

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии  
Институт Кибернетики

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 8**

**ТРУДЫ  
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
ПО ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

**СУЗДАЛЬ, 1–6 ИЮЛЯ 2002 Г.**

**ЧАСТЬ 2**



**Тбилиси  
2003**

## Редакционная коллегия

### Главный редактор:

*Р. В. Гамкрелидзе* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

### Заместитель главного редактора:

*Г. Харатишвили* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

### Члены редколлегии:

*А. А. Аграчев* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

*А. А. Болибрух* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*Г. Гиоргадзе* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

*Е. С. Голод* (Московский государственный университет)

*А. Лаши* (Грузинский технический университет)

*Е. Ф. Мищенко* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Овчинников* (Московский государственный университет)

*В. Л. Попов* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Сарычев* (Университет Флоренции)

*Г. Химшиашвили* (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

# **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 8**

**ТРУДЫ  
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
ПО ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

**СУЗДАЛЬ, 1–6 ИЮЛЯ 2002 Г.**

**ЧАСТЬ 2**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი  
თბილისი**

**2003**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков ( <i>И. В. Асташова</i> ) . . . . .	3
Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$ ( <i>В. В. Басов</i> ) . . . . .	34
О результатах Файна для констант Лебега системы Уолша ( <i>М. С. Беспалов</i> ) . . . . .	49
О кусочно-монотонных отображениях с замкнутым множеством периодических точек на дендритах ( <i>Л. С. Ефремова, Е. Н. Махрова</i> ) . . . . .	60
О лемме Адамара—Перрона ( <i>А. А. Корнев</i> ) . . . . .	76
Быстрая-медленная гамильтонова динамика вблизи прозрачной петли сепаратрисы ( <i>Л. М. Лерман, В. Г. Гельфрейх</i> ) . . . . .	85
ВКБ-приближения и спектральные асимптотики в одной задаче сингулярной теории возмущений ( <i>С. А. Степин, А. А. Аржанов</i> ) . . . . .	108
О восстановлении потенциала в обратной задаче для степени оператора Штурма—Лиувилля ( <i>Н. Г. Томин</i> ) . . . . .	126

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

© 2003 г. **И. В. АСТАШОВА**

Аннотация. В работе исследуются асимптотические свойства решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена—Фаулера высокого порядка. При  $n = 3, 4$  изучается асимптотика всех возможных решений уравнения в случае регулярной и сингулярной нелинейности. Для доказательства этих результатов в работе применяется замена переменных, позволяющая свести исходное уравнение  $n$ -го порядка к динамической системе на  $(n - 1)$ -мерной компактной сфере.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	3
2. Случай регулярной нелинейности . . . . .	4
2.1. Знакопостоянные решения . . . . .	4
2.1.1. Решения, имеющие вертикальную асимптоту . . . . .	4
2.1.2. Кнезеровские решения . . . . .	8
2.1.3. Поведение знакопостоянных решений при убывании аргумента . . . . .	13
2.2. Знакопеременные решения . . . . .	14
2.2.1. Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнений третьего порядка при возрастании аргумента . . . . .	15
2.2.2. Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнения третьего порядка при убывании аргумента . . . . .	25
2.2.3. Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнений четвертого порядка . . . . .	26
2.3. Заключительные замечания . . . . .	30
3. Случай сингулярной нелинейности . . . . .	31
Список литературы . . . . .	32

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))|y(x)|^{-m}y(x), \quad (1.1)$$

где  $m < 1$ , а  $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  — заданная на прямой непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ . Это уравнение является обобщением уравнения типа Эмдена—Фаулера, где  $n = 2$ ,  $p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = x^\sigma$ . Решения этого уравнения, а также их асимптотические свойства при различных  $\sigma$  и  $n$  подробно изучены в монографиях Р. Беллмана [5], Дж. Сансоне [16] и Ф. Хартмана [17].

Вопросы продолжаемости и непродолжаемости решений уравнения (1.1), вопросы, связанные с их колеблемостью и неколеблемостью, оценки продолжаемых и непродолжаемых решений изучались в работах И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия [11], В. А. Кондратьева [12], Н. А. Изобова, В. А. Рабцевича [6, 7], В. А. Козлова [21], А. А. Конькова [13], А. Д. Мышкиса [14] и др.

---

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02–01–00512).

В предлагаемой работе будет исследована асимптотика всех возможных решений уравнения (1.1) с регулярной ( $m < 0$ ) и сингулярной ( $0 < m < 1$ ) нелинейностью при  $n = 3, 4$ . При доказательстве результатов исходное уравнение будет сведено к динамической системе на  $(n - 1)$ -мерной компактной сфере. Будет исследоваться поведение траекторий этой системы, соответствующих знакопостоянным участкам решений уравнения (1.1).

Наряду с уравнением (1.1), рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = p_0 |y(x)|^{-m} y(x), \quad p_0 = \text{const} > 0. \quad (1.2)$$

## 2. СЛУЧАЙ РЕГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

### 2.1. Знакопостоянные решения.

*2.1.1. Решения, имеющие вертикальную асимптоту.* В этом пункте будет доказано, что при  $n = 3$  и  $n = 4$ , в предположении, что  $p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$  — непрерывная, положительная функция, имеющая предел  $p_0 = \text{const} > 0$  при  $x \rightarrow x^* - 0$ ,  $y_0 \rightarrow \infty$ ,  $\dots$ ,  $y_{n-1} \rightarrow \infty$  и удовлетворяющая условию Липшица по переменным  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ , любое положительное решение уравнения (1.1) с вертикальной асимптотой  $x = x^*$  имеет асимптотический вид

$$y(x) = C(x^* - x)^\beta (1 + o(1)), \quad x \rightarrow x^* - 0, \quad (2.1)$$

где

$$\beta = \frac{n}{m}, \quad C = \left( \frac{\beta(\beta - 1) \cdots (\beta - n + 1)}{p_0} \right)^{-\frac{1}{m}}. \quad (2.2)$$

Отметим, что асимптотика (2.1)–(2.2) является точной. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция  $y(x) = C(x^* - x)^\beta$  является решением уравнения (1.2).

Заметим, что в работе [8] при некоторых ограничениях на функцию  $p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$  для любого решения уравнения (1.1) с вертикальной асимптотой  $x = x^*$  доказано существование таких положительных констант  $C_1$  и  $C_2$ , что

$$C_1(x^* - x)^\beta \leq y(x) \leq C_2(x^* - x)^\beta. \quad (2.3)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_i &= 1 - \frac{i}{\beta}, & i &= 1, \dots, n-1, \\ u_i &= y^{(i)} y^{-\beta_i}, & i &= 1, \dots, n-1, \\ u_n &= p_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, любому решению уравнения (1.1) соответствует некоторая кривая в пространстве  $\mathbb{R}_+^{n-1}$  с координатами  $u_1, \dots, u_{n-1}$ . Параметризуем эту кривую переменной

$$t = \int_{x_0}^x y^{-1/\beta} dx. \quad (2.5)$$

Заметим, что если  $x = x^*$  — уравнение вертикальной асимптоты решения, то  $\lim_{x \rightarrow x^* - 0} t(x) = \infty$ , как

следует из оценки (2.3). Вычислим  $\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \left( y^{(i+1)} y^{-\beta_i} - y^{(i)} \beta_i y^{-\beta_i - 1} y' \right) y^{1/\beta} = \\ &= y^{(i+1)} y^{-\beta_{i+1}} - y^{(i)} \beta_i y^{-\beta_i} y' y^{-\beta_i} = u_{i+1} - \beta_i u_i u_1. \end{aligned}$$

Функции  $u_1, \dots, u_{n-1}$  как функции от  $t$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 - \beta_1 u_1^2, \\ \dot{u}_2 = u_3 - \beta_2 u_1 u_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{u}_i = u_{i+1} - \beta_i u_1 u_i, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{u}_{n-1} = p_0 - \beta_{n-1} u_1 u_{n-1}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Обозначим через  $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$  единственную в  $\mathbb{R}_+^{n-1}$  неподвижную точку системы (2.6).

**Теорема 2.1.** *При  $n = 3$  и  $n = 4$  любое решение уравнения (1.2) с вертикальной асимптотой  $x = x^*$  имеет асимптотический вид (2.1)–(2.2).*

**Лемма 2.1.** *Пусть  $n = 3$ ,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$  — решение системы (2.6), обе координаты которого — положительные функции. Тогда  $u(t) \rightarrow a$  при  $t \rightarrow \infty$ .*

*Доказательство.* Пусть  $S_\Theta$  — граница прямоугольника, лежащего на плоскости  $(u_1, u_2)$  и задаваемого неравенствами

$$a_1 \Theta \leq u_1 \leq \frac{a_1}{\Theta}, \quad a_2 \Theta^2 \leq u_2 \leq \frac{a_2}{\Theta^2}, \quad 0 < \Theta \leq 1.$$

Очевидно, что при  $\Theta = 1$  множество  $S_\Theta$  вырождается в точку, множества  $S_\Theta$  при различных  $\Theta$  не пересекаются между собой, их объединение по  $\Theta: 0 < \Theta \leq 1$ , совпадает с  $\mathbb{R}_+^2$ . Таким образом, каждая точка  $u$  из  $\mathbb{R}_+^2$  однозначно определяет такое  $\Theta$ , что  $u \in S_\Theta$ , поэтому рассматриваемое решение  $u(t)$  определяет функцию  $\Theta(t)$ .

Покажем, что  $\Theta(t)$  возрастает. Другими словами, если решение  $u(t)$  пересекает  $S_\Theta$ , то касательный вектор в точке пересечения направлен внутрь соответствующего прямоугольника. Для этого достаточно оценить производную функции  $u_1$  на левой и правой сторонах прямоугольника и производную функции  $u_2$  на верхней и нижней его сторонах:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1|_{u_1=a_1\Theta} &= u_2 - \beta_1 a_1^2 \Theta^2 \geq a_2 \Theta^2 - \beta_1 a_1^2 \Theta^2 = 0, \\ \dot{u}_1|_{u_1=\frac{a_1}{\Theta}} &= u_2 - \frac{\beta_1 a_1^2}{\Theta^2} \leq \frac{a_2}{\Theta^2} - \beta_1 \frac{a_1^2}{\Theta^2} = 0, \\ \dot{u}_2|_{u_2=a_2\Theta^2} &= p_0 - \beta_2 a_2 \Theta^2 u_1 \geq p_0 - \beta_2 a_2 \Theta^2 \frac{a_1}{\Theta} = p_0(1 - \Theta) > 0, \\ \dot{u}_2|_{u_2=\frac{a_2}{\Theta^2}} &= p_0 - \beta_2 \frac{a_2}{\Theta^2} u_1 \leq p_0 - \beta_2 \frac{a_2}{\Theta^2} a_1 \Theta = p_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta}\right) < 0. \end{aligned}$$

Итак, функция  $\Theta(t)$  возрастает, ограничена сверху, а значит, стремится к конечному пределу  $\Theta^*$ . Если  $\Theta^* = 1$ , то предположение доказано, в противном случае решение  $u(t)$  наматывается на  $S_{\Theta^*}$ , т.е. все предельные точки этого решения лежат в  $S_{\Theta^*}$ . Отсюда следует [15], что существует решение системы (2.6), полностью лежащее в  $S_{\Theta^*}$ , но это невозможно. В самом деле, если хотя бы одна точка этого решения лежит внутри одной из сторон прямоугольника, то соответствующая оценка для производной является строгой. Значит, решение не может оставаться на сторонах прямоугольника; но и находиться постоянно в одной из вершин решение также не может, так как у системы (2.6) только одна предельная точка. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.2.** *Пусть  $n = 4$ ,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  — решение системы (2.6), все координаты которого являются положительными функциями. Тогда  $u(t) \rightarrow a$  при  $t \rightarrow \infty$ .*

*Доказательство.* Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.1. В качестве  $S_\Theta$  берётся граница параллелепипеда, задаваемого неравенствами

$$a_1 \Theta \leq u_1 \leq \frac{a_1}{\Theta}, \quad a_2 \Theta^2 \leq u_2 \leq \frac{a_2}{\Theta^2}, \quad a_3 \Theta \leq u_3 \leq \frac{a_3}{\Theta}.$$

Приведём соответствующие оценки производных:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1|_{u_1=a_1\Theta} &= u_2 - \beta_1 a_1^2 \Theta^2 \geq a_2 \Theta^2 - \beta_1 a_1^2 \Theta^2 = 0, \\ \dot{u}_1|_{u_1=a_1/\Theta} &= u_2 - \beta_1 \frac{a_1^2}{\Theta^2} \leq \frac{a_2}{\Theta^2} - \beta_1 \frac{a_1^2}{\Theta^2} = 0, \\ \dot{u}_2|_{u_2=a_2\Theta^2} &= u_3 - \beta_2 a_2 \Theta^2 u_1 \geq a_3 \Theta - \beta_2 a_2 \Theta^2 \frac{a_1}{\Theta} = 0, \\ \dot{u}_2|_{u_2=a_2/\Theta^2} &= u_3 - \beta_2 \frac{a_2}{\Theta^2} u_1 \leq \frac{u_3}{\Theta} - \beta_2 \frac{a_2}{\Theta^2} a_1 \Theta = 0, \\ \dot{u}_3|_{u_3=a_3\Theta} &= p_0 - \beta_3 a_3 \Theta u_1 \geq p_0 - \beta_3 a_3 \Theta \frac{a_1}{\Theta} = 0, \\ \dot{u}_3|_{u_3=a_3/\Theta^2} &= p_0 - \beta_3 \frac{a_3}{\Theta} u_1 \leq p_0 - \beta_3 \frac{a_3}{\Theta} a_1 \Theta = 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Доказанные леммы позволяют получить асимптотику решений уравнения (1.2). Действительно,

$$u = y'y^{-\left(-\frac{1}{\beta}+1\right)} \sim a_1$$

при  $t \rightarrow \infty$  или, что то же самое, при  $x \rightarrow x^* - 0$ . Тогда

$$\int_x^{x^*} y'y^{-\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} dx = -\beta y(x)^{\frac{1}{\beta}} \sim a_1(x^* - x),$$

т.е.

$$y(x) = C(x^* - x)^\beta(1 + o(1)), \quad x \rightarrow x^* - 0,$$

где константы  $\beta$  и  $C$  определяются формулами (2.2).

**Теорема 2.2.** Пусть в уравнении (1.1)  $n = 3$  или  $n = 4$ , и положительная непрерывная функция  $p(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  имеет предел  $p_0 = \text{const} > 0$  при  $x \rightarrow x^* - 0$ ,  $y_j \rightarrow \infty$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , и удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, \dots, y_{n-1}$ . Тогда любое положительное решение уравнения (1.1) с вертикальной асимптотой  $x = x^*$  имеет асимптотику (2.1)–(2.2).

*Доказательство.* Из (2.3) следует, что соответствующие функции  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , определенные согласно (2.4), ограничены. Покажем это для  $n = 3$ . Пусть

$$P = \sup_{(x, y_0, y_1, y_2)} p(x, y_0, y_1, y_2), \quad k = 1 - m.$$

Тогда

$$y''' \leq PC_2^k(x^* - x)^{k\beta}, \quad y'' \leq A_2 + B_2(x^* - x)^{k\beta+1}.$$

Значит,

$$u_2 \leq \left(A_2 + B_2(x^* - x)^{k\beta+1}\right) \left(C_1(x^* - x)^\beta\right)^{-\beta_2} \leq E_2(x^* - x)^{k\beta+1-\beta\beta_2},$$

причём

$$-k\beta + 1 - \beta\beta_2 = k\beta + 1 + \beta \left(-\frac{2}{\beta} + 1\right) = -\beta(1 - k) + 3 = 0.$$

Таким образом,  $u_2 \leq E_2$ , где  $A_2, B_2, E_2$  — некоторые константы.

Аналогично

$$y' \leq B_1(x^* - x)^{k\beta+2},$$

откуда

$$u_1 \leq \left(B_1(x^* - x)^{k\beta+2}\right) \left(C_1(x^* - x)^\beta\right)^{-\beta_1} \leq E_1(x^* - x)^{k\beta+2-\beta\beta_1},$$

причем

$$k\beta + 2 - \beta\beta_1 = -\beta(1 - k) + 3 = 0.$$

При  $n = 4$  ограниченность этих функций доказывается аналогично. А именно, применяя оценку (2.3), получим

$$y^{IV} \leq PC_2^k(x^* - x)^{k\beta}, \quad y''' \leq A_3 + B_3(x^* - x)^{k\beta+1},$$

откуда

$$u_3 \leq y'''y^{-\beta_3} \leq (A_3 + B_3(x^* - x)^{k\beta+1}) (C_1(x^* - x)^\beta)^{-\beta_3} \leq E_3(x^* - x)^{k\beta+1-\beta\beta_3}.$$

где  $A_3, B_3, E_3$  — некоторые константы, причем

$$k\beta + 1 - \beta\beta_3 = k\beta + 1 - \beta \left( -\frac{3}{\beta} + 1 \right) = -\beta(1 - k) + 4 = 0.$$

Таким образом,  $u \leq E_3$ . Далее,

$$y'' \leq B_2(x^* - x)^{k\beta+2},$$

откуда

$$u_2 \leq (B_2(x^* - x)^{k\beta+2}) (C_1(x^* - x)^\beta)^{-\beta_1} \leq E_2(x^* - x)^{k\beta+2-\beta\beta_1},$$

где  $B_2, E_2$  — некоторые константы, причем

$$k\beta + 2 - \beta\beta_2 = k\beta + 2 - \beta \left( -\frac{2}{\beta} + 1 \right) = -\beta(1 - k) + 4 = 0.$$

Таким образом,  $u_2 \leq E_2$ . Имеем также

$$y' \leq B_1(x^* - x)^{k\beta+3},$$

откуда

$$u_1 \leq (B_1(x^* - x)^{k\beta+3}) (C_1(x^* - x)^\beta)^{-\beta_1} \leq E_1(x^* - x)^{k\beta+3-\beta\beta_1},$$

где  $B_1, C_1, E_1$  — некоторые константы, причем

$$k\beta + 3 - \beta\beta_1 = k\beta + 3 - \beta \left( -\frac{1}{\beta} + 1 \right) = -\beta(1 - k) + 4 = 0,$$

т.е.  $u_1 \leq E_1$ .

Следствием ограниченности векторнозначной функции  $u(t)$  является наличие у нее хотя бы одной предельной точки.

Точно так же проводятся оценки, показывающие, что все координатные функции  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$  отделены от нуля, т.е. существует положительная константа, которая меньше всех этих функций при больших значениях  $t$ . Поэтому начиная с некоторого момента, точка  $u(t)$  должна принадлежать прямоугольнику (параллелепипеду) с границей  $S_\Theta, 0 < \Theta \leq 1$ . То же самое, очевидно, относится и ко всем предельным точкам функции  $u(t)$ .

**Лемма 2.3.** *Множество предельных точек вектор-функции  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{n-1}(t))$  состоит из траекторий решений  $u(t)$  системы (2.6).*

*Доказательство.* Функция  $u(t)$  удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 - \beta_1 u_1^2, \\ \dots \dots \dots \\ \dot{u}_{n-1} = \varphi(t) - \beta_{n-1} u_1 u_{n-1}, \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\varphi(t)$  — композиция функции  $p(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$  и функции, обратной к функции  $t(x)$ , задаваемой формулой (2.5), так что  $\varphi(t) \rightarrow p_0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть  $u^*$  — предельная точка для функции  $u(t)$ . Тогда существует такая последовательность  $\{t_j\}$ , что  $u(t_j) \rightarrow u^*$  и  $t_j \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ . Проведем через  $u^*$  траекторию решения системы (2.6). Покажем, что любая ее точка также является предельной для  $u(t)$ . Пусть  $u^0(t)$  — решение системы (2.6),  $u^0(0) = u^*$ ,  $u^0(T) = u^{**}$  и  $u^{**}$  не является предельной для  $u(t)$ . Тогда существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что при достаточно большом  $t$  выполняется неравенство

$$|u(t) - u^{**}| > \varepsilon.$$

С другой стороны, по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части существует такое число  $\delta > 0$ , что если  $|\varphi(t) - p_0| < \delta$ , то любая функция  $u(t)$ , удовлетворяющая системе (2.7) и условию  $|u(t_0) - u^*| < \delta$  в некоторой точке  $t_0$ , удовлетворяет также условию

$$|u(t_0 + T) - u^0(T)| < \varepsilon.$$

Поэтому выбрав  $t_0$  из последовательности  $\{t_j\}$  настолько большим, что  $|u(t_0) - u^*| < \delta$  и  $|\varphi(t) - p_0| < \delta$  при  $t > \min(t_0, t_0 + T)$ , получим противоречие. Лемма доказана.  $\square$

Согласно леммам 2.1 и 2.2, фактически доказано, что любое решение системы (2.6) стремится к  $a$ , поэтому точка  $a$  также является предельной точкой для  $u(t)$ .

Заметим, что при доказательстве лемм 2.1 и 2.2 показано также, что если не равное тождественно  $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$  решение системы (2.6) непродолжаемо влево или имеет неограниченную слева область определения, то оно не может целиком лежать внутри прямоугольника (параллелепипеда) с границей  $S_\Theta$ ,  $0 < \Theta < 1$ . С другой стороны, как было показано выше, все предельные точки векторнозначной функции  $u(t)$ , соответствующей решению уравнения (1.1), лежат внутри одного такого прямоугольника (параллелепипеда). Единственной возможностью, не приводящей к противоречию с леммой 2.3, является наличие у функции  $u(t)$  единственной предельной точки  $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ . Ввиду компактности прямоугольника (параллелепипеда), эта точка является пределом решения  $u(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

**2.1.2. Кнезеровские решения.** Рассмотрим вопрос о существовании и поведении знакопостоянных решений уравнения (1.1), у которых нет вертикальных асимптот.

Ненулевое решение  $y(x)$  уравнения (1.1), определенное на интервале  $[x_0, \infty)$ , будем называть *кнезеровским*, если оно удовлетворяет условиям

$$(-1)^i y^{(i)}(x) > 0, \quad x \geq x_0, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

Докажем, что при  $n = 4$  все кнезеровские решения уравнения (1.1) имеют асимптотический вид (2.1) с константами (2.2).

Приведем утверждение, являющееся простым следствием из полученных в [11] результатов (теорема 12.5).

**Утверждение 2.1.** Пусть непрерывная функция  $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  удовлетворяет условию

$$P_{\min} = \inf_{(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})} p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) > 0 \quad (2.9)$$

для всех  $x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ , решение уравнения (1.2) задано на  $[x_0, x^*)$ ,  $x^* \leq \infty$ , причем в случае  $x^* < \infty$  оно предполагается непродолжаемым вправо. Тогда следующие условия равносильны:

- а)  $x^* < \infty$ ,  $y(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow x^* - 0$ ;
- б) существует такое  $x_1 \in [x_0, x^*)$ , что

$$y(x_1) > 0, \quad y'(x_1) > 0, \dots, y^{(n-1)}(x_1) > 0.$$

С помощью данного утверждения можно описать все возможные случаи поведения знакопостоянных решений уравнения (1.2) при выполнении условия (2.9).

**Утверждение 2.2.** Все знакопостоянные начиная с некоторого момента решения уравнения (1.2) имеют вертикальную асимптоту либо стремятся к нулю вместе со всеми своими производными до порядка  $n$ . Второй случай может иметь место только для четных  $n$ , при этом функции  $y^{(j)}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , на всей области определения имеют тот же знак, что и  $y(x)$ , если  $j$  четно, и противоположный, если  $j$  нечетно.

**Теорема 2.3.** Пусть в уравнении (1.2)  $n = 4$ . Тогда все кнезеровские решения уравнения (1.2) имеют вид

$$y(x) = \pm C(x - x^*)^\beta, \quad x > x^*, \quad (2.10)$$

где  $C$  и  $\beta$  определяются формулами (2.1), а  $x^*$  — произвольная константа (играющая роль параметра в однопараметрическом семействе кнезеровских решений).

*Доказательство.* Пусть  $y(x)$  — кнезеровское решение уравнения (1.1). Для определенности будем считать его положительным.

Рассмотрим траекторию системы (2.6), соответствующую этому решению в силу соотношений (2.4). Эта траектория полностью лежит в области пространства  $\mathbb{R}^3$ , задаваемой неравенствами

$$u_1 < 0, \quad u_2 > 0, \quad u_3 < 0.$$

Представим эту область в виде объединения непересекающихся множеств  $S_\Theta^-$ ,  $0 < \Theta \leq 1$ , каждое из которых является границей параллелепипеда

$$-\frac{a_1}{\Theta} \leq u_1 \leq -a_1\Theta, \quad a_2\Theta^2 \leq u_2 \leq \frac{a_2}{\Theta^2}, \quad -\frac{a_3}{\Theta} \leq u_3 \leq -a_3\Theta,$$

где  $(-a_1, a_2, -a_3)$  — единственная неподвижная точка системы (2.6) в рассматриваемой области.

Непосредственные оценки производных  $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$  на границах этих параллелепипедов, аналогичные проводившимся в п. 2.1.1 (лемма 2.1), показывают, что касательные векторы к решению  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  в точках пересечения этого решения с границей параллелепипеда направлены из параллелепипеда. При этом функция  $\Theta(t)$ , введенная в п. 2.1.1, будет строго убывать вдоль траектории  $u(t)$  и поэтому стремиться к пределу  $\Theta^*$ , удовлетворяющему неравенствам  $0 \leq \Theta^* \leq 1$ . Если  $\Theta^* = 1$ , т.е.  $\Theta(t) \equiv 1$ , то  $u(t) = a_1$ . Выражая  $u_1$  через  $y, y', \beta$  по формулам (2.4), получим:

$$y'y^{\frac{1}{\beta}-1} = -a_1,$$

откуда

$$y = \left[ -\frac{a_1}{\beta}(x - x^*) \right]^\beta, \quad (2.11)$$

где  $x^*$  — произвольная константа.

Так как  $(-a_1, a_2, -a_3)$  — неподвижная точка системы (2.6), то находим

$$a_1 = \left( \frac{p_0\beta^3}{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)} \right)^{\frac{1}{4}}$$

и, подставляя в (2.11), получим (2.10)

$$y = \left( \frac{p_0}{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)} \right)^{\frac{\beta}{4}} (x - x^*)^\beta = \left( \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{p_0} \right)^{-\frac{1}{m}} (x - x^*)^\beta,$$

и в этом случае утверждение доказано. Покажем, что других возможностей для кнезеровского решения быть не может.

Предположим, что  $0 < \Theta^* < 1$ . Тогда все предельные точки траектории  $u(t)$  лежат на  $S_{\Theta^*}^-$ . Поэтому должна существовать траектория системы (2.6), полностью принадлежащая  $S_{\Theta^*}^-$ , что невозможно, так как для этого решения функция  $\Theta(t)$  не будет строго убывающей.

Осталось рассмотреть случай, когда  $\Theta^* = 0$ . Доказательство для него то же, что и в случае  $0 < \Theta^* < 1$ , но для сохранения строгости (множество  $S_0^-$  не определено) придется выйти за пределы пространства  $\{(a_1, a_2, a_3)\}$ .

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  и введем на нем отношение эквивалентности:  $(y_0, y_1, y_2, y_3) \sim (z_0, z_1, z_2, z_3)$ , если существует такая положительная константа  $\lambda$ , что

$$z_0 = \lambda y_0, \quad z_1 = \lambda^{\beta_1} y_1, \quad z_2 = \lambda^{\beta_2} y_2, \quad z_3 = \lambda^{\beta_3} y_3.$$

Множество классов эквивалентности по этому отношению топологически эквивалентно трехмерной сфере  $S^3$ .

Любому нетривиальному решению уравнения (1.1), не обязательно всюду положительному, соответствует ориентированная кривая  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ :

$$y_0 = y(x), \quad y_1 = y'(x), \quad y_2 = y''(x), \quad y_3 = y'''(x),$$

которая, в свою очередь, определяет ориентированную кривую на  $S^3$ . Координатное описание этих кривых возможно при задании на сфере структуры гладкого многообразия с помощью системы карт. Одна из таких карт фактически уже описана в п. 2.1.1. Она определена на полусфере,

соответствующей полупространству, состоящему из точек пространства  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  с положительной координатой  $y_0$ .

Координатные функции  $u_1, u_2, u_3$  на этой полусфере задаются формулами

$$u_1 = y_1 y_0^{-\beta_1}, \quad u_2 = y_2 y_0^{-\beta_2}, \quad u_3 = y_3 y_0^{-\beta_3}$$

и, очевидно, не зависят от выбора представителя класса эквивалентности в  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ .

На полусфере, соответствующей множеству точек  $\{y_0 < 0\}$ , задается карта с координатными функциями

$$u_1^- = -y_1(-y_0)^{-\beta_1}, \quad u_2^- = -y_2(-y_0)^{-\beta_2}, \quad u_3^- = -y_3(-y_0)^{-\beta_3}.$$

На полусферах, соответствующих множествам точек  $\{y_1 > 0\}$  и  $\{y_1 < 0\}$ , задаются еще две карты с координатными функциями

$$\begin{aligned} v_0 &= y_0 y_1^{-\frac{1}{\beta_1}}, & v_2 &= y_2 y_1^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}, & v_3 &= y_3 y_1^{-\frac{\beta_3}{\beta_1}}, \\ v_0^- &= y_0(-y_1)^{-\frac{1}{\beta_1}}, & v_2^- &= y_2(-y_1)^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}, & v_3^- &= y_3(-y_1)^{-\frac{\beta_3}{\beta_1}} \end{aligned}$$

соответственно. На полусферах, соответствующих множествам точек  $\{y_2 > 0\}$  и  $\{y_2 < 0\}$ , задаются карты

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 y_2^{-\frac{1}{\beta_2}}, & w_1 &= y_1 y_2^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}, & w_3 &= y_3 y_2^{-\frac{\beta_3}{\beta_2}}, \\ w_0^- &= y_0(-y_2)^{-\frac{1}{\beta_2}}, & w_1^- &= y_1(-y_2)^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}, & w_3^- &= y_3(-y_2)^{-\frac{\beta_3}{\beta_2}} \end{aligned}$$

соответственно. И, наконец, на полусферах, соответствующих множествам точек  $\{y_3 > 0\}$  и  $\{y_3 < 0\}$ , карты

$$\begin{aligned} q_0 &= y_0 y_3^{-\frac{1}{\beta_3}}, & q_1 &= y_1 y_3^{-\frac{\beta_1}{\beta_3}}, & q_2 &= y_2 y_3^{-\frac{\beta_2}{\beta_3}}, \\ q_0^- &= y_0(-y_3)^{-\frac{1}{\beta_3}}, & q_1^- &= y_1(-y_3)^{-\frac{\beta_1}{\beta_3}}, & q_2^- &= y_2(-y_3)^{-\frac{\beta_2}{\beta_3}} \end{aligned}$$

соответственно. Эти карты покрывают всю сферу  $S^3$ .

Ориентированная кривая, соответствующая положительному кнезеровскому решению уравнения (1.1), полностью лежит в той части сферы  $S^3$ , которая соответствует множеству  $\{y_0 > 0, y_1 < 0, y_2 > 0, y_3 < 0\}$ . Назовем эту часть сферы *кнезеровской областью* и обозначим  $K_3$ .

Все предельные точки кривой, соответствующей положительному кнезеровскому решению, лежат в замыкании области  $K_3$ , причем если имеет место случай  $\Theta^* = 0$ , то предельные точки лежат на ее границе, которую обозначим  $S_0^-$ . Заметим, что хотя бы одна предельная точка  $U^*$  существует, так как сфера  $S^3$  компактна. Предположим, что эта точка  $u^*$  лежит в карте  $(u_1, u_2, u_3)$ . В этом случае через нее должна проходить траектория системы (2.6), полностью лежащая в  $S_0^-$ . Координата  $u_3$  этой точки не может быть равной нулю, так как в противном случае, согласно (2.6), в точке  $u^*$  справедливо неравенство  $\dot{u}_3 = p_0 > 0$ , и траектория, проходящая через нее, сразу же покинет  $S_0^-$ . Таким образом, в рассматриваемой точке координата  $u_3 < 0$ . Но тогда, чтобы траектория системы (2.6), проходящая через точку  $u^*$ , оставалась в  $S_0^-$ , необходимо выполнение условия  $u_2 > 0$ . Аналогично возникает условие  $u_1 < 0$ . Все эти условия на точку  $u^*$  в совокупности противоречат тому, что она лежит в  $S_0^-$ . Таким образом, точка  $u^*$  лежит за пределами карты  $(u_1, u_2, u_3)$ .

Предположим, что точка  $u^*$  лежит в карте  $(v_0^-, v_2^-, v_3^-)$ . В этой карте кривые, соответствующие решениям уравнения (1.1), при параметризации

$$t_1 = \int_{x_0}^x (-y')^{-\frac{1}{\beta+1}} dx$$

описываются системой

$$\begin{cases} \frac{dv_0^-}{dt_1} = \left(-1 + \frac{v_0^- v_2^-}{\beta_1}\right), \\ \frac{dv_2^-}{dt_1} = v_3^- + \frac{\beta_2}{\beta_1} (v_2^-)^2, \\ \frac{dv_3^-}{dt_1} = p_0 (v_0^-)^{1-m} + \frac{\beta_3}{\beta_1} v_3^- v_2^-, \end{cases} \quad (2.12)$$

а кнезеровская область  $K_3$  задается неравенствами

$$v_0^- > 0, \quad v_2^- > 0, \quad v_3^- < 0.$$

Так как точка  $u^*$  не лежит в карте  $(u_1, u_2, u_3)$ , то для нее  $v_0^- = 0$ , и, согласно системе (2.12), траектория, проходящая через точку  $u^*$ , сразу покидает  $S_0^-$ . Таким образом, точка  $u^*$  не может лежать в карте  $(v_0^-, v_2^-, v_3^-)$ .

Предположим, что она лежит в карте  $(w_0, w_1, w_3)$ . Взяв в качестве параметра

$$t_2 = \int_{x_0}^x (y'')^{-\frac{1}{\beta+2}} dx,$$

получим следующую систему уравнений для кривых, соответствующих решениям уравнения (1.1) при  $p(x, y, y', y'', y''') = p_0 = \text{const} > 0$

$$\begin{cases} \frac{dw_0}{dt_2} = w_1 - \frac{w_0 w_3}{\beta_2}, \\ \frac{dw_1}{dt_2} = 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} w_1 w_3, \\ \frac{dw_3}{dt_2} = p_0 w_0^{1-m} - \frac{\beta_3}{\beta_2} w_3^2, \end{cases} \quad (2.13)$$

Кнезеровская область в этой карте задается неравенствами  $w_0 > 0$ ,  $w_1 < 0$ ,  $w_3 < 0$ . Так как точка  $u^*$  не лежит в карте  $(v_0^-, v_2^-, v_3^-)$ , то для нее  $w_1 = 0$ ; таким образом, если траектория, описанная системой (2.13), проходит через точку  $u^*$ , то она покидает  $S_0^-$ , а значит, точка  $u^*$  не лежит в карте  $(w_0, w_1, w_3)$ .

Осталось предположить, что  $u^*$  лежит в карте  $(q_0^-, q_1^-, q_2^-)$ , где область  $K_3$  задается неравенствами  $q_0^- > 0$ ,  $q_1^- < 0$ ,  $q_2^- > 0$ . Так как точка  $u^*$  не лежит на карте  $(w_0, w_1, w_3)$ , то для нее  $q_2^- = 0$ . Кривые, соответствующие решениям уравнения (1.1), описываются в этом случае системой

$$\begin{cases} \frac{dq_0^-}{dt_3} = q_1^- + \frac{p_0}{\beta_3} (q_0^-)^{2-m}, \\ \frac{dq_1^-}{dt_1} = q_2^- + \frac{\beta_1 p_0}{\beta_3} (q_0^-)^{1-m} q_1^-, \\ \frac{dq_2^-}{dt_3} = -1 + \frac{\beta_2 p_0}{\beta_3} (q_0^-)^{1-m} q_2^-, \end{cases} \quad (2.14)$$

где

$$t_3 = \int_{x_0}^x (-y''')^{-\frac{1}{\beta+3}} dx.$$

Из этой системы видно, что кривая, проходящая через точку  $u^*$ , ввиду условия  $q_2^- = 0$ , покидает  $S_0^-$ . Таким образом, предельная точка кривой, соответствующей кнезеровскому решению уравнения (1.1), не может принадлежать множеству  $S_\Theta^-$  при  $0 \leq \Theta < 1$ , и, значит, является единственной точкой множества  $S_1^-$ , откуда следует, как было показано выше, что само решение уравнения (1.1) имеет вид (2.1) с константами (2.2).  $\square$

**Теорема 2.4.** Пусть в уравнении (1.1)  $n = 4$ ,  $p(x, y_0, y_1, y_2, y_3)$  — положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $y_0, y_1, y_2, y_3$ . Тогда существует кнезеровское решение уравнения (1.1).

*Доказательство.* Выберем точку  $x_0$  такую, что функция  $p$  определена для любых  $x, y_0, y_1, y_2, y_3$  при  $x \geq x_0$ . Докажем, что в этой точке существуют такие данные Коши  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$ , что соответствующее решение уравнения (1.1) является кнезеровским. Предположим, что это не так. Тогда для любых данных Коши  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$ , удовлетворяющих неравенствам  $y_0 \geq 0, y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$ , а также условию

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \quad (2.15)$$

найдется такое  $x \geq x_0$ , при котором решение уравнения (1.1), задаваемое этими условиями Коши, или хотя бы одна из его производных  $y'(x), y''(x), y'''(x)$  обратится в нуль. Другими словами, соответствующая этому решению кривая на сфере  $S^3$  попадет на границу кнезеровской области  $K_3$ . Заметим, что эта точка  $x$  единственна. Действительно, эта кривая на  $S^3$  удовлетворяет в соответствующих картах системам типа (2.6), (2.12), (2.13), (2.14), где вместо  $p_0$  стоит некоторая положительная функция (эта функция может быть разной для различных решений уравнения (1.1)), и приводимые выше оценки для производных координатных функций на границе области  $K_3$  показывают, что кривая может только выходить из нее, а не входить или оставаться на границе.

Таким образом, на замыкании кнезеровской области  $\overline{K_3}$  определена функция  $x_{\text{гр}}(u)$ ,  $u \in \overline{K_3}$ , показывающая, при каком значении аргумента  $x$  решение уравнения (1.1) перестает удовлетворять кнезеровским условиям, т.е. соответствующая кривая попадает на границу области  $K_3$ .

**Лемма 2.4.** *Функция  $x_{\text{гр}}(u)$  непрерывна на  $\overline{K_3}$ .*

*Доказательство.* Зададим на  $S^3$  непрерывную функцию  $\Theta(u)$ , положительную в области  $K_3$ , равную нулю на ее границе, и отрицательную на остальной части сферы. Например, можно взять любое непрерывное продолжение функции  $\Theta$ , задававшейся выше, в области  $K_3$  с помощью системы множеств  $S_{\Theta}^-$ .

Определим также отображение  $U_{\text{реш}}(U, X)$ , заданное на открытом подмножестве пространства  $S^3 \times [x_0, \infty)$ , содержащем все точки вида  $(u, x)$ , где  $u \in \overline{K_3}$ ,  $x_0 \leq x \leq x_{\text{гр}}(u)$ , и отображающее это подмножество в  $S^3$ . Пусть дана точка  $u = (u_1, u_2, u_3) \in S^3$ . Из формул (2.4) и условия (2.15) найдем  $y_0, y_1, y_2, y_3$ . Рассмотрим далее решение, порожденное данными Коши

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad y'''(x_0) = y_3.$$

При  $x$ , достаточно мало отличающемся от  $x_0$ , это решение также определено. Оно, в свою очередь, в силу формул (2.4) и условия (2.15), определяет точку  $U_{\text{реш}}(u, x)$  на сфере  $S^3$ , рассматриваемой как фактор-пространство пространства  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . Отображение  $U_{\text{реш}}$  является непрерывным как композиция непрерывных отображений. Функцию  $x_{\text{гр}}$  можно задать неявно с помощью уравнения

$$\Theta(U_{\text{реш}}(u, x_{\text{гр}}(u))) = 0.$$

Непрерывная функция  $F(u, x) = \Theta(U_{\text{реш}}(u, x))$  не принадлежит классу  $C^1$ , поэтому мы не можем воспользоваться теоремой о неявной функции. Однако эта функция обладает свойством

$$\text{sign } F(u, x) = \text{sign}(x_{\text{гр}}(u) - x),$$

из которого следует непрерывность функции  $x_{\text{гр}}(u)$ . Действительно, пусть  $x_{\text{гр}}(u)$  терпит разрыв в точке  $M \in \overline{K_3}$ . Тогда существует последовательность точек  $M_i \in \overline{K_3}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , стремящаяся к  $M$  при  $i \rightarrow \infty$  и такая, что числовая последовательность  $x_{\text{гр}}(M_i)$  имеет предел (конечный или бесконечный), отличный от  $x_{\text{гр}}(M)$ . Для определенности будем считать, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{\text{гр}}(M_i)) > x_{\text{гр}}(M)$ . Пусть  $\tilde{x}$  принадлежит интервалу  $(x_{\text{гр}}(M), \lim_{i \rightarrow \infty} (x_{\text{гр}}(M_i)))$ . Тогда  $F(M, \tilde{x}) < 0$ . С другой стороны,  $F(M_i, \tilde{x}) > 0$  при достаточно большом  $i$ , что противоречит непрерывности функции  $F$  в точке  $(M, \tilde{x})$ . Лемма доказана.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 2.4.

Рассмотрим отображение  $R : \overline{K_3} \rightarrow S_0^-$ , задаваемое соотношением

$$R(u) = U_{\text{реш}}(U, X_{\text{гр}}(U)).$$

Это отображение непрерывно на всем множестве  $\overline{K_3}$  и отображает его границу  $S_0^-$  на себя тождественно. А так как существует гомеоморфизм  $\overline{K_3}$  на замкнутый шар, переводящий  $S_0^-$  на границу

шара, то существование такого непрерывного отображения  $R$  невозможно. Полученное противоречие доказывает существование такой точки  $u$  в  $\overline{K_3}$ , для которой функция  $X_{\text{гр}}$  не определена, что, в свою очередь, влечет существование в  $X_0$  данных Коши  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$ , удовлетворяющих неравенствам  $y_0 > 0, y_1 < 0, y_2 > 0, y_3 < 0$  и таких, что соответствующее решение уравнения (1.1) для всех  $x > x_0$  будет удовлетворять условиям

$$y(x) > 0, \quad y'(x) < 0, \quad y''(x) > 0, \quad y'''(x) < 0.$$

Итак, существует кнезеровское решение уравнения (1.1), и теорема доказана.  $\square$

**Замечание 2.1.** Нет никаких принципиальных трудностей для доказательства теоремы 2.4 для любого четного  $n$ . Для любого  $n$  можно построить соответствие между решениями уравнения (1.1) и кривыми на сфере  $S^{n-1}$ . Четность же  $n$  обеспечивает условие, что все такие кривые могут только выходить из кнезеровской области, а не входить в нее и не лежать на границе.

**Теорема 2.5.** Пусть  $n = 4$ , а функция  $p(x, y_0, y_1, y_2, y_3)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.3. Кроме того, пусть выполняется условие (2.9) и существует предел функции  $p(x, y_0, y_1, y_2, y_3)$  при  $x \rightarrow -\infty, y_0 \rightarrow 0, \dots, y_3 \rightarrow 0$ , равный  $p_0 > 0$ . Тогда любое кнезеровское решение уравнения (1.1) стремится к нулю с асимптотикой

$$y(x) = Cx^\beta(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

где  $C$  и  $\beta$  определяются формулами (2.2).

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что кнезеровское решение  $y(x)$  и его производные  $y'(x), y''(x), y'''(x)$  стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , а функция  $p(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x))$  на этом решении стремится к  $p_0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим соответствующую решению ориентированную кривую  $L$  на  $S^3$ . Ввиду компактности  $S^3$ , у этой кривой существует предельная точка. Если эта точка лежит на карте  $(u_1, u_2, u_3)$ , то, согласно лемме 2.2, через нее проходит траектория  $L^*$  системы (2.6), состоящая из предельных точек кривой  $L$ . Но согласно теореме 2.3, траектория  $L^*$  либо сводится к одной точке, либо выходит за пределы кнезеровской области. Последнее невозможно, так как в этом случае и кривая  $L$  также вышла бы за пределы  $K_3$ . Если предельная точка кривой  $L$  не лежит в карте  $(u_1, u_2, u_3)$ , то она принадлежит границе множества  $\overline{K_3}$  — множеству  $S_0^-$  и лежит в одной из карт

$$(v_0^-, v_2^-, v_3^-), \quad (w_0, w_1, w_2), \quad (q_0^-, q_1^-, q_2^-).$$

Но в этом случае через точку проходит траектория одной из систем (2.12), (2.13), (2.14), которая, с одной стороны, состоит из предельных точек кривой  $L$ , а с другой стороны, покидает замыкание кнезеровской области, что невозможно. Итак, у кривой  $L$  на компактной сфере  $S^3$  существует только одна предельная точка, являющаяся пределом. В частности, в карте  $(u_1, u_2, u_3)$  для кривой  $L$  справедливо соотношение  $u_1 \sim -a_1$ , из которого вытекает условие на решение  $y(x)$ :

$$y'y^{-\beta_1} \sim -a_1, \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\frac{y^{-\beta_1+1}}{-\beta_1+1} \sim -a_1x, \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

а отсюда вытекает утверждение теоремы 2.5.  $\square$

**2.1.3. Поведение знакопостоянных решений при убывании аргумента.** Рассмотрим теперь поведение решений уравнения (1.1) при убывании аргумента  $x$ .

При четных  $n$  замена независимой переменной  $x' = -x$  переводит уравнение (1.1) в уравнение того же типа, поэтому справедливы результаты, которые были получены выше для поведения решений при возрастании  $x$ .

**Теорема 2.6.** При  $n = 4$  в предположении, что непрерывная положительная функция  $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  имеет предел  $p_0 > 0$  при  $x \rightarrow x^* + 0, (-1)^i y_i \rightarrow +\infty, i = 0, 1, \dots, n-1$ , и удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , любое положительное решение уравнения

(1.1), заданное на интервале  $(x^*, x_1)$  и имеющее вертикальную асимптоту  $x = x^*$ , удовлетворяет соотношению

$$y(x) = C(x - x^*)^\beta(1 + o(1)), \quad x \rightarrow x^* + 0, \quad (2.17)$$

где  $C$  и  $\beta$  определяются (2.2).

Заметим, что при нечетных  $n$  не существует решений уравнения (1.1) с непрерывной положительной функцией  $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ , имеющих вертикальную асимптоту и определенных справа от нее.

Перейдем к кнезеровским решениям уравнения (1.1). Среди решений, определенных на интервале  $(-\infty, x_0]$ , кнезеровскими естественно назвать положительные решения, все производные которых до порядка  $n$  включительно также положительны.

Утверждение теоремы 2.3 можно распространить на поведение решений при убывании независимой переменной не только для  $n = 4$ , но и для  $n = 3$ . В последнем случае вместо трехмерной сферы  $S^3$  используется аналогично конструируемая двумерная сфера  $S^2$ . В качестве кнезеровских областей используются  $K_{n-1}^-$ ,  $n = 3, 4$ , — части сферы  $S^{n-1}$ , соответствующие при факторизации пространства  $R^n \setminus \{0\}$  его подмножествам, состоящим из точек с положительными координатами  $\{y_0 > 0, \dots, y_{n-1} > 0\}$ . Используется также разбиение этих областей на множества  $S_\Theta$ , являющиеся границами соответственно прямоугольников и параллелепипедов, описанных в леммах 2.1 и 2.2. В результате, почти дословно повторяя доказательство теоремы 2.3, получим следующий результат.

**Теорема 2.7.** При  $n = 3$  или  $n = 4$  все кнезеровские (при убывании аргумента) решения уравнения (1.2) имеют вид

$$y(x) = \pm C(x^* - x)^\beta, \quad x < x^*,$$

где  $C$  и  $\beta$  определяются формулами (2.2).

Точно так же без существенных изменений доказательства теорем 2.4 и 2.5 доказываются две следующие теоремы.

**Теорема 2.8.** Пусть  $n = 3$  или  $n = 4$  и  $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$  — непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $y_0, \dots, y_{n-1}$ . Тогда существует кнезеровское (при убывании аргумента) решение уравнения (1.1).

**Теорема 2.9.** Пусть  $n = 3$  или  $n = 4$ , а функция  $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$  удовлетворяет условиям теоремы 2.8. Кроме того, пусть выполняется условие (2.9) и существует предел функции  $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y_0 \rightarrow 0, \dots, y_{n-1} \rightarrow 0$ , равный  $p_0 > 0$ . Тогда любое кнезеровское (при убывании аргумента) решение уравнения (1.1) стремится к нулю с асимптотикой (2.17) с константами (2.2).

**2.2. Знакопеременные решения.** В этой части работы в случае  $n = 3, 4$  будет исследоваться асимптотическое поведение колеблющихся решений уравнения (1.1). Решение будем называть колеблющимся, если оно имеет бесконечную последовательность нулей (ограниченную или неограниченную).

В [12] приводятся результаты о существовании колеблющихся решений уравнения (1.1), непродолжаемых влево, для нечетных  $n$ , где  $p(x, y_0, \dots, y_{n-1}) = p(x)$  — непрерывная функция, удовлетворяющая условию  $p_* < p(x) < p^*$  для некоторых положительных  $p_*$ ,  $p^*$ . Доказано также, что при  $n = 3$  уравнение (1.2) не имеет колеблющихся решений, продолжаемых влево, и имеет колеблющиеся решения, продолжаемые вправо, т.е. решения, определенные на некотором интервале  $(x_0, \infty)$ ,  $x_0 > -\infty$ . Из [2, лемма 2.5] следует, что при  $n = 3$  колеблющиеся решения уравнения (1.1), где  $p(x, y_0, \dots, y_{n-1}) = p(x) \geq t > 0$ , неограниченно продолжаемы вправо.

Докажем существование колеблющихся решений уравнения (1.1) для любого  $n > 2$ . Для этого рассмотрим  $Y \subset R^n$  — множество данных Коши в точке  $x_0$ , для которых решение уравнения (1.1) имеет вертикальную асимптоту справа от  $x_0$ . Множество  $Y$  можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств  $Y_+$  и  $Y_-$ , для которых соответствующие решения уравнения (1.1) стремятся к  $+\infty$  и  $-\infty$ .

**Утверждение 2.3.** Уравнение (1.1) при  $n > 2$ , где  $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$  — непрерывная функция, удовлетворяющая условию (2.9) и условию Липшица по  $y_0, \dots, y_{n-1}$ , имеет знакопеременные решения.

*Доказательство.* Докажем сначала, что множества  $Y_+$  и  $Y_-$  открыты. Проведем доказательство для множества  $Y_+$ . Рассмотрим произвольную точку  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$  из  $Y_+$ . Тогда решение  $y(x)$  уравнения (1.1) с начальными данными  $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$  имеет вертикальную асимптоту, и по утверждению 2.1 существует такое  $x_1 > x_0$ , что числа  $b_0 = y(x_1), \dots, b_{n-1} = y^{(n-1)}(x_1)$  положительны. У точки  $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$  существует окрестность  $V$ , все точки которой также имеют положительные координаты. По теореме о непрерывной зависимости решения уравнения от начальных условий у точки  $a \in Y_+$  существует такая окрестность  $U$ , что для любого решения  $\tilde{y}(x)$  уравнения (1.1) из условия

$$(\tilde{y}(x_0), \tilde{y}'(x_0), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0)) \in U$$

следует условие

$$(\tilde{y}(x_1), \tilde{y}'(x_1), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_1)) \in V$$

и, в частности,

$$\tilde{y}(x_1) > 0, \quad \tilde{y}'(x_1) > 0, \quad \dots, \quad \tilde{y}^{(n-1)}(x_1) > 0.$$

Таким образом, в силу утверждения 2.1 любая точка  $a \in Y_+$  принадлежит множеству  $Y_+$  вместе с некоторой окрестностью. Другими словами, множество  $Y_+$  (и аналогично  $Y_-$ ) открыто, что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество

$$A = R^n \setminus (\{y_0 \geq 0, y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, \dots\} \cup \{y_0 \leq 0, y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, \dots\})$$

при четных  $n$  и множество  $A = R^n \setminus \{0\}$  при нечетных  $n$ .

В случае  $n > 2$  получим связное множество. В силу утверждения 2.2 среди рассматриваемых данных Коши нет таких, которые соответствуют решениям, стремящимся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . А так как  $Y_+, Y_-$  — открытые множества, то в множестве  $A$  существует точка, не принадлежащая ни  $Y_+$ , ни  $Y_-$  и которая в качестве набора данных Коши порождает решение, не являющееся знакопостоянным. Таким образом, при любом  $n > 2$  уравнение (1.1) имеет знакопеременные решения. Утверждение доказано.  $\square$

**2.2.1. Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнений третьего порядка при возрастании аргумента.** Исследуем сначала случай  $n = 3$  для уравнения (1.2). Для изучения поведения таких решений на интервале знакопостоянства и изменения длин этих интервалов при возрастании  $x$  воспользуемся системой (2.6), которая при  $n = 3$  принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 - \beta_1 u_1^2, \\ \dot{u}_2 = p_0 - \beta_2 u_1 u_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Исследуем поведение траекторий, описываемых этой системой. При этом ограничимся рассмотрением плоскости  $(u_1, u_2)$ , из которой выброшен квадрант  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ , так как если траектория попадает в этот квадрант, то, как нетрудно видеть, она не может его покинуть, и соответствует, как следует из леммы 2.1, решению уравнения (1.2), имеющему вертикальную асимптоту.

Рассмотрим поведение траекторий системы (2.18) на бесконечности, что соответствует обращению в нуль решений уравнения (1.2). Если решение уравнения (1.2) обращается в нуль в точке  $\tilde{x}$ , но не равно тождественно нулю, то возможны следующие три случая поведения решения уравнения (1.2) и его производных вблизи точки  $\tilde{x}$ :

а)  $y'(\tilde{x}) = c_1 \neq 0, \quad y''(\tilde{x}) = c_2 \neq 0$ . В этом случае

$$y \sim c_1(x - \tilde{x}), \quad y' \sim c_1, \quad y'' \sim c_2.$$

Тогда

$$u_1 = c_1 |c_1|^{-\beta_1} |x - \tilde{x}|^{-\beta_1}, \quad u_2 = c_2 |c_2|^{-\beta_2} |x - \tilde{x}|^{-\beta_2},$$

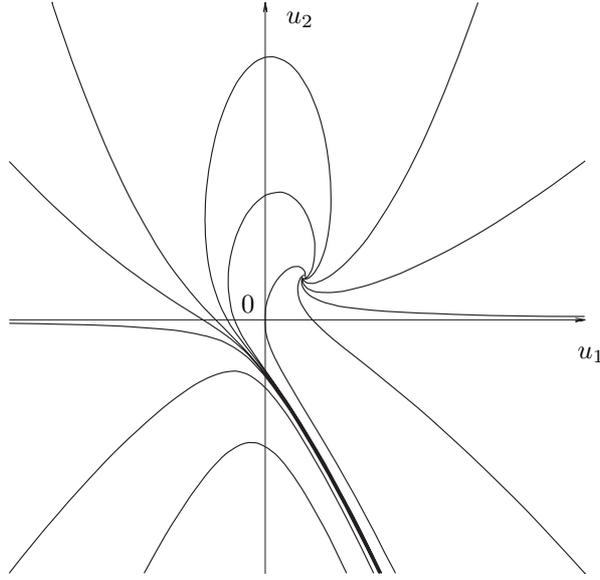


Рис. 1

и, следовательно,

$$|u_2| \sim |c_1|^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}} |c_2| |u_1|^{-\frac{\beta_2}{\beta_1}}.$$

б)  $y'(\tilde{x}) \sim c_1 \neq 0$ ,  $y''(\tilde{x}) = 0$ . В этом случае

$$y(x) \sim c_1(x - \tilde{x}), \quad y' \sim c_1, \quad y'' \sim p_0 \frac{|c_1|^{-m} c_1}{2 - m} \cdot |x - \tilde{x}|^{2-m}.$$

Тогда

$$u_1 \rightarrow \pm\infty, \quad u_2 \rightarrow 0, \quad u_2 \sim \frac{p_0}{2 - m} u_1^{-1}.$$

в)  $y(\tilde{x}) = 0$ ,  $y''(\tilde{x}) = c_2 \neq 0$ . В этом случае

$$y(x) \sim \frac{c_2}{2}(x - \tilde{x})^2, \quad y'(x) \sim c_2(x - \tilde{x}), \quad y''(x) \sim c_2.$$

Тогда

$$u_1 \sim |c_2|^{1-\beta_1} \cdot 2^{\beta_1} \cdot |x - \tilde{x}|^{-2\beta_1}(x - \tilde{x}),$$

$$u_2 \sim |c_2|^{1-\beta_2} \cdot 2^{\beta_2} \cdot |x - \tilde{x}|^{-2\beta_1}(x - \tilde{x}),$$

и, следовательно,  $u_2 \sim u_1^2/2$ .

Таким образом, имеем следующую картину фазовых кривых для системы (2.18) (см. рис. 1):

**Лемма 2.5.** Если  $y(x)$  — решение уравнения (1.2), то функция

$$z(x) = Ay(Bx + C), \tag{2.19}$$

где  $A, B, C$  — некоторые постоянные такие, что  $|A|^{-m} = B^3$  также является решением уравнения (1.2), причем его участкам знакопостоянства, расположенным между соседними нулями, соответствуют те же кривые на плоскости  $(u_1, u_2)$ , что и у решения  $y(x)$ . Верно и обратное. Если участку знакопостоянства, расположенному между соседними нулями одного решения уравнения (1.2), соответствует та же кривая на плоскости  $(u_1, u_2)$ , что и некоторому участку знакопостоянства, расположенному между соседними нулями другого решения уравнения (1.2), то эти решения связаны соотношением (2.19).

*Доказательство.* Первое утверждение леммы доказывается непосредственной проверкой. Докажем второе утверждение леммы. Пусть  $y(x)$  и  $z(x)$  — два решения уравнения (1.1) при

$p(x, y, y', y'') = p_0 > 0$ , имеющие участки знакопостоянства, которые приводят к одной и той же кривой на плоскости  $(u_1, u_2)$ . Тогда существуют такие точки  $x_1, x_2$ , что на этих участках

$$\begin{aligned} y'(x_1)|y(x_1)|^{-\beta_1-1}y(x_1) &= z'(x_2)|z(x_2)|^{-\beta_1-1}z(x_2), \\ y''(x_1)|y(x_1)|^{-\beta_2-1}y(x_1) &= z''(x_2)|z(x_2)|^{-\beta_2-1}z(x_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим решение  $\bar{z}(x) = Ay(Bx + C)$ , где

$$A = \frac{z(x_2)}{y(x_1)}, \quad B = \frac{z'(x_2)}{Ay'(x_1)}, \quad C = x_1 - Bx_2.$$

Это решение, его первая и вторая производные в точке  $x_2$  имеют те же значения, что и у решения  $z(x)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{z}(x_2) &= Ay(Bx_2 + C) = \frac{z(x_2)}{y(x_1)}y(Bx_2 + x_1 - Bx_2) = z(x_2), \\ \bar{z}'(x_2) &= AB y'(Bx_2 + C) = A \frac{z'(x_2)}{Ay'(x_1)}y'(x_1) = z'(x_2), \\ \bar{z}''(x_2) &= AB^2 y''(Bx_2 + C) = A \frac{(z'(x_2))^2}{(Ay'(x_1))^2}y''(x_1) = \\ &= \frac{(z'(x_2))^2 y(x_1)}{(y(x_1))^2 z(x_2)} \cdot \frac{z''(x_2)|z(x_2)|^{-\beta_2-1}z(x_2)}{|y(x_1)|^{-\beta_2-1}y(x_1)} = \\ &= \frac{|z(x_2)|^{2\beta_1}}{|y(x_1)|^{2\beta_1}} \cdot \frac{|y(x_1)|^{1+\beta_2}}{|z(x_2)|^{1+\beta_2}} \cdot z''(x_2) = z''(x_2). \end{aligned}$$

По теореме существования и единственности  $z(x) = \bar{z}(x) = Ay(Bx + C)$ . Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** На плоскости  $(u_1, u_2)$  существует ровно одна траектория системы (2.18), для которой

$$u_1 \rightarrow +\infty, \quad u_2 \rightarrow 0,$$

ровно одна траектория, для которой

$$u_1 \rightarrow -\infty, \quad u_2 \rightarrow 0,$$

ровно одна траектория, для которой

$$u_2 \sim +\frac{u_1^2}{2}, \quad u_1 \rightarrow +\infty,$$

ровно одна траектория, для которой

$$u_2 \sim +\frac{u_1^2}{2}, \quad u_2 \rightarrow -\infty,$$

для каждого  $C \neq 0$  ровно одна траектория, для которой

$$u_2 \sim C|u_1|^{\beta_2/\beta_1}, \quad u_1 \rightarrow +\infty, \quad (2.20)$$

ровно одна траектория, для которой выполняется (2.20) при  $u_1 \rightarrow -\infty$ .

