})\leqslant 8$, и эта оценка точна, поскольку в плоском случае, когда $F\equiv 0$, имеем $\dim\mathrm{Lie}(\mathcal{S})=8$.

Конечно, построенные векторные поля, вообще говоря, только *кандидаты* на принадлежность к $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})$, поскольку имеются дополнительные уравнения первого порядка в уравнениях Ли $(\mathcal{R}_q)$. То, что θ, η удовлетворяют этим уравнениям, накладывает дополнительные аналитические ограничения на параметры a_j, так что в действительности $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})$ параметризуется некоторым аналитическим подмногообразием пространства $\mathbb{C}^8$ параметров a_j.

Данное описание симметрий обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка было получено Л. Диксоном в [70]. Поскольку семейство Сегре гиперповерхности, невырожденной по Леви в $\mathbb{C}^2$, есть множество решений такого уравнения, то данный метод позволяет указать явную параметризацию ее группы автоморфизмов.

Пример 2. Рассмотрим конечные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2)$ из примера 4 предыдущего пункта. Как уже отмечалось, продолжение $\mathcal{R}_2)^{(1)}$ линейно относительно частных производных третьего порядка X и U. Соответствующий определитель равен $\mathrm{const}(\mathrm{Jac}_f)^4$, где const — универсальная ненулевая постоянная, а Jac_f — якобиан f. Так как f биголоморфно и, значит, имеет ненулевой якобиан, то применимо правило Крамера. Получаем, что $D^{(3)}f(x,u)=\Phi(x,u,f,D^{(1)}f,D^{(2)}f)$ с голоморфной векторной функцией Φ (другими словами, $(\mathcal{R}_2)^{(1)}$ имеет тривиальный главный символ). По цепному правилу, разложение Тейлора f в фиксированной точке (x,u) однозначно определено. Это дает явную параметризацию поточечных преобразований между двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями с помощью их 2-струй. Поскольку $(\mathcal{R}_2)$ есть также линейная система относительно частных производных второго порядка X, U, то можно ее решить по правилу Крамера относительно X_{xx}, X_{uu}, U_{xx}, U_{uu}, поскольку соответствующий определитель равен $\mathrm{const}(\mathrm{Jac}_f)^2$. Следовательно, $(X_{xx},X_{uu},U_{xx},U_{uu})=\Psi(x,u,f,D^{(1)}f,X_{xu},U_{xu})$ с аналитическими Ψ; значит, $j^2_p(f)$ определяется $j^1_p(f)$ и двумя частными производными второго порядка в фиксированной точке p, т.е. 8 комплексными параметрами.

Пример 3. Рассмотрим более сложный случай конечных уравнений Ли из примера 5 предыдущего пункта.

Рассмотрим только уравнения (5.11). Прежде всего, можно считать, что f определено в окрестности начала координат, $f(0)=0$ и, кроме того, касательное отображение $f'(0)$ тождественно. В самом деле, можно добиться этого с помощью переносов и линейных замен координат в пространстве переменных (x,u). Все рассмотрения будут проводиться в подходящей окрестности начала координат. Докажем, что 1-продолжение системы (5.11) имеет тривиальный главный символ в точке $P\in J^1(n+1,n+1)$ с каноническими координатами $x(P)=0$, $u(P)=0$, $u^j_i(P)=\delta_{ij}$ (символ Кронекера).

Рассмотрим M как матричную функцию на $J^1(n+1,n+1)$; тогда $M(P)$ — матрица с *постоянными* элементами, полученными с помощью вычисления соответствующих элементов M (которые являются полиномами от $D^{(1)}f$) после подстановки $X^i_{x_j}=\delta_{ij}$, $U_{x_j}=0$, $U_u=1$. Рассмотрим главный символ $M(P)D^{(2)}f = 0$ уравнения (5.11) в P. Ясно, что если его 1-продолжение тривиально в P, то 1-продолжение (5.11) также имеет тривиальный главный символ в P. Например, в предыдущем специальном случае $n = 1$ (в предыдущем примере) главный символ в P имеет вид

$$U_{xx} = 0, \quad 2U_{xu} - X_{xx} = 0, \quad -2X_{ux} + U_{uu} = 0, \quad X_{uu} = 0 \tag{6.1}$$

и его 1-продолжение тривиально. Рассмотрим следующую *приведенную систему*

$$M(P)D^{(2)}f = 0. \tag{6.2}$$

Нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма 6.4. *Предположим, что главный символ 1-продолжения приведенной системы* (6.2) *тривиален в* P. *Тогда 1-продолжение* (5.11) *имеет также тривиальный символ в* P.

Замечание. Конечно, поскольку система (6.2) имеет постоянные коэффициенты, то главный символ ее продолжения тривиален в точке P в том и только том случае, если он тривиален в любой другой точке. Подчеркнем, однако, что $M(P)$ получено с помощью вычисления M в точке P.

Доказательство. Это вытекает из предположения леммы о том, что 1-продолжение (6.2) содержит подсистему, эквивалентную $D^{(3)}f = 0$. Значит, по непрерывности, определитель соответствующей подсистемы (5.11) не обращается в нуль вблизи точки P и применимо правило Крамера, что и доказывает лемму.

Замечание. Отметим, что система (6.2) в существенном есть главный символ системы (5.11). Формально более удобно определить главный символ на соответствующем расслоении струй как и выше; в рассматриваемом случае это приводит к бесполезному усложнению терминологии, так что будем продолжать называть ее «приведенной системой».

Например, в предыдущем специальном случае $n = 1$ приведенная система имеет вид

$$U_{xx} = 0, \quad 2U_{xu} - X_{xx} = 0, \quad -2X_{ux} + U_{uu} = 0, \quad X_{uu} = 0. \tag{6.3}$$

Вычисляя первые частные производные в этих уравнениях, сразу получаем систему третьего порядка, эквивалентную $D^{(3)}f = 0$, т.е. 1-продолжение (6.3) имеет тривиальный главный символ. Значит, если f удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = id$, то ее разложение Тейлора в начале координат единственным образом определяется двумя вторыми частными производными f: $X_{xx}(0)$ и $U_{uu}(0)$ (другие частные производные определяются системой (6.3)). Для произвольного точечного преобразования f нужно добавить 6 комплексных параметров, задающих значения $f(0)$ и $D^{(1)}f(0)$. Поэтому множество всех точечных преобразований между двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка может быть параметризовано не более чем 8 комплексными параметрами (в общем случае они не независимы).

Решающее наблюдение, которое существенно упрощает вычисления, состоит в том, что можно вычислить матрицу M_{id} приведенной системы *непосредственно* без использования явных выражений для M в (5.11). В качестве примера рассмотрим случай $n = 2$.

Применение рекуррентных формул приводит к соотношениям

$$U_1 = P/\Delta, U_2 = R/\Delta,$$

где

$$\Delta = \det A = (X^1_{x_1}X^2_{x_2} - X^1_{x_2}X^2_{x_1}) + (X^1_u X^2_{x_2} - X^1_{x_2}X^2_u)u_1 + (X^1_{x_1}X^2_u - X^1_u X^2_{x_1})u_2,$$

$$P = (X^2_{x_2}U_{x_1} - X^2_{x_1}U_{x_2}) + (X^2_{x_2}U_u - X^2_u U_{x_2})u_1 + (X^2_u U_{x_1} - X^2_{x_1}U_u)u_2,$$

$$R = (X^1_{x_1}U_{x_2} - X^1_{x_2}U_{x_1}) + (X^1_u U_{x_2} - X^1_{x_2}U_u)u_1 + (X^1_{x_1}U_u - X^1_u U_{x_1})u_2.$$

Поэтому

$$D_iU_1 = (1/\Delta^2)((D_iP)\Delta - P(D_i\Delta)), \quad D_iU_2 = (1/\Delta^2)((D_iQ)\Delta - Q(D_i\Delta)).$$

Так как нас интересует только приведенная система, то можно упростить дальнейшие вычисления и продолжать их, используя следующие правила:

(1) условия $X^i_{x_j}=\delta_{ij}$, $U_{x_j}=0$, $U_u=1$ используются каждый раз, когда вычисляется коэффициент при второй производной f;
(2) не вычисляются и не выписываются члены, содержащие $u^{(2)}$, поскольку они не влияют на приведенную систему;
(3) не вычисляются и не выписываются члены, содержащие частные производные f порядка $\leqslant 1$ (т.е. члены, обозначенные через C в (5.10)).

Результат такого вычисления обозначается через $D_iU_j|_{j^1_0(f)=id}$. Другими словами, в обозначениях (5.10) имеем

$$D_iU_j|_{j^1_0(f)=id}=\sum_\alpha\left(\sum_{k,l}a^\alpha_{ijkl}(0)U_{x^ku^l}+\sum_{k,l,s}b^\alpha_{ijkls}(0)X^s_{x^ku^l}\right)[u^{(1)}]^\alpha, \tag{6.4}$$

где коэффициенты a,b рассматриваются как функции от (x,u) и принимают соотвктствующие значения в начале координат.

Получаем

$$D_1U_1|_{j^1_0(f)=id}=U_{x_1x_1}+(2U_{x_1u}-X^1_{x_1x_1})u_1+(2X^1_{x_1u}-U_{uu})u_1^2-$$
$$-X^2_{x_1x_1}u_2-2X^2_{x_1u}u_1u_2-X^1_{uu}u_1^3-X^2_{uu}u_1^2u_2,$$

$$D_1U_2|_{j^1_0(f)=id}=U_{x_1x_2}+(U_{x_2u}-X^1_{x_1x_2})u_1+(-X^2_{x_1x_2}+U_{x_1u})u_2-$$
$$-X^1_{x_2u}u_1^2+(U_{uu}-X^2_{x_2u}-X^1_{x_1u})u_1u_2-X^2_{x_1u}u_2^2-X^1_{uu}u_1^2u_2-X^2_{uu}u_1u_2^2,$$

$$D_2U_2|_{j^1_0(f)=id}=U_{x_2x_2}+(2U_{x_2u}-X^2_{x_2x_2})u_2-(2X^2_{x_2u}-U_{uu})u_2^2-$$
$$-X^1_{x_2x_2}u_1-2X^1_{x_2u}u_1u_2-X^2_{uu}u_2^3-X^1_{uu}u_1u_2^2.$$

Значит, редуцированная система имеет вид

$$U_{x_ix_j}=0,\ i,j=1,2,\quad X^1_{uu}=X^1_{x_2u}=X^1_{x_2x_2}=0,\quad X^2_{uu}=X^2_{x_1u}=X^2_{x_1x_1}=0,$$

$$2U_{x_1u}-X^1_{x_1x_1}=0,\quad U_{uu}-2X^1_{x_1u}=0,\quad U_{x_2u}-X^1_{x_1x_2}=0,$$

$$U_{x_1u}-X^2_{x_1x_2}=0,\quad 2U_{x_2u}-X^2_{x_2x_2}=0,\quad U_{uu}-2X^2_{x_2u}=0,$$

где опущено уравнение $U_{uu}-X^2_{x_2u}-X^1_{x_1u}=0$, поскольку оно является линейной комбинацией остальных.

Теперь непосредственная проверка показывает, что 1-продолжение этой системы имеет тривиальный символ и предложение доказано, если $n=2$. Кроме того, как и в предыдущем примере, мы видим, что пространство всех точечных преобразований параметризуется не более чем 15 параметрами.

Рассмотрим теперь общий случай, когда n произвольно. Будем рассуждать, следуя соглашениям (1), (2),(3) и используя (5.9). Отметим, что можно избежать вычисления A^{-1}. В самом деле, имеем тождество $D_iA^{-1}=-A^{-1}(D_iA)A^{-1}$; поскольку A и D_iU не содержат производных f второго порядка, то вклад членов

$$(D_iA^{-1})\begin{pmatrix}D_1U\\ \dots\\ D_nU\end{pmatrix}$$

в M_{id} равен

$$-D_iA\begin{pmatrix}u_1\\ \dots\\ u_n\end{pmatrix}.$$

Используя принятые соглашения, можно также легко вычислить вклады D_iA и D_iD_jU в M_{id} (ясно, что матричный множитель A^{-1} можно опустить). Получаем

$$D_jU_s|_{j_0^1(f)=id} = (-\sum_{k=1}^{n} X^k_{x_jx_s}u_k + u_sU_{x_ju} + u_jU_{x_su}) +$$

$$+ \quad (-u_s\sum_{k=1}^{n} X^k_{x_ju}u_k - u_j\sum_{k=1}^{n} X^k_{x_su}u_k + u_ju_sU_{uu}) - u_ju_s\sum_{k=1}^{n} X^k_{uu}u_k + U_{x_jx_s}.$$

Будем различать два случая: $j = s$ и $j < s$. Получаем

$$D_sU_s|_{j_0^1(f)=id} = U_{x_sx_s} + u_s(2U_{x_su} - X^s_{x_sx_s}) - \sum_{k=1,k\neq s}^{n} X^k_{x_sx_s}u_k +$$

$$+ \quad u_s^2(U_{uu} - 2X^s_{x_su}) - 2\sum_{k=1,k\neq s}^{n} X^k_{x_su}u_su_k - \sum_{k=1}^{n} X^k_{uu}u_ku_s^2$$

и

$$D_jU_s|_{j_0^1(f)=id} = U_{x_jx_s} + u_s(U_{x_ju} - X^s_{x_jx_s}) + u_j(U_{x_su} - X^j_{x_jx_s}) -$$

$$- \sum_{k=1,k\neq j,s}^{n} X^k_{x_jx_s}u_k + u_su_j(U_{uu} - X^s_{x_su} - X^j_{x_ju}) - u_s\sum_{k=1,k\neq j}^{n} X^k_{x_ju}u_k -$$

$$-u_j\sum_{k=1,k\neq s}^{n} X^k_{x_su}u_k - u_ju_s\sum_{k=1}^{n} X^k_{uu}u_k.$$

Значит, главный символ приведенной системы определяется следующей системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$(I)\ U_{x_jx_s} = 0, 1 \leqslant j \leqslant s \leqslant n,$$
$$(II)\ X^k_{uu} = 0,$$
$$(III)\ X^k_{x_jx_s} = 0, 1 \leqslant j \leqslant s \leqslant n, k \neq j, s,$$
$$(IV)\ X^k_{x_su} = 0, k \neq s,$$
$$(1)\ 2U_{x_su} - X^s_{x_sx_s} = 0,$$
$$(2)\ U_{uu} - 2X^s_{x_su} = 0,$$
$$(3)\ U_{x_ju} - X^s_{x_jx_s} = 0, j \neq s,$$

где выписаны только линейно независимые уравнения.

Покажем, что главный символ 1-продолжения этой системы тривиален.

Из (I) $U_{x_jx_st} = 0$, $t \in \{x_j, u\}$. Из (II) $X^k_{uut} = 0$, а из (IV) следует, что $X^k_{x_sut} = 0$, $k \neq s$; далее (III) дает $X^k_{x_jx_st} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant s \leqslant n$, $k \neq j, s$.

Вычисляя производные по x_j в (1) и по x_p в (3), получаем $X^s_{x_sx_ix_j} = 0$ для любых i, j. Следовательно, $X^s_{x_ix_jx_p} = 0$ для любых i, j, p. Беря производные по x_k в (2), получаем $U_{uux_k} = 0$ и, аналогично, $U_{uuu} = 0$, откуда следует, что $D^{(3)}U = 0$. Из (1) имеем $X^s_{x_sx_st} = 0$, из (3) $X^s_{x_jx_st} = 0$ при $s \neq j$, а следовательно, $X^k_{x_ix_jt} = 0$, так что $D^{(3)}X = 0$. Таким образом, главный символ 1-продолжения тривиален.

Следовательно, разложение Тейлора точечного преобразования $f : (x, u) \mapsto (X, U)$ в начале координат определяется его членами второго порядка. Для того, чтобы завершить рассмотрение этого примера, заметим, что приведенная система содержит $(n^3 + 4n^2 + 3n)/2$ независимых уравнений с $(n+1)^2(n+2)/2$ неизвестными переменными (вторым производными f). Но f удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $f'(0) = id$, так что f зависит не более чем от $n + 1$ параметров. Для произвольного f нужно добавить $(n + 1) + (n + 1)^2$ параметров, соответствующих $f(0)$ и $f'(0)$. Значит, вообще говоря, f однозначно определяется не более чем $n^2 + 4n + 3$ параметрами.

7. Многообразия Сегре, голоморфные отображения и симметрии

1. Вещественно-аналитические многообразия. Прежде всего, остановимся на используемой ниже терминологии и обозначениях, связанных с CR-многообразиями.

Обозначим через $Z = (z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ стандартные координаты в $\mathbb{C}^{n+m}$. Рассмотрения будут чисто локальными; поэтому все окрестности, области и т.п. (что в дальнейшем не упоминается) всегда предполагаются достаточно малыми настолько, насколько это необходимо. Рассмотрим вещественно-аналитическое подмногообразие M коразмерности m в $\mathbb{C}^{n+m}$, заданное уравнениями $M = \{Z : r(Z, \overline{Z}) = 0\}$, где $r = (r^1, \dots, r^m)$ — вещественно-аналитическое $\mathbb{R}^m$-значное отображение максимального ранга. Говорят, что M *невырождено по Леви* в точке, если выполнены следующие два условия:

(i) существует линейная комбинация форм Леви $\mathcal{L}_p^s(u, v) = \sum_{j,k} r^s_{z_j \overline{z}_k}(p) u_j \overline{v}_k$, $u, v \in H_p(M)$, являющаяся невырожденной эрмитовой формой на $H_p(M)$.

(ii) эрмитовы формы $\mathcal{L}_p^s(u, v)$ линейно независимы.

Говорят, что M *невырождено по Леви*, если оно невырождено по Леви в каждой точке. Часто некоторые авторы называют M невырожденным по Леви, если выполнено несколько более слабое условие вместо (i), а именно, форма Леви подмногообразия M (рассматриваемая как векторнозначная эрмитова форма) имеет тривиальное ядро. Наши методы легко применяются и к этому случаю (и даже к более общей ситуации). В данной статье, чтобы избежать усложнения обозначений, мы в основном ограничиваемся рассмотрением указанного выше класса многообразий. Не нарушая общности, *будем предполагать, что любое рассматриваемое многообразие M содержит начало координат*.

Отображение $f : M \longrightarrow M$, определенное и биголоморфное в окрестности начала координат, называется биголоморфизмом или (биголоморфным) автоморфизмом M. Эти отображения образуют группу относительно операции суперпозиции, которая называется *группой автоморфизмов* подмногообразия M и обозначается через $\mathrm{Aut}(M)$. В данной статье группа $\mathrm{Aut}(M)$ всегда рассматривается как *локальная группа*, т.е. все преобразования из $\mathrm{Aut}(M)$ предполагаются принадлежащими окрестности тождественного отображения; в частности, $\mathrm{Aut}(M)$ однозначно определяется ее алгеброй Ли $\mathrm{Aut}_{inf}(M)$ с помощью экспоненциального отображения. Элементы этой алгебры Ли образованы голоморфными в окрестности начала координат векторными полями, порождающими однопараметрические группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(M)$; назовем их *инфинитезимальными автоморфизмами* подмногообразия M.

2. Семейства Сегре. Для фиксированной точки $\zeta \in \mathbb{C}^{n+m}$, достаточно близкой к M, рассмотрим комплексное подмногообразие $Q(\zeta) = \{Z : r(Z, \overline{\zeta}) = 0\}$. Напомним, что оно называется *многообразием Сегре*. Основное свойство многообразий Сегре состоит в их биголоморфной инвариантности: для каждого автоморфизма $f \in \mathrm{Aut}(M)$ и любой точки ζ, достаточно близкой к началу координат, имеем $f(Q(\zeta)) = Q(f(\zeta))$. При нашем подходе использование комплексного сопряжения в определении поверхности Сегре неудобно. Поэтому рассмотрим комплексную гиперповерхность $Q^*(\zeta) = Q(\overline{\zeta})$. Тогда для каждого $f \in \mathrm{Aut}(M)$ имеем $f(Q^*(\zeta)) = Q^*(\overline{f}(\overline{\zeta}))$. Таким образом, f отображает любой элемент семейства $\{Q^*(\zeta)\}_\zeta$ в другой его элемент. Будем, по-прежнему, называть $Q^*(\zeta)$ многообразием Сегре и опускать звездочку в его обозначении.

Б. Сегре [115] заметил, что множество многообразий Сегре в $\mathbb{C}^2$ невырожденной по Леви вещественно-аналитической гиперповерхности M (которое называется *семейством Сегре* гиперповерхности M) есть регулярное двупараметрическое семейство голоморфных кривых и, следовательно, представляет траектории решений голоморфного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Инвариантность семейства Сегре относительно $\mathrm{Aut}(M)$ означает, что любой биголоморфизм M можно рассматривать как симметрию этого дифференциального уравнения. Наблюдение Сегре важно, потому что оно связывает CR-геометрию с геометрией обыкновенных дифференциальных уравнений.

Изучение симметрий голоморфных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (пополненных в определенном смысле) было продолжено А. Трессе [131] (см. также [70], [8]). В частности, такая группа всегда является комплексной группой Ли размерности $\leqslant 8$; этот важный факт позволил Б. Сегре заключить, что $\mathrm{Aut}(M)$ — вещественная группа Ли.

Идея Сегре допускает естественное обобщение на высшие размерности.

3. Семейства Сегре для многообразий высокой коразмерности. Введем класс систем, которые играют главную роль в данной статье.

Пусть $(\mathcal{S})$ — голоморфная система второго порядка с дополнительным соотношением первого порядка вида $u^1_{x_ix_j} = F_{ij}(x,u,u^1_x)$, $i,j=1,\dots,n$, $u^k_x = G^k(x,u,u^1_x)$, $k=2,\dots,m$.

Для упрощения обозначений введем зависимые переменные $w := u^1$ и $v = (u^2,\dots,u^m)$, так что $u=(w,v)$; это обозначение индуцирует расщепление $u^{(1)} = (w^{(1)}, v^{(1)})$ естественных координат пространства $J^1(n,m)$. Тогда система может быть записана в виде $w_{x_ix_j} = F_{ij}(x,w,v,w_x)$, $v^k_x = G^k(x,w,v,w_x)$, где используется обозначение $w_x = (w_{x_1},\dots,w_{x_n})$, $v^k_x = (v^k_{x_1},\dots,v^k_{x_n})$, $G^k = (G^k_1,\dots,G^k_n)$. Будем также использовать обозначения $v_x = (u^2_x,\dots,u^m_x)$, $G=(G^2,\dots,G^m)$.

В пространстве струй $J^1(n,m)$ рассмотрим комплексное подмногообразие Γ, определенное в естественных координатах уравнением $v^{(1)} = G(x,u,w^{(1)})$. Тогда $(x,u,w^{(1)})$ — голоморфные локальные координаты на Γ, и на Γ можно рассмотреть 1-формы, определенные следующим образом: $\omega_i = dw_i - \sum_j F_{ij}(x,u,w^{(1)})dx_j$, $\phi^1 = dw - \sum_j w_j dx_j$ и $\phi^k = dv^k - \sum_j G^k_j(x,u,w^{(1)})dx_j$, $k>1$

Говорят, что система $(\mathcal{S})$ выше *вполне интегрируема* или *инволютивна*, если распределение, определенное этими формами на касательном расслоении Γ, удовлетворяет условию Фробениуса. Из теоремы Фробениуса следует, что если $(\mathcal{S})$ иноволютивно, то оно локально регулярно, т.е. для каждой точки комплексного подмногообразия $(\mathcal{S}_2)$: $w_{ij} = F_{ij}(x,u,w^{(1)}), v^{(1)} = G(x,u,w^{(1)})$ в $J^2(n,m)$ существует решение $(\mathcal{S})$, 2-струи которого совпадают с этой точкой. В силу критерия Фробениуса, графики решений $(\mathcal{S})$ образуют голоморфное слоение Γ с n-мерными слоями, зависящими от $(n+m)$ параметров в том и только том случае, если $(\mathcal{S})$ инволютивно.

Пусть теперь M — невырожденная по Леви квадрика в $\mathbb{C}^{n+m}$, заданная уравнениями $w_k + \overline{w}_k = \langle L^k(z), \overline{z}\rangle$, $k=1,\dots,m$, где каждый L^k есть эрмитов оператор в $\mathbb{C}^n$, а $\langle z,\zeta\rangle = \sum_{j=1}^n z_j\zeta_j$. Можно считать, что эрмитова форма $\langle L^1(z),\overline{z}\rangle$ невырождена. При $(z,\omega)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ соответствующее многообразие Сегре есть $Q(\zeta,\omega) = \{(z,w) : w_k+\omega_k = \langle L^k(z),\zeta\rangle\}$; если рассмотрим $x := z$ как независимые переменные, а $u := w$ — как зависимые, то $Q(\zeta,\omega)$ есть график u: $Q(\zeta,\omega) = \{(x,u) : u^k + \omega_k = \langle L^k(x),\zeta\rangle\}$. Построим систему, общее решение которой задается этим семейством. Прежде всего, очевидно, при всех k,i,j имеем уравнение $u^k_{x_ix_j} = 0$. Тем не менее, этого, вообще говоря, недостаточно, поскольку рассматриваемое семейство решений зависит от $n+m$ параметров, так что нужно найти остальные соотношения. Рассматривая первые частные производные, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для ζ: $u^1_{x_i} = \langle L^1(x)_{x_i},\zeta\rangle$. Так как ранг этой системы равен n, то получаем, что $\zeta = Nu^1_x$, где N — $n\times n$-матрица. Получаем, что $u^k_x = A^k u^1_x$, $k=2,\dots,m$, где A^k — матрицы. Поэтому получаем систему $u^1_{x_ix_j} = 0$, $u^k_x = A^k u^1_x$, $k=2,\dots,m$, множество решений которой совпадает с семейством Сегре подмногообразия M. Назовем такие системы *плоскими* системами.

Эту конструкцию можно сразу обобщить на любое невырожденное по Леви вещественно-аналитическое подмногообразие. В самом деле, пусть M — вещественно-аналитическое невырожденное по Леви подмногообразие в $\mathbb{C}^{n+m}$, проходящее через начало координат. Тогда в окрестности начала координат оно может быть представлено в виде $w_k + \overline{w}_k = \langle L^k(z),\overline{z}\rangle + o(|Z|^2)$, $k=1,\dots,m$. При $(z,\omega)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ соответствующее многообразие Сегре (возможно после применения теоремы о неявной функции) есть $Q(\zeta,\omega) = \{(z,w) : w_k+\omega_k = \langle L^k(z),\zeta\rangle + R^k(z,\zeta,\omega)\}$, где R^k не содержит членов порядка $\leqslant 2$. Рассмотрим $x := z$ как независимые переменные, а $u := w$ — как зависимые. Тогда $Q(\zeta,\omega)$ есть график u: (i): $Q(\zeta,\omega) = \{(x,u) : u^k+\omega_k = \langle L^k(x),\zeta\rangle + R^k(x,\zeta,\omega)\}$. Рассматривая первые частные производные, получаем следующую систему (ii) : $u^k_{x_i} = \langle L^k(x)_{x_i},\zeta\rangle + R^k_{x_i}(x,\zeta,\omega)$. Применяя теорему о неявной функции к (i), (ii), получаем, что $(\zeta,\omega) = \varphi(x,u,w_x)$, где φ — голоморфная функция. Теорема о неявной функции позволяет рекуррентно вычислить член любого порядка в разложении φ, так что наш метод вполне конструктивен. Используя φ с целью исключения параметров ζ, ω из тех уравнений в (i), которые не использовались, получаем голоморфные уравнения вида $u_x^k = A^k u_x^1 + \psi(x, u, u_x^1)$, $k = 2, \ldots, m$, с голоморфной функцией ψ без членов порядка $\leqslant 1$.

Далее рассмотрим производные второго порядка $u^1_{x_i x_j} = R^1_{x_i x_j}(x, \zeta, \omega)$ и заменим ζ, ω на φ. Получим голоморфные уравнения $w_{x_i x_j} = F_{ij}(x, u, w_x)$. Значит, $u(x)$ удовлетворяет следующей голоморфной системе дифференциальных уравнений: $(\mathcal{S}_M)$: $w_{x_i x_j} = F_{ij}(x, u, u_x), i \leqslant j, v_x^k = A^k w_x + G^k(x, u, w_x)$. Так как решения этой системы (заданные системой (i)) зависят от $(n+m)$ параметров, то из теоремы Фробениуса следует, что эта система инволютивна (в частности, (i) представляет все решения этой системы).

Если M — гиперповерхность, то система $(\mathcal{S}_M)$, имеющая вид $u^k_{x_i x_j} = F^k_{ij}(x, u, u_x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, не содержит соотношений первого порядка. Важность изучения этого класса систем была реализована С. С. Черном [53], решившим проблему эквивалентности для этого класса систем с одной независимой переменной (см. также работу Фарана [82]).

Очевидно, что если выбрать другую систему локальных определяющих функций для M, то система $(\mathcal{S}_M)$, построенная выше, изменится, но новая система будет иметь то же множество решений (семейство Сегре подмногообразия M). Значит, группа симметрий подмногообразия $\mathcal{S}_M$ не зависит от выбора локальных определяющих функций подмногообразия M. Биголоморфная инвариантность семейства Сегре подмногообразия M означает, что каждый биголоморфизм подмногообразия M есть симметрия построенной системы. Более общо, если $f : M \longrightarrow M'$ — локальный биголоморфизм вещественно-аналитических многообразий, то f — точечное преобразование Ли систем $\mathcal{S}_M$ и $\mathcal{S}_{M'}$, определяющих их семейства Сегре. В этом смысле определение системы $(\mathcal{S}_M)$ не зависит от локальных координат.

Поэтому в случае, когда $\mathrm{Sym}(\mathcal{S}_M)$ — конечномерная группа Ли $\mathrm{Aut}(M)$ есть ее конечномерная вещественная подгруппа Ли (поскольку она, очевидно, замкнута). Для получения точной оценки ее размерности напомним следующее полезное наблюдение, принадлежащее Э. Картану [50].

Предложение 7.1. *Пусть* $\mathrm{Sym}(\mathcal{S}_M)$ *— конечномерная комплексная группа Ли, тогда* $\mathrm{Aut}(M)$ *— ее подгруппа Ли, вложенная в* $\mathrm{Sym}(\mathcal{S}_M)$ *как вполне вещественное подмногообразие.*

Доказательство. Пусть голоморфное векторное поле X принадлежит алгебре $\mathrm{Aut}_{inf}(M)$. Так как M — порождающее многообразие, то существует открытое плотное подмножество U в M, на котором X не обращается в нуль. В окрестности точки $p \in U$ поле X после локально биголоморфной замены координат можно представить в виде $X = \partial/\partial Z_1$. В этих координатах X порождает вещественную однопараметрическую группу биголоморфизмов M, образованную переносами $Z_1 \mapsto Z_1 + t$, $Z_j \mapsto Z_j$, $j = 2, \ldots, n+m$, $t \in \mathbb{R}$. Если поле iX принадлежит также и $\mathrm{Aut}_{\mathrm{inf}}(M)$, то M инвариантно относительно комплексной группы переносов $Z_1 \mapsto Z_1 + t$, $Z_j \mapsto Z_j$, $j = 2, \ldots, n+m$, $t \in \mathbb{C}$. Это означает, что в окрестности p многообразие M биголоморфно эквивалентно декартову произведению $\mathbb{C} \times M'$, где M' — вещественное подмногообразие в комплексном аффинном пространстве меньшей размерности. Это противоречит невырожденности по Леви многообразия M. Поэтому алгебра $\mathrm{Aut}_{inf}(M)$ — вполне вещественное подпространство в алгебре $\mathrm{Lie}(\mathcal{S}_M)$.

