

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 7

**ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

СУЗДАЛЬ, 1–6 ИЮЛЯ 2002 Г.

ЧАСТЬ 1



**Тбилиси
2003**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкrellидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

А. А. Болибрух (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 7

**ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

СУЗДАЛЬ, 1–6 ИЮЛЯ 2002 Г.

ЧАСТЬ 1

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перестройки столкновений в оптимальном управлении (<i>И. А. Богаевский</i>)	3
Сингулярности огибающей семейства кривых, касательных к кривой с полукубической угловой точкой (<i>Дж. Капитанио</i>)	17
Зонтик Уитни и бифуркации медленных движений в уравнениях релаксационного типа (<i>А. А. Давыдов</i>)	25
Принцип окончания Уинтнера—Перко, параметры, поворачивающие поле, и проблема предельных циклов (<i>В. А. Гайко</i>)	34
Классификация простейших не градиентноподобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях (<i>Хр. Бонатти, В. Гринес, О. Починка</i>)	42
Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений (<i>Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов</i>)	71
Сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах с симметрией (<i>С. Л. Царев</i>)	86
О динамических свойствах диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями (<i>С. В. Гонченко, Д. В. Тураев, Л. П. Шильников</i>)	91
Теория фронтов на 2-сфере и теория пространственных кривых (<i>Р. Урибе-Варгас</i>)	118
Особенности каустик в задачах управления общего положения, инвариантных относительно переносов (<i>В. М. Закалюкин</i>)	128

ПЕРЕСТРОЙКИ УДАРНЫХ ВОЛН В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ© 2003 г. **И. А. БОГАЕВСКИЙ**

Аннотация. Ударные волны в оптимальном управлении образованы точками, в которых кончаются две или более экстремальных траекторий. Дается топологическая классификация их бифуркаций общего положения, возникающих с течением времени (*перестроек*), в размерностях два или три для классической задачи оптимального управления с гладким гамильтонианом.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
1.1. Задача оптимального управления	5
1.2. Перестройки ударных волн действия F общего положения	7
1.3. Топологические ограничения, запрещающие некоторые перестройки	8
2. Классификация	8
2.1. Простые минимумы	8
2.2. Классификация точек ударных волн	8
2.3. Ударные волны на прямой: $d = 1$	9
2.4. Ударные волны на плоскости: $d = 2$	9
2.5. Ударные волны в пространстве: $d = 3$	9
2.6. Нормальные формы	9
2.7. Гладкость F	11
3. Функции минимума	11
3.1. Семейства функций	11
3.2. Особенности	12
3.3. Перестройки	13
3.4. Случай, когда F — действие	15
4. Топологические ограничения	15
Список литературы	16

1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом данной статьи являются особенности и *перестройки* (= бифуркации, метаморфозы или переходы) ударных волн в классической задаче теории оптимального управления со свободной начальной точкой. Точки, в которых кончаются две или более экстремальных траекторий, образуют *ударные волны*, эволюционирующие с течением времени. В статье дается классификация перестроек ударных волн на плоскости и в пространстве при некоторых сильных условиях на данные задачи оптимального управления. А именно, начальные условия и гамильтониан предполагаются гладкими; здесь и далее этот термин означает бесконечную дифференцируемость. Данная работа является обобщением статьи [8], в которой дана классификация перестроек разрывов в потенциальных решениях уравнения Бюргерса и в вязких решениях уравнения Гамильтона—Якоби с выпуклым гамильтонианом. Оказывается, что все эти классификации одни и те же.

Начальное условие и гамильтониан рассматриваемой задачи оптимального управления гладки; см. п. 1.1 по поводу всех определений. Но ударные волны появляются даже в этом случае: их локальные особенности и перестройки описываются в физически интересных размерностях $d \leq 3$

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 02-01-00655) и грантами INTAS-00-0259 и NWO-RFBR-047.008.005.

в предположении, что начальное условие — гладкая функция общего положения, а гамильтониан фиксирован. Это означает, что нас интересуют только особенности и перестройки, устойчивые относительно любых достаточно малых возмущений гладких начальных условий, но не фиксированного гамильтониана. Другие особенности и перестройки можно «убить» произвольно малым возмущением начального условия.

Оказывается, что в типичные моменты времени ударная волна общего положения имеет особенности из конечного списка и подвергается перестройке в отдельные моменты времени. Для их описания рассмотрим так называемую *мировую ударную волну*, лежащую в пространстве-времени и образованную точками, в которых кончаются две или более траектории; рассматриваемые выше ударные волны или *мгновенные ударные волны* — это в точности сечения мировых ударных волн изохронами $t = \text{const}$. Число топологически различных перестроек общего положения также оказывается конечным.

Рисунок 1 иллюстрирует хорошо известный случай $d = 1$. Мгновенная ударная волна состоит из изолированных точек, а мировая ударная волна — кривая на плоскости, имеющая регулярные, тройные и концевые точки. Все эти возможности указаны во второй строке. В типичные моменты времени мгновенная ударная волна может подвергаться перестройкам, изображенным на рис. 1 черными стрелками. А именно, любая тройная точка мировой ударной волны дает пару точек мгновенной ударной волны, а концевая точка мировой ударной волны порождает новую точку мгновенной ударной волны. Эти две перестройки и исчерпывают все перестройки общего положения; любая другая перестройка может быть «убита» произвольно малым возмущением начального условия.

A_1^2	A_1^3	A_3
		
		
		

Рис. 1. Особенности мировых ударных волн на плоскости и перестройки мгновенных ударных волн на прямой.

Рисунок 2 иллюстрирует случай $d = 2$. Мировая ударная волна — это поверхность с особенностями; все эти особенности изображены во второй строке. Мгновенная ударная волна — это кривая, которая может иметь тройные и концевые точки — те же особенности, которые имеют мировые ударные волны в случае размерности $d = 1$. В типичные моменты времени других особенностей нет, но они встречаются в отдельные моменты времени. А именно, мгновенная ударная волна может подвергаться перестройкам, изображенным на рис. 2 черными стрелками. (Стрелки с двумя наконечниками изображают перестройки, не меняющиеся при изменении направления времени.) Эти 9 перестроек исчерпывают все перестройки общего положения; любая другая перестройка убивается произвольно малым возмущением начального условия.

Рисунки 3, 4 и 5 иллюстрируют случай $d = 3$. В этом случае невозможно нарисовать особенности мировых ударных волн, поскольку они лежат в четырехмерном пространстве-времени. Мгновенная ударная волна представляет собой поверхность, которая может иметь особенности, происходящие из особенностей мировых ударных волн в рассмотренной выше размерности $d = 2$. В типичные моменты времени снова других особенностей нет, но они встречаются в отдельные моменты времени. А именно, мгновенная ударная волна может подвергаться перестройкам, показанным на рис. 3, 4 и 5 черными стрелками. Эти 26 перестроек исчерпывают все перестройки общего положения; любая другая убивается произвольно малым возмущением начального условия.

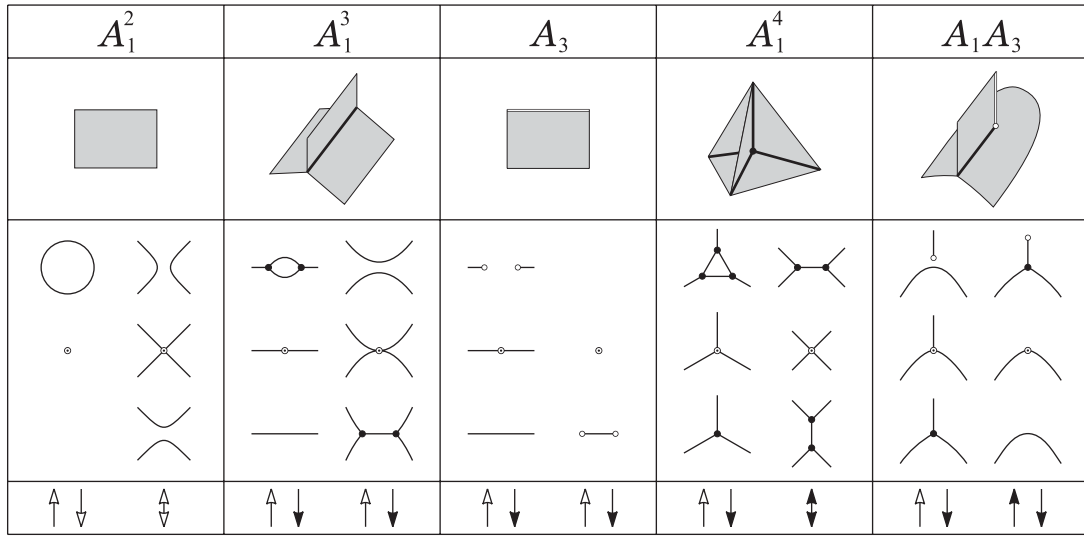


Рис. 2. Особенности мировых ударных волн и перестройки мгновенных ударных волн на плоскости.

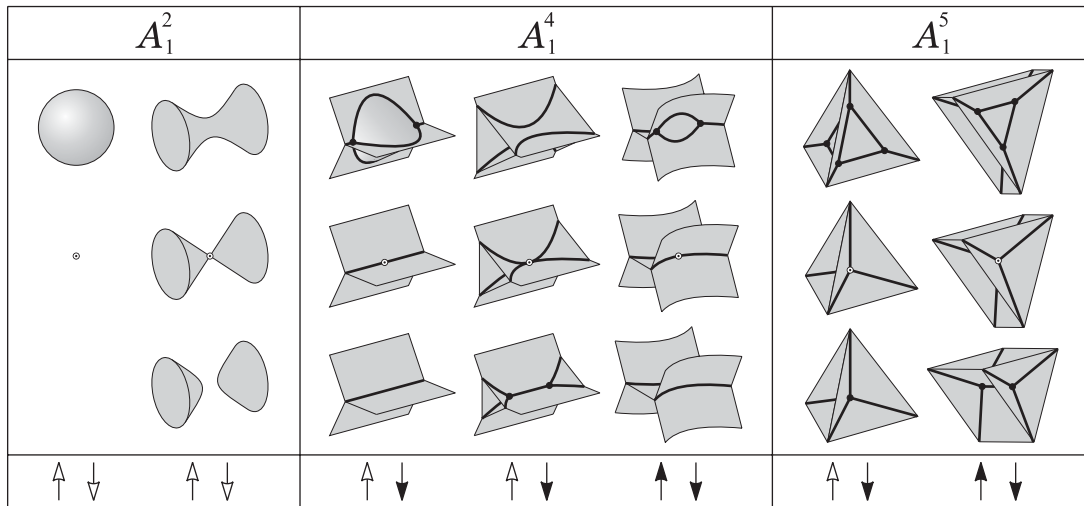


Рис. 3. Перестройки мгновенных ударных волн в пространстве (начало).

Благодарности. Настоящая работа написана после конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2002). Автор благодарен А. А. Давыдову — организатору этой конференции за очень полезные обсуждения и некоторые замечания.

1.1. Задача оптимального управления. Рассмотрим следующую классическую задачу оптимального управления со свободной начальной точкой на многообразии X^d размерности $d \leq 3$:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t) = \min_u \mathcal{F}_{\mathbf{x}, t}[\mathbf{u}], & \mathcal{F}_{\mathbf{x}, t}[\mathbf{u}] = \varphi_0(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t L(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau, \\ \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{v}(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{x}(\tau), \tau), \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (1)$$

где начальное условие φ_0 гладко (всюду в этой статье термин «гладкость» означает бесконечную дифференцируемость), $\mathbf{u} : [0, t] \rightarrow U$ — непрерывная траектория в пространстве управляющих параметров, а функция $\mathbf{x} : [0, t] \rightarrow X$ удовлетворяет заданным дифференциальному уравнению и начальному условию. Решение φ рассматриваемой задачи оптимального управления (1) есть функция от конечной точки $\mathbf{x} \in X$ и времени $t \in \mathbb{R}$.

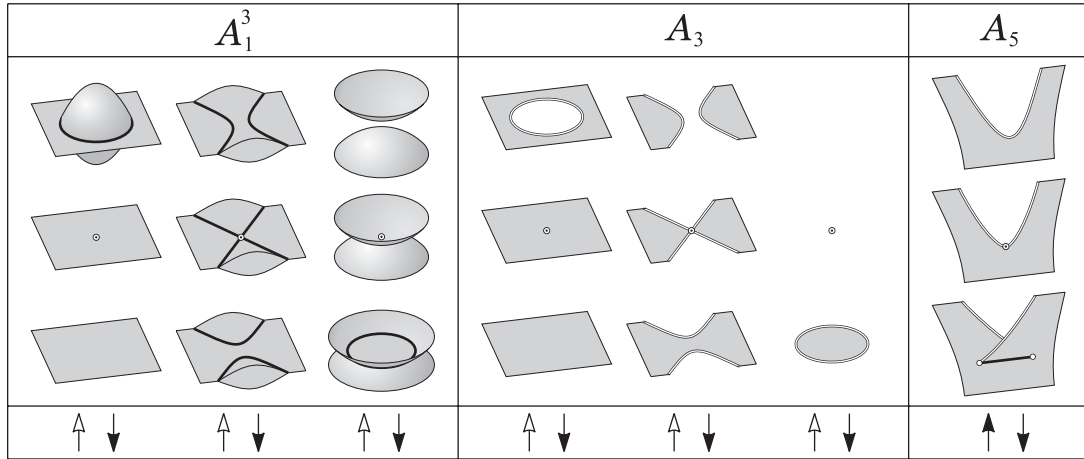


Рис. 4. Перестройки мгновенных ударных волн в пространстве (продолжение).

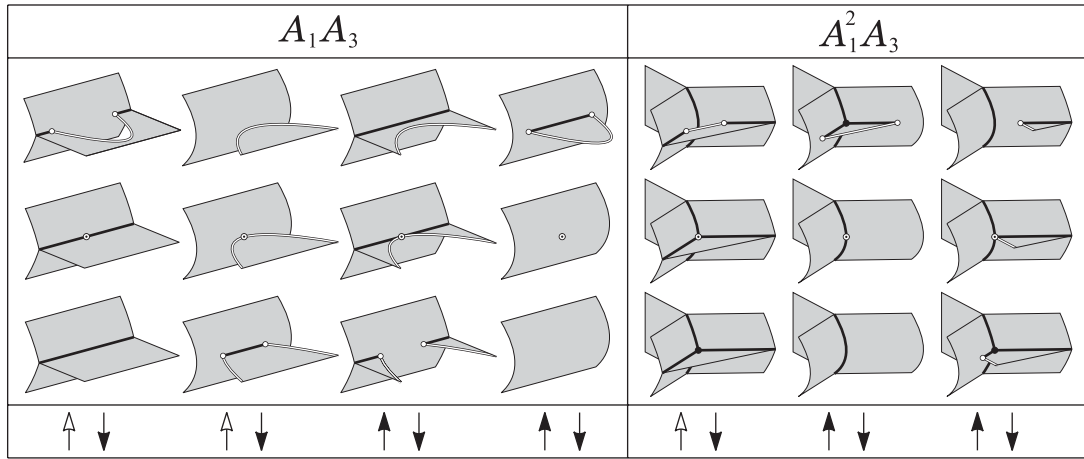


Рис. 5. Перестройки мгновенных ударных волн в пространстве (окончание).

По определению, *мировая ударная волна* $\bar{S}$ — это замыкание множества точек, в которых кончаются две или более минимальных траекторий:

$$S = \{(\mathbf{x}, t) \in X \times \mathbb{R} \mid \exists u_1 \neq u_2 : \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}, t}[u_1] = \mathcal{F}_{\mathbf{x}, t}[u_2]\}.$$

Сечения $\bar{S}_{t_*} = \bar{S} \cap \{t = t_*\}$ мировой ударной волны изохронами называются *мгновенными ударными волнами*, которые могут подвергаться *перестройкам* (= переходам, бифуркациям или метаморфозам) с течением времени t .

Рассмотрим гамильтониан этой задачи оптимального управления:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \max_{\mathbf{u}} \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) - L(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)\}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

- гамильтониан $H : T^*X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция;
- задача Коши

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(\tau) = -H_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{x}(\tau), \tau), \\ \dot{\mathbf{x}}(\tau) = H_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{x}(\tau), \tau), \\ \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}, \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (2)$$

для гамильтоновых уравнений имеет единственное решение на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, для любых $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \in T^*X$ и $t \in [0, T]$.

Решение рассматриваемой задачи оптимального управления (1) имеет следующее представление в виде минимума:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), \\ F(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t \{\mathbf{p}(\tau)\dot{\mathbf{x}}(\tau) - H(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{x}(\tau), \tau)\} d\tau, \end{cases}$$

где $\mathbf{p}(\tau)$, $\mathbf{x}(\tau)$ — решение задачи Коши (2). Конечно, F — гладкая функция, которая в механике называется действием, определенным гамильтонианом H вдоль его траектории с концом в точке $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$.

Множество S состоит из таких точек, что функция F достигает своего минимального значения по $\mathbf{p}$ в двух различных точках

$$S = \{(\mathbf{x}, t) \in X \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2 : \varphi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}, t) = F(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}, t)\}.$$

Действие F гладко, но тем не менее решение φ задачи оптимального управления только непрерывно и может быть не дифференцируемым в некоторых точках. Для действия F общего положения это может быть только в точках мировой ударной волны $\bar{S}$.

Далее будут описаны локальные особенности и перестройки мгновенных ударных волн в физически интересных случаях размерностей $d \leq 3$ при условии общности положения начального условия и фиксированном гамильтониане. Формально это означает, что это описание применимо только для открытого плотного подмножества в пространстве всех гладких начальных условий. Предполагается, что это пространство снабжено так называемой *топологией Уитни*, определение которой можно найти, например, в [1, § 2.3, замечание 2)]. Другими словами, нас интересуют только устойчивые по отношению к любым достаточно малым возмущениям начального условия особенности и перестройки. Остальные особенности и перестройки убиваются произвольно малым возмущением начального условия.

Оказывается, что такая мгновенная ударная волна общего положения есть гиперповерхность, которая в типичные моменты времени имеет особенности из конечного (с точностью до диффеоморфизмов) списка. Во всех этих моментах времени ударная волна локально не меняется при диффеоморфизмах. Однако в отдельные моменты времени она подвергается локальным перестройкам: мгновенные ударные волны при перестройке не диффеоморфны друг другу при близких моментах времени. Мгновенная ударная волна в момент перестройки сама имеет особенности, которые не принадлежат конечному списку.

Далее будет получена топологическая классификация перестроек мгновенных столкновений общего положения. Их гладкая классификация бесконечна: появляются непрерывные инварианты или *модули*. Конечная топологическая классификация детально описана в разделе 2 и является основным результатом данной статьи (теорема 1).

Общий план классификации состоит в следующем.

1.2. Перестройки ударных волн действия F общего положения. Во-первых, забудем, что F — действие и рассмотрим эту функцию как гладкую функцию общего положения. С помощью методов теории особенностей в разделе 3 будут описаны все особенности и перестройки ударных волн при $d \leq 3$, устойчивые относительно малого возмущения самой функции F . Другие особенности и перестройки можно убить произвольно малым возмущением функции F .

Особенности мгновенных ударных волн в типичные моменты времени и особенности мировых ударных волн описаны в [5]. Впервые мгновенные перестройки были опубликованы в [3]. Оба классификационных списка конечны при соответствующем отношении эквивалентности, гладкого для особенностей и топологического для перестроек.

Но можно ли рассматривать действие F как функцию общего положения? В самом деле, F — не произвольная функция, а функция, определенная начальным условием φ_0 и фиксированным гамильтонианом H . Привносит ли это обстоятельство новые особенности и перестройки ударных волн, устойчивые относительно малых возмущений только начальных условий, а не самого действия? Существуют ли особенности или перестройки ударных волн, которые нельзя убить

произвольно малым возмущением начального условия, но которые исчезают при таком малом возмущении действия?

Оказывается, что ответы на эти вопросы отрицательны: общая теорема по этому поводу опубликована в [4]. Поэтому все особенности и перестройки мгновенных ударных волн с начальными условиями общего положения принадлежат предъявленным спискам.

1.3. Топологические ограничения, запрещающие некоторые перестройки. С другой стороны, существуют ли особенности или перестройки из указанных списков, которые не могут быть реализованы ударными волнами, когда F действительно есть действие? Оказывается, что такие особенности существуют, но запрещенных перестроек мало для рассматриваемых задач оптимального управления. По-видимому, впервые это обстоятельство было замечено С. Н. Гурбатовым и А. И. Сайчевым в простейшем случае $L(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^2/2$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{u}$. Во-первых, изохрона $t = \text{const}$ не может быть касательной к мировой ударной волне в ее точках гладкости; это ограничение запрещает все перестройки A_1^2 . Во-вторых, несколько перестроек необратимы: они могут встречаться лишь при одном направлении времени, например, треугольник из ударных волн может исчезнуть при перестройке A_1^3 , но не может появиться. Универсальное топологическое ограничение состоит в следующем:

Локальная ударная волна после перестройки стягиваема (гомотопически эквивалентна точке). Например, треугольник из ударных волн гомотопически эквивалентен окружности, а не точке, а значит, и не может появиться.

Это топологическое ограничение явно проверено в [3] только для всех перестроек общего положения при $d \leq 3$. А именно, запрещенные перестройки не могут быть реализованы никаким действием ввиду некоторых явных, но сложных алгебраических условий. В разделе 4 это ограничение будет доказано для существенно более широкого класса перестроек во всех размерностях. На самом деле это условие почти эквивалентно другому топологическому условию, предложенному и доказанному в [2] во всех размерностях и не только для перестроек общего положения. Кто знает, почему никто не замечал этой простой эквивалентности в течение многих лет?

2. КЛАССИФИКАЦИЯ

2.1. Простые минимумы. Если в собственных локально гладких (вообще говоря, криволинейных) координатах рассматриваемая функция имеет вид

$$p_1^{2j} + p_2^2 + \dots + p_d^2 + \text{const},$$

то она достигает минимума в точке $\mathbf{p} = 0$. В теории особенностей такой минимум называется A_{2j-1} . Показатель $\mu = 2j - 1$ называется *кратностью* минимума. Число $k = \mu - 1 = 2j - 2$ называется *коразмерностью* минимума. Любой невырожденный минимум гладкой функции есть A_1 — это следствие хорошо известной леммы Морса. Минимумы $A_3, A_5, \dots$ вырождены, поскольку ранг их вторых дифференциалов равен $d - 1$. Поэтому легко найти минимум, не принадлежащий ряду A_{2j-1} ; простейший такой минимум — это

$$X_9 : p^4 + 2Cp^2q^2 + q^4 + \text{const}, \quad C > -1, C \neq 1,$$

где C — модуль или непрерывный инвариант с точностью до гладкой замены переменных. (Если $C = 1$, то 0 — также минимум, но его название не X_9 .)

2.2. Классификация точек ударных волн. Если точка $(\mathbf{x}_*, t_*)$ лежит на ударной волне, то функция $F(\cdot, \mathbf{x}_*, t_*)$ достигает своего минимального значения либо в нескольких точках, либо в вырожденной точке. Это означает, что эти минимумы можно записать в виде одного слова типа $A_1^2 A_3$, которое означает «два (невырожденных) минимума A_1 и один (вырожденный) минимум A_3 ». Такое слово называется именем точки $(\mathbf{x}_*, t_*)$.

Например, типичная точка ударной волны общего положения имеет вид A_1^2 . Ударная волна в окрестности этой точки представляет собой гладкую гиперповерхность, претерпевающую особенности в точках $A_1^3, A_3, \dots$. Точка A_1 лежит вне ударной волны.

2.3. Ударные волны на прямой: $d = 1$. Если действие F — произвольная гладкая функция, то мировая ударная волна — кривая на плоскости, которая наряду с точками гладкости A_1^2 может иметь тройные точки A_1^3 и тройные точки A_3 . Кривая общего положения с такими предписанными особенностями может порождать 6 различных перестроек ее сечений, являющимися изолированными точками. Все эти возможности, появление или исчезание пары точек, удвоение точки или слияние двух точек, а также появление или исчезание точки показаны на рис. 1 белыми и черными стрелками.

Какая же из этих перестроек реализуется «настоящими» ударными волнами, т.е. ударными волнами в задаче оптимального управления? В соответствии с хорошо известным энтропийным условием, возможны только две из них. А именно, слияние двух точек и появление одной точки — «настоящие» перестройки; они показаны на рис. 1 черными стрелками. Четыре запрещенных перестройки изображены белыми стрелками. Они могут быть объяснены также с помощью топологических ограничений: пустое множество и пара точек не стягиваемы.

2.4. Ударные волны на плоскости: $d = 2$. Пусть действие F — произвольная гладкая функция общего положения. Тогда мгновенная ударная волна в типичный момент времени — кривая, которая наряду с точками гладкости A_1^2 может иметь тройные точки A_1^3 и концевые точки A_3 ; те же особенности встречаются у мировой ударной волны в предыдущей размерности $d = 1$. Мировая ударная волна — это поверхность, которая наряду с точками гладкости A_1^2 может иметь следующие особенности: A_1^3 , A_3 , A_1^4 и A_1A_3 , изображенные на рис. 2. Особенности A_1^4 и A_1A_3 — новые по сравнению со случаем предыдущей размерности и встречаются в изолированных точках мировой ударной волны. Особенности A_1^3 и A_3 образуют кривые — тройные линии и ребра.

Поверхность общего положения с такими предписанными особенностями порождает 18 различных перестроек ее сечений изохронами; все они показаны на рис. 2 белыми и черными стрелками. Перестройка A_1^2 возникает, когда изохрона касательна к поверхности в точке гладкости, а перестройки A_1^3 и A_3 случаются при касании изохроны тройной линии или ребра. Однако незапрещенными являются только 9 перестроек в силу топологического ограничения и могут реализовываться «настоящими» ударными волнами. Они изображены черными стрелками. (Белыми стрелками обозначены запрещенные перестройки.)

2.5. Ударные волны в пространстве: $d = 3$. Пусть снова действие F — произвольная гладкая функция общего положения. Тогда мгновенная ударная волна в типичный момент времени — это поверхность, которая, наряду с точками гладкости A_1^2 , может иметь тройные линии A_1^3 , ребра A_3 , а также отдельные особенности A_1^4 и A_1A_3 ; те же особенности встречаются в мировых ударных волнах в предыдущей размерности $d = 2$. Мировая ударная волна помимо точек гладкости A_1^2 может иметь следующие особенности: A_1^3 , A_3 , A_1^4 , A_1A_3 , A_1^5 , $A_1^2A_3$ и A_5 . Особенности A_1^5 , $A_1^2A_3$ и A_5 — новые по сравнению с предыдущей размерностью и встречаются в изолированных точках мировой ударной волны. Особенности A_1^4 и A_1A_3 образуют кривые, а особенности A_1^3 и A_3 — поверхности.

В этом случае имеется 42 различные перестройки; все они изображены на рис. 3, 4 и 5 белыми и черными стрелками. Однако только 26 из них не запрещены топологическим ограничением и могут быть реализованы «настоящими» ударными волнами. Они изображены черными стрелками. (Белые стрелки обозначают запрещенные перестройки.)

2.6. Нормальные формы. Формулы, описывающие особенности ударных волн, приведены в таблице 1. Функции из второго столбца таблицы 1 — *нормальные формы* решения задачи оптимального управления в локальных гладких координатах $(\alpha, \beta, \dots)$ относительно сложения с гладкой функцией. Множество точек, в которых нормальные формы не гладки, описывает мировую ударную волну в окрестности точки с указанным именем. Ее координаты равны $\alpha = \beta = \dots = 0$. Вообще говоря, координаты $(\alpha, \beta, \dots)$ — криволинейные и перемешивают пространственные координаты x и время t . Кроме того, эти нормальные формы описывают решение задачи оптимального управления и его мгновенные ударные волны в типичные моменты времени. В этом случае $(\alpha, \beta, \dots)$ — локальные гладкие координаты на многообразии X .

Имя	Решение задачи управления	Время		
		$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
A_1^2	$\min\{\alpha, 0\}$	$\pm(\alpha + \beta^2)$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta^2 + \gamma^2) \\ \alpha + \beta^2 - \gamma^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \\ \pm(\alpha + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) \end{matrix}$
A_1^3	$\min\{\alpha, \beta, 0\}$	$\pm(\alpha + \beta)$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \gamma^2) \\ \pm(\alpha + \beta - \gamma^2) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \gamma^2 + \delta^2) \\ \pm(\alpha + \beta + \gamma^2 - \delta^2) \\ \pm(\alpha + \beta - \gamma^2 - \delta^2) \end{matrix}$
A_1^4	$\min\{\alpha, \beta, \gamma, 0\}$		$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \gamma) \\ \alpha + \beta - \gamma \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \gamma + \delta^2) \\ \pm(\alpha + \beta + \gamma - \delta^2) \\ \pm(\alpha + \beta - \gamma + \delta^2) \end{matrix}$
A_1^5	$\min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0\}$			$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ \pm(\alpha + \beta + \gamma - \delta) \end{matrix}$
A_3	$\min_p(p^4 + \alpha p^2 + \beta p)$	$\pm\alpha$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \gamma^2) \\ \pm(\alpha - \gamma^2) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \gamma^2 + \delta^2) \\ \pm(\alpha + \gamma^2 - \delta^2) \\ \pm(\alpha - \gamma^2 - \delta^2) \end{matrix}$
$A_1 A_3$	$\min \left\{ \alpha, \min_p(p^4 + \beta p^2 + \gamma p) \right\}$		$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta) \\ \pm(\alpha - \beta) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \delta^2) \\ \pm(\alpha + \beta - \delta^2) \\ \pm(\alpha - \beta - \delta^2) \\ \pm(\alpha - \beta + \delta^2) \end{matrix}$
$A_1^2 A_3$	$\min \left\{ \alpha, \beta, \min_p(p^4 + \gamma p^2 + \delta p) \right\}$			$\begin{matrix} \pm(\alpha + \beta + \gamma) \\ \pm(\alpha + \beta - \gamma) \\ \pm(\alpha - \beta + \gamma) \end{matrix}$
A_5	$\min_p(p^6 + \alpha p^4 + \beta p^3 + \gamma p^2 + \delta p)$			$\pm\alpha$

ТАБЛИЦА 1. Нормальные формы особенностей и перестройки ударных волн

Перестройки мгновенных ударных волн описываются *нормальными формами времени* из таблицы 1. Мировая ударная волна описывается вторым столбцом, а временная координата равна

$$t(\alpha, \beta, \dots) = t_* + \sigma(\alpha, \beta, \dots),$$

где t_* — момент перестройки, а σ — нормальная форма из трех столбцов, соответствующих размерностям $d = 1, 2, 3$, соответственно. Пустая клетка таблицы 1 означает, что соответствующая особенность мирового столкновения не встречается в данной размерности.

Перестройки при $d = 1, 2, 3$ из таблицы 1 изображены на рис. 1–5 стрелками. А именно, каждая перестройка показана тремя сечениями мирового сечения изохронами

$$t(\alpha, \beta, \dots) = t_- < t_*, \quad t(\alpha, \beta, \dots) = t_*, \quad t(\alpha, \beta, \dots) = t_+ > t_*.$$

Стрелки показывают направление от t_- к t_+ . $t_{\pm}$ -Сечения имеют только особенности общего положения, но одна точка t_* -сечения — точка не общего положения; она является точкой перестройки, а ее координаты равны $\alpha = \beta = \dots = 0$. Перестройки, не изменяющиеся при обращении времени, изображаются стрелками с двумя наконечниками $\updownarrow$ на рисунках, а их функции σ из таблицы 1 не содержат $\pm$. Знак « $\pm$ » в таблице 1 означает, что перестройка изменилась после обращения времени, $\up$ на рисунках означает $+$, а $\downarrow$ означает $-$.

К сожалению, если рассматривать только гладкие координаты, то было бы невозможным дать нормальные формы времени: должно существовать достаточно много непрерывных инвариантов. Другими словами, гладкая классификация перестроек мгновенных ударных волн бесконечна. Поэтому для описания перестроек ударных волн допускается, что координаты $(\alpha, \beta, \dots)$ непрерывно

дифференцируемы по сечениям, но, тем не менее, они должны быть гладкими вне мировых ударных волн. Значит, первые производные $\partial(\alpha, \beta, \dots)/\partial(\mathbf{x}, t)$ могут иметь скачки на самой мировой ударной волне.

Основной результат данной статьи — это следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $d \leq 3$, $T > 0$, а начальное условие — гладкая функция. Тогда любая перестройка мгновенной ударной волны до времени T описывается в некоторых координатах $(\alpha, \beta, \dots)$ парой нормальных форм из таблицы 1. Координаты $(\alpha, \beta, \dots)$ непрерывно дифференцируемы по сечениям и гладки вне мировой ударной волны.

Но встречаются не все перестройки из таблицы 1; для реальных перестроек локальная мгновенная ударная волна после перестройки должна быть стягиваемой. Такие перестройки изображены на рис. 1 ($d = 1$), рис. 2 ($d = 2$) и рис. 3–5 ($d = 3$) черными стрелками.

Замечание 1. Термин «общего положения» означает «из открытого плотного подмножества». Предполагается, что пространство всех гладких начальных условий снабжено так называемой топологией Уитни. Если $T = \infty$, то теорема справедлива только для некоторого плотного подмножества начальных условий, которое может и не быть открытым.

Замечание 2. Другой путь интерпретации данной классификации перестроек состоит в использовании гладких координат, но другой эквивалентности решений задачи оптимального управления. А именно, вместо прибавления гладкой функции допускается диффеоморфизм графиков решения и его нормальной формы в то же время. Все детали этого обсуждаются в п. 3.3.

2.7. Гладкость F . В данной работе предполагается бесконечная дифференцируемость действия F , которая гарантируется бесконечной дифференцируемостью начального условия φ_0 и гамильтониана H . Возможно, что теорема 1 верна и в случае, когда $F \in C^{d+3}$ по всем переменным $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$. Тогда координаты $(\alpha, \beta, \dots)$ из теоремы 1 непрерывно дифференцируемы по сечениям, как и ранее, но только непрерывно дифференцируемы вне мировой ударной волны. Решающий момент в этом вопросе составляет лемма 1: замена h должна быть по крайней мере непрерывно дифференцируема.

3. ФУНКЦИИ МИНИМУМА

3.1. Семейства функций. Гладкая функция общего положения может иметь только невырожденные локальные минимумы A_1 . Все вырожденные минимумы могут быть убиты произвольно малым возмущением исходной функции. Другими словами, вырожденные минимумы неустойчивы относительно малых возмущений исходной функции. Например, p^4 — простейший вырожденный минимум A_3 в случае одной переменной, который становится невырожденным при возмущении $p^4 + \varepsilon p^2$, где $\varepsilon > 0$. Однако вырожденные минимумы становятся устойчивыми относительно малых возмущений, если рассматривать не сами функции, а их семейства. Например, семейство

$$F(p, \lambda) = p^4 + \lambda_1 p^2 + \lambda_2 p$$

функций от p , зависящее от параметра $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, имеет минимум A_3 , если $\lambda = 0$. Любое достаточно малое возмущение F^* семейства F приводит к вырожденному минимуму по p в некоторой точке $p = p_*$ для некоторых значений параметра $\lambda = \lambda_*$. Для нахождения p_* и λ_* достаточно решить систему уравнений $F_p^*(p_*, \lambda_*) = F_{pp}^*(p_*, \lambda_*) = F_{ppp}^*(p_*, \lambda_*) = 0$, которая имеет единственное решение согласно теореме о неявной функции (также как и такая же система для F).

Вообще говоря, вырожденный минимум A_{2j+1} может достигаться функцией, зависящей в общем положении от $n \geq 2j$ параметров, и может быть убит произвольно малым возмущением исходного семейства для меньших n . Следующая лемма 1 локально описывает все семейства общего положения, содержащие минимумы A_{2j+1} в случае одной переменной.

Лемма 1. Пусть функция $F(\cdot, \lambda_*)$ из семейства F общего положения функций от одной переменной, зависящего от $n \geq 2j$ параметров, имеет минимум A_{2j+1} в точке p_* . Тогда семейство F в окрестности точки (p_*, λ_*) может быть приведено к нормальной форме

$$F(p, \lambda) = p^{2j+2} + \lambda_1 p^{2j} + \dots + \lambda_{2j} p$$

с помощью гладкой замены $\lambda \mapsto h(\lambda)$ параметров, гладкой замены переменных $p \mapsto g(p, \lambda)$, гладко зависящей от параметров, а также добавлением $F(p, \lambda) \mapsto F(p, \lambda) + c(\lambda)$ гладкой функции от параметров.

Доказательство. В самом деле, после замены $p \mapsto p + p_*$ можно написать

$$F(p, \lambda) = a(p, \lambda)p^{2j+2} + b_0(\lambda)p^{2j+1} + b_1(\lambda)p^{2j} + \dots + b_{2j}(\lambda)p + c(\lambda),$$

где $a(0, \lambda_*) = 1$ и $b_0(\lambda_*) = b_1(\lambda_*) = \dots = b_{2j}(\lambda_*)$. Замена $p \mapsto p / \sqrt[2j+2]{a(p, \lambda)}$ дает $a \equiv 1$, а замена $p \mapsto p - b_0(p, \lambda)/(2j+2)$ убивает b_0 . Остается рассмотреть $b_1, \dots, b_{2j}$ как новые параметры в окрестности λ_* (принимая во внимание, что F — общего положения) и убить c . Лемма доказана. $\square$

Минимум X_9 встречается в семействах функций общего положения только в случае, когда число параметров $n \geq 7$. А именно, три вторых производных и четыре третьих производных должны быть равными 0; получаем в точности 7 лишних условий для точки минимума.

3.2. Особенности. Пусть $F(\mathbf{p}, \lambda)$ — семейство функций от $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$, гладко зависящее от параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда функция

$$\varphi(\lambda) = \min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, \lambda)$$

называется *функцией минимума* семейства F . По определению, *ударная волна* семейства F — это замыкание $\bar{S}(F)$ множества

$$S(F) = \{\lambda \mid \exists \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2 : \varphi(\lambda) = F(\mathbf{p}_1, \lambda) = F(\mathbf{p}_2, \lambda)\},$$

состоящего из таких точек, что функция F достигает своего минимума по $\mathbf{p}$ в двух различных точках.

Если семейство F гладко, а функция $F(\cdot, \lambda_*)$ имеет только невырожденный глобальный минимум, то функция минимума φ гладка в окрестности точки λ_* . Если же функция $F(\cdot, \lambda_*)$ достигает глобального минимума в нескольких точках или если точка ее глобального минимума вырождена, то функция минимума φ может иметь особенности в точке λ_* . Другими словами, если

$$\mathcal{S}(\varphi) = \{\lambda \mid \varphi \notin C^\infty(\lambda)\}$$

обозначает множество точек, в которых φ не гладка, то $\mathcal{S}(\varphi) \subset \bar{S}(F)$.

Для исследования особенностей функции минимума гладких семейств общего положения заметим, что если число параметров $n \leq 6$, то достаточно рассматривать только функции одной переменной. В самом деле, если $n \leq 6$, а функция $F(\cdot, \lambda_*)$ достигает минимума в точке $\mathbf{p}_*$, то получаем, что $\text{rank } \|F_{\mathbf{pp}}(\mathbf{p}_*, \lambda_*)\| \geq d - 1$, так как случай $d - 2$ требует, по крайней мере, семи параметров. Пусть, например,

$$\det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial (p_2, \dots, p_d)^2} \right\| \neq 0;$$

тогда

$$\varphi(\lambda) = \min_p \tilde{F}(p, \lambda), \quad \tilde{F}(p_1, \lambda) = \min_{p_2, \dots, p_d} F(\mathbf{p}, \lambda),$$

где $\tilde{F}$ — гладкое семейство гладких функций от одной переменной.

Если F — семейство гладких функций общего положения, гладко зависящее от $n \leq 4$ параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, то возможны только следующие комбинации минимумов на одном и том же уровне:

- A_1 ;
- A_1^2 при $n \geq 1$;
- A_1^3, A_3 при $n \geq 2$;
- $A_1^4, A_1 A_3$ при $n \geq 3$;
- $A_1^5, A_1^2 A_3, A_5$ при $n = 4$.

Например, комбинация $A_1^2 A_3$ означает, что рассматриваемая функция имеет два минимума A_1 , один минимум A_3 , причем значения этой функции в этих точках одинаковы.

Применяя лемму 1 во всех этих случаях к последнему минимуму и рассматривая значения других минимумов A_1 как новые параметры, получаем следующую теорему.

Теорема 2 (см. [5]). *Если F — семейство общего положения гладких функций, гладко зависящее от $n \leq 4$ параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, то его функция минимума*

$$\varphi(\lambda) = \min_p F(p, \lambda)$$

может быть сведена к одной из следующих нормальных форм с $k \leq n$ в окрестности точки λ_ :*

- A_1^{k+1} , $k \geq 0$: $\min\{\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0\}$;
- $A_1^{k-2} A_3$, $k \geq 2$: $\min\left\{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \min_p(p^4 + \lambda_{k-1}p^2 + \lambda_k p)\right\}$;
- A_5 , $k = 4$: $\min_p(p^6 + \lambda_1 p^4 + \lambda_2 p^3 + \lambda_3 p^2 + \lambda_4 p)$,

с помощью гладкой замены параметров и добавления к ним гладкой функции от этих параметров. Кроме того, $\mathcal{S}(\varphi) = \bar{\mathcal{S}}(F)$ для семейства F общего положения и для любого $n < \infty$.

Эти нормальные формы приведены в таблице 1, где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)$. Все они, кроме A_1 , не гладки в некоторых точках, образующих ударную волну в λ -пространстве. Ударная волна гладка в случае A_1^2 ($\lambda_1 = 0$), имеет край в случае A_3 ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 = 0$) и обладает более сложными особенностями в остальных случаях. Каждая из ударных волн — цилиндр с $(n - k)$ -мерными образующими. «Наиболее» особые точки определяются уравнениями $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ и называются точками типа A_1^{k+1} , $A_1^{k-2} A_3$ или A_5 . Любая другая точка имеет тип с меньшим k . Эти ударные волны интерпретируются как мировые, если $n = d + 1$, и как мгновенные ударные волны в типичные моменты времени, если $n = d$, при условии, что действие F — гладкая функция общего положения. Но мгновенные ударные волны могут подвергаться перестройкам в отдельные моменты времени, которые пока нами не описаны.

3.3. Перестройки. Пусть $F(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ — семейство функций переменной $\mathbf{p}$, гладко зависящее от точки $\lambda = (\mathbf{x}, t)$, $\bar{\mathcal{S}}(F) \subset X \times \mathbb{R}$ — мировая ударная волна семейства F , а $\varphi(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ — ее функция минимума.

Для исследования перестроек мгновенных ударных волн рассмотрим следующую эквивалентность мировых ударных волн:

$$\bar{\mathcal{S}}(F') \sim \bar{\mathcal{S}}(F) \iff \bar{\mathcal{S}}(F') = \mathbf{g}(\bar{\mathcal{S}}(F)),$$

где

$$\mathbf{g} : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}, \quad (\cdot, t) \mapsto (\cdot, t + t_*)$$

— непрерывно дифференцируемый по сечениям гомеоморфизм пространства-времени, сдвигающий время и являющийся диффеоморфизмом вне самих мировых ударных волн.

Замечание 3. К сожалению, если предположить, что $\mathbf{g}$ диффеоморфно всюду, то получим бесконечную локальную классификацию перестроек ударных волн даже в случае, когда F — общего положения, а $d = 2$. Допущение гладких замен времени вместо сдвигов не исправляют ситуацию. Например, мгновенная ударная волна в момент второй перестройки A_1^4 на плоскости (см. рис. 2) будет иметь по крайней мере один непрерывный инвариант — перекрестное отношение четырех лучей.

Для получения $\mathbf{g}$ рассмотрим график

$$\Gamma(\varphi) = \{(y, \mathbf{x}, t) \in \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R} \mid y = \varphi(\mathbf{x}, t)\}$$

функции минимума φ и определим следующее отношение эквивалентности двух графиков:

$$\Gamma(\varphi') \sim \Gamma(\varphi) \iff \Gamma(\varphi') = \mathbf{G}(\Gamma(\varphi)),$$

где

$$\mathbf{G} : \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}, \quad (\cdot, \cdot, t) \mapsto (\cdot, \cdot, t + t_*)$$

— диффеоморфизм, сдвигающий время. Тогда

$$\mathbf{g} = \pi \circ \mathbf{G} \circ \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} : (\mathbf{x}, t) \mapsto (\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t), \quad \pi : (y, \mathbf{x}, t) \mapsto (\mathbf{x}, t).$$

Теорема 3 (см. [3]). *Если F — гладкое семейство общего положения и $d \leq 3$, то все перестройки мгновенных ударных волн локально описываются таблицей 1 относительно определенной выше эквивалентности.*

В теореме 2 указаны нормальные формы мировых ударных волн при $n = d + 1$, однако редуцирующие замены переменных перемешивают пространственные и временные координаты. Другими словами, λ -координаты теоремы 2 зависят от $\mathbf{x}$ и t . После такого перемешивания можно представить время как гладкую функцию общего положения λ , не имеющую критических точек. В случаях теоремы 2 такая функция t описывает перестройку мгновенной ударной волны, если ее сужение на множество «наиболее» особых точек $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$ имеет критическую точку, либо $k = d + 1$. Сдвигая координаты $(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{d+1})$, получаем

$$t(\lambda) = t_* + \sigma(\lambda), \quad \sigma(0) = 0, \quad \sigma_{\lambda_{k+1}}(0) = \dots = \sigma_{\lambda_{d+1}}(0) = 0.$$

График функции минимума φ есть подмножество фронта $\Sigma(F)$, порожденного семейством F :

$$\Gamma(\varphi) \subset \Sigma(F) = \{(y, \mathbf{x}, t) \in \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{p} : y = F(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), F_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = 0\}.$$

Если функция $F(\cdot, \mathbf{x}_*, t_*)$ имеет m глобальных минимумов с одним и тем же минимальным значением y_* , то в окрестности точки $(y_*, \mathbf{x}_*, t_*)$ фронт $\Sigma(F)$ состоит из m ветвей. В случаях теоремы 2, перемешивая y и λ , можно определить фронт $\Sigma(F)$ более симметрично:

$$\Sigma(F) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^l \mid \exists p : P(p) = P'(p) = 0\}$$

где $l = d + 1 - k$, в случаях

- A_1^{k+1} : $m = k + 1$ и $P = \xi_1 \dots \xi_{k+1}$;
- $A_1^{k-2} A_3$: $m = k - 1$ и $P = \xi_1 \dots \xi_{k-2}(p^4 + \xi_{k-1}p^2 + \xi_k p + \xi_{k+1})$;
- A_5 , $k = 4$: $m = 1$ и $P = p^6 + \xi_1 p^4 + \xi_2 p^3 + \xi_3 p^2 + \xi_4 p + \xi_5$.

А именно,

$$\xi_1 = \lambda_1 - y, \dots, \xi_{m-1} = \lambda_{m-1} - y, \xi_m = \lambda_m, \dots, \xi_k = \lambda_k, \xi_{k+1} = y, \\ \eta_1 = \lambda_{k+1}, \dots, \eta_l = \lambda_{d+1}.$$

Пусть $T : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция без критических точек такая, что

$$T_{\xi_1}(0) \neq 0, \dots, T_{\xi_m}(0) \neq 0; \tag{3}$$

если $l > 0$, то ее сужение на плоскость $\xi = 0$ имеет 0 в качестве невырожденной критической точки:

$$T_{\eta_1}(0) = \dots = T_{\eta_l}(0) = 0, \quad \det \|T_{\eta\eta}(0)\| \neq 0. \tag{4}$$

Расширенное имя T кодирует одну из нормальных форм A_1^{k+1} , $A_1^{k-2} A_3$ или A_5 для $\Sigma(F)$ и знаки первых производных (3). Например, A_1^{++++} означает A_1^5 и указывает, что среди 5 чисел (3) имеются два положительных и три отрицательных (порядок не важен: в расширенных именах плюсы всегда идут перед минусами); $A_1^{+-} A_3^+$ означает $A_1^2 A_3$ и указывает, что одно из чисел $T_{\xi_1}(0)$ и $T_{\xi_2}(0)$ положительно, а другое отрицательно и число $T_{\xi_3}(0)$ положительно; A_5^- означает A_5 и указывает, что $T_{\xi_1}(0) < 0$.

Если $l \neq 0$, то сигнатурой функции T называется сигнатура ее второго дифференциала (4); она обозначается через $[p, q]$, где $p + q = l$.

Укажем несколько примеров. В случае A_1^2 , $l = 2$ функция $-\xi_1 + \xi_2 - \eta_1 \eta_2$ имеет расширенное имя A_1^{+-} и сигнатуру $[1, 1]$; в случае A_3 , $l = 1$ функция $\xi_1 - \xi_3 - \eta_1^2$ имеет расширенное имя A_3^+ и сигнатуру $[0, 1]$; в случае $A_1 A_3$, $l = 1$ функция $-\xi_1 - \xi_2 + \eta_1^2$ имеет расширенное имя $A_1^- A_3^-$ и сигнатуру $[1, 0]$; в случае A_5 , $l = 0$ функция имеет расширенное имя A_5^- .

Теорема 3 следует из нижеследующей теоремы 4, доказанной в [6].

Теорема 4 (см. [6]). Пусть две гладкие функции не имеют критических точек, удовлетворяют (3) и (4), а также имеют одинаковые расширенные имена и одну и ту же сигнатуру. Тогда они могут быть переведены одна в другую с помощью диффеоморфизма, сохраняющего нормальную форму $\Sigma(F)$.

В самом деле, переносы теоремы 4 осуществляются с помощью векторных полей, касательных к $\Sigma(F)$ (см. [6]). Они, конечно, тоже касательны и к $\Gamma(F)$. Пусть $T = \sigma \circ \pi$. Расширенное имя T может быть произвольным, за исключением $A_1^{+\dots+}$ и $A_1^{-\dots-}$, так как $T_{\xi_1} + \dots + T_{\xi_m} = 0$ в случае A_1^m ($y = \xi_1 + \dots + \xi_m$ и T не зависят от y). Однако нормальные формы σ , перечисленные в таблице 1, дают все возможные комбинации сигнатур и расширенных имен для T в том числе и с этими исключениями.

3.4. Случай, когда F — действие. Если F — действие, порожденное фиксированным гладким гамильтонианом H , то фронт $\Sigma(F)$ — многозначное решение уравнения Гамильтона—Якоби с начальным условием φ_0 . Значит, если начальное условие φ_0 — общего положения, то выполнены условия (3) и (4) (это доказано в [4] для многозначного решения уравнения Гамильтона—Якоби с любым гладким гамильтонианом). Следовательно, теорема 3 также верна в этой ситуации.

4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Пусть $(\mathbf{x}_*, t_*) \in X \times \mathbb{R}$ — изолированная перестройка мгновенной ударной волны. Это означает, что точка $(\mathbf{x}_*, t_*)$ имеет окрестность $\mathcal{V} \subset X \times \mathbb{R}$ такую, что в $\mathcal{V}$ нет других перестроек.

Теорема 5. Для достаточно малого открытого шара $\mathcal{B} \subset X$, содержащего $\mathbf{x}_*$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ локальные мгновенные ударные волны $\bar{S}_t \cap \mathcal{B}$ стягиваемы (гомотопически эквивалентны точке) при всех $t \in [t_*, t_* + \varepsilon)$.

Впервые теорема 5 была сформулирована и доказана в 1989 г. в [3] только для случая перестроек общего положения, когда $d \leq 3$. Однако доказательство не было топологическим. А именно, это ограничение было алгебраическим и запрещало некоторые перестройки из списка перестроек общего положения. Оказалось, что эти перестройки суть в точности те же перестройки, которые запрещены топологическим ограничением выше. Для топологического объяснения этого обстоятельства, Ю. М. Барышников в 1990 г. в [2, 7] предложил и доказал другое ограничение, справедливое для всех (по крайней мере изолированных) перестроек для всех размерностей.

Теорема 6 (см. [2]). Для достаточно малого открытого шара $\mathcal{B} \subset X$, содержащего $\mathbf{x}_*$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ локальные дополнения $\mathcal{B} \setminus \bar{S}_t$ к мгновенным ударным волнам гомотопически эквивалентны друг другу при всех $t \in [t_*, t_* + \varepsilon)$.

Замечание 4. В оригинальной форме эта теорема была сформулирована и доказана в [2] для классической задачи вариационного исчисления с выпуклым лагранжианом $L_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \geq 0$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{u}$. Однако, как это будет показано ниже, она применима и к рассматриваемому случаю.

Легко проверяется, что в случае перестроек общего положения, если $d \leq 3$, то эти два ограничения эквивалентны друг другу. На самом деле, они эквивалентны для всех изолированных перестроек. В самом деле, грубо говоря, сами ударные волны гомотопически эквивалентны в том и только том случае, если их дополнения гомотопически эквивалентны. Например, для гомотопий это непосредственно следует из двойственности Александра между $(\bar{S}_t \cap \mathcal{B}) \cup \partial\mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \setminus \bar{S}_t$, где $\partial\mathcal{B}$ — граница шара. Но мгновенная ударная волна $\bar{S}_{t_*} \cap \mathcal{B}$ в момент перестройки стягиваема при достаточно малом шаре $\mathcal{B}$!

Ниже будет объяснено, почему гомотопические и гомотопические группы дополнений к $\mathcal{B} \setminus \bar{S}_t$ одинаковы при $t \in [t_*, t_* + \varepsilon)$. Эти обстоятельства вытекают из теоремы 6 и достаточны для всех приложений. На самом деле, получаем слабую гомотопическую эквивалентность, из которой следует сильная для CW -комплексов. Все детали можно найти в [2].

Начнем со следующего простого факта. Пусть

$$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots, \quad \mathcal{U}_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i,$$

— бесконечная последовательность открытых подмножеств в X такая, что вложения $\mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{U}_{i+1}$ индуцируют изоморфизмы

$$H_*(\mathcal{U}_i) \cong H_*(\mathcal{U}_{i+1}), \quad \pi_*(\mathcal{U}_i) \cong \pi_*(\mathcal{U}_{i+1})$$

гомологических и гомотопических групп. Но их определение использует только компактные подмножества, а сами рассматриваемые множества открыты; поэтому получаем изоморфизмы

$$H_*(\mathcal{U}_i) \cong H_*(\mathcal{U}_\infty), \quad \pi_*(\mathcal{U}_i) \cong \pi_*(\mathcal{U}_\infty).$$

Если вложения не индуцируют изоморфизмов, то

$$\varinjlim H_*(\mathcal{U}_i) = H_*(\mathcal{U}_\infty), \quad \varinjlim \pi_*(\mathcal{U}_i) = \pi_*(\mathcal{U}_\infty).$$

Пусть $\mathcal{U}_t$ — множество начальных точек минимальных траекторий, кончающихся вне мгновенной ударной волны $\bar{S}_t$ в момент времени t . Это множество открыто и диффеоморфно дополнению $X \setminus \bar{S}_t$ ударной волны, поскольку гамильтониан гладкий, а гамильтоновы уравнения имеют единственное решение. Кроме того, это множество убывает:

$$\mathcal{U}_{t_1} \subset \mathcal{U}_{t_2}, \quad \text{если } t_1 > t_2,$$

в соответствии с принципом Беллмана. Наконец,

$$\mathcal{U}_{t_*} = \bigcup_{t > t_*} \mathcal{U}_t.$$

Предположим теперь, что нет совсем перестроек при $t \in (t_*, t_* + \varepsilon)$. Это означает, что вложения $\mathcal{U}_{t_1} \hookrightarrow \mathcal{U}_{t_2}$ индуцируют изоморфизмы

$$H_*(\mathcal{U}_{t_1}) \cong H_*(\mathcal{U}_{t_2}), \quad \pi_*(\mathcal{U}_{t_1}) \cong \pi_*(\mathcal{U}_{t_2})$$

гомологий и гомотопий при $t_* + \varepsilon > t_1 > t_2 > t_*$. Аналогично предыдущему для последовательностей, получаем изоморфизмы

$$H_*(\mathcal{U}_t) \cong H_*(\mathcal{U}_{t_*}), \quad \pi_*(\mathcal{U}_t) \cong \pi_*(\mathcal{U}_{t_*})$$

при $t \in (t_*, t_* + \varepsilon)$.

Для изолированной перестройки можно рассмотреть момент времени t_* как начальный, а множества $\mathcal{U}_t \cap \mathcal{B}$ — как $\mathcal{U}_t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Гусейн-Заде С. М., Варченко А. М. Особенности дифференцируемых отображений, Т. 1. — М., Наука, 1982. — 302 с.
2. Барышников Ю. М. Топология перестроек множеств негладкости функций минимума вариационных задач// Функц. анализ и его прил. — 1990. — 24, № 3. — С. 62–63.
3. Богаевский И. А. Метаморфозы особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью// Алгебра и анализ. — 1990. — 1, № 4. — С. 807–823.
4. Богаевский И. А. Перестройки фронтов в эволюционных семействах// Тр. Мат. ин-та РАН. — 1995. — 9. — С. 65–83.
5. Брызгалова Н. Н. Особенности максимума функции, зависящей от параметров// Функц. анализ и его прил. — 1977. — 11, № 1. — С. 59–60.
6. Arnol'd V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma// Commun. Pure and Appl. Math. — 1976. — 29, № 6. — С. 557–582.
7. Arnol'd V. I., Baryshnikov Yu. M., Bogaevsky I. A. Singularities and bifurcations of potential flows// Gurbatov S. N., Malakhov A. N., Saichev A. I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays, particles. — Manchester: Manchester Univ. Press, Manchester, 1991. — С. 290–300.
8. Bogaevsky I. A. Perestroikas of shocks and singularities of minimum functions// Phys. D. — 2002. — 173, № 1–2. — С. 1–28.

И. А. Богаевский

Московский Независимый университет

E-mail: bogaevsk@mcsme.ru

ОСОБЕННОСТИ КАУСТИК В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕНОСОВ

© 2003 г. **В. М. ЗАКАЛЮКИН**

Аннотация. Теория особенностей каустик и волновых фронтов применяется для изучения особенностей экспоненциальных отображений в классе задач управления, соответствующих специальным интегрируемым гамильтоновым системам, экстремали которых — прямые линии. Классификация особенностей в такой задаче — чисто геометрическая и ясно обозримая задача.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	128
2. Производящие семейства	129
3. Гиперповерхностный случай	131
4. Маломерное стартовое многообразие	133
Список литературы	134

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория особенностей каустик и волновых фронтов применяется для изучения особенностей экспоненциальных отображений, соответствующих специальным интегрируемым гамильтоновым системам, экстремали которых являются прямыми. На этом пути классификация особенностей становится чисто геометрической и визуальной задачей.

С управляемой системой на аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, инвариантной относительно аффинных преобразований, свяжем следующее семейство движущихся волновых фронтов.

Отождествим касательное пространство $T_q\mathbb{R}^n$ с самим пространством $\mathbb{R}^n$. Выберем в любой точке $q \in \mathbb{R}^n$ множество (индикатрису) I_q допустимых скоростей $\dot{q}$ движения, не зависящее от точки q . Предположим, что это множество — подмногообразие, локально параметризованное регулярным отображением $y \mapsto r(y)$, $y \in \mathbb{R}^k$.

Пусть $q(t)$ — абсолютно непрерывная (или кусочно-гладкая и непрерывная) траектория допустимого движения ($\dot{q} \in I_q$ почти всюду), исходящая из начального множества M при $t = 0$. Предположим, что M — m -мерное гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим для фиксированного t_0 отображение вход-выход $\mathcal{E} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{C}$ — банахово многообразие всех допустимых траекторий, определенных на отрезке $[0, t_0]$), которое сопоставляет каждой траектории $q(t)$ ее конечную точку $q(t_0)$.

Хорошо известно (это является модификацией принципа максимума Понтрягина; подробнее см., например, [3], [1]), что критические значения отображения $\mathcal{E}$ — это след всех экстремальных траекторий при всех t_0 , которые в рассматриваемом случае являются проекциями на $\mathbb{R}^n$ решений ассоциированных канонических гамильтоновых уравнений

$$\dot{q} = \frac{\partial H_*(p, q)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_*(p, q)}{\partial q}$$

на кокасательном расслоении с гамильтонианом $H_*(p, q)$ на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{R}^n$, которое в рассматриваемом случае есть (вообще говоря, многозначное) сужение на подмногообразие

Работа поддержана INTAS (проект № 00259), UNIRO, NWO (проект № 047008005), а также Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 02-01-0099).

$\left\{ (p, q) \mid \exists y : \frac{\partial H(p, q, y)}{\partial y} = 0 \right\}$ функции $H = \langle p, r(y) \rangle$ в предположении, что начальные условия (p_0, q_0) удовлетворяют равенству $\langle p_0, v \rangle = 0$ для каждого вектора v , касательного к многообразию M в точке q_0 . Угловые скобки здесь обозначают стандартное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ векторов из $\mathbb{R}^n$ и ковекторов p двойственного пространства $(\mathbb{R}^n)^\wedge$.

Очевидно, что экстремали — прямые линии (параметризованные с помощью параметра $t \in \mathbb{R}$) $q_0 + tv$, $q_0 \in M$, $v \in I$, такие, что существует ковектор p_0 , аннулирующий касательные пространства $T_{q_0}M$ и $T_v I$. Точки, лежащие на этих кривых, при фиксированном t образуют волновой фронт M_t лагранжева многообразия L_t , которое, по определению, есть образ лагранжева многообразия L_0 начальных условий при действии гамильтонова потока.

Огибающая $E(M, I)$ этих экстремалей есть объединение множеств критических значений отображения $\mathcal{E}_{t_0}$ при всех t_0 .

Если $k = n - 1$, то волновые фронты M_t на самом деле образуют семейство равноудаленных точек в финслеровой геометрии. Рассмотрим финслерову метрику на аффинном пространстве A , инвариантную относительно переносов. Эта метрика — функция на кокасательном пространстве T^*A , инвариантная относительно переносов. Любое неособое множество уровня этой функции, рассматриваемой как гамильтониан (например, риманова метрика определяет гамильтониан, являющийся квадратичной формой на слоях) определяет множество финслеровых геодезических. Так как гамильтониан инвариантен относительно переносов, то эти геодезические — прямые линии. Множество $M \subset A$ начальных данных порождает семейство финслеровых равноудаленных точек (эквидистант) I_t .

Классификация особенностей множества $E(M, I)$ в случае, когда M и I — гиперповерхности, аналогична результатам [7] об особенностях семейства хорд. Хорды — это прямые, соединяющие пары точек двух гиперповерхностей аффинного пространства, в которых касательные пространства к ним параллельны друг другу [6, 9]. Эти особенности обобщают особенности семейств нормалей к гиперповерхности в евклидовом пространстве и исследуются с помощью теории лежандровых особенностей [2, 4].

Ниже рассматриваемая задача будет сведена к задаче классификации особенностей общего положения специальных семейств функций с параметрами для всевозможных малых размерностей M и I и будет установлено, что особенности общего положения устойчивы и просты.

2. ПРОИЗВОДЯЩИЕ СЕМЕЙСТВА

Классификация особенностей основана на следующих стандартных определениях и результатах (см., например, [2, 4, 8]) об особенностях семейств функций, зависящих от двух групп параметров (пространственно-временных разверток).

Росток семейства $F(z, w)$ функций от $z \in \mathbb{R}^k$ с параметрами $w = (t, q) \in \mathbb{R}_e^{n+1}$, где $t \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}^n$, определяет следующий набор многообразий.

Послойное критическое множество — множество $\mathcal{C}_F \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ решений (z, w) так называемых *уравнений Лежандра*

$$F(z, w) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(z, w) = 0.$$

Большой волновой фронт (или *дискриминант*) — множество

$$W(F) = \{w = (t, q) \mid \exists z : (z, w) \in \mathcal{C}_F\}.$$

Пересечение (большого) волнового фронта с поверхностью $t = \text{const}$ называется *мгновенным* волновым фронтом $W_t(F)$.

Бифуркационное множество $\text{Bif}(F)$ есть образ точек из $W(F)$ при проекции $\pi : (t, q) \mapsto q$, в которых сужение $\pi|_{W(F)}$ не является регулярной проекцией гладкого подмногообразия. Проекции особых точек $W(F)$ образуют *каусты* $\Sigma(F)$, а замыкание множества сингулярных проекций регулярных точек $W(F)$ — *криминант* $\Delta(F)$.

Лагранжево подмногообразие $\Lambda(F)$ — это подмногообразие проективизации кокасательного расслоения $PT^*(\mathbb{R}^{n+1})$, определяемое по формуле

$$\Lambda(F) = \left\{ (w, \bar{w}) \mid \exists z, (z, w) \in \mathcal{C}_F, \bar{w} = \left[\frac{\partial F}{\partial w} \right] \right\},$$

где $[]$ — проективизация вектора.

Семейство F называется *порождающим* семейством для $\Lambda(F)$.

Росток $\Lambda(F)$ — гладкий, если уравнения Лежандра локально регулярны, т.е. выполнено стандартное условие Морса (см., например, [4]).

Ростки семейств F_i , $i = 1, 2$, называются *v-эквивалентными*, если существуют ненулевая функция $\phi(z, t, q)$ и диффеоморфизм $\theta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1}$ вида $\theta : (z, t, q) \mapsto (X(z, t, q), T(t, q), Q(q))$ такие, что $\phi F_1 = F_2 \circ \theta$.

Семейства называются *r-эквивалентными*, если существуют ненулевая функция $\phi(z, t, q)$ и диффеоморфизм $\theta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1}$ вида $\theta : (z, t, q) \mapsto (X(z, t, q), t + \psi(q), Q(q))$ такие, что $\phi F_1 = F_2 \circ \theta$ с некоторой гладкой функцией ψ .

Сумма семейства $F(z, t, q)$ с невырожденной квадратичной формой от дополнительных переменных $y_1, \dots, y_m$ называется *стабилизацией* F . Два ростка семейств *стабильно* $*$ -эквивалентны, если они $*$ -стабилизации этого же семейства в лишних переменных (звездочка обозначает одну из вышеприведенных v - или r -эквивалентностей).

Дискриминанты стабильно c -эквивалентных семейств диффеоморфны и бифуркационные множества стабильно v -эквивалентных (r -эквивалентных) семейств диффеоморфны.

Лежандровы подмногообразия L_F c -стабильно эквивалентных семейств эквивалентны по Лежандру: росток θ определяет контактный морфизм проективизованного кокасательного расслоения $PT^*\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющий слои и отображающий одно лежандрово многообразие в другое.

Кроме того, большой волновой фронт $W(F)$ единственным образом определяет класс устойчивой c -эквивалентности его производящего семейства F , если регулярные точки образуют плотное подмножество в $W(F)$.

Критические точки проекции $\pi|_{W(F)}$ удовлетворяют уравнению

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как первые k элементов $\frac{\partial F}{\partial z}$ первой строки обращаются в нуль в точке из $W(F)$, то определитель факторизуется. Следовательно, бифуркационное множество $B(F)$ расщепляется на две компоненты. Одна из них (криминант $\Delta(F)$) есть образ подмногообразия в $\mathcal{C}_F$ при проекции $(z, t, q) \mapsto q$ в (z, t, q) -пространство, определяемое уравнением $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Другая компонента (*каустика* $\Sigma(F)$) есть образ подмногообразия в $\mathcal{C}_F$ при проекции $(z, t, q) \mapsto q$ в (z, t, q) -пространстве, определяемое уравнением $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = 0$.

Справедлива следующая версия принципа Гюйгенса: криминант совпадает с волновым фронтом F , рассматриваемым как семейство по переменным z и t с параметрами q .

Семейства с диффеоморфными каустиками называются *слабо* эквивалентными.

Стандартные рассуждения теории особенностей (см., например [4]) показывают, что условия версальности и инфинитезимальной версальности c - или v -групп дают устойчивость волновых фронтов или бифуркационных множеств (малое возмущение версального семейства порождает волновой фронт или бифуркационное множество, диффеоморфное невозмущенному).