**Доказательство.** В каждом из перечисленных случаев легко доказывается, что если две траектории имеют один и тот же асимптотический вид, то соответствующие решения уравнения (1.2) связаны соотношением типа (2.19) и, значит, определяют одну и ту же кривую на плоскости  $(u_1, u_2)$ .  $\square$

**Лемма 2.6.** Существует траектория системы (2.18), имеющая асимптотический вид (2.20) при  $u_1 \rightarrow +\infty$  и  $u_1 \rightarrow -\infty$  с константами, отличающимися только знаком.

*Доказательство.* Построим функцию  $\psi(C)$ ,  $C > 0$ . Для этого рассмотрим траекторию системы (2.18), имеющую вид (2.20) при  $u_1 \rightarrow -\infty$ ; тогда при  $u_1 \rightarrow +\infty$  эта траектория имеет аналогичный вид, но уже с отрицательной константой, модуль которой мы примем за  $\psi(C)$ , т.е.

$$u_2 \sim -\psi(C) \cdot |u_1|^{\frac{\beta_2}{\beta_1}}, \quad u_1 \rightarrow +\infty.$$

Заметим, что если две кривые имеют при  $u_1 \rightarrow -\infty$  асимптотический вид (2.20), то для кривой, расположенной выше, константа  $C$  больше, а  $\psi(C)$  — меньше. Таким образом, функция  $\psi(C)$  строго убывает, а так как она положительная и непрерывная, то существует ровно одно значение  $C$ , для которого  $\psi(C) = C$ . Лемма доказана.  $\square$

Тем самым доказано существование колеблющегося решения уравнения (1.2), все участки знакопостоянства которого определяют на плоскости  $(u_1, u_2)$  одну и ту же траекторию, а значит, каждый следующий участок может быть получен из предыдущего при помощи соотношения (2.19), причем для каждой пары соседних участков константы  $A < 0$  и  $B > 0$  одни и те же. Обозначим это решение  $\tilde{y}(x)$ . Длина каждого последующего участка знакопостоянства относится к длине предыдущего, как  $\frac{1}{B}$ . В зависимости от того, превосходит или не превосходит  $B$  единицу, решение  $\tilde{y}(x)$  определено на ограниченном или неограниченном справа интервале.

Заметим, что если  $x_1$  и  $x_2$  — соседние точки обращения в нуль решения  $\tilde{y}(x)$ , то

$$\left| \frac{\tilde{y}'(x_1)}{\tilde{y}'(x_2)} \right| = \frac{1}{|AB|} = \frac{1}{B^{-\frac{3}{m} \cdot B}} = B^{-1+\beta}. \quad (2.21)$$

Заметим также, что

$$0 < \int_{x_1}^{x_2} p_0 |\tilde{y}|^{2-m} dx = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{y} \tilde{y}''' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \tilde{y}'' d\tilde{y} = - \int_{x_1}^{x_2} \tilde{y}' d\tilde{y}' = \frac{(\tilde{y}'(x_1))^2}{2} - \frac{(\tilde{y}'(x_2))^2}{2},$$

т.е. функция  $|\tilde{y}'(x)|$  убывает в точках обращения в нуль функции  $\tilde{y}(x)$ ; значит, выполняется соотношение

$$\left| \frac{\tilde{y}'(x_1)}{\tilde{y}'(x_2)} \right| > 1,$$

откуда, согласно (2.21),  $B < 1$ .

Таким образом, если  $x_i$  —  $i$ -я точка обращения в нуль функции  $\tilde{y}(x)$ , то

$$x_i - x_0 = (x_1 - x_0) \sum_{j=0}^{i-1} B^{-j} = (x_1 - x_0) \frac{B^{-i} - 1}{B^{-1} - 1},$$

откуда следует, что

$$x_i \asymp B^{-i}, \quad i \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь участки монотонности решения  $\tilde{y}(x)$ . Ясно, что они также могут быть получены один из другого при помощи соотношения (2.19). Поэтому если  $x'_i$  —  $i$ -я точка, в которой достигается локальный экстремум решения  $\tilde{y}(x)$ , то

$$x'_i - x'_0 = \frac{(x'_1 - x'_0)(B^{-i} - 1)}{B^{-1} - 1},$$

откуда видно, что  $B^{-i}$  является линейной функцией от  $x'_i$ .

Кроме того,

$$\left| \frac{\tilde{y}(x'_{i+1})}{\tilde{y}(x'_i)} \right| = |A| = B^{-\beta} < 1,$$

откуда

$$|\tilde{y}(x'_i)| = |\tilde{y}(x'_0)| B^{\beta i} = M(x'_i - x_*)^\beta$$

для некоторых  $M > 0$  и  $x_*$ . Заметим, что для решения, полученного из  $\tilde{y}(x)$  с помощью соотношения (2.19), где  $|A| = B^{-\beta}$ , будет справедлива такая же формула для модулей экстремумов с другим значением  $x_*$ , но с тем же множителем  $M$ .

**Лемма 2.7.** Если  $y(x)$  — колеблющееся решение уравнения (1.2), то существуют такие постоянные  $B > 0$  и  $C$ , что

$$y(x) = \pm B^{-\beta} \cdot \tilde{y}(Bx + C).$$

Это равносильно тому, что на плоскости  $(u_1, u_2)$  есть только одна траектория, соответствующая колеблющемуся решению.

*Доказательство.* Обозначим через  $L$  кривую, соответствующую на фазовой плоскости решению  $\tilde{y}(x)$ . Предположим, что существует колеблющееся решение уравнения, которому соответствует еще какая-то кривая на плоскости  $(u_1, u_2)$ . Заметим, что кривая, имеющая асимптотический вид (2.20) при  $u_1 \rightarrow -\infty$ , соответствующая участку знакопостоянства решения, имеет ту же константу  $C$ , что и кривая, соответствующая следующему участку при  $u_1 \rightarrow +\infty$ , но с обратным знаком. Поэтому хотя бы одна кривая, соответствующая участку знакопостоянства решения, должна лежать ниже  $L$  и хотя бы одна — выше. Обозначим эти кривые соответственно  $L_1$  и  $L_2$ . Тогда все кривые, которые лежат между  $L_1$  и  $L_2$ , соответствуют участкам знакопостоянства колеблющихся решений. Поэтому если взять на решении  $\tilde{y}(x)$  данные Коши в некоторой точке  $x_0$ , то при их достаточно малом изменении получим данные Коши другого колеблющегося решения. Без ограничения общности можно считать, что  $\tilde{y}(x)$  в точке  $x_0$  достигает локального максимума.

Рассмотрим однопараметрическое семейство решений уравнения  $y(x, A)$ , задаваемых начальными условиями

$$y(x_0, A) = A, \quad y'_x(x_0, A) = \tilde{y}'(x_0) = 0, \quad y''_{xx}(x_0, A) = \tilde{y}''(x_0).$$

Тогда при  $A$ , достаточно близком к  $\tilde{y}(x_0)$ , решение  $y(x, A)$  является колеблющимся. Рассмотрим для такого  $A$  функцию

$$f(x) = \tilde{y}(x) - y(x, A) = (\tilde{y}(x_0) - A) \cdot y'_A(x, \tilde{y}(x_0) \cdot \lambda(x) + A(1 - \lambda(x))),$$

где  $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ .

Рассмотрим далее последовательность  $\{x_i\}$  нулей функции  $y(x, A)$ . Как показано выше,  $\tilde{y}(x) = O(x^\beta)$ ,  $x \rightarrow \infty$ , поэтому  $f(x_i) \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ .

С другой стороны, функция  $z = y'_A$  удовлетворяет уравнению  $z''' = (1 - m) \cdot |y|^{-m} z$  и условиям  $z(x_0) = 1$ ,  $z'(x_0) = z''(x_0) = 0$ . Так как  $|y|^{-m} \geq 0$ , то  $z''' \geq 0$ , откуда следует, что  $z$  возрастает и больше единицы при  $x > x_0$ . Поэтому

$$|f(x_i)| > |\tilde{y}(x_0) - A|;$$

следовательно,  $\tilde{y}(x_0) = A$ . □

Пусть  $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots$  — такая последовательность точек, что  $y(x_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $y(x) \neq 0$  при  $x \in (x_i, x_{i+1})$ , а  $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_i < \dots$  — такая последовательность, что  $y'(x'_i) = 0$ , а на интервалах  $(x'_i, x'_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , функция  $y(x)$  монотонна.

Из леммы 2.7, а также «подобия» всех участков знакопостоянства решения  $\tilde{y}(x)$  вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.10.** При  $n = 3$  существует константа  $B \in (0, 1)$ , зависящая только от  $p_0$  и  $m$ , что любое знакопеременное решение  $y(x)$  уравнения (1.2) удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} = B^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (2.22)$$

$$2) \quad \frac{y(x'_{i+1})}{y(x'_i)} = -B^{-\beta}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.23)$$

$$3) \quad \frac{y'(x_{i+1})}{y'(x_i)} = -B^{-\beta+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.24)$$

$$4) \quad |y(x'_i)| = M(x'_i - x_*)^\beta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.25)$$

для некоторых  $M > 0$  и  $x_*$ , причем константа  $M$  зависит только от  $p_0$  и  $m_0$ .

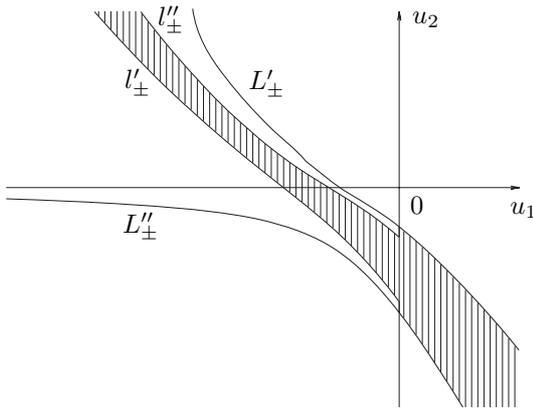


Рис. 2

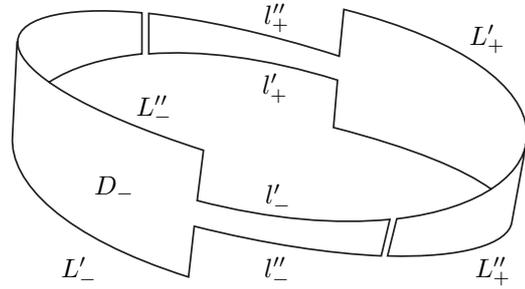


Рис. 3

Вернемся к уравнению (1.1). Будем предполагать, что непрерывная, удовлетворяющая условию Липшица по  $y, y_1, y_2$  функция  $p(x, y, y', y'')$  стремится к положительному пределу  $p_0$ , при  $x \rightarrow \infty$  равномерно по  $y, y_1, y_2$ . В частности, можно считать, что существуют положительные постоянные  $m_0$  и  $M$  такие, что  $m_0 \leq p(x, y, y', y'') \leq M$ .

Рассмотрим два экземпляра плоскости  $u_1, u_2$  и  $u_1^-, u_2^-$ , один из которых соответствует  $y > 0$ , другой  $y < 0$ .

Проведем на каждой из плоскостей две траектории: для системы (2.18) с  $p_0 = m_0$  траекторию  $L'_\pm$  с асимптотикой

$$u_2 \sim \frac{u_1^2}{2} \text{ при } u_1 \rightarrow -\infty,$$

и для системы (2.18) с  $p_0 = M$  траекторию  $L''_\pm$  с асимптотикой

$$u_2 \sim \frac{M}{(2-m)u_1} \text{ при } u_1 \rightarrow -\infty.$$

Тогда траектория, соответствующая участку знакопостоянства колеблющегося решения  $y(x)$  уравнения (1.1), должна лежать ниже  $L'_\pm$ , но выше  $L''_\pm$ . В противном случае решение  $y(x)$  обратится в нуль в точке, в которой  $y'(x)$  и  $y''(x)$  имеют один и тот же знак, откуда (с применением леммы 2.7) следует наличие у решения  $y(x)$  вертикальной асимптоты. При  $u_1 \rightarrow +\infty$  траектории  $L'_\pm$  и  $L''_\pm$  должны иметь асимптотический вид (2.20) с отрицательными константами  $-C', -C''$ .

Проведем в полуплоскостях  $u_1 \leq 0$  еще по две траектории: для системы (2.18) с  $p_0 = m_0$  траекторию  $l''_\pm$  с асимптотикой

$$u_2 \sim c'' |u_1|^{\beta_2/\beta_1} \text{ при } u_1 \rightarrow -\infty,$$

и для системы (2.18) с  $p_0 = M$  траекторию  $l'_\pm$  с асимптотикой

$$u_2 \sim c' |u_1|^{\beta_2/\beta_1} \text{ при } u_1 \rightarrow -\infty.$$

Тогда траектория, соответствующая участку знакопостоянства колеблющегося решения уравнения (1.1), должна лежать ниже  $l''_\pm$ , но выше  $l'_\pm$ .

Пусть  $D_\pm$  — замкнутая область, состоящая из точек плоскости  $u_1 \leq 0$ , лежащих между  $l'_\pm$  и  $l''_\pm$  и полуплоскости  $u_1 \geq 0$ , лежащих между  $L'_\pm$  и  $L''_\pm$  (см. рис. 2).

Склеим области  $D_+$  и  $D_-$  так, чтобы верхний конец кривой  $l''_\pm$  соединился с нижним концом кривой  $L''_\pm$ , а верхний конец кривой  $l'_\pm$  — с нижним концом кривой  $L'_\pm$ . В результате получим «цилиндр с углами» (см. рис. 3).

Рассматривая плоскости  $(u_1, u_2)$  и  $(u_1^-, u_2^-)$  как карты на двумерной сфере  $S^2$ , можем считать построенный цилиндр подмножеством этой сферы. Так как в каждой карте на сфере траектории, соответствующие решению уравнения (1.2), принадлежат классу  $C^1$  (со своей параметризацией в каждой карте), то, используя разбиение единицы и выбрав карту, покрывающую весь цилиндр, можно глобально описывать траектории, соответствующие решениям уравнения (1.2), с помощью

системы типа (2.18) относительно некоторого параметра  $\tilde{t}$ . Решениям уравнения (1.1) будут соответствовать траектории на цилиндре, также принадлежащие классу  $C^1$ . Всему колеблющемуся решению уравнения (1.1) будет соответствовать траектория этой системы, полностью лежащая на «цилиндре». Другие траектории могут покидать «цилиндр» через край (кривые  $L'_\pm, L''_\pm, l'_\pm, l''_\pm$  и отрезки осей  $Ou_2$ ), но не могут попадать на него извне. Зададим на «цилиндре» функцию  $V$  следующим образом. На отрезке оси  $Ou_2$ , лежащем в плоскости  $D_+$ , положим  $V = u_2 - C$ , где  $C$  выбрано так, чтобы функция  $V$  была равна нулю в точке, где этот отрезок пересекается с траекторией  $L$ , соответствующей колеблющемуся решению уравнения (1.2). Продолжим эту функцию константой вдоль траекторий, соответствующих решениям уравнения (1.2), в следующем порядке. Сначала на часть области  $D_+$ , лежащую в полуплоскости  $u_1 \leq 0$ , затем через склейку на  $D_-$  и, наконец, на оставшуюся часть  $D_+$ . Таким образом, получим на «цилиндре» функцию, гладкую всюду, за исключением отрезка оси  $Ou_2$ , в котором мы начали ее определять. Пусть  $\varphi(z)$  — значение функции  $V$  после продолжения в точке исходного отрезка оси  $Ou_2$ , в которой она изначально была равна  $z$ . Очевидно, что

$$\varphi(0) = 0, \quad \text{sign } \varphi(z) = \text{sign } z, \quad |\varphi(z)| < |z|, \quad z \neq 0.$$

На «цилиндре» существует функция  $\Theta$ , гладкая всюду, кроме исходного отрезка оси  $Ou_2$ , и удовлетворяющая условиям

$$\Theta \Big|_{u_1=+0, D_+} = 0, \quad \Theta \Big|_{u_1=-0, D_+} = 1,$$

$\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{d\tilde{t}} < 0$  всюду, кроме исходного отрезка.

Рассмотрим функцию

$$W = V + (\varphi \circ V - V)\Theta.$$

Имеем

$$W \Big|_{u_1=+0, D_+} = V \Big|_{u_1=+0, D_+}, \quad W \Big|_{u_1=-0, D_+} = \varphi \circ V \Big|_{u_1=-0, D_+}.$$

Таким образом,

$$W \Big|_{u_1=+0, D_+} = W \Big|_{u_1=-0, D_+},$$

и мы получили функцию  $W$ , гладкую на всем «цилиндре», которая равна нулю только на точках траектории  $L$  и для которой

$$\text{sign } \dot{W} = \text{sign}(\varphi \circ V - V)\dot{\Theta} = \text{sign } V = \text{sign } W.$$

Докажем, что вдоль траектории, соответствующей колеблющемуся решению уравнения (1.1), функция  $W$  стремится к нулю. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого  $\varepsilon > 0$  существует сколь угодно большое  $x > x_0$ , для которого функция  $W$  в соответствующей точке «цилиндра» принимает значение, большее  $\varepsilon$ . На множестве  $\{W \geq \varepsilon\}$  выполняется неравенство  $\dot{W} > 0$ , а так как это множество компактно, то на нем  $\dot{W} > \delta > 0$ . Значит, при достаточно малом отличии  $p(x, y_0, y_1, y_2)$  от  $p_0$  на множестве  $\{W \geq \varepsilon\}$  будет выполняться неравенство  $\dot{W} \geq \delta/2 > 0$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, y_0, y_1, y_2) = p_0$  и если  $W$  стало больше, чем  $\varepsilon$ , при достаточно большом  $x$ , то  $\dot{W} \geq \delta/2 > 0$ , а так как  $W$  — ограниченная функция, то траектория покинет «цилиндр» и не может соответствовать колеблющемуся решению. Таким образом, траектория для колеблющегося решения уравнения (1.1) стремится к траектории  $L$ .

Отсюда, в частности, следует

**Лемма 2.8.** *Функции*

$$y'(x_i)|y''(x_i)|^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}} \text{sign } y''(x_i), \quad |y(x'_i)||y''(x'_i)|^{-\frac{1}{\beta_2}},$$

где  $y(x)$  — решение (1.1), имеют при  $i \rightarrow \infty$  пределы, равные значениям этих функций для колеблющегося решения  $\tilde{y}(x)$  уравнения (1.2) в точках, где соответственно  $\tilde{y}(x)$  или  $\tilde{y}'(x)$  обращаются в нуль.

**Замечание 2.2.** Эти значения одни и те же в разных точках соответственно обращения в нуль или достижения локального экстремума решения  $\tilde{y}(x)$  и одни и те же для разных колеблющихся решений уравнения (1.2), так как всем им соответствует одна периодическая траектория на сфере  $S^2$ .

**Замечание 2.3.** Эти значения и их пределы конечны и отличны от нуля ввиду того, что у колеблющегося решения уравнения (1.1), в частности, уравнения (1.2) не существует точки  $\tilde{x}$ , в которой бы выполнялось сразу два из трех условий

$$y(\tilde{x}) = 0, \quad y'(\tilde{x}) = 0, \quad y''(\tilde{x}) = 0.$$

Действительно, если, например,  $y(\tilde{x}) = y'(\tilde{x}) = 0$ , а  $y''(\tilde{x}) \neq 0$ , то для  $x > \tilde{x}$ , достаточно близких к  $\tilde{x}$ , все значения  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  будут отличны от нуля и одного знака, так что решение имеет вертикальную асимптоту, т.е. не может быть колеблющимся. Два других случая ( $y(\tilde{x}) = y''(\tilde{x}) = 0$  и  $y'(\tilde{x}) = y''(\tilde{x}) = 0$ ) рассматриваются аналогично.

Ниже пределы, существующие согласно лемме 2.8, обозначаются соответственно  $Q$  и  $H$ .

**Теорема 2.11.** Пусть непрерывная положительная функция  $p(x, y_0, y_1, y_2)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, y_1, y_2$  и стремится к  $p_0 > 0$  при  $x \rightarrow \infty$  равномерно по  $y_0, y_1, y_2$ . Пусть  $y(x)$  — колеблющееся решение уравнения (1.1), а  $x_1 < x_2 < \dots$  и  $x'_1 < x'_2 < \dots$  — введенные выше последовательности точек обращения в нуль решения и точек локального экстремума решения. Пусть  $B \in (0, 1)$  — константа, существование которой утверждается в теореме 2.10. Тогда при  $i \rightarrow \infty$  справедливы следующие соотношения:

- 1)  $\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_{i+1}} \rightarrow B,$
- 2)  $\frac{y(x'_{i+1})}{y(x'_i)} \rightarrow -B^{-\beta},$
- 3)  $\frac{y'(x_{i+1})}{y'(x_i)} \rightarrow -B^{-\beta+1},$
- 4)  $|y(x'_i)| = (x'_i)^{\beta+o(1)}.$

*Доказательство.* Как отмечалось в замечании 2.3, производная колеблющегося решения не может обращаться в нуль в точках  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а вторая производная  $y''(x)$  — в точках  $x'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Этот факт с помощью теоремы о неявной функции, а также теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части позволяет доказать существование следующих непрерывных функций:  $\xi_1(q, \varphi)$ ,  $\xi_2(q, \varphi)$ ,  $\eta(h, \varphi)$ . Функции  $\xi_1(q, \varphi)$ ,  $\xi_2(q, \varphi)$  определены для чисел  $q$ , достаточно близких к  $Q$ , и функций  $\varphi \in C_0[0, \infty)$  (т.е. непрерывных на  $[0, \infty)$  функций, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ ), достаточно малых по норме равномерной сходимости. Значения функций  $\xi_1$  и  $\xi_2$  равны значениям  $x > 0$ , при которых соответственно в первый и второй раз обращается в нуль решение уравнения

$$z''' = (p_0 + \varphi(x))|z|^{-m}z, \quad (2.26)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = q, \quad z''(0) = 1.$$

Функция  $\eta(h, \varphi)$  определена для чисел  $h$ , достаточно близких к  $H$ , и достаточно малых функций  $\varphi \in C_0[0, \infty)$ . Она равна значению  $x$ , при котором впервые справа от нуля достигается локальный экстремум решения  $z(x)$  уравнения (2.26), удовлетворяющего начальным условиям

$$z(0) = h, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 1.$$

Пусть теперь  $y(x)$  — произвольное колеблющееся решение уравнения (1.1). Тогда для любого  $i = 1, 2, \dots$ , любого  $\lambda_i > 0$  и  $l_i = \pm 1$  функция

$$z_i(x) = l_i \lambda_i^{-\beta} y(\lambda_i x + x_i)$$

является решением уравнения

$$z_i''' = (p_0 + \varphi_i(x)) |z_i|^{-m} z_i,$$

где

$$\varphi_i(x) = p(\lambda_i x + x_i, y(\lambda_i x + x_i), \dots, y''(\lambda_i x + x_i)) - p_0,$$

и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} z_i(0) &= l_i \lambda_i^{-\beta} y(x_i) = 0, \\ z_i'(0) &= l_i \lambda_i^{-\beta+1} y'(x_i) = 0, \\ z_i''(0) &= l_i \lambda_i^{-\beta+2} y''(x_i) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\varphi_i \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  в пространстве  $C_0[0, \infty)$ , так как  $p(x, y_0, y_1, y_2)$  стремится к  $p_0 > 0$  при  $x \rightarrow \infty$  равномерно по  $y_0, y_1, y_2$ , и выберем  $l_i$  и  $\lambda_i$  так, чтобы  $z_i''(0) = 1$ , т.е.

$$\lambda_i = \frac{1}{2^{-\beta} \sqrt{|y''(x_i)|}}, \quad l_i = \text{sign } y''(x_i) \neq 0.$$

Тогда при достаточно большом  $i$  имеем

$$x_{i+1} = x_i + \lambda_i \xi_1(q_i, \varphi_i), \quad x_{i+2} = x_i + \lambda_i \xi_2(q_i, \varphi_i),$$

где

$$q_i = \lambda_i^{-\beta+1} y'(x_i) \text{sign } y''(x_i) = y'(x_i) |y''(x_i)|^{-\frac{1-\beta}{2}} \text{sign } y''(x_i) = Q + o(1), \quad i \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_{i+1}} = \frac{\xi_1(q_i, \varphi_i)}{\xi_2(q_i, \varphi_i) - \xi_1(q_i, \varphi_i)} \rightarrow \frac{\xi_1(Q, 0)}{\xi_2(Q, 0) - \xi_1(Q, 0)} = \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_{i+1}} = B$$

при  $i \rightarrow \infty$ , где  $\tilde{x}_i$  — точки, в которых обращается в нуль некоторое колеблющееся решение  $\tilde{y}(x)$  уравнения (1.2) или, другими словами, уравнения (2.26) при  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Введем обозначение  $Y_j(h, q, x, \varphi)$ , где  $h, q, x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C_0[0, \infty)$ , для непрерывной функции, равной значению в точке  $x$   $j$ -й производной решения уравнения (2.26), удовлетворяющего начальным условиям

$$z(0) = h, \quad z'(0) = q, \quad z''(0) = 1.$$

Тогда

$$\frac{y'(x_{i+1})}{y'(x_i)} = \frac{Y_1(0, q_i, \xi_1(q_i, \varphi_i), \varphi_i) \lambda_i^{\beta-1}}{q_i \lambda_i^{\beta-1}} \rightarrow \frac{Y_1(0, Q, \xi_1(Q, 0), 0)}{Q} = \frac{\tilde{y}'(\tilde{x}_{i+1})}{\tilde{y}'(\tilde{x}_i)} = -B^{-\beta+1}, \quad i \rightarrow \infty.$$

Далее рассмотрим функцию

$$W_i(x) = \mu_i^{-\beta} y(\mu_i x + x'_i) \text{sign } y''(x'_i),$$

являющуюся решением уравнения

$$W_i'''(x) = (p_0 + \psi_i(x)) \cdot |W_i|^{-m} W_i = (p_0 + \psi_i(x)) \cdot |W_i|^{1-m} \text{sign } W_i,$$

где

$$\psi_i(x) = p(\mu_i x + x'_i, y(\mu_i x + x'_i), \dots, y''(\mu_i x + x'_i)) - p_0 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

и удовлетворяющую при  $\mu_i = |y''(x'_i)|^{1/(\beta-2)}$  условиям

$$\begin{aligned} W_i(0) &= h_i, \quad \text{где } h_i = \mu_i^{-\beta} y(x'_i) \text{sign } y''(x'_i), \\ W_i'(0) &= y'(x'_i) = 0, \\ W_i''(0) &= \mu_i^{-\beta+2} \text{sign } (y''(x'_i)) y''(x'_i) = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$x'_{i+1} = x'_i + \mu_i \eta(h_i, \psi_i),$$

откуда

$$\frac{y(x'_{i+1})}{y(x'_i)} = \frac{Y_0(h_i, 0, \eta(h_i, \psi_i), \psi_i) \mu_i^\beta}{h_i \mu_i^\beta} \rightarrow \frac{Y_0(H, 0, \eta(H, 0), 0)}{H} = \frac{\tilde{y}'(\tilde{x}'_{i+1})}{\tilde{y}'(\tilde{x}'_i)} = -B^{-\beta}, \quad i \rightarrow \infty,$$

где  $\{\tilde{x}'_i\}$  — последовательность точек, в которых достигается локальный экстремум решения  $\tilde{y}(x)$  уравнения (1.2).

Полученных соотношений достаточно для доказательства последнего утверждения теоремы. Согласно оценке роста длин отрезков, расположенных между соседними точками обращения в нуль колеблющегося решения, для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдётся такой номер  $j$ , что для всех  $j > i$  справедливы оценки:

$$x_j - x_i = \sum_{l=i}^{j-1} (x_{l+1} - x_l) < (x_{i+1} - x_i) \sum_{l=i}^{j-1} \left(\frac{1}{B} + \varepsilon\right)^{l-i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{1}{B} + \varepsilon - 1} \cdot \left[ \left(\frac{1}{B} + \varepsilon\right)^{j-i} - 1 \right],$$

$$x_j - x_i = \sum_{l=i}^{j-1} (x_{l+1} - x_l) > (x_{i+1} - x_i) \sum_{l=i}^{j-1} \left(\frac{1}{B} - \varepsilon\right)^{l-i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{1}{B} - \varepsilon - 1} \cdot \left[ \left(\frac{1}{B} - \varepsilon\right)^{j-i} - 1 \right],$$

откуда

$$\frac{\ln |x_j - x_i|}{j - i} < \frac{1}{j - i} \ln \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{1}{B} + \varepsilon - 1} + \ln \left(\frac{1}{B} + \varepsilon\right) + \frac{1}{j - i} \ln \left[ 1 - \left(\frac{1}{B} + \varepsilon\right)^{i-j} \right],$$

$$\frac{\ln |x_j - x_i|}{j - i} > \frac{1}{j - i} \ln \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{1}{B} - \varepsilon - 1} + \ln \left(\frac{1}{B} - \varepsilon\right) + \frac{1}{j - i} \ln \left[ 1 - \left(\frac{1}{B} - \varepsilon\right)^{i-j} \right].$$

Переходя к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , получим

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln(x_j - x_i)}{j - i} \leq \ln \left(\frac{1}{B} + \varepsilon\right), \quad \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln(x_j - x_i)}{j - i} \geq \ln \left(\frac{1}{B} - \varepsilon\right),$$

а так как все эти неравенства справедливы для любого достаточно малого  $\varepsilon$ , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |x_j|}{j} = \ln \frac{1}{B}.$$

Заметим, что в этом случае

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |x_{j+1}|}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |x_{j+1}|}{j+1} \frac{j+1}{j} = \ln \frac{1}{B}.$$

Поэтому считая, что нумерация точек  $\{x_i\}$  и  $\{x'_i\}$  согласована, т.е.  $\dots < x_i < x'_i < x_{i+1} < \dots$ , получим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |x'_j|}{j} = \ln \frac{1}{B}.$$

Аналогично, используя уже полученную асимптотику для локальных экстремумов колеблющегося решения, получим, что для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $i$ , что для всех  $j > i$  справедливы оценки

$$|y(x'_i)| < |y(x'_i)| \left(B^{-\beta} + \varepsilon\right)^{j-i}, \quad |y(x'_i)| > |y(x'_i)| \left(B^{-\beta} - \varepsilon\right)^{j-i},$$

следствием которых является равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |y(x'_j)|}{j} = \ln B^{-\beta}.$$

Поэтому

$$\frac{\ln |y(x'_j)|}{\ln |x'_j|} = \frac{-j\beta(\ln B + o(1))}{-j(\ln B + o(1))} = \beta + o(1), \quad j \rightarrow \infty,$$

откуда следует последнее утверждение теоремы.  $\square$

2.2.2. *Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнения третьего порядка при убывании аргумента.* Под знакопеременными при убывании аргумента решениями уравнения (1.1) будем понимать решения этого уравнения, определенные на интервале  $(x_*, x_0)$ , где  $-\infty \leq x_* < x_0 \leq \infty$ , и не являющиеся знакопостоянными ни на каком интервале вида  $(x_*, x_1)$ , где  $x_* < x_1 < x_0$ .

Пусть  $x_1 > x_2 > \dots > x_i > \dots$  — такая последовательность, что  $y(x_i) = 0$  и  $y(x) \neq 0$  при  $x_{j+1} < x < x_i$ , а  $x'_1 > x'_2 > \dots > x'_i > \dots$  — такая последовательность, что  $y'(x'_i) = 0$ , а на интервалах  $(x'_{i+1}, x'_i)$  функция  $y(x)$  монотонна.

**Теорема 2.12.** Пусть непрерывная функция  $p(x, y_0, y_1, y_2)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, y_1, y_2$ , и  $p(x, y_0, y_1, y_2) \rightarrow p_0 > 0$  при  $x \rightarrow x_* + 0$  равномерно по  $y_0, y_1, y_2$ . Тогда существует такая постоянная  $B \in (0, 1)$ , что любое знакопеременное решение уравнения (1.1), определенное на интервале  $(x_*, x_0)$ ,  $-\infty \leq x_* < x_0 \leq \infty$ , удовлетворяет условиям

- 1)  $\frac{x_{i+1} - x_{i+2}}{x_i - x_{i+1}} \rightarrow B, \quad i \rightarrow \infty,$
- 2)  $\frac{y'(x_i)}{y'(x_{i+1})} \rightarrow -B^{-\beta+1}, \quad i \rightarrow \infty,$
- 3)  $\frac{y'(x'_i)}{y'(x'_{i+1})} \rightarrow -B^{-\beta}, \quad i \rightarrow \infty,$
- 4)  $y'(x'_i) = |x_* - x'_i|^{\beta+o(1)}, \quad i \rightarrow \infty.$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала траекторию  $L$  на сфере  $S^2$ , соответствующую знакопеременному решению  $y(x)$  уравнения (1.1). Поведение таких траекторий описывается в разных картах системами типа (2.18), причем в каждой карте используется своя независимая переменная. Из этих переменных с помощью разбиения единицы может быть сформирован один общий параметр для описания глобального поведения траекторий. Обозначим его  $t$ .

Точку  $s \in S^2$  будем называть  $\alpha$ -предельной точкой траектории  $L$ , если существует такая последовательность  $\{\tilde{x}_i\}$ , стремящаяся к  $x_* + 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , что последовательность точек на сфере, соответствующих точкам  $(y(\tilde{x}_i), y'(\tilde{x}_i), y''(\tilde{x}_i))$ , стремится к  $s$ .

Как было показано в предыдущем параграфе, на сфере  $S^2$  среди траекторий, соответствующих решениям уравнения (1.2), существует единственная периодическая траектория  $\tilde{L}$ , не считая двух неподвижных точек  $s_+$  и  $s_-$ , соответствующих решениям  $y = \pm(x_* - x)^\beta$ .

Покажем, что все  $\alpha$ -предельные точки траектории  $L$  лежат на траектории  $\tilde{L}$ , т.е. траектория  $L$  как бы разматывается с траектории  $\tilde{L}$ . Рассмотрим какую-либо точку  $s \in S^2$ , не лежащую на  $\tilde{L}$ . Тогда траектория, проходящая через эту точку и соответствующая какому-либо решению уравнения (1.1), будет стремиться к одной из точек  $s_+$  и  $s_-$ . Поэтому существует такое  $\varepsilon > 0$  и такое  $T > 0$ , а также окрестность  $U$  точки  $s$ , что траектория, попавшая в окрестность  $U$  при каком-либо значении параметра  $t = t_0$  и соответствующая решению уравнения (1.2), где функция  $p(x, y_0, y_1, y_2)$  отличается от  $p_0$  меньше, чем на  $\varepsilon$ , при  $t > t_0 + T$  попадает в одну из двух областей сферы  $S^2$ , точки которых соответствуют точкам  $(y_0, y_1, y_2)$  пространства  $R^3 \setminus \{0\}$  со всеми положительными или со всеми отрицательными координатами. Так как из этих областей траектории уже не могут выйти, то существует ограниченная область значений параметра  $t$ , при которых траектория  $L$  может заходить в окрестность  $U$ . Поэтому если  $s$  —  $\alpha$ -предельная точка траектории  $L$ , то область допустимых значений параметра  $t$  для этой траектории ограничена слева, скажем, значением  $t_*$ , и существует последовательность значений параметра  $\{t_i\}$ , стремящаяся к  $t_*$ , для которой последовательность соответствующих точек на траектории  $L$  стремится к  $s$ . С другой стороны, существуют такие  $\delta > 0$  и окрестность  $V$  точки  $s$ , что траектория, соответствующая решению уравнения (1.1) для функции  $p(x, y_0, y_1, y_2)$ , достаточно мало отличающейся от  $p_0$ , и задаваемая начальными данными при  $t_i$ , лежащими в окрестности  $V$ , может быть определена, по крайней мере, на интервале  $(t_i - \delta, t_i)$ , что противоречит выбору  $t_*$ . Таким образом, точка  $s$ , не лежащая на  $\tilde{L}$ , не может быть  $\alpha$ -предельной точкой траектории  $L$ . Остальная часть доказательства повторяет рассуждения, использующиеся при доказательстве теоремы 2.10.  $\square$

2.2.3. *Асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнений четвертого порядка.* В этом пункте будем изучать асимптотическое поведение знакопеременных решений уравнения (1.2), но некоторые результаты справедливы и для уравнения (1.1), где функция  $p$  зависит только от переменной  $y$ , т.е. для уравнения

$$y^{IV} = p(y) |y|^{-m} y(x). \quad (2.27)$$

Заметим, что функция

$$F(y, y', y'', y''') = P(y) + \frac{(y'')^2}{2} - y' y''' = C, \quad (2.28)$$

где

$$P(y) = \int_0^y p(y) |y|^{-m} y dy,$$

является первым интегралом уравнения (2.27).

Действительно,

$$\frac{d}{dx} F(y, y', y'', y''') = p(y) |y|^m y y' + y'' y''' - y' y^{IV} - y'' y''' = 0$$

в силу уравнения (2.27).

Заметим, что для знакопеременного решения значение первого интеграла может быть только положительным. Действительно, очевидно, что оно неотрицательно, так как в точках локального экстремума оно равно

$$P(y) + \frac{(y'')^2}{2} \geq 0.$$

Обращаться в нуль оно не может, так как  $P(y) = 0$  только при  $y = 0$  и поэтому должна была бы существовать точка  $x$ , в которой одновременно обращались бы в нуль  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ , но в таком случае, в зависимости от знака  $y'''(x)$ , в этой точке решение либо имеет вертикальную асимптоту, либо будет тождественно равно нулю.

**Лемма 2.9.** *Пусть непрерывная положительная функция  $p(y)$  такова, что  $P(y) \rightarrow +\infty$  при  $y \rightarrow \pm\infty$  (в частности, это справедливо при выполнении условия  $p(y) \geq p_0 > 0$ .) Тогда знакопеременное решение уравнения (2.27) ограничено вместе с его второй производной.*

*Доказательство.* Пусть  $y(x)$  — некоторое знакопеременное решение уравнения (2.27) и значение первого интеграла для него равно  $c$ . Тогда в точках, где достигаются локальные экстремумы решения  $y(x)$ , справедливо неравенство

$$P(y) = c - \frac{(y'')^2}{2} \leq c,$$

что было бы невозможным, если бы решение, а вместе с ним и его локальные экстремумы, были бы неограниченными.

Аналогично, в точках, где достигаются локальные экстремумы функций  $y''(x)$ , обращается в нуль функция  $y'''(x)$ , и

$$\frac{(y'')^2}{2} = c - P(y) \leq c,$$

так как функция  $P(y) \geq 0$  при всех  $y$ . Лемма доказана.  $\square$

Далее рассматриваются знакопеременные решения уравнения (1.2).

**Теорема 2.13.** *Для каждого знакопеременного решения уравнения (1.1) существует постоянная  $h > 0$  такая, что все локальные экстремумы решения и локальные экстремумы его второй производной по модулю больше  $h$ .*

*Доказательство.* Докажем это утверждение сначала для экстремумов решения. Предположим, что оно неверно. Тогда существует последовательность точек  $\{x'_i\}$  таких, что  $y'(x'_i) = 0$ ,  $y(x'_i) \rightarrow +0$ ,  $i \rightarrow \infty$  (для определенности будем считать, что  $x'_i$  — точки локальных максимумов). Заметим, что в этом случае  $y''(x'_i) \rightarrow -\sqrt{2c} < 0$ , где  $c$  — значение первого интеграла для рассматриваемого решения. У соответствующей последовательности точек  $\{s_i\}$  на сфере  $S^3$  должна существовать по крайней мере одна предельная точка  $s^*$ . Эта точка не может лежать в карте  $(u_0, u_1, u_2)$ , так как в ней ее координата  $u_2$  должна была бы быть равной  $-\sqrt{2c}/0 = \infty$ . Так как точки  $s_i$  не лежат в картах  $(u_0^-, u_1^-, u_2^-)$ ,  $(v_0, v_2, v_3)$ ,  $(v_0^-, v_2^-, v_3^-)$  и  $(w_0, w_1, w_3)$ , то и точка  $s^*$  не может лежать в этих картах. Если  $s^*$  лежит в карте  $(w_0^-, w_1^-, w_3^-)$ , то ее координаты  $w_0^- = w_1^- = 0$ . Если же нет, то она лежит в одной из карт  $(q_0, q_1, q_2)$  или  $(q_0^-, q_1^-, q_2^-)$ , и в этом случае равны нулю ее координаты  $q_0, q_1, q_2$  или  $q_0^-, q_1^-, q_2^-$ . В любом случае траектория, проходящая через точку  $s^*$ , соответствует решению  $y_*(x)$  уравнения (1.2), обращающемуся в нуль в некоторой точке  $x_0$  вместе со своей первой производной. Но такое решение имеет вертикальную асимптоту слева или справа от точки  $x_0$  в зависимости от знака  $y_*'''(x_0)$ . Такая траектория либо сразу после точки  $s^*$  попадает в одну из областей сферы  $S^3$ , соответствующих областям пространства  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ :

$$\{y_0 > 0, y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0\}, \quad \{y_0 < 0, y_1 < 0, y_2 < 0, y_3 < 0\},$$

и больше из этой области уже не выйдет, либо попадает в точку  $s^*$  из области сферы  $S^3$ , соответствующей одной из областей пространства  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ :

$$\{y_0 > 0, y_1 < 0, y_2 > 0, y_3 < 0\}, \quad \{y_0 < 0, y_1 > 0, y_2 < 0, y_3 > 0\},$$

и в этом случае никогда раньше не выходила из этой области.

С другой стороны, эта траектория вся состоит из предельных точек траектории, соответствующей знакопеременному решению  $y(x)$  уравнения (1.2), что, очевидно, невозможно. Действительно, если первый из двух упомянутых случаев имеет место, то решение  $y(x)$  в некоторой точке имеет тот же знак, что и его первая, вторая и третья производные, и, следовательно, имеет вертикальную асимптоту и не может быть знакопеременным. Во втором же случае должна существовать последовательность  $\{\tilde{x}_i\}$ , стремящаяся к правой границе (конечной или бесконечной) области определения решения  $y(x)$  и такая, что либо

$$\{y(\tilde{x}_i) > 0, \quad y'(\tilde{x}_i) < 0, \quad y''(\tilde{x}_i) > 0, \quad y'''(\tilde{x}_i) < 0\},$$

либо

$$\{y(\tilde{x}_i) < 0, \quad y'(\tilde{x}_i) > 0, \quad y''(\tilde{x}_i) < 0, \quad y'''(\tilde{x}_i) > 0\}.$$

Но тогда слева от каждой из точек  $\tilde{x}_i$  не может существовать ни одной точки локального экстремума решения  $y(x)$ . Это значит, что оно монотонно и не может быть знакоопределенным. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

Полученные результаты позволяют доказать, что любое знакопеременное решение уравнения (1.2) является колеблющимся, то есть определено при  $x_0 < x < \infty$ , более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.14.** *Для любого знакопеременного решения  $y(x)$  уравнения (1.2), где  $n = 4$ , найдутся такие положительные постоянные  $\Delta_{\min}$ ,  $\Delta_{\max}$ , что расстояние между двумя соседними точками, где решение  $y(x)$  обращается в нуль, больше, чем  $\Delta_{\min}$ , и меньше, чем  $\Delta_{\max}$ .*

*Доказательство.* Согласно предыдущей теореме, существует положительная постоянная  $h$  такая, что все локальные экстремумы решения  $y(x)$  по модулю больше, чем  $h$ . Кроме того, существует такая постоянная  $A$ , что  $|y''(x)| < A$  при всех  $x$ .

Пусть  $y(x)$  обращается в нуль в точках  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда между ними найдется точка локального экстремума  $x'$ . Для определенности будем считать, что это точка локального максимума. Тогда

$$y(x') > h, \quad y'(x') = 0,$$

а при  $|x - x'| < \frac{\delta}{2}$ , где  $\delta$  — произвольная положительная постоянная, выполняется неравенство

$$y(x) > h - \frac{A}{2}(x - x')^2 > h - \frac{A\delta^2}{8},$$

что положительно, если выбрать  $\delta < \sqrt{8h/A}$ .

Поэтому

$$|x_1 - x_2| > \Delta_{\min} = \sqrt{\frac{8h}{A}},$$

и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части утверждения теоремы заметим, что у знакопеременного решения  $y(x)$  уравнения (1.2) может существовать не более одной точки, в которой бы выполнялись равенства

$$y'(x) = y''(x) = 0. \quad (2.29)$$

Действительно, если  $y(x) \cdot y'''(x) \geq 0$  в этой точке, то решение либо имеет вертикальную асимптоту справа от точки  $x$ , либо тождественно равно нулю. Если же  $y(x) \cdot y'''(x) < 0$ , то решение имеет вертикальную асимптоту слева от этой точки, причем слева от нее производная уже ни разу не обратится в нуль. Поэтому если в правой из любых двух точек выполняются равенства (2.29), то в левой они уже выполняться не могут. Это замечание позволяет с помощью теоремы о неявной функции доказать существование непрерывной функции  $\eta(s)$ , где  $s$  принадлежит подмножеству  $M \subset S^3$ , состоящему из точек сферы, соответствующих точкам пространства  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ , лежащих на гиперплоскости  $y_1 = 0$ , но не лежащих в множествах  $Y_+$ ,  $Y_-$  данных Коши, для которых соответствующие решения уравнения (1.1) стремятся к  $+\infty$  и  $-\infty$ .

Функция  $\eta(s)$  строится следующим образом. Пусть точка  $s$  принадлежит  $M$ . Среди различных наборов данных Коши, соответствующих этой точке, выберем один, определяемый условием  $y_0 = 1$ . Решение  $y(x)$  уравнения (1.2) с этими данными Коши при  $x = 0$  будет знакопеременным, ввиду определения множества  $M$ . Значение  $\eta(s)$  равно минимальному положительному  $x$ , при котором решение  $y(x)$  достигает локального экстремума. Так как множества  $Y_+$ ,  $Y_-$  открыты, то множество  $M$  компактно как замкнутое подмножество компактной сферы. Поэтому функция  $\eta(s)$  ограничена сверху, скажем, константой  $\eta_*$ . Другими словами, у знакопеременного решения уравнения (1.2) расстояние между соседними точками локальных экстремумов не превосходит  $\eta_*$ , если левый из этих экстремумов равен единице.

Если  $y(x)$  — знакопеременное решение уравнения (1.2), имеющее в точке  $x = 0$  локальный максимум, равный единице, то функция

$$\tilde{y}(x) = y_0 y(|y_0|^{-1/\beta} x)$$

также будет решением уравнения (1.1) с  $p(x, y, y', y'', y''') = p_0 > 0$ , имеющим при  $x = 0$  локальный максимум, равный  $y_0$ . Поэтому для любого знакопеременного решения этого уравнения расстояние между соседними точками локальных экстремумов, левый из которых равен  $y_0$ , не превосходит  $\eta_* y_0^{1/\beta}$ . Поэтому если все его локальные экстремумы по модулю больше  $h$ , то расстояние между соседними точками локальных экстремумов не превосходит  $\eta_* h^{1/\beta}$ . А так как между двумя соседними точками, в которых знакопеременное решение обращается в нуль, может находиться только одна точка локального экстремума, то расстояние между этими точками, где решение обращается в нуль, не превосходит  $\Delta_{\max} = 2\eta_* h^{1/\beta}$ .  $\square$

Очевидно, имеет место следующая лемма.

**Лемма 2.10.** Пусть  $y(x)$  и  $z(x)$  — решения уравнения (1.2), где  $n = 4$ , удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad y'''(x_0) = y_3, \\ z(x_0) = z_0, \quad z'(x_0) = z_1, \quad z''(x_0) = z_2, \quad z'''(x_0) = z_3, \\ y_0 \leq z_0, \quad y_1 \leq z_1, \quad y_2 \leq z_2, \quad y_3 \leq z_3, \end{aligned}$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Тогда для любого  $x > x_0$ , при котором определены решения  $y(x)$ ,  $z(x)$ , выполняется неравенство

$$y(x) < z(x).$$

Если оба эти решения максимально продолжены вправо и одно из них ограничено по модулю при  $x > x_0$ , то другое решение при  $x > x_0$  не ограничено.

**Лемма 2.11.** Пусть  $y(x)$  — знакопеременное при возрастании аргумента решение уравнения (1.2) при  $n = 4$ . Пусть  $x'$  — точка локального экстремума этого решения и  $y'''(x') \neq 0$ . Тогда существует такое  $x_* < x'$ , что  $\lim_{x \rightarrow x_*+0} y(x) = \pm\infty$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $z(x) = y(2x' - x)$ , также являющуюся решением уравнения (1.1) при  $n = 4$ . Заметим, что

$$y(x') = z(x'), \quad y'(x') = z'(x') = 0, \quad y''(x') = z''(x'), \quad z'''(x') = -y'''(x') \neq y'''(x').$$

Решение  $y(x)$  в силу леммы 2.10 ограничено при  $x > x'$ . Согласно лемме 2.10, решение  $z(x)$  является неограниченным при  $x > x'$ . Поэтому  $z(x)$  не может быть ни знакопеременным, ни кнезеровским, и существует  $x^* > x'$  такое, что  $z(x) \rightarrow \pm\infty$  при  $x \rightarrow x' - 0$ . Это равносильно утверждению леммы, если положить  $x_* = 2x' - x^*$ . Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 2.15.** Для любого  $h > 0$  существует периодическое решение уравнения (1.2) с  $n = 4$ , все локальные экстремумы которого равны по модулю  $h$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_a(x)$  — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_a(0) = h, \quad y'_a(0) = 0, \quad y''_a(0) = a, \quad y'''_a(0) = 0$$

и максимально продолженное вправо и влево. Пусть  $\bar{a}$  — верхняя грань множества тех значений  $a$ , для которых решение  $y_a(x)$  хотя бы в одной точке обращается в нуль. Тогда это множество в силу леммы 2.10 совпадает с множеством  $(-\infty, \bar{a}]$ .

Пусть  $\xi(a)$ , где  $-\infty < a < \bar{a}$  — наименьшее положительное значение  $x > 0$  такое, что  $y_a(x) = 0$ . Докажем непрерывность функции  $\xi(a)$  на интервале  $(-\infty, \bar{a})$ . Доказательство вытекает из теоремы о неявной функции при условии, что  $y'_a(\xi(a)) \neq 0$ . Предположим, что это условие не выполнено, т.е. что  $y'_a(\xi(a)) = y_a(\xi(a)) = 0$ . Заметим, что в силу уравнения (1.2) и условия  $y'''_a(0) = 0$  выполняется неравенство  $y'''(\xi(a)) > 0$ . Поэтому, так как  $y_a(x) > 0$  при  $0 < x < \xi(a)$ , то  $y''_a(\xi(a)) > 0$ . Отсюда следует, что справа от  $\xi(a)$  решение  $y_a(x)$  положительно, и в силу леммы 2.10 при сколь угодно малом увеличении  $a$  решение становится положительным при всех  $x > 0$ , что возможно только при  $a = \bar{a}$ . Итак,  $\xi(a)$  непрерывна на  $(-\infty, \bar{a})$ .

Рассмотрим функцию  $y''_a(\xi(a))$ . Эта функция отрицательна при достаточно большом по модулю отрицательном значении  $a$  и положительна при  $a$ , достаточно близких к  $\bar{a}$ . Ввиду непрерывности функции  $y''_a(\xi(a))$  существует  $A \in (-\infty, \bar{a})$  такое, что  $y''_A(\xi(A)) = 0$  и  $y_A(x)$  — искомое периодическое решение. Действительно,

$$\begin{aligned} y_A(\xi(A)) &= -y_A(-\xi(A)) = 0, & y'_A(\xi(A)) &= -y'_A(-\xi(A)), \\ y''_A(\xi(A)) &= -y''_A(-\xi(A)) = 0, & y'''_A(\xi(A)) &= -y'''_A(-\xi(A)). \end{aligned}$$

Поэтому на интервале  $(\xi(A), 3\xi(A))$  решение  $y_A(x)$  ведет себя точно так же с точностью до знака, как на интервале  $(-\xi(A), \xi(A))$ . Период этого решения равен  $4\xi(A)$ .  $\square$

Заметим, что для каждого  $h > 0$  такое периодическое решение единственно с точностью до сдвига вдоль оси  $OX$ . Действительно, если существуют два таких решения, у которых в точке максимума функция  $y'''(x)$  обращается в нуль, а значения  $y''(x)$  не совпадают, то по лемме 2.10 одно из них неограниченно и поэтому не является непрерывной периодической функцией.

Если же у одного из них в точке максимума  $y'''(x)$  не обращается в нуль, то по лемме 2.11 неограниченным является либо само это решение  $y(x)$ , либо решение  $y(2x_0 - x)$ , где  $x_0$  — точка максимума.

Любые два периодических решения  $y(x)$  и  $z(x)$  связаны соотношением

$$z(x) = \pm B^{-\beta} y(Bx + C),$$

где  $\beta = -\frac{4}{m}$ , а  $B$  и  $C$  — некоторые положительные постоянные. На трехмерной сфере  $S^3$ , определенной в п. 2.1.2, этим решениям соответствует одна и та же кривая  $L_0$ .

**Теорема 2.16.** Пусть  $y(x)$  — знакопеременное при возрастании аргумента, максимально продолженное вправо решение уравнения (1.2) при  $n = 4$ . Пусть  $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots$  — последовательность точек обращения в нуль знакопеременного решения  $y(x)$  такая, что  $y(x_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $y(x) \neq 0$  при  $x \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а  $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_i < \dots$  — последовательность локальных экстремумов знакопеременного решения  $y(x)$  такая, что  $y'(x'_i) = 0$  и  $y(x)$  монотонна при  $x \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Тогда существуют конечные, отличные от нуля пределы последовательностей  $(x_{i+1} - x_i)$ ,  $|y(x'_i)|$ ,  $|y'(x_i)|$ ,  $|y''(x'_i)|$ ,  $|y'''(x_i)|$ , а последовательности  $y''(x_i)$  и  $y'''(x'_i)$  стремятся к нулю.

*Доказательство.* Рассмотрим на сфере  $S^3$  кривую  $L$ , соответствующую решению  $y(x)$ , и последовательность точек  $\{s_i\}$  на ней, соответствующих точкам локальных максимумов рассматриваемого решения  $y(x)$ . В силу компактности сферы  $S^3$  эта последовательность имеет предельную точку  $s^*$ . Покажем, что эта точка соответствует точкам максимумов периодического решения, а поэтому является единственной предельной точкой последовательности  $\{s_i\}$  и, ввиду компактности сферы  $S^3$ , пределом последовательности  $\{s_i\}$ .

Кривая, проходящая через точку  $s^*$  и соответствующая некоторому решению уравнения (1.2), должна целиком состоять из  $\omega$ -предельных точек кривой  $L$ .

Рассмотрим данные Коши  $y_0, 0, y_2, y_3$ , соответствующие точке  $S^*$ . Если  $y_3 = 0$ , а  $y_2$  не совпадает со значением в точке экстремума второй производной периодического решения, максимум которого равен  $y_0$ , то по лемме 2.10 решение с такими данными Коши в некоторой точке  $x_0$  должно иметь вертикальную асимптоту справа от точки  $x_0$ . Но в этом случае у кривой  $L$  должны быть предельные точки, имеющие координаты одного знака, что невозможно.

Если же  $y_3 \neq 0$ , то решение с такими данными Коши имеет вертикальную асимптоту справа или слева от  $x_0$ . Но тогда у кривой  $L$  должна существовать предельная точка либо имеющая координаты одного знака, либо принадлежащая одной из кнезеровских областей сферы  $S^3$ , что невозможно.

Таким образом, точке  $s^*$  соответствуют данные Коши  $y_0, 0, y_2, 0$ , у которых  $|y_2| \cdot |y_0|^{-\beta_2}$ , где  $\beta_2$  определяется формулами (2.4), совпадает со значением в точках экстремума выражения  $|y''(x)| \cdot |y(x)|^{-\beta_2}$  для периодического решения. Отсюда следует, что для любого знакопеременного решения  $y(x)$  уравнения (1.2) существует конечный, отличный от нуля предел последовательности  $|y''(x'_i)| \cdot |y(x'_i)|^{-\beta_2}$ . Так как при этом

$$\frac{P_0 |y(x'_i)|}{2 - m} + \frac{(y''(x'_i))^2}{2} = \text{const} > 0,$$

то существуют конечные, отличные от нуля пределы  $|y(x'_i)|$ ,  $|y''(x'_i)|$  и равный нулю предел  $y'''(x'_i)$ . Существование конечных, отличных от нуля пределов  $|y'(x_i)|$  и  $|y'''(x_i)|$  и нулевого предела  $y''(x_i)$  доказывается аналогично.

Отсюда, в свою очередь, при помощи теоремы о неявной функции и непрерывной зависимости решения от начальных условий, выводится существование конечного, отличного от нуля предела  $(x_{i+1} - x_i)$ , равного полупериоду периодического решения с максимумом, равным  $\lim_{i \rightarrow \infty} |y(x'_i)|$ .  $\square$

**2.3. Заключительные замечания.** Используя результаты пп. 2.1 и 2.2, поведение решений уравнения (1.1) и (1.2) с регулярной нелинейностью при  $n = 3, 4$  можно описать следующим образом.

Пусть  $n = 3$  и  $m < 0$ ; тогда любое не равное тождественно нулю и максимально продолженное вправо решение уравнения (1.1) с соответствующими ограничениями на функцию  $p(x, y_0, y_1, y_2)$  (в частности, уравнения (1.2)) либо имеет вертикальную асимптоту  $x = x^*$ ,  $x^* < \infty$  с асимптотикой (2.1)–(2.2), либо определено в окрестности  $+\infty$  и является колеблющимся решением, поведение которого при  $x \rightarrow +\infty$  описано в теореме 2.11.

Любое не равное тождественно нулю и максимально продолженное влево решение уравнения (1.1) ((1.2)) либо определено в окрестности  $-\infty$  и является кнезеровским, стремящимся к нулю, с асимптотикой (2.17) с константами (2.2), либо непродолжаемым колеблющимся, определенным на  $[x_*, \infty)$ ,  $x_* > -\infty$ , поведение которого описано в теореме 2.12.

Пусть  $n = 4$ ,  $m < 0$ . Тогда любое не равное тождественно нулю и максимально продолженное вправо решение уравнения (1.2) либо имеет вертикальную асимптоту  $x = x^*$ ,  $x^* < \infty$  с асимптотикой (2.1)–(2.2), либо определено в окрестности  $+\infty$  и является либо кнезеровским, стремящимся к нулю, с асимптотикой (2.16) с константами (2.2), либо колеблющимся, поведение которого при  $x \rightarrow +\infty$  определяется теоремой 2.16, либо периодическим колеблющимся решением.

Заметим, что при  $n = 4$ ,  $m < 0$  асимптотическое поведение решений уравнения (1.2), не равных тождественно нулю и максимально продолженных влево, симметрично поведению соответствующих решений, максимально продолженных вправо.

### 3. СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрим уравнение (1.1) при  $0 < m < 1$ . Заметим, что при этом условия классической теоремы единственности решения задачи Коши не выполняются. Тем не менее имеет место следующее утверждение.

**Предложение.** Пусть функция  $p(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$  непрерывна по  $x$  и удовлетворяет условию Липшица по  $y_0, \dots, y_{n-1}$ . Тогда для любого набора чисел  $x_0, y_0^0, \dots, y_{n-1}^0$ , у которого не все  $y_i^0$  равны 0, соответствующая задача Коши имеет единственное решение.

*Доказательство.* Без ограничения общности можем считать, что  $x_0 = 0$ . Докажем существование и единственность решения задачи Коши  $y(0) = y_0^0, y'(0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}^0$  для  $x > 0$ .

Интегрируя уравнение (1.1)  $n$  раз на отрезке  $[0, x]$ , получим

$$y(x) = y_0^0 + y_1^0 x + y_2^0 \frac{x^2}{2} + \dots + y_{n-1}^0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x \dots \int_0^x p(x, y, y', \dots, y^{n-1}) |y(x)|^{-m} y(x) (dx)^n. \quad (3.1)$$

Пусть  $r = \min\{j : y_j \neq 0\}$ . Тогда можно записать

$$y_0^0 + y_1^0 x + y_2^0 \frac{x^2}{2} + \dots + y_{n-1}^0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x^r Q_{n-r-1}(x),$$

где  $Q_{n-r-1}(x)$  — многочлен степени  $n - r - 1$ .