Подчеркнем, что системы, определяющие семейства Сегре, образуют очень специальный класс голоморфных инволютивных систем второго порядка с соотношениями первого порядка.

Суммируем проведенные рассмотрения.

Предложение 7.2. *Семейство Сегре вещественно-аналитического невырожденного по Леви подмногообразия* M *в* $\mathbb{C}^{n+m}$ *есть общее решение голоморфной максимально переопределенной инволютивной системы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с* n *независимыми и одной зависимой переменными и соотношений первого порядка. Эта система канонически ассоциирована с* M *и обозначается через* $(\mathcal{S}_M)$*. Любой биголоморфизм* M *—- точечная симметрия Ли этой системы.*

Если $\mathrm{Sym}(\mathcal{S}_M)$ *— конечномерная комплексная группа Ли, то* $\mathrm{Aut}(M)$ *— ее вещественная подгруппа, вложенная в* $\mathrm{Sym}(\mathcal{S}_M)$ *как вполне вещественное подмногообразие.*

Замечание. Для случая, когда M — невырожденная по Леви гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, Э. Картан [50] доказал, что вещественная размерность $\mathrm{Aut}(M)$ равна комплексной размерности $\mathrm{Sym}(\mathcal{S}_M)$; его доказательство легко обобщается на общий случай.

Завершим этот параграф рассмотрением некоторых примеров.

Пример 1. Легко показать, что (см. [104]) каждая 6-мерная квадрика в $\mathbb{C}^4$ линейно эквивалентна одной из следующих квадрик:

$$\mathcal{M}^1 : w_1 + \overline{w} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z}_2, w_2 + \overline{w}_2 = z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2,$$
$$\mathcal{M}^2 : w_1 + \overline{w}_1 = z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2, w_2 + \overline{w}_2 = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1,$$
$$\mathcal{M}^3 : w_1 + \overline{w}_1 = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1, w_2 + \overline{w}_2 = z_1\overline{z}_1.$$

Рассматривая независимые переменные $x = z$ и зависимые переменные $u = w$, получаем, что системы, определяющие соответствующие семейства Сегре, есть

$$(\mathcal{S})^1 : u^1_{x_ix_j} = 0, i, j = 1, 2, u^2_{x_1} = u^1_{x_1}, u^2_{x_2} = -u^1_{x_2},$$
$$(\mathcal{S})^2 : u^1_{x_ix_j} = 0, i, j = 1, 2, u^2_{x_1} = -u^1_{x_2}, u^2_{x_2} = u^1_{x_1},$$
$$(\mathcal{S})^3 : u^1_{x_ix_j} = 0, i, j = 1, 2, u^2_{x_1} = u^1_{x_2}, u^2_{x_2} = 0.$$

Пример 2. Пусть M — порождающее вещественно-аналитическое невырожденное по Леви подмногообразие в $\mathbb{C}^{n+m}$, проходящее через начало координат. После биголоморфной замены координат оно может быть представлено в виде $w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle + o(|Z|^2)$. Обозначим через M_{flat} соответствующую квадрику: $w+\overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle$. Для вещественного ε, достаточно близкого к началу координат, рассмотрим следующую замену переменных: $z = \varepsilon z', w = \varepsilon^2 w'$.

В новых координатах (штрихи опускаются) получаем многообразие $M^\varepsilon : w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle + (1/\varepsilon^2)R(\varepsilon z, \varepsilon\overline{z}, \varepsilon^2 w, \varepsilon^2\overline{w})$, биголоморфное M для каждого $\epsilon > 0$. Функция $(1/\varepsilon^2)R(\varepsilon z, \varepsilon\overline{z}, \varepsilon^2 w, \varepsilon^2\overline{w})$ продолжается до функции, вещественно аналитической по ε в окрестности начала координат и обращающейся в нуль в начале координат, так что система $(\mathcal{S}_{M^\varepsilon})$, определяющая семейство Сегре для M^ε, есть голоморфная инволютивная деформация плоской системы, определяющей семейство Сегре для M_{flat} (параметр ε в уравнениях системы $(\mathcal{S}_{M^\varepsilon})$ можно считать комплексным).

Этот пример важен и будет использован в следующем параграфе.

Пример 3. Рассмотрим многообразие M в $\mathbb{C}^3$, заданное как $w_1 + \overline{w}_1 = z\overline{z}$, $w_2 + \overline{w}_2 = z^2\overline{z} + z\overline{z}^2$. Его семейство Сегре задается как $u^1 + \omega_1 = z\zeta$, $u^2 + \omega_2 = Z^2\zeta + z\zeta^2$ и представляет общее решение системы $u^1_{xx} = 0$, $u^2_x = 2xu^1_x + (u^1_x)^2$.

Пример 4. Предыдущий пример допускает естественное обобщение. Пусть M — подмногообразие в $\mathbb{C}^{n+m}$, определенное как $w_1 + \overline{w}_1 = \sum_j \lambda_j z_j\overline{z}_j$, $w_k + \overline{w}_k = P_k(z, \overline{z})$, $k = 2, \dots, m$, где $\lambda_j \in \{-1, 1\}$ и P_k — вещественные многочлены. Тогда семейство Сегре подмногообразия M есть общее решение вполне интегрируемой системы вида $u^1_{x_ix_j} = 0$, $u^k_x = F_k(x, u, u^1_x)$, где F_k, $k = 2, \dots, m$, — многочлены.

8. Преобразования Ли алгебраических систем

Рассматривается плоская система $(\mathcal{S})_{flat}$ вида $u^1_{x_ix_j} = 0$, $i, j = 1, \dots, m$, $u^k_x = A^k u^1_x$, $k = 2, \dots, n$, с n независимыми и m зависимыми переменными. Применяется геометрический метод с целью описания симметрий этой системы без вычислений. Основная идея восходит к С. Ли — Г. Шефферсу [103]; смежные результаты были также получены Б. Шиффманом [121]. Предлагаемое доказательство является непосредственным обобщением доказательства авторов рациональности голоморфных отображений квадрик в $\mathbb{C}^n$ (см. [125]), которое, в свою очередь, основано на модификации принципа отражения Леви–Пинчука [10, 102]. С другой стороны, в рассматриваемой ситуации его можно рассматривать как вариацию классического метода характеристик.

Теорема 8.1. *Пусть матрица $A^1 := \mathrm{Id}_n$ — единичная $n \times n$–матрица, а $A^2, \dots, A^m$ — линейно независимые над полем $\mathbb{C}$ матрицы. Тогда алгебра $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})_{flat}$ конечномерна.*

Доказательство. Фиксируем инфинитезимальную симметрию $X \in \mathrm{Lie}(\mathcal{S})_{flat}$, и для $t \in \mathbb{C}$, достаточно близкого к началу координат, рассмотрим поток $\{f(t,x,u)\} = \{f^t(x,u)\} = e^{tX}$, порожденный X.

Множество $\mathrm{Sol}(\mathcal{S})_{flat}$ решений $(\mathcal{S})_{flat}$ есть $(n+m)$-параметрическое семейство аффинных подпространств в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ вида $Q(\zeta,\omega) = \{(x,u) : u = \omega + \langle x, A\zeta\rangle\}$, где $\omega + \langle x, A\zeta\rangle = (\omega^1 + \langle x, A^1\zeta\rangle, \dots, \omega^m + \langle x, A^m\zeta\rangle)$. Параметры $(\zeta,\omega) \in \mathbb{C}^{n+m}$ дают естественную систему координат на пространстве $\mathrm{Sol}(\mathcal{S})_{flat}$, являющемся $(n+m)$-мерным комплексным многообразием.

То, что f^t переводит любое решение в другое решение, означает, что для любого (ζ,ω) существует точка $(\hat\zeta^t, \hat\omega^t)$ (возможно, единственная), такая что $f^t(Q(\zeta,\omega)) = Q(\hat\zeta^t,\hat\omega^t)$,

$$h^t(x, \omega + \langle x, A\zeta\rangle) = \hat\omega^t + \langle g^t(x, \omega + \langle x, A\zeta\rangle), A\hat\zeta^t\rangle, \tag{8.1}$$

где $f^t = (g^t, h^t)$. Таким образом, f^t индуцирует отображение $\hat f^t : \mathrm{Sol}(\mathcal{S})_{flat} \longrightarrow \mathrm{Sol}(\mathcal{S})_{flat}$, определенное при всяком t в соответствии $\hat f^t : (\zeta,\omega) \mapsto (\hat\zeta^t, \hat\omega^t)$.

Лемма 8.2. *Отображения $\{f^t\}$ образуют семейство биголоморфизмов, голоморфно зависящих от параметра t.*

Доказательство. Образ $f^t(Q(\zeta,\omega))$ задается как $\{(x^*,u^*) : (x^*,u^*) = (g(t,x,\omega+\langle x, A\zeta\rangle), h(t,x,\omega+\langle x, A\zeta\rangle)), x \in \mathbb{C}^n\}$. Поскольку $f^0(x,u) = (x,u)$ при достаточно малом t, то теорема о неявной функции может быть применена к уравнению $x^* = g(t,x,\omega+\langle x,A\zeta\rangle)$, так что его решение $x = x(t,x^*,\zeta,\omega)$ — голоморфная функция. Подставляя ее в $u^* = h(t,x,\omega+\langle x,A\zeta\rangle)$ получаем, что $u^* = \varphi(t,x^*,\zeta,\omega)$ и φ голоморфна. С другой стороны, $f^t(Q(\zeta,\omega)) = Q(\hat\zeta^t,\hat\omega^t)$, так что $\varphi(t,x^*,\zeta,\omega) = \hat\omega^t + \langle x^*, A\hat\zeta^t\rangle$. В частности, $\varphi_1(t,x^*,\zeta,\omega) = \hat\omega_1^t + x_1^*\hat\zeta_1^t + \dots + x_n^*\hat\zeta_n^t$, так что $\hat\zeta_j^t = \hat\zeta_j(t,\zeta,\omega)$ голоморфна и, очевидно, $\hat\omega^t = \hat\omega(t,\zeta,\omega)$ также голоморфна.

Рассмотрим векторные поля $\mathcal{L}^\nu = \frac{\partial}{\partial\zeta_\nu} - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i\nu}^k x_i\right)\frac{\partial}{\partial\omega^k}$, где $A^k = (a_{ij}^k)$.

Применяя их к (8.1), получаем

$$\mathcal{L}^\nu(\hat\omega_j^t) + \langle g_t(x, \omega + \langle x, A\zeta\rangle), \mathcal{L}^\nu A^j\hat\zeta^t\rangle = 0. \tag{8.2}$$

Рассмотрим (8.1), (8.2) как линейную систему относительно компонент f^t. Так как $(\hat\zeta^0,\hat\omega^0) \equiv (\zeta,\omega)$, то эта система содержит $(n+m)\times(n+m)$ подсистему, определитель которой не обращается в нуль при достаточно малом t. Применяя правило Крамера, получаем, что для любого фиксированного (t,ζ,ω) отображение $f^t(x,\omega+\langle x,A\zeta\rangle)$ — рациональное отображение по x. Кроме того, степень каждого такого уравнения равномерно ограничена по n.

Последний шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что пространство решений системы $(\mathcal{S})_{flat}$ «достаточно велико».

Положим $e_k = (0,\dots,1,\dots,0) \in \mathbb{C}^n$ (1 на k-ом месте) и рассмотрим векторы $v_k(\zeta) = (e_k, \langle e_k, A^1\zeta\rangle, \dots, \langle e_k, A^m\zeta\rangle)$ (так что $v_k(\zeta) \in Q(\zeta,0)$).

Лемма 8.3. *Линейная оболочка множества $\{v_k(\zeta), \zeta \in \mathbb{C}^n\}$совпадает с $\mathbb{C}^{n+m}$.*

Доказательство. Если утверждение неверно, то существует $\lambda \in \mathbb{C}^{n+m}\backslash\{0\}$ такой, что $\langle \lambda, v_k(\zeta)\rangle = 0$ при любом k,ζ, т.е. $\lambda_k + \lambda_{n+1}\langle e_k, A^1\zeta\rangle + \dots + \lambda_{n+m}\langle e_k, A^m\zeta\rangle = 0$ при всех ζ, k; значит, $\lambda_k = 0$ для каждого $k = 1,\dots,n$, а потому $\langle e_k, (\lambda_{n+1}A^1 + \dots + \lambda_{n+m}A^m)\zeta\rangle = 0$ для каждого k, ζ, т.е. $\lambda_{n+1}A^1 + \dots + \lambda_{n+m}A^m = 0$ — противоречие, которое доказывает лемму.

Зафиксируем теперь $(n+m)$ линейно независимых комплексных прямых $l^1,\dots,l^{n+m}$,причем каждая прямая l^j лежит в некотором подпространстве $Q(\zeta^j,0)$, проходящем через начало координат. Такая прямая порождает семейство параллельных прямых и любая прямая такого семейства лежит в подпространстве $Q(\zeta^j,\omega)$ для некоторого ω. После линейной замены переменных в $\mathbb{C}^{n+m}$ эти семейства становятся координатными, и из классической теоремы о сепаратной рациональности [47] следует, что f^t — рациональное отображение степени $\leqslant n$ при любом достаточно малом t, т.е. $f^t(x,u) = \sum_{|I|=0}^n a_I(t)(x,u)^I / \sum_{|I|=0}^n b_J(t)(x,u)^J$. Следовательно, $X = \frac{df_t}{dt}|\{t=0\}$ — векторное поле с рациональными коэффициентами степени $\leqslant n^2$. Всякий такой коэффициент единственным образом определяется конечным числом $d = d(n)$ членов разложения Тейлора в начале координат. Поэтому размерность $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})_{flat}$ конечна. Это завершает доказательство теоремы.

Определение 8.4. Говорят, что плоская система $(\mathcal{S})_{flat}$ *невырождена*, если она удовлетворяет предположениям теоремы 8.1, т.е. матрицы $A^1 = \mathrm{Id}_n$, $A^2,\dots,A^n$ линейно независимы.

Первое доказательство можно обобщить на более общую ситуацию. Рассмотрим алгебраическое $(n+m)$-параметрическое семейство с n-мерными слоями в $\mathbb{C}^{n+m}$. Локально такое семейство задается уравнениями $\{Z \in \mathbb{C}^{n+m} : r(Z,\zeta,\omega) = 0\}$, где $r : \mathbb{C}^{n+m} \times \mathbb{C}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{C}^m$ — голоморфная функция с полиномиальными компонентами. Предположим, что это семейство представляет общее решение системы $(\mathcal{S})$ первого порядка на $J^1(n,m)$, определенной распределением

$$\omega_i = dw_i - \sum_j F_{ij}(x,u,w^{(1)})dx_j,\ \phi^1 = dw - \sum_j w_j dx_j,\ \phi^k = dv^k - \sum_j G^k_j(x,u,w^{(1)})dx_j,\ k > 1.$$

Такие системы называются *алгебраическими*. (Очевидно, в нашем случае все коэффициенты дифференциальных форм являются алгебраическими функциями и рассматриваемое распределение вполне интегрируемо.) Предположим также, что получающееся слоение удовлетворяет следующему *условию трансверсальности*: объединение касательных пространств к слоям в начале координат порождает $\mathbb{C}^{n+m}$. Предположим также, что выполнено следующее *условие невырожденности*: sup-нормы функций F_{ij} достаточно малы (так что система дифференциальных уравнений второго порядка, соответствующая рассматриваемому распределению, является малой деформацией системы $u^1_{x_ix_j} = 0$, $u^k_x = \psi(x,u,u^1_x)$, $k = 2,\dots,m$).

Теорема 8.5. *При выполнении условий выше любая локальная однопараметрическая группа* $\{f^t\}$ *симметрий* $(\mathcal{S})$ *состоит из алгебраических отображений степени, мажорируемой постоянной d, зависящей только от степени полиномиальной функции* (Z,ζ). *В частности, алгебра* $\mathrm{Lie}(\mathcal{S})$ *конечномерна.*

Эта теорема обобщает несколько известных результатов об алгебраичности CR-отображений. Отметим, что система из примера 3.4 удовлетворяет условиям этой теоремы, если ее решение удовлетворяет сформулированному выше условию трансверсальности. Ясно, что если множество точек, в которых выполняется это условие трансверсальности, не пусто, то оно открыто по Зарискому. Аналогичное условие было введено в [59] (трансверсальность по Сегре) для слоений, определяемых семействами Сегре алгебраических CR-многообразий. В [59] показано, что семейство Сегре порождающего алгебраического CR-многообразия после произвольно малого возмущения становится трансверсальным по Сегре.

Доказательство является непосредственным обобщением предыдущего рассуждения для случая «малого алгебраического возмущения».

По теореме о неявной функции рассматриваемое слоение имеет вид $w = \phi(z,\zeta,\omega)$. Рассмотрим линейные дифференциальные операторы $\mathcal{L}^j = \sum_{\mu=1}^n \partial_{\zeta_j} + \sum_{\nu=1}^m b^j_\nu \partial_{\omega_\nu}$, $j = 1,\dots,n$. Их коэффициенты определены по формулам $b^j_k = -\sum_{t=1}^m a_{kt}\frac{\partial\phi_t}{\partial\zeta_j}$, где a_{kt} —- элементы матрицы M^{-1}, обратной к матрице Якоби $(\frac{\partial\phi_p}{\partial\omega_q})$. Коэффициенты выбраны так, что $\mathcal{L}^j f(z,\phi(z,\zeta,\omega)) = 0$ для любого j.

Пусть $f^t = (g^t,h^t)$ — симметрия из рассматриваемой группы (так что f достаточно близко к тождественному отображению). Тогда f^t переводит слой $Q(\zeta,\omega) = \{(z,w) : w = \phi(z,\zeta,\omega)\}$ в слой $Q(\hat\zeta^t,\hat\omega^t)$. Доказательство леммы 8.2 (с очевидными изменениями) показывает, что отображение $(t,\zeta,\omega) \mapsto (\hat\zeta^t,\hat\omega^t)$ голоморфно. Следовательно, имеем первое основное уравнение

$$h^t_k(z,\phi(z,\zeta,\omega)) = \phi_k(g^t(z,\phi(z,\zeta,\omega),\hat\zeta,\hat\omega), \quad k = 1,\dots,m. \tag{8.3}$$

Применяя здесь операторы $\mathcal{L}^j$, получаем дополнительные уравнения

$$\mathcal{L}^j\phi_k(g^t(z,\phi(z,\zeta,\omega),\hat\zeta,\hat\omega) = 0, \quad k = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n. \tag{8.4}$$

Лемма 8.6. *Якобиан полученной системы* (8.3), (8.4) *относительно f^t не обращается в нуль в начале координат.*

Доказательство. Рассматриваемое распределение — малая деформация системы $u^1_{x_ix_j} = 0$, $u^k_x = \psi(x,u,u^1_x)$, $k = 2,\dots,m$. Поэтому первая компонента определяющей функции рассматриваемого слоения имеет вид $r_1 = w_1 + \omega_1 + \sum_j z_j\zeta_j + 0(3)$ (члены третьего порядка). Имеем

$$\mathcal{L}^j\phi_k(g^t(z,\phi(z,\zeta,\omega),\hat{\zeta},\hat{\omega}) = (\partial\phi_k/\partial\zeta_j)(g,\zeta,\omega) + \sum_\nu b^j_\nu(\partial\phi_k/\partial\omega_\nu)(g,\zeta,\omega).$$

Полагая $k = 1$, видим, что последнее уравнение можно разрешить в окрестности начала координат относительно g (поскольку f^t близко к тождественному отображению). По теореме о неявной функции, получаем, что $f^t(z,\phi(z,\zeta,\omega)) = H(t,z,\zeta,\omega)$, где голоморфная функция H алгебраична относительно z. Это означает, что ограничение f^t на каждый слой алгебраично равномерно ограниченной степени. Теперь утверждение леммы вытекает из теоремы о сепаратной алгебраичности [118], доказанной в главе I (оригинальная версия этой теоремы не содержит оценки степени, но, чтобы ее получить, доказательство легко модифицировать).

Замечание. Нетрудно обобщить эту теорему на точечные преобразования Ли (не обязательно близкие к тождественным) между рассматриваемыми классами алгебраических систем. Условие невырожденности можно также существенно ослабить.

9. Интегрируемые голоморфные деформации алгебраических систем

1. Системы с постоянными коэффициентами. Изложим геометрический метод, который позволит доказать без вычислений, что уравнения Ли голоморфной инволютивной деформации невырожденной плоской системы с соотношениями первого порядка имеет конечномерное пространство решений. В п. 4 докажем это для плоских систем. Единственное, что нужно доказать — это устойчивость этого свойства относительно малого аналитичного возмущения.

Начнем со специального случая линейной системы с постоянными коэффициентами. Основной пример таких систем дают уравнения Ли плоской системы с соотношениями первого порядка, выведенной в предыдущем параграфе (пример 3.2).

Рассмотрим линейную систему с *постоянными* коэффициентами вида $(\mathcal{R}_q)$: $\sum_{i,|\alpha|=q_k} a^k_{i\alpha}\partial^\alpha\tau^i = 0$, $k = 1,\dots,K$, где $q_k = \max_k q_k$. *Подчеркнем, что каждое уравнение этой системы порядка q_k содержит только частные производные того же порядка q_k.* В частности, уравнения Ли плоской системы, выведенные в примере 5.1, принадлежат этому классу.

Голоморфное в окрестности начала координат отображение $\tau = (\tau^1,\dots,\tau^m)$ является решением системы $(\mathcal{R}_q)$ в том и только том случае, если $\partial^\beta(\sum a^k_{i\alpha}\partial^\alpha\tau^i)|_{y=0} = \sum a^k_{i\alpha}\partial^{\beta+\alpha}\tau^i|_{y=0} = 0$, $k = 1,\dots,K$, для каждого β. Это эквивалентно соотношениям

$$\sum_{i;|\alpha|=q_k,|\beta|=s-q_k} a^k_{i\alpha}(\partial^{\beta+\alpha}\tau^i|_{y=0}) = 0, \quad k = 1,\dots,K,\ s = q,q+1,\dots \tag{9.1}$$

В комплексном аффинном пространстве с координатами $(v^i_{i_1\cdots s})$, $i \in \{1,\dots,m\}$, $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_s$, $i_j \in \{1,\dots,n\}$, рассмотрим подпространство V_s, определяемое линейной алгебраической системой

$$\sum_{i;|\alpha|=q_k,|\beta|=s-q_k} a^k_{i\alpha}v^i_{\beta+\alpha} = 0, \quad k = 1,\dots,K,\ \text{при } s = q,q+1,\dots$$

Предложение 9.1. *Размерность пространства $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ конечна в том и только том случае, если существует такое s, что $V_s = \{0\}$. В этом случае пополнение $(\mathcal{R}_q)$ есть система конечного типа и каждое решение — многочлен степени $< s$.*

Доказательство. Допустим, что существует s такое, что $V_s = \{0\}$. В силу (9.1), это означает, что пополнение $(\mathcal{R}_q)$ — система конечного типа, мажорируемая s. Кроме того, (9.1) показывает, что в этом случае все частные производные решения τ порядка s тождественно обращаются в нуль.

Пусть теперь размерность $\mathrm{Sol}(\mathcal{R}_q)$ конечна. Допустим от противного, что существует возрастающая последовательность (s_t), такая что V_{s_t} не тривиально. Пусть $(v^i_{i_1\cdots s_t})$ — ненулевой вектор в V_{s_t}. Рассмотрим отображение $\tau_t = (\tau^1_t,\dots,\tau^m_t)$, компоненты которого — однородные многочлены степени s_t, удовлетворяющие соотношению $\frac{\partial^{s_t}\tau^i_t}{\partial y_{i_1}\dots\partial y_{i_{s_t}}}(0) = v^i_{i_1\cdots s_t}$. Тогда для всякого t функция u_t удовлетворяет (9.1) при $s = s_t$; но так как она — однородный многочлен степени s_t, то ясно, что она удовлетворяет (9.1) и для всех остальных s. Значит, всякое u_t является решением $(\mathcal{R}_q)$ —

противоречие. Поэтому $V_s = \{0\}$ для некоторого s и пополнение $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип. Таким образом, поскольку всякое уравнение рассматриваемой системы содержит производные τ одних и тех же порядков, то любое решение является многочленом.

Укажем как вывести предложение 9.1 из хорошо известной теоремы Картана–Келера (см., например, [15, 106]), поскольку этот метод допускает далеко идущие обобщения. Обозначим через $\pi_{k+i,k} : J^{k+i}(n,m) \longrightarrow J^k(n,m)$ каноническую проекцию (для любой струи $j_x^{k+i}(u)$, по определению, $\pi_{k+i,k}(j_x^{k+i}(u)) = j_x^k(u)$). Напомним, что линейная система $(\mathcal{R}_q) \subset J^q(n,m)$ называется *достаточно регулярной*, если для каждого y размерности линейных пространств $\mathcal{R}_{k+l}(y) = \{(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(q)}) : \sum_{j=1,\ldots,m;|\alpha|\leqslant q} a^i_{j\alpha}(y)u^j_\alpha = 0,\ i = 1, \ldots, s\}$ не зависят от y и естественные проекции $\pi_{q+i+r,q+i} : \mathcal{R}_{q+i+r}(y) \longrightarrow \mathcal{R}_{q+i}(y)$ имеют постоянный ранг при каждых $r \geqslant 0$ и $i \geqslant 0$. В частности, любая линейная система с постоянными коэффициентами достаточно регулярна.

Достаточно регулярная система называется *формально интегрируемой,* если естественные проекции $\pi_{q+i+1,q+i} : \mathcal{R}_{q+i+1} \longrightarrow \mathcal{R}_{q+i}$ — сюръекции для всех $i \geqslant 0$. Легко видеть, что пополнение $(\mathcal{R}_q)'$ системы $(\mathcal{R}_q)$, рассмотренной в предложении 9.1, всегда формально интегрируемо. Следующий результат известен как теорема Картана–Келера: пусть $(\mathcal{R}_q) \subset J^q(n,m)$ — формально интегрируемая аналитическая система дифференциальных уравнений. Тогда любая точка многообразия $(\mathcal{R}_q)$ представляет q-струю аналитического решения этой системы.

В условиях предложения 9.1 рассмотрим пополнение $(\mathcal{R}_q)'$ рассматриваемой системы $(\mathcal{R}_q)$; напомним, что они имеют одно и то же пространство решений. Предположим, что это пространство конечномерно, и пусть $\tau_1,\ldots,\tau_d$ — его базис. Так как любое решение τ можно разложить по этому базису, то существует положительное целое k (зависящее только от размерности d пространства решений) со следующим свойством единственности: если τ и τ' — два решения, голоморфные вблизи начала координат, такие что $j_0^{q+k}(\tau) = j_0^{q+k}(\tau')$, то $\tau = \tau'$. Рассмотрим теперь $(k+1)$-продолжение $(\mathcal{R}_{q+k+1})'$ системы $(\mathcal{R}_q)'$. Предположим, что его главный символ G_{q+k+1} нетривиален. Тогда существуют две *различные* точки P и P' в $(\mathcal{R}_{q+k+1})'$, представляющие струи с одним и тем же источником в начале координат, и такие, что $\pi_{q+k+1,q+k}(P) = \pi_{q+k+1,q+k}(P')$. Очевидно, что любое продолжение формально интегрируемой системы также формально интегрируемо. По теореме Картана–Келера существуют голоморфные решения τ и τ' системы $(\mathcal{R}_{q+k+1})'$ (а значит, и системы $(\mathcal{R}_q)'$), удовлетворяющие соотношениям $j_0^{k+q+1}(\tau) = P$ и $j_0^{k+k+1}(\tau') = P'$. Значит, свойство единственности выше не выполняется для этих решений — противоречие, Таким образом, символ G_{q+k+1} тривиален и получено другое доказательство предложения 9.1.

В качестве следствия получим один из наших основных результатов.

Теорема 9.2. *Пополненные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2)'$ невырожденной плоской системы $(\mathcal{S})_{flat}$ с соотношениями первого порядка образуют систему дифференциальных уравнений конечного типа и каждая инфинитезимальная симметрия $X \in \mathrm{Lie}(\mathcal{S})_{flat}$ имеет полиномиальные коэффициенты равномерно ограниченной степени. Если $(\mathcal{S}^\varepsilon)$ — вполне интегрируемая голоморфная деформация $(\mathcal{S}^0) = (\mathcal{S})_{flat}$, то $\dim \mathrm{Lie}(\mathcal{S}^\varepsilon) \leqslant \dim \mathrm{Lie}(\mathcal{S})_{flat}$.*

Доказательство. Из теоремы 8.1 и предложения 9.1 следует, что $(\mathcal{R}_2)'$ — система конечного типа, так что требуемое утверждение вытекает из предложения 6.3.

Этот результат является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 9.3. *Пусть $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ — голоморфная вполне интегрируемая деформация алгебраической системы $(\mathcal{S}_2^0)$, удовлетворяющая условиям теоремы* 8.5. *Предположим также, что инфинитезимальные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2^0)$ образуют достаточно регулярную систему. Тогда существует целое $k \geqslant 0$, такое что для любого достаточно малого ε всякое голоморфное решение системы $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ однозначно определяется его k-струей в фиксированной точке и алгебра Ли $\mathrm{Lie}(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ конечномерна, причем $\dim \mathrm{Lie}(\mathcal{S}_2^\varepsilon) \leqslant \dim \mathrm{Lie}(\mathcal{S}_2^0)$.*

Доказательство. Используем ту же идею. Так как рассматриваемая система достаточно регулярна, то после конечного числа продолжений и пополнений можно заменить $(\mathcal{R}_2)$ на формально интегрируемую систему $(\mathcal{R}_q)$ с тем же пространством решений (см. [15], теорема 5.7 главы 2). По теореме 8.5 это пространство решений конечномерно, так что в силу теоремы Картана–Келера система $(\mathcal{R}_q)$ есть система конечного типа. И это также верно для малого возмущения.

3. Приложения к CR-многообразиям. Напомним, что $\mathrm{Aut}_{inf}(M)$ обозначает алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов подмногообразия M в начале координат (которое предполагается принадлежащим M), т.е. алгебра Ли группы локальных биголоморфизмов $\mathrm{Aut}(M)$. Напомним следующий пример, рассмотренный выше.

Пусть M — порождающее вещественно-аналитическое невырожденное по Леви подмногообразие в $\mathbb{C}^{n+m}$, проходящее через начало координат и заданное как $w+\overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle + o(|Z|^2)$. Обозначим через M_{flat} соответствующую квадрику $w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle$. Для вещественного ε, достаточно близкого к началу координат, рассмотрим следующую замену переменных: $z = \varepsilon z', w = \varepsilon^2 w'$.