В частности, будем использовать следующий стандартный результат (см. [4]) о выпрямлении векторных полей, трансверсальных устойчивым волновым фронтам. Обозначим через $\mathcal{O}_x$ алгебру ростков (в начале координат) гладких функций от переменных x , а через $\mathcal{M}_x$ — максимальный

идеал в $\mathcal{O}_x$. Если росток развертки $F(z, t, q) \in \mathcal{M}_{z,t,q}$ функций от u с параметрами t и q версален относительно правой эквивалентности и $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$, то семейство r -устойчиво.

Пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — локальные параметризации M и I вблизи различных точек a_0 и b_0 , определенные на окрестностях U и V начала координат в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^k$, соответственно, с локальными координатами x и y , удовлетворяющие условиям $\mathbf{r}_1(0) = a_0$ и $\mathbf{r}_2(0) = b_0$.

Определение 2.1. Производящим семейством $\mathcal{F}$ пары M, I называется семейство функций $x, y, p \in U \times V \times ((\mathbb{R}^n)^\wedge \setminus \{0\}, 0)$ с параметрами $\lambda, q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ вида

$$\mathcal{F}(x, y, p, \lambda, q) = \langle \mathbf{r}_1(x) + t\mathbf{r}_2(y) - q, p \rangle.$$

Предложение 2.2. Мгновенные волновые фронты $W_t(\mathcal{F})$ совпадают с волновыми фронтами M_t , а бифуркационное множество $\text{Bif}(\mathcal{F})$ — с критическим множеством $E(M, I)$ задачи управления, определяемой начальным фронтом M и индикатрисой I .

Доказательство. Ясно, что из уравнений $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = 0$ следует равенство $\mathbf{r}_1(x) + t\mathbf{r}_2(y) - q = 0$. Заметим, что так как $\mathcal{F}$ — однородная функция от p степени 1, то она равна подходящей линейной комбинации ее производных относительно p . Поэтому из уравнений $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = 0$ также следует, что $\mathcal{F} = 0$.

Из условий $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0$ следует равенство $\left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x}, p \right\rangle = 0$. Это означает, что гиперплоскость $\langle p, \cdot \rangle = 0$ аннулирует все касательные векторы к M в точке $\mathbf{r}_1(x)$. Вместе с уравнениями $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0$ это означает, что p — общая конормаль к касательным плоскостям к M и I в соответствующих точках. Отсюда следуют оставшееся утверждение предложения. $\square$

3. ГИПЕРПОВЕРХНОСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Если $k = m = n - 1$, то конормаль p к M, a и I, b определяется с точностью до скалярного множителя. Локально изучая семейство $\mathcal{F}$, различаем следующие два случая: трансверсальный случай, когда b не аннулируется p , и касательный случай, когда $\langle p, b \rangle = 0$.

В трансверсальном случае можно выбрать координаты $q = (h, s_1, \dots, s_{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$ такие, что $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $b_0 = (1, 0, \dots, 0)$, а гиперплоскости, касательные к M, a_0 и I, b_0 , параллельны координатной гиперплоскости $h = 0$.

Возьмем локальные параметризации M и I в форме Монжа:

$$\mathbf{r}_1(x) = (f(x), x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \mathbf{r}_2(y) = (1 + g(y), y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$ и $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in V$, U и V — окрестности начала координат в $\mathbb{R}^{n-1}$, а гладкие функции f и g имеют нулевую 1-струю в начале координат, $f \in \mathcal{M}_x^2$ и $g \in \mathcal{M}_y^2$.

Лемма 3.1. Росток семейства $\mathcal{F}$ в точке $x = 0$, $y = 0$, $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $t = t_0$, $q_0 = (h_0, 0, \dots, 0)$, $h_0 = t_0$ (соответствующей точке $q_0 = a_0 + t_0 b_0$ на экстремали, проходящей через a_0) стабильно r -эквивалентен ростку следующего семейства G функций от $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ с параметрами $q = (h, s)$, t в точке $y = 0$, $t = t_0$, $q = q_0 = (h_0, 0)$:

$$G = -h + f(s - ty) + t(1 + g(y)).$$

Доказательство. Семейство $\mathcal{F}$ отличается от его сужения $\mathcal{F}_r$ на подпространство $p = (1, p_1, \dots, p_{n-1})$ только ненулевым множителем, где

$$\mathcal{F}_r = -h + t + f(x) + tg(y) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + ty_i - s_i)p_i.$$

Пусть $w_i = x_i + ty_i - s_i$. Определитель преобразования $(x, y) \mapsto (w, y)$ равен 1. В новых переменных y, w рассматриваемое семейство принимает вид $\mathcal{F}_* = G_*(y, w, t, q) + \sum w_i p_i$, где

$$G_* = -h + t + f(s - ty + w) + tg(y).$$

Согласно лемме Адамара, $\mathcal{F}_* = G_*(y, 0, t, q) + \sum w_i (p_i + \phi_i(y, w, t, q))$, где ϕ_i — гладкие функции, обращающиеся в нуль в точке $w = y = 0$, $t = t_0$, $q = q_0$. Следовательно, $\mathcal{F}_*$ — стабилизация семейства

$$G_*(y, 0, t, q) = -h + t + f(s - ty) + tg(y).$$

Для заданной точки $q_0 = (h_0, 0)$, где $h_0 = t_0$ на выделенной экстремали, проходящей через a_0 , семейство G определяет развертку по малым параметрам $s_1, \dots, s_{n-1}$, $\tilde{h} = h - h_0$, $\varepsilon = t - t_0$ образующего центра $G_0 = G|_{t=t_0, q=q_0}$ — одной только функции y . Тогда квадратичная часть G_0 равна

$$j_2 G_0(y) = t^2 f_2(y) + tg_2(y),$$

где f_2 и g_2 — квадратичные части этих функций. Если эта форма невырождена, то соответствующий росток G есть версальная развертка морсовской особенности. Ее волновой фронт регулярен, а бифуркационное множество пусто. $\square$

Из уравнения $\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 1$ при $z = 0$ следует, что криминант $\Delta(F)$ всегда пуст. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.2. Точка $q_0 = (h_0, 0)$, $h_0 \neq 0$, принадлежит $B(M, I)$ в том и только том случае, если квадратичная форма $tf_2(y) + g_2(y)$ вырождена.

Рассматривая трансверсальный случай, зафиксируем области U и V , а также параметризацию Монжа $g(y)$ для I , $y \in V$. Предположим, что g — общего положения.

Теорема 3.3. Пусть $n \leq 5$. Существует открытое и плотное подмножество пространства гиперповерхностей M : $(f(x), x)$, $x \in U$, имеющих невырожденную квадратичную форму в любой точке тех M , которые вместе с I , как и выше, таковы, что соответствующее семейство G в каждой точке r -стабильно эквивалентно версальной деформации одного из ростков функций с простой особенностью типов A_k ($1 \leq k \leq n+1$), D_k ($4 \leq k \leq n+1$) и E_6 .

Доказательство теоремы 3.3 — просто модификация доказательств теорем 3.3 и 3.7 в [7].

Для описания особенностей в касательном случае возьмем $n = 3$ и $n = 2$. Для высших размерностей соответствующая классификация v -орбит (см. [2]) имеет функциональные инварианты.

Не нарушая общности, предположим что $a_0 = (0, 0, 0)$, $b_0 = (0, 1, 0)$ в $\mathbb{R}^3 = \{q = (h, s, u)\}$, а общая касательная плоскость к M , a_0 и I , b_0 , аннулирующая b_0 , определяется уравнением $h = 0$. Поверхности M и I параметризованы локальными координатами x_1, x_2 и y_1, y_2 в центре начала координат пространства $\mathbb{R}^2$. Таким образом, $M = \{(f(x_1, x_2), x_1, x_2)\}$ и $I = \{(g(y_1, y_2), 1 + y_1, y_2)\}$. Действуем, как в лемме 3.1: заменяем p в формуле для производящего семейства $\mathcal{F}$ на $(1, p_1, p_2)$, а затем исключаем переменные с помощью процедуры устранения. Заметим, что экстремаль, проходящая через a_0 , идет вдоль s -оси с базовой точкой $t_0 b_0 = (0, t_0, 0)$.

Обозначая $t = t_0 + \varepsilon$ и $s = \bar{s} + t_0$, где ε и $\bar{s}$ малы, и исключая p , $w_1 = x_1 + ty_1 - \varepsilon - \bar{s}$, $w_2 = x_2 + ty_2 - u$ с помощью стабилизации, получаем следующее предложение.

Предложение 3.4. Росток производящего семейства r -устойчиво эквивалентен

$$F(z, \varepsilon, h, \bar{s}, t) = -h + f(\bar{s} + \varepsilon - ty_1, u - ty_2) + tg(y_1, y_2).$$

Каустики на выделенной экстремали соответствуют тем значениям λ_0 и μ_0 , для которых вырождена квадратичная форма $tf_2(y) + g_2(z)$.

Сужение образующего центра $F_0 = F$ на $\{h = \bar{s} = u = 0\}$ имеет вид

$$F_0 = \varepsilon f(\varepsilon + (t_0 + \varepsilon)y_1, (t_0 + \varepsilon)y_2) + (t_0 + \varepsilon)g(y_1, y_2).$$

Квадратичная часть Q_F образующего центра F_0 равна

$$Q_F = t_0 \left[f_2(y)\tau_0 + g_2(y) + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial y_1^2} \right) \varepsilon y_1 + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \varepsilon y_2 \right] + f_2(\varepsilon, 0) + t_0 g_2(\varepsilon, 0).$$

Так как F , $\frac{\partial F}{\partial t}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ обращаются в нуль в любой точке вида $(y, \varepsilon, h, \bar{s}, u) = (0, -\bar{s}, 0, \bar{s}, 0)$, то вся s -ось содержится в криминанте Δ . Она является экстремалью, проходящей через a_0 .

Классификация ростков функций из $\mathcal{M}_{z,\varepsilon}^2$ относительно стабильной v -эквивалентности (без параметров) начинается со следующей орбиты ($z \in \mathbb{R}$) [2, 8]:

$$B_k: \pm z^2 + \varepsilon^k; \quad C_k: z^k + \varepsilon z, \quad k = 2, 3, 4; \quad F_4: z^3 + \varepsilon^2.$$

Ее миниверсальные деформации по параметрам q и диаграмма смежности имеет вид

$$\begin{aligned} B_k: & \pm z^2 + \varepsilon^k + q_{k-2}\varepsilon^{k-2} + \dots + q_0; \\ C_k: & z^k + \varepsilon z + q_{k-2}z^{k-2} + \dots + q_2z^2 + q_1\varepsilon + q_0; \\ F_4: & z^3 + \varepsilon^2 + q_2z\varepsilon + q_1z + q_0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} B_2(C_2) & \longleftarrow & C_3 & \longleftarrow & C_4 \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ B_3 & \longleftarrow & F_4 & & \\ \uparrow & & & & \\ B_4 & & & & \end{array}$$

Оставшиеся классы образуют подмножество коразмерности 3 в пространстве $\mathcal{M}_{z,\varepsilon}^2$.

На плоскости ($n = 2$) касательный случай в общем положении реализуется в изолированных точках с не обращающимися в нуль членами второго порядка соответствующих функций $f(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ и $g(y) = b_2y^2 + b_3y^3 + \dots$, т.е. с неинфлективными a_0 и b_0 . Точка $h = 0$, $\bar{s} = 0$ является каустикой в том и только том случае, если $ta_2 + b_2 = 0$.

Теорема 3.5. Для пары кривых M и I в плоскости вблизи касательной экстремали огибающая Δ совпадает с касательной экстремалью. На этой прямой имеется не более, чем одна каустика. Росток каустики в этой точке — гладкая кривая, имеющая касание второго порядка с огибающей. Производящая функция в этой точке v -эквивалентна семейству типа C_3 :

$$C_3: F(z, \varepsilon, q) = z^3 + z(\varepsilon + \bar{s}) + h.$$

Следующая теорема дает классификацию особенностей общего положения в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 3.6. Для фиксированного g общего положения и для f из открытого плотного подмножества в пространстве функций на V росток $\text{Bif}(F)$ в точке, в которой $t_0 \neq 0$, диффеоморфен одному из бифуркационных множеств типов B_k , C_k , $k = 2, 3, 4$, или версальной деформации F_4 . Во всех случаях кривизна совпадает с линейчатой поверхностью, заметаемой тангенциальными экстремалью.

Если квадратичная форма g_2 невырождена, то росток F в точке $t_0 = 0$ эквивалентен нормальной форме B_2 .

Если квадратичная форма g_2 вырождена, то росток F в точке $t_0 = 0$ стабильно эквивалентен по пространству-времени нормальной форме (аналогичной таковой для C_4)

$$\tilde{C}_4: H = -\tilde{h} + \varepsilon(\varepsilon + u y_1 + s + y_1^3 + y_2^2).$$

Доказательство этих теорем следует из теорем 4.3 и 4.4 в [7].

4. МАЛОМЕРНОЕ СТАРТОВОЕ МНОГОООБРАЗИЕ

Если M состоит из одной точки (начала координат), то система экстремалей — набор прямых $tr_2(y)$, соединяющих начало координат с точками $I \subset \mathbb{R}^n$ при отождествлении $T_0\mathbb{R}^n$ с самим $\mathbb{R}^n$. В этом случае критическое множество $E(M, I)$ состоит из объединения лучей, проходящих через критические точки сужения на I радиальных проекций $\mathbb{R}^n \rightarrow RP^{n-1}$, которое есть отображение коранга 1.

Следовательно, для гиперповерхностей общего положения I сингулярное множество $E(M, I)$ локально диффеоморфно вне начала координат произведению прямых на дискриминант A_k -версальной деформации функций с $k \leq n - 1$.

Наконец, рассмотрим наиболее интересный случай, когда $n = 3$, M — росток пространственной кривой, а I — поверхность общего положения.

Лемма 4.1. *Соответствующие точки a_0 на пространстве кривых M общего положения распадаются на три множества: трансверсальных, тангенциальных и битангенциальных точек. Для каждой из них в подходящих локальных аффинных координатах $(h, s, u) \in \mathbb{R}^3$ росток $\mathcal{F}$ производящего семейства M_t, a_0 в точке a_0 : $x = 0$, $y = 0$, $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $t = t_0$, $q_0 = (h_0, 0, \dots, 0)$, $h_0 = t_0$ (соответствующей точке $q_0 = a_0 + t_0 b_0$ на экстремали, проходящей через a_0 , $|b_0| = b \neq 0$) стабильно r -эквивалентен ростку следующего семейства G функций от $y \in \mathbb{R}$ с параметрами $q = (h, s, u)$, t в точке $y = 0$, $t = t_0$, $q = q_0 = (h_0, 0)$ с некоторыми гладкими функциями $f(y), h(y) \in \mathcal{M}_y^2$ и $g(x_1, x_2) \in \mathcal{M}_{x_1, x_2}^2$:*

$$G = -h + bt + h(y) + tg \left(\frac{s-y}{t}, \frac{u-f(y)}{t} \right)$$

в трансверсальном случае;

$$G = -h + h(y) + tg \left(\frac{s-y}{t}, \frac{u-bt-f(y)}{t} \right)$$

в тангенциальном и

$$G = -h + h(y) + tg \left(\frac{s-bt-y}{t}, \frac{u-f(y)}{t} \right)$$

в битангенциальном случае.

Классификация особенностей общего положения этих семейств с одной переменной y с пространственно-временными параметрами t и q с точностью до v -эквивалентности дается следующей теоремой.

Теорема 4.2. *Для M и I общего положения росток критического множества $E(M, I)$ в любой точке ($t \neq 0$) на соответствующей экстремали, проходящей через a_0 , диффеоморфен бифуркационной диаграмме одной из A_l версальных деформаций, $l \leq 4$, в трансверсальном случае и бифуркационной диаграмме одной из версальных деформаций B_l, C_l, F_4 , $l \leq 4$, простых граничных особенностей — в тангенциальном и котангенциальном случаях.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агрacheв А. А., Гамкрелидзе Р. В. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление// Мат. сб. — 1978. — 107 — С. 728–785.
2. Закалюкин В. М. Огибающие семейств волновых фронтов и теория управления// Тр. Мат. ин-та РАН. — 1995. — 209. — С. 133–142.
3. Agrachev A. A. Methods of control theory in nonholonomic geometry// Proc. Int. Congr. Math., Zürich, 1994. — Basel: Birkhäuser, 1995. — С. 12–19.
4. Arnol'd V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. — Acad. Math. Appl., Kluwer, 1990.
5. Davydov A. A., Zakalyukin V. M. Classification of relative minima singularities// Geometry and Topology of Caustics/ Banach Center Publ. — 1999. — 50. — С. 74–90.
6. Giblin P. J., Holtom P. A. The centre symmetry set// Geometry and Topology of Caustics/ Banach Center Publ. — 1999. — 50. — С. 91–105.
7. Giblin P. J., Zakalyukin V. M. Singularities of centre symmetry sets// Preprint/ Univ. Liverpool, 2002
8. Goryunov V. V. Projections of generic surfaces with boundaries// Theory of Singularities and Its Applications/ Adv. Sov. Math. — Providence: Amer. Math. Soc., 1990. — 1. — С. 157–200.
9. Janeczko S. Bifurcations of the center of symmetry// Geom. Dedic. — 1996. — 60. — С. 9–16.

СИНГУЛЯРНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ, КАСАТЕЛЬНЫХ К КРИВОЙ С ПОЛУКУБИЧЕСКОЙ УГЛОВОЙ ТОЧКОЙ

© 2003 г. ДЖ. КАПИТАНИО

Аннотация. В работе изучается огибающая однопараметрического семейства гладких кривых, касательных к кривой, имеющей полукубическую угловую точку, радиус кривизны этих кривых стремится к нулю при подходе точки касания к угловой точке. Показывается, что, как правило, замыкание огибающей имеет две полукубические кривые возврата в той же точке одна из которых — данная кривая возврата, касающаяся той же самой прямой линии. Кроме того, изучаются нетипичные и двойственные случаи, а также нормальная форма уравнения касательной.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	17
2. Типичный случай	18
3. Нетипичный случай	20
4. Классификация семейств на дискриминантных поверхностях	22
5. Нормальная форма уравнения огибающей	22
6. Двойственный случай	23
Список литературы	24

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория огибающих — классический раздел геометрии, естественным образом возникающий в геометрической оптике и теории сингулярностей.

Огибающая семейства кривых — это кривая, которая касается кривых данного семейства. Например, огибающей семейства нормалей к некруговому эллипсу является замкнутая кривая, аффинно эквивалентная астроиде; геометрическое место особых точек всех эквидистантных кривых данного эллипса (рис. 1).

Огибающая типичного гладкого семейства гладких функций изучено в [3]. В качестве его особенностей допускались только угловые точки и точки трансверсальных самопересечений.

В данной работе исследуется огибающая некоторого сингулярного семейства кривых подобного рассмотренному в работе В. И. Арнольда [1]. А именно, огибающая семейства парабол, касающихся астроиды, с радиусом кривизны, равным $2/3$ от радиуса кривизны астроиды в точке касания, представляющая собой объединение самой астроиды и внешней части касательных в угловых точках (рис. 2). Заметим, что касательная парабола не определена в угловых точках астроиды, поскольку в них радиус кривизны астроиды обращается в бесконечность.

Обобщим этот пример. Пусть γ — действительная плоская кривая с полукубической угловой точкой в начале координат O . Для произвольной точки $q \neq O$ кривой γ рассмотрим гладкую кривую P_q , касающуюся кривой γ в точке q . Цель настоящей работы — изучение замыкания огибающей однопараметрического семейства $\{P_q : q \in \gamma \setminus O\}$ в том случае, если радиус кривизны кривой P_q в точке касания является гладкой функцией q , обращающейся в нуль при $q \rightarrow O$.

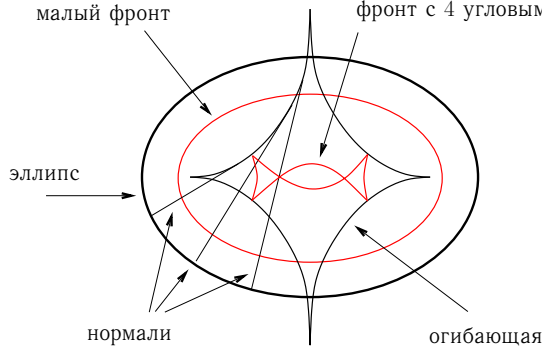


Рис. 1

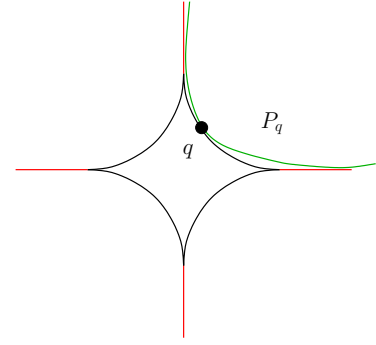


Рис. 2

Основные результаты данной работы об огibaющей такого семейства кривых содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. В общем случае, огibaющая к семейству кривых, подобному приведенному выше, имеет две ветви, выходящие из начала координат, одна из которых — кривая γ . В точке O другая ветвь имеет полукубическую угловую точку, касательная в которой совпадает с касательной к кривой γ . Уравнение огibaющей в окрестности начала координат может быть преобразовано к виду

$$x^6 \pm y^4 + a_0 x^3 y^2 + a_1 x^4 y^2 = 0$$

с помощью локальной замены координат (a_0 и a_1 — действительные числа).

Заметим, что из теоремы не следует, что два модуля a_0 и a_1 нормальной формы независимы.

Также рассматриваются нетипичный и двойственный случаи, в частности, будет получена теорема, аналогичная приведенной выше (точки перегиба заменяют угловые точки) для семейств кривых касательных к гладкой кривой с точкой перегиба. Некоторые из приведенных в настоящей работе результатов были анонсированы в [2].

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою искреннюю признательность В. И. Арнольду, В. Д. Седых и В. М. Закалюкину за помощь и поддержку, оказанные ему во время пребывания в России.

2. Типичный случай

Пусть $s \mapsto \gamma(s) = (x_\gamma(s), y_\gamma(s))$ — некоторая гладкая параметризация кривой γ . Предположим, что $x_\gamma(s) = \alpha s^2 + o(s^2)$, $y_\gamma(s) = \beta s^3 + o(s^3)$, где $\alpha, \beta > 0$. Для произвольного $s \neq 0$ обозначим через $P_{\gamma(s)}$ гладкую кривую, касающуюся кривой γ в точке $\gamma(s)$. Предположим, что радиус кривизны (с учетом знака) этой кривой в точке касания является непрерывной функцией аргумента s , обращающейся в нуль при $s \rightarrow 0$ (как и радиус кривизны кривой γ). В силу леммы Адамара этот радиус равен $s\rho(s)$, где ρ — некоторая гладкая функция, определенная в окрестности точки $s = 0$. Пусть $\rho_0 := \rho(0)$.

Векторное поле $\tau(s) := \frac{1}{s}\dot{\gamma}(s)$, состоящее из касательных к кривой γ векторов, является гладким (в силу леммы Адамара) и нигде не обращается в нуль. Будем обозначать через τ_x и τ_y его компоненты. Существует такая параметризация кривой $P_{\gamma(s)}$ параметром $t \in \mathbb{R}$, что эта кривая касается кривой γ в точке $t = 0$ со скоростью $\tau(s)$. Координаты касательной кривой $(x(s, t), y(s, t))$ в окрестности точки касания имеют следующий вид:

$$P_{\gamma(s)} : \begin{cases} x(s, t) = x_\gamma(s) + \tau_x(s)t - \frac{1}{2s\rho(s)}\tau_y(s)\|\tau(s)\|t^2 + R_1(s, t)t^3, \\ y(s, t) = y_\gamma(s) + \tau_y(s)t + \frac{1}{2s\rho(s)}\tau_x(s)\|\tau(s)\|t^2 + R_2(s, t)t^3, \end{cases} \quad (1)$$

где функции R_1 и R_2 , называемые *кубическими членами* семейства, определены в окрестности точки $(s = 0, t = 0)$. Под гладкостью однопараметрического семейства функций $\{P_{\gamma(s)} : s \neq 0\}$,

задаваемого уравнениями (1), будем понимать гладкость функций R_1 и R_2 (в частности, в точке $s = 0$).

Замечание. Раскладывая в степенные ряды в окрестности точки $(s = 0, t = 0)$ правые части соотношений (1), получаем

$$\begin{cases} x(s, t) = \alpha s^2(1 + o(1)) + 2\alpha t(1 + o(1)) - \frac{3\alpha\beta}{\rho(s)}t^2(1 + o(1)) + o(t^2), \\ y(s, t) = \beta s^3(1 + o(1)) + 3\beta st(1 + o(1)) + \frac{2\alpha^2}{s\rho(s)}t^2(1 + o(1)) + o(t^2). \end{cases} \quad (2)$$

Следовательно, если $\rho_0 \neq 0$, то коэффициент перед t^2 в разложении в выражении для y — единственный сингулярный, стремящийся к бесконечности со скоростью $1/s$.

Определение. Назовем *графиком* семейства кривых поверхность

$$\Phi := \{(q, s) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) : s \neq 0, q \in P_{\gamma(s)}\}.$$

Рассмотрим две естественные проекции графика на его компоненты:

$$\pi_1 : \Phi \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (q, s) \mapsto q, \quad \pi_2 : \Phi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (q, s) \mapsto s;$$

таким образом, проектор π_2 задает расслоение по параметру $s \neq 0$, а проектор π_1 инъективен (для достаточно малых t) на каждом слое $\pi^{-1}(s) = P_{\gamma(s)}$.

Определение. Назовем *огигающей* семейства кривых совокупность критических значений отображения π_1 .

Пусть $P(s, t) := P_{\gamma(s)}(t) = (x(s, t), y(s, t))$. Поскольку параметризация графика определяется соотношением $(s, t) \mapsto (P(s, t), \gamma(s))$, то критические значения f и отображения π_1 совпадают.

Следовательно, для любого решения $(s, t(s))$ уравнения $\det DP(s, t) = 0$ (где DP — матрица Якоби отображения P) мы получаем ветвь огибающей, параметризованную по правилу $s \mapsto P(s, t(s))$. Из разложений (2) следует, что такая ветвь может быть продолжена по непрерывности в точке $s = 0$, если

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{t(s)^2}{s\rho(s)} \in \mathbb{R};$$

если же этот предел равен нулю, то говорят, что ветвь *проходит через начало координат*, поскольку $P(0, t(0)) = (0, 0)$.

Лемма. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\det DP(s, t) = \frac{t}{s^2\rho(s)^2} [A(s) + B(s)t + o(t)], \quad (3)$$

где через $o(t)$ обозначено формальное разложение по степеням s, t порядка малости 2 по t и

$$A(s) = \alpha\rho_0(4\alpha^2 - 3\beta\rho_0)s^2 + o(s^2), \quad B(s) = 2\alpha^3\rho_0 + o(1).$$

Замечание. Так как функция $t(s) \equiv 0$ удовлетворяет соотношению (3), то кривая γ является ветвью огибающей.

Теорема 2. Пусть $\rho_0 \neq 0$. Тогда огибающая семейства кривых, задаваемая соотношением (1), имеет две ветви, выходящие из начала координат: одна из них — кривая γ , а другая — кривая

$$\delta : s \mapsto (\xi s^2 + o(s^2), \eta s^3 + o(s^3)),$$

где

$$\xi = 3(\beta\rho_0 - \alpha^2)/\alpha, \quad \eta = (9\beta\rho_0 - 8\alpha^2)(\beta\rho_0 - \alpha^2)/(\alpha^2\rho_0).$$

Замечания. 1. Первое утверждение теоремы 1 следует из теоремы 2; условия типичности $\rho_0 \neq 0$, $9\beta\rho_0 \neq 8\alpha^2$ и $\beta\rho_0 \neq \alpha^2$ не зависят от кубического члена семейства.

2. Радиус кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$ определяется соотношением $R(s) = r_0|s| + o(|s|)$, где $r_0 = 4\alpha^2/(3\beta)$. Отсюда следует, что условия типичности могут быть записаны в следующей форме: $\rho_0 \neq 0$, $\frac{2}{3}r_0$, $\frac{3}{4}r_0$.

3. Семейство касательных к астроиде парабол в примере В. И. Арнольда не является типичным, поэтому огибающая неустойчива: произвольное малое возмущение в кривых семейства (допускается также и возмущение самой астроида) приводит к расщеплению двойных полупрямых, принадлежащих огибающей, на четыре ветви, в числе которых присутствует полукубическая кривая возврата, касательная (и противоположащую) к угловой точке астроида (рис. 3).

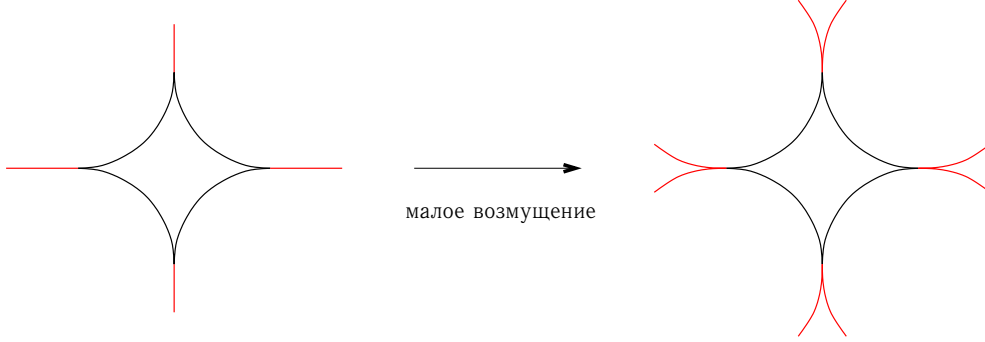


Рис. 3

4. Кривые γ и $P_{\gamma(s)}$ имеют одинаковый радиус кривизны в точке касания, если $\rho(s) = R(s)/|s| = r_0 + o(1)$. В этом случае коэффициент $A(s)$ в уравнении (3) тождественно равен нулю. Это означает, что каждая из двух ветвей огибающей этого семейства кривых совпадает с кривой γ . Данная конфигурация не является типичной (устойчивой), поэтому мы введем дополнительное условие типичности: $\rho_0 \neq r_0$.

Дискриминантой сингулярности огибающей является гиперповерхность, состоящая из нетипичных семейств, принадлежащих множеству всех семейств, определяемых соотношением (1), представляющая собой объединение гиперплоскости $\rho_0 = 0$ и трех гладких (вне начала координат) гиперповерхностей $S_{2/3}$, $S_{3/4}$ и S_1 , соответствующих уравнениям $\rho_0 = \frac{2}{3}r_0$, $\rho_0 = \frac{3}{4}r_0$ и $\rho_0 = r_0$.

На рис. 4 показано пересечение дискриминанты с трехмерным пространством коэффициентов α, β и ρ_0 (нетрудно из соображений симметрии продолжить дискриминанту и для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). В полупространстве $\alpha \geq 0$ эти поверхности совпадают с тремя конусами, а в противоположащем полупространстве — с теми же конусами, повернутыми на 90° вокруг оси α .

3. НЕТИПИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Обратимся теперь к исследованию огибающих нетипичных семейств, лежащих на поверхностях $S_{2/3}$ и $S_{3/4}$ (теорема 2 описывает огибающие нетиповых семейств на поверхности S_1). Начнем с определения некоторого максимально нетипичного семейства.

Лемма. Для любой кривой γ и кубических членов, аналогичных приведенным в разделе 2, существуют два семейства касательных кривых F^A и F^B , радиусы кривизны которых равны, соответственно, $sr^A(s)$ и $sr^B(s)$ таких, что вторая ветвь их огибающих является (локально в окрестности начала координат) полупрямой касательной к угловой точке кривой γ для F^A и противоположащей началу координат для F^B . Кроме того, F^A лежит на поверхности $S_{2/3}$, а F^B — на поверхности $S_{3/4}$.

Семейства F^A и F^B — особые семейства, соответствующие заданной кривой γ и кубическим членам.

Рассмотрим произвольное семейство на поверхности $S_{2/3}$. Тогда та кривая γ , которой оно соответствует, и ее кубический член порождают на той же гиперповерхности особое семейство F^A . Для почти всех таких семейств найдутся такие $\lambda \neq 0$ и $\ell \in \mathbb{N}$, что имеет место равенство $\rho(s) - \rho^A(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$.

Теорема 3. Для такого семейства отображение $\delta : s \mapsto (\xi s^2 + o(s^2), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$, где $\xi = -\alpha/3$ и $\eta = -9\lambda\beta^2/(8\alpha^2)$.

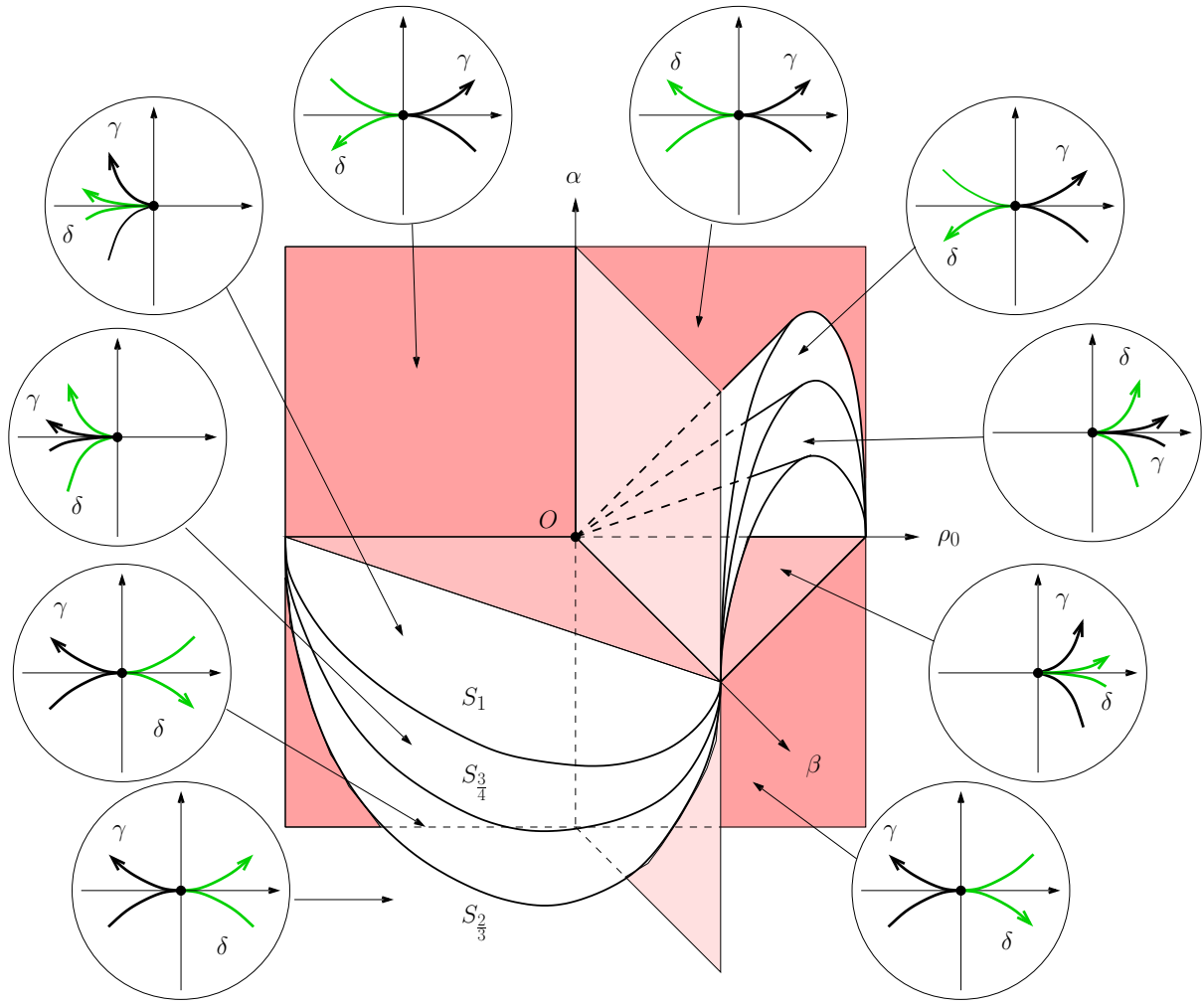


Рис. 4

Будем называть кривую возврата *симметричной*, если проведенная к ней в угловой точке касательная разделяет ее на две части.

Замечания. 1. Для любого семейства кривых на поверхности $S_{2/3}$ ветвь δ огибающей имеет угловую точку в начале координат (в ней может иметь место вырождение бесконечного порядка, как, например, в случае полупрямой), касается оси x и находится напротив угловой точки кривой γ .

2. Если ℓ — четное число, то кривая δ имеет $(\ell + 3)/2$ симметричную угловую точку; если ℓ — нечетное число, то в типичном случае кривая δ имеет несимметричную $(\ell + 4)/2$ угловую точку (возможно, вообще говоря, и существование угловой точки с вырождением более высокого порядка).

3. Огибающая типичного семейства на гиперповерхности $S_{2/3}$ имеет несимметричную $5/2$ угловую точку.

Рассмотрим теперь произвольное семейство на поверхности $S_{3/4}$ и соответствующее ему порожденное семейство F^B . Для почти всех таких семейств найдутся такие $\lambda \neq 0$ и $\ell \in \mathbb{N}$, что имеет место равенство $\rho(s) - \rho^B(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$.

Теорема 4. Для такого семейства отображение $\delta : s \mapsto (\xi s^{\ell+2} + o(s^{\ell+2}), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$, где $\xi = (\ell + 3)\lambda\beta/\alpha$ и $\eta = (\ell + 2)\lambda\beta^2/(2\alpha^2)$.

Замечания. 1. Если ℓ — четное число, то кривая δ имеет симметричную $(\ell + 3)/(\ell + 2)$ угловую точку; если ℓ — нечетное число, то кривая имеет особенности порядка $(\ell + 3)/(\ell + 2)$. В обоих случаях кривая δ касается в начале координат оси x .

2. Огибающая типичного семейства на гиперповерхности $S_{3/4}$ имеет особенность порядка $4/3$.

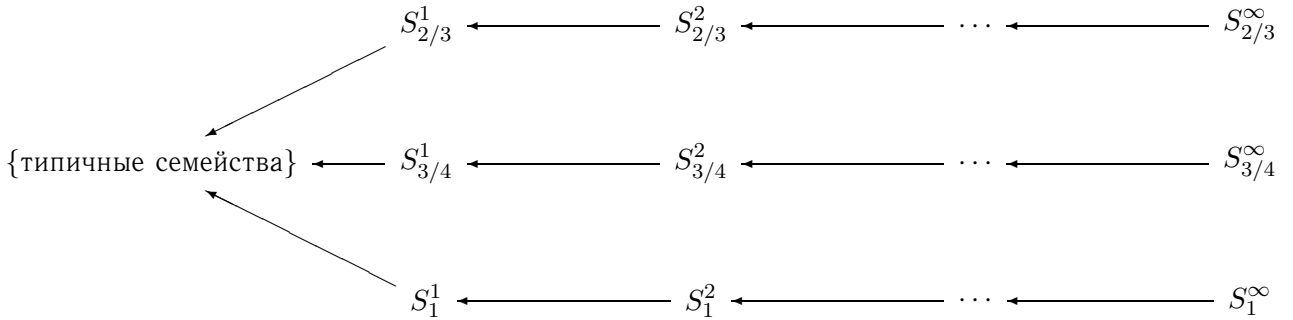
Для семейств кривых, лежащих на поверхности $\{\rho_0 = 0\}$ также оказывается возможным получить явные формулы для ветвей их огибающих. Например, огибающая для каждого типичного семейства из этой группы имеет одну ветвь (за исключением кривой γ) — полукубическую кривую возврата, проходящую через начало координат и касающуюся прямой линии с углом наклона $2\alpha/\dot{\rho}(0)$. Для семейств с вырождением более высокого порядка количество ветвей огибающей, проходящих через начало координат, зависит от первого ненулевого члена в разложении Ньютона функции ρ ; эти ветви (за исключением кривой γ) касаются оси y в начале координат.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ СЕМЕЙСТВ НА ДИСКРИМИНАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Результаты предыдущих разделов позволяют предложить классификацию нетипичных семейств на дискриминантной поверхности.

Начнем с рассмотрения гиперповерхности $S_{2/3}$. Для $\ell = 2k - 1$ обозначим через $S_{2/3}^\ell$ множество семейств кривых таких, что ветвь их огибающей — кривая δ имеет несимметричную угловую точку порядка $(2k + 3)/2$; для $\ell = 2k$ обозначим через $S_{2/3}^\ell$ множество семейств, огибающая которых имеет симметричную угловую точку того же порядка. Множество оставшихся семейств на гиперповерхности $S_{2/3}$ (обозначим их через $S_{2/3}^\infty$) представляет собой множество бесконечной коразмерности. Для гиперповерхности $S_{2/3}$ обозначим через $S_{3/4}^\ell$ множество таких семейств, что кривая δ имеет особенность порядка $(\ell + 3)/(\ell + 2)$, через $S_{3/4}^\infty$ — множество прочих семейств на этой поверхности. Скажем, что семейство кривых, лежащих на поверхности S_1 , лежит также и на поверхности S_1^ℓ , если существуют такие $\lambda \neq 0$ и $\ell \in \mathbb{N}$, что $\rho(s) - R(s)/|s| = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$; лежит на поверхности S_1^∞ , если такого $\ell \in \mathbb{N}$ не существует. В этом случае оказывается, что длина вертикального участка кривых γ и δ возрастает как $s^{\ell+3}$ (т.е. кривая δ допускает параметризацию $s \mapsto (x_\gamma(s), y_\gamma(s) + \tilde{\lambda}s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$), где $\tilde{\lambda}$ имеет тот же знак, что и λ .

Таким образом, определена следующая классификация семейств кривых на дискриминантной поверхности.



Каждая страта (класс) имеет коразмерность 1 в предшествующей страте. Вид соответствующих стратам огибающих представлен на рис. 5.

5. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ

В этом разделе будет исследована нормальная форма уравнения огибающей — форма, к которой заменой координат на плоскости $\{x, y\}$ в окрестности начала координат может быть сведено уравнение огибающей, рассматривавшееся в предыдущих разделах.

Теорема 5. *Существует такая система координат, в которой уравнение огибающей типичного семейства кривых, определяемого уравнением (1), является бимодальной нормальной формой*

$$W_{1,0}^\pm : x^6 \pm y^4 + a_0 x^3 y^2 + a_1 x^4 y^2 = 0,$$

где знак перед y^4 совпадает со знаком выражения $\rho_0 - \frac{3}{4}r_0$, а $a_0^2 \neq 4$, если этот знак $+$.

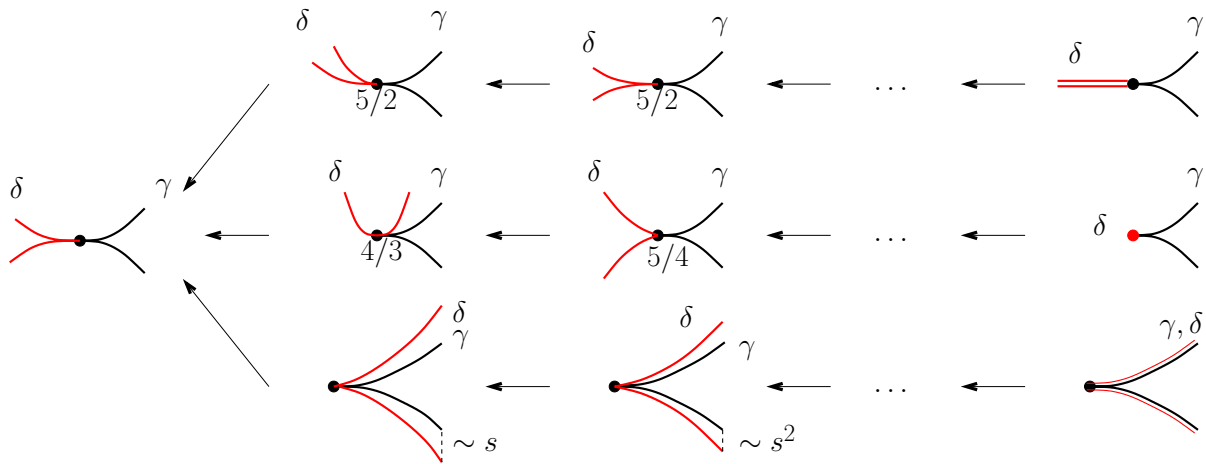


Рис. 5

Нормальная форма для типичного случая имеет две части, однако из этого не следует, что они независимы.

Теорема 6. Нормальные формы уравнения огибающей для нетипичных семейств могут иметь один из приведенных в следующей таблице видов.

Класс	Обозначение	Нормальная Форма
$S_{2/3}^{2k-1} \cup S_{2/3}^{2k}$	$W_{1,2k}^-$	$x^{2k+6} - y^4 + \mathbf{a}x^3y^2$
$S_{3/4}^\ell$	$\tilde{W}_\ell^\pm$	$\mathbf{b}x^{\ell+6} \pm y^{\ell+4} + a_0x^{\ell+3}y^2 + \sum_P a_{p,q}x^py^q$
S_1^ℓ	$W_{1,2\ell}^{\#,-}$	$(x^3 - y^2)^2 + \mathbf{a}x^{\ell+3}y^2$

В таблице ℓ и k — натуральные числа, $\mathbf{a} = (a_0 + a_1x)$, где $a_0 \neq 0$, $\mathbf{b} = (1 + b_0x + \dots + b_\ell x^{\ell+1})$ и P — множество индексов ($2 \leq p \leq \ell + 1, 4 \leq q \leq \ell + 3$) таких, что $\ell + 5 \leq p + q \leq 2\ell + 4$.

Замечания. 1. Сведение уравнения огибающей к нормальной форме осуществляется посредством полу квазиоднородной фильтрации (для типичного случая), однородной фильтрации Ньютона (для семейств гиперповерхности $S_{2/3}$) и спектральных последовательностей (для семейств гиперповерхностей $S_{3/4}$ и S_1) в пространстве формальных рядов.

2. Нормальные формы семейств гиперповерхностей $S_{2/3}$ и S_1 бимодальны. Если класс $\tilde{W}_\ell^\pm$ имеет $\ell^2 + 7\ell + 15$ частей, то количество частей сингулярности увеличивается с ростом коразмерности соответствующего класса на дискриминантной поверхности.

3. Каждое семейство гиперповерхности $S_{2/3}^{2k-1}$ эквивалентно некоторому семейству гиперповерхности S^{2k} .

6. ДВОЙСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Плоская кривая определяет в двойственной плоскости кривую, называемую *двойственной кривой*, точки которой суть касательные данной кривой. Если первая кривая является гладкой и выпуклой, то и двойственная кривая — гладкая и выпуклая, если эта исходная кривая имеет полукубическую угловую точку, то двойственная кривая имеет точку перегиба. Так как двойственная кривая огибающей семейства кривых также является огибающей, то построенная выше теория справедлива и для двойственного случая.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — гладкая действительная плоская кривая с точкой перегиба в начале координат, а $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = (as + o(s), bs^3 + o(s^3))$, где $a, b \neq 0$ — ее параметризация. Величина кручения кривой $\tilde{\gamma}$ равна $K_0s + o(s)$, где $K_0 = 6b/a^2$.

Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство гладких кривых такое, что каждая кривая $Q_{\tilde{\gamma}(s)}$ этого семейства касается кривой $\tilde{\gamma}$ в точке $\tilde{\gamma}(s)$. Предположим, что кривизна этой кривой в

точке касания является гладкой функцией переменной s , обращающейся в нуль в точке $s = 0$, т.е. имеющей вид $sk(s) = k_0s + o(s)$. Тогда семейство двойственных кривых имеет вид, аналогичный выше изученному, и таким образом оказывается справедливой двойственная форма теоремы 2.

Теорема 7. *Огибающая семейства кривых, касающихся кривой $\check{\gamma}$, такая, что $k_0 := k(0) \neq 0$, имеет две проходящие через начало координат ветви одна из которых — кривая $\check{\gamma}$. Вторая ветвь*

$$\check{\delta} : s \mapsto (\xi s + o(s), \eta s^3 + o(s^3)),$$

где $\xi = 3(a^2k_0 - 4b)/(ak_0)$, $\eta = (a^2k_0 - 4b)(2a^2k_0 - 9b)/(a^2k_0)$.

Следствие. *Если $k_0 \neq 0$, $\frac{2}{3}K_0$, $\frac{3}{4}K_0$, то ветвь $\check{\delta}$ имеет точку перегиба в начале координат, где она касается оси x .*

Как это было сделано в разделе 3, можно определить особые семейства G^A и G^B , огибающими которых являются, соответственно, начало координат и ось x ; можно показать, что их кривизна равна $sk^A(s)$ и $sk^B(s)$, $k_0^A = 4b/a^2$ и $k_0^B = 9b/(2a^2)$.

Теорема 8. *Пусть существуют такие $\lambda \neq 0$ и $\ell \in \mathbb{N}$, что $k(s) - k^A(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$. Тогда $\check{\delta} : s \mapsto (\xi s^{\ell+1} + o(s^{\ell+1}), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$, где $\xi = (\ell + 3)\lambda a^3/(4b)$, $\eta = -(\ell + 1)\lambda a^2/4$.*

Замечание. Огибающая такого семейства кривых имеет точку перегиба в начале координат для четных ℓ или угловую точку для нечетных ℓ . В обоих случаях кривая $\check{\delta}$ касается оси x в точке O . Подобное этим семейство с $k_0 = 4b/a_1^2$ имеет несимметричную угловую точку порядка $5/2$ в начале координат.

Теорема 9. *Пусть существуют такие $\lambda \neq 0$ и $\ell \in \mathbb{N}$, что $k(s) - k^B(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$. Тогда $\check{\delta} : s \mapsto (\xi s + o(s), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$, где $\xi = a/3$ и $\eta = 2\lambda a^2/9$.*

Замечание. Для такого семейства локально в окрестности начала координат ветвь $\check{\delta}$ огибающей является графиком некоторой гладкой на x функции, имеющей в $x = 0$ вырожденную критическую точку: точку максимума или минимума для нечетных ℓ и точку перегиба для четных. Более того, в обоих случаях кривая $\check{\delta}$ касается оси x в начале координат (порядок касания больше двух).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Астроидальная геометрия гипоциклоид и гессианова топология гиперболических много-членов// Успехи мат. наук. — 2001. — **56**, № 6. — С. 3–66.
2. Capitanio G. On the envelope of 1-parameter families of curves tangent to a semi-cubic cusp// C. R. Acad. Sci., Sér. I. — 2002. — **335**. — С. 249–254.
3. Thom R. Sur la théorie des enveloppes// J. Math. Pures et Appl. — 1962. — **41**, No. 29. — С. 177–192.

Gianmarco Capitanio
University Paris VII
E-mail: Gianmarco.Capitanio@math.jussieu.fr

ЗОНТИК УИТНИ И БИФУРКАЦИИ МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ В УРАВНЕНИЯХ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТИПА

© 2003 г. А. А. ДАВЫДОВ

Аннотация. Получены нормальные формы однопараметрических семейств медленных движений общего положения уравнений релаксационного типа с двумерной медленной переменной вблизи особой точки типа складки Уитни уравнения складки в случае, когда медленная скорость не касательна к множеству критических точек складки. Например, семейство общего положения для значений параметра общего положения описано с помощью роста в начале координат одного из уравнений $(dy/dx)^2 = x(x-y)^2$ и $(dy/dx)^2 = x$, соответственно найденных В. И. Арнольдом и М. Чибрарио после подходящей замены координат, расслоенных над пространствами параметров.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	25
2. Нормальные формы	26
3. Доказательство теоремы 3	28
4. Доказательство теоремы 4	28
Список литературы	32

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение релаксационного типа

$$\dot{x} = \epsilon X(x, y) + \dots, \quad \dot{y} = Y(x, y) + \epsilon Y_1(x, y) + \dots,$$

где x и y — соответственно, медленная и быстрая переменные, X , Y , Y_1 — гладкие сечения соответствующих касательных расслоений, а точки обозначают члены высшего порядка малости относительно ϵ . Его *медленное движение* определяется системой уравнений

$$Y(x, y) = 0, \quad \dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y_1(x, y),$$

где производные берутся по медленному времени ϵt .

Говорят, что некоторое свойство выполняется для объекта *общего положения*, если это свойство справедливо для любого объекта из некоторого открытого плотного подмножества пространства объектов с тонкой топологией Уитни. Например, для сечения общего положения Y его пересечение с нулевым сечением либо пусто, либо есть гладкая поверхность (размерности $\dim x$) в фазовом пространстве. Такая поверхность называется *медленной поверхностью*.

Уравнением свертывания называется сужение на медленную поверхность естественной проекции $(x, y) \mapsto x$ фазового пространства на пространство медленных переменных.

Согласно теореме Тома о трансверсальности, для пары сечений X , Y общего положения значение сечения X отлично от нуля в любой точке, определяемой уравнением свертывания. В этом случае вблизи такой точки существует корректно определенное *уравнение 1-свертывания*, отображающее точку (x, y) медленной поверхности в точку $(x, p(x, y))$ пространства направлений на пространстве медленной переменной, где $p(x, y)$ — направление поля $X(x, y)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00343) и гранта INTAS № 00-0259.

Для сечения Y общего положения особенности общего положения уравнения свертывания в точности есть особенности общего положения отображения многообразий размерности $\dim x$, размерность ядра которых не превосходит размерности $\dim y$ [9]. В частности, при $\dim x = 2$ эти особенности есть только складки и каспы Уитни для любого $\dim y \geq 1$. Аналогично, для сечений X, Y общего положения любая критическая точка свертывания есть либо регулярная точка 1-свертывания, либо критическая точка типа зонтика Уитни. Кроме того, в общем положении все эти особенности LR -стабильны, если свертывание — собственное отображение [10].

В этой статье рассматривается случай $\dim x = 2$ и для фиксированного сечения Y будут получены нормальные формы медленного движения, заданного однопараметрическим семейством сечения X общего положения вблизи точки, в которой свертывание имеет особую точку типа складки Уитни и значение этого сечения не принадлежит образу касательной плоскости в этой точке при отображении, задаваемом производной свертывания.

В частности, будет показано, что когда параметр q проходит через нуль, система уравнений

$$\dot{x}_1 = \pm 1, \quad (\dot{x}_2)^2 = x_1(q + x_1 \pm x_2^2)^2$$

описывает вблизи начала координат появление (исчезновение) зонтиков Уитни в образе 1-свертывания однопараметрических семейств сечения X общего положения (с точностью до гладкой орбитальной эквивалентности, гладко расслоенной над параметром, и при подходящем выборе новых гладких локальных координат в пространстве параметров).

2. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Для двумерной медленной переменной x и сечения Y общего положения любая критическая точка уравнения свертывания имеет тип либо складки Уитни, либо каспа Уитни. Кроме того, свертывание LR -устойчиво, если оно является собственным отображением.*

Эта теорема сразу следует из результатов В. Горюнова и Дж. Мазера [9,10]. Условие собственности уравнения свертывания всегда выполнено, если многообразие быстрой переменной компактно.

Фиксируем сечение Y общего положения, для которого свертывание — LR -стабильное собственное отображение, и рассмотрим точку медленной поверхности, являющуюся особой точкой типа складки Уитни для свертывания. Вблизи такой точки свертывание принимает вид

$$x = v^2, \quad y = u$$

вблизи начала координат в подходящих локальных координатах u, v на медленной поверхности и x, y — на многообразии быстрой переменной (начиная с этого момента, переменные x и y будут играть эту роль).

Предполагая, что значение сечения X в рассматриваемой точке не касательно к множеству критических значений свертывания (которое совпадает с осью y), можно записать вблизи начала координат уравнение 1-свертывания в виде $x = v^2, y = u, dy : dx = a(u, v, q) : 1$, где a — гладкая функция, а q — параметр. Разделяя четную и нечетную части функции a относительно v и применяя лемму Адамара (см. [1]) к нечетной части, приходим к следующей форме 1-свертывания вблизи начала координат с некоторыми гладкими функциями a_0 и a_1 :

$$x = v^2, \quad y = u, \quad dy : dx = a_0(u, v^2) + va_1(u, v^2, q) : 1.$$

С точностью до направления движения вдоль траекторий из этой формы вытекает система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = a_0(y, x, q) \pm \sqrt{x}a_1(y, x, q) \quad (1)$$

вблизи начала координат на многообразии медленной переменной. Видим, что сечение Y_1 не влияет на траектории медленного движения. Здесь функции a_0 и a_1 определены при $x \geq 0$, но их можно гладко продолжить в некоторую окрестность начала координат по теореме продолжения Бореля (см. [3,5]).

Лемма 2. Вблизи начала координат можно удалить функцию a_0 во втором уравнении системы (1) путем соответствующей гладкой замены координаты y , гладко зависящей от параметра.

В самом деле, для новой координаты $\tilde{y}$ вида $\tilde{y} = y + xY(x, y, q)$ с некоторой гладкой функцией Y имеем

$$\dot{\tilde{y}} = a_0 + (xY)_x + (xY)_y a_0 \pm \sqrt{x}(1 + xY_y) a_1,$$

где аргументы функций опущены. Характеристики дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$(xY)_x + (xY)_y a_0 = 0,$$

как легко видеть, не касаются плоскости $x = 0$. Следовательно, вблизи этой плоскости рассматриваемое уравнение имеет (единственное) гладкое решение, удовлетворяющее условию $Y \equiv 1$ на этой плоскости. Поэтому в новых координатах рассматриваемая система принимает вид

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \pm \sqrt{x} A(y, x, q) \quad (2)$$

с некоторой гладкой функцией A .

Поэтому для получения гладких орбитальных нормальных форм медленного движения в рассматриваемой ситуации достаточно получить их для семейства систем (2) общего положения вблизи точки оси y . Ясно, что общность положения начального семейства медленных движений эквивалентна общности положения функции A .

Теорема 3. Для одномерного параметра функция A общего положения удовлетворяет только одному из следующих условий в окрестности любой точки $(y, 0, q)$:

- (a) $A \neq 0$,
- (b) $A = 0 \neq A_x A_y$,
- (c) $A = A_y = 0 \neq A_x A_q A_{yy}$,
- (d) $A = A_x = 0 \neq A_y A_{xx} (A_y A_{xq} - A_{xy} A_q)$.

Теорема 4. В случае одномерного параметра росток семейства фазовых кривых системы (2) в любой точке $(y, 0, q)$ является ростком в начале координат образа при сворачивании $(u, v) \mapsto (x = v^2, y = u)$ семейства уровней одной из следующих функций:

- (a) $u + v^3$,
- (b) $u + v^3 u + v^5$,
- (c) $u + v^3 (q \pm u^2) + v^5$,
- (d) $u + v^3 u + v^5 q + v^7 + v^9 h(q, v^2)$,

где h — гладкая функция, в том и только том случае, если после соответствующего выбора гладких локальных координат x, y, q , расслоенных над пространством параметров, имеют место соответственно случаи (a)–(d) теоремы 3.

Замечание 5. Соответствующие медленные движения вдоль свернутых уровней функций из теоремы 4 могут иметь положительную или отрицательную скорость вдоль оси x .

Замечание 6. Семейство (a) теоремы 4 соответствует хорошо известной нормальной форме Чи-ббриари $(dy/dx)^2 = x$ неявного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка регулярной складки [7], а семейство (b) есть в точности нормальная форма Арнольда для медленного движения вблизи складки с вырожденной контактной структурой [6]. Последние два семейства — новые. Когда параметр проходит через нуль, первое из них описывает появление (исчезновение) двух зонтиков Уитни на образе 1-сворачивания однопараметрических семейств медленных движений общего положения, а второе — бифуркации, вызванной касанием стандартной контактной структуры в пространстве направлений на медленном многообразии с ручкой зонтика Уитни (этого образа) в его вершине.

Замечание 7. В последней нормальной форме теоремы 4 h в начале координат приводится к ± 1 , если она отлична от нуля.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Для системы (2) направления осей x и y определяются геометрически в любой точке оси ординат. В самом деле, вторая из них касательна к границе области определения рассматриваемой системы, а первая — касательна к траекториям системы, выходящим (уходящим) из точки этой границы. Поэтому обращение в нуль производных A_x и A_y не зависит от выбора координат и все случаи

- (a) $A \neq 0$,
- (b) $A = 0 \neq A_x A_y$,
- (c') $A = A_y = 0 \neq A_x$,
- (d') $A = A_x = 0 \neq A_y$

различны и корректно определены.

В случае (c') дополнительное условие $A_q A_{yy} \neq 0$ следует из теоремы Тома о трансверсальности, так как из трансверсальности одноструйного продолжения $j^1 A$ подмногообразию, определенному уравнением $x = A = A_y = 0$, вытекает невырожденность матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_x & 0 & A_q \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yq} \end{pmatrix}$$

и, следовательно, получается неравенство $A_q A_{yy} \neq 0$.

Рассмотрим случай (d'). При $A_x = 0$ условие $A_{xx} = 0$ выполняется в том и только том случае, если порядок касания в точке исходящих (уходящих) траекторий больше, чем 2. Поэтому обращение в нуль A_x и A_{xx} не зависит от выбора координат. Согласно теореме Тома о трансверсальности, для функции A общего положения его одноструйное продолжение не пересекается с подмногообразием, определенным уравнением $x = A = A_x = A_{xx} = 0$ в пространстве струй, так как коразмерность этого подмногообразия больше, чем размерность прообраза. Значит, $A_{xx} \neq 0$ при $x = A = A_x = 0$ для функции A общего положения.

Аналогично, из трансверсальности $j^1 A$ замкнутому подмногообразию $x = A = A_x = 0$ следует невырожденность матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & A_q \\ A_{xx} & A_{xy} & A_{xq} \end{pmatrix},$$

а значит, и необращение в нуль функции $A_y A_{xq} - A_{xy} A_q$.

Теорема 3 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Докажем сначала, что условия (a)–(d) теоремы 3 соответственно достаточны для получения нормальных форм (a)–(d) теоремы 4.

Умножая правую часть уравнений системы (2) на $\pm\sqrt{x}$ и подставляя $\pm\sqrt{x} = v$, $y = u$, приводим эту систему к виду

$$\dot{v} = 1/2, \quad \dot{u} = v^2 A(u, v^2, q) \quad (3)$$

на медленной поверхности. Достаточно получить гладкие орбитальные нормальные формы для этой системы вблизи оси u с помощью диффеоморфизмов, расслоенных над пространством параметров и коммутирующих с инволюцией $\sigma : (u, v) \mapsto (u, -v)$ (переставляющей точки с одинаковыми образами при свертывании). Значит, новая координата $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ должна быть соответственно четной и нечетной по v .

Ясно, что система (3) имеет первый интеграл вида $I_0(u, q) + v^3 I(u, v, q)$ с любой гладкой функцией I_0 , имеющей положительную (или отрицательную) производную $I_{0,u}$, и соответствующей

гладкой функцией I . Разделяя четную и нечетную части этого интеграла относительно переменной v и беря четную часть в качестве новой переменной u , приходим к интегралу вида

$$u + v^3 I(u, v^2, q) \quad (4)$$

с некоторыми новыми гладкими функциями I . Из случаев (a)–(d) теоремы 3 соответственно вытекают условия

$$\begin{aligned} (a) \quad & I \neq 0, \\ (b) \quad & I = 0 \neq I_{v^2} I_u, \\ (c) \quad & I = I_u = 0 \neq I_{v^2} I_q I_{uu}, \\ (d) \quad & I = I_{v^2} = 0 \neq I_u I_{v^2 v^2} (I_u I_{v^2 q} - I_q I_{v^2 u}) \end{aligned} \quad (5)$$

в рассматриваемой точке. Рассмотрим последовательно эти четыре случая.

Подслучай (a). Допустимая замена координат $v, \tilde{v}^3 = v^3 I(u, v^2)$ приводит наш первый интеграл к виду $u + v^3$ (тильда опущена в обозначениях), который является формой (a) теоремы.

Для последних двух случаев полезны следующие утверждения. Определим следующее семейство функций для семейства функций $(u, v, q) \mapsto f(u, v, q)$ с параметром q и инволюцией $\sigma : (u, v) \mapsto (u, -v)$:

$$\phi = f_v \sigma_* f_u + f_u \sigma_* f_v.$$

Заметим, что $\sigma^* \phi = \phi$. Предположим, что последнее семейство вблизи начала координат ($u = v = 0, q = 0$) может быть представлено в виде

$$\phi = \phi_1^{k_1} \phi_2^{k_2} \dots \phi_l^{k_l}$$

с некоторыми гладкими семействами функций $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$, обращающимися в нуль в начале координат, и натуральными числами $k_1, k_2, \dots, k_l$.

Теорема 8. Для гладкой функции ψ (обращающейся в нуль в начале координат при $l = 1$) росток в начале координат семейства $f + \phi \phi_1 \phi_2 \dots \phi_l \psi$ приводится к ростку в начале координат семейства функций f с помощью гладкого диффеоморфизма, коммутирующего с инволюцией σ и расслоенного над пространством параметров.

Из этой теоремы сразу вытекает

Следствие 9. Для любой гладкой функции ψ (обращающейся в нуль в начале координат при $l = 1$) росток в начале координат семейства свернутых уровней семейства функций $f + \phi \phi_1 \phi_2 \dots \phi_l \psi$ приводится к ростку в начале координат семейства свернутых уровней семейства функций f с помощью гладкого диффеоморфизма, коммутирующего с инволюцией σ и расслоенного над пространством параметров.

Для фиксированного значения параметра *свернутый уровень* функции — это образ при отображении $x = v^2, y = u$ уровня этой функции. Образ семейства уровней определяет *семейство свернутых уровней*. Теорема 8 и ее следствие есть параметрические варианты соответствующих утверждений из [4]. Доказательство параметрического варианта теоремы практически то же и потому не приводится.

Теперь для оставшихся случаев (b)–(d) условий (5) не нарушая общности будем считать, что начало координат есть рассматриваемая точка и возьмем интеграл (4) как одно из двух семейств функций из теоремы 8.

Подслучай (b). Для интеграла (4) функция ϕ равна $2v^2(3I + 2v^2 I_{v^2})$. Применяя теорему деления Мазера и лемму Адамара, представим эту функцию в начале координат в виде

$$v^2(u + a(q) + v^2 U(v^2, q)) R(u, v^2, q)$$

с некоторыми гладкими функциями a, U и R . Функции U и R не обращаются в нуль в начале координат, так как I_{v^2} не обращается в нуль. Допустимая замена координат $3\tilde{u} = u + a(q)$,

$\tilde{v} = v\sqrt{|U(v^2, q)|/5}$ и сдвиг на $a(q)$ в нумерации уровней интеграла (а также возможно и дополнительное изменение знаков координаты $\tilde{u}$ и нумерации уровней) сохраняют форму интеграла и приводят функцию ϕ к виду $v^2\Delta R(u, v^2, q)$ с $\Delta = 3u + 5v^2$ и некоторой новой функцией R , $R(O) \neq 0$. (Тильда опускается в обозначениях, а множители 3 при u и 5 при v^2 выбраны для удобства).

На параболе $\Delta = 0$ имеем две инволюции. Одна из них переставляет точки с одинаковыми u -координатами, а вторая — переставляет точки, лежащие на одном уровне рассматриваемого интеграла. Легко видеть, что v -координаты точек, лежащих на одном и том же слое рассматриваемого интеграла, дают те же значения для интеграла, что и некоторое значение функции $-5v^2/2 + \alpha(q)v^5 + \dots$ с некоторой необращающейся в нуль функцией α , где точки обозначают члены более высокого порядка малости. Вблизи начала координат такая функция может быть нормализована с помощью допустимого перемасштабирования координаты v : $v = \tilde{v}h(\tilde{v}^2, q)$ с некоторой гладкой функцией h и, возможно, с некоторой гладкой перенумерацией уровней (в аналитическом случае здесь появляются функциональные модули [2, 8]).