Будем искать решение в виде

$$y(x) = x^r Q_{n-r-1}(x) + x^n u(x),$$

где  $u(x) \in U$ , а  $U = \{u(x) : u(x) \in C[-\varepsilon, \varepsilon], |u(x)| \leq 1\}$ . Тогда уравнение (3.1) запишется в виде

$$u(x) = x^{-n} \int_0^x \dots \int_0^x x^{r(1-m)} p(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \Big|_{Q_{n-r-1}(x)} + x^{n-r} u(x) \Big|^{-m} (Q_{n-r-1}(x) + x^{n-r} u(x)) (dx)^n. \quad (3.2)$$

Так как  $r < n$ ,  $0 < m < 1$ , то  $r(1-m) - n > 0$ , и при достаточно малом  $\varepsilon$ , зависящем от максимумов  $p(x, y, y', \dots, y^{n-1})$  в окрестности  $(0, y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$  и  $Q_{n-r-1}(x)$  в окрестности нуля, правая часть равенства (3.2) принадлежит  $U$ , если  $u(x) \in U$ . Более того, легко убедиться, что правая часть равенства (3.2) как функция от  $u(x) \in U$  является сжимающим отображением из  $U$  в  $U$ , что доказывает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (1.1).  $\square$

Далее, используя метод, описанный в разделе 2, для случая регулярной нелинейности, можно доказать следующие результаты.

**Теорема 3.1.** Пусть  $n = 3$ ,  $0 < m < 1$ . Тогда любое не равное тождественно нулю и максимально продолженное вправо решение уравнения (1.1) определено в окрестности  $+\infty$  и имеет асимптотический вид

$$y(x) = \pm C x^\beta (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$\beta = n/m, \quad C = \left( \frac{p_*}{\beta(\beta-1)(\beta-2)} \right)^{1/m}, \quad p_* = \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x, y_0, y_1, y_2).$$

**Теорема 3.2.** Пусть  $n = 3$ ,  $0 < m < 1$ . Тогда любое не равное тождественно нулю и максимально продолженное влево решение уравнения (1.1) определено в окрестности  $-\infty$  и является знакопеременным. При этом если  $x_1 > x_2 > \dots$  — такая стремящаяся к  $-\infty$  последовательность, что  $y(x_i) = 0$ ,  $y(x) \neq 0$  при  $x \in (x_{i+1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а  $x'_1 > x'_2 > \dots$  — такая стремящаяся к  $-\infty$  последовательность, что  $y'(x'_i) = 0$ ,  $y'(x) \neq 0$  при  $x \in (x'_{i+1}, x'_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то

$$\frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i-1} - x_i} \rightarrow B, \quad \frac{y(x'_{i+1})}{y(x'_i)} \rightarrow -B^\beta, \quad i \rightarrow \infty,$$

для некоторой константы  $B > 1$ , зависящей только от  $m$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x, y_0, y_1, y_2)$ .

**Теорема 3.3.** При  $n = 3$ ,  $0 < m < 1$  у любого не равного тождественно нулю решения уравнения (1.1) может быть не более двух точек  $a_1 \leq a_2$ , в которых  $y(a_i) = y'(a_i) = y''(a_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . При этом в левой полукрестности точки  $a_1$  решение либо тождественно равно нулю, либо является знакопеременным, и если  $x_1 < x_2 < \dots$  — такая стремящаяся к  $a_1 - 0$  последовательность, что  $y(x_i) = 0$ ,  $y(x) \neq 0$  при  $x \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а  $x'_1 < x'_2 < \dots$  — такая стремящаяся к  $a_1 - 0$  последовательность, что  $y'(x'_i) = 0$ ,  $y'(x) \neq 0$  при  $x \in (x'_i, x'_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow B, \quad \frac{y(x'_i)}{y(x'_{i+1})} \rightarrow -B^\beta, \quad i \rightarrow \infty,$$

для некоторой постоянной  $B > 1$ , зависящей только от  $m$  и  $p(a_1)$ . В правой полукрестности точки  $a_2$  решение либо тождественно равно нулю, либо является знакостоянным и удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$y(x) = \pm C(x - a_2)^\beta(1 + o(1)), \quad x \rightarrow a_2 + 0,$$

где  $\beta$  и  $C$  задаются теми же формулами, что и в теореме 2.1, но с  $p_* = p(a_2)$ . На отрезке  $[a_1, a_2]$  решение тождественно равно нулю.

Некоторые аналоги этих теорем получаются приведенным методом для  $n = 4$ .

Отметим, что с применением описанного метода были получены асимптотические формулы всех решений одномерного уравнения Шредингера с комплекснозначным потенциалом [18, 19].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений// В сб.: «Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа». — Тбилиси: ТГУ, 1985. — 1, № 3. — С. 9–11.
2. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. — 1985. — 40, № 5 (245). — С. 197.
3. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1986. — 22, № 12. — С. 2185.
4. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка// В сб.: «Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа». — Тбилиси: ТГУ, 1988. — 3, № 3. — С. 9–12.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.
6. Изобов Н. А. Об уравнениях Эмдена—Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями// Мат. заметки. — 1984. — 35, № 2. — С. 189–199.
7. Изобов Н. А., Рабцевич В. А. О неулучшаемости условия И. Т. Кигурадзе—Г. Г. Квиникадзе существования неограниченных правильных решений уравнения Эмдена—Фаулера// Дифференц. уравнения. — 1987. — 23, № 11. — С. 1872–1881.
8. Квиникадзе Г. Г. Некоторые замечания о решениях задачи Кнезера// Дифференц. уравнения. — 1978. — 14, № 10. — С. 1775–1783.

9. *Квиникадзе Г. Г.* О монотонных правильных и сингулярных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1984. — 20, № 2. — С. 360–361.
10. *Квиникадзе Г. Г., Кигурадзе И. Т.* О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Сообщ. АН ГССР. — 1982. — 106, № 3. — С. 465–468.
11. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990.
12. *Кондратьев В. А., Самовол В. С.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена—Фаулера// Дифференц. уравнения. — 1981. — 17, № 4. — С. 749–750.
13. *Коньков А. А.* О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — 65, № 2. — С. 81–126.
14. *Мышкис А. Д.* Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа// Дифференц. уравнения. — 1969. — 5, № 12. — С. 2267–2268.
15. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 324 с.
16. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. — М.: ИЛ, 1954.
17. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
18. *Astashova I. V.* On asymptotic properties of one-dimensional Schrödinger equation// Operator Theory: Adv. Appl. — 2000. — 114. — С. 15–19.
19. *Astashova I. V.* On asymptotic behaviour of one-dimensional Schrödinger equation with complex coefficients// J. Nat. Geom. — 2001. 19. — С. 39–52.
20. *Astashova I. V., Filinovsky A. V., Kondratiev V. A., Muravei L. A.* Some problems in the qualitative theory of differential equations// J. Nat. Geom. — 2003. — 23, № 1–2. — С. 1–126.
21. *Kozlov V. A.* On Knezer solution of higher-order ordinary differential equation/ Preprint S-581 83. — Linköping Univ., Dept. Math., Linköping, Sweden.

И. В. Асташова

E-mail: [ast@mail.ecfor.rssi.ru](mailto:ast@mail.ecfor.rssi.ru)

## ОБОБЩЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И ФОРМАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ $(x_2^3, -x_1^3)$

© 2003 г. **В. В. БАСОВ**

Аннотация. Рассмотрены формальные системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_1 = y_2^3 + \sum_{p=4}^{\infty} Y_1^{(p)}(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = -y_1^3 + \sum_{p=4}^{\infty} Y_2^{(p)}(y_1, y_2),$$

где  $Y_i^{(p)}$  — однородные полиномы порядка  $p$ , получаемые из исходной системы того же вида при помощи всевозможных формальных обратимых замен переменных  $x_i = y_i + h_i(y_1, y_2)$  ( $i = 1, 2$ ). Указаны все структуры, которые может иметь наиболее простая система — обобщенная нормальная форма, формально эквивалентная исходной системе.

Предлагаемая работа является продолжением работ [1, 2].

В [1, часть I] введены понятия резонансных уравнений и обобщенной нормальной формы для системы

$$\dot{x}_i = P_{\gamma_i}^{[\kappa]}(x) + X_i(x) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где нулевое приближение  $P_{\gamma}^{[\kappa]}$  — это квазиоднородный многочлен степени  $\kappa$  с весом  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , т.е. обобщенный порядок  $P_{\gamma_i}^{[\kappa]}(x)$  равен  $\kappa + \gamma_i$ , и ряды  $X_i(x)$  начинаются не ниже, чем с обобщенного порядка  $\kappa + \gamma_i + 1$ .

В [1, часть II] и в работе [2] полученные общие результаты применены к случаям, когда исходная система двумерна, а ее нулевое приближение равно  $(x_2, -x_1^3)$  или однородному квадратичному полиному.

В предлагаемой работе исходная система будет рассматриваться в случае, когда  $n = 2$ , переменные  $x_1, x_2$  имеют первый порядок малости, т.е.  $\gamma = (1, 1)$ , степень  $\kappa = 2$ , а квазиоднородный многочлен нулевого приближения  $P_{(1,1)}^{[2]} = (x_2^3, -x_1^3)$  и является обычным однородным полиномом третьего порядка. Таким образом, исходная система принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2^3 + X_1(x), \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 + X_2(x), \quad (1)$$

где

$$X_i = \sum_{p=2}^{\infty} X_i^{(p+2)}(x), \quad X_i^{(r)} = \sum_{s=0}^r X_i^{(s, r-s)} x_1^s x_2^{r-s} \quad (i = 1, 2).$$

Пусть формальная или сходящаяся в нуле замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где

$$h_i = \sum_{p=2}^{\infty} h_i^{(p)}(y),$$

переводит систему (1) в систему

$$\dot{y}_1 = y_2^3 + Y_1(y), \quad \dot{y}_2 = -y_1^3 + Y_2(y), \quad (3)$$

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской Федерации (проект № E00-1.0-95).

где

$$Y_i = \sum_{p=2}^{\infty} Y_i^{(p+2)}(y)$$

и, как обычно,

$$Z_i^{(r)} = \sum_{s=0}^r Z_i^{(s,r-s)} y_1^s y_2^{r-s}.$$

Тогда однородные полиномы  $h_i^{(p)}$  и  $Y_i^{(p+2)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1^{(p)}}{\partial y_1} y_2^3 - \frac{\partial h_1^{(p)}}{\partial y_2} y_1^3 - 3h_2^{(p)} y_2^2 &= \widehat{Y}_1^{(p+2)}, \\ \frac{\partial h_2^{(p)}}{\partial y_1} y_2^3 - \frac{\partial h_2^{(p)}}{\partial y_2} y_1^3 + 3h_1^{(p)} y_1^2 &= \widehat{Y}_2^{(p+2)}, \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_i^{(p+2)} &= \widetilde{Y}_i^{(p+2)}(y) - Y_i^{(p+2)}(y), \quad \widetilde{P} = (3h_2^2 y_2 + h_2^3, -3h_1^2 y_1 - h_1^3), \\ \widetilde{Y}_i^{(p+2)} &= \left\{ X_i(y+h) + \widetilde{P}_i(h) - Y_1 \frac{\partial h_i}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial h_i}{\partial y_2} \right\}^{(p+2)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что однородные полиномы  $\widetilde{Y}_i^{(p+2)}(y)$  известны, так как зависят только от  $h_\nu^{(r)}$  и  $Y_\nu^{(r+2)}$  с  $2 \leq r \leq p-1$  ( $p \geq 2$ ,  $\nu = 1, 2$ ).

Приравнявая коэффициенты при  $y_1^s y_2^{p+2-s}$  ( $s = 0, 1, \dots, p+2$ ) в первом уравнении и при  $y_1^{s+2} y_2^{p-s}$  ( $s = -2, -1, \dots, p$ ) во втором, получаем систему  $2(p+3)$  уравнений с  $2(p+1)$  неизвестными:

$$\begin{aligned} (s+1)h_1^{(s+1,p-s-1)} - (p-s+3)h_1^{(s-3,p-s+3)} - 3h_2^{(s,p-s)} &= \widehat{Y}_1^{(s,p-s+2)}, \\ (s+3)h_2^{(s+3,p-s-3)} - (p-s+1)h_2^{(s-1,p-s+1)} + 3h_1^{(s,p-s)} &= \widehat{Y}_2^{(s+2,p-s)}, \end{aligned}$$

которую перепишем в новых, более удобных обозначениях:

$$\begin{aligned} (s+1)h_{1s+1}^p - (p-s+3)h_{1s-3}^p - 3h_{2s}^p &= Y_{1s}^p \quad (s = 0, 1, \dots, p+2), \\ (s+3)h_{2s+3}^p - (p-s+1)h_{2s-1}^p + 3h_{1s}^p &= Y_{2s}^p \quad (s = -2, -1, \dots, p). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_{1s}^p &= h_1^{(s,p-s)}, \quad h_{2s}^p = h_2^{(s,p-s)}, \\ Y_{1s}^p &= \widehat{Y}_1^{(s,p-s+2)}, \quad Y_{2s}^p = \widehat{Y}_2^{(s+2,p-s)}, \end{aligned}$$

причем по определению  $h_{is}^p = 0$ , если  $s < 0$  или  $s > p$  ( $i = 1, 2$ ).

Отметим свойство симметрии, присущее линейной системе (4), которое заключается в том, что система (4) не изменится, если  $h_{1s}^p$ ,  $h_{2s}^p$ ,  $Y_{1s}^p$ ,  $Y_{2s}^p$  в ней заменить соответственно на  $-h_{2p-s}^p$ ,  $-h_{1p-s}^p$ ,  $Y_{2p-s}^p$ ,  $Y_{1p-s}^p$ .

Иными словами, матрица  $A$ , задающая левую часть (4) и имеющая размерность  $(2p+6) \times (2p+2)$ , удовлетворяет равенству

$$D_{2p+6} A D_{2p+2} = -A,$$

где

$$D_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(l \times l)}.$$

Умножение матрицы  $D_l$  на вектор размерности  $l$  означает перестановку компонент этого вектора в обратном порядке. Поэтому, если вектор  $a$  имеет размерность  $2p+6$ , то

$$a \perp \text{Im } A \Leftrightarrow D_{2p+6}a \perp \text{Im } A. \quad (5)$$

Действительно, пусть, например,  $a \perp \text{Im } A$ , т.е.  $(a, Ax) = 0$  для всякого вектора  $x$  размерности  $2p+2$ . Возьмем произвольный вектор  $y$  той же размерности и положим  $x = D_{2p+2}y$ . Тогда  $y = D_{2p+2}x$  и  $(D_{2p+6}a, Ay) = (a, D_{2p+6}AD_{2p+2}x) = (a, -Ax) = 0$ , т.е.  $D_{2p+6}a \perp \text{Im } A$ .

Выделим из системы (4) четыре «лишних» уравнения. Из первой половины (4) возьмем уравнения с  $s = p+1, p+2$ , а из второй — с  $s = -2, -1$ :

$$\begin{aligned} -2h_{1p-2}^p &= Y_{1p+1}^p, & -h_{1p-1}^p &= Y_{1p+2}^p, \\ h_{21}^p &= Y_{2,-2}^p, & 2h_{22}^p &= Y_{2,-1}^p. \end{aligned} \quad (6)$$

Остальные  $2p+2$  уравнений системы (4) запишем в матричном виде:

$$\Gamma^p h_1^p - 3h_2^p = Y_1^p, \quad 3h_1^p + \Delta^p h_2^p = Y_2^p, \quad (7)$$

где  $h_i^p = (h_{i0}^p, \dots, h_{ip}^p)$ ,  $Y_i^p = (Y_{i0}^p, \dots, Y_{ip}^p)$ ,  $\Gamma^p$  и  $\Delta^p$  — двухдиагональные матрицы размерности  $(p+1) \times (p+1)$  с элементами на диагоналях

$$\begin{aligned} \gamma_{ss+1} &= s+1, & \gamma_{ss-3} &= s-3-p, \\ \delta_{ss+3} &= s+3, & \delta_{ss-1} &= s-1-p \end{aligned}$$

(нижние индексы меняются в пределах от 0 до  $p$ ).

Из первого уравнения системы (7) можно однозначно найти вектор  $h_2^p$ :

$$3h_2^p = \Gamma^p h_1^p - Y_1^p \quad \text{или} \quad 3h_{2s}^p = (s+1)h_{1s+1}^p + (s-3-p)h_{1s-3}^p - Y_{1s}^p. \quad (8)$$

В частности, в (8)  $3h_{21}^p = 2h_{12}^p - Y_{11}^p$ ,  $3h_{22}^p = 2h_{13}^p - Y_{12}^p$  ( $h_{13}^2 = 0$ ). Подставляя эти компоненты вектора  $h_2^p$  в третье и четвертое уравнения (6), получаем четыре дополнительные связи только на компоненты  $h_1^p$ :

$$\begin{aligned} 2h_{12}^p &= 3Y_{2,-2}^p + Y_{11}^p, & 6h_{13}^p &= 3Y_{2,-1}^p + 2Y_{12}^p, \\ -2h_{1p-2}^p &= Y_{1p+1}^p, & -h_{1p-1}^p &= Y_{1p+2}^p. \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая теперь  $h_2^p$  из (8) и второго уравнения (7), получаем систему

$$\Theta^p h_1^p = \check{Y}_2^p, \quad (10)$$

в которой  $\Theta^p = \Delta^p \Gamma^p + 9E$  — трехдиагональная  $(p+1) \times (p+1)$ -матрица, вектор  $\check{Y}_2^p = \Delta Y_1^p + 3Y_2^p$ , причем, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} \theta_{ss} &= \delta_{ss+3}\gamma_{s+3s} + \delta_{ss-1}\gamma_{s-1s} + 9, \\ \theta_{ss+4} &= \delta_{ss+3}\gamma_{s+3s+4}, \\ \theta_{ss-4} &= \delta_{ss-1}\gamma_{s-1s-4}, \\ \check{Y}_{2s}^p &= \delta_{ss+3}Y_{1s+3}^p + \delta_{ss-1}Y_{1s-1}^p + 3Y_{2s}^p, \end{aligned}$$

и все нижние индексы меняются в пределах от 0 до  $p$ .

Пусть

$$\Theta^p = \begin{pmatrix} -a_0^p & 0 & 0 & 0 & b_0^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_1^p & 0 & 0 & 0 & b_1^p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2^p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_0^p & 0 & 0 & 0 & -a_4^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_1^p & 0 & 0 & 0 & -a_5^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_p^p \end{pmatrix};$$

тогда

$$\begin{aligned}
 a_s^p &= \begin{cases} (p-s)(s+3) + (p-s+1)s - 9 & \text{при } s = 0, \dots, p-3, \\ (p-s+1)s - 9 & \text{при } s = p-2, p-1, p, \end{cases} \\
 b_{s-4}^p &= (s-1)s, \quad c_{s-4}^p = (s-1-p)(s-4-p) \quad \text{при } s = 4, \dots, p, \\
 \check{Y}_{2s}^p &= (s+3)Y_{1s+3}^p + (s-1-p)Y_{1s-1}^p + 3Y_{2s}^p \quad (Y_{1l}^p = 0 \text{ при } l < 0, l > p).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что все четыре входящие в равенства (9) компоненты вектора  $h_1^p$  будут различны, когда  $3 < p-2$ , т.е.  $p \geq 6$ . При таких  $p$  можно будет получить единые формулы для резонансных уравнений.

Начальные значения  $p$ , равные 2, 3, 4, 5, рассмотрим отдельно.

Пусть  $p = 2$ ; тогда система (10) принимает вид

$$-a_s^2 h_{1s}^2 = \check{Y}_{2s}^2$$

или

$$((s-3)s+9)h_{1s}^2 = (s-3)Y_{1s-1}^2 + 3Y_{2s}^2 \quad (s = 0, 1, 2).$$

Отсюда

$$3h_{10}^2 = Y_{20}^2, \quad 7h_{11}^2 = -2Y_{10}^2 + 3Y_{21}^2, \quad 7h_{12}^2 = -Y_{11}^2 + 3Y_{22}^2, \quad \det \Theta^2 \neq 0.$$

Подставляя найденные значения  $h_{1s}^2$  в равенства (9) с  $p = 2$ , получаем четыре резонансные связи на все десять компонент векторов  $Y_i^2$ :

$$\begin{aligned}
 2Y_{12}^2 + 3Y_{2,-1}^2 &= 0, \\
 -2Y_{10}^2 + 7Y_{14}^2 + 3Y_{21}^2 &= 0, \\
 3Y_{13}^2 + 2Y_{20}^2 &= 0, \\
 3Y_{11}^2 + 7Y_{2,-2}^2 - 2Y_{22}^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{12^2}$$

причем каждая компонента входит ровно в одно из уравнений (12<sup>2</sup>).

Пусть  $p = 3$ ; тогда система (10) принимает вид

$$-a_s^3 h_{1s}^3 = \check{Y}_{2s}^3,$$

или

$$\begin{aligned}
 6h_{11}^3 &= -3Y_{10}^3 + 3Y_{21}^3, \\
 5h_{12}^3 &= -2Y_{11}^3 + 3Y_{22}^3, \\
 6h_{13}^3 &= -Y_{12}^3 + 3Y_{23}^3, \\
 0 \cdot h_{10}^3 &= 3Y_{13}^3 + 3Y_{20}^3.
 \end{aligned}$$

Последнее уравнение — дополнительное. Оно появилось из-за того, что в диагональной матрице  $\Theta^3$  есть нулевое собственное число. При этом компонента  $h_{10}^3$  не имеет никаких ограничений.

Подставляя найденные значения  $h_{1s}^3$  в равенства (9) с  $p = 3$ , получаем пять резонансных связей на все двенадцать компонент векторов  $Y_i^3$ :

$$\begin{aligned}
 -Y_{10}^3 + Y_{14}^3 + Y_{21}^3 &= 0, \\
 -2Y_{11}^3 + 5Y_{15}^3 + 3Y_{22}^3 &= 0, \\
 Y_{12}^3 + Y_{2,-1}^3 - Y_{23}^3 &= 0, \\
 3Y_{11}^3 + 5Y_{2,-2}^3 - 2Y_{22}^3 &= 0, \\
 Y_{13}^3 + Y_{20}^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12^3}$$

При  $p = 4$  в четыре равенства (9) входят только компоненты  $h_{12}^4$  и  $h_{13}^4$ , а матрица  $\Theta^4$  впервые стала трехдиагональной.

Поскольку  $a_0^4 \neq 0$ , (10) с  $p = 4$  сводится к верхнетреугольной системе

$$\begin{aligned} -a_0^4 h_{10}^4 + b_0^4 h_{14}^4 &= \check{Y}_{20}^4, \\ -a_s^4 h_{1s}^4 &= \check{Y}_{2s}^4 \quad (s = 1, 2, 3), \\ -d_4^4 h_{14}^4 &= Y_{d4}^4, \end{aligned}$$

где

$$d_4^4 = a_4^4 - b_0^4 c_0^4 / a_0^4, \quad Y_{d4}^4 = \check{Y}_{24}^4 + (c_0^4 / a_0^4) \check{Y}_{20}^4.$$

Нетрудно подсчитать, что  $a^4 = (3, 7, -3, -3, -5)$ ,  $d_4^4 = 21$ . Следовательно,  $\det \Theta^4 \neq 0$ , и вектор  $h_1^4$  однозначно определяется из системы (10). В частности, при  $s = 2, 3$  имеем:

$$3h_{12}^4 = -3Y_{11}^4 + 3Y_{22}^4, \quad 3h_{13}^4 = -2Y_{12}^4 + 3Y_{23}^4.$$

Подставляя их в (9), получаем четыре резонансные связи на восемь из четырнадцати компонент  $Y_{is}^4$ :

$$\begin{aligned} -2Y_{11}^4 + Y_{15}^4 + 2Y_{22}^4 &= 0, \\ 3Y_{11}^4 + 3Y_{2,-2}^4 - 2Y_{22}^4 &= 0, \\ 2Y_{12}^4 + Y_{2,-1}^4 - 2Y_{23}^4 &= 0, \\ -2Y_{12}^4 + 3Y_{16}^4 + 3Y_{23}^4 &= 0. \end{aligned} \tag{12^4}$$

При  $p = 5$  равенства (9) и система (10) принимают вид:

$$\begin{aligned} 2h_{12}^5 &= 3Y_{2,-2}^5 + Y_{11}^5, \\ 6h_{13}^5 &= 3Y_{2,-1}^5 + 2Y_{12}^5, \\ -2h_{13}^5 &= Y_{16}^5, \quad -h_{14}^5 = Y_{17}^5; \\ -a_s^5 h_{1s}^5 + b_{s+4}^5 h_{1s+4}^5 &= \check{Y}_{2s}^5 \quad (s = 0, 1, 2, 3), \\ -d_s^5 h_{1s}^5 &= Y_{ds}^5 \quad (s = 4, 5), \end{aligned}$$

где

$$d_s^5 = a_s^5 - b_{s-4}^5 c_{s-4}^5 / a_{s-4}^5, \quad Y_{ds}^5 = \check{Y}_{2s}^5 + (c_{s-4}^5 / a_{s-4}^5) \check{Y}_{2s-4}^5.$$

Нетрудно подсчитать, что  $a^5 = (6, 12, 14, 0, -1, -4)$ ,  $d_4^5 = -21$ ,  $d_5^5 = -32/3$ . Из системы (10) при  $s = 2, 3, 4$  находим, что

$$\begin{aligned} -14h_{12}^5 &= -4Y_{11}^5 + 5Y_{15}^5 + 3Y_{22}^5, \\ 0 \cdot h_{13}^5 &= -Y_{12}^5 + Y_{23}^5, \\ 21h_{14}^5 &= 3Y_{13}^5 + 5Y_{20}^5 + 3Y_{24}^5. \end{aligned}$$

Элемент  $a_3^5 = 0$ , но компонента  $h_{13}^5$  не произвольна, так как входит в два равенства (9), из которых в этом случае и должна быть исключена.

Таким образом, двенадцать из шестнадцати компонент векторов  $Y_i^5$  удовлетворяют следующим четырем резонансным связям:

$$\begin{aligned} 3Y_{11}^5 + 5Y_{1,5}^5 + 21Y_{2,-2}^5 + 3Y_{22}^5 &= 0, \\ 2Y_{12}^5 + 3Y_{16}^5 + 3Y_{2,-1}^5 &= 0, \\ 3Y_{13}^5 + 21Y_{17}^5 + 5Y_{20}^5 + 3Y_{24}^5 &= 0, \\ -Y_{12}^5 + Y_{23}^5 &= 0. \end{aligned} \tag{12^5}$$

Отметим, что свойство симметрии (5) отчетливо просматривается в формулах (12<sup>τ</sup>) ( $\tau = 2, 3, 4, 5$ ). Третье и четвертое уравнения в (12<sup>τ</sup>) могут быть получены соответственно из первого и второго уравнений заменой  $Y_{is}^p$  на  $Y_{3-i,p-s}^p$ . Симметрия не нарушается и в (12<sup>5</sup>), поскольку неполное уравнение  $Y_{12}^5 = Y_{23}^5$ , полученное из-за того, что элемент  $a_3^5 = 0$ , преобразуется в уравнение

$$3Y_{16}^5 + 3Y_{2,-1}^5 + 2Y_{23}^5 = 0.$$

Кроме того, единственное непарное пятое уравнение в (12<sup>3</sup>) инвариантно относительно свойства (5).

Рассмотрим теперь систему (10) при  $p \geq 6$ . Методом математической индукции по строкам можно показать, что она равносильна системе

$$\Theta_d^p h_1^p = Y_d^p, \quad (13)$$

в которой

$$\Theta_d^p = \begin{pmatrix} -d_0^p & 0 & 0 & 0 & b_0^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -d_1^p & 0 & 0 & 0 & b_1^p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -d_2^p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_3^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_4^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_5^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -d_p^p \end{pmatrix},$$

если  $d_0^p, \dots, d_{p-4}^p \neq 0$ . В этом случае

$$\begin{aligned} d_s^p &= a_s^p, \\ Y_{ds}^p &= \check{Y}_{2s}^p \quad (0 \leq s \leq 3); \\ d_s^p &= a_s^p - b_{s-4}^p c_{s-4}^p / d_{s-4}^p, \\ Y_{ds}^p &= \check{Y}_{2s}^p + Y_{ds-4}^p c_{s-4}^p / d_{s-4}^p \quad (4 \leq s \leq p). \end{aligned} \quad (14)$$

Выписать прямые формулы для диагональных элементов  $d_s^p$  матрицы  $\Theta_d^p$  или собственных чисел матрицы  $\Theta^p$  можно будет только для некоторых  $s$ . Поэтому для того, чтобы определить обращаются ли элементы  $d_s^p$  в нуль, придется построить для них как мажорантные неположительные, так и минорантные неотрицательные функции. При этом в (11) элементы  $a_s^p$  для  $s = 0, \dots, p-3$  удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} a_s^p &= (2(p-s) + 1)s + 3(p-s-3), \\ b_{s-4}^p c_{s-4}^p &= (s-1)s(p-s+1)(p-s+4). \end{aligned}$$

Введем функции  $\zeta_s^p = (p-s-3)(s+3)$ . Тогда  $\zeta_s^p > 0$  при  $0 \leq s \leq p-4$ , а  $\zeta_{p-3}^p = 0$ . Покажем методом индукции, что  $d_s^p \geq \zeta_s^p$  при  $0 \leq s \leq p-3$ .

Поскольку  $a_s^p - \zeta_s^p = (p-s+4)s$  при  $p \geq 6$  и  $s \leq p-3$ , то  $d_0^p = \zeta_0^p$ , а  $d_j^p > \zeta_j^p$  ( $j = 1, 2, 3$ ), и база индукции имеется.

Пусть  $s = 4, \dots, p-3$ . Предположим, что  $d_j^p \geq \zeta_j^p$  при  $4 \leq j \leq s-1$ . Принимая во внимание равенство  $\zeta_{s-4}^p = (p-s+1)(s-1)$  и индукционное предположение, получаем

$$d_s^p \geq a_s^p - b_{s-4}^p c_{s-4}^p / \zeta_{s-4}^p = \zeta_s^p.$$

Учитывая начальные значения собственных чисел, уточним оценку для  $d_s^p$ . Очевидно, что

$$d_{4l}^p = \zeta_{4l}^p \quad (0 \leq l \leq (p-3)/4),$$

а  $d_{4l+j}^p > \zeta_{4l+j}^p$ , если  $j = 1, 2, 3$ . В результате все  $d_s^p > 0$  при  $p \geq 6$  и  $0 \leq s \leq p-3$ , кроме элементов  $d_{4r}^{4r+3} = 0$  ( $r \geq 1$ ), а  $d_{4l}^p = (p-4l-3)(4l+3)$  для  $0 \leq l \leq (p-3)/4$ .

Введем функцию

$$\eta_s^p = \zeta_s^p + 3p + 3 = (p-s)(s+6) - 6.$$

Тогда  $\eta_s^p > 0$  при  $0 \leq s \leq p-1$ , а  $\eta_p^p = -6$ . Покажем, что  $d_s^p \leq \eta_s^p$  при  $0 \leq s \leq p-3$ .

Поскольку  $a_s^p - \eta_s^p = (p-s+1)(s-3)$  при  $p \geq 6$  и  $s \leq p-3$ , то  $d_j^p \leq \eta_j^p$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), и база индукции имеется.

Пусть  $s = 4, \dots, p-3$ . Предположим, что  $d_j^p \leq \eta_j^p$  при  $4 \leq j \leq s-1$ . Тогда

$$d_s^p \leq a_s^p - b_{s-4}^p c_{s-4}^p / \eta_{s-4}^p,$$

так как по доказанному выше  $d_{s-4}^p > 0$  при  $s \leq p$ . Требуемое неравенство  $d_s^p \leq \eta_s^p$  будет выполнено, если

$$a_s^p - b_{s-4}^p c_{s-4}^p / \eta_{s-4}^p \leq \eta_s^p,$$

или

$$(a_s^p - \eta_s^p) \eta_{s-4}^p \leq b_{s-4}^p c_{s-4}^p,$$

или

$$(s-3)((p-s+4) \times (s+2) - 6) \leq (s-1)s(p-s+4),$$

а это неравенство выполняется всегда.

Оценим сверху  $d_{p-j}^p$  для  $j = 2, 1, 0$ . Поскольку

$$0 \leq d_{p-j-4}^p \leq \eta_{p-j-4}^p,$$

то

$$d_{p-j}^p = a_{p-j}^p - b_{p-j-4}^p c_{p-j-4}^p / d_{p-j-4}^p \leq a_{p-j}^p - b_{p-j-4}^p c_{p-j-4}^p / \eta_{p-j-4}^p,$$

при этом

$$\begin{aligned} a_{p-j}^p &= (j+1)(p-j) - 9, \\ b_{p-j-4}^p c_{p-j-4}^p &= (p-j-1)(p-j)(j+1)(j+4), \\ \eta_{p-j-4}^p &= (j+4)(p-j+2) - 6. \end{aligned}$$

В результате

$$d_{p-2}^p \leq -3 \frac{p+1}{p-1} < 0, \quad d_{p-1}^p \leq -9 \frac{3p+1}{5p-1} < 0, \quad d_p^p \leq -3 \frac{5p+3}{2p+1} < 0.$$

Приведенные рассуждения доказывают следующую лемму.

**Лемма 1.** Для любого  $p \geq 6$  диагональные элементы  $d_s^p$  матрицы  $\Theta_d^p$  системы (13) отличны от нуля при всех  $s = 0, \dots, p$ , кроме случаев, когда  $p = 4r + 3$ ,  $s = 4r$  ( $r \geq 1$ ), т.е. только элементы  $d_{4r}^{4r+3} = 0$ . При этом

$$(p-s-3)(s+3) \leq d_s^p \leq (p-s-3)(s+3) + 3p+3$$

при  $s = 0, \dots, p-3$ , а если  $s = 4l$ , то

$$d_{4l}^p = (p-4l-3)(4l+3)$$

при  $l = 0, \dots, [(p-3)/4]$ .

Перейдем теперь непосредственно к получению ограничений на величины  $Y_{is}^p$ , входящие в правые части (7), (9) при  $p \geq 6$ . В равенства (9) входят четыре различные компоненты вектора  $h_1^p$ :  $h_{12}^p$ ,  $h_{13}^p$ ,  $h_{1p-2}^p$ ,  $h_{1p-1}^p$ . Их предстоит выразить также из системы (10), равносильной (7), что даст четыре резонансные связи. При  $p = 4r + 3$  в системе (10)  $d_{p-3}^p = 0$ , что приводит к образованию дополнительной связи на правые части (7).

Для нахождения  $h_{1p-2}^p$ ,  $h_{1p-1}^p$ , а при  $p = 4r + 3$  — непосредственно  $Y_{dp-3}^p$ , число  $p \geq 6$  удобно представлять в одном из следующих видов:

$$p = s_r^j + k \quad (r \geq 1, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3), \quad s_l^j = 4l + j \quad (l - \text{целое}). \quad (15)$$

Тогда  $s_0^j = j$ ,  $s_l^j + 3 = s_{l+1}^j - 1$ ;  $p = 4r + j + k$  и  $r \geq 2$ , если  $j = 0$ ,  $k = 1$ . При этом, если  $k = 3$ , то потребуется только случай, когда  $j = 0$ .

Введем два набора констант, зависящих, в частности, от  $d_s^p$  из (14):

$$\begin{aligned} \alpha_l^{pj} &= s_l^j + 3 - d_{s_l^j}^p / (p - s_l^j), \quad \beta_l^{pj} = (p - s_l^j - 3)(p - s_l^j) / d_{s_l^j}^p \neq 0 \quad (0 \leq l < r); \\ \alpha_r^{pj} &= -d_{s_r^j}^p / k \neq 0 \quad (jk \neq 03), \quad \alpha_r^{4r+3,0} = 4r + 3. \end{aligned} \quad (16)$$

Используем полученную из (10) систему (13). В ней  $(p-k)$ -е уравнение при  $k = 1, 2, 3$  имеет вид  $-d_{p-k}^p h_{1p-k}^p = Y_{dp-k}^p$  или, согласно (15),

$$-d_{s_r^j}^p h_{1s_r^j}^p = Y_{ds_r^j}^p \quad (k = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Выразим  $Y_{ds_l^j}^p$ , входящие в (17), непосредственно через компоненты векторов  $Y_i^p$  системы (7). Покажем методом математической индукции, что

$$Y_{ds_l^j}^p = (s_l^j + 3)Y_{1s_l^j+3}^p + 3Y_{2s_l^j}^p + \sum_{\nu=0}^{l-1} (\alpha_\nu^{pj} Y_{1s_\nu^j+3}^p + 3Y_{2s_\nu^j}^p) \prod_{\mu=\nu}^{l-1} \beta_\mu^{pj} + (j-1-p)Y_{1s_{l-1}^j+3}^p \prod_{\mu=0}^{l-1} \beta_\mu^{pj}, \quad (18)$$

где  $p, j$  из (15),  $k = 1, 2, 3$ ,  $0 \leq l \leq r$ ,  $Y_{1,s}^p = 0$  ( $s < 0$ ,  $s > p$ ).

Действительно, при  $l = 0$  как из (14), (11), так и из (18) вытекает, что

$$Y_{dj}^p = \check{Y}_{2j}^p = (j+3)Y_{1j+3}^p + 3Y_{2j}^p + (j-1-p)Y_{1j-1}^p,$$

и база индукции имеется.

Предположим, что формула (18), в которой  $0 \leq l \leq r-1$ , справедлива. Из (14), (11), (17) найдем  $Y_{ds_{l+1}^j}^p$ , учитывая, что  $\beta_l^{pj} = c_{s_l^j}^p / d_{s_l^j}^p$ . Имеем:

$$\begin{aligned} Y_{ds_{l+1}^j}^p &= \check{Y}_{2s_{l+1}^j}^p + Y_{ds_l^j}^p \beta_l^{pj} = \\ &= (s_{l+1}^j + 3)Y_{1s_{l+1}^j+3}^p + 3Y_{2s_{l+1}^j}^p + ((s_l^j + 3 - p) + (s_l^j + 3)\beta_l^{pj})Y_{1s_l^j+3}^p + \\ &+ 3Y_{2s_l^j}^p \beta_l^{pj} + \sum_{\nu=0}^{l-1} (\alpha_\nu^{pj} Y_{1s_\nu^j+3}^p + 3Y_{2s_\nu^j}^p) \prod_{\mu=\nu}^l \beta_\mu^{pj} + (j-1-p)Y_{1j-1}^p \prod_{\mu=0}^l \beta_\mu^{pj}, \end{aligned}$$

а это снова формула (18), если в ней  $l$  заменить на  $l+1$ , так как множитель при  $Y_{1s_{l+1}^j+3}^p$  в третьем слагаемом правой части в точности равен  $\alpha_l^{pj} \beta_l^{pj}$ .

Пусть  $k = 1, 2$ , тогда при  $l = r$  первое слагаемое в правой части (18) отсутствует, поскольку  $s_l^j + 3 > p$ , и (18) имеет вид:

$$Y_{ds_r^j}^p = 3Y_{2s_r^j}^p + \sum_{\nu=0}^{r-1} (\alpha_\nu^{pj} Y_{1s_\nu^j+3}^p + 3Y_{2s_\nu^j}^p) \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \beta_\mu^{pj} + (j-p-1)Y_{1j-1}^p \prod_{\mu=0}^{r-1} \beta_\mu^{pj},$$

причем при  $j = 0$  здесь отсутствует последнее слагаемое, ибо  $Y_{1,-1}^p = 0$ .

Подставляя при  $k = 1, 2$  в уравнения (17) величины  $h_{1p-k}^p$  из двух последних равенств (9)  $-kh_{1s_r^j}^p = Y_{1s_r^j+3}^p$ , получаем для каждого  $p \geq 6$  из (15) по две резонансные связи:

$$Y_{1s_r^j+3}^p d_{s_r^j}^p / (-k) + Y_{ds_r^j}^p = 0$$

или

$$\sum_{\nu=0}^r (\alpha_\nu^{pj} Y_{1s_\nu^j+3}^p + 3Y_{2s_\nu^j}^p) \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \beta_\mu^{pj} - (4r+k+1)Y_{1j-1}^p \prod_{\mu=0}^{r-1} \beta_\mu^{pj} = 0, \quad (19^{jk})$$

где  $j = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2$ ;  $p$  и  $s_\nu^j$  из (15), а  $\alpha_\nu^{pj}$  и  $\beta_\mu^{pj}$  из (16). При этом, если  $j = 2, 3$  и  $k = 1, 2$ , то в (19<sup>jk</sup>) не входят компоненты  $Y_{2s_{-1}^j}^p$ .

Формулы (19<sup>jk</sup>) без последнего слагаемого справедливы и при  $j = 0$ , но в этом случае их можно упростить, поскольку  $\alpha_l^{pj}$  и  $\beta_l^{pj}$ , заданные рекуррентными формулами (16), при  $j = 0$  удается просто вычислить.

Пусть  $p = 4r + k$  ( $j = 0$ ,  $k = 1, 2$ ). По лемме 1  $d_{4l}^p = (p - 4l - 3)(4l + 3)$  для  $0 \leq l \leq (p - 3)/4$ . Таким образом,  $l \leq r - 1$ ,  $d_{4(r-1)}^{4r+k} = (k + 1)(4r - 1)$  и  $d_{4r}^{4r+k}$  можно найти по формуле (14). В ней, согласно (11),

$$\alpha_{4r}^{4r+k} = (k + 1)4r - 9, \quad b_{4r-4}^{4r+k} c_{4r-4}^{4r+k} = (4r - 1)4r(k + 1)(k + 4),$$

поэтому  $d_{4r}^{4r+k} = -3(4r + 3)$  ( $k = 1, 2$ ).

Подставляя  $p = 4r + k$  в (16), найдем

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^{p0} &= 3(4\nu + 3)/(4(r - \nu) + k) \quad \text{для } \nu = 0, \dots, r, \\ \beta_\mu^{p0} &= (4(r - \mu) + k)/(4\mu + 3) \quad \text{для } \mu = 0, \dots, r - 1, \end{aligned} \quad k = 1, 2.$$

Эти же формулы, очевидно, справедливы при  $k = 3$  и  $\nu < r$ .

Итак, для  $p = 4r + k$ , когда  $j = 0$ , формулы (19<sup>jk</sup>) принимают вид:

$$\sum_{\nu=0}^r \left( \frac{4\nu + 3}{4(r - \nu) + k} Y_{14\nu+3}^{4r+k} + Y_{24\nu}^{4r+k} \right) \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \frac{4(r - \mu) + k}{4\mu + 3} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (19^{0k})$$

причем  $r \geq 2$ , если  $k = 1$ , и  $r \geq 1$ , если  $k = 2$ .

По лемме 1 системы (13) и (10) однозначно разрешимы при всех  $p \geq 6$ , кроме случая, когда  $p = 4r + 3$  ( $r \geq 1$ ), т.е. когда  $j = 0$  и  $k = 3$ .

В этом случае в матрице  $\Theta_d^p$  из системы (13) последний диагональный элемент  $d_{4r}^{4r+3} = 0$ , что накладывает на  $Y_{d4r}^p$  дополнительное условие. В четвертом с конца уравнении системы (13) имеем:  $0 \cdot h_{14r}^{4r+3} = Y_{d4r}^{4r+3}$ ; следовательно, коэффициент  $h_{14r}^{4r+3}$  произволен.

Положим в (18)  $p = 4r + 3$  ( $j = 0, k = 3$ ),  $s_\nu^0 = 4\nu$ ; тогда последнее слагаемое в правой части (18) отсутствует, а первое слагаемое присутствует и при  $\nu = r$  в нем  $s_r^0 + 3 = 4r + 3$ . Кроме того, прямые формулы для  $\alpha_\nu^{p0}, \beta_\mu^{p0}$  уже подсчитаны. Подставляя в равенство  $Y_{d4r}^p = 0$  найденные величины, для каждого  $p = 4r + 3$  ( $r \geq 1$ ) получаем:

$$\sum_{\nu=0}^r \left( \frac{4\nu + 3}{4(r - \nu) + 3} Y_{14\nu+3}^{4r+3} + Y_{24\nu}^{4r+3} \right) \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \frac{4(r - \mu) + 3}{4\mu + 3} = 0. \quad (19^{03})$$

Эта формула, очевидно, совпадает с (19<sup>0k</sup>), в которой  $k = 3$ . При этом установлено, что компоненты  $h_{14r}^{4r+3}$  в системе (7) не имеют ограничений.

Остается найти входящие в систему (7) компоненты  $h_{12}^p, h_{13}^p$  для того, чтобы подставить их в первые два уравнения (9) и получить для любого  $p \geq 6$  две последние резонансные связи. Однако при сведении системы (13) к диагональной ее правой части станут труднообозримыми.

Другой путь заключается в приведении (10) к системе  $\Theta_e^p h_1^p = Y_e^p$  с нижнетреугольной двухдиагональной матрицей  $\Theta_e^p$  с главной диагональю  $-e_0^p, \dots, -e_p^p$  и неизменной четвертой поддиагональю  $c_0^p, \dots, c_{p-4}^p$ , если при этом элементы  $e_p^p, \dots, e_1^p$  будут получаться ненулевыми. Но при  $p$  из (15), где  $j = 2, 3$ , а  $k = 0, 1, 2, 3$ , выписать прямые формулы для  $e_{s_i^j}^p$  удастся только при  $k = 3$ . Иначе даже отделить  $e_{4l+j}^p$  от нуля затруднительно.

Находить  $h_{1j}^p$  ( $j = 2, 3$ ) пришлось бы непосредственно из системы (10) по формулам Крамера, но в этом нет необходимости, т.к. недостающие формулы легко получить из уже имеющихся, используя свойство (5).

Домножая вектор коэффициентов  $Y^{(p+2)}$  на матрицу  $D_{p+6}$  слева, т.е. заменяя  $Y_{1s}^p$  на  $Y_{2p-s}^p$  и наоборот, из (19<sup>0k</sup>) при  $k = 1, 2$  получаем

$$\sum_{\nu=0}^r \left( \frac{4\nu + 3}{4(r - \nu) + k} Y_{24(r-\nu)+k-3}^{4r+k} + Y_{14(r-\nu)+k}^{4r+k} \right) \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \frac{4(r - \mu) + k}{4\mu + 3} = 0, \quad (20^{0k})$$

а из (19<sup>jk</sup>) при  $p$  и  $s_\nu^j$  из (15),  $k = 1, 2$  и  $j = 1, 2, 3$  получаем

$$\sum_{\nu=0}^r \left( \alpha_\nu^{pj} Y_{24(r-\nu)+k-3}^p + 3Y_{14(r-\nu)+k}^p \right) \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \beta_\mu^{pj} - (4r + k + 1) Y_{24r+k+1}^p \prod_{\mu=0}^{r-1} \beta_\mu^{pj} = 0. \quad (20^{jk})$$

Поскольку компоненты  $Y_{1s}^p$  определены для  $s \leq p + 2$ , то в уравнения (20<sup>jk</sup>) заведомо не входят  $Y_{14r+k+4}^p$  при  $k = 1, 2$  и  $j = 2, 3$ .

Резонансное уравнение (19<sup>03</sup>), как легко убедиться, инвариантно при подобных заменах, поскольку  $\prod_{\mu=\nu}^{r-\nu} \frac{4(r-\mu)+3}{4\mu+3} = 1$  для любого  $\nu \leq r/2$ .

Для уравнений (19) и (20) введем универсальные константы, используя (16), (14) и (11). Положим

при  $j = 0, k = 1, 2, 3$

$$b_{r\nu}^{0k} = \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \frac{4(r-\mu)+k}{4\mu+3} \neq 0, \quad a_{r\nu}^{0k} = \frac{4\nu+3}{4(r-\nu)+k} b_{r\nu}^{0k} \neq 0 \quad (\nu = r, \dots, 0);$$

при  $j = 1, 2, 3, k = 1, 2$

$$b_{rr}^{jk} = 1, \quad a_{rr}^{jk} = -d_{s_r}^p / (3k) \neq 0, \quad (21)$$

$$b_{r\nu}^{jk} = \prod_{\mu=\nu}^{r-1} \frac{(p-s_\mu^j-3)(p-s_\mu^j)}{-d_{s_\mu^j}^p} \neq 0, \quad a_{r\nu}^{jk} = \left( s_\nu^j + 3 - \frac{d_{s_\nu^j}^p}{p-s_\nu^j} \right) \frac{b_{r\nu}^{jk}}{3} \quad (0 \leq \nu \leq r),$$

$$b_{r,-1}^{jk} = 0, \quad a_{r,-1}^{jk} = -(4r+k+1)b_{r0}^{jk}/3 \neq 0,$$

где  $p = 4r + j + k$  ( $r \geq 1$ ),  $s_l^j = 4l + j$ ,  $d_{s_0^j}^p = (2(p-j)+1)j + 3(p-j-3)$ ,

$$d_{s_l^j}^p = (2(p-s_l^j)+1)s_l^j + 3(p-s_l^j-3) - (s_l^j-1)s_l^j(p-s_l^j+1)(p-s_l^j+4)/d_{s_{l-1}^j}^p \quad (0 < l < r),$$

$$d_{s_r^j}^p = d_{p-k}^p = (k+1)(p-k) - 9 - (k+1)(k+4)(s_r^j-1)s_r^j/d_{s_{r-1}^j}^p.$$

Итак, для компонент  $Y_{1s}^p = \widehat{Y}_1^{(s,p-s+2)}$  ( $0 \leq s \leq p+2$ ) и компонент  $Y_{2s}^p = \widehat{Y}_2^{(s+2,p-s)}$  ( $-2 \leq s \leq p$ ) системы (4) при  $p = 2, 3, 4, 5$  получены линейные уравнения (12 $^\tau$ ) ( $\tau = 2, 3, 4, 5$ ), а при  $p = 4r + j + k \geq 6$  — уравнения (19 $^{jk}$ ) и (20 $^{jk}$ ) ( $j = 0, 1, 2, 3, k = 1, 2$ ), а также уравнение (19<sup>03</sup>).

Согласно введенным для коэффициентов системы (3) обозначениям

$$\widehat{Y}_i^{(l,\nu)} = \widetilde{Y}_i^{(l,\nu)} - Y_i^{(l,\nu)}, \quad \widetilde{Y}_i^{(l,\nu)} = \{X_i(y+h) + \widetilde{P}_i(h) - \sum_{j=1}^2 Y_j \partial h_i / \partial y_j\}^{(l,\nu)},$$

причем  $\widetilde{Y}_i^{(l,\nu)}$  ( $i = 1, 2$ ) — некие известные константы. В них входят уже найденные коэффициенты рядов  $h$  и  $Y$ , а также коэффициенты ряда  $X$ .

В дальнейшем натуральное число  $p \geq 2$  будем представлять в виде:

$$p = 4r + \tau \quad (r \geq 0, \quad 2 \leq \tau \leq 5). \quad (22)$$

Перепишем уравнения (12), (19), (20) непосредственно для коэффициентов системы (3), считая, что в получаемых линейных уравнениях типа  $F(Y_i^{(l,\nu)}) = \widetilde{c}$  константа  $\widetilde{c}$  всегда равна  $F(\widetilde{Y}_i^{(l,\nu)})$ .

При  $r = 0$  в (22) семнадцать уравнений (12 $^\tau$ ) для коэффициентов однородных полиномов  $Y_1^{(\tau+2)}$ ,  $Y_2^{(\tau+2)}$  принимают вид:

$$3Y_1^{(3,1)} + 2Y_2^{(2,2)} = \widetilde{c}, 2Y_1^{(2,2)} + 3Y_2^{(1,3)} = \widetilde{c}, \quad (23_0^2)$$

$$-2Y_1^{(0,4)} + 7Y_1^{(4,0)} + 3Y_2^{(3,1)} = \widetilde{c}, 3Y_1^{(1,3)} + 7Y_2^{(0,4)} - 2Y_2^{(4,0)} = \widetilde{c};$$

$$-Y_1^{(0,5)} + Y_1^{(4,1)} + Y_2^{(3,2)} = \widetilde{c}, Y_1^{(2,3)} + Y_2^{(1,4)} - Y_2^{(5,0)} = \widetilde{c},$$

$$-2Y_1^{(1,4)} + 5Y_1^{(5,0)} + 3Y_2^{(4,1)} = \widetilde{c}, 3Y_1^{(1,4)} + 5Y_2^{(0,5)} - 2Y_2^{(4,1)} = \widetilde{c}, \quad (23_0^3)$$

$$Y_1^{(3,2)} + Y_2^{(2,3)} = \widetilde{c};$$

$$-2Y_1^{(1,5)} + Y_1^{(5,1)} + 2Y_2^{(4,2)} = \widetilde{c}, 3Y_1^{(1,5)} + 3Y_2^{(0,6)} - 2Y_2^{(4,2)} = \widetilde{c},$$

$$-2Y_1^{(2,4)} + 3Y_1^{(6,0)} + 3Y_2^{(5,1)} = \widetilde{c}, 2Y_1^{(2,4)} + Y_2^{(1,5)} - 2Y_2^{(5,1)} = \widetilde{c}; \quad (23_0^4)$$

$$\begin{aligned}
2Y_1^{(2,5)} + 3Y_1^{(6,1)} + 3Y_2^{(1,6)} &= \tilde{c}, & 3Y_1^{(6,1)} + 3Y_2^{(1,6)} + 2Y_2^{(5,2)} &= \tilde{c}, \\
3Y_1^{(3,4)} + 21Y_1^{(7,0)} + 5Y_2^{(2,5)} + 3Y_2^{(6,1)} &= \tilde{c}, & & \\
3Y_1^{(1,6)} + 5Y_1^{(5,2)} + 21Y_2^{(0,7)} + 3Y_2^{(4,3)} &= \tilde{c}. & & 
\end{aligned} \tag{23^5_0}$$

Пусть теперь в (22)  $r \geq 1$ . Последовательно для  $\tau = 2, 3, 4, 5$  выпишем через коэффициенты однородных полиномов  $Y_i^{(4r+\tau+2)}$  те уравнения  $(19^{jk})$ ,  $(20^{jk})$ , в которых  $j+k = \tau$  или  $j+k = 1$ , когда  $\tau = 5$ , используя при этом константы (21).

При  $\tau = 2$  — это четыре уравнения  $(19^{11})$ ,  $(20^{11})$ ,  $(20^{02})$ ,  $(19^{02})$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r\nu-1}^{11} Y_1^{(4\nu, 4(r-\nu)+4)} + \sum_{\nu=0}^r b_{r\nu}^{11} Y_2^{(4\nu+3, 4(r-\nu)+1)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^r b_{r r-\nu}^{11} Y_1^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+3)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r r-\nu}^{11} Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+4)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^r b_{r r-\nu}^{02} Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+2)} + \sum_{\nu=0}^r a_{r r-\nu}^{02} Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+3)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^r a_{r\nu}^{02} Y_1^{(4\nu+3, 4(r-\nu)+1)} + \sum_{\nu=0}^r b_{r\nu}^{02} Y_2^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+2)} &= \tilde{c}.
\end{aligned} \tag{23^2_r}$$

При  $\tau = 3$  — это пять уравнений  $(19^{12})$ ,  $(19^{21})$ ,  $(20^{21})$ ,  $(20^{12})$ ,  $(19^{03})$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r\nu-1}^{12} Y_1^{(4\nu, 4(r-\nu)+5)} + \sum_{\nu=0}^r b_{r\nu}^{12} Y_2^{(4\nu+3, 4(r-\nu)+2)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r\nu-1}^{21} Y_1^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+4)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r\nu-1}^{21} Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+5)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r r-\nu}^{21} Y_1^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+4)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r r-\nu}^{21} Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+5)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^r b_{r r-\nu}^{12} Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+3)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r r-\nu}^{12} Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+4)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^r a_{r\nu}^{03} Y_1^{(4\nu+3, 4(r-\nu)+2)} + \sum_{\nu=0}^r b_{r\nu}^{03} Y_2^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+3)} &= \tilde{c}.
\end{aligned} \tag{23^3_r}$$

При  $\tau = 4$  — это четыре уравнения  $(19^{22})$ ,  $(20^{31})$ ,  $(19^{31})$ ,  $(20^{22})$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r\nu-1}^{22} Y_1^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+5)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r\nu-1}^{22} Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+6)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r r-\nu}^{31} Y_1^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+5)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r r-\nu}^{31} Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+6)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r\nu-1}^{31} Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+4)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r\nu-1}^{31} Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+5)} &= \tilde{c}, \\
\sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r r-\nu}^{22} Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+4)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r r-\nu}^{22} Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+5)} &= \tilde{c}.
\end{aligned} \tag{23^4_r}$$

При  $\tau = 5$  — это уравнения  $(19^{32})$ ,  $(20^{32})$  и уравнения  $(20^{01})$ ,  $(19^{01})$ , в которых  $r$  надо заменить на  $\rho = r + 1$ , так как  $p = 4r + 5 = 4\rho + 1$ :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r\nu-1}^{32} Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+5)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r\nu-1}^{32} Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+6)} = \tilde{c}, \\
 & \sum_{\nu=0}^{r+1} b_{r r-\nu}^{32} Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+5)} + \sum_{\nu=0}^{r+1} a_{r r-\nu}^{32} Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+6)} = \tilde{c}, \\
 & \sum_{\nu=0}^{\rho} b_{\rho\rho-\nu}^{01} Y_1^{(4\nu+1, 4(\rho-\nu)+2)} + \sum_{\nu=0}^{\rho} a_{\rho\rho-\nu}^{01} Y_2^{(4\nu, 4(\rho-\nu)+3)} = \tilde{c}, \\
 & \sum_{\nu=0}^{\rho} a_{\rho\nu}^{01} Y_1^{(4\nu+3, 4(\rho-\nu))} + \sum_{\nu=0}^{\rho} b_{\rho\nu}^{01} Y_2^{(4\nu+2, 4(\rho-\nu)+1)} = \tilde{c}.
 \end{aligned} \tag{23_r^5}$$

Положим  $n_\tau = \{5 \text{ при } \tau = 3; 4 \text{ при } \tau = 2, 4, 5\}$ . Обозначим через  $(23_{r\mu}^\tau)$   $\mu$ -е уравнение из  $(23_r^\tau)$ , где  $\mu = 1, \dots, n_\tau$ .

В результате оказались доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Для того чтобы система (1) была формально эквивалентна системе (3), т.е. существовала формальная замена переменных (2), переводящая (1) в (3), необходимо и достаточно, чтобы для любого  $p \geq 2$  из (22) коэффициенты однородного полинома  $Y^{(p+2)}$  системы (3) удовлетворяли  $n_\tau$  линейным резонансным уравнениям  $(23_r^\tau)$ , левая часть которых задается нулевым приближением системы (1) или (3).

Для того чтобы сформулировать следствия, вытекающие из теоремы 1, вектор коэффициентов полинома  $Y^{(p+2)}$  ( $p = 3r + \tau$ ), очевидно, имеющий  $2(4r + \tau + 3)$  компонент, удобно разложить на четыре непересекающихся вектора  $Y_r^{\tau l}$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ), содержащие следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
 Y_r^{\tau 0} &= Y_1^{(4\nu, 4(r-\nu)+\tau+2)}, Y_2^{(4\nu+3, 4(r-\nu)+\tau-1)}, \\
 Y_r^{\tau 1} &= Y_1^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+\tau+1)}, Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+\tau+2)}, \\
 Y_r^{\tau 2} &= Y_1^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+\tau)}, Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+\tau+1)}, \\
 Y_r^{\tau 3} &= Y_1^{(4\nu+3, 4(r-\nu)+\tau-1)}, Y_2^{(4\nu+2, 4(r-\nu)+\tau)},
 \end{aligned}$$

где  $\nu$  изменяется в пределах, оставляющих индексы неотрицательными.

**Следствие 1.** Для любого  $r \geq 0$  семнадцать резонансных уравнений  $(23_r)$  можно разбить на две группы а) и б). Группа а) состоит из девяти уравнений:  $(23_{r\mu}^2)$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ),  $(23_{r1}^3)$ ,  $(23_{r4}^3)$ ,  $(23_{r5}^3)$ ,  $(23_{r3}^5)$ ,  $(23_{r4}^5)$ , в каждое из которых входит свой набор коэффициентов системы (3), соответственно  $Y_r^{2\mu-1}$ ,  $Y_r^{30}$ ,  $Y_r^{32}$ ,  $Y_r^{33}$ ,  $Y_r^{51}$ ,  $Y_r^{53}$ . Группа б) состоит из четырех пар:  $(23_{r2}^3)$  и  $(23_{r3}^3)$ ,  $(23_{r1}^4)$  и  $(23_{r2}^4)$ ,  $(23_{r3}^4)$  и  $(23_{r4}^4)$ ,  $(23_{r1}^5)$  и  $(23_{r2}^5)$ , и в каждую пару уравнений входит свой набор коэффициентов из системы (3), соответственно  $Y_r^{31}$ ,  $Y_r^{41}$ ,  $Y_r^{42}$ ,  $Y_r^{52}$ .