В новых координатах (штрихи опущены) получаем многообразие $M^\varepsilon : w + \overline{w} = \langle L(z), \overline{z}\rangle + (1/\varepsilon^2)R(\varepsilon z, \varepsilon\overline{z}, \varepsilon^2 w, \varepsilon^2\overline{w})$, биголоморфное M для каждого $\varepsilon > 0$. Функция $(1/\varepsilon^2)R(\varepsilon z, \varepsilon\overline{z}, \varepsilon^2 w, \varepsilon^2\overline{w})$ продолжается до функции, вещественно-аналитической по ε в окрестности начала координат и обращающейся в нуль в начале координат, так что система $(\mathcal{S}_{M^\varepsilon})$, определяющая семейство Сегре для M^ε, есть голоморфная инволютивная деформация плоской системы, определяющей семейство Сегре подмногообразия M_{flat} (в уравнениях системы $(\mathcal{S}_{M^\varepsilon})$ параметр ε можно считать комплексным).

Из этого примера и теоремы 9.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 9.4. *Пусть M — невырожденное по Леви вещественно–аналитическое многообразие в окрестности начала координат, а M_{flat} — квадратичное многообразие, дающее аппроксимацию M в начале координат с точностью до членов третьего порядка. Тогда алгебра Ли $\mathrm{Aut}_{inf}(M_{flat})$ содержит полиномиальные векторные поля равномерно ограниченной степени d. Каждый инфинитезимальный автоморфизм M однозначно определяется его d-струей в начале координат, алгебра Ли $\mathrm{Aut}_{inf}(M)$ конечномерна и ее размерность мажорируется комплексной размерностью плоской системы, определяющей семейство Сегре для квадратичного многообразия M_{flat}.*

Различные результаты такого типа были получены несколькими авторами [4, 21, 33, 104, 123, 133] (отметим здесь важную работу В. Белошапки [4, 5], основанную на использовании нормальных форм Мозера). Указанные авторы основывались на других методах. Подчеркнем, что наш метод может быть использован в значительно более общей ситуации и позволяет получить много дополнительной информации о структуре группы автоморфизмов.

Замечание. Был введен малый параметр ε по аналогии с хорошо известным методом растяжения (см., например, [3]). С другой стороны, в нашей ситуации это рассуждение может быть рассмотрено как применение общего метода малого параметра, широко распространенного в теории дифференциальных уравнений.

4. Решение конечных уравнений Ли. Развиваемый метод может быть также применен к конечным уравнениям Ли. Система (вообще говоря, нелинейная) $(\mathcal{R}_q)$ называется достаточно регулярной, если r–продолжение $(\mathcal{R}_{q+r})$ для любого r есть подмногообразие в $J^{q+r}(n, m)$, а проекции $\pi_{q+i+r,q+i} : (\mathcal{R}_{q+i+r}) \longrightarrow (\mathcal{R}_{q+i})$ имеют постоянный ранг при любых $i, r \geqslant 0$.

Справедлива следующая

Теорема 9.5. *Предположим, что $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ — голоморфная вполне интегрируемая деформация алгебраической системы $(\mathcal{S}_2^0)$, удовлетворяющей условиям теоремы* 8.5. *Предположим также, что конечные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2^0)$ образуют достаточно регулярную систему. Тогда существует целое $k \geqslant 0$, такое что для любого достаточно малого ε каждое голоморфное решение $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ (т.е. каждая точечная симметрия Ли $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$) однозначно определятся его k-струей в фиксированной точке.*

Доказательство вполне аналогично теореме 9.3: заменим $(\mathcal{R}_2)$ на формально интегрируемую систему $(\mathcal{R}_q)$ с тем же пространством решений. Поскольку любое решение этой системы алгебраично равномерно ограниченной степени по теореме 8.5 (см. замечание после этой теоремы), то существует целое $k \geqslant 0$, такое что любое решение $(\mathcal{R}_2)$ однозначно определяется его k-струей; значит, система $(\mathcal{R}_q)$ есть система конечного типа в силу предыдущего рассуждения с теоремой Картана–Келера это также верно для возмущения.

Замечание. Теоремы 9.3 и 9.5 дают общий метод изучения обширных классов систем и, в частности, семейств Сегре CR-многообразий и их преобразований. В специальных случаях вычисления достаточно явные. Например, решения инфинитезимальных и конечных уравнений Ли для систем без соотношений первого порядка, полученные выше, являются естественным обобщением результатов Чженя–Мозера о параметризации пространства биголоморфизмов невырожденных по Леви гиперповерхностей, а также классических оценках их размерности и т.п.

Условие достаточной регулярности восходит к работам Куранrealiseси [99] и школы Спенсера [122]. Так как это условие использует бесконечное число продолжений, то естественным является вопрос о том, является ли некоторое продолжение данной системы формально интегрируемым (и инволютивным по Картану–Спенсеру) на открытом по Зарискому множестве. Связанный с этим результат был недавно анонсирован Б. Мальгранжем [107].

10. Геометрия многообразий Сегре и голоморфное продолжение отображений

В предыдущем параграфе геометрия многообразий Сегре использовалась для того, чтобы объяснить, как некоторые основные результаты, связанные с CR-геометрией вещественно-аналитических CR-многообразий, могут быть получены с помощью геометрической теории дифференциальных уравнений. С другой стороны, в первой главе было видно, что алгебраический принцип отражения оказывается полезным при изучении алгебраичности и аналитичности CR-отображений. В этом параграфе будет показано, как многообразия Сегре могут быть использованы для голоморфного продолжения отображений вещественно-аналитических областей. Важным моментом является то, что множество семейства Сегре вещественно-аналитических гиперповерхностей, удовлетворяющих некоторым условиям невырожденности, допускает структуру конечномерного комплексно-аналитического множества. В этом параграфе изложение основано на работах Дьедериха–Вебстера [80] и Дьедериха–Форнаеса [75]

Инвариантные комплексные многообразия. Напомним использовавшиеся выше обозначения и определения.

Пусть M — вещественно–аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, заданная вещественно-аналитическими определяющими функциями $r = r(z, \bar z)$ с $dr \neq 0$ на M. (Будем предполагать, что $r_n = \dfrac{\partial r}{\partial z_n} \neq 0$.)

Для данной точки z_0 на M можно считать, что координаты таковы, что $z_0 = 0$ и комплексная касательная гиперплоскость есть $z_n = 0$; считаем также, что существует полидиск $U_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \rho_0\}$ такой, что $r = r(z, \bar w)$ сходится на $U_0 \times U_0$.

Напомним, что многообразие Сегре в точке $w \in U_0$ — это $Q_w = \{z \in U_0 \ : r(z, \bar w) = 0\}$.

Ввведем также множество, определяемое как $A_w = \{z \in U_0 \ \ Q_z = Q_w\}$. Элементарные свойства этих множеств обусловлены вещественностью $r(z, \bar z)$.

Лемма 10.1. *При z и w в U_0 имеем*

$$\begin{aligned}
&z \in Q_w \Leftrightarrow w \in Q_z,\\
&z \in M \Leftrightarrow z \in Q_z,\\
&z \in A_z,\\
&w \in A_z \Leftrightarrow A_w = A_z,\\
&z \in Q_w \Leftrightarrow A_z \subset Q_w,\\
&z \in M \Leftrightarrow A_z \subset M.
\end{aligned}$$

По теореме о неявной функции, Q_w можно записать в виде графика; более точно, существуют окрестность $U \subset\subset U_0$ и функция $\phi('z, w)$, голоморфная относительно $'z$ и антиголоморфная по w такая, что Q_w представляется как график $z_n = \Phi(z, w)$ $|z_\alpha| < \rho_0$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant n-1)$.

Справедливо следующее

Предложение 10.2. *$U \cap A_z$ есть комплексное многообразие для любого z в U_0. Кроме того, можно выбрать U так, что $U \cap A_{z_0}$ состоит из конечного числа неприводимых многообразий, проходящих через z_0, и таких что $\dim(A_z \cap U) \leqslant \dim(A_{z_0} \cap U)$ для любого z в U.*

Доказательство. Разложим ϕ в степенной ряд:

$$z_n = \sum_{A \subset \mathbb{N}^{-1}} \lambda_A(\bar{w}) z^A,$$

где λ_A антиголоморфны по w, принадлежащем окрестности U. Введем следующие аналитические многообразия:

$$V^k = \{(v, w) : \lambda_A(\bar{v}) = \lambda_A(\bar{w}) \;\; \forall A \subset \mathbb{N}^{n-1} \;\; |A| \leqslant k\}.$$

Имеем $V^{k+1} \subset V^k$ и $Q_v = Q_w$ в том и только том случае, если (v, w) принадлежит V^k при всех k.

Так как функции λ_A продолжаются на бо́льший полидиск, то существует целое l такое, что $V^l = \bigcap_k V^k$. Теперь можно определить антиголоморфную функцию λ на U в $\mathbb{C}^N$ как $\lambda(w) = (\lambda_A(\bar{w}) \;\; |A| \leqslant l)$. При этих обозначениях имеем $A_w = \lambda^{-1}(\lambda(w))$.

Использование обычных свойств голоморфных функций завершает доказательство предложения.

Поскольку компактная вещественно-аналитическая гиперповерхность не содержит никакого ростка комплексного многообразия положительной размерности, то первое предложение показывает, что в этом случае A_z имеет нулевую размерность, отображение λ конечно и, следовательно, является разветвленным накрытием над своим образом, являющимся аналитическим подмногообразием в $\mathbb{C}^N$.

Определение 10.3. Гиперповерхность имеет существенно конечный тип в точке z, если A_z нульмерно.

Легко видеть, что если гиперповерхность имеет существенно конечный тип, то множество невырожденных по Леви точек открыто и плотно; легко показать также, что такая гиперповерхность минимальна в смысле Туманова.

Фундаментальный факт состоит в инвариантности этих понятий. Если f — антиголоморфное отображение, а r' — другая определяющая функция, то $r' \circ f = \varphi \cdot r$, где φ не обращается в нуль вблизи M. Тогда Q_w и A_w отображаются в соответствующие многообразия в новой системе координат, обозначаемой штрихами.

Ростки многообразий. Для z в U_0 и w в Q_z определим $g_z^k(w)$ как росток порядка k гиперповерхности Q_w в точке z (при $k = 1$ и w в M — это комплексная гиперплоскость к M в точке z).

Тогда g_z^k — антиголоморфное отображение из Q_z в G_z^k — многообразие ростков порядка k всех комплексных гиперповерхностей, проходящих через z.

Можно определить g^k по формулам $g^k(z, w) = g_z^k(w)$; это — вещественно-аналитическое отображение из комплексификации $\mathcal{M}$ подмногообразия M, заданного уравнениями $\mathcal{M} = \{(z, w) \in U_0 \times U_0 \;\; r(z, \bar{w}) = 0\}$ в $G^k = G_{z_0}^k \times \mathbb{C}^n$.

Заметим, что $\mathcal{M}$ есть $2n-1$-мерное комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, и g^k голоморфно.

Полезно выразить эти отображения в локальных координатах.

Если w фиксировано, то уравнение $r(z, \bar{w}) = 0$ определяет z^n как голоморфную функцию z'. Производные определяются как

$$p_\alpha = \frac{\partial z^n}{\partial z^\alpha} \text{ и } P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \frac{\partial^k z^n}{\partial z^{\alpha_1} \ldots \partial z^{\alpha_k}}.$$

В терминах функции r имеем

$$p_\alpha = -\frac{r_\alpha}{r_n},$$
$$p_{\alpha\beta} = -\frac{1}{r_n}\left[r_{\alpha\beta} - \frac{r_{\alpha n} r_n}{r_n} - \frac{z_{\alpha\beta} r_\alpha}{r_n} + \frac{r_\alpha r_\beta r_{nn}}{r_n r_n}\right].$$

Введем комплексифицированные тангенциальные генераторы Коши–Римана подмногообразия M:

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{r_\alpha}{r_n}\frac{\partial}{\partial z^n},$$
$$X_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\alpha} - \frac{r_{\bar{\alpha}}}{r_{\bar{n}}} \;\; \frac{\partial}{\partial \bar{w}^n}.$$

Поля X_α ($1 \leqslant \alpha \leqslant n-1$) порождают $T_z^{(1,0)}(Q_w)$ и $X_{\bar\alpha}$ порождает $T_w^{(0,s)}(Q_z)$. Имеем также $p_{\alpha\beta} = X_\alpha(p_\beta)$ и $p_{\alpha_1} \ \alpha_{\alpha_{1_0}\beta} = X_{\alpha 1 0} \ \circ X_{\alpha_n}(P_\beta)$.

Отображение g^k задано формулой продолжения

$$g^k(z,w) = (z, p_A(z,\bar w) : |A| \leqslant k).$$

Выражение $X_{\bar\beta}(p_\alpha)$ дает форму Леви подмногообразия M в точке $z = w$. Таким образом, если M невырождено по Леви, то g^1 — диффеоморфное отображение из $\mathcal{M}$ в открытое подмножество в G^1. Это замечание — одно из основных для геометрического принципа отражения. Начнем именно с этой ситуации.

Голоморфное продолжение. Для иллюстрации геометрического принципа отражения рассмотрим специальный случай продолжения диффеоморфизмов Коши–Римана вещественно–аналитических невырожденных по Леви гиперповерхностей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10.4. *Любой диффеоморфизм Коши–Римана невырожденных по Леви вещественно-аналитических гиперповерхностей биголоморфно продолжим.*

Наметим теперь доказательство Вебстера теоремы Леви–Пинчука.

Доказательство. Доказательство основано на теореме об острие клина, которое является обобщением классического принципа отражения Шварца. Поскольку M и M' — невырожденные по Леви, то CR-отображения — это односторонние голоморфные продолжения и можно рассмотреть случаи, когда f — биголоморфное отображение областей D и D', которые содержат M и M' в их границах, и f и f^{-1} принадлежат классу C^1 вплоть до границы.

Пусть T_zQ_w — касательная плоскость к Q_w в точке z; определим отображение τ как

$$\tau(z, T_zQ_w) = (w, T_wQ_z).$$

Отображение τ антиголоморфно и $\tau^2 = \mathrm{Id}$. В самом деле, $(w,q) = \tau(z,p)$ определено системой

$$\begin{aligned}
&r(z,\bar w) = 0,\\
&r_\alpha(z, \bar w + p_\alpha r_n(z,\bar w) = 0,\\
&r_{\bar\alpha}(z,\bar w) + \bar q_\alpha r_{\bar n}(z,\bar w) = 0,
\end{aligned}$$

где $1 \leqslant \alpha \leqslant n-1$. Если взять $z = w$ в M, то получим, что якобиан относительно переменных $\bar w$ $\bar q$ кратен определителю Леви, который отличен от нуля. Так как $\tau^2 = \mathrm{Id}$, то получаем также, что множество $\widehat{M} = \{(z, T_zM) \ z \in M\}$ — C^1 вполне вещественное подмногообразие, диффеоморфное M. Биголоморфное отображение $z' = f(z)$ из D на D' индуцирует биголоморфное отображение ростков первого порядка $f^{(1)}$ из $G^1(D) = G_0^1 \times D$ на $G_0^1(D') = G_0' \times D'$, удовлетворяющее условию коммутативности $f^{(1)} \circ g^k = g'^k \circ f$.

Поскольку f принадлежит классу C^1 вплоть до границы, то $f^{(1)}$ непрерывно продолжается вплоть до $\widehat{M}$ и преобразует $\widehat{M}$ в $\widehat{M'}$. Так как $\widehat{M}$ и $\widehat{M'}$ вполне вещественны и имеют размерность $2n-1$, то существуют вещественно-аналитические системы координат T и T' в $\mathbf{C}^{2n-1}$ такие, что $\widehat{M}$ и $\widehat{M'}$ задаются формулами $\operatorname{Im} z_\alpha = 0$ и $\operatorname{Im} z'_\alpha$ $1 \leqslant \alpha \leqslant 2n-1$. По теореме об острие клина, $T^{n-1} \circ f^{(1)} \circ T$ биголоморфно продолжается на целую окрестность нуля. Следовательно, f продолжается на всю окрестность z_0.

Доказательство допускает естественное обобщение на случай, когда гиперповерхности M и M' имеют существенно конечный тип f и являются конечными отображениями. Основная техническая трудность здесь заключается в том, что определенное выше отображение g^k конечно, но не голоморфно. Тем не менее, это позволяет продолжить график f как комплексно–аналитическое многообразие и получить голоморфное отображение, поскольку f принадлежит классу C^∞ на M. Этот результат принадлежит Баоуенди–Якобовицу–Треву [30] (они использовали алгебраический принцип отражения), Дьедериху–Вебстеру [80] и Дьедериху–Форнаесу [75]. В следующей главе мы используем подход Вебстера для доказательства теоремы об отображении Феффермана.

Замечания к главе II Соответствие между геометрией обыкновенного дифференциального уравнения и геометрией невырожденной по Леви гиперповерхностью в $\mathbb{C}^2$ было установлено Б. Сегре [115] и Э. Картаном [50], а затем развито С. С. Чженем [53]. Геометрия обыкновенного дифференциального уравнения $u'' = F(x, u, u')$ была изучена в классической работе Трессе [131] (ученика С. Ли) с точки зрения идей С. Ли о группах преобразований и симметрий дифференциальных уравнений. Трессе доказал, что размерность группы симметрий такого уравнения не превосходит 8. Во-вторых, он установил, что если эта размерность больше или равна 3, то она необходимо равна 8 и после подходящей замены координат $F \equiv 0$. Кроме того, он классифицировал с точностью до замены переменных все уравнения с 3-мерной группой симметрии. Далее он решил проблему эквивалентности для этого класса уравнений (эта фундаментальная проблема может быть сформулирована следующим образом: если $u'' = F(x, u, u')$ и $v'' = G(x, v, v')$ — два дифференциальных уравнения второго порядка, то спрашивается, как можно определить существует или нет локальная замена координат, переводящая первое уравнение во второе). Интересно сравнить эти результаты с CR-геометрией вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$, развитой Э. Картаном. Прежде всего, он доказал, что группа биголоморфных преобразований невырожденной по Леви гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ есть вещественная группа Ли размерности, не большей 8; кроме того, он доказал, что если эта размерность > 3, то она равна 8 и гиперповерхность биголоморфна единичной сфере. Он классифицировал все гиперповерхности с трехмерной группой автоморфизмов (т.е. однородные гиперповерхности) и решил проблему биголоморфной эквивалентности для этого класса гиперповерхностей. Таким образом, сильная аналогия между геометрией обыкновенных дифференциальных уравнений и CR-геометрией в размерности 2 была точно известна Э. Картану. Стоит отметить, что метод Картана существенно отличается от метода Трессе, поскольку он основан на методе эквивалентности Картана пфаффовых систем, который значительно позднее был формализован в более общем контексте G-структур и является одним из принципиальных средств современной дифференциальной геометрии. Материал этой главы, связанный с симметриями Ли и группами биголоморфизмов, основан на статьях [126–129].

Как было видно, понятие многообразия Сегре и семейства Сегре играет решающую роль в указанном выше соответствии между CR-геометрией аналитических многообразий и геометрической теорией аналитических дифференциальных уравнений. Как отмечалось в первой главе, техника многообразий Сегре была вновь введена в современную теорию С. Вебстером [136]; его подход был существенно развит Дьедерихом–Вебстером [80] и Дьедерихом–Форнаесом [75]. Подчеркнем важную разницу между алгебраическим принципом отражения, приведенным в предыдущей главе, и техникой многообразий Сегре. В самом деле, для алгебраического принципа отражения нужно много раз применять (вообще говоря, достаточно трудно контролировать это число точно) касательные операторы Коши–Римана к компонентам отображения; это необходимо требует некоторой начальной гладкости отображение. С другой стороны, многообразия Сегре, соответствующие границе области, имеют непустое пересечение с этой областью. Поэтому действие отображения на эти многообразия сохраняет смысл, если отображение определено в точности внутри области. Это позволяет применять геометрический принцип отражения для изучения голоморфных отображений без дополнительных предположений о граничной гладкости. Это приобретает решающее значение в случае, когда рассматриваемые области не псевдовыпуклы, поскольку нет результатов, дающих начальную граничную гладкость рассматриваемого отображения в этом случае. Эта ситуация была изучена в серии важных работ Дьедериха и Пинчука [77,78]. Они доказали следующий замечательный результат.

Теорема 10.5. *Любое собственное голоморфное отображение областей в $\mathbb{C}^2$ с вещественно-аналитическими границами голоморфно продолжается за границу.*

Их доказательство основано на далеко идущем обобщении подхода Дьедериха–Форнаеса–Вебстера к принципу отражения, изложенному в последнем параграфе данной главы. Вне всяких сомнений, их метод будет очень полезен для этого направления комплексного анализа.

Глава 3

ГЛАДКИЙ ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ

В предыдущих главах рассматривалась традиционная ситуация, когда принцип отражения применяется к изучению вещественно-аналитических или алгебраических структур. Однако и гладкие структуры играют важную роль в комплексном анализе и было бы естественным выяснить, каким образом принцип отражения может быть здесь приспособлен. Существуют два основных подхода, позволяющие применять принцип отражения для изучения гладких CR-структур: «асимптотически голоморфная» комплексификация, приводящая к изучению гладких функций f, для которых $\overline{\partial} f$ обращается в нуль с некоторым порядком вблизи вещественного многообразия, и метод растяжения, позволяющий сводить рассматриваемую задачу к вещественно-аналитическому или алгебраическому случаю с помощью подходящей деформации структуры. Следующие две главы обзора посвящены этим методам.

В данной главе будет показано, как анализ функций $\overline{\partial}$-умеренного роста в сочетании с принципом отражения может быть использован для получения результатов о регулярности CR-отображений гладких CR-многообразий. Основная цель состоит в доказательстве теоремы об отображении Феффермана.

11. Регулярность аналитических дисков, приклеенных к тотально вещественному многообразию

В этом параграфе рассматривается следующая задача, которая, помимо ее самостоятельного интереса, имеет много важных приложений. Как обычно, обозначим через $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ единичный диск в $\mathbb{C}$. Пусть M — вполне вещественное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ и $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение (которое, как обычно, называется аналитическим или голоморфным диском в $\mathbb{C}^n$). Предположим, что граничные значения f (в смысле, который будет уточнен ниже) на открытой дуге γ единичной окружности $\mathbf{T} = \partial\Delta$ принадлежат M. Что можно сказать о регулярности f на $\Delta \cup \gamma$? Это является естественным обобщением теорем о граничной регулярности конформных отображений, поскольку в случае $n = 1$ подмногообразие M — гладкая кривая на комплексной плоскости.

11.1. Гёльдерово продолжение голоморфных дисков. В этом разделе изучается граничная непрерывность аналитических дисков, приклеенных к множеству нулей положительных строго плюрисубгармонических функций. Понятие строгой плюрисубгармоничности хорошо известно для класса функций C^2 и может быть легко обобщено на более широкий класс функций. Говорят, что плюрисубгармоническая функция u строго плюрисубгармонична в окрестности точки $p \in \mathbb{C}^n$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $u - \varepsilon|z|^2$ плюрисубгармонична в окрестности точки p.

Определение 11.1. (Относительно) замкнутое подмножество X области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ называется вполне вещественным, если существует строго плюрисубгармоническая положительная функция ρ в окрестности U подмножества X в Ω, такая что $X = \rho^{-1}(0) \cap U$.

Это определение оправдано следующим хорошо известным утверждением [24].

Предложение 11.2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$.*

(i) *Пусть $X = \rho^{-1}(0)$ — множество нулей положительной строго плюрисубгармонической функции класса C^2 в Ω. Тогда X локально содержится в n-мерном вполне вещественном подмногообразии класса C^1.*

(ii) *Обратно, если M — вполне вещественное подмногообразие класса C^1 в Ω, то M можно представить как множество нулей некоторой положительно строго псевдовыпуклой функции ρ класса C^2 в окрестности M. Кроме того, для каждого θ, $1/2 < \theta \leqslant 1$, существует окрестность U подмногообразия M в Ω такая, что ρ^θ плюрисубгармонична на U.*

Если определяющая функция ρ не принадлежит классу C^2, то структура тотально вещественного множества $X = \rho^{-1}(0)$ может быть более сложной. Отметим, что если она — положительная плюрисубгармоническая функция (не обязательно строго псевдовыпуклая) и Ω — область Рунге, то ее множество нулей может быть произвольным полиномиально выпуклым множеством.

Теорема 11.3. *Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$, ρ — непрерывная плюрисубгармоническая функция на Ω, а $f : \Delta \longrightarrow \Omega$ — голоморфное отображение, такое что $\rho \circ f \geqslant 0$ на Δ. Допустим, что γ — открытая непустая дуга на границе Δ и выполнены следующие условия:*

(a) *положительные меры $\mu_r(e^{i\theta}) = \rho \circ f(re^{i\theta})d\theta$ (где $d\theta$ — мера Лебега) стремятся в слабой со звездой топологии к мере μ на единичной окружности $b\Delta$ и μ обращается в нуль на γ.*

(b) *для некоторой точки $a \in \gamma$ предельное множество $C(f, a)$ содержит точку $p \in \rho^{-1}(0)$ такую, что ρ строго плюрисубгармонична в окрестности точки p.*

Тогда в окрестности a в $\Delta \cup \gamma$ f продолжается до гёльдерова отображения с показателем $1/2$. Кроме того, если $\rho \geqslant 0$ и ρ^α плюрисубгармонична в окрестности точки p для некоторого $\alpha \in [1/2, 1]$, то f — гёльдерова с показателем $1/2\alpha$ (липшицева, если $\alpha = 1/2$) в окрестности точки a на $\Delta \cup \gamma$.

Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. Оценка метрики Кобаяси–Ройдена. Обозначим через $K_D(z, \eta)$ значение инфинитезимальной метрики Кобаяси–Ройдена [27] в области D комплексного многообразия Ω на паре $(z, \eta) \in D \times T_z\Omega$. Обозначим через $\mathbb{B}$ евклидов единичный шар в $\mathbb{C}^n$.

Предложение 11.4. *Пусть D — область в Ω, $z : U \longrightarrow 3\mathbb{B}$ — координатная окрестность в Ω с центром в точке $p \in D$ (так что $z(p) = 0$), а $|\eta|$ — норма вектора в $T\Omega|_U$, индуцированная евклидовой нормой в $\mathbb{C}^n$. Пусть u — отрицательная плюрисубгармоническая функция на D такая, что функция $u - \varepsilon|z|^2$ плюрисубгармонична в $D \cap U$ и $|u| \leqslant B$ в $D \cap z^{-1}(2\mathbb{B})$ для некоторых постоянных $\varepsilon, B > 0$. Тогда существует положительная постоянная $M = M(\varepsilon, B)$ (не зависящая от u), такая что*

$$K_D(w, \eta) \geqslant M|\eta||u(w)|^{-1/2}$$

для каждого $w \in D \cap z^{-1}(\mathbb{B})$ и $\eta \in T_w\Omega$.

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ — гладкая плюрисубгармоническая неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$ такая, что $\psi(x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ и $\psi(x) = 1$ при $x \geqslant 3/4$. Для любой точки q с $|z(q)| < 2$ определим функцию $\Psi_q = \psi(|z - z(q)|^2)e^{\lambda u}$ в $D \cap U$ и $\Psi_q = e^{\lambda u}$ в $D \backslash U$; положительная постоянная λ будет выбрана позже. Тогда функция $\log \Psi_q = \log \psi(|z - z(q)|^2) + A|z|^2$ плюрисубгармонична в U. С другой стороны, из предположения на u следует, что функция $u - \varepsilon|z|^2$ плюрисубгармонична на $D \cap \{|z - z - (q)| \leqslant 1\}$, а значит, и всюду на D.

Пусть теперь $g : \Delta \longrightarrow D$ — голоморфное отображение, такое что $g(0) = q \in U$, $|z(q)| < 2$. Тогда функция $v(\zeta) = \Psi_q(g(\zeta))/|\zeta|^2$ определена в проколотом единичном диске $\Delta \backslash \{0\}$ и ограничена сверху единицей при ζ, стремящемся к единичной окружности. Она субгармонична в $\Delta \backslash \{0\}$ и $\limsup_{\zeta \longrightarrow 0} v(\zeta) = |g'(0)|^2 \exp(Au(q)/\varepsilon)$ (как обычно, через $g'(0)$ обозначается образ $dg_0(1)$ единичного вектора 1 в касательном пространстве $T_0\Delta$, которое отождествляется с $\mathbb{C}$). Следовательно, v субгармонична, в Δ и из принципа максимума следует, что $|g'(0)|^2 \leqslant \exp(-Au(q)/\varepsilon)$. По определению метрики Кобаяси–Ройдена, для любых $q \in D \cap z^{-1}(2\mathbb{B})$ и $\eta \in T_q\Omega$,

$$K_D(q, \eta) \geqslant \exp(Au(q)/2\varepsilon)|\eta| \geqslant N(\varepsilon, B)|\eta|, \tag{11.1}$$

где $N = N(\varepsilon, B) = \exp(-AB/2\varepsilon)$.

Пусть d_D — псевдорасстояние Кобаяси в D, а $B_D(q, \delta) = \{z \in D : d_D(q, z) < \delta\}$ — шар Кобаяси в D радиуса δ с центром в точке q.

Лемма 11.5. *Для любой точки q из $D \cap z^{-1}(\mathbb{B})$ и для любого $\delta \leqslant N$ шар Кобаяси $B_D(q, \delta)$ содержится в $D \cap \{|z - z(q)| < \delta/N\}$.*

Доказательство. Фиксируем точку $w \in D$ и через $\Gamma(q,w)$ обозначим множество всех дифференцируемых путей $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$, соединяющих q и w с $\gamma(0) = q$ и $\gamma(1) = w$. Напомним, что инфинитезимальная метрика Кобаяси–Ройдена полунепрерывна сверху на голоморфном касательном расслоении D и

$$d_D(q,w) = \inf_{\gamma\in\Gamma(q,w)} \int_0^1 K_D(\gamma(t),\gamma'(t))dt. \tag{11.2}$$

Полагая $G = \{w' \in U : |z(w') - z(q)| < 1\}$, из (11.1) и (11.2) имеем

$$d_D(q,w) \geqslant \inf_{\gamma\in\Gamma(q,w)} \int_{\gamma^{-1}(G)} K_D(\gamma(t),\gamma'(t))dt \geqslant N \inf_{\gamma\in\Gamma(q,w)} \int_{\gamma^{-1}(G)} |\gamma'(t)|dt.$$

Для любого $\gamma \in \Gamma(q,w)$, последний интеграл представляет собой евклидову длину части γ, содержащейся в G. Следовательно, если w принадлежит G, то последний inf не меньше, чем $|z(w)-z(q)|$. В самом деле, если путь γ содержится в G, то его длина больше, чем $|z(w) - z(q)|$; если же γ пересекает границу этого шара, то длина компоненты связности, соединяющей q и граничную точку G, $\geqslant 1 \geqslant |z(w) - z(q)|$. Если w не принадлежит G, то длина просто превосходит 1.