Таким образом, выполняя эти преобразования и соответствующее перемасштабирование координаты u : $u = \tilde{u}h^2(-3\tilde{u}/5, q)$ (чтобы сохранить нормальную форму параболы), можно получить то же сужение первого интеграла на параболу, что и для функции $u + v^3u + v^5$ (снова опускаем тильду в обозначениях новых координат). Следовательно, по лемме Адамара, первый интеграл можно представить в виде

$$u + v^3u + v^5 + v^3\Delta H(u, v^2, q). \quad (6)$$

Производная исходного первого интеграла на параболе по переменной v равна нулю. Произведенное преобразование координат, как легко видеть, сохраняет это свойство. Тогда производная интеграла (6) по v имеет вид

$$\Delta[v^2 + 3v^2H(u, v^2, q) + v^3H_u(u, v^2, q) + 2v^4H_{v^2}(u, v^2, q)] + 10v^4H(u, v^2, q)$$

и должна обращаться в нуль на этой параболе. А это возможно в том и только том случае, если H обращается в нуль на параболе. Значит, согласно лемме Адамара, последний член интеграла (6) вблизи начала координат может быть представлен в виде

$$v^3\Delta^2H(u, v^2, q)$$

с некоторой новой функцией H . Тогда этот член удовлетворяет условиям теоремы 8 с функцией $f = u + v^3u + v^5$ и, следовательно, может быть удален с помощью гладкого диффеоморфизма, коммутирующего со складывающей инволюцией и расслоенного над пространством параметров.

Подкласс (с). Меняя координату u : $u = I_0(\tilde{u}, q)$, можно представить рассматриваемый интеграл вблизи начала координат в виде (снова опускаем тильду)

$$I_0(u, q) + v^3I(u, v^2, q) \quad (7)$$

с любой гладкой функцией I_0 , $I_0(O) = 0$, производная которой по u либо положительна, либо отрицательна. Аналогично, применяя теорему деления Мазера и лемму Адамара, представим функцию ϕ вблизи начала координат в виде

$$v^2(q + u^2a(u) + v^2b(u, v^2))R(u, v^2, q)$$

с некоторыми гладкими функциями a , b и R , не обращающимися в нуль в начале координат, так как $I_{v^2}(O)I_{uu}(O) \neq 0$. Следовательно, очевидное допустимое перемасштабирование u и v , а также, возможно, и изменение знака параметра, приводят рассматриваемую функцию к виду

$$v^2(q \pm u^2 + v^2)R(u, v^2, q)$$

с некоторой новой гладкой функцией R , $R(O) \neq 0$.

Обозначая $\Delta = q \pm u^2 + v^2$ и применяя лемму Адамара к функции I рассматриваемого интеграла, можно его представить в виде

$$I_0(u, q) + v^3h_1(u, q) + v^3\Delta h_2(q, u) + v^3\Delta^2h_3(q, u, \Delta) \quad (8)$$

с некоторыми гладкими функциями h_1 , h_2 и h_3 , а также с новой функцией I_0 , возникшей в результате сделанной замены переменных.

Производная исходного первого интеграла по v имеет вид $v^2 \Delta R(u, v^2, q)$ с некоторой гладкой функцией R , не обращающейся в нуль в начале координат. Как и в предыдущем подслучае, произведенные преобразования координат сохраняют, как легко видеть, это свойство. Отсюда следует, что последний член в функции (8) удовлетворяет условиям теоремы 8 с функцией $f = I_0(u, q) + v^3 h_1(u, q) + v^3 \Delta h_2(q, u)$ и, следовательно, может быть устранен с помощью гладкого диффеоморфизма, коммутирующего со складывающей инволюцией и расслоенного над пространством параметров. Таким образом, получаем следующий вид рассматриваемого интеграла с $\tilde{h}_1(q, u) = h_1(u, q) + (q \pm u^2)h_2(q, u)$:

$$I_0(u, q) + v^3 \tilde{h}_1(q, u) + v^5 h_2(q, u)$$

Имеем $\tilde{h}_1(O) = 0 \neq h_2(O)$, так как $I(O) = 0 \neq I_{v^2}(O)$ и $\tilde{h}_{1,u}(O) = 0 \neq \tilde{h}_{1,q}(O)\tilde{h}_{1,uu}(O)$ ввиду $I_u(O) = 0 \neq I_q(O)I_{uu}(O)$.

Тогда допустимое перемасштабирование $\tilde{v} = v(h_2(q, u))^{1/5}$ приводит коэффициент при v^5 к единице. После этого некоторый сдвиг $\tilde{u} = u + \alpha(q)$ координаты u с некоторой гладкой функцией α , $\alpha(O) = 0$, дает $\tilde{h}_{1,\tilde{u}}|_{\tilde{u}=0} \equiv 0$. Поэтому, в силу леммы Адамара, коэффициент при $\tilde{v}^3$ может быть представлен в виде

$$qa(q) + \tilde{u}^2 b(q, \tilde{u})$$

с некоторыми гладкими функциями a и b , не обращающимися в нуль в начале координат. Таким образом, очевидное допустимое перемасштабирование координат q и u приводит рассматриваемый интеграл к виду (опускаем тильду в обозначениях)

$$\bar{I}_0(u, q) + v^3(q \pm u^2) + v^5$$

с соответствующей гладкой функцией $\bar{I}_0$. Принимая во внимание сделанное преобразование координат, можно взять исходную функцию I_0 так, чтобы первый член в этом соотношении был бы равен u (этот шаг соответствует дополнительной допустимой операции, а именно перенумерации уровней интеграла).

Таким образом, приходим к виду (с) теоремы 4,

$$u + v^3(q \pm u^2) + v^5,$$

рассматриваемого интеграла вблизи начала координат.

Подслучай (d). Применяя лемму Адамара к функции I , представим интеграл (7) вблизи начала координат в виде

$$I_0(u, q) + v^3 h_0(u, q) + v^5 h_1(u, q) + v^7 h_2(u, q) + v^9 h_3(u, v^2, q)$$

с некоторыми гладкими функциями h_α . Имеем $h_0(O) = 0 \neq h_{0,u}(O)$, так как $I(O) = 0 \neq I_u(O)$.

Взяв h_0 за новую переменную u и применяя лемму Адамара к функции h_1 , можно переписать рассматриваемый интеграл в виде

$$I_0(u, q) + v^3(u + uv^2 h_0(u, q)) + v^5 h_1(q) + v^7 h_2(u, q) + v^9 h_3(u, v^2, q)$$

с некоторыми новыми гладкими функциями I_0 , h_α . После перемасштабирования переменной v , $\tilde{v} = v\sqrt{1 + v^2 h_0(u, q)}$, приходим к интегралу вида (опускаем тильду)

$$I_0(u, q) + v^3 u + v^5 h_1(q) + v^7 h_2(u, q) + v^9 h_3(u, v^2, q)$$

с некоторыми новыми гладкими функциями I_0 , h_α .

Применяя еще раз эту процедуру относительно h_2 и производя аналогичное перемасштабирование, приходим к интегралу

$$I_0(u, q) + v^3 u + v^5 h_1(q) + v^7 h_2(q) + v^9 h_3(u, v^2, q)$$

с некоторыми новыми гладкими функциями I_0 , h_α . Функция h_1 обращается в нуль в начале координат, но функции $h_{1,q}$ и h_2 не обращаются в нуль, так как

$$I_{v^2}(O) = 0 \neq I_{v^2 v^2}(O)(I_u(O)I_{v^2 q}(O) - I_q(O)I_{v^2 u}(O)).$$

Следовательно, после выбора новых координат $\tilde{v} = v h_2^{1/7}(q)$, $\tilde{q} = h_1(q) h_2^{-5/7}(q)$ и $\tilde{u} = u h_2^{-3/7}(q)$ получаем (опускаем тильду) следующий вид рассматриваемого интеграла вблизи начала координат с некоторыми новыми функциями I_0 и h :

$$I_0(u, q) + v^3 u + v^5 q + v^7 + v^9 h(u, v^2, q).$$

Принимая во внимание сделанные выше преобразования координат, можно выбрать начальную функцию I_0 так, что первым членом будет u . Таким образом, для завершения доказательства остается только избавиться от зависимости последнего члена рассматриваемого интеграла от u . Но теперь функция ϕ для интеграла равна

$$v^2[u + 5v^2 q/3 + 7v^4/3 + v^6 H(v^2, q)]R(u, v^2, q)$$

с некоторыми гладкими функциями H и R согласно теореме о неявной функции, примененной по $u + 5v^2 q/3 + 7v^4/3$. Функция R , как нетрудно видеть, не обращается в нуль в начале координат. Обозначая выражение в квадратных скобках через Δ и применяя лемму Адамара к функции h , представим последний член рассматриваемого интеграла в виде

$$v^9 h(u, v^2, q) = v^9 H_0(v^2, q) + v^9 \Delta H_1(v^2, q) + v^9 \Delta^2 H_2(\Delta, v^2, q)$$

вблизи начала координат с некоторыми гладкими функциями H_0 , H_1 и H_2 .

По теореме 8, можно удалить последний член в выражении для $v^9 h$. Отсюда вытекает следующий вид интеграла вблизи начала координат:

$$u + v^3 u + v^5 q + v^7 + v^9 H_0(v^2, q) + v^9 \Delta H_1(v^2, q).$$

Это можно переписать в виде

$$u + v^3(1 + v^6 H_1(v^2, q))u + v^5 q + v^7 + v^9(H_0(v^2, q) + (5v^2 q/3 + 7v^4/3)H_1(v^2, q)).$$

Перемасштабируя переменную v , $\tilde{v} = v(1 + v^6 H_1(v^2, q))^{1/3}$, приходим к нужной форме

$$u + v^3 u + v^5 q + v^7 + v^9 h(v^2, q)$$

рассматриваемого интеграла с гладкой функцией h .

Необходимость условий (а)–(д) теоремы 3 для получения нормальных форм (а)–(д) теоремы 4 вытекает из непосредственных вычислений, основанных на этих формах.

Это доказывает теорему 4.

Замечание 10. Представляется, что нечего надеяться на полное удаление функции h из последнего интеграла, поскольку на кривой $\Delta = 0$ при $q < 0$ имеются три инволюции: одна из них — складывающаяся инволюция, а две других переставляют точки этой кривой на одном уровне рассматриваемого интеграла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, Т. 1. — М.: Наука, 1982. — 302 с.
2. Воронин С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения// Функции. анализ и его прил.— 1982. — 16, № 2. — С. 21–29.
3. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977. — 290 с.
4. Давыдов А. А. Нормальная форма медленных движений уравнения релаксационного типа и слоения биномиальных поверхностей// Мат. сб. — 1988. — 132 (174), № 1. — С. 133–139.
5. Arnol'd V. I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations// Grundlehren Math. Wiss. — New York: Springer-Verlag, 1988. — 250.
6. Arnol'd V. I. Contact structure, relaxational oscillations, and singular points of implicit differential equations// Lect. Notes Math. — 1988. — 1334. — С. 173–179.
7. Cibrario M. Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto// Ist. Lombardo, Rend., II. Ser. — 1932. — 65. — С. 889–906.
8. Ecalle J. Sur les fonctions resurgentes, I, II. — Orsay, Univ. de Paris-Sud: Publ. Math. d'Orsay, 1981.

9. *Goryunov V. V.* Projections of generic surfaces with boundaries// Theory of Singularities and Its Applications/ Adv. Sov. Math. — Providence: Amer. Math. Soc., 1990. — **1**. — С. 157–200.
10. *Mather J. N.* Generic projections// Ann. Math. — 1973. — 98, № 2. — С. 226–245.

А. А. Давыдов

Владимирский государственный университет

E-mail: davydov@vpti.vladimir.su

ПРИНЦИП ОКОНЧАНИЯ УИНТНЕРА—ПЕРКО, ПАРАМЕТРЫ, ПОВОРАЧИВАЮЩИЕ ПОЛЕ, И ПРОБЛЕМА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

© 2003 г. В. А. ГАЙКО

Аннотация. Рассматриваются двумерные полиномиальные динамические системы. Мы используем канонические системы с параметрами, поворачивающими поле, и применяем принцип окончания Уинтнера—Перко для кратных предельных циклов, предлагая новый подход к решению шестнадцатой проблемы Гильберта о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов в квадратичном случае полиномиальных систем.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	34
2. Принцип окончания Уинтнера—Перко	35
3. Монотонные семейства предельных циклов и повернутые векторные поля	37
4. Проблема предельных циклов для квадратичных систем	38
Список литературы	41

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем изучать предельные циклы полиномиальной динамической системы вида

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1\mu)$$

где $x \in \mathbf{R}^2$; $\mu \in \mathbf{R}^n$; $f \in \mathbf{R}^2$ (f — полиномиальная векторная функция). Напомним несколько основных фактов о предельных циклах.

Но прежде сформулируем две фундаментальные теоремы из теории аналитических функций [1].

Теорема 1 (подготовительная теорема Вейерштрасса). Пусть $F(w, z)$ — аналитическая в окрестности точки $(0, 0)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F(0, 0)}{\partial w} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} F(0, 0)}{\partial^{k-1} w} = 0; \quad \frac{\partial^k F(0, 0)}{\partial^k w} \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности $|w| < \varepsilon$, $|z| < \delta$ точки $(0, 0)$ функция $F(w, z)$ может быть представлена в виде

$$F(w, z) = (w^k + A_1(z)w^{k-1} + \dots + A_{k-1}(z)w + A_k(z))\Phi(w, z),$$

где $\Phi(w, z)$ — аналитическая функция, не равная нулю в указанной окрестности, а $A_1(z), \dots, A_k(z)$ — аналитические функции при $|z| < \delta$.

Замечание 1. Из этой теоремы вытекает, что уравнение $F(w, z) = 0$ в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ эквивалентно уравнению

$$w^k + A_1(z)w^{k-1} + \dots + A_{k-1}(z)w + A_k(z) = 0,$$

левая часть которого есть многочлен относительно w . Таким образом, подготовительная теорема Вейерштрасса сводит локальное изучение общего случая неявной функции $w(z)$, определенной уравнением $F(w, z) = 0$, к случаю неявной функции, заданной алгебраическим уравнением относительно w .

Теорема 2 (о неявной функции). Пусть $F(w, z)$ — аналитическая в окрестности точки $(0, 0)$ функция и пусть $F(0, 0) = 0$, $F'_w(0, 0) \neq 0$. Тогда существуют $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого z , удовлетворяющего условию $|z| < \delta$, уравнение $F(w, z) = 0$ имеет один и только один корень $w = f(z)$, удовлетворяющий условию $|f(z)| < \varepsilon$. Функция $f(z)$ разлагается в ряд по целым положительным степеням z , сходящийся при $|z| < \delta$, т.е. является однозначной аналитической функцией от z , обращающейся в нуль при $z = 0$.

Предположим, что система (1μ) имеет предельный цикл

$$L_0 : x = \varphi_0(t)$$

минимального периода T_0 при некотором значении параметра $\mu = \mu_0 \in \mathbf{R}^n$. Пусть l — нормаль к L_0 в точке $p_0 = \varphi_0(0)$ и s — координата на l , причем s — положительно снаружи от L_0 . Тогда из теоремы о неявной функции следует, что существует такое $\delta > 0$, что для $|s| < \delta$ и $\|\mu - \mu_0\| < \delta$ определено и аналитично отображение Пуанкаре $h(s, \mu)$. Кроме того, на нормали l к L_0 для системы (1μ) определена функция сдвига

$$d(s, \mu) = h(s, \mu) - s.$$

Применяя функцию сдвига, кратный предельный цикл можно определить следующим образом.

Определение. Предельный цикл L_0 системы (1μ) называется *кратным предельным циклом*, если $d(0, \mu_0) = d_s(0, \mu_0) = 0$, и *простым (или гиперболическим) предельным циклом*, если он не является кратным; более того, L_0 является предельным циклом кратности m , если

$$d(0, \mu_0) = d_s(0, \mu_0) = \dots = d_s^{(m-1)}(0, \mu_0) = 0, \quad d_s^{(m)}(0, \mu_0) \neq 0.$$

Заметим, что кратность L_0 не зависит от выбора точки $p_0 \in L_0$, через которую мы провели нормаль l .

Приведем также ставшие уже классическими формулы, определяющие производные функции сдвига через интегралы от векторного поля f вдоль периодической траектории $\varphi_0(t)$ [1]:

$$d_s(0, \mu_0) = \exp \int_0^{T_0} \nabla \cdot f(\varphi_0(t), \mu_0) dt - 1, \quad (2)$$

$$d_{\mu_j}(0, \mu_0) = \frac{-\omega_0}{\|f(\varphi_0(0), \mu_0)\|} \int_0^{T_0} \exp \left(- \int_0^t \nabla \cdot f(\varphi_0(\tau), \mu_0) d\tau \right) f \wedge f_{\mu_j}(\varphi_0(t), \mu_0) dt \quad (3)$$

для $j = 1, \dots, n$, где $\omega_0 = \pm 1$ в зависимости от того, является ли L_0 , соответственно, положительно или отрицательно ориентированным, и где векторное произведение двух векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ в $\mathbf{R}^n$ определяется как

$$x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Аналогичные формулы, выраженные через интегралы от векторного поля f и его первые и вторые частные производные вдоль $\varphi_0(t)$, могут быть выведены для $d_{ss}(0, \mu_0)$ и $d_{s\mu_j}(0, \mu_0)$.

2. Принцип окончания Уинтнера—Перко

Для глобального анализа бифуркаций предельных циклов воспользуемся *принципом окончания Уинтнера—Перко*, сформулированным для взаимно простых, плоских, аналитических систем и связывающим все основные бифуркации предельных циклов [9, 12, 15, 17]. Сформулируем этот принцип для полиномиальной системы (1μ) .

Теорема 3 (принцип окончания Уинтнера—Перко). Любое однопараметрическое семейство кратных предельных циклов полиномиальной системы (1μ) может быть единственным образом продолжено в максимальное однопараметрическое семейство (кривую) таких циклов, которое будет либо открытым, либо циклическим. Если это семейство открытое, то оно либо оканчивается, когда параметр или предельные циклы становятся неограниченными, либо оканчивается в какой-то особой точке системы (1μ) , которая в типичном случае является негрубым фокусом той же кратности, или на каком-то сепаратрисном цикле (1μ) , который так же в типичном случае имеет ту же кратность.

Доказательство принципа окончания Уинтнера—Перко для общей полиномиальной системы (1_μ) с векторным параметром $\mu \in \mathbf{R}^n$ аналогично доказательству принципа окончания для системы

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda) \quad (1_\lambda)$$

с единственным параметром $\lambda \in \mathbf{R}$ (см. [13]), так как нет потери общности в предположении, что система (1_μ) параметризуется единственным параметром λ ; т.е. мы можем предположить, что существует аналитическое преобразование $\mu(\lambda)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^n$ такое, что (1_μ) может быть записано как $(1_{\mu(\lambda)})$ или даже (1_λ) , и затем мы можем повторить все, что было сделано с системой (1_λ) в [15].

Из принципа следует, что в типичном случае любое ограниченное однопараметрическое семейство предельных циклов кратности m является либо циклическим, либо оно оканчивается в бифуркации Андронова—Хопфа порядка m или в бифуркации гомоклинической (гетероклинической) петли порядка m ; однако есть примеры [15], которые показывают, что, вообще говоря, однопараметрическое семейство предельных циклов кратности m может оканчиваться также:

- 1) в особой точке системы (1_μ) , которая является фокусом кратности $k > m$, т.е. в бифуркации Андронова—Хопфа порядка $k > m$, или
- 2) в центре системы (1_μ) , или
- 3) в вырожденной особой точке (1_μ) , соответствующей бифуркации сборки Богданова—Тakens, или
- 4) на (сложном) сепаратрисном цикле (1_μ) кратности $k > m$, т.е. в бифуркации гомоклинической (гетероклинической) петли порядка $k > m$.

Может случиться даже, что однопараметрическое семейство кратных предельных циклов оканчивается на сложном сепаратрисном цикле системы (1_μ) , для которого отображение Пуанкаре не определено [15].

Принцип окончания Уинтнера—Перко является слишком общим также для решения такой специфической проблемы, какой является шестнадцатая проблема Гильберта о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов. Например, мы не знаем точно, какие из параметров системы (1_μ) действительно контролируют кратные предельные циклы; у нас нет полной информации о границе глобальной бифуркационной поверхности кратных предельных циклов; мы не знаем, как отделить случай, когда максимальное однопараметрическое семейство кратных предельных циклов является циклическим и т. д. Поэтому имеет смысл обратиться снова к простейшему (квадратичному) случаю системы (1_μ) и воспользоваться некоторыми нашими предыдущими результатами по глобальному качественному исследованию таких систем.

В работах [5, 10], например, мы рассматривали бифуркации предельных циклов различной размерности для квадратичной системы с двумя параметрами, поворачивающими поле, и ввели так называемую функцию предельных циклов — сечение многообразия Андронова—Хопфа, образованного предельными циклами и соответствующими значениями какого-то из параметров, поворачивающих поле. Используя численно-аналитические методы, мы построили конкретные примеры систем с различным количеством и взаимным расположением предельных циклов (в частности, был построен пример системы, имеющей, по крайней мере, четыре предельных цикла в расположении $(3 : 1)$). В этих работах мы исследовали случай двух особых точек в конечной части плоскости и показали, что в соответствующих двухпараметрических семействах с параметрами, поворачивающими поле, полуустойчивые (двукратные) предельные циклы под действием этих параметров двигались либо к началу координат, либо к сепаратрисному циклу. Окончание бифуркационной кривой этих двукратных циклов регистрировалось обращением в нуль либо первой фокусной величины в начале координат, либо дивергенции векторного поля (или эквивалентной величины) в седле (или седлах), лежащем (лежащих) на сепаратрисном цикле. В [3, 4, 11] рассмотрели оставшиеся случаи особых точек и провели полную классификацию сепаратрисных циклов квадратичных систем. В работах [4, 11] мы использовали всю эту информацию, а также данные по классификации и соответствующей цикличности сепаратрисных циклов и с помощью параметров, поворачивающих поле, и функции предельных циклов пытались управлять полуустойчивыми предельными циклами, изменяя параметры так, чтобы эти циклы двигались либо к особой точке, либо к какому-то из

сепаратрисных циклов, цикличность которых нам заведомо была известна. Таким образом, мы получали противоречие с известной цикличностью (кратностью) граничных элементов и, тем самым, могли ограничить сверху кратность предельных циклов.

В [4, 11] мы развивали эти идеи посредством принципа окончания и обобщения результатов для однопараметрических семейств предельных циклов, образованных параметрами, поворачивающими поле, применяя их к решению шестнадцатой проблемы Гильберта для квадратичных систем (1_μ) .

3. МОНОТОННЫЕ СЕМЕЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И ПОВЕРНУТЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Прежде всего обобщим некоторые результаты по однопараметрическим семействам предельных циклов, порожденным параметрами, поворачивающими поле (или семействами повернутых векторных полей), которые были получены Даффом [6] и Перко [14].

Как известно [6], плоское семейство векторных полей, описанных (1_λ) , называется *семейством повернутых векторных полей*, если особые точки (1_λ) остаются фиксированными при изменении λ на промежутке $(-\infty, \infty)$ и если угол каждого вектора в векторном поле, $\theta = \arctan Q/P$, изменяется монотонно относительно λ , т.е. если

$$\partial\theta/\partial\lambda = (PQ'_\lambda - QP'_\lambda)/(P^2 + Q^2)$$

не обращается в нуль при $\lambda \in \mathbf{R}$ или, эквивалентно, если определитель

$$D = \begin{vmatrix} P & Q \\ P'_\lambda & Q'_\lambda \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль при $\lambda \in \mathbf{R}$.

Из главных результатов [6] следует, что предельные циклы любого однопараметрического семейства, порожденного семейством повернутых векторных полей (1_λ) , расширяются или сжимаются монотонно относительно λ до тех пор, пока они не достигнут какой-то из особых точек (1_λ) . Принцип окончания является обобщением этого результата Даффа [6]. Как было показано в [14], те же результаты имеют место и в случае, когда определитель D не меняет знак и имеет только конечное число нулей на любом предельном цикле (1_λ) .

В [1] была получена следующая формула, аналогичная (3):

$$d_\lambda(0, 0) = -\omega_0 I_0 / (P_x^2(\varphi_0(0), \psi_0(0), 0) + Q_y^2(\varphi_0(0), \psi_0(0), 0))^{1/2}, \quad (4)$$

где интеграл

$$I_0 = \int_0^T \exp \left(\int_t^T (P'_x(\varphi_0(\tau), \psi_0(\tau), 0) + Q'_y(\varphi_0(\tau), \psi_0(\tau), 0)) d\tau \right) D(\varphi_0(t), \psi_0(t), 0) dt.$$

В этой формуле $d(s, \lambda)$ обозначает функцию сдвига вдоль прямой l_0 , перпендикулярной к L_0 в точке $p_0 = (\varphi_0(0), \psi_0(0)) \in L_0$; $D(x, y, \lambda)$ — определитель, заданный выше; $\omega_0 = \pm 1$ соответствует ориентации L_0 .

Если l_σ — прямая, перпендикулярная к L_0 , а $d(\sigma, s, \lambda)$ обозначает функцию сдвига вдоль l_σ , то можно показать (см. [13]), что $d_\lambda(\sigma, 0, 0)$ задается формулой (4), где I_0 заменяется интегралом I_σ с пределами от σ до $\sigma + T$ вместо, соответственно, 0 и T . Вообще говоря, может случиться, что $d_\lambda(\sigma, 0, 0)$ имеет различные знаки для различных значений $\sigma \in [0, 2\pi]$ [13], т.е. семейство в одних точках L_0 может расширяться, а в других сжиматься. Однако может быть показано, что *если L_0 — кратный предельный цикл и если $d_\lambda(\sigma_0, 0, 0) = 0$ для некоторого $\sigma_0 \in \mathbf{R}$, то $d_\lambda(\sigma, 0, 0) = 0$ для всех $\sigma \in \mathbf{R}$* [13]. Тогда из непрерывности $d_\lambda(\sigma, 0, 0)$ следует, что *если $d_\lambda(\sigma_0, 0, 0) > 0$ для некоторого $\sigma_0 \in \mathbf{R}$, то $d_\lambda(\sigma, 0, 0) > 0$ для всех $\sigma \in \mathbf{R}$* . Имея в виду эти факты, мы можем определить два вида кратных предельных циклов: кратный предельный цикл L_0 системы (1_0) называется *особым*, если $d_\lambda(\sigma, 0, 0) = 0$ для всех $\sigma \in \mathbf{R}$, и называется *неособым*, если $d_\lambda(\sigma, 0, 0) \neq 0$ для всех $\sigma \in \mathbf{R}$.

Из формулы (4) немедленно вытекает тот факт, что $d_\lambda(0, 0) \neq 0$ в любом семействе повернутых векторных полей (1_λ) . Таким образом, из теоремы о неявной функции следует, что если (1_λ)

описывает семейство повернутых векторных полей, то существует единственная аналитическая функция $\lambda(s)$ такая, что $d(s, \lambda(s)) = 0$ и

$$\lambda'(s) = -d_s(s, \lambda(s))/d_\lambda(s, \lambda(s))$$

для всех достаточно малых s . Следовательно, в любом однопараметрическом семействе повернутых векторных полей (1_λ) возможны только бифуркации складки и семейство предельных циклов «не возвращается обратно в самом себе». Отсюда вытекает, что *не существует циклических семейств предельных циклов, порожденных семейством повернутых векторных полей* [13].

Замечание 2. Нет необходимости для монотонного роста предельных циклов требовать, чтобы заданный выше определитель D оставался положительным (или отрицательным), как это было в [6]. Для того, чтобы однопараметрическое семейство предельных циклов, порожденных (1_λ) , расширялось или сжималось монотонно относительно λ , проходящего через значение, соответствующее L_0 , достаточно, чтобы интегралы I_σ , определенные выше, были положительными (или отрицательными) для всех $\sigma \in [0, 2\pi)$. В действительности, так как $\text{sgn}(d_s(0, 0)) = \nu_0$, где $\nu_0 = \pm 1$ в зависимости от того, является L_0 устойчивым или неустойчивым, соответственно, из приведенных выше уравнений для $d_\lambda(0, 0)$ и $\lambda'(0)$ (и соответствующих уравнений для $d_\lambda(\sigma, 0, 0)$ и $\lambda'(\sigma, 0)$) следует, что если $I_\sigma > 0$ для $\sigma \in [0, 2\pi)$, то $\text{sgn}(\lambda'(\sigma, 0)) = \nu_0 \omega_0$ для всех $\sigma \in [0, 2\pi)$. Следовательно, *если $I_\sigma > 0$ для $\sigma \in [0, 2\pi)$, то при возрастании λ (когда ν_0 и ω_0 имеют один и тот же знак) или убывании λ (когда ν_0 и ω_0 имеют противоположные знаки) однопараметрическое семейство предельных циклов расширяется, проходя через простой предельный цикл L_0* . Аналогичный результат имеет место, если $I_\sigma < 0$ для всех $\sigma \in [0, 2\pi)$. То же самое справедливо для кратных предельных циклов, где, как отмечалось выше, необходимо только потребовать, чтобы $d_\lambda(0, 0)$ или, равносильно, I_0 были отличны от нуля [13]. Эти результаты суммируются в следующей теореме, во 2-й части которой ν_0 определяется через внешнюю устойчивость полуустойчивого предельного цикла L_0 .

Теорема 4 (о монотонных семействах предельных циклов [13]). *Если L_0 — неособый кратный предельный цикл системы (1_0) , то L_0 принадлежит однопараметрическому семейству предельных циклов системы (1_λ) ; более того:*

- 1) *если кратность L_0 нечетная, то семейство либо расширяется, либо сжимается монотонно при прохождении λ через λ_0 ;*
- 2) *если кратность L_0 четная, то L_0 распадается на устойчивый и неустойчивый предельные циклы при прохождении λ через λ_0 в одном направлении и L_0 исчезает при прохождении λ через λ_0 в противоположном направлении; т.е. в λ_0 — бифуркация складки.*

4. ПРОБЛЕМА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ

В [15] Перко установил существование локальных $(n-m+1)$ -мерных многообразий C_m предельных циклов кратности m для полиномиальных систем (1_μ) с $\mu \in \mathbf{R}^n$ и $n \geq m \geq 2$. Эти результаты описывают топологическую структуру бифуркационных многообразий C_m коразмерности $(m-1)$. Для $m = 2, 3, 4$ многообразия C_2, C_3, C_4 представляют собой известные бифуркационные поверхности типа «складка», «сборка» и «ласточкин хвост»; для $m = 5, 6$ многообразия C_5 и C_6 — это бифуркационные поверхности типа «бабочка» и «вигвам», соответственно; для $m \geq 7$ топологическая структура соответствующих многообразий C_m еще более сложная.

Пусть имеется локальная бифуркационная поверхность кратных предельных циклов. Как показано в [15] (с помощью теоремы о неявной функции и подготовительной теоремы Вейерштрасса), любая такая поверхность может быть образована определенным количеством попарно пересекающихся бифуркационных поверхностей типа «складка», которые ограничивают в пространстве параметров системы некоторую область с соответствующим количеством простых предельных циклов. Так как бифуркации предельных циклов определяются параметрами, поворачивающими векторное поле, то достаточно рассмотреть бифуркационные поверхности кратных предельных циклов только в пространстве этих параметров. Очевидно, что число параметров, поворачивающих поле, и определяет сложность образованной бифуркационной поверхности. В квадратичном случае, например, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 5 (о монотонных семействах предельных циклов [13]). *Не существует квадратичной системы, имеющей в пространстве параметров бифуркационную поверхность четырехкратных предельных циклов типа «ласточкин хвост». Другими словами, никакая квадратичная система не может иметь ни четырехкратного предельного цикла, ни четырех предельных циклов вокруг одной особой точки (фокуса); и максимальная кратность, и максимальное число предельных циклов, окружающих фокус, равно трем.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится от противного.

В [10] мы доказали, что для изучения предельных циклов вместо общей квадратичной системы с двенадцатью параметрами достаточно рассмотреть две канонические системы с пятью и четырьмя параметрами, соответственно:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y(1+x) + \alpha Q(x, y), \\ \dot{y} &= x + \lambda y + ax^2 + \beta y(1+x) + cy^2 \equiv Q(x, y); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{x} = -y + \nu y^2, \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad \nu = 0, 1, \quad (6)$$

где вторая из систем представляет собой два предельных случая первой.

Рассмотрим пятипараметрическую систему (5) (система (6) рассматривается аналогично), содержащую три параметра, поворачивающих поле (α , β и γ), и предположим, что она имеет четыре предельных цикла вокруг начала координат. При этом предположении мы попадем в некоторую область пространства параметров, поворачивающих поле, будучи ограниченными определенными условиями на два оставшихся параметра системы (a и c), соответствующих различным случаям особых точек в конечной части фазовой плоскости, которые мы рассматривали при классификации сепаратрисных циклов в [3, 11]. Без ограничения общности один из этих параметров можно зафиксировать: например, параметр a , фиксируя при этом положение двух особых точек на оси x в фазовой плоскости. Тогда в пространстве параметров α , β , γ и c найдется область, ограниченная тремя поверхностями типа «складка», образующими локальную бифуркационную поверхность четырехкратных предельных циклов типа «ласточкин хвост».

Соответствующее максимальное однопараметрическое семейство четырехкратных предельных циклов не может быть циклическим, так как иначе в пространстве параметров будет существовать, по крайней мере, одна точка, соответствующая предельному циклу кратности пять (или даже выше). Продолжая бифуркационную кривую предельных циклов кратности пять через эту точку и параметризуя соответствующее максимальное однопараметрическое семейство пятикратных предельных циклов каким-то из параметров, поворачивающих поле, мы получим, в соответствии с теоремой 4, монотонную кривую, которая, по принципу окончания Уинтнера—Перко (теорема 3), будет оканчиваться либо в начале координат, либо на каком-то сепаратрисном цикле, окружающем эту точку. А так как мы знаем абсолютно точно, по крайней мере, цикличность особой точки, которая равна трем (результат Баутина [2]), мы получаем противоречие с принципом окончания, утверждающим, что кратность предельных циклов не может быть выше, чем кратность (цикличность) особой точки, в которой они оканчиваются.

Если же максимальное однопараметрическое семейство четырехкратных предельных циклов не является циклическим, то по принципу окончания (теорема 3) это опять же противоречит результату Баутина, не допускающему кратности предельных циклов выше трех. Это противоречие и завершает доказательство. $\square$

Таким образом, применяя методы теории катастроф и принцип окончания для кратных предельных циклов, мы развиваем глобальную теорию бифуркаций двумерных полиномиальных динамических систем и, опираясь на эту теорию, можем предложить программу окончательного решения шестнадцатой проблемы Гильберта в случае квадратичных систем. Эта программа является продолжением и, в каком-то смысле, альтернативой к программе, которая была выдвинута около десяти лет назад Ф. Дюмортье, Р. Руссари и К. Руссо и которая часто называется просто «программой Руссари» — по имени ее идейного вдохновителя [7, 16].

Программа Руссари сводится к классификации сепаратрисных циклов, определению их цикличности и нахождению какой-либо верхней грани числа предельных циклов квадратичных систем.

Необходимость развития этой программы вызвана тем, что имеются некоторые принципиальные трудности в ее реализации: например, не понятно, как определять цикличность немонодромных сепаратрисных циклов, когда не существует функции последования в окрестности этих циклов, и нет пока общего подхода к исследованию цикличности сепаратрисных циклов в случае центра, когда функция последования — тождественный нуль. Кроме того, даже в случае реализации такой программы, как отмечают сами ее авторы [7], полученная верхняя грань числа предельных циклов заведомо не может быть оптимальной, так как применяемые там чисто аналитические методы не способны обеспечить ни глобальный контроль бифуркаций предельных циклов вокруг одной особой точки, ни, тем более, одновременный контроль бифуркаций вокруг различных особых точек.

Более перспективным представляется подход, основанный на комбинации бифуркационно-аналитических методов с теорией абелевых интегралов. Как было показано в [8], где рассматривались интегрируемые системы при малых возмущениях параметров, с помощью абелевых интегралов в некоторых специальных случаях квадратичных систем возможно даже полное решение вопроса о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов. В [8], например, рассматривается квадратичная система с двумя седлами в конечной части плоскости и тремя особыми точками (узлом и двумя седлами) на бесконечности, которая близка к интегрируемой системе в случае симметрии, и доказывается, что такая система может иметь не более трех предельных циклов вокруг каждой из особых точек.

Мы же предлагаем программу, которая основывается на трех фундаментальных идеях качественной теории дифференциальных уравнений, а именно:

- 1) о качественном исследовании в целом, т.е. о необходимости проведения качественного исследования как на всей фазовой плоскости, так и во всем пространстве параметров системы (Н. П. Еругин);
- 2) об использовании параметров, поворачивающих векторное поле, в качестве инструмента для работы с предельными циклами (Г. Ф. Д. Дафф);
- 3) о принципе окончания максимального однопараметрического семейства кратных предельных циклов, объединяющем все известные локальные бифуркации предельных циклов (А. Уинтнер, Л. М. Перко).

Суть программы в случае квадратичных систем состоит в следующем.

1. Используются пятипараметрические канонические системы с тремя (динамическими) параметрами, поворачивающими векторное поле.

2. Плоскость двух оставшихся (статических) параметров разбивается на области, соответствующие различному количеству и характеру особых точек в конечной части плоскости, и канонические системы рассматриваются отдельно в каждой из таких областей, т.е. изучение бифуркаций предельных циклов сводится к исследованию трехмерных областей в пространстве динамических параметров.

3. Доказывается в каждом конкретном случае конечных особенностей, что максимальное однопараметрическое семейство кратных предельных циклов не является циклическим.

4. Используя результат Баутина о цикличности особой точки, которая равна трем, и принцип окончания Уинтнера—Перко, утверждающий, что кратность предельных циклов не может быть выше кратности (цикличности) особой точки, в которой они оканчиваются, в каждом отдельном случае доказывается от противного невозможность существования ни четырехкратного предельного цикла, ни четырех предельных циклов вокруг одной особой точки.

5. Рассматриваются бифуркации предельных циклов вокруг различных особых точек и доказывается, что четыре предельных цикла могут существовать одновременно только в расположении $(3 : 1)$, т.е. три — вокруг одного фокуса и один — вокруг другого.

Таким образом, с учетом построенных ранее примеров квадратичных систем с четырьмя предельными циклами (см. [4]), имеет место следующая гипотеза.

Гипотеза. Максимальное число предельных циклов в квадратичной системе равно четырем, и единственно возможное их расположение — $(3 : 1)$.

Замечание 3. В действительности, чтобы доказать эту гипотезу (т.е. решить шестнадцатую проблему Гильберта для квадратичных систем), мы должны доказать для предельных циклов только невозможность расположения $(2 : 2)$ в случае двух фокусов и одного седла на бесконечности. В [4, 5, 10], используя каноническую систему с двумя параметрами, α и γ , поворачивающими поле, в случае двух фокусов и одного седла на бесконечности, мы построили квадратичную систему, имеющую, по крайней мере, четыре предельных цикла в расположении $(3 : 1)$. Если допустить сначала, что эта система имеет только три предельных цикла в расположении $(2 : 1)$, т.е. два цикла вокруг фокуса $(0, 0)$ и только один вокруг фокуса $(1, 0)$, а затем предположить, что при изменении какого-либо из параметров, поворачивающих поле, например, α , полуустойчивый цикл появится вокруг фокуса $(1, 0)$, то, применяя принцип окончания, может быть показано, что максимальное однопараметрическое семейство трехкратных предельных циклов, параметризованное другим параметром, γ , поворачивающим поле, не может оканчиваться в фокусе $(1, 0)$, так как для любых $\alpha \neq 0$ он будет грубым фокусом (см. [4, 5, 10]). Мы могли бы также использовать для доказательства нашу привычную пятипараметрическую каноническую систему (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.
2. Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр// Мат. сб. — 1952. — 30 — С. 181–196.
3. Гайко В. А. Сепаратрисные циклы квадратичных систем// Докл. Нац. АН Беларуси. — 1993. — 37. — С. 18–21.
4. Гайко В. А. Глобальные бифуркации предельных циклов и шестнадцатая проблема Гильберта. — Минск: Изд-во Университетское, 2000.
5. Черкас Л. А., Гайко В. А. Бифуркации предельных циклов квадратичной системы с двумя особыми точками и двумя параметрами, поворачивающими поле// Дифференц. уравнения. — 1987. — 23. — С. 1544–1553.
6. Duff G. F. D. Limit-cycles and rotated vector fields// Ann. Math. — 1953. — 67. — С. 15–31.
7. Dumortier F., Roussarie R., Rousseau C. Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields// J. Different. Equat. — 1994. — 110. — С. 86–133.
8. Dumortier F., Li C., Zhang Z. Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded heteroclinic loops// J. Different. Equat. — 1997. — 139. — С. 146–193.
9. Françoise J.-P., Pough C. C. Keeping track of limit cycles// J. Different. Equat. — 1986. — 65. — С. 139–157.
10. Gaiko V. A. Qualitative theory of two-dimensional polynomial dynamical systems: problems, approaches, and conjectures// Nonlinear Anal. — 1997. — 30. — С. 1385–1394.
11. Gaiko V. A. Hilbert's sixteenth problem and global bifurcations of limit cycles// Nonlinear Anal. — 2001. — 47. — С. 4455–4466.
12. Mallet-Paret J., Yorke J. A. Snakes: oriented families of periodic orbits, their sources, sinks and continuation// J. Different. Equat. — 1982. — 43. — С. 419–450.
13. Perko L. M. Global families of limit cycles of planar analytic systems// Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — 322. — С. 627–656.
14. Perko L. M. Rotated vector fields// J. Different. Equat. — 1993. — 103. — С. 127–145.
15. Perko L. M. Multiple limit cycle bifurcation surfaces and global families of multiple limit cycles// J. Different. Equat. — 1995. — 122. — С. 89–113.
16. Roussarie R. Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem. — Basel, Boston: Birkhäuser, 1998.
17. Wintner A. Beweis des E. Stromgrenschen dynamischen Abschlusprinzips der periodischen Bahngruppen im restringierten Dreikörperproblem// Math. Z. — 1931. — 34. — С. 321–349.

E-mail: vlrgk@cit.org.by

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЕЙШИХ НЕ ГРАДИЕНТНОПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НА 3-МНОГООБРАЗИЯХ

© 2003 г. **Х. БОНАТТИ, В. ГРИНЕС, О. ПОЧИНКА**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	42
2. Формулировка результатов	44
3. Вспомогательные определения и леммы	45
4. Операции разрезания и склеивания на многообразии N	52
4.1. Операция разрезания и склеивания вдоль однократного тора или бутылки Клейна	52
4.2. Операция разрезания и склеивания вдоль односторонней гетероклинической ламинации	52
5. Схема	53
6. Схема диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$	53
6.1. Динамика диффеоморфизмов класса $MS(M_r, 6)$	53
6.2. Структура многообразия $N_r(f)$	55
6.3. Допустимая система окрестностей	56
6.4. Структура множеств $S_r^u(f)$, $S_r^s(f)$	56
7. Доказательство теоремы 2.4. Построение диффеоморфизма $f_S \in MS(M_r, 6)$, реализующего схему $S \in \mathcal{S}$	59
7.1. Присоединение седловых точек	59
8. Доказательство теоремы 2.3	64
8.1. Доказательство необходимости условий теоремы 2.3	64
8.2. Доказательство достаточности условий теоремы 2.3	65
Список литературы	69

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи топологической сопряженности диффеоморфизмов, заданных на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии, имеет ряд принципиальных отличий от решения аналогичной задачи для потоков даже в классе динамических систем Морса—Смейла. Это обусловлено, во-первых, возможностью дикого вложения сепаратрис седловых точек в окрестности стока или источника (примеры такого нетривиального вложения были построены в работах [4, 10]). Во-вторых, возможностью пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий различных седловых точек, имеющих одинаковый индекс Морса (из простых соображений о размерности следует, что такое пересечение невозможно для потоков Морса—Смейла).

Напомним, что если p, q — различные периодические седловые точки диффеоморфизма Морса—Смейла f трехмерного многообразия, для которых $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$, тогда:

- если $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$, то $W^u(p) \cap W^s(q)$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется *гетероклинической точкой*, а траектория гетероклинической точки называется *гетероклинической орбитой*;
- если $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$, то компонента связности $W^u(p) \cap W^s(q)$ называется *гетероклинической кривой*.

Исследование частично поддержано CNRS (Франция) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 02-01-00098).

Согласно Смейлу (см. [3, 12]) диффеоморфизм f называется *градиентноподобным*, если из условия $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ следует, что $\dim W^u(p) < \dim W^s(q)$. Диффеоморфизм Морса—Смейла, не имеющий гетероклинических точек, является градиентноподобным.

Важным продвижением в классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях явилась работа [4]. В ней рассмотрен класс градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых, заданных на S^3 , неблуждающее множество которых состоит ровно из четырех неподвижных точек: двух стоков, одного источника и одного седла. Там же было показано, что топологическая классификация таких диффеоморфизмов эквивалентна топологической классификации узлов, вложенных в многообразие $S^2 \times S^1$.

Следующим принципиальным шагом стала работа [5], в которой установлено, что если замкнутое трехмерное ориентируемое многообразие допускает диффеоморфизм Морса—Смейла без гетероклинических кривых, то оно является либо сферой S^3 , либо связной суммой конечного числа копий $S^2 \times S^1$.

Идея работы [4] была использована для топологической классификации более общих классов диффеоморфизмов: в [1, 7] — для градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых и в [6] — для градиентноподобных диффеоморфизмов, допускающих пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек по конечному множеству гетероклинических кривых.

Настоящая работа является первым шагом в изучении диффеоморфизмов Морса—Смейла с гетероклиническими орбитами на 3-многообразиях (т.е. не являющихся градиентноподобным). Мы дадим полную классификацию самого простого класса таких диффеоморфизмов, используя топологическую конструкцию, предложенную в работе [6].

Пусть f — диффеоморфизм Морса—Смейла, заданный на гладком замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3 , $g = f^k$, $k \in \mathbb{Z}$ — диффеоморфизм, неблуждающее множество $\Omega(g)$ которого состоит из неподвижных точек, и ограничения диффеоморфизма g на неустойчивые многообразия седловых точек сохраняют ориентацию этих многообразий. Для каждого $i \in \{0, \dots, 3\}$ обозначим через g_{*i} линейный изоморфизм, индуцированный g в группе гомологий $H_i(M^3, \mathbb{R})$, а через tr_i — след отображения g_{*i} . Из результатов [13] следует, что для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла, заданных на 3-многообразиях, *число Лефшеца* $\Lambda(g) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \text{tr}_i$

равно нулю. С другой стороны, по формуле Лефшеца $\sum_{p \in \Omega(g)} L(p) = \Lambda(g)$, где $L(p)$ — *индекс неподвижной точки* p ¹. Отсюда следует, что неблуждающее множество $\Omega(g)$ состоит из четного числа точек. Так как f — диффеоморфизм Морса—Смейла, то g имеет хотя бы один неподвижный сток p_1 и хотя бы один неподвижный источник p_2 . Если f — не градиентноподобный диффеоморфизм, то g имеет хотя бы две неподвижные седловые точки p_3, p_4 с одинаковым *индексом Морса*², т.е. $\Omega(g)$ содержит обязательный набор из четырех точек p_1, p_2, p_3 и p_4 , сумма индексов которых равна 2 или -2 . Таким образом, число неподвижных точек не градиентноподобного диффеоморфизма g не меньше шести. Следовательно, неблуждающее множество диффеоморфизма f также содержит не менее шести точек. В данной работе будет показано, что существуют трехмерные многообразия, допускающие не градиентноподобные диффеоморфизмы Морса—Смейла, неблуждающие множества которых состоят ровно из шести точек. Таким образом, в настоящей работе мы рассмотрим класс $MS(M^3, 6)$ не градиентноподобных диффеоморфизмов Морса—Смейла, заданных на M^3 , неблуждающее множество которых состоит ровно из шести точек, а блуждающее множество которых не содержит гетероклинических кривых.

Скажем, что класс $MS(M^3, 6)$ состоит из *простейших не градиентноподобных диффеоморфизмов*.

¹Напомним, что *индексом неподвижной точки* p диффеоморфизма g называется число $L(p) = \Delta(-1)^{\dim W^u(p)}$, где $\Delta = 1$ ($\Delta = -1$), если ограничение диффеоморфизма g на $W^u(p)$ сохраняет (меняет) ориентацию $W^u(p)$ (см. например, [3, с. 96-97]).

²Напомним, что размерность неустойчивого многообразия периодической точки диффеоморфизма называется *индексом Морса* этой точки.

Обозначим через k число седловых точек, через l — число стоковых и источниковых точек диффеоморфизма $f \in MS(M^3, 6)$. В работе [5] установлено:

- $l - k = 2$ тогда и только тогда, когда $M^3 = S^3$;
- $\frac{k-l+2}{2} = m$, $m \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда $M^3 = \underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_m$.

Приведенные соотношения позволяют определить многообразия, допускающие диффеоморфизмы рассматриваемого класса.

Если $k = 2$, $l = 4$, то $M^3 = S^3$;
 если $k = 3$, $l = 3$, то $M^3 = S^2 \times S^1$;
 если $k = 4$, $l = 2$, то $M^3 = S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$.

Тогда множество простейших не градиентноподобных диффеоморфизмов можно разбить на три непересекающиеся класса: $MS(S^3, 6)$, $MS(S^2 \times S^1, 6)$ и $MS(S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1, 6)$.

- $MS(S^3, 6)$ — класс диффеоморфизмов, заданных на многообразии S^3 , неблуждающее множество которых состоит из двух седловых неподвижных точек σ_1, σ_2 с индексом Морса 2 (1), одного неподвижного стока (источника) и трех источников (стоков) (необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов этого класса получены в [11]);
- $MS(S^2 \times S^1, 6)$ — класс диффеоморфизмов, заданных на многообразии $S^2 \times S^1$, неблуждающее множество которых состоит из двух седловых неподвижных точек σ_1, σ_2 с индексом Морса 2 (1), одной седловой неподвижной точки σ_3 с индексом Морса 1 (2), одного неподвижного стока (источника) и двух неподвижных источников (стоков);
- $MS(S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1, 6)$ — класс диффеоморфизмов, заданных на многообразии $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$, неблуждающее множество которых состоит из двух седловых неподвижных точек σ_1, σ_2 с индексом Морса 2 (1), двух седловых неподвижных точек σ_3, σ_4 с индексом Морса 1 (2), одного неподвижного источника и одного неподвижного стока.

Пусть $r \in \{0, 1, 2\}$, M_r — трехмерное многообразие, которое для $r = 0$ совпадает с S^3 , для $r = 1$ совпадает с $S^2 \times S^1$, для $r = 2$ совпадает с $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$. Таким образом, в дальнейшем описанные выше классы будем обозначать через $MS(M_r, 6)$. Не ограничивая общности, можно считать, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ содержит единственный сток, который обозначим через ω , и неподвижные седловые точки $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega(f)$ такие, что $\dim W^u(\sigma_1) = 2$, $\dim W^u(\sigma_2) = 2$ и $W^u(\sigma_2) \cap W^s(\sigma_1) \neq \emptyset$ (если для диффеоморфизма f эти условия не выполняются, они выполняются для диффеоморфизма f^{-1}). Тогда множество $\Omega(f)$ содержит ровно $r + 2$ седловые и $3 - r$ источниковые точки.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через W_r^s (W_r^u) объединение устойчивых (неустойчивых) многообразий всех седловых точек диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$, через W_r^{1s} (W_r^{1u}) — подмножество множества W_r^s (W_r^u), состоящее из всех одномерных многообразий, через W_r^{2s} (W_r^{2u}) — подмножество множества W_r^s (W_r^u), состоящее из всех двумерных многообразий. Положим $W_r^2 = W_r^{2s} \cup W_r^{2u}$, $C_r^{1u} = \omega \cup W_r^{1u}$, $C_r^{1s} = \mathcal{R}_r \cup W_r^{1s}$, где $\mathcal{R}_r$ — множество всех источниковых точек диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$.

Рассмотрим многообразие $\tilde{M}_r = M_r \setminus (C_r^{1s} \cup C_r^{1u})$ и группу $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$, которая действует на нем собственноразрывно. Обозначим через $N_r(f) = (\tilde{M}_r)/F$ пространство орбит этого действия. Как будет показано в п. 6.2 (предложение 6.4), многообразие $N_r(f)$ является связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Обозначим через $p_r : M_r \rightarrow N_r(f)$ каноническую проекцию. Так как группа F действует собственноразрывно на $\tilde{M}_r$, то p_r является накрытием. В силу изоморфизма групп F и $\mathbb{Z}$ проекция p_r определяет нетривиальный гомоморфизм $\alpha_r(f) : \pi_1(N_r(f)) \rightarrow \mathbb{Z}$ со следующим свойством: любая кривая в $\tilde{M}_r$, соединяющая точки x и $f^k(x)$, проектируется в замкнутую петлю c на $N_r(f)$ такую, что $\alpha_r(f)([c]) = k$.

Поскольку диффеоморфизмы рассматриваемого класса не имеют гетероклинических кривых, то множество $p_r(W_r^2 \setminus W_r^1)$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств $S_r^u(f) = p_r(W_r^{2u} \setminus W_r^{1s})$ и $S_r^s(f) = p_r(W_r^{2s} \setminus W_r^{1u})$.

Определение 2.1. Назовем схемой диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ набор

$$S_r(f) = (N_r(f), \alpha_r(f), S_r^u(f), S_r^s(f)).$$

Определение 2.2. Схемы

$$S_r(f) = (N_r(f), \alpha_r(f), S_r^u(f), S_r^s(f)), \quad S_r(f') = (N_r(f'), \alpha_r(f'), S_r^u(f'), S_r^s(f'))$$

диффеоморфизмов f и f' соответственно назовем эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi : N_r(f) \rightarrow N_r(f')$ со следующими свойствами:

- 1) $\alpha_r(f) = \alpha_r(f') \circ \varphi_*$;
- 2) $\varphi(S_r^u(f)) = S_r^u(f')$, $\varphi(S_r^s(f)) = S_r^s(f')$.

Теорема 2.3. Диффеоморфизмы $f, f' \in MS(M_r, 6)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.

В разделе 5 вводится понятие абстрактной схемы S . Среди всех абстрактных схем выделяется множество $\mathcal{S}$ схем, которому принадлежат схемы всех диффеоморфизмов из класса $MS(M_r, 6)$ и для которых справедлива следующая теорема реализации.

Теорема 2.4. Для каждой схемы $S \in \mathcal{S}$ существует диффеоморфизм Морса—Смейла $f_S \in MS(M_r, 6)$, схема которого эквивалентна S .

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

Определение 3.1. Говорят, что группа G с групповой операцией $*$ действует собственноразрывно на топологическом пространстве X , если определено отображение $f : G \times X \rightarrow X$ такое, что:

- 1) $f(1, x) = x$ для всех $x \in X$, где 1 — нейтральный элемент группы G ,
- 2) $f(g, f(h, x)) = f((g * h), x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in G$,
- 3) для любого $x \in X$ существует окрестность V_x такая, что $f(g, V_x) \cap f(h, V_x) = \emptyset$ для всех $g, h \in G, g \neq h$.¹

Пусть $\mathbb{T}$ — стандартный двумерный тор, $\mathbb{K}$ — стандартная бутылка Клейна, $\mathbb{D}$ — стандартный двумерный диск, $\mathbb{T}_m$ — стандартный двумерный тор с $m > 0$ выколотыми точками, $\mathbb{K}_m$ — стандартная бутылка Клейна с $m > 0$ выколотыми точками.

Введем в рассмотрение некоторые трехмерные многообразия с границей, оснащенные слоениями. В дальнейшем эти расслоенные многообразия будут использованы для построения окрестностей седловых неподвижных точек, оснащенных инвариантными слоениями.

- Рассмотрим многообразие $C = [-1, 1] \times S^1 \times \mathbb{R}$. Пусть $f_T : \mathbb{Z} \times C \rightarrow C$ и $f_K : \mathbb{Z} \times C \rightarrow C$ — отображения, осуществляющие собственноразрывное действие группы $\mathbb{Z}$ на C следующим образом:

$$f_T(n, (t, e^{i\varphi}, r)) = (t, e^{i\varphi}, n + r), \quad f_K(n, (t, e^{i\varphi}, r)) = ((-1)^n t, e^{(-1)^n i\varphi}, n + r),$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $t \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{R}$. Заметим, что $C/f_T = \mathbb{T} \times [-1, 1]$, а C/f_K есть ориентируемое многообразие, которое является неориентируемым расслоением с базой $\mathbb{K}$ и слоем $[-1, 1]$. Обозначим через $p_T : C \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$ и $p_K : C \rightarrow C/f_K$ канонические проекции.

¹Заметим, что при собственноразрывном действии группы G на топологическом пространстве X можно ввести отношение эквивалентности: две точки $x, y \in X$ являются эквивалентными ($x \stackrel{f}{\sim} y$), если найдется элемент $g \in G$ такой, что $y = f(g, x)$. Обозначим через $X/f = \{[x], x \in X\}$ множество классов эквивалентности (пространство орбит), через $p_f : X \rightarrow X/f$ — каноническую проекцию; тогда множество X/f становится фактор-пространством, а отображение $p_f : X \rightarrow X/f$ — накрытием.

- Рассмотрим многообразие $E = \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ и отображение $f_S : \mathbb{Z} \times E \rightarrow E$, определенное формулой $f_S(n, (d, r)) = (d, n + r)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{D}$, $r \in \mathbb{R}$. Пространство орбит этого действия $E/f_S = \mathbb{D} \times S^1$ является заполненным тором. Обозначим через $p_S : E \rightarrow \mathbb{D} \times S^1$ каноническую проекцию.
- Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_{st}^2$ — стандартное двумерное слоение в $\mathbb{R}^3$, состоящее из плоскостей, параллельных плоскости XOY , $\tilde{\mathcal{F}}_{st}^1$ — стандартное одномерное слоение в $\mathbb{R}^3$, состоящее из прямых, параллельных оси OZ . Введём обозначения

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)z^2 \leq 1\}, \quad U^0 = U \setminus OZ,$$

$$U_+ = \{(x, y, z) \in U : z > 0\}, \quad U_- = \{(x, y, z) \in U : z < 0\}, \quad U_+^0 = U_+ \setminus OZ.$$

Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}^2$ и $\tilde{\mathcal{F}}^1$ (двумерное и одномерное, соответственно) слоения на множестве U , являющиеся ограничениями слоений $\tilde{\mathcal{F}}_{st}^2$ и $\tilde{\mathcal{F}}_{st}^1$, соответственно, на множество U .

- Рассмотрим диффеоморфизм $\phi : U^0 \rightarrow C$, заданный формулой

$$\phi(x, y, z) = (z\sqrt{x^2 + y^2}, e^{i \arg(x+iy)}, -\log_2 \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Отображения

$$\pi_T = p_T \circ \phi : U^0 \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1], \quad \pi_K = p_K \circ \phi : U^0 \rightarrow C/f_K$$

являются накрывающими. Легко заметить, что автоморфизмы этих накрытий сохраняют слоения $\tilde{\mathcal{F}}^1, \tilde{\mathcal{F}}^2$. Обозначим через $\mathcal{F}_T^1, \mathcal{F}_T^2$ ($\mathcal{F}_K^1, \mathcal{F}_K^2$) слоения на многообразии $\mathbb{T} \times [-1, 1]$ (C/f_K), полученные проекцией $\tilde{\mathcal{F}}^1, \tilde{\mathcal{F}}^2$.

- Рассмотрим диффеоморфизм $\xi : U_+ \rightarrow E$, определенный формулой

$$\xi(x, y, z) = (d(x, y, z), \log_2 z), \quad \text{где } d(x, y, z) = (xz, yz).$$

Тогда $\pi_S = p_S \circ \xi : U_+ \rightarrow \mathbb{D} \times S^1$ — накрытие и слоения $\tilde{\mathcal{F}}^1, \tilde{\mathcal{F}}^2$ посредством проекции индуцируют слоения $\mathcal{F}_S^1, \mathcal{F}_S^2$, соответственно, на заполненном торе $\mathbb{D} \times S^1$.

Обозначим через

$$\chi = \pi_S \circ (\pi_T|_{U_+^0})^{-1} : \mathbb{T} \times (0, 1] \rightarrow (\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times S^1$$

гомеоморфизм, который по построению обладает следующими свойствами:

$$\chi(\mathcal{F}_T^1) = \mathcal{F}_S^1, \quad \chi(\mathcal{F}_T^2) = \mathcal{F}_S^2.$$

Пусть N — связное замкнутое 3-многообразие такое, что существует нетривиальный гомоморфизм $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ (т.е. мы фиксируем гомоморфизм α такой, что $\alpha(\pi_1(N)) = \mathbb{Z}$).

Определение 3.2. Узлом в N назовем подмножество $\gamma = \nu(S^1)$, где $\nu : S^1 \rightarrow N$ — гладкое вложение. Узел γ называется k -кратным, если $\alpha([\gamma]) = k$.

Определение 3.3. Тором (бутылкой Клейна) в N назовем подмножество $T = \nu(\mathbb{T})$ ($K = \nu(\mathbb{K})$), где $\nu : \mathbb{T} \rightarrow N$ ($\nu : \mathbb{K} \rightarrow N$) — гладкое вложение.

Определение 3.4. Трубочатой окрестностью тора T (бутылки Клейна K) в N назовем подмножество

$$V(T) = \mu(\mathbb{T} \times [-1, 1]) \quad (V(K) = \mu(C/f_K)),$$

где

$$\mu : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow N \quad (\mu : C/f_K \rightarrow N)$$

— гладкое вложение такое, что $\mu(\mathbb{T}) = T$ ($\mu(\mathbb{K}) = K$).

Пусть простые замкнутые кривые $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{T})$; $T = \nu(\mathbb{T})$ — тор в N и $a = \nu(\mathbf{a})$, $b = \nu(\mathbf{b})$.

Определение 3.5. Тор $T = \nu(\mathbb{T})$ в N называется k -кратным, $k \in \mathbb{N}$, если $\alpha(\pi_1(T)) = k\mathbb{Z}$ и $\alpha([a]) = k$, $\alpha([b]) = 0$. При этом любая простая замкнутая кривая, гомотопная b , называется меридианом тора T .

Пусть простые замкнутые кривые $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{K})$ с соотношением $\mathbf{cd} = \mathbf{d}^{-1}\mathbf{c}$; $K = \nu(\mathbb{K})$ — бутылка Клейна в N и $c = \nu(\mathbf{c})$, $d = \nu(\mathbf{d})$.

Определение 3.6. Бутылка Клейна $K = \nu(\mathbb{K})$ называется k -кратной, $k \in \mathbb{N}$, если $\alpha(\pi_1(K)) = k\mathbb{Z}$ и $\alpha([c]) = k$, $\alpha([d]) = 0$. При этом любая простая замкнутая кривая, гомотопная d , называется меридианом бутылки Клейна K .

Пусть Q — тор или бутылка Клейна в N . Из определения трубчатой окрестности следует, что $\partial V(Q)$ состоит из одного $2k$ -кратного тора (в случае, если Q — k -кратная бутылка Клейна) или двух k -кратных торов (в случае, если Q — k -кратный тор). Меридианом на компоненте связности множества $\partial V(Q)$ будем называть любую кривую, гомотопную меридиану на Q .

Определение 3.7. Тором (бутылкой Клейна) с m выколотыми точками в N назовем подмножество

$$T_m = \nu_m(\mathbb{T}_m) \quad (K_m = \nu_m(\mathbb{K}_m)),$$

где $\nu_m : \mathbb{T}_m \rightarrow N$ ($\nu_m : \mathbb{K}_m \rightarrow N$) — гладкая биективная иммерсия.

Пусть простые замкнутые кривые $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1}$ являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{T}_m)$ такими, что $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — образующие фундаментальной группы тора без выколотых точек и каждая кривая $\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, m-1}$, ограничивает диск с единственной i -й выколотой точкой; $T_m = \nu_m(\mathbb{T}_m)$ — тор с m выколотыми точками в N и $a = \nu_m(\mathbf{a})$, $b = \nu_m(\mathbf{b})$, $e_1 = \nu_m(\mathbf{e}_1)$, $\dots$, $e_{m-1} = \nu_m(\mathbf{e}_{m-1})$.

Определение 3.8. Тор $T_m = \nu_m(\mathbb{T}_m)$ с m выколотыми точками называется k -кратным, $k \in \mathbb{N}$, если $\alpha(\pi_1(T_m)) = k\mathbb{Z}$ и $\alpha([a]) = k$, $\alpha([b]) = \alpha([e_1]) = \dots = \alpha([e_{m-1}]) = 0$. При этом любая простая замкнутая кривая, гомотопная b , называется меридианом проколотого k -кратного тора T_m .

Пусть простые замкнутые кривые $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1}$ являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{K}_m)$ такими, что $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ — образующие фундаментальной группы бутылки Клейна без выколотых точек с соотношением $\mathbf{cd} = \mathbf{d}^{-1}\mathbf{c}$ и каждая кривая $\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, m-1}$, ограничивает диск с единственной i -й выколотой точкой; $K_m = \nu_m(\mathbb{K}_m)$ — бутылка Клейна с m выколотыми точками в N и $c = \nu_m(\mathbf{c})$, $d = \nu_m(\mathbf{d})$, $e_1 = \nu_m(\mathbf{e}_1)$, $\dots$, $e_{m-1} = \nu_m(\mathbf{e}_{m-1})$.

Определение 3.9. Бутылка Клейна $K_m = \nu_m(\mathbb{K}_m)$ с m выколотыми точками называется k -кратной, $k \in \mathbb{N}$, если $\alpha(\pi_1(K_m)) = k\mathbb{Z}$ и $\alpha([c]) = k$, $\alpha([d]) = \alpha([e_1]) = \dots = \alpha([e_{m-1}]) = 0$. При этом любая простая замкнутая кривая, гомотопная d , называется меридианом проколотой k -кратной бутылки Клейна K_m .

Определение 3.10. Пусть T — однократный тор, Q_m — однократный тор или однократная бутылка Клейна с m выколотыми точками в N . Объединение $L = T \cup Q_m$ назовем односторонней гетероклинической ламинацией в N , если существует трубчатая окрестность $V(T) = \mu(\mathbb{T} \times [-1, 1])$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\mu(\mathbb{T} \times [-1, 0]) \cap Q_m = \emptyset$;
- 2) $\mu(\mathbb{T} \times \{1\}) \cap Q_m = \bigcup_{i=1}^m c_i$, где $c_1, \dots, c_m$ являются непересекающимися между собой простыми замкнутыми кривыми, гомотопными меридиану на торе $\mu(\mathbb{T} \times \{1\})$ и ограничивающими на Q_m непересекающиеся замкнутые диски с единственной выколотой точкой каждый;
- 3) $\mu^{-1}(\mu(\mathbb{T} \times [0, 1]) \cap Q_m) = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_{T,i}^2$, где $\mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m}$, — различные слои слоения $\mathcal{F}_T^2$.

Заметим, что односторонняя гетероклиническая ламинация является двумерной ламинацией в обычном смысле¹.

Приведем несколько фактов, которые будут использованы в дальнейшем для доказательства теоремы 2.3.

¹Напомним, что двумерной ламинацией с компактным носителем S на N называется разложение S в объединение попарно непересекающихся связных 2-подмногообразий L_α (называемых слоями) такое, что для любой точки $x \in S$ существуют окрестность $U_x \subset N$ и диффеоморфизм $\varphi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^3$, который переводит компоненты связности $U_x \cap L_\alpha$ на горизонтальные плоскости в $\mathbb{R}^3$.