**Следствие 2.** Для любого  $r \geq 0$  не имеют ограничений векторы коэффициентов  $Y_r^{40}$ ,  $Y_r^{43}$  полинома  $Y^{(4r+6)}$  и вектор  $Y_r^{50}$  полинома  $Y^{(4r+7)}$  системы (3), а также коэффициент  $h_1^{(4r,3)}$  из  $h_1^{(4r+3)}$  в замене (2).

Коэффициент системы (3), входящий хотя бы в одно из уравнений (23) с ненулевым множителем, называется резонансным, в противном случае коэффициент — нерезонансный. Коэффициенты замены (2), наоборот, называются резонансными, если не имеют никаких ограничений. Тем самым, в следствии 2 указаны все резонансные коэффициенты замены (2) и векторы коэффициентов системы (3), являющиеся нерезонансными. К сожалению, нельзя утверждать, что остальные коэффициенты (3) будут резонансными.

Коэффициент реально входит в какое-либо из резонансных уравнений (23), если отличен от нуля стоящий перед ним множитель  $a$  или  $b$  с соответствующими индексами, определенный в

(21). Согласно (16), все эти множители не равны нулю, кроме  $b_{r,-1}^{jk}$  и, возможно, множителей  $a_{r\nu}^{jk} = \alpha_\nu^{pj} b_{r\nu}^{jk}/3$ , где  $p = 4r + j + k$ ,  $r \geq 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2$ ,  $0 \leq \nu < r$ , так как отдельные константы  $\alpha_\nu^{pj} = s_\nu^j + 3 - d_{s_\nu}^p/(p - s_\nu^j)$  из (16) могут оказаться равными нулю, поскольку входящие в них величины  $d_s^p$  задаются только рекуррентными формулами (14) с использованием (11).

Подсчитаем, например,  $\alpha_0^{pj}$  из (16). При любом  $r \geq 1$ ,  $j > 0$  и  $k = 1, 2$  имеем:

$$d_{s_0}^p = d_j^{4r+k+j} = a_j^{4r+k+j} = (4r+k)(j+3) + (4r+k+1)j - 9,$$

откуда  $\alpha_0^{pj} = 9 - j(4r+k+1)/(4r+k) > 0$ . Так же можно найти  $\alpha_1^{pj}$ ,  $\alpha_2^{pj}$  и т. д.

Итак, все множители при коэффициентах полиномов  $Y^{(4r+\tau+2)}$  в уравнениях  $(23_{r3}^2)$ ,  $(23_{r4}^2)$ ,  $(23_{r5}^3)$ ,  $(23_{r3}^5)$ ,  $(23_{r4}^5)$  отличны от нуля, так как в них  $j = 0$ . С другой стороны, согласно следствию 1, каждый коэффициент системы (3), входящий в парные резонансные уравнения из группы б), также является резонансным, поскольку при  $\nu > 0$  в одном из них он имеет отличный от нуля множитель  $b_{r\nu-1}^{jk}$  с соответствующими индексами, а при  $\nu = 0$ , когда  $b_{r,-1}^{jk} = 0$ , отличен от нуля стоящий при нем множитель  $a_{rr}^{j'k'}$ .

В результате справедливо еще одно следствие из теоремы 1, обобщающее два предыдущих.

**Следствие 3.** При любом  $r \geq 0$  нерезонансными являются все коэффициенты, входящие в векторы  $Y_r^{40}$ ,  $Y_r^{43}$ ,  $Y_r^{50}$ , т.е. 3/16 от всех коэффициентов возмущенной части системы (3). Без дополнительных вычислений нельзя утверждать, что резонансными являются коэффициенты  $Y_1^{(4\nu, 4(r-\nu)+4)}$  из  $Y_r^{20}$ ,  $Y_2^{(4\nu, 4(r-\nu)+4)}$  из  $Y_r^{21}$ ,  $Y_1^{(4\nu, 4(r-\nu)+5)}$  из  $Y_r^{30}$ ,  $Y_2^{(4\nu+1, 4(r-\nu)+4)}$  из  $Y_r^{32}$ . Остальные коэффициенты полиномов  $Y^{(4r+\tau+2)}$  ( $\tau = 2, 3, 4, 5$ ) в системе (3) — резонансные.

**Замечание 1.** Вторые уравнения в парах из группы б), полученные из первых при помощи свойства (5), с первыми уравнениями не совпадают в отличие от инвариантного относительно (5) уравнения  $(23_{r5}^3)$ , поскольку только в одном из парных уравнений реально присутствует коэффициент ряда  $Y_1$  с  $\nu = 0$  и только в другом — коэффициент ряда  $Y_2$  с  $\nu = r + 1$ .

Приведем несколько общих определений из работы [1] применительно к системам с рассматриваемым в настоящей работе нулевым приближением.

Зафиксируем  $p$  из (22). Любым  $n_\tau$  коэффициентам  $Y_{i_m}^{(s_m, p-s_m+2)}$  однородного полинома  $Y^{(4r+\tau+2)}$ , где  $m = 1, \dots, n_\tau$ ,  $0 \leq s_m \leq p + 2$ ,  $1 \leq i_m \leq 2$ , поставим в соответствие матрицу  $\Upsilon^p = \{v_{\mu m}^p\}_{\mu, m=1}^{n_\tau}$ , элемент  $v_{\mu m}^p$  которой равен нулю, если  $Y_{i_m}^{(s_m, p-s_m+2)}$  не входит в уравнение  $(23_{r\mu}^\tau)$ , или равен соответствующему множителю, стоящему при  $Y_{i_m}^{(s_m, p-s_m+2)}$  в  $(23_{r\mu}^\tau)$ .

Набор из  $n_\tau$  коэффициентов однородного полинома  $Y^{(4r+\tau+2)}$  назовем резонансным, если  $\det \Upsilon^{4r+\tau} \neq 0$ . Тем самым, резонансные уравнения  $(23_r^\tau)$  однозначно разрешимы относительно любого резонансного набора.

Система (3) — обобщенная нормальная форма, если при любом  $p \geq 2$  все коэффициенты полинома  $Y^{(p+2)}$  равны нулю, кроме коэффициентов из некоторого резонансного набора, имеющих произвольные значения.

**Следствие 4.** Система (3) является обобщенной нормальной формой, если при любом  $r \geq 0$  четыре ее однородных полинома  $Y^{(4r+\tau+2)}$  ( $2 \leq \tau \leq 5$ ) содержат не более семнадцати отличных от нуля коэффициентов, образующих резонансный набор. Среди них имеется по одному коэффициенту из девяти векторов  $Y_r^{20}$ ,  $Y_r^{21}$ ,  $Y_r^{22}$ ,  $Y_r^{23}$ ;  $Y_r^{30}$ ,  $Y_r^{32}$ ,  $Y_r^{33}$ ;  $Y_r^{51}$ ,  $Y_r^{53}$ , каждый из которых входит в свое резонансное уравнение  $(23_r)$  из группы а) с ненулевым множителем, и по два коэффициента из четырех векторов  $Y_r^{31}$ ,  $Y_r^{41}$ ,  $Y_r^{42}$ ,  $Y_r^{52}$ , причем множители, стоящие при каждой паре коэффициентов в  $(23_{r2}^3)$  и  $(23_{r3}^3)$ ,  $(23_{r1}^4)$  и  $(23_{r2}^4)$ ,  $(23_{r3}^4)$  и  $(23_{r4}^4)$ ,  $(23_{r1}^5)$  и  $(23_{r2}^5)$  из группы б) образуют неособую  $2 \times 2$  матрицу. Значения коэффициентов указанного резонансного набора произвольны.

Столь же очевидна следующая теорема.

**Теорема 2.** Произвольная система (1) при помощи формальной замены (2) может быть преобразована в обобщенную нормальную форму (3), в которой при любом  $p \geq 2$  из (22) все коэффициенты однородного полинома  $Y^{(p+2)}$  равны нулю, кроме  $n_\tau$  коэффициентов одного из резонансных наборов, удовлетворяющих резонансным уравнениям  $(23_r^\tau)$ .

**Пример 1.** Из теоремы 2 и следствия 4 вытекает, что любая система (1) формально эквивалентна обобщенной нормальной форме, имеющей следующую структуру:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= +y_2^3 + \sum_{r=0}^{\infty} \left( Y_1^{(0,4r+4)} y_2^4 + Y_1^{(2,4r+2)} y_1^2 y_2^2 + Y_1^{(0,4r+5)} y_2^5 + Y_1^{(1,4r+4)} y_1 y_2^4 + \right. \\ &\quad \left. + Y_1^{(1,4r+5)} y_1 y_2^5 + Y_1^{(2,4r+4)} y_1^2 y_2^4 + Y_1^{(1,4r+6)} y_1 y_2^6 + Y_1^{(2,4r+5)} y_1^2 y_2^5 \right) y_2^{4r}, \\ \dot{y}_2 &= -y_1^3 + \sum_{r=0}^{\infty} \left( Y_2^{(0,4r+4)} y_2^4 + Y_2^{(1,4r+3)} y_1 y_2^3 + Y_2^{(0,4r+5)} y_2^5 + Y_2^{(1,4r+4)} y_1 y_2^4 + \right. \\ &\quad \left. + Y_2^{(2,4r+3)} y_1^2 y_2^3 + Y_2^{(0,4r+6)} y_2^6 + Y_2^{(1,4r+5)} y_1 y_2^5 + Y_2^{(1,4r+6)} y_1 y_2^6 + Y_2^{(2,4r+5)} y_1^2 y_2^5 \right) y_2^{4r}. \end{aligned} \quad (24)$$

Действительно, легко убедиться, что  $n_\tau$  коэффициентов, входящих при каждом  $r \geq 0$  и  $\tau = 2, 3, 4, 5$  в систему (24), образуют резонансный набор, поэтому их значения могут быть однозначно определены из системы  $n_\tau$  резонансных уравнений  $(23_r^\tau)$ , конечно, с точностью до выбора входящих в константы  $\tilde{c}$  резонансных коэффициентов замены (2).

Например, множители, стоящие при коэффициентах  $Y_1^{(1,4r+4)}$ ,  $Y_2^{(0,4r+5)}$  в уравнениях  $(23_{r2}^3)$  и  $(23_{r3}^3)$ , образуют неособую матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{r,-1}^{21} & b_{r,-1}^{21} \\ b_{rr}^{21} & a_{rr}^{21} \end{pmatrix},$$

поскольку  $b_{r,-1}^{21} = 0$ . Следовательно, эти коэффициенты при  $\tau = 3$  принадлежат резонансному набору точно так же, как коэффициенты  $Y_1^{(2,4r+5)}$  и  $Y_2^{(1,4r+6)}$  при  $\tau = 5$ . По тем же соображениям две пары коэффициентов  $Y_1^{(1,4r+5)}$  с  $Y_2^{(0,4r+6)}$  и  $Y_1^{(2,4r+4)}$  с  $Y_2^{(1,4r+5)}$ , входящих в уравнения  $(23_r^4)$ , непосредственно образуют резонансный набор при  $\tau = 4$ .

Обобщенная нормальная форма (24) при любом  $r \geq 0$  содержит не более семнадцати отличных от нуля членов и интересна тем, что переменная  $y_1$  входит в них не выше чем во второй степени.

Отметим, что коэффициент  $Y_2^{(2,4r+3)}$  в системе (24) при любом  $r \geq 0$  выбран из единственного резонансного уравнения  $(23_{r5}^3)$ , полученного не за счет того, что в линейной системе (4), связывающей коэффициенты рядов  $X, h, Y$ , число неизвестных на четыре меньше числа уравнений, а из-за того, что обращается в нуль главный минор ее матрицы или, что то же самое, определитель матрицы  $\Theta^p$  линейной системы (10).

**Пример 2.** По тем же соображениям, что и в примере 1, система (1) формально эквивалентна обобщенной нормальной форме вида:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2^3, \\ \dot{y}_2 &= -y_1^3 + \sum_{r=0}^{\infty} \left( Y_2^{(0,4r+4)} y_2^4 + Y_2^{(1,4r+3)} y_1 y_2^3 + Y_2^{(2,4r+2)} y_1^2 y_2^2 + Y_2^{(3,4r+1)} y_1^3 y_2 + \right. \\ &\quad \left. + Y_2^{(0,4r+5)} y_2^5 + Y_2^{(1,4r+4)} y_1 y_2^4 + Y_2^{(2,4r+3)} y_1^2 y_2^3 + Y_2^{(3,4r+2)} y_1^3 y_2^2 + Y_2^{(4,4r+1)} y_1^4 y_2 + \right. \\ &\quad \left. + Y_2^{(0,4r+6)} y_2^6 + Y_2^{(1,4r+5)} y_1 y_2^5 + Y_2^{(4,4r+2)} y_1^4 y_2^2 + Y_2^{(5,4r+1)} y_1^5 y_2 + \right. \\ &\quad \left. + Y_2^{(0,4r+7)} y_2^7 + Y_2^{(1,4r+6)} y_1 y_2^6 + Y_2^{(2,4r+5)} y_1^2 y_2^5 + Y_2^{(5,4r+2)} y_1^5 y_2^2 \right) y_2^{4r}. \end{aligned} \quad (25)$$

Коэффициенты из парных резонансных уравнений, например,  $Y_2^{(0,4r+5)}$  и  $Y_2^{(4,4r+1)}$ , входят в резонансный набор, поскольку стоящие при них в данном случае в  $(23_r^3)$  множители образуют матрицу

$$\Upsilon^{4r+5} = \begin{pmatrix} b_{r,-1}^{21} & b_{r0}^{21} \\ a_{rr}^{21} & a_{rr-1}^{21} \end{pmatrix}.$$

И хотя величина  $a_{rr-1}^{21}$  неизвестна,  $\det \Upsilon^{4r+5} \neq 0$ , так как, согласно (21), множители  $b_{r0}^{21}$  и  $a_{rr}^{21}$  отличны от нуля, а  $b_{r,-1}^{21} = 0$ .

Таким образом, при любом  $r \geq 0$  в первом уравнении системы (25) возмущения отсутствуют, а в правую часть второго уравнения входит не более 17 отличных от нуля членов, имеющих порядки  $4r + \tau + 2$  ( $2 \leq \tau \leq 5$ ) и не содержащих  $y_1$  в степени, выше пятой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами// Диффер. уравн. (в печати).
2. *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевыми квадратичным приближением// Диффер. уравн. (в печати).

В. В. Басов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: basov@VB2674.spb.edu

## О РЕЗУЛЬТАТАХ ФАЙНА ДЛЯ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА СИСТЕМЫ УОЛША

© 2003 г. М. С. БЕСПАЛОВ

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	49
2. Описание динамической системы . . . . .	50
3. Доказательство результатов Файна . . . . .	51
4. Поведение констант Лебега по пачкам . . . . .	55
5. Новые формулы для констант Лебега . . . . .	58
Список литературы . . . . .	59

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Воспользовавшись представлением натурального  $n$  в виде

$$n = n_1 2^0 + n_2 2^1 + \dots + n_m 2^{m-1}, \quad \text{где } n_i \in \{0, 1\}, n_m = 1, \quad (1)$$

а  $x \in [0, 1]$  в виде  $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i / 2^i$ , где  $x_i \in \{0, 1\}$ , получим определение функций Уолша в нумерации Пэли:

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (-1)^{x_i n_i}.$$

Если в (1) оставим только ненулевые слагаемые, то получим представление

$$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + \dots + 2^{\varepsilon_\nu}, \quad \text{где } \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_\nu = m - 1. \quad (2)$$

Во многих вопросах (см. [1, 7]), связанных со сходимостью рядов по системе Уолша в различных нумерациях, центральное место занимают константы Лебега:

$$L_n = \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x) \right| dx.$$

Функции системы Уолша, как и константы Лебега для системы Уолша, группируются по пачкам. Натуральные числа от  $2^m + 1$  до  $2^{m+1} - 1$  включительно назовем  $m$ -й пачкой и будем обозначать  $]m[$ , а числа от  $2^m$  до  $2^{m+1}$  назовем  $m$ -й полной пачкой.

Основные свойства констант Лебега для системы Уолша получены в [7]. Выделим следующие результаты Файна (в формуле (3)  $n$  в виде (2)):

$$L_n = \nu - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, \quad (3)$$

$$L_{2n} = L_n, \quad L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_{n+1} + L_n + 1), \quad (4)$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (L_k - (\frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log 3k)) = 0. \quad (5)$$

Эти результаты можно дополнить следующим соотношением симметрии в пачке:  $L_{2^{m+k}} = L_{2^{m+1-k}}$ , где  $0 \leq k < 2^m$ , которое в [3] выведено из (4).

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00341).

Доказательство теоремы, которую в [7] составляет формула (5), проводится методом математической индукции. Однако непосредственно проверенная в [7] база индукции неверна. Обозначим  $f(k) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 3k$  и  $e(k) = L_k - f(k)$ . Тогда  $e(5) = 0,0032587\dots > 0$ . В [7] утверждается, что  $e(k) < 0$  при  $2 \leq k \leq 8$ . Если бы это было так, то приведенное Файном доказательство противоречило бы сформулированному им утверждению о том, что  $\limsup e(k) \geq 0$ .

В данной статье мы устраним пробелы в доказательствах Файна и более подробно остановимся на формулах (4), которые можно рассматривать как алгоритм вычисления констант Лебега или как самостоятельные рекуррентные формулы, приводящие к интересным результатам из теории разностных уравнений. Будут приведены также другие формулы для констант Лебега.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Данная модель динамической системы на полуоси является аналогом динамической системы на плоскости для ядра Дирихле системы Крестенсона—Леви, описанной в [4]. Ибо система Крестенсона—Леви получается из системы Уолша заменой числа 2, как основания выбранной системы счисления, на другое простое число (например, число 3, как это сделано в [4]). Но модель динамической системы для случая системы Крестенсона—Леви более наглядна. В частности, отталкиваясь от модели, описанной в [4], были получены основные результаты статьи [3], где предложена новая, отличная от (3), (4), формула для вычисления констант Лебега системы Уолша, которая выводится независимо, применима к любым линейным перестановкам системы Уолша и представляет собой описание алгоритма вычисления констант Лебега  $L_n$  (а не ядер Дирихле, как в [4]). Приведем описание этого алгоритма в виде дискретной динамической системы, которую можно трактовать и в виде последовательности дискретных случайных величин.

Состояние системы описывается вектором с бесконечным множеством координат, занумерованных натуральными числами. Рассматривается дискретное время, задаваемое целыми неотрицательными числами. Каждая координата совершает циклические движения по неизменному маршруту с одинаковой скоростью, равной 1, начиная в нулевой момент из начальной точки. Отличие только в маршруте движения. А именно,  $k$ -я координата изменяется от 0 до  $2^{k-1}$  и обратно от  $2^{k-1}$  до 0 с шагом 1. Начальный этап движения  $k$ -й координаты, составляющий половину ее пути следования и равный пути от 0 до  $2^{k-2}$ , осуществляется неявно, т.е.  $k$ -я координата возникает в записи вектора состояний динамической системы  $y(n)$  в момент времени  $2^{k-2} + 1$  (за исключением первой координаты, возникающей в момент  $t = 1$ ) и оказывается в этот момент в точке  $2^{k-2} + 1$ . Следовательно, в момент времени  $n$ , принадлежащий  $m$ -й пачке (точнее при  $2^{m-1} < n \leq 2^m$ ), состояние системы описывается вектором  $y(n) = (y_1, y_2, \dots, y_{m+1})$ .

Для наглядности приведем значения нескольких векторов  $y(n)$ :  $y(1) = (1)$ ,  $y(2) = (0, 2)$ ,  $y(3) = (1, 1, 3)$ ,  $y(4) = (0, 0, 4)$ ,  $y(5) = (1, 1, 3, 5)$ ,  $y(6) = (0, 2, 2, 6)$ ,  $y(7) = (1, 1, 1, 7)$ ,  $y(8) = (0, 0, 0, 8)$ ,  $y(9) = (1, 1, 1, 7, 9)$ ,  $y(10) = (0, 2, 2, 6, 10)$ ,  $y(11) = (1, 1, 3, 5, 11)$ ,  $y(12) = (0, 0, 4, 4, 12)$ ,  $y(13) = (1, 1, 3, 3, 13)$ ,  $y(14) = (0, 2, 2, 2, 14)$ ,  $y(15) = (1, 1, 1, 1, 15)$ ,  $y(16) = (0, 0, 0, 0, 16)$ ,  $y(17) = (1, 1, 1, 1, 15, 17)$ .

Если трактовать данную систему как бесконечную последовательность дискретных случайных величин, то координаты  $y_k$  рассматриваются как возможные значения, вероятности которых соответственно равны  $2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-m}$  и  $2^{-m}$  для последнего значения.

Тогда

$$L_n = \sum_{k=1}^m y_k 2^{-k} + y_{m+1} 2^{-m} \quad (6)$$

или  $L_n$  равна математическому ожиданию случайной величины  $\xi_n$ .

Координаты векторов  $y(n)$  будем наглядно представлять как блуждающие по целочисленным точкам правой полуоси и называть зарядами, имеющими соответственный вес (вероятности отдельных значений). В моменты времени вида  $2^m$  происходит дробление последнего заряда веса  $2^{-m}$  на два заряда веса  $2^{-(m+1)}$  каждый (при этом число координат вектора  $y(n)$  увеличивается на 1), которые на следующем шаге будут двигаться в противоположных направлениях.

Доказательство описанного алгоритма основано на самоподобии системы Уолша; его легче проводить для системы Уолша—Пэли, для которой  $w_{k+2^m} = w_k \cdot w_{2^m}$ , если  $k < 2^m$ . Отрезок  $[0, 1]$

разбиваем на отрезки  $[2^{-l}, 2^{-(l-1)}]$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$ , и  $[0, 2^{-m}]$ , длины которых и равны весу зарядов. Значения модуля ядра Дирихле  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x) \right|$  на этих отрезках и есть значения зарядов (значение в граничных точках здесь не существенно). А именно,  $y_l$  равно значению на отрезке  $[2^{-l}, 2^{-(l-1)}]$ , а  $y_{m+1}$  равно значению на отрезке  $[0, 2^{-m}]$ .

Докажем это. Если  $n = 2^m + k$ , где  $k < 2^m$ , то  $D_n(x) = D_{2^m}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} w_i(x) \cdot w_{2^m}(x)$ . Как известно [1], ядро Дирихле  $D_{2^m}(x)$  равно  $2^m$  при  $x \in [0, 2^{-m}]$  и нулю при  $x \in [2^{-m}, 1]$ . Для модуля ядра Дирихле  $|D_n(x)|$  получим, что оно равно  $|D_k(x)|$  при  $x \in [2^{-m}, 1]$ ,  $2^m - k$  при  $x \in [2^{-m-1}, 2^{-m}]$  и  $2^m + k$  при  $x \in [0, 2^{-m-1}]$ , т.е. при изменении  $k$  от 0 до  $2^m$  значения модуля ядра Дирихле на первых отрезках  $[2^{-l}, 2^{-(l-1)}]$  ( $1 \leq l \leq m$ ) повторяются в том же порядке, на предпоследнем отрезке убывают со скоростью 1, а на последнем отрезке растут со скоростью 1. Это соотношение и есть свойство самоподобия, лежащее в основе описанного алгоритма.

Как отмечено в [3], для произвольной линейной перестановки системы Уолша вместо указанных отрезков рассматривается разбиение единичного отрезка на множества, мера которых соответственно равна длинам данных отрезков.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ ФАЙНА

Предложим другую, отличную от предложенной в [7], последовательность вычислений.

**Лемма 1.** *Если для данной динамической системы  $y(n) = (y_1, y_2, \dots, y_{m+1})$ , то  $y(2n) = (0, 2y_1, 2y_2, \dots, 2y_{m+1})$ .*

*Доказательство.* Так как маршрут каждого заряда в два раза длиннее маршрута предыдущего заряда, а скорости движения зарядов постоянны и равны 1, то каждый следующий заряд достигает в два раза более удаленной точки за время в два раза большее, чем предыдущий заряд. В четные моменты времени первый заряд возвращается в 0. Следовательно, при переходе времени от  $n$  к  $2n$  координаты вектора состояния динамической системы  $y(n)$  удваиваются и сдвигаются вправо (добавляется начальная нулевая координата).  $\square$

**Лемма Файна.** *Верны формулы (3) и (4).*

*Доказательство формулы (3).* Очевидно, что  $L_{2^m} = 1$ . Если  $n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2}$  (где  $\varepsilon_2 = m - 1$ ), то  $y(n) = (0, \dots, 0, 2^{\varepsilon_1}, \dots, 2^{\varepsilon_1}, 2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_1}, 2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_1})$ , так как при каждом из  $2^{\varepsilon_1}$  шагов, начиная с момента времени  $2^{\varepsilon_2}$ , координаты  $y_{\varepsilon_1+1}, \dots, y_{m-1}$  и  $y_{m+1}$  увеличиваются на 1, а координата  $y_m$  уменьшается на 1. Более ранние координаты окажутся в точке 0, так как время  $2^{\varepsilon_1}$  кратно (но не равно) их периоду обращения. Тогда по формуле (6)

$$L_{2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2}} = \sum_{k=\varepsilon_1+1}^{m-1} 2^{\varepsilon_1} \cdot 2^{-k} + (2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_1}) \cdot 2^{-m} + (2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_1}) \cdot 2^{-m} = 2 - 2^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Предположим, что для всех чисел вида  $n_1 = 2^{\varepsilon_2} + \dots + 2^{\varepsilon_\nu}$  (где  $\varepsilon_\nu = m - 1$ ) формула (3) верна:

$$L_{n_1} = (\nu - 1) - \sum_{2 \leq i < j \leq \nu} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j},$$

и вектор состояний динамической системы имеет вид  $y(n_1) = (0, \dots, 0, y_{\varepsilon_2+1}, \dots, y_m, y_{m+1})$ , где  $y_{\varepsilon_2+1} = 2^{\varepsilon_2}$  и т. д. Рассмотрим  $n = 2^{\varepsilon_1} + n_1$  (где  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_\nu$ ). Начиная с момента времени  $n_1$  при каждом из  $2^{\varepsilon_1}$  шагов координаты  $y_{\varepsilon_2+1}$  (она достигла своего максимума),  $y_{\varepsilon_3+1}, y_{\varepsilon_4+1}, \dots, y_{\varepsilon_{\nu-1}+1}, y_{\varepsilon_\nu+1}$  будут уменьшаться на 1, а остальные координаты из координат с  $y_{\varepsilon_1+1}$  до  $y_{\varepsilon_\nu+2}$  будут увеличиваться на 1. Для координат  $y_1, \dots, y_{\varepsilon_1}$  время  $2^{\varepsilon_1}$  кратно их периоду обращения, поэтому в момент времени  $n$  они вернутся в начало координат. Отсюда, по формуле

(6) и по правилу, что шаг назад есть «шаг вперед и два шага назад» (В. И. Ленин), получаем

$$\begin{aligned} L_{2^{\varepsilon_1+n_1}} &= L_{n_1} + \sum_{k=\varepsilon_1+1}^{m-1} 2^{\varepsilon_1} \cdot 2^{-k} - 2 \cdot \sum_{k=2}^{\nu-1} 2^{\varepsilon_1} \cdot 2^{-(\varepsilon_k+1)} + (-2^{\varepsilon_1}) \cdot 2^{-m} + (2^{\varepsilon_1}) \cdot 2^{-m} = \\ &= L_{n_1} + (1 - 2^{\varepsilon_1-\varepsilon_\nu}) - \sum_{k=2}^{\nu-1} 2^{\varepsilon_1-\varepsilon_k} = \nu - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu} 2^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}. \end{aligned}$$

□

*Доказательство формул (4).* Согласно лемме 1, можно считать, что при переходе от  $n$  к  $2n$  вес каждого заряда уменьшается вдвое, а значение увеличивается в два раза (расположение на полуоси подвергается гомотетии с коэффициентом 2). Следовательно, по формуле (6)  $L_{2n} = L_n$ .

Формула  $L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_{n+1} + L_n + 1)$  для  $n$  вида  $2^m$  вытекает из соотношения  $L_{2^{m+1}} = 1 + 1 - 2^{-m}$ , полученного непосредственным вычислением модуля ядра Дирихле  $|D_{2^{m+1}}(x)|$ , равного 1 при  $x \in [2^{-m}, 1]$ ,  $2^m - 1$  при  $x \in [2^{-m-1}, 2^{-m}]$  и  $2^m + 1$  при  $x \in [0, 2^{-m-1}]$ .

Для остальных  $n$  введем обозначения  $y(n) = (y_1, y_2, \dots, y_{m+1})$  и  $y(n+1) = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$ , где все соответствующие координаты различаются на 1. Тогда

$$y(2n) = (0, 2y_1, 2y_2, \dots, 2y_{m+1}), \quad y(2n+2) = (0, 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{m+1}),$$

где все соответствующие координаты (кроме первых) различаются на 2. Так как при каждом шаге каждая координата меняется на 1, то координаты вектора  $y(2n+1)$  (кроме первой) вычисляются как полусумма координат векторов  $y(2n)$  и  $y(2n+2)$ :

$$y(2n+1) = (1, y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_{m+1} + x_{m+1}).$$

Отсюда, по формуле (6)

$$\begin{aligned} L_{2n+1} &= 2^{-1} + \sum_{k=1}^m (y_k + x_k) 2^{-(k+1)} + (y_{m+1} + x_{m+1}) 2^{-(m+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{k=1}^m y_k 2^{-k} + y_{m+1} 2^{-m} + \sum_{k=1}^m x_k 2^{-k} + x_{m+1} 2^{-m} \right) = \frac{1}{2} (L_{n+1} + L_n + 1). \end{aligned}$$

Формулы (4) доказаны. □

**Лемма 2** (свойство симметрии).  $L_{2^{m+k}} = L_{2^{m+1-k}}$ , где  $0 \leq k < 2^m$ .

*Доказательство.* Будем сравнивать векторы  $y(2^{m-1} + k)$  и  $y(2^m - k)$ , увеличивая  $k$  на единицу, начиная с нуля. При каждом  $k$  эти векторы (так как циклическое движение зарядов с равной скоростью совпадает с движением зарядов по тому же замкнутому циклу в противоположном направлении) различаются только на двух последних координатах, для которых в обоих случаях  $y_m + y_{m+1} = 2^m$ . Тогда

$$L_{2^{m-1+k}} = \sum_{i=1}^{m-1} y_i 2^{-i} + (y_m + y_{m+1}) 2^{-m} = L_{2^m-k}.$$

Лемма доказана. □

Для доказательства теоремы Файна потребуются дополнительные обозначения. Прочитируем два абзаца из [3].

Пусть  $A_m = \max_{2^m \leq n < 2^{m+1}} L_n$ ,  $t_m$  — точка максимума в пачке, т.е.  $L_{t_m} = A_m$ , и  $c_m = A_m - A_{m-1}$ .

Согласно лемме 2, существуют две точки максимума: левая  $t'_m$  и правая  $t''_m$ .

**Лемма 3.** Для всех натуральных  $m$  имеем:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{9}(3m + 10 + (-1)^{m+1}2^{-m}), \\ c_m &= -\sum_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m\right), \\ t'_m &= \frac{1}{3}(2^{m+2} + (-1)^{m+1}), \\ t''_m &= \frac{1}{3}(5 \cdot 2^m + (-1)^m) \end{aligned}$$

и  $t'_m$  единственна. Максимальный скачок констант Лебега внутри  $m$ -й пачки равен  $L_{2^{m+1}} - L_{2^m} = 1 - 2^{-m}$  и достигается только на границе пачки.

В [7] отмечено, что формулы для  $A_m$  и  $t'_m$  найдены в 1921 г. Радемахером, но им не опубликованы. В [3] лемма 3 приведена без доказательства, так как первоначально ее доказательство было получено громоздкими комбинаторными методами. Доказательство леммы 3 приведем позднее, так как сформулированные в лемме результаты являются лишь частью предложения, описывающего поведение констант Лебега по пачкам и полученного только из формул (4), достаточных для доказательства теоремы Файна (5). К сожалению, в абзаце, следующем после данной леммы в статье [3], автор допустил опечатки при цитировании формулы (5) и в указании индекса (он должен быть четным) точки максимума.

Напомним обозначения  $f(k) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2 3k$  и  $e(k) = L_k - f(k)$ . Используя результаты леммы 3, докажем лемму, из которой сразу вытекает теорема Файна.

**Лемма 4.** Если  $k \neq t'_{2m}$ , то  $e(k) < 0$ ,

$$0 < e(t'_{2m}) < (t'_{2m})^{-1}. \quad (7)$$

*Доказательство.* Так как в лемме 4 речь пойдет только о точках  $t'_m$  левого максимума, то штрих в обозначениях точек левого максимума при доказательстве леммы 4 будем опускать. Из леммы 3 вытекает, что для точек левого максимума имеем ( $m \geq 1$ ):

$$t_{2m} = 1 + 4 + 16 + \dots + 4^m = \frac{1}{3}(4^{m+1} - 1), \quad t_{2m-1} = 1 + 2 + 8 + \dots + 2^{2m-1} = \frac{1}{3}(2^{2m+1} + 1).$$

Неравенство (7) для  $m = 1$  проверяем непосредственно:  $t_2 = 5$ ,  $L_5 = \frac{7}{4}$ ,  $e(5) = \frac{47 - 12\log_2 15}{36} = 0,003258690\dots$

Так как  $A_{2m} = \frac{1}{9}(6m + 10 - 4^{-m})$  (из леммы 3) и

$$f(t_{2m}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2(4^{m+1} - 1) = \frac{2m+2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2(1-q),$$

где  $q = 4^{-m-1}$ , то

$$e(t_{2m}) = A_{2m} - f(t_{2m}) = -\frac{4}{9} \cdot q - \frac{1}{3}\log_2(1-q) = \frac{1}{9} \cdot q \cdot (3\log_2(1-q)^{-\frac{1}{q}} - 4).$$

Если  $m \rightarrow \infty$ , то  $q \rightarrow 0$  и функция  $\log_2(1-q)^{-\frac{1}{q}}$  монотонно убывает (так как  $\ln(1-q)^{-\frac{1}{q}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1}}{n}$ ) к числу  $\log_2 e$ .

Так как  $\frac{1}{3\ln 2} - \frac{4}{9} = 0,0364\dots$ , то отсюда вытекает (7) и даже более сильное неравенство при  $m \geq 1$ :  $0,01 < t'_{2m} \cdot e(t'_{2m}) < 0,02$ .

Аналогично,  $A_{2m-1} = \frac{1}{9}(6m + 7 + 2^{-2m+1})$  (из леммы 3) и

$$f(t_{2m-1}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2(2^{2m+1} \cdot (1 + 2^{-(2m+1)})),$$

$$e(t_{2m-1}) = A_{2m-1} - f(t_{2m-1}) = \frac{4}{9} \cdot q - \frac{1}{3}\log_2(1+q) = -\frac{1}{9} \cdot q \cdot (3\log_2(1+q)^{\frac{1}{q}} - 4),$$

где  $q = 2^{-2m-1}$ .

Так как функция  $\log_2(1+q)^{\frac{1}{q}}$  целой переменной  $m$  ( $q = 2^{-2m-1}$ ) монотонно возрастает (см. доказательство второго замечательного предела) к числу  $\log_2 e$ , а при  $m = 1$  имеем  $q = \frac{1}{8}$  и  $3\log_2(1+q)^{\frac{1}{q}} - 4 > 0$ , то  $e(t_{2m-1}) < 0$  для всех натуральных  $m$ .

Подготовим базу индукции проверкой для первых четырех пачек. Непосредственным просчетом убеждаемся, что при всех  $k$  таких, что  $k \leq 32$ ,  $k \neq 1$ ,  $k \neq 5$ ,  $k \neq 21$ , имеем  $e(k) < 0$ . А именно, достаточно вычислить

$$\begin{aligned} e(7) &= \frac{7}{4} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 21 \right) = -0,158550\dots, \\ e(9) &= \frac{15}{8} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 27 \right) = -0,154407\dots, \\ e(11) &= \frac{17}{8} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 33 \right) = -0,000909\dots, \\ e(17) &= \frac{31}{16} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 51 \right) < e(11), \\ e(19) &= \frac{37}{16} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 57 \right) < e(23), \\ e(23) &= \frac{37}{16} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 69 \right) = -0,168119\dots, \\ e(27) &= \frac{39}{16} - \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 81 \right) = -0,120228\dots \end{aligned}$$

Для всех четных номеров  $k$  неравенство  $e(k) < 0$  вытекает из утверждения леммы 4 для более ранних пачек. Для всех  $k$  таких, что  $t_m < k \leq 2^m$  для нечетных  $m$ , и таких, что  $3 \cdot 2^{m-2} < k \leq 2^m$  (за исключением точки правого максимума) для четных  $m$ , неравенство  $e(k) < 0$  следует из монотонности  $f(k)$ .

Для нечетных номеров  $k$  неравенство  $e(k) < 0$  верно, если оно имеет место для всех номеров в двух предыдущих пачках (что и предполагал Файн, хотя это не всегда верно, как мы доказали выше). А именно, Файн [7] заметил, что  $e(2k) = e(k) - \frac{1}{3}$ ,  $e(2k+1) < \frac{1}{2}(e(k+1) + e(k)) + \frac{1}{6}$ . Отсюда вытекает, что  $e(4k+1) < \frac{1}{2}(e(2k+1) + e(k))$  и  $e(4k-1) < \frac{1}{2}(e(2k-1) + e(k))$ .

Переходим к шагу индукции. Пусть утверждение леммы 4 верно для всех пачек до  $2m$ -й включительно. Докажем его справедливость для двух следующих пачек. Справедливость леммы 4 требуется отдельно проверить только в соседних с точкой левого максимума нечетных точках.

Пусть  $k \in ]2m-1[$ , т.е. исходный номер берем из  $(2m-1)$ -й пачки. Тогда  $2k-1 \in ]2m[$ ,  $2k+1 \in ]2m[$ ,  $4k-1 \in ]2m+1[$ ,  $4k+1 \in ]2m+1[$ . Если числа  $2k-1$  и  $2k+1$  отличны от  $t_{2m}$ , то метод Файна подходит для доказательства, так как  $e(k) < 0$ ,  $e(2k-1) < 0$ ,  $e(2k+1) < 0$ .

Так как  $t_{2m+1} = 2t_{2m} + 1$ , то при  $2k-1 = t_{2m}$  имеем  $4k-1 = 2t_{2m} + 1 = t_{2m+1}$ , а  $e(t_{2m+1}) < 0$ . Если  $2k+1 = t_{2m}$ , то  $4k+1 = 2t_{2m} - 1 = t_{2m+1} - 2$ ,  $k = t_{2m-1} - 1 = 2t_{2m-2}$  и по методу Файна

$$e(t_{2m+1} - 2) < \frac{1}{2}(e(t_{2m}) + e(2t_{2m-2})) = \frac{1}{2}(e(t_{2m}) + e(t_{2m-2}) - 1/3).$$

Согласно (7), имеем  $e(t_{2m+1} - 2) < \frac{1}{2}((t_{2m})^{-1} + (t_{2m-2})^{-1} - 1/3) < 0$  при  $m \geq 2$ .

Итак, мы доказали, что для всех вновь добавленных (т.е. нечетных) номеров  $k$  из  $(2m+1)$ -й пачки функция  $e(k)$  отрицательна.

Если  $k \in ]2m[$ , то  $2k-1 \in ]2m+1[$ ,  $2k+1 \in ]2m+1[$ ,  $4k-1 \in ]2m+2[$ ,  $4k+1 \in ]2m+2[$ . Полагаем  $k = t_{2m}$ . Тогда  $4k+1 = t_{2m+2}$  (для этого номера лемма 4 доказана) и  $4k-1 = t_{2m+2} - 2$ ,  $2k-1 = t_{2m+1} - 2$ . По методу Файна, согласно (7) и только что полученной оценке для  $e(t_{2m+1} - 2)$ , имеем

$$e(t_{2m+2} - 2) < \frac{1}{2}(e(t_{2m+1} - 2) + e(t_{2m})) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(t_{2m}^{-1} + t_{2m-2}^{-1} - 1/3) + t_{2m}^{-1}\right) < 0$$

при  $m \geq 3$ .

Значит, надо дополнительно непосредственно проверить, что  $e(83) < 0$  (действительно,  $e(83) = -0,08215342\dots$ ) или воспользоваться более точным, чем (7), неравенством, полученным в лемме 4.  $\square$

Из леммы 4 следует, что  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$ .

#### 4. ПОВЕДЕНИЕ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ПО ПАЧКАМ

Перейдем к доказательству леммы 3. В этом параграфе будем считать, что нам известны только формулы (4). Это доказательство можно рассматривать как пример применения теории разностных уравнений (которая входит в университетский курс по методам вычислений и изложена, например, в [2]) к рекуррентному соотношению.

Введем обозначение  $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$  для разности вперед.

**Предложение** (см. [5]). *Для всех натуральных  $n, m$  справедливы следующие утверждения.*

- $\Delta L_{2n} = \frac{1}{2}(1 + \Delta L_n) > 0$ ,  $\Delta L_{2n+1} = \frac{1}{2}(\Delta L_n - 1) < 0$ .
- $0 < |\Delta L_n| < 1$  при  $n \geq 2$ ;  $\max_{n \in ]m[} |\Delta L_n| = \Delta L_{2^m} = -\Delta L_{2^{m+1}-1} = 1 - 2^{-m}$ ; если  $n \in ]m[$ ,  $n \neq 2^m$ ,  $n \neq 2^{m+1} - 1$ , то  $|\Delta L_n| < 1 - 2^{-m}$ .
- При  $m \geq 2$  в  $m$ -й пачке существуют ровно две точки максимума  $t_m$ , связанные разностным уравнением  $t_{m+2} = t_{m+1} + 2t_m$  с начальным условием  $t_0 = 1$ ,  $t_1 = 3$  для вычисления левой точки максимума  $t'_m$  и тем же уравнением с начальным условием  $t_0 = 2$ ,  $t_1 = 3$  для вычисления правой точки максимума  $t''_m$ , причем  $t'_m$  и  $2t'_{m-1}$  (аналогично  $t''_m$  и  $2t''_{m-1}$ ) — соседние точки, т.е. они различаются на 1.
- Максимальные значения в пачке констант Лебега образуют строго возрастающую последовательность (т.е.  $A_{m+1} > A_m$ ) и удовлетворяют разностному уравнению  $2A_{m+2} - A_{m+1} - A_m = 1$  с начальным условием  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = 3/2$ .
- Прирост максимальных значений в пачке  $c_m = A_m - A_{m-1}$  удовлетворяет разностному уравнению  $2c_{m+1} + c_m = 1$  с начальным условием  $c_1 = 1/2$ .
- для точек левого максимума  $t'_m$  и правого максимума  $t''_m$  справедливы также соотношения  $t'_{m+1} - 2t'_m = (-1)^m$ ,  $t''_{m+1} - 2t''_m = (-1)^{m+1}$ , а также соотношения  $t'_{m+1} + t'_m = 2^{m+2}$ ,  $t''_{m+1} + t''_m = 5 \cdot 2^m$ , которые при наличии начального условия  $t'_1 = 3$  (или  $t''_1 = 3$ ) могут служить исходными разностными уравнениями для определения этих чисел, равных  $t'_m = \frac{4}{3} \cdot 2^m - \frac{1}{3} \cdot (-1)^m$  и  $t''_m = \frac{5}{3} \cdot 2^m + \frac{1}{3} \cdot (-1)^m$ . Взаимная связь этих точек следующая:

$$t''_m = t'_{m-1} + 2^m, \quad t'_m = t''_{m-1} + 2^{m-1}, \quad t'_m + t''_m = 3 \cdot 2^m.$$

Более наглядная форма представления для них:

$$\begin{aligned} t'_{2^m} &= 1 + 4 + 16 + \dots + 4^m, \\ t'_{2^{m+1}} &= 1 + 2 + 8 + \dots + 2^{2m+1}, \\ t''_{2^m} &= 1 + 2 + 8 + \dots + 2^{2m-1} + 2^{2m}, \\ t''_{2^{m+1}} &= 1 + 4 + 16 + \dots + 4^m + 2^{2m+1}. \end{aligned}$$

ж) Максимум по пачкам имеет явный вид

$$A_m = \frac{m}{3} + \frac{10}{9} - \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^m,$$

а скачок максимума по пачкам равен

$$c_{2m} = \sum_{k=1}^m 4^{-k}, \quad c_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} + \sum_{k=1}^m 4^{-k}.$$

Справедливы также соотношения

$$\Delta c_m = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}, \quad c_m = 2^{-m} \cdot t'_{m-2}.$$

*Доказательство.* Большинство утверждений доказывается методом математической индукции. По формулам (4) имеем

$$\begin{aligned}\Delta L_{2n} &= L_{2n+1} - L_{2n} = 1/2(L_{n+1} + L_n + 1) - L_n = 1/2(\Delta L_n + 1), \\ \Delta L_{2n+1} &= 1/2(\Delta L_n - 1).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что неравенство  $0 < |\Delta L_n| < 1$ , которое непосредственно проверяется для  $n \in ]1[$ , верно для всех следующих пачек. Следовательно, утверждение а) доказано.

Утверждение б) о том, что максимальный скачок констант Лебега наблюдается у края пачки, вытекает из равенства

$$\max_{n \in ]m[} (|\Delta L_{2n}|, |\Delta L_{2n+1}|) = \max_{n \in ]m[} \frac{1}{2}(1 + |\Delta L_n|)$$

и базы индукции:

$$\Delta L_4 = 1 - \frac{1}{4}, \quad \Delta L_4 > \Delta L_5, \quad \Delta L_4 > \Delta L_6$$

(с учетом леммы 2). Равенство  $\Delta L_{2^m} = 1 - 2^{-m}$  отмечали при доказательстве (4).

Утверждение  $A_{m+1} > A_m$  вытекает из п. а).

В первой пачке всего одна внутренняя точка, которая и является точкой максимума:  $t_1 = 3$ . Во второй пачке лишь две вновь появившиеся константы Лебега, которые и дадут две симметричные точки максимума:  $t'_2 = 5$ ,  $t''_2 = 7$ . Обе точки являются соседними (отличаются на 1) с точкой  $2t_1 = 6$ , для которой  $L_{2t_1} = A_1$ . Отсюда вытекает соотношение  $A_3 = 1/2(A_1 + A_2 + 1)$  как следствие второй формулы (4), для которой  $t'_3 = 2n + 1$ , а числа  $t'_2$  и  $2t_1$  есть пара соседних чисел  $n + 1$  и  $n$  (не обязательно в таком порядке). Отсюда  $t'_3 = t'_2 + 2t_1$  (аналогично  $t''_3 = t''_2 + 2t_1$ ), т.е. числа  $t'_3$  и  $2t'_2$  (оно равно  $2n$  или  $2n + 2$ ) опять соседние.

В общем случае шаг метода математической индукции осуществляется так же, как в приведенном примере. А именно, очевидное неравенство

$$A_{m+1} \leq \frac{1}{2}(A_m + A_{m-1} + 1)$$

обращается в равенство вследствие того, что точки  $t'_{m-1}$  и  $2t'_{m-2}$  соседние, причем  $t'_{m+1} = t'_m + 2t'_{m-1}$ , что означает соседство точек  $t'_{m+1}$  и  $2t'_m$  (т.е. аналогичной пары точек следующей пачки).

Установленное равенство  $A_{m+1} = \frac{1}{2}(A_m + A_{m-1} + 1)$  перепишем в виде  $2A_{m+1} - A_m - A_{m-1} = 1$  и дополним начальными условиями  $A_0 = L_1 = 1$ ,  $A_1 = L_3 = 3/2$ .

Если формулу  $2A_{m+1} - A_m - A_{m-1} = 1$  переписать в виде

$$2(A_{m+1} - A_m) - (A_m - A_{m-1}) = 1,$$

то получим разностное уравнение для  $c_m$ , причем  $c_1 = A_1 - A_0 = 1/2$ .

Общее решение однородного разностного уравнения  $t'_{m+2} - t'_{m+1} - 2t'_m = 0$  найдем с помощью характеристического уравнения  $k^2 - k - 2 = 0$ , корни которого равны  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = -1$ , и запишем  $t'_m = C_1 2^m + C_2 (-1)^m$ . Для начальных условий  $t_1 = 3$ ,  $t'_2 = 5$  решение равно

$$t'_m = \frac{1}{3}(2^{m+2} + (-1)^{m+1}).$$

Для начальных условий  $t_1 = 3$ ,  $t''_2 = 7$  решение этого же уравнения равно

$$t''_m = \frac{5}{3}2^m + \frac{1}{3}(-1)^m.$$

Для данных решений легко подобрать соответствующие неоднородные разностные уравнения первого порядка отдельно для корня  $k_1$ :

$$t'_{m+1} - 2t'_m = (-1)^m, \quad t''_{m+1} - 2t''_m = (-1)^{m+1},$$

и отдельно для корня  $k_2$ :

$$t'_{m+1} + t'_m = 2^{m+2}, \quad t''_{m+1} + t''_m = 5 \cdot 2^m.$$

Из последних рекуррентных соотношений вытекают явные представления в двоичной системе счисления точек максимума для четных и нечетных пачек (см. п. е)). Из них вытекают формулы

$$t''_m = t'_{m-1} + 2^m, \quad t'_m = t''_{m-1} + 2^{m-1}.$$

Формула

$$t'_m + t''_m = 3 \cdot 2^m = 2^{m-1} + 2^m$$

следует из соотношения симметрии.

Для уравнения  $2A_{m+2} - A_{m+1} - A_m = 1$  по корням характеристического уравнения  $k_1 = -\frac{1}{2}$  и  $k_2 = 1$  находим общий вид решения соответствующего однородного уравнения

$$(A_m)_{oo} = C_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^m + C_2$$

и общий вид частного решения  $(A_m)_ч = A \cdot m$ , для которого подстановкой находим  $A = 1/3$ . Сумма однородного и частного решений при начальных условиях  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = 3/2$  есть

$$A_m = \frac{m}{3} + \frac{10}{9} - \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^m.$$

Для данного общего решения подберем неоднородное разностное уравнение второго порядка с кратным корнем, равным 1, и теми же начальными условиями:

$$A_{m+2} - 2A_{m+1} + A_m = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^m,$$

которое перепишем в виде

$$(A_{m+2} - A_{m+1}) - (A_{m+1} - A_m) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

или в виде

$$\Delta c_{m+1} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2}.$$

Формулы для  $c_m$  из п. ж) более красиво выглядят в двоичной системе счисления. А именно, по начальным данным  $c_1 = 0,1$ ,  $c_2 = 0,01$  вычисляем  $c_{2m} = 0,0101\dots 01$  и  $c_{2m+1} = 0,0101\dots 011$  с помощью предыдущей формулы.  $\square$

Умножение на  $2^{m+2}$  соответствует сдвигу на  $m+2$  запятой в записи числа  $c_{2m+2}$  в двоичной системе счисления. А это сдвиг запятой до конца числа. Получим запись целого числа в двоичной системе счисления:  $10101\dots 01$  и  $10101\dots 011$ . Отсюда вытекает формула

$$c_{2m+2} \cdot 2^{2m+2} = t'_m.$$

Сформулированная выше лемма 3 состоит из основных результатов данного предложения.

Дополнительно к доказательству предложения приведем более простой способ вычисления  $c_m$  и  $A_m$ :

$$A_m = L_{t''_m} = L_{2^m + t'_{m-1}} = L_{t'_{m-1}} + 1 - \frac{t'_{m-1}}{2^m} = A_{m-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^m,$$

$$A_m = 1 + \sum_{k=1}^m c_k = 1 + \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) = 1 + \frac{m}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^m.$$

Отметим также, что в п. е) доказано: точки максимума симметричны в пачке; если каждую пачку разделить на три равные части, то точки максимума равны ближайшим целым числам к точкам деления; в двоичной записи точек максимума последовательность цифр со второго разряда до предпоследнего есть чередующаяся последовательность нулей и единиц; и наоборот, любое нечетное число, в двоичной записи которого последовательность цифр со второго разряда до предпоследнего есть чередующаяся последовательность нулей и единиц, равно точке максимума  $t_m$ .

## 5. НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА

Для натурального  $n \in ]m - 1[$  вида (2) наряду с двоичной записью, состоящей из нулей и единиц, можно использовать сокращенную двоичную запись  $\varepsilon(n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu)$ , где слева направо (а не справа налево, как в двоичной записи числа) указываются все позиции единиц в двоичной записи. Например, число 160, равное  $2^5 + 2^7$ , имеет двоичную запись 10100000 и сокращенную двоичную запись  $\varepsilon(160) = (5, 7)$ . По формуле (3) имеем  $L_{160} = 2 - 2^{5-7} = 7/4$ .

Предложим еще одну формулу представления двоичных чисел, которую назовем сокращенной двоичной антизаписью числа. Для числа вида (2), полученного из записи (1), вернем (совершая обратный переход) все нулевые слагаемые, заключенные между младшим и старшим разрядами:

$$n = 1 \cdot 2^{\varepsilon_1} + 0 \cdot 2^{\mu_2} + \dots + 0 \cdot 2^{\mu_k} + 1 \cdot 2^{\varepsilon_2} + 0 \cdot 2^{\mu_{k+1}} + \dots + 0 \cdot 2^{\mu_s} + \dots + 1 \cdot 2^{\varepsilon_{\nu-1}} + 0 \cdot 2^{\mu_{l+1}} + \dots + 0 \cdot 2^{\mu_{r-1}} + 1 \cdot 2^{\varepsilon_\nu},$$

где  $\varepsilon_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \varepsilon_2, \mu_{k+1}, \dots, \mu_s, \dots, \varepsilon_{\nu-1}, \mu_{l+1}, \dots, \mu_{r-1}, \varepsilon_\nu$  — все подряд идущие натуральные числа от  $\varepsilon_1$  до  $m - 1$ , записанные в порядке возрастания. Сокращенной двоичной антизаписью числа назовем представление  $\mu(n) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ , где  $\mu_1 = \varepsilon_1$ ,  $\mu_r = \varepsilon_\nu = m - 1$ , состоящее из списка позиций всех нулей двоичной записи числа  $n$ , заключенных между младшим и старшим разрядами, дополненного номерами младшего и старшего разрядов. Например, для числа  $160 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7$  сокращенная двоичная антизапись числа есть  $\mu(160) = (5, 6, 7)$ .

Сокращенная двоичная запись числа совпадает с сокращенной двоичной антизаписью числа, если число совпадает с началом пачки:

$$\varepsilon(2^m) = \mu(2^m) = (m),$$

или с серединой пачки:

$$\varepsilon(3 \cdot 2^m) = \mu(3 \cdot 2^m) = (m - 1, m).$$

**Предложение.** Если  $n \neq 2^m$  и  $n \neq 3 \cdot 2^m$ , то  $\varepsilon(n) \neq \mu(n)$ . Для всех  $k < 2^m$  имеем  $\varepsilon(2^m + k) = \mu(2^{m+1} - k)$ .

*Доказательство.* Если в двоичной записи некоторого числа младший и старший разряды не соседние (и не совпадают), то очевидно, что сокращенная двоичная запись этого числа отлична от его сокращенной двоичной антизаписи. Так как  $(2^m + k) + (2^{m+1} - k) = 2^m + 2^{m+1}$ , то в двоичной записи чисел  $(2^m + k)$  и  $(2^{m+1} - k)$  младшие и старшие разряды совпадают, а на позициях между младшим и старшим разрядами стоят противоположные цифры.  $\square$

**Следствие.** Если  $\mu(n) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$  — сокращенная двоичная антизапись числа  $n$ , то

$$L_n = r - \sum_{1 \leq i < j \leq r} 2^{\mu_i - \mu_j}.$$

*Доказательство.* Если два числа симметричны в пачке, то по лемме 2 их константы Лебега совпадают, а согласно утверждению сокращенная двоичная запись одного из них совпадает с сокращенной двоичной антизаписью другого. Данная формула есть формула (3) для числа, симметричного с  $n$  в пачке.  $\square$

Например, так как двоичная запись числа 7920 имеет вид 111011110000, то константу Лебега легче вычислить по формуле, указанной в следствии:  $L_{7920} = 3 - 2^{-4} - 2^{-4} - 2^{-9}$ .

Приведем еще одну формулу (предложенную в [6]) для констант Лебега, которая представляет собой явную запись формулы (6) и вытекает из описания динамической системы. Эта формула доказана (без ссылок на динамическую систему) в [3].

Если  $n = 2^m + \varepsilon_m 2^{m-1} + \dots + \varepsilon_2 2^1 + \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_i$  равно 0 или 1,  $[n]_i = \varepsilon_i 2^{i-1} + \dots + \varepsilon_1$  — срезка числа  $n$ , то

$$L_n = \frac{1}{2^{m+1}} \left( n + (2^{m+1} - n) + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i (\varepsilon_{m-i+1} 2^{m-i} + (-1)^{\varepsilon_{m-i+1}} [n]_{m-i}) + 2^m \varepsilon_1 \right).$$

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения// Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. 1970. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 147–202.
2. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 2000.
3. *Беспалов М. С.* Перестановки системы Уолша, сохраняющие константы Лебега// Мат. заметки. — 2000. — 68, № 1. — С. 36–48.
4. *Беспалов М. С.* Ядро Дирихле для системы Крестенсона—Леви как динамическая система// Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. системам/ Тезисы докладов. — Владимир, 2002. — С. 35–36.
5. *Беспалов М. С.* Константы Лебега для системы Уолша// Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: ДАС, 2001. — 8. — С. 41–42.
6. *Беспалов М. С.* Константы Лебега для перестановок системы Уолша// Алгебра и анализ/ Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева. — Казань, 1997. — С. 33–34.
7. *Fine N. J.* On the Walsh functions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — 65, № 3. — С. 372–414.

М. С. Беспалов

Владимирский государственный университет

E-mail: [bespalov-m2@vpti.vladimir.su](mailto:bespalov-m2@vpti.vladimir.su)

## О КУСОЧНО-МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА ДЕНДРИТАХ

© 2003 г.    **Л. С. ЕФРЕМОВА, Е. Н. МАХРОВА**

Аннотация. Доказаны критерии различения кусочно-монотонных отображений с замкнутым множеством периодических точек, заданных на дендритах с замкнутым множеством точек ветвления конечного порядка. Показано, что топологическая энтропия указанных отображений равна нулю.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .		60
2. Предварительные сведения . . . . .		61
3. Доказательство теоремы 1.1 . . . . .		64
4. Доказательство теоремы 1.2 . . . . .		73
Список литературы . . . . .		75

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию динамических систем на одномерных разветвленных континуумах посвящена обширная литература (см., например, [7–11, 13–16, 18]). Настоящая работа является продолжением статей [2–4, 6, 12]. В ней рассматриваются кусочно-монотонные динамические системы с замкнутым множеством периодических точек, заданные на дендритах.

*Дендритом* называется локально связный континуум (компактное связное метрическое пространство), не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности.

В работе рассмотрен класс  $D$  дендритов, являющийся наиболее естественным обобщением класса конечных деревьев. Будем говорить, что дендрит  $X$  принадлежит классу  $D$ , если выполнены следующие условия:

- 1) множество  $R(X)$  точек ветвления дендрита  $X$  замкнуто;
- 2) порядок  $\text{ord } x$  каждой точки  $x \in R(X)$  конечен.

Примеры дендритов класса  $D$  со счетным множеством точек ветвления имеются в [2, 4, 12].

Сформулируем основные результаты.

**Теорема 1.1.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  — кусочно-монотонное отображение дендрита  $X \in D$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (I) множество  $\text{Per}(f)$  периодических точек  $f$  замкнуто;
- (II)  $\text{Per}(f) = C(f)$ , где  $C(f)$  — центр отображения  $f$ .

Если  $X$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления, то при выполнении дополнительного условия

$$(f^{-i}(\text{Per}(f)) \setminus \text{Per}(f)) \cap R(X) = \emptyset \quad \text{при любом } i \geq 1 \quad (1)$$

каждое из утверждений (I) и (II) эквивалентно следующему предложению:

- (III) для любой точки  $z \in X$   $\omega$ -предельное множество  $\omega(z, f)$  траектории  $\{f^i(z)\}_{i \geq 0}$  есть периодическая орбита.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования России (проект Е 00–1.0–103).

Если  $X$  — конечное дерево, а  $f$  — кусочно-монотонное отображение на нем, то все утверждения теоремы 1.1 эквивалентны без дополнительного условия (1). В то же время, если  $X$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления, а условие (1) не выполнено, то из утверждения (I) не следует справедливость утверждения (III) (см. [12]). Доказательство теоремы 1.1 проводится по следующей схеме: (I)  $\Leftrightarrow$  (II), (I)  $\Leftrightarrow$  (III). Так как  $C(f)$  — замкнутое множество, то необходимо доказать импликации (I)  $\Rightarrow$  (II) (теорема 3.3), (I)  $\Rightarrow$  (III) (теорема 3.10), (III)  $\Rightarrow$  (I) (теорема 3.11).

**Теорема 1.2.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  — кусочно-монотонное отображение дендрита  $X \in D$ ,  $\text{Per}(f)$  замкнуто. Тогда топологическая энтропия  $h(f)$  равна нулю.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1.** Сформулируем основные свойства дендритов [5, § 51, п. 6] и необходимые определения.