Таким образом, $d_D(w,q) \geqslant N \min\{1, |z(w) - z(q)|\}$, $w \in D \cap U$, а $d_D(w,q) \geqslant N$, если w не принадлежит U. Значит, из соотношения $w \in B_D(q,\delta)$ следует, что $w \in U$ и $|z(w) - z(q)| < \delta/N$. Заметим также, что для любого $0 < \delta \leqslant N$ шар Кобаяси $B_D(q,\delta)$ не пуст, потому что имеем тривиальную оценку расстояния Кобаяси в евклидовом шаре с центром в точке q, содержащемся в $\cap U$. Это доказывает лемму.

Продолжим доказательство предложения. Пусть ψ — то же, что и выше, $\psi(x) = x$ при $x \leqslant 1/2$ и $\psi(x) = 1$ для любого $x \geqslant 1$. При $w \in D \cap z^{-1}(\mathbb{B})$ и $\lambda, \beta > 0$ положим $\Phi_{\lambda,\beta,w} = \psi(|z - z(w)|^2/\beta^2)e^{\lambda u}$ в $D\cap U$. Функция $\Phi_{\lambda,\beta,w}$ корректно определена в $D\cap U$ и принимает значения в $[0,1]$. Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от функции ψ и такая, что функция $\log \Phi_{\lambda,\beta,w} + (C/\beta^2 - \lambda\varepsilon)|z|^2$ плюрисубгармонична в $D \cap U$. Полагая $\lambda = 1/|u(w)|$ и $\beta^2 = C|u(w)|/\varepsilon$, получаем функцию Φ_w, такую что $\log \Phi_w$ плюрисубгармонична на $D \cap U$.

Положим $s = (e^{2N}-1)(e^{2N}+1)$ (так что радиус Пуанкаре диска $\{|\zeta| < s\}$ в Δ равен N). Из леммы 11.5 следует, что для любого голоморфного отображения $g : \Delta \longrightarrow D$, такого что $g(0) = w$, принадлежит $D\cap z^{-1}(\mathbb{B})$, справедливо включение $g(s\Delta) \subset D\cap z^{-1}(2\mathbb{B})$. Пусть $f : \Delta \longrightarrow D$ — голоморфное отображение с $f(0) = w$ и $f'(0) = \eta/\alpha$ при $\eta \in T_w\Omega$. Тогда $v(\zeta) = \Phi_w(f(\zeta))/|\zeta|^2$ — корректно определенная субгармоническая функция на $s\Delta\backslash\{0\}$ и $\limsup_{\zeta\longrightarrow 0} v(\zeta) = \varepsilon|\eta|^2/eC|u(w)|\alpha^2$. Следовательно, v субгармонична в $s\Delta$, а принцип максимума дает неравенство $\alpha \geqslant \varepsilon^{1/2}s|\eta|(eC|u(w)|)^{-1/2}$. Из определения метрики Кобаяси–Ройдена вытекает неравенство

$$K_D(w,\eta) \geqslant \varepsilon^{1/2}s|\eta|(eC|u(w)|)^{-1/2},$$

что завершает доказательство предложения.

Шаг 2: Оценка производной. Следующее утверждение — классическое.

Лемма 11.6. *Пусть ϕ — положительная субгармоническая функция в Δ, такая что меры $\mu_r(e^{i\theta}) = \phi(re^{i\theta})d\theta$ стремятся в слабой* топологии к мере μ на $b\Delta$ при $r \longrightarrow 1$. Допустим, что μ обращается в нуль на открытой дуге $\gamma \subset b\Delta$. Тогда для каждого компактного подмножества $K \subset \Delta \cup \gamma$ существует постоянная C_K, такая что $\phi(\zeta) < C_K(1 - |\zeta|)$ для любого $\zeta \in K \cup \Delta$.*

Доказательство. Можно считать, что γ определяется условиями $-\delta < \theta < \delta$ для некоторого $\Delta > 0$. Обозначим через $P(\zeta,\theta)$ ядро Пуассона для единичного диска. Из предположений леммы следует, что для $\zeta \in \Delta$ можно написать

$$0 \leqslant \phi(\zeta) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} P(\zeta,\theta)d\mu.$$

Если $|\arg\zeta| < \delta/2$ и $|\theta| > \delta$, то

$$P(\zeta,\theta) \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{1 - |\zeta|}{|e^{i\delta/2} - e^{i\delta}|^2}.$$

Из этих неравенств следует требуемая оценка для ζ, удовлетворяющего неравенству $|\arg\zeta| < \delta/2$. Общая ситуация может быть сведена к рассмотренной выше с помощью подходящего конформного отображения. Это доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы. Фиксируем достаточно малую постоянную $\delta > 0$ так, что пересечение $\gamma \cap (a + \delta\overline{\Delta})$ было компактным в γ; обозначим через Ω_δ пересечение $\Delta \cap (a + \delta\Delta)$. По лемме 11.6 существует постоянная $C > 0$, такая что для любого z в Ω_δ,

$$\rho \circ f(\zeta) \leqslant C(1 - |\zeta|). \tag{11.3}$$

По условиям функция ρ строго плюрисубгармонична в окрестности точки p; следовательно, можно считать, что существуют локальные координаты $z : U \longrightarrow 3\mathbb{B}$ с центром в точке p и постоянная $\varepsilon > 0$ такие, что функция $\rho - \varepsilon|z|^2$ плюрисубгармонична на $D \cap U$.

Лемма 11.7. *Существует постоянная $A > 0$, обладающая следующим свойством: если ζ — произвольная точка $\Omega_{\delta/2}$, такая что $f(\zeta)$ принадлежит $D \cap z^{-1}(\mathbb{B})$, то*

$$|f'(\zeta)| \leqslant A(1 - \zeta|)^{-1/2}.$$

Доказательство. Положим $d = 1 - |\zeta|$; тогда диск $\zeta + d\Delta$ содержится в Ω_δ. Определим область $D_d = \{w \in D : \rho(w) < 2Cd\}$. Тогда из (11.3) следует, что образ $f(\zeta + d\Delta)$ содержится в D_d, где плюрисубгармоническая функция $u_d(w) = \rho(w) - 2Cd$ отрицательна. По предложению 11.4, существует постоянная $M > 0$ (не зависящая от d), такая что для любого w из $D \cap z^{-1}(\mathbb{B})$ и любого $\eta \in T_w\Omega$ имеем $K_{D_d}(w, \eta) \geqslant M|\eta||u_d(w)|^{-1/2}$. С другой стороны, для метрики Пуанкаре диска $\zeta + d\Delta$ имеем $K_{\zeta+d\Delta}(\zeta, \tau) = |\tau|/d$ для любого τ из $T_\zeta\Delta$, отождествляемого с $\mathbb{C}$. По свойству убывания метрики Кобаяси для любого τ

$$M|f'(\zeta)|\tau||u_d(f(\zeta))|^{-1/2} \leqslant K_{D_d}(f(\zeta), f'(\zeta)\tau) \geqslant K_{\zeta+d\Delta}(\zeta, \tau) = |\tau|/d.$$

Значит, $|f'(\zeta)| \leqslant M^{-1}|u_d(f(\zeta))|^{1/2}/d$. Так как $-2Cd \leqslant u_d(f(\zeta)) < 0$, то отсюда следует требуемое утверждение при $A = M^{-1}(2C)^{1/2}$.

Из последней леммы и в силу свойств интегрирования, вытекающих из классической теоремы Харди–Литтлвуда, следует, что f продолжается на окрестность точки a до непрерывной по Гёльдеру функции с показателем $1/2$. Так как кластерное множество $C(f, a)$ содержит p, то существует последовательность точек $a_\nu \in \Delta$, сходящаяся к a, и такая что $f(a_\nu) \longrightarrow p$. Предположим от противного, что существуют постоянная $r > 0$ и последовательность (b_ν) в Δ, сходящаяся к a, такие что $\operatorname{dist}(f(a_\nu), f(b_\nu)) \geqslant r$ при всех ν (евклидово расстояние). Выберем достаточно большое ν так, что $\operatorname{dist}(f(a_\nu), p) < 1/2$. Рассмотрим кусочно-линейный путь I_ν (ориентированный от a_ν к b_{nu}) в Δ, образованный тремя отрезками: первый из них — это $[a_{nu}, a'_\nu]$, где $a'_\nu \in [0, a_{nu}]$, а $|a_{nu} - a'_\nu| = |a_\nu - b_\nu|$; второй — $[a'_{nu}, b'_\nu]$, где $b'_\nu \in [0, b_{nu}]$, а $|b_{nu} - b'_\nu| = |b_\nu - a_\nu|$; последний — $[b_{nu}, b'_\nu]$. Пусть $c_{nu} \in I_{nu}$ — точка, самая близкая к a_ν вдоль I_ν, такая что $\operatorname{dist}(f(a_{nu}), f(c_\nu)) \geqslant \min(1/2, r)$; пусть J_ν — путь в I_ν между a_ν и c_ν. Тогда $f(J_\nu)$ содержится в шаре $\mathbb{B}$ (можно считать, что оценка метрики Кобаяси–Ройдена, даваемая предложением 11.4, выполняется на этом шаре). По лемме 11.7 $|f'(\zeta)| \leqslant A(1 - |\zeta|)^{-1/2}$ для всех $\zeta \in J_\nu$. Интегрируя по J_ν, получаем противоречие, заключенное в неравенстве

$$|g(c_\nu) - g(a_\nu)| \leqslant 6A|a_\nu - b_\nu|^{1/2}.$$

Следовательно, f непрерывно продолжается на $\Delta \cap \{a\}$; в частности, существует окрестность V', содержащая a, такая, что $f(\Delta \cap V') \subset \mathbb{B}$. Значит, оценка леммы 11.7 выполняется в окрестности точки a в $\Delta \cup \gamma$, а f гёльдерово с показателем 1/2 по теореме Харди–Литтлвуда [6].

Если, кроме того, функция ρ^θ плюрисубгармонична, то можно применить лемму 11.6 к функции $\rho^\theta \circ f$ и получить оценку $\rho \circ f(\zeta) \leqslant C(1 - |\zeta|)^{1/\theta}$. Повторим теперь проведенное рассуждение. Пусть ζ — точка в Δ (достаточно близкая к a), а $d = 1 - |\zeta|$. Тогда образ $f(\zeta + d\Delta)$ содержится в области $D_d = \{w \in D : u_d(w) = \rho(w) - 2Cd^{1/\theta} < 0\}$. Повторяя доказательство леммы 11.7, получаем, что $|f'(\zeta)| \leqslant M^{-1}|u_d(f(\zeta))|^{1/2}/d$. Так как $-2Cd^{1/\theta} \leqslant u_d(f(\zeta)) < 0$, то имеем оценку $|f'(\zeta)| \leqslant A(1 - |\zeta|)^{1/2\theta - 1}$ в окрестности точки a в Δ; следовательно, f — гёльдерова с показателем 1/2 на $\Delta \cup \gamma$ вблизи a. Это завершает доказательство теоремы.

11.2. Неаналитический принцип продолжения и регулярность аналитических дисков. В предыдущем разделе было видно, что аналитический диск, подклеенный к C^1-гладкому вполне вещественному подмногообразию, гёльдеров с показателем α вплоть до границы при любом $\alpha < 1$. Если гладкость M более высокая, то естественно ожидать, что этот результат может быть улучшен.

Начнем с вещественно-аналитического случая. Пусть M — вполне вещественное n-мерное вещественно-аналитическое подмногообразие в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$.

Предложение 11.8. *Существует локально биголоморфная замена координат в $\mathbb{C}^n$, такая что в новых координатах $M = \mathbb{R}^n$ в окрестности начала координат.*

Доказательство. После линейной замены координат можно определить M в окрестности начала координат с помощью уравнений $y = \phi(x)$, где $z = x + iy$, а ϕ — векторнозначная функция, вещественно-аналитическая в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим в окрестности начала координат пространства $\mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}^n_w$ систему голоморфных уравнений $(w - z)/2i + \phi((z + w)/2) = 0$, где компоненты ϕ рассматриваются как степенные ряды, а x заменено на $(z + w)/2$. По теореме о неявной функции, эта система эквивалентна системе $w = z+\psi(z)$ для некоторой функции ψ, голоморфной в окрестности начала координат. В терминах этой функции рассматриваемое многообразие M определяется уравнениями $\overline{z} = z + \psi(z)$.

Отображение $z \mapsto \zeta = 2z + \psi(z)$ биголоморфно в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$. Положим $\zeta = \tau + i\eta$; тогда получим $\eta = \operatorname{Im}\zeta = \operatorname{Im}(z + (z + \psi(z))) = \operatorname{Im}(z + \overline{z}) = 0$ на M. Это означает, что M локально преобразуется в $\mathbb{R}^n_\tau \subset \mathbb{C}^n_\zeta$. Это завершает доказательство.

Из этого утверждения легко вытекает следующее

Предложение 11.9. *Пусть M — вещественно-аналитическое n-мерное вполне вещественное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, а $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение, непрерывное на $\Delta \cup \gamma$, где γ — открытая дуга границы Δ. Предположим, что $f(\gamma) \subset M$. Тогда f голоморфно продолжается за дугу γ.*

Доказательство. Фиксируем точку $a \in \gamma$; не ограничивая общности, можно считать, что $f(a) = 0$. Используя подходящее конформное отображение единичного диска на верхнюю полуплоскость, можно также считать, что γ — открытый интервал вещественной оси $\mathbb{R}$. Пусть g — биголоморфное отображение в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$, такое что локально $g(M) = \mathbb{R}^n$. Тогда по классическому принципу отражения, векторнозначная функция $\overline{g}(f(\overline{\zeta}))$ даст голоморфное продолжение $f(\zeta)$ на окрестность a, откуда следует требуемое утверждение.

Наша основная цель — дать гладкую версию этого результата. Это достигается с помощью следующего полезного технического приема, принадлежащего Е. Чирке [24].

Предложение 11.10. *Пусть M — n-мерное вполне вещественное многообразие класса C^k при $k \geqslant 1$ в $\mathbb{C}^n$ с $0 \in M$, а $T_0M = \mathbb{R}^n$. Для любой функции $f \in C^k(M)$ существует продолжение $\hat{f}$ в окрестность начала координат, которое принадлежит классу C^k и бесконечно дифференцируемо вне M, а также обладает тем свойством, что коэффициенты $\overline{\partial}\hat{f}$ имеют на M нуль порядка $k - 1$ в окрестности начала координат.*

Доказательство. Пусть, как и выше, M определено уравнениями $y_\nu = \phi_\nu(x)$, где каждая функция ϕ_ν принадлежит классу C^1. Тогда на M имеем

$$(x - a') = (z - a) - i(\phi(x) - \phi(a')) = (z - a) - i\frac{\partial\phi}{\partial x}(a')(x - a') + r_0(x, a')$$

(в матричных обозначениях). Отсюда следует, что

$$(x - a') = \left(\operatorname{Id} + i\frac{\partial\phi}{\partial x}(a')\right)^{-1}((z - a) + r_0(x, a')) = \Lambda(a')(z - a) + r_1(x, a'),$$

где Id — единичная матрица, $\Lambda(a')$ состоит из функций класса C^{k-1} при $a' \in \mathbb{R}^n$ $(a = a' + i\phi(a'))$, а $r_1(x, a') = \Lambda(a')r_0(x, a') = o(|x - a'|)$. Любая линейная функция $x - a'$ может быть записана в аналогичном виде. Многочлен второй степени P можно записать в виде $P = L + Q$, где Q —

однородный квадратичный многочлен по $x - a'$. Представим линейную функцию L на M в виде $\hat{L}(z-a) + L(r_1)$ и (при $k \geqslant 2$) разложим r_1 по формуле Тейлора:

$$r_1(x, a') = \Lambda(a') \sum_{|j|=2} (1/j!)\phi^{(j)}(a')(x-a')^j + r_2(x, a'),$$

где r_2 (с точностью до множителя $\Lambda(a')$) — остаток ряда Тейлора векторной функции ϕ в точке a' порядка большего двух. Объединяя члены второго порядка в $L(r_1)$ и Q, получаем уравнение $P = \hat{L}(z-a)+P_2(x-a')+L(r_2)$ на M, где P_2 — однородный квадратичный многочлен с коэффициентами класса C^{k-2} по a'. Заменяя в нем $x - a'$ на его выражение в терминах $z - a$, получаем на M уравнение $P_2 = \hat{Q}(z-a) + Q(x-a', r_2)$, где $\hat{Q}$ и Q — однородные квадратичные многочлены своих аргументов, причем каждый член Q содержит элементы r_2 ненулевых степеней (коэффициенты Q — функции от a' класса C^{k-1}). Продолжаем рекуррентно: из представления одночленов меньшей степени по $z-a$ возникают многочлены от $x-a'$ и остатки Тейлора для ϕ в точке a'; добавляем их начальные разложения к одночленам следующей степени, затем разлагаем их по степеням f $z-a$ и т.д,

Разложим f (рассматриваемую как функцию x) по формуле Тейлора в точке a':

$$f(x) = \sum_{|j|l} (1/j!) f^{(j)}(a')(x-a')^j + \sum_{|j|=l} (1/j!)(f^{(j)}(\eta) - f^{(j)}(a))(x-a')^j.$$

Здесь $\eta \in [a', x]$ и l – целые части k. Выполним указанную выше модификацию многочлена Тейлора для f в первой сумме. Тогда она примет следующий вид на M: $P_a(z)+Q_a(x, r_a)$, где Q_a — однородный многочлен степени l по x (r_a — остаточный член Тейлора порядка $> l$), коэффициенты которого по f удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha = k - l$ (непрерывны при $\alpha = 0$), а каждый одночлен по Q_a содержит некоторые элементы r_a ненулевых степеней и P_a — многочлен по z. Из разложения Тейлора ϕ получаем

$$r_{a\nu}(x, a') = \sum_{|j|=l} (1/j!)(\phi_\nu^{(j)}(\eta_\nu) - \phi_\nu^{(j)}(a'))(x-a')^j.$$

Обозначим через $r_f(z, a)$ остаток в формуле Тейлора для f (вторая сумма в выражении для f). Тогда получаем следующее выражение на M:

$$P_a(z) - P_b(z) = Q_a(z, r_a) - Q_b(z, r_b) + r_f(z, a) - r_f(z, b).$$

Правая часть этого выражения представляется на всем $\mathbb{C}^n$ ($a, b \in M$) в виде $\lambda(z, a, b)(|z-a|^l + |z-b|^l)$, где $\lambda(z, a, b) \longrightarrow 0$ при $a-b \longrightarrow 0$ (равномерно по $z \in \mathbb{C}^n$) и если $\alpha > 0$, то $|\lambda(z, a, b)| \leqslant C|a-b|^a$ с некоторой постоянной C. Это следует из вида остатка в формуле Тейлора для f и ϕ, поскольку $f, \phi \in C^k$. Поэтому многочлен $P - a(z)$ удовлетворяет условиям Уитни, а значит, существует функция $\hat{f}$ класса C^k в окрестности точки 0, бесконечно дифференцируемая вне M, многочлены Тейлора которой в каждой точке $a \in M$ (из окрестности начала координат) равны соответствующим $P_a(z)$; в частности, $\hat{f}|_M = f$. Поскольку $P_a(z)$ — многочлен по z, то $\partial_{\overline{z}} P_a(z) \equiv 0$; таким образом, $\overline{\partial}\hat{f} = \overline{\partial}(\hat{f} - P_a) = 0(|z-a|^{k-1})$, если k — целое, и $|\partial\hat{f}| \leqslant C|z-a|^{k-1}$, если k не целое. Поскольку $a \in M$ произвольно, то это означает, что $\overline{\partial}\hat{f}$ имеет нуль на M порядка $k-1$. Это доказывает предложение.

Теперь можно использовать последнее предложение для построения "асимптотически голоморфного" диффеоморфизма вполне вещественного многообразия и $\mathbb{R}^n$. Пусть M — тотально вещественное n-мерное многообразие в $\mathbb{C}^n$ класса C^k, $k > 1$, в окрестности начала координат. Можно считать, что локально оно определяется уравнениями $y_{nu} = \phi_\nu(x)$, $\phi_\nu = o(|x|)$. Модифицируя ϕ_ν вне M, как в предыдущем предложении, получаем функции $\psi_\nu(z) = o(|z|)$, такие что M определено в окрестности начала координат системой $y_\nu = \psi_\nu(z)$, и $\partial\psi_\nu/\partial\overline{z}_\nu$ имеет на M нуль кратности, по крайней мере, $k-1$ для любых ν, μ; кроме того, функции ψ_ν бесконечно дифференцируемы вне M. Тогда отображение $\Phi : z \mapsto w = w(z)$, $w_\nu = z_\nu - i\psi_\nu(z)$ определяет диффеоморфизм в начале координат, переводящий M в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем во избежание несущественных технических осложнений будем рассматривать только случай, когда M принадлежит классу C^∞. Доказательство для C^k-гладкого ($k > 1$) случая может быть проведено аналогичным образом. Единственный исключительный случай $k = 1$, нуждающийся в другом подходе, был рассмотрен ранее.

Теорема 11.11. *Пусть M — вполне вещественное n-мерное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ класса C^∞, а $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}^n$ — ограниченное голоморфное отображение. Предположим, что для открытой дуги γ границы Δ предельное множество $C(f, \gamma)$ содержится в M. Тогда f принадлежит классу C^∞ на $\Delta \cup \gamma$.*

Доказательство. Уже известно, что f гёльдерово с показателем α на $\Delta \cup \gamma$ при любом $\gamma < 1$. Фиксируем точку $a \in \gamma$. Можно считать, что $f(a) = 0 \in M$. Рассмотрим в построенной выше окрестности начала координат C^∞-диффеоморфизм Φ, переводящий M в $\mathbb{R}^n$ и такой, что $\overline{\partial}\Phi$ обращается в нуль с бесконечным порядком на M.

Очевидно, что достаточно показать, что отображение $g = \Phi \circ f$ принадлежит классу C^∞ на $\Delta \cap \gamma$ в окрестности точки a. Ключевым средством для этого является следующее

Предложение 11.12. *Пусть h — функция класса C^∞ на верхнем полудиске $\Delta^+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1, \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, непрерывная на $\Delta^+ \cup]-1,1[$ и $\overline{\partial}h$ принадлежит классу C^∞ на $\Delta^+ \cup]-1,1[$. Предположим, что $h(]-1,1[)$ содержится в $\mathbb{R}$ и $\overline{\partial}h$ обращается в нуль с бесконечным порядком на вещественной оси. Тогда h принадлежит классу C^∞ на $\Delta \cup]-1,1[$.*

Это утверждение можно рассматривать как неаналитический принцип отражения. Конечно, он является следствием регулярности эллиптического $\overline{\partial}$-оператора.

Доказательство. Продолжим функцию $g(\zeta) = \frac{\partial h}{\partial \overline{\zeta}}$ на весь единичный диск, полагая $g(\overline{\zeta}) = \overline{g}(\zeta)$, и обозначим продолженную функцию через $\tilde{g}$. Поскольку по условиям предложения, g обращается в нуль на вещественной оси с бесконечным порядком, то функция $\tilde{g}$ принадлежит классу C^∞. Нам потребуется следующее классическое утверждение о свойствах регулярности преобразования Коши.

Лемма 11.13. *Пусть ω — гладкая функция класса C^∞ с компактным носителем на комплексной плоскости. Тогда функция*

$$\hat{\omega}(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int\int \omega(\tau) \frac{d\tau \wedge d\overline{\tau}}{\tau - \zeta}$$

принадлежит классу C^∞ на комплексной плоскости.

Доказательство. Это проверяется непосредственно, поскольку

$$\hat{\omega}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\int \omega(\tau + \zeta) \frac{d\tau \wedge d\overline{\tau}}{\tau},$$

то можно дифференцировать под знаком интеграла.

Рассмотрим гладкую положительную функцию $\lambda(|\zeta|)$ с компактным носителем в единичном диске, удовлетворяющую соотношению $\lambda \equiv 1$ на $(1/2)\Delta$. Рассмотрим функцию $\omega := \lambda\tilde{g}$ с компактным носителем и ее преобразование Коши $\hat{\omega}$. Хорошо известно, что преобразование Коши решает $\overline{\partial}$–задачу: $\overline{\partial}\hat{\omega} = \omega$; легко видеть, что в рассматриваемом случае оно также наследует вещественность ω на вещественной оси: $\hat{\omega}(\overline{\zeta}) = \overline{\hat{\omega}(\zeta)}$. Поэтому функция $g - \hat{\omega}$ голоморфна в односторонней окрестности начала координат и принимает вещественные значения на вещественной оси вблизи начала координат. По классическому принципу отражения, она голоморфно продолжается за начало координат; так как $\hat{\omega}$ принадлежит классу C^∞, то получаем, что h принадлежит классу C^∞ на $\overline{\Delta}^+$ в окрестности начала координат. Так как требуемое утверждение локально, то предложение доказано.

Завершим теперь доказательство теоремы. Используя подходящее конформное отображение, можно свести ситуацию к случаю, когда f голоморфна в верхнем полудиске Δ^+, гёльдерово на $\overline{\Delta}^+$ и удовлетворяет оценке

$$\operatorname{dist}(f(\zeta), M) \leqslant C|\operatorname{Im}\zeta|^{1/2}.$$

В самом деле, в гладком случае многообразие M имеет определяющие функции $\rho_j = y_j - \phi_j(x)$ и функция $\rho = \sum_j \rho_j^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы 11.3 (положительна, строго плюрисубгармонична и т.п.). Так как $\rho(z)$ эквивалентно $\operatorname{dist}^2(z, M)$, то последняя оценка следует из леммы 11.6.

Рассмотрим функцию $h = \Phi \circ f$, принадлежащую классу C^∞ на Δ^+, непрерывную вплоть до $]-1,1[$, принимающую вещественные значения на вещественной оси. Для того, чтобы применить неаналитический принцип отражения, необходимо изучить $\overline{\partial} h$ вблизи вещественной оси. Поскольку f ограничена, то по неравенствам Коши получим $|f^{(p)}(\zeta)| \leqslant C_n |\operatorname{Im}\zeta|^{-p}$ при любом p. Для любого целого m обозначим через D^m дифференциальный оператор $D^m = \partial^m/\partial z_1^{i_1}\dots\partial z_n^{i_n}\partial\overline{z}_1^{j_1}\dots\partial\overline{z}_n^{j_n}$, где $m = i_1+\dots+i_n+j_1+\dots+j_n$. Так как $\overline{\partial}\Phi$ обращается в нуль с бесконечным порядком на M, то имеем оценку $|D^m\overline{\partial}\Phi(f(\zeta))| \leqslant C \operatorname{dist}(f(\zeta), M)^s \leqslant C|\operatorname{Im}\zeta|^{s/2}$ для любого целого положительного s. Из этих оценок и цепного правила следует, что производная любого порядка $\overline{\partial}h(\zeta)$ обращается в нуль при $\operatorname{Im}\zeta$, стремящемся к нулю. Поэтому из неаналитического принципа отражения следует, что h принадлежит классу C^∞ на $\Delta^+\cup]-1,1[$, что завершает доказательство.

12. Граничная регулярность голоморфных функций в клиньях

Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, а $M \subset D$ — n-мерное тотально вещественное подмногообразие, определенное как множество общих нулей функций ρ_j, $j = 1,\dots,n$, гладких на D. Напомним, что через $W(D,M)$ обозначается «клин» $\{z \in D : \rho_j < 0, j = 1,\dots,n\}$ с «острием» M.

Основная цель этого раздела состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 12.1. *Пусть $W(D,M)$ — клин в $D \subset \mathbb{C}^n$ с вполне вещественным n-мерным острием M класса C^∞, а $f : W(D,M) \longrightarrow \mathbb{C}^{n'}$ — ограниченное голоморфное отображение. Предположим, что предельное множество $C(f,M)$ принадлежит вполне вещественному подмногообразию M' класса C^∞. Тогда f продолжается на $W(D,M)\cup M$ как C^∞–отображение.*

В предыдущем параграфе это утверждение было установлено при $n = 1$, т.е. для случая голоморфного диска. Общий случай также связан с эллиптичностью $\overline{\partial}$–оператора. Однако он требует некоторых дополнительных результатов и методов, которые очень полезны при изучении граничного поведения голоморфных функций, и имеют самостоятельный интерес.

Начнем с классической конструкции семейства голоморфных дисков, приклеенных вдоль дуги к данному вполне вещественному многообразию.

Шаг 1. Построение дисков. Пусть M — максимальное вполне вещественное многообразие класса C^k, $k \geqslant 1$, в $\mathbb{C}^n$, $p = 0 \in M$, определенное в начале координат уравнениями

$$y = h(x), \quad h(0) = 0, \quad dh(0) = 0.$$

Будем использовать обозначение $z : \tau \longrightarrow z(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$, $\tau \in \Delta$ для голоморфного диска в $\mathbb{C}^n$. Всюду предполагается, что рассматриваемые диски непрерывны на $\overline{\Delta}$. Обозначим через $\mathbf{T} = \partial\Delta$ единичную окружность, а через T — преобразование Гильберта на $\mathbf{T}$, т.е. отображение $T : L^2(\mathbf{T}) \longrightarrow L^2(\mathbf{T})$ такое, что $u + iT(u)$ голоморфно продолжается на Δ при любом $u \in L^2(\mathbf{T})$, и мнимая часть этого продолжения обращается в нуль в начале координат.

Если $z = u + iv$ — голоморфный диск, приклеенный к M вдоль дуги $\mathbf{T}^+ = \{e^{i\theta} : |\theta| \leqslant \pi/2\}$, то при $\tau \in \mathbf{T}^+$ имеем $v(\tau) = (h \circ u)(\tau)$, так что $Tu - h\circ u$ — вещественная постоянная на $\mathbf{T}^+$. Таким образом, для некоторой вещественной постоянной c функция $u + T(h\circ u) - c$ сопряжена с 0 на $\mathbf{T}^+$. Обратно, пусть ψ — гладкая функция на $\mathbf{T}$, обращающаяся в нуль на $\mathbf{T}^+$. Для любого решения уравнения $u = c - T(h\circ u) - tT(\psi)$ функция $u + i(h\circ u) + t\psi)$ есть граничное значение голоморфной функции $z(\tau)$ такое, что $\operatorname{Re} z(0) = c$ и $z(\tau)$ принадлежит M при $\tau \in \mathbf{T}^+$. Таким образом, получаем модифицированное уравнение Бишопа

$$u = -T(h\circ u) - tT(\psi) + c.$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$u = T(h(u,\lambda)) + K(\tau,\lambda),$$

где K — гладкая функция, определенная на $D = \mathbf{T} \times \Omega$, Ω — область в $\mathbb{R}^m$, содержащая начало координат, u и K — $\mathbb{R}^n$-значные функции, $h(x, \lambda)$ — гладкая функция на $\Omega' \times \Omega$, Ω' — окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$ и $h(0) = 0$, $dh(0) = 0$.

Фиксируем $p > m + 1$. Будем решать приведенное выше уравнение в пространствах Соболева $W^{r,p}_{n,loc}$, снабженных стандартными нормами: $\| f \|_{W^{r,p}_{loc}} = (\sum_{k \leqslant r} \| D_k f \|^p_{L^p_{loc}})^{1/p}$ для вещественной функции f и $\| f \|_{W^{r,p}_{n,loc}} = (\sum_{j \leqslant n} \| f_j \|^p_{W^{r,p}_{loc}})^{1/p}$ при $f = (f_1, \dots, f_n)$.