Лемма 3.11. Пусть N — компактное многообразие. Зафиксируем $t_0 \in (0, 1)$ и пусть

$$h : N \times [-t_0, t_0] \rightarrow N \times [-1, 1]$$

— некоторый гомеоморфизм из $N \times [-t_0, t_0]$ на его образ. Мы предполагаем, что ограничение h на $N \times \{0\}$ является гомеоморфизмом $N \times \{0\}$, который изотопен тождественному. Наконец, мы предполагаем, что h сохраняет трансверсальную ориентацию $N \times \{0\}$, т.е. если $t \in [0, t_0]$, то $h(x, t)$ принадлежит $N \times [0, 1]$. Тогда существует гомеоморфизм

$$H : N \times [-1, 1] \rightarrow N \times [-1, 1],$$

который совпадает с тождественным отображением вне $N \times [-1/2, 1/2]$ и с h в малой окрестности $N \times \{0\}$.

Доказательство этой леммы можно найти в работе [7] (см. предложение A1); основные его идеи использованы в доказательстве следующей леммы.

Лемма 3.12. Пусть $\mathbb{T}$ — стандартный двумерный тор и

$$h : \mathbb{T} \times [-t_0, t_0] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$$

— гомеоморфизм из $\mathbb{T} \times [-t_0, t_0]$, $t_0 \in (0, 1)$ на его образ, обладающий следующими свойствами:

- 1) $h|_{\mathbb{T} \times \{0\}} = \text{id}$;
- 2) для каждого $t \in [0, t_0]$ имеем $h(x, t) \in \mathbb{T} \times [0, 1]$; для каждого $t \in [-t_0, 0]$ имеем $h(x, t) \in \mathbb{T} \times [-1, 0]$;
- 3) $h(\mathcal{F}_{T,i}^1 \cap (\mathbb{T} \times [-t_0, t_0])) \subset \mathcal{F}_{T,i}^1$, $i = \overline{1, m}$, где $\mathcal{F}_{T,i}^1$, $i = \overline{1, m}$, — различные слои слоения $\mathcal{F}_T^1$.

Тогда существует гомеоморфизм

$$h_1 : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1],$$

который совпадает с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 1/2]$, с h в малой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$ и удовлетворяет условию $h_1(\mathcal{F}_{T,i}^1) = \mathcal{F}_{T,i}^1$, $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. Пусть $h_+ : \mathbb{T} \times [-1, t_0] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$ — отображение, совпадающее с h на $\mathbb{T} \times [0, t_0]$ и с тождественным отображением на $\mathbb{T} \times [-1, 0]$. Аналогичным образом определим гомеоморфизм $h_- : \mathbb{T} \times [-t_0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$ как отображение, совпадающее с h на $\mathbb{T} \times [-t_0, 0]$ и с тождественным отображением на $\mathbb{T} \times [0, 1]$.

Шаг 1. Построим гомеоморфизм H_+ на $\mathbb{T} \times [-1, 1]$, совпадающий с h_+ в некоторой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$, с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [0, 1/2]$ и такой, что $H_+(\mathcal{F}_{T,i}^1) = \mathcal{F}_{T,i}^1$, $i = \overline{1, m}$.

Выберем $t_1 \in (0, 1/2)$ такое, что

$$\mathbb{T} \times [-1, t_1] \subset h_+(\mathbb{T} \times [-1, t_0])$$

и $t_2 \in (0, t_1)$ такое, что

$$h_+(\mathbb{T} \times [1, t_2]) \subset \mathbb{T} \times [-1, t_1].$$

Определим гомеоморфизм φ на $\mathbb{T} \times [-1, 1]$ следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = (x, t), & t \leq -\frac{3t_2}{4}; \\ \varphi(x, t) = (x, \frac{t}{2} - \frac{3t_2}{8}), & -\frac{3t_2}{4} \leq t \leq -\frac{t_2}{4}; \\ \varphi(x, t) = (x, t - \frac{t_2}{4}), & -\frac{t_2}{4} \leq t \leq \frac{t_2}{4}; \\ \varphi(x, t) = (x, \frac{3t}{2} - \frac{3t_2}{8}), & \frac{t_2}{4} \leq t \leq \frac{3t_2}{4}; \\ \varphi(x, t) = (x, t), & t \geq \frac{3t_2}{4}. \end{cases}$$

По построению гомеоморфизм φ обладает следующими свойствами: $\varphi(\mathcal{F}_{T,i}^1) = \mathcal{F}_{T,i}^1$, $i = \overline{1, m}$, и $\varphi(\mathbb{T} \times [-1, t]) \subset \mathbb{T} \times [-1, t]$.

Рассмотрим отображение $H_+ = h_+ \circ \varphi^{-1} \circ (h_+)^{-1} \circ (\varphi|_{\mathbb{T} \times [-1, t_1]})$.

- 1) Если $t \in [-1, \frac{t_2}{4}]$, тогда $\varphi(x, t) = (x, \bar{t})$, где $\bar{t} \leq 0$; $(h_+)^{-1}(x, \bar{t}) = (x, \bar{t})$, так как h_+ совпадает с тождественным отображением на $\mathbb{T} \times [-1, 0]$; $\varphi^{-1}(x, \bar{t}) = (x, t)$; $H_+(x, t) = h_+(x, t)$ для $t \in [-1, \frac{t_2}{4}]$. Таким образом, H_+ совпадает с h_+ на $\mathbb{T} \times [-1, \frac{t_2}{4}]$.

- 2) Если $t = t_1$, тогда $\varphi(x, t_1) = (x, t_1)$, так как φ тождественный для $t \geq \frac{3t_2}{4}$; $(h_+)^{-1}(\mathbb{T} \times [-1, t_1]) \supset \mathbb{T} \times [1, t_2]$; $\varphi^{-1}((h_+)^{-1}(x, t_1)) = (h_+)^{-1}(x, t_1)$; $H_+(x, t_1) = (x, t_1)$. Таким образом, H_+ совпадает с тождественным отображением на $\mathbb{T} \times \{t_1\}$.

Следовательно, гомеоморфизм H_+ можно непрерывно продолжить тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-t_1, t_1]$. Тогда H_+ удовлетворяет всем условиям шага 1.

Шаг 2. По аналогии с шагом 1 можно построить гомеоморфизм H_- на $\mathbb{T} \times [-1, 1]$, совпадающий с h_- в некоторой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$, с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 0]$ и такой, что $H_-(\mathcal{F}_{T,i}^1) = \mathcal{F}_{T,i}^1$, $i = \overline{1, m}$.

Шаг 3. Гомеоморфизм $h_1 = H_- \circ H_+$ удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Лемма 3.13. Пусть $\mathbb{K}$ — стандартная бутылка Клейна, C/f_K — неориентируемое расслоение с базой $\mathbb{K}$ и слоем $[-1, 1]$, $C_{t_0} = [-t_0, t_0] \times S^1 \times \mathbb{R}$, $t_0 \in (0, 1)$, C_{t_0}/f_K — неориентируемое расслоение с базой $\mathbb{K}$ и слоем $[-t_0, t_0]$ и $h : C_{t_0}/f_K \rightarrow C/f_K$ — гомеоморфизм из C_{t_0}/f_K на его образ, обладающий следующими свойствами:

- 1) $h|_{C_0/f_K} = \text{id}$;
- 2) $h(\mathcal{F}_{K,i}^1 \cap (C_{t_0}/f_K)) \subset \mathcal{F}_{K,i}^1$, $i = \overline{1, m}$, где $\mathcal{F}_{K,i}^1$, $i = \overline{1, m}$, — различные слои слоения $\mathcal{F}_K^1$.

Тогда существует гомеоморфизм $h_1 : C/f_K \rightarrow C/f_K$, который совпадает с тождественным отображением вне $C_{1/2}/f_K$, с h в малой окрестности C_0/f_K и удовлетворяет условию $h_1(\mathcal{F}_{K,i}^1) = \mathcal{F}_{K,i}^1$, $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. Пусть $f_{TK} : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$ — отображение, осуществляющее собственноразрывное действие группы $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ на $\mathbb{T} \times [-1, 1]$ следующим образом:

$$f_{TK}(-1, (e^\varphi, e^\psi, t)) = (e^{-i\varphi}, e^{\pi-\psi}, -t),$$

где $t \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Заметим, что фактор-пространство $\mathbb{T} \times [-1, 1]/f_{TK} = C/f_K$. Обозначим через $p_{TK} : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow C/f_K$ каноническую проекцию, являющуюся двукратным накрытием, через $\tilde{h} : \mathbb{T} \times [-t_0, t_0] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$ — поднятие гомеоморфизма h , являющееся тождественным на $\mathbb{T} \times \{0\}$. По построению $\tilde{h}$ является гомеоморфизмом из $\mathbb{T} \times [-t_0, t_0]$ на его образ таким, что

$$\tilde{h}(\mathcal{F}_{T,j}^1 \cap (\mathbb{T} \times [-t_0, t_0])) \subset \mathcal{F}_{T,j}^1, \quad j = \overline{1, 2m},$$

где $\mathcal{F}_{T,j}^1$, $j = \overline{1, 2m}$ — прообраз множества слоев $\mathcal{F}_K^1$, $i = \overline{1, m}$. Согласно лемме 3.12, существует гомеоморфизм

$$\tilde{h}_1 : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1],$$

который совпадает с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 1/2]$, с $\tilde{h}$ в малой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$ и удовлетворяет условию $\tilde{h}_1(\mathcal{F}_{T,j}^1) = \mathcal{F}_{T,j}^1$, $j = \overline{1, 2m}$. Тогда гомеоморфизм $h_1 = p_{TK} \circ \tilde{h}_1 \circ p_{TK}^{-1} : C/f_K \rightarrow C/f_K$ удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Лемма 3.14. Пусть $\mathbb{T}$ — стандартный двумерный тор и

$$h : \mathbb{T} \times [-t_0, t_0] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$$

— гомеоморфизм из $\mathbb{T} \times [-t_0, t_0]$, $t_0 \in (0, 1)$, на его образ, обладающий следующими свойствами:

- 1) $h|_{\mathbb{T} \times \{0\}} = \text{id}$;
- 2) для каждого $t \in [0, t_0]$ имеем $h(x, t) \in \mathbb{T} \times [0, 1]$; для каждого $t \in [-t_0, 0]$ имеем $h(x, t) \in \mathbb{T} \times [-1, 0]$;
- 3) $h(\mathcal{F}_{T,i}^2 \cap (\mathbb{T} \times [-t_0, t_0])) \subset \mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m}$, где $\mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m}$, — различные слои слоения $\mathcal{F}_T^2$.

Тогда существует гомеоморфизм

$$h_1 : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1],$$

который совпадает с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 1/2]$, с h в малой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$ и удовлетворяет условию $h_1(\mathcal{F}_{T,i}^2) = \mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.11, существует гомеоморфизм $H : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$, совпадающий с тождественным вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 1/2]$ и с h на $\mathbb{T} \times [-\tau, \tau]$, $\tau \in (0, 1/2)$. Пусть H_+ — ограничение гомеоморфизма H на $\mathbb{T} \times [0, 1]$. Введем следующие обозначения: $\mathcal{F}_{T,j}^{2+}$, $j = \overline{1, m_+}$, — подмножество множества $\mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m}$, состоящее из слоев, принадлежащих $\mathbb{T} \times [0, 1]$; $T_t = \mathbb{T} \times \{t\}$; $\tilde{T}_t = H_+(T_t)$; $T_{t_1 t_2} = \mathbb{T} \times [t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$; $\tilde{T}_{t_1 t_2} = H_+(T_{t_1 t_2})$; $c_{jt} = T_t \cap \mathcal{F}_{T,j}^{2+}$, $t \in (0, 1]$; $\tilde{c}_{jt} = H_+(c_{jt})$.

Каждый слой $\mathcal{F}_{T,j}^{2+}$ можно представить в виде объединения непересекающихся колец K_{jt} и D_{jt} , где K_{jt} — замкнутое подмножество $\mathcal{F}_{T,j}^{2+}$, ограниченное окружностями c_{j1} и c_{jt} ; $D_{jt} = \mathcal{F}_{T,j}^{2+} \setminus K_{jt}$. Образующие фундаментальной группы граничного тора T_0 являются образующими фундаментальной группы многообразия T_{01} . Так как ограничение гомеоморфизма H_+ на T_0 совпадает с тождественным отображением, гомеоморфизм $H_+ : T_{01} \rightarrow T_{01}$ индуцирует тождественный изоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(T_{01})$. Следовательно, простая замкнутая кривая $\tilde{c}_{jt}$ гомотопна кривой c_{jt} и слой $\mathcal{F}_{T,j}^{2+}$ при каждом значении $t \in (0, \tau]$ можно представить в виде объединения непересекающихся колец $\tilde{K}_{jt}$ и $\tilde{D}_{jt}$, где $\tilde{K}_{jt}$ — замкнутое подмножество $\mathcal{F}_{T,j}^{2+}$, ограниченное окружностями c_{j1} и $\tilde{c}_{jt}$; $\tilde{D}_{jt} = \mathcal{F}_{T,j}^{2+} \setminus \tilde{K}_{jt}$.

Шаг 1. Покажем, что существует значение $t_* \in (0, \tau)$ такое, что $\tilde{K}_{jt_*} \subset \tilde{T}_{t_*1}$ и $\tilde{D}_{jt_*} \subset \tilde{T}_{0t_*}$.

Кольцо $D_{j\tau}$ при фиксированном значении $t \in (0, \tau)$ можно представить в виде объединения непересекающихся колец D_{jt} и $D_{j\tau} \setminus D_{jt}$, при этом $D_{jt} \subset T_{0t}$, $(D_{j\tau} \setminus D_{jt}) \subset T_{t\tau}$. Из условия 3) вытекает $\tilde{D}_{j\tau} = H_+(D_{j\tau}) \subset \tilde{T}_{0\tau}$; следовательно, $\tilde{D}_{jt} \subset \tilde{T}_{0t}$ и $(\tilde{D}_{j\tau} \setminus \tilde{D}_{jt}) \subset \tilde{T}_{t\tau}$.

По построению замкнутые кольца $\tilde{K}_{j\tau}$, $j = \overline{1, m_+}$, не пересекаются с T_0 ; тогда существует $t \in (0, \tau)$ такое, что $\tilde{K}_{j\tau} \subset T_{t,1}$ для каждого $j = \overline{1, m_+}$. С другой стороны, $H_+(T_0) = T_0$, следовательно, существует $t_* \in (0, \tau)$ такое, что $\tilde{T}_{t_*} \subset T_{0t}$. Представим кольцо $\tilde{K}_{jt_*}$ в виде объединения непересекающихся колец $\tilde{K}_{jt}$ и $\tilde{D}_{jt} \setminus \tilde{D}_{jt_*}$, каждое из которых по построению является подмножеством $\tilde{T}_{t_*1}$. Таким образом, для некоторого значения $t_* \in (0, \tau)$ тор $\tilde{T}_{t_*}$ делит каждый слой $\mathcal{F}_{T,j}^{2+}$, $j = \overline{1, m_+}$, на два непересекающихся кольца $\tilde{K}_{it_*}$ и $\tilde{D}_{it_*}$ таких, что $\tilde{K}_{jt_*} \subset \tilde{T}_{t_*1}$ и $\tilde{D}_{jt_*} \subset \tilde{T}_{0t_*}$.

Шаг 2. Покажем, что существует гомеоморфизм $h_+ : \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [0, 1]$, совпадающий с H_+ на $\mathbb{T} \times [0, t_*]$, с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [0, 1/2]$ и такой, что $H_+(\mathcal{F}_{T,j}^{2+}) = \mathcal{F}_{T,j}^{2+}$, $i = \overline{1, m_+}$.

Положим

$$\theta = \chi \circ H_+ \circ \chi^{-1} : (\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times S^1 \rightarrow (\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times S^1.$$

По построению θ совпадает с тождественным отображением на $S^1 \times [1/2, 1] \times S^1$ и

$$\theta(\mathcal{F}_{S,j}^{2+} \cap (S^1 \times (0, t_*] \times S^1)) \subset \mathcal{F}_{S,j}^{2+}, \quad j = \overline{1, m_+},$$

где $\mathcal{F}_{S,j}^{2+} = \chi(\mathcal{F}_{T,j}^{2+})$. Введем координаты (s, t, p) на многообразии $S^1 \times (0, 1] \times S^1$; тогда

$$\mathcal{F}_{S,j}^{2+} = S^1 \times (0, 1] \times \{p_j\}, \quad j = \overline{1, m_+}.$$

Обозначим через $\rho : S^1 \times (0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathcal{F}_{S,1}^{2+}$ проекцию на слой $\mathcal{F}_{S,1}^{2+}$, где $\rho(s, t, p) = (s, t, p_1)$. Пусть $\mathcal{T}_t = S^1 \times \{t\} \times S^1$, $t \in (0, 1)$, $\tilde{\mathcal{T}}_t = \theta(\mathcal{T}_t)$, $\mathcal{T}_{t_1 t_2} = S^1 \times [t_1, t_2] \times S^1$, $0 < t_1 < t_2 \leq 1$, $\tilde{\mathcal{T}}_{t_1 t_2} = \theta(\mathcal{T}_{t_1 t_2})$. Выберем образующие фундаментальной группы тора $\mathcal{T}_{1/2}$: параллель $a = 0 \times \{1/2\} \times S^1$ и меридиан $b = S^1 \times \{1/2\} \times \{p_1\}$, которые являются образующими фундаментальной группы многообразия $\mathcal{T}_{t_*1/2}$. Так как ограничение гомеоморфизма θ на $\mathcal{T}_{1/2}$ совпадает с тождественным отображением, то гомеоморфизм $\theta : \mathcal{T}_{t_*1/2} \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_{t_*1/2}$ индуцирует изоморфизм

$$\theta_* : \pi_1(\mathcal{T}_{t_*1/2}) \rightarrow \pi_1(\tilde{\mathcal{T}}_{t_*1/2})$$

такой, что $\theta_*([a]) = [a]$ и $\theta_*([b]) = [b]$. Заметим, что простая замкнутая кривая b является также образующей кольца $\mathcal{F}_{S,1}^{2+}$, а ограничение отображения ρ на $\mathcal{T}_{t_*1/2}$ индуцирует гомоморфизм

$$\rho_* : \pi_1(\mathcal{T}_{t_*1/2}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{S,1}^{2+})$$

такой, что $\rho_*([b]) = [b]$, $\rho_*([a]) = [0]$. По построению слои $\mathcal{F}_{S,j}^{2+}$, $j = \overline{1, m_+}$, делят многообразие $\mathcal{T}_{t_*, 1/2}$ ($\tilde{\mathcal{T}}_{t_*, 1/2}$) на m_+ непересекающихся компонент. Обозначим через G_j ($\hat{G}_j$) замыкание компоненты, расположенной между слоями $\mathcal{F}_{S,j}^{2+}$ и $\mathcal{F}_{S,j+1}^{2+}$, полагая, что $m_+ + 1 = 1$. Положим $K_j = G_j \cap \mathcal{F}_{S,j}^{2+}$ ($\hat{K}_j = \hat{G}_j \cap \mathcal{F}_{S,j}^{2+}$). Заметим, что многообразие G_j ($\hat{G}_j$) для каждого $j = \overline{1, m_+}$ гомеоморфно заполненному тору с образующей $b_j = \mathcal{F}_{S,j}^{2+} \cap \mathcal{T}_{1/2}$. Ограничение отображения ρ на G_j ($\hat{G}_j$) индуцирует изоморфизм

$$\rho_{j*} : \pi_1(G_j) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{S,1}^{2+}) \quad (\hat{\rho}_{j*} : \pi_1(\hat{G}_j) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{S,1}^{2+}))$$

такой, что $\rho_{j*}([b_j]) = [b]$ ($\hat{\rho}_{j*}([b_j]) = [b]$). Положим $A_j = a \cap b_j$, $B_j = \tilde{a} \cap \tilde{b}_j$, где $\tilde{a} = 0 \times \{t_*\} \times S^1$, $\tilde{b}_j = \mathcal{F}_{S,j}^{2+} \cap \mathcal{T}_{t_*}$. Заметим, что замкнутая ломаная $c_j = A_j B_j B_{j+1} A_{j+1}$ является меридианом на заполненном торе G_j . Введем обозначения

$$\hat{B}_j = \theta(B_j), \quad \hat{b}_j = \theta(\tilde{b}_j), \quad \bar{B}_j = \rho(\hat{B}_j), \quad \bar{b}_j = \rho(\hat{b}_j), \quad \hat{a} = \theta(\tilde{a}), \quad \bar{a} = \rho(\hat{a}).$$

По построению замкнутая кривая $\bar{a}$ является стягиваемой на слое $\mathcal{F}_{S,1}^{2+}$. Пусть $[\bar{B}_j \bar{B}_{j+1}]$ — дуга кривой $\bar{a}$, ограниченная точками $\bar{B}_j$ и $\bar{B}_{j+1}$ и не содержащая точек $\bar{B}_k$, отличных от точек $\bar{B}_j$ и $\bar{B}_{j+1}$. Пусть $[\bar{B}_j A_1 \bar{B}_{j+1}]$ — простая кривая на $\mathcal{F}_{S,1}^{2+}$, ограниченная точками $\bar{B}_j$ и $\bar{B}_{j+1}$, содержащая точку A_1 и обладающая следующими свойствами:

- 1) $[\bar{B}_j A_1 \bar{B}_{j+1}]$ гомотопна $[\bar{B}_j \bar{B}_{j+1}]$ на $\mathcal{F}_{S,1}^{2+}$;
- 2) дуга кривой $[\bar{B}_j A_1 \bar{B}_{j+1}]$, ограниченная точками $\bar{B}_j$ и A_1 , не пересекается с замкнутой кривой $\bar{b}_j$.

Такую последовательность дуг можно построить по шагам: сначала дугу $[\bar{B}_1 A_1 \bar{B}_2]$, затем дугу $[\bar{B}_2 A_1 \bar{B}_3]$, ...; последней построенной дугой будет дуга $[\bar{B}_{m_+-1} A_1 \bar{B}_{m_+}]$. Дуга $[\bar{B}_{m_+} A_1 \bar{B}_1]$ по построению будет удовлетворять условию 2), а в силу стягиваемости кривой $\bar{a}$ будет удовлетворять условию 1).

Положим $\bar{c}_j = [A_1 \bar{B}_j \bar{B}_{j+1} A_1]$, $j = \overline{1, m_+}$. По построению $[\bar{c}_j] = [0] \in \pi_1(\mathcal{F}_{S,1}^{2+})$. Обозначим через $\hat{c}_j = A_j \hat{B}_j \hat{B}_{j+1} A_{j+1}$ простую замкнутую кривую на $\partial \hat{G}_j$, составленную из следующих дуг: отрезок $[A_j A_{j+1}]$; $[\hat{B}_j \hat{B}_{j+1}] = \hat{a} \cap \hat{G}_j$; $[A_j \hat{B}_j] = (\rho)^{-1}([A_1 \bar{B}_j]) \cap \mathcal{F}_{S,j}^{2+}$. Заметим, что $\rho(\hat{c}_j) = \bar{c}_j$; следовательно, $[\hat{c}_j] = [0] \in \pi_1(\hat{G}_j)$. Кроме того, по построению простая замкнутая кривая $\hat{c}_j$ является существенной на торе $\partial \hat{G}_j$, а значит, является меридианом на заполненном торе $\hat{G}_j$.

Пусть $\theta_j : [A_j B_j] \rightarrow [A_j \hat{B}_j]$ — гомеоморфизм такой, что $\theta_j(A_j) = A_j$, $\theta_j(B_j) = \hat{B}_j$. Заметим, что множества $D_j = K_j \setminus (\partial K_j \cup [A_j B_j])$ и $\hat{D}_j = \hat{K}_j \setminus (\partial \hat{K}_j \cup [A_j \hat{B}_j])$ гомеоморфны открытым дискам. Обозначим через $\bar{\theta}_j : \partial D_j \rightarrow \partial \hat{D}_j$ гомеоморфизм, совпадающий с θ на ∂K_j и с θ_j на $[A_j B_j]$, через $\hat{\theta}_j : \partial G_j \rightarrow \partial \hat{G}_j$ — гомеоморфизм, совпадающий с $\bar{\theta}_j$ на K_j и с θ вне $K_j \cup K_{j+1}$. По построению гомеоморфизм $\hat{\theta}_j$ переводит меридиан заполненного тора G_j на меридиан заполненного тора $\hat{G}_j$; следовательно, он может быть продолжен до гомеоморфизма $\hat{\theta}_j : G_j \rightarrow \hat{G}_j$.

Пусть $\theta_+ : (\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times S^1 \rightarrow (\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times S^1$ — гомеоморфизм, совпадающий с θ вне $S^1 \times [t_*, 1/2] \times S^1$ и с $\hat{\theta}_j$ на G_j , $j = \overline{1, m_+}$. Тогда гомеоморфизм

$$h_+ = \chi^{-1} \circ \theta_+ \circ \chi : \mathbb{T} \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times (0, 1]$$

удовлетворяет всем условиям шага 2.

Шаг 3. Пусть H_- — ограничение гомеоморфизма H на $\mathbb{T} \times [-1, 0]$. Введем следующее обозначение: $\mathcal{F}_{T,j}^{2-}$, $j = \overline{1, m_-}$, — подмножество множества $\mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m}$, состоящее из слоев, принадлежащих $\mathbb{T} \times [-1, 0]$. По аналогии с шагом 2 можно построить гомеоморфизм

$$h_- : \mathbb{T} \times [-1, 0] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 0],$$

совпадающий с H_- в некоторой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$, с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 0]$ и такой, что $H_-(\mathcal{F}_{T,j}^{2-}) = \mathcal{F}_{T,j}^{2-}$, $i = \overline{1, m_-}$.

Шаг 4. Гомеоморфизм $H : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$, совпадающий с h_+ на $\mathbb{T} \times [0, 1]$ и с h_- на $\mathbb{T} \times [-1, 0]$, удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

4. ОПЕРАЦИИ РАЗРЕЗАНИЯ И СКЛЕИВАНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ N

В данном разделе N — замкнутое ориентируемое многообразие, оснащенное гомоморфизмом $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ таким, что $\alpha(\pi_1(N)) = \mathbb{Z}$.

4.1. Операция разрезания и склеивания вдоль однократного тора или бутылки Клейна.

Пусть Q — однократный тор или однократная бутылка Клейна в N . Выберем трубчатую окрестность $V(Q)$ подмножества Q в N . Из определения трубчатой окрестности следует, что каждая компонента связности $\partial V(Q)$ является тором. Тогда $\hat{N} = N \setminus \text{int } V(Q)$ есть компактное 3-многообразие с границей. Приклеим к каждой граничной компоненте многообразия $\hat{N}$ заполненный тор $\mathbb{D} \times S^1$ по диффеоморфизму, переводящему меридиан $\partial \mathbb{D} \times \{1\}$ на меридиан граничного тора. Назовем *операцией разрезания и склеивания на многообразии N вдоль Q* последовательное выполнение описанных действий. Заметим, что описанная операция является однозначной с точностью до гомеоморфизма, т.е. не зависит от выбора окрестности $V(Q)$ и диффеоморфизмов, используемых при склейке. Обозначим через N_Q многообразие, полученное в результате этой операции и через $CS_{N,Q}$ соответствующее фактор-отображение.

Гомоморфизм $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм $\alpha_{N,Q} : \pi_1(N_Q) \rightarrow \mathbb{Z}$, при этом, если G — непересекающийся с $V(Q)$ однократный тор, бутылка Клейна или односторонняя гетероклиническая ламинация в N , то $CS_{N,Q}(G)$ также является, соответственно, однократным тором, однократной бутылкой Клейна или односторонней гетероклинической ламинацией в N_Q .

4.2. Операция разрезания и склеивания вдоль односторонней гетероклинической ламинации.

Пусть T — однократный тор, Q_m — однократный тор (однократная бутылка Клейна) с m выколотыми точками и $L = T \cup Q_m$ — односторонняя гетероклиническая ламинация в N , $V(T) = \mu(\mathbb{T} \times [-1, 1])$ — трубчатая окрестность тора T , описанная в определении 3.10. Введем обозначения $T_+ = \mu(\mathbb{T} \times \{1\})$, $T_- = \mu(\mathbb{T} \times \{-1\})$, $c_i = \mu((\mathbb{T} \times \{1\}) \cap \mathcal{F}_{T,i}^2)$, $i = \overline{1, m}$. Заметим, что T_+ и T_- являются однократными торами в N , $c_1, \dots, c_m$ являются не пересекающимися между собой простыми замкнутыми кривыми, гомотопными меридиану на торе T_+ . Пусть $d_i = \mathbb{D} \times \{t_i\}$, $i = \overline{1, m}$ ($t_i \in S^1$, $t_i \neq t_j$ для $i \neq j$), — не пересекающиеся между собой диски, принадлежащие заполненному тору $\mathbb{D} \times S^1$. Произведем на многообразии N операцию разрезания и склеивания вдоль однократного тора T с помощью диффеоморфизма, переводящего ∂d_i на c_i . Обозначим через $CS_{N,T} : \hat{N} \cup \mathbb{D} \times S^1 \times S^0 \rightarrow N_T$ соответствующее фактор-отображение, где S^0 — нульмерная сфера, т.е. множество, состоящее из двух точек. Введем обозначения для следующих подмножеств многообразия N_T :

- $CS_{N,T}(T_+) = \overline{T}_+$ — однократный тор;
- $CS_{N,T}(c_i) = \bar{c}_i$, $i = \overline{1, m}$, — простые замкнутые кривые, гомотопные меридиану на торе $\overline{T}_+$;
- $CS_{N,T}(Q_m \setminus \text{int } V(T)) = \bar{Q}_m$ — однократный тор (однократная бутылка Клейна) с m дырами и с границей $\bigcup_{i=1}^m \bar{c}_i$;
- $CS_{N,T}(d_i) = \bar{d}_i$, $i = \overline{1, m}$, — не пересекающиеся между собой диски такие, что $\partial \bar{d}_i = \bar{c}_i$.

Положим $Q = \bar{Q}_m \cup \bigcup_{i=1}^m \text{int } \bar{d}_i$. По построению множество Q является однократным тором (однократной бутылкой Клейна) в N_T . Затем на многообразии N_T произведем разрезание и склеивание вдоль Q . Назовем *операцией разрезания и склеивания на многообразии N вдоль односторонней гетероклинической ламинации* последовательное выполнение описанных действий. Обозначим через N_L многообразие, полученное в результате этой операции и через $CS_{N,L}$ — суперпозицию отображений $CS_{N,T}$ и $CS_{N_T,Q}$.

Гомоморфизм $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм $\alpha_{N,L} : \pi_1(N_L) \rightarrow \mathbb{Z}$, при этом, если G — не пересекающийся с L однократный тор, бутылка Клейна или односторонняя гетероклиническая ламинация в N , то $CS_{N,L}(G)$ также является соответственно однократным тором, однократной бутылкой Клейна или односторонней гетероклинической ламинацией в N_L .

Таким образом, корректно определена операция разрезания и склеивания вдоль множества $H \subset N$, состоящего из непересекающихся между собой однократных торов, бутылок Клейна и

односторонних гетероклинических ламинаций как последовательное применение операций разрезания и склеивания вдоль всех компонент. Будем обозначать через N_H результирующее многообразие (топологическая структура N_H не зависит от порядка разрезания и склеивания и от выбора диффеоморфизмов, используемых при склейке).

5. СХЕМА

Определение 5.1. Пусть $L^u, L^s, \Gamma^u, \Gamma^s$ — попарно не пересекающиеся подмножества многообразия N такие, что L^u (L^s) состоит из l^u (l^s) попарно непересекающихся гетероклинических ламинаций, Γ^u (Γ^s) состоит из t^u (t^s) попарно непересекающихся однократных торov и бутылок Клейна. Положим $S^u = L^u \cup \Gamma^u$, $S^s = L^s \cup \Gamma^s$ и будем называть пару (S^u, S^s) допустимым набором на многообразии N .

Определение 5.2. Допустимый набор (S^u, S^s) назовем совершенным, если каждая компонента связности многообразий N_{S^u} и N_{S^s} гомеоморфна $S^2 \times S^1$.

Определение 5.3. Будем называть схемой четверку $S = (N, \alpha, S^u, S^s)$, где

- 1) N — ориентируемое связное замкнутое 3-многообразие;
- 2) $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ — нетривиальный гомоморфизм такой, что $\alpha(\pi_1(N)) = \mathbb{Z}$;
- 3) (S^u, S^s) — совершенный набор на многообразии N .

Определение 5.4. Две схемы $S = (N, \alpha, S^u, S^s)$ и $S' = (N', \alpha', S'^u, S'^s)$ назовем эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi : N \rightarrow N'$ со следующими свойствами:

- 1) $\alpha = \alpha' \circ \varphi_*$;
- 2) $\varphi(S^u) = S'^u$, $\varphi(S^s) = S'^s$.

Определение 5.5. Определим множество $\mathcal{S}$ как множество всех схем, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) множество Γ^u пусто;
- 2) множество Γ^s содержит не более одной бутылки Клейна;
- 3) вектор $\vec{j} = (l^u, l^s, t^s) \in J$, где $J = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0)\}$;
- 4) многообразие N_{S^s} гомеоморфно $S^2 \times S^1$; многообразие N_{S^u} гомеоморфно $3-r^s$ копиям $S^2 \times S^1$, где r^s — число, равное t^s , если l^s равно нулю, и равное 2, если l^s не равно нулю.

6. СХЕМА ДИФФЕОМОРФИЗМА $f \in MS(M_r, 6)$

Покажем, что схема любого диффеоморфизма рассматриваемого класса (см. определение 2.1) является схемой, принадлежащей множеству $\mathcal{S}$.

6.1. Динамика диффеоморфизмов класса $MS(M_r, 6)$. Обозначим через Σ_r множество седловых точек диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$, через $\hat{W}_r^\delta, \delta \in \{s, u\}$ — подмножество W_r^δ , состоящее из многообразий, содержащих гетероклинические точки, через $\hat{\mathcal{L}}_r^\delta$ — множество, состоящее из компонент связности множества $\hat{W}_r^\delta \setminus \Sigma_r$, содержащих гетероклинические точки.

Положим $\hat{W}_r = \hat{W}_r^s \cup \hat{W}_r^u$, $\bar{\delta} = s$, если $\delta = u$, и $\bar{\delta} = u$, если $\delta = s$.

Пусть $\sigma_i \in \Sigma_r$ — некоторая седловая точка и $L^\delta(\sigma_i)$ — одна из компонент связности множества $W^\delta(\sigma_i) \setminus \sigma_i$. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 6.1. Если $L^\delta(\sigma_i)$ не принадлежит $\hat{\mathcal{L}}_r^\delta$, то $\text{Cl}(L^\delta(\sigma_i)) \setminus (L^\delta(\sigma_i) \cup \sigma_i)$ состоит либо из стока (если $\delta = u$), либо из источника (если $\delta = s$).

Если $L^\delta(\sigma_i)$ принадлежит $\hat{\mathcal{L}}_r^\delta$, то

$$\text{Cl}(L^\delta(\sigma_i)) \setminus (L^\delta(\sigma_i) \cup \sigma_i) = \bigcup_j \text{Cl}(W^\delta(\sigma_j)),$$

где объединение берется по всем точкам $\sigma_j \in \Sigma_r$, для которых $W^{\bar{\delta}}(\sigma_j) \cap L^\delta(\sigma_i) \neq \emptyset$; при этом $W^\delta(\sigma_j)$ не принадлежит $\hat{W}_r^\delta$.

Доказательство этого предложения следует из результатов работы [9]; подробное доказательство аналогичного факта для двумерного случая можно найти в [2, лемма 1].

Если для некоторой седловой точки $\sigma_i \in \Sigma_r$ многообразие $W^\delta(\sigma_i)$ одномерно, то множество $W^\delta(\sigma_i) \setminus \sigma_i$ состоит из двух компонент связности, которые будем обозначать через $L_\varepsilon^\delta(\sigma_i)$, где $\varepsilon \in \{-, +\}$. Положим $\bar{\varepsilon} = -$, если $\varepsilon = +$, и $\bar{\varepsilon} = +$, если $\varepsilon = -$.

Предложение 6.2. Если $L_\varepsilon^\delta(\sigma_i)$ принадлежит $\hat{\mathcal{L}}_r^\delta$, то $L_{\bar{\varepsilon}}^\delta(\sigma)$ не принадлежит $\hat{\mathcal{L}}_r^\delta$.

Доказательство. Положим для определенности $\delta = s$, $\varepsilon = +$ и $L_+^s(\sigma_i) \in \hat{\mathcal{L}}_r^s$. Докажем, что $L_-^s(\sigma_i) \notin \hat{\mathcal{L}}_r^s$. Предположим противное, т.е. $L_-^s(\sigma_i) \in \hat{\mathcal{L}}_r^s$. Заметим, что любой диффеоморфизм $f \in MS(M_r, 6)$ имеет конечное число неподвижных точек, среди которых не более двух седловых точек имеют одинаковый индекс Морса. Кроме того, блуждающее множество диффеоморфизма f не содержит гетероклинических кривых. Тогда из условия $L_\varepsilon^s(\sigma_i) \in \hat{\mathcal{L}}_r^s$ для $\varepsilon \in \{-, +\}$ следует, что существует единственная седловая точка $\sigma_j \in \Sigma_r$ того же индекса Морса, что и σ_i , такая, что $W^u(\sigma_j) \cap L_\varepsilon^s(\sigma_i) \neq \emptyset$. Согласно предложению 6.1,

$$\text{Cl}(W^u(\sigma_j)) \setminus W^u(\sigma_j) = \text{Cl}(W^u(\sigma_i)), \quad W^u(\sigma_i) \notin \hat{W}_r^u, \quad \text{Cl}(W^u(\sigma_i)) \setminus W^u(\sigma_i) = \omega.$$

Выберем замкнутую окрестность $\tilde{U}_i$ седловой точки σ_i со следующими свойствами:

- 1) $f(\tilde{U}_i) = \tilde{U}_i$;
- 2) $\tilde{U}_i \setminus W^u(\sigma_i)$ состоит из двух компонент связности $\tilde{U}_i^+$, $\tilde{U}_i^-$, каждая из которых гомеоморфна заполненному цилиндру и содержит в точности одну сепаратрису $L_+^s(\sigma_i)$, $L_-^s(\sigma_i)$ соответственно.

Из предположения о том, что $L_\varepsilon^\delta(\sigma_i) \in \hat{\mathcal{L}}_r^\delta$ для каждого $\varepsilon \in \{-, +\}$ следует, что

$$\tilde{U}_i^- \cap W^u(\sigma_j) \neq \emptyset, \quad \tilde{U}_i^+ \cap W^u(\sigma_j) \neq \emptyset.$$

Рассмотрим пространство $W^s(\omega) \setminus \omega$ и группу $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$, которая действует на нем собственноразрывно. Обозначим через $N_\omega = (W^s(\omega) \setminus \omega)/F$ пространство орбит этого действия, которое диффеоморфно $S^2 \times S^1$ (см. [4, лемма 1.1]). Заметим, что

$$(W^u(\sigma_i) \setminus \sigma_i) \subset (W^s(\omega) \setminus \omega) \quad (W^u(\sigma_j) \setminus (\sigma_j \cup W^s(\sigma_i))) \subset (W^s(\omega) \setminus \omega).$$

Множество $W^u(\sigma_i) \setminus \sigma_i$ гомеоморфно цилиндру, множество $W^u(\sigma_j) \setminus (\sigma_j \cup W^s(\sigma_i))$ гомеоморфно цилиндру со счетным числом выколотых точек, образующих конечное множество гетероклинических орбит. Не ограничивая общности будем считать, что ограничение диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ на $W^u(\sigma_i)$ и на $W^u(\sigma_j)$ сохраняет ориентацию (в противном случае аналогичные рассуждения можно провести для диффеоморфизма f^2). Тогда множество $T_i^u = (W^u(\sigma_i) \setminus \sigma_i)/F$ диффеоморфно однократному тору, гладко вложенному в $S^2 \times S^1$ и $U_i = (\tilde{U}_i \setminus W^s(\sigma_i))/F$ является его трубчатой окрестностью. Кроме того, множество $U_i \setminus T_i^u$ состоит из двух компонент связности

$$U_i^+ = (\tilde{U}_i^+ \setminus W^s(\sigma_i))/F, \quad U_i^- = (\tilde{U}_i^- \setminus W^s(\sigma_i))/F.$$

Связное множество

$$T_{m_j}^u = (W^u(\sigma_j) \setminus (\sigma_j \cup W^s(\sigma_i)))/F$$

гомеоморфно однократному тору с конечным числом m_j выколотых точек в $S^2 \times S^1$. По построению,

$$T_{m_j}^u \cap U_i^+ \neq \emptyset, \quad T_{m_j}^u \cap U_i^- \neq \emptyset, \quad T_{m_j}^u \cap T_i^u = \emptyset.$$

Тогда $T_{m_j}^u \cup U_i^- \cup U_i^+$ — связное подмножество $(S^2 \times S^1) \setminus T_i^u$ и, следовательно, $(S^2 \times S^1) \setminus T_i^u$ — связное подмножество $S^2 \times S^1$, что противоречит тому факту, что любой однократный тор в $S^2 \times S^1$ ограничивает заполненный тор (см. [4, теорема 4]). $\square$

Если для некоторой седловой точки $\sigma_i \in \Sigma_r$ многообразие $W^\delta(\sigma_i)$ одномерно и содержит гетероклинические точки, то через $L_+^\delta(\sigma_i)$ мы будем обозначать ту компоненту связности множества $W^\delta(\sigma_i) \setminus \sigma_i$, которой они принадлежат.

Предложение 6.3. Если для некоторой седловой точки $\sigma_i \in \Sigma_r$ многообразие $W^\delta(\sigma_i) \in \hat{W}_r^\delta$ одномерно, то ограничение диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ на двумерное многообразие $W^{\bar{\delta}}(\sigma_i)$ сохраняет ориентацию.

Доказательство. Положим для определенности $\delta = s$. По условию, одномерное многообразие $W^s(\sigma_i) \in \hat{W}_r^s$. Докажем, что ограничение диффеоморфизма f на двумерное многообразие $W^u(\sigma_i)$ сохраняет ориентацию. Предположим противное, т.е. ограничение диффеоморфизма f на двумерное многообразие $W^u(\sigma_i)$ меняет его ориентацию. Тогда ограничение сохраняющего ориентацию диффеоморфизма f на одномерное многообразие $W^s(\sigma_i)$ также меняет его ориентацию, следовательно, $f(L_+^s(\sigma_i)) = L_-^s(\sigma_i)$. Получили противоречие с предложением 6.2, согласно которому все гетероклинические точки многообразия $W^s(\sigma_i)$ принадлежат в точности одной сепаратрисе $L_+^s(\sigma_i)$. $\square$

6.2. Структура многообразия $N_r(f)$. Напомним, что $\tilde{M}_r = M_r \setminus (C_r^{1s} \cup C_r^{1u})$, $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$, $N_r(f) = (\tilde{M}_r)/F$ (см. раздел 2).

Предложение 6.4. Многообразие $N_r(f)$ является связным ориентируемым замкнутым 3-многообразием.

Доказательство. Напомним, что ω — единственная стоковая точка диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$. Поскольку ω является притягивающей гиперболической точкой, существует гладко вложенная сфера S^2 , ограничивающая замкнутый шар B^3 такой, что $\omega \in \text{int } B^3$ и $f(B^3) \subset \text{int}(B^3)$. Обозначим через Σ_r^{1u} седловые точки диффеоморфизма f , имеющие индекс Морса 1. Зафиксируем попарно непересекающиеся окрестности $U_i \supset \sigma_i$, $\sigma_i \in \Sigma_r^{1u}$, такие, что

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_i) = \sigma_i, \quad \bigcap_{n \geq 0} f^n(U_i) = W^u(\sigma_i) \cap U_i, \quad \bigcap_{n \leq 0} f^n(U_i) = W^s(\sigma_i) \cap U_i.$$

Конструкция фильтрации (см., напр. [3, с. 194–199]) позволяет построить на многообразии $\tilde{M}_r$ связное компактное множество B_r с гладкой границей, обладающее следующими свойствами:

- 1) существует натуральное число m такое, что $f^{-m}(B^3) \subset B_r$;
- 2) $f(B_r) \subset \text{int}(B_r)$;
- 3) $\Sigma_r^{1u} \subset \text{int}(B_r) \setminus f^{-m}(B^3) \subset \bigcup_{\sigma_i \in \Sigma_r^{1u}} U_i$;
- 4) $B_r \subset \bigcup_{\sigma_i \in \Sigma_r^{1u}} W^s(\sigma_i) \cup W^s(\omega)$.

Тогда

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(B_r) = C_r^{1u}.$$

Пусть $\bar{B}_r = \text{Cl}(M_r \setminus B_r)$, Σ_r^{1s} — седловые точки диффеоморфизма f , имеющие индекс Морса 2. Связное компактное множество $\bar{B}_r$ с гладкой границей, обладает следующими свойствами:

- 1) $f^{-1}(\bar{B}_r) \subset \text{int}(\bar{B}_r)$;
- 2) $\bar{B}_r \subset \bigcup_{\sigma_i \in \Sigma_r^{1s}} W^u(\sigma_i) \cup \bigcup_{\alpha_j \in \mathcal{R}_r} W^u(\alpha_j)$.

Тогда

$$\bigcap_{n \leq 0} f^n(\bar{B}_r) = C_r^{1s}.$$

По построению, множество $B_r \setminus \text{int}(f(B_r))$ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ на $\tilde{M}_r^1$. Тогда многообразие $N_r(f)$ гомеоморфно $B_r \setminus \text{int}(f(B_r))$ со склеенной по f границей. Таким образом, $N_r(f)$ — связное ориентируемое замкнутое 3-многообразие. $\square$

Напомним, что $p_r : \tilde{M}_r \rightarrow N_r(f)$ — каноническая проекция, которая определяет нетривиальный гомоморфизм $\alpha_r(f) : \pi_1(N_r(f)) \rightarrow \mathbb{Z}$ такой, что $\alpha_r(f)(\pi_1(N_r(f))) = \mathbb{Z}$.

¹Под фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f на некоторое f -инвариантное множество X понимается множество $D \subset X$ такое, что траектория любой точки $x \in X$ имеет не меньше одной и не больше двух точек в D .

6.3. Допустимая система окрестностей. Пусть $a^u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $a^s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейные диффеоморфизмы, заданные матрицами

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Точка $O(0,0,0)$ является неподвижной седловой точкой диффеоморфизма a^δ , $\delta \in \{s, u\}$. Множество U является a^δ -инвариантным; кроме того, оно оснащено парой трансверсальных a^δ -инвариантных слоений $\tilde{\mathcal{F}}^1, \tilde{\mathcal{F}}^2$. Определим проекции вдоль слоев $\tilde{\pi}^1 : U \rightarrow XOY$ ($\tilde{\pi}^2 : U \rightarrow OZ$) как

$$\tilde{\pi}^1(x) = \tilde{\mathcal{F}}_x^1 \cap XOY \quad (\tilde{\pi}^2(x) = \tilde{\mathcal{F}}_x^2 \cap OZ),$$

где $\tilde{\mathcal{F}}_x^1$ ($\tilde{\mathcal{F}}_x^2$) — единственный слой слоения $\tilde{\mathcal{F}}^1$ ($\tilde{\mathcal{F}}^2$), проходящий через точку x .

Определение 6.5. Объединение $\tilde{\mathcal{U}}_r = \bigcup_{\sigma_i \in \Sigma_r} \tilde{U}_i$ будем называть допустимой системой окрестностей, если:

- 1) для каждой седловой точки $\sigma_i \in \Sigma_r$ с индексом Морса 2 (1) $\tilde{U}_i = \tilde{\mu}_i(U)$, где $\tilde{\mu}_i$ — гомеоморфизм, сопрягающий ограничение диффеоморфизма a^u (a^s) на U с ограничением диффеоморфизма f на $\tilde{U}_i$;
- 2) $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \emptyset$, если $W^\delta(\sigma_i) \cap W^{\bar{\delta}}(\sigma_j) = \emptyset$ для каждого $\delta \in \{u, s\}$;
- 3) если седловая точка $\sigma_j \in \Sigma_r$ такая, что $W^u(\sigma_i) \cap W^s(\sigma_j) \neq \emptyset$, то $W^s(\sigma_j) \cap \tilde{U}_i$ является объединением непересекающихся слоев одномерного (двумерного) f -инвариантного слоения $\tilde{\mathcal{F}}_i^s = \tilde{\mu}_i(\tilde{\mathcal{F}}^1)$ ($\tilde{\mathcal{F}}_i^s = \tilde{\mu}_i(\tilde{\mathcal{F}}^2)$);
- 4) если седловая точка $\sigma_j \in \Sigma_r$ такова, что $W^s(\sigma_i) \cap W^u(\sigma_j) \neq \emptyset$, то $W^u(\sigma_j) \cap \tilde{U}_i$ является объединением непересекающихся слоев двумерного (одномерного) f -инвариантного слоения $\tilde{\mathcal{F}}_i^u = \tilde{\mu}_i(\tilde{\mathcal{F}}^2)$ ($\tilde{\mathcal{F}}_i^u = \tilde{\mu}_i(\tilde{\mathcal{F}}^1)$).

Существование допустимой системы окрестностей у диффеоморфизма Морса—Смейла следует из результатов работы [9].

В дальнейшем всегда будем рассматривать окрестности седловых точек, входящие в объединение $\tilde{\mathcal{U}}_r$ и называть их допустимыми.

Определим проекции вдоль слоев

$$\tilde{\pi}_i^s : \tilde{U}_i \rightarrow W^u(\sigma_i) \quad (\tilde{\pi}_i^u : \tilde{U}_i \rightarrow W^s(\sigma_i))$$

как

$$\tilde{\pi}_i^s(x) = \tilde{\mathcal{F}}_{i,x}^s \cap W^u(\sigma_i) \quad (\tilde{\pi}_i^u(x) = \tilde{\mathcal{F}}_{i,x}^u \cap W^s(\sigma_i)),$$

где $\tilde{\mathcal{F}}_{i,x}^u$ ($\tilde{\mathcal{F}}_{i,x}^s$) — единственный слой слоения $\tilde{\mathcal{F}}_i^u$ ($\tilde{\mathcal{F}}_i^s$), проходящий через точку x .

Пусть $U_i = p_r(\tilde{U}_i)$, $\mathcal{F}_i^u, \mathcal{F}_i^s$ — пара трансверсальных слоений на U_i , индуцированных слоениями $\tilde{\mathcal{F}}_i^u, \tilde{\mathcal{F}}_i^s$.

6.4. Структура множеств $S_r^u(f), S_r^s(f)$. Обозначим через $\mathcal{K}^u$ ($\mathcal{K}^s$) множество индексов всех седловых точек $\sigma_k \in \Sigma_r$ таких, что $W^u(\sigma_k) \in (W_r^{2u} \setminus \hat{W}_r^{2u})$ ($W^s(\sigma_k) \in (W_r^{2s} \setminus \hat{W}_r^{2s})$) и через $\hat{\mathcal{K}}^\delta$, $\delta \in \{u, s\}$, — подмножество $\mathcal{K}^\delta$ такое, что для $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ $W^\delta(\sigma_k) \in (\hat{W}_r^{1\delta})$.

Для $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ обозначим через σ_{jk} единственную седловую точку в множестве Σ_r , обладающую свойством $W^{\bar{\delta}}(\sigma_k) \cap W^\delta(\sigma_{jk}) \neq \emptyset$. Положим

$$\Lambda_r^\delta(f) = p_r(W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k) \cup p_r(W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus (\sigma_{jk} \cup W^{\bar{\delta}}(\sigma_k))).$$

Предложение 6.6. Множество $\Lambda_r^\delta(f)$ для любого $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ является односторонней гетероклинической ламинацией на многообразии $N_r(f)$.

Доказательство. Заметим, что, согласно предложению 6.3, ограничение сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ на $W^\delta(\sigma_k)$ сохраняет ориентацию. Фундаментальная область B_k ограничения диффеоморфизма f на множество $W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k$ диффеоморфна замкнутому кольцу.

Поэтому множество $T_k^\delta(f) = p_r(W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k)$ является тором, вложенным в $N_r(f)$. Введем систему образующих в фундаментальной группе этого тора следующим образом. Пусть x — любая точка, принадлежащая ∂B_k . Рассмотрим простую кривую $\bar{a}$, соединяющую точку x с точкой $f(x)$ и такую, что $\text{int } \bar{a} \subset \text{int } B_k$ и простую замкнутую кривую $\bar{b}$, являющуюся компонентой связности границы B_k . Положим $a = p_r(\bar{a})$, $b = p_r(\bar{b})$. Из определения гомоморфизма $\alpha_r(f)$ следует, что $\alpha_r(f)([a]) = 1$, $\alpha_r(f)([b]) = 0$ и $\alpha(\pi_1(T_k^\delta(f))) = k\mathbb{Z}$. Таким образом, тор $T_k^\delta(f)$ является однократным и любая кривая, гомотопная b , является его меридианом.

Множество $W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk}$ содержит конечное число $m_{jk} \geq 0$ гетероклинических орбит. Поэтому существует фундаментальная область B_{jk} ограничения диффеоморфизма f на множество $W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk}$, которая диффеоморфна замкнутому кольцу и содержит в точности m_{jk} гетероклинических точек, принадлежащих различным орбитам диффеоморфизма f . Тогда

$$Q_{m_{jk}}^\delta(f) = p_r(W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus (\sigma_{jk} \cup W^{\bar{\delta}}(\sigma_k)))$$

представляет из себя либо тор с m_{jk} выколотыми точками (в случае, когда ограничение диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ на $W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk}$ сохраняет ориентацию), либо бутылку Клейна с m_{jk} выколотыми точками (в случае, когда ограничение диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ на $W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk}$ меняет ориентацию) в $N_r(f)$. Введем систему образующих в фундаментальной группе множества $Q_{m_{jk}}^\delta(f)$ следующим образом. Пусть x — любая точка, принадлежащая ∂B_{jk} . Рассмотрим простую кривую $\bar{a}$, соединяющую точку x с точкой $f(x)$, не проходящую через гетероклинические точки и такую, что $\text{int } \bar{a} \subset \text{int } B_{jk}$; простую замкнутую кривую $\bar{b}$, являющуюся компонентой связности границы B_{jk} ; простые замкнутые кривые $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{m_{jk}-1}$, каждая из которых не содержит гетероклинических точек, принадлежит $\text{int } B_{jk}$, ограничивает диск с единственной гетероклинической точкой в B_{jk} и эти диски попарно не пересекаются. Положим $a = p_r(\bar{a})$ ($c = p_r(\bar{a})$), $b = p_r(\bar{b})$ ($d = p_r(\bar{b})$), $e_1 = p_r(\bar{e}_1)$, $\dots$, $e_{m_{jk}-1} = p_r(\bar{e}_{m_{jk}-1})$. Из определения гомоморфизма $\alpha_r(f)$ следует, что $\alpha_r(f)([a]) = 1$ ($\alpha_r(f)([c]) = 1$), $\alpha_r(f)([b]) = 0$ ($\alpha_r(f)([d]) = 0$), $\alpha_r(f)([e_1]) = \dots = \alpha_r(f)([e_{m_{jk}-1}]) = 0$ и $\alpha(\pi_1(Q_{m_{jk}}^\delta(f))) = k\mathbb{Z}$. Таким образом, $Q_{m_{jk}}^\delta(f)$ является однократным проколотым тором (однократной проколотой бутылкой Клейна) и любая кривая, гомотопная b (d), является меридианом $Q_{m_{jk}}^\delta(f)$.

Пусть $\tilde{U}_k = \tilde{\mu}_k(U)$ — допустимая окрестность седловой точки σ_k ; тогда $U_k = p_r(\tilde{U}_k \setminus W^{\bar{\delta}}(\sigma_k))$ — трубчатая окрестность однократного тора $T_k^\delta(f)$. Определим гомеоморфизм $\mu_k : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow N_r(f)$ формулой $\mu_k = p_r \circ \tilde{\mu}_k \circ \pi_T^{-1}$.

Очевидно, что построенный гомеоморфизм обладает всеми свойствами, описанными в определении 3.10. Таким образом, множество $\Lambda_r^\delta(f) = T_k^\delta(f) \cup Q_{m_{jk}}^\delta(f)$ является односторонней гетероклинической ламинацией на многообразии $N_r(f)$. $\square$

Обозначим через $L_r^\delta(f) = \bigcup_{k \in \mathcal{K}^\delta} \Lambda_r^\delta(f)$ подмножество многообразия $N_r(f)$, состоящее из односторонних гетероклинических ламинаций и через l_r^δ — число компонент связности множества $L_r^\delta(f)$.

Пусть $k \in (\mathcal{K}^\delta \setminus \hat{\mathcal{K}}^\delta)$; тогда множество $Q_k^\delta(f) = p_r(W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k)$ является однократным тором или однократной бутылкой Клейна, вложенной в $N_r(f)$. Обозначим через

$$\Gamma_r^\delta(f) = \bigcup_{k \in (\mathcal{K}^\delta \setminus \hat{\mathcal{K}}^\delta)} p_r(W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k)$$

подмножество многообразия $N_r(f)$, состоящее из однократных торов и бутылок Клейна, и через t_r^δ — число компонент связности множества $\Gamma_r^\delta(f)$.

Напомним, что

$$S_r^u(f) = p_r(W_r^{2u} \setminus W^{1s}), \quad S_r^s(f) = p_r(W_r^{2s} \setminus W^{1u}).$$

Тогда

$$S_r^u(f) = L_r^u(f) \cup \Gamma_r^u(f), \quad S_r^s(f) = L_r^s(f) \cup \Gamma_r^s(f).$$

Заметим, что для диффеоморфизмов рассматриваемого класса множества $L_r^u(f)$, $\Gamma_r^u(f)$, $L_r^s(f)$, $\Gamma_r^s(f)$ попарно не пересекаются. Таким образом, пара $(S_r^u(f), S_r^s(f))$ является допустимым набором на многообразии $N_r(f)$.

Предложение 6.7. *Допустимый набор $(S_r^u(f), S_r^s(f))$ является совершенным.*

Доказательство. Любой простейший не градиентноподобный диффеоморфизм имеет ровно две неподвижные седловые точки σ_1, σ_2 такие, что $\dim W^u(\sigma_1) = 2$, $\dim W^u(\sigma_2) = 2$, при этом

$$W^u(\sigma_2) \cap W^s(\sigma_1) \neq \emptyset.$$

Тогда множество $\Gamma_r^u(f)$ пусто и множество $S_r^u(f)$ состоит из одной гетероклинической ламинации

$$L_r^u(f) = T_1^u(f) \cup Q_{21}^u(f),$$

где

$$T_1^u(f) = p_r(W^u(\sigma_1) \setminus \sigma_1), \quad Q_{21}^u(f) = p_r(W^u(\sigma_2) \setminus (\sigma_2 \cup W^s(\sigma_1)))$$

для всех $r \in \{0, 1, 2\}$.

Введем обозначение

$$\tilde{M}_{r1} = (\tilde{M}_r) \cup (W^s(\sigma_1)) \setminus (W^u(\sigma_1)).$$

Группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует на $\tilde{M}_{r1}$ собственнo разрывно. Обозначим через $N_{r1} = (\tilde{M}_{r1})/F$ пространство орбит этого действия и через $p_{r1} : \tilde{M}_{r1} \rightarrow N_{r1}$ — каноническую проекцию.

Рассмотрим допустимую окрестность $\tilde{U}_1 = \tilde{\mu}_1(U)$ седловой точки σ_1 . Множество $V(T_1^u(f)) = p_r(\tilde{U}_1 \setminus W^s(\sigma_1))$ является трубчатой окрестностью однократного тора $T_1^u(f)$ в $N_r(f)$. Множество $p_{r1}(\tilde{U}_1 \setminus W^u(\sigma_1))$ гомеоморфно двум копиям $\mathbb{D} \times S^1$. Многообразие $N_{r1} \setminus \text{int}(\mathbb{D} \times S^1 \times S^0)$ посредством отображения $p_r \circ (p_{r1}|_{\tilde{M}_{r1} \setminus \text{int}(\tilde{U}_1)})^{-1}$ гомеоморфно многообразию $\bar{N} = N_r(f) \setminus \text{int}(V(T_1(f)))$. Тогда многообразие N_{r1} получается из $\bar{N}$ приклеиванием к каждой граничной компоненте заполненного тора посредством гомеоморфизма $p_r \circ (p_{r1}|_{\partial \tilde{U}_1})^{-1}$, переводящего меридиан $\partial \mathbb{D} \times \{1\}$ на меридиан граничного тора $\bar{N}_r(f)$, т.е. многообразие N_{r1} получено из многообразия $N_r(f)$ разрезанием и склеиванием вдоль однократного тора $T_1^u(f)$ (см. раздел 4). Обозначим через $Q_2^u(f) = p_{r1}(W^u(\sigma_2))$ однократный тор или бутылку Клейна в N_{r1} , через $\bar{Q}_2^u(f) = CS_{N_r(f), T_1^u(f)}(Q_{21}^u(f))$ и через $\bar{d}_i$, $i = \overline{1, m_{21}}$, — компоненты связности множества $p_{r1}(\tilde{U}_1 \cap W^u(\sigma_2))$. По построению,

$$Q_2^u(f) = \bar{Q}_2^u(f) \cup \bigcup_{i=1}^{m_{21}} \text{int } \bar{d}_i.$$

Пусть

$$\tilde{M}^s = (\tilde{M}_{r1}) \cup (W^s(\sigma_2)) \setminus (W^u(\sigma_2)).$$

Группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует на $\tilde{M}^s$ собственнo разрывно. Обозначим через $N^s = (\tilde{M}^s)/F$ пространство орбит этого действия и через $p^s : \tilde{M}^s \rightarrow N^s$ — каноническую проекцию. Повторяя рассуждения, приведенные выше, докажем, что многообразие N^s получается из многообразия N_{r1} разрезанием и склеиванием вдоль $Q_2^u(f)$. Следовательно, многообразие N^s получается из многообразия $N_r(f)$ разрезанием и склеиванием вдоль гетероклинической ламинации $L_r^u(f)$. Заметим, что

$$\tilde{M}^s = (\tilde{M}_r) \cup (W_r^{1s}) \setminus (W_r^{2u}) = \bigcup_{i=1}^{3-r} W^u(\alpha_i) \setminus \alpha_i,$$

где α_i , $i = \overline{1, 3-r}$, — источники точки диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$. Тогда результирующее многообразие $N^s = N_r(f)_{L_r^u(f)}$ гомеоморфно $3-r$ копиям $S^2 \times S^1$.

Пусть

$$\tilde{M}^u = (\tilde{M}_r) \cup (W_r^{1u}) \setminus (W_r^{2s}) = W^s(\omega) \setminus \omega.$$

Тогда фактор-пространство $(\tilde{M}^u)/F$ гомеоморфно $S^2 \times S^1$ и по аналогии с вышесказанным, можно показать, что оно получается из многообразия $N_r(f)$ разрезанием и склеиванием вдоль множества $S_r^s(f)$. $\square$

Таким образом, схема любого диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$ является схемой в смысле определения 5.3.

Предложение 6.8. *Схема любого простейшего не градиентноподобного диффеоморфизма принадлежит множеству $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Для доказательства этого предложения достаточно показать, что набор $(S_r^u(f), S_r^s(f))$ в схеме любого простейшего не градиентноподобного диффеоморфизма удовлетворяет условиям 1)–4) определения 5.5. Найдем координаты вектора $\bar{j}_r = (l_r^u, l_r^s, t_r^s)$ для различных значений $r \in \{0, 1, 2\}$. Как показано в доказательстве предложения 6.7, множество $\Gamma_r^u(f)$ пусто и множество $l_r^u = 1$ для всех $r \in \{0, 1, 2\}$. Множество $S_r^s(f) = L_r^s(f) \cup \Gamma_r^s(f)$ для различных значений r имеет следующий вид:

- для $r = 0$ множество $S_r^s(f)$ пусто; тогда $\bar{j}_0 = (1, 0, 0)$;
- для $r = 1$ множество $L_r^s(f)$ пусто и

$$\Gamma_r^s(f) = Q_3^s(f),$$

где

$$Q_3^s(f) = p_r(W^s(\sigma_3) \setminus \sigma_3);$$

тогда $\bar{j}_1 = (1, 0, 1)$;

- для $r = 2$ в случае, когда $W^s(\sigma_3) \cap W^u(\sigma_4) = \emptyset$, множество $L_r^s(f)$ пусто и

$$\Gamma_r^s(f) = Q_3^s(f) \cup Q_4^s(f),$$

где

$$Q_3^s(f) = p_r(W^s(\sigma_3) \setminus \sigma_3), \quad Q_4^s(f) = p_r(W^s(\sigma_4) \setminus \sigma_4);$$

при этом из [7, следствие 1.9] следует, что множество $\Gamma_r^s(f)$ содержит не более одной бутылки Клейна;

- в случае, когда $W^s(\sigma_3) \cap W^u(\sigma_4) \neq \emptyset$, множество $\Gamma_r^s(f)$ пусто и

$$L_r^s(f) = T_4^s(f) \cup Q_{34}^s(f),$$

где

$$T_4^s(f) = p_r(W^s(\sigma_4) \setminus \sigma_4), \quad Q_{34}^s(f) = p_r(W^s(\sigma_3) \setminus (\sigma_3 \cup W^u(\sigma_4)));$$

тогда $\bar{j}_2 = (1, 0, 2)$ или $\bar{j}_2 = (1, 1, 0)$.

Таким образом, выполняются условия 1)–3) определения 5.5; выполнение условия 4) следует из предложения 6.7. $\square$

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМА $f_S \in MS(M_r, 6)$, РЕАЛИЗУЮЩЕГО СХЕМУ $S \in \mathcal{S}$

Пусть $S = (N, \alpha, S^u, S^s)$ — схема из множества $\mathcal{S}$. Гомоморфизм $\alpha : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ определяет накрытие $p_\alpha : \tilde{N} \rightarrow N$, группа скольжений которого изоморфна $\mathbb{Z}$ и имеет положительную образующую — диффеоморфизм $f_\alpha : \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$. При этом любая кривая в $\tilde{N}$, соединяющая точки x и $f_\alpha^k(x)$, проектируется в замкнутую петлю c на N такую, что $\alpha([c]) = k$.

7.1. Присоединение седловых точек.

7.1.1. Пусть $Q^s \in \Gamma^s$ (если множество Γ^s не пусто). Выберем трубчатую окрестность $V(Q^s)$ однократного тора или однократной бутылки Клейна Q^s в N , не пересекающуюся с компонентами связности множества $S^s \cup S^u$, отличными от Q^s .

Если Q^s — однократный тор, то $p_\alpha^{-1}(V(Q^s))$ диффеоморфно C , т.е. существует диффеоморфизм $\eta_{Q^s} : p_\alpha^{-1}(V(Q^s)) \rightarrow C$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f_α на $p_\alpha^{-1}(V(Q^s))$ с диффеоморфизмом $\psi^s : C \rightarrow C$, где $\psi^s(t, e^{i\varphi}, r) = (t, e^{i\varphi}, r + 1)$.

Если Q^s — однократная бутылка Клейна, то $p_\alpha^{-1}(V(Q^s))$ также диффеоморфно C и существует диффеоморфизм $\eta_{Q^s} : p_\alpha^{-1}(V(Q^s)) \rightarrow C$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f_α на $p_\alpha^{-1}(V(Q^s))$ с диффеоморфизмом $\psi^{s-} : C \rightarrow C$, где $\psi^{s-}(t, e^{i\varphi}, r) = (-t, e^{-i\varphi}, r + 1)$.

Диффеоморфизм $\phi : U^0 \rightarrow C$ сопрягает ограничение диффеоморфизма a^s на U^0 с диффеоморфизмом ψ^s .