Под дугой в дендрите  $X$  будем понимать множество, гомеоморфное замкнутому промежутку на прямой (одноточечное множество будем считать вырожденной дугой). Напомним, что любые две точки  $x, y, x \neq y$ , в дендрите  $X$  можно соединить единственной дугой, имеющей в качестве концов точки  $x$  и  $y$ . В дальнейшем символом  $\gamma(x, y)$  будем обозначать дугу с концами в точках  $x$  и  $y$ , содержащую эти точки, символом  $U(z)$  — окрестность точки  $z$ .

**Определение 2.1.** Пусть  $X$  — произвольный континуум, а  $n$  — порядковое число  $\omega$  множества целых неотрицательных чисел в их естественном порядке. Говорят, что порядок точки  $x \in X$  не превосходит  $n$  ( $\text{ord } x \leq n$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $0 < \delta < \varepsilon$  такое, что  $\text{card}(\partial U_\delta(x)) \leq n$ , где  $\partial(\cdot)$  — граница множества,  $\text{card}(\cdot)$  — мощность множества. Равенство  $\text{ord } x = n$  означает, что  $\text{ord } x \leq n$  и соотношение  $\text{ord } x \leq m$  не имеет места ни при каком  $m < n$ .

**Свойство 2.2** (регулярность). Всякий дендрит  $X$  есть регулярный континуум, т.е. любая точка  $x \in X$  имеет порядок  $\leq \omega$ .

Из свойства 2.2 следует, что каждый подконтинуум дендрита есть дендрит.

**Теорема 2.3.** Пусть дендрит  $X$  содержит более одной точки. Тогда в  $X$  существуют точки первого порядка, называемые концевыми; всюду плотны точки второго порядка; существует не более чем счетное множество точек ветвления (точек порядка, большего 2).

**Теорема 2.4.** Пусть  $X$  — дендрит. Если число компонент множества  $X \setminus \{x\}$  конечно, то оно совпадает с  $\text{ord } x$ .

Из теорем 2.3 и 2.4 следует, что если множество точек ветвления  $R(X)$  дендрита  $X \in D$  не пусто, то  $R(X)$  — разреженное множество, и для любого  $z \in R(X)$  число компонент множества  $X \setminus \{z\}$  совпадает с  $\text{ord } z$ .

Условимся обозначать через  $X_i(z), 1 \leq i \leq \text{ord } z$ , компоненты множества  $X \setminus \{z\}$ .

Нам потребуется также определение монотонного отображения дендрита в себя.

**Определение 2.5** (см. [5, § 46, п. 1]). Пусть  $X$  — дендрит. Отображение  $f : X \rightarrow X$  называется монотонным, если  $f$  непрерывно и полный прообраз произвольного связного подмножества из  $f(X)$  связан.

Условимся обозначать через  $f^{-i}(A), i \geq 1$ ,  $i$ -й полный прообраз произвольного множества  $A \subset f^i(X)$ ; положим  $f^{-0}(A) = A$ .

Исследованию монотонных отображений посвящена работа [4]. Приведем ряд свойств монотонных отображений из [4], которые будут использованы в доказательствах основных результатов данной работы.

Характеристическим свойством монотонных отображений является следующая лемма.

**Лемма 2.6.** Если  $f$  — монотонное отображение дендрита  $X \in D$ , то для любой дуги  $\gamma(x, y) \subset X$  справедливо равенство  $f(\gamma(x, y)) = \gamma(f(x), f(y))$ .

**Лемма 2.7.** Пусть  $f$  — монотонное отображение дендрита  $X \in D$ , последовательность периодических точек  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  такова, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ . Тогда существует последовательность  $\{x_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$ , все точки которой принадлежат одной дуге, причем  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = z^0$ .

**Лемма 2.8.** Пусть  $f$  — монотонное отображение дендрита  $X \in D$ . Тогда для произвольной точки  $z^0 \in \text{Per}(f)$  периода  $t \geq 1$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $0 < \delta = \delta(z^0, \varepsilon) < \varepsilon$  такое, что если  $z \in \text{Per}(f)$  и  $d(z^0, z) < \delta$ , то  $d(f^{mi}(z^0), f^{mi}(z)) < \varepsilon$ , где  $i = 1, 2, \dots$ ;  $d$  — метрика в  $X$ .

**Лемма 2.9.** Пусть  $f$  — монотонное отображение дендрита  $X \in D$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , удовлетворяющее следующему условию: если  $z_1, z_2$  — произвольные периодические точки такие, что  $d(z_1, z_2) < \delta$ , то  $d(f^i(z_1), f^i(z_2)) < \varepsilon$ , для любого  $i \geq 1$ .

Приведем определение кусочно-монотонного отображения дендрита.

**Определение 2.10.** Пусть  $X$  — дендрит. Непрерывное отображение  $f : X \rightarrow X$  называется кусочно-монотонным, если существует непустое конечное множество  $A_f = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$  такое, что для любой компоненты  $C \subset X \setminus A_f$  сужение  $f|_C$  монотонно. Точки множества  $A_f$  называются критическими точками отображения  $f$ .

Отметим, что в любой окрестности произвольной точки множества  $A_f$  нарушается монотонность  $f$ . Обозначим через  $\text{PM}^0(X)$  множество всех кусочно-монотонных отображений дендритов  $X \in D$ . Приведем пример кусочно-монотонного отображения на 3-оде.

**Пример 2.11.** Пусть  $C$  — комплексная плоскость,  $a + bi, c + di$  — произвольные точки из  $C$ . Условимся обозначать  $[a + bi, c + di]$  ( $(a + bi, c + di)$ ) дугу, соединяющую и содержащую (не содержащую) данные точки ( $i$  — мнимая единица).

Зададим на 3-оде

$$Y = \{z \in C : z = |z|e^{i\frac{2\pi}{3}(j-1)}, 0 \leq |z| \leq 1, j = 1, 2, 3\}$$

кусочно-монотонное отображение  $f$ , полагая

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in [0, 1]; \\ -4|z| + 1, & z \in (0, \frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}] \cup (0, \frac{1}{4}e^{i\frac{4\pi}{3}}); \\ e^{i\frac{2\pi}{3}}, & z \in [\frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}]; \\ e^{i\frac{4\pi}{3}}, & z \in [\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}]; \\ (-2|z| + 1)e^{i\frac{2\pi}{3}}, & z \in (\frac{1}{4}e^{i\frac{4\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}); \\ (-2|z| + 1)e^{i\frac{4\pi}{3}}, & z \in (\frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}). \end{cases}$$

Отображение  $f$  непрерывно, а множество критических точек  $A_f = \{0\}$ . Следовательно,  $f \in \text{PM}^0(X)$ .

**2.2.** Укажем основные свойства кусочно монотонных отображений.

Следующая лемма является характеристическим свойством кусочно-монотонных отображений дендритов.

**Лемма 2.12.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $\gamma(x, y)$  — невырожденная дуга. Тогда  $f(\gamma(x, y))$  — конечное дерево.

*Доказательство.* Утверждение справедливо, если  $\gamma(x, y) \cap A_f = \emptyset$ . Рассмотрим случай, когда  $\gamma(x, y) \cap A_f = \{a_{k_1}, \dots, a_{k_s}\}$ , где  $1 \leq s \leq \text{card } A_f$ . Определим  $\varphi$ -порядок на дуге  $\gamma(x, y)$ , задав гомеоморфизм  $\varphi : \gamma(x, y) \rightarrow [0, 1]$  таким образом, чтобы  $\varphi(0) = x$ ,  $\varphi(1) = y$ . Пусть, для определенности,  $a_{k_0} = x \prec_{\varphi} a_{k_1} \prec_{\varphi} \dots \prec_{\varphi} a_{k_s} \prec_{\varphi} y = a_{k_{s+1}}$ . Тогда в силу леммы 2.6  $f(\gamma(a_{k_i}, a_{k_{i+1}})) = \gamma(f(a_{k_i}), f(a_{k_{i+1}}))$ . Поэтому справедливы равенства

$$f(\gamma(x, y)) = \bigcup_{i=0}^s f(\gamma(a_{k_i}, a_{k_{i+1}})) = \bigcup_{i=0}^s \gamma(f(a_{k_i}), f(a_{k_{i+1}})).$$

Так как множество  $f(\gamma(x, y))$  связно, то отсюда следует, что  $f(\gamma(x, y))$  — конечное дерево (возможно, вырождающееся в дугу). Лемма 2.12 доказана.  $\square$

**Следствие 2.13.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $Y$  — конечное дерево. Тогда  $f(Y)$  — конечное дерево.

Приведем пример непрерывного, но не кусочно-монотонного отображения дендрита, не обладающего свойством, указанным в лемме 2.12. Другими словами, без выполнения условия кусочной монотонности отображения  $f$  утверждение леммы 2.12 несправедливо.

**Пример 2.14.** Определим дендрит

$$X = [0, i] \cup [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \cup \bigcup_{k \geq 0} [\frac{1}{2^k}i, \frac{1}{2^k}(1+i)].$$

Множество  $R(X) = \{0\} \cup \bigcup_{k \geq 1} \{\frac{1}{2^{k+1}}i\}$  счетно и замкнуто. Для любой точки  $x \in R(X)$   $\text{ord } x = 3$ .

Следовательно,  $X \in D$ . Опишем построение отображения  $f : X \rightarrow X$ .

Каждый отрезок  $I_k = [\frac{i}{2^k}, \frac{i}{2^{k+1}}]$ ,  $k \geq 0$ , разобьем на три равные части:  $[\frac{1}{2^k}i, \frac{5}{3} \frac{1}{2^{k+1}}i]$ ,  $[\frac{5}{3} \frac{1}{2^{k+1}}i, \frac{4}{3} \frac{1}{2^{k+1}}i]$  и  $[\frac{1}{2^{k+1}} \frac{4}{3}i, \frac{1}{2^{k+1}}i]$ . Средний из них растянем на весь отрезок  $I_k$ , а каждый из оставшихся отобразим на два перпендикулярных отрезка, примыкающих к концевым точкам  $I_k$ , т.е. на каждом отрезке  $I_k$ ,  $k \geq 0$ , задается отображение  $g_k : I_k \rightarrow X$  по следующей формуле:

$$g_k(z) = \begin{cases} 6 \operatorname{Im} z - \frac{5}{2^k} + \frac{1}{2^k}i, & z \in [\frac{1}{2^k}i, \frac{5}{3} \frac{1}{2^{k+1}}i], \\ 3z - \frac{3}{2^{k+1}}, & z \in [\frac{5}{3} \frac{1}{2^{k+1}}i, \frac{4}{3} \frac{1}{2^{k+1}}i], \\ (-6 \operatorname{Im} z + \frac{1}{2^{k-2}}) + \frac{1}{2^k}i, & z \in [\frac{1}{2^{k+1}} \frac{4}{3}i, \frac{1}{2^{k+1}}i]. \end{cases}$$

Определим непрерывное отображение  $f : X \rightarrow X$  по формуле:

$$f(z) = \begin{cases} z, & z \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{2^k}(1+i), & z \in [\frac{1}{2^k}i, \frac{1}{2^k}(1+i)], \quad k \geq 0, \\ g_k(z), & z \in I_k, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Здесь  $f([0, i]) = [0, i] \cup \bigcup_{k \geq 0} [\frac{1}{2^k}i, \frac{1}{2^k}(1+i)]$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления

$R(f([0, i])) = \{\frac{1}{2^k}i\}_{k \geq 2}$ . Множество критических точек  $A_f = \{\frac{i}{2^k}\}_{k \geq 2}$  счетно.

Отсутствие линейного порядка даже на конечных деревьях приводит к свойствам, не наблюдаемым у непрерывного отображения интервала. В частности, выполнение условия  $\gamma(x, y) \subset f(\gamma(x, y))$ , где  $\gamma(x, y)$  — невырожденная дуга, содержащая точки ветвления, не влечет существование неподвижной точки у кусочно-монотонного отображения на дуге  $\gamma(x, y)$ . Так, в примере 2.11 кусочно-монотонное отображение  $f$  обладает следующими свойствами:

- 1) выполнено включение  $[\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}] \subset f([\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}])$ , где  $f([\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}]) = Y$ ,
- 2) дуга  $[\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}]$  не содержит неподвижных точек, хотя содержит периодические точки периода 2.

Справедливо следующее точное утверждение.

**Лемма 2.15.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$  и для некоторой невырожденной дуги  $\gamma(x, y)$  выполнено включение  $\gamma(x, y) \subset f(\gamma(x, y))$ . Тогда  $\gamma(x, y) \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Так как  $\gamma(x, y) \subset f(\gamma(x, y))$ , то

$$X_1 = f^{-1}(x) \cap \gamma(x, y) \neq \emptyset, \quad Y_1 = f^{-1}(y) \cap \gamma(x, y) \neq \emptyset.$$

Утверждение леммы справедливо, если  $x \in X_1$  или  $y \in Y_1$ . Рассмотрим случай, когда  $X_1 \cap \{x\} = \emptyset$  и  $Y_1 \cap \{y\} = \emptyset$ . В силу кусочной монотонности  $f$  множества  $X_1$  и  $Y_1$  состоят из  $k$  и  $m$  попарно непересекающихся замкнутых дуг (возможно вырожденных)  $\{I_i\}_{i \leq k}$ ,  $\{J_j\}_{j \leq m}$  соответственно. Так как  $X_1, Y_1 \subset \gamma(x, y)$ , то найдутся дуги  $I_{i_1} \subset X_1$ ,  $J_{j_1} \subset Y_1$  такие, что разделяющая их дуга (обозначим ее  $\gamma(x_1, y_1)$ ) не содержит точек множества  $X_1 \cup Y_1$ , отличных от  $x_1 \in X_1$ ,  $y_1 \in Y_1$ , т.е.  $\gamma(x_1, y_1) \setminus \{x_1, y_1\} \cap (X_1 \cup Y_1) = \emptyset$ . Так как  $f(\gamma(x_1, y_1))$  связно и  $f(x_1) = x$ ,  $f(y_1) = y$ , то справедливо включение  $\gamma(x_1, y_1) \subset f(\gamma(x_1, y_1))$ . Таким образом, дуга  $\gamma(x_1, y_1)$  удовлетворяет условиям леммы 2.15. Определим непустые множества  $X_2 = f^{-1}(x_1) \cap \gamma(x_1, y_1)$ ,  $Y_2 = f^{-1}(y_1) \cap \gamma(x_1, y_1)$ . Если  $x_1 \in X_2$  или  $y_1 \in Y_2$ , то утверждение леммы справедливо. Пусть  $X_2 \cap \{x_1\} = \emptyset$  и  $Y_2 \cap \{y_1\} = \emptyset$ . Повторим предыдущие рассуждения и определим невырожденную дугу  $\gamma(x_2, y_2) \subset$

$\gamma(x_1, y_1)$  такую, что  $x_2 \in f^{-1}(x_1)$ ,  $y_2 \in f^{-1}(y_1)$ ,  $(\gamma(x_2, y_2) \setminus \{x_2, y_2\}) \cap (X_2 \cup Y_2) = \emptyset$ , и  $f(\gamma(x_2, y_2)) \supset \gamma(x_2, y_2)$ . Предположим, что проделано  $n$  шагов ( $n \geq 2$ ) и построена совокупность замкнутых дуг  $\gamma(x, y) \supset \gamma(x_1, y_1) \supset \dots \supset \gamma(x_n, y_n)$  таких, что при любом  $1 \leq i \leq n$   $\gamma(x_i, y_i) \setminus \{x_i, y_i\} \cap \{f^{-1}(x_{i-1}) \cup f^{-1}(y_{i-1})\} = \emptyset$ , и  $f(x_i) = x_{i-1}$ ,  $f(y_i) = y_{i-1}$ .

Опишем  $(n+1)$ -й шаг. Положим  $X_{n+1} = f^{-1}(x_n) \cap \gamma(x_n, y_n)$ ,  $Y_{n+1} = f^{-1}(y_n) \cap \gamma(x_n, y_n)$ . Утверждение леммы справедливо, если  $x_n \in X_{n+1}$  или  $y_n \in Y_{n+1}$ . Пусть  $X_{n+1} \cap \{x_n\} = \emptyset$  и  $Y_{n+1} \cap \{y_n\} = \emptyset$ . Так как  $X_{n+1}, Y_{n+1} \subset \gamma(x_n, y_n)$ , то найдутся дуги  $I_{n+1} \subset X_{n+1}$ ,  $J_{n+1} \subset Y_{n+1}$  такие, что разделяющая их дуга (обозначим ее  $\gamma(x_{n+1}, y_{n+1})$ ) не содержит точек множества  $X_{n+1} \cup Y_{n+1}$ , отличных от  $x_{n+1} \in X_{n+1}$ , и  $y_{n+1} \in Y_{n+1}$ , т.е.  $(\gamma(x_{n+1}, y_{n+1}) \setminus \{x_{n+1}, y_{n+1}\}) \cap (X_{n+1} \cup Y_{n+1}) = \emptyset$  и т. д.

Таким образом, построена последовательность замкнутых вложенных дуг

$$\gamma(x, y) \supset \gamma(x_1, y_1) \supset \dots \supset \gamma(x_i, y_i) \supset \dots \quad (2)$$

таких, что при любом  $i \geq 2$

$$f(x_i) = x_{i-1}, \quad f(y_i) = y_{i-1}, \\ (\gamma(x_i, y_i) \setminus \{x_i, y_i\}) \cap (f^{-1}(x_{i-1}) \cup f^{-1}(y_{i-1})) = \emptyset.$$

В силу принципа Кантора существует непустая замкнутая дуга (возможно, вырожденная)  $\gamma(a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma(x_n, y_n)$ . Убедимся, что множество  $\{a, b\}$  инвариантно. Действительно, в силу включений (2) предельными точками множества  $\{x_n\}_{n \geq 1} \cup \{y_n\}_{n \geq 1}$  являются только точки  $a, b$ . Предположим для определенности, что точка  $a$  является одной из предельных точек (возможно, единственной) последовательности  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ , и выберем подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$ , сходящуюся к  $a$ . Тогда  $f(a) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k - 1}$ ,  $n_k > 1$ . Так как множество предельных точек последовательности  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  может содержать и точку  $b$ , то либо  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k - 1} = a$ , либо  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k - 1} = b$ . Таким образом,  $f(a) \in \{a, b\}$ . Аналогично,  $f(b) \in \{a, b\}$ . Отсюда следует, что  $\{a, b\} \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$ . Лемма 2.15 доказана.  $\square$

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Начнем с доказательства эквивалентности утверждений (I) и (II), причем покажем, что данные утверждения эквивалентны без дополнительного предположения о кусочной монотонности отображения  $f$ . Для полноты изложения приведем следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 3.1.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение дендрита  $X \in D$  и существует невырожденная дуга  $\gamma(x, y) \subset X$  такая, что  $\gamma(x, y) \cap R(X) = \emptyset$  и  $\gamma(x, y) \cap \gamma(f(x), f(y)) \neq \emptyset$ . Тогда  $\gamma(x, y) \cup \gamma(f(x), f(y))$  — дуга.

*Доказательство.* Так как  $\gamma(x, y) \cap \gamma(f(x), f(y)) \neq \emptyset$ , то возможны следующие три случая:

- (i) одна из двух дуг содержит другую;
- (ii) последнее пересечение есть одноточечное множество, т.е. дуги  $\gamma(x, y)$ ,  $\gamma(f(x), f(y))$  имеют один общий конец;
- (iii) последнее пересечение есть невырожденная дуга, но не выполнено условие (i).

В первых двух случаях утверждение леммы очевидно. Рассмотрим третий случай. Тогда внутренность каждой дуги содержит по одному концу соседней. Пусть, для определенности,  $f(x) \in \gamma(x, y)$  и  $y \in \gamma(f(x), f(y))$ . Тогда  $\gamma(x, y) \cup \gamma(f(x), f(y)) = \gamma(x, f(x)) \cup \gamma(f(x), y) \cup \gamma(y, f(y))$ , причем  $\gamma(x, f(x)) \cap \gamma(f(x), y) = \{f(x)\}$ ,  $\gamma(f(x), y) \cap \gamma(y, f(y)) = \{y\}$ . Отсюда следует, что  $\gamma(x, y) \cup \gamma(f(x), f(y))$  — дуга. Лемма 3.1 доказана.  $\square$

Пусть выполнены условия леммы 3.1. Обозначим  $\gamma(\alpha, \beta) = \gamma(x, y) \cup \gamma(f(x), f(y))$  и определим  $\varphi$ -порядок на  $\gamma(\alpha, \beta)$ , задав гомеоморфизм  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \gamma(\alpha, \beta)$  так, что  $\varphi(0) = \alpha$ ,  $\varphi(1) = \beta$ . Пусть  $z_1, z_2$  — различные точки из  $\gamma(\alpha, \beta)$ . Следуя [2], будем говорить, что  $z_1 \prec_{\varphi} z_2$  ( $\varphi$ -предшествует), если  $\varphi^{-1}(z_1) < \varphi^{-1}(z_2)$ , где  $<$  — естественный порядок на отрезке  $[0, 1]$ .

Обозначим через  $\text{Fix}(f)$  множество неподвижных точек. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.2.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение дендрита  $X \in D$  и существует невырожденная дуга  $\gamma(x, y) \subset X$  такая, что  $\gamma(x, y) \cap R(X) = \emptyset$  и  $\gamma(x, y) \cap \gamma(f(x), f(y)) \neq \emptyset$ . Тогда если  $x \prec_\varphi f(x)$ , а  $f(y) \prec_\varphi y$ , то  $\gamma(x, y) \cap \text{Fix}(f) \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Поскольку  $f(\gamma(x, y))$  — связное подмножество  $X$ , то существуют точки  $x_1, y_1 \in \gamma(x, y)$  такие, что  $x_1 \prec_\varphi f(x_1)$ ,  $f(y_1) \prec_\varphi y_1$  и  $f(x_1), f(y_1) \in \gamma(x, y)$ . По непрерывности  $f$  найдутся точки  $x_2, y_2 \in \gamma(x_1, y_1)$  такие, что  $x_2 \prec_\varphi f(x_2)$ ,  $f(y_2) \prec_\varphi y_2$  и  $f(\gamma(x_2, y_2)) \subset \gamma(x, y)$ . В силу [17, лемма 1.2a]  $\gamma(x_2, y_2) \cap \text{Fix}(f) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $\gamma(x, y) \cap \text{Fix}(f) \neq \emptyset$ . Лемма 3.2 доказана.  $\square$

Перейдем к изучению структуры центра произвольного непрерывного отображения с замкнутым множеством периодических точек. Обозначим через  $\text{Pois}(f)$  множество точек, устойчивых по Пуассону.

**Теорема 3.3.** Пусть  $f : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение дендрита  $X \in D$ ,  $\text{Per}(f)$  замкнуто. Тогда  $C(f) = \text{Per}(f)$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $\text{Pois}(f) \subset \text{Per}(f)$ . Предположим противное. Тогда существует точка  $z \in \text{Pois}(f) \setminus \text{Per}(f)$ . Покажем, что найдется натуральное  $n_0 \geq 1$  такое, что  $f^{n_0}(z) \notin R(X)$ . Действительно, в противном случае для траектории точки  $z$  справедливо включение  $\{f^n(z)\}_{n \geq 1} \subset R(X)$ . Так как  $R(X)$  замкнуто, то получаем, что  $\overline{\{f^n(z)\}_{n \geq 1}} \subset R(X)$ , т.е. множество  $R(X)$  имеет мощность континуума. Последнее противоречит теореме 2.3. Таким образом, найдется натуральное  $n_0 \geq 1$  такое, что  $f^{n_0}(z) \notin R(X)$ . Положим  $y = f^{n_0}(z)$ . Так как множество  $\text{Per}(f) \cup R(X)$  замкнуто, то существует окрестность  $U(y)$  точки  $y$  такая, что  $U(y) \cap (\text{Per}(f) \cup R(X)) = \emptyset$ . Так как  $y \in \text{Pois}(f) \setminus \text{Per}(f)$ , то существует натуральное  $j \geq 1$  такое, что  $f^j(y) \in U(y)$ . Положим  $g = f^j$ . Тогда  $g(\gamma(y, g(y))) \supset \gamma(g^2(y), g(y))$ . Следовательно,  $\gamma(y, g(y)) \cap \gamma(g^2(y), g(y)) \neq \emptyset$ . Поскольку  $\gamma(y, g(y)) \cap R(X) = \emptyset$ , то в силу леммы 3.1  $\gamma(y, g(y)) \cup \gamma(g(y), g^2(y))$  — дуга. Введем  $\varphi$ -порядок на дуге  $\gamma(\alpha, \beta) = \gamma(y, g(y)) \cup \gamma(g(y), g^2(y))$  так, что  $\varphi(0) = \alpha$ ,  $\varphi(1) = \beta$ . Так как точки  $y, g(y), g^2(y) \in \gamma(\alpha, \beta)$ , то возможны следующие случаи:

- 1)  $y \prec_\varphi g^2(y) \prec_\varphi g(y)$ ;
- 2)  $g^2(y) \prec_\varphi y \prec_\varphi g(y)$ ;
- 3)  $y \prec_\varphi g(y) \prec_\varphi g^2(y)$ ;
- 4)  $g(y) \prec_\varphi g^2(y) \prec_\varphi y$ ;
- 5)  $g(y) \prec_\varphi y \prec_\varphi g^2(y)$ ;
- 6)  $g^2(y) \prec_\varphi g(y) \prec_\varphi y$ .

Случаи 4)–6) сводятся к ситуациям 1)–3) соответственно, стоит лишь задать  $\varphi$ -порядок на дуге  $\gamma(\alpha, \beta)$  таким образом, чтобы  $\varphi(0) = \beta$ ,  $\varphi(1) = \alpha$ . Поэтому рассмотрим случаи 1)–3).

Если имеет место случай 1) или 2), то выполнено условие  $y \prec_\varphi g(y)$ ,  $g(g(y)) \prec_\varphi g(y)$ . Поэтому в силу леммы 3.2  $\gamma(y, g(y)) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$ . Так как  $\gamma(y, g(y)) \subset U(y)$ , то  $U(y) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $U(y) \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$ . Полученное противоречие с выбором окрестности  $U(y)$  исключает первые два случая.

Пусть имеет место случай 3). Тогда  $g^2(y)$  принадлежит компоненте  $X_{s_1}(g(y))$  точки  $g(y)$  ( $1 \leq s_1 \leq 2$ ), не содержащей точку  $y$ . Поскольку  $y \in \text{Pois}(g)$ ,  $g^2(y) \in X_{s_1}(g(y))$ , а  $y \notin \overline{X_{s_1}(g(y))}$ , то существует натуральное  $n \geq 3$  такое, что  $g^{n-1}(y) \in X_{s_1}(g(y))$ , а  $g^n(y) \notin \overline{X_{s_1}(g(y))}$ . Тогда  $g^{n-1}(\gamma(y, g(y))) \cap \gamma(y, g(y)) \neq \emptyset$  и, следовательно,  $g^{n-1}(\gamma(y, g(y))) \cup \gamma(y, g(y))$  — дуга. Положим  $\gamma(\alpha, \beta) = g^{n-1}(\gamma(y, g(y))) \cup \gamma(y, g(y))$ . Введем  $\varphi$ -порядок на дуге  $\gamma(\alpha, \beta)$  так, что  $\varphi(0) = \alpha$ ,  $\varphi(1) = \beta$ . Тогда выполнено условие  $y \prec_\varphi g^{n-1}(y)$ ,  $g^{n-1}(g(y)) \prec_\varphi g(y)$ . В силу леммы 3.2  $\gamma(y, g(y)) \cap \text{Fix}(g^{n-1}) \neq \emptyset$ . Последнее противоречит выбору окрестности  $U(y)$  точки  $y$ . Таким образом, сделанное предположение неверно, и  $\text{Pois}(f) \subset \text{Per}(f)$ . Следовательно, выполнено включение  $C(f) = \overline{\text{Pois}(f)} \subset \overline{\text{Per}(f)} = \text{Per}(f) \subset C(f)$ . Теорема 3.3 доказана.  $\square$

Заметим, что замкнутость множества  $C(f)$  влечет за собой эквивалентность утверждений (I) и (II) теоремы 1.1.

Перейдем к доказательству эквивалентности утверждений (I), (III). Начнем с доказательств технических лемм 3.4 и 3.5.

**Лемма 3.4.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $z^0 \in \text{Per}(f)$ ,  $m \geq 1$  — период  $z^0$ ; окрестность  $U(z^0)$  точки  $z^0$  и последовательность точек  $\{z_j\}_{j \geq 1} \subset U(z^0)$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1) все точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  принадлежат одной компоненте точки  $z^0$ , и  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ ;
- 2) для каждого  $j \geq 1$  существует натуральное число  $k_j$  такое, что  $f^{k_j}(z_j) \notin U(z^0)$ .

Тогда найдутся натуральное число  $i_0$ , компонента  $X_{s_1}(z^0)$  точки  $z^0$ , содержащая последовательность  $\{f^{m i_1}(z_j)\}_{j \geq j_0}$  при некоторых  $0 \leq i_1 \leq \text{ord } z^0$  и  $j_0 \geq 1$ , и окрестность  $U_1(z^0)$  точки  $z^0$  такие, что отображение  $f^{m i_0}$  монотонно в  $U_1(z^0) \setminus \{z^0\}$ , и выполнено включение

$$f^{m i_0}(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0). \quad (3)$$

*Доказательство.* Положим  $g = f^m$ . Так как множество критических точек произвольной итерации  $g$  конечно, то существует окрестность  $U^*(z^0) \subset U(z^0)$ , удовлетворяющая условию  $(U^*(z^0) \setminus \{z^0\}) \cap A_{g^i} = \emptyset$  при любом  $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$ . Используя непрерывность отображения  $g$ , выберем окрестность  $U_1(z^0) \subset U^*(z^0)$  такую, что  $g^i(U_1(z^0)) \subset U^*(z^0)$  при всех  $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$ . Из условия 1) леммы 3.4 следует существование натурального  $j_0 \geq 1$  такого, что при любом  $j \geq j_0$  имеем  $z_j \in U_1(z^0)$ . Обозначим  $X_{s_2}(z^0)$  компоненту точки  $z^0$ , содержащую точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$ . Покажем, что

$$g^i(X_{s_2}(z^0) \cap U_1(z^0)) \cap \{z^0\} = \emptyset \quad \text{при любом } 1 \leq i \leq \text{ord } z^0. \quad (4)$$

Предположим противное. Тогда для некоторого  $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$  существует точка  $x \in X_{s_2}(z^0) \cap U_1(z^0)$  такая, что  $g^i(x) = z^0$ . В силу выбора окрестности  $U^*(z^0)$  отображение  $g^i|_{\gamma(z^0, x)}$  монотонно. Следовательно,  $g^i(\gamma(z^0, x)) = z^0$ . Если существует хотя бы одна точка  $z_j \in \gamma(z^0, x)$ , то из предыдущего равенства следует, что  $g^i(z_j) = z^0$ . Последнее противоречит условию 2) леммы 3.4. Рассмотрим случай, когда для любого  $j \geq j_0$   $z_j \notin \gamma(z^0, x)$ . Тогда начиная с некоторого номера  $j_1$  ( $j_1 \geq j_0$ ), для каждого  $j \geq j_1$  существует точка ветвления  $x_j \in \gamma(z^0, x) \setminus \{z^0, x\}$  такая, что  $x_j \in \gamma(z^0, z_j)$ . Из условия 1) леммы 3.4 следует, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = z^0$ . Так как множество  $\{x_j\}_{j \geq 1}$  счетно, выберем подпоследовательность  $\{x_{j_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_j\}_{j \geq j_1}$  такую, что для различных  $k$  и  $s$   $x_{j_s} \neq x_{j_k}$ . Поскольку  $g^i(z_{j_k}) \neq z^0$ ,  $\text{ord } z^0$  конечен, то существуют различные  $k$  и  $s$  такие, что точки  $g^i(z_{j_k}), g^i(z_{j_s})$  принадлежат одной компоненте точки  $z^0$ . Тогда  $\gamma(x_{j_k}, z_{j_k}) \cap \gamma(x_{j_s}, z_{j_s}) = \emptyset$ , а  $g^i(\gamma(x_{j_k}, z_{j_k})) \cap g^i(\gamma(x_{j_s}, z_{j_s})) \neq \emptyset$ . Отсюда получаем, что прообраз любой дуги из  $\gamma(x_{j_k}, z_{j_k}) \cap \gamma(x_{j_s}, z_{j_s})$  несвязен. Последнее противоречит выбору окрестности  $U^*(z^0)$  точки  $z^0$ . Таким образом, сделанное предположение не верно, и равенство (4) доказано.

Из (4) следует, что для любого  $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$   $g^i(X_{s_2}(z^0) \cap U_1(z^0))$  принадлежит некоторой компоненте точки  $z^0$ . Так как  $\text{ord } z^0$  конечен, то существуют целые положительные  $0 \leq i_1 < i_2 \leq \text{ord } z^0$  и компонента  $X_{s_1}(z^0)$  точки  $z^0$  такие, что  $g^{i_1}(X_{s_2}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0)$ ,  $g^{i_2}(X_{s_2}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0)$ . Отсюда получаем, что  $\{g^{i_1}(z_j)\}_{j \geq j_0} \subset X_{s_1}(z^0)$ , и  $g^{i_2 - i_1}(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0)$ . Положим  $i_0 = i_2 - i_1$ . Тогда справедливо включение (3). Так как  $1 \leq i_0 \leq \text{ord } z^0$ , то в силу выбора окрестности  $U^*(z^0)$   $f^{m i_0}$  монотонно в  $U_1(z^0) \setminus \{z^0\}$ . Таким образом, лемма 3.4 доказана.  $\square$

Положим  $U(\text{Orb}(z^0, f)) = \bigcup_{i=0}^{m-1} U(z^i)$ , где для различных  $0 \leq i, j \leq m-1$  имеем  $U(z^i) \cap U(z^j) = \emptyset$ .

**Лемма 3.5.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $z^0 \in \text{Per}(f)$ ,  $m \geq 1$  — период  $z^0$ ; окрестность  $U(\text{Orb}(z^0, f))$  периодической орбиты точки  $z^0$  и последовательность точек  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ ;
- 2) для любого  $j \geq 1$  существует натуральное  $k_j \geq 1$  такое, что  $f^{k_j}(z_j) \notin U(\text{Orb}(z^0, f))$ .

Тогда для любого  $i$  существует окрестность  $U_1(\text{Orb}(z^0, f))$  периодической орбиты точки  $z^0$  и для каждого  $z_j \in U_1(\text{Orb}(z^0, f))$  существует натуральное число  $\bar{k}_j$  такое, что  $f^{i \bar{k}_j}(z_j) \notin U_1(\text{Orb}(z^0, f))$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольно и зафиксируем натуральное  $i$ . Положим  $\tau = f^i$ . По непрерывности  $\tau$  выберем окрестность  $U_1(\text{Orb}(z^0, f)) \subset U(\text{Orb}(z^0, f))$ , удовлетворяющую условию  $\tau^k(U_1(\text{Orb}(z^0, f))) \subset U(\text{Orb}(z^0, f))$ , при  $1 \leq k \leq i-1$ . Из условия 1) леммы 3.5 следует существование натурального  $j_0 \geq 1$  такого, что при любом  $j \geq j_0$   $z_j \in U_1(\text{Orb}(z^0, f))$ . Покажем, что для каждого  $j \geq j_0$  существует натуральное  $\bar{k}_j \geq 1$  такое, что  $\tau^{\bar{k}_j}(z_j) \notin U_1(\text{Orb}(z^0, f))$ .

Предположим противное. Тогда при любом  $k \geq 1$   $\tau^k(z_j) \in U_1(\text{Orb}(z^0, f))$ . Покажем, что в этом случае  $\{f^k(z_j)\}_{k \geq 1} \subset U(\text{Orb}(z^0, f))$ . Возьмем произвольно и зафиксируем натуральное число  $k_0$ . Его можно представить в виде  $k_0 = iq + r$ , где  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r \leq i-1$ . Тогда  $f^{k_0}(z_j) = f^r(f^{iq}(z_j))$ . Если  $q \geq 1$ , то, согласно сделанному предположению,  $f^{iq}(z_j) = \tau^q(z_j) \in U_1(\text{Orb}(z^0, f))$ . Так как  $0 \leq r \leq i-1$ , то в силу выбора окрестности  $U_1(\text{Orb}(z^0, f))$   $f^r(f^{iq}(z_j)) \in U(\text{Orb}(z^0, f))$ . Так как  $k_0$  — произвольное натуральное число, то отсюда следует, что  $\{f^k(z_j)\}_{k \geq 1} \subset U(\text{Orb}(z^0, f))$ . Последнее противоречит условию 2) леммы 3.5. Таким образом, для данного  $i$  существует окрестность  $U_1(\text{Orb}(z^0, f))$  и для любой точки  $z_j \in U_1(\text{Orb}(z^0, f))$  найдется натуральное  $\bar{k}_j$  такое, что  $\tau^{\bar{k}_j}(z_j) = f^{i\bar{k}_j}(z_j) \notin U_1(\text{Orb}(z^0, f))$ . Лемма 3.5 доказана.  $\square$

Важную роль в доказательстве утверждений теоремы 1.1 играет следующая лемма.

**Лемма 3.6.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $z^0 \in \text{Fix}(f)$ . Окрестность  $U(z^0)$  точки  $z^0$  и последовательность точек  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ ;
- 2) для любого  $j \geq 1$  существуют натуральные  $k_j \geq 1$  и  $n_j > k_j$  такие, что  $f^{k_j}(z_j) \notin U(z^0)$ , а  $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(z_j) = z^0$ ;
- 3) точки последовательностей  $\{z_j\}_{j \geq 1}$ ,  $\{f^{n_j}(z_j)\}_{j \geq 1}$  принадлежат одной и той же компоненте точки  $z^0$ .

Тогда существуют точка  $\alpha \neq z^0$  и для каждого  $j \geq 1$  натуральное число  $l_j$  ( $k_j \leq l_j < n_j$ ) такие, что  $\alpha$  — предельная точка последовательности  $\{f^{l_j}(z_j)\}_{j \geq 1}$  и  $f(\alpha) = z^0$ .

*Доказательство.* Согласно утверждению леммы 3.4, существуют натуральное  $i_0 \geq 1$ , компонента  $X_{s_1}(z^0)$  точки  $z^0$ , содержащая последовательность  $\{f^{i_1}(z_j)\}_{j \geq j_0}$  при некоторых  $0 \leq i_1 \leq \text{ord } z^0$  и  $j_0 \geq 1$ , и окрестность  $U_1(z^0)$  точки  $z^0$  такие, что  $f^{i_0}$  монотонно в  $U_1(z^0) \setminus \{z^0\}$ , и выполнено включение  $f^{i_0}(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0)$ . Положим  $x_j = f^{i_1}(z_j)$ ,  $\tau = f^{i_0}$ . Тогда  $x_j \in X_{s_1}(z^0)$ , и

$$\tau(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0). \quad (5)$$

В силу леммы 3.5 для данного отображения  $\tau$  существуют окрестность  $U_2(z^0) \subset U_1(z^0)$  и для каждой точки  $x_j \in U_2(z^0)$  — натуральное  $\bar{k}_j$  такое, что  $\tau^{\bar{k}_j}(x_j) \notin U_2(z^0)$ . Из условия 3) леммы 3.6 следует, что  $\{f^{i_1}(f^{n_j}(z_j))\}_{j \geq 1} \subset X_{s_1}(z^0)$ . В силу включения (5) и непрерывности  $f$  для любого  $i \geq 1$   $\lim_{j \rightarrow \infty} f^i(f^{i_1+n_j}(z_j)) = z^0$ . Отсюда получаем, что существует натуральное число  $\bar{n}_j$  ( $\bar{n}_j > \bar{k}_j$ ) такое, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{\bar{n}_j}(x_j) = z^0$ , причем  $\tau^{\bar{n}_j}(x_j) \in X_{s_1}(z^0)$ . Выберем натуральное  $j_1 \geq 1$  такое, что

для любого  $j \geq j_1$   $x_j, \tau^{\bar{n}_j}(x_j) \in U_2(z^0)$ . Тогда для каждого  $j \geq j_1$  существует натуральное  $r_j$  ( $\bar{k}_j + 1 \leq r_j \leq \bar{n}_j$ ) такое, что  $\tau^{r_j-1}(x_j) \notin X_{s_1}(z^0) \cap U_2(z^0)$ , а  $\{\tau^{r_j}(x_j), \dots, \tau^{\bar{n}_j}(x_j)\} \subset X_{s_1}(z^0) \cap U_2(z^0)$ . В силу монотонности  $\tau$  в  $X_{s_1}(z^0) \cap U_2(z^0)$ , включения (5) и условия  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{\bar{n}_j}(x_j) = z^0$

справедливо предельное равенство  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{r_j}(x_j) = z^0$ . Возможно, что множество предельных точек последовательности  $\{\tau^{r_j-1}(x_j)\}_{j \geq j_0}$  содержит точку  $\beta$ , отличную от  $z^0$ . Тогда по непрерывности  $\tau$   $\tau(\beta) = z^0$ . Положим  $\alpha = f^{i_0-1}(\beta)$ ,  $l_j = i_0(r_j - 1) + i_1$ . Тогда  $f(\alpha) = z^0$ , и в этом случае справедливо утверждение леммы 3.6.

Рассмотрим случай, когда  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{r_j-1}(x_j) = z^0$ . Тогда существует компонента  $X_{s_2}(z^0)$  точки  $z^0$ ,  $s_2 \neq s_1$  ( $1 \leq s_2 \leq \text{ord } z^0$ ), содержащая некоторую подпоследовательность из  $\{\tau^{r_j-1}(x_j)\}_{j \geq 1}$ . Во избежание двойных индексов будем считать, что все точки последовательности  $\{\tau^{r_j-1}(x_j)\}_{j \geq 1}$  принадлежат компоненте  $X_{s_2}(z^0)$ . Тогда, используя монотонность  $\tau$  в  $U_1(z^0) \setminus \{z^0\}$  и включение

$\{\tau^{r_j}(x_j)\}_{j \geq j_1} \subset X_{s_1}(z^0)$ , получаем

$$\tau(X_{s_2}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0). \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что для каждого  $j \geq j_0$   $\tau^{r_j-2}(x_j) \notin (X_{s_1}(z^0) \cup X_{s_2}(z^0)) \cap U_1(z^0)$ . Если множество предельных точек последовательности  $\{\tau^{r_j-2}(x_j)\}_{j \geq j_0}$  содержит хотя бы одну точку, отличную от  $z^0$ , то лемма 3.6 доказана. В противном случае существует компонента  $X_{s_3}(z^0)$  точки  $z^0$ ,  $s_3 \notin \{s_1, s_2\}$  ( $1 \leq s_3 \leq \text{ord } z^0$ ), содержащая некоторую подпоследовательность из  $\{\tau^{r_j-2}(x_j)\}_{j \geq 1}$ . Во избежание двойных индексов будем считать, что все точки последовательности  $\{\tau^{r_j-2}(x_j)\}_{j \geq 1}$  принадлежат компоненте  $X_{s_3}(z^0)$ . Тогда справедливо включение

$$\tau(X_{s_3}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_2}(z^0). \quad (7)$$

Так как  $\text{ord } z^0$  конечен, то из предыдущих рассуждений следует, что при некотором  $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$  последовательность  $\{\tau^{r_j-i}(x_j)\}_{j \geq 1}$  имеет предельную точку, отличную от  $z^0$ . Лемма 3.6 доказана.  $\square$

Заметим, что из условий леммы 3.6 не следует незамкнутость множества  $\text{Per}(f)$ . Более того, существуют дендрит  $X \in D$  и кусочно-монотонное отображение на нем с замкнутым множеством периодических точек, которое удовлетворяет условиям леммы 3.6 [12]. Но если точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  лежат на одной дуге, то выполнение условий леммы 3.6 влечет незамкнутость множества периодических точек. Этот случай, в частности, рассмотрен в лемме 3.8, для доказательства которой нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 3.7.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $\text{Per}(f)$  замкнуто, существует последовательность  $\{z_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$ , все точки которой лежат на одной дуге, и  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ . Тогда множество (наименьших) периодов  $\{m(z_j)\}_{j \geq 1}$  точек  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  ограничено.

*Доказательство.* В силу замкнутости  $\text{Per}(f)$   $z^0 \in \text{Per}(f)$  ( $m \geq 1$  — ее период). Положим  $g = f^m$ . Выберем окрестность  $U(z^0)$  точки  $z^0$  таким образом, чтобы

$$(U(z^0) \setminus \{z^0\}) \cap A_g = \emptyset. \quad (8)$$

1. Покажем, что существует натуральное число  $j_0 \geq 1$  такое, что при любом  $j \geq j_0$   $\{g^i(z_j)\}_{i \geq 1} \subset U(z^0)$ . Действительно, в противном случае найдутся подпоследовательность  $\{z_{j_s}\}_{s \geq 1} \subset \{z_j\}_{j \geq 1} \cap U(z^0)$  и при любом  $s \geq 1$  натуральное число  $k_s \geq 1$  такие, что  $g^{k_s}(z_{j_s}) \notin U(z^0)$ . Положим  $n_s = m(z_{j_s})$ , где  $m(z_{j_s})$  — период точки  $z_{j_s}$ ,  $s \geq 1$ . Тогда  $n_s > k_s$ , и  $g^{n_s}(z_{j_s}) = z_{j_s}$ . Таким образом, выполнены условия леммы 3.6, откуда следует существование точки  $\alpha \neq z^0$ , являющейся предельной для некоторой последовательности периодических точек, и  $g(\alpha) = z^0$ . Так как  $z^0 \in \text{Fix}(g)$ , то  $\alpha \notin \text{Per}(g)$ . Полученное противоречие с замкнутостью  $\text{Per}(f)$  доказывает существование натурального  $j_0 \geq 1$  такого, что при любом  $j \geq j_0$   $\{g^i(z_j)\}_{i \geq 1} \subset U(z^0)$ .

2. Положим  $Y = \bigcup_{i=1}^{m(z_{j_0})} \gamma(z^0, g^i(z_{j_0}))$ . Согласно п. 1,  $Y \subset U(z^0)$ . Поэтому в силу выбора окрестности  $U(z^0)$ ,  $g|_Y$  монотонно. Поскольку концевыми точками  $Y$  являются точки периодической орбиты, то  $g(Y) = Y$ . В силу [4, теорема В] множество периодических точек отображения  $g : Y \rightarrow Y$  замкнуто. Так как точки  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  принадлежат одной дуге и для любого  $j \geq j_0$   $z_j \in Y$ , то существует дуга  $\gamma(a, b) \subset Y$  такая, что  $a, b \in \text{Per}(g)$  и  $\{z_j\}_{j \geq j_0} \subset \gamma(a, b)$ . В силу леммы 2.6  $g^m(\gamma(a, b)) = \gamma(a, b)$ , где  $m$  — наименьшее общее кратное периодов точек  $a$  и  $b$ . Отсюда следует, что множество периодов  $\{m(z_j)\}_{j \geq j_0}$  точек  $\{z_j\}_{j \geq j_0}$  ограничено. Лемма 3.7 доказана.  $\square$

**Лемма 3.8.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $z^0 \in \text{Fix}(f)$ ; окрестность  $U(z^0)$  точки  $z^0$  и последовательность точек  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1) все точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  лежат на одной дуге и  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ ;
- 2) для любого  $j \geq 1$  существуют натуральные числа  $k_j \geq 1$  и  $n_j > k_j$  такие, что  $f^{k_j}(z_j) \notin U(z^0)$ , а  $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(z_j) = z^0$ .

Тогда множество  $\text{Per}(f)$  незамкнуто.

*Доказательство.* 1. Так как  $\text{ord } z^0$  конечен, то существует компонента точки  $z^0$ , содержащая счетное число попарно различных точек последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$ . Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что все точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  лежат на одной компоненте точки  $z^0$ . Согласно утверждению леммы 3.4, существуют натуральное  $i_0 \geq 1$ , компонента  $X_{s_1}(z^0)$  точки  $z^0$ , содержащая последовательность  $\{f^{i_1}(z_j)\}_{j \geq j_0}$  при некоторых  $0 \leq i_1 \leq \text{ord } z^0$  и  $j_0 \geq 1$ , и окрестность  $U_1(z^0)$  точки  $z^0$  такие, что  $f^{i_0}$  монотонно в  $U_1(z^0) \setminus \{z^0\}$ , и выполнено включение  $f^{i_0}(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0)$ . Положим  $x_j = f^{i_1}(z_j)$ ,  $\tau = f^{i_0}$ . Тогда  $x_j \in X_{s_1}(z^0)$ , и

$$f^{i_0}(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0). \quad (9)$$

В силу леммы 3.5 для отображения  $\tau$  существуют окрестность  $U_2(z^0)$  точки  $z^0$  и для любого  $x_j \in U_2(z^0)$  натуральное число  $\bar{k}_j$  такое, что  $\tau^{\bar{k}_j}(x_j) \notin U_2(z^0)$ . Из условия 2) леммы 3.8 и непрерывности  $f$  следует существование натурального  $\bar{n}_j > \bar{k}_j$  такого, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{\bar{n}_j}(x_j) = z^0$ . Выберем натуральное число  $j_0$  такое, что при любом  $j \geq j_0$   $x_j, \tau^{\bar{n}_j}(x_j) \in U_2(z^0)$ . Из включения (9) следует, что для каждого  $j \geq j_0$  найдется натуральное число  $k_j^*$  ( $k_j^* \leq \bar{k}_j$ ) такое, что  $\tau^{k_j^*}(x_j) \in X_{s_1}(z^0) \setminus U_2(z^0)$ . Тогда найдется натуральное  $r_j$  ( $k_j + 1 \leq r_j \leq \bar{n}_j$ ) такое, что  $\tau^{r_j-1}(x_j) \in X_{s_1}(z^0) \setminus U_2(z^0)$ , а  $\{\tau^{r_j}(x_j), \dots, \tau^{\bar{n}_j}(x_j)\} \cap (X_{s_1}(z^0) \setminus U_2(z^0)) = \emptyset$ .

2. В силу (9)  $\gamma(z^0, x_{j_0}) \cap \tau(\gamma(z^0, x_{j_0}))$  есть невырожденная дуга; обозначим ее  $\gamma(z^0, x)$ . Заметим, что для любого  $j \geq j_0$

$$\gamma(z^0, x) \subset \gamma(z^0, \tau^{r_j-1}(x_j)). \quad (10)$$

Покажем, что на дуге  $\gamma(z^0, x)$  не существует дуг, инвариантных относительно  $\tau$ , одним из концов которых является точка  $z^0$ . Действительно, в противном случае для некоторой инвариантной дуги  $\gamma(z^0, y) \subset \gamma(z^0, x)$  и любой точки  $x_j \in \gamma(z^0, y)$  справедливо включение  $\{\tau^i(x_j)\}_{i \geq 1} \subset \gamma(z^0, y)$ . Так как  $\gamma(z^0, y) \subset U_2(z^0)$ , то последнее противоречит существованию числа  $\bar{k}_j$ , для которого  $\tau^{\bar{k}_j}(x_j) \notin U_2(z^0)$ . Тогда в силу выбора дуги  $\gamma(z^0, x)$   $\gamma(z^0, x) \subset \tau(\gamma(z^0, x))$ . Поскольку  $\tau|_{\gamma(z^0, x)}$  монотонно, то существует последовательность

$$\gamma(z^0, x_0) = \gamma(z^0, x) \supset \gamma(z^0, x_{-1}) \supset \dots \supset \gamma(z^0, x_{-i}) \supset \dots \quad (11)$$

такая, что  $\tau(x_{-i}) = x_{-i+1}$ ,  $i \geq 1$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{-i} = z^0$ . Из условия  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = z^0$  следует существование натурального числа  $j_1 \geq j_0$  такого, что при любом  $j \geq j_1$   $x_j \in \gamma(z^0, x_{-2})$ .

3. Покажем, что, начиная с некоторого номера  $j_2 \geq j_1$ , для любого  $j \geq j_2$  найдется натуральное  $l_j$  такое, что  $\tau^{l_j-1}(x_j), \tau^{l_j}(x_j) \in \gamma(\tau^{r_j-1}(x_j), \tau^{r_j}(x_j))$ . Возьмем произвольно и зафиксируем  $j \geq j_1$ . Утверждение справедливо, если  $x_j \in \gamma(\tau^{r_j}(x_j), \tau^{r_j-1}(x_j))$ . Тогда в силу выбора номера  $j_1$  и включения (10)  $x_j, \tau(x_j) \in \gamma(\tau^{r_j}(x_j), \tau^{r_j-1}(x_j))$ . В этом случае  $l_j = 1$ . Пусть  $x_j \notin \gamma(\tau^{r_j}(x_j), \tau^{r_j-1}(x_j))$ . Тогда  $\{\tau^{r_j}(x_j), \dots, \tau^{\bar{n}_j}(x_j)\} \subset X_{s_1}(z^0) \cap U_2(z^0)$ . Так как  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{\bar{n}_j}(x_j) = z^0$  и  $\tau$  монотонно в  $U_2(z^0) \setminus \{z^0\}$ , то  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{r_j}(x_j) = z^0$ . Выберем натуральное  $j_2 \geq j_1$  такое, что  $x_{-2} \notin \gamma(z^0, \tau^{r_j}(x_j))$ .

В силу включений (11) и монотонности  $\tau|_{\gamma(z^0, x)}$  для каждого  $j \geq j_2$  существует натуральное число  $i \geq 2$  такое, что  $x_{-i} \notin \gamma(z^0, \tau^{r_j}(x_j))$ , а  $x_{-i-1} \in \gamma(z^0, \tau^{r_j}(x_j))$ . Выберем натуральное число  $l_j \geq 2$  такое, что  $\tau^{l_j-1}(x_j) \in \gamma(x_{-i}, x_{-i+1})$ . Так как  $i \geq 2$ , то в силу (10)  $\tau^{l_j-1}(x_j), \tau^{l_j}(x_j) \in \gamma(x_{-i}, x) \subset \gamma(\tau^{r_j-1}(x_j), \tau^{r_j}(x_j))$ . Отсюда следует, что  $\gamma(\tau^{l_j-1}(x_j), \tau^{l_j}(x_j)) \subset \tau^{r_j-l_j}(\gamma(\tau^{l_j-1}(x_j), \tau^{l_j}(x_j)))$ . Согласно лемме 2.15 существует точка  $y_j \in \text{Per}(\tau^{s_j-l_j}) \cap \gamma(\tau^{l_j-1}(x_j), \tau^{l_j}(x_j))$ . Заметим, что в силу выбора дуг  $\gamma(\tau^{l_j-1}(x_j), \tau^{l_j}(x_j))$   $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau^{l_j}(x_j) = z^0$ . Отсюда следует, что построена последовательность периодических точек  $\{y_j\}_{j \geq j_2}$ , все точки которой лежат на дуге  $\gamma(z^0, x)$ , и  $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = z^0$ .

Покажем, что множество периодов  $\{m(y_j)\}_{j \geq j_2}$  точек  $\{y_j\}_{j \geq j_2}$  не ограничено.

Предположим противное. Тогда  $y_j \in \text{Fix}(\tau^M)$ , где  $M$  — наименьшее общее кратное периодов  $\{m(y_j)\}_{j \geq j_2}$ . В силу кусочной монотонности  $\tau^M$  существует дуга  $\gamma(z^0, \bar{x}) \subset \gamma(z^0, x)$  такая, что  $\tau^M|_{\gamma(z^0, \bar{x})}$  монотонно. Возьмем произвольно и зафиксируем точку  $\bar{y}_j \in \gamma(z^0, \bar{x})$ . Тогда  $\tau^M(\gamma(z^0, \bar{y}_j)) = \gamma(z^0, \bar{y}_j)$  и для любой точки  $x_j \in \gamma(z^0, \bar{y}_j)$  имеем  $\tau^M(x_j) \in \gamma(z^0, \bar{y}_j)$ . Последнее противоречит утверждению леммы 3.5. Следовательно, множество периодов  $\{m(y_j)\}_{j \geq j_2}$  точек

$\{y_j\}_{j \geq 1}$  не ограничено. Применяя лемму 3.7, получаем, что множество  $\text{Per}(f)$  не замкнуто. Лемма 3.8 доказана.  $\square$

**Лемма 3.9.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $z^0 \in \text{Fix}(f)$  и для некоторой точки  $z \in X$   $\omega(z, f) = \{z^0\}$ , причем  $\{f^i(z)\}_{i \geq 1} \cap \{z^0\} = \emptyset$ . Тогда существует окрестность  $U(z)$  точки  $z$ , принадлежащая устойчивому многообразию  $W^s(z^0, f)$  точки  $z^0$ .

*Доказательство.* Выберем окрестность  $U_\varepsilon(z^0)$  точки  $z^0$ , удовлетворяющую следующим условиям:  $(U_\varepsilon(z^0) \setminus \{z^0\}) \cap A_f = \emptyset$  и  $\varepsilon < \min_{1 \leq s \leq \text{ord } z^0} \{\text{diam } X_s(z^0)\}$ . Тогда  $\partial U_\varepsilon(z^0) \cap X_s(z^0) \neq \emptyset$  при любом

$1 \leq s \leq \text{ord } z^0$  (напомним, что  $\partial(*)$  — граница множества  $(*)$ ). Для каждого  $1 \leq s \leq \text{ord } z^0$  возьмем произвольно и зафиксируем точку  $e_s \in \partial U_\varepsilon(z^0) \cap X_s(z^0)$ . Так как  $\{z^0\} = \omega(z, f)$ , то существует натуральное  $i_0 \geq 1$  такое, что при любом  $i \geq i_0$   $f^i(z) \in U(z^0)$ . Возможно, что существуют точки траектории  $\{f^i(z)\}_{i \geq i_0}$ , имеющие компоненты, не пересекающиеся с  $\bigcup_{s=1}^{\text{ord } z^0} \gamma(z^0, e_s)$ . Тогда в силу локальной связности дендрита  $X$  и равенства  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(z) = z^0$  найдется натуральное число  $i_1 \geq i_0$  такое, что при всех  $i \geq i_1$  каждая такая компонента целиком содержится в окрестности  $U_\varepsilon(z^0)$ .

Положим  $Y = \bigcup_{i \geq i_1} \gamma(z^0, f^i(z))$ . В силу выбора окрестности  $U_\varepsilon(z^0)$  для любого  $i \geq i_1$  справедливо равенство  $f(\gamma(z^0, f^i(z))) = \gamma(z^0, f^{i+1}(z))$ . Следовательно,

$$f(Y) = \bigcup_{i \geq i_1} f(\gamma(z^0, f^i(z))) = \bigcup_{i \geq i_1} \gamma(z^0, f^{i+1}(z)) \subset Y.$$

Поскольку множество  $E(Y) \cap (\bigcup_{j=1}^n \gamma(z^0, e_j))$  состоит из конечного числа точек, то существует

натуральное  $i_2 \geq i_1$  такое, что при любом  $i \geq i_2$   $f^i(z) \notin E(Y) \cap (\bigcup_{j=1}^n \gamma(z^0, e_j))$ .

Возьмем произвольно и зафиксируем  $i \geq i_2$ . Выберем окрестность  $U(f^i(z))$  точки  $f^i(z)$ , принадлежащую  $U_\varepsilon(z^0)$ . Покажем, что для произвольной точки  $y \in U(f^i(z))$   $\{z^0\} = \omega(y, f)$ . Утверждение справедливо, если существует натуральное  $j_0 \geq 1$  такое, что  $f^{j_0}(y) = z^0$ . Рассмотрим случай, когда  $\{f^j(y)\}_{j \geq 1} \cap \{z^0\} = \emptyset$ . Если  $y \in Y$ , то в силу выбора окрестности  $U_\varepsilon(z^0)$  справедливо равенство  $f^j(\gamma(z^0, f^i(z))) = \gamma(z^0, f^j(f^i(z)))$ . Поскольку  $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{j+i}(z) = z^0$ , то имеем  $\lim_{j \rightarrow \infty} f^j(y) = z^0$ . Таким образом,  $\{z^0\} = \omega(y, f)$ . Пусть  $y \notin Y$ . Тогда в силу выбора окрестности  $U_\varepsilon(z^0)$ , номеров  $i_1$  и  $i_2$  для любого  $j \geq 1$  справедливы равенства

$$f^j(\gamma(z^0, y)) = \gamma(z^0, f^j(y)) = \gamma(z^0, f^j(f^i(z))) \cup \gamma(f^j(f^i(z)), f^j(y)). \quad (12)$$

Если при некотором  $j \geq 1$   $f^j(y) \in Y$ , то из доказанного выше следует, что  $\{z^0\} = \omega(y, f)$ . В противном случае в силу локальной связности дендрита и равенств 12 справедливо соотношение  $\lim_{j \rightarrow \infty} f^j(y) = z^0$ . Таким образом, для любой точки  $y \in U(f^i(z))$   $\{z^0\} = \omega(y, f)$ . Отсюда получаем  $U(f^i(z)) \subset W^s(z^0, f)$ .