1. Фиксируем достаточно малую постоянную $\rho > 0$ (ее точное значение будет ясно из оценок ниже). Существует произведение шаров $\mathbb{B}_n(0, R_1) \times \mathbb{B}_m(0, R_2)$ в области определения h и на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ определена гладкая функция H с компактным носителем, такая что $H | \mathbb{B}_n(0, R_1) \times \mathbb{B}_m(0, R_2) = h$ и $|H'|_\infty \leqslant \rho$. Поэтому достаточно найти (единственное) решение уравнения

$$u = T(H(u, \lambda)) + K(\tau, \lambda), \tag{12.1}$$

такое что $(u(\tau, \lambda), \lambda)$ принимает значения в $\mathbb{B}_n(0, R_1)$ при λ, принадлежащем окрестности начала координат в $\mathbb{B}_m(0, R_2)$. Предположим также, что

$$|H(x, \lambda) - H(y, \lambda)| \leqslant \rho |x - y|.$$

Рассмотрим отображение $F : L^p_n \longrightarrow L^p_n$, определенное как $F : u \mapsto T(H(u, \lambda)) + K$. Оно, очевидно, сжимающее, поскольку $|H(u, \lambda) - H(v, \lambda)| \leqslant \rho |u - v|$ для любого $u, v \in L^p_n$, откуда с помощью интегрирования получаем оценку

$$\| F(u) - F(v) \|_{L^p_n} \leqslant \| T(H(u, \lambda) - H(v, \lambda)) \|_{L^p_n} \leqslant \rho \| T \| \| u - v \|_{L^p_n}.$$

Рассмотрим последовательность (u^s), определенную формулами $u^0 = 0$, $u^{s+1} = F(u^s)$, и через $x(\tau, \lambda) \in L^p_n$ обозначим ее предел. Нам потребуются дальнейшие свойства регулярности x.

Имеем

$$\| F(u) \|_{W^{1,p}_n} \leqslant \operatorname{const} \rho \| T \| \| u \|_{W^{1,p}_n} + \| K \|_{W^{1,p}_n}.$$

Отсюда следует, что при любом s

$$\| u^s \|_{W^{1,p}_n} \leqslant \operatorname{const} \| K \|_{W^{1,p}_n}. \tag{12.2}$$

Выберем K так, что $\| K \|_{W^{1,p}_n} \leqslant \rho'$, где значение малой постоянной ρ' будет фиксировано позже. По теореме вложения Соболева, это неравенство означает также, что $\| x \|_\infty$ достаточно мало. Так что x принимает значения в $\mathbb{B}_n(0, R_1)$. Поскольку шар в L^p_n слабо *-компактен, из (12.2) следует, что $x \in W^{1,p}_n$. В частности, последовательность (u^s) равномерно ограничена в норме $\| \cdot \|_\infty$, и x непрерывна. Повторяя рассуждения, аналогично доказываем $W^{2,p}_n$-сходимость подпоследовательности, которая означает, что решение x уравнения Бишопа принадлежит классу C^1, если многообразие M принадлежит классу C^2. Этой регулярности достаточно для наших приложений; дальнейшая регулярность может быть получена итерированием проведенного рассуждения.

Нам потребуются также некоторые сведения о геометрии дисков Бишопа, подклеенных к вполне вещественному многообразию.

Рассмотрим сначала вещественно-аналитический случай, когда $M = i\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Delta^- = \{|\tau| < 1, \operatorname{Re} \tau < 1\}$ левый полудиск. Семейство дисков $u_j = t_j \tau + c_j$ есть в точности все диски Бишопа, подклеенные к M вдоль $[-i, i]$. Ясно, что для любого $\tau \in]0, 1[$ семейство отрезков $u_{c,t}(] - 1, 0])$, $|t| = r$, $t_j > 0$, (c лежит в окрестности начала координат) диффеоморфно заполняет клин $W = \{\operatorname{Re} z_j < 0\} \cap \mathbb{B}(0, \delta)$ и $z \in W$ стремится к 0 в том и только том случае, если $\operatorname{Re} z$ стремится к 0, что эквивалентно соотношению $\operatorname{Re} \tau = 0$, где $u_{c,t}(\tau) = z$.

Если теперь M гладко (по меньшей мере, класса C^2), то используется замена координат $z = \varepsilon z'$ и представляется в виде $y = (1/\varepsilon) h(\varepsilon x) = H(\varepsilon, x)$.

Уравнение Бишопа

$$u = T(H(\varepsilon, u)) + tT\varphi - c$$

является специальным случаем уравнения, рассмотренного выше, и имеет единственное C^1 решение $u(\tau, c, t, \varepsilon)$. Так как оно совпадает с вышеприведенным семейством при $\varepsilon = 0$, то все свойства вещественно-аналитических дисков сохраняются при малом возмущении.

Шаг 2. Равномерные оценки производных. Теперь ясен ход доказательства предложения. При $\delta > 0$ обозначим через $W_\delta(D,M)$ «стянутый» клин $\{z \in D : \rho_j(z) - \sum_{k\neq j}\rho_k < 0, j = 1,\dots,n\}$. Из предыдущего построения сразу вытекает, что для любого $\delta > 0$ существует семейство голоморфных дисков $h(\tau,t) = h_t(\tau)$ класса C^1 относительно параметра $t \in R^{2n}$ такое, что $h_t(\mathbf{T}^+) \subset M$, $h_t(\Delta) \subset W(D,M)$, $W_\delta(D,M) \subset \cup_t h_t(\Delta)$ и $C_1(1-|\tau| \leqslant \operatorname{dist}(h_t(\tau),M) \leqslant C_2(1-|\tau|)$ для любого t с постоянными $C_j > 0$, *не зависящими* от t. Повторяя предыдущие рассуждения выше о гёльдеровости голоморфного диска $f \circ h_t$, подклеенного к тотально вещественному многообразию, для любых $z \in W_\delta(D,M)$ и $\alpha > 0$ получаем оценку

$$|\frac{\partial f_j}{\partial z_k}| \leqslant C \operatorname{dist}(z,M)^{1-\alpha}.$$

В частности, отсюда следует, что f продолжается до гёльдеровой функции на $W_\delta \cup M$.

Шаг 3. Гладкая теорема об «острие клина». Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ «правый» клин $W^- = \{z = x+iy : y_j < 0, j = 1,\dots,n\}$ (и, аналогично, $W^+ = \{z = x+iy : y_j > 0, j = 1,\dots,n\}$) с острием $\mathbb{R}^n$. Говорят, что C^∞-функция h *асимптотически голоморфна* на W^-, если для каждого $j = 1,\dots,n$ производная $\partial_{\overline{z}_j} h$ гладко продолжается на $\mathbb{R}^n$ и обращается там в нуль с бесконечным порядком. Следующее утверждение показывает, что асимптотически голоморфные функции по-прежнему удовлетворяют оценкам Коши вблизи острия.

Лемма 12.2. *Пусть h — асимптотически голоморфная функция, ограниченная на W^-. Тогда для любого положительного целого k, для любого $z \in W_\delta^- = \{z : y_j - \delta\sum_{s\neq j} y_g < 0, j = 1,\dots,n\}$ и для некоторой положительной постоянной C_k имеем оценку*

$$|D^k h(z)| \leqslant C_k |y|^{-k}.$$

(Здесь D^k обозначает частную производную порядка k по всем вещественным переменным x, y).

Доказательство. Пусть z^0 — точка W_δ^- такая, что $\operatorname{dist}(z^0, \partial W_\delta^-) = 2r$. Тогда r сравнимо с $\operatorname{dist}(z^0,\mathbb{R}^n) = |y^0|$. Применяя к функции $h_j(t) = h(z_1^0,\dots,z_{j_1}^0,t,z_{j+1}^0,\dots,z_n^0)$ формулу Коши на диске $U = \{t \in \mathbb{C} : |t - z_j^0| < r\}$, получаем

$$h_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{h_j(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\int_U \frac{\partial_{\overline{\zeta}} h_j(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Дифференцируя правую часть по t и принимая во внимание условие асимптотической голоморфности, получаем, что $|\partial h| = O(1/r)$, что дает требуемое утверждение при $k = 1$. Заменяя теперь h на $\partial_{z_j} h$ и применяя полученную оценку, получаем утверждение леммы при $k = 2$ и т.д.

Следующее утверждение — гладкая версия классической теоремы об острие клина [13].

Лемма 12.3. *Пусть h^- и h^+ — асимптотически голоморфные функции на W^- и W^+ соответственно. Предположим, что они непрерывны вплоть до «острия» $\mathbb{R}^n$ и совпадают на нем: $h^-|\mathbb{R}^n = h^+|\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\delta > 0$ функция h^- (соответственно, h^+) принадлежит классу C^∞ на $W_\delta^- \cup \mathbb{R}^n$ (соответственно, $W_\delta^+ \cup \mathbb{R}^n$).*

Доказательство. Обозначим через h непрерывную функцию, определенную на $W^- \cup \mathbb{R}^n \cup W^+$; пусть $h|W^- = h^-$, $h|W^+ = h^+$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ семейство комплексных прямых $z(t) = a + bt$, $t \in \mathbb{C}$, зависящее от вещественных параметров $a, b \in \mathbb{R}^n$. Легко видеть, что это семейство заполняет множество $W^- \cup \mathbb{R}^n \cup W^+$, каждая прямая целиком лежит там, пересекает $\mathbb{R}^n$ вдоль вещественной прямой, соответствующей вещественным значениям t. Так как наше утверждение локальное, то умножая, если нужно, h на подходящую срезающую функцию, равную единице в окрестности начала координат, можно считать, что ограничение $h(a+bt)$ отображения h на любую прямую есть функция с компактным носителем на $\mathbb{C}$.

Применяя формулу Коши, имеем

$$h(a+bt) = \frac{1}{2\pi i}\int\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_{\overline{\zeta}} h(a+b\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \tag{12.3}$$

Так как $\overline{\partial}h$ обращается в нуль на $\mathbb{R}^n$ с бесконечным порядком, то можно дифференцировать этот интеграл по параметрам произвольное число раз. Беря производную по a_j для фиксированного t с $\operatorname{Im} t \neq 0$, получаем

$$\partial_{z_j} h(a+bt) = -\partial_{\overline{z}_j} h(a+bt) + \frac{1}{2\pi i}\int\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_{\overline{\zeta}}(\partial_{z_j} h(a+b\zeta) + \partial_{\overline{z}_j} h(a+b\zeta))}{\zeta - t} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}. \tag{12.4}$$

Ввиду асимптотической голоморфности, правая часть этого выражения имеет предел L при t, стремящемся к 0. Так как интеграл (12.3) не зависит от b при $t = 0$, то предел L также не зависит от b. Это означает, что частные производные $\partial_{z_j} h$ непрерывно продолжаются на $\mathbb{R}^n$. Ввиду предыдущей леммы, они асимптотически голоморфны на $W_\delta^- \cup \mathbb{R}^n \cup W_\delta^+$. Применяя к ним то же рассуждение, получаем, что частные производные второго порядка непрерывны вплоть до ребра и т.д. Это доказывает лемму.

Теперь требуемое предложение вытекает непосредственно. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим асимптотически голоморфный диффеоморфизм Φ такой, что $\Phi(\mathbb{R}^n) = M$ (в окрестности начала координат) и $W_\delta(D, M) \subset \Phi(W^-) \subset W(D, M)$. Пусть также Ψ — асимптотически голоморфное отображение, переводящее M' в $\mathbb{R}^{n'}$. Тогда функция $h^- := \Psi \circ f \circ \Phi$ асимптотически голоморфна на клине W^-, непрерывна вплоть до острия, и ограничение $h^-|\mathbb{R}^n$ принимает вещественные значения. Используя стандартное отражение, продолжаем h^- как асимптотически голоморфную функцию на противоположный клин и применяем теорему об острие клина (предыдущую лемму). Это завершает доказательство теоремы.

13. Теорема об отображении Феффермана

В этом параграфе доказывается основной результат данной главы.

Теорема 13.1. *Пусть D и D' — C^∞ гладкие ограниченные строго псевдовыпуклые области в $\mathbb{C}^n$. Тогда любое биголоморфное отображение $f : D \longrightarrow D'$ продолжается до C^∞-биголоморфизма их замыканий.*

Нам потребуется некоторая предварительная информация о граничном поведении отображения f. Прежде всего, существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \operatorname{dist}(f(z), \partial D') \leqslant \operatorname{dist}(z, \partial D) \leqslant C_2 \operatorname{dist}(f(z), \partial D').$$

Эти оценки хорошо известны и сразу следуют из леммы Хопфа.

Продолжим расслоение комплексных касательных пространств с границы строго псевдовыпуклой области на ее внутренность следующим образом: для точки $z \in \overline{D}$ положим

$$T_z = \{v \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}(z) v_j = 0\}.$$

Конечно, при $z \in \partial D$ T_z — комплексное касательное пространство к ∂D. Касательный вектор $v \in T_z(D)$, $z \in D$, допускает разложение $v = v_t + v_n$, где $v_t \in T_z$ (касательная компонента), а v_n ортогонально T_z (нормальная компонента). Напомним также следующую хорошо известную оценку метрики Кобаяси–Ройдена на строго псевдовыпуклой области D [93]:

$$K_D(z, v) \geqslant C(\operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1/2}|v_t| + \operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1}|v_n|.$$

Рассмотрим специальный ортогональный базис $S(z) = (e_1(z), \ldots, e_n(z))$ пространства $\mathbb{C}^n$ для $z \in D$: $e_n(z)$ есть единичный вектор, ортогональный t_z, а $e_1(z), \ldots, e_{n-1}(z))$ — ортогональный базис t_z.

Предложение 13.2. *Матрица A дифференциала $df(z)$ относительно базисов $s(z)$ и $S(f(z))$ имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} O_{n-1}(1) & \operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1/2} \\ \operatorname{dist}(z, \partial D)^{1/2} & O(1) \end{pmatrix},$$

где $O_{n-1}(1)$ — $(n-1) \times (n-1)$-матрица. В частности, f продолжается до гёльдерова отображения замыканий областей.

Доказательство. Используя свойство убывания метрики Кобаяси– Ройдена, при (z, v) в $D \times \mathbb{C}^n$ имеем $K_{D'}(f(z), f'(z)v) \leqslant K_D(z, v)$. Ввиду упомянутого свойства сохранения граничного расстояния для f, имеем

$$\operatorname{dist}(f(z), \partial D')^{-1/2}|f'(z)(v)_t| + \operatorname{dist}(f(z), \partial D')^{-1}|f'(z)(v)_n| \leqslant$$
$$\leqslant C(\operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1/2}|v_t| + \operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1}|v_n|).$$

Поскольку f сохраняет расстояние, то очевидно, что если v — комплексный касательный вектор, то

$$|f'(z)(v)_t| \leqslant C|v|$$

и

$$|f'(z)(v)_n| \leqslant C \operatorname{dist}(z, \partial D)^{1/2}|v|.$$

Оценка комплексного нормального вектора может быть получена аналогичным рассуждением. Отсюда следует первая часть предложения. В частности, $|f'(z)(v)| = O(\operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1/2})$, так что по теореме Харди–Литлвуда, f гёльдерово с показателем $1/2$.

Проведем доказательство теоремы Феффермана в несколько шагов.

Шаг 1. Поднятие Вебстера и условие А. Пусть D — гладкая ограниченная строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$. Она имеет естественный лифт на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, определенный как $D \times \mathbb{P}^{n-1}$ и являющийся областью в комплексном $(2n-1)$-мерном многообразии $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Его граница содержит вещественное $(2n-1)$-мерное подмногообразие $\mathcal{N} = \{(z, p) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : z \in \partial D, p = H_z(\partial D)\}$. Значит, $\mathcal{N}$ — поднятие Вебстера строго псевдовыпуклой гиперповерхности D и, согласно фундаментальному результату Вебстера, оно является тотально вещественным подмногообразием в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Полезно фиксировать локальную параметризацию $\mathcal{N}$. Предположим, что $0 \in \partial D$; после линейной замены координат можно также считать, что $\rho(z) = -y_n + \phi('z, x_n)$, где $'z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\phi(z) = o(|z|)$. Тогда $H_0(\partial D) = \{z_n = 0\}$. Отображение $T : \mathbb{R}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$, определенное по формуле как $T(X) = (\Phi(X), P(X))$, где $\Phi(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) = ('z, x_n + i\phi(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$, $P(X) = (p_1(X), \ldots, p_{n-1}(X))$ и $p_j = \frac{\partial \rho}{\partial z_j} / \frac{\partial \rho}{\partial z_n}$ — локальная параметризация $\mathcal{N}$. Отображение T можно продолжить на окрестность $\mathbb{R}^{2n-1}$ в $\mathbb{C}^{2n-1}$, так что $\overline{\partial} T$ обращается в нуль с конечным порядком на $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Технически удобно заменить область $D \times \mathbb{P}^{n-1}$ на область типа клина. Образ при параметризующем отображении T вещественного луча $'z = 0$, $x_n = 0$ и $0 < y_n$ есть кривая, трансверсальная $\partial D \times \mathbb{P}^{n-1}$ и она продолжается на открытое множество $D \times \mathbb{P}^{n-1}$. Значит, существует открытый конус Λ в $\mathbb{R}^{2n-1}$ такой, что $W := T(\mathbb{R}^{2n-1} + i\Lambda) \cap \mathbb{B}(0, R))$ содержится в $D \times \mathbb{P}^{n-1}$. При суперпозиции с вещественным линейным отображением $\mathbb{C}^{2n-1}$, можно считать, что

$$\Lambda_0 := \{t \in \mathbb{R}^{2n-1} : |t_j| < t_{2n-1}, 1 \leqslant j \leqslant 2n-2\}$$

содержится в Λ. Поэтому W — клин с острием $\mathcal{N}$.

Лемма 13.3. *В окрестности начала координат при $(z, p) \in W$ имеем*

$$C^{-1} \operatorname{dist}(z, \partial D) \leqslant \operatorname{dist}((z, p), \mathcal{N}) \leqslant C dist(z, \partial D)$$

и

$$\operatorname{dist}((z, p), (z, T_z)) = 0(\operatorname{dist}(z, \partial D)).$$

Доказательство. Во-первых, T — гладкий диффеоморфизм окрестности точки 0 в $\mathbb{C}^{2n-1}$ на окрестность точки $T(0)$, переводящий $\mathbb{R}^{2n-1}$ в $\mathcal{N}$. Таким образом, если X и Y находятся вблизи 0, то расстояние от $T(X = iY)$ до $\mathcal{N}$ эквивалентно $|Y|$. Так как $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \circ \Phi)(0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial y_j}(\rho \circ \Phi)(0) = -\delta_{j,n-1}$, то это расстояние эквивалентно Y_{2n-1}, если Y лежит вблизи 0 в Λ_0. Это доказывает первое утверждение.

Запишем теперь $(z, p) = T(X + iY) = (\Phi(X + iY), P(X + iY))$.Так как отображения $P(X + iY)$ в T_z гладкие и согласованы при $Y = 0$, то их разность есть $O(|Y|)$. Это доказывает предложение.

Если $f : D \longrightarrow D'$ — биголоморфное отображение, то оно имеет естественное голоморфное на W поднятие, определенное как $\tilde{f}(z,p) = (f(z), f'(z)(p))$, где $f'(z)(p)$ — образ при отображении $f'(z)$ гиперплоскости p. Ясно, что если f принадлежит классу C^1 на замыкании $\overline{D}$, то его лифт непрерывно продолжается на $\overline{W}$. Однако известно, что f гёльдерово с показателем 1/2 на $\overline{D}$. Оказывается, что можно доказать непрерывность лифта с помощью специального рассуждения, называемого «методом растяжения». Прежде всего, введем так называемое условие A, которое количественно описывает препятствия к непрерывности лифта отображения f.

Это условие формулируется следующим образом.

Условие A .*Существует постоянная $A > 0$, такая что*

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_k}(z) \frac{\partial}{\partial z_k}(\rho' \circ f)(z)| \geqslant A.$$

Предложение 13.4. *Пусть f — голоморфное отображение строго псевдовыпуклых областей D и D'. Предположим, что f удовлетворяет условию A. Тогда его лифт $\tilde{f}$ непрерывно продолжается на $\overline{W}$.*

Доказательство. Пусть a — точка на границе D, $\tilde{a}$ — ее лифт на $\mathcal{N}$, а $((z^k, [p^k]))_k$ — последовательность в $\overline{W}$, сходящаяся к $\tilde{a}$. Можно считать, что p^k — единичный вектор в $\mathbb{C}^n$. Докажем, что последовательность гиперплоскостей, определенная как q^k, где $q^k = {}^t f'(w^k) p^k$ и $w^k = f(z^k)$, сходится в $\mathbb{P}^{n-1}$ к комплексному касательному пространству в $b = f(a)$ (будем обозначать через ${}^t x$ транспонированный вектор x). Этого достаточно, чтобы показать, что первые $n-1$ компонент q^k относительно двойственного базиса $S(b)$ стремятся к 0, а последняя больше, чем постоянная при k, стремящемся к бесконечности. Так как отображение S принадлежит классу C^1, то можно заменить $S(b)$ на $S(w^k)$.

Вводя единичный нормальный комплексный вектор в точке z^k, можно написать $p^k = t^k + O(\delta_k)$, где δ_k — расстояние от z^k до границы. Так как $|f'(w^k)| = 0(\delta_k^{-1/2})$, то $q^k = {}^t f'(w^k) t^k + O(\delta_k^{1/2})$. Поэтому достаточно доказать результат при t^k. По предложению 13.2, компоненты ${}^t f'(w^k) t^k$ относительно двойственного базиса $S(w^k)$ являются элементами последнего столбца матрицы $A(w^k)$ оператора ${}^t f'(w^k)$ относительно специальных базисов, первые $n-1$ есть $0(\delta_k^{1/2})$ и стремятся к 0 при k, стремящемся к бесконечности. Проверяя последнюю компоненту, находим в точности условие A. Это доказывает предложение.

Шаг 2. Метод растяжения и проверка условия A. Наша следующая цель — показать, что любой биголоморфизм строго псевдовыпуклых областей удовлетворяет условию A. Начнем с так называемого «метода растяжения».

Рассмотрим биголоморфное отображение $f : D \longrightarrow D'$ строго псевдовыпуклых областей. Пусть (z^k) — последовательность в D, сходящаяся к точке p из ∂D. Для любой граничной точки $t \in \partial D$ рассмотрим замену переменных α^t, определенную по формулам

$$z_j^* = \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_n}(t)(z_j - t_j) - \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j}(t)(z_n - t_n), \ 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

$$z_n^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(t)(z_j - t_j).$$

Тогда α^t отображает t в 0 и D в область D^t. Вещественная нормаль в точке 0 к ∂D отображается с помощью α^t в прямую $\{'z = 0, y_n = 0\}$. Для каждого k обозначим через y^k проекцию z^k на ∂D, а через α^k — замену переменных α^t с $t = t^k$. Поскольку f непрерывно продолжается на $\overline{D}$, то последовательность $(w^k = f(z^k))$ сходится к точке $q = f(p)$. Пусть u^k — проекция w^k на $\partial D'$, а β^k — соответствующее отображение. Отображение $f^k := \beta^k \circ f \circ (\alpha^k)^{-1}$ удовлетворяет соотношению $f^k(0, -\delta_k) = (0, -\varepsilon_k)$, где $\delta_k = \operatorname{dist}(z^k, \partial D)$, $\varepsilon_k = (\delta_k^{1/2} z, \delta_k z_n)$ и $\psi_k = (\varepsilon_k^{1/2} z, \varepsilon_k z_n)$. Положим $\tilde{f}^k = (\psi_k)^{-1} \circ f^k \circ \phi_k$.

Предложение 13.5. *Последовательность* $(\tilde{f}^k)$ *есть нормальное семейство на каждом компактном подмножестве множества* $\Sigma = \{('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : \lambda('z, z_n) = 2\operatorname{Re} z_n + |'z|^2 < 0\}$ *и предельная точка* $\tilde{f}$ *имеет вид* $\tilde{f}('z, z_n) = (U('z), z_n)$*, где* U *— унитарное преобразование* $\mathbb{C}^{n-1}$.

Доказательство. Замена переменных α^k преобразует область D в область D^k. определенную функцией ρ^k. Можно предполагать,что $p = q = 0$ и что в окрестности 0 имеем $\rho(z) = 2\operatorname{Re} z_n + |z|^2 + r(z)$, $R(z) = o(|z|^2)$. По формуле Тейлора получаем оценку $\rho^k(z) = 2rez_n + H^k(z) + B^k(z) + R^k(z)$, где H^k — эрмитов оператор, B^k — билинеен, а остаточный член R^k есть $o(|z|^2)$ равномерно в окрестности 0. При k, стремящемся к бесконечности, предел матрицы H^k — единичная матрица, а предел B^k равен 0. Следовательно, существует окрестность U точки 0, такая что для любого k и $z \in U$ имеем $\rho^k(z) \geqslant 2\operatorname{Re} z_n + (1/2)|z|^2$. При замене переменных $(\phi_k)^{-1}$ область D^k переходит в $\tilde{D}^k$ и определяется функцией $\tilde{\rho}^k(z) = (\delta^k)^{-1}\rho^k(\phi_k(z))$.

Пусть теперь L — компактное подмножество в Σ. При ϕ_k, стремящемся к 0 равномерно по L, $\phi_k(L)$ содержится в U при больших k. Следовательно, $\tilde{\rho}^k$ сходится к λ равномерно на L; в частности, оно не положительно, а тогда $L \subset \tilde{D}^k$, откуда следует, что выражение для $\tilde{f}^k$ имеет смысл . Поскольку f непрерывно вплоть до границы, то последовательность $f^k \circ \phi_k$ сходится к 0 равномерно на L, и можно использовать оценку ${\rho'}^k$ с целью получить, что

$$0 \geqslant \tilde{\rho}'^k(\tilde{f}^k(z)) \geqslant 2\operatorname{Re} w_n^k + (1/2)|w^k|^2$$

с $w^k = \psi_k \circ \tilde{f}^k(z)$. Следовательно,

$$0 \geqslant 2\operatorname{Re} \tilde{f}_n^k + (1/2)|\tilde{f}^k|^2.$$

Вещественная часть функции $\tilde{f}_n^k$ отрицательна, а потому последовательность $\tilde{f}_n^k)_k$ нормальна на L. Так как эта последовательность сходится к точке $('0, -1)$, то она ограничена на компактном множестве L и, в силу предыдущего неравенства, последовательность $(\tilde{f}_n^k)_k$ также ограничена и образует нормальное семейство на каждом компактном множестве, содержащемся в Σ. Так как $\tilde{\rho}'^k$ сходится к λ равномерно на компактных множествах, то любая предельная точка $\tilde{f}$ принимает значения в $\overline{\Sigma}$. Поскольку Σ строго псевдовыпукло и $\tilde{f}('0, -1) = ('0, -1)$, то $\tilde{f}$ Σ-значно.

Применим то же рассуждение с растяжением к $g = f^{-1}$, легко получаем на основе классических рассуждений, что $\tilde{f}$ есть биголоморфизм Σ. Отображение

$$\phi('z, z_n) \longrightarrow \left(\frac{2^{1/2}('z)}{1 - z_n}, \frac{1 + z_n}{1 - z_n}\right)$$

биголоморфно как отображение из Σ на единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и $T = \phi \circ \tilde{f} \circ \phi^{-1}$ — автоморфизм шара, оставляющий неподвижным начало координат, а потому — унитарное преобразование $\mathbb{C}^n$. Если $T('0, 1) = ('\alpha, \alpha)$ с $|'\alpha|^2 + |\alpha|^2 = 1$, то для любого положительного вещественного t

$$\tilde{f}('0, -t) = \left(2^{1/2}\frac{(1-t)'\alpha}{(1-\alpha)t + 1 + \alpha}, \frac{(1-\alpha) + (1+\alpha)t}{(1+\alpha) + (1-\alpha)t}\right).$$

Для того, чтобы получить $'\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, достаточно доказать, что $\lambda[\tilde{f}(0, -t)]$ стремится к бесконечности при t, стремящемся к бесконечности. Так как f сохраняет расстояние, то существует постоянная $C > 0$ такая, что $|\rho'(f(z))| \geqslant C \operatorname{dist}(z, \partial D)$. Следовательно,

$$|\rho'((f \circ (\alpha^k)^{-1} \circ \phi_k)('0, -t))| \geqslant C \operatorname{dist}((\alpha^k)^{-1}('0, -\delta_k t), \partial D).$$

Так как $(\alpha^k)^{-1}('0, -\delta_k t)$ проектируется на ∂D в точке t^k, то получаем $|\rho'((f \circ (\alpha^k)^{-1} \circ \phi_k)('0, -t))| \geqslant C\delta_k t$.

Таким образом, $|\tilde{\rho}'^k[\tilde{f}^k('0, -t)]| \geqslant C\varepsilon_k^{-1}\delta_k t$, где $\tilde{\rho}'^k = \varepsilon_k^{-1}(\rho' \circ (\beta^k)^{-1} \circ \psi_k)$, поскольку $\tilde{\rho}^{k\prime}$ сходится к λ равномерно на компактных множествах в Σ; устремляя $k \longrightarrow \infty$, получаем неравенство $|\lambda(\tilde{f}('0, -t))| \geqslant Ct$. Это верно, поскольку $\varepsilon_k^{-1}\delta_k$ ограничено снизу положительной постоянной, а f сохраняет расстояние.

Теперь все готово для доказательства следующего утверждения.

Предложение 13.6. *Каждое голоморфное отображение строго псевдовыпуклых областей удовлетворяет условию А.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует последовательность (z^k) в D, имеющая предельную точку на границе, такая, что $\lim \nu(z^k)(\rho' \circ f) = 0$, где ν — единичное комплексное нормальное векторное поле на границе. Используя метод растяжения для этой последовательности, получаем отображение $\tilde{f}$ на Σ вида $\tilde{f}('z, z_n) = (U('z), z_n)$. Таким образом, условие $\lim \nu(z^k)(\rho' \circ f) = 0$ дает

$$\frac{\partial f_n}{\partial z_n}('0, -1) = 0.$$

В самом деле, используя обозначения предыдущего предложения, имеем $\tilde{f}^k = \psi_k^{-1} \circ f^k \circ \phi_k$, а, следовательно, в силу линейности ϕ_k и ψ_k, имеем $D\tilde{f}^k = \psi_k^{-1} \circ Df^k \circ \phi_k$ и

$$\frac{\partial(\tilde{f}^k)_n}{\partial z_n}('0, -1) = \varepsilon_k^{-1}\delta_k \frac{\partial f_n^k}{\partial z_n}('0, -\delta_k).$$

В силу равенства $f^k = \beta^k \circ f \circ (\alpha^k)^{-1}$ и определений α^k и β^k, легко проверяется, что справедливо равенство $\frac{\partial f_n^k}{\partial z_n}('0, -1) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{\partial(\tilde{f}^k)_n}{\partial z_n}('0, -1) = 0$. Так как отношение $\varepsilon_k^{-1}\delta_k$ ограничено, то из предположений относительно последовательности (z^k) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z_n}('0, -1) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{\partial(\tilde{f}^k)_n}{\partial z_n}('0, -1) = 0,$$

поскольку последовательность $(\tilde{f}^k)$ и последовательность производных ее членов сходятся равномерно на компактных подмножествах Σ. Полученное противоречие доказывает предложение.