Пусть $a^{s-} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a^{u-} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейные диффеоморфизмы, заданные матрицами

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Точка $O(0, 0, 0)$ является неподвижной седловой точкой диффеоморфизма $a^{\delta-}$. Диффеоморфизм $\phi : U^0 \rightarrow C$ сопрягает ограничение диффеоморфизма a^{s-} на U^0 с диффеоморфизмом ψ^{s-} .

Тогда диффеоморфизм $H_{Q^s} = \phi^{-1} \circ \eta_{Q^s} : p_\alpha^{-1}(V(Q^s)) \rightarrow U^0$ сопрягает ограничение диффеоморфизма f_α на $p_\alpha^{-1}(V(Q^s))$ с ограничением на U^0 диффеоморфизма a^s (если Q^s — тор), или a^{s-} (если Q^s — бутылка Клейна).

Так как в совершенном наборе (S^u, S^s) схемы $S \in \mathcal{S}$ коэффициент $l^u = 1$ ($l^s \leq 1$), то L^u (L^s , если оно непусто) является объединением однократного тора T^u (T^s) с однократным тором (бутылкой Клейна) Q_{m_u} (Q_{m_s}) с m_u (m_s) выколотыми точками. Пусть $N(T^\delta) = \mu_\delta(\mathbb{T} \times [-1, 1])$ — трубчатая окрестность тора T^δ , удовлетворяющая всем условиям определения 3.10 односторонней гетероклинической ламинации. Гомеоморфизм $\eta_{T^\delta} : p_\alpha^{-1}(V(T^\delta)) \rightarrow C$, являющийся поднятием гомеоморфизма μ_δ , сопрягает ограничение диффеоморфизма f_α на $p_\alpha^{-1}(V(T^\delta))$ с диффеоморфизмом ψ^δ , где $\psi^u(t, e^{i\varphi}, r) = (t, e^{i\varphi}, r - 1)$ и ψ^s — диффеоморфизм, определенный выше.

Диффеоморфизм ϕ сопрягает ограничение диффеоморфизма a^δ на U^0 с диффеоморфизмом ψ^δ , определенным на C .

По построению, гомеоморфизм

$$H_{T^\delta} = \phi^{-1} \circ \eta_{T^\delta} : p_\alpha^{-1}(V(T^\delta)) \rightarrow U^0$$

сопрягает ограничение диффеоморфизма f_α на $p_\alpha^{-1}(V(T^\delta))$ с ограничением диффеоморфизма a^δ на U^0 , и каждая компонента связности в пересечении $H_{T^\delta}(p_\alpha^{-1}(V(T^\delta)) \cap p_\alpha^{-1}(Q_{m_s}))$ является слоем слоения $\tilde{\mathcal{F}}^2 \setminus (OZ)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что окрестности, входящие в объединение $V_\Gamma = \bigcup_Q V(Q)$, где объединение берется по всем однократным торам и бутылкам Клейна множества $\Gamma = \Gamma^s \cup T^s \cup T^u$, попарно не пересекаются между собой. Введем обозначения $U_Q = H_Q(p_\alpha^{-1}(V(Q))) \cup OZ$, $\hat{N}_1 = \tilde{N} \cup \bigcup_{Q \in \Gamma} U_Q$ и рассмотрим на множестве $\hat{N}_1$ отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim H_Q(x)$, $Q \in \Gamma$.

Предложение 7.1. $\tilde{N}_1 = \hat{N}_1 / \sim$ — гладкое хаусдорфово многообразие и существует диффеоморфизм $f_1 : \tilde{N}_1 \rightarrow \tilde{N}_1$, индуцированный f_α на $\tilde{N}$, a^δ на U_{T^δ} , a^s на U_Q , если $Q \in \Gamma^s$ — тор и a^{s-} на U_Q , если $Q \in \Gamma^s$ — бутылка Клейна.

Доказательство. Дифференциальная структура $\tilde{N}_1$ наследуется из конструкции склеивания гладких многообразий по диффеоморфизму. Существование диффеоморфизма f_1 следует из конструкции склеивания гладких многообразий вдоль инвариантных множеств по диффеоморфизмам, сопрягающим динамику. Для доказательства хаусдорфовости многообразия $\tilde{N}_1$ достаточно показать, что множество $E_1 = \{(x, y) \in \hat{N}_1 \times \hat{N}_1 \mid x \sim y\}$ замкнуто. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $(x_n, y_n) \in E_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что все члены последовательности (x_n) принадлежат замкнутому множеству $p_\alpha^{-1}(V(Q))$ для некоторого $Q \in \Gamma$ и существует точка $x \in p_\alpha^{-1}(V(Q))$ такая, что $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Тогда $y_n = H_Q(x_n)$ и в силу непрерывности отображения H_Q

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_Q(x_n) = H_Q(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = H_Q(x),$$

т.е. $x \sim y$ и множество E_1 замкнуто. □

Обозначим через σ_u единственную присоединенную седловую точку, имеющую индекс Морса 2, и через $L_+(\sigma_u)$ ($z > 0$), $L_-(\sigma_u)$ ($z < 0$) — компоненты связности $W^s(\sigma_u) \setminus \sigma_u$.

Если в схеме $S \in \mathcal{S}$ имеем $l^s = 1$, то обозначим через σ_s единственную присоединенную седловую точку, имеющую индекс Морса 1, и через $L_+(\sigma_s)$ ($z > 0$), $L_-(\sigma_s)$ ($z < 0$) — компоненты связности $W^u(\sigma_s) \setminus \sigma_s$.

Пусть Σ^- — множество всех присоединенных седловых точек диффеоморфизма f_1 , имеющих индекс 1.

7.1.2. Пусть $\tilde{N}_2 = \tilde{N}_1 \setminus (W^u(\sigma_u) \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma^-} W^s(\sigma))$; рассмотрим группу $F_1 = \{f_1^n, n \in \mathbb{Z}\}$, которая действует собственнo разрывно на $\tilde{N}_2$. Обозначим через $N_2 = (\tilde{N}_2)/F_1$ пространство орбит этого действия, через $p_2 : \tilde{N}_2 \rightarrow N_2$ — каноническую проекцию, через Q^δ — однократный тор (бутылку Клейна) в N_2 , полученную из Q_{m_δ} заклеиванием выколотых точек точками однократного узла $\gamma_\delta^+ = (L_+(\sigma_\delta))/F_1$. Заметим, что по построению Q^δ трансверсально пресекается с γ_δ^+ в m_δ точках. Тогда существует диффеоморфизм

$$\nu_\delta : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow N_2 \quad (\nu_\delta : C/f_K \rightarrow N_2)$$

со следующими свойствами:

- 1) $\nu_\delta(\mathbb{T}) = Q^\delta$ ($\nu_\delta(\mathbb{K}) = Q^\delta$);
- 2)

$$\nu_\delta^{-1}(\nu_\delta(\mathbb{T} \times [-1, 1]) \cap \gamma_\delta^+) = \bigcup_{i=1}^{m_\delta} \mathcal{F}_{T,i}^1 \quad (\nu_\delta^{-1}(\nu_\delta(C/f_K \cap \gamma_\delta^+)) = \bigcup_{i=1}^{m_\delta} \mathcal{F}_{K,i}^1),$$

где $\mathcal{F}_{T,i}^1$ ($\mathcal{F}_{K,i}^1$), $i = \overline{1, m_\delta}$, — различные слои слоения $\mathcal{F}_T^1$ ($\mathcal{F}_K^1$).

Обозначим через $V(Q^\delta) = \nu_\delta(\mathbb{T} \times [-1, 1])$ ($V(Q^\delta) = \nu_\delta(C/f_K)$) трубчатую окрестность Q^δ . Тогда гомеоморфизм $\eta_{Q^\delta} : p_2^{-1}(V(Q^\delta)) \rightarrow C$, являющийся поднятием гомеоморфизма ν_δ , сопрягает ограничение диффеоморфизма f_1 на $p_2^{-1}(V(Q^\delta))$ с диффеоморфизмом ψ^δ (если Q^δ — тор), или $\psi^{\delta-}$ (если Q^δ — бутылка Клейна), где $\psi^{u-}(t, e^{i\varphi}, r) = (-t, e^{-i\varphi}, r - 1)$, а диффеоморфизмы ψ^s , ψ^u , ψ^{s-} определены выше. По построению, гомеоморфизм

$$H_{Q^\delta} = \phi^{-1} \circ \eta_{Q^\delta} : p_2^{-1}(V(Q^\delta)) \rightarrow U^0$$

сопрягает ограничение диффеоморфизма f_1 на $p_2^{-1}(V(Q^\delta))$ с ограничением на U^0 диффеоморфизма a^δ (если Q^δ — тор), или $a^{\delta-}$ (если Q^δ — бутылка Клейна). Кроме того, множество

$$H_{Q^\delta}(p_2^{-1}(V(Q^\delta)) \cap p_2^{-1}(\gamma_\delta^+))$$

является объединением непересекающихся слоев слоения $\tilde{\mathcal{F}}_Q^1$.

Пусть

$$U_{Q^\delta} = H_{Q^\delta}(p_2^{-1}(V(Q^\delta))) \cup OZ, \quad \hat{N}_3 = \tilde{N}_1 \cup \bigcup_{\delta \in \{s, u\}} U_{Q^\delta};$$

введем на множестве $\hat{N}_3$ отношение эквивалентности $\sim : x \sim H_{Q^\delta}(x)$, $\delta \in \{s, u\}$.

Предложение 7.2. $\tilde{N}_3 = \hat{N}_3/\sim$ — гладкое хаусдорфово многообразие и существует диффеоморфизм $f_3 : \tilde{N}_3 \rightarrow \tilde{N}_3$, индуцированный f_1 на $\tilde{N}_1$, a^δ на U_{Q^δ} , если Q^δ — тор и $a^{\delta-}$ на U_{Q^δ} , если Q^δ — бутылка Клейна.

Доказательство. Дифференциальная структура $\tilde{N}_3$ наследуется из конструкции склеивания гладких многообразий по диффеоморфизму. Существование диффеоморфизма f_3 следует из конструкции склеивания гладких многообразий вдоль инвариантных множеств по диффеоморфизмам, сопрягающим динамику. Для доказательства хаусдорфовости многообразия $\tilde{N}_3$ достаточно показать, что множество $E_3 = \{(x, y) \in \hat{N}_3 \times \hat{N}_3 | x \sim y\}$ замкнуто. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $(x_n, y_n) \in E_3$.

Положим для определенности, что $x_n \in p_{\alpha_1}^{-1}(V(Q^u))$ и Q^u — однократный тор. Тогда $y_n = H_{Q^u}(x_n) \in U_{Q^u}^0$ и существует точка $y \in U_{Q^u}$ такая, что $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Возможны следующие случаи:

- 1) $y \notin OZ$,
- 2) $y \in OZ$.

В первом случае в силу непрерывности отображения H_{Q^u}

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{Q^u})^{-1}(y_n) = (H_{Q^u})^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = (H_{Q^u})^{-1}(y),$$

т.е. $x \sim y$.

Во втором случае $x \in W^u(\sigma_u)$ и локальная динамика в окрестности седловой точки σ_u такова, что существуют последовательность $k_n \subset \mathbb{Z}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$, и точка $\bar{x} \in L_+(\sigma_u) \cap p_2^{-1}(V(Q^u))$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1^{-k_n}(x_n) = \bar{x}.$$

Так как $\bar{x}_n \in p_2^{-1}(V(Q^u))$ и отображение H_{Q^u} сопрягает диффеоморфизмы f_1 и a^u ,

$$H_{Q^u}(\bar{x}_n) = H_{Q^u}(f_1^{-k_n}(x_n)) = (a^u)^{-k_n}(y_n) = \bar{y}_n \in U_{Q^u}^0$$

и в силу непрерывности отображения H_{Q^u}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{Q^u}(\bar{x}_n) = H_{Q^u}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n) = H_{Q^u}(\bar{x}) = \bar{y} \notin OZ.$$

Тогда последовательность $y_n = (a^u)^{k_n}(\bar{y}_n)$ не имеет предела в U_{Q^u} , получили противоречие, следовательно, случай 2) невозможен, а в случае 1) множество E_3 замкнуто. $\square$

В результате описанных операций мы получили диффеоморфизм f_3 , заданный на гладком хаусдорфовом многообразии $\tilde{N}_3$, имеющий $2 + r^s$ седловые точки, будем обозначать через Σ множество всех седловых точек диффеоморфизма f_3 .

7.1.3. Присоединение узловых точек. Пусть $\tilde{N}^u = \tilde{N}_3 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma} W^u(\sigma)$, $F_3 = \{f_3^n, n \in \mathbb{Z}\}$ — группа,

которая действует собственноразрывно на $\tilde{N}^u$. Заметим, что фактор-пространство $N^u = (\tilde{N}^u)/F_3$ получается из многообразия N операциями разрезания и склеивания вдоль множества L^u с помощью гомеоморфизмов H_{T^u} , H_{Q^u} , поэтому в силу совершенности набора S_j N^u гомеоморфно $3 - r^s$ копиям $S^2 \times S^1$.

Обозначим через $\Delta_{\alpha,i}$, $i = \overline{1, 3 - r^s}$, компоненты связности $\tilde{N}^u$, каждая из которых гомеоморфна $S^2 \times \mathbb{R}$.

Пусть $a^\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейный диффеоморфизм, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Точка $O(0, 0, 0)$ является неподвижной источниковой точкой диффеоморфизма a^α . Существуют диффеоморфизмы $H_{\alpha,i} : \Delta_{\alpha,i} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$, $i = \overline{1, 3 - r^s}$, сопрягающие ограничение диффеоморфизма f_3 на $\Delta_{\alpha,i}$ с ограничением a^α на $\mathbb{R}^3 \setminus O$ соответственно.

Пусть $\Delta_\omega = \tilde{N}_3 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma} W^s(\sigma)$, группа F_3 действует собственноразрывно на Δ_ω . Заметим, что фактор-пространство $N^s = (\Delta_\omega)/F_3$ получается из многообразия N операциями разрезания и склеивания вдоль множества S^s с помощью гомеоморфизмов H_{T^s} , H_{Q^s} , поэтому в силу допустимости набора S_j N^s гомеоморфно $S^2 \times S^1$. Пространство Δ_ω гомеоморфно $S^2 \times \mathbb{R}$.

Пусть $a^\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — линейный диффеоморфизм, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Точка $O(0, 0, 0)$ является неподвижной стоковой точкой диффеоморфизма a^ω . Существует диффеоморфизм $H_\omega : \Delta_\omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f_3 на Δ_ω с ограничением a^ω на $\mathbb{R}^3 \setminus O$. Пусть

$$\mathbb{R}_i^3 = H_{\alpha,i}(\Delta_{\alpha,i}) \cup O, \quad i = \overline{1, 3 - r^s}, \quad \mathbb{R}_\omega^3 = H_\omega(\Delta_\omega) \cup O, \quad \hat{N}_4 = \tilde{N}_3 \cup \mathbb{R}_\omega^3 \cup \bigcup_{i=1}^{3-r^s} \mathbb{R}_i^3;$$

введем на множестве $\hat{N}_4$ отношение эквивалентности $\sim : x \sim H_{\alpha,i}(x)$, $x \sim H_\omega(x)$.

Предложение 7.3. $M = \hat{N}_4/\sim$ — гладкое хаусдорфово многообразие и существует диффеоморфизм $f_S : M \rightarrow M$, индуцированный f_3 на $\tilde{N}_3$, a^α на $\bigcup_{i=1}^{3-r^s} \mathbb{R}_i^3$ и a^ω на $\mathbb{R}_\omega^3$.

Доказательство. Дифференциальная структура M наследуется из конструкции склеивания гладких многообразий по диффеоморфизму. Существование диффеоморфизма f_S следует из конструкции склеивания гладких многообразий вдоль инвариантных множеств по диффеоморфизмам, сопрягающим динамику. Для доказательства хаусдорфовости многообразия M достаточно показать, что множество $E_M = \{(x, y) \in \hat{N}_4 \times \hat{N}_4 | x \sim y\}$ замкнуто. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $(x_n, y_n) \in E_M$. Возможны следующие случаи:

- 1) $x_n \in \Delta_{\alpha,i}$, $y_n = H_{\alpha,i}(x_n) \in \mathbb{R}_i^3 \setminus O$,
- 2) $x_n \in \Delta_\omega$, $y_n = H_\omega(x_n) \in \mathbb{R}_\omega^3 \setminus O$,
- 3) $x_n \in \mathbb{R}_i^3 \setminus O$, $y_n = H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}(x_n) \in \mathbb{R}_\omega^3 \setminus O$.

Рассмотрим случай 1). Относительно точки $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ существуют две возможности:

- 1a) $y \neq O$;
- 1b) $y = O$.

В случае 1a) в силу непрерывности отображения $H_{\alpha,i}^{-1}$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\alpha,i}^{-1}(y_n) = H_{\alpha,i}^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = H_{\alpha,i}^{-1}(y),$$

т.е. $x \sim y$.

В случае 1b) $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in W^u(\sigma)$ для некоторой седловой точки $\sigma \in \Sigma$. Локальная динамика в окрестности седловой точки σ такова, что существуют последовательность $k_n \subset \mathbb{Z}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$, и точка $\bar{x} \in W^s(\sigma) \cap \Delta_{\alpha,i}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_3^{-k_n}(x_n) = \bar{x}.$$

Так как $\bar{x}_n \in \Delta_{\alpha,i}$ и отображение $H_{\alpha,i}$ сопрягает диффеоморфизмы f_3 и a^α ,

$$H_{\alpha,i}(\bar{x}_n) = H_{\alpha,i}(f_3^{-k_n}(x_n)) = (a^\alpha)^{-k_n}(y_n) = \bar{y}_n \in \mathbb{R}_i^3 \setminus O$$

и в силу непрерывности отображения $H_{\alpha,i}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\alpha,i}(\bar{x}_n) = H_{\alpha,i}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n) = H_{\alpha,i}(\bar{x}) = \bar{y} \neq O.$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^\alpha)^{-k_n}(y_n) = O;$$

получили противоречие, следовательно, случай 1b) невозможен, а в случае 1a) множество E_M замкнуто.

Случай 2) аналогичен случаю 1). Для случая 3) существуют две возможности:

- 3a) $y \neq O$,
- 3b) $y = O$.

В случае 3a) в силу непрерывности отображения $H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1})^{-1}(y_n) = (H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1})^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = (H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1})^{-1}(y),$$

т.е. $x \sim y$.

В случае 3b) $x = O$. Поскольку $x = O$ — неподвижная источниковая точка для диффеоморфизма a^α , существует последовательность $k_n \subset \mathbb{Z}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$ и точка $\bar{x} \in \mathbb{R}_i^3 \setminus O$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^\alpha)^{k_n}(x_n) = \bar{x}.$$

Так как $\bar{x}_n \in \mathbb{R}_i^3 \setminus O$ и отображение $H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}$ сопрягает диффеоморфизмы a^α и a^ω ,

$$H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}(\bar{x}_n) = H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}((a^\alpha)^{k_n}(x_n)) = (a^\omega)^{k_n}(y_n) = \bar{y}_n \in \mathbb{R}_\omega^3 \setminus O$$

и в силу непрерывности отображения $H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}(\bar{x}_n) = H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n) = H_\omega \circ H_{\alpha,i}^{-1}(\bar{x}) = \bar{y} \neq O.$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^\omega)^{k_n}(y_n) = O;$$

получили противоречие, следовательно, случай 3б) невозможен, а в случае 3а) множество E_M замкнуто. $\square$

Обозначим через α_i , $i = \overline{1, 3 - r^s}$, присоединенные источники точки и через ω присоединенную стоковую точку.

Предложение 7.4. *Многообразие M компактно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n) \in M$. Заметим, что многообразии $\tilde{N}$ имеет компактную фундаментальную область, а структура в окрестности присоединенных седловых точек такова, что существуют последовательность $(k_n) \subset \mathbb{Z}$ и точка $\bar{x} \in \tilde{N}_3$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_S^{k_n}(x_n) = \bar{x}$ (относительно рассмотрения подпоследовательности последовательности (x_n)).

Возможны следующие случаи:

- 1) (k_n) содержит ограниченную подпоследовательность; тогда существуют число k_* и подпоследовательность x_{l_n} такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_S^{k_*} x_{l_n} = \bar{x}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{l_n} = f_S^{-k_*}(\bar{x})$.
- 2) (k_n) не имеет ограниченных подпоследовательностей; не ограничивая общности, будем считать, что последовательность (k_n) сходится к $+\infty$ (относительно рассмотрения подпоследовательности). Существуют следующие возможности:
 - 2а) $\bar{x} \in \tilde{N}_3 \setminus (\bigcup_{\sigma \in \Sigma} W^u(\sigma))$;
 - 2б) $\bar{x} \in W^u(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$.

В случае 2а) $\bar{x} \in \Delta_{\alpha,i}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, 3 - r^s\}$ и $x_n = f_S^{-k_n}(\bar{x}_n)$ сходится к α_i .

В случае 2б), если $\bar{x}_n$ имеет бесконечно много точек, принадлежащих $W^u(\sigma)$, то $x_n = f_S^{-k_n}(\bar{x}_n)$ сходится к σ . В противном случае существуют последовательность $l_n \subset \mathbb{Z}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = +\infty$, и точка $z \in W^s(\sigma)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_S^{-l_n}(\bar{x}_n) = z.$$

Тогда $x_n = f_S^{l_n - k_n}(z_n)$ сходится к точке, принадлежащей $W^s(\sigma)$ (если $l_n - k_n$ ограничена), сходится к ω (если $l_n - k_n \rightarrow -\infty$), сходится к σ (если $l_n - k_n \rightarrow +\infty$). $\square$

Таким образом, мы построили на замкнутом 3-многообразии M диффеоморфизм Морса—Смейла f_S с конечным числом гетероклинических орбит и без гетероклинических кривых, имеющий шесть неподвижных точек: $3 - r^s$ источников, $r^s + 2$ седла и один сток. Из результатов [5] следует, что многообразие M для $r^s = 0$ совпадает с S^3 , для $r^s = 1$ совпадает с $S^2 \times S^1$, для $r^s = 2$ совпадает с $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$. Тогда диффеоморфизм f_S принадлежит классу $MS(M_r, 6)$. Кроме того, очевидно, что схема S эквивалентна схеме этого простейшего не градиентноподобного диффеоморфизма.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3

8.1. Доказательство необходимости условий теоремы 2.3. Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in MS(M_r, 6)$ топологически сопряжены, т.е. существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : M_r \rightarrow M_r$ такой, что $h \circ f = f' \circ h$. При этом сопрягающий гомеоморфизм h переводит инвариантные многообразия седловых точек диффеоморфизма f в соответствующие инвариантные многообразия соответствующих седловых точек диффеоморфизма f' .

Напомним, что $W_r^{2u}(W_r^{2s})$ — множество двумерных инвариантных неустойчивых (устойчивых) многообразий всех седловых точек диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$; $W_r^{1u}(W_r^{1s})$ — множество

одномерных неустойчивых (устойчивых) инвариантных многообразий всех седловых точек диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$; ω — единственный сток диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$; $\mathcal{R}_r$ — множество всех источников точек диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$; $C_r^{1u} = \omega \cup W_r^{1u}$, $C_r^{1s} = \mathcal{R}_r \cup W_r^{1s}$; $\tilde{M}_r = M_r \setminus (C_r^{1s} \cup C_r^{1u})$; $N_r(f) = (\tilde{M}_r)/F$ и $p_r : \tilde{M}_r \rightarrow N_r(f)$ — накрытие, определяющее нетривиальный гомоморфизм $\alpha_r(f) : \pi_1(N_r(f)) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Набор

$$S_r(f) = (N_r(f), \alpha_r(f), S_r^u(f), S_r^s(f)),$$

где

$$S_r^u(f) = p_r(W_r^{2u} \setminus W_r^{1s}), \quad S_r^s(f) = p_r(W_r^{2s} \setminus W_r^{1u}),$$

определяет схему диффеоморфизма $f \in MS(M_r, 6)$. Снабдим штрихом все перечисленные объекты для диффеоморфизма $f' \in MS(M_r, 6)$. Рассмотрим гомеоморфизм

$$\varphi = p'_r \circ h \circ (p_r)^{-1} : N_r(f) \rightarrow N_r(f'),$$

который по построению обладает следующими свойствами:

- 1) $\alpha_r(f) = \alpha_r(f') \circ \varphi_*$;
- 2) $\varphi(S_r^u(f)) = S_r^u(f')$, $\varphi(S_r^s(f)) = S_r^s(f')$.

Следовательно схемы топологически сопряженных диффеоморфизмов эквивалентны.

8.2. Доказательство достаточности условий теоремы 2.3. Пусть

$$S_r(f) = (N_r(f), \alpha_r(f), S_r^u(f), S_r^s(f)), \quad S_r(f') = (N_r(f'), \alpha_r(f'), S_r^u(f'), S_r^s(f'))$$

— эквивалентные схемы диффеоморфизмов $f, f' \in MS(S_r, 6)$ соответственно, т.е. существует гомеоморфизм $\varphi : N_r(f) \rightarrow N_r(f')$ такой, что

- 1) $\alpha_r(f) = \alpha_r(f') \circ \varphi_*$,
- 2) $\varphi(S_r^u(f)) = S_r^u(f')$, $\varphi(S_r^s(f)) = S_r^s(f')$.

8.2.1. Пусть $k \in \mathcal{K}^\delta$; тогда для неподвижной седловой точки σ_k (σ'_k) множество

$$Q_k^\delta(f) = p_r(W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k) \quad (Q_k^\delta(f') = p'_r(W^\delta(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k))$$

является либо однократным тором, либо однократной бутылкой Клейна, вложенной в $N_r(f)$ ($N_r(f')$) и $\varphi(Q_k^\delta(f)) = Q_k^\delta(f')$. Пусть $\tilde{U}_k = \tilde{\mu}_k(U) \in \tilde{\mathcal{U}}_r$ ($\tilde{U}'_k = \tilde{\mu}'_k(U) \in \tilde{\mathcal{U}}'_r$) — допустимая окрестность седловой точки σ_k (σ'_k); тогда трубчатая окрестность $U_k = p_r(\tilde{U}_k \setminus W^\delta(\sigma_k))$ ($U'_k = p'_r(\tilde{U}'_k \setminus W^\delta(\sigma'_k))$) однократного тора или бутылки Клейна $Q_k^\delta(f)$ ($Q_k^\delta(f')$) оснащена парой трансверсальных слоений $\mathcal{F}_k^\delta, \mathcal{F}_k^{\bar{\delta}} (\mathcal{F}_k^{\delta}, \mathcal{F}_k^{\bar{\delta}})$.

Предложение 8.1. Для любого $k \in \mathcal{K}^\delta$ существует гомеоморфизм $\varphi_{k,1} : N_r(f) \rightarrow N_r(f')$ со следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{k,1}$ осуществляет эквивалентность схем $S_r(f)$ и $S_r(f')$;
- 2) $\varphi_{k,1}$ совпадает с φ вне U_k ;
- 3) $\varphi_{k,1}$ переводит слои слоения $\mathcal{F}_k^\delta$ в некоторой окрестности $Q_k^\delta(f)$ в слои слоения $\mathcal{F}_k^{\delta}$ в некоторой окрестности $Q_k^\delta(f')$.

Доказательство. Рассмотрим седловую точку σ_k (σ'_k), $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ (для седловой точки σ_k (σ'_k), $k \in (\mathcal{K}^\delta \setminus \hat{\mathcal{K}}^\delta)$ доказательство аналогичное). Положим для определенности $\delta = u$. Обозначим через σ_{jk} (σ'_{jk}) единственную седловую точку в множестве Σ_r (Σ'_r), обладающую свойством

$$W^s(\sigma_k) \cap W^u(\sigma_{jk}) \neq \emptyset \quad (W^s(\sigma'_k) \cap W^u(\sigma'_{jk}) \neq \emptyset).$$

Тогда множество

$$Q_k^u(f) = p_r(W^u(\sigma_k) \setminus \sigma_k) \quad (Q_k^u(f') = p'_r(W^u(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k))$$

является однократным тором, вложенным в $N_r(f)$ ($N_r(f')$). Не ограничивая общности можно считать, что $\varphi(U_k) \subset U'_k$. Множество

$$Q_{m_{jk}}^u(f) = p_r(W^u(\sigma_{jk}) \setminus (\sigma_{jk} \cup W^s(\sigma_k))) \quad (Q_{m_{jk}}^u(f') = p'_r(W^u(\sigma'_{jk}) \setminus (\sigma'_{jk} \cup W^s(\sigma'_k))))$$

является либо однократным тором, либо однократной бутылкой Клейна с m_{jk} выколотыми точками, при этом $\varphi(Q_{m_{jk}}^u(f)) = Q_{m_{jk}}^u(f')$.

Выберем ориентацию на каждой компоненте связности множества $W^s(\sigma_k) \setminus \sigma_k$ ($W^s(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k$), соответствующую направлению движения к точке σ_k (σ'_k). Выберем фундаментальную область B^u (B'^u) ограничения диффеоморфизма f (f') на $W^u(\sigma_k) \setminus \sigma_k$ ($W^u(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k$), гомеоморфную замкнутому кольцу. Тогда множество B (B'), состоящее из одномерных слоев слоения $\tilde{\mathcal{F}}_k^s$ ($\tilde{\mathcal{F}}_k'^s$), пересекающих B^u (B'^u) является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f (f') на $\tilde{U}_k \setminus W^s(\sigma_k)$ ($\tilde{U}_k' \setminus W^s(\sigma'_k)$).

Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_{k,1}^u$ — одна из компонент связности $\tilde{U}_k \cap W^u(\sigma_{jk})$ такая, что $\tilde{\mathcal{F}}_{k,1}^u \cap (\tilde{\pi}_k^s)^{-1}(y) \neq \emptyset$ для любого $y \in B^u$. Так как окрестность $\tilde{U}_k$ является допустимой на множестве B , существует простая кривая $\tilde{\beta}$, соединяющая точку $\hat{x}_1 \in \tilde{\mathcal{F}}_{k,1}^u$ с точкой $f(\hat{x}_1) \in f(\tilde{\mathcal{F}}_{k,1}^u)$ и трансверсально (в топологическом смысле) пересекающая слои слоения $\tilde{\mathcal{F}}_k^u$. Пронумеруем точки пересечения $\text{int } \tilde{\beta}$ со слоями $\tilde{U}_k \cap W^u(\sigma_{jk})$: $\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{m_{jk}}$ таким образом, чтобы направление движения от точки $\hat{x}_i$ к точке $\hat{x}_{i+1}$, $i = \overline{1, m_{jk} - 1}$, совпадало с направлением движения от точки $\hat{x}_1$ к точке $f(\hat{x}_1)$. Положим $x_i = \tilde{\pi}_k^u(\hat{x}_i) \cap W^s(\sigma_k)$, $i = \overline{1, m_{jk}}$. Заметим, что точки $x_1, \dots, x_{m_{jk}}$ принадлежат различным гетероклиническим орбитам и направление движения от точки x_i к точке x_{i+1} , $i = \overline{1, m_{jk} - 1}$, по компоненте связности $W^s(\sigma_k) \setminus \sigma_k$ совпадает с выбранной на ней ориентацией.

Пусть $\tilde{\varphi} : \tilde{U}_k \rightarrow \tilde{U}_k'$ — поднятие гомеоморфизма φ такое, что $\tilde{\varphi}(B) = B'$, $\tilde{\beta}' = \tilde{\varphi}(\tilde{\beta})$, $\beta = p_r(\tilde{\beta})$, $\beta' = \varphi(\beta) = p_r'(\tilde{\beta}')$. Гомеоморфизм $\tilde{\varphi}$ индуцирует направление на кривой $\tilde{\beta}'$. Покажем, что это направление совпадает с направлением от точки $\hat{x}_1' = \tilde{\varphi}(\hat{x}_1)$ к точке $f'(\hat{x}_1') = \tilde{\varphi}(f(\hat{x}_1))$. Для этого достаточно показать, что $\alpha_r(f')([p_r'(\tilde{\beta}')]) = [1]$. Из определения гомоморфизмов $\alpha_r(f)$ и $\alpha_r(f')$ и свойства $\alpha_r(f) = \alpha_r(f') \circ \varphi_*$ следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_r(f')([p_r'(\tilde{\beta}')]) &= \alpha_r(f')([p_r'(\tilde{\varphi}(\tilde{\beta}))]) = \alpha_r(f')([\varphi(\beta)]) = \alpha_r(f')(\varphi_*([\beta])) = \\ &= \alpha_r(f)([\beta]) = \alpha_r(f)([p_r(\tilde{\beta})]) = [1]. \end{aligned}$$

Положим $x'_i = \tilde{\pi}_k'^u(\tilde{\varphi}(\hat{x}_i))$, $i = \overline{1, m_{jk}}$. Тогда точки $x'_1, \dots, x'_{m_{jk}}$ принадлежат различным гетероклиническим орбитам и направление движения от точки x'_i к точке x'_{i+1} , $i = \overline{1, m_{jk} - 1}$, по компоненте связности $W^s(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k$ совпадает с выбранной на ней ориентацией.

Выберем фундаментальную область B^s (B'^s) ограничения диффеоморфизма f (f') на $W^s(\sigma_k) \setminus \sigma_k$ ($W^s(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k$), гомеоморфную двум отрезкам и такую, что

1) для любого $x \in B^s$ ($x' \in B'^s$)

$$(\tilde{\pi}_k^u)^{-1}(x) \cap (\tilde{\pi}_k^s)^{-1}(y) \neq \emptyset \quad ((\tilde{\pi}_k'^u)^{-1}(x') \cap (\tilde{\pi}_k'^s)^{-1}(y') \neq \emptyset)$$

для любого $y \in B^u$ ($y' \in B'^u$);

2) x_1 (x'_1) и $f(x_1)$ ($f'(x'_1)$) принадлежат ∂B^s ($\partial B'^s$).

Положим $\hat{\varphi}^s : B^s \rightarrow B'^s$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм такой, что $\hat{\varphi}^s(x_i) = x'_i$, $i = \overline{1, m_{jk}}$.

Положим

$$\hat{B}^s = \bigcup_{n \geq 0} f^n(B^s) \cup \sigma_k, \quad (\hat{B}'^s = \bigcup_{n \geq 0} f'^n(B'^s) \cup \sigma'_k)$$

и продолжим гомеоморфизм $\hat{\varphi}^s$ до гомеоморфизма $\tilde{\varphi}^s : \hat{B}^s \rightarrow \hat{B}'^s$ следующим образом: для любого $x \neq \sigma_k$, $\tilde{\varphi}^s(x) = f'^n \circ \hat{\varphi}^s \circ f^{-n}(x)$, где $f^{-n}(x) \in B^s$; $\tilde{\varphi}^s(\sigma_k) = \sigma'_k$.

Пусть $\hat{B} = (\tilde{\pi}_k^u)^{-1}(\hat{B}^s) \cap B$ ($\hat{B}' = (\tilde{\pi}_k'^u)^{-1}(\hat{B}'^s) \cap B'$). Определим отображение $\hat{\varphi} : \hat{B} \rightarrow \hat{B}'$ следующим образом:

$$\hat{\varphi}(x) = \bar{x},$$

где

$$p_r'(\tilde{\pi}_k'^s(\bar{x})) = \varphi(p_r(\tilde{\pi}_k^s(x))), \quad (\tilde{\pi}_k'^u)^{-1}(\bar{x}) \cap \hat{B}'^s = \tilde{\varphi}^s((\tilde{\pi}_k^u)^{-1}(x) \cap \hat{B}^s).$$

Очевидно, что отображение $\hat{\varphi}$ является гомеоморфизмом. Определим гомеоморфизм $\varphi_{k,0}$ в некоторой окрестности $Q_k^u(f)$ следующим образом:

$$\varphi_{k,0}(x) = p'_r(\hat{\varphi}((p_r)^{-1}(x) \cap \hat{B})).$$

По построению гомеоморфизм $\varphi_{k,0}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{k,0}$ совпадает с φ на $Q_k^u(f)$;
- 2) $\varphi_{k,0}$ переводит слои слоения $\mathcal{F}_k^u$ в некоторой окрестности $Q_k^u(f)$ в слои слоения $\mathcal{F}_k^{u'}$ в некоторой окрестности $Q_k^u(f')$.

Пусть $\hat{U}_k = \mu_k(\mathbb{T} \times [-t_k, t_k])$, $t_k \in (0, 1)$, — трубчатая окрестность $Q_k^u(f)$, на которой определен гомеоморфизм $\varphi_{k,0}$. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} \psi_k &= (\mu'_k)^{-1} \circ \varphi \circ \mu_k : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1], \\ \psi_{k,0} &= (\mu'_k)^{-1} \circ \varphi_{k,0} \circ \mu_k|_{\mathbb{T} \times [-t_k, t_k]} : \mathbb{T} \times [-t_k, t_k] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1], \\ \eta_k &= (\psi_k)^{-1} \circ \psi_{k,0} : \mathbb{T} \times [-t_k, t_k] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]. \end{aligned}$$

Заметим, что отображение η_k удовлетворяет всем условиям леммы 3.14, следовательно существует гомеоморфизм $\eta_{k,1} : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$, который совпадает с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 1/2]$, с η_k в малой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$ и удовлетворяет условию $\eta_{k,1}(\mathcal{F}_{T,i}^2) = \mathcal{F}_{T,i}^2$, $i = \overline{1, m_{jk}}$. Тогда гомеоморфизм $\varphi_{k,1} = \mu'_k \circ \psi_k \circ \eta_{k,1} \circ \mu_k^{-1}$, определенный на U_k , удовлетворяет всем условиям предложения. $\square$

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^u \cup \mathcal{K}^s$, $U_{\mathcal{K}} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} U_k$. Обозначим через $\varphi_1 : N_r(f) \rightarrow N_r(f')$ гомеоморфизм, совпадающий с $\varphi_{k,1}$ на U_k для каждого $U_k \in U_{\mathcal{K}}$ и совпадающий с φ вне $U_{\mathcal{K}}$. По построению гомеоморфизм φ_1 реализует эквивалентность схем $S_r(f)$ и $S_r(f')$. Пусть $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{M}_r \rightarrow \tilde{M}'_r$ — поднятие отображения φ_1 , тогда $\tilde{\varphi}_1$ сопрягает ограничение диффеоморфизма f на $\tilde{M}_r$ с ограничением диффеоморфизма f' на $\tilde{M}'_r$ и для каждого $k \in \mathcal{K}^\delta$ переводит слои слоения $\tilde{\mathcal{F}}_k^\delta$ в некоторой окрестности $W^\delta(\sigma_k)$ на слои слоения $\tilde{\mathcal{F}}_k^{\delta'}$ в некоторой окрестности $W^\delta(\sigma'_k)$. Тогда гомеоморфизм $\tilde{\varphi}_1$ может быть продолжен на $W^\delta(\sigma_k)$ для каждого $k \in \mathcal{K}^\delta$ следующим образом: пусть $x \in W^\delta(\sigma_k)$ — единственная точка пересечения $W^\delta(\sigma_k)$ со слоем $\tilde{\mathcal{F}}_{k,x}^\delta \in \tilde{\mathcal{F}}_k^\delta$, тогда $\tilde{\varphi}_1(x)$ единственная точка пересечения $W^\delta(\sigma'_k)$ со слоем $\tilde{\varphi}_1(\tilde{\mathcal{F}}_{k,x}^\delta) \in \tilde{\mathcal{F}}_k^{\delta'}$.

8.2.2. Пусть

$$\tilde{\mathcal{M}}_r = (\tilde{M}_r) \cup \left(\bigcup_{\delta \in \{u,s\}} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}^\delta} (W^{1\bar{\delta}}(\sigma_k)) \right) \right) \setminus \left(\bigcup_{\delta \in \{u,s\}} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}^\delta} (W^{2\delta}(\sigma_k)) \right) \right).$$

Заметим, что группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует на $\tilde{\mathcal{M}}_r$ собственнo разрывно. Обозначим через $\mathcal{N}_r(f) = (\tilde{\mathcal{M}}_r)/F$ пространство орбит этого действия, через $\mathcal{P}_r : \tilde{\mathcal{M}}_r \rightarrow \mathcal{N}_r(f)$ — каноническую проекцию, которая определяет нетривиальный гомоморфизм $a_r(f) : \pi_1(\mathcal{N}_r(f)) \rightarrow \mathbb{Z}$. Снабдим штрихом все перечисленные объекты для диффеоморфизма f' .

Пусть $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ и $\sigma_{jk}(\sigma'_{jk})$ — единственная седловая точка в множестве $\Sigma_r(\Sigma'_r)$, обладающая свойством

$$W^\delta(\sigma_k) \cap W^\delta(\sigma_{jk}) \neq \emptyset \quad (W^\delta(\sigma'_k) \cap W^\delta(\sigma'_{jk}) \neq \emptyset).$$

Тогда множество

$$Q_{jk}^\delta(f) = \mathcal{P}_r(W^\delta(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk}) \quad (Q_{jk}^\delta(f') = \mathcal{P}'_r(W^\delta(\sigma'_{jk}) \setminus \sigma'_{jk}))$$

является однократным тором или однократной бутылкой Клейна в $\mathcal{N}_r(f)$ ($\mathcal{N}_r(f')$), множество

$$\gamma_k(f) = \mathcal{P}_r(W^\delta(\sigma_k) \setminus \sigma_k) \quad (\gamma_k(f') = \mathcal{P}'_r(W^\delta(\sigma'_k) \setminus \sigma'_k))$$

представляет собой пару однократных узлов или один двукратный узел в $\mathcal{N}_r(f)$ ($\mathcal{N}_r(f')$). Ограничение гомеоморфизма $\tilde{\varphi}_1$ на $\tilde{\mathcal{M}}_r$ индуцирует гомеоморфизм

$$\varphi_2 = \mathcal{P}'_r \circ \tilde{\varphi}_1 \circ (\mathcal{P}_r)^{-1} : \mathcal{N}_r(f) \rightarrow \mathcal{N}_r(f')$$

такой, что $\varphi_2(Q_{jk}^\delta(f)) = Q_{jk}^\delta(f')$ и $\varphi_2(\gamma_k(f)) = \gamma_k(f')$ для каждого $k \in \hat{K} = \hat{K}^s \cup \hat{K}^u$.

Пусть $\tilde{U}_{jk} = \tilde{\mu}_{jk}(U)$ ($\tilde{U}'_{jk} = \tilde{\mu}'_{jk}(U)$) — допустимая окрестность седловой точки σ_{jk} (σ'_{jk}), $k \in \hat{K}^\delta$; тогда трубчатая окрестность

$$U_{jk} = \mathcal{P}_r(\tilde{U}_{jk} \setminus W^\delta(\sigma_{jk})) \quad (U'_{jk} = \mathcal{P}'_r(\tilde{U}'_{jk} \setminus W^\delta(\sigma'_{jk})))$$

однократного тора или бутылки Клейна $Q_{jk}^\delta(f)$ ($Q_{jk}^\delta(f')$) оснащена парой трансверсальных слоений $\mathcal{F}_{jk}^\delta, \mathcal{F}_{jk}^{\bar{\delta}}$ ($\mathcal{F}_{jk}^{\delta'}, \mathcal{F}_{jk}^{\bar{\delta}'}$).

Предложение 8.2. Для любого $k \in \hat{K}^\delta$ существует гомеоморфизм $\varphi_{jk,1} : \mathcal{N}_r(f) \rightarrow \mathcal{N}_r(f')$ со следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{jk,1}(Q_{jk}^\delta(f)) = Q_{jk}^\delta(f')$ и $\varphi_{jk,1}(\gamma_k(f)) = \gamma_k(f')$;
- 2) $\varphi_{jk,1}$ совпадает с φ_2 вне U_{jk} и переводит слои слоения $\mathcal{F}_{jk}^\delta$ в некоторой окрестности $Q_{jk}^\delta(f)$ в слои слоения $\mathcal{F}_{jk}^{\delta'}$ в некоторой окрестности $Q_{jk}^\delta(f')$.

Доказательство. Положим для определенности $\delta = u$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi_2(U_{jk}) \subset U'_{jk}$. Выберем фундаментальную область B^u (B'^u) ограничения диффеоморфизма f (f') на $W^u(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk}$ ($W^u(\sigma'_{jk}) \setminus \sigma'_{jk}$). Тогда множество B (B'), состоящее из одномерных слоев слоения $\tilde{\mathcal{F}}_{jk}^s$ ($\tilde{\mathcal{F}}_{jk}^{s'}$), пересекающих B^u (B'^u), является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f (f') на $\tilde{U}_{jk} \setminus W^s(\sigma_{jk})$ ($\tilde{U}'_{jk} \setminus W^s(\sigma'_{jk})$). Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_{jk,1}^s, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_{jk,m_{jk}}^s$ ($\tilde{\mathcal{F}}_{jk,1}^{s'}, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_{jk,m_{jk}}^{s'}$) — слои из множества $\tilde{U}_{jk} \cap W^s(\sigma_k)$ ($\tilde{U}'_{jk} \cap W^s(\sigma'_k)$), имеющие непустое пересечение с B (B') и удовлетворяющие соотношению $\varphi_2(\mathcal{P}_r(\tilde{\mathcal{F}}_{jk,i}^s)) \subset \mathcal{P}'_r(\tilde{\mathcal{F}}_{jk,i}^{s'})$ для каждого $i = \overline{1, m_{jk}}$.

Выберем фундаментальную область B^s (B'^s) ограничения диффеоморфизма f (f') на

$$W^s(\sigma_{jk}) \setminus \sigma_{jk} \quad (W^s(\sigma'_{jk}) \setminus \sigma'_{jk})$$

такую, что для любого $x \in B^s$ ($x' \in B'^s$)

$$(\tilde{\pi}_{jk}^u)^{-1}(x) \cap (\tilde{\pi}_{jk}^s)^{-1}(y) \neq \emptyset \quad ((\tilde{\pi}_{jk}^u)^{-1}(x') \cap (\tilde{\pi}_{jk}^{s'})^{-1}(y') \neq \emptyset$$

для любого $y \in B^u$ ($y' \in B'^u$). Пусть сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\hat{\varphi}^s : B^s \rightarrow B'^s$ сопрягает ограничение диффеоморфизма f на B^s с ограничением диффеоморфизма f' на B'^s .

Положим

$$\hat{B}^s = \bigcup_{n \geq 0} f^n(B^s) \cup \sigma_{jk} \quad (\hat{B}'^s = \bigcup_{n \geq 0} f'^n(B'^s) \cup \sigma'_{jk})$$

и продолжим гомеоморфизм $\hat{\varphi}^s$ до гомеоморфизма $\tilde{\varphi}^s : \hat{B}^s \rightarrow \hat{B}'^s$ следующим образом: для любого $x \neq \sigma_{jk}$, $\tilde{\varphi}^s(x) = f'^n \circ \hat{\varphi}^s \circ f^{-n}(x)$, где $f^{-n}(x) \in B^s$; $\tilde{\varphi}^s(\sigma_{jk}) = \sigma'_{jk}$.

Пусть $\hat{B} = (\tilde{\pi}_{jk}^u)^{-1}(\hat{B}^s) \cap B$ ($\hat{B}' = (\tilde{\pi}_{jk}^u)^{-1}(\hat{B}'^s) \cap B'$); определим отображение $\hat{\varphi}_2 : \hat{B} \rightarrow \hat{B}'$ следующим образом:

$$\hat{\varphi}_2(x) = \bar{x},$$

где

$$\mathcal{P}'_r(\tilde{\pi}_{jk}^{s'}(\bar{x})) = \varphi_2(\mathcal{P}_r(\tilde{\pi}_{jk}^s(x))), \quad (\tilde{\pi}_{jk}^u)^{-1}(\bar{x}) \cap \hat{B}' = \tilde{\varphi}^s((\tilde{\pi}_{jk}^u)^{-1}(x) \cap \hat{B}).$$

Определим гомеоморфизм $\varphi_{jk,0}$ в некоторой окрестности $Q_{jk}^u(f)$ следующим образом:

$$\varphi_{jk,0}(x) = \mathcal{P}'_r(\hat{\varphi}_2((\mathcal{P}_r)^{-1}(x) \cap \hat{B})).$$

По построению гомеоморфизм $\varphi_{jk,0}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{jk,0}$ совпадает с φ_2 на $Q_{jk}^u(f)$;
- 2) $\varphi_{jk,0}$ переводит слои слоения $\mathcal{F}_{jk}^u$ ($\mathcal{F}_{jk}^{s'}$) в некоторой окрестности $Q_{jk}^u(f)$ в слои слоения $\mathcal{F}_{jk}^{u'}$ ($\mathcal{F}_{jk}^{s'}$) в некоторой окрестности $Q_{jk}^u(f')$.

Рассмотрим сначала случай, когда $Q_{jk}^u(f)$ и $Q_{jk}^u(f')$ являются однократными торами. Пусть $\hat{U}_{jk} = \mu_{jk}(\mathbb{T} \times [-t_{jk}, t_{jk}])$, $t_{jk} \in (0, 1)$, — трубчатая окрестность $Q_{jk}^u(f)$, на которой определен гомеоморфизм $\varphi_{jk,0}$. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned}\psi_{jk} &= (\mu'_{jk})^{-1} \circ \varphi_2 \circ \mu_{jk} : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1], \\ \psi_{jk,0} &= (\mu'_{jk})^{-1} \circ \varphi_{jk,0} \circ \mu_{jk}|_{\mathbb{T} \times [-t_{jk}, t_{jk}]} : \mathbb{T} \times [-t_{jk}, t_{jk}] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1], \\ \eta_{jk} &= (\psi_{jk})^{-1} \circ \psi_{jk,0} : \mathbb{T} \times [-t_{jk}, t_{jk}] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1].\end{aligned}$$

Заметим, что отображение η_{jk} удовлетворяет всем условиям леммы 3.12; следовательно, существует гомеоморфизм $\eta_{jk,1} : \mathbb{T} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$, который совпадает с тождественным отображением вне $\mathbb{T} \times [-1/2, 1/2]$, с η_{jk} в малой окрестности $\mathbb{T} \times \{0\}$ и удовлетворяет условию $\eta_{jk,1}(\tilde{\mathcal{F}}_{T,i}^1) = \tilde{\mathcal{F}}_{T,i}^1$ для каждого $i = \overline{1, m_{jk}}$. Тогда гомеоморфизм $\varphi_{jk,1} = \mu'_{jk} \circ \psi_{jk} \circ \eta_{jk,1} \circ \mu_{jk}^{-1}$, определенный на U_{jk} , удовлетворяет всем условиям предложения.

Рассмотрим случай, когда $Q_{jk}^u(f)$ и $Q_{jk}^u(f')$ являются однократными бутылками Клейна. Пусть $\hat{U}_{jk} = \mu_{jk}(C_{t_{jk}}/f_K)$, $t_{jk} \in (0, 1)$, — окрестность $Q_{jk}^u(f)$, на которой определен гомеоморфизм $\varphi_{jk,0}$. Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned}\psi_{jk} &= (\mu'_{jk})^{-1} \circ \varphi_2 \circ \mu_{jk} : C/f_K \rightarrow C/f_K, \\ \psi_{jk,0} &= (\mu'_{jk})^{-1} \circ \varphi_{jk,0} \circ \mu_{jk}|_{C_{t_{jk}}/f_K} : C_{t_{jk}}/f_K \rightarrow C/f_K, \\ \eta_{jk} &= (\psi_{jk})^{-1} \circ \psi_{jk,0} : C_{t_{jk}}/f_K \rightarrow C/f_K.\end{aligned}$$

Заметим, что отображение η_{jk} удовлетворяет всем условиям леммы 3.13; следовательно, существует гомеоморфизм $\eta_{jk,1} : C/f_K \rightarrow C/f_K$, который совпадает с тождественным отображением вне $C_{1/2}/f_K$, с η_{jk} в малой окрестности C_0/f_K и удовлетворяет условию $\eta_{jk,1}(\tilde{\mathcal{F}}_{K,i}^1) = \tilde{\mathcal{F}}_{K,i}^1$ для каждого $i = \overline{1, m_{jk}}$. Тогда гомеоморфизм $\varphi_{jk,1} = \mu'_{jk} \circ \psi_{jk} \circ \eta_{jk,1} \circ \mu_{jk}^{-1}$, определенный на U_{jk} , удовлетворяет всем условиям предложения. $\square$

Пусть $\mathcal{V} = \bigcup_{k \in \hat{\mathcal{K}}} U_{jk}$. Обозначим через $\varphi_3 : \mathcal{N}_r(f) \rightarrow \mathcal{N}_r(f')$ гомеоморфизм, совпадающий с $\varphi_{jk,1}$ на U_{jk} для каждого $U_{jk} \in \mathcal{V}$ и совпадающий с φ_2 вне $\mathcal{V}$. Пусть $\tilde{\varphi}_3 : \tilde{\mathcal{M}}_r \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}'_r$ — поднятие отображения φ_3 , совпадающее с $\tilde{\varphi}_1$ на $\partial\tilde{\mathcal{V}}$. Тогда $\tilde{\varphi}_3$ сопрягает ограничение диффеоморфизма f на $\tilde{\mathcal{M}}_r$ с ограничением диффеоморфизма f' на $\tilde{\mathcal{M}}'_r$ и для каждого $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ переводит слои слоения $\tilde{\mathcal{F}}_{jk}^\delta$ в некоторой окрестности $W^{\bar{\delta}}(\sigma_{jk})$ на слои слоения $\tilde{\mathcal{F}}_{jk}^{\delta'}$ в некоторой окрестности $W^{\bar{\delta}}(\sigma'_{jk})$. Гомеоморфизм $\tilde{\varphi}_3$ может быть продолжен на $W^{\bar{\delta}}(\sigma_{jk})$ для каждого $k \in \hat{\mathcal{K}}^\delta$ следующим образом: пусть $x \in W^{\bar{\delta}}(\sigma_{jk})$, $k \in \hat{\mathcal{K}}$ — единственная точка пересечения $W^{\bar{\delta}}(\sigma_{jk})$ со слоем $\tilde{\mathcal{F}}_{jk,x}^\delta \in \tilde{\mathcal{F}}_{jk}^\delta$, тогда $\tilde{\varphi}_3(x)$ — единственная точка пересечения $W^{\bar{\delta}}(\sigma'_{jk})$ со слоем $\tilde{\varphi}_3(\tilde{\mathcal{F}}_{jk,x}^\delta) \in \tilde{\mathcal{F}}_{jk}^{\delta'}$.

Гомеоморфизм $\tilde{\varphi}_4 : M_r \setminus \Omega(f) \rightarrow M_r \setminus \Omega(f')$, совпадающий с $\tilde{\varphi}_1$ на

$$(\tilde{M}_r) \cup \left(\bigcup_{\delta \in \{u,s\}} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{K}^\delta} (W^{1\bar{\delta}}(\sigma_k)) \right) \right) \setminus \mathcal{V}$$

и с $\tilde{\varphi}_3$ на $\mathcal{V}$ единственным образом продолжается до гомеоморфизма $h : M_r \rightarrow M_r$, сопрягающего диффеоморфизм f с диффеоморфизмом f' .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонатти Хр., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на три-многообразиях// Тр. мат. ин-та РАН. — 2002. — 236. — С. 58–69.
2. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях// Мат. заметки. — 1993. — 54, № 3. — С. 3–17.
3. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М., 1975.

4. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dyn. and Contr. Syst. — 2000. — 6, № 4. — С. 579–602.
5. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E.* Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// Topol. and Appl. — 2002. — 117. — С. 335–344.
6. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E.* Topological classification of gradientlike diffeomorphisms on 3-manifolds// Prepubl. Rech./ Univ. de Bourgogne. — 2002. — № 274.
7. *Bonatti Ch., Grines V., Pécou E.* Two-dimensional links and diffeomorphisms on 3-manifolds// Ergod. Theory and Dyn. Syst. — 2002. — 22, № 3. — С. 687–710.
8. *Langevin L.* Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse–Smale d’une surface// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1993. — 43, № 1. — С. 265–278.
9. *Palis J.* On Morse–Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — 8. — С. 385–404.
10. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — 16, № 2. — С. 167–172.
11. *Pochinka O.* On topological conjugacy of the simplest Morse–Smale diffeomorphisms with a finite number of heteroclinic orbits on S^3 // Progr. Nonlinear Sci. — 2002. — 1. — С. 338–345.
12. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — 73, № 6. — С. 747–817.
13. *Shub M., Sullivan D.* Homology theory and dynamical systems// Topology. — 1976. — 14. — С. 109–132.

E-mail: grines@vmk.unn.ru

ДИСКРИМИНАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И РАСКЛАДЫ БИФУРЦИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2003 г. Б. М. ДАРИНСКИЙ, Ю. И. САПРОНОВ

Аннотация. Описаны новые применения редуцирующих схем Каччиополи и Ляпунова—Шмидта к изучению конечнократных особых решений, дискриминантных множеств (бифуркационных диаграмм) и раскладов бифурцирующих решений параметрических семейств фредгольмовых уравнений. Использовано обобщение редуцирующей схемы Каччиополи. Рассмотрены приложения к задаче о классификации посткритических фаз кристаллических сегнетоэлектриков и к задаче о рождении бегущих волн в упругой балке на упругом основании.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	71
1. Схема Каччиополи и ее обобщение	72
2. Нелокальная схема Ляпунова—Шмидта	72
3. Вычисление главной части ключевого уравнения в случае разрушения потенциальности	73
4. Классификация посткритических стационарных фаз кристаллических сегнетоэлектриков	75
5. Многомерные сборки в случае непотенциальных уравнений	78
6. Двухмодовые бифуркации периодических волн в упругих и кристаллических средах	82
Список литературы	84

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, многие нелинейные краевые задачи математической физики допускают запись в виде абстрактного уравнения

$$f(x) = b, \quad x \in \mathcal{O} \subset E, \quad b \in F,$$

в котором f — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств E , F , $\mathcal{O}$ — открытое подмножество в E . Исследование такого уравнения можно проводить по схеме Каччиополи [5, 6, 12, 17] — через редукцию к уравнению

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in M,$$

в котором $\theta = P \cdot f|_M$, M — гладкое n -мерное (редуцирующее) подмногообразие в $\mathcal{O}$, а P — проектор на конечномерное подпространство в F . При этом предполагается, что f трансверсально $\text{Im } P$ на $\mathcal{O}$ и $M = f^{-1}(\text{Im } P)$.

Схема Каччиополи естественно переносится на случай, в котором вместо одного проектора P задано гладкое семейство (проекторов) $P(x)$, $x \in \mathcal{O}$, $\dim \text{Im } P(x) = n$, с условием регулярности множества нулей векторного поля $(I - P(x))f(x)$. Исходное уравнение сводится при этом к уравнению $\theta(\xi) = 0$, $\xi \in M$, в котором $\theta(\xi) = P(\xi) \cdot f(\xi)$ — гладкое сечение n -мерного векторного расслоения над M , порожденного пучком подпространств $\text{Im } P(x)$.

Обобщенная схема позволяет исследовать ветви бифурцирующих решений уравнений с параметрами в условиях разрушения непрерывной симметрии. На ее основе можно строить алгоритмизуемые процедуры анализа циклов, бифурцирующих из сложных фокусов динамических систем [20], анализировать рождение бегущих волн в упругих системах и т. д.

Результаты статьи докладывались в Воронежской зимней математической школе (2001 г.), на конференции, посвященной 100-летию со дня рождения И. Г. Петровского (2001 г.), и на Суздальской конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (2002 г.).

1. СХЕМА КАЧЧИОПОЛИ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

Итак, пусть E, F — банаховы пространства и $f : E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово отображение нулевого индекса.

Гладкое n -мерное с пустым краем подмногообразие $M \subset E$ называется *редуцирующим* для фредгольмова уравнения $f(x) = 0$, если на некоторой окрестности $\mathcal{O}(M)$ этого подмногообразия можно задать такой гладкий пучок $P(x)$ проекторов с образами постоянной размерности n , что выполняются следующие два условия:

- 1) M является множеством всех нулей в $\mathcal{O}(M)$ векторного поля $\nu(x) := (I - P(x))f(x)$;
- 2) для каждой точки $a \in M$ оператор

$$(I - P(a))\frac{\partial \nu}{\partial x}(a) : X \rightarrow \text{Im}(I - P(a))$$

является эпиморфизмом индекса n .

Если M и $P(x)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, то векторное поле $\tau(x) := P(x)f(x)$ на M называется *ключевым* для уравнения $f(x) = 0$.

Заметим, что поле $\tau(x)$ является сечением гладкого векторного расслоения $\mathcal{F}$ над M , порожденного гладким пучком векторных пространств $F^n(x) := \text{Im}(P(x))$. Если задать набор $e_1(x), \dots, e_n(x)$ сечений расслоения $\mathcal{F}$ на M , образующих базис $F^n(x)$ для каждого x из некоторого открытого множества $U \subset M$, то поле $\tau(x)$ на U естественно отождествляется с полем $\xi(x)$, $x \in U$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, компоненты $\xi_k(x)$ которого получены разложением τ по этому базису:

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k(x) e_k(x), \quad x \in U.$$

Векторное поле $\xi(x)$ называется координатным изображением поля $\tau(x)$ на U .

Точка $a \in \mathcal{O}(M)$ является нулем f тогда и только тогда, когда $a \in M$ и $\tau(a) = 0$. Более того, данная точка имеет одинаковые размерности вырождения (размерности ядер) и изоморфные локальные кольца особенностей [1] (для f и τ). Размерность вырождения и локальное кольцо особенности можно определить через локальное координатное представление сечения.

Для компактных редуцирующих подмногообразий имеют место теоремы о структурной устойчивости, аналогичные теоремам о структурной устойчивости квазиинвариантных подмногообразий функционалов [21].

В случае уравнений с непрерывной симметрией [26] появляются многообразия (орбиты) нулей, автоматически являющиеся редуцирующими подмногообразиями. Если действующая группа компактна, то регулярные орбиты нулей f структурно устойчивы. Это замечание позволяет применять описанную выше схему нелокальной редукции в случаях нарушения или понижения непрерывных симметрий. Как и в случае квазиинвариантных подмногообразий, нарушающие симметрию возмущения приводят к рождению редуцирующих подмногообразий (вблизи распадающихся компактных орбит нулей), диффеоморфных исходным орбитам нулей.

2. НЕЛОКАЛЬНАЯ СХЕМА ЛЯПУНОВА—ШМИДТА

В последние годы, в связи с бурным развитием новых компьютерных вычислительных технологий, появилась возможность эффективного нелокального анализа нелинейных краевых задач на основе схем нелокальных редукций.

Пусть, как и ранее, отображение банаховых пространств

$$f : E \rightarrow F \tag{1}$$

является гладким и фредгольмовым индекса нуль.

Теорема 1 (Банах, Мазур, Каччиополи). *Отображение (1) является диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

- 1) производная Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ в каждой точке $a \in E$ действует изоморфно из E на F ;
- 2) отображение (1) является собственным (прообраз компакта компактен).

Доказательства имеются, например, в [5, 27]. Самое короткое из них основано на замечании о том, что объединение условий локальной диффеоморфности и собственности приводит к тому, что f оказывается накрывающим отображением. Так как накрытие над односвязной базой всегда однократно, то это и означает диффеоморфность действия.

Пусть, далее, $E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}$, $F = F^n \dot{+} F^{\infty-n}$ — редуцирующие разложения рассматриваемых пространств в прямые суммы подпространств и $f(x) = f^{(n)}(u + v) + f^{\infty-n}(u + v)$, где $u \in E^n$, $v \in E^{\infty-n}$, $f^{(n)}(u + v) \in F^n$, $f^{\infty-n}(u + v) \in F^{\infty-n}$. С каждым $u \in E^n$ свяжем отображение

$$f_u^{\infty-n} : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n} \quad (f_u^{\infty-n}(v) := f^{\infty-n}(u + v)). \quad (2)$$

Теорема 2. *Пусть для каждого $u \in E^n$ отображение (2) является собственным и пусть при этом*

$$\frac{\partial f_u^{\infty-n}}{\partial v}(a) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

— изоморфизм для всех $u \in E^n$, $a \in E^{\infty-n}$. Тогда найдется такое гладкое отображение $\Phi : E^n \rightarrow E^{\infty-n}$, что точка a окажется решением уравнения $f(x) = 0$ лишь в том и только том случае, в котором выполняется соотношение $a = \bar{u} + \Phi(\bar{u})$, где $\bar{u}$ — решение глобального ключевого уравнения (уравнения разветвления) $\tau(u) = 0$, в котором $\tau(u) := f^{(n)}(u + \Phi(u))$. При этом локальные кольца особенностей¹ отображений f и τ в точках u и $a = u + \Phi(u)$, соответственно, изоморфны.

Доказательство. Собственность и локальная диффеоморфность отображения $f_u^{\infty-n}$ приводит к диффеоморфности действия этого отображения из $E^{\infty-n}$ на $F^{\infty-n}$ (по теореме 1). Следовательно, для каждого $u \in E^n$ найдется единственная точка $v = \Phi(u) \in E^{\infty-n}$, для которой $f^{\infty-n}(u + \Phi(u)) = 0$. Гладкость отображения $\Phi(u)$ следует из теоремы о неявной функции. Следовательно, уравнение (1), которое можно записать в виде системы двух уравнений

$$f^{\infty-n}(u + v) = 0, \quad f^{(n)}(u + v) = 0,$$

сводится к уравнению $\tau(u) = 0$.

Доказательство изоморфности локальных колец проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких отображений [1] и переносимыми на бесконечномерные банаховы многообразия в случае фредгольмовых отображений. $\square$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ КЛЮЧЕВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ РАЗРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

«Близость» краевой задачи к вариационной часто облегчает вычисление структурных констант, определяющих алгебраический тип и нормальные формы ключевых уравнений.

Пусть уравнение $f(x, \lambda) = 0$ потенциально с потенциалом $V(x, \lambda) = 0$, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{O}(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$ и $f(0, \lambda) = 0$ для всех λ . Пусть, наконец, выполнены следующие два условия:

- 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в $\mathcal{H}$ функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, из E (ведущих мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)e_j(\lambda) = \alpha_j(\lambda)e_j(\lambda),$$

где $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие спектральные функции;

¹Локальное кольцо особенности гладкого отображения f в точке $a \in E$ определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности точки $b = f(a)$ в пространстве F .

2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x, 0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E \cap N_\lambda^\perp$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ к $N_\lambda = \text{Span}\{e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x \in \mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda) = \langle x, e_j(\lambda) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j(\lambda) e_j(\lambda) + v(\lambda), \quad v(\lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n f_j(x, \lambda) e_j(\lambda) + f_*(x, \lambda), \quad f_*(x, \lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что $f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, найдется, по теореме о неявной функции, такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, что

$$f_* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad \forall (\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$ [4, 14, 19].

Часто для исследования ключевой функции W или ключевого уравнения θ (в непотенциальном случае) достаточно ограничиться несколькими членами разложения W или, соответственно, θ в ряд Тейлора. В локальных вариационных задачах это производится при помощи специальным образом подобранной ритцевской аппроксимации функционала $V(x)$, заданной выражением

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Обоснование того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру биф-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций [1] и на основе редуцирующей схемы Каччиополи [20].

Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_{\mathcal{H}} + V_\lambda^{(3)}(x) + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(3)}$ и $V_\lambda^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Пусть на $\mathcal{H}$ задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ таких, что:

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$.

Пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda. \quad (3)$$

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j . Из (3) следует, что

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|) o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_j(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = \text{const} + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$(W_0^{(4)}(\xi) — \text{форма четвертого порядка}).$ Легко проверить, что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_{\mathcal{H}} + 3\mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, B(u)) + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$, $\mathcal{V}_0^3 — \text{симметричная 3-линейная форма, отвечающая}$ $V_0^{(3)}$ ($V_0^{(3)}(u) = \mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, u)$), $B — \text{квадратичное отображение}$ $N_0 \rightarrow L_0^*$, полученное делением квадратичной части отображения $u \rightarrow \Phi(\xi, 0)$. Нетрудно заметить, что $B(u) = -A_*^{-1} \text{grad}_{\mathcal{H}} V_0^{(3)}(u)$ ($A_* = A|_{L_0}$). Для четного потенциала V имеем $V_0^{(3)} = 0$, $B(u) = 0$ и, следовательно, $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем представление

$$\text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \quad (4)$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

$(\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t) — \text{симметричная 4-линейная форма}).$ Тогда, с учетом симметрии, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \quad (5)$$

Функция (4) с кватричной частью (5), находящейся в общем положении, называется *n-мерной сборкой*¹ с симметрией параллелепипеда.

При нарушении потенциальности исследование ключевой функции $W(\xi)$ заменяется исследованием ключевого отображения

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi) + H(\xi)$$

($H(\xi) — \text{непотенциальное возмущение}).$

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОСТКРИТИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ФАЗ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

При описании фазовых переходов методами неравновесной термодинамики используются соотношения температурной зависимости тензора поляризуемости вещества. Коэффициенты разложения термодинамического потенциала также могут быть зависящими от температуры. Последнее подтверждается микроскопической теорией сегнетоэлектричества, в которой коэффициенты разложения выражаются через средние значения атомных характеристик по распределению Гиббса [25]. Учет этой зависимости позволяет получать существенные сведения о фазовых переходах и, следовательно, выявлять новые типы фазовых состояний.

Например, экспериментально наблюдаемые в некоторых кристаллах смены подгрупп симметрий (переход к более широкой группе — группе симметрий парафазы (в терминологии А. П. Леванюка и Д. Г. Санникова [24])), обозначающей наличие высокосимметричной фазы (не наблюдаемой экспериментально), позволяет объяснить некоторые закономерности смены низкосимметричных фаз.

¹Гладкая функция W на многообразии M имеет в точке $a \in M$ особенность m -мерной сборки, если в некоторой локальной системе координат с центром в точке a функция W представима в виде

$$\sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + o(\|x\|^4) + \sum_r \sigma_r y_r^2, \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-m}), \quad |\sigma_r| = 1,$$

с условием, что начало координат в $\mathbb{C}^m$ является изолированной стационарной точкой для комплексного продолжения кватричной части этой функции.

Представления о парафазе позволили создать удовлетворительное объяснение таким явлениям в кристаллах, как переключения доменов под воздействием внешних полей, наличие особенностей расположения атомов в ячейке, изменение оптических свойств [13, 24] и т. д.

Многие математические модели (в задаче исследования возможных фазовых переходов в кристаллах) содержат термодинамические потенциалы, представленные полиномами четвертой степени (кристаллы кубической, тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний (всего 19 классов)).

Попытки создания полного списка возможных фаз посредством алгебраических и аналитических расчетов вязнут, как правило, в громоздком и трудоемком вычислительном процессе. Использование же простейших топологических представлений, таких как степень отображения, топологический индекс и индекс Морса критической точки функции на гладком многообразии и т. п., существенно упрощает продвижение к этой цели.

Сегнетоэлектрические фазовые состояния кристаллов во многих случаях определяются экстремалами функционала действия

$$V = \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} \vec{p}|^2 + \Phi(\vec{p})) dV,$$

где $\vec{p} = (p_j)$ — вектор поляризации, Φ — термодинамический потенциал кристалла, рассматриваемого при каких-либо краевых условиях, связанных с конкретикой рассматриваемой задачи.

Подбор ключевых параметров в той или иной редуцирующей схеме осуществляется как с учетом «удобств в вычислениях», так и с учетом требований согласованности параметров с наблюдаемыми симметриями.

Термодинамически стабильной будет фаза, в которой V (или ключевая функция W) принимает наименьшее значение. Остальные «локально минимальные» фазы называются метастабильными. Прочие критические точки также могут представлять интерес при изучении переключений доменных структур, строения доменных границ и т. д.

Как известно из теории Морса, каждую гладкую функцию W на конечномерном многообразии M , имеющую лишь морсовские критические точки, можно изобразить клеточным комплексом, каждая клетка которого взаимно однозначно соответствует критической точке функции W . Размерность клетки равна индексу Морса соответствующей критической точки, а примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы $\dot{\xi} = -\operatorname{grad} W(\xi)$). Причем гомотопический тип изображающего комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия M . Из этого подхода вытекает, в частности, что наборы стационарных точек функций на плоскости и в трехмерном пространстве можно изображать графами (одномерными остовами изображающих клеточных комплексов). Если функция W коэрцитивна, то изображающий ее комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке). Следовательно, изображающий граф (одномерный остов изображающего комплекса) в случае коэрцитивной функции связан.

Пусть количество ключевых параметров равно трем и пусть основная (исходная) фаза в момент потери стабильности соответствует точке глобального минимума ключевой функции с особенностью трехмерной сборки [8]. Обозначив через l_0, l_1 и l_2 количество минимумов, седел индекса (Морса) 1 и седел индекса 2, получим, в силу формулы Эйлера, следующие соотношения: $l_0 - l_1 + l_2 = 2$, если существует точка максимума, и $l_0 - l_1 + l_2 = 1$ — в случае отсутствия точки максимума.

Изображающий клеточный комплекс состоит из l_0 вершин, l_1 ребер и l_2 двумерных клеток. Он полностью определяется своим одномерным остовом (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам индекса 1. При этом две вершины соединяются ребром, если существует составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов, связывающих пары «седло—минимум») кривая, соединяющая соответствующую пару точек минимумов (малым шевелением функции или метрики можно добиться того, чтобы любая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекала в точку локального минимума). Двумерные грани соответствуют седлам индекса 2. За счет изменения метрики

в областях вида $\{c_1 < W < c_2\}$, не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (т.е. сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа.

Пусть граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ через последовательность следующих трех операций:

- 1) удаление любого ребра, соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин A, B ,
- 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам A, B (за точкой стыка сохраним обозначение A) и
- 3) приклеивание к точке стыка A нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра — краевая точка $\hat{B}$).

Тогда будем говорить, что граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ прямым гомологическим преобразованием, а граф Γ получен из $\hat{\Gamma}$ обратным гомологическим преобразованием.

Если граф $\tilde{\Gamma}$ получен из графа Γ через последовательность нескольких прямых и обратных гомологических преобразований, то графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ называются гомологичными.

Очевидно, что гомологические преобразования сохраняют количество вершин и ребер графа.

Возмущение гладкого функционала называется регулярным, если возмущенная ключевая функция имеет в наблюдаемой области изменения ключевых параметров лишь морсовские критические точки.

Теорема 3. При регулярных возмущениях гладкой функции в окрестности особой точки типа двумерной сборки появляются те и только те *bi*f-расклады критических точек, которые приведены в следующем списке:

$$\{2, 1, 0\}, \quad \{3, 2, 0\}, \quad \{4, 3, 0\}, \quad \{5, 4, 0\}, \quad \{1, 1, 1\}, \quad \{2, 2, 1\}, \quad \{3, 3, 1\}, \quad \{4, 4, 1\}.$$

Этим раскладам соответствуют изображающие графы, собранные в классы гомологичных, приведенные на рис. 1.

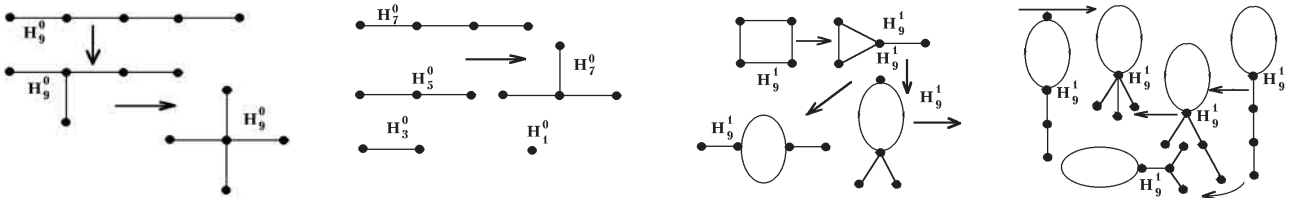


Рис. 1

В списке раскладов заметно влияние примыкающей одномерной *min*-особенности A_7 [1], которую можно получить в нуле с парой ненулевых морсовских стационарных точек на оси $0\xi_2$ или без неё, рассмотрим следующую деформацию двумерной сборки:

$$(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)^2 + \xi_2^4 + a(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)\xi_2^2 = \xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_1^2\xi_2 + a\varepsilon\xi_2^3 + \varepsilon^2\xi_2^2. \quad (6)$$

Наличие или отсутствие пары дополнительных стационарных точек зависит от выбора значения параметра a . При одних значениях получается пара «седло-минимум», а при других — «седло-максимум». Посредством деформации (6) легко установить существование всех указанных в теореме раскладов. Отсутствие прочих раскладов вытекает из того, что сумма $p + q + r$ нечетна и ограничена числом 9, а также из того, что выполняется соотношение $p - q + r = 1$. Эти соотношения вытекают из 9-кратности особенности двумерной сборки и равенства единице топологического индекса нуля градиента функции $x^4 + y^4 + ax^2y^2$ при $a > -2$.

Перечисленные расклады хорошо иллюстрируются сепаратрисными линиями уровня при условии, что управляющие параметры принадлежат минимальному страту множества Максвелла [1] (все седла на одном уровне); см. рис. 2.

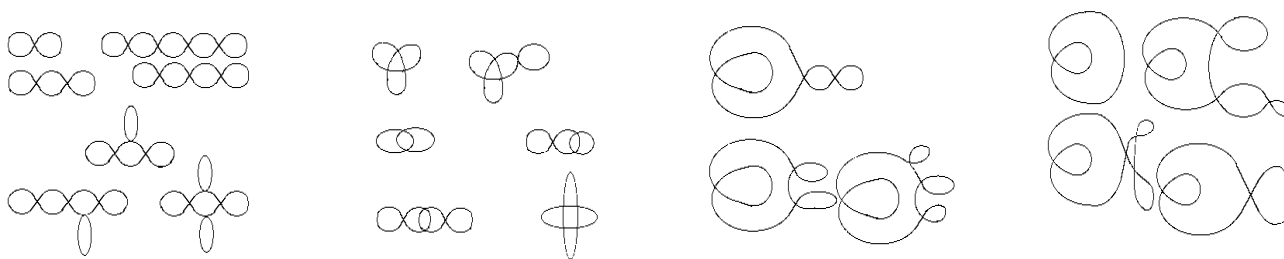


Рис. 2

Раскладам бифурцирующих критических точек, полученным при возмущениях 3-мерной сборки, соответствует несколько сотен изображающих комплексов. Если ограничиться рассмотрениемборок и их возмущений с симметрией параллелепипеда (четных по каждой переменной), то получится 47 комплексов [7]. Полного списка изображающих комплексов для трехмерныхборок в настоящее время нет. Однако созданные в последнее время новые геометрические подходы [9–11, 21] вполне обнадеживают и создают впечатление реальности создания эффективных перечислительных алгоритмов.

При описании bif-раскладов оказывается полезным рассмотрение отдельных симметричных случаев (четности или нечетности по отдельным переменным и т. п.) и использование повторных редукций к функциям на подмногообразиях. Большинство из ранее перечисленных раскладов получено ответвлением от критических орбит в результате разрушения непрерывных симметрий.

В теории кристаллов часто используются термодинамические потенциалы из кристаллографических классов, имеющих оси симметрии высоких (не ниже третьего) порядков. Потенциал такого кристалла может быть представлен в виде суммы полинома, инвариантного относительно подгруппы в группе вращений вокруг оси симметрии (высокого порядка), и разрушающего симметрию слагаемого.

Деформации непрерывно симметричных трехмерных кватертичных полиномов дают чрезвычайно обширный набор изображающих клеточных комплексов. Например, деформация

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + \varepsilon(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2)$$

дает максимальные bif-расклады с графами, изображенными на рис. 3, а деформация

$$(\xi_1^2 \pm \xi_2^2)^2 + \xi_3^4 + \lambda_1(\xi_1^2 \pm \xi_2^2) + \delta_1\xi_1^2 + \delta_2\xi_2^2 + \delta_3\xi_3^3 + \lambda_2(\xi_1^2 \pm \xi_2^2)\xi_3^2 + \varepsilon_1\xi_1^2\xi_2^2 + \varepsilon_2\xi_1^2\xi_3^2 + \varepsilon_3\xi_2^2\xi_3^2$$

добавляет пару комплексов (см. рис. 4), отличающуюся от предыдущей лишь расположением вершин (точек минимума) по отношению к координатным осям (что важно для определения тех мод бифуркаций, которые формируют изучаемую фазу), а также тройку максимальных графов, приведенных на рис. 5.

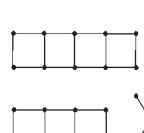
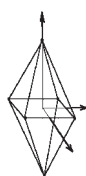
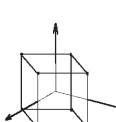
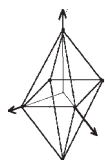
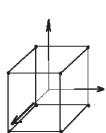


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

5. МНОГОМЕРНЫЕ СБОРКИ В СЛУЧАЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Все особенности, изученные в конечномерном случае, быстро находят применение в анализе нелинейных краевых задач. Следует отметить, что наблюдается и обратное воздействие. Например, задачи теории фазовых переходов в кристаллах вызвали интерес к изучению имеющих высокую модальность особенностей многомерныхборок [8, 9].

Нормальные формы полиномиальных кубических векторных полей изучаются в теории динамических систем в связи с изучением бифуркаций периодических и условно периодических траекторий из сложных фокусов (см. [15, 16] и литературу в этих источниках). Изучение нормальных форм кубических отображений в контексте более широких проблем алгебраической геометрии и теории особенностей дифференцируемых отображений частично проведено в работах [3, 28].

Пусть задано ключевое отображение $\theta(\xi, \lambda)$, являющееся версальной деформацией роста отображения $\theta(\xi) = \theta(\xi, 0)$. Пусть при этом θ действует из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Если локальная конечномерная редукция проводится в окрестности особой точки типа n -мерной сборки, то ключевое отображение можно считать полуоднородным кубическим (каждая компонента — полином с кубической главной частью от ключевых переменных; при этом предполагается, что кубическая часть находится в общем положении).

5.1. Двумерные сборки. В теории динамических систем часто используются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями

$$\begin{aligned} G(\xi) &= (G_1(\xi), G_2(\xi))^T, & \xi &= (\xi_1, \xi_2)^T, \\ G_1(\xi) &= \xi_1(\xi_1^2 \pm a\xi_2^2), & G_2(\xi) &= \xi_2(a\xi_1^2 + \xi_2^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Если в первой компоненте стоит знак плюс (перед константой a), то, как правило, требуется выполнение дополнительного условия $a^2 \neq 1$ [15]. Рассмотрим подробнее случай положительного знака. Известно [15], что к данной форме сводятся (линейным преобразованием) многие регулярные кубические отображения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Несложные вычисления показывают, что число Тьюриной особенности в нуле данного отображения равно 11 (при $a \neq 0, \pm 1, \pm 3$) или 12 (при $a = 0, \pm 3$). При $a = \pm 1$ коразмерность бесконечна.

Полного анализа бифуркационных эффектов (включая информацию о геометрическом строении дискриминантного множества), вызванных деформациями такой особенности, до сих пор нет. В случае деформаций, эквивариантных относительно группы симметрии прямоугольника (относительно инволюций смен знаков в каждой из координат), подробные сведения приведены в [15].

Заметим, что при $a = 0$ и $a = 3$ к двумерной сборке примыкает 9-кратная одномерная особенность (особенность A_9). Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть возмущенное отображение $\tilde{G}(\xi, \varepsilon) = G(\xi) + H(\xi, \varepsilon)$, $H(\xi, \varepsilon) = (0, -\varepsilon\xi_2)^T$. Так как миниверсальная деформация двумерной сборки остается версальной и для примыкающей особенности, то дискриминантное множество особенности A_9 диффеоморфно вкладывается в дискриминантное множество двумерной сборки (при $a = 0, 3$).

Если ограничиться рассмотрением лишь нечетных отображений, то рассмотренное a -параметрическое семейство двумерных сборок в целом будет иметь в классе нечетных отображений коразмерность 4 ($\forall a \neq 0, \pm 3$). Параметрами миниверсальной деформации являются, например, коэффициенты перед мономами первой степени.

Дискриминантное множество деформации

$$t^9 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^3 + \lambda_3 t^5 + \lambda_4 t^7 \quad (8)$$

диффеоморфно вкладывается в дискриминантное множество миниверсальной нечетной деформации отображения G , что позволяет, до некоторой степени, создать представление о геометрии дискриминантного множества миниверсальной нечетной деформации рассматриваемого кубического отображения при $a = 0$.

В случае $a = 3$ аналогичные утверждения можно получить посредством линейного преобразования: кубические отображения, отвечающие значениям $a = 0$ и $a = 3$, линейно эквивалентны. Более того, каждое отображение

$$\xi \mapsto (\xi_1(\xi_1^2 + a\xi_2^2), \xi_2(a\xi_1^2 + \xi_2^2))^T$$

линейно эквивалентно отображению

$$\xi \mapsto (\xi_1(\xi_1^2 + b\xi_2^2), \xi_2(b\xi_1^2 + \xi_2^2))^T,$$

где a и b связаны соотношением $(a+1)(b+1) = 4$. Это утверждение проверяется посредством перехода к системе координат, полученной из стандартной поворотом на угол $\pi/4$. Таким образом,

все основные типы рассматриваемых кубических отображений плоскости можно получить при $a \in [-3, -1) \cup (-1, 1)$.

Заметим, что топологический индекс нуля рассматриваемого кубического отображения равен 1 при $a \in (-1, 1)$ и -3 при $a \in [-3, -1)$. Это вытекает из того, что в первом случае отображение гомотопно единичному (с сохранением единственности нуля), а во втором — отображению

$$\xi \mapsto (\xi_1(\xi_1^2 - 3\xi_2^2), \xi_2(-3\xi_1^2 + \xi_2^2))^\top,$$

линейно эквивалентному отображению $z \mapsto (\bar{z})^3$ (как отображению комплексной плоскости).

Дополнение $\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$ (в базе миниверсальной нечетной деформации) при $a \in (-1, 1)$ допускает представление в виде объединения пяти непустых открытых непересекающихся подмножеств:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5 \cup \Omega_7 \cup \Omega_9.$$

Для параметра из зоны Ω_{2k+1} , $k = 0, 1, 2, 3, 4$, имеется ровно $2k+1$ ответвленных из нуля решений, которые разбиваются на два подмножества, состоящих из k и $k+1$ точек, в первом из которых топологический индекс всех точек равен 1, а во втором — (-1) .

При $a \in (-3, -1)$ имеем

$$\Omega = \Omega_3 \cup \Omega_5 \cup \Omega_7$$

(три зоны). Для параметра, принадлежащего зоне Ω_{2k+1} , $k = 1, 2, 3$, имеется ровно $2k+1$ ответвленных из нуля решений, которые разбиваются на два подмножества, состоящие из k и $k+3$ точек, в первом из которых топологический индекс всех точек равен 1, а во втором — (-1) .

Структуру дискриминантного множества в классе нечетных деформаций сборки можно легко изучить, записав версальную деформацию в виде

$$G(\xi) + \lambda_1 \mathcal{E}_1 \xi + \lambda_2 \mathcal{E}_2 \xi + \lambda_3 \mathcal{E}_3 \xi + \lambda_4 \mathcal{E}_4 \xi, \quad (9)$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

перейдя затем к полярным координатам (в образе и прообразе). В результате этих действий получится явная параметризация поверхности Σ , дающая возможность компьютерной визуализации ее сечений.

Очевидно, что часть Σ_0 дискриминантного множества Σ деформации (9), «отвечающая» за вырождение нулевого решения, является конической поверхностью второго порядка, заданной уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_4^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = 0$.

Радиальная и тангенциальная составляющие векторного поля (9) (в полярной системе координат $(r, \varphi)^\top$) имеют следующий вид:

$$\theta_r = r^{-1}(\sigma_1^2 + 2\gamma\sigma_3^2 + \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3),$$

$$\theta_\varphi = r^{-1}(2\gamma\sigma_2\sigma_3 - \lambda_2\sigma_3 + \lambda_3\sigma_2 + \lambda_4\sigma_1),$$

где

$$\gamma = \frac{a-1}{4}, \quad \sigma_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \sigma_2 = \xi_1^2 - \xi_2^2, \quad \sigma_3 = 2\xi_1\xi_2.$$

Учитывая, что $\sigma_1 = r^2$, $\sigma_2 = r^2 \cos(2\varphi)$, $\sigma_3 = r^2 \sin(2\varphi)$, получим следующее утверждение: *часть Σ_* дискриминантного множества Σ деформации (9), «отвечающая» за вырождения ненулевых решений, совпадает с дискриминантным множеством системы уравнений*

$$\begin{aligned} r^2(1 + \gamma - \gamma \cos(2\psi)) + \lambda_1 + \lambda_2 \cos \psi + \lambda_3 \sin \psi &= 0, \\ r^2\gamma \sin(2\psi) - \lambda_2 \sin \psi + \lambda_3 \cos \psi + \lambda_4 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\psi = 2\varphi$.

Так как множество нулей якобиана от левой части (10) задается (после замены $\psi \mapsto -\psi$) уравнением

$$2r^2\gamma(\gamma - (1 + \gamma) \cos(2\psi)) + \lambda_2 \cos \psi - (1 + 2\gamma)\lambda_3 \sin \psi = 0,$$

то для Σ_* получается следующая параметризация:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= t_1, \\ \lambda_3 &= t_2, \\ \nu &= \exp(i\psi)t - \gamma r^2 \exp(i2\psi) + r^2(1 + \gamma),\end{aligned}$$

где

$$\nu = -(\lambda_1 + \lambda_4 i), \quad t = t_1 + t_2 i, \quad r^2 = \frac{(1 + 2\gamma)t_2 \sin \psi - t_1 \cos \psi}{2\gamma(\gamma - (1 + \gamma) \cos(2\psi))}.$$

Совокупность разнообразных плоских сечений множества Σ содержит, например, кривые, изображенные на рис. 6 (полученные с учетом ограничения $r^2 > 0$).



Рис. 6

5.2. Случай симметрии параллелепипеда. Задача бифуркационного анализа решений вблизи особенности n -мерной сборки существенно упрощается в случае деформаций, эквивариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2^n$ (симметрий параллелепипеда). Данная эквивариантность означает коммутуруемость отображения с инволюциями смен знаков в координатах. Ее наличие приводит к формированию следующей алгебраической структуры деформации кубического отображения:

$$\begin{aligned}G(\xi, \varepsilon) &= (G_1(\xi, \varepsilon), \dots, G_n(\xi, \varepsilon))^T, \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^m, \\ G_j(\xi, \varepsilon) &= \xi_j \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}(\varepsilon) \xi_k^2 + b_j(\varepsilon) \right), \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{11}$$

На матрицу $A(0)$ при этом накладывается условие невырожденности всех угловых миноров [15]:

$$\det A[K] \neq 0, \quad \forall K \subset \{1, \dots, n\}, \quad A[K] = (a_{ij}), \quad i, j \in K.\tag{12}$$

Предполагается также выполнение условия трансверсальности:

$$\text{rk} \left(\frac{\partial b_i}{\partial \varepsilon_i}(0) \right) = n.\tag{13}$$

Так как решения уравнений разветвления являются стационарными точками векторных полей, задаваемых левыми частями уравнений, то словосочетание «стационарная точка» здесь используется как синоним слова «решение». Стационарная точка ξ называется r -модовой, если она имеет ровно r ненулевых координат [15].

Основные условия, которым подчиняется поле (11) (см. соотношения (12)–(13)), обобщают известное условие невырожденности первой ляпуновской величины в бифуркационной модели рождения цикла Пуанкаре—Андропова—Хопфа. Эти же соотношения служат условием общего положения (по отношению к рассматриваемому типу особенности).

Без ограничения общности можно положить $n = m$ и $b_j(\varepsilon) = \varepsilon_j$.

В трехмерном случае заменой $\xi_j = \tilde{\xi}_j / \sqrt{|a_{jj}(\varepsilon)|}$ поле (11) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1(\sigma_1 \tilde{\xi}_1^2 + \tilde{a}_{12} \tilde{\xi}_2^2 + \tilde{a}_{13} \tilde{\xi}_3^2 + \varepsilon_1) \\ \tilde{\xi}_2(\tilde{a}_{21} \tilde{\xi}_1^2 + \sigma_2 \tilde{\xi}_2^2 + \tilde{a}_{23} \tilde{\xi}_3^2 + \varepsilon_2) \\ \tilde{\xi}_3(\tilde{a}_{31} \tilde{\xi}_1^2 + \tilde{a}_{32} \tilde{\xi}_2^2 + \sigma_3 \tilde{\xi}_3^2 + \varepsilon_3) \end{pmatrix}.\tag{14}$$

Здесь

$$\tilde{a}_{jk} = \tilde{a}_{jk}(\varepsilon) = \frac{a_{jk}(\varepsilon)}{|a_{kk}(\varepsilon)|}, \quad \sigma_j = \text{sgn}(a_{jj})$$

$(a_{jj}(\varepsilon) \neq 0$ в силу условия (12)).

Ряд теорем о бифуркациях одномодовых и двухмодовых стационарных точек данного поля получен Г. Ю. Любасовой [15, 16]. В этих работах описаны также некоторые из ситуаций, в которых имеет место *сосуществование* разнотипных стационарных точек и получены запреты на существование и сосуществование отдельных типов.

В настоящее время авторы не располагают сведениями об опубликованных работах, в которых при $n = 3$ описаны все допустимые расклады (с учетом носителей) бифурцирующих морсовских критических точек (даже в рассматриваемом здесь симметричном случае).

В аналогичной задаче для вариационных уравнений полную классификацию раскладов бифурцирующих регулярных стационарных точек в случае $\mathbb{Z}_2^3$ -симметричной трехмерной сборки недавно получил А. В. Гнездилов [7].

6. ДВУХМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГИХ И КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю. А. Митропольский и Б. И. Мосеев [18], Дж. Томпсон и Г. Стюарт [30], Б. С. Бардин и С. Д. Фурта [2] и др. Динамические эффекты в сегнетоэлектрических фазах кристаллов изучали И. Ишибаси [29], Ж.-К. Толедано и П. Толедано [25], Б. М. Даринский и А. С. Сидоркин [23] и др.

В обоих случаях используется модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_0 w + \gamma w^3 = 0.$$

Прикладной и теоретический интерес представляет решение «бегущая волна» $w(x, t) = p(kx + \omega t)$, поиск которого сводится к построению периодического решения уравнения

$$\tilde{\kappa}_2 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \tilde{\kappa}_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \tilde{\kappa}_0 p + \gamma p^3 = 0, \quad \tilde{\kappa}_1 = k^2 \kappa_1 + \omega^2,$$

определяющего экстремали функционала (энергии)

$$V(p, \kappa) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\kappa_2}{2} \left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \frac{\tilde{\kappa}_1}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa_0}{2} p^2 + \frac{\beta}{4} p^4 \right) dx.$$

До недавнего времени изучались в основном лишь одномодовые волны, представимые в виде

$$w(x, t) = r \sin(kx - \omega t + \varphi) + o(r),$$

где r, k, ω, φ — волновые параметры (амплитуда, волновое число, частота, фазовый сдвиг), зависящие от $\delta := \kappa - \bar{\kappa}$ ($\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2)^\top$, $\bar{\kappa}$ — критическое значение вектора κ).

Однако данное уравнение допускает четырехмерные вырождения, порождающие двухмодовые бифуркации периодических волн с новыми геометрическими и физическими эффектами. Такие волны допускают представление

$$w(x, t) = r_1 \sin(py + \varphi_1) + r_2 \sin(qy + \varphi_2) + o(r_1, r_2), \quad y = kx - \omega t, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad \text{НОД}(p, q) = 1,$$

что дает значительное разнообразие профилей бифурцирующих волн.

Выражения волновых параметров через посткритическую невязку управляющих параметров δ эффективно находится на основе комбинирования схем Ляпунова—Шмидта и Каччиополи.

Приведем функционал энергии к виду

$$V(p, \tilde{\kappa}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{2} \left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \frac{\tilde{\kappa}_1}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \frac{\tilde{\kappa}_0}{2} p^2 + \frac{p^4}{4} \right) dx \quad (15)$$

масштабирующим преобразованием $x \mapsto \nu x$, $\nu = \frac{T}{2\pi}$. Здесь $\tilde{\kappa}_1 = \frac{\tilde{\kappa}_1}{\nu^2}$, $\tilde{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{\nu^4}$.

Функционал (15) рассматривается на пространстве E функций класса C^4 на вещественной оси, удовлетворяющих условию периодичности $p(x) = p(x + 2\pi)$.

Поиск нетривиальных решений линеаризованного уравнения приводит к характеристическому уравнению

$$\kappa_2 \lambda^4 - \kappa_1 \lambda^2 + \kappa_0 = 0,$$

из которого получаем, с учетом условия периодичности, набор уравнений

$$\kappa_1 = \frac{\alpha}{n^2} + \kappa_2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

задающих характеристические плоскости $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ (l_0 совпадает с координатной плоскостью $\kappa = 0$). Огибающая поверхность $\mathcal{L}$ семейства $\{l_n\}$ ограничивает область тех значений κ , при которых функционал (15) имеет единственную критическую точку (в нуле), являющуюся к тому же точкой глобального минимума V . При пересечении точкой κ поверхности $\mathcal{L}$ рождается нетривиальный глобальный минимум.

Поверхность $\mathcal{L}$ является кусочно-линейной, гранями которой служат бесконечные полосы в $\mathcal{L}_n$, заметаемые отрезками, соединяющими точки $d_n(s)$ и $d_{n+1}(s)$, где $d_n(s) = (\kappa_{1n}, s, \alpha_n)$, $\alpha_1 n = n^2(n+1)^2$, $\kappa_1 n = n^2 s + (n+1)^2$, $0 < s < \infty$ (при этом полагаем $d_0(s) = (0, s, 1)$). На линии $d_n(s)$ пересекается пара плоскостей l_n, l_{n+1} ($n \geq 1$). На этой же линии происходит обмен ведущих мод бифуркаций. Пересечение в плоскости управляющих параметров грани $\mathcal{L}_n$ по внутренней точке приводит к одномерной бифуркации с парой мод $s_n = \sin nx$, $c_n = \cos nx$. Пересечение же $\mathcal{L}$ по линии излома d_n приводит к четырехмерной бифуркации с модами $s_n, c_n, s_{n+1}, c_{n+1}$.

Ниже рассмотрен случай пересечения линии d_1 (при $n \geq 2$ результаты аналогичны).

Теорема 4. Ключевая функция $W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_j \rangle = \xi_j} V(p, \bar{\kappa} + \delta)$, $\bar{\kappa} \in d_1$, $e_1 = c_1$, $e_2 = s_1$, $e_3 = c_2$,

$e_4 = s_2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^\top$, $\delta = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)^\top$ допускает представление в виде

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2) + C I_3^2 + o(I_1^2, I_2^2, I_3^2),$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2, \quad I_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_4, \\ \alpha_1 &= \delta_1 - \delta_0 - \delta_2, \quad \alpha_2 = 4\delta_1 - \delta_0 - 16\delta_2, \\ A_1 &= A_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C > 0. \end{aligned}$$

Доказательство основано на использовании инвариантности функционала (15) относительно канонического действия окружности в пространстве периодических функций и на асимптотическом представлении

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(I_1^2, I_2^2, I_3^2),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4, \delta)$ — ритцевская аппроксимация V по модам e_1, e_2, e_3, e_4 , справедливом для четных функционалов [19, 22].

После сокращения на множитель $3/2$ получим функцию с нормализованной главной частью

$$-\frac{1}{2}(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) + \frac{1}{4}(I_1^2 + I_2^2 + 4I_1 I_2) + C I_3^2.$$

Существование бифурцирующих критических орбит ключевой функции и их первые асимптотики полностью определяются главной частью.

Условие стационарности орбит по переменной фазового сдвига $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ приводит к следующим ее критическим значениям: $\psi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Условия стационарности по амплитудам r_1, r_2 ($r_1 = \sqrt{I_1}$, $r_2 = \sqrt{I_2}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r_1} &= -\beta_1 r_1 + r_1^3 + 2r_1 r_2^2 + o(|r|^4) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} &= -\beta_2 r_2 + 2r_1^2 r_2 + r_2^3 + o(|r|^4) = 0 \end{aligned}$$

$(r = (r_1, r_2)^T)$ приводят к следующим раскладам критических орбит:

- 1) нулевая орбита: $r_1 = r_2 = 0$,
- 2) одномодовые орбиты $r_1 = \pm\sqrt{\beta_1} + o(\beta)$ ($\beta_1 > 0$), $r_2 = 0$ и $r_1 = 0$, $r_2 = \pm\sqrt{\beta_2} + o(\beta)$ ($\beta_2 > 0$),
- 3) двухмодовые орбиты $r_1 = \sqrt{\frac{2\beta_2 - \beta_1}{3}} + o(\beta)$, $r_2 = \sqrt{\frac{2\beta_1 - \beta_2}{3}} + o(\beta)$, ($2\beta_2 - \beta_1 > 0$, $2\beta_1 - \beta_2 > 0$).

Бифуркационная диаграмма (каустика) Σ ключевой функции разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон, каждой из которых соответствует свой расклад бифурцирующих критических орбит.

Метаморфозы линий уровней функции

$$-\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 4r_1^2 r_2^2)$$

представлены клеточными диаграммами на рис 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
2. Бардин Б. С., Фурта С. Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании// В кн.: Актуальные проблемы классической и небесной механики. — М.: Эльф, 1998. — С. 13–22.
3. Бирбраир Л. Б. Замечания о строении пространства регулярных алгебраических однородных отображений// В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — Харьков: Вища школа, 1988. — 51. — С. 67–72.
4. Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. — М.: Магистр, 1998. — 658 с.
5. Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера// Успехи мат. наук. — 1977. — 32, № 4. — С. 3–54.
6. Борисович Ю. Г., Сапронов Ю. И. К теории нелинейных фредгольмовых отображений// Тр. VII летней мат. школы. — Изд. АН УССР, 1971. — С. 128–163.
7. Гнездилов А. В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией// Функциональный анализ и его прил. — 2000. — 34, № 1. — С. 83–86.
8. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки// Изв. вузов. Сер. мат. — 1997. — 2. — С. 35–46.
9. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 41–57.
10. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка// Понтрягинские чтения—XI. Сб. трудов. Ч. 1. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 57–64.
11. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Шалимов В. Л. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах// Кристаллография. — 1999. — 44, № 4. — С. 1–5.
12. Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. — Воронеж: ВГУ, 2002. — 185 с.
13. Изюмов Ю. А., Сыромятников В. И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. — М.: Наука, 1984. — 247 с.
14. Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления// Докл. АН СССР. — 1978. — 240, № 3. — С. 530–533.
15. Любасова Г. Ю. Бифуркации инвариантных торов из трехкратной особой точки без сильных резонансов// В кн.: Глобальный и стохастический анализ. — Воронеж: ВГУ, 1995. — С. 57–68.
16. Любасова Г. Ю. О бифуркации инвариантных торов из сложного фокуса при двукратном и трехкратном вырождении без сильных резонансов// Воронеж: ВГУ, 1988. — 52 с. — Деп. в ВИНТИ 19.04.88, № 2962–В88.
17. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
18. Мітропольський Ю. О., Мосеєнков Б. І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). — Видавництво Київського університету, 1961. — 123 с.

19. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 101–132.
20. Сапронов Ю. И., Смольянов В. А. Обобщенная редукция Каччиополи и бифуркации решений уравнений при разрушениях непрерывных симметрий// В сб.: Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж: ВГУ. 2001. — С. 125–139.
21. Сапронова Т. Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 107–124.
22. Сапронов Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций// Мат. сб. — 1989. — 180, № 10. — С. 1299–1310.
23. Сидоркин А. С. Доменная структура в сегнетоэлектриках и родственных материалах. — М.: Физматлит, 2000. — 240 с.
24. Струков Б. А., Леванюк А. П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. — М.: Физматлит, 1995. — 301 с.
25. Толедано Ж.-К., Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов. — М.: Мир, 1994. — 461 с.
26. Треногин В. А., Сидоров Н. А., Логинов Б. В. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия// Докл. АН СССР. — 1989. — 309, № 2. — С. 286–289.
27. Banach S., Mazur S. Über mehrdeutige stetige Abbildungen// Stud. Math. — 1934. — 5. — С. 174–178.
28. Dimka A., Gibson C. G. On contact simple germs of the plane// L. 1980. 54 с.
29. Ishibashi Y. J. Phenomenological theory of domain walls// Ferroelectrics. — 1989. — 98. — С. 193–205.
30. Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos. — Chichester–Singapore: Wiley & Sons, 1986.

E-mail: Yuri@spr.vsu.ru

СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕДУКЦИЙ В ГЛАДКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С СИММЕТРИЕЙ

© 2003 г. С. Л. ЦАРЕВ

Аннотация. Доказывается симметричный вариант теоремы о сравнении и устанавливается глобальная эквивалентность ключевых функций Ляпунова—Шмидта и Морса—Ботта для потенциала натуральной механической системы с симметрией.

Общеизвестным примером схемы *конечномерной редукции* является локальный метод Ляпунова—Шмидта, который служит одним из основных инструментов теории бифуркаций [9]. Прикладные задачи, изучавшиеся в 1980-е годы, потребовали разработки глобальных редуцирующих схем [1, 6, 10]. В частности, если потенциальная физическая система подчиняется правилу Максвелла смены состояний, то необходимо рассматривать ее потенциал на области, содержащей несколько критических точек (см., например, [3]). Вариационная версия метода конечномерных редукций, опирающаяся на теорию нелинейных фредгольмовых отображений, изложена Ю. И. Сапроновым [7]. И в локальном, и в глобальном случаях в одной задаче могут применяться различные схемы редукции. В статье [8] доказана теорема о *глобальном сравнении* конечномерных редукций: две ключевые функции гладкого функционала, построенные в гомотопных (непрерывно деформируемых одна в другую) редуцирующих системах, глобально правозэквивалентны. Если исходный функционал обладает некоторой симметрией, то естественно стремление получать ключевые функции, наследующие эту симметрию. Эквивалентность ключевых функций также желательно устанавливать с учетом симметрии. В настоящей статье доказывается симметричный вариант теоремы о сравнении и как следствие устанавливается глобальная эквивалентность ключевых функций Ляпунова—Шмидта и Морса—Ботта для потенциала натуральной механической системы с симметрией.

Сформулируем основные определения.

Пусть гладкий (здесь и далее это слово означает класс C^∞) функционал V определен на банаховом пространстве E и гладкое фредгольмово отображение индекса нуль [2] $f : E \rightarrow F$ (F — банахово пространство) является *градиентом* V относительно скалярного произведения гильбертова пространства H :

$$f(x) = \text{grad } V(x) \quad \Leftrightarrow \quad V'(x)h = \langle f(x), h \rangle_H \quad \forall x, h \in E.$$

Предполагается, что имеют место непрерывные вложения $E \subset F \subset H$, причем E плотно в H . *Конечномерной редукцией* (глобальной) назовем собственную гладкую субмерсию $p : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ такую, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^m$ функционал V имеет в слое $p^{-1}(\xi)$ единственную, причем невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$. Отображение φ называется *маргинальным*; из теоремы о неявной функции следует его гладкость. Функция

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

называется *ключевой*. По построению, *маргинальное отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками функционала V и его ключевой функции W , сохраняющее невырожденность* [7].

Предположим, что $V(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ (функционал V *коэрцитивен*). В этом случае критические точки в слоях $p^{-1}(\xi)$ necessarily являются точками минимума, и ключевую функцию можно определить равенством

$$W(\xi) = \inf_{x \in p^{-1}(\xi)} V(x)$$

(сама редукция называется при этом условии *эллиптической*).

Пусть конечномерная компактная группа Ли G ортогонально действует на H (будем обозначать это действие буквой T), причем $T(E) \subset E$, $T(F) \subset F$. Пусть функционал V инвариантен относительно этого действия:

$$V(T_g x) = V(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall g \in G.$$

Назовем конечномерную редукцию *эквивариантной*, если эквивариантно отображение $\tilde{p} = \varphi p$, т.е. $\tilde{p} T_g = T_g \tilde{p}$ для всех $g \in G$. В этом случае m -мерное многообразие $N := \tilde{p}(E) = \varphi(\mathbb{R}^m) \subset E$ устойчиво относительно действия группы G , поэтому на пространстве ключевых переменных $\mathbb{R}^m$ индуцируется действие, относительно которого ключевая функция инвариантна.

Теорема. Пусть для функционала V задано гладкое семейство эквивариантных конечномерных редукций p_t , $t \in [0, 1]$, определяющих ключевые функции $W_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\forall s, t \in [0, 1]$ существует эквивариантный¹ диффеоморфизм $\psi_s^t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ такой, что $W_s(\xi) = W_t(\psi_s^t(\xi))$.

Доказательство. В [8] доказано существование гладкого векторного поля $X_t(\xi)$, $t \in [0, 1]$ на $\mathbb{R}^m$, для которого

$$\frac{\partial W_t}{\partial t}(\xi) + \frac{\partial W_t}{\partial \xi}(\xi) X_t(\xi) = 0, \quad (1)$$

поэтому интегрирование $X_t(\xi)$ порождает диффеоморфизм, устанавливающий эквивалентность между ключевыми функциями: если ψ_s^t – поток векторного поля $X_t(\xi)$, то $W_t(\psi_s^t(\xi)) \equiv W_s(\xi)$. Обозначим $\forall g \in G$, $\forall t \in [0, 1]$ через $T_g^{(t)}$ отображение $p^t T_g \varphi^t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Положив

$$\tilde{X}_t(\xi) = \int_G T_g^{(t)} X_t((T_g^{(t)})^{-1} \xi) dg,$$

получим эквивариантное относительно зависящего от t действия $T^{(t)}$ векторное поле $\tilde{X}_t(\xi)$, подстановка которого в (1) не нарушает тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_t}{\partial t}(\xi) + \frac{\partial W_t}{\partial \xi}(\xi) \tilde{X}_t(\xi) &= \frac{\partial W_t}{\partial t}(\xi) + \frac{\partial W_t}{\partial \xi}(\xi) \int_G T_g^{(t)} X_t((T_g^{(t)})^{-1} \xi) dg = \\ &= \int_G \left(\frac{\partial W_t}{\partial t}((T_g^{(t)})^{-1} \xi) + \frac{\partial W_t}{\partial \xi}((T_g^{(t)})^{-1} \xi) X_t((T_g^{(t)})^{-1} \xi) \right) dg = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, поток $\tilde{\psi}_s^t$ поля $\tilde{X}_t(\xi)$ задает семейство эквивариантных диффеоморфизмов, для которых $W_s(\xi) = W_0(\tilde{\psi}_s^t(\xi))$ $\forall s, t \in [0, 1]$. Из коэрцитивности функционала V следует, что любой диффеоморфизм $\tilde{\psi}_s^t$ определен на всем $\mathbb{R}^m$, поскольку любая кривая $\varphi \tilde{\psi}_0^t(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, целиком лежит в ограниченном, ввиду коэрцитивности, множестве уровня $\{V = V(\varphi_0(\xi))\}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Не имея эквивариантной гомотопии редукций, нельзя утверждать, что ключевые функции эквивариантно эквивалентны, даже если обе редукции эквивариантны. Неэквивариантно эквивалентные редукции легко построить, используя действие, например, на $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m$ группы $G = G_1 \oplus G_2$ в виде прямой суммы неэквивалентных действий групп G_1 и G_2 и проекций на первый и второй экземпляры $\mathbb{R}^m$ в качестве редуцирующих субмерсий, для функции $|x_1|^2 + |x_2|^2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$.

В качестве приложения рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{|\dot{x}|^2}{2} - \lambda \frac{|x|^2}{2} + \omega(x, \lambda) \right) dt, \quad (2)$$

где функция $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ описывает состояние системы, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ – бифуркационный параметр. Функционалы такого вида описывают поведение потенциальных физических систем довольно

¹Относительно индуцированных действий $T^{(t)}$ на $\mathbb{R}^m$, описываемых в доказательстве.

обширного класса [3–5]. Мы предполагаем, что функция ω нестрого выпукла по переменной x : $\omega''(x, \lambda)(h, h) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$.

Система уравнений Эйлера—Лагранжа для функционала (2) имеет вид

$$\ddot{x} + \lambda x - \nabla \omega(x, \lambda) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим краевую задачу с однородными (для простоты) краевыми условиями Дирихле $x(0) = x(1) = 0$ и будем считать областью определения функционала (2) банахово пространство

$$E = \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(1) = 0\}.$$

Левая часть (3) действует как фредгольмово отображение индекса 0 из E в банахово пространство $F = C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ и является градиентом V относительно гильбертова пространства $H = L_2([0, 1], \mathbb{R}^n)$.

Первые два слагаемых в лагранжиане инвариантны относительно действия группы $O(n)$. Поэтому если функция ω инвариантна относительно действия некоторой подгруппы $G \subset O(n)$, то функционал V инвариантен относительно индуцированного действия G на E .

При условии

$$\lambda < \pi^2(k+1)^2 \quad (4)$$

можно построить глобальную редукцию Ляпунова—Шмидта размерности nk следующим образом. Положим

$$p_{ij}^{LS}(x) = \sqrt{2} \int_0^1 \sin \pi j t x_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

Из обобщенного неравенства Пуанкаре—Стеклова

$$\int_0^1 |\dot{u}|^2 dt \geq \pi^2(k+1)^2 \int_0^1 |u|^2 dt, \quad (5)$$

верного для $u \in C^1[0, 1]$ при условии

$$\int_0^1 \sin \pi j t u(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

следует выпуклость функционала V в аффинных слоях $(p^{LS})^{-1}(\xi)$, $p^{LS} = (p_{ij}^{LS})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, k}$. Выпуклость и коэрцитивность гарантируют существование невырожденной точки минимума $\varphi^{LS}(\xi)$ для $V(\cdot, \lambda)|_{(p^{LS})^{-1}(\xi)}$. Ключевая функция определяется равенством

$$W_{LS}(\xi, \lambda) = \inf_{x: p^{LS}(x) = \xi} V(x, \lambda).$$

Пространство $\mathbb{R}^{nk}$ естественно представляется в виде прямой суммы k экземпляров $\mathbb{R}^n$; группа G одновременно действует во всех сомножителях. Легко видеть, что функция W_{LS} инвариантна относительно этого действия.

В этой же задаче можно воспользоваться другой схемой редукции — редукцией Морса—Ботта. Пусть, как и прежде, выполнено условие (4). Неравенство Пуанкаре—Стеклова мы используем в форме

$$\int_a^{a+\varepsilon} |\dot{u}|^2 dt \geq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int_a^{a+\varepsilon} |u|^2 dt,$$

(это верно, если $u(a) = u(a + \varepsilon) = 0$). Отсюда следует, что, разбивая отрезок $[0, 1]$ на достаточно малые части, можно фиксировать значения $x(t)$ в узлах: если $\xi = (\xi_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, k}$, $p_{ij}^{MB}(x) = x_i(\frac{j}{k+1})$, то $\forall \xi \in \mathbb{R}^{nk}$ функционал V выпукл в аффинном слое $(p^{MB})^{-1}(\xi)$. Ключевая функция Морса—Ботта задается равенством

$$W_{MB}(\xi, \lambda) = \inf_{x: p^{MB}(x) = \xi} V(x, \lambda).$$

Очевидно, что функция W_{MB} инвариантна относительно действия G на $\mathbb{R}^{nk}$.

Редукция Морса—Ботта, как и редукция Ляпунова—Шмидта, укладывается в описанную выше общую схему редукции для функционала с фредгольмовым градиентом, но вместо тройки пространств $\{E, F, H\}$ следует использовать тройку $\{H^1, H^1, H^1\}$, где H^1 — естественная область определения функционала V — энергетическое пространство оператора $-(d/dt)^2$, полученное замыканием E в метрике, порожденной скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_0^1 (\dot{u}, \dot{v}) dt.$$

Градиент

$$f^1(x, \lambda) = \text{grad}_{H^1} V(x, \lambda) = x - \lambda \left(\frac{d}{dt} \right)^{-2} x + \left(\frac{d}{dt} \right)^{-2} \nabla \omega(x, \lambda)$$

действует как фредгольмово отображение индекса 0 из H^1 в H^1 (здесь через $(d/dt)^{-2}u$ обозначается единственная функция v такая, что $v'' = u$, и $v(0) = v(1) = 0$). Линейный функционал $x \mapsto x_i(\frac{j}{k+1})$ на H^1 записывается через скалярное умножение x на вектор $\tilde{e}^{ij} \in H^1$: $\tilde{e}^{ij}$ есть вектор-функция, i -я компонента которой дается формулой

$$\tilde{e}_i^{ij}(t) = \alpha_0^j(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{j}{k+1}\right)t, & 0 \leq t \leq \frac{j}{k+1}, \\ \frac{j}{k+1}(1-t), & \frac{j}{k+1} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

а остальные тождественно равны нулю.

Редукцию Ляпунова—Шмидта также можно рассматривать в тройке $\{H^1, H^1, H^1\}$, поскольку $p_{ij}^{LS}(x) = \langle \hat{e}^j, x \rangle_1$, где $\hat{e}^j$ — вектор-функция с i -й компонентой

$$\hat{e}_i^j(t) = \alpha_1^j(t) = \sqrt{2} \left(\frac{d}{dt} \right)^{-2} \sin \pi j t$$

и нулевыми остальными.

Наборы функций $\{\alpha_0^1(t), \dots, \alpha_0^k(t)\}$ и $\{\alpha_1^1(t), \dots, \alpha_1^k(t)\}$ порождают k -мерные пространства (обозначим их L_0 и L_1), на ортогональных дополнениях к которым в пространстве функций $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ класса H^1 квадратичный функционал

$$\int_0^1 (\dot{u}^2 - \lambda u^2) dt$$

положителен (условие (4) выполняется). Следовательно, эти подпространства можно соединить гладкой гомотопией L_s так, чтобы для L_s выполнялось то же условие, и выбрать гладко зависящие от s базисы $\alpha_s^j(t)$. Тогда будут определены ключевые функции

$$W^s(\xi, \lambda) = \inf_{x: p^s(x) = \xi} V(x, \lambda),$$

где

$$p_{ij}^s(x) = \int_0^1 \dot{\alpha}_s^j(t) \dot{x}_i(t) dt;$$

по построению, $W^0 = W_{MB}$, $W^1 = W_{LS}$, и все функции W^s инвариантны. Следовательно, условия теоремы выполнены, и существует диффеоморфизм $\Psi: \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ такой, что

$$\Psi T_g(\xi) = T_g \Psi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nk}, \forall g \in G,$$

и

$$W_{LS}(\Psi(\xi)) \equiv W_{MB}(\xi).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин С. В. Периодические решения системы с гироскопическими силами// Прикл. мат. мех. — 1987. — 51, № 4. — С. 686–687.
2. Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера// Успехи мат. наук. — 1977. — 32, № 4. — С. 3–54.
3. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Шалимов В. Л. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах// Кристаллография. — 1999. — 44, № 4. — С. 1–5.
4. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
5. Монастырский М. И. Топология калибровочных полей и конденсированных сред. — М.: ПАИМС, 1995. — 478 с.
6. Сапронов Ю. И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах// Мат. заметки. — 1991. — 49, № 1. — С. 94–103.
7. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 101–132.
8. Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах// Мат. заметки. — 2000. — 58, № 5. — С. 745–754.
9. Chow S.-N., Hale J. K. Methods of bifurcation theory. — N. Y.: Springer-Verlag, 1982. — 515 с.
10. Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff—Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold// Invent. Math. — 1983. — 73. — С. 33–49.

С. Л. Царев

Воронежский государственный университет

E-mail: tsareff@rambler.ru

О ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ КАСАНИЯМИ

© 2003 г. С. В. ГОНЧЕНКО, Д. В. ТУРАЕВ, Л. П. ШИЛЬНИКОВ

Аннотация. В работе изучаются динамические свойства систем из областей Ньюхауса вблизи диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку с гомоклиническим касанием, в базовых случаях: двумерном, трёхмерном, когда неподвижная точка является седло-фокусом с одним вещественным и парой комплексно сопряжённых мультипликаторов, и четырёхмерном случае седло-фокуса, у которого имеется две пары комплексно сопряжённых мультипликаторов.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи и основные результаты	93
1.1. Основные предположения	93
1.2. О бифуркационных параметрах	94
1.3. Основные результаты	95
1.4. Лемма о рескейлинге	97
2. Свойства локального и глобального отображений	98
3. Доказательство лемм о рескейлинге	102
3.1. Отображения первого возвращения в случае $(1, 1)$	103
3.2. Отображения первого возвращения в случае $(2, 1)$	104
3.3. Доказательство леммы 1.2	106
3.4. Отображения первого возвращения в случае $(1, 2)$	107
3.5. Отображения первого возвращения в случае $(2, 2)$	109
4. Доказательство основных теорем	113
4.1. Доказательство теоремы 1.2 и пунктов 1, 2 теоремы 1.1	113
4.2. Доказательство теоремы 1.4 и пункта 3 теоремы 1.1	115
4.3. Доказательство теоремы 1.3	115
Список литературы	116

Гомоклинические траектории Пуанкаре, т.е. траектории, двоякоасимптотические к седловым периодическим, являются одним из наиболее притягательных объектов исследования в теории динамических систем. Это обусловлено прежде всего тем, что их наличие свидетельствует о сложной динамике. Так, в окрестности грубой гомоклинической траектории, в точках которой инвариантные многообразия седловой периодической орбиты пересекаются трансверсально, существует счетное множество периодических и континуум устойчивых по Пуассону траекторий [18, 30].

Если в системе есть хотя бы одна негрубая гомоклиническая траектория, или, как говорят, гомоклиническое касание, то это влечет существование в любой окрестности данной системы счетного множества областей негрубости, в которых системы с гомоклиническими касаниями плотны. Это явление впервые обнаружил Ньюхаус в случае двумерных диффеоморфизмов [25]. В многомерном случае области Ньюхауса также существуют в окрестности любой системы с гомоклиническим касанием, как в пространстве параметров в конечно-параметрических семействах [7], так, естественно, и в пространстве динамических систем [7, 26, 27].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02-01-00273 и № 01-01-00905), гранта INTAS № 2000-221, гранта DFG № 436 RUS и научной программы Университеты России (проект № 1905). Л.Ш. благодарен Научному фонду Гумбольдта за поддержку.

Сразу заметим, что динамические свойства, которые демонстрируют системы из областей Ньюхауса, характеризуются исключительной необычностью и сложностью. Так, в [6, 22] установлено, что уже в двумерном случае описание динамики систем из областей Ньюхауса требует бесконечного множества инвариантов (т.н. Ω -модулей [13, 14]), и, более того, в областях Ньюхауса плотны (в C^r -топологии с любым $r \geq 3$) системы как с гомоклиническими касаниями любого порядка, так и со сколь угодно вырожденными периодическими траекториями [10, 22].

В настоящей работе мы продолжаем изучение динамических свойств систем из областей Ньюхауса вблизи диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку с гомоклиническим касанием. Здесь мы ограничиваемся только так называемыми базовыми случаями: двумерным случаем, трёхмерным — когда неподвижная точка является седло-фокусом с одним вещественным и парой комплексно сопряжённых мультипликаторов, и четырёхмерным случаем седло-фокуса, у которого имеется две пары комплексно сопряжённых мультипликаторов. В общем многомерном случае динамика вблизи гомоклинического касания определяется, в основном, структурой множества так называемых ведущих мультипликаторов неподвижной точки. В общем положении это либо пара действительных мультипликаторов, либо один действительный и пара комплексно сопряжённых, либо две пары комплексно сопряжённых. Таким образом, очевидно, что рассматриваемые диффеоморфизмы являются простейшими среди всех диффеоморфизмов с одинаковым набором ведущих мультипликаторов.

Бифуркации двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями активно изучались, начиная с работы [1]. Поэтому здесь мы уделяем основное внимание трёх- и четырёхмерным диффеоморфизмам, т.е. случаю седло-фокуса. Мы различаем три типа седло-фокусов. Неподвижную точку с мультипликаторами $\lambda e^{\pm i\varphi}$ и γ , где $0 < \lambda < 1$, $0 < \varphi < \pi$ и $|\gamma| > 1$, будем называть *седло-фокусом* $(2, 1)$. Точка называется *седло-фокусом* $(1, 2)$, когда она имеет мультипликаторы λ и $\gamma e^{\pm i\psi}$, где $0 < |\lambda| < 1$, $\gamma > 1$, $0 < \psi < \pi$. Точка называется *седло-фокусом* $(2, 2)$, когда она имеет мультипликаторы $\lambda e^{\pm i\varphi}$ и $\gamma e^{\pm i\psi}$, где $0 < \lambda < 1$, $\gamma > 1$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < \psi < \pi$.

Во всех случаях мы будем предполагать, что модуль J произведения мультипликаторов не равен 1. Для определённости будем считать, что $J < 1$ (случай $J > 1$ сводится к данному переходом к обратному отображению).

Мы показываем, что, подобно двумерному случаю, в областях Ньюхауса при $J < 1$ *плотны диффеоморфизмы со счётным числом устойчивых периодических траекторий*. Ранее было известно [2, 24, 26], что устойчивые периодические траектории могут рождаться при бифуркациях гомоклинического касания при условии, что неустойчивое многообразие соответствующей седловой точки одномерно и седловая величина $\sigma \equiv |\lambda\gamma| < 1$. Как показывает наш результат, ни одно из этих условий не является необходимым. С другой стороны, отметим, что в случае $J > 1$ растяжение объёмов вблизи седловой неподвижной точки запрещает устойчивые траектории в малой окрестности гомоклинического касания, как для самой системы, так и для всех близких [23, 32]. При этом в областях Ньюхауса плотны диффеоморфизмы уже со счётным числом вполне неустойчивых периодических траекторий.

Что касается седловых периодических траекторий, то в случае седло-фокусов с гомоклиническими касаниями мы сталкиваемся со следующим существенно недвумерным явлением. Именно, мы показываем, что здесь, при выполнении определённых условий, в областях Ньюхауса *плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счётное множество седловых периодических траекторий двух и даже трёх разных типов* (т.е. с различными размерностями неустойчивых многообразий). Отметим, что размерности неустойчивых многообразий этих периодических траекторий могут даже быть больше, чем размерность неустойчивого многообразия исходной неподвижной точки. Вообще, подобное явление может быть обнаружено во многих случаях гомоклинических бифуркаций: вблизи петли седло-фокуса [15], вблизи негрубых гетероклинических контуров [9, 21, 32], вблизи гомоклинических касаний в некоторых случаях коразмерности два [5, 20, 31], и было явно использовано при построении дикого спирального аттрактора в [17]. В принципиальном плане, сосуществование траекторий с различным числом положительных показателей Ляпунова представляется нам наиболее общим свойством многомерных систем из областей Ньюхауса.

Существование *негрубых* периодических траекторий — другое характерное свойство систем из областей Ньюхауса. Известно [1, 2], что в двумерном случае при бифуркациях гомоклинического касания рождаются периодические траектории с одним мультипликатором, равным $+1$ или -1 . Здесь мы показываем, что в случае седло-фокуса могут появляться периодические траектории с *двумя* или даже *тремя* мультипликаторами, равными единице по модулю, и что в соответствующих областях Ньюхауса диффеоморфизмы с такими траекториями плотны.

Бифуркации периодического движения в случае одного мультипликатора, равного $+1$ или -1 , хорошо известны: это бифуркация седло-узла и бифуркация удвоения периода. В случае периодической траектории с двумя мультипликаторами на единичной окружности, например, $\nu_{1,2} = e^{\pm i\omega}$, её бифуркации могут приводить к рождению замкнутых инвариантных кривых. Здесь, в связи с проблемой о существовании счётного числа нетривиальных аттракторов, мы интересуемся, в первую очередь, устойчивыми замкнутыми кривыми. Так, мы показываем, что в случае гомоклинического касания к неподвижной точке типа седло-фокус с $J < 1$ (кроме седло-фокуса $(2, 1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$, когда динамика не отличается принципиально от случая седла) в соответствующих областях Ньюхауса плотны *диффеоморфизмы со счётным множеством устойчивых инвариантных замкнутых кривых*.

В случае седло-фокуса $(2, 2)$ с $\lambda\gamma^2 > 1$ бифуркации гомоклинического касания приводят к рождению периодических траекторий с тремя мультипликаторами на единичной окружности. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения, которого мы в данной работе не проводим. Заметим только, что, например, в случае мультипликаторов $(-1, -1, +1)$ соответствующая нормальная форма представляет собой систему трёх автономных дифференциальных уравнений (система Мориока—Шимицу), имеющую аттрактор лоренцевского типа [28]. Соответственно, мы можем ожидать, что в областях Ньюхауса в случае седло-фокуса $(2, 2)$ с $\lambda\gamma^2 > 1$ будут плотны диффеоморфизмы со счётным числом странных аттракторов.

Основные результаты статьи были анонсированы в [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Основные предположения. Рассмотрим C^r -гладкий диффеоморфизм f , имеющий седловую неподвижную точку O . Предположим, что устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O)$ пересекаются нетрансверсально в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0 .

Мы предполагаем, что точка O не имеет неведущих мультипликаторов. Здесь возникают четыре основных случая: двумерный, когда мультипликаторы точки O действительны, два трёхмерных, когда есть один действительный и пара комплексно сопряжённых мультипликаторов, и один четырёхмерный, когда мультипликаторы комплексны. Именно, мы предполагаем следующее условие.

А. Точка O принадлежит одному из следующих типов:

- (1, 1) когда мультипликаторы λ и γ точки O действительны, $|\lambda| < 1$, $|\gamma| > 1$;
- (2, 1) когда O имеет пару комплексных мультипликаторов $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $\lambda \in (0, 1)$, $\varphi \in (0, \pi)$, и один действительный мультипликатор γ , где $|\gamma| > 1$;
- (1, 2) когда O имеет один действительный мультипликатор λ , где $|\lambda| < 1$, и пару комплексных мультипликаторов $\gamma_{1,2} = \gamma e^{\pm i\psi}$, где $\gamma > 1$, $\psi \in (0, \pi)$;
- (2, 2) когда O имеет две пары комплексных мультипликаторов: $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$ и $\gamma_{1,2} = \gamma e^{\pm i\psi}$, где $\lambda \in (0, 1)$, $\gamma > 1$, $\varphi, \psi \in (0, \pi)$.

Точку O будем называть *седлом* в первом случае и *седло-фокусом* во всех остальных. Пусть J — модуль произведения мультипликаторов точки O . Предположим, что f удовлетворяет следующему условию.

В. $J < 1$ и $|\lambda\gamma| \neq 1$ в случае (2, 1), и $\lambda\gamma^2 \neq 1$ в случае (2, 2).

Введем целое число d_e (которое будем называть «эффективной размерностью»), определяемое следующим образом:

- $d_e = 1$ в случае (1, 1), а также в случае (2, 1) при $|\lambda\gamma| < 1$;
- $d_e = 2$ в случае (2, 1) при $|\lambda\gamma| > 1$, в случае (1, 2), а также в случае (2, 2) при $\lambda\gamma^2 < 1$;
- $d_e = 3$ в случае (2, 2) при $\lambda\gamma^2 > 1$.

Смысл констант J и d_e весьма прост. J — это якобиан отображения f в неподвижной точке O . Таким образом, диффеоморфизм f сжимает объемы вблизи O в случае $J < 1$, а если $J > 1$, то растягивает. Также очевидно, что, когда $J < 1$, то при итерациях отображения f любые $(d_e + 1)$ -мерные объемы вблизи O будут экспоненциально сжиматься, а d_e -мерные объемы могут уже и растягиваться.

Очевидно, что условие **B** не является ограничительным, поскольку случай $J > 1$ сводится к данному переходом к обратному отображению. Надо только иметь в виду, что устойчивое многообразие при этом становится неустойчивым, т.е. случай $(1, 2)$ переходит в $(2, 1)$ и наоборот. Очевидным образом меняется и определение величины d_e .

Обозначим через T_0 ограничение диффеоморфизма f на достаточно малую окрестность U_0 неподвижной точки O . Будем называть T_0 *локальным отображением*. Отображение T_0 в малой окрестности точки $O(0, 0)$ можно записать в следующем виде:

$$\bar{x} = Ax + \dots, \quad \bar{y} = By + \dots \quad (1.1)$$

Собственными значениями матриц A и B являются устойчивые (меньшие единицы по модулю) и соответственно неустойчивые (большие единицы по модулю) мультипликаторы точки O . Отметим, что если устойчивый мультипликатор действительный, то $A = \lambda$ и x — скаляр; если же имеется пара комплексных устойчивых мультипликаторов, то $x = (x_1, x_2)$ и $A = \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Также если неустойчивый мультипликатор γ действительный, то $B = \gamma$ и y — скаляр; если же имеется пара комплексных неустойчивых мультипликаторов, то $y = (y_1, y_2)$ и $B = \gamma \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$.

Точки пересечения траектории Γ_0 с U_0 принадлежат множеству $W^s \cap W^u$ и накапливаются к O . Счетное множество этих точек лежит на W_{loc}^s и на W_{loc}^u . Пусть $M^+ \in W_{\text{loc}}^s$ и $M^- \in W_{\text{loc}}^u$ — какие-либо две точки траектории Γ_0 и пусть $M^+ = f^{k_0}(M^-)$ для некоторого натурального k_0 . Пусть Π^+ и Π^- — некоторые достаточно малые окрестности точек M^+ и M^- , лежащие в U_0 . Отображение $T_1 \equiv f^{k_0} : \Pi^- \rightarrow \Pi^+$ будем называть *глобальным отображением*.

По условию, $T_1(W_{\text{loc}}^u)$ касается W_{loc}^s в точке M^+ . Будем предполагать, что это касание *простое*, т.е. выполнены следующие условия:

- C.** $T_1(W_{\text{loc}}^u)$ и W_{loc}^s имеют в точке M^+ единственный общий касательный вектор;
- D.** касание поверхностей $T_1 W_{\text{loc}}^u$ и W_{loc}^s в точке M^+ квадратичное.

1.2. О бифуркационных параметрах. Пусть f — диффеоморфизм с гомоклиническим касанием, удовлетворяющим условиям **A–D**. Близкие к f диффеоморфизмы, имеющие негрубую гомоклиническую траекторию, близкую к Γ_0 , образуют в пространстве C^r -гладких диффеоморфизмов с C^r -топологией гладкую бифуркационную поверхность $\mathcal{H}$ коразмерности 1.

В настоящей статье рассматриваются бифуркации в параметрических семействах f_ε , трансверсальных к $\mathcal{H}$ при $\varepsilon = 0$. При этом минимальное число управляющих параметров равно в точности d_e . В качестве первого параметра мы берём параметр μ , который оценивает расщепление $W^s(O)$ и $W^u(O)$ вблизи точки M^+ (точное определение μ в терминах коэффициентов тейлоровского разложения глобального отображения T_1 см. в разделе 2, лемма 2.3). Формально говоря, μ — это гладкий функционал, определённый для близких к f диффеоморфизмов, такой, что бифуркационная поверхность $\mathcal{H}$ задается уравнением $\mu(f) = 0$. Семейство f_ε трансверсально к $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\mu(f_\varepsilon)) \neq 0$ при $\varepsilon = 0$. Именно это условие и позволяет нам взять μ в качестве первой компоненты вектора параметров ε .

Если $d_e \geq 2$, то дополнительно к μ необходим еще один или два (когда $d_e = 3$) управляющих параметра. В этом случае мы требуем, чтобы семейство f_ε при $\varepsilon = 0$ было трансверсально не только к бифуркационной поверхности $\mathcal{H}$, но и к поверхностям $\varphi = \text{const}$ и/или $\psi = \text{const}$, где φ и ψ — угловые аргументы комплексных мультипликаторов седло-фокуса O . Это условие позволяет нам брать в качестве управляющих параметров непосредственно параметры μ , $\varphi - \varphi_0$, $\psi - \psi_0$, где φ_0 и ψ_0 — значения φ и ψ при $\varepsilon = 0$.