По непрерывности  $f$  выберем окрестность  $U(z)$  точки  $z$ , удовлетворяющую условию  $f^i(U(z)) \subset U(f^i(z))$ . Тогда  $U(z) \subset W^s(z^0, f)$ . Лемма 3.9 доказана.  $\square$

**Теорема 3.10.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ ,  $\text{Per}(f)$  замкнуто, и в случае, когда  $X$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления, выполнено условие (1) теоремы 1.1. Тогда для любой точки  $z \in X$   $\omega(z, f)$  — периодическая орбита.

*Доказательство.* Утверждение теоремы 3.10 справедливо, если  $X = \text{Per}(f)$ . Будем предполагать, что  $X \neq \text{Per}(f)$ . Возьмем произвольно и зафиксируем точку  $z \in X \setminus \text{Per}(f)$ . Утверждение верно, если существует натуральное  $i_0 \geq 1$  такое, что  $f^{i_0}(z) \in \text{Per}(f)$ . Рассмотрим случай, когда для любого  $i \geq 1$   $\{f^i(z)\}_{i \geq 1} \cap \text{Per}(f) = \emptyset$ .

Согласно теореме 3.3,  $C(f) = \text{Per}(f)$ . Поэтому в силу теоремы Биркгофа [1, с. 204] найдется периодическая орбита  $\text{Orb}(z^0, f)$ , принадлежащая  $\omega(z, f) \cap \text{Per}(f)$  (пусть  $m \geq 1$  — ее период). Пусть  $z^0 \in \omega(z, f^m)$ . Положим  $g = f^m$ . Покажем, что  $\{z^0\} = \omega(z, g)$ .

Предположим противное. Тогда существует точка  $y \notin z^0$  такая, что  $y \in \omega(z, g)$ . Выберем окрестности  $U(z^0), U(y)$  точек  $z^0$  и  $y$  соответственно таким образом, чтобы  $U(z^0) \cap U(y) = \emptyset$ . Так как  $z^0 \in \omega(z, g)$  и  $\text{ord } z^0$  конечен, то существует подпоследовательность  $\{g^{i_j}(z)\}_{j \geq 1} \subset \{g^i(z)\}_{i \geq 1} \cap U(z^0)$ , все точки которой принадлежат одной компоненте точки  $z^0$ , и  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{i_j}(z) = z^0$ . Так как  $y \in \omega(z, g)$ , то для каждой точки  $g^{i_j}(z)$  существует натуральное  $k_j \geq 1$  такое, что  $g^{k_j}(g^{i_j}(z)) \in U(y)$ . Аналогично, для каждой точки  $g^{k_j+i_j}(z)$  существует натуральное число  $s_j \geq 1$ , для которого  $g^{s_j}(g^{k_j+i_j}(z)) \in \{g^{i_j}(z)\}_{j \geq 1} \cap U(z^0)$ , причем  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{s_j+k_j+i_j}(z) = z^0$ . Положим  $z_j = g^{i_j}(z)$ ,  $n_j = s_j + k_j$ ,  $j \geq 1$ . Тогда для каждой точки  $z_j$ ,  $j \geq 1$ , существуют натуральные числа  $k_j$  и  $n_j$  ( $k_j < n_j$ ) такие, что  $g^{k_j}(z_j) \notin U(z^0)$ ,  $g^{n_j}(z_j) \in U(z^0)$ , и  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{n_j}(z_j) = z^0$ . Более того, в силу выбора номера  $s_j$  точки  $z_j$  и  $g^{n_j}(z_j)$  лежат на одной компоненте точки  $z^0$ . Таким образом, выполнены условия леммы 3.6, в силу которой существуют точка  $\alpha \neq z^0$  и для каждого  $j \geq 1$  натуральное число  $l_j$  ( $k_j \leq l_j < n_j$ ) такие, что  $\alpha$  принадлежит множеству предельных точек последовательности  $\{g^{l_j}(z_j)\}_{j \geq 1}$ , и  $g(\alpha) = z^0$ . Во избежание тройных индексов будем считать, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{l_j}(z_j) = \alpha$ . По непрерывности  $g$  имеем

$$g\left(\bigcup_{j \geq 1} \gamma(\alpha, g^{l_j}(z_j))\right) = \bigcup_{j \geq 1} g(\gamma(\alpha, g^{l_j}(z_j))) \supset \bigcup_{j \geq 1} \gamma(z^0, g^{l_j+1}(z_j)). \quad (13)$$

Возможно, что не существует подпоследовательностей траектории  $\{g^i(z)\}_{i \geq 1}$  точки  $z$ , все точки которых лежат на одной дуге. Тогда  $\bigcup_{j \geq 1} \gamma(z^0, g^{l_j+1}(z_j))$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления и  $z^0$  — предельная точка для точек ветвления. Из (13) и следствия 2.13 следует, что  $\bigcup_{j \geq 1} \gamma(\alpha, g^{l_j}(z_j))$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления, причем  $\alpha$  — предельная для точек ветвления. Так как  $X \in D$ , то  $\alpha \in R(X)$ . Таким образом,  $(g^{-1}(\text{Per}(g)) \setminus \text{Per}(g)) \cap R(X) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $(f^{-m}(\text{Per}(f)) \setminus \text{Per}(f)) \cap R(X) \neq \emptyset$ . Последнее противоречит условию (1). Таким образом, существует подпоследовательность траектории точки  $z$ , все точки которой лежат на одной дуге. Будем считать, что подпоследовательность  $\{g^{i_j}(z)\}_{j \geq 1}$  удовлетворяет указанному свойству. Тогда точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  лежат на одной дуге. В силу леммы 3.8 множество  $\text{Per}(g) = \text{Per}(f)$  не замкнуто. Таким образом, сделанное предположение не верно, и  $\omega(z, f)$  — периодическая орбита. Теорема 3.10 доказана.  $\square$

Заметим, что если  $X$  — конечное дерево, то утверждение теоремы 3.10 справедливо без условия (1), поскольку в силу выбора последовательности  $\{g^{i_j}(z)\}_{j \geq 1}$  в доказательстве теоремы 3.10 все точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq j_0}$ , при некотором  $j_0 \geq 1$ , лежат на одной дуге.

**Теорема 3.11.** Пусть  $f \in \text{PM}^0(X)$ , для произвольной точки  $z \in X$   $\omega(z, f)$  — периодическая орбита, и в случае, когда  $X$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления, выполнено условие (1) теоремы 1.1. Тогда  $\text{Per}(f)$  замкнуто.

*Доказательство.* Предположим противное. Существуют точка  $z \in \overline{\text{Per}(f)} \setminus \text{Per}(f)$  и последовательность  $\{x_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$  такие, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = z$ . В силу условия теоремы 3.11  $\omega(z, f)$  — периодическая орбита. Пусть  $m \geq 1$  — ее период. Положим  $g = f^m$ . Тогда существует точка  $z^0 \in \omega(z, f)$  такая, что  $\{z^0\} = \omega(z, g)$ . Возможен один из следующих двух случаев:

- 1) при любом  $i \geq 1$   $\{g^i(z)\}_{i \geq 1} \cap \{z^0\} = \emptyset$ ;
- 2) существует натуральное  $i_0 \geq 1$  такое, что  $g^{i_0}(z) = z^0$ .

Исключим случай 1). В силу леммы 3.9 существует окрестность  $U(z)$  точки  $z$  такая, что  $U(z) \subset W^s(z^0, g)$ . Отсюда следует, что  $z$  — блуждающая точка  $g$ . Последнее противоречит сделанному предположению. Таким образом, реализуется лишь случай 2). Положим  $z_j = g^{i_0}(x_j)$ . Тогда  $z_j \in \text{Per}(f)$  и  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ . Так как  $\text{ord } z^0$  конечен, то будем считать, что все точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  лежат на одной компоненте точки  $z^0$ . Возможно, что не существует

подпоследовательностей последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$ , все точки которых лежат на одной дуге. Тогда  $\bigcup_{j \geq 1} \gamma(z^0, z_j)$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления, а  $z^0$  — предельная для точек ветвления. В силу непрерывности  $g$  имеем

$$g^{i_0} \left( \bigcup_{j \geq 1} \gamma(z, x_j) \right) \supset \bigcup_{j \geq 1} \gamma(z^0, z_j).$$

Из следствия 2.13 следует, что  $\bigcup_{j \geq 1} \gamma(z, x_j)$  — дендрит со счетным множеством точек ветвления.

Тогда последовательность  $\{x_j\}_{j \geq 1}$  содержит подпоследовательность, любые три точки которой не лежат на одной дуге. Отсюда получаем, что  $z$  — предельная для точек ветвления. Так как  $X \in D$ , то  $z \in R(X)$ . Следовательно,  $(f^{-i_0}(z^0) \setminus \{z^0\}) \cap R(X) \neq \emptyset$ . Последнее противоречит условию (1). Таким образом, существует подпоследовательность последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$ , все точки которой лежат на одной дуге. Во избежание двойных индексов будем считать, что все точки последовательности  $\{z_j\}_{j \geq 1}$  лежат на одной дуге.

Выберем окрестности  $U(z^0)$ ,  $U(z)$  точек  $z^0$  и  $z$  соответственно, для которых  $U(z^0) \cap U(z) = \emptyset$ . Так как для любого  $j \geq 1$   $\text{Orb}(x_j, g) \cap U(z) \neq \emptyset$ ,  $z \notin U(z^0)$ , а  $\lim_{j \rightarrow \infty} g^{i_0}(x_j) = z^0$ , то существует натуральное  $k_j \geq 1$  такое, что  $g^{k_j}(g^{i_0}(x_j)) \notin U(z^0)$ . Таким образом, выполнены условия леммы 3.4, в силу которой существует натуральное число  $i_2$ , компонента  $X_{s_1}(z^0)$  точки  $z^0$ , содержащая последовательность  $\{g^{i_1}(g^{i_0}(x_j))\}_{j \geq j_0}$ , при некоторых  $0 \leq i_1 \leq \text{ord } z^0$ ,  $j_0 \geq 1$ , и окрестность  $U_1(z^0)$  точки  $z^0$  такие, что отображение  $g^{i_2}$  монотонно в  $U_1(z^0) \setminus \{z^0\}$ , и выполнено включение

$$g^{i_2}(X_{s_1}(z^0) \cap U_1(z^0)) \subset X_{s_1}(z^0).$$

Положим  $z_j = g^{i_1+i_0}(x_j)$ ,  $\tau = g^{i_2}$ . Тогда  $z_j, \tau(z_j) \in X_{s_1}(z^0)$ . В силу леммы 3.5 для каждого  $j \geq j_0$  существует натуральное число  $\bar{k}_j$  такое, что  $\tau^{\bar{k}_j}(z_j) \notin U_1(z^0)$ . Повторяя рассуждения, проведенные в п. 2 доказательства леммы 3.8, приходим к выводу, что существует последовательность вложенных дуг

$$X_{s_1}(z^0) \supset \gamma(z^0, x_0) \supset \gamma(z^0, x_{-1}) \supset \dots \supset \gamma(z^0, x_{-i}) \supset \dots \quad (14)$$

такая, что  $\tau|_{\gamma(z^0, x_0)}$  монотонно,  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{-i} = z^0$  и  $\tau(x_{-i}) = x_{-i+1}$ . Так как  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$  и все точки  $z_j$ ,  $j \geq 1$ , лежат на одной дуге, то найдется натуральное число  $j_1 \geq j_0$  такое, что при любом  $j \geq j_1$   $z_j \in \gamma(z^0, x_{-1})$ . Тогда в силу выбора последовательности (14) для каждого  $j \geq j_1$  существует натуральное  $l_j$  такое, что  $\tau^{l_j}(z_j) \in \gamma(x_{-1}, x)$ . Пусть  $\xi$  — одна из предельных точек последовательности  $\{\tau^{l_j}(z_j)\}_{j \geq 1}$ . Так как  $\xi \in \overline{\text{Per}(\tau)} \setminus \text{Per}(\tau)$ , то при любом  $i \geq 1$   $\tau|_{\gamma(z^0, x_0)}^{-i}(\xi) \neq \emptyset$ . Обозначим  $\xi_{-i}$  точку, принадлежащую  $\tau|_{\gamma(z^0, x_0)}^{-i}(\xi)$  и множеству предельных точек последовательности  $\{\tau^{l_j-i}(z_j)\}_{j \geq j'_i}$ , где  $j'_i$  выбрано таким образом, чтобы при любом  $j \geq j'_i$   $l_j \geq i$  (такой выбор натуральных чисел возможен, так как последовательность периодов периодических точек  $z_j$ ,  $j \geq 1$ , не ограничена и, следовательно, последовательность чисел  $\{l_j\}_{j \geq 1}$  также не ограничена). Тогда  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{-i} = z^0$ .

Отсюда следует, что  $\{\xi_{-i}\}_{i \geq 1}$  — счетное множество, и существует точка  $\xi_{-i_0} \in \{\xi_{-i}\}_{i \geq 1}$  такая, что  $\xi_{-i_0} \notin \text{Per}(\tau)$ . Заметим, что  $\xi_{-i_0}$  принадлежит множеству предельных точек последовательности  $\{\tau^{l_j-i_0}(z_j)\}_{j \geq j'_{i_0}}$ , и  $\{\xi_{-i_0}\} \cup \{\tau^{l_j-i_0}(z_j)\}_{j \geq j'_{i_0}} \subset \gamma(x_{-i_0-1}, x_{-i_0})$ . Выберем подпоследовательность  $\{y_j\}_{j \geq 1} \in \{\tau^{l_j-i_0}(z_j)\}_{j \geq j'_{i_0}}$  так, чтобы  $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = \xi$ . Во избежание двойных индексов будем считать, что либо  $\{y_j\}_{j \geq 1} \subset \gamma(x_{-i_0-1}, \xi)$ , либо  $\{y_j\}_{j \geq 1} \subset \gamma(\xi, x_{-i_0})$ . Рассмотрим первый из указанных случаев. Так как  $\text{Orb}(y_j, \tau) \cap U(z) \neq \emptyset$ , то для отображения  $\tau^{m(y_1)}$ , где  $m(y_1)$  — период точки  $y_1$ , существует точка  $y_{j_1} \in \{y_j\}_{j \geq 1}$  такая, что  $\tau^{m(y_1)}(\gamma(y_1, y_{j_1})) \supset \gamma(y_1, \xi)$ . Для отображения  $\tau^{m(y_{j_1})}$  существует точка  $y_{j_2} \in \{y_j\}_{j \geq 1}$  такая, что  $\tau^{m(y_{j_1})}(\gamma(y_{j_1}, y_{j_2})) \supset \gamma(y_{j_1}, \xi)$ . Так как  $\tau \in \text{PM}^0(X)$ , то на дуге  $\gamma(y_1, y_{j_1})$  существует конечное объединение попарно непересекающихся замкнутых дуг (обозначим его  $\Delta_1$ ) такое, что  $\tau^{m(y_1)}(\Delta_1) = \gamma(y_{j_1}, y_{j_2})$ . Для отображения  $\tau^{m(y_{j_2})}$  существует точка  $y_{j_3} \in \{y_j\}_{j \geq 1}$  такая, что  $\tau^{m(y_{j_2})}(\gamma(y_{j_2}, y_{j_3})) \supset \gamma(y_{j_2}, \xi)$ . Следовательно, на дуге  $\gamma(y_{j_1}, y_{j_2})$  существует конечное объединение попарно непересекающихся замкнутых дуг (обозначим его  $\Delta_2$ ) такое, что



число  $j_0$  такое, что при любом  $j \geq j_0$   $z_j \in U(z^0)$ . Покажем, что для каждого  $j \geq j_0$  и любого  $i \geq 1$   $g^i(z_j) \in U(z^0)$ . Действительно, в противном случае существует подпоследовательность  $\{z_{j_r}\}_{r \geq 1} \subset \{z_j\}_{j \geq j_0}$ , для каждой точки которой найдется натуральное число  $k_r$  такое, что  $g^{k_r}(z_{j_r}) \notin U(z^0)$ . Так как  $z_{j_r} \in \text{Per}(g)$ , то  $\lim_{r \rightarrow \infty} g^{n_r}(z_{j_r}) = z^0$ , где  $n_r = m(z_{j_r}) - \text{период точки } z_{j_r}$ . Тогда  $n_r > k_r$ . В силу леммы 3.6 существуют точка  $\alpha \neq z^0$  и при всех  $r \geq 1$  натуральное  $l_r$  ( $k_{j_r} \leq l_r < n_r$ ) такие, что  $\alpha$  принадлежит множеству предельных точек последовательности  $\{g^{l_r}(z_{j_r})\}_{r \geq 1}$ , и  $g(\alpha) = z^0$ . Так как  $z^0 \in \text{Fix}(g)$ , то  $\alpha \notin \text{Per}(g)$ . Поскольку  $\{g^{l_r}(z_{j_r})\}_{r \geq 1} \subset \text{Per}(f)$ , то отсюда следует, что  $\text{Per}(f)$  не замкнуто. Полученное противоречие с условием леммы 4.1 доказывает, что при любом  $i \geq 1$   $g^i(z_j) \in U(z^0)$ .

Положим  $Y = \bigcup_{j \geq j_0} \bigcup_{i=1}^{m(z_j)} \gamma(z^0, g^i(z_j))$ ,  $j \geq j_0$ . Тогда из доказанного выше следует, что  $Y \subset U(z^0)$ .

Более того, в силу выбора окрестности  $U(z^0)$   $g|_Y$  монотонно. Поэтому

$$g(Y) = \bigcup_{j \geq j_0} \bigcup_{i=1}^{m(z_j)} g(\gamma(z^0, g^i(z_j))) = \bigcup_{j \geq j_0} \bigcup_{i=1}^{m(z_j)} \gamma(z^0, g^{i+1}(z_j)) = Y.$$

Так как для любого  $j \geq j_0$   $z_j \in Y$ , то, применяя лемму 2.7, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 4.1.  $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1.2.

1. Покажем, что для произвольной точки  $z^0 \in \text{Per}(f)$  периода  $m \geq 1$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $0 < \delta = \delta(z^0, \varepsilon) < \varepsilon$  такое, что если  $z \in \text{Per}(f)$  и  $d(z^0, z) < \delta$ , то  $d(f^{mi}(z^0), f^{mi}(z)) < \varepsilon$ , где  $i = 1, 2, \dots$ ,  $d$  — метрика в  $X$ .

Возьмем произвольно  $\varepsilon > 0$  и точку  $z^0 \in \text{Per}(f)$ . Утверждение справедливо, если  $z^0$  — изолированная точка  $\text{Per}(f)$ . Рассмотрим случай, когда  $z^0$  — неизолированная точка компакта  $\text{Per}(f)$ . Предположим, что множество (наименьших) периодов периодических точек из  $U_\varepsilon(z^0)$  ограничено. Так как при доказательстве леммы 2.8 в случае ограниченности множества периодов периодических точек использовалось лишь свойство замкнутости множества  $\text{Per}(f)$ , то, повторяя рассуждения леммы 2.8 для рассматриваемого случая, убеждаемся в том, что утверждение п. 1 справедливо, если множество (наименьших) периодов периодических точек из  $U_\varepsilon(z^0)$  ограничено.

Пусть множество (наименьших) периодов периодических точек из  $U_\varepsilon(z^0)$  не ограничено. Тогда в силу леммы 4.1 существует последовательность  $\{z_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$ , все точки которой лежат на одной дуге, и  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z^0$ . Из утверждения леммы 3.7 следует, что множество периодов точек  $z_j$ ,  $j \geq 1$ , ограничено. Тогда, для данного  $\varepsilon > 0$  существует  $0 < \delta^* < \varepsilon$  такое, что  $f^{mi}(U_{\delta^*}(z^0) \cap \{z_j\}_{j \geq 1}) \subset U_\varepsilon(z^0)$ , где  $i = 1, 2, \dots$ . Выберем окрестность  $U_{\delta^{**}}(z^0) \subset U_{\delta^*}(z^0)$  точки  $z^0$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1)  $(U_{\delta^{**}}(z^0) \setminus \{z^0\}) \cap A_{fM} = \emptyset$ , где  $M$  — наименьшее общее кратное периодов точек  $z_j$ ,  $j \geq 1$ ,
- 2)  $\partial U_{\delta^{**}}(z^0) \cap X_s(z^0) \neq \emptyset$ , при любом  $1 \leq s \leq \text{ord } z^0$ .

Для каждого  $1 \leq s \leq \text{ord } z^0$  возьмем произвольно и зафиксируем точку  $e_s \in U_{\delta^{**}}(z^0) \cap X_s(z^0)$ . Так как  $X$  — локально связный континуум, то существует окрестность  $U_\delta(z^0) \subset U_{\delta^{**}}(z^0)$  точки  $z^0$

такая, что для любой точки  $y \in R(X) \cap \bigcup_{s=1}^{\text{ord } z^0} \gamma(z^0, e_s)$  любая ее компонента, не пересекающаяся

с  $\bigcup_{s=1}^{\text{ord } z^0} \gamma(z^0, e_s)$ , принадлежит  $U_{\delta^{**}}(z^0)$ . Тогда  $f^{mi}(U_\delta(z^0) \cap \text{Per}(f)) \subset U_\varepsilon(z^0)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Таким образом, справедливо утверждение п. 1.

Отсюда следует, что для любой точки  $z^0 \in \text{Per}(f)$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $0 < \delta = \delta(z^0, \varepsilon) < \varepsilon$  такое, что если  $z \in \text{Per}(f)$  и  $d(z^0, z) < \delta$ , то  $d(f^i(z^0), f^i(z)) < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots$

2. Доказательство леммы 2.8 для монотонных отображений использовало только компактность множества  $\text{Per}(f)$ . Следовательно, повторяя рассуждения леммы 2.8, убеждаемся в том, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , удовлетворяющее следующему условию: если  $z_1, z_2$  — произвольные периодические точки такие, что  $d(z_1, z_2) < \delta$ , то  $d(f^i(z_1), f^i(z_2)) < \varepsilon$  для любого  $i \geq 1$ .

Пусть  $d_i(x, y) = \max_{1 \leq j \leq i} d(f^j(x), f^j(y))$  — метрика в компакте  $\text{Per}(f)$ ,  $r_i(f, \varepsilon)$  — минимальное число элементов  $\varepsilon$ -сети множества  $\text{Per}(f)$ , наделенного  $d_i$ -метрикой,  $i \geq 1$ .

Возьмем произвольно  $\varepsilon > 0$ . В силу п. 2 существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что следующие условия эквивалентны:

- 1) конечное множество  $Y$  является  $\varepsilon$ -сетью компакта  $\text{Per}(f)$  с  $d_i$ -метрикой, где  $i = 1, 2, \dots$ ;
- 2) конечное множество  $Y$  является  $\delta$ -сетью множества  $\text{Per}(f)$  с  $d_0$ -метрикой (напомним, что  $d_0$ -метрика совпадает с метрикой  $d$  на дендрите  $X$ ).

Отсюда следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $r_0(f, \delta) = r_i(f, \varepsilon)$  для любого  $i = 1, 2, \dots$ .

Таким образом,  $h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} \ln r_i(f, \varepsilon) = 0$ . Теорема 1.2 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
2. Войнова М. И., Ефремова Л. С. О динамике простейших отображений дендритов// *Мат. заметки*. — 1998. — 63, № 2. — С. 183–195.
3. Ефремова Л. С., Махрова Е. Н. О динамике монотонного отображения  $n$ -ода// *Изв. вузов. Сер. мат.* — 1997. — 10. — С. 31–36.
4. Ефремова Л. С., Махрова Е. Н. О динамике монотонных отображений дендритов// *Мат. сб.* — 2001. — 192, № 6. — С. 15–30.
5. Куратовский К. Топология. Пер. с англ. Т. 2. — М.: Мир, 1969. — 624 с.
6. Махрова Е. Н. Об одном примере кусочно-монотонного отображения дендрита// В сб.: «Аналитические и численные методы в математике и механике»/ Тр. XXII конф. мех.-мат. ф-та МГУ (17–22 апреля 2000 г.). — М., 2001. — С. 112–114.
7. Alseada L., Llibre J., Misiurewicz M. Periodic orbits of maps of  $Y$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1989. — 313, № 2. — С. 475–538.
8. Ayres W. Some generalizations of the scherrer fixed point theorem// *Fundam. Math.* — 1930. — 16. — С. 332–336.
9. Baldwin S. An extension of Sarkovskii's theorem to the  $n$ -od// *Ergod. Theory Dyn. Syst.* — 1991. — 11. — С. 249–271.
10. Barge M., Diamond B. The dynamics of continuous mappings of finite graphs through inverse limits// *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1994. — 344, № 2. С. 773–790.
11. Blokh A. M. Periods implying almost all periods for tree maps// *Nonlinearity*. — 1992. — 5. — С. 1375–1382.
12. Efrimova L. S., Makhrova E. N. On homoclinic points of piecewise monotone mappings of dendrites// *Progr. Nonlin. Sci./ Int. Conf. dedicated to the 100th anniversary of A. A. Andronov. — 1. — Math. Probl. Nonlinear Dyn. — Nizhniy Novgorod, Russia.* — С. 225–228.
13. Kato H. A Note on periodic points and recurrent points of maps of dendrites// *Bull. Austral. Math. Soc.* — 1995. — 51, № 3. — С. 459–461.
14. Kato H. The depth of centres of map on dendrites// *J. Austr. Math. Soc., Ser. A.* — 1998. — 64. — С. 44–53.
15. Li Sh., Ye X. Topological entropy for finite invariant subsets of  $Y$ // *Trans. Am. Math. Soc.* — 1995. — 347, № 12. — С. 4651–4661.
16. Llibre J., Misiurewicz M. Horseshoes, entropy and periods for graph maps// *Topology*. — 1993. — 32. — С. 649–664.
17. Nitecki Z. Topological Dynamics of the Interval// *Progr. Math.* — 1982. — 21. — С. 1–73.
18. Ye X. The center and the depth of the center for a tree map// *Bull. Austral. Math. Soc.* — 1993. — 48. С. 347–350.

## О ЛЕММЕ АДАМАРА—ПЕРРОНА

© 2003 г. А. А. КОРНЕВ

Аннотация. В работе рассматривается некоторое дополнение к лемме Адамара—Перрона о существовании устойчивого  $M^-$  и неустойчивого  $M^+$  многообразий в окрестности стационарной точки. Показано, что для существования многообразий достаточно, чтобы в окрестности стационарной точки исходное пространство разлагалось в прямую сумму двух подпространств таких, что на одном подпространстве главная часть оператора задачи (возможно нелинейная) являлась слабо сжимающей, а на другом не сжимающей. Дополнительно требуется некоторая подчиненность членов оператора более высокого порядка малости на точках специального вида.

Классическая теория гиперболических множеств [1] позволяет исследовать устойчивые [7] и неустойчивые многообразия гладкого отображения  $S(\cdot)$  в окрестности  $\mathcal{O}$  изолированной неподвижной гиперболической точки. В том числе доказывается, что многообразия  $M^\pm$  локально инвариантны относительно  $S$ ; если  $m^- \in M^-$  и  $n \geq 0$ , то  $S^n(m^-) \subset \mathcal{O}$ ; под действием оператора  $S$  каждая траектория притягивается к  $M^+$  с экспоненциальной скоростью; если  $m^+ \in M^+$ , то для любого  $n \geq 0$  существует  $S^{-n}(m^+) \subset \mathcal{O}$ . Соответствующие результаты подытожены, например, в монографиях [2, 13] (см. также [1]). Однако, в случае когда спектр линейной части рассматриваемого отображения имеет с единичной окружностью общие точки, лемма Адамара—Перрона неприменима. Отметим, что для некоторых задач ([7, 9, 11]) удается доказать подобные результаты и в случае существования у линеаризованной задачи собственных чисел, равных по модулю единице. В работе рассматривается формальное обобщение леммы на негиперболический случай.

Неустойчивое многообразие играет важную роль при исследовании глобального аттрактора [5] задачи. Обозначим через  $M^+(S, \mathcal{O})$  неустойчивое многообразие подмножества  $\mathcal{O}$  банахова пространства  $H$ , т.н. «исходящий ус Адамара»

$$M^+(S, \mathcal{O}) = \{h_0 \in \mathcal{O} : \exists h_k \in \mathcal{O}, h_k = S(h_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Тогда имеет место [5, 11] утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть дискретная полугруппа  $\{S^k(\cdot), k \in N_+\}$  на замкнутом подмножестве  $B$  банахова пространства обладает компактным глобальным аттрактором  $M$ . Тогда

$$M = M^+(S, B).$$

Обозначим через  $M^-(S, \mathcal{O})$  устойчивое многообразие подмножества  $\mathcal{O}$  банахова пространства  $H$ , «входящий ус Адамара»

$$M^-(S, \mathcal{O}) = \{h_0 \in \mathcal{O} : \exists h_{k+1} \in \mathcal{O}, h_{k+1} = S(h_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

В терминах многообразия  $M^-$  и «правильности по Ляпунову» [7] решается, например, вопрос об условной устойчивости тривиального решения  $x(t) \equiv 0$  системы дифференциальных уравнений  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x)$ , где  $x, f$  — векторы, а  $A(t)$  — матрица, равномерно ограниченная и равномерно непрерывная. Многообразие  $M^-$  играет существенную роль в классической теории  $U$ -систем [1] и различных к ней дополнениях [8, 9]. Например, в разделе об условной устойчивости траектории  $S^n(h_0)$  для полудинамической системы  $\{H, S(\cdot)\}$  с помощью  $M^-$  удается доказать существование гладкого подмногообразия  $V \subset H$  такого, что траектории  $S^n(v)$  с начальными данными  $v \in V$  неограниченно сближаются с  $S^n(h_0)$ .

Отметим также, что задача стабилизации неустойчивого решения, в том числе для уравнений математической физики, может быть эффективно решена [10] с помощью многообразия  $M^-$ .

Перейдем к изложению результатов работы. Далее будем считать выполненными следующие условия:

(a<sub>0</sub>) Пусть  $S(\cdot) : H \rightarrow H$  — непрерывное отображение, определенное на банаховом пространстве  $H$  с нормой  $\|\cdot\|$ , и пусть  $0$  является неподвижной точкой отображения, т.е.  $S(0) = 0$ . Пусть определены два оператора проектирования  $P_+, P_- : H \rightarrow H$ , ограниченный линейный оператор  $L : H \rightarrow H$ , непрерывное отображение  $R(h) = S(h) - Lh$  такие, что имеют место следующие неравенства:

- (a<sub>1</sub>)  $P_+ + P_- = I, \quad \|P_+\| = \|P_-\| = 1,$
- (a<sub>2</sub>)  $L(P_+H) = P_+H, \quad L(P_-H) \subset P_-H,$
- (a<sub>3</sub>)  $\|Lx\| \geq (1 + \delta_+)\|x\|, \quad \forall x \in P_+H, \quad \delta_+ \geq 0,$
- (a<sub>4</sub>)  $\|Ly\| \leq (1 - \delta_-)\|y\|, \quad \forall y \in P_-H, \quad \delta_- \geq 0,$
- (a<sub>5</sub>)  $\|R(h_1) - R(h_2)\| < \theta\left(\max\{\|h_1\|, \|h_2\|\}\right)\|h_1 - h_2\|, \quad \forall h_i \in H,$

с непрерывной положительной неубывающей функцией

$$\theta(\cdot) : \theta(0) = 0, \quad \max_{h \in \mathcal{O}} \theta(\|h\|) < 1/2.$$

В данных неравенствах  $x, y, h_i$  — произвольные элементы некоторой окрестности нуля  $\mathcal{O} \subset H$ , внутри которой ведутся все последующие рассуждения. Если в условиях (a<sub>3</sub>) и (a<sub>4</sub>) норма оператора  $L$  отделена от единицы, то точка  $0$  является гиперболической, иначе — негиперболической.

Для удобства дальнейшего изложения запишем оператор  $S(h) = Lh + R(h)$  при  $h = x + y$ ,  $x \in P_+\mathcal{O}$ ,  $y \in P_-\mathcal{O}$  в следующем виде:

$$S(h) = \begin{cases} S_+(x + y) = L_+x + R_+(x + y), & \text{где } S_{\pm}(\cdot) = P_{\pm}S(\cdot), \\ S_-(x + y) = L_-y + R_-(x + y), & L_{\pm} = P_{\pm}L, \quad R_{\pm}(\cdot) = P_{\pm}R(\cdot). \end{cases}$$

Имеет место

**Лемма Адамара—Перрона.** Пусть оператор  $S(\cdot) : H \rightarrow H$  удовлетворяет условиям (a<sub>1</sub>)–(a<sub>5</sub>) с некоторым  $\delta = \delta_+ = \delta_- > 0$ . При этом выполнено следующее неравенство:

$$\|R(h_1) - R(h_2)\| < \hat{\theta}\|h_1 - h_2\|, \quad h_i \in H, \quad \hat{\theta} < \delta/2.$$

- 1) Тогда существуют инвариантные устойчивое  $\mathcal{M}^-$  и неустойчивое  $\mathcal{M}^+$  многообразия.
- 2) Произвольная точка  $h$  под действием оператора  $S(\cdot)$  притягивается к многообразию  $\mathcal{M}^+$  с экспоненциальной скоростью:

$$\text{dist}(\mathcal{M}^+, S^n(h)) \leq C_1(1 - \delta + 2\hat{\theta})^n \text{dist}(\mathcal{M}^+, h).$$

Точки  $m^+$ , для которых оператор  $S^{-n}(m^+)$  существует и  $S^{-n}(m^+) \subset \mathcal{O}$  при всех  $n > 0$ , принадлежат многообразию  $\mathcal{M}^+$  и имеет место оценка  $\|S^{-n}(m^+)\| \leq C_2(1 - \delta + 2\hat{\theta})^n \|m^+\|$ .

- 3) Произвольная точка  $h$  под действием оператора  $S^{-1}(\cdot)$  притягивается к многообразию  $\mathcal{M}^-$  с экспоненциальной скоростью:

$$\text{dist}(\mathcal{M}^-, S^{-n}(h)) \leq C_3(1 - \delta + 2\hat{\theta})^n \text{dist}(\mathcal{M}^-, h).$$

Точки  $m^-$ , для которых траектория  $S^n(m^-) \subset \mathcal{O}$  при всех  $n > 0$ , принадлежат  $\mathcal{M}^-$  и имеет место оценка  $\|S^n(m^-)\| \leq C_4(1 - \delta + 2\hat{\theta})^n \|m^-\|$ .

Так как условие гиперболичности  $\delta = \delta_+ = \delta_- > 0$  означает, что линейная часть оператора  $S(\cdot)$  на соответствующих подпространствах является экспоненциально (сильно) растягивающей (a<sub>3</sub>) и сжимающей (a<sub>4</sub>), рассмотрим [11] класс полиномиально (слабо) сжимающих отображений.

Отображение  $F$  метрического пространства  $U$  в себя будем называть слабо сжимающим отображением (отображением полиномиального сжатия), если существуют такие числа  $\alpha, p > 0$ , что для любых двух точек  $u_1, u_2 \in U$  выполняется неравенство

$$\rho(F(u_1), F(u_2)) \leq \frac{\rho(u_1, u_2)}{(1 + \alpha\rho(u_1, u_2))^{1/p}}. \quad (1)$$

Отметим, что различные законы сжатия рассматривались в [3].

**Утверждение 2.** *Всякое слабо сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку:  $F(u) = u$ . Итерационный процесс  $u^{n+1} = F(u^n)$  сходится к неподвижной точке с любого начального приближения  $u^0$ , при этом выполняется следующая оценка:*

$$\rho(u, F^n(u^0)) \leq \frac{\rho(u, u^0)}{(1 + n\alpha\rho^p(u, u^0))^{1/p}}.$$

Отображения вида (1) встречаются, например [11], при исследовании разрешающего оператора, соответствующего дифференциальному уравнению Чафе—Инфанта в одномерном случае. Для дискретных ПДС естественно получается оценка типа

$$\rho(F(u_1), F(u_2)) \leq \rho(u_1, u_2)(1 - \alpha\rho^p(u_1, u_2)),$$

из которой следует, что  $p = \max\{1, q\}$  (см. (1)).

Построим неустойчивое многообразие в окрестности изолированной неподвижной точки  $z = 0$  оператора  $S(\cdot)$ .

Рассмотрим класс  $A_\gamma(\mathcal{O})$  всех непрерывных отображений  $g(x) : P_+\mathcal{O} \rightarrow P_-\mathcal{O}$ , удовлетворяющих условиям

$$g(0) = 0, \quad \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|.$$

В случае  $h = x + g(x)$  будем обозначать оператор  $S_\pm(h)$  следующим образом:  $S_\pm(x + g(x)) = S_{\pm, g}(x)$ .

Имеет место [4] следующее утверждение о существовании в классе  $A_\gamma(\mathcal{O})$  неустойчивого многообразия в окрестности негиперболической точки и слабого притяжения к нему произвольной траектории.

**Утверждение 3.** *Пусть в окрестности нуля  $\mathcal{O} = \{h : \|x\|, \|y\| \leq r\}$  для оператора  $S(\cdot)$  имеют место предположения (а). Пусть при некотором  $\gamma$ , удовлетворяющем условию*

$$\begin{cases} \gamma = 1, & \text{если } \delta_+ = \delta_- = 0, \\ \frac{\gamma(1 - \delta_-) + \theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1)}{1 + \delta_+ - [\delta_+]\theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1)} \leq \gamma \leq 1 & \text{при } \delta_+ + \delta_- > 0, \end{cases}$$

где

$$[\delta_+] = \begin{cases} 0, & \delta_+ = 0, \\ 1, & \delta_+ \neq 0, \end{cases}$$

найдутся числа  $\alpha > 0, p \geq 1$  такие, что  $\forall x, \tilde{x} \in P_+\mathcal{O}$  и произвольных функций  $g(\cdot), \tilde{g}(\cdot) \in A_\gamma(\mathcal{O})$  выполнены следующие оценки:

$$\begin{aligned} (b_1) \quad & \|S_{-, g}(x) - S_{-, \tilde{g}}(x)\| + \gamma\|S_{+, g}(x) - S_{+, \tilde{g}}(x)\| \leq \\ & \leq (1 - \alpha\|g(x) - \tilde{g}(x)\|^p)\|g(x) - \tilde{g}(x)\|, \quad 1 - \alpha|2r|^p > 0, \\ (b_2) \quad & \|S_{-, g}(x) - S_{-, g}(\tilde{x})\| \leq \|x - \tilde{x}\|, \\ (b_3) \quad & \|S_{+, g}(x) - S_{+, g}(\tilde{x})\| \geq \|x - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Тогда:

- 1) в окрестности  $\mathcal{O}$  существует неустойчивое многообразие  $\mathcal{M}^+$ , задаваемое некоторой непрерывной функцией  $\mathbf{g} : P_+H \rightarrow P_-H$ , принадлежащей классу  $A_\gamma(\mathcal{O})$ , т.е.  $\mathcal{M}^+ = \{x + \mathbf{g}(x), x \in P_+H\}$ ;
- 2) данное многообразие локально инвариантно относительно оператора  $S$ . На многообразии определены обратные степени оператора  $S^{-n}$ , т.е. для произвольного  $m \in \mathcal{M}^+$  существует  $S^{-n}(m), n = 1, 2, \dots$ , при этом  $S^{-n}(m) \subset \mathcal{O}$ ;
- 3) в окрестности  $\mathcal{O}$  произвольная точка  $h$  притягивается к многообразию  $\mathcal{M}^+$  с полиномиальной скоростью:

$$\text{dist}(\mathcal{M}^+, S^n(h)) \leq \frac{|2r|}{(1 + n\alpha|2r|^p)^{1/p}}, \quad \text{если } S^k(h) \in \mathcal{O}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

**Следствие.** Пусть в условиях теоремы оператор  $S_{+,g}(x)$  является слабо растягивающим для  $\forall x \in \mathcal{O}$ :

$$(b_4) \quad \|S_{+,g}(x)\| \geq (1 + \beta\|x\|^q)\|x\|, \quad \beta > 0, \quad q \geq 1.$$

Тогда для произвольного  $m \in \mathcal{M}^+$  имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \|S_+^n(m)\| &\geq \frac{\|x\|}{(1 - n\tilde{\beta}\|x\|^q)^{1/q}}, \quad \text{если } S^k(m) \in \mathcal{O}, \quad 0 \leq k \leq n, \\ \|S_+^{-n}(m)\| &\leq \frac{|r|}{(1 + n\tilde{\beta}|r|^q)^{1/q}}, \quad \tilde{\beta} = \min\{\beta, |r|^{-q}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \|S^{-n}(m)\| &\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство может быть получено [4] некоторым обобщением известных методов [1, 6].

Перейдем к построению устойчивого многообразия. Рассмотрим класс  $B_\gamma(\mathcal{O})$  всех непрерывных отображений  $f(y) : P_- \mathcal{O} \rightarrow P_+ \mathcal{O}$ , удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 0, \quad \|f(y_1) - f(y_2)\| \leq \gamma\|y_1 - y_2\|.$$

Далее будем считать, что выполнено также условие

(а<sub>6</sub>) Операторы  $S_-(f(y) + y) : P_- \mathcal{O} \rightarrow P_- \mathcal{O} \subset \mathcal{O}$  и  $S_{+,y}^{-1}(x) : P_+ \mathcal{O} \rightarrow P_+ \mathcal{O} \subset \mathcal{O}$  являются вполне непрерывными.

Сформулируем и докажем теорему существования в классе  $B_\gamma(\mathcal{O})$  устойчивого многообразия в окрестности негиперболической точки.

**Утверждение 4.** Пусть отображение  $S(\cdot)$  в  $\mathcal{O} = \{h : \|x\|, \|y\| \leq r\}$  удовлетворяет условиям а). Предположим, что для некоторого  $0 < \gamma \leq 1$  такого, что  $\forall y, \tilde{y} \in P_- \mathcal{O}, \forall x, \tilde{x} \in P_+ \mathcal{O}$  и произвольных функций  $f, \tilde{f} \in B_\gamma(\mathcal{O})$  имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} (c_1) \quad &\|S_-(f(y) + y) - S_-(f(\tilde{y}) + \tilde{y})\| + \frac{1}{\gamma}\|S_+(x + y) - S_+(x + \tilde{y})\| \leq \|y - \tilde{y}\|, \\ (c_2) \quad &\|S_+(x + y) - S_+(\tilde{x} + y)\| \geq \|x - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Тогда

- 1) существует многообразие  $\mathcal{M}^- = \{f(y) + y, y \in P_- \mathcal{O}\}$ , задаваемое функцией  $f : P_- \mathcal{O} \rightarrow P_+ \mathcal{O}$  из  $B_\gamma(\mathcal{O})$ ;
- 2) многообразие является инвариантным множеством  $S(\mathcal{M}^-) = \mathcal{M}^-$ ; при этом  $S^n(m) \subset \mathcal{O}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , для всех  $m \in \mathcal{M}^-$ .

Если

$$(c_3) \quad \|S_+(f(y) + y) - S_+(\tilde{f}(y) + y)\| - \gamma\|S_-(f(y) + y) - S_-(\tilde{f}(y) + y)\| \geq \|f(y) - \tilde{f}(y)\|,$$

где равенство возможно только при  $f(y) = \tilde{f}(y)$ , то

- 3) многообразие  $\mathcal{M}^-$  определяется однозначно.

Для некомпактного в смысле условия (а<sub>6</sub>) оператора  $S(\cdot)$  задачи, существование и единственность устойчивого многообразия  $\mathcal{M}^-$  можно доказать при наличии экспоненциального растяжения на подпространстве  $P_+(\mathcal{O})$ , т.е. при  $\delta_+ > 0$ .

**Утверждение 5.** Пусть отображение  $S(\cdot)$  в  $\mathcal{O} = \{h : \|x\|, \|y\| \leq r\}$  удовлетворяет условиям (а<sub>1</sub>)–(а<sub>5</sub>). Предположим, что для некоторого  $0 < \gamma \leq 1$  такого, что  $\forall y, \tilde{y} \in P_- \mathcal{O}, \forall x, \tilde{x} \in P_+ \mathcal{O}$  и произвольной функции  $f \in B_\gamma(\mathcal{O})$  имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} (c_{1_1}) \quad &\|S_-(f(y) + y) - S_-(f(\tilde{y}) + \tilde{y})\| + \frac{1}{\gamma}\|S_+(x + y) - S_+(x + \tilde{y})\| \leq \|y - \tilde{y}\|, \\ (c_{2_1}) \quad &\|S_+(x + y) - S_+(\tilde{x} + y)\| \geq (1 + \delta_+)\|x - \tilde{x}\|, \quad \delta_+ > 0. \end{aligned}$$

Тогда имеют место пункты 1–3 утверждения 3.

Рассмотренное множество  $\mathcal{M}^-$  характеризуется условием, что для произвольного  $m \in \mathcal{M}^-$  траектория  $S^n(m) \in \mathcal{O}$  при всех  $n \geq 0$ . Более сильное требование ( $S^n(m) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ) имеет место, если оператор  $S_-(\cdot)$  является, например, слабо сжимающим.

**Следствие.** Пусть в предположениях утверждения 4 для оператора  $S_-(\cdot)$  выполняется неравенство

$$(c_4) \quad \|S_-(f(y) + y)\| \leq \|y\|(1 - \beta\|y\|^p), \quad \beta > 0, \quad p \geq 1.$$

Тогда для любого  $m \in \mathcal{M}^-$  траектория  $S^n(m) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Заметим, что в случае  $\delta_- > 0$  всегда существует  $r > 0$  такое, что в окрестности  $\mathcal{O}$  из условий (а) следует требуемая в утверждении 1 оценка на  $\gamma$  и неравенства (b). Более того, легко показать, что

$$(b_{11}) \quad \|S_{-,g}(x) - S_{-,g}(x)\| + \gamma\|S_{+,g}(x) - S_{+,g}(x)\| \leq \\ \leq \left(1 - \delta_- + 2\theta(\max\{\|x + g(x)\|, \|x + \tilde{g}(x)\|\})\right)\|g(x) - \tilde{g}(x)\|$$

и полученные утверждения обобщают соответствующий результат о неустойчивом многообразии в окрестности гиперболической точки.

На данный момент имеются различные методы исследования устойчивых и неустойчивых многообразий в окрестности негиперболической точки [7–9, 11, 13]. Однако предлагаемые схемы доказательства существенно опираются либо на особенности конкретной задачи, либо на одномерность негиперболического подпространства, либо на частичную гиперболичность разрешающего оператора. В работе данное ограничение формально снято. Более того, сформулированные условия позволяют исследовать задачи, для которых строго гиперболические подпространства отсутствуют, а главные члены оператора динамической системы имеют, например, следующий вид:  $S_{\pm}(h) = P_{\pm}(h \pm c_k h^{2k+1} + \dots)$ .

#### Доказательства утверждений 2 и 4.

**Лемма 1.** Пусть оператор  $S(\cdot)$  удовлетворяет условиям (а). Если  $\gamma \leq 1$ , то для произвольной функции  $g(\cdot) \in A_{\gamma}(\mathcal{O})$  и любого  $\chi \in P_+\mathcal{O}$  уравнение  $S_+(x + g(x)) = \chi$  имеет единственное решение  $x \in P_+\mathcal{O}$ .

*Доказательство.* Действительно, согласно условиям (а), оператор  $L_+^{-1}R_+(g(x) + x)$  является сжимающим и, следовательно, уравнение  $S_+(x + g(x)) \equiv L_+x + R_+(g(x) + x) = \chi$  имеет решение при всех  $\chi \in P_+\mathcal{O}$ :  $x = S_{+,g}^{-1}(\chi)$ . Здесь и далее через  $S_{\pm,g}^{-1}(\cdot)$  обозначаются операторы, обратные к операторам  $S_{\pm,g}(x) \equiv S_{\pm}(x + g(x))$  соответственно.  $\square$

*Доказательство утверждения 2.* Запишем уравнение, определяющее многообразие  $\mathcal{M}^+$ :

$$y = g(x), \quad x \in P_+\mathcal{O}.$$

Отображение  $g(x)$  будем искать в классе  $A_{\gamma}(\mathcal{O})$ , определенном выше. Условие инвариантности многообразия имеет вид

$$g(S_+(x + g(x))) = S_-(x + g(x)) \quad \text{или} \quad g(S_{+,g}(x)) = S_{-,g}(x).$$

Запишем его с учетом обратимости оператора  $S_{+,g}(x) = \chi$  следующим образом:

$$g(\chi) = S_{-,g}(S_{+,g}^{-1}(\chi)) \equiv \mathcal{F}(g, \chi).$$

Данное соотношение рассмотрим как уравнение для определения преобразования  $g(\cdot)$ . Будем решать его по методу последовательных приближений:

$$g^{n+1}(\chi) = \mathcal{F}(g^n, \chi). \quad (2)$$

Согласно замечанию, при  $\delta_+ + \delta_- > 0$  имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(g, \chi) - \mathcal{F}(g, \tilde{\chi})\| &= \|S_{-,g}(S_{+,g}^{-1}(\chi)) - S_{-,g}(S_{+,g}^{-1}(\tilde{\chi}))\| \leq \\ &\leq ((1 - \delta_-)\gamma + \theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1))\|S_{+,g}^{-1}(\chi) - S_{+,g}^{-1}(\tilde{\chi})\| \leq \\ &\leq \frac{(1 - \delta_-)\gamma + \theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1)}{1 + \delta_+ - [\delta_+]\theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1)}\|\chi - \tilde{\chi}\| \leq \gamma\|\chi - \tilde{\chi}\|, \\ \|\mathcal{F}(g, \chi) - \mathcal{F}(g, \tilde{\chi})\| &\leq \gamma\|\chi - \tilde{\chi}\|, \\ \|\mathcal{F}(g, \chi)\| &\leq \gamma\|\chi\|, \end{aligned}$$

которые означают, что оператор  $\mathcal{F}$  отображает множество  $A_\gamma(\mathcal{O})$  в себя. Случай  $\delta_+ = \delta_- = 0$ ,  $\gamma = 1$  рассматривается с учетом неравенств  $(b_{2,3})$ .

Покажем, что оператор  $\mathcal{F}$  является оператором полиномиального сжатия в метрике  $C(P_+\mathcal{O})$ :  $\max_{\chi \in P_+\mathcal{O}} \|g(\chi)\| = |g|$ . Действительно, пусть  $\delta_+ + \delta_- > 0$ . Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(g, \chi) - \mathcal{F}(\tilde{g}, \chi)\| &= \|S_{-,g}(S_{+,g}^{-1}(\chi)) - S_{-,\tilde{g}}(S_{+,\tilde{g}}^{-1}(\chi))\| \leq \\ &\leq \|S_{-,g}(S_{+,g}^{-1}(\chi)) - S_{-,\tilde{g}}(S_{+,g}^{-1}(\chi))\| + \|S_{-,\tilde{g}}(S_{+,g}^{-1}(\chi)) - S_{-,\tilde{g}}(S_{+,\tilde{g}}^{-1}(\chi))\| \leq \\ &\leq \|S_{-,g}(S_{+,g}^{-1}(\chi)) - S_{-,\tilde{g}}(S_{+,g}^{-1}(\chi))\| + \\ &+ ((1 - \delta_-)\gamma + \theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1))\|S_{+,g}^{-1}(\chi) - S_{+,\tilde{g}}^{-1}(\chi)\| \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое. Положим  $x = S_{+,g}^{-1}(\chi)$ ,  $\tilde{x} = S_{+,\tilde{g}}^{-1}(\chi)$ . При этом  $S_{+,g}(x) = \chi = S_{+,\tilde{g}}(\tilde{x})$ . Вычтем из обеих частей данного равенства  $S_{+,\tilde{g}}(x)$  и, согласно замечанию, имеем

$$\|S_{+,g}(x) - S_{+,\tilde{g}}(x)\| = \|S_{+,\tilde{g}}(\tilde{x}) - S_{+,\tilde{g}}(x)\| \geq (1 + \delta_+ - [\delta_+]\theta((\gamma + 1)r)(\gamma + 1))\|x - \tilde{x}\|.$$

Отсюда и из  $(b_1)$  следует оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(g, \chi) - \mathcal{F}(\tilde{g}, \chi)\| &\leq \|S_{-,g}(x) - S_{-,\tilde{g}}(x)\| + \gamma\|S_{+,g}(x) - S_{+,\tilde{g}}(x)\| \leq \\ &\leq \|g(x) - \tilde{g}(x)\| \left(1 - \alpha\|g(x) - \tilde{g}(x)\|^p\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Данное неравенство выполняется при всех  $\chi$ ; следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(\tilde{g})| &\leq \|g(x) - \tilde{g}(x)\| \left(1 - \alpha\|g(x) - \tilde{g}(x)\|^p\right) \leq \\ &\leq |g - \tilde{g}| \left(1 - \alpha|g - \tilde{g}|^p\right) \leq \frac{|g - \tilde{g}|}{\left(1 + \alpha|g - \tilde{g}|^p\right)^p}. \end{aligned}$$

Вторая часть неравенства следует из монотонного возрастания для  $x \in P_+\mathcal{O}$  правой части, согласно  $\|g(x) - \tilde{g}(x)\|$ .

Таким образом, отображение  $\mathcal{F}(g, \chi)$  является слабо сжимающим. Согласно лемме, слабо сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку  $\mathbf{g}$ , и итерационный процесс (2) сходится к  $\mathbf{g}$  с любого начального приближения. Например, можно взять  $g^0 \equiv 0$ . Многообразие  $\mathcal{M}^+$  построено.

Обратимость оператора  $S(h)$  на многообразии следует из обратимости оператора  $S_{+,g}$ . При этом из  $(b_3)$  имеем оценку

$$\|S_{+,g}^{-1}(x)\| \leq \|x\|.$$

Отсюда следует, что все  $S^{-1}(m) \subset \mathcal{O}$ .

Покажем, что произвольная точка  $h = x + y \in \mathcal{O}$  притягивается к многообразию  $\mathcal{M}^+$ . Действительно, рассмотрим точку  $h^1 = S(h)$ . Возьмем на многообразии точку  $m^1 = P_+S(h) + g(P_+S(h))$ .

Тогда из оценки  $(b_1)$  и условия инвариантности многообразия имеем:

$$\begin{aligned} \|h^1 - m^1\| &= \|P_-S(h) - g(P_+S(h))\| \leq \\ &\leq \|P_-S(y+x) - P_-S(g(y)+x)\| + \|g(P_+S(g(y)+x)) - g(P_+S(y+x))\| \leq \\ &\leq \|P_-S(y+x) - P_-S(g(y)+x)\| + \|P_+S(y+x) - P_+S(g(y)+x)\| \leq \\ &\leq \frac{\|y - g(x)\|}{(1 + \alpha\|y - g(x)\|^p)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{dist}_H(\mathcal{M}^+, S^n(h)) \leq \|h^n - m^n\| \leq \frac{\|y - g(x)\|}{(1 + n\alpha\|y - g(x)\|^p)^{1/p}},$$

где  $m^n = P_+(h^n) + g(P_+(h^n)) \in \mathcal{M}^+$ . Утверждение доказано.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть оператор  $S(\cdot)$  удовлетворяет условиям (а). Тогда для произвольного  $y \in P_-O$  и любого  $\chi \in P_+O$  уравнение  $S_+(x+y) = \chi$  имеет единственное решение  $x \in P_+O$ .

*Доказательство.* Действительно, согласно неравенствам (а), оператор  $L_+^{-1}R_+(y+x)$  является сжимающим по  $x$  и, следовательно, уравнение  $S_+(x+y) \equiv L_+x + R_+(y+x) = \chi$  имеет решение при всех  $\chi \in P_+O$ :  $x = S_{+,y}^{-1}(\chi)$ . Здесь и далее через  $S_{+,y}^{-1}(\cdot)$  обозначается оператор, обратный к оператору  $S_+(x+y)$ , т.е.  $S_+(S_{+,y}^{-1}(\chi) + y) = \chi$ .  $\square$

*Доказательство утверждения 4.* Доказательство будем проводить по стандартной [6] схеме. Запишем уравнение, определяющее многообразие  $\mathcal{M}^-$ :

$$x = f(y), \quad y \in P_-O.$$

Отображение  $f(y)$  будем искать в классе  $B_\gamma(O)$ , определенном выше. Условие инвариантности многообразия  $\mathcal{M}^-$  имеет вид

$$f(S_-(f(y)+y)) = S_+(f(y)+y).$$

Для каждого фиксированного  $y$  мы можем обратить оператор  $S_+(y+x)$ , найти  $x$  и переписать исходное выражение следующим образом:

$$f(y) = S_{+,y}^{-1}(f(S_-(f(y)+y))) \equiv \mathcal{G}(f, y). \quad (4)$$

Данное соотношение рассмотрим как уравнение, определяющее преобразование  $f(\cdot)$ . Покажем, что оператор  $\mathcal{G}(\cdot)$  в условиях  $(c_{1,2})$  теоремы имеет неподвижную точку  $\mathbf{f} \in B_\gamma(O)$ .

Пусть

$$\chi = f(S_-(f(y)+y)), \quad \tilde{\chi} = f(S_-(f(\tilde{y})+\tilde{y})). \quad (5)$$

Тогда

$$\|\mathcal{G}(f, y) - \mathcal{G}(f, \tilde{y})\| = \|S_{+,y}^{-1}(\chi) - S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\tilde{\chi})\| \leq \|S_{+,y}^{-1}(\chi) - S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\chi)\| + \|S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\chi) - S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\tilde{\chi})\|, \quad (6)$$

здесь, по определению:  $S_{+,y}^{-1}(\chi) = x : S_+(x+y) = \chi$ ,  $S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\chi) = \tilde{x} : S_+(\tilde{x}+\tilde{y}) = \chi$ ,  $S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\tilde{\chi}) = \hat{x} : S_+(\hat{x}+\tilde{y}) = \tilde{\chi}$ . Из условия  $(c_2)$  следует, что

$$\|S_{+,y}^{-1}(\chi) - S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\tilde{\chi})\| = \|\tilde{x} - \hat{x}\| \leq \|S_+(\tilde{x}+\tilde{y}) - S_+(\hat{x}+\tilde{y})\| = \|\chi - \tilde{\chi}\|.$$

Далее, равенство

$$S_+(x+y) = S_+(\tilde{x}+\tilde{y})$$

с учетом  $(c_2)$  дает оценку

$$\|S_+(x+y) - S_+(x+\tilde{y})\| = \|S_+(\tilde{x}+\tilde{y}) - S_+(x+\tilde{y})\| \geq \|x - \tilde{x}\| = \|S_{+,y}^{-1}(\chi) - S_{+,\tilde{y}}^{-1}(\chi)\|.$$

Отсюда, согласно (5), (6) и  $(c_1)$  имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(f, y) - \mathcal{G}(f, \tilde{y})\| &\leq \|S_+(x+y) - S_+(x+\tilde{y})\| + \|\chi - \tilde{\chi}\| \leq \\ &\leq \|S_+(x+y) - S_+(x+\tilde{y})\| + \gamma\|S_-(f(y)+y) - S_-(f(\tilde{y})+\tilde{y})\| \leq \gamma\|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

В итоге получаем требуемые неравенства

$$\|\mathcal{G}(f, y) - \mathcal{G}(f, \tilde{y})\| \leq \gamma \|y - \tilde{y}\|, \quad \|\mathcal{G}(f, y)\| \leq \gamma \|y\|, \quad (7)$$

которые означают, что оператор  $\mathcal{G}$  отображает множество  $B_\gamma(\mathcal{O})$  в себя. Множество  $B_\gamma(\mathcal{O})$  является замкнутым, равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным относительно метрики  $C(P-\mathcal{O})$ :  $|g| = \max_{y \in P-\mathcal{O}} \|g(y)\|$ . Отсюда и из условия  $(a_6)$  по теореме Асколи—Арцела оператор  $\mathcal{G}(f, y)$ , определяемый соотношением (4) является вполне непрерывным на  $B_\gamma(\mathcal{O})$ . Это позволяет применить принцип Шаудера и доказать, что оператор  $\mathcal{G}$  имеет неподвижную точку  $\mathbf{f}$ :  $\mathbf{f}(y) = \mathcal{G}(\mathbf{f}, y)$ .