Шаг 3. Регулярность f. Как было видно, в предположениях теоремы Феффермана отображение f допускает непрерывный лифт $\tilde{f}$ на клин W с вполне вещественным острием $\mathcal{N}$, таким что образ $f(\mathcal{N})$ содержится во вполне вещественном многообразии $\mathcal{N}'$. Значит, $\tilde{f}$ гладко на $W \cup \mathcal{N}$, откуда следует утверждение теоремы.

Замечания к главе III

Идея использовать функции с контролируемым ростом $\overline{\partial}$ достаточно стара и широко использовалась в теории дифференциальных уравнений с частными производными. В случае многих комплексных переменных, она впервые была использована Ниренбергом–Вебстером–Янгом [111] для получения элементарного и замкнутого в себе с точки зрения комплексного анализа доказательства теоремы Феффермана об отображении. Идея использовать метод растяжения для проверки условия А принадлежит Пинчуку–Хасанову [13]. Отметим, что Купе [57] в случае C^k-гладких границ областей доказал, что отображение продолжается на границу как $C^{k-1/2-0}$-диффеоморфизм. Метод минорирования метрики Кобаяси, использованный выше, принадлежит Сибони [116]; результат о гёльдеровости голоморфного диска, подклеенного к вполне вещественному многообразию класса C^1, принадлежит Чирке–Купе–Сухову [55]; дополнительная регулярность диска в гладком случае была установлена Чиркой [24] (для C^k-гладкого случая), а ее различные формы — другими авторами [41, 101]. Конструкция голоморфных дисков, подклеенных к вполне вещественному многообразию вдоль полуокружностей, была введена Пинчуком [11] и развита и применена многими авторами (см., например, [56]). Гладкая теорема об острие клина принадлежит Пинчуку–Хасанову [13].

Гладкий принцип отражения сводит доказательство теоремы об отображении Феффермана к эллиптической регулярности $\overline{\partial}$-оператора. Естественное желание доказать аналог этой теоремы для более широкого класса областей приводит к существенно более тонкому и сложному изучению субэллиптических оценок $\overline{\partial}$-задачи Неймана на областях конечного типа. Фундаментальные результаты в этом направлении с приложениями к проблеме отображения были получены несколькими авторами: С. Беллом, Э. Бедфордом, Г. Боасом, Д. Кэтлин, Д. Д. Анджело, К. Дьедерихом, Дж. Форнаесом, Дж. Коном, Е. Лигоска, Э. Штраубе. Детальное их изложение выходит за рамки данного обзора. Упомянем только один из основных результатов, полученных в этом направлении, который утверждает, что собственное голоморфное отображение гладких ограниченных псевдовыпуклых областей с границами конечного типа (в смысле Д'Анджело) гладко продолжается на границу. Напомним, что *тип* гладкой гиперповерхности есть максимальный порядок ее касания с ростками голоморфных кривых; в частности, в вещественно-аналитическом случае конечность типа просто означает, что гиперповерхность не содержит ростков голоморфных кривых (подробности см. в [69, 117]).

Недавно А. Туманов получил в [134] обобщение теоремы об отображении Феффермана для гёльдеровых CR-гомеоморфизмов псевдовыпуклых порождающих CR-многообразий высокой коразмерности. Смежные результаты были также получены Ф. Форстнеричем [87, 90]; его подход близок к изложению материала этой главы, но вместо метода растяжения он использовал версию леммы Жулиа–Каратеодори, аналогично оригинальной идее Ниренберга–Вебстер–Янга. Работа Туманова основана на подходящем обобщении теории экстремальных дисков Лемперта для метрики Кобаяси [101]. Это позволяет строить конечномерное биголоморфно инвариантное семейство аналитических дисков, подклеенных к данному многообразию и допускающих мероморфные лифты до лифта Вебстера рассматриваемого многообразия. Это сводит общую задачу к задаче о регулярности голоморфного диска, подклеенного к вполне вещественному многообразию, рассмотренную выше.

Глава 4

ДЕФОРМАЦИИ ГЛАДКИХ CR-СТРУКТУР

В этой главе объясняется, как геометрия вещественно-алгебраических и аналитических CR-структур может быть использована для изучения некоторых свойств гладких CR-многообразий и их отображений. Докажем следующий результат [65].

Теорема 13.7. *Пусть $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — непостоянное непрерывное CR-отображение C^∞-гладких псевдовыпуклых гиперповерхностей конечного типа в $\mathbb{C}^2$. Тогда для любой точки p гиперповерхности Γ_1 существует окрестность U этой точки p в $\mathbb{C}^2$, такая что прообраз $f^{-1}(f(p)) \cap U$ — компактное подмножество в $\Gamma_1 \cap U$.*

Этот результат можно рассматривать как своего рода топологическую жесткость CR-отображений. Интерес к утверждениям такого типа связан с важной проблемой регулярности CR-отображений, которая изучалась многими авторами. По сравнению с хорошо изученным случаем собственных голоморфных отображений, одним из основных препятствий здесь является возможность нахождения односторонних голоморфных продолжений CR-отображения, таких что это продолжение — собственное голоморфное отображение подходящих односторонних псевдовыпуклых окрестностей наших гиперповерхностей. Хорошо известно, что компактность прообраза, сформулированная в теореме, позволяет получить собственное голоморфное продолжение CR-отображения (см. работы Белла–Кэтлина [40] и Пинчука–Цыганова [14]). Поэтому естественно возникает следующий вопрос (см. [37], а также [91]): необходимо ли это условие, если CR-отображение гладких псевдовыпуклых областей конечного типа (в смысле Д. Анджело) предполагается *непостоянным*? Таким образом, в этой главе будет дан положительный ответ в размерности 2. Ввиду хорошо известного результата Белла–Кэтлина [40] наша теорема дает следующее

Следствие 13.8. *Любое непрерывное CR-отображение C^∞ гладких псевдовыпуклых областей конечного типа в $\mathbb{C}^2$ C^∞-гладко. Кроме того, если это отображение не постоянно, то оно локально конечно.*

Таким образом, из этой теоремы следует, что слои f, на самом деле, дискретны.

В строго псевдовыпуклом случае этот результат был получен Пинчуком–Цыгановым в [14]. Для случая вещественно-аналитических гиперповерхностей это было доказано Хуангом [96]; используя принцип отражения, он показал, что в этом случае f вещественно-аналитично, а условие псевдовыпуклости излишне. Заметим, что при некоторых дополнительных предположениях теорема 13.7 была установлена в [61, 64] (в [61], по крайней мере, одна из гиперповерхностей предполагалась строго псевдовыпуклой, а в [64] отображение f предполагалось гёльдеровым с показателем 1/2). В нашем доказательстве используются результаты и техника [61, 64] и,в особенности, конструкция «равномерного растяжения», основанная на точных оценках метрики Кобаяси, однако эта техника продвигается дальше с помощью новых идей, позволяющих получить требуемый определенный результат. Объясним идею предлагаемого подхода.

Поскольку отображение f непостоянно, то можно продолжить его голоморфно на псевдовыпуклую сторону D_1 гиперповерхности Γ_1 (см. [36]), так что это продолжение (также обозначаемое через f) отображает D_1 в псевдовыпуклую сторону D_2 гиперповерхности Γ_2 (см. [37]). Рассмотрим суперпозицию F^ν отображения f с подходящей последовательностью биголоморфизмов пространства $\mathbb{C}^2$, которые растягивают окрестности точек $p \in \Gamma_1$ и $q = f(p) \in \Gamma_2$. Тогда области D_j^ν, $j = 1, 2$ (образы D_j's при растягиваниях), сходятся к некоторым модельным областям Ω_j, вида $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C}^2 | Rez_2 + P_j(z_1) < 0\}$, где P_j — невырожденный субгармонический многочлен.

Важно то, что семейство $(F^\nu)_\nu$ нормально и равномерно гёльдерово вплоть до границы, т.е. постоянная Гёльдера не зависит от ν; это было доказано в [64]. Далее, эти равномерные оценки гарантируют, что предельное отображение F «наследует» некомпактность $f^{-1}(q)$. Таким образом, задача о топологической жесткости CR-отображений гладких псевдовыпуклых гиперповерхностей конечного типа редуцируется к изучению (глобально определенных!) голоморфных отображений модельных областей с алгебраическими границами. Техника этой редукции детально изучена в предыдущей статье авторов [61, 64] и используется здесь как средство. Наиболее важное граничное свойство отображения F — это граничная конечность; более точно, нужно показать, что (собственное) голоморфное отображение $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ псевдовыпуклых областей в $\mathbb{C}^2$ с алгебраическими границами конечно на границе, т.е. прообраз $F^{-1}(F(0))$ конечен вблизи начала координат. Как было показано в [64], в случае, когда начальное отображение f гёльдерово с показателем 1/2, образ $F(0)$ необходимо является конечной точкой $\partial\Omega_2$, и желаемая конечность прообраза может быть доказана с помощью геометрии многообразий Сегре, ассоциированных с алгебраическими границами. К сожалению, если предполагать f только непрерывным, то, вообще говоря, $|F(z)|$ стремится к бесконечности при $z \in \Omega_1$, стремящемся к 0, и нужно показать, что множество точек в $\partial\Omega_1$ с этим свойством (называемым «прообразом бесконечности») компактно вблизи начала координат (на самом деле, это множество конечно). Для его доказательства потребуется тщательный анализ голоморфных отображений модельных алгебраических областей, который требует привлечения техники и идей, весьма отличающихся от таковых в [61, 64].

Предлагаемый здесь подход основан на фундаментальной работе Э. Картана [50], в которой им было дано полное решение задачи о локальной биголоморфной эквивалентности для вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ (его результаты были обобщены на высшие размерности Чженем– Мозером [54]). Конструкция Картана выполняется в общем вещественно-аналитическом случае; наша же ситуация проще, поскольку алгебраические CR-структуры более жесткие, чем вещественно-аналитические. Эта жесткость позволяет получить весьма точное описание собственных голоморфных отображений алгебраических областей, которое достаточно для проверки граничной конечности.

Сначала приведем основы конструкции Картана. Главная идея состоит в отдельном рассмотрении двух различных случаев: несферического (когда границы областей не локально биголоморфны единичной сфере) и сферического. Подробно рассматривается несферический случай. Стоит отметить, что хотя здесь и возможно непосредственное применение инвариантов Картана, оно приводит к сложным вычислениям. Поэтому эти вычисления проводятся для голоморфных отображений алгебраических областей при условии, что эти отображения представимы в некоторой специальной нормальной форме. Затем используется структура алгебры Ли голоморфных касательных векторных полей (инфинитезимальных CR-автоморфизмов) жесткой алгебраической несферической гиперповерхности с целью показать, что любое голоморфное отображение необходимо имеет требуемую нормальную форму (см. смежные результаты в статьях Бедфорда–Пинчука [2] и Стэнтона [123]). Вместе с результатами § 3 это влечет, что (собственное) голоморфное отображение областей с алгебраическими жесткими несферическими границами необходимо является полиномиальным. Заметим, что специальные голоморфные отображения областей этого типа изучались Чауечем, Бертелотом и Хагопьяном [42, 52, 94].

Далее рассматривается сферический случай. Здесь CR-геометрия границ менее жестка и непосредственная классификация отображений более сложна. Однако оказывается, что можно классифицировать модельные алгебраические сферические гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$; в соответствии с теорией Картана. Определяющая функция такой гиперповерхности удовлетворяет уравнениям с частными производными, которые можно проинтегрировать. В частности, получаем, что множество слабо псевдовыпуклых точек сферической гиперповерхности имеет простую структуру и этого достаточно для доказательства нашего основного результата. Заметим также, что смежные результаты о классификации некоторых классов сферических гиперповерхностей были получены Бернсом–Шнайдеромг [49] и Дадоком–Янгом [66].

Наконец, кратко напоминается конструкция растяжения из [64], позволяющая завершить доказательство основной теоремы.

14. Конструкция Картана

Излагаются некоторые основные факты из работы Картана, которые будут использованы ниже. Хорошее описание идей Картана содержится в книге Якобовича [98].

Фундаментальные формы Картана. Пусть Γ — вещественная (аналитическая) строго псевдовыпуклая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $r(z, w) = 0$ с $dr \neq 0$. Основная идея Картана состоит во введении трех дополнительных переменных λ, μ, ρ, где λ, μ комплексны, а ρ вещественно, которые можно трактовать как (локальные) координаты на слоях тривиального нульмерного векторного расслоения X над Γ; это позволяет сопоставить Γ систему из восьми дифференциальных 1–форм $\Omega, \Omega_1, \overline{\Omega}_1, \Omega_2, \overline{\Omega}_2, \Omega_3, \overline{\Omega}_3, \Omega_4$ (где Ω и Ω_4 — вещественны), определенных на X и удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&d\Omega = i\Omega_1 \wedge \overline{\Omega}_1 - \Omega \wedge (\Omega_2 + \overline{\Omega}_2),\\
&d\Omega_1 = -\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega \wedge \Omega_3,\\
&d\overline{\Omega}_1 = -\overline{\Omega}_1 \wedge \overline{\Omega}_2 - \Omega \wedge \overline{\Omega}_3,\\
&d\Omega_2 = 2i\Omega_1 \wedge \overline{\Omega}_3 + i\overline{\Omega}_1 \wedge \Omega_3 - \Omega \wedge \Omega_4,\\
&d\overline{\Omega}_2 = -i\Omega_1 \wedge \overline{\Omega}_3 - 2i\overline{\Omega}_1 \wedge \Omega_3 - \Omega \wedge \Omega_4,\\
&d\Omega_3 = -\Omega_1 \wedge \Omega_4 - \overline{\Omega}_2 \wedge \Omega_3 - R\Omega \wedge \overline{\Omega}_1,\\
&d\Omega_3 = -\overline{\Omega}_1 \wedge \Omega_4 - \Omega_2 \wedge \overline{\Omega}_3 - R\Omega \wedge \Omega_1,
\end{aligned}
$$

где R — вещественно-аналитическая функция на X. Это семейство форм связано с задачей о локальной биголоморфной эквивалентности следующим образом. Пусть Γ' — другая строго псевдовыпуклая вещественно–аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, X' — соответствующее векторное расслоение, а Ω'_j — ассоциированное семейство 1-форм. Тогда отображение f, голоморфное в окрестности Γ, переводит Γ в Γ' в том и только том случае, если его ограничение $f|\Gamma$ поднимается (некоторым каноническим образом) до диффеоморфизма $\Phi : X \longrightarrow X'$ такого, что $\Phi^*(\Omega'_j) = \Omega_j$ для любого j. Таким образом, метод Картана сводит задачу о локальной биголоморфной эквивалентности к изучению переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными. Замечательный факт состоит в том, что эта система может быть выписана явно, поскольку можно найти выражения для форм Ω_j в терминах определяющей функции r гиперповерхности Γ. Объясним метод Картана вычисления форм Ω_j.

Предположим, что $\partial r/\partial w \neq 0$; в дальнейшем обозначаем частные производные через r_w. Положим

$$\omega = -i\left(\frac{r_w r_{\overline{w}}}{L(r)}\right)(r_z dz + r_w dw),$$
$$\omega_1 = dz,$$

где $L(r) = r_{z\overline{z}} r_w r_{\overline{w}} + r_{w\overline{w}} r_z r_{\overline{z}} - r_{z\overline{w}} r_w r_{\overline{z}} - r_{w\overline{z}} r_z r_{\overline{w}}$.

Для любой функции h, определенной на Γ, можно написать $dh = h_0\omega + h_1\omega_1 + h_{\overline{1}}\overline{\omega}_1$; если h определена в окрестности Γ, то

$$h_0 = i\left(\frac{L(r)}{(r_w r_{\overline{w}})^2}\right)(h_w r_{\overline{w}} - h_{\overline{w}} r_w),$$
$$h_1 = (h_z r_w - h_w r_z)/r_w,$$
$$h_{\overline{1}} = (h_{\overline{z}} r_{\overline{w}} - h_{\overline{w}} r_{\overline{z}})/r_{\overline{w}}.$$

Тогда положим

$$b = (r_w)^{-1}\left(-2\frac{(r_{z\overline{w}} r_w - r_{w\overline{w}} r_z)}{r_{\overline{w}}} + \frac{(L_z r_w - L_w r_z)}{L(r)}\right),$$
$$c = b_{\overline{1}},$$
$$l = c_1 - bc - 2ib_0.$$

Теперь можно рассмотреть 1-формы

$$\omega_2 = -b\omega_1 + (1/4)ic\omega,$$
$$\omega_3 = (1/4)ic\omega_1 + (1/6)\overline{l}\omega,$$
$$\omega_4 = -i((l + 4ib_0)/12)\omega_1 + i((\overline{l} - 4i\overline{b}_0)/12)\overline{\omega}_1 + [(11/48)c^2 + (1/6)(b\overline{b}c + b\overline{l} + \overline{b}l - g)]\omega.$$

Тогда

$$\Omega = \lambda\overline{\lambda}\omega,$$
$$\Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega),$$
$$\Omega_2 = \lambda^{-1}d\lambda + \omega_2 - 2i\overline{\mu}\omega_1 - i\mu\overline{\omega}_1 + (\rho - (3/2)i\mu\overline{\mu})\omega,$$
$$\Omega_3 = \overline{\lambda}^{-1}\left(d\mu + \omega_3 + \mu\overline{\omega}_2 + (\rho + (1/2)i\mu\overline{\mu})\omega_1 + i\mu^2\overline{\omega}_1 + \mu(\rho + (i/2)\mu\overline{\mu})\omega\right),$$
$$\Omega_4 = (\lambda\overline{\lambda})^{-1}(d\rho + (i/2)(\mu d\overline{\mu} - \overline{\mu}d\mu) + \omega_4 - i\overline{\mu}\omega_3 + (\rho + (i/2)\mu\overline{\mu})\omega_2 + (\rho - (i/2)\mu\overline{\mu})\overline{\omega}_2$$
$$-i\overline{\mu}(\rho + (i/2)i\mu\overline{\mu})\omega_1 + i\mu(\rho - (1/2)i\mu\overline{\mu})\overline{\omega}_1 + (\rho^2 + (1/4)\mu^2\overline{\mu}^2)\omega).$$

Наконец, если положить (наши обозначения несколько отличаются от обозначений Картана) $s = (1/6)(\overline{l}_{\overline{1}} - 2\overline{b}\overline{l})$, то $R = s/\lambda\overline{\lambda}^3$.

Инварианты Картана. Как было показано Картаном, $s = 0$ на Γ в том и только том случае, если Γ локально сферическое, т.е. для любого p из Γ существует окрестность U точки p в $\mathbb{C}^2$, такая что $\Gamma \cap U$ биголоморфно эквивалентно открытому подмножеству единичной вещественной сферы S^3 в $\mathbb{C}^2$. В несферическом случае, т.е. если $s \neq 0$ тождественно на Γ, то проблема локальной биголоморфной эквивалентности допускает дальнейшую редукцию. В этом случае координаты на слое λ, μ, ρ можно представить (в окрестности точки, в которой s отлично от 0) как функции локальных координат на Γ, т.е. на самом деле можно предполагать, что формы Картана Ω_j определены сразу на Γ и расслоение X не нужно. Картаном доказано, что в этом случае существуют комплексные функции α, θ, η и вещественные функции β, ζ на Γ, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\Omega_2 = -\overline{\Omega_2} = \alpha\Omega_1 - \overline{\alpha}\overline{\Omega_1} + i\beta\Omega,$$
$$\Omega_3 = i\gamma\Omega_1 + \theta\overline{\Omega_1} + \eta\Omega,$$
$$\overline{\Omega_3} = \overline{\theta}\Omega_1 - i\gamma\overline{\Omega_1} + \overline{\eta}\Omega,$$
$$\Omega_4 = (-1/2)i\overline{\eta}\Omega_1 + (1/2)i\eta\overline{\Omega_1} + \zeta\Omega.$$

Локальная биголоморфная эквивалентность двух вещественно-аналитических строго псевдовыпуклых *несферических* гиперповерхностей Γ и Γ' эквивалентна существованию CR-отображения $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$, стабилизирующего формы $\Omega, \Omega_1, \overline{\Omega_1}$ и инварианты $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \eta, \zeta$. Более точно, f удовлетворяет либо условиям

$$\begin{aligned}
&f^*(\Omega') = \Omega,\ f^*(\Omega_1') = \Omega_1,\ f^*(\overline{\Omega_1'}) = \overline{\Omega_1};\\
&\alpha' \circ f = \alpha,\ \beta' \circ f = \beta,\ \gamma' \circ f = \gamma,\ \theta' \circ f = \theta,\ \eta' \circ f = \eta,\ \zeta' \circ f = \zeta,
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
&f^*(\Omega') = \Omega,\ f^*(\Omega_1') = -\Omega_1,\ f^*(\overline{\Omega_1'}) = -\overline{\Omega_1};\\
&\alpha' \circ f = -\alpha,\ \beta' \circ f = \beta,\ \gamma' \circ f = \gamma,\ \theta' \circ f = \theta,\ \eta' \circ f = -\eta,\ \zeta' \circ f = \zeta,
\end{aligned}$$

где штрихом обозначены инварианты, связанные с Γ'. Подчеркнем, что эти уравнения выполняются непосредственно на Γ, и не рассматривается поднятие f на расслоение Картана X.

Как отмечалось в замечаниях к главе II, конструкция Картана имеет много важных следствий. Таким образом, если группа (локальных) биголоморфизмов Γ имеет размерность, большую трех, то, на самом деле, ее размерность равна 8 и Γ сферично. В несферическом случае Картан классифицировал все гиперповерхности с 3-мерными группами автоморфизмов. В частности, он показал, что размерность группы биголоморфизмов Γ не меньше трех в том и только том случае, если все инварианты $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \eta, \zeta$ постоянны. Это будет существенно использовано в дальнейшем. Таким образом, наша стратегия состоит в следующем; сначала вычисляются инварианты Картана для алгебраических гиперповерхностей и затем рассматривается 2-мерный (наиболее жесткий) случай, после чего — трехмерный (на основе классификации Картана) и, наконец, — сферический случай.

15. Формы Картана для алгебраических гиперповерхностей

В этом параграфе предполагается, что вещественная гиперповерхность Γ в $\mathbb{C}^2$ определяется уравнением $r(z,w) = 0$, где $r(z,w) = \operatorname{Im} w + P(z)$ и $P(z)$ — ненулевой субгармонический многочлен без чисто гармонических членов. Вычислим формы Картана и инварианты для Γ.

Во-первых,

$$\omega = (1/2P_{z\overline{z}})(-du - iP_z dz + iP_z d\overline{z}),$$

$$\omega_1 = dz.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&b = P_{zz\overline{z}}/P_{z\overline{z}},\\
&c = b_{\overline{z}} = (P_{zz\overline{z}\overline{z}}P_{z\overline{z}} - P_{z\overline{z}\overline{z}}P_{zz\overline{z}})/(P_{z\overline{z}})^2,\\
&l = c_1 - bc,\\
&s = (1/6)(\bar{l}_{\overline{1}} - bc).
\end{aligned}$$

Напомним,что Γ называется *сферической* вблизи точки $p = (p_1, p_2)$ в Γ, если существует окрестность U точки p в $\mathbb{C}^2$ такая, что пересечение $\Gamma \cap U$ биголоморфно эквивалентно открытому подмножеству вещественной единичной сферы в $\mathbb{C}^2$. Заметим, что в этом случае биголоморфизм необходимо алгебраичен по теореме Вебстера [136], подробно рассмотренной в главе I; поэтому Γ локально биголоморфна единичной сфере в окрестности всякой точки строй псевдовыпуклости Γ минус пересечение Γ с комплексной алгебраической кривой (множеством ветвления). Кроме того, в нашем случае инвариант Картана s зависит только от z и является рациональной функцией $z, \overline{z}$ с особенностями, содержащимися в подмножестве $\mathbb{C}$, на котором лапласиан P обращается в нуль. Следовательно, если s обращается в нуль в окрестности точки p на Γ, т.е. в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$, то она обращается в нуль тождественно на $\mathbb{C}$. Это означает, что если Γ сферично в окрестности p, то оно сферично в окрестности любой точки строй псевдовыпуклости. Поэтому в дальнейшем просто говорим, что Γ сферично. Заметим, что если Γ не сферично в окрестности точки p, то оно не сферично в окрестности *любой* точки строй псевдовыпуклости Γ. Такая гиперповерхность называется несферической.

Предположим теперь, что Γ несферична и вычислим фундаментальные формы Картана. Так как Γ несферично, то инвариант s не обращается в нуль на открытых подмножествах Γ; поэтому, проведем вычисления на открытом плотном подмножестве гиперповерхности Γ, на котором $s \neq 0$.

Имеем $\Omega = |\lambda|^2\omega$. В несферическом случае, следуя Картану, имеем $\lambda = \varepsilon(\overline{s}/|s|^{1/2})^{1/2}$, где $\varepsilon = 1$ или -1. Тогда $\Omega_1 = \lambda(\omega_1 + \mu\omega)$, где $\mu = (i/4)\left(\frac{s_{\overline{z}}}{s} + \frac{\overline{s}_{\overline{z}}}{\overline{s}}\right) - i\overline{b}$.

Так как $\lambda\overline{\lambda}^3 = s$, то $\lambda^4\overline{\lambda}^4 = s\overline{s}$. Применяя $\partial/\partial\overline{z}$, получаем $4\left(\frac{\lambda_{\overline{z}}}{\lambda} + \frac{\overline{\lambda}_{\overline{z}}}{\overline{z}}\right) = \frac{s_{\overline{z}}}{s} + \frac{\overline{s}_{\overline{z}}}{\overline{z}}$. Следовательно, $\mu = i\left(\frac{\lambda_{\overline{z}}}{\lambda} + \frac{\overline{\lambda}_{\overline{z}}}{\overline{\lambda}}\right) - i\overline{b}$. Поскольку в нашем случае s зависит только от z , то получаем $\rho = (-1/8)\left(\frac{s_0}{s} + \frac{\overline{s}_0}{\overline{s}}\right) = 0$. Значит, $\Omega_2 = (d\lambda)/\lambda + \omega_2 - 2i\overline{\mu}\omega_1 - i\mu\overline{\omega_1} - (3/2)i\mu\overline{\mu}\omega$, где $\omega_2 = -b\omega_1 + (1/4)ic\omega$. Так как $c = b_{\overline{z}}$, то

$$\Omega_2 = \left(\frac{\lambda_z}{\lambda} - b - 2i\overline{\mu}\right)\omega_1 + \left(\frac{\lambda_{\overline{z}}}{\lambda} - i\mu\right)\overline{\omega_1} + ((i/4)b_{\overline{z}} - (3/2)i\mu\overline{\mu})\omega.$$

Не будем вычислять остальные формы; отметим только, что все коэффициенты — функции от z. Следовательно, инварианты Картана $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \eta, \zeta$ —- функции от z. Таким образом, доказано

Предложение 15.1. *Пусть Γ несферично. Тогда инварианты Картана $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \eta, \zeta$ — функции только от z.*

16. Голоморфные отображения алгебраических поверхностей

Описывается структура некоторых голоморфных отображений модельных алгебраических областей с несферическими границами в предположении, что каждое такое отображение является биголоморфизмом в окрестности строго псевдовыпуклой граничной точки.

Начнем со следующего технического утверждения.

Лемма 16.1. *Пусть $P(z)$ — ненулевой вещественный многочлен без чисто гармонических членов. Тогда $P_z + P_{\overline{z}}$ не обращается тождественно в нуль на любом открытом подмножестве $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Допустим от противного, что $P_z + P_{\overline{z}}$ обращается в нуль на открытом подмножестве $\mathbb{C}$; тогда он обращается в нуль на $\mathbb{C}$. Многочлен P можно записать в виде $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\overline{z}^{n-k}$, где a_k — многочлены по z. Так как P не содержит чисто гармонических членов, то многочлены a_k не содержат постоянных членов. Условие $P_z + P_{\overline{z}} = 0$ эквивалентно уравнениям $a_k' + (n-k+1)a_{k-1} = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $a_0' = 0$. Пусть j — наименьшее целое, для которого a_j не обращается тождественно в нуль. Тогда a_j — ненулевая постоянная и P содержит член $a_j\overline{z}^{n-j}$. Мы получили противоречие.

Докажем теперь основной результат этого параграфа.

Предложение 16.2. *Пусть $D_1 = \{\operatorname{Im} w + P(z) < 0\}$ и $D_2 = \{\operatorname{Im} w + Q(z) < 0\}$ — области в $\mathbb{C}^2$, P и Q — субгармонические многочлены, не равные тождественно нулю и не имеющие чисто гармонических членов. Предположим, что границы $\Gamma_j = \partial D_j$ не сферичны. Пусть $p = (p_1, p_2)$ — точка строгой псевдовыпуклости Γ_1 и $f : D_1 \longrightarrow D_2$ — голоморфное отображение вида*

$$f : (z, w) \mapsto (f_1, f_2) = (bw + B(z), aw + A(z)),$$

где a, b вещественны, а функции $A(z), B(z)$ голоморфны на $\mathbb{C}$. Предположим, что f — локальный биголоморфизм между (открытыми подмножествами) Γ_1 и Γ_2 вблизи точки p. Тогда

(i) *$a \neq 0$ и $b = 0$;*

(ii) *$A(z)$ и $B(z)$ — многочлены.*

Заметим, что так как f — локальный биголоморфизм, то из несферичности Γ_1 (соответственно, Γ_2) следует несферичность Γ_2 (соответственно, Γ_1). Поэтому достаточно считать, что, по крайней мере, одна из гиперповерхностей Γ_j не сферична.

Доказательство. Начнем с (i). Поскольку образ $f(\Gamma_1)$ содержится в Γ_2 вблизи p, то

$$\operatorname{Im}(au - iaP(z)) + a \operatorname{Im} A(z)) = -Q(b(u - iP(z)) + B(z))$$

тождественно при (z, u), лежащем в открытом подмножестве в V пространства $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Так как a вещественно, то левая часть не зависит от u, так что производная по u обращается тождественно в нуль. Так как b также вещественно, то получаем

$$b(Q_z(b(u - iP(z)) + B(z)) + Q_{\overline{z}}(b(u - iP(z)) + B(z))) \equiv 0$$

на V.

Поскольку $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ — локальный диффеоморфизм, то отображение

$$(z, u) \mapsto b(u - iP(z)) + B(z)$$

имеет максимальный ранг на V и его образ W — открытое подмножество $\mathbb{C}$. Так как по предыдущей лемме $Q_z + Q_{\overline{z}}$ тождественно не обращается в нуль на W, то выводим, что $b = 0$. Поскольку f — локальный биголоморфизм, то $a \neq 0$, а значит, получаем утверждение (i).