Таким образом, мы полагаем:

- 1) $\varepsilon = \mu$ в случае $(1, 1)$, а также в случае $(2, 1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$;

- 2) $\varepsilon = (\mu, \varphi - \varphi_0)$ в случае $(2, 1)$ при $|\lambda\gamma| > 1$;
- 3) $\varepsilon = (\mu, \psi - \psi_0)$ в случае $(1, 2)$, а также в случае $(2, 2)$ при $\lambda\gamma^2 < 1$;
- 4) $\varepsilon = (\mu, \varphi - \varphi_0, \psi - \psi_0)$ в случае $(2, 2)$ при $\lambda\gamma^2 > 1$.

Заметим, что φ и ψ являются непрерывными инвариантами топологической сопряженности на множестве неблуждающих траекторий — так называемыми Ω -модулями — для систем с гомоклиническими касаниями в случае седло-фокуса. Как показано в [19, 23], любое изменение значений этих Ω -модулей (в классе диффеоморфизмов на $\mathcal{H}$, т.е. когда исходное касание не расщеплено) может вести к бифуркациям однообходных периодических траекторий.¹ Это, в частности, объясняет, почему при исследовании бифуркаций в случаях $(2, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, 2)$ одного параметра μ может быть недостаточно.

Заметим, что все наши результаты здесь будут справедливы для произвольных семейств f_ε (в том числе и когда число параметров больше, чем d_e) при единственном предположении, что выполнены вышеприведённые условия трансверсальности.

Один из общих результатов о семействах f_ε — это существование в них областей Ньюхауса. Прежде всего, напомним следующий результат из [7].

Теорема (теорема об интервалах Ньюхауса). Пусть f_μ — однопараметрическое семейство C^r -гладких ($r \geq 3$) диффеоморфизмов, трансверсальное к бифуркационной поверхности $\mathcal{H}$ диффеоморфизмов, удовлетворяющих условиям **A–D**.² Тогда в любой окрестности точки $\mu = 0$ существуют интервалы Ньюхауса такие, что:

- 1) в этих интервалах плотны значения параметра μ , отвечающие существованию у диффеоморфизма f_μ простого гомоклинического касания к точке O ;
- 2) семейство f_μ трансверсально соответствующим бифуркационным поверхностям.

Так как области Ньюхауса являются открытыми в C^2 -топологии в пространстве динамических систем, то, применяя теорему об интервалах Ньюхауса к семейству f_ε , мы получаем следующее утверждение.

Следствие (области Ньюхауса для параметрических семейств). В пространстве параметров ε существует последовательность открытых областей δ_j , накапливающихся к $\varepsilon = 0$, таких, что в δ_j плотны значения параметров ε , для каждого из которых диффеоморфизм f_ε имеет траекторию простого гомоклинического касания к точке O . При этом семейство f_ε трансверсально к каждой из соответствующих бифуркационных поверхностей.

1.3. Основные результаты. Мы будем изучать свойства диффеоморфизмов f_ε из областей Ньюхауса δ_j . Для анализа бифуркаций периодических траекторий мы будем предполагать достаточную гладкость диффеоморфизмов f_ε , именно, $r \geq 5$.

Прежде всего рассмотрим случай $d_e = 1$ (напомним, что здесь мы рассматриваем однопараметрические семейства с $\varepsilon = \mu$).

Теорема 1.1. В случаях седла $(1, 1)$ и седло-фокуса $(2, 1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$ в интервалах Ньюхауса δ_j :

- 1) плотны значения μ , при которых диффеоморфизм f_μ имеет периодическую траекторию с мультипликатором $+1$;
- 2) плотны значения μ , при которых диффеоморфизм f_μ имеет периодическую траекторию с мультипликатором -1 ;
- 3) плотны (и образуют множество второй категории) значения μ , при которых диффеоморфизм f_μ имеет счётное множество устойчивых периодических траекторий.

¹ Аналогичная ситуация имеет место и в случае седла, но для двухобходных периодических траекторий. Здесь любое изменения Ω -модуля $\theta = -\ln|\lambda|/\ln|\gamma|$ ведет к бифуркациям таких траекторий [12, 13]. Отметим также, что трехобходные периодические траектории в этом случае могут к тому же претерпевать так называемые касп-бифуркации [16], когда в критический момент один из мультипликаторов равен $+1$ и равна нулю первая ляпуновская величина.

² В [7] вместо условия **B** мы требовали только, чтобы $\lambda\gamma \neq 1$. Заметим, что наше условие **B** включает это требование.

По существу, пункты 1) и 2) этой теоремы есть в [1] для случая седла и в [2, 3] для случая седло-фокуса. Пункт 3) в двумерном случае известен начиная с работы [24], трёхмерный случай рассмотрен в [11, 23] (см. также [26]). Для полноты, мы приводим доказательство теоремы 1.1 совместно с доказательством остальных результатов, приведённых ниже.

Далее мы рассматриваем случай $d_e \geq 2$. Здесь основное внимание уделяется тем свойствам диффеоморфизмов f_ε , которые являются новыми по сравнению со случаем седла. Это:

- 1) существование негрубых периодических траекторий, имеющих более чем один мультипликатор на единичной окружности (теорема 1.2);
- 2) существование счетного множества устойчивых замкнутых инвариантных кривых (теорема 1.3);
- 3) сосуществование счетного множества грубых периодических траекторий более чем двух разных типов (теорема 1.4).

Теорема 1.2. *В случае $d_e = 2$, т.е. в случаях седло-фокуса (2, 2) при $\lambda\gamma^2 < 1$, седло-фокуса (1, 2), а также седло-фокуса (2, 1) при $|\lambda\gamma| > 1$, в областях Ньюхауса δ_j плотны значения параметров ε такие, что соответствующий диффеоморфизм f_ε имеет периодическую траекторию с любыми двумя наперед заданными мультипликаторами на единичной окружности.*

В случае седло-фокуса (2, 2) при $\lambda\gamma^2 > 1$ (т.е. когда $d_e = 3$) в областях Ньюхауса δ_j плотны значения параметров ε такие, что соответствующий диффеоморфизм f_ε имеет периодическую траекторию с любыми тремя наперед заданными мультипликаторами на единичной окружности.

Уточним, что поскольку мы рассматриваем вещественные диффеоморфизмы, то речь в теореме 1.2 идёт о таких наборах мультипликаторов, куда каждый комплексный мультипликатор входит вместе со своим сопряжённым. В частности, мы получаем, что в случае гомоклинического касания к седло-фокусу при $d_e \geq 2$ в областях Ньюхауса плотны диффеоморфизмы с периодическими траекториями, имеющими мультипликаторы $e^{\pm i\omega}$, где $0 < \omega < \pi$. Анализ бифуркаций этих траекторий, а также периодических траекторий с мультипликаторами $(-1, -1)$ позволяет установить следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть C^r -гладкий ($r \geq 5$) диффеоморфизм f удовлетворяет условиям **A–D**. Тогда в случае $d_e \geq 2$ в областях Ньюхауса δ_j плотны и образуют множество второй категории значения параметров, при которых диффеоморфизм f_ε имеет счетное множество устойчивых замкнутых инвариантных кривых.*

В этой теореме существенно условие $J < 1$ (при $J > 1$ все траектории обязательно неустойчивы). В классе двумерных диффеоморфизмов с $J \neq 1$ замкнутых инвариантных кривых вблизи гомоклинического касания быть не может, поскольку мы имеем либо сжатие площадей (при $J < 1$), либо растяжение (при $J > 1$). Однако в случае коразмерности два, когда $J = 1$ в момент гомоклинического касания, уже и для диффеоморфизмов плоскости может наблюдаться рождение замкнутых инвариантных кривых [5, 20]. Замкнутые инвариантные кривые рождаются также при бифуркациях негрубого гетероклинического контура с двумя седлами, такого что в одном седле $J < 1$, а в другом $J > 1$. Вблизи систем с таким контуром, как показано в [9, 21], существуют области Ньюхауса, в которых плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счетное множество устойчивых и счетное множество вполне неустойчивых замкнутых инвариантных кривых.

Следующая теорема дает ответ на один из основных вопросов о динамике систем из областей Ньюхауса — о сосуществовании грубых периодических траекторий различных типов.

Теорема 1.4. *В областях Ньюхауса δ_j плотны и образуют множество второй категории значения параметров, при которых диффеоморфизмы f_ε имеют счетное множество устойчивых периодических траекторий и счетное множество седловых периодических траекторий с размерностями неустойчивых многообразий от 1 до d_e включительно.*

Заметим, что периодических траекторий с неустойчивыми многообразиями размерности больше d_e здесь быть не может в силу сжатия $(d_e + 1)$ -мерных объёмов [8, 32]. Таким образом, например, в случае седло-фокуса (2, 2) с $\lambda\gamma^2 < 1$, мы имеем седла с одномерными и двумерными неустойчивыми

многообразиями, а седёл с трёхмерными неустойчивыми многообразиями нет. В то же время, при $\lambda\gamma^2 > 1$, $\lambda\gamma < 1$, мы имеем здесь одновременно седла с одномерными, двумерными и трёхмерными неустойчивыми многообразиями.

Доказательство теорем 1.1–1.3 основано на исследовании отображений первого возвращения вблизи траектории гомоклинического касания. Мы сводим изучение этих отображений к анализу следующих стандартных квадратичных отображений:

- (i) отображение параболы — $\bar{y} = M - y^2$ (для случаев седла и седло-фокуса (2, 1) при $|\lambda\gamma| < 1$);
- (ii) отображение Эно — $\bar{x}_1 = y$, $\bar{y} = M - y^2 + Bx_1$ (для случая седло-фокуса (2, 1) при $|\lambda\gamma| > 1$);
- (iii) отображение Мира — $\bar{y}_1 = y_2$, $\bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2$ (для случаев седло-фокуса (1, 2), а также седло-фокуса (2, 2) при $\lambda\gamma^2 < 1$);
- (iv) трехмерное отображение Эно — $\bar{x}_1 = y_1$, $\bar{y}_1 = y_2$, $\bar{y}_2 = M + Cy_2 + Bx_1 - y_1^2$ (для случая седло-фокуса (2, 2) при $\lambda\gamma^2 > 1$).

Линейный анализ неподвижных точек этих отображений сравнительно несложен (см. раздел 4), но дает нам ту информацию, которая необходима для доказательства теорем 1.1, 1.2 и 1.4. Что касается устойчивых замкнутых инвариантных кривых (и, собственно, теоремы 1.3), то мы выводим их существование в случае седло-фокусов (1, 2) и (2, 2) из нелинейного бифуркационного анализа отображений (iii) и (iv). В случае седло-фокуса (2, 1) с $|\lambda\gamma| > 1$ отображение Эно (ii) само по себе не имеет (асимптотически устойчивых) инвариантных замкнутых кривых. Поэтому для доказательства теоремы 1.3 в этом случае нам приходится иметь дело с так называемым обобщенным отображением Эно (см. лемма 1.2).

1.4. Лемма о рескейлинге. В случае диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с гомоклиническим касанием, отображения первого возвращения из малой фиксированной окрестности Π^+ гомоклинической точки M^+ записываются в виде суперпозиций $T_k = T_1 T_0^k$, где $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$, и $\bar{k}$ может быть достаточно большим. Напомним, что $T_0 = f_\varepsilon|_{U_0}$, где U_0 — некоторая малая

окрестность неподвижной точки, а $T_1 \equiv f_\varepsilon^{k_0}$ — отображение, определенное в малой окрестности Π^- гомоклинической точки M^- и отображающее Π^- внутрь Π^+ . Поэтому область определения отображения T_k на Π^+ — это «полоска» $\sigma_k^0 = \Pi^+ \cap T_0^{-k} \Pi^-$. Области определения σ_k^0 непусты для всех достаточно больших k (чем меньше размеры окрестностей Π^+ или Π^- , тем большим будет минимальное k), и они накапливаются к $W_{\text{loc}}^s \cap \Pi^+$ при $k \rightarrow +\infty$.

Следующая лемма (основной технический результат нашей статьи) показывает, что при достаточно больших k отображения первого возвращения T_k могут быть представлены в некоторой стандартной форме: как отображения, асимптотически близкие при $k \rightarrow \infty$ к некоторым одномерным, двумерным или трехмерным квадратичным отображениям.

Лемма 1.1 (лемма о рескейлинге). Пусть f_0 — C^r -гладкий ($r \geq 5$) диффеоморфизм, удовлетворяющий условиям **A–D**, и пусть f_ε — d_ε -параметрическое семейство, трансверсальное к $\mathcal{H}$ при $\varepsilon = 0$. Тогда в пространстве параметров существует счетная последовательность областей Δ_k , накапливающихся к $\varepsilon = 0$, такая, что справедливы следующие утверждения.

При $\varepsilon \in \Delta_k$ существует такое преобразование координат на σ_k^0 и параметров на Δ_k , C^{r-1} -гладкое по координатам и C^{r-2} -гладкое по параметрам, в результате которого отображение первого возвращения $T_k : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ приводится к одному из следующих видов:

- (i) в случае (1, 1), а также в случае (2, 1) при $\lambda\gamma < 1$

$$\bar{y} = M - y^2 + o(1), \quad \bar{x} = o(1); \quad (1.2)$$

- (ii) в случае (2, 1) при $\lambda\gamma > 1$

$$\bar{x}_1 = y, \quad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + o(1), \quad \bar{x}_2 = o(1); \quad (1.3)$$

- (iii) в случае (1, 2), а также в случае (2, 2) при $\lambda\gamma^2 < 1$

$$\bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2 + o(1), \quad \bar{x} = o(1); \quad (1.4)$$

- (iv) в случае (2, 2) при $\lambda\gamma^2 > 1$

$$\bar{x}_1 = y_1, \quad \bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 + Bx_1 - y_1^2 + o(1), \quad \bar{x}_2 = o(1). \quad (1.5)$$

При этом область определения отображения T_k асимптотически большая и в пределе $k \rightarrow +\infty$ покрывает все конечные значения координат (x, y) .

Нормированные параметры M, B и C связаны с исходными параметрами μ, φ и ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} M &= M_0 \gamma^{2nk} (\mu + O(|\lambda|^k + |\gamma|^{-k})), \\ B &= B_0 (\lambda \gamma^n)^k \cos(k\varphi + \alpha_k(\varepsilon)), \\ C &= C_0 \gamma^k \cos(k\psi + \beta_k(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $n = \dim W^u(O)$, константы M_0, B_0, C_0 отличны от нуля и функции α_k и β_k равномерно ограничены по k вместе с производными. При этом, когда ε пробегает область Δ_k , значения параметров M, B и C пробегают, в свою очередь, асимптотически большие области, покрывающие в пределе $k \rightarrow +\infty$ все конечные значения.

Здесь через $o(1)$ обозначены некоторые функции (от координат и параметров M, B, C), которые стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными до порядка $(r-2)$ включительно, а по параметрам — до порядка $(r-3)$, равномерно на любом ограниченном множестве из пространства (x, y, M, B, C) . Заметим также, что в случае седло-фокусов области Δ_k , отвечающие конечным значениям B и C , могут состоять из нескольких компонент связности (в силу периодичности коэффициентов B и C по φ и ψ соответственно).

В случае (ii) леммы 1.1 нам понадобится более аккуратный учет асимптотически малых членов в отображении (1.3), что приводит нас к следующему результату.

Лемма 1.2. В случае (2,1) при $\lambda\gamma > 1$, когда $\varepsilon = (\mu, \varphi - \varphi_0) \in \Delta_k$ и соответствующее значение параметра B отделено от нуля, отображение T_k в форме (1.3) имеет двумерное притягивающее инвариантное C^{r-2} -гладкое многообразие $\mathcal{M}_k^s \subset \sigma_k^0$ вида $x_2 = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$ такое, что отображение $T_k|_{\mathcal{M}_k^s}$ имеет следующий вид:

$$\bar{x}_1 = y, \quad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + \frac{2J_1}{B} (\lambda^2 \gamma)^k (x_1 y + o(1)), \quad (1.7)$$

где $J_1 \neq 0$ — некоторая константа (точнее, J_1 — это якобиан глобального отображения T_1 , вычисленный в гомоклинической точке M^- при $\varepsilon = 0$).

Отображение (1.7) называется обобщенным отображением Эно. Оно было введено в [5, 20], где было, в частности, показано, что это отображение демонстрирует невырожденную бифуркацию Андронова—Хопфа и имеет устойчивую замкнутую инвариантную кривую для значений параметров (M, B) из некоторых открытых областей (см. раздел 4).

Содержание статьи. В разделе 2 изучаются свойства локального $T_0(\varepsilon)$ и глобального $T_1(\varepsilon)$ отображений. В разделе 3 изучаются отображения первого возвращения и доказываются леммы 1.1 и 1.2. В разделе 4 проводится анализ отображений (1.2)–(1.5) и (1.7) и доказываются теоремы 1.1–1.4.

2. СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНОГО И ГЛОБАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЙ

Для того, чтобы изучить отображения первого возвращения $T_k = T_1 T_0^k$ при всех достаточно больших k и всех достаточно малых ε , нам потребуются подходящие формулы для отображений T_0 и T_1 . При этом особые требования, естественно, предъявляются к форме локального отображения $T_0(\varepsilon)$. Это отображение имеет при всех достаточно малых значениях параметров неподвижную точку O_ε , которую будем полагать находящейся в начале координат. Выделив линейную часть и выбрав соответствующим образом координатные оси, можно представить $T_0(\varepsilon)$ в виде (1.1). Кроме того, с помощью C^r -гладкой замены координат можно распрямить локальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки O_ε . Тем самым, T_0 приводится к виду

$$\bar{x} = A(\varepsilon)x + p(x, y, \varepsilon), \quad \bar{y} = B(\varepsilon)y + q(x, y, \varepsilon), \quad (2.1)$$

где функции p и q — C^r -гладкие и обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными; кроме того, $p(0, y, \varepsilon) \equiv 0$, $q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0$. В этом случае $W_{\text{loc}}^s = \{y = 0, v = 0\}$, $W_{\text{loc}}^u = \{x = 0, y = 0\}$. Заметим, что одного только распрямления многообразий W_{loc}^s и W_{loc}^u для наших целей недостаточно. По существу, это связано с тем, что в правых частях отображения (2.1) содержится слишком много нерезонансных членов. Тем не менее, с помощью дополнительных замен координат определённую часть этих членов можно убить. Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть $r \geq 3$. При всех достаточно малых ε на U_0 можно ввести такие C^{r-1} -координаты (x, u, y, v) класса C^{r-2} по параметрам, в которых отображение $T_0(\varepsilon)$ записывается в следующем виде:

$$\bar{x} = A(\varepsilon)x + P(x, y, \varepsilon)x, \quad \bar{y} = B(\varepsilon)y + Q(x, y, \varepsilon)y, \quad (2.2)$$

где

$$P(0, y, \varepsilon) = P(x, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad Q(x, 0, \varepsilon) = Q(0, y, \varepsilon) \equiv 0. \quad (2.3)$$

Одним из решающих достоинств формы (2.2) является то, что в этом случае отображение $T_0^k : U_0 \rightarrow U_0$, представленное в так называемом «перекрестном виде», будет в главном порядке линейным при всех достаточно больших k . Именно, пусть $T_0(\varepsilon)$ приведено к виду (2.2) и пусть (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, k$, — точки на U_0 такие, что $(x_i, y_i) = T_0(x_{i-1}, y_{i-1})$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. Отображение $T_0^k(\varepsilon) : (x_0, y_0) \rightarrow (x_k, y_k)$ для любого достаточно большого k и при всех достаточно малых ε может быть представлено в виде

$$x_k - A_1^k(\varepsilon)x_0 = \hat{\lambda}^k \xi_k(x_0, y_k, \varepsilon), \quad y_0 - B_1^{-k}(\varepsilon)y_k = \hat{\gamma}^{-k} \eta_k(x_0, y_k, \varepsilon), \quad (2.4)$$

где $\hat{\lambda}$ и $\hat{\gamma}$ — некоторые константы такие, что $0 < \hat{\lambda} < |\lambda|$, $\hat{\gamma} > |\gamma|$; функции ξ_k и η_k равномерно ограничены по k вместе с производными (в том числе и по параметрам) до порядка $(r-2)$.

Доказательство лемм 2.1 и 2.2 для разных случаев имеется в [13, 14, 29].

Что касается глобального отображения $T_1(\varepsilon)$, то, используя условия **C** и **D** квадратичности гомоклинического касания, мы также найдем его удобное представление. Напомним, что условие трансверсальности семейства f_ε к бифуркационной поверхности H означает, что среди параметров ε можно выделить параметр расщепления μ инвариантных многообразий точки O вблизи выбранной гомоклинической точки M^+ . В этом случае глобальное отображение $T_1(\varepsilon)$ может быть представлено в виде, о котором идет речь в следующей лемме.

Лемма 2.3. Координаты, определённые в лемме 2.1, можно ввести в U_0 таким образом, что при всех достаточно малых ε глобальное отображение $T_1(\varepsilon)$ может быть записано в следующем виде:

— в случае (1,1) (здесь $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$)

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b_0(y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= \mu + cx + D_0(y - y^-)^2 + \dots; \end{aligned} \quad (2.5)$$

— в случае (2,1) (здесь $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$)

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix} (y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= \mu + c_1 x_1 + c_2 x_2 + D_0(y - y^-)^2 + \dots; \end{aligned} \quad (2.6)$$

— в случае (1,2) (здесь $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b_0(y_1 - y_1^-) + b_1 \bar{y}_2 + \dots, \\ \bar{y}_1 &= \mu + cx + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \dots, \\ y_2 - y_2^- &= d_1(y_1 - y_1^-) + d_2 \bar{y}_2 + ex + \dots; \end{aligned} \quad (2.7)$$

— в случае (2, 2) (здесь $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= ax + \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix} (y_1 - y_1^-) + b_1 \bar{y}_2 + \dots, \\ \bar{y}_1 &= \mu + c_1 x_1 + c_2 x_2 + D_0 (y_1 - y_1^-)^2 + \dots, \\ y_2 - y_2^- &= d_1 (y_1 - y_1^-) + d_2 \bar{y}_2 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где $b_0 \neq 0$, $c \neq 0$, $D_0 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $x^+ \neq 0$, $y^- \neq 0$.

Заметим, что в формулах (2.7) и (2.8) глобальное отображение T_1 представлено в перекрестном виде по координате y_2 , то есть правые части являются функциями от (x, y_1) и $\bar{y}_2$.

По существу, формулы (2.5)–(2.8) представляют собой тейлоровские разложения для подходящим образом выбранного $y^-(\varepsilon)$; многоточиями обозначены нелинейные члены (кроме одного квадратичного члена, выписанного явно). Отметим также, что коэффициенты $a, \dots, e_2$, так же как и x^+ и y^- , а также члены, обозначенные многоточиями, зависят, вообще говоря, от параметров ε (где всегда $\varepsilon_1 = \mu$). Соответствующий класс гладкости по ε здесь C^{r-3} : в координатах леммы 2.1 отображение T_1 , вместе со своей первой производной по (x, y) , является C^{r-2} -гладким по ε (см. [29]), поэтому коэффициент $D_0(\varepsilon)$ перед квадратичным членом C^{r-3} -гладкий.

Доказательство леммы 2.3. Будем использовать на U_0 координаты леммы 2.1.

Пусть гомоклинические точки $M^+ \in W_{\text{loc}}^s$ и $M^- \in W_{\text{loc}}^u$ имеют координаты $M^+ = M^+(x^+, 0)$ и $M^- = M^-(0, y^-)$, где $\|x^+\| \neq 0$, $\|y^-\| \neq 0$. Так как $T_1 M^- = M^+$ при $\varepsilon = 0$, то при достаточно малых ε отображение $T_1(\varepsilon)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+(\varepsilon) &= \hat{a}x + \hat{b}(y - y^-(\varepsilon)) + \dots, \\ \bar{y} &= y^+(\varepsilon) + \hat{c}x + \hat{d}(y - y^-(\varepsilon)) + \dots\end{aligned}\tag{2.9}$$

где многоточиями обозначены члены не менее второго порядка малости, все коэффициенты, вообще говоря, зависят от ε , и $y^+(0) = 0$. Кроме того,

$$\det \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \neq 0.\tag{2.10}$$

Найдем соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты в (2.9) в силу условий **С** и **Д**. Рассмотрим условие **С**. Оно означает, что при $\varepsilon = 0$ поверхность $T_1 W_{\text{loc}}^u$ имеет в точке M^+ ровно один касательный вектор к плоскости W_{loc}^s . Так как W_{loc}^u имеет уравнение $x = 0$, а W_{loc}^s — уравнение $\bar{y} = 0$, из (2.9) вытекает, что пересечение касательных плоскостей к $T_1 W_{\text{loc}}^u$ и W_{loc}^s в точке M^+ будет одномерным в том и только том случае, когда система $\hat{d}(y - y^-) = 0$ имеет однопараметрическое семейство решений при $\varepsilon = 0$. Таким образом, в случае, когда $y \in \mathbb{R}^1$ и $\hat{d}$ — скаляр (т.е. в случаях (1, 1) и (2, 1)), мы имеем

$$\hat{d} = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0.\tag{2.11}$$

Если же $y \in \mathbb{R}^2$ (случаи (1, 2) и (2, 2)), то $\hat{d} - (2 \times 2)$ -матрица, и

$$\det \hat{d} = 0 \quad \text{и} \quad \text{rank } \hat{d} = 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0.\tag{2.12}$$

В случае, когда $y \in \mathbb{R}^1$, второе уравнение (2.9) может быть записано в виде

$$\bar{y} = \hat{y}^+(\varepsilon) + \hat{c}x + D_0(y - y^-)^2 + \dots,\tag{2.13}$$

где явно выписано несколько первых членов тейлоровского разложения, включая линейные и один второго порядка. Условие **Д** квадратичности гомоклинического касания означает, что $D_0 \neq 0$. Заметим, что правая часть уравнения (2.13) не содержит линейного по $(y - y^-)$ члена — этого всегда можно добиться при всех достаточно малых ε , полагая, что y^- зависит определенным образом от ε .

В конечном счете, в случае (1, 1) мы приходим к формуле (2.5) для отображения T_1 , где $b_0 = \hat{b}$, $c = \hat{c}$ и $b_0 c \neq 0$ в силу (2.10) и (2.12). Отметим также, что в (2.5) мы положили $\mu = \hat{y}^+(\varepsilon)$,

подчеркивая тот факт, что $\hat{y}^+(\varepsilon)$ есть параметр расщепления многообразий $W^s(O)$ и $W^u(O)$ вблизи гомоклинической точки M^+ .

В случае (2, 1), чтобы получить формулу (2.6), мы сделаем еще одно преобразование координат, именно линейный поворот в x -плоскости, с тем, чтобы преобразовать вектор $b = (\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ в $(b_0, 0)$, где $b_0 = \sqrt{\hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2} \neq 0$. Легко видеть, что этого можно добиться с помощью поворота $x \mapsto R_\omega x$, где $\omega = \arctg(-\hat{b}_2/\hat{b}_1)$. При этом, заметим, что

$$c_1 = \frac{\hat{b}_1 \hat{c}_1 - \hat{b}_2 \hat{c}_2}{b_0}, \quad c_2 = \frac{\hat{b}_2 \hat{c}_1 + \hat{b}_1 \hat{c}_2}{b_0},$$

и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ в силу (2.10).

Рассмотрим теперь случаи, когда $y \in \mathbb{R}^2$ (т.е. случаи (1, 2) и (2, 2)). Уравнения для $\bar{y}$ из (2.9) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \hat{y}_1^+(\varepsilon) + \hat{c}_1 x + \hat{d}_{11}(y_1 - y_1^-) + \hat{d}_{12}(y_2 - y_2^-) + \dots, \\ \bar{y}_2 &= \hat{y}_2^+(\varepsilon) + \hat{c}_2 x + \hat{d}_{21}(y_1 - y_1^-) + \hat{d}_{22}(y_2 - y_2^-) + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что поворот координат в y -плоскости оставляет вид уравнения (2.14) в принципе таким же, но коэффициенты могут измениться. При $\varepsilon = 0$, так как $\det \hat{d} = 0$, мы можем повернуть y -координаты так, что будут выполнены равенства

$$\hat{d}_{11} = 0, \quad \hat{d}_{12} = 0. \quad (2.15)$$

Не ограничивая общности, мы полагаем сразу, что эти равенства имеют место при $\varepsilon = 0$. Так как $\text{rank } \hat{d} = 1$ при $\varepsilon = 0$, то хотя бы один из коэффициентов $\hat{d}_{21}$ или $\hat{d}_{22}$ ненулевой. Предположим, что

$$\hat{d}_{22} \neq 0. \quad (2.16)$$

Если это не так (т.е. $\hat{d}_{22} = 0$ и, значит, $\hat{d}_{21} \neq 0$), то мы возьмем другую гомоклиническую точку, именно, точку $T_0^{-1}(M^-)$, и будем рассматривать ее как новую точку M^- . Для нового глобального отображения ($T_{1\text{new}} = T_1 T_0$) новая матрица $\hat{d}$ запишется как

$$\hat{d}_{\text{new}} = \hat{d} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

В силу (2.15) получаем, что

$$\hat{d}_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{d}_{21} \cos \varphi + \hat{d}_{22} \sin \varphi & -\hat{d}_{21} \sin \varphi + \hat{d}_{22} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $\hat{d}_{22} = 0$, то после перехода к новой гомоклинической точке мы действительно получим, что (2.16) выполнено (поскольку $\hat{d}_{21} \neq 0$ и $\sin \varphi > 0$ так как $\varphi \in (0, \pi)$).

Учтем теперь и квадратичные члены, тогда уравнение для $\bar{y}_1$ из (2.14) при $\varepsilon = 0$ запишется следующим образом:

$$\bar{y}_1 = c_1 x + D_1(y_1 - y_1^-)^2 + D_2(y_1 - y_1^-)(y_2 - y_2^-) + D_3(y_2 - y_2^-)^2 + \dots \quad (2.17)$$

Так как $\hat{d}_{22} \neq 0$, то второе уравнение из (2.14) может быть разрешено относительно $(y_2 - y_2^-)$. Соответственно, при $\varepsilon = 0$ имеем

$$y_2 - y_2^- = d_1(y_1 - y_1^-) + d_2 \bar{y}_2 + ex + \dots, \quad (2.18)$$

где $d_1 = -\hat{d}_{21}/\hat{d}_{22}$, $d_2 = \hat{d}_{22}^{-1}$. Подставив (2.18) в (2.17), получим

$$\bar{y}_1 = c_1 x + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \tilde{D}_1(y_1 - y_1^-)\bar{y}_2 + \tilde{D}_2\bar{y}_2^2 + \dots, \quad (2.19)$$

где

$$D_0 \equiv D_1 + d_1 D_2 + d_1^2 D_3 \quad (2.20)$$

и $\tilde{D}_{1,2}$ — некоторые коэффициенты. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ отображение T_1 в перекрёстном виде записывается как

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= ax + b_0(y_1 - y_1^-) + b_1\bar{y}_2 + \dots, \\ \bar{y}_1 &= cx + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \dots, \\ y_2 - y_2^- &= d_1(y_1 - y_1^-) + d_2\bar{y}_2 + ex + \dots\end{aligned}\quad (2.21)$$

в случае (1, 2) и

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 - x_1^+ &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_0(y_1 - y_1^-) + b_{11}\bar{y}_2 + \dots, \\ \bar{x}_2 - x_2^+ &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{12}\bar{y}_2 + \dots, \\ \bar{y}_1 &= c_1x_1 + c_2x_2 + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \dots, \\ y_2 - y_2^- &= d_1(y_1 - y_1^-) + d_2\bar{y}_2 + e_1x_1 + e_2x_2 + \dots\end{aligned}\quad (2.22)$$

в случае (2, 2) с некоторыми новыми коэффициентами a, b, c, d, e (в случае (2, 2) мы делаем коэффициент перед $(y_1 - y_1^-)$ в уравнении для $\bar{x}_2$ равным нулю при помощи подходящего поворота x -координат так же, как в случае (2, 1)). Условие (2.10) переписывается при этом в виде

$$\det \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y}_1)}{\partial(x, y_1)} \neq 0, \quad (2.23)$$

что в обоих случаях даёт нам $b_0 \neq 0, c \neq 0$.

Так как $x = 0$ на W_{loc}^u , то, как следует из (2.21), (2.22), образ $T_1 W_{\text{loc}}^u$ этой поверхности задаётся вблизи точки M^+ уравнением

$$y_1 = \frac{D_0}{b_0^2}(x - x^+)^2 + \dots \quad (2.24)$$

в случае (1, 2), и уравнениями

$$x_2 - x_2^+ = b_{12}y_2 + \dots, \quad y_1 = \frac{D_0}{b_0^2}(x_1 - x_1^+)^2 + \dots \quad (2.25)$$

в случае (2, 2). В любом случае, очевидно, что условие **D** квадратичности касания этой поверхности с W_{loc}^s ($y = 0$) эквивалентно условию $D_0 \neq 0$.

При $\varepsilon \neq 0$ отображение T_1 по-прежнему задаётся уравнениями (2.21) и (2.22): так как $D_0(\varepsilon) \neq 0$ при всех достаточно малых ε , то можно всегда так выбрать $y_1^-(\varepsilon)$ и $y_2^-(\varepsilon)$ и повернуть дополнительно y -координаты, что коэффициенты $d_{11}(\varepsilon)$ и $d_{12}(\varepsilon)$ будут тождественными нулями при всех достаточно малых ε . Единственным отличием по сравнению со случаем $\varepsilon = 0$ будет, таким образом, появление ненулевого свободного члена $y_1^+(\varepsilon)$ в уравнении для $\bar{y}_1$. Как и выше, условие трансверсальности семейства f_ε бифуркационной поверхности $\mathcal{H}$ позволяет положить $y_1^+(\varepsilon) = \mu$. Это завершает доказательство леммы 2.3. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ О РЕСКЕЙЛИНГЕ

В этом разделе мы изучим отображения первого возвращения

$$T_k(\varepsilon) \equiv T_1 T_0^k : \sigma_k^0 \rightarrow \sigma_k^0$$

при всех достаточно больших k : $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$, и малых ε , $\|\varepsilon\| \leq \varepsilon_0$. При этом для отображения $T_0^k : \sigma_k^0 \rightarrow \sigma_k^1$ мы используем формулу (2.4) из леммы 2.2, где $(x_0, y_0) \in \Pi^+$, $(x_k, y_k) \in \Pi^-$, а для глобального отображения $T_1(\varepsilon)$ — соответствующие формулы из леммы 2.3. Согласно лемме 2.2, для любых малых x_0, y_k и любого достаточно большого k соответствующие координаты x_k, y_0 определяются однозначно. Поэтому мы можем использовать (x_0, y_k) в качестве координат на σ_k^0 ; координата y_0 вычисляется по формуле

$$y_0 = B_1^{-k}(\varepsilon)y_k + \hat{\gamma}^{-k}\eta_k(x_0, y_k, \varepsilon)$$

(см. лемму 2.2). Заметим, что в координатах (x_0, y_k) размер полосы σ_k^0 по всем направлениям отделён от нуля для любого k . Так, если мы определим окрестности Π^+ и Π^- как

$$\{\|x - x^+\| \leq \rho_0, \|y\| \leq \rho_0\}, \quad \{\|x\| \leq \rho_0, \|y - y^-\| \leq \rho_0\}$$

соответственно, где ρ_0 — некоторая малая положительная константа, то каждая полоска σ_k^0 определяется соотношением

$$\{\|x_0 - x^+\| \leq \rho_0, \|y_k - y^-\| \leq \rho_0\}.$$

3.1. Отображения первого возвращения в случае (1, 1). Здесь координаты x и y — одномерные, $A = \lambda$, $B = \gamma$. В силу (2.4) и (2.5) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$ при всех достаточно больших k и малых ε может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 - x^+(\varepsilon) &= a\lambda^k x_0 + b_0(y_k - y^-) + O\left((y_k - y^-)^2 + |\lambda|^k |x_0| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k |x_0|\right), \\ \gamma^{-k} \bar{y}_k + \hat{\gamma}^{-k} O(|\bar{x}_0| + |\bar{y}_k|) &= \mu + c x_0 \lambda^k + D_0 (y_k - y^-)^2 + \\ &+ O\left((y_k - y^-)^3 + |\lambda|^k |x_0| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k |x_0|\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $b_0 \neq 0$, $c \neq 0$, $D_0 \neq 0$. Заметим, что здесь и ниже мы выбираем $\hat{\lambda}$ достаточно близким к $|\lambda|$ (но всегда меньше, чем $|\lambda|$), так что $\hat{\lambda} > \lambda^2$, в частности.

Сдвинем начало координат:

$$x = x_0 - x^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, \quad y = y_k - y^- + \tilde{\nu}_k^2$$

таким образом, чтобы первое уравнение из (3.1) не содержало бы свободных членов, т.е. членов, зависящих только от ε , а второе — линейного члена по y . Это всегда можно сделать для подходящим образом выбранных $\tilde{\nu}_k^j = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$. В результате система (3.1) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= O(|\lambda|^k |x| + |y|), \\ \bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(|\bar{x}| + |\bar{y}|) &= \gamma^k M_1 + \tilde{D}_0 \gamma^k y^2 + \gamma^k O(|y|^3 + |\lambda|^k |x|), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$M_1 \equiv \mu - \gamma_1^{-k} y^-(1 + \dots) + c \lambda_1^k x^+(1 + \dots)$$

и $\tilde{D}_0 = D_0(1 + \beta_k)$, где $\beta_k = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$ — некоторая малая величина.

Теперь нормируем координаты следующим образом:

$$x = -\frac{\gamma^{-k}}{\rho^k} x_{\text{new}}, \quad y = -\frac{1}{\tilde{D}_0} \gamma^{-k} y_{\text{new}}, \quad (3.3)$$

где ρ — некоторое число из интервала

$$\max\{|\lambda\gamma|, |\gamma|^{-1}\} < \rho < 1. \quad (3.4)$$

Поскольку $|\lambda\gamma| < 1$ и $|\gamma| > 1$, то такие ρ действительно существуют, и при этом нормировочные множители в (3.3) будут асимптотически малы при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, поскольку размер полоски σ_k^0 в координатах (x_0, y_k) отделён от нуля, то область изменения нормированных координат (x, y) становится неограниченно большой с ростом k .

В новых координатах система (3.2) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= O(\rho^k |y| + |\lambda|^k |x|), \\ \bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\rho^{-k} |\bar{x}| + |\bar{y}|) &= -\tilde{D}_0 \gamma^{2k} M_1 - y^2 + O\left(|\gamma|^{-k} |y|^3 + \frac{|\lambda\gamma|^k}{\rho^k} |x|\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теперь, в силу (3.4), учитывая, что $|\lambda\gamma| < 1$, $\hat{\lambda} < |\lambda|$, система (3.5) приводится к искомому виду (1.2), где мы полагаем

$$M = -\tilde{D}_0 \gamma_1^{2k} [\mu - \gamma_1^{-k} y^-(1 + \dots) + c \lambda_1^k x^+(1 + \dots)]. \quad (3.6)$$

Заметим, что параметр M , так же как и координаты (x, y) , может принимать произвольные конечные значения при больших k .

3.2. Отображения первого возвращения в случае (2, 1). Здесь $x = (x_1, x_2)$ двумерно, y одномерно и

$$A \equiv \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad B \equiv \gamma.$$

В силу (2.4) и (2.6) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$, при каждом достаточно большом k и всех малых ε , может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_{01} - x_1^+(\varepsilon) &= \lambda^k A_{11}(k\varphi) x_{01} + \lambda^k A_{12}(k\varphi) x_{02} + b_0(y_k - y^-) \\ &\quad + O\left((y_k - y^-)^2 + \lambda^k \|x_0\| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k \|x_0\|\right), \\ \bar{x}_{02} - x_2^+(\varepsilon) &= \lambda^k A_{21}(k\varphi) x_{01} + \lambda^k A_{22}(k\varphi) x_{02} \\ &\quad + O\left((y_k - y^-)^2 + \lambda^k \|x_0\| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k \|x_0\|\right), \\ \gamma^{-k} \bar{y}_k + \hat{\gamma}^{-k} \eta_k(\bar{x}_0, \bar{y}_k, \varepsilon) &= \mu + D_0(y_k - y^-)^2 \\ &\quad + \lambda^k [x_{01}(c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi) x_{01} + (c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi) x_{02}] \\ &\quad + O\left((y_k - y^-)^3 + \lambda^k \|x_0\| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k \|x_0\|\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(k\varphi) &= a_{11} \cos k\varphi - a_{12} \sin k\varphi, & A_{12}(k\varphi) &= a_{12} \cos k\varphi + a_{11} \sin k\varphi, \\ A_{21}(k\varphi) &= a_{21} \cos k\varphi + a_{22} \sin k\varphi, & A_{22}(k\varphi) &= a_{22} \cos k\varphi - a_{21} \sin k\varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Сдвинем начало координат,

$$x_1 = x_{01} - x_1^+(\varepsilon) + \tilde{v}_k^1, \quad x_2 = x_{02} - x_2^+(\varepsilon) + \tilde{v}_k^2, \quad y = y_k - y^-(\varepsilon) + \tilde{v}_k^3$$

таким образом, чтобы первое и второе уравнения из (3.7) не содержали свободных членов, а третье — линейного по y члена (здесь $\tilde{v}_k^i = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$). При этом мы еще заменяем $\bar{x}_{01}$ и $\bar{x}_{02}$ в не зависящих от $\bar{y}$ членах в левой части третьего уравнения из (3.7) на их выражения из первого и второго уравнений. Тогда (3.7) перепишется как

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \lambda^k A_{11}(k\varphi) x_1 + \lambda^k A_{12}(k\varphi) x_2 + b_0 y + O(y^2 + \lambda^k |y| + \hat{\lambda}^k \|x\|), \\ \bar{x}_2 &= \lambda^k A_{21}(k\varphi) x_1 + \lambda^k A_{22}(k\varphi) x_2 + O(y^2 + \lambda^k |y| + \hat{\lambda}^k \|x\|), \\ \bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(|\bar{y}|) &= \gamma^k M_1 + \tilde{D}_0 \gamma^k y^2 + \lambda^k \gamma^k \left[(c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi) x_1 \right. \\ &\quad \left. + (c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi) x_2 + \left((\hat{\lambda}/\lambda)^k + \hat{\gamma}^{-k} \right) O(\|x\|) \right] + \gamma^k O(|y|^3 + \lambda^k \|x\| |y|), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$M_1 \equiv \mu - \gamma^{-k} y^-(1 + \dots) + C_0 \lambda^k (\cos(k\varphi + \vartheta_1) + \dots)$$

и

$$C_0 = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)(x_1^{+2} + x_2^{+2})}, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{c_1 x_2^+ - c_2 x_1^+}{C_0}, \quad \cos \vartheta_1 = \frac{c_1 x_1^+ + c_2 x_2^+}{C_0}, \quad (3.10)$$

$\tilde{D}_0 = D_0(1 + \beta_k)$ и $\beta_k = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$ — некоторый малый коэффициент.

Рассмотрим случай $|\lambda\gamma| < 1$. Нормируем, так же как и в случае (1, 1), координаты следующим образом:

$$x = \frac{\gamma^{-k}}{\rho^k} x_{\text{new}}, \quad y = -\tilde{D}_0^{-1} \gamma^{-k} y_{\text{new}},$$

где ρ — некоторое число из интервала (3.4). В новых координатах система (3.9) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \rho^k O(y) + \lambda^k O(x), & \bar{x}_2 &= \rho^k \gamma^{-k} O(y^2) + \lambda^k O(x), \\ \bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\bar{y}) &= M - y^2 + \frac{\lambda^k \gamma^k}{\rho^k} O(x) + |\gamma|^{-k} O(y^3), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$M \equiv -\tilde{D}_0 \gamma^{2k} \left[\mu - \gamma^{-k} y^-(1 + \dots) + \lambda^k (C_0 \cos(k\varphi + \vartheta_1) + \dots) \right]. \quad (3.12)$$

Таким образом, в силу (3.4), после разрешения последнего уравнения относительно $\bar{y}$ отображение (3.11) приводится к искомому виду (1.2).

Рассмотрим теперь случай $|\lambda\gamma| > 1$ (но, как и прежде, здесь $|\lambda^2\gamma| < 1$). Нормируем координаты в (3.9) следующим образом:

$$x_1 = -(b_0\tilde{D}_0^{-1})\gamma^{-k}x_{1\text{new}}, \quad x_2 = -\rho^k(b_0\tilde{D}_0^{-1})\gamma^{-k}x_{2\text{new}}, \quad y = -\tilde{D}_0^{-1}\gamma^{-k}y_{\text{new}},$$

где ρ — некоторая константа из интервала

$$|\gamma|^{-1} < \lambda < \rho < |\lambda\gamma|^{-1}, \quad (3.13)$$

который непуст, так как $1 > \frac{1}{|\lambda\gamma|} = \frac{\lambda}{|\lambda^2\gamma|} > \lambda$ в силу $|\lambda^2\gamma| < 1$.

В новых координатах система (3.9) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= y + \lambda^k O(\|x\| + |y|), \\ \bar{x}_2 &= \rho^{-k} \lambda^k A_{21}(k\varphi)x_1 + \lambda^k A_{22}(k\varphi)x_2 + \rho^{-k} \lambda^k O(y) + \rho^{-k} \hat{\lambda}^k O(x), \\ \bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\bar{y}) &= M - y^2 + \lambda^k \gamma^k b_0 \left\{ (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi + \nu_k^1)x_1 + \right. \\ &\quad \left. + \rho^k (c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi + \nu_k^2)x_2 \right\} + O\left(|\gamma|^{-k}|y|^3 + \lambda^k \|x\||y| + (\hat{\lambda}^k + \lambda^k \hat{\gamma}^{-k})\|x\|^2\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где для параметра M по-прежнему имеет место формула (3.12), а ν_k^1, ν_k^2 — некоторые малые коэффициенты, $\nu_k^{1,2} = O\left((\hat{\lambda}/\lambda)^k + \hat{\gamma}^{-k}\right)$. Третье уравнение в (3.14) разрешим относительно $\bar{y}$ и снова нормируем координату y : $y_{\text{new}} = y(1 + \hat{\beta}_k)$, где $\hat{\beta}_k = O\left((\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}\right)$ — некоторая малая величина. Тогда (3.14) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= y + \lambda^k O(\|x\| + |y|), \\ \bar{x}_2 &= \rho^{-k} \lambda^k A_{21}(k\varphi)x_1 + \lambda^k A_{22}(k\varphi)x_2 + \rho^{-k} \lambda^k O(|y|) + \rho^{-k} \hat{\lambda}^k O(\|x\|), \\ \bar{y} &= M - y^2 + \lambda^k \gamma^k b_0 \left\{ (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi + \nu_k^1)x_1 + \right. \\ &\quad \left. + \rho^k (c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi + \nu_k^2)x_2 \right\} + O\left(|\gamma|^{-k}|y|^3 + \lambda^k \|x\||y| + \hat{\lambda}^k \|x\|^2\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где новые коэффициенты M и $\nu_k^{1,2}$ отличаются от старых на малые величины порядка $O\left((\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}\right)$; коэффициент b_0 остаётся неизменным.

Заметим, что поскольку $|\lambda\gamma| > 1$, то коэффициент

$$B_k(\varphi) \equiv b_0 \lambda^k \gamma^k (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi + \nu_k^1) \quad (3.16)$$

из третьего уравнения в (3.15) уже не мал. Тем не менее, $B_k(\varphi)$ может принимать произвольные конечные значения (при всех больших k), если параметр φ будет варьироваться вблизи тех значений, где $c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi = 0$, т.е. вблизи значений

$$\varphi = \frac{\vartheta_2}{k} \pm \frac{\pi}{2k} + 2\pi \frac{j}{k}, \quad j \in Z, \quad (3.17)$$

где $\vartheta_2 \in [0, 2\pi)$ таково, что

$$\cos \vartheta_2 = c_1 / \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \sin \vartheta_2 = c_2 / \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Так как $c \neq 0$ (по лемме 2.3), то значения (3.17) угла φ плотно заполняют, при всевозможных k и j , интервал $(0, \pi)$.

Обозначим $B = B_k(\varphi)$, подчеркивая, тем самым, что B является еще одним управляющим параметром помимо M . Заметим, что параметр M (см. формулу (3.12)) может также принимать произвольные конечные значения, когда μ варьируется вблизи значения $\mu_k^0 = \gamma_1^{-k} y^- - C_0 \lambda^k \cos(k\varphi_0 + \vartheta_1)$.

Введем новую координату $y_{\text{new}} = y + \lambda^k O(\|x\| + |y|)$ так, чтобы в новых координатах было $\bar{x}_1 = y$. Тогда, в силу (3.13), отображение (3.15) принимает искомый вид (1.3).

3.3. Доказательство леммы 1.2. Мы продолжаем исследовать случай (2,1) при $|\lambda\gamma| > 1$ и $|\lambda^2\gamma| < 1$. Предположим, что $B \neq 0$ в (3.15). Так как $\lambda^k\gamma^k\rho^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то можно ввести новую координату

$$x_{1\text{ new}} = x_1 + \frac{1}{B}b_0\lambda^k\gamma^k\rho^k(c_2\cos k\varphi - c_1\sin k\varphi + \nu_k^2)x_2.$$

Тогда (3.15) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= y + \frac{b_0A_{21}(k\varphi)}{B}(c_2\cos k\varphi - c_1\sin k\varphi + \nu_k^2)\lambda^{2k}\gamma^k x_1 + O(\lambda^k), \\ \bar{x}_2 &= O\left(\frac{\lambda^k}{\rho^k}\right), \quad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + O(\lambda^k).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Заметим, что это отображение является экспоненциально сжимающим по координате x_2 (с коэффициентом сжатия $O(\lambda^k\rho^{-k})$), тогда как в областях фазового пространства, где есть сжатие по координатам x_1 и y , коэффициент сжатия по этим переменным отделён от нуля при $B \neq 0$. Тогда из теоремы 4.4 в [29] следует, что у отображения (3.18) для любых $Q, R > 0$ при каждом достаточно большом k в области $\|(x, y)\| \leq Q$ при $\|(M, B)\| \leq R$ существует C^{r-2} -гладкое нелокальное асимптотически устойчивое инвариантное центральное многообразие $\mathcal{M}_k^c$ вида $x_2(x_1, y, M, B) = O(\lambda^k\rho^{-k})$. Отображение (3.18) в ограничении на $\mathcal{M}_k^c$ имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= y + \frac{b_0A_{21}(k\varphi)}{B}(c_2\cos k\varphi - c_1\sin k\varphi + \nu_k^2)\lambda^{2k}\gamma^k x_1 + O(\lambda^k), \\ \bar{y} &= M - y^2 + Bx_1 + O(\lambda^k).\end{aligned}\tag{3.19}$$

В области, где B равномерно ограничено, $|B| < Q$, из (3.16) находим, что $c_1\cos k\varphi + c_2\sin k\varphi = O(\lambda^{-k}\gamma^{-k})$. Так как $|\lambda\gamma| > 1$, получаем

$$c_2\cos k\varphi - c_1\sin k\varphi = \pm\sqrt{c_1^2 + c_2^2} + \dots,$$

где многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Также (см. (3.8))

$$A_{21}(k\varphi) = a_{21}\cos k\varphi + a_{22}\sin k\varphi = \pm\frac{a_{21}c_2 - a_{22}c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \dots$$

Таким образом,

$$b_0A_{21}(k\varphi)(c_2\cos k\varphi - c_1\sin k\varphi + \nu_k^2) = b_0(a_{21}c_2 - a_{22}c_1) + \dots$$

Легко видеть из (2.6), что константа $J_1 = b_0(a_{21}c_2 - a_{22}c_1)$ есть не что иное как якобиан глобального отображения T_1 , вычисленный в точке $(x = 0, y_1 = y^-)$ при $\varepsilon = 0$. Заметим также, что в этом случае $\lambda^{2k}\gamma^k$ — это главная часть якобиана локального отображения T_0^k . Обозначим

$$J_k = J_1\lambda^{2k}\gamma^k.$$

Тогда отображение (3.19) можно записать в следующем виде:

$$\bar{x}_1 = y + \frac{J_k}{B}x_1 + o(J_k), \quad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + O(\lambda^k).\tag{3.20}$$

Сделаем еще одну замену координат

$$x_{1\text{ new}} = x_1, \quad y_{\text{new}} = y + \frac{J_k}{B}x_1 + o(J_k) \equiv \bar{x}_1.$$

Тогда (3.20) примет следующий вид:

$$\bar{x}_1 = y, \quad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + \frac{J_k}{B}y + \frac{2J_k}{B}x_1y + o(J_k).\tag{3.21}$$

Дополнительными сдвигами координаты y и параметра M можно добиться того, что

$$y_{\text{new}} = y - \frac{J_k}{2B}, \quad M_{\text{new}} = M - \frac{J_k^2}{4B^2},$$

приводим отображение (3.21) к виду (1.7). Лемма 1.2 доказана.

3.4. Отображения первого возвращения в случае (1, 2). Здесь x одномерно и $y = (y_1, y_2)$ двумерно;

$$A \equiv \lambda, \quad B \equiv \gamma \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

В силу (2.4) и (2.7) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$, для каждого достаточно большого k и всех малых ε , может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 - x^+ &= a\lambda^k x_0 + b_0(y_{k1} - y_1^-) + b_1\gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k1}) + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^2 + |y_{k1} - y_1^-|(|\lambda|^k|x_0| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k|x_0| + \hat{\gamma}^{-k}(|\bar{x}_0| + \|\bar{y}_k\|)\right), \\ \gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k1} - \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k2}) &= \mu + c\lambda^k x_0 + D_0(y_{k1} - y_1^-)^2 + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^3 + |y_{k1} - y_1^-|(|\lambda|^k|x_0| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k|x_0| + \hat{\gamma}^{-k}(|\bar{x}_0| + \|\bar{y}_k\|)\right), \\ y_{k2} - y_2^- &= e\lambda^k x_0 + d_1(y_{k1} - y_1^-) + d_2\gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k1}) + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^2 + |y_{k1} - y_1^-|(|\lambda|^k|x_0| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k|x_0| + \hat{\gamma}^{-k}(|\bar{x}_0| + \|\bar{y}_k\|)\right); \end{aligned} \quad (3.22)$$

где, напомним, $0 < \hat{\lambda} < |\lambda|$, $\hat{\gamma} > \gamma$, и мы, кроме того, предполагаем, что $\hat{\lambda}$ и $\hat{\gamma}$ достаточно близки к $|\lambda|$ и γ соответственно.

Сдвинем начало координат,

$$x_{\text{new}} = x_0 - x^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, \quad y_{1 \text{ new}} = y_{k1} - y_1^-(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^2, \quad y_{2 \text{ new}} = y_{k2} - y_2^-(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^3,$$

так, чтобы первое и третье уравнения из (3.22) не содержали членов, зависящих только от ε , а второе – линейных членов по $(y_1 - y_1^-)$. Здесь $\tilde{\nu}_k^i(\varepsilon) = O(\gamma^{-k})$. Тогда если мы дополнительно разрешим первое уравнение относительно $\bar{x}$ и подставим соответствующее выражения в правую часть остальных уравнений, то (3.22) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= O\left(|y_1| + |\lambda|^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|\right), \\ \gamma^{-k}\left\{\cos k\psi \cdot \bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\|\bar{y}\|)\right\} &= M_1 + c\lambda^k x + \tilde{D}_0 y_1^2 + \\ &+ O\left(|y_1|^3 + |\lambda|^k|x||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1|\right), \\ y_2 - e\lambda^k x - \tilde{d}_1 y_1 &= d_2\gamma^{-k}\left\{(\cos k\psi + \nu_k^1)\bar{y}_2 + (\sin k\psi + \nu_k^2)\bar{y}_1\right\} + \\ &+ O\left(y_1^2 + |\lambda|^k|x||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \hat{\gamma}^{-k}\|\bar{y}\|^2\right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\nu_k^{1,2} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$, коэффициенты $\tilde{D}_0$ и $\tilde{d}_1$ отличаются от D_0 и d_1 соответственно на некоторые малые величины порядка $O(\gamma^{-k})$ и введено обозначение

$$M_1 \equiv \mu - \gamma^{-k}E_0 \cos(k\psi - \vartheta_2 + \dots) + c\lambda^k(x^+ + \dots), \quad (3.24)$$

$$E_0 = \sqrt{(y_1^-)^2 + (y_2^-)^2}, \quad \cos \vartheta_2 = y_1^-/E_0, \quad \sin \vartheta_2 = y_2^-/E_0. \quad (3.25)$$

Сделаем еще одну замену координат

$$x_{\text{new}} = x, \quad y_{1 \text{ new}} = y_1, \quad y_{2 \text{ new}} = y_2 - \tilde{d}_1 y_1.$$

Тогда отображение (3.23) перепишется в следующем виде

$$\bar{x} = O\left(|y_1| + |\lambda|^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|\right),$$

$$\begin{aligned} & (\cos k\psi - d_1 \sin k\psi)\bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\|\bar{y}\|) = \\ & = M_1\gamma^k + c\lambda^k\gamma^k x + \tilde{D}_0\gamma^k y_1^2 + O\left(\gamma^k|y_1|^3 + |\lambda|^k\gamma^k|x||y_1| + \hat{\lambda}^k\gamma^k|x| + \|\bar{y}\||y_1|\right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} y_2 - e\lambda^k x &= d_2\gamma^{-k}\left\{(\cos k\psi + \nu_k^1)\bar{y}_2 + (\sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^2)\bar{y}_1\right\} + \\ & + O\left(y_1^2 + |\lambda|^k|x||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1| + \hat{\gamma}^{-k}\|\bar{y}\|^2\right), \end{aligned}$$

с некоторыми новыми коэффициентами $\nu_k^{1,2} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$.

Введем новые координаты y_1 и y_2 по формулам

$$\begin{aligned} y_{1\text{ new}} &= (\cos k\psi + \nu_k^1)y_2 + (\sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^2)y_1, \\ y_{2\text{ new}} &= \frac{1}{d_2}\gamma^k\left(y_2 - e\lambda^k x\right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Старые координаты выражаются через новые по следующим формулам

$$\begin{aligned} y_2 &= d_2\gamma^{-k}y_{2\text{ new}} + e\lambda^k x, \\ y_1 &= \frac{1}{s_0}y_{1\text{ new}} - \frac{1}{s_0}(\cos k\psi + \nu_k^1)(d_2\gamma^{-k}y_{2\text{ new}} + e\lambda^k x), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$s_0 \equiv s_0(k\psi) = \sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^2. \quad (3.29)$$

Будем рассматривать только такие ψ , когда $s_0 \neq 0$. Тогда замена координат (3.27) невырожденная, и (3.26) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= O(|y_1| + |\lambda|^k|x| + \gamma^{-k}(|y_2| + |\bar{y}|)), \\ \gamma^k\bar{y}_1(\cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^3) - d_2\bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\bar{y}_2) + |\lambda\gamma|^k O(\bar{x}) &= \\ &= \gamma^{2k}s_0M_1 + cs_0\lambda^k\gamma^{2k}x + \tilde{D}_0(s_0)^{-1}\gamma^{2k}y_1^2 + \\ &+ \gamma^{2k}O\left(y_1^3 + |\lambda|^k|x||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \gamma^{-k}\|y\|^2 + \hat{\gamma}^{-k}\|\bar{y}\|^2\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$y_2 = \bar{y}_1 + \gamma^k O\left(y_1^2 + |\lambda|^k|x||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|^2 + \hat{\lambda}^k|x|\right),$$

где $\nu_k^3 = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$ — некоторый малый коэффициент.

Нормируем теперь координаты следующим образом:

$$x = \rho^k\gamma^{-2k}x_{\text{new}}, \quad y_1 = \frac{d_2s_0}{\tilde{D}_0}\gamma^{-2k}y_{1\text{ new}}, \quad y_2 = \frac{d_2s_0}{\tilde{D}_0}\gamma^{-2k}y_{2\text{ new}}, \quad (3.31)$$

где

$$1 < \rho < \frac{1}{|\lambda|\gamma^2}$$

(напомним, что $|\lambda\gamma^2| < 1$ по условию, и что мы предполагаем также, что s_0 отделено от нуля).

Тогда после нормировок (3.31) отображение (3.30) в новых координатах запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \phi_k^1(x, y, \bar{y}), \\ \frac{1}{d_2}\gamma^k\bar{y}_1(\cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^3) - \bar{y}_2 &= \tilde{M} + y_1^2 + \phi_k^2(x, y, \bar{y}), \\ y_2 &= \bar{y}_1 + \phi_k^3(x, y, \bar{y}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где

$$\tilde{M} = \gamma^{4k} \frac{D_0}{d_2^2} \left[\mu - \gamma^{-k} (y_1^- \cos k\psi - y_2^- \sin k\psi + \dots) + c\lambda^k (x^+ + \dots) \right] \quad (3.33)$$

и $\phi_k^l = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$.

Обратим внимание на то, что тригонометрический член

$$C(k\psi) \equiv \frac{1}{d_2} \gamma^k (\cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^3)$$

из (3.32) ограничен при больших k только тогда, когда $\cos k\psi - d_1 \sin k\psi$ близко к нулю, т.е. для значений ψ , близких к

$$\psi = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{d_1} \right) + \pi \frac{j}{k}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.34)$$

Для таких значений ψ коэффициент s_0 из (3.29) отделён от нуля: $s_0^2 = 1 + d_1^2 + \dots$.

Отметим, что значения (3.34) угла ψ при всевозможных j и k плотны в $(0, \pi)$. Это означает, что для любого $Q > 0$ в любой окрестности любой точки $\psi_0 \in (0, \pi)$ существуют интервалы ϑ_k (размеров порядка $Q\gamma^{-k}$) значений ψ такие, что коэффициент $C(k\psi)$ пробегает все значения из интервала $[-Q, Q]$, когда ψ пробегает ϑ_k .

В области значений ψ , где C конечно, мы можем разрешить систему (3.32) относительно $\bar{y}$. Отображение T_k примет вид

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \tilde{\phi}_k^1(x, y, M, C), \\ \bar{y}_2 &= M - y_1^2 + Cy_2 + \tilde{\phi}_k^2(x, y, M, C), \\ \bar{y}_1 &= y_2 + \tilde{\phi}_k^3(x, y, M, C), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $M = -\tilde{M}$, $C = C(k\psi)$, и $\tilde{\phi}_k = o(1)$. Положив теперь $y_{2\text{new}} = y_2 + \tilde{\phi}_k^3$, получаем в точности отображение (1.4) из леммы 1.1.

3.5. Отображения первого возвращения в случае (2, 2). Здесь $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ двумерны,

$$A \equiv \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B \equiv \gamma \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

В силу (2.4) и (2.8) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$ при каждом достаточно большом k и при всех малых ε можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{01} - x_1^+ &= b_{01}(y_{k1} - y_1^-) + b_{11}\gamma^{-k}(\cos k\psi \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \bar{y}_{k1}) + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^2 + \gamma^{-k}|y_{k1} - y_1^-| \|\bar{y}_k\| + \lambda^k \|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\right), \\ \bar{x}_{02} - x_2^+ &= b_{12}\gamma^{-k}(\cos k\psi \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \bar{y}_{k1}) + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^2 + \gamma^{-k}|y_{k1} - y_1^-| \|\bar{y}_k\| + \lambda^k \|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\right), \\ \gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k1} - \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k2}) &= \\ &= \mu + \lambda^k C_1(k\varphi)x_{01} + \lambda^k C_2(k\varphi)x_{02} + D_0(y_{k1} - y_1^-)^2 + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^3 + |y_{k1} - y_1^-|(\lambda^k \|x_0\| + \gamma^{-k} \|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k \|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\right), \\ y_{k2} - y_2^- &= \lambda^k E_1(k\varphi)x_{01} + \lambda^k E_2(k\varphi)x_{02} + d_1(y_{k1} - y_1^-) + \\ &+ d_2\gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k1}) + \\ &+ O\left((y_{k1} - y_1^-)^2 + |y_{k1} - y_1^-|(\lambda^k \|x_0\| + \gamma^{-k} \|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k \|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi, & C_2 &= c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi, \\ E_1 &= e_1 \cos k\varphi + e_2 \sin k\varphi, & E_2 &= e_2 \cos k\varphi - e_1 \sin k\varphi, \end{aligned} \quad (3.37)$$

и, по-прежнему, $0 < \hat{\lambda} < \lambda$, $\hat{\gamma} > \gamma$.

Введем новые координаты (сдвиг начала координат)

$$\begin{aligned} x_{1\text{ new}} &= x_1 - x_1^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, & x_{2\text{ new}} &= x_2 - x_2^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^2, \\ y_{1\text{ new}} &= y_{k1} - y_1^- + \tilde{\nu}_k^3, & y_{2\text{ new}} &= y_{k2} - y_2^- + \tilde{\nu}_k^4. \end{aligned}$$

Здесь малые сдвиги $\tilde{\nu}_k^i(\varepsilon)$ (порядка $O(|\gamma|^{-k})$) выбираются так, чтобы первое, второе и четвертое уравнения из (3.36) не содержали бы свободных членов, а третье — линейного по y_1 члена. Кроме того, мы разрешаем первое и второе уравнения относительно $\bar{x}$ и подставляем полученное выражение в третье и четвертое уравнения. В результате, система (3.36) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= b_0 y_1 + O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + |\bar{y}|)\right), \\ \bar{x}_2 &= O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + |\bar{y}|)\right), \\ \gamma^{-k} \left\{ \cos k\psi \cdot \bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\|\bar{y}\|) \right\} &= \\ &= M_1 + C_1 \lambda^k x_1 + C_2 \lambda^k x_2 + \tilde{D}_0 y_1^2 + O\left(|y_1|^3 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \|x\| + \gamma^{-k} \|\bar{y}\| |y_1|\right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} y_2 - \tilde{d}_1 y_1 - E_1 \lambda^k x_1 - E_2 \lambda^k x_2 &= d_2 \gamma^{-k} \left\{ (\cos k\psi + \nu_k^1) \bar{y}_2 + (\sin k\psi + \nu_k^2) \bar{y}_1 \right\} + \\ &+ O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \gamma^{-k} \|\bar{y}\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \|x\| + \hat{\gamma}^{-k} \|\bar{y}\|^2\right), \end{aligned}$$

где $\nu_k^{1,2} = O(\hat{\gamma}^{-k} \gamma^k)$, коэффициенты $\tilde{D}_0$ и $\tilde{d}_1$ отличаются от D_0 и d_1 соответственно на некоторые малые величины порядка $O(\gamma^{-k})$ и введено обозначение

$$M_1 \equiv \mu - \gamma^{-k} E_0 \cos(k\psi + \vartheta_2 + \dots) + \lambda^k C_0 \cos(k\varphi - \vartheta_1 + \dots); \quad (3.39)$$

(см. формулы (3.25) и (3.10)).