Покажем, что при условии  $(c_3)$  теоремы неподвижная точка единственна. Предположим противное, т.е. существуют два отображения  $f, \tilde{f}$  таких, что

$$\begin{aligned} f(y) &= S_{+,y}^{-1}(f(S_-(f(y) + y))) = \mathcal{G}(f, y), \\ \tilde{f}(y) &= S_{+,y}^{-1}(\tilde{f}(S_-(\tilde{f}(y) + y))) = \mathcal{G}(\tilde{f}, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда для их разности имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|f(y) - \tilde{f}(y)\| &\leq d, \\ d &= \|S_+(f(y) + y) - S_+(\tilde{f}(y) + y)\| - \gamma \|S_-(f(y) + y) - S_-(\tilde{f}(y) + y)\|, \end{aligned}$$

при этом правая часть неравенства монотонно возрастает по параметру  $d$  для точек окрестности  $\mathcal{O}$ . Оценим выражение для  $d$  сверху. Для этого подставим в первое слагаемое условие (8). Согласно определению оператора  $S_{+,y}^{-1}(x)$ , для любых  $x, y$  имеет место тождество  $S_{+,y}(S_{+,y}^{-1}(x) + y) = x$ ; следовательно

$$\begin{aligned} \|S_+(f(y) + y) - S_+(\tilde{f}(y) + y)\| &= \|f(S_-(f(y) + y)) - \tilde{f}(S_-(\tilde{f}(y) + y))\| \leq \\ &\leq \|f(S_-(f(y) + y)) - \tilde{f}(S_-(f(y) + y))\| + \|\tilde{f}(S_-(f(y) + y)) - \tilde{f}(S_-(\tilde{f}(y) + y))\| \leq \\ &\leq |f - \tilde{f}| + \gamma \|S_-(f(y) + y) - S_-(\tilde{f}(y) + y)\|. \end{aligned}$$

Это дает нам оценку

$$|f - \tilde{f}| = \max_{y \in \mathcal{O}} \|f(y) - \tilde{f}(y)\| \leq |f - \tilde{f}|,$$

которая, по условию теоремы, возможна только при  $|f - \tilde{f}| = 0$ . Утверждение доказано.  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1967. — 90. — 210 с.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 549 с.
4. Корнев А. А. Об аппроксимации аттракторов полудинамических систем// Мат. сб. — 2001. — 192, № 10. — С. 19–32.
5. Ладыженская О. А. О нахождении глобальных минимальных аттракторов для уравнений Навье—Стокса и некоторых других уравнений в частных производных// Успехи мат. наук. — 1987. — 42, № 6. — С. 25–60.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики// Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. — 1973. — 38. — С. 46–93.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения// Собрание сочинений. Т. II. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.
8. Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория// Успехи мат. наук. — 1977. — 32, № 4. — С. 55–112.
9. Пиллюгин С. Ю. Отслеживание в задаче Чефи—Инфанте// Алгебра и анализ. — 2000. — 12, № 4. — С. 231–272.
10. Fursikov A. V. Stabilizability of two-dimensional Navier–Stokes equations with help of boundary feedback control// J. Math. Fluid Mech. — 2001. — 3, № 3. — С. 259–301.
11. Kostin I. N. Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor// Asympt. Anal. — 1998. — 16. — С. 203–222.

12. *Temam R.* Infinite-dimensional system in mechanics and physics. — New York: Springer-Verlag, 1998. — 501 с.
13. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds/ Lect. Notes Math. — 583. — 149 с.

А. А. Корнев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: [kornev@dodo.inm.ras.ru](mailto:kornev@dodo.inm.ras.ru)

## БЫСТРАЯ-МЕДЛЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА ВБЛИЗИ ПРИЗРАЧНОЙ ПЕТЛИ СЕПАРАТРИСЫ

© 2003 г.    **Л. М. ЛЕРМАН, В. Г. ГЕЛЬФРЕЙХ**

Аннотация. Изучается поведение медленной-быстрой (сингулярно возмущенной) гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, теряющей одну степень свободы в сингулярном пределе  $\varepsilon = 0$ , вблизи призрачной петли сепаратрисы, т.е. гомоклинической орбиты к состоянию равновесия типа седло медленной системы с одной степенью свободы. Показано, что для малых  $\varepsilon > 0$  система имеет состояние равновесия типа седло-центр [7], и доказано (с использованием метода, предложенного в [20]), что нормальная форма Мозера существует в  $O(\varepsilon)$ -окрестности состояния равновесия. Показано, что одномерные сепаратрисы состояний равновесия расщепляются, причем расщепление экспоненциально мало. Кроме того, показано, что вне некоторой экспоненциально малой окрестности призрачной петли сепаратрисы на множестве уровня гамильтониана, содержащем седло-центр, большая часть фазового пространства расслоена на диофантовы инвариантные торы.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	85
2. Примеры	90
3. Линейная нормальная форма	93
4. Нормальная форма Мозера вблизи состояния равновесия	95
5. Локальное отображение	100
6. Расщепление сепаратрисы и инвариантные торы	101
Список литературы	105

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из плодотворных подходов к изучению нелинейных систем является поиск (если это возможно) различных временных шкал, а затем исследование полученной разномасштабной системы с помощью теории сингулярных возмущений [1, 8, 17]. В наиболее явной форме этот подход может быть описан с помощью так называемой *медленной-быстрой* или *сингулярно возмущенной* системы (см., например, [8, 17])

$$\varepsilon \frac{dX}{d\tau} = P(X, Y, \varepsilon), \quad \frac{dY}{d\tau} = Q(X, Y, \varepsilon), \quad (1.1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$ , а  $\varepsilon > 0$  — малый вещественный положительный параметр. Переменные  $X$  обычно называются *быстрыми переменными*, а  $Y$  — *медленными переменными*. При  $\varepsilon > 0$  удобно ввести быстрое время  $t = \tau/\varepsilon$  и переписать (1.1) в следующем виде:

$$X' = P(X, Y, \varepsilon), \quad Y' = \varepsilon Q(X, Y, \varepsilon), \quad (1.2)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по быстрому времени. При нашем анализе будут использованы обе эти формы записи системы.

Если положить формально  $\varepsilon = 0$  в (1.1), (1.2), то получим две *предельные* системы. С самого начала ясно, что предельные системы уравнений (1.1) и (1.2) различны. Формальный предел  $\varepsilon = 0$  в (1.1) приводит к алгебраическому уравнению  $P(X, Y, 0) = 0$  и дифференциальной системе, где  $X$  рассматривается как функция от  $Y$ ,  $X = \varphi(Y)$ . Функция  $\varphi$  не обязательно однозначна.

---

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (проект № 00-221), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00905) и программы «Университеты России» (проект № 1905).

Множество точек  $(X, Y)$ , определяемое уравнением  $P(X, Y, 0) = 0$ , обычно называется *медленным многообразием*, а соответствующая система  $\dot{Y} = Q(\varphi(Y), Y, 0)$  — *медленной системой*.

В уравнениях (1.2)  $X$ -проекция предела  $\varepsilon = 0$  определяет так называемую *быструю систему*, в которой  $Y$ -координаты рассматриваются как параметры.  $X$ -координата точки на медленном многообразии является состоянием равновесия быстрой системы. Предельная система (1.2) в пространстве  $(X, Y)$  имеет инвариантное слоение с инвариантными слоями  $Y = Y_0$ , а многообразие состояний равновесия — это медленное многообразие.

Как это принято в теории возмущений, основной нашей задачей является изучение свойств системы (1.1) или (1.2) при положительном  $\varepsilon$  на основе знания свойств обоих предельных систем. Данная выше геометрическая интерпретация предполагает большую гибкость вида (1.2) для качественного исследования. Для анализа быстрой-медленной системы при  $\varepsilon > 0$  будет учитываться поведение обеих систем, медленной и быстрой, а также характер функции  $\varphi(y)$  (однозначность, многозначность и т. п. [17]).

В данной работе применяется и развивается геометрический подход к изучению сингулярно возмущенных гамильтоновых систем. Этот подход первоначально был развит Фенихелом [23] для случая, когда медленное многообразие нормально гиперболично. Здесь же изучение идет в другом направлении и рассматривается случай, когда это многообразие эллиплично (см. ниже). Это приводит к существенно иной картине динамики. На самом деле подход, который используется здесь, близок к подходам, намеченным в статьях Нейштадта [9–11]. Сама статья продолжает исследование, начатое в [25, 26], где динамика вблизи медленного многообразия исследовалась для тех его частей, которые заполнены периодическими орбитами медленной системы. Здесь же изучается динамика системы в окрестности гомоклинической орбиты седла на медленном многообразии при  $\varepsilon > 0$ .

Будем рассматривать следующую сингулярно возмущенную гамильтонову систему с двумя степенями свободы, теряющую одну степень свободы при  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \partial H / \partial y, & \dot{u} &= \partial H / \partial v, \\ \varepsilon \dot{y} &= -\partial H / \partial x, & \dot{v} &= \partial H / \partial u, \end{aligned} \quad (1.3)$$

или в быстром времени

$$\begin{aligned} x' &= \partial H / \partial y, & u' &= \varepsilon \partial H / \partial v, \\ y' &= -\partial H / \partial x, & v' &= -\varepsilon \partial H / \partial u, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $H = H(x, y, u, v, \varepsilon)$  аналитична по всем переменным. Последняя система — это гамильтонова система относительно симплектической формы  $\Omega = dy \wedge dx + \varepsilon^{-1} dv \wedge du$ , а значит такова и первая относительно формы  $\varepsilon \Omega$ .

Ниже будет предполагаться, что медленное многообразие задается однозначной функцией медленных переменных  $(u, v)$  в некоторой области их изменения. Будет предполагаться, что медленные переменные  $(x, y)$  эллиптически вблизи медленного многообразия, т.е. все состояния равновесия, соответствующие точкам на медленном многообразии — это центры.

Наше внимание будет сосредоточено здесь на изучении системы вблизи объекта, называемого «призрачной» петлей сепаратрисы. Это замыкание гомоклинической орбиты на медленном многообразии, существование которой предполагается при  $\varepsilon = 0$ . Эта сепаратриса названа «призрачной», поскольку она не существует как орбита при  $\varepsilon = 0$ , но проявляется во всех порядках разложения по степеням  $\varepsilon > 0$ . Один из результатов данной статьи состоит в том, что такая орбита существует при  $\varepsilon > 0$  с экспоненциально малой погрешностью. Более точно доказывается, что в окрестности «призрачной» сепаратрисы существуют одномерные устойчивые и неустойчивые полусепаратрисы состояния равновесия типа седло-центр [7, 33] такие, что их расщепление экспоненциально мало.

В частных случаях аргументы в пользу экспоненциальной малости были приведены в [22, 29, 31]. Здесь же мы придерживаемся другого подхода (см. [6, 24]) и показываем расщепление сепаратрисы независимо от конкретного вида гамильтониана (гамильтонова природа задачи не была замечена в [22, 29, 31]).

Другие результаты статьи касаются существования инвариантных торов, заполненных квазипериодическими траекториями, вблизи призрачной петли сепаратрисы на множестве уровня гамильтониана, содержащим состояние равновесия.

**1.1. Постановка задачи.** Рассмотрим гамильтонову систему вида (1.4) с аналитическим  $H$  по всем переменным. Наложим следующие условия.

**Предположение 1.** При  $\varepsilon = 0$  система уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

разрешима относительно  $x, y$ :

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v) \quad (1.6)$$

с вещественно-аналитическими функциями  $f, g$  в области  $D_0$  переменных  $(u, v)$ . Кроме того, предполагается, что выполнено неравенство

$$\Delta(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{x=f(u,v), y=g(u,v), \varepsilon=0} \neq 0 \quad (1.7)$$

для гессиана в области  $\mathbb{R}^4$ , содержащей график функции (1.6).

В частности, тогда решения (1.5) локально единственны в силу теоремы о неявной функции. Напомним, что многообразие, заданное уравнениями (1.6) обычно и называется медленным многообразием, а система уравнений для  $\dot{u}, \dot{v}$  в (1.3) после подстановки из (1.6) — медленной системой. Очевидно, что медленная система — гамильтонова система с одной степенью свободы и гамильтонианом

$$h(u, v) = H(f(u, v), g(u, v), u, v, 0).$$

Следующее наше предположение связано с поведением медленной системы. Поскольку медленная система гамильтонова с одной степенью свободы, то это предположение является условием общего положения.

**Предположение 2.** При  $\varepsilon = 0$  медленная система имеет состояние равновесия типа седло  $p$  в  $D_0$  с ассоциированной гомоклинической орбитой  $\Gamma$ .

Задача, к изучению которой мы приступаем, состоит в исследовании динамики системы (1.3) или (1.4) в некоторой окрестности призрачной петли сепаратрисы  $\Gamma$ . Основное внимание будет уделено изучению расщепления сепаратрисы и существованию инвариантных торов вблизи петли. Для медленной-быстрой гамильтоновой системы изучение семейств периодических орбит, гомоклинических орбит к ляпуновским периодическим орбитам в духе [7, 33] требует более продвинутых средств, которые мы надеемся развить в будущем.

Пусть  $(u_0, v_0)$  — состояние равновесия медленной системы; тогда точка  $O = (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0), u_0, v_0)$  — состояние равновесия системы (1.4) при  $\varepsilon = 0$ , поскольку  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  на медленном многообразии. Хотя все точки медленного многообразия являются состояниями равновесия для (1.2) при  $\varepsilon = 0$ , не все из них продолжают как состояния равновесия при  $\varepsilon > 0$ .

Поскольку  $\Delta \neq 0$  в (1.7) для достаточно малых положительных  $\varepsilon$ , решение  $(f(x, y, \varepsilon), g(x, y, \varepsilon))$  системы (1.5) также существует и единственно при достаточно малых  $\varepsilon$  в окрестности медленного многообразия. Подставляя эти функции в третье и четвертое уравнение в (1.4), находим, что получившаяся система  $\varepsilon$ -близка к медленной системе; следовательно, она имеет состояние равновесия  $(u(\varepsilon), v(\varepsilon))$ , устойчивое для  $(u_0, v_0)$ , если только состояние равновесия  $(u_0, v_0)$  невырождено (имеет ненулевые собственные значения). Далее, легко проверяется, что  $(f(u(\varepsilon), v(\varepsilon), \varepsilon), g(u(\varepsilon), v(\varepsilon), \varepsilon), u(\varepsilon), v(\varepsilon)))$  — состояние равновесия (1.4); будем обозначать его через  $O(\varepsilon)$ .

**Замечание 1.1.** Очевидно, что  $O(\varepsilon)$  аналитически зависит от  $\varepsilon$ ; следовательно, можно сдвинуть эту точку в начало координат. Предположим, что это сделано всюду далее. Это означает, в частности, что  $H$  не содержит линейных членов по фазовым переменным вблизи начала координат.

Тип  $O(\varepsilon)$  зависит как от собственных значений быстрой системы на слое  $u = u_0, v = v_0$ , так и от собственных значений состояния равновесия  $(u_0, v_0)$  медленной системы. В общем положении, ввиду гамильтоновости быстрой системы, собственные значения быстрой системы могут быть двух типов: либо парой ненулевых вещественных чисел, либо парой чисто мнимых.

Ниже будет рассматриваться случай, когда  $(u_0, v_0)$  — седло. Динамика медленной системы вблизи центра описана в [26]. Здесь же будет доказано, что для случая ненулевой вещественной пары быстрой системы точка  $O(\varepsilon)$  является седлом системы (1.4), а  $O(\varepsilon)$  есть седло-центр для случая чисто мнимой пары собственных значений быстрой системы. Гомоклиническая орбита к  $O(\varepsilon)$  может существовать в обоих случаях. Нас интересует вопрос о том, существует ли такая орбита; если нет, то каков размер расщепления между ее устойчивыми и неустойчивыми многообразиями.

**1.2. Вещественные быстрые собственные значения.** Допустим на мгновение, что  $\Delta < 0$  в (1.7). Тогда (см. предложение 3.1 ниже) все состояния равновесия, в частности, точка  $O$ , являются седлами быстрой системы. Предполагается, что  $\Delta$  отрицательно для всех состояний равновесия из компоненты связности  $D$ , содержащей  $O$ , и, в частности, в окрестности призрачной сепаратрисы. В этом случае медленное многообразие  $S_0$  системы (1.4) состоит из нормально гиперболических особых точек, поскольку  $\Delta$  просто является произведением быстрых собственных значений при  $\varepsilon = 0$ . Поэтому существует нормально гиперболическое центральное многообразие  $S_\varepsilon$  при  $\varepsilon \neq 0$ , сохранение которого связано с нормальной гиперболическостью. Это центральное многообразие симплектическое относительно вырожденной 2-формы, а сужение (1.4) на это многообразие дает гамильтонову систему, близкую к медленной системе; значит, она имеет состояние равновесия типа седло  $p(\varepsilon)$ , совпадающее в этом случае с  $O$ , а также гомоклиническую орбиту  $\Gamma(\varepsilon)$ , ассоциированную с ним, т.е. петлю сепаратрисы седла  $O(\varepsilon)$ . Эта петля является трансверсальным пересечением на уровне, содержащем  $O$ , двумерных глобальных устойчивых и неустойчивых многообразий точки  $O$ , что сразу следует из нормальной гиперболическости  $S_\varepsilon$ . Согласно результатам [13, 38], не существует нетривиальной динамики в достаточно малой окрестности  $\Gamma(\varepsilon)$ : имеется только однопараметрическое семейство периодических орбит, накапливающееся в  $\Gamma(\varepsilon)$  по одну сторону в смысле значений гамильтониана. Все остальные траектории покидают малую окрестность  $\Gamma(\varepsilon)$ .

**Замечание 1.2.** Этот результат справедлив даже в случае многомерной быстрой системы в предположении, что быстрые собственные значения состояний равновесия на медленном многообразии имеют ненулевые вещественные части (отделенные от нуля в  $D$ ), заменяющем условие  $\Delta < 0$ , чтобы сохранить настоящее инвариантное медленное многообразие при положительных  $\varepsilon$ , а значит, и гомоклиническую орбиту на нем.

Если медленная подсистема также многомерна, то нужно дополнительно требовать, чтобы  $O$  было бы седловым (нет собственных значений с нулевой вещественной частью), а гомоклиническая орбита к  $O$  для медленной системы трансверсальна, т.е. устойчивые и неустойчивые многообразия седловой точки  $O$ , принадлежащие уровню  $H_{\text{slow}} = H_{\text{slow}}(O)$ , пересекаются трансверсально вдоль гомоклинической орбиты (здесь  $H_{\text{slow}}$  — сужение гамильтониана на устойчивое медленное многообразие).

**1.3. Мнимые собственные значения.** Другая, более тонкая, ситуация возникает, когда  $\Delta$  в (1.7) положительно и, следовательно, быстрые собственные значения чисто мнимы. Тогда состояние равновесия  $O(\varepsilon)$  имеет тип седло-центр при положительных  $\varepsilon$  (см. [7, 19]). Такое состояние равновесия имеет одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия, двумерное центральное многообразие, заполненное устойчивыми по Ляпунову периодическими орбитами, а также трехмерные устойчивые и неустойчивые центральные многообразия. Последние состоят из объединения устойчивых и неустойчивых многообразий ляпуновских орбит соответственно. Результаты [27, 33, 35] показывают, что нечего надеяться на получение гомоклинических орбит к  $O$  при малых  $\varepsilon$ , но можно ожидать существования счетного множества значений  $\varepsilon$ , для которых существуют так называемые многообходные гомоклинические орбиты (или многообходные орбиты) в предположении, что рассматриваемая система — обратимая гамильтонова для любого  $\varepsilon$  относительно инволюции  $G$  (см. [27, 35]). В случае необратимой гамильтоновой системы можно рассмотреть двухпараметрическое семейство систем с параметром  $\varepsilon$  и, по крайней мере, одним дополнительным параметром.

Тогда резонно ожидать существования счетных множеств значений параметров, при которых существуют многообходные гомоклинические орбиты к  $O$  (см. [32, 33]).

**1.4. Изменение устойчивости.** Имеется важный случай, когда у быстрой системы изменяется тип состояний равновесия при изменении  $(u_0, v_0)$ . Тогда в быстрой системе происходит бифуркация общего положения, когда центр и седло сливаются и исчезают через параболическую точку (иногда эту бифуркацию называют бифуркацией седло-центр, однако предпочтительнее ее называть параболической бифуркацией, имея в виду состояние равновесия гамильтоновой системы типа седло-центр [7]). Обычно медленное многообразие вблизи кривой  $C$  на  $(u, v)$ -плоскости, в которой изменяется устойчивость, состоит из двух ветвей, а проекция медленного многообразия на медленные переменные имеет особенность типа складки вдоль  $C$ . Обе эти ветви лежат по одну сторону от  $C$  относительно проекции на медленные переменные. На одной ветви этого многообразия состояния равновесия быстрой системы являются седлами, а при фиксированных медленных переменных  $(u_0, v_0)$  диск  $u = u_0, v = v_0$  обычно содержит гомоклиническую орбиту (петлю) седла, заключающую в себе центр, лежащий на другой ветви медленного многообразия. При движении вдоль орбиты медленной системы область внутри петли стягивается в параболической точке при пересечении  $C$  и исчезает при дальнейшем движении вдоль орбиты. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

**Пример.** Медленная-быстрая гамильтонова система описывается гамильтонианом  $H = y^2/2 + x^3/3 + xu + v$  и уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \partial H / \partial y = y, & \dot{u} &= \partial H / \partial v = 1, \\ \varepsilon \dot{y} &= -\partial H / \partial x = -x^2 - u, & \dot{v} &= \partial H / \partial u = -x. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Медленное многообразие задается уравнениями  $y = 0$  и  $x = \pm\sqrt{-u}$ , имеющим складку вдоль кривой  $C : u = 0$ . При  $\varepsilon \neq 0$  движение таково, что  $u$  монотонно возрастает:  $u = t + u_0$ . Для описания движения при  $u \in (-d, d)$ ,  $d > 0$ , можно свести систему к системе с одной степенью свободы с гамильтонианом  $V = v_0 - xu - y^2/2 - x^3/3$  и «временем»  $u$ . Тогда, обозначая штрихом дифференцирование по новому времени, получаем, что

$$\varepsilon x' = -\frac{\partial V}{\partial y} = y, \quad \varepsilon y' = \frac{\partial V}{\partial x} = -x^2 - u, \quad (1.9)$$

или, вводя быстрое время  $u/\varepsilon = \tau$  и переходя к уравнению второго порядка, приходим к уравнению

$$x'' + \varepsilon \tau + x^2 = 0, \quad (1.10)$$

которое в точности является первым уравнением Пенлеве. Таким образом, модельная задача исследования различных явлений в рассматриваемом случае описывается различными решениями этого уравнения. Известно, однако, что решения этого уравнения тесно связаны с задачами этого типа [21].

**1.5. Структура статьи.** Для понимания структуры орбит вблизи призрачной сепаратрисы  $\Gamma$ , как это обычно и делается в аналогичных задачах [37], нужно изучить ее локально вблизи состояния равновесия и глобально — вблизи глобальной части сепаратрисы. Тогда и можно понять все поведение в целом. Для локального изучения очень удобна нормальная форма Мозера [36] — интегрируемое векторное поле. Ввиду сингулярной природы задачи, нужно оценить размер области аналитичности, в которой существует эта нормальная форма. Для сингулярно возмущенной системы также нетривиальна и глобальная часть исследования, поскольку время перехода орбиты из  $O(\varepsilon)$ -окрестности  $O$  в себя вдоль глобальной части призрачной сепаратрисы имеет порядок  $C \log \varepsilon^{-1}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в исходной (медленной) временной шкале, что будет показано ниже.

Остальная часть статьи построена следующим образом. В разделе 2 приводятся примеры систем изучаемого типа. В разделе 3 линеаризованная в точке  $O$  система преобразуется к нормальной форме с помощью линейного симплектического преобразования, аналитически зависящего от  $\varepsilon$  (в противном случае существование такого преобразования хорошо известно [3]). Раздел 4 посвящен преобразованию системы к нормальной форме Мозера локально вблизи  $O$ . Основным моментом

здесь является оценка размера области аналитичности как функции от  $\varepsilon$ . В разделе ddd5 обсуждается отклонение орбит, начинающихся вблизи неустойчивой сепаратрисы  $O$ , когда они все время идут вдоль призрачной сепаратрисы. Это необходимо для того, чтобы гарантировать, что настоящая сепаратриса вернется в малую окрестность точки  $O$  вблизи устойчивой сепаратрисы. Кроме того, здесь приводятся доводы в пользу существования множеств большой меры, состоящих из инвариантных торов в  $O(\varepsilon)$ -окрестности призрачной сепаратрисы. Приводится также пример, демонстрирующий настоящее расщепление сепаратрисы.

## 2. ПРИМЕРЫ

В качестве мотивации рассмотрим некоторые примеры. Будем формулировать эти задачи так, чтобы было ясно, что они удовлетворяют сделанным выше предположениям.

### 2.1. Уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} - y + y^2 = 0 \quad (2.1)$$

первоначально возникло в теории волн на воде при наличии поверхностного напряжения [16]. Эта система легко преобразуется к виду (1.3), если ввести новые переменные (см., напр., [17])

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad y_1 = -y' - \varepsilon^2 y''', \quad y_2 = \varepsilon y''. \quad (2.2)$$

Тогда одно уравнение (2.1) эквивалентно следующей системе:

$$\varepsilon x'_1 = y_1, \quad \varepsilon y'_1 = -y_2 - x_1, \quad x'_2 = x_1, \quad y'_2 = -x_2 + x_2^2, \quad (2.3)$$

которая является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} + x_1 y_2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3}. \quad (2.4)$$

В самом гамильтониане явной зависимости от  $\varepsilon$  нет, но она имеет место в симплектической форме  $\varepsilon dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2$ . Медленное многообразие задается уравнениями  $y_1 = 0$ ,  $x_1 = -y_2$ . После подстановки их в третье и четвертое уравнения системы (2.3) приходим к системе, эквивалентной уравнению (2.1) при  $\varepsilon = 0$ . Она имеет состояние равновесия типа седло при  $(0, 0)$  с гомоклинической орбитой. Для этой системы экспоненциально малое расщепление сепаратрисы было численно исследовано в [29], а некоторые пояснения были даны в [22].

### 2.2. Аналогичное явление обнаружено в [14, 15] при численном изучении системы

$$c^2 \varphi'' + \sin \varphi = q', \quad \lambda^2 q'' - q = -\varphi', \quad ' = d/d\xi. \quad (2.5)$$

Эта система выведена из так называемого нелокального уравнения синус-Гордона [14]

$$\varphi_{tt} + \sin \varphi - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} G(|x-y|, \lambda) \varphi_y dy = 0. \quad (2.6)$$

в предположении, что  $G$  принимает вид «крутой» экспоненциальной функции

$$G(|\xi|, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|\xi|}{\lambda}\right).$$

В этом случае  $G$  является функцией Грина линейного дифференциального оператора  $\lambda^2 \frac{d^2}{dx^2} - 1$ . Поэтому, вводя новую переменную с помощью соотношения

$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x-\xi|}{\lambda}\right) \varphi_\xi d\xi,$$

получаем систему

$$\varphi_{tt} + \sin \varphi = q_x, \quad \lambda^2 q_{xx} - q = -\varphi_x.$$

Решение типа бегущей волны зависит только от  $\xi = x - ct$ . Поэтому оно удовлетворяет системе (2.5). Введем новые переменные и параметры:

$$t = \frac{\xi}{c}, \quad \varepsilon = \frac{c}{\lambda}, \quad \sigma = \lambda^{-1}, \quad \dot{\varphi} = u, \quad \dot{q} = \varepsilon(r - \sigma\varphi),$$

где точка обозначает производную по  $t$ . Тогда система (2.5) эквивалентна системе

$$\dot{\varphi} = u, \quad \dot{u} = -\sin \varphi + \sigma(r - \sigma\varphi), \quad \dot{q} = \varepsilon(r - \sigma\varphi), \quad \dot{r} = \varepsilon q, \quad (2.7)$$

которая является гамильтоновой относительно симплектической формы  $\Omega = du \wedge d\varphi + \varepsilon^{-1} dr \wedge dq$ . Соответствующий гамильтониан равен

$$H = \frac{u^2}{2} + \frac{(r - \sigma\varphi)^2}{2} + 1 - \cos \varphi - \frac{q^2}{2}.$$

Эта гамильтонова система инвариантна относительно сдвига  $L$  в  $\mathbb{R}^4$ :

$$L(u, \varphi, r, q) = (u, \varphi + 2\pi, r + 2\pi\sigma, q).$$

Поэтому получаем симплектическое действие группы  $\mathbb{Z}$ , не имеющее точек накопления. Тогда фактор-пространство  $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}$  — симплектическое многообразие  $M$ , диффеоморфное  $\mathbb{R}^3 \times S^1$ , на котором корректно определено гамильтоново векторное поле. Это векторное поле имеет две особые точки  $O = (u = 0, q = 0, \varphi = 0, r = 0)$  и  $P = (u = 0, q = 0, \varphi = \pi, r = \pi\sigma)$ . Первая точка имеет тип седло-центр, если  $\varepsilon \neq 0$ . Ее собственные значения равны

$$\lambda_{1,2} = \pm i \left[ \sqrt{\sigma^2 + 1} + O(\varepsilon^2) \right] \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4} = \pm \varepsilon / \sqrt{\sigma^2 + 1} + O(\varepsilon^2).$$

Вторая точка  $P$  имеет эллиптический тип, если  $\sigma > 1$ , что всегда и предполагается, поскольку значения  $\lambda^2 \geq 1$  не имеют никакого физического смысла. Значит, если  $|\varepsilon|$  достаточно мало, то получаем задачу рассматриваемого в статье типа. Медленное многообразие здесь задаётся как

$$u = 0, \quad r = \sigma \left( \varphi + \frac{\sin \varphi}{\sigma^2} \right).$$

Так как  $\sigma > 1$ , то второе уравнение можно разрешить относительно  $\varphi$ . Обозначим это решение через  $\Phi(r) = \lambda r + P(r)$ ; очевидно, что  $P(r + 2\pi\sigma) = P(r)$ . После его подстановки в третье и четвертое уравнения в (2.5) получаем гамильтонову систему с одной степенью свободы на цилиндре  $\mathbb{R}^1 \times S^1$  с гомоклинической орбитой, ассоциированной с седловой точкой.

**2.3.** В качестве третьего примера рассмотрим бифуркацию состояния равновесия аналитической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, имеющей пару чисто мнимых собственных значений  $\pm i\omega$ , а также двукратное собственное значение с двумерным блоком в жордановой форме линеаризованной матрицы (неполупростой случай). Хорошо известно (см. [3, 18]), что такая бифуркация является бифуркацией общего положения в однопараметрических семействах. Поэтому пусть  $H(x, y, u, v, \varepsilon)$  — вещественно аналитическая функция такая, что при  $\varepsilon = 0$  соответствующее векторное поле имеет особую точку указанного выше типа в начале координат. Это означает, что гамильтониан можно преобразовать к виду

$$H = \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \pm \frac{v^2}{2} + h(x, y, u, v, \varepsilon)$$

с  $h(0, 0, 0, 0, 0) = 0$ ,  $dh(0, 0, 0, 0, 0) = 0$ ,  $D^2h(0, 0, 0, 0, 0) = 0$ . Условие общности положения, накладываемое на систему, будет явно сформулировано ниже. Ввиду аналитичности гамильтониана  $H$  он может быть разложен в ряд  $H = \sum_n H_n(\xi, \eta, \varepsilon)$ , где через  $H_n$  обозначен полином степени  $n$ , однородный по всем переменным  $\xi = (x, y)$ ,  $\eta = (u, v)$ ,  $\varepsilon$ .

Гамильтонова система не меняется при добавлении к гамильтониану постоянной, а значит все члены, не зависящие от пространственных переменных  $\xi = (x, y)$ ,  $\eta = (u, v)$ , могут быть включены

в значение  $H$  в начале координат. При  $\varepsilon = 0$  начало координат является особой точкой, а потому можно считать, что  $H_1 = 0$  при  $\varepsilon = 0$ . Член  $H_2$  тогда имеет вид

$$\varepsilon(b_1x + b_2y + b_3u + b_4v) + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \pm \frac{v^2}{2}.$$

Обозначим  $X = (x, y, u, v)^T$ ; тогда

$$H_2 = \varepsilon b \cdot X + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \pm \frac{v^2}{2}.$$

Покажем, что сдвигая начало координат, можно получить  $b_1 = b_2 = b_4 = 0$ . В самом деле, симплектическая замена переменных  $X = \varepsilon l + \zeta$  дает соотношение

$$\dot{\zeta} = I(\varepsilon b + R(\varepsilon l + \zeta)) + O(\varepsilon^2 + \|\zeta\|^2),$$

где  $R$  — симметричная матрица вторых производных квадратичной части  $H$ ; при  $\varepsilon = 0$  она вырождена:  $\det R = 0$ . Чтобы избавиться от постоянного члена, положим  $Rl + b = \gamma$ , где  $\gamma$  вводится, чтобы компенсировать условие  $\det R = 0$ . Легко видеть, что можно положить  $\gamma = b_3 e_3$ , где  $e_3$  — единичный вектор с нулевыми первой, второй и четвертой компонентами. После этого получаем

$$H_2 = \varepsilon b_3 u + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \pm \frac{v^2}{2}.$$

Далее нужно преобразовать систему к ее нормальной форме с точностью до членов третьего порядка в гамильтониане. На самом деле нужны только нормализованные члены при  $\varepsilon = 0$ . Такая нормальная форма получается из [12]:

$$H = \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \pm \frac{v^2}{2} + \sum_{m=3}^M \sum_{k=0}^{[m/2]} a_{m-2k,k} u^{m-2k} (x^2 + y^2)^k + H_{M+1}. \quad (2.8)$$

Коэффициент  $a_{30}$  равен коэффициенту  $h_{0030}$  в разложении  $H$  в начале координат при  $\varepsilon = 0$ . Из этой формы гамильтониана следует, что при  $\varepsilon \neq 0$  гамильтониан принимает вид

$$H = H_2 + H_3 + \dots = \left[ \varepsilon b_3 u + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \pm \frac{v^2}{2} \right] + \quad (2.9)$$

$$+ [a_{30} u^3 + a_{11} u(x^2 + y^2) + \varepsilon(b_{20} p_2(u, v) + c_{20}(x^2 + y^2)) + \varepsilon^2 p_1(u, v)] + \dots$$

Укажем теперь условие общности положения семейства. Оно задается неравенством  $Ab_3 \neq 0$ ,  $A = a_{30}$ .

Сначала необходимо выбрать знак  $\varepsilon$ , с которым будем работать. Ясно, что когда  $\varepsilon$  проходит через нуль, система имеет две особые точки для одного знака  $\varepsilon$  и не имеет особых точек для противоположного. Первый случай определяется условием  $-\frac{\varepsilon b_3}{3a_{30}} > 0$ . Предположим для определенности, что  $Ab_3 < 0$ , тогда далее  $-\varepsilon > 0$ .

Следующее преобразование — это масштабирование:  $\varepsilon = \mu^4$ ,  $x = \mu^3 X$ ,  $y = \mu^3 Y$ ,  $u = \mu^2 U$ ,  $v = \mu^3 V$ . 2-Форма  $dy \wedge dx + dv \wedge du$  преобразуется в  $\mu^6(dY \wedge dX + \mu^{-1}dV \wedge dU)$ , а гамильтониан переходит в

$$\mu^6 \left( b_3 U + \omega \frac{X^2 + Y^2}{2} \pm \frac{V^2}{2} + a_{30} U^3 + O(\mu^2) \right);$$

система примет вид

$$\dot{X} = \omega Y + O(\mu^2), \quad \dot{Y} = -\omega X - O(\mu^2), \quad \dot{U} = \mu(\pm V + O(\mu^2)), \quad \dot{V} = -\mu(b_3 + AU^2 + O(\mu^2));$$

полученная система гамильтонова с гамильтонианом  $\mu^{-6}H(\mu^2 X, \mu^2 Y, \mu^2 U, \mu^3 V, \mu^4)$  и симплектической формой  $dY \wedge dX + \mu^{-1}dV \wedge dU$ .

Система, полученная таким образом, имеет вид (1.4), ее медленное многообразие задается уравнением  $X = Y = 0$ , а система на нем — системой

$$\dot{U} = \pm \mu V, \quad \dot{V} = -\mu(b_3 + AU^2),$$

имеющей седло (а также центр) при  $\mu > 0$  с гомоклинической орбитой. Быстрые собственные значения равны  $\pm i\omega$ ; следовательно, выполнены предположения 1, 2.

### 3. ЛИНЕЙНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

В этом разделе изучается квадратичный гамильтониан

$$H_2 = \frac{1}{2}(A\xi, \xi) + (B\xi, \eta) + \frac{1}{2}(C\eta, \eta),$$

соответствующий линейаризации системы (1.4) в точке  $O$ . Соответствующая система дифференциальных уравнений линейна:

$$\xi' = J(A\xi + B^T\eta), \quad \eta' = \varepsilon J(B\xi + C\eta), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь  $2 \times 2$ -матрицы  $A, C$  симметричны, матрицы  $A, B, C$  аналитически зависят от  $\varepsilon$ , а  $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ .

Медленное многообразие системы задается уравнением  $J(A\xi + B^T\eta) = 0$  или, эквивалентно, уравнением  $\xi = -A^{-1}B^T\eta$ . Уравнения медленного многообразия принимают вид

$$\dot{\eta} = \varepsilon J(C - BA^{-1}B^T)\eta.$$

Наложим следующие условия, являющиеся непосредственными следствиями предположений 1 и 2.

L1.  $\det A(0) = \Delta(0) \neq 0$ ;

L2. собственные значения матрицы  $J(C - BA^{-1}B^T)$  либо вещественны, либо чисто мнимы и не обращаются в нуль при  $\varepsilon = 0$ .

Определим теперь возможные типы состояний равновесия системы (3.1) при  $\varepsilon > 0$ .

**Предложение 3.1.** Пусть собственные значения матрицы  $J(C - BA^{-1}B^T)$  вещественны. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) Если  $\Delta < 0$ , то начало координат — состояние равновесия типа седло для систем (3.1). Она имеет четыре вещественных собственных значения  $\pm\varepsilon\lambda(\varepsilon) = \pm\varepsilon(\lambda_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$  и  $\pm\gamma(\varepsilon) = \pm(\gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$ , где  $\pm\lambda_0$  — собственные значения матрицы  $J(C - BA^{-1}B^T)$  линейной медленной системы, а  $\pm\gamma_0$  — собственные значения матрицы  $JA$ , связанной с быстрой системой на слое  $\eta = 0$ . Функции  $\lambda(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)$  аналитичны по  $\varepsilon$ .
- (ii) Если  $\Delta > 0$ , то начало координат — седло-центр. Оно обладает двумя вещественными собственными значениями  $\pm\varepsilon\lambda(\varepsilon) = \pm\varepsilon(\lambda_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$  и двумя чисто мнимыми  $\pm i\omega(\varepsilon) = \pm i(\omega_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$ , причем смысл  $\lambda_0$  и  $\omega_0$  аналогичен (i) и аналитическим функциям  $\lambda(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$ .

Предположим теперь, что собственные значения матрицы  $J(C - BA^{-1}B^T)$  чисто мнимы. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (iii) Если  $\Delta < 0$ , то начало координат — седло-центр для системы (3.1). Оно имеет два вещественных собственных значения  $\pm\lambda(\varepsilon) = \pm(\lambda_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$  и два чисто мнимых  $\pm i\gamma(\varepsilon) = \pm i\varepsilon(\gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$ , где  $\pm\lambda_0$  — собственные значения матрицы  $JA$ , связанные с быстрой системой на слое  $\eta = 0$ , а  $\pm i\gamma_0$  — собственные значения матрицы  $J(C - BA^{-1}B^T)$  линейной медленной системы. Функции  $\lambda(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)$  аналитичны по  $\varepsilon$ .
- (iv) Если  $\Delta > 0$ , то начало координат — эллиптическая точка. Она обладает двумя парами чисто мнимых собственных значений  $\pm i\gamma(\varepsilon) = \pm i(\gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$  и  $\pm i\varepsilon\omega(\varepsilon) = \pm i\varepsilon(\omega_0 + \mathcal{O}(\varepsilon))$ , причем смысл  $i\gamma_0$  и  $i\omega_0$  аналогичен предыдущим случаям, а  $\lambda(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$  — аналитические функции.
- (v) Для любого  $\varepsilon > 0$  гамильтониан  $H_2$  с помощью линейного симплектического преобразования, аналитически зависящего от  $\varepsilon$ , может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} H_2 &= \gamma(\varepsilon)xy + \lambda(\varepsilon)uv \quad \text{или} \quad H_2 = \frac{\omega(\varepsilon)}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(\varepsilon)uv, \\ H_2 &= \lambda(\varepsilon)xy + \frac{\omega(\varepsilon)}{2}(u^2 + v^2) \quad \text{или} \quad H_2 = \frac{\gamma(\varepsilon)}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\omega(\varepsilon)}{2}(u^2 + v^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

в зависимости от медленных собственных значений и знака  $\Delta$ .

Эквивалентно, линеаризованные уравнения принимают вид

$$\xi' = \gamma(\varepsilon)JS\xi, \quad \eta' = \varepsilon\lambda(\varepsilon)JS\eta, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

или

$$\xi' = J\Lambda(\varepsilon)\xi, \quad \eta' = \varepsilon\lambda(\varepsilon)JS\eta, \quad \Lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \omega(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \omega(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

и аналогично для случаев (iii) и (iv).

Преобразование сохраняет форму гамильтоновой системы, поскольку оно сохраняет соответствующую симплектическую форму. Опишем явно все линейные симплектические преобразования, симплектические относительно нашей специальной симплектической формы  $\Omega$ . В конце этого раздела докажем предложение 3.1.

**Лемма 3.2.** *Линейное невырожденное преобразование вида*

$$\hat{\xi} = R_{11}\xi + R_{12}\eta, \quad \hat{\eta} = R_{21}\xi + R_{22}\eta \quad (3.5)$$

сохраняет симплектическую 2-форму  $\Omega = d\xi_2 \wedge d\xi_1 + \varepsilon^{-1}d\eta_2 \wedge d\eta_1$  в том и только том случае, если  $(2 \times 2)$ -матрицы  $R_{ij}$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\det R_{11} + \varepsilon \det R_{12} = 1, \quad R_{11}JR_{21}^T + \varepsilon R_{12}JR_{22}^T = \hat{0}, \quad \det R_{21} + \varepsilon \det R_{22} = \varepsilon.$$

*Доказательство леммы 3.2.* Рассмотрим  $4 \times 4$ -матрицу

$$I_\varepsilon = \begin{pmatrix} J & \hat{0} \\ \hat{0} & \varepsilon J \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что  $\Omega(\vec{u}, \vec{v}) = \langle I_\varepsilon \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^4$ . Пусть  $\mathcal{R}$  —  $(4 \times 4)$ -матрица с блоками  $R_{ij}$ . Тогда

$$\Omega(\mathcal{R}\vec{u}, \mathcal{R}\vec{v}) = \langle I_\varepsilon \mathcal{R}\vec{u}, \mathcal{R}\vec{v} \rangle = \langle \mathcal{R}^T I_\varepsilon \mathcal{R}\vec{u}, \vec{v} \rangle,$$

и легко видеть, что инвариантность формы  $\Omega$  эквивалентна матричному соотношению

$$I_\varepsilon = \mathcal{R}^T I_\varepsilon \mathcal{R},$$

которое можно переписать как

$$\begin{aligned} J &= R_{11}JR_{11}^T + \varepsilon R_{12}JR_{12}^T = (\det R_{11} + \varepsilon \det R_{12})J, \\ \hat{0} &= R_{11}JR_{21}^T + \varepsilon R_{12}JR_{22}^T, \\ \varepsilon J &= R_{21}JR_{21}^T + \varepsilon R_{22}JR_{22}^T = (\det R_{21} + \varepsilon \det R_{22})J, \end{aligned}$$

где было использовано следующее обычное матричное равенство:  $SJS^T = (\det S)J$ , справедливое для любой  $2 \times 2$ -матрицы  $S$ . Отсюда сразу следует лемма 3.2.  $\square$

**Замечание 3.3.** Нетрудно проверить, что если  $\mathcal{R}$  аналитично по  $\varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$  и если  $\mathcal{R}^{-1}$  существует, то  $R_{21}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

*Доказательство предложения 3.1.* Для доказательства предложения выполним линейное симплектическое преобразование, приводящее  $H_2$  к виду (3.2).

В качестве первого шага доказательства предложения 3.1 найдем двумерные инвариантные симплектические плоскости системы (3.1), аналитически зависящие от  $\varepsilon$ , и продолжим по  $\varepsilon$  плоскости  $\eta = 0$  и  $\xi = -A^{-1}B^T\eta$  (они являются собственными плоскостями, соответствующими собственным значениям  $\pm i\omega$  и  $\lambda = 0$ , соответственно, при  $\varepsilon = 0$ ). Будем искать их в виде

$$\eta = P(\varepsilon)\xi, \quad P(0) = 0 \quad \text{и} \quad \xi = R(\varepsilon)\eta, \quad R(0) = -A^{-1}B^T.$$

Инвариантность плоскостей эквивалентна соотношениям

$$\varepsilon J(B + CP) = PJ(A + B^T P) \quad \text{и} \quad \varepsilon RJ(BR + C) = J(AR + B^T).$$

Перепишем эти соотношения в виде

$$PJA - \varepsilon JCP = \varepsilon JB - PJB^T P, \quad JAR - \varepsilon RJC = \varepsilon RJBR - JB^T.$$

Решения этих уравнений — это  $(\varepsilon, P) = (0, \hat{0})$  и  $(\varepsilon, R) = (0, -A^{-1}B^T)$  соответственно. Чтобы применить теорему о неявной функции к любому из этих уравнений, нужно найти производные по  $P$  и  $R$ , соответственно, в точках  $(0, \hat{0})$ ,  $(0, -A^{-1}B^T)$ . Для первого уравнения производная — линейный оператор правого умножения  $Q \rightarrow QJA$ , который обратим; обратный оператор задается правым умножением на  $-A^{-1}J$ . Поэтому первое уравнение имеет единственное  $\varepsilon$ -аналитичное решение  $P(\varepsilon)$ ,  $P(0) = \hat{0}$ . Это же верно и для второго уравнения, поскольку производная в  $(0, -A^{-1}B^T)$  — оператор левого умножения на  $JA$ , который также обратим. Следовательно, имеется единственное решение  $R(\varepsilon)$ ,  $R(0) = -A^{-1}B^T$ .

Следующий шаг состоит в выполнении линейного симплектического преобразования, переводящего построенные выше плоскости в координатные. Собственная замена переменных ищется в виде

$$\xi_1 = R_{11}(\varepsilon)(\xi - R(\varepsilon)\eta), \quad \eta_1 = R_{22}(\varepsilon)(\eta - P(\varepsilon)\xi).$$

В соответствии с обозначениями в (3.5) это означает, что

$$R_{11} = R_{11}(\varepsilon), \quad R_{12} = -R_{11}(\varepsilon)R(\varepsilon), \quad R_{21} = -R_{22}(\varepsilon)P(\varepsilon), \quad R_{22} = R_{22}(\varepsilon).$$

Для определения неизвестных матриц  $R_{11}$  и  $R_{22}$  потребуем следующее:

(i)  $\det R_{11}(\varepsilon) + \varepsilon \det R_{11}(\varepsilon) \det R(\varepsilon) = 1$ , что выполняется в случае, когда

$$\det R_{11}(\varepsilon) = (1 + \varepsilon \det R(\varepsilon))^{-1};$$

(ii)  $R_{11}JP^T R_{22}^T + \varepsilon R_{11}RJR_{22}^T = \hat{0}$ ;

(iii)  $\varepsilon \det R_{22} + \det R_{22} \det P(\varepsilon) = \varepsilon$ .

Имея в виду, что  $P(\varepsilon) = \varepsilon P_1(\varepsilon)$ , третье соотношение будет выполнено, если положить  $\det R_{22}(\varepsilon) = (1 + \det P(\varepsilon))^{-1}$ . Таким образом, определители  $R_{11}$  и  $R_{22}$  заданы, и осталось удовлетворить условию (ii). Поскольку  $\det R_{11} \neq 0$  и  $\det R_{22} \neq 0$ , то это соотношение эквивалентно уравнению

$$JP^T + \varepsilon RJ = \hat{0},$$

которое означает, что инвариантные плоскости  $\eta = P(\varepsilon)\xi$  и  $\xi = R(\varepsilon)\eta$  косоортогональны друг другу относительно  $\Omega$ . Но эти инвариантные плоскости — собственные плоскости, соответствующие собственным значениям  $\pm i\omega$  и  $\pm \varepsilon\lambda(\varepsilon)$ , а их косоортогональность хорошо известна (см. [3]).

Таким образом, после этих преобразований линейная система сводится к блочно-диагональной форме, в которой переменные  $\xi$  и  $\eta$  разделяются. Далее, производим независимые симплектические преобразования на каждой симплектической плоскости такие, что система принимает вид (3.3). Предложение 3.1 доказано.  $\square$

#### 4. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МОЗЕРА ВБЛИЗИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В этом параграфе система вблизи  $O$  будет преобразована к нормальной форме. Единственное, что мешает непосредственному использованию результатов [36] — это то, что параметр  $\varepsilon$  входит сингулярным образом; поэтому нужно оценить размер по  $\varepsilon$  окрестности точки  $O$ , в которой преобразование к нормальной форме аналитично. С этой целью используем подход [20] к доказательству теоремы Мозера, с помощью которого оценки такого рода получаются более просто. Будет показано, что нормальная форма Мозера выполняется в  $O(\varepsilon)$ -окрестности точки  $O$ .

Более точно, докажем следующую теорему.

**Теорема 4.1.** *Существуют достаточно малое положительное  $\varepsilon_0$  и  $C > 0$  такие, что в области, задаваемой неравенством  $\|x\| < C\varepsilon$  в пространстве  $\mathbb{R}^4 \times (0, \varepsilon_0)$ , нормализующее преобразование сходится на любом сечении  $\varepsilon = \text{const}$ .*

Напомним, что в нашем случае при  $\varepsilon > 0$  состояние равновесия  $O$  имеет тип седло-центр (см. выше). Теорема о нормальной форме Мозера для аналитического четырехмерного гамильтонова векторного поля с состоянием равновесия  $O$ , имеющей собственные значения  $(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2)$ ,

где  $\lambda_1/\lambda_2$  не вещественно, доставляет некоторые аналитические симплектические координаты  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  (вообще говоря, комплексные, хотя и существует соответствующая вещественная нормальная форма), в которых гамильтониан принимает вид

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + h_3(x_1 y_1, x_2 y_2). \quad (4.1)$$

Вещественный гамильтониан, в который мы намерены преобразовать исходный, имеет вид

$$H = \frac{\omega(\varepsilon)}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(\varepsilon)uv + h_3\left(\frac{x^2 + y^2}{2}, uv, \varepsilon\right). \quad (4.2)$$

Начнем с системы (1.4):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y}, & u' &= \varepsilon \frac{\partial H}{\partial v}, \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & v' &= -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial u}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Как показывает предложение 3.1, гамильтониан  $H$  вблизи седла-центра может быть приведен к виду

$$H = \frac{\omega(\varepsilon)}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(\varepsilon)uv + H_3(x, y, u, v). \quad (4.4)$$

Прежде чем выполнить процедуру нормализации, преобразуем переменные  $(x, y)$  в комплексные переменные  $(z, w)$  с помощью комплексного симплектического преобразования

$$x = \frac{(i+1)(z+w)}{2}, \quad y = \frac{(i-1)(z-w)}{2}, \quad dy \wedge dx = dw \wedge dz. \quad (4.5)$$

Тогда  $H_2$  принимает вид  $H_2 = i\omega zw + \lambda uv$ , более удобный для нормализующей процедуры, поскольку линейная часть векторного поля диагональна. Условия вещественности этого преобразования суть

$$H(z, -iz^*, u, v, \varepsilon)^* = H(z, -iz^*, u, v, \varepsilon),$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Разлагая  $H_3$  в степенной ряд, получаем следующие соотношения между коэффициентами:

$$a_{m_1 m_2 n_1 n_2} = (i)^{m_1 + m_2} a_{m_2 m_1 n_1 n_2}^*.$$

В частности, если  $m_1 = m_2 = m$ , то  $a_{m, m, n_1, n_2} = (-1)^m a_{m, m, n_1, n_2}$ , т.е.  $a$  чисто мнимо при нечетном  $m$  и вещественно, если  $m$  четно.

После этого линейного комплексного преобразования гамильтониан примет вид

$$H = i\omega(\varepsilon)zw + \lambda(\varepsilon)uv + H_3(z, u, w, v, \varepsilon) \quad (4.6)$$

(здесь  $H_3$  обозначает преобразованные члены третьего порядка). Будем нормализовывать этот гамильтониан далее, причем нужно только убедиться, что нормализующие преобразования аналитичны в некоторой окрестности точки  $O$ , зависящей от  $\varepsilon$ . Как уже говорилось, для нормализации системы используется метод, предложенный в [20]. Этот метод применим к векторным полям, а не к гамильтониану, что и обычно при нормализации гамильтоновых систем. Поскольку мы непосредственно следуем [20], изложим только общую схему и докажем моменты, связанные с оценкой размера окрестности аналитичности.

Введем следующие обозначения. Полагая

$$F = (f_1, \varepsilon f_2, -g_1, -\varepsilon g_2), \quad Z = (z, u, w, v)^T,$$

видим, что система дифференциальных уравнений (1.4) примет вид

$$Z' = F(Z), \quad (4.7)$$

а соответствующая нормальная форма есть

$$\zeta' = N(\zeta), \quad (4.8)$$

где  $\zeta$  — четырехмерный комплексный вектор-столбец,  $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)^T$ , а  $(\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , — пары канонически сопряженных переменных,

$$N(\zeta) = (\xi_1 A_1(\xi\eta), \varepsilon \xi_2 A_2(\xi\eta), -\eta_1 A_1(\xi\eta), -\varepsilon \eta_2 A_2(\xi\eta)). \quad (4.9)$$

Для любого степенного ряда  $f$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\hat{f}$  обозначает этот же ряд без линейных членов (это же обозначение будет использоваться для векторных функций). Тогда векторное поле  $F$  может быть представлено как

$$F(Z) = \Lambda Z + \hat{F}(Z) \quad (4.10)$$

с диагональной матрицей  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \varepsilon \lambda_2, -\lambda_1, -\varepsilon \lambda_2)$  ( $\lambda_1 = i\omega$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ ). Для целочисленных 2-векторов  $\alpha, \beta, \gamma$  определим следующие операторы в кольце формальных степенных рядов. Если  $f$  — такой ряд, то определим проекционные операторы

$$P_\gamma f = \sum_{\alpha-\beta=\gamma} f_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (4.11)$$

и

$$\mathcal{P}_{\gamma_1 \gamma_2} F = (P_{\gamma_1} f_1, P_{\gamma_2} f_2, P_{-\gamma_1} g_1, P_{-\gamma_2} g_2). \quad (4.12)$$

Введем обозначение  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ ; тогда  $\mathcal{P}_{e_1 e_2}$  проектирует любое векторное поле на его нормальную форму. Пусть  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{e_1 e_2}$ . Докажем теперь основное предложение, следуя [20].

**Предложение 4.2.** Пусть  $F$  — аналитическое векторное поле по всем переменным  $(Z, \varepsilon)$  вида

$$F(Z, \varepsilon) = (f_1(Z, \varepsilon), \varepsilon f_2(Z, \varepsilon), -g_1(Z, \varepsilon), -\varepsilon g_2(Z, \varepsilon)).$$

Тогда существуют аналитическое преобразование вида  $Z = W(\zeta, \varepsilon)$  и аналитическое векторное поле  $B(\zeta, \varepsilon) = (0, 0, \eta_1 b_1(\xi\eta, \varepsilon), \varepsilon \eta_2 b_2(\xi\eta, \varepsilon))$  такие, что выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} N(\zeta, \varepsilon) + B(\zeta, \varepsilon) = F(W(\zeta, \varepsilon), \varepsilon), \quad \mathcal{P}\hat{W} \equiv 0, \quad (4.13)$$

где  $N$  — нормальная форма (4.9). Здесь  $W$  и  $B$  аналитичны по  $\zeta$  при  $\|\zeta\| < C\varepsilon$ .

**Замечание 4.3.** Преобразование  $W$  в этом предложении, вообще говоря, не симплектично; это является причиной появления  $B$ -члена.

*Доказательство.* Выпишем (4.13) покоординатно с

$$W = (u_1, u_2, v_1, v_2) = (\xi_1 + \hat{u}_1, \xi_2 + \varepsilon \hat{u}_2, \eta_1 + \hat{v}_1, \eta_2 + \varepsilon \hat{v}_2).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} A_1 D_1 u_1 + \varepsilon A_2 D_2 u_1 &= i\omega u_1 + \hat{f}_1(W), \\ A_1 D_1 u_2 + \varepsilon A_2 D_2 u_2 &= \varepsilon(\lambda u_2 + \hat{f}_2(W)), \\ \eta_1 b_1 + A_1 D_1 v_1 + \varepsilon A_2 D_2 v_1 &= -i\omega u_1 - \hat{g}_1(W), \\ \eta_2 b_2 + A_1 D_1 v_2 + \varepsilon A_2 D_2 v_2 &= -\varepsilon(\lambda u_2 + \hat{g}_2(W)), \end{aligned}$$

где  $D_i = \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Учитывая соотношения  $W = \text{id} + \dots$ ,  $A_j(\xi\eta) = \lambda_j + \dots$ , деля второе и третье уравнения на  $\varepsilon$  и сокращая линейные члены по переменным  $(u, v)$ , приходим к следующей форме уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 \xi_1 + A_1 D_1 \hat{u}_1 + \varepsilon A_2 D_2 \hat{u}_1 - i\omega \hat{u}_1 &= \hat{f}_1(W), \\ \hat{A}_2 \xi_2 + A_1 D_1 \hat{u}_2 + \varepsilon A_2 D_2 \hat{u}_2 - \varepsilon \lambda \hat{u}_2 &= \hat{f}_2(W), \\ \eta_1 b_1 \eta_1 - \hat{A}_1 \eta_1 + A_1 D_1 \hat{v}_1 + \varepsilon A_2 D_2 \hat{v}_1 + i\omega \hat{v}_1 &= -\hat{g}_1(W), \\ \eta_2 b_2 \eta_2 - \hat{A}_2 \eta_2 + A_1 D_1 \hat{v}_2 + \varepsilon A_2 D_2 \hat{v}_2 + \varepsilon \lambda \hat{v}_2 &= -\hat{g}_2(W) \end{aligned}$$

с  $\hat{A}_1 = A_1 - i\omega$ ,  $\hat{A}_2 = A_1 - \lambda$ . Ниже вектор  $(\hat{u}_1, \varepsilon \hat{u}_2, \hat{v}_1, \varepsilon \hat{v}_2)^T$  обозначается через  $\hat{W}_\varepsilon$ , а  $\hat{W} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_1, \hat{v}_2)^T$ . Ищем решение этой системы при условии, что  $\mathcal{P}\hat{W} \equiv 0$ . Тогда ее решение

единственно [36]. Так как  $W = \text{id} + \hat{W}_\varepsilon$ , то подставляя это в (4.13), после сокращения линейных членов в обеих частях, можно представить (4.13) в виде

$$\mathcal{L}_N(\hat{W}) + \bar{B} = \hat{F}(W), \quad \mathcal{P}\hat{W} \equiv 0, \quad (4.14)$$

где

$$\mathcal{L}_N(\hat{W}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \zeta} N(\zeta) - \Lambda \hat{W}, \quad \bar{B} = (\hat{A}_1 \xi_1, \hat{A}_2 \xi_2, b_1 \eta_1 - \hat{A}_1 \eta_1, b_2 \eta_2 - \hat{A}_2 \eta_2).$$

Это уравнение решается индуктивно с  $\hat{W}^1 = \hat{N}^1 = B^1 \equiv 0$ . Обозначим  $\mathcal{R} = \text{id} - \mathcal{P}$ . Тогда, применяя  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{P}$  к обеим частям (4.14), получаем следующую итерационную процедуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}W^{k+1} &= \mathcal{L}_{N^k}^{-1} \mathcal{R}\hat{F}(W^k), \quad \mathcal{P}\hat{W}^{k+1} \equiv 0, \\ \xi_j \hat{A}_j^{k+1} &= P_{e_j} \hat{f}_j(W^{k+1}), \\ \eta_j b_j^{k+1} &= P_{-e_j} \hat{g}_j(W^{k+1}) - \eta_j \hat{A}_j^{k+1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Итерационная схема дает последовательности из  $W^k, B_j^k, N^k$ . Легко показывается, что, как и в [20],

(i) эти последовательности стабилизируются, т.е.

$$W^{k+1} - W^k = O(k+1), \quad N^{k+1} - N^k = O(k+1), \quad B^{k+1} - B^k = O(k+1)$$

для всех  $k \geq 1$ ;

(ii) эти последовательности аналитических преобразований равномерно ограничены по  $k$  (при фиксированном  $\varepsilon$ );

(iii) эти последовательности сходятся к некоторому предельному преобразованию. Последнее следует из равномерной ограниченности и формул Коши для коэффициентов аналитической функции.