Доказательство (ii) основано на теории Картана. Обозначим через $\Omega_i^{(j)}$ фундаментальные формы Картана, ассоциированные с Γ_j, $j = 1, 2$ На самом деле, будут использованы не все эти формы (поскольку отображение представлено в подходящей форме). Имеем

$$\Omega^{(1)} = \frac{\lambda^{(1)}(z)\overline{\lambda}^{(1)}(z)}{2P_{z\overline{z}}} \left(-du - iP_z dz + iP_{\overline{z}} d\overline{z}\right)$$

и, аналогично,

$$\Omega^{(2)} = \frac{\lambda^{(2)}(z)\overline{\lambda}^{(2)}(z)}{2Q_{z\overline{z}}} \left(-du - iQ_z dz + iQ_{\overline{z}} d\overline{z}\right).$$

Так как $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ — локальный биголоморфизм, то $f^*(\Omega^{(2)}) = \Omega^{(1)}$ в окрестности точки p. Имеем

$$f^*(\Omega^{(2)}) = \frac{\lambda^{(2)}(B(z))\overline{\lambda}^{(2)}(B(z))}{2Q_{z\overline{z}}(B(z))}(-a du - (1/2)A'(z)dz -$$
$$-(1/2)\overline{A'(z)}d\overline{z} - i(Q_z)(B(z))B'(z)dz + i(Q_{\overline{z}})(B(z))\overline{B'(z)}d\overline{z}).$$

Сравним сначала коэффициенты вблизи du и получим следующее уравнение

$$a\frac{\lambda^{(2)}(B(z))\overline{\lambda}^{(2)}(B(z))}{Q_{z\overline{z}}(B(z))} = \frac{\lambda^{(1)}\overline{\lambda}^{(1)}(z)}{P_{z\overline{z}}(z)}. \tag{16.1}$$

Далее рассмотрение коэффициентов вблизи dz дает второе основное уравнение

$$\frac{\lambda^{(2)}(B(z))\overline{\lambda}^{(2)}(B(z))}{Q_{z\overline{z}}(B(z))} \big(-(1/2)A'(z) - iQ(B(z))B'(z)\big) = -i\frac{\lambda^{(1)}(z)\overline{\lambda}^{(1)}(z)}{P_{z\overline{z}}(z)} P_z. \tag{16.2}$$

Стоит отметить, что в несферическом случае функции $\lambda^{(j)}(z)$ тождественно не обращаются в нуль на любом открытом подмножестве $\mathbb{C}$. Поэтому смещая, если необходимо, точку p, можно считать, что они отличны от нуля в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$. Тогда из (16.1) и (16.2) следует, что

$$(1/2)A'(z) + iQ_z(B(z))B'(z) = iaP_z. \tag{16.3}$$

Применяя $\partial/\partial\overline{z}$, получаем

$$Q_{z\overline{z}}(B(z))|B'(z)|^2 = aP_{z\overline{z}}(z). \tag{16.4}$$

Заметим, что в силу аналитичности, последнее уравнение выполняется всюду в $\mathbb{C}$; его можно переписать в виде

$$\left(\sum_{1 \leqslant s,t \leqslant 2m-2} a_{s,t} B^s(z)\overline{B}^t(z)\right) B'(z)\overline{B}'(z) = a \sum_{1 \leqslant s,t \leqslant 2k-2} b_{s,t} z^s \overline{z}^t.$$

Так как диагональ $\{\zeta = \overline{z}\}$ есть множество единственности для голоморфной функции в $\mathbb{C}^2$, то можно перейти к поляризации; получаем

$$\left(\sum (a_{s,t}/(s+1))(\frac{d}{dz}B^{s+1}(z))\overline{B}^t(\overline{\zeta})\right)\overline{B}'(\overline{\zeta}) = a\sum a_{s,t}z^s\zeta^t.$$

Поскольку в правой части имеем многочлен от z, ζ, то беря производную $(2k-1)$-го порядка по z, получаем (учитывая, что $\overline{B}'(\overline{\zeta})$ тождественно не обращается в нуль), что

$$\left(\sum (a_{s,t}/(s+1))(\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}B^{s+1}(z))\overline{B}^t(\overline{\zeta})\right) = 0$$

тождественно по z, ζ. Последнее выражение можно трактовать как многочлен по $\omega = \overline{B}(\overline{\zeta})$; поскольку B не обращается в нуль тождественно, то получаем, что все коэффициенты тождественно равны нулю по z. Напомним, что Q — субгармонический многочлен степени $2m$, не имеющий чисто гармонических членов; значит, $\overline{z}$ — вещественный многочлен степени $2m-2$. Теперь рассмотрение членов высшего порядка $2m-2$ показывает, что

$$\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}B^{s+1}(z) = 0$$

на $\mathbb{C}$ при некоторых s и t с $s+t = 2m-2$. Это означает, что B^{s+1} — многочлен; но B голоморфно в $\mathbb{C}$, а потому оно также многочлен (здесь используется предположение о том, что f глобально определено и голоморфно на D_1). Теперь интегрирование (16.3) дает, что $A(z)$ — многочлен. Это завершает доказательство.

17. Голоморфные касательные поля

Пусть D — область в $\mathbb{C}^2$ вида $D = \{\operatorname{Im} w + P(z) < 0\}$, где P — ненулевой *однородный* степени $2m$, $m > 1$, многочлен без гармонических членов. Предположим также, что $\Gamma = \partial D$ *не сферична.*

Напомним кратко некоторые факты, касающиеся инфинитезимальных автоморфизмов Γ. Пусть p — строго псевдовыпуклая точка Γ, а $V_p(\Gamma)$ — пространство инфинитезимальных CR-автоморфизмов Γ вблизи p. Гладкое векторное поле X на Γ называется инфинитезимальным CR-диффеоморфизмом Γ, если оно порождает однопараметрическую группу локальных CR диффеоморфизмов Γ вблизи p. Важный факт состоит в том, что гладкое векторное поле X на Γ есть инфинитезимальный CR-автоморфизм Γ в том и только том случае, если $X = \operatorname{Re} Z$, где Z — голоморфное векторное поле в окрестности точки p в $\mathbb{C}^2$ (см., например, [2, 123]). Кроме того, поскольку Γ — множество единственности для голоморфных функций, то легко видеть, что это голоморфное векторное поле единственно. Таким образом, если обозначить через $HV_p(\Gamma)$ *вещественное* векторное пространство голоморфных векторных полей в окрестности точки p, имеющих вещественные части, касательные к Γ, то пространства $HV_p(\Gamma)$ и $V_p(\Gamma)$ изоморфны. В дальнейшем элементы $HV_p(\Gamma)$ называются голоморфными касательными векторными полями на Γ (хотя, на самом деле, только вещественные части таких полей касательны к Γ). Следующее очевидное наблюдение оправдывает эту терминологию. Пусть Γ_1 и Γ_2 — вещественные гиперповерхности, p и q — точки Γ_1 и Γ_2, соответственно, а f — локальное голоморфное отображение, определенное в полной окрестности точки p и переводящее Γ_1 в Γ_2 с $f(p) = q$. Тогда для любого голоморфного поля Z в $HV_p(\Gamma_1)$ его прямой образ $f^*(Z)$ лежит в $HV_q(\Gamma_2)$, т.е. касательное отображение f^* реализует изоморфизм между пространствами голоморфных касательных полей. Отметим также, что пространство $HV_p(\Gamma)$ голоморфных касательных полей замкнуто относительно скобки Ли, т.е. является алгеброй Ли.

В рассматриваемом случае алгебраических гиперповерхностей структура голоморфных касательных полей проста и можно явно найти базис пространства голоморфных касательных полей. Так как это пространство устойчиво относительно действия локальных биголоморфизмов гиперповерхностей, то это дает систему дифференциальных уравнений с частными производными для компонент такого биголоморфизма. Интегрирование этой системы показывает, что на самом деле любой биголоморфизм имеет специальный вид, который позволяет применять результаты предыдущего параграфа.

Поскольку P — однородный многочлен, то группа автоморфизмов D содержит переносы в направлении u и изотропные дилатации. В частности, для любой строго псевдовыпуклой точки $p = (p_1, p_2)$ гиперповерхности Γ имеем $\dim V_p(\Gamma) \geqslant 2$. С другой стороны, из теории Картана [50] следует, что для несферической Γ имеем $\dim V_p(\Gamma) \leqslant 3$ (в сферическом случае размерность равна 8).

Предложение 17.1. *Если* $\dim HV_p(\Gamma) = 2$, *то* $HV_p(\Gamma)$ *порождается векторными полями*

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial w}, Z_2 = z\frac{\partial}{\partial z} + 2mw\frac{\partial}{\partial w}.$$

Если $\dim HV_p(\Gamma) = 3$, *то* Γ $\mathbb{C}$*-линейно эквивалентна*

$$\hat{\Gamma} = \{\operatorname{Im} w + (z+\overline{z})^{2m} - z^{2m} - \overline{z}^{2m} = 0\},$$

и $HV_p(\hat{\Gamma})$ *порождается векторными полями* Z_1, Z_2, Z_3 *с*

$$Z_3 = -4mz^{2m-1}\frac{\partial}{\partial w} + i\frac{\partial}{\partial z}.$$

Подчеркнем снова, что $HV_p(\Gamma)$ — вещественное векторное пространство и его размерность совпадает с $\dim V_p(\Gamma)$. Это предложение может быть выведено из результатов [2, 123]. Для удобства читателя проведем прямое доказательство.

Доказательство. Очевидно, что Z_1 и Z_2 — голоморфные касательные поля к Γ, которые независимы; это дает первое утверждение.

Поэтому считаем, что $\dim HV_p(\Gamma) = 3$. Пусть (Z_1, Z_2, Z_3) — базис $HV_p(\Gamma)$, где $Z_3 = \varphi\frac{\partial}{\partial w} + \psi\frac{\partial}{\partial z}$ и коэффициенты φ, ψ голоморфны вблизи окрестности точки p. Тогда существуют вещественные a, b, c такие, что $[Z_1, Z_2] = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$. Это дает систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial w} &= a + 2mwb + c\varphi, \\ \frac{\partial\psi}{\partial w} &= bz + c\psi. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Докажем сначала, что $c = 0$. Предположим от противного, что $c \neq 0$. Элементарное интегрирование первой системы дает

$$Z_3 = e^{cw}\left(\alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} + \beta(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) - c^{-2}(2mb + ac)Z_1 - (b/c)Z_2$$

с голоморфными функциями α, β в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$. Следовательно, поле $L = e^{cw}(\alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} + \beta(z)\frac{\partial}{\partial z})$ принадлежит $HV_p(\Gamma)$ и существуют вещественные λ, ν, μ такие, что $[Z_2, L] = \lambda Z_1 + \nu Z_2 + \mu Z_3$, что приводит к системе

$$(2\alpha mcw + z\alpha' - 2\alpha m)e^{cw} = \lambda + 2m\mu w + \nu\alpha(z)e^{cw},$$
$$(2mwc\beta + z\beta' - \beta)e^{cw} = \mu z + \nu\beta(z)e^{cw}.$$

Так как $c \neq 0$, то получаем, что $\lambda = \mu = 0$ и тогда приравнивание коэффициентов при w дает $\alpha = \beta \equiv 0$. Это приводит к противоречию, поскольку поля Z_1, Z_2, Z_3 независимы. Таким образом, $c = 0$.

Теперь интегрирование системы (17.1) дает $\varphi = aw + mbw^2 + \alpha(z)$ и $\psi = bzw + \beta(z)$, где α, β — голоморфные функции в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$. Заменяя Z_3 на $Z_3 - (a/2m)Z_2$, можно считать, что $a = 0$.

Как и выше, существуют вещественные числа λ, μ, ν, такие что $[Z_2, Z_3] = \lambda Z_1 + \mu Z_2 + \nu Z_3$, что эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &2m^2bw^2 + z\alpha' - 2m\alpha = \lambda + 2\mu mw + \nu mbw^2 + \nu\alpha, \\ &2mbwz + z\beta' - \beta = \mu z + \nu bzw + \nu\beta. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Покажем теперь, что $b = 0$. Предположим от противного, что $b \neq 0$. Сравнивая коэффициенты при w, получим, что $\nu = 2m$ и $\mu = 0$. Интегрирование полученной системы дает $\alpha(z) = -(\lambda/4m) +$

$C_1 z^{4m}$ и $\beta = C_2 z^{2m+1}$. Векторное поле $Z_3' = Z_3 + (\lambda/4m)Z_1$ — голоморфное касательное поле к Γ; это означает, что $(Z_3' + \overline{Z_3'})(r) = 0$ на Γ, где $r(z,w) = (w - \overline{w})/2i + P(z)$ — определяющая функция Γ. Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$b(\operatorname{Re} w)(-2mP + zP_z + \overline{z}P_{\overline{z}}) + [C_1 z^{4m} - \overline{C_1}\overline{z}^{4m}] + R(z) = 0,$$

где

$$R(z) = -ib(zP_z - \overline{z}P_{\overline{z}})P + C_2 z^{2m+1}P_z + \overline{C}_2\overline{z}^{2m+1}P_{\overline{z}}$$

не содержит чисто гармонических членов. Поэтому $C_1 = 0$; отметим также, что $-2mP + zP_z + \overline{z}P_{\overline{z}}$ обращается тождественно в нуль, поскольку многочлен P однороден степени $2m$. Таким образом, получаем уравнение $R(z) = 0$. Если записать многочлен P в виде $P = \sum_{k=1}^{2m-1} a_k(z)\overline{z}^k$ и затем рассмотреть R как многочлен по $\overline{z}$ с коэффициентами — многочленами по z, то получим $C_2 = 0$. Так как многочлен P однороден степени $2m$, то из уравнения $zP_z - \overline{z}P_{\overline{z}} = 0$ следует, что $P = c|z|^{2m}$ с вещественным c. Это означает, что Γ сферично. Мы получили противоречие. Таким образом, $b = 0$ и $Z_3 = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial w} + \beta(z)\frac{\partial}{\partial z}$.

Сравнивая коэффициенты вблизи w в системе (17.2), получаем $\mu = 0$. Тогда интегрирование дает $\beta(z) = Bz^{\nu+1}$ и $\alpha(z) = Az^{2m+\nu} - (\lambda/(2m+\nu))$ при $\nu \neq -2m$ и $\alpha(z) = \lambda \log z + C$ при $\nu = -2m$, где A, B, C — комплексные постоянные. Конечно, рассматриваются голоморфные ветви в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$ (напомним, что ν вещественно). Очевидно, что в логарифмическом случае поле $\operatorname{Re} Z_3$ не касательно к Γ. Поэтому можно считать, что $\nu \neq -2m$ и $\lambda = 0$ (Z_3 заменено на $Z_3 + (\lambda/(2m+\nu))Z_1$).

Условие касания означает, что

$$(Az^{2m+\nu} - \overline{A}\overline{z}^{2m+\nu})/(2i) + Bz^{\nu+1}P_z + \overline{B}\overline{z}^{\nu+1}P_{\overline{z}}(z) = 0 \tag{17.3}$$

в окрестности точки p_1.

Утверждается, что $\nu = -1$. Для доказательства этого перейдем к поляризации уравнения (17.3):

$$(Az^{2m+\nu} - \overline{A}\zeta^{2m+\nu}) + Q(z,\zeta) = 0 \tag{17.4}$$

с

$$Q = Bz^{\nu+1}P_z(z,\zeta) + \overline{B}\zeta^{\nu+1}P_{\overline{z}}(z,\zeta) = 0$$

при (z,ζ) в открытом подмножестве в $\mathbb{C}^2$ (всюду $\overline{z}$ заменяется на ζ);

Предположим, что $\nu \neq -1$. Так как P не содержит чисто гармонических членов, то не существует чистых членов z и ζ в Q, а потому $A = 0$ и $Q(z,\zeta) = 0$. Тогда ν необходимо является целым (поскольку первый член в Q — многочлен по ζ). Но из равенства $Q = 0$ следует, что $Bz^{\nu+1}P_z(z,\zeta)$ и $\overline{B}\zeta^{\nu+1}P_{\overline{z}}(z,\zeta)$ содержат некоторые степени ζ; это означает, что $\nu = 0$. Получаем уравнение $BzP_z + \overline{B}\overline{z}P_{\overline{z}} = 0$ в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$.

Так как P однороден, то элементарное вычисление (аналогичное доказательству леммы 16.1) показывает, что $P = C|z|^{2m}$, т.е. Γ сферично. Мы получили противоречие. Таким образом, $\nu = -1$ и $Z_3 = Az^{2m-1}\frac{\partial}{\partial w} + B\frac{\partial}{\partial z}$.

Пусть теперь $P = \sum_{k=1}^{2m-1} a_k z^k \overline{z}^{2m-k}$. Уравнение (17.3) приводит к следующим ограничениям на коэффициенты: $B(k+1)a_{k+1} + \overline{B}(2m-k)a_k = 0$ при $k = 1, \ldots, 2m-2$ и $A = 2i\overline{B}a_{2m-1}$. Отсюда следует, что $a_k = (1/2m)e^{i(k-1)\theta}C_{2m}^k a_1$, где C_{2m}^k — биномиальные коэффициенты и θ вещественно. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, многочлен P имеет вид $(e^{i\theta/2}z + e^{-i\theta/2}\overline{z})^{2m} - e^{im\theta}z^{2m} - e^{-im\theta}\overline{z}^{2m}$ и это дает нужное утверждение.

Покажем теперь как завершить изучение голоморфных отображений алгебраических областей. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть Γ_j — то же, что и в предложении 16.2, но *дополнительно предположим, что многочлен Q однороден степени $2m$.*

Лемма 17.2. *Пусть $g = (g_1, g_2) : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ — локальный биголоморфизм вблизи точки строй псевдовыпуклости $p = (p_1, p_2) \in \Gamma_1$. Тогда $g_1 = B(z)$ и $g_2 = aw + A(z)$, где A и B — голоморфные функции в окрестности точки p_1.*

Доказательство. Нужно рассмотреть два случая.

Случай 1. Предположим, что $\dim V_{f(p)}(\Gamma_2) = 2$. Так как Z_1 принадлежит $V_p(\Gamma_1)$, то

$$g^*(Z_1) = aZ_1 + bZ_2$$

для некоторых вещественных a, b. Это дает систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial g_1}{\partial w}(z,w) = bz, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w}(z,w) = a + 2bmw \tag{17.5}$$

для (z,w) в окрестности точки p в $\mathbb{C}^2$ (поскольку Γ_1 — множество единственности). Интегрирование (17.5) дает

$$g_1(z,w) = bzw + B(z),$$

$$g_2(z,w) = aw + bmw^2 + A(z),$$

где функции A, B голоморфны в окрестности точки p_1. Рассмотрим теперь инварианты Картана $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}, \gamma^{(j)}, \theta^{(j)}, \eta^{(j)}, \zeta^{(j)}$, ассоциированные с Γ_j. В рассматриваемом случае они — (вещественно–аналитические) функции от z. Кроме того, так как $\dim V_{f(p)}(\Gamma_2) = 2$, в силу теории Картана, получаем, что, по крайней мере, один из этих инвариантов, ассоциированных с Γ_2, не постоянен (например, $\alpha^{(2)}(z)$). Тогда

$$\alpha^{(2)}(bzw + B(z)) = \alpha^{(1)}(z)$$

в окрестности точки p_1 в $\mathbb{C}$. Фиксируя $z_0 \neq 0$, получаем, что $\alpha^{(2)}(bz_0w + B(z_0)) \equiv \mathrm{const}$; следовательно, $b = 0$ и

$$g_1 = B(z), \ g_2 = aw + A(z)$$

с вещественным a; здесь A и B — голоморфные функции в окрестности точки p_1.

Случай 2. Предположим теперь, что $\dim V_{f(p)}(\Gamma_2) = 3$. В этом случае все инварианты Картана постоянны. Но ввиду леммы, можно считать, что

$$Q(z) = (z + \overline{z})^{2m} - z^{2m} - \overline{z}^{2m}.$$

Так как $f^*(Z_1) = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$ для некоторых вещественных a, b, c, то имеем систему

$$\frac{\partial g_1}{\partial w} = ic + bz,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial w} = a + 2bmw - 4mcz^{2m-1}.$$

Интегрирование этой системы дает

$$g_1(z,w) = (ic + bz)w + B(z),$$

$$g_2(z,w) = aw - 4cmz^{2m-1}w + bmw^2 + A(z).$$

Значит, имеем на открытом подмножестве $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Im}\left[a(u - iP(z)) + bm(u - iP(z))^2 - 4mcz^{2m-1}(u - iP(z)) + B(z))\right] = \\
&= \left[(ic + bz)(u - iP(z)) + B(z) - (-ic + b\overline{z})(u + iP(z)) + \overline{B(z)}\right]^{2m} - \\
&- \left[(ic + bz)(u - iP(z)) + B(z)\right]^{2m} - \left[(-ic + b\overline{z})(u + iP(z)) + \overline{B(z)}\right]^{2m}.
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты вблизи u^{2m}, получаем

$$b^{2m}(z + \overline{z})^{2m} - (ic + bz)^{2m} - (-ic + b\overline{z})^{2m} = 0$$

на открытом подмножестве в $\mathbb{C}$, а значит, и на $\mathbb{C}$. Следовательно, $c = b = 0$ и, как и выше,

$$g_1 = B(z), \ g_2 = aw + A(z),$$

где функции A и B голоморфны в окрестности p_1.

Наконец, получаем основной результат этого параграфа.

Предложение 17.3. *Пусть* $D_1 = \{\operatorname{Im} w + P(z) < 0\}$, $D_2 = \{\operatorname{Im} w + Q(z) < 0\}$ *— области с несферическими границами,* P *и* Q *— ненулевые субгармонические многочлены без чисто гармонических членов. Пусть многочлен* P *однороден. Пусть также* $f : D_1 \longrightarrow D_2$ *— голоморфное отображение, продолжимое до локального биголоморфизма вблизи точки строй псевдовыпуклости* $p = (p_1, p_2)$ *на* ∂D_1. *Тогда* f *— многочлен.*

Доказательство. Пусть p — точка ∂D_1, в которой f локально биголоморфно. Тогда при $g = f^{-1}$, ввиду леммы 17.2,

$$g_1 = B(z),\ g_2 = aw + A(z).$$

Из теоремы о неявной функции следует, что

$$f_1 = \tilde{B}(z),\ f_2 = aw + \tilde{A}(z),$$

где $\tilde{A}, \tilde{B}$ голоморфны в окрестности p_1 в $\mathbb{C}$. Так как f голоморфна на D_1, то функции $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ голоморфны на $\mathbb{C}$. Следовательно, они — многочлены в силу результатов предыдущего параграфа.

18. Сферический случай

В этом параграфе характеризуются модельные полиномиальные области со сферическими границами. Рассматривается гиперповерхность Γ в $\mathbb{C}^2$. заданная уравнением $\{\operatorname{Im} w + P(z) = 0\}$, где P — тождественно не равный нулю субгармонический *однородный* степени $2m$ многочлен без чисто гармонических членов.

Предложение 18.1. *Предположим, что* Γ *сферична, тогда* $P(z) = a|z|^{2m}$ *с вещественным* a.

Доказательство. Положим $Q(z) = P_{z\overline{z}}$; имеем $b = Q_z/Q$. Так как Γ сферична, то $l_z = 2bl$ на открытом подмножестве D в $\mathbb{C}$. Это эквивалентно тому, что to $l_z Q - 2Q_z l = 0$ или $(l/Q_z^2)_z = 0$. Следовательно, существует функция f, голоморфная на D, такая что $l = Q^2\overline{f}$. Заметим, что Q — вещественный многочлен, а l — рациональная функция по $z, \overline{z}$. Поэтому f — рациональная функция от z. Но Q — однородный многочлен степени $2m-2$, а l — рациональная функция, однородная степени -3. Следовательно, $\overline{f}$ однородна степени $-4m+1$. Значит, $f(z) = \frac{\lambda}{z^{4m+1}}$, где λ — комплексно постоянная. Так как $l = c_z - (Q_z/Q)c$, то получаем $c_z Q - Q_z c = \overline{f}Q^3$ или $\left(\frac{c}{Q}\right)_z = Q\overline{f}$. но c/Q вещественно и потому $(Q\overline{f})_{\overline{z}}$ вещественно. Следовательно, $Q_{\overline{z}}\overline{f} + Q\overline{f'} = Q_z f + \overline{Q}f'$. Правая часть есть рациональная функция по $z, \overline{z}$, являющаяся многочленом по $\overline{z}$. Если λ отлично от 0, то левая часть необходимо содержит члены вида $\overline{z}^n$ с отрицательным n. Поэтому $\lambda = 0$. Значит, $l = 0$. Это означает, $b_{z\overline{z}} - (Q_z/Q)b_{\overline{z}} = 0$; отсюда следует, что $\left(\frac{b_{\overline{z}}}{Q}\right)_z = 0$. Так как $b_{\overline{z}}/Q$ вещественно, то оно необходимо постоянно. С другой стороны, оно есть однородная порядка $-2m$ рациональная функция; следовательно, она тождественно обращается в нуль. Таким образом, $b_{\overline{z}}$ тождественно обращается в нуль.

Итак, Q_z/Q — рациональная функция по $z, \overline{z}$, голоморфная на D; так как она также и однородна степени -1, получаем, что $Q_z/Q = a/z$ при $a \in \mathbb{C}$ на D. Следовательно, получаем уравнение $zQ_z = aQ$. Имеем $Q(z) = \sum_{k=0}^{m-1} q_k(\overline{z})z^k$, а потому

$$kq_k(\overline{z}) = aq_k(\overline{z}), k = 0, \ldots, m-1$$

при z из D. Следовательно, существует k_0 такое, что $a = k_0$ и q_k тождественно обращается в нуль при любом k, отличном от k_0. Это означает, что $Q(z) = q_{k_0}(\overline{z})z^{k_0}$. Так как Q — вещественный однородный многочлен порядка $2m-2$, то отсюда следует, что $Q(z) = a'|z|^{2m-2}$, а значит, $P(z) = a'|z|^{2m}$ с вещественным a'.

Заметим, что небольшая модификация этих рассуждений позволяет классифицировать гиперповерхности с необязательно однородным определяющим многочленом P.

19. Конструкция растяжения

Объясним, как наши первые результаты о голоморфных отображениях алгебраических областей связаны со свойствами конечности CR-отображений гладких гиперповерхностей. Эта редукция основана на специальной версии метода растяжения, детально развитого в [61, 64]. Поэтому напомним очень кратко эту конструкцию растяжения; все подробности содержатся в [61, 64].

Начиная с этого момента, предполагаем, что выполнены условия теоремы 13.7. Из [36] следует, что f допускает одностороннее голоморфное продолжение (на псевдовыпуклую сторону Γ_1); поскольку f не постоянно, то это продолжение отображает псевдовыпуклую сторону D_1 гиперповерхности Γ_1 в псевдовыпуклую сторону D_2 гиперповерхности Γ_2 (см, [38]). Поэтому, не нарушая общности, считаем, что $f : D_1 \to D_2$ — голоморфное отображение ограниченных областей D_j в $\mathbb{C}^2$, $\Gamma_j \subset \partial D_j$ — открытые части этих границ, f непрерывно на $D_1 \cup \Gamma_1$, а $f(\Gamma_1)$ содержится в Γ_2. Предположим также, что $0 \in \Gamma_1$ и $f(0) = 0$.

Будем использовать канонические координаты Кетлин–Форнаеса–Сибони [51, 84] вблизи точки конечного типа.

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^2$ с C^∞-гладкой границей вблизи точки $p \in \partial\Omega$ конечного типа $2k$. Тогда существует окрестность со следующими свойствами:

(a) существует локально биголоморфная замена координат такая, что в новых координатах

$$\Omega \cap U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | r(z) = \operatorname{Re} z_2 + \theta(z_1, \operatorname{Im} z_2) < 0\},$$

где $\theta \in C^\infty$ и обращается в нуль в начале координат с порядком по крайней мере 2;

(b) существует отображение $\Phi\ : \mathbb{C}^2 \times U \to \mathbb{C}^2$ класса C^∞ такое, что

(b1) $\Phi(\bullet, \xi)$ — многочлен и $\Phi(\xi, \xi) = 0$;

(b2) существуют окрестность V точки p и $V_\xi \ni \xi$ такие, что $V \subset V_\xi \subset U$, $\Phi(\bullet, \xi)$ — биголоморфизм из V_ξ на единичный шар $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^2$; отображение $(t, \xi) \mapsto \Phi(\bullet, \xi)^{-1}(0, t)$ — диффеоморфизм между $(-1, 1) \times (\partial\Omega \cap V)$ и V ;

(b3)

$$\begin{aligned} r \circ \Phi(\bullet, \xi)^{-1} - r(\xi) = \operatorname{Re} z_2 + \sum_{\ell=2}^{2k} P_\ell(z_1, \xi) + (\operatorname{Im} z_2) \sum_{\ell=1}^{k} Q_\ell(z_1, \xi) + \\ + \sigma_{2k+1}(z_1, \xi) + \sigma_2(\operatorname{Im} z_2, \xi) + (\operatorname{Im} z_2)\sigma_{k+1}(z_1, \xi) \end{aligned}$$

на $V \times \mathbb{B}$; здесь P_ℓ и Q_ℓ — однородные многочлены по z_1 и $\bar{z_1}$ степени ℓ без чисто гармонических членов; $\sigma_i(v, \xi)$ обращается в нуль с порядком i в v ;

(c) $\inf_\xi \sup_\ell \|P_\ell(\bullet, \xi)\| > 0$, где $\|\|$ — норма однородных многочленов.

Следуя Кетлин, для $\varepsilon > 0$ положим $\tau(\xi, \varepsilon) = \min_{\ell=2,\cdots,2k} \left(\frac{\varepsilon}{\|P_\ell(\bullet,\xi)\|}\right)^{1/\ell}$.

Рассматриваемая конструкция растяжения вполне аналогична [61, 64]. Пусть $2m$ — тип гиперповерхности Γ_1 в начале координат; тогда после локальной биголоморфной замены координат имеем $\Gamma_1 = \{r_1(z) = 0\}$, где

$$r_1(z) = \operatorname{Re} z_2 + P_{1,2m}(z_1) + (\operatorname{Im} z_2) \sum_1^m Q_{1,\ell}(z_1) + \sigma_{2m+1}(z_1) + \sigma_2(\operatorname{Im} z_2) + (\operatorname{Im} z_2)\sigma_{m+1}(z_1),$$

$P_{1,2m}$ — однородный субгармонический многочлен степени $2m$, не содержащий чисто гармонических членов. Предполагается также, что Γ_2 имеет тип $2k$ вблизи начала координат.

Рассмотрим последовательность $(p^\nu)_\nu$ в D_1 вида $p^\nu = (0, -\delta_\nu)$, где $\delta_\nu > 0$, $\delta_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, и положим $q^\nu = f(p^\nu)$. Обозначим через ω^ν точку Γ_2, ближайшую к q^ν; положим также $\gamma_\nu = \operatorname{dist}(q^\nu, \Gamma_2) = |q^\nu - \omega^\nu|$. Пусть g^ν — полиномиальный биголоморфизм $\Phi(\bullet, \omega^\nu)$, соответствующий Γ_2. Не нарушая общности, можно считать, что $g^\nu \to id$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^2$ при $\nu \to \infty$.