Введем новую координату y_2 по формуле $y_{2\text{ new}} = y_2 - \tilde{d}_1 y_1$. Тогда отображение (3.38) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= b_0 y_1 + O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + \|\bar{y}\|)\right), \\ \bar{x}_2 &= O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + \|\bar{y}\|)\right), \\ (\cos k\psi - \tilde{d}_1 \sin k\psi) \bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\|\bar{y}\|) &= \\ &= M_1 \gamma^k + C_1 \lambda^k \gamma^k x_1 + C_2 \lambda^k \gamma^k x_2 + \tilde{D}_0 \gamma^k y_1^2 + \\ &+ O\left(\gamma^k |y_1|^3 + \lambda^k \gamma^k \|x\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \gamma^k \|x\| + \|\bar{y}\| |y_1|\right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} y_2 - \lambda^k E_1 x_1 - \lambda^k E_2 x_2 &= d_2 \gamma^{-k} \left\{ (\cos k\psi + \nu_k^3) \bar{y}_2 + (\sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^4) \bar{y}_1 \right\} + \\ &+ O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \|x\| + \gamma^{-k} \|\bar{y}\| |y_1| + \hat{\gamma}^{-k} \|\bar{y}\|^2\right), \end{aligned}$$

где $\nu_k^{3,4} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$. Введем новые координаты y по формулам

$$\begin{aligned} y_{1\text{ new}} &= (\cos k\psi + \nu_k^3)y_2 + (\sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^4)y_1, \\ y_{2\text{ new}} &= \gamma^k \frac{1}{d_2} \left(y_2 - E_1 \lambda^k x_1 - E_2 \lambda^k x_2 \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Для старых координат (y_1, y_2) имеем

$$\begin{aligned} y_2 &= \gamma^{-k} d_2 y_{2\text{ new}} + E_1 \lambda^k x_1 + E_2 \lambda^k x_2, \\ y_1 &= \frac{1}{s_0} y_{1\text{ new}} - \frac{d_1}{s_0} (d_2 \cos k\psi + \nu_k^3) (\gamma^{-k} y_{2\text{ new}} + E_1 \lambda^k x_1 + E_2 \lambda^k x_2), \end{aligned} \quad (3.42)$$

где

$$s_0 \equiv s_0(k\psi) = \sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^4. \quad (3.43)$$

Рассмотрим такие ψ , для которых s_0 равномерно отделено от нуля. Тогда (3.40) перепишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{b_0}{s_0} y_1 + O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k} (\|y\| + \|\bar{y}\|)\right), \\ \bar{x}_2 &= O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k} (\|y\| + \|\bar{y}\|)\right), \\ \frac{1}{d_2} \gamma^k \bar{y}_1 (\cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^5 + O(\bar{y}_1)) - \bar{y}_2 (1 + \nu_k^6 + O(\bar{y}_2)) + (\lambda\gamma)^k O(\bar{x}) &= \\ &= \gamma^{2k} s_0 M_1 + \tilde{D}_0(s_0)^{-1} \gamma^{2k} y_1^2 + \tilde{C}_1 s_0 \lambda^k \gamma^{2k} x_1 + \tilde{C}_2 s_0 \lambda^k \gamma^{2k} x_2 + \\ &+ \gamma^{2k} O\left(|y_1|^3 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \gamma^{-k} (\|\bar{y}\| \|y\| + \|y\|^2) + \hat{\lambda}^k \|x\|^2 + \hat{\gamma}^{-k} \|\bar{y}\|^2\right), \\ y_2 &= \bar{y}_1 + O\left(\gamma^k \|y\|^2 + \lambda^k \gamma^k \|x\| \|y\| + \|\bar{y}\| \|y\| + \|\bar{y}\|^2 + \hat{\lambda}^k \gamma^k \|x\|\right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $\nu_k^{5,6} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$, а коэффициенты $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ отличаются от C_1 и C_2 соответственно на величины порядка $O(\hat{\lambda}^k \lambda^{-k})$.

Рассмотрим случай $\lambda\gamma^2 < 1$. Нормируем координаты в (3.44) следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho^{-k} \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} x_{1\text{ new}}, & x_2 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} x_{2\text{ new}}, \\ y_1 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} y_{1\text{ new}}, & y_2 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} y_{2\text{ new}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где ρ — некоторое число такое, что $\lambda\gamma^2 < \rho < 1$.

Заметим, что, поскольку нормировочные коэффициенты в (3.45) асимптотически малы, то области определения новых координат (x, y) будут расти с ростом k и в пределе $k \rightarrow \infty$ будут покрывать все конечные значения. Это позволяет нам считать, что наше отображение будет определено в области $\|(x_{\text{new}}, y_{\text{new}})\| \leq Q$ для некоторого $Q > 0$, причем константа Q может быть сколь угодно большой. В этом случае отображение (3.44) для достаточно больших k в координатах (3.45) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \rho^k O(y_1) + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ \bar{x}_2 &= \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ \frac{1}{d_2} \gamma^k C(k\psi) \bar{y}_1 - \bar{y}_2 &= \tilde{M} + y_1^2 + \left(\frac{\lambda^k \gamma^{2k}}{\rho^k} + \gamma^{-k} \right) O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ y_2 &= \bar{y}_1 + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|). \end{aligned} \quad (3.46)$$

где

$$\tilde{M} = \gamma^{4k} \frac{\tilde{D}_0}{d_2^2} M_1, \quad (3.47)$$

для M_1 имеет место формула (3.39) и

$$C(k\psi) = \cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^5. \quad (3.48)$$

Заметим, что коэффициенты $\tilde{M}$ и $C = d_2^{-1} C(k\psi) \gamma^k$ могут, очевидно, принимать произвольные конечные значения при больших k при изменении исходных параметров μ и ψ .

При этом C будет равномерно ограничено только в том случае, когда $\cos k\psi - d_1 \sin k\psi$ асимптотически близко к нулю, т.е. для значений ψ , близких к тем, которые задаются формулой (3.34). Как мы отмечали, для таких ψ величина s_0 из (3.43) равномерно отделена от нуля: $|s_0| = \sqrt{1 + d_1^2}(1 + \dots)$. Далее мы будем рассматривать только такие ψ .

В результате, в любой ограниченной области значений (x, y, M, C) , отображение (3.44) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= o(1), & \bar{x}_2 &= o(1), \\ \bar{y}_1 &= y_2 + o(1), & \bar{y}_2 &= -\tilde{M} + Cy_2 - y_1^2 + o(1), \end{aligned} \quad (3.49)$$

где через $o(1)$ мы обозначаем функции всех координат и параметров, которые равномерно в любой ограниченной области значений (x, y, M, C) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными до порядка $(r-2)$ по координатам и до порядка $(r-3)$ по параметрам. Если положить $M = -\tilde{M}$ в (3.49), то придём как раз к искомому отображению (1.4).

Рассмотрим теперь случай $\lambda\gamma^2 > 1$ (но по прежнему $\lambda\gamma < 1$). Нормируем сейчас координаты в (3.44) следующим образом

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d_2 b_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} x_{1\text{new}}, & x_2 &= q^k \gamma^{-2k} x_{2\text{new}}, \\ y_1 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} y_{1\text{new}}, & y_2 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} y_{2\text{new}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где q — некоторое число из интервала $q \in (\gamma^{-1}, (\lambda\gamma^2)^{-1})$. Этот интервал непуст и лежит в $(0, 1)$, так как

$$1 > \frac{1}{\lambda\gamma^2} = \frac{\gamma^{-1}}{\lambda\gamma} > \gamma^{-1}.$$

Теперь отображение (3.44) в координатах (3.50) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= y_1 + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ \bar{x}_2 &= \frac{\gamma^{-k}}{q^k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ \frac{1}{d_2} \gamma^k C(k\psi) \bar{y}_1 - \bar{y}_2 &= M + y_1^2 + \frac{b_0}{d_2} \lambda^k \gamma^{2k} (c_{11} \cos k\varphi + c_{12} \sin \varphi + l_k) x_1 + \\ &\quad + \lambda^k \gamma^{2k} q^k O(x_2) + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$y_2 = \bar{y}_1 + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|),$$

где $l_k = O((\hat{\lambda}/\lambda)^k)$ — некоторый малый коэффициент, а для M и $C(k\psi)$ имеют место формулы (3.47) и (3.48) (см. выше).

В отображении (3.51), по сравнению с (3.46), появляется еще один независимый параметр, помимо M и $C = \gamma^k C(k\psi)$. Это параметр

$$B = B(k\varphi) \equiv \frac{b_0}{d_2} \lambda^k \gamma^{2k} (c_{11} \cos k\varphi + c_{12} \sin \varphi + l_k).$$

Поскольку $\lambda\gamma^2 > 1$, то коэффициент $B(k\varphi)$ уже не мал (как в случае $\lambda\gamma^2 < 1$) и может принимать, при изменении φ , любые конечные значения при больших k . Ограниченным значениям B отвечают значения φ вблизи

$$\varphi = -\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) + \pi \frac{j}{k}, \quad j \in Z. \quad (3.52)$$

В области ограниченных значений (x, y, M, B, C) отображение (3.51) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= y_1 + o(1), & \bar{x}_2 &= o(1), \\ \bar{y}_2 &= -M - Bx_1 + Cy_1 - y_1^2 + o(1), & \bar{y}_1 &= y_2 + o(1). \end{aligned}$$

Если поменять знаки у M и B , то приходим к отображению (1.5).

Таким образом, лемма о рескейлинге доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Доказательство теорем 1.1–1.4 базируется на леммах о рескейлинге. Эти леммы позволяют нам провести сравнительно несложный анализ отображений первого возвращения $T_k(\varepsilon)$, которые при $\varepsilon \in \Delta_k$ принимают вид стандартных квадратичных отображений. Нам удобно доказывать теоремы 1.1–1.4 в следующей последовательности: сначала мы доказываем теорему 1.2, затем теорему 1.4 (для которых требуется по существу только линейный анализ неподвижных точек отображений первого возвращения), затем доказываем теорему 1.3. Теорема 1.1 выводится нами в процессе доказательства теорем 1.2 и 1.4.

4.1. Доказательство теоремы 1.2 и пунктов 1, 2 теоремы 1.1. Сначала проведем анализ неподвижных точек отображений первого возвращения (1.2)–(1.5) и (1.7) для того, чтобы найти значения параметров M, B, C , при которых у указанных отображений есть неподвижные точки с мультипликаторами на единичной окружности.

4.1.1. Отображение (1.2). Рассмотрим одномерное отображение параболы

$$\bar{y} = M - y^2.$$

Пусть $\nu_1 \neq 0$ — мультипликатор его некоторой неподвижной точки. Тогда координата y этой неподвижной точки удовлетворяет уравнениям $M = y + y^2$ и $2y = -\nu_1$, и мы получаем, что отображение параболы имеет неподвижную точку с данным мультипликатором ν_1 при

$$M = \frac{\nu_1^2}{4} - \frac{\nu_1}{2}. \quad (4.1)$$

Так как отображение (1.2) близко к отображению параболы вместе с достаточным количеством производных, то оно также будет иметь неподвижную точку с мультипликатором ν_1 при значении $M = M_k(\nu_1)$, которое будет асимптотически близко при $k \rightarrow \infty$ к значению (4.1). Остальные мультипликаторы неподвижной точки (один в случае (1,1) и два в случае (2,1)) всегда меньше единицы по модулю — они стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

4.1.2. Отображение (1.3). Рассмотрим отображение Эно (предельное для (1.3)):

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M + Bx - y^2.$$

Пусть ν_1 и ν_2 — мультипликаторы его некоторой неподвижной точки (тогда они либо оба действительны, либо образуют комплексно сопряженную пару чисел; положим также, что $\nu_1\nu_2 \neq 0$). Координаты $x = y$ этой неподвижной точки удовлетворяют уравнению $M = y(1 - B) + y^2$. При этом, характеристическое уравнение имеет вид $\nu^2 + 2y\nu - B = 0$. Тогда легко получить, что

$$B(\nu_1, \nu_2) = -\nu_1\nu_2, \quad M(\nu_1, \nu_2) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}(\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_1\nu_2 - 2). \quad (4.2)$$

Ясно, что у отображения (1.3) также будет существовать неподвижная точка, имеющая данные мультипликаторы ν_1 и ν_2 , при значениях M и B асимптотически близких к тем, что даются формулой (4.2). Третий мультипликатор всегда меньше единицы по модулю (стремится к нулю, когда $k \rightarrow \infty$).

4.1.3. *Отображение (1.4).* Рассмотрим отображение (предельное для (1.4)):

$$\bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2.$$

Пусть ν_1 и ν_2 — мультипликаторы его некоторой неподвижной точки (тогда, снова, они либо оба действительны, либо образуют комплексно сопряженную пару чисел; предполагаем, что $\nu_1\nu_2 \neq 0$). Координаты $y_1 = y_2 = y$ этой неподвижной точки удовлетворяют уравнению $M = y(1 - C) + y^2$, а характеристическое уравнение имеет вид $\nu^2 - C\nu + 2y = 0$. Тогда легко получить, что

$$C = \nu_1 + \nu_2, \quad M = \frac{\nu_1\nu_2}{2}(1 - C) + \frac{(\nu_1\nu_2)^2}{4}. \quad (4.3)$$

У отображения (1.4) также будет существовать неподвижная точка, имеющая данные мультипликаторы ν_1 и ν_2 , при M и C асимптотически близких к заданным формулой (4.3). Остальные мультипликаторы (третий в случае (1,2) или третий и четвертый в случае (2,2)) всегда меньше единицы по модулю.

4.1.4. *Отображение (1.5).* Рассмотрим трехмерное отображение (предельное для (1.5)):

$$\bar{x} = y_1, \quad \bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Bx + Cy_2 - y_1^2. \quad (4.4)$$

Пусть ν_1, ν_2, ν_3 — ненулевые мультипликаторы его некоторой неподвижной точки (тогда либо они все три действительны, либо один действительный, а другие два образуют комплексно сопряженную пару чисел). Координаты $x = y_1 = y_2$ этой неподвижной точки удовлетворяют уравнению $M = x(1 - B - C) + x^2$, а характеристическое уравнение имеет вид $-\nu^3 + C\nu^2 - 2x\nu + B = 0$. Тогда легко получить, что

$$B = \nu_1\nu_2\nu_3, \quad C = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad M = (\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)(1 - B - C) + \frac{(\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)^2}{4}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что у исходного отображения (1.5) также будет существовать неподвижная точка, имеющая данные мультипликаторы ν_1, ν_2, ν_3 , при значениях параметров M, B и C , асимптотически близких к тем, что заданы формулой (4.5). Еще один мультипликатор этой точки при больших k всегда меньше единицы по модулю.

Таким образом, для любого наперед заданного набора $\{\nu_1, \dots, \nu_{d_e}\}$ из d_e мультипликаторов (где $d_e = 1$ в случае отображения (1.2), $d_e = 2$ для отображений (1.3) и (1.4) и $d_e = 3$ для отображения (1.5)) у каждого из отображений (1.2)–(1.5) существуют такие значения параметров, $M = M_k$, $B = B_k$, $C = C_k$, при которых имеется неподвижная точка, у которой d_e мультипликаторов равны в точности $\nu_1, \dots, \nu_{d_e}$. Заметим при этом, что указанные значения M_k, B_k, C_k параметров будут равномерно ограничены по k . Это влечет, в силу (1.6), что для соответствующих значений исходных параметров $(\mu, \varphi, \psi) = (\mu_k, \varphi_k, \psi_k)$ при $k \rightarrow +\infty$ мы имеем, во первых, $\mu_k \rightarrow 0$, а во-вторых, в случае $d_e \geq 2$, всегда можно указать подпоследовательность в (φ_k, ψ_k) , сходящуюся к точке (φ_0, ψ_0) , где φ_0 и ψ_0 — значения угловых аргументов комплексных мультипликаторов точки O диффеоморфизма f_0 . Таким образом мы получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Для любого наперед заданного набора мультипликаторов $\{\nu_1, \dots, \nu_{d_e}\}$ существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ значений параметров ε такая, что диффеоморфизм f_ε имеет при $\varepsilon = \varepsilon_k$ однообходную периодическую траекторию, у которой d_e мультипликаторов равны в точности $\nu_1, \dots, \nu_{d_e}$, а остальные мультипликаторы лежат строго внутри единичного круга.*

Теорема 1.2 вытекает из этого утверждения практически сразу. Действительно, в области Нью-хауса δ_j вблизи любого $\varepsilon \in \delta_j$ существуют значения параметров, отвечающих гомоклиническим касаниям к точке O , для которых условия **A–D** выполнены; как мы только что установили, сколь угодно малые возмущения в рамках одного и того же семейства f_ε дают периодические траектории (однообходные по отношению к вторичным гомоклиническим касаниям) с любым наперед заданным набором мультипликаторов из d_e мультипликаторов на единичной окружности, в полном соответствии с теоремой 1.2.

Заметим, что в случае теоремы 1.1, мы имеем $d_e = 1$, т.е. речь идет о периодических траекториях, имеющих либо мультипликатор $\nu_1 = +1$, либо $\nu_1 = -1$. Здесь следствие 4.1 немедленно дает для интервалов Ньюхауса δ_j пункты 1 и 2 теоремы 1.1.

4.2. Доказательство теоремы 1.4 и пункта 3 теоремы 1.1. Здесь мы снова используем следствие 4.1, но уже для грубых периодических траекторий, у которых мультипликаторы $\nu_1, \dots, \nu_{d_e}$ не равны по модулю единице. Тогда получаем всего $d_e + 1$ различных типов грубых траекторий в соответствии с тем, сколько из этих d_e мультипликаторов лежат вне единичного круга: 0, 1, ... или все d_e . Первый случай отвечает устойчивой периодической траектории.

Напомним, что произвольно близко к любому значению параметров из областей Ньюхауса δ_j существует значение ε , для которого точка O имеет траекторию простого гомоклинического касания. Согласно следствию 4.1, сколь угодно близко к этому значению ε существует значение параметра, при котором f_ε имеет грубую периодическую траекторию в точности с d мультипликаторами вне единичного круга, для любого наперед заданного $d = 0, \dots, d_e$. Так как эта траектория грубая, то она существует в некоторой области значений параметров. Повторяя рассуждения, внутри этой области мы находим меньшую область, отвечающую существованию ещё одной грубой периодической траектории с d мультипликаторами вне единичного круга, с тем же самым d , или с любым другим d от 0 до d_e , и т. д. Повторяя эту процедуру бесконечно много раз для каждого $d = 0, \dots, d_e$, мы получаем последовательность вложенных областей такую, что значения ε из пересечения этих областей отвечают существованию бесконечного множества грубых периодических траекторий со всевозможными наборами из $0, 1, \dots, d_e$ мультипликаторов, лежащих вне единичного круга. По построению, полученное множество значений ε – это пересечение счётного числа открытых и плотных в δ_j множеств, т.е. множество второй категории. Теорема доказана.

4.3. Доказательство теоремы 1.3. Так же как и при доказательстве теоремы 1.4, достаточно показать, что отображения первого возвращения $T^{(k)}$ имеют в некоторой области параметров (M, B) , (M, C) или (M, C, B) устойчивую замкнутую инвариантную кривую. Чтобы получить счётное число замкнутых инвариантных кривых, применяется конструкция с вложенными областями, такая же, как и при доказательстве теоремы 1.4.

Рассмотрим сначала случаи седло-фокуса $(1, 2)$ и седло-фокуса $(2, 2)$ с $\lambda\gamma^2 < 1$. Согласно лемме 2.1, отображение $T^{(k)}$ в этом случае приводится к виду

$$\bar{x} = o(1), \quad \bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2 + o(1). \quad (4.6)$$

Предельное отображение

$$\bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2 \quad (4.7)$$

имеет неподвижную точку с мультипликаторами $\nu_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ при значениях параметров (M, C) на следующей кривой (см. формулу (4.3)):

$$L : \left\{ M = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}C, \quad C = 2 \cos \omega \right\}$$

(т.е. $|C| < 2$). При $\omega \neq \pi/2, 2\pi/3$ устойчивость замкнутой инвариантной кривой, которая рождается при бифуркациях такой неподвижной точки, определяется знаком первой ляпуновской величины. Напомним, что ляпуновская величина G_1 – это коэффициент при кубическом члене в записанной в полярных координатах (ρ, θ) нормальной форме $\bar{\rho} = \rho + G_1\rho^3 + o(\rho^3)$, $\bar{\theta} = \theta + \omega + O(r^2)$ отображения вблизи неподвижной точки. Для отображения (4.7) несложно подсчитать, что $G_1 = -1 - \frac{1}{2(1 - \cos \omega)}$, так что ляпуновская величина здесь всегда отрицательна. Так как G_1 – коэффициент при кубическом члене, то, следовательно, ляпуновская величина останется отрицательной для всех отображений, C^3 -близких к (4.7).

Рассмотрим теперь отображение (4.6). При каждом достаточно большом k оно также имеет кривую в пространстве параметров вблизи кривой L , отвечающую существованию неподвижной точки с двумя мультипликаторами $e^{\pm i\omega}$ (а остальные мультипликаторы меньше единицы по модулю). Мы обозначим эту кривую через L_k . В ограничении на центральное многообразие вблизи неподвижной точки отображение (1.4) C^{r-2} -близко к (4.7). Так как $r \geq 5$, то получаем, что соответствующая

ляпуновская величина для отображения (1.4) отрицательна; следовательно, при переходе значений параметров через L_k , рождается замкнутая устойчивая инвариантная кривая, и она существует в некоторой области параметров, что и требовалось.

В случае седло-фокуса $(2, 2)$ с $\lambda\gamma^2 > 1$ отображение первого возвращения $T^{(k)}$ приводится к виду

$$\bar{x}_2 = o(1), \quad \bar{x}_1 = y_1, \quad \bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 + Bx_1 - y_1^2 + o(1). \quad (4.8)$$

Здесь при малых B у неподвижной точки, имеющей мультипликаторы $\nu_{1,2} = e^{\pm i\omega}$, $\nu_3 = B + o(1)$, $\nu_4 = o(1)$, ляпуновская величина также отрицательна. Это непосредственно вытекает из того, что при $B = 0$ отображение (4.8) вырождается при $k \rightarrow +\infty$ в отображение (4.7) по координатам y_1 и y_2 , а отрицательность ляпуновской величины для последнего отображения мы только что установили. Таким образом, мы и в этом случае получаем, что у отображения первого возвращения для каждого достаточно большого k при значениях параметров из некоторой области существует устойчивая замкнутая инвариантная кривая.

В случае седло-фокуса $(2, 1)$ с $d_e = 2$, т.е. при $\lambda\gamma > 1$, для нахождения устойчивых инвариантных кривых мы будем использовать уточненную форму отображения первого возвращения, которая выведена в лемме 1.2. Это так называемое обобщенное отображение Эно вида

$$\bar{x}_1 = y, \quad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + Q_k x_1 y + o(Q_k), \quad (4.9)$$

где $Q_k \neq 0$ и $Q_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Это отображение было исследовано в [5, 20], где, в частности, было показано, что для значений параметров (M, B) из некоторой области отображение (4.9) при достаточно больших k имеет устойчивую замкнутую инвариантную кривую. Именно, такая область примыкает к точке $(M = M_k^*, B = B_k^*)$, где

$$M_k^* = 3 - Q_k + o(Q_k), \quad B_k^* = -1 + Q_k/2 + o(Q_k),$$

для которой отображение (4.9) имеет неподвижную точку с мультипликаторами $(-1, -1)$.

Таким образом, во всех случаях с $d_e \geq 2$ у семейства f_ε существует счетная последовательность областей $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k$, накапливающихся к $\varepsilon = 0$ при $k \rightarrow \infty$, таких, что при $\varepsilon \in \tilde{\Delta}_k$ диффеоморфизм f_ε имеет устойчивую замкнутую инвариантную кривую. Чтобы получить счётное число замкнутых инвариантных кривых для плотного множества значений параметров из областей Ньюхауса δ_j , достаточно применить конструкцию с вложенными областями из доказательства теоремы 1.4.

Это завершает доказательство теоремы 1.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I// Мат. сб. — 1972. — 88, № 4. — С. 475–492; II// Мат. сб. — 1973. — 90, № 1. — С. 139–157.
2. Гонченко С. В. Об устойчивых периодических движениях систем, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой// Мат. заметки. — 1983. — 33, № 5. — С. 745–755.
3. Гонченко С. В. Бифуркации удвоения периода в системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой// В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений (под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой). — 1989. — С. 78–96.
4. Гонченко С. В. Гомоклинические касания, Ω -модули и бифуркации// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — 236.
5. Гонченко С. В., Гонченко В. С. О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН (в печати).
6. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Докл. АН СССР. — 1991. — 320, № 2. — С. 269–272.
7. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай)// Докл. РАН. — 1993. — 329, № 4 — С. 404–407.
8. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Докл. РАН. — 1993. — 330, № 2. — С. 144–147.

9. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1997. — 216. — С. 7–118.
10. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса// Тр. Междунар. конф., посв. 90-летию Л. С. Понтрягина. — М.: ВИНТИ, 1999. — С. 67–129.
11. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми// Докл. АН СССР. — 1986. — 286, № 5. — С. 1049–1053.
12. Гонченко С. В., Шильников Л. П. Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической траекторией// Укр. мат. ж. — 1987. — 39, № 1. — С. 21–28.
13. Гонченко С. В., Шильников Л. П. Инварианты Ω -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией// Укр. мат. ж. — 1990. — 42, № 2. — С. 153–159.
14. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — 56, № 6. — С. 1165–1196.
15. Овсянников И. М., Шильников Л. П. Системы с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса и спиральный хаос// Мат. сб. — 1991. — 182. — С. 1043–1073.
16. Стенькин О. В., Шильников Л. П. О бифуркациях периодических траекторий в окрестности негрубой гомоклинической кривой// Дифференц. уравнения. — 1997. — 33, № 3. — С. 377–384.
17. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора// Мат. сб. — 1998. — 189, № 2. — С. 137–160.
18. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре—Биркгофа// Мат. сб. — 1967. — 74 (116), № 4. — С. 378–397.
19. Gonchenko S. V. Dynamics and moduli of Ω -conjugacy of 4D-diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic orbit to a saddle-focus fixed point// Amer. Transl. Math. — 2000. — 200, № 2. — С. 107–134.
20. Gonchenko S. V., Gonchenko V. S. On Andronov—Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies/ Preprint № 556, Berlin: WIAS, 2000.
21. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Sten'kin O. V. On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori// Proc. of Int. Conf. dedicated to 100th Birthday of A. A. Andronov, Vol. 1/ Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics. — Nizhny Novgorod: Inst. of Appl. Phys. RAS, Univ. of Nizhny Novgorod, 2002. — С. 80–102.
22. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves// Physica D. — 62, №№ 1–4. — С. 1–14.
23. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits// Interdisc. J. Chaos. — 1996. — 6, № 1. — С. 15–31.
24. Newhouse S. Diffeomorphisms with infinitely many sinks// Topology. — 1974. — 13. — С. 9–18.
25. Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms// Publ. Math. IHES. — 1979. — 50. — С. 101–151.
26. Palis J., Viana M. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks// Ann. Math. — 1994. — 140. — С. 91–136.
27. Romero N. Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions// Ergod. Theory and Dynam. Syst. — 1995. — 15. — С. 735–757.
28. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors// Int. J. Bifurcations Chaos. — 1993. — 1, № 4. — С. 1123–1139.
29. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I. — World Scientific, 1998.
30. Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points// В кн.: Differ. and Comb. Topology. — Princeton Univ. Press, 1965. — С. 63–80.
31. Tatjer J. C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies// Ergod. Theory and Dynam. Systems. — 2001. — 21. — С. 249–302.
32. Turaev D. V. On dimension of non-local bifurcational problems// Int. J. Bifurcation Chaos. — 1996. — 6, № 5. — С. 919–948.

ТЕОРИЯ ФРОНТОВ НА 2-СФЕРЕ И ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

© 2003 г. Р. УРИБЕ-ВАРГАС

Аннотация. Теория особенностей каустик и волновых фронтов на 2-сфере, а также теория лежандровых кривых (контактного) многообразия $ST^*\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{R}P^3$ (состоящих из элементов, имеющих контактное касание со сферой $\mathbb{S}^2$), применяется для получения новых результатов о кривых в трехмерном евклидовом пространстве. На этом пути теория особенностей каустик и волновых фронтов дает новый взгляд на дифференциальную геометрию кривых в трехмерном евклидовом пространстве.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение и результаты	118
2.	Многообразие контактных элементов, лежандровы подмногообразия и их фронты . . .	121
3.	Двойственный, производный фронты и каустика сферического фронта	122
4.	Доказательство теоремы 2	124
5.	Перестройка уплощения и перестройки лежандровых кривых	124
	Список литературы	125

1. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Теория особенностей (волновых) фронтов на 2-сфере и теория лежандровых кривых на многообразии контактных элементов сферы $ST^*\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{R}P^3$ глубоко связаны с теорией гладких кривых в трехмерном евклидовом пространстве.

Когда точка движется по кривой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, ее естественный трехгранник (трехгранник Френе) $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, перенесенный параллельно в начало координат, определяет жесткое движение вокруг начала координат, называемое *движением Френе*. Мгновенная ось вращения движения Френе, называемая *осью Дарбу*, определяется вектором Дарбу: $\tilde{\mathbf{d}} = \tau \mathbf{t} + k \mathbf{b}$, где k и τ — кривизна и кручение кривой соответственно.

Концевые точки перенесенных векторов трехгранника Френе $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, а также вектора Дарбу $\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{d}}/\sqrt{k^2 + \tau^2}$ описывают четыре кривые $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ на единичной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, называемые соответственно *касательной*, *нормальной* и *бинормальной индикатрисами* и *индикатрисой Дарбу* кривой γ .

Определение. Уплощением (вершиной Дарбу) гладкой иммерсированной кривой $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется точка, в которой соприкасающаяся плоскость (соответственно, ось Дарбу) стационарна.

Замечание. Точка кривой $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ кривизны k и кручения τ является точкой уплощения (вершиной Дарбу) в том и только том случае, если $\tau = 0$ (соответственно, $(\tau/k)' = 0$) в этой точке.

Лемма 1. Кривая общего положения в трехмерном евклидовом пространстве допускает уплощение в точке в том и только том случае, если ее касательная индикатриса имеет сферическое изгибание инфлексии в соответствующей точке. В такой точке радиус соприкасающейся окружности касательной индикатрисы имеет максимально возможное значение 1.

Пусть $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — гладкая иммерсированная кривая общего положения. Для вершины Дарбу кривой γ радиус соприкасающейся окружности касательной индикатрисы $\mathbf{T}_\gamma$ — критический [12]. Обратное не всегда верно. Вершина Дарбу кривой γ , для которой радиус соприкасающейся

окружности касательной индикатрисы имеет локальный максимум (минимум), называется M - D -вершиной (соответственно, m - D -вершиной).

Пусть γ — гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$. Будем обозначать через $M(\gamma)$, $m(\gamma)$ и $F(\gamma)$ число ее M - D -вершин, m - D -вершин и уплощений соответственно. Имеется универсальное соотношение между числом точек, в которых ось Дарбу стационарна (числом M - D -вершин и m - D -вершин) и числом точек в которых соприкасающаяся плоскость стационарна (числом уплощений).

Теорема 1 (см. [12]). Для любой замкнутой кривой $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения

$$m(\gamma) - M(\gamma) - F(\gamma) = 0.$$

Бинормальная индикатриса и индикатриса Дарбу пространственной кривой общего положения могут иметь полукубические каспы, тогда как их нет у касательной индикатрисы.

Лемма 2. Точка гладко иммерсированной кривой общего положения — уплощающая (вершина Дарбу) в том и только том случае, если бинормальная индикатриса (соответственно, индикатриса Дарбу) имеет полукубический касп в этой точке.

Можно рассматривать касательную и бинормальную индикатрисы как равноудаленные (эквидистантные) и двойственные волновые фронты на единичной 2-сфере, тогда как индикатрису Дарбу можно рассматривать как каустику таких фронтов: она является огибающей однопараметрического семейства больших окружностей, нормальных к касательной индикатрисе (касательная и бинормальная индикатрисы имеют ту же систему нормальных больших окружностей). С этой точки зрения исследование вершин Дарбу и уплощений пространственных кривых будет применяться к изучению особенностей каустик и волновых фронтов на сфере.

Если пространственная кривая зависит от одного параметра, то для некоторых значений этого параметра число уплощений и/или число вершин Дарбу может меняться. Существуют три явления, называемые перестройками, связанные с вершинами Дарбу и уплощениями, которые могут происходить для изолированных значений параметра в однопараметрических семействах гладких кривых общего положения. Два из них могут быть получены из классификации локальных перестроек [4] одномерных каустик и волновых фронтов:

- 1) *биуплощение* (кривая допускает точку, в которой $\tau = 0$, $\tau' = 0$ и $\tau'' \neq 0$). В этом случае рождаются или убиваются два замкнутых уплощения кривой (см. рис. 1 и ср. с леммой 2).
- 2) *двойная вершина Дарбу* (кривая допускает точку, в которой $(\tau/k)' = 0$, $(\tau/k)'' = 0$ и $(\tau/k)''' \neq 0$). В этом случае рождаются или убиваются две замкнутые вершины Дарбу — M - D -вершина и m - D -вершина (см. рис. 2 и ср. с леммой 2).

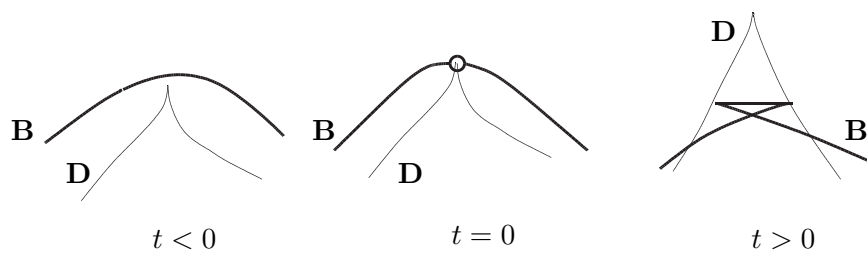


Рис. 1. Индикатриса Дарбу и бинормальная индикатриса в течение перестройки биуплощения.

Имеется только одна локальная перестройка в однопараметрическом семействе гладких кривых, называемая *перестройкой перегиба*, для которой соответствующие перестройки индикатрисы Дарбу и бинормальной индикатрисы не принадлежат списку Арнольда перестроек одномерных каустик и волновых фронтов.

Определение. Перегибом гладкой иммерсированной кривой в аффинном или евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ называется точка, в которой первая и вторая производные кривой линейно зависимы (точка кривой называется *точкой перегиба*, если ее кривизна обращается в нуль в этой точке).

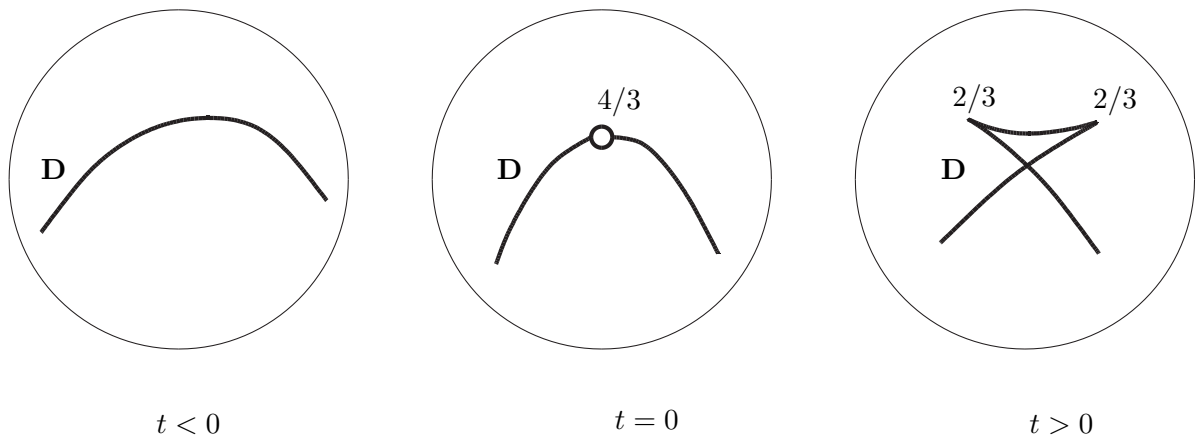


Рис. 2. Индикатриса Дарбу в течение перестройки двойной вершины Дарбу.

Кривая общего положения не имеет перегибов. Тем не менее, однопараметрическое семейство кривых общего положения может иметь при изолированных значениях параметра кривую с одним изолированным перегибом.

В точке перегиба касательная индикатриса имеет полукубический касп. В частности, в однопараметрическом семействе кривых общего положения касательная индикатриса подвергается ‘ $u - \gamma$ ’ перестройке (см. рис. 3). Такой перестройки нет в однопараметрических семействах волновых фронтов: каспы волновых фронтов в однопараметрических семействах общего положения возникают (или исчезают) парами.

Будут изучены перестройки индикатрисы Дарбу и бинормальной индикатрисы пространственной кривой в точке перегиба (они являются нестандартными перестройками каустик и волновых фронтов). Это изучение позволит понять взаимодействие между вершинами Дарбу и уплощениями в процессе перестройки перегиба в 1-семействах пространственных кривых общего положения.

Обозначим m -D-вершины через m , M -D-вершины через M , уплощения через F и перегибы через I .

Теорема 2 (см. [12]). *При перестройке перегиба кривая претерпевает следующие переходы в окрестности точки перегиба (возможны оба направления перехода):*

$$m \leftrightarrow I \leftrightarrow mFmFm.$$

Имеется содержательная геометрия, связанная с перегибами. Ее часть возникает в переходах касательной, нормальной, бинормальной индикатрисах, а также индикатрисе Дарбу при перестройке перегиба. См. рис. 3–6, которые можно рассматривать как дополнение к теореме 2.

Замечание. Угловая скорость ω_1 движения Френе вокруг оси Дарбу зависит от параметризации. Кроме того, ось Дарбу (которая всегда лежит в выпрямляющей плоскости, определенной $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$) также имеет мгновенную угловую скорость ω_2 вокруг начала координат в выпрямляющей плоскости. Эта угловая скорость ω_2 также зависит от параметризации. Из полученных результатов следует, что *отношение $K_n = \omega_2/\omega_1$ этих угловых скоростей есть геодезическая кривизна нормальной индикатрисы, не зависящая от параметризации.*

Вершины Дарбу кривой соответствуют уплощениям ее касательной индикатрисы [12]. Для ответа на вопрос Айкарди [3] о геометрическом смысле уплощений нормальной индикатрисы кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, полученные результаты применяются к случаю, когда фронт есть касательная индикатриса кривой γ [11].

Теорема 3. *Уплощения нормальной индикатрисы кривой в $\mathbb{R}^3$ соответствуют точкам, в которых отношение $K_n = \omega_2/\omega_1$ угловых скоростей ω_1 и ω_2 критично.*

Замечание. Другая очевидная интерпретация: уплощения нормальной индикатрисы соответствуют каспам второй каустики, т.е. каустике каустики.

В разделе 2 напоминаются некоторые факты контактной геометрии,. Затем в разделе 3 формулируются некоторые результаты о сферических кривых в общем контексте контактной геометрии, лежандровых кривых и их фронтов.

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду за полезные замечания после внимательного прочтения начальной версии этой статьи, а также М. Э. Казаряну за полезные обсуждения, вопросы и замечания.

2. МНОГООБРАЗИЕ КОНТАКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЛЕЖАНДРОВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ И ИХ ФРОНТЫ

Напомним некоторые основные факты контактной геометрии и лежандровых подмногообразий с их фронтами [2]. Рассмотрим частный класс контактных многообразий, определенный ниже: многообразие коориентированных контактных элементов данного многообразия B^n .

Гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ касательного пространства к n -мерному гладкому многообразию B^n называется *контактным элементом* B^n . Коориентацией контактного элемента называется выбор одной из двух частей касательного пространства, на которые его делит эта гиперплоскость. Коориентация контактного элемента риманова многообразия определяется выбором направления прямой, нормальной к нему.

Множество коориентированных контактных элементов на данном n -мерном многообразии B^n расслаивается над B^n : слой над точкой есть сферическое кокасательное пространство B^n в этой точке, называемой *точкой контакта*. Таким образом, множество всех коориентированных контактных элементов B^n образует пространство расслоения E^{2n-1} гладкого расслоения

$$\pi : ST^*B^n \rightarrow B^n$$

со слоем $\mathbb{S}^{n-1}$. Оно называется *сферическим кокасательным расслоением* ST^*B^n над B^n .

Это расслоение E^{2n-1} снабжено естественным «тавтологическим» полем касательных гиперплоскостей. Гиперплоскость тавтологического поля в точке p расслоения E^{2n-1} есть прообраз при отображении π_* гиперплоскости в пространстве, касательном к B^n , которая представляется точкой p многообразия E^{2n-1} .

Тавтологическое поле гиперплоскостей на E^{2n-1} называется *естественной контактной структурой* многообразия контактных элементов на B^n .

Замечание. Эту естественную контактную структуру можно также определить с помощью *правила скольжения*: для заданной кривой в пространстве E^{2n-1} коориентированных контактных элементов ее вектор скорости принадлежит гиперплоскости контактной структуры, если скорость точки контакта в базовом многообразии принадлежит контактному элементу.

Пример (см. [2]). Многообразие коориентированных контактных элементов двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ есть проективное пространство $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3 / \pm 1$. Естественная контактная структура $ST^*\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{S}^3 / \pm 1$ получается из поля плоскостей, ортогональных слоям расслоения Хопфа $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ при проекции $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 / \pm 1$. Более точно, для заданного мнимого кватерниона u длины 1 умножение всех кватернионов на u *справа* дает комплексную структуру на пространстве кватернионов $\mathbb{R}^4$, зависящую от u . Для каждого кватерниона q оператор умножения на q *слева* в пространстве кватернионов $\mathbb{R}^4$ является u -комплексным. Рассмотрим расслоение Хопфа, соответствующее мнимому кватерниону u длины 1:

$$\pi_u : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}_u^2 \simeq \mathbb{CP}^1,$$

связывая с каждой ненулевой точкой u -комплексной прямой, проходящей через 0, ее направление. Слой этого главного $\mathbb{S}^1$ -расслоения есть окружность $\{z \cdot e^{ut} : t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\}$, где $z \in \mathbb{S}^3$ — точка слоя. На сфере $\mathbb{S}^3$ кватернионов длины 1 имеется поле $\mathbf{u}$, касательное к слоям расслоения π_u :

$$\mathbf{u}(z) = z \cdot u = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (z \cdot e^{ut}).$$

Поле плоскостей на $\mathbb{S}^3$, ортогональных векторам поля $\mathbf{u}$, задает на $\mathbb{S}^3$ контактную структуру, называемую *u -структурой*.

Подмногообразие контактного многообразия E^{2n-1} называется *интегральным*, если его касательное пространство в каждой точке принадлежит контактной гиперплоскости.

Определение. *Лежандровым подмногообразием* контактного многообразия называется интегральное многообразие максимальной размерности, равной $n - 1$ для $(2n - 1)$ -мерного многообразия. В частности, *лежандровой кривой* трехмерного многообразия E^3 , снабженного контактной структурой, называется иммерсированная кривая в E^3 , касательная к которой в каждой точке лежит в плоскости контактной структуры.

Пример. Каждая коориентированная кривая γ , иммерсированная в поверхность B^2 , определяет лежандрову кривую в многообразии $E^3 = ST^*B^2$ коориентированных контактных элементов B^2 . Эта лежандрова кривая состоит из соответствующих коориентированных контактных элементов на B^2 , касательных к γ . Точка на B^2 также определяет лежандрову кривую в E^3 . Эта кривая состоит из коориентированных контактных элементов B^2 в (т.е. это слой сферического кокасательного расслоения).

Определение. *Фронт* лежандровой кривой $L : \mathbb{S}^1 \rightarrow E^3$ многообразия коориентированных контактных элементов поверхности B^2 называется проекция $\pi \circ L(\mathbb{S}^1) \subset B^2$ этой лежандровой кривой на поверхность B^2 .

Коориентированные контактные элементы, образующие исходную лежандрову кривую, определяют коориентацию этого фронта.

В дальнейшем будем рассматривать многообразие $ST^*\mathbb{S}^2$ коориентированных контактных элементов двумерной сферы, ее лежандровы кривые, а также их фронты.

Естественный трехгранник. Каждому коориентированному контактному элементу ориентированной двумерной сферы сопоставим его *естественный трехгранник* **a**, **b**, **c** следующим образом. Точка контакта на $\mathbb{S}^2$ определяет единичный вектор **a**. Обозначим через **c** коориентированный нормальный единичный вектор; этот единичный вектор **b**, касательный к контактному элементу, выбираем так, чтобы пара **b**, **c** задавала бы положительную ориентацию сферы.

Таким образом, сопоставляем *естественный трехгранник* волновому фронту путем выбора естественного трехгранника коориентированного контактного элемента, касательного к фронту. На самом деле, каждой точке лежандровой кривой сопоставляется соответствующий трехгранник.

3. ДВОЙСТВЕННЫЙ, ПРОИЗВОДНЫЙ ФРОНТЫ И КАУСТИКА СФЕРИЧЕСКОГО ФРОНТА

С каждой коориентированной кривой на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ радиуса 1 В. И. Арнольд в [2] связывал следующие три кривые.

Определение (см. [2]). Кривая, *двойственная* к заданной коориентированной кривой на сфере, есть кривая, полученная из исходной перемещением ее на расстояние $\pi/2$ вдоль нормалей в сторону, определяемую коориентацией.

Это определение пригодно не только к гладко иммерсированным кривым, но и к волновым фронтам, имеющим каспы (полулокального типа, или, более общо, типа $x^a = y^{a+1}$).

Двойственная кривая сама по себе естественно коориентирована и является волновым фронтом, равноудаленным от исходного (лежащим на расстоянии $\pi/2$ от него).

Каспы исходного фронта соответствуют точкам сферического перегиба на двойственном фронте, тогда как точки сферического перегиба исходного фронта соответствуют каспам двойственного.

Второй двойственный фронт антиподален исходному, а четвертый двойственный совпадает с исходным.

Определение (см. [2]). *Производной* коориентированной кривой на стандартной ориентированной сфере $\mathbb{S}^2$ называется кривая, полученная перемещением каждой ее точки на расстояние $\pi/2$ вдоль большой окружности, касательной к исходной кривой в этой точке. Направление движения вдоль касательной выбирается так, что ориентация сферы, задаваемая направлением коориентирующей нормали, положительна.

Это определение применимо также и к волновым фронтам.

Концевые точки единичных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ естественного трехгранника, ассоциированного с коориентированными контактными элементами фронта, описывают, соответственно, три кривые Γ , Γ' и Γ^* на сфере. Конечно, кривая Γ совпадает с исходным фронтом. Сравнивая определения двойственного и производного для коориентированного фронта, видим очевидным образом, что кривая $-\Gamma'$ — производный фронт, а кривая Γ^* — двойственный для фронта Γ . В частности, Γ^* — эквидистанта кривой Γ .

Теорема А (см. [2]). *Производный волновой фронт совпадает с производным любой его эквидистанты и является гладкой иммерсированной кривой на $\mathbb{S}^2$, даже если исходный фронт имеет особенности общего положения.*

Производный фронт замкнутого волнового фронта не является произвольной иммерсированной кривой, а удовлетворяет топологическому условию квантования. В частности, из результатов [2] вытекает следующая теорема Якоби (см. также [5]).

Теорема Якоби (см. [7]). *Если производная кривая гладко иммерсированной замкнутой кривой не имеет точек самопересечения, то она делит сферу на две части одинаковой площади.*

Замечание. Параметризация лежандровой кривой определяет параметризацию ее фронта, а также параметризацию ее естественного трехгранника (даже когда фронт вырождается в точку). По теореме А производная семейства эквидистантных фронтов гладка и может быть параметризована длиной дуги. Эта параметризация производной индуцирует параметризацию на каждой лежандровой кривой этого семейства, а потому и на ее естественном трехграннике. Такая параметризация на лежандровой кривой, ее фронте и естественном трехграннике называется *индуцированной*; параметр же называется *натуральным*.

Пусть σ — параметр-длина дуги производного фронта Γ' фронта Γ на сфере. При этой параметризации естественные уравнения фронта (или его естественного трехгранника) принимают вид

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}/d\sigma &= \cos \theta \cdot \mathbf{b} \\ d\mathbf{b}/d\sigma &= -\cos \theta \cdot \mathbf{a} + \sin \theta \cdot \mathbf{c} \\ d\mathbf{c}/d\sigma &= -\sin \theta \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

а мгновенная ось вращения определяется вектором

$$\mathbf{r} = \sin \theta \cdot \mathbf{a} + \cos \theta \cdot \mathbf{c},$$

где $\theta = \theta(\sigma)$ — отсчитываемый от $\mathbf{c}$ к $\mathbf{r}$. Заметим, что эти натуральные уравнения корректны даже тогда, когда фронт вырождается в точку.

Замечание (см. [2]). Эквидистанта ортогональна лучам, исходящим из исходного фронта. Эквидистанта, коориентированная этими лучами, есть фронт лежандровой кривой, диффеоморфной и контактоморфной исходной.

Две лежандровы кривые *эквидистантны*, если их фронты эквидистантны.

Теорема 4. *Пусть L_t — семейство эквидистантных лежандровых кривых. Жесткое движение, ассоциированное с L_t , при естественной параметризации не зависит от t и угловой скорости.*

Особая точка фронта — это критическое значение проекции соответствующей лежандровой кривой. Особые точки фронтов общего положения являются полукубическими каспами.

Даже если данный коориентированный фронт на стандартной сфере не особый, то некоторые его эквидистанты имеют особые точки.

Определение (см. [2]). *Каустикой семейства эквидистантных фронтов называется кривая, образованная их особыми точками.*

Замечание. Всякая гладкая кривая в пространстве трехгранников определяет жесткое движение с ассоциированной мгновенной осью вращения. Лежандровы кривые на ST^*S^2 определяют специальные кривые на пространстве трехгранников. Теорема 4 утверждает, что для заданной параметризованной лежандровой кривой все ее «эквидистантные» лежандровы кривые определяют то же жесткое движение, а индикатриса вращения этого движения совпадает с каустикой системы «эквидистантных» лежандровых кривых.

Замечание. Каустика системы эквидистантных фронтов имеет следующие характеристики: 1) она образована их центрами кривизны; 2) она является огибающей ее лучей (на самом деле достаточно начать с фронта системы с тем, чтобы получить все лучи).

Теорема В (см. [2]). *Производный фронт двойственен его каустике.*

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство основано на геометрии сферического фронта, определенного касательной индикатрисой. Пусть γ_t — однопараметрическое семейство кривых общего положения, имеющее перестройку перегиба при $t = 0$. Предположим, что два уплощения рождаются в процессе этой перестройки. По лемме 1 из раздела 1 это означает, что сферические перегибы касательной индикатрисы $\mathbf{T}_t$ рождаются с помощью “ $\gamma - u$ ” переноса (см. рис. 3).

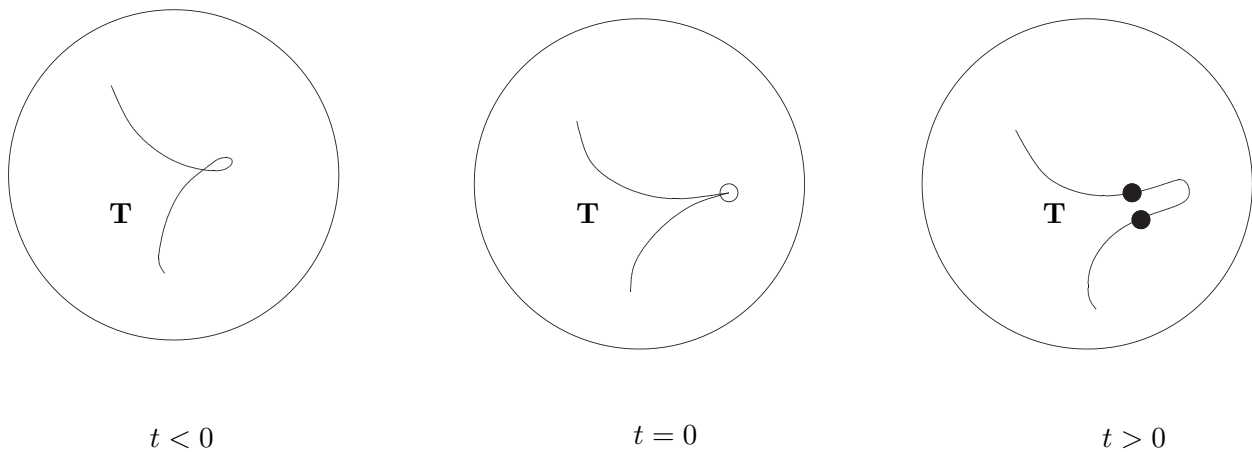


Рис. 3. Перенос “ $\gamma - u$ ” касательной индикатрисы в течение перестройки перегиба.

Таким образом, до перестройки ($t < 0$) имеется m -D-вершина, обозначаемая через m_t , для которой радиус соприкасающейся окружности $\mathbf{T}_t$ очень мал и стремится к нулю (в момент каспа). Таким образом, в направлении вдоль кривой γ_t от точки m_t и по одну сторону от нее радиус соприкасающейся окружности $\mathbf{T}_t$ возрастает. После перестройки ($t > 0$) получаются два близких сферических перегиба $\mathbf{T}_t$. На коротком отрезке между ними есть точка $\mathbf{T}_t$, в которой радиус соприкасающейся окружности имеет локальный минимум — m -D-вершина γ_t . По другую сторону от этих сферических перегибов радиус соприкасающейся окружности $\mathbf{T}_t$ убывает. Однако до перестройки в двух ветвях кривой $\mathbf{T}_t$ радиус соприкасающейся окружности возрастает. Перестройка состоит в локальном переносе; отсюда следует, что по другую сторону и вблизи одного из этих сферических перегибов имеется локальный минимум радиуса соприкасающейся окружности. Таким образом, наряду с m -D-вершиной между новыми уплощениями γ_t ($t > 0$) имеем две новые m -D-вершины.

5. ПЕРЕСТРОЙКА УПЛОЩЕНИЯ И ПЕРЕСТРОЙКИ ЛЕЖАНДРОВЫХ КРИВЫХ

Ортонормальные ориентированные реперы в $\mathbb{R}^3$ (трехгранники) образуют контактное 3-мерное многообразие ST^*S^2 коориентированных контактных элементов сферы. Касательный вектор к кривой в этом пространстве реперов принадлежит контактной плоскости, если производная первого вектора (или производная третьего вектора) репера линейно зависима со вторым его вектором.

Кривая, заметаемая вектором Френе, ассоциированной с пространственной кривой, лежандрова. Фронты Γ и $\Gamma^\vee$ этой лежандровой кривой при двух естественных лежандровых проекциях, заданных первым и третьим вектором репера, соответственно, есть касательная и бинормальная индикатрисы. Касательная и бинормальная индикатрисы есть эквидистантные фронты (один от другого) на сфере. (Можно также фиксировать стандартную контактную структуру в ST^*S^2 и рассмотреть лежандрову кривую, образованную контактными элементами, касательными к касательной индикатрисе, коориентированные бинормальным вектором. С помощью результатов [2] доказывається, что существует лежандрова проекция этой лежандровой кривой на бинормальную индикатрису).

В процессе перестройки перегиба, описанной в теореме 2, лежандрова кривая, ассоциированная с репером Френе, подвергается глобальным топологическим бифуркациям 7. Такого рода бифуркации никогда не изучались ранее в теории особенностей.

В результате касательная индикатриса, бинормальная индикатриса, их каустика (т.е. индикатриса Дарбу) и нормальная индикатриса претерпевают глобальные топологические бифуркации (см. рис. 3–6).

Замечание. Тем не менее следует отметить, что О. Щербак [9] изучал перестройки фронта и касательной развертки кривой в пространстве $\mathbb{R}P^3$: фронтом является поверхность в двойственном пространстве, образованная всеми плоскостями, касательными к кривой; касательная развертка — это поверхность, образованная точками всех касательных линий к кривой. Щербак доказал, что перестройка перегиба ребра возврата фронта и ребра возврата касательной развертки претерпевают глобальную перестройку. Однако им не было изучено условие (не)существования перестройки соответствующих лежандровых многообразий. В [8] Д. Монд (независимо и другими методами) изучил бифуркацию касательной развертки кривой в $\mathbb{R}P^3$ при перестройке перегиба.

Обычно при изучении лежандровых особенностей рассматриваются однопараметрические семейства гладких лежандровых многообразий, гладко зависящих от параметра. В частности, все лежандровы подмногообразия семейства лежандровых многообразий диффеоморфны (одно другому). Рассматриваются также лежандровы проекции и изучаются бифуркации соответствующих однопараметрических семейств фронтов. Тем не менее при изучении однопараметрических семейств кривых общего положения в евклидовом трехмерном пространстве естественным образом получается однопараметрическое семейство лежандровых кривых, обладающее перестройкой. Заметим, что лежандрова кривая в ST^*S^2 , ассоциированная с кривой в евклидовом трехмерном пространстве, — особая (см. рис. 7, где буквами **T**, **B** и **N** обозначены касательная, нормальная и бинормальная индикатрисы соответственно). Это объясняет, почему «нестандартные» перестройки каустик (рис. 5) и фронтов (рис. 3 и 4) в однопараметрических семействах возникают в этой ситуации. Нормальная индикатриса замкнутой кривой в евклидовом трехмерном пространстве есть лагранжева кривая сферы со стандартной симплектической структурой. При перестройке перегиба эти лагранжевы кривые (т.е. нормальные индикатрисы) также подвергаются глобальной перестройке (рис. 6).

Рассмотрим репер Френе кривой в евклидовом трехмерном пространстве. Фронт, заданный первым вектором этого репера (т.е. касательная индикатриса), может иметь сферические перегибы в общем положении, но не каспы. Фронт, заданный третьим вектором (т.е. бинормальная индикатриса), может иметь каспы в общем положении, но не сферические перегибы.

Можно наложить условие, что лежандрова кривая в пространстве ортонормированных реперов гладка и гладко зависит от параметра. Описанные выше нелокальные бифуркации в этом случае невозможны. Вместо этого оба фронта (заданные первым и вторым векторами репера) могут иметь каспы и перестройки перегиба в общем положении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы// Функц. анал. и его прил. — 1980. — 14, № 4. — С. 252–260.
2. Арнольд В. И. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов// Успехи мат. наук. — 1995. — 50, № 1. — С. 1–68.
3. Aicardi F. Personal communication; Paris, October, 2000.

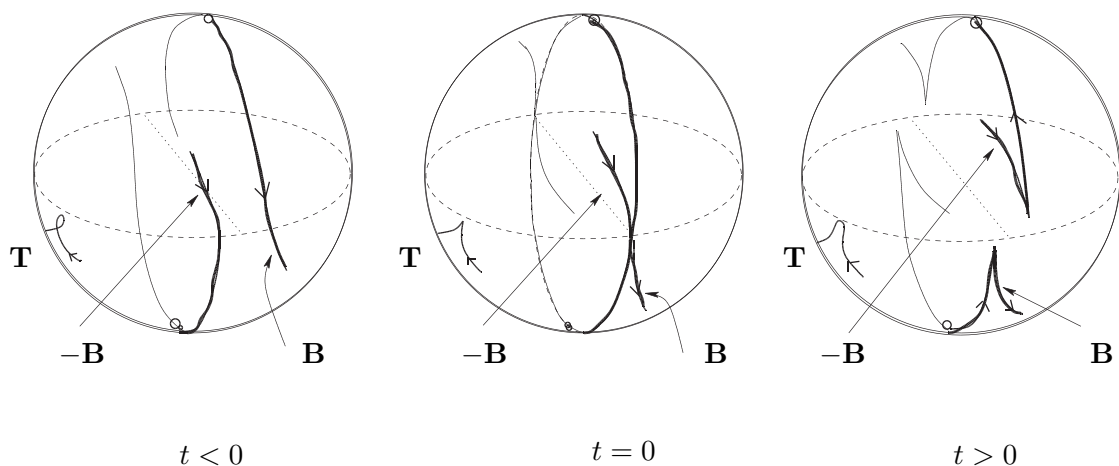
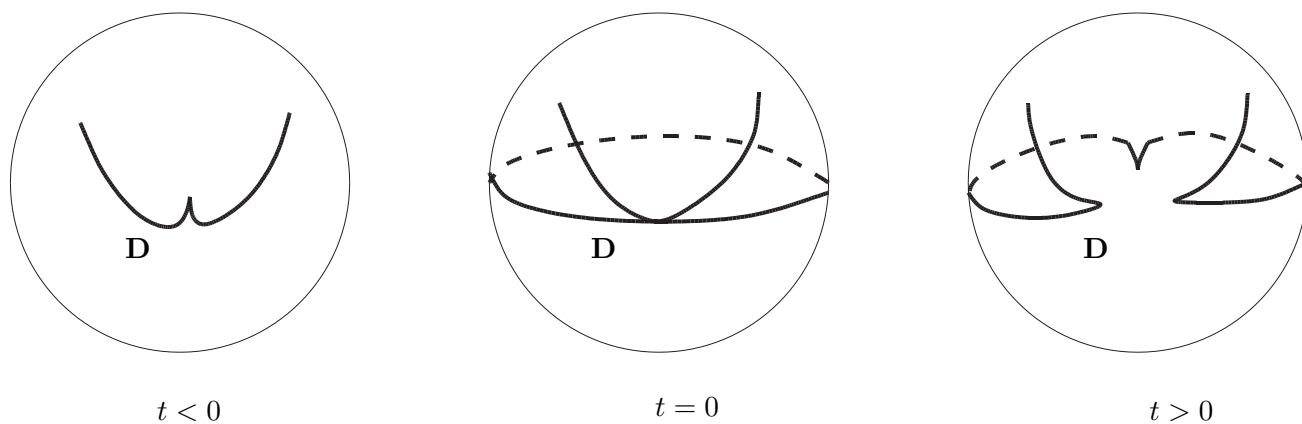
Рис. 4. Перестройка $\pm$ бинормальной индикатрисы при перестройке перегиба.

Рис. 5. Индикатриса Дарбу при перестройке перегиба.

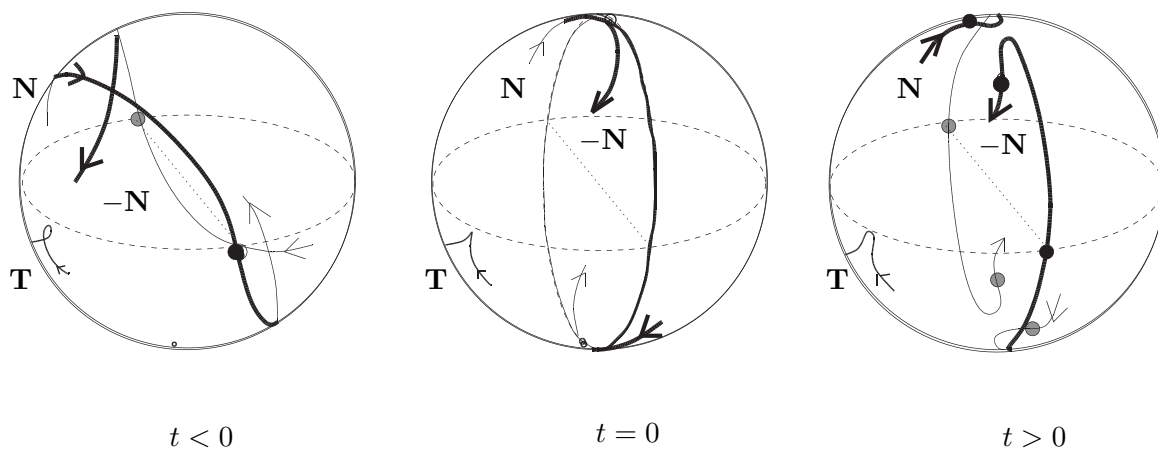


Рис. 6. Перестройка нормальной индикатрисы при перестройке перегиба.

4. Arnol'd V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma// Commun. Pure and Appl. Math. — 1976. — 29. — С. 557–582.
5. Fenchel W. Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie// Tôhoku Math. J. — 1934. — 39. — С. 95–97.
6. Fenchel W. The differential geometry of closed space curves// Bull. Amer. Math. Soc. — 1951. — 57. — С. 44–54.

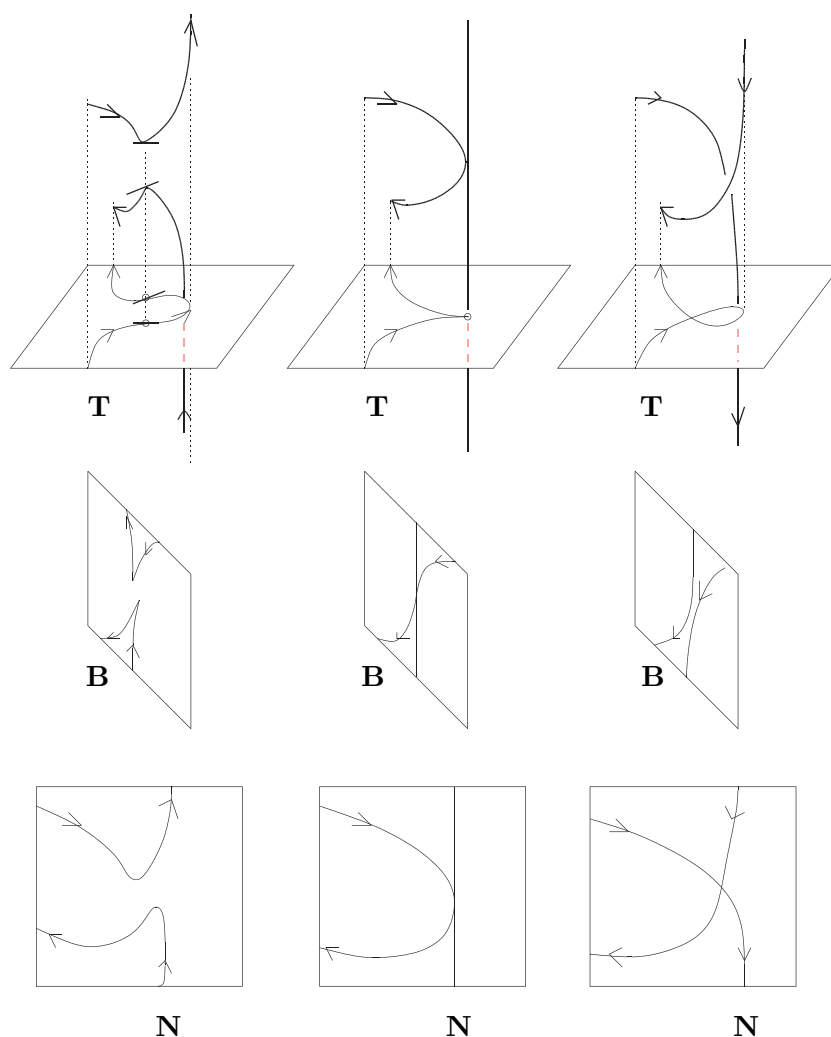


Рис. 7. Три стандартные проекции лежандровой кривой, ассоциированной с касательной индикатрисой пространственной кривой.

7. *Jacobi C. G. J.* Über einige merkwürdige Kurventheoreme// Schumacher Astronomische Nachrichten. — 1842. — 20. — С. 115–120; Gesammelte Werke. — Vol. 7. — С. 34–39.
8. *Mond D.* Singularities of the tangent developable surface of a space curve// Quart. J. Math. Oxford. — 1989. — 40. — С. 79–91.
9. *Shcherbak O. P.* Projectively dual space curves and Legendre singularities// Selecta Math. Soviet. — 1986. — 5, № 4. — С. 391–421.
10. *Uribe-Vargas R.* Singularités symplectiques et de contact en géométrie différentielle des courbes et des surfaces// Ph.D. Thesis. — Univ. Paris 7, 2001.
11. *Uribe-Vargas R.* Rigid body motions and Arnold's theory of fronts on $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ // J. Geom. Phys. — 2002. — 45, № 1-2. — С. 91–104.
12. *Uribe-Vargas R.* Twistings and Darboux vertices of curves in $\mathbb{R}^n$ and spherical indicatrices of curves in $\mathbb{R}^3$ // Preprint № 271. — Univ. Paris 7, 2000;
<http://www.math.jussieu.fr/~preprints/index-2000.html>

R. Uribe-Vargas
 Université Paris 7
 E-mail: uribe@math.jussieu.fr