Рассмотрим голоморфные отображения $f^\nu = g^\nu \circ f : D_1 \to g^\nu(D_2)$ и следующие дилатации координат:

$$\begin{aligned} A^\nu &: (z_1, z_2) \mapsto (\delta_\nu^{-1/2m} z_1,\, \delta_\nu^{-1} z_2), \\ B^\nu &: (w_1, w_2) \mapsto (\tau(\omega^\nu, \gamma_\nu)^{-1} w_1,\, \gamma_\nu^{-1} w_2). \end{aligned}$$

Положим $D_1^\nu = A^\nu(D_1)$, $D_2^\nu = B^\nu \circ g^\nu(D_2)$ и рассмотрим отображения

$$F^\nu = B^\nu \circ g^\nu \circ f \circ (A^\nu)^{-1} = B^\nu \circ f^\nu \circ (A^\nu)^{-1} \; : D_1^\nu \to D_2^\nu.$$

Пусть также $r_1^\nu(z) = \delta_\nu^{-1} r_1 \circ (A^\nu)^{-1} = \delta_\nu^{-1} r_1(\delta_\nu^{1/2m} z_1,\, \delta_\nu z_2)$ и $r_2^\nu = \gamma_\nu^{-1} r_2 \circ (g^\nu)^{-1} \circ (B^\nu)^{-1} = \gamma_\nu^{-1} r_2^\nu(\tau(\omega^\nu,\, \gamma_\nu) w_1,\, \gamma_\nu w_2)$.

Так как Γ_2 имеет тип $2k$ в начале координат, то

$$r_2^\nu = \operatorname{Re} w_2 + \gamma_\nu^{-1} \left(\sum_{\ell=2}^{2k} (\tau(\omega^\nu, \gamma_\nu))^\ell P_{2,\ell}(\omega^\nu,\, w_1) \right) + R^\nu,$$

где последовательность $(R^\nu)_\nu$ сходится к нулю равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^2$ при $\nu \to \infty$ (см. [61, 64]).

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что многочлены $\gamma_\nu^{-1} \sum\limits_{\ell=2}^{2k} P_{2,\ell}(\omega^\nu,\, \tau^\ell(\omega^\nu, \gamma_\nu) w_1)$ сходятся равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$ к ненулевому вещественному многочлену Q степени $\leqslant 2k$, не содержащему чисто гармонических членов. Рассмотрим область

$$\Omega_2 = \{ w \in \mathbb{C}^2 | \psi(w) = \operatorname{Re} w_2 + Q(w_1) < 0 \}.$$

Последовательность (r_2^ν) сходится к функции ψ равномерно вместе со всеми производными любого порядка; следовательно, Ω_2 псевдовыпукла как гладкий предел псевдовыпуклых областей. В частности, Q — субгармонический многочлен на $\mathbb{C}$.

Аналогично имеем, что последовательность (r_1^ν) равномерно сходится на компактных подмножествах $\mathbb{C}^2$ к функции $\phi = \operatorname{Re} z_2 + P_{1,2m}(z_1)$ (в дальнейшем пишем просто P). Стоит отметить, что P — однородный многочлен. Определим область $\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C}^2 | \phi(z) < 0 \}$.

Теперь вполне аналогично [61] получаем по [43], что существует подпоследовательность $(F^\nu)_\nu$, равномерно сходящаяся к компактному подмножеству в Ω_1. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $(F^\nu)_\nu$ равномерно сходится на компактных подмножествах Ω_1 к голоморфному отображению F. В [61,64] показано, что F принимает значения в Ω_2 и, кроме того, $\psi(F(z)) \leqslant C(R)\phi(z)$ для любого $R > 0$ и $z \in \Omega_1 \cap R\mathbb{B}$ (здесь и ниже $\mathbb{B}$ обозначает единичный шар в $\mathbb{C}^2$). Подчеркнем, что F (глобально) определено и голоморфно на Ω_1.

Как было показано в [61, 64], отображение F продолжается до алгебраического отображения на $\mathbb{C}^2$, т.е. график Γ_F отображения F в $\mathbb{C}^4$ содержится в комплексном 2-мерном (неприводимом) алгебраическом многообразии $A \subset \mathbb{C}^4$. Другое важное свойство F, установленное в [61], — это «хорошее» граничное поведение. Более точно, для любой граничной точки a в Ω_1 отображение F либо непрерывно продолжается на окрестность a, либо $|F(z)|$ стремится к бесконечности при $z \in \Omega_1$, стремящемся к a. Будем обозначать через $F^{-1}(\infty)$ подмножество граничных точек Ω_1, удовлетворяющих последнему условию. Оно является замкнутым нигде не плотным подмножеством $\partial\Omega_1$; кроме того, из алгебраичности F следует, что (локально) $F^{-1}(\infty)$ есть вещественно–алгебраическое подмножество в $\partial\Omega_1$ размерности $\leqslant 1$. Наша основная цель состоит в том, чтобы показать, что, на самом деле, эта размерность равна нулю, т.е., что это множество конечно.

Следующее утверждение связывает граничные свойства нормального семейства $(F^\nu)_\nu$ с граничным поведением предельного отображения F и исключительно важно для развиваемого подхода.

Предложение 19.1. *Предположим, что существует последовательность $(a^\nu)_\nu$, сходящаяся к точке $a \in \partial\Omega_1$ такая, что для любого ν имеем $a^\nu \in \partial D_1^\nu$. Тогда:*

(i) если последовательность $(F^\nu(a^\nu))_\nu$ сходится к точке $p \in \partial\Omega_2$, то существуют постоянные $R > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$| F^\nu(z') - F^\nu(z'') | \leqslant C \mid z' - z'' \mid^{1/2k}$$

для любого $z', z'' \in \overline{D_1^\nu} \cap a + R\mathbb{B}$ *и* $\nu = 1, 2, \ldots$*; кроме того,* F *непрерывно продолжается вплоть до границы в окрестности точки* a *и* $F(a) = p$*;*

(ii) если $\lim_{\nu \longrightarrow \infty} |F^\nu(a^\nu)| = \infty$*, то* $\lim_{z \longrightarrow a} |F(z)| = \infty$.

Утверждение (i) доказано в [64]; второе утверждение следует из (i) вполне аналогично лемме 8.1 в [61].

20. Доказательство основной теоремы

Предположим от противного, что утверждение теоремы 13.7 не верно.

Рассмотрим бидиски $\Delta(\varepsilon)$ вида $\Delta(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^2 | |z_1| < \varepsilon, |z_2| < \varepsilon\}$. Тогда пересечение $f^{-1}(0) \cap \Gamma_1 \cap \partial\Delta(\varepsilon)$ не пусто при любом малом у $\varepsilon > 0$. Для каждого ν и каждого малого $\varepsilon > 0$ пересечение $(F^\nu)^{-1}(F^\nu(0)) \cap \partial D_1^\nu \cap \partial\Delta(\varepsilon)$ не пусто. Если $p^\nu = F^\nu(0)$ сходится к конечной точке $p \in \partial\Omega_2$, то из п. (i) предложения 19.1 следует, что пересечение $F^{-1}(p) \cap \partial\Omega_1 \cap \partial\Delta(\varepsilon)$ не пусто для любого малого $\varepsilon > 0$. Тогда $F^{-1}(p)$ не компактно в любой окрестности начала координат в $\partial\Omega_1$. Это противоречит предложению 6.3 в [64].

Рассмотрим случай, когда $|F^\nu(0)|$ стремится к бесконечности.

Начнем с общего замечания. Если $f^{-1}(0)$ содержит точку строгой псевдовыпуклости Γ_1, то из [61] следует, что Γ_2 также строго псевдовыпукла вблизи начала координат; тогда второй результат [61] показывает, что $f^{-1}(0)$ — компактное подмножество в окрестности начала координат и теорема доказана. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $f^{-1}(0)$ содержится в множестве точек слабой псевдовыпуклости Γ_1. Тогда для любого ν прообраз $(F^\nu)^{-1}(F^\nu(0)) \cap \partial D_1^\nu$ содержится в множестве точек слабой псевдовыпуклости ∂D_ν. Пусть a^ν — точка $(F^\nu)^{-1}(F^\nu(0)) \cap \partial D_1^\nu \cap \partial\Delta(\varepsilon)$ и $a^\nu \longrightarrow a \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Delta(\varepsilon)$. Так как последовательность определяющих функций сходится равномерно вместе со всеми производными, то точка a принадлежит множеству $w(\partial\Omega_1)$ точек слабой псевдовыпуклости $\partial\Omega$. Так как $\lim_{\nu \longrightarrow \infty} |F^\nu(0)| = \infty$, то из п. (ii) предложения 19.1 следует, что $\lim |F(z)| = \infty$ при z, стремящемся к a в Ω_1. Следовательно, для получения требуемого противоречия, достаточно установить следующее

Предложение 20.1. *Пересечение прообраза* $F^{-1}(\infty)$ *с множеством* $w(\partial\Omega_1)$ *точек слабой псевдовыпуклости* $\partial\Omega_1$ *конечно.*

Для доказательства рассмотрим отдельно два случая.

Сферический случай. Предположим, что существует точка строгой псевдовыпуклости $p \in \partial\Omega_1$ такая, что $\partial\Omega_1$ сферично вблизи точки p (так как отображение F алгебраично, то $\partial\Omega_2$ также сферическое).

Заметим, во-первых, что, как было показано, в этом случае $P_{2m} = |z_1|^{2m}$. Поэтому множество $w(\partial\Omega_1)$ точек слабой псевдовыпуклости $\partial\Omega_1$ совпадает с вещественной прямой $L = \{z_1 = 0, \operatorname{Re} z_2 = 0\}$. Предположим от противного, что предложение 20.1 не верно. Тогда ввиду алгебраичности F, можно считать, что $F^{-1}(\infty) \cap \partial\Omega_1$ содержит (часть) вещественно-алгебраической кривой γ и, кроме того, кривая γ содержится в $w(\partial\Omega_1) = L$. Тогда по теореме единственности $\gamma = \{z_1 = 0\} \cap \partial\Omega_1$. Согласно Бедфорду–Форнаесу [35], существует функция h, голоморфная на Ω_2 и обладающая следующими свойствами: (a) $|h(w)| \sim \left(|w_1|^{2k} + |w_2|^2\right)^{1/N}$ при $|w| \to \infty$ для некоторого положительного целого N;

(b) $\arg h(w) \in [-\pi/4, \pi/4]$ при $w \in \Omega$.

Положим $g(w) = (\alpha h(w) - 1)/(\alpha h(w) + 1)$, где $\alpha > 0$ достаточно мало. Тогда $g(w)$ — функция, голоморфная в Ω_2, $|g(w)| < 1$ на Ω_2 и $g(w) \to 1$ при $|w| \to \infty$. Функция $g \circ F$ стремится к 1 при z, стремящемся к γ, и по теореме о единственности границы, $g \circ F$ тождественно равна 1 на $\{z_1 = 0\} \cap \Omega_1$, т.е. значение F бесконечно в некоторой внутренней точке Ω_1. Мы пришли к противоречию.

Несферический случай. Если граница Ω_1 не сферична (и, следовательно, граница Ω_2 также не сферична), то отображение F — многочлен по предложению 17.3 и прообраз $F^{-1}(\infty)$ пуст. Это завершает доказательство предложения 20.1.

Теперь из предложения 20.1 получаем нужное противоречие, которое доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айрапетян Р.* Продолжение CR-функций с кусочно-гладких CR-многообразий// Мат. сб. — 1987. — *134.* — С. 108–118.
2. *Бедфорд Э., Пинчук С.* Области в $\mathbb{C}^2$ с некомпактными группами голоморфных автоморфихмов// Мат. сб. — 1988. — *135.* — С. 147–157.
3. *Бедфорд Э., Пинчук С.* Выпуклые области с некомпактными группами автоморфизмов// Мат. сб. — 1994. — *185.* — С. 3–26.
4. *Белошапка В. К.* Теорема единственности для автоморфизмов невырожденной поверхности в комплексном пространстве// Мат. сб. — 1990. — *47*, № 3. — С. 17–22.
5. *Белошапка В. К.* О голоморфных преобразованиях квадрики// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 2. — С. 209–219.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1966.
7. *Дудников Р. И., Самборский С. Н.* Линейное переопределение системы уравнений с частными производными, граничные и начально граничные задачи для них// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления/ ВИНИТИ, 1991. — *8.* — С. 6–94.
8. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.:Наука, 1978. — 399 с.
9. *Олвер П.* Группы Ли и их приложения к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 639 с.
10. *Пинчук С.* Об аналитическом продолжении голоморфных отображений// Мат. сб. — 1975. — *27.* — С. 345–392.
11. *Пинчук С.* Граничная единственность голоморфных функций многих комплексных переменных// Мат. заметки. — 1974. — *15.* — С. 205–215.
12. *Пинчук С.* Аналитическое продолжение голоморфных отображений и проблемы классификации многомерных областей// Дисс. — М. 1980.
13. *Пинчук С., Хазанов Ш. И.* Асимптотически голоморфные функции и их приложения// Мат. сб. — 1989. — *62.* — С. 541–550.
14. *Пинчук С., Цыганов Ш. И.* Гладкость CR-отображений строго псевдовыпуклых гиперповерхностей// Мат. сб. — 1989. — *35*, № 5. — С. 1120–1129.
15. *Помарре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. — М.:Мир, 1983.
16. *Пушников А.* Голоморфность CR-отображений в простанство высокой размерности// Мат. заметки. — 1990. — С. 147–149.
17. *Работин В.*, Дисс. — Красноярск, 1986.
18. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
19. *Туманов А.* Геометрия CR-многобразий// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ. — 1986. — *9.* — С. 225–246.
20. *Туманов А.* Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многобразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52.* — С. 651–659.
21. *Туманов А.* Продолжение CR-функций в клин с многообразия конечного типа// Мат. сб. — 1988. — *136 (178).* — С. 128–139.
22. *Туманов А.* Продолжение CR-функций в клин// Мат. сб. — 1990. — *181*, № 7. — С. 951–964.
23. *Хенкин Г., Туманов А.* Локальная характеризация голоморфных автоморфизмов областей Зигеля// Функц. анал. и его прил. — 1983. — *17.* — С. 49–61.
24. *Чирка Е.* Регулярность границ аналитических множеств// Мат. сб. — 1982. — *159.* — С. 291–336.
25. *Чирка Е.* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
26. *Чирка Е.* Введение в геометрию CR-многообразий// Успехи мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 81–164.
27. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. II. — М.: Наука, 1985.
28. *Alexander H.* Holomorphic mappings from the ball and polydisc// Math. Ann. — 1974. — *209.* — С. 249–256.
29. *Baouendi M. S., Huang X., Rothschild L.* Regularity of CR-mappings between algebraic hypersurfaces// Invent. math. — 1996. — *125.* — С. 13–36.
30. *Baouendi M. S., Jacobowitz H., Treves F.* On the analyticity of CR-maps// Ann. Math. — *1985.* — С. 365–400.
31. *Baouendi M. S., Rothschild L. P.* Germs of CR-maps between real analytic hypersurfaces// Invent. math. — 1988. — *93.* — С. 481–500.
32. *Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P.* Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in $\mathbb{C}^n$// Acta Math. — 1996. — *177.* — С. 225–273.

33. *Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P.* Rational dependence of smooth and analytic CR-mappings on their jets// Math. Ann. — 1999. — *315.* — C. 205–249.
34. *Bedford E., Bell S.* Extension of proper holomorphic mappings past the boundary// Manuscr. Math. — 1985. — *50.* — C. 1–10.
35. *Bedford E., Fornaess J. E.* A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains// Ann. Math. — 1978. — *270.* — C. 711–719.
36. *Bedford E., Fornaess J. E.* Local extension of CR-functions from weakly pseudoconvex boundaries// Michigan Math. J. — 1978. — *25.* — C. 259–269.
37. *Bell S.* CR-maps between hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$// Proc. Symp. Pure Math. — 1989. — *52*, Part 1, C. 13–22.
38. *Bell S.* Local regularity of CR homeomorphisms// Duke Math. J. — 1988. — *57.* — C. 295–300.
39. *Bell S.* The Cauchy transform, potential theory and conformal mappings// Stud. Adv. Math. — 1992.
40. *Bell S., Catlin D.* Regularity of CR-mappings// Math. Z. — 1988. — *199.* — C. 357–368.
41. *Bell S., Lempert L.* A C^∞ Schwarz reflection principle in one and several complex variables// J. Differ. Geom. — 1990. — *32.* — C. 899–915.
42. *Berteloot F.* Personal communication. — 1996.
43. *Berteloot F., Coeuré G.* Domaines de $\mathbb{C}^2$ pseudoconvexes et de types fini ayant un groupe non compact d'automorphismes// Ann. Inst. Fourier, Grenoble. — 1991. — *41.* — C. 77–86.
44. *Bluman G. W., Kumei S.* Symmetries and differential equations. — Springer-Verlag, 1989.
45. *Bloom T., Graham I.* On «type» conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$// Invent. math. — 1977. — *40.* — C. 217–243.
46. *Boggess A.* The holomorphic extension of CR-functions near a point of higher type// Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — *103.* — C. 847–855.
47. *Bohner S., Martin J.* Several complex variables. — Princeton Univ. Press, 1948.
48. *Bryant R. L, Chern S. S, Gardner R. B, Goldschmidt H. L, Griffith P. A* Exterior differential systems and equivalence problems. — Kluwer, 1991.
49. *Burns D., Shnider S.* Sperical hypersurfaces in complex manifolds// Invent. math. — 1976. — *33.* — C. 223–246.
50. *Cartan É.* Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes// Ann. Math. Pura Apl. — 1932. — *11.* — C. 17–90.
51. *Catlin D.* Estimates on invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two// Math. Z. — 1989. — *200.* — C. 429–466.
52. *Chaouech A.* Auto-applications holomorphes propres des domaines polynomiaux rigides// Publ. Math. — 1996. — *40.* — C. 41–66.
53. *Chern S. S* On the projective structure of a real hypersurface in $\mathbb{C}^{n+1}$// Math. Scand. — 1975. — *36.* — C. 74–82.
54. *Chern S. S, Moser J. K* Real hypersurfaces in complex manifolds// Acta Math. — 1974. — *133.* — C. 219–271.
55. *Chirka E., Coupet B., Sukhov A.* On boundary regularity of analytic discs// Mich. Math. J. — 1999. — *46.* — C. 271–279.
56. *Coupet B.* Construction de disques analytiques et régularité de fonctions holomorphes au bord// Math. Z. — 1992. — *209.* — C. 179–204.
57. *Coupet B.* Precise regularity up to the boundary of proper holomorphic mappings// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. — 1993. — *20.* — C. 461–482.
58. *Coupet B., Damour S., Merker J., Sukhov A.* Sur les applications CR lisses à valeures dans ensemble algebrique réel// C. R. Acad. Sci. Paris. — 2002. — *334.* — C. 953–956.
59. *Coupet B., Meylan F., Sukhov A.* Holomorphic maps of algebraic CR manifolds// Int. Math. Res. Not. — 1999. — *1.* — C. 1–29.
60. *Coupet B., Gaussier H., Sukhov A.* Regularity of CR maps between convex hypersurfaces of finite type// Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — *127.* — C. 3191–3200.
61. *Coupet B., Pinchuk S., Sukhov A.* On boundary rigidity and regularity of holomorphic mappings// Int. J.Math. — 1996. — *7.* — C. 617–643.
62. *Coupet B., Pinchuk S., Sukhov A.* On partial analyticity of CR mappings// Math. Z. — 2000. — *235.* — C. 541–557.
63. *Coupet B., Pinchuk S., Sukhov A.* Analyticité des applications CR// C. R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1999. — *329.* — C. 489–494.
64. *Coupet B., Sukhov A.* On CR mappings between pseudoconvex hypersurfaces of finite type in $\mathbb{C}^2$// Duke Math. J. — 1997. — *88.* — C. 281–304.

65. *Coupet B., Sukhov A.* Rigidity of algebraic CR structures and regularity of CR mappings// Prépubl. de LATP, 'Université de Provence. — 1997. — № 97-04.
66. *Dadok J., Yang P.* Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces// Amer. J. Math. — 1985. — *107.* — C. 999–1013.
67. *Damour S.* Sur l'algebricité des applications holomorphes// C. R.Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. — 2001. — *332.* — C. 491–496.
68. *Damour S.* On the analyticity of smooth CR mappings between real analytic CR manifolds// Mich. Math. J. — 2001. — *49.* — C. 583–603.
69. *D'Angelo J.* Several Complex Variables and Geometry of Real Hypersurfaces/ Stud. Adv. Math. CRS Press, 1993.
70. *Dickson L. E.* Differential equations from the group standpoint// Ann. Math. — (1924). — *25.* — C. 287–378.
71. *Diederich K., Fornaess J.* Pseudoconvex domains with real analytic boundaries// Ann. Math. — 1978. — *107.* — C. 371–384.
72. *Diederich K., Fornaess J.* Proper holomorphic maps onto pseudoconvex domains with real analytic boundary// Ann. Math. — 1979. — *110.* — C. 575–592.
73. *Diederich K., Fornaess J.* Boundary regularity of proper holomorphic mappings// Invent. math. — 1982. — *67.* — C. 363–384.
74. *Diedrich K., Fornaess J.* Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains// Math. Ann. — 1982. — *259.* — C. 279–286.
75. *Diederich K., Fornaess J. E.* Proper holomorphic mappings between real analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$// Math. Ann. — 1988. — *282.* — C. 681–700.
76. *Diedrich K., Fornaess J. E., Ye Z.* Biholomorphisms in dimension 2// J. Geom. Anal. — 1994. — *4.* — C. 539–552.
77. *Diederich K., Pinchuk S.* The inverse of CR homeomorphism is CR// Int. J. Math. — 1993. — *4.* — C. 379–394.
78. *Diederich K., Pinchuk S.* Proper holomorphic maps in dimension 2 extend// Indiana Univ. Math. J. — 1995. — *44.* — C. 1089–1126.
79. *Diederich K., Pinchuk S.* Reflection principle in higher dimensions// Proc. Int. Congr. Math. vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. C. 703–712.
80. *Diederich K., Webster S.* A reflection principle for degenerate real hypersurfaces// Duke Math. J. — 1980. — *47.* — C. 835–843.
81. *Ezhov V., Isaev A., Schmalz G.* Invariants of elliptic and hyperbolic CR-structures of codimension 2// Int. J. Math. — 1999. — *10.* — C. 1–52.
82. *Faran J.* Segre families and real hypersurfaces// Invent. Math. — 1980. — *60.* — C. 135–172.
83. *Fefferman Ch.* The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains// Invent. math. — 1974. — *26.* — C. 1–65.
84. *Fornaess J. E., Sibony N.* Construction of P.S.H. functions on weakly pseudoconvex domains// Duke Math. J. — 1989. — *58.* — C. 633–656.
85. *Forstnerič F.* Proper holomorphic maps from balls// Duke Math. J. — 1986. — *53.* — C. 427–441.
86. *Forstnerič F.* Extending proper holomorphic mappings of positive codimension// Invent. math. — 1989. — *95.* — C. 31–62.
87. *Forstnerič F.* Mappings of strongly pseudoconvex Cauchy-Riemann manifolds// Several Complex Variables and Complex Geometry, Part 1 (Santa cruz, CA, 1989)/ Proc. Symp. Pure Math., Part 1. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991 — *52.* — C. 59–92.
88. *Forstnerič F.* Mappings of quadric Cauchy–Riemann manifolds// Math. Ann. — 1992. — *292.* — C. 163–180.
89. *Forstnerič F.* An elementary proof of Fefferman's mapping theorem// Expos. Math. — 1992. — *10.* — C. 135–149.
90. *Forstnerič F.* A reflection principle on strongly pseudoconvex domains with generic corners// Math. Z. — 1993. — *213.* — C. 49–64.
91. *Forstnerič F.* Proper holomorphic mappings: a survey/ Several Complex Variables: Proc. of the Mittag-Löffler Inst. 1987–1988, Princeton Univ. Press, 1993.
92. *Gonzalez-Gascon F., Gonzalez-Lopez A.* Symmetries of differential equations, IV// J. Math. Phys. — 1983. — *24.* — C. 2006–2021.
93. *Graham I.* Boundary behavior of Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary// Trans. Amer. Mah. Soc. — 1975. — *207.* — C. 219–240.
94. *Hagopian C.* Rigidité des applications holomorphes// Ph. Thesis, Université de Provence, 1999.

95. *Huang X.* On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces in the complex spaces of different dimensions// Ann. Inst. Fourier. — 1994. — *44.* — С. 433–463.
96. *Huang X.* Schwarz reflection principle in complex spaces of dimension two// Commun. PDE. — *21.* — С. 1781–1828.
97. *Ivashkovich S.* The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds// Invent. math. — 1992. — *109.* — С. 47–54.
98. *Jacobowitz H.* An introduction to CR structures// Math. Surv. Monogr. — 1990. — *32.*
99. *Kuranishi M.* On E. Cartan's prolongation theorem of exterior differential systems// Amer. J. Math. — 1964. — *86.* — С. 379– 391.
100. *Lang S.* Algebra. — Addison-Wesley, 1977.
101. *Lempert L.* La métrique de Kobayashi et la representation des domaines sur la boule// Bull. Math. Soc. France. — 1981. — *109.* — С. 427–474.
102. *Lewy H.* On the boundary behavior of holomorphic mappings// Accad. Naz. Lincei. — 1977. — *35.* — С. 1–8.
103. *Lie S., Scheffers G.* Vorlesungen uber Continuierliche Gruppen. — Bronx, NY: Chelsea, 1971.
104. *Loboda A.* Real analytic generating manifolds of codimension 2 in $\mathbb{C}^4$ and their biholomorphic mappings// Math. USSR Izv. — 1989. — *33.* — С. 295–315.
105. *Malgrange B.* Ideals of differentiable functions// Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. — London: Ofxord Univ. Press, 1967. — *3.*
106. *Malgrange B.* Equations de Lie I, II// J. Diff. Geom. — 1972. — *6.* — С. 503–522; 1972. — *7.* — С. 117–141.
107. *Malgrange B.* L'involutivité générique des systemes différentiels analytiques// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1998. — *326.* — С. 863–866.
108. *Merker J.* On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets// Bull. Soc. Math. France. — 2001. — *129.* — С. 547–592.
109. *Merker J., Porten E.* On removable singularities for integrable CR functions// Indiana Univ. Math. J. — 1999. — *48.* — С. 805–856.
110. *Mumford D.* Complex algebraic geometry I. Projective varieties. — Springer-Verlag, 1976.
111. *Nirenberg L., Webster S., Yang P.* Local boundary regularity of holomorphic mappings// Commun. Pure and Appl. Math. — 1980. — *33.* — С. 305–328.
112. *Olver P.* Equivalence, invariants and symmetry. — Cambridge Univ. Press, 1995.
113. *Pommaret J.-F.* Partial differential equations and group theory. — Kluwer, 1994.
114. *Rothstein W.* Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen// Math. Z. — 1950. — *53.* — С. 84–95.
115. *Segre B.* Intorno al problem di Poincaré della representazione pseudo-conform// Rend. Acc. Lincei. — 1931. — *13.* — С. 676–683.
116. *Sibony N.* A class of hyperbolic manifolds// Ann. Math. Stud. — Princeton, New Jersey: 1981. — *100.* — С. 91–97.
117. *Sibony N.* Some aspects of pseudoconvex domains// Several complex variables and complex geometry, part 1 (Santa Cruz, CA, 1989). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. — С. 199–232.
118. *Sharipov R., Sukhov A.* On CR mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — *348.* — С. 767–780.
119. *Shiffman B.* Extensions of holomorphic maps into hermitian manifolds// Math. Ann. — 1971. — *194.* — С. 84–95.
120. *Shiffman B.* Separately meromorphic functions and separately holomorphic mappings// Several complex variables and complex geometry, part 1 (Santa Cruz, CA, 1989). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. — С. 191–198.
121. *Shiffman B.* Projective geometry and Poincare's theorem on automorphisms of the ball// Enseign. Math. — 1995. — *41.* — С. 201–216.
122. *Spencer D.* Overdetermined systems of linear partial differential equations// Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — *75.* — С. 179–239.
123. *Stanton N.* Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces// Amer. J. Math. — 1996. — *118.* — С. 209–233.
124. *Sukhov A.* On the mapping problem for quadric Cauchy–Riemann manifolds// Indiana Univ. Math. J. — 1993. — *42.* — С. 27–36.
125. *Sukhov A.* On CR mappings of real quadric manifolds// Mich. Math. J. — 1994. — *41.* — С. 143–150.
126. *Sukhov A.* Segre varieties and Lie symmetries// Math. Z. — 2001. — *238.* — С. 483–492.
127. *Sukhov A.* On maps of CR manifolds and transformations of differential equations// C. R. Acad. Sci. Paris. — 2001. — *333.* — С. 545–550.

128. *Sukhov A.* CR maps and point Lie transformations// Mich. Math. J. — 2002. — *50.* — C. 369–379.
129. *Sukhov A.* On transformations of analytic CR structures// Publ. IRMA Lille. — 2001. — *56.* — C. 1–31.
130. *Trépreau J.-M.* Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définie sur une hypersurface réelle de classe C^2// Invent. math. — 1986. — *83.* — C. 583–592.
131. *Tresse A.* Détermination des invariants ponctuels de l'équation differentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. — Leiptzig: Hirzel, 1896.
132. *Tanaka N.* On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables// J. Math. Soc. Japan. — 1962. — *14.* — C. 397–429.
133. *Tanaka N.* On infinitesimal automorphisms of Siegel domains// J. Math. Soc. Japan. — 1970. — *22.* — C. 180–212.
134. *Tumanov A.* Extremal discs and the regularity of CR mappings in higher codimension// Amer. J. Math. — 2001. — *123.* — C. 445–473.
135. *van der Waerden B. L.* Modern Algebra. — New York: Frederich Ungar Publ., 1950.
136. *Webster S. M.* On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces// Invent. Math. — 1977. — *43.* — C. 53–68.
137. *Webster S. M.* On the reflection principle in several complex variables// Proc. Amer. Math. Soc. — 1978. — *71.* — C. 26–28.
138. *Webster S. M.* Double valued reflection in the complex plane// Enseign. Math. — 1996. — *42.* — C. 25–48.
139. *Webster S.* Some birational invariants for algebraic real hypersurfaces// Duke Math. J. — 1978. — *45.* — C. 39–46.
140. *Zaitsev D.* Algebraicity of local holomorphisms between real algebraic submanifolds in complex spaces// Acta Math. — 1999. — *183.* — C. 273–305.

Б. Купе

Université de Provence, CMI, 39, rue Joliot-Curie, 13453, Marseille cedex 13, France

А. Сухов

Univesrité des Sciences et Technologies de Lille,

Laboratoire d'Arithmétique – Géométrie – Analyse – Topologie,

U.F.R. de Mathématique, 59655 Villeneuve d'Ascq, Cedex, France