Для реализации этой схемы, во-первых, нужно вывести оценки норм операторов  $\mathcal{L}_{N^k}^{-1}$ , равномерные по  $k$ . Рассмотрим, как  $\mathcal{L}_N$  действует на степенные ряды. Пусть  $m, n \in \mathbb{N}^2$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ . Если  $f = \sum u_{mn} \xi^m \eta^n$  то, например, для первой компоненты имеем

$$A_1 D_1 u + \varepsilon A_2 D_2 u - i\omega u = \sum (A_1(m_1 - n_1) + \varepsilon A_2(m_2 - n_2) - i\omega) u_{mn} \xi^m \eta^n.$$

Так как  $A_i$  зависят только от произведений  $\xi\eta$ , то  $\mathcal{R}$  действует на степенной ряд таким образом, что каждый член в  $\mathcal{R}u$  умножается на  $A_1(m_1 - n_1) + \varepsilon A_2(m_2 - n_2) - i\omega$ ; поэтому обратный оператор действует таким же образом для рядов из области значений  $\mathcal{R}$  — умножением каждого члена на  $(A_1(m_1 - n_1) + \varepsilon A_2(m_2 - n_2) - i\omega)^{-1}$ . Это является формальной конструкцией обратного оператора. Ниже нам понадобится следующая лемма, играющая решающую роль при оценке окрестности сходимости.

Введем обозначение  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2$  и рассмотрим следующее бесконечное множество комплексных функций комплексных переменных  $(z_1, z_2)$ :

$$\begin{aligned} \psi_{1,\gamma}(z) &= (\gamma_1(i\omega + z_1) + \varepsilon\gamma_2(\lambda + z_2) \pm i\omega)^{-1}, \\ \psi_{2,\gamma}(z) &= (\gamma_1(i\omega + z_1) + \varepsilon\gamma_2(\lambda + z_2) \pm \varepsilon\lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Напомним, что  $\varepsilon$  предполагается положительным. Для определенности,  $\lambda$  и  $\omega$  также предполагаются положительными.

**Лемма 4.4.** *Существуют положительные постоянные  $c, d$  такие, что при  $|z_1| < d\varepsilon, |z_2| < d$  выполняются следующие равномерные оценки:*

$$\sup_{\gamma \neq \pm e_l} \sup_z |\psi_{l,\gamma}(z)| \leq c/\varepsilon. \quad (4.17)$$

*Доказательство.* Выведем необходимую оценку для функции  $\psi_{1,\gamma}(z)$ ; остальные оценки получаются таким же образом. Имеем

$$\begin{aligned} |m(i\omega + z_1) + \varepsilon(\lambda + z_2)n - i\omega| &\geq |i\omega(m-1) + \varepsilon\lambda n| - |mz_1 + \varepsilon n z_2| \geq \\ &\geq \sqrt{\omega^2(m-1)^2 + \varepsilon^2\lambda^2 n^2} - d\varepsilon(|m| + |n|). \end{aligned}$$

Обозначая  $p = m - 1$ ,  $q = n$  и используя неравенство  $|p + 1| \leq |p| + 1$ , определим функцию

$$f(p, q) = \sqrt{\omega^2 p^2 + \varepsilon^2 \lambda^2 q^2} - d\varepsilon(1 + p + q)$$

с  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $p^2 + q^2 \geq 1$  (здесь предполагается, что  $(m, n) \neq (1, 0)$ , ввиду формы  $\psi_{1,\gamma}$  в (4.16)). Легко проверяется, что функция  $f$  не имеет экстремумов в рассматриваемой области и возрастает при возрастании  $R = p^2 + q^2$ ; таким образом, она принимает минимальные значения на границе области, состоящей из двух лучей  $p = 0$ ,  $q \geq 1$ ,  $q = 0$ ,  $p \geq 1$  и четверти окружности  $p^2 + q^2 = 1$ . Вычисляя эти минимумы, приходим к заключению леммы 4.4 с  $d = \lambda/2(1 + \sqrt{2})$  и  $c = 2/\lambda$ .  $\square$

Для доказательства теоремы 4.1 заметим, что оператор  $\mathcal{L}_{N^k}^{-1}$  в (4.15) действует умножением членов степенного ряда на  $\psi_{l,\gamma}(\hat{A})$ . Поэтому, если  $|\hat{A}_j| < d\varepsilon$ , то эти множители ограничены величиной  $\varepsilon$ .  $\square$

Опишем теперь норму, которая используется для оценки всех преобразований при итерации [20]. Для ограниченной аналитической функции  $f(z_1, \dots, z_n)$ , заданной на полидиске  $D_r = \{|z_i| < r\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , с центром в точке  $z = 0$ , эта норма определяется как

$$\|f\|^2 = \frac{4^n}{\pi^n} \int_{T_r^n} \left| \prod_{j=1}^n (1 + z_j \partial_{z_j}) f \right|^2 d\theta,$$

где  $z_j = |z_j|e^{i\theta_j}$ ,  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in T^n$ , а  $T_r^n = \{|z_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$  — граница Шилова полидиска. Аналитические функции, ограниченные на замыкании полидиска, принимают их максимальные значения на границе Шилова  $T^n$  [28]. Поскольку  $z_j \partial_{z_j}$  совпадает с  $-i\partial_{\theta_j}$  на  $T^n$ , то эта норма может быть записана как

$$\|f\|^2 = \frac{4^n}{\pi^n} \int_{T_r^n} \left| \prod_{j=1}^n (1 - i\partial_{\theta_j}) f \right|^2 d\theta;$$

здесь удобно представлять  $f$  рядом Фурье на  $T^n$ . Описанная норма допускает обычные свойства, доказанные в [20]. Приведем только два из них, которые будут использованы ниже. Фиксируем некоторый полидиск радиуса  $r$ . Тогда имеем

$$\sup |f| \leq \|f\|, \quad (4.18)$$

$$r\|f\| \leq \|z_j f\| \leq 2r\|f\|, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.19)$$

Эти свойства позволяют вывести следующие предложения, которые будут использованы далее. Их доказательства даны в [20]. Для аналитического преобразования  $W = (g_1, \dots, g_n)$  некоторого полидиска  $D_r$  определим  $\|W\|_r^2 = \sum_{j=1}^n \|g_j\|^2$ .

**Предложение 4.5.** Пусть  $f$  — аналитическая функция на некотором полидиске  $D_r$ ,  $s < r$ ,  $\rho > 0$ . Предположим, что преобразование  $W : D_\rho \rightarrow D_s$  удовлетворяет неравенству  $\|W\|_\rho < s$ . Тогда

$$\|f \circ W\|_\rho \leq \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{-n} \sup_r |f|.$$

Следующее предложение позволяет оценивать операторы  $L$  так же, как  $\mathcal{L}_{N^k}^{-1}$ .

**Определение 4.1.** Оператор  $L$ , действующий на степенном ряде как  $Lu(z) = \sum \mu_m(z)u_m z^m$  с аналитическими  $\mu_m(z)$ , называется мультипликативным.

Пусть множество  $\mathbb{N}^2$  представимо в виде объединения его непересекающихся подмножеств:  $\mathbb{N}^2 = \bigcup \Gamma_s$ , и пусть  $L$  не нарушает это разбиение  $\{\Gamma_s\}$ , т.е. любые функции  $\mu_m(z)$  и  $\mu_{m'}(z)$  одинаковы, если  $m, m'$  принадлежат одному и тому же элементу разбиения и коммутируют с проекцией степенного ряда на элемент разбиения (т.е. если только члены с индексами из одного элемента разбиения находятся в ряде).

**Предложение 4.6** (см. [20]). *Если  $L$  не нарушает разбиения  $\{\Gamma_s\}$ , то*

$$\|Lu\| \leq (\sup_s \|\mu_s\|)\|u\|.$$

Продолжим теперь доказательство теоремы 4.1. Поскольку мы взяли  $W^1 = \text{id}$ , то можно найти  $\rho$  такое, что  $\|W^1\|_\rho = 128\rho \leq \varepsilon/3$ . Так как  $W^k = \text{id} + \hat{W}_\varepsilon^k$ , то  $\|W^k\| \leq \|\text{id}\| + \|\hat{W}_\varepsilon^k\| \leq \|\text{id}\| + \|\hat{W}\|^k$ , где нормы берутся над  $\rho$ -окрестностью начала координат. Фиксируем  $r$ -окрестность начала координат такую, что для  $\hat{F}$  справедлива оценка  $\|\hat{F}\| \leq Kr^2$  (напомним, что  $\hat{F}$  имеет второй порядок в начале координат).

Нужно показать, что  $\|\hat{W}^k\| \leq \varepsilon/3$ ; тогда  $\|W^k\| \leq 2\varepsilon/3$ . Имеет место индуктивная оценка

$$\|\hat{W}^{k+1}\| = \|\mathcal{R}\hat{W}^{k+1}\| = \|\mathcal{L}_{N^k}^{-1}\mathcal{R}\hat{F}(W^k)\| \leq \sup \|\psi_{l,\gamma}(z)\| \|\hat{F}(W^k)\| \leq \frac{c}{\varepsilon}Kr^2, \quad (4.20)$$

где используется мультипликативность оператора  $\mathcal{L}_{N^k}^{-1}$  и предложение 4.6. Эта оценка справедлива, если  $|\hat{A}_j^k| \leq d\varepsilon$ ,  $j = 1, 2$ ; согласно предложению 4.5,

$$\sup \|\psi_{l,\gamma}(\hat{A}^k)\| \leq C_1 \sup |\psi_{l,\gamma}(z)| \leq \frac{c}{\varepsilon}.$$

Таким образом, нам еще нужна оценка  $\|\hat{A}_j^k\| \leq d\varepsilon$ ,  $j = 1, 2$ . Она может быть получена из второго соотношения в (4.20) и (4.18):

$$\rho \|\hat{A}_j^{k+1}\| \leq \|\xi_j \hat{A}_j^{k+1}\| \leq \|P_{e_j} \hat{f}_j(W^{k+1})\| \leq \|\hat{f}_j(W^{k+1})\| \leq Kr^2. \quad (4.21)$$

Значит, все эти оценки будут выполняться, если  $cKr^2/\varepsilon < r/3$  и  $K\rho^{-1}r^2 \leq d\varepsilon$ . Но это вытекает из неравенства  $\varepsilon < 9d\rho c^2K$ . Поэтому получена сходимость  $W^k$  к некоторому аналитическому преобразованию. Равномерные оценки функций  $b_j$  выводятся также из последнего соотношения в (4.15). Поскольку все оценки равномерны для заданного  $\varepsilon_0 > 0$ , то эта сходимость имеет место при достаточно малых  $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ . Таким образом, гамильтониан в нормальной форме аналитичен по  $\varepsilon$  и  $\zeta$  при  $\|\zeta\| < C\varepsilon_0$ .

Из результатов [36] следует, что для гамильтонова векторного поля  $B \equiv 0$ . Значит, это справедливо в нашем случае при  $\varepsilon > 0$ . Кроме того, чтобы применить результаты [20] — непосредственно показать, что  $B \equiv 0$ , а преобразование — симплектично, — можно перемасштабировать систему (1.4):  $u \rightarrow \sqrt{\varepsilon}u_1$ ,  $v \rightarrow \sqrt{\varepsilon}v_1$ , записать систему в стандартной гамильтоновой форме с симплектической формой  $dy \wedge dx + dv \wedge du$  и гамильтонианом  $H(x, y, \sqrt{\varepsilon}u_1, \sqrt{\varepsilon}v_1, \varepsilon)$ .

## 5. ЛОКАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Здесь, используя полученную нормальную форму, мы выведем отображение из секущей  $N^s$  к устойчивой сепаратрисе в  $O(\varepsilon)$ -окрестности точки  $O$  в секущую  $N^u$  к неустойчивой сепаратрисе в  $O(\varepsilon)$ -окрестности точки  $O$ . В координатах Мозера гамильтоново векторное поле с гамильтонианом (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \left( \omega + \frac{\partial h_3}{\partial \eta} \right) y, & \dot{u} &= \left( \lambda + \frac{\partial h_3}{\partial \xi} \right) u, \\ \varepsilon \dot{y} &= - \left( \omega + \frac{\partial h_3}{\partial \eta} \right) x, & \dot{v} &= - \left( \lambda + \frac{\partial h_3}{\partial \xi} \right) v, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\eta = (x^2 + y^2)/2$ ,  $\xi = uv$ . Функции  $\xi, \eta$  — локальные интегралы; поэтому для любой начальной точки  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  система легко интегрируется как линейная система с постоянными коэффициентами, зависящими от  $\xi_0, \eta_0$ . Не ограничивая общности, считаем, что  $\lambda$  положительно; тогда устойчивое многообразие локально совпадает с  $v$ -осью, а неустойчивое — с  $u$ -осью.

В качестве  $N^s$  возьмем один из двух малых 3-дисков  $v = \pm \varepsilon d$ , а в качестве  $N^u$  — один из двух малых 3-дисков  $u = \pm \varepsilon d$  с некоторым  $d > 0$ . Выбор знаков зависит от призрачной сепаратрисы  $\Gamma$ : предполагается, что  $\Gamma$  становится совпадающей с полуосью  $u > 0$ , т.е.  $N^s$ :  $v = \varepsilon d$  с положительным  $d$ .

Таким образом, можно вывести следующие формулы для локального потока:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t}{\varepsilon} \right] + y_0 \sin \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t}{\varepsilon} \right], & u(t) &= u_0 \exp \left[ \left( \lambda + \frac{\partial h_3^0}{\partial \xi} \right) t \right], \\ y(t) &= -x_0 \sin \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t}{\varepsilon} \right] + y_0 \cos \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t}{\varepsilon} \right], & v(t) &= v_0 \exp \left[ - \left( \lambda + \frac{\partial h_3^0}{\partial \xi} \right) t \right]; \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь верхний индекс нуль означает, что нужно вычислить это выражение в  $\xi_0 = u_0 v_0$ ,  $\eta_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}$ .

На уровне  $H = 0$  в некоторой окрестности точки  $O$  (возможно, меньшей, чем исходная окрестность  $U$ ) можно разрешить уравнение  $H = 0$  относительно переменной  $\xi$ ,  $\xi = a(\eta) = -(\omega/\lambda)\eta - O(\eta^2)$ . В  $N^s \cap \{H = 0\} = N_0^s$  получаем  $v = \varepsilon d$ , а потому  $u_0 = a(\eta_0)/\varepsilon d < 0$ . Значит, в качестве координат в  $N_0^s$  (и  $N_0^u$ ) можно взять  $(x, y)$ . Теперь все готово для вычисления времени перехода из  $N^s$  в  $N^u$ :  $u = -\varepsilon d$  на нулевом уровне гамильтониана. Как легко проверяется, это время равно

$$t_p = \frac{1}{\lambda + \frac{\partial h_3^0}{\partial \xi}} \ln \left( -\frac{d\varepsilon}{u_0} \right).$$

Таким образом, локальное отображение  $T : N_0^s \rightarrow N_0^u$  равно

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t_p}{\varepsilon} \right] + y_0 \sin \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t_p}{\varepsilon} \right], \\ y_1 &= -x_0 \sin \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t_p}{\varepsilon} \right] + y_0 \cos \left[ \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t_p}{\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Можно перейти к симплектическим полярным координатам на  $N_0^s$  и  $N_0^u$ :

$$x = \sqrt{2\eta} \cos \theta, \quad y = \sqrt{2\eta} \sin \theta.$$

Тогда локальное отображение примет вид

$$\eta_1 = \eta, \quad \theta_1 = \theta - \left( \omega + \frac{\partial h_3^0}{\partial \eta} \right) \frac{t_p}{\varepsilon} = \theta + \varepsilon^{-1} a'(\eta) \ln \left( -\frac{\varepsilon^2 d^2}{a(\eta)} \right). \quad (5.4)$$

Значит, это отображение аналитично в проколотой окрестности начала координат, поскольку оно имеет логарифмическую особенность в  $(0, 0)$ , но оно может быть продолжено и до гомеоморфизма некоторого диска с центром в начале координат. Заметим, что вне экспоненциально тонкой окрестности сепаратрисы ( $\eta > C_0 e^{-c/\varepsilon}$ ) время перехода из  $N^s$  в  $N^u$  ограничено снизу некоторой постоянной, пропорциональной  $\varepsilon^{-1}$ .

## 6. РАСЩЕПЛЕНИЕ СЕПАРАТРИСЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ

Здесь изучаются свойства глобального отображения и обсуждается расщепление сепаратрисы, а также существование инвариантных торов на невырожденном уровне гамильтониана. Будут намечены только главные линии исследования; детали будут даны в другой публикации.

Напомним сначала теорему, доказанную в [25] (см. также [5]). Ввиду предположения 1 функции  $f$  и  $g$  в (1.5) аналитичны в комплексной  $\delta$ -окрестности  $D_0 + i\delta$  вещественной области  $D_0$ . Рассмотрим медленное многообразие

$$W_0^{\text{slow}} = \{(x, y, u, v) : x = f(u, v), y = g(u, v), (u, v) \in D_0\}.$$

Введем обозначение  $D_1(\delta) = W_0^{\text{slow}} + i\delta$ .

**Теорема 6.1.** Пусть гамильтониан  $H$  аналитичен в  $D_1(\delta)$  при некотором  $\delta > 0$ . Предположим также, что  $\Delta(u, v) > C > 0$  (см. (1.7)) для всех  $(u, v) \in D_0$  и некоторого  $C$ . Тогда существуют каноническая замена координат  $\Phi : (x, y, u, v) \mapsto (X, Y, U, V)$  и постоянные  $\tilde{\delta}, c > 0$  такие, что в новых координатах гамильтониан  $H$  принимает вид

$$H \circ \Phi^{-1} = H_0(I, U, V; \varepsilon) + R(X, Y, U, V; \varepsilon), \quad (6.1)$$

где  $I = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$  и

$$R = O(e^{-c/\varepsilon}). \quad (6.2)$$

Замена координат и новый гамильтониан аналитичны по  $(X, Y, U, V)$  в  $D_1(\delta/2)$ ,  $C^\infty$  по  $\varepsilon$  на  $[0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$ . Кроме того,  $\Phi(x, y, u, v) = (x - f(u, v), y - g(u, v), u, v) + O(\varepsilon)$ .

В частности, эта теорема утверждает, что система с гамильтонианом (6.1) интегрируема с точностью до экспоненциально малой ошибки, дополнительный интеграл системы с гамильтонианом  $H_0$  — это  $I$ , а эта интегрируемая система имеет настоящее инвариантное многообразие  $X = 0, Y = 0$ , на котором сужение векторного поля  $X_{H_0}$  дает систему с одной степенью свободы и гамильтонианом  $h = H_0(0, U, V, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$ -близкую к медленной системе, а потому она имеет состояние равновесия типа седло с гомоклинической к нему орбитой, поскольку преобразование, переводящее исходный гамильтониан в гамильтониан вида (6.1),  $\varepsilon$ -близко к тождественному в переменных  $(u, v)$ .

Начнем с гамильтониана, имеющего вид, как в теореме 6.1 (мы вернемся к обозначению переменных строчными буквами, что не приводит к недоразумениям):

$$H = h(I, u, v; \varepsilon) + r(x, y, u, v; \varepsilon) = h(0, u, v; \varepsilon) + Ih_1(I, u, v; \varepsilon) + r(x, y, u, v; \varepsilon) \quad (6.3)$$

с экспоненциально малой функцией  $r$  (все функции аналитичны по фазовым переменным  $(x, y, u, v)$  и  $C^\infty$ -гладки по  $\varepsilon$ ). Пусть  $h(u, v; \varepsilon) = h(0, u, v; \varepsilon)$ . Эта функция  $h$  — гамильтониан системы с одной степенью свободы на почти инвариантном медленном многообразии  $W_{\text{slow}}(\varepsilon)$ , заданным уравнением  $x = y = 0$ .

Не ограничивая общности, можно считать, что состояние равновесия типа седло медленной системы расположено в точке  $(u, v) = (0, 0)$  при всех  $\varepsilon$ . Рассмотрим сначала структуру интегрируемой системы с гамильтонианом  $H_0 = h(u, v; \varepsilon) + Ih_1(I, u, v; \varepsilon)$ . Эта система имеет состояние равновесия  $P$  типа центр-седло в точке  $(0, 0, 0, 0)$ . Ее одномерные устойчивая и неустойчивая полусепаратрисы образуют петлю  $\Gamma$ , принадлежащую инвариантной плоскости  $x = y = 0$  гамильтоновой системы с одной степенью свободы и гамильтонианом  $h$ . Структура интегрируемой гамильтоновой системы вблизи  $\Gamma$  хорошо известна [34]. Заметим, что форма этой медленной-быстрой системы такова, что оба интеграла — гамильтониан и дополнительный интеграл — являются регулярными аналитическими функциями, поэтому их совместные уровни, являющиеся инвариантными множествами для потока, те же, что и для несингулярного случая. Сингулярная природа задачи проявляется только в быстром ( $\sim \varepsilon^{-1}$ ) вращении угловой переменной, сопряженной к  $I$ .

Напомним некоторые результаты из [34], касающиеся поведения интегрируемой гамильтоновой системы вблизи гомоклинической орбиты особой точки седло-центр. Для облегчения изложения предположим, что система имеет седло  $P$  на инвариантной плоскости  $x = y = 0$ , устойчивые и неустойчивые многообразия которого образуют две гомоклинические петли (восьмерка), одним из которых является  $\Gamma$ . Рассмотрим здесь только поведение на вырожденном уровне с состоянием равновесия  $P$ .

Вырожденный уровень  $H_0 = 0$  представляет собой одно из следующих множеств.

А) Объединение двух непересекающихся полноторий с выделенными внутренними точками  $(B_1, p_1), (B_2, p_2)$ , которые склеены в этих точках. После склеивания склеенная точка представляет особую точку  $P$ . Полученное многообразие имеет гладкий край — два непересекающихся гладких тора. Внутри этих склеенных полноторий имеется одномерная восьмерка, являющаяся объединением двух гомоклинических петель, каждая из них лежит на своем торе, а одна из петель — это  $\Gamma$ . Каждое полноторие расслаивается на двумерные лагранжевы торы, стягивающимися на свою собственную петлю при  $I \rightarrow 0$ .

Б) Одно полноторие с двумя выделенными внутренними точками  $p_1, p_2$ ; при их отождествлении после склеивания они также представляют особую точку  $P$ . Внутри этого полнотория также лежит восьмерка, а все остальные орбиты принадлежат инвариантным лагранжевым торам, расслаивающим полноторие; границей здесь является один гладкий тор.

В обоих случаях граница — пересечение уровня  $H_0 = 0$  и  $I = I_0$  для некоторого положительного  $I_0$ . Коническая структура уровня  $H_0 = 0$  вблизи  $P$  позволяет  $\Gamma$  образовывать угол между устойчивым и неустойчивым многообразиями в точке  $P$  (они образуют «крест»).

Вернемся теперь к исходной системе, являющейся экспоненциально малым возмущением только что описанной возмущенной системы. Уравнения для нахождения особых точек регулярны; следовательно, ввиду невырожденности  $P$ , заключаем, что в экспоненциально малой окрестности  $P$  имеется состояние равновесия  $O$  того же типа (седло-центр), что и  $P$ . В силу теоремы Мозера (см. раздел 4) в некоторой  $O(\varepsilon)$ -окрестности точки  $O$  можно ввести симплектические аналитические координаты  $(X, Y, U, V)$  (класса  $C^\infty$  по  $\varepsilon$ ) такие, что  $H$  становится аналитической функцией от  $J = (X^2 + Y^2)/2$  и  $\Xi = UV$ . Ввиду экспоненциальной малости аналитической функции  $r$  преобразование будет экспоненциально близко к единичному в некоторой  $O(\varepsilon)$ -окрестности точки  $O$ . Отсюда следует, что след  $\Gamma$  и устойчивая и неустойчивая сепаратрисы точки  $O$  пересекаются трансверсально при  $\varepsilon > 0$  обе секущие  $N^s: V = d\varepsilon, N^u: U = d\varepsilon$ . Одномерные устойчивое  $W^s$  и неустойчивое  $W^u$  многообразия на их компактных кусках аналитически зависят от возмущения, а потому следы  $\Gamma$  и  $W^u$  на  $N^u$  и следы  $\Gamma$  и  $W^s$  на  $N^s$  экспоненциально близки друг к другу.

Оценим теперь возможное время перехода от  $N^u$  до  $N^s$  вдоль глобальной части  $\Gamma$ . Если для исходной системы (1.3) возьмем некоторые сечения входящих и выходящих частей призрачной сепаратрисы в  $O(1)$ -окрестности особой точки  $O$  для системы (1.3), то это время будет иметь порядок 1 относительно  $\varepsilon$ , скажем,  $T + O(\varepsilon)$ . Однако можно преобразовать систему к нормальной форме только в  $O(\varepsilon)$ -окрестности, а потому нужно оценивать время перехода от  $N^u$  к  $N^s$  из такой окрестности. Это время может быть представлено как сумма  $T_{\text{out}} + T + T_{\text{in}}$ , где  $T_{\text{out}}$  — время перехода орбиты от  $N^u$  в  $O(\varepsilon)$ -окрестности к сечению в  $O(1)$ -окрестности, а  $T_{\text{in}}$  определяет аналогичное время для входящей сепаратрисы. Оба этих времени оцениваются в одном и том же духе, так что оценим только время  $T_{\text{out}}$ .

Ясно, что эта задача такая же как если бы мы имели дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \lambda x + \varphi(x)x, \quad \varphi(0) = 0,$$

с некоторой функцией  $\varphi(x)$  и нужно бы было оценить время перехода от  $x = d\varepsilon$  до  $x = d$ , где  $d$  выбрано таким, что  $|\varphi(d)| < \lambda/2$ . Тогда при  $x > 0, \lambda/2 \leq \lambda + \varphi(x) \leq 3\lambda/2$  имеем  $\lambda/2 \leq d \ln |x|/dt \leq 3\lambda/2$  или, интегрируя от  $x_0 = d\varepsilon$  в  $t_0 = 0$  до  $x_1 = d$  в  $t = t_1$ , получим  $\lambda t_1/2 \leq -\ln \varepsilon \leq 3\lambda t_1/2$  или  $-2 \ln \varepsilon/3\lambda \leq t_1 \leq -2 \ln \varepsilon/\lambda$ . Таким образом,  $T_{\text{out}}, T_{\text{in}}$  имеют порядок  $-C \ln \varepsilon$ . В быстрой шкале это время имеет порядок  $-C\varepsilon^{-1} \ln \varepsilon$ .

Таким образом, видим, что отклонение неустойчивой сепаратрисы точки  $O$  от  $\Gamma$  на  $N^u$  экспоненциально мало и это же верно для  $N^s$ . Поэтому нужно доказать только то, что эта сепаратриса экспоненциально мало отклоняется от  $\Gamma$  в течение ее прохождения по глобальной части  $\Gamma$ ; затем она приходит в  $N^s$ , будучи экспоненциально близкой к устойчивой сепаратрисе. Это следует из рассуждений о существовании адиабатических инвариантов в течение этого прохождения (см. [3, 9, 10]). Таким образом, получаем следующее предложение.

**Предложение 6.2.** Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда для любого положительного достаточно малого  $\varepsilon$  исходная медленная-быстрая аналитическая гамильтонова система (1.3) имеет около седла на медленном многообразии настоящее состояние равновесия  $O$  типа седло-центр, одномерные сепаратрисы которого лежат в  $O(\varepsilon)$ -окрестности призрачной сепаратрисы; если они расщепляются, то это расщепление экспоненциально мало относительно параметра сингулярности  $\varepsilon$ .

**Замечание 6.3.** Более интересной и значительно более трудной задачей является вопрос о получении асимптотического представления этого расщепления сепаратрисы, позволяющего сказать, когда это расщепление действительно существует. Работа в этом направлении ведется.

Заметим, что уровень  $H = H(O)$  топологически (и дифференциально) такой же как  $H_0 = 0$ . Рассмотрим область  $V_\varepsilon$  на уровне  $H = H(O)$  вне некоторой экспоненциально тонкой (по  $\varepsilon$ ) окрестности «восьмерки», где лежат расщепленные сепаратрисы точки  $O$ . Для определенности считаем, что мы имеем дело со случаем А и рассмотрим полноторие, содержащее  $\Gamma$ .

В  $V_\varepsilon$  векторное поле  $X_H$  экспоненциально близко к интегрируемому, расслоенному на инвариантные торы. Поэтому можно свести систему к неавтономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы, медленно периодически зависящей от продольной переменной  $s$ , аналогично тому, как это было сделано в [26]. Тогда существование инвариантных торов следует из результатов [2]. Необходимое условие на нелинейность вытекает из вида локального отображения вблизи седла-центра. Здесь главную роль играет логарифмическая особенность. Она позволяет вывести нелинейное условие вне некоторой экспоненциально тонкой окрестности расщепленных сепаратрис.

Рассмотрим пример, в котором сепаратрисы действительно расщепляются.

**Пример.** Рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mu x u^2.$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y, & \dot{u} &= v, \\ \varepsilon \dot{y} &= -x - \mu u^2, & \dot{v} &= u - u^2 - 2\mu x u. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Начало координат является состоянием равновесия типа седло-центр системы. Быстрые переменные соответствуют эллиптическому направлению. На невозмущенном ( $\varepsilon = \mu = 0$ ) медленном многообразии  $W^{\text{slow}} = \{x = y = 0\}$  медленная система имеет гомоклиническую траекторию

$$x_0 = y_0 = 0, \quad u_0 = \frac{6}{\text{ch}^2 t}, \quad v_0 = -\frac{12 \text{sh } t}{\text{ch}^3 t},$$

образующую замкнутую петлю. При  $\mu \neq 0$  медленное многообразие есть  $x = -\mu u^2$ , а медленная система есть

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = u - u^2 + 2\mu^2 u^3.$$

Эта система сохраняет гомоклиническую петлю при всех  $|\mu| < 1/3$ , в  $|\mu| = 1/3$  формируется гомоклинический контур, поскольку имеется другое седло при  $\mu \neq 0$ . Покажем, что вся система не допускает замкнутой однообходной петли.

Следуя Пуанкаре, фиксируем параметр  $\varepsilon$  и предположим, что вспомогательный параметр  $\mu$  достаточно мал. При  $\mu = 0$  гомоклиническая петля существует, поскольку медленная и быстрая переменные не связаны. Вычислим одномерные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия с погрешностью порядка  $O(\mu^2)$ . Будет видно, что они не совпадают в первом порядке по  $\mu$ .

Первые два уравнения гамильтоновой системы линейны по  $x$  и  $y$ , а значит, могут быть явно решены:

$$\begin{aligned} x^\pm(\tau) &= -\mu \int_{\pm\infty}^{\tau} \sin(\tau - \tau') u^2(\tau') d\tau', \\ y^\pm(\tau) &= -\mu \int_{\pm\infty}^{\tau} \cos(\tau - \tau') u^2(\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

Подставим аппроксимацию нулевого порядка в гомоклиническую петлю; тогда получим

$$x_0^\pm(\tau) = -\mu \int_{\pm\infty}^{\tau} \sin(\tau - \tau') u_0^2(\tau') d\tau',$$

$$y_0^\pm(\tau) = -\mu \int_{\pm\infty}^{\tau} \cos(\tau - \tau') u_0^2(\tau') d\tau'.$$

Вычислим разности

$$x_0^+(\tau) - x_0^-(\tau) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\tau - \tau') u_0^2(\tau') d\tau',$$

$$y_0^+(\tau) - y_0^-(\tau) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau - \tau') u_0^2(\tau') d\tau'.$$

Вместо этих двух вещественных интегралов удобно вычислить один комплексный

$$\Delta_0(\tau) = (x_0^+(\tau) - x_0^-(\tau)) + i(y_0^+(\tau) - y_0^-(\tau)) = i\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\tau - \tau')} u_0^2(\tau') d\tau'.$$

Последний интеграл легко вычисляется с помощью вычетов:

$$\Delta_0(\tau) = i\mu e^{-i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau}}{\operatorname{ch}^4(\varepsilon\tau)} d\tau.$$

Поскольку интеграл не обращается в нуль, то устойчивое и неустойчивое многообразия расщепляются.

**Замечание 6.4.** Этот результат утверждает, что здесь нет однообходной гомоклинической орбиты. Несуществование однообходной гомоклинической орбиты не означает, что вообще не существует гомоклинических орбит точки  $O$ , а именно, могут существовать многообходные гомоклинические орбиты при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В самом деле, рассматриваемая система, дополнительно, обратима ( $y \rightarrow -y, v \rightarrow -v, t \rightarrow -t$  не меняют векторного поля). Тогда результаты [27, 35] дают (хотя они и не применимы непосредственно, поскольку предел  $\varepsilon = 0$  сингулярен), что такие многообходные гомоклинические орбиты могут появиться (см. также [32, 33] по поводу двухпараметрического необратимого случая).

**Благодарности.** Первый из авторов всегда будет помнить стимулирующие обсуждения по теме статьи и другим близким темам с профессором В. М. Елеонским, так неожиданно ушедшим из жизни. Он выражает свою признательность Д. В. Тураеву за полезное обсуждение. Он также благодарен профессору Б. Фидлеру за предоставленную возможность работать в Свободном университете Берлина, где была написана часть этой работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике// Успехи мат. наук. — 1963. — 18, № 6. — С. 91–192.
3. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики// Динамические системы—3/ Итоги науки и техн. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. — М.: ВИНТИ, 1985. — 3.
4. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 253 с.

5. Брюнинг Дж., Доброхотов С. Ю., Потеряшкин М. А. Об усреднении гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами// Мат. заметки. — 2001. — 70, № 5. — С. 660–669.
6. Гельфрейх В. Г., Лазуткин В. Ф. Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость// Успехи мат. наук. — 2001. — 56, № 3. — С. 79–142.
7. Лерман Л. М. О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра// Методы качественной теории дифференциальных уравнений (под ред. Л. П. Шильникова)/ Горьковский гос. ун-т, 1987. — С. 89–102.
8. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975. — 248 с.
9. Нейштадт А. И. О точности сохранения адиабатического инварианта// Прикл. мат. и мех. — 1981. — 45, № 1. — С. 1016–1025.
10. Нейштадт А. И. Разделение движений в системах с быстро вращающейся фазой// Прикл. мат. и мех. — 1984. — 48, № 2. — С. 197–204.
11. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях// Диффер. уравн. — 1987. — 23, № 12. — С. 2060–2067.
12. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка// Прикл. мат. и мех. — 1977. — 41, № 1. — С. 24–33.
13. Тураев Д. В., Шильников Л. П. О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла// Докл. АН СССР. — 1989. — 304, № 4. — С. 811–814.
14. Alfimov G. L., Eleonsky V. M., Kulagin N. E. Dynamical systems in the theory of solitons in the presence of nonlocal interactions// Chaos: Int. J. Nonlinear Sci. — 1992. — 2. — С. 565.
15. Alfimov G. L., Eleonsky V. M., Lerman L. M. Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equation// Chaos: Int. J. Nonlinear Sci. — 1998. — 8, № 1. — С. 257–271.
16. Amick C. J., Kirchgässner K. Solitary water-waves in the presence of surface tension// Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1989. — 105. — С. 1–49.
17. Arnold V. I., Afraimovich V. S., Il'yashenko Yu. S., Shil'nikov L. P. Bifurcation theory// Encyclopaedia of Math. Sci. — New York, Berlin: Springer-Verlag, 1994. — 5. — С. 1–205
18. Broer H. W., Chow S. N., Kim Y., Vegter G. A normally elliptic Hamiltonian Hopf bifurcation// Z. angew. Math. und Phys. — 1993. — 44. — С. 389–432.
19. Conley J. C. On the ultimate behavior of orbits with respect to an unstable critical point. I. Oscillating, asymptotic, and capture orbits// J. Different. Equat. — 1969. — 5. — С. 136–158.
20. Delatte D. On normal forms in Hamiltonian dynamics, a new approach to some convergence questions// Ergod. Theory and Dyn. Syst. — 1995. 15. — С. 49–66.
21. Diminnie D. C., Haberman R. Slow passage through a saddle-center bifurcation// J. Nonlinear Sci. — 2000. — 10, № 2. — С. 197–222.
22. Eckhaus W. Singular perturbations of homoclinic orbits in  $\mathbb{R}^4$ // SIAM J. Math. Anal. — 1992. — 23, № 5. — С. 95–127.
23. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations// J. Different. Equat. — 1979. — 31. — С. 53–98.
24. Gelfreich V. G. A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map// Commun. Math. Phys. — 1999. — 201. — С. 155–216.
25. Gelfreich V., Lerman L. Almost invariant elliptic manifold in a singularly perturbed Hamiltonian system// Nonlinearity. — 2002. — 15. — С. 447–457.
26. Gelfreich V., Lerman L. Long-periodic orbits and invariant tori in a singularly perturbed Hamiltonian system// Mathematical Physics Preprint, Archive, 2002, № 02-187, 23 с.
27. Grotta Ragazzo C. Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle-centers// Commun. Pure and Appl. Math. — 1997. — 50. — С. 105–147.
28. Gunning R. C., Rossi H. Analytic functions of several complex variables. — Englewood Cliffs, 1965.
29. Hammerley J. M., Mazzarino G. Computational aspects of some autonomous differential equations// Proc. Roy. Soc. London A. — 1989. — 424. — С. 19–37.
30. Hirsh M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds// Lect. Notes Math. — 1977. — 583. — 149 с.
31. Hunter J. K., Scheurle J. Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves// Physica D. — 1988. — 32. — С. 253–268.
32. Koltsova O. Yu. Multi-round homoclinic orbits to a Hamiltonian with saddle-center// Progr. Nonlinear Sci. Proc. Int. Conf. dedicated to the 100th anniversary of A. A. Andronov, 1, Math. Probl. Nonlinear Dynamics. — Nizhny Novgorod, Inst. Appl. Phys., RAS, Nizhny Novgorod Univ., 2002. — С. 275–283.

33. *Koltsova O., Lerman L. M.* Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center// *Int. J. Bifurcation and Chaos.* — 1995. — 5, № 2. — С. 397–408.
34. *Lerman L. M., Umanskii Ya. L.* Four-dimensional integrable Hamiltonian systems (topological aspects)// *Transl. Math. Monographs.* — AMS, 1998. — № 176.
35. *Mielke A., Holmes P., O'Reilly O.* Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near a Hamiltonian saddle-center// *J. Dyn. Different. Equat.* — 1992. — 4. — С. 95–126.
36. *Moser J. K.* On the generalization of a theorem of Liapunoff// *Commun. Pure and Appl. Math.* — 1958. — 11. — С. 257–275.
37. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics, Part I . — World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser A. Vol. 4; World Scientific P.H., 1998; Part II. Vol. 5, 2001.
38. *Vanderbauwhede A., Fiedler B.* Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems// *Z. angew. Math. und Phys.* — 43. — С. 292–318.

Л. М. Лерман

Институт прикладной математики и кибернетики,  
Нижегородский государственный университет  
E-mail: [lerman1@mm.unn.ru](mailto:lerman1@mm.unn.ru)

В. Г. Гельфрейх

The Mathematics Institute, University of Warwick,  
Coventry, CV4, 7AL, Great Britain  
E-mail: [gelf@maths.warwick.ac.uk](mailto:gelf@maths.warwick.ac.uk)

## ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЯ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНГУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2003 г. С. А. СТЕПИН, А. А. АРЖАНОВ

Аннотация. Изучаются характерные особенности асимптотического распределения собственных значений несамосопряженных краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	108
2. ВКБ-приближения для решений уравнения (1) . . . . .	110
3. Асимптотика характеристических определителей . . . . .	112
4. Распределение собственных значений в области $\Omega^{(1)}(\delta)$ . . . . .	114
5. Формулы связи . . . . .	117
6. Локализация спектра в области $\Omega^{(2)}(\delta)$ . . . . .	121
Список литературы . . . . .	124

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача Штурма—Лиувилля

$$i\varepsilon y''(z) + (z^2 - \lambda)y(z) = 0, \quad (1)$$

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — спектральный параметр,  $\varepsilon > 0$ . Спектр рассматриваемой задачи дискретен и расположен в полуполосе  $\Pi = \{0 < \operatorname{Re} \lambda < 1, \operatorname{Im} \lambda < 0\}$ . На примере (1)–(2) в работе изучаются характерные особенности асимптотического распределения собственных значений несамосопряженных краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной (ср. [3, 5, 6, 9]). В работе [7] установлены следующие результаты о локализации спектра задачи (1)–(2) при малых  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 1** (см. [7]). *На плоскости спектрального параметра  $\lambda$  существует аналитическая кривая*

$$\Gamma = \left\{ a + if(a), a \in (0, 1) \right\} \subset \Pi,$$

где  $f'(a) > 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 1/\sqrt{3}$ , такая, что для произвольного  $\delta > 0$  множество

$$\Omega^{(0)}(\delta) = \left\{ a + ib : a \in (0, 1), \min\{-a, f(a)\} < b < 0, |f(a) - b| > \delta, |a + b| > \delta \right\}$$

при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  не содержит собственных значений задачи (1)–(2). Кривая  $\Gamma$  задается уравнением

$$\operatorname{Re} \xi(\lambda) = 0, \quad \xi(\lambda) = \frac{e^{i\pi/4}}{2} \left( \sqrt{1-\lambda} - \lambda \ln \frac{\sqrt{1-\lambda} + 1}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

и принадлежит треугольнику с вершинами  $1, -2i/5, -i/\sqrt{3}$ .

**Теорема 2** (см. [7]). *Для  $\delta > 0$  и  $\alpha \in (1/2, 1)$  при достаточно малых  $\varepsilon > 0$*

(i) в области

$$\Omega^{(1)}(\delta) = \left\{ a + ib : a \in (0, 1), -a + \delta < b < 1 - a - \delta, |f(a) - b| < \delta \right\}$$

спектр задачи (1)–(2) состоит из однократных собственных значений, находящихся в  $\varepsilon^\alpha$ -окрестностях точек  $\lambda_n^{(1)}$ , расположенных на кривой  $\Gamma$  и являющихся нулями функции  $\cos(\varepsilon^{-1/2}i\xi(\lambda) + \frac{\pi}{4})$ :

$$\xi(\lambda_n^{(1)}) = i\pi\varepsilon^{1/2}(n - \frac{1}{4}), \quad n \in \mathbb{Z};$$

(ii) в области

$$\Omega^{(2)}(\delta) = \left\{ a + ib : f(a) + \delta < b < a - \delta, |a + b| < \delta \right\}$$

спектр задачи (1)–(2) состоит из однократных собственных значений, находящихся в  $\varepsilon^\alpha$ -окрестностях точек

$$\lambda_n^{(2)} = e^{-i\pi/4}\varepsilon^{1/2}(1 + 2n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Комбинируя результаты теорем 1 и 2, для произвольных  $\delta > 0$  и  $\alpha < 1$  можно утверждать, что спектр задачи (1)–(2) в области

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in (0, 1), \operatorname{Im} \lambda \in (-2/7, 0), |\lambda| > \delta, |1 - \lambda| > \delta \right\}$$

при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  состоит из однократных собственных значений, расположенных в  $\varepsilon^\alpha$ -окрестностях отрезка луча  $\arg \lambda = -\pi/4$  и кривой, задаваемой уравнением

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\pi/4} \left( \sqrt{1 - \lambda} - \lambda \ln \frac{\sqrt{1 - \lambda} + 1}{\sqrt{\lambda}} \right) \right\} = 0.$$

Целью настоящей работы является уточнение локализации собственных значений задачи (1)–(2). Основным результатом здесь является

**Теорема 3.** Для произвольного  $\delta > 0$  существуют  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$  и  $C(\delta) > 0$  такие, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  спектр задачи (1)–(2) в областях  $\Omega^{(2)}(\delta)$  и  $\Omega^{(1)}(\delta)$  состоит из однократных собственных значений, расположенных в  $C(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестностях точек  $\lambda_n^{(2)}$  и точек

$$\tilde{\lambda}_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon e^{3i\pi/4} \frac{6\lambda_n^{(1)} - 1}{24\lambda_n^{(1)}(1 - \lambda_n^{(1)})^{3/2}\xi'(\lambda_n^{(1)})}.$$

В силу четности потенциала задачи Штурма—Лиувилля (1)–(2) собственные значения совпадают с нулями характеристических определителей

$$\Delta_1(\lambda) = Y_1(0, \lambda)Y_2(1, \lambda) - Y_1(1, \lambda)Y_2(0, \lambda), \quad \Delta_2(\lambda) = Y_1'(0, \lambda)Y_2(1, \lambda) - Y_1(1, \lambda)Y_2'(0, \lambda),$$

где  $\{Y_1(z, \lambda), Y_2(z, \lambda)\}$  — некоторая фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (1). Метод ВКБ в комплексной форме (см. [4]) позволяет построить ФСР уравнения (1) с известными асимптотиками при  $\varepsilon \downarrow 0$ . С помощью указанной ФСР выписываются характеристические определители  $\Delta_1(\lambda)$  и  $\Delta_2(\lambda)$  и исследуется асимптотический закон распределения их нулей, т.е. собственных значений задачи (1)–(2) при малых значениях параметра  $\varepsilon > 0$ .

В теореме 3 вычислен следующий (по сравнению с теоремой 2) член асимптотического разложения собственных значений, принадлежащих областям  $\Omega^{(1)}(\delta)$  и  $\Omega^{(2)}(\delta)$ , по степеням  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \downarrow 0$  и получена оценка остатка. Техника, использованная при доказательстве теоремы 3 применима и для дальнейшего уточнения локализации спектра задачи (1)–(2). Разработанный здесь подход позволяет изучать локализацию собственных значений спектральных задач для широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

Результаты настоящей работы были анонсированы в [8].

## 2. ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1)

Решения уравнения (1) выражаются через функции Вебера, однако для построения искомой ФСР известных сведений об асимптотике функций Вебера (см. [2]) оказывается недостаточно. Ниже будут построены необходимые для наших целей асимптотические представления решений уравнения (1). Для  $\lambda \in \Pi$  введем в рассмотрение функцию

$$S(z_0, z) = e^{i\pi/4} \int_{z_0}^z (\zeta^2 - \lambda)^{1/2} d\zeta,$$

где  $z_0$  и  $z$  принадлежат полуплоскости  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$  с прямолинейным разрезом, выходящим из точки  $\sqrt{\lambda}$ , а в подынтегральном выражении  $(\zeta^2 - \lambda)^{1/2} = (\zeta - \sqrt{\lambda})^{1/2}(\zeta + \sqrt{\lambda})^{1/2}$  ветви корней — арифметические. Кусочно-гладкий путь  $\gamma$ , лежащий в полуплоскости  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$ , называется *каноническим* для функции  $S(z_0, z)$ , если  $\gamma$  не пересекает разрез и величина  $\operatorname{Re} S(z_0, z)$  не убывает при движении  $z$  вдоль  $\gamma$ . Положим

$$G(z_0, z) = e^{3i\pi/4} \int_{z_0}^z \frac{3\zeta^2 + 2\lambda}{8(\zeta^2 - \lambda)^{5/2}} d\zeta.$$

**Предложение 1.** Пусть для любого  $\lambda$  из ограниченной подобласти  $\Omega \subset \Pi$  существует канонический путь  $\gamma = \gamma_\lambda$  для функции  $S(z_0, z)$ , соединяющий точки  $z_0 = z_0(\lambda)$  и  $z_1 = z_1(\lambda)$ , такой, что  $d_0 := \inf_{\lambda \in \Omega} \operatorname{dist}\{\sqrt{\lambda}, \gamma_\lambda\} > 0$  и  $l_0 := \sup_{\lambda \in \Omega} |\gamma_\lambda| < \infty$ . Тогда дифференциальное уравнение (1) имеет решения  $y_{1,2}(z, \lambda)$ , для которых при  $z \in \gamma_\lambda$ ,  $\lambda \in \Omega$ , справедливы представления:

$$y_j(z, \lambda) = (z^2 - \lambda)^{-1/4} \exp \left\{ (-1)^{j+1} \left( \varepsilon^{-1/2} S(z_0, z) + \varepsilon^{1/2} G(z_0, z) \right) \right\} (1 + \varphi_j(z, \lambda)), \quad (3)$$

$$y'_j(z, \lambda) = (-1)^{j+1} \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (z^2 - \lambda)^{1/4} \exp \left\{ (-1)^{j+1} \left( \varepsilon^{-1/2} S(z_0, z) + \varepsilon^{1/2} \left( G(z_0, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)^{-3/2} \right) \right) \right\} (1 + \phi_j(z, \lambda)), \quad (4)$$

где  $|\varphi_j(z, \lambda)| \leq C(d_0, l_0)\varepsilon$ ,  $|\phi_j(z, \lambda)| \leq C(d_0, l_0)\varepsilon$ ,  $j = 1, 2$ .

Здесь и всюду в дальнейшем символом  $C$ , быть может с аргументами в скобках, но без индексов и надстрочных знаков, обозначены положительные, вообще говоря разные, константы (зависящие только от аргументов в скобках).

*Доказательство.* Положим  $q = q(z, \lambda) = i(z^2 - \lambda)$  и запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^{-1}q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Сделаем замену

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$a = \varepsilon^{-1/2}r - \frac{iz}{2q} + \varepsilon \left( \frac{i}{4r^3} + \frac{5z^2}{8r^5} \right), \quad b = -\varepsilon^{-1/2}r - \frac{iz}{2q} - \varepsilon \left( \frac{i}{4r^3} + \frac{5z^2}{8r^5} \right),$$

и через  $r = r(z, \lambda)$  обозначим выражение  $e^{i\pi/4} (z^2 - \lambda)^{1/2}$ . Замена (6) приводит систему (5) к виду

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} ab + a' - \varepsilon^{-1}q & b^2 + b' - \varepsilon^{-1}q \\ \varepsilon^{-1}q - a^2 - a' & \varepsilon^{-1}q - ab - b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

или, после перегруппировки по степеням  $\varepsilon$ ,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{-2\varepsilon^{-1/2}r - \varepsilon^{1/2}L_2} \times \left[ 2\varepsilon^{-1}q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^{-1/2}iz}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left( \frac{i}{q} + \frac{5z^2}{2q^2} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon^{1/2} \begin{pmatrix} L_3 & L_1 \\ L_1 & L_3 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{4} L_2^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\
 L_1 &= -\frac{9z}{4r^5} + \frac{15iz^3}{4r^7}, \quad L_2 = \frac{1}{4r^3} \left( 2i + \frac{5z^2}{q} \right), \quad L_3 = -\frac{25iz^3}{8r^7} + \frac{z}{r^5}.
 \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся заменой

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = r(z, \lambda)^{-1/2} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(z_0, z) + \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta \right\} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$g(z) = \frac{\varepsilon^{-1}q - ab - a'}{a - b} - \varepsilon^{-1/2}r + \frac{iz}{2q}.$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 v_1' &= \frac{1}{-2\varepsilon^{-1/2}r - \varepsilon^{1/2}L_2} \left( \varepsilon^{1/2}L_1 + \frac{\varepsilon L_2^2}{4} \right) v_2, \\
 v_2' &= \frac{1}{-2\varepsilon^{-1/2}r - \varepsilon^{1/2}L_2} \left[ \left( \varepsilon^{1/2}L_1 - \frac{\varepsilon L_2^2}{4} \right) v_1 + \left( \left( 2\varepsilon^{-1/2}r + \varepsilon^{1/2}L_2 \right)^2 - \frac{\varepsilon L_2^2}{2} \right) v_2 \right],
 \end{aligned}$$

от которой перейдем к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 1 - \int_{z_0}^z \left( L_1 + \frac{\varepsilon^{1/2}L_2^2}{4} \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon L_2}{2r} \right)^{-1} \frac{\varepsilon v_2}{2r} dt, \\
 v_2 &= \int_{z_0}^z \exp \left\{ -2\varepsilon^{-1/2}S(t, z) - \varepsilon^{1/2} \int_t^z L_2 d\tau \right\} \times \\
 &\quad \times \left[ - \left( L_1 - \frac{\varepsilon^{1/2}L_2^2}{4} \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon L_2}{2r} \right)^{-1} \frac{\varepsilon v_1}{2r} + \frac{\varepsilon^{3/2}L_2^2 r}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon L_2}{2r} \right)^{-1} v_2 \right] dt.
 \end{aligned}$$

В силу каноничности пути  $\gamma_\lambda$  рассматриваемая система для  $z \in \gamma_\lambda$  имеет при малых  $\varepsilon > 0$  решение  $v_1(z) = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $v_2(z) = O(\varepsilon)$ , причем оценки остатков равномерны по  $z \in \gamma_\lambda$  и  $\lambda \in \Omega$ , так как  $d_0 > 0$  и  $l_0 < \infty$ . Возвращаясь с помощью замен (6) и (7) к исходным переменным, и учитывая, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta = \\
 &= \int_{z_0}^z \left[ \left( 2\varepsilon^{-1}q \left( 1 + \frac{\varepsilon L_2}{2r} \right)^2 - \frac{\varepsilon^{-1/2}i\zeta}{r} + O(\varepsilon^{1/2}) \right) \left( 2\varepsilon^{-1/2}r \left( 1 + \frac{\varepsilon L_2}{2r} \right) \right)^{-1} - \varepsilon^{-1/2}r + \frac{i\zeta}{2q} \right] d\zeta = \\
 &= \int_{z_0}^z \left( \frac{\varepsilon^{1/2}L_2}{2} + O(\varepsilon) \right) dt = \varepsilon^{1/2}G(z_0, z) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \downarrow 0,
 \end{aligned}$$

получаем для  $y_1(z, \lambda)$  искомые формулы. Решение  $y_2(z, \lambda)$  строится аналогично.  $\square$

Всюду далее под  $(z^2 - \lambda)^{1/2}$ ,  $S(z_0, z)$ ,  $G(z_0, z)$  понимаются однозначные ветви введенных выше функций, отвечающие разрезу  $\{\sqrt{\lambda} - it, t \geq 0\}$ ; в тех случаях, когда необходимо явно указать направление разреза, будем писать  $(z^2 - \lambda)_-^{1/2}$ ,  $S_-(z_0, z)$ ,  $G_-(z_0, z)$ . Однозначные ветви рассматриваемых функций, отвечающие разрезу  $\{\sqrt{\lambda} + (i-1)t, t \geq 0\}$ , будут обозначаться следующим образом:  $(z^2 - \lambda)_+^{1/2}$ ,  $S_+(z_0, z)$ ,  $G_+(z_0, z)$ . Отметим, что  $S_+(\sqrt{\lambda}, 1) = S_-(\sqrt{\lambda}, 1) = \xi(\lambda)$ .

## 3. АСИМПТОТИКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Наряду с  $\Omega^{(1)}(\delta)$  будем рассматривать область

$$\Sigma^{(1)}(\delta) = \left\{ a + ib : a \in (0, 1), -a + \delta < b < 1 - a - \delta, |f(a) - b| < \delta/4 \right\} = \Omega^{(1)}(\delta) \cap \Omega^{(1)}(\delta/4).$$

Для  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  в леммах 5–7 (см. раздел 5) строятся три ФСР уравнения (1):  $\{A_1(z, \lambda), A_2(z, \lambda)\}$ ,  $\{B_1(z, \lambda), B_2(z, \lambda)\}$ ,  $\{C_1(z, \lambda), C_2(z, \lambda)\}$ . При этом, для первой ФСР известна ее асимптотика при  $\varepsilon \downarrow 0$  в точках 1,  $\sqrt{a}$  и  $h = \sqrt{1 + d^2} + id$ , где  $a = \operatorname{Re} \lambda$ ,  $d = \operatorname{Im} \sqrt{\lambda}$ ; для второй ФСР известна асимптотика в точках  $\sqrt{a}$  и 0, для третьей — в точках  $h$  и 0. В разделе 5 находятся коэффициенты линейных комбинаций, посредством которых  $B_1(z, \lambda)$  и  $B_2(z, \lambda)$  выражаются через  $A_1(z, \lambda), A_2(z, \lambda)$  (решение  $B_2(z, \lambda)$  сначала выражается через пару решений  $C_1(z, \lambda), C_2(z, \lambda)$ , а они, в свою очередь, — через  $A_1(z, \lambda), A_2(z, \lambda)$ ). Это позволяет для решений  $B_1(z, \lambda)$  и  $B_2(z, \lambda)$  получить асимптотическое представление в точке  $z = 1$ .

**Лемма 1.** Для произвольного  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta) > 0$  такое, что решение  $B_1(z, \lambda)$  уравнения (1) при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  в точке  $z = 1$  имеет вид

$$B_1(1, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\lambda}} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 1) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \Phi_1(\lambda)),$$

где  $|\Phi_1(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ .

**Лемма 2.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  решение  $B_2(z, \lambda)$  уравнения (1) в точке  $z = 1$  имеет вид

$$\begin{aligned} B_2(1, \lambda) = & \frac{1}{\sqrt[4]{1-\lambda}} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) \right\} \left[ -i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon^{1/2} (G_+(0, h) - G(\sqrt{a}, h) - G(\sqrt{a}, 0) + G(\sqrt{a}, 1)) \right\} (1 + \Phi_2(\lambda)) + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 1) - \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \Phi_3(\lambda)) \right], \end{aligned}$$

где  $|\Phi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 2, 3$ .

Доказательства лемм 1 и 2 вынесены в раздел 5. Для исследования локализации спектра задачи (1)–(2) в области  $\Sigma^{(1)}(\delta)$  используются характеристические определители, построенные по ФСР уравнения (1), аналитически зависящей от параметра  $\lambda$ .

**Лемма 3.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  существует ФСР  $\{D_1(z, \lambda), D_2(z, \lambda)\}$  уравнения (1), для которой на отрезке  $[0, 1/2]$  справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} D_1(z, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{z^2-\lambda}} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(1/2, z) + \varepsilon^{1/2} G(1/2, z) \right\} (1 + \varphi_3(z, \lambda)), \\ D_2(z, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{z^2-\lambda}} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(1/2, z) - \varepsilon^{1/2} G(1/2, z) \right\} (1 + \varphi_4(z, \lambda)), \\ D'_1(z, \lambda) &= \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \sqrt[4]{z^2-\lambda} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(1/2, z) + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{1/2} \left( G(1/2, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2-\lambda)^{-3/2} \right) \right\} (1 + \phi_3(z, \lambda)), \\ D'_2(z, \lambda) &= -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \sqrt[4]{z^2-\lambda} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(1/2, z) - \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon^{1/2} \left( G(1/2, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2-\lambda)^{-3/2} \right) \right\} (1 + \phi_4(z, \lambda)), \end{aligned}$$

и для остаточных членов справедливы оценки

$$|\varphi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\phi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 3, 4.$$

Решения  $D_1(z, \lambda), D_2(z, \lambda)$  аналитичны по  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$ .

Ввиду предложения 1 для доказательства леммы 3 достаточно проверить, что  $[0, 1/2]$  является каноническим путем, равномерно по  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  отделенным от точки  $\sqrt{\lambda}$ . Аналитичность  $D_1(z, \lambda), D_2(z, \lambda)$  по  $\lambda$  при фиксированном  $z$  следует из процедуры построения решений (3)–(4), а также из теоремы об аналитической зависимости решений дифференциального уравнения от параметра.

**Лемма 4.** Для произвольного  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  решения  $D_1(z, \lambda), D_2(z, \lambda)$  выражаются через ФСР  $\{B_1(z, \lambda), B_2(z, \lambda)\}$  по формулам

$$\begin{aligned} D_1(z, \lambda) &= \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 1/2) - \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1/2) \right\} (1 + \Phi_4(\lambda)) B_1(z, \lambda) + \\ &\quad + \exp \{ \varepsilon^{-1/2} (S(\sqrt{a}, 0) + S(1/2, 0)) \} \Phi_5(\lambda) B_2(z, \lambda), \\ D_2(z, \lambda) &= \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} (S(\sqrt{a}, 0) + S(1/2, 0)) \right\} \Phi_6(\lambda) B_1(z, \lambda) + \\ &\quad + \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 1/2) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1/2) \right\} (1 + \Phi_7(\lambda)) B_2(z, \lambda), \end{aligned}$$

где  $|\Phi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 4, 5, 6, 7$ .

Доказательство леммы 4 проводится аналогично доказательствам лемм 1 и 2.

**Утверждение 1.** Для произвольного  $\delta > 0$  существуют  $\varepsilon_5 = \varepsilon_5(\delta) > 0$  и  $K(\delta) > 0$  такие, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_5)$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  характеристические определители  $\Delta_1(\lambda), \Delta_2(\lambda)$ , построенные по ФСР  $\{D_1(z, \lambda), D_2(z, \lambda)\}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \frac{\exp \{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0) \}}{\sqrt[4]{-\lambda} \sqrt[4]{1-\lambda}} \times \left[ -i \exp \{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_8(\lambda)) + \right. \\ &\quad \left. + \exp \{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_9(\lambda)) \right], \\ \Delta_2(\lambda) &= \frac{e^{i\pi/4} \sqrt[4]{-\lambda} \exp \{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0) \}}{\varepsilon^{1/2} \sqrt[4]{1-\lambda}} \times \left[ -i \exp \{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda, 1) + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_{10}(\lambda)) + \right. \\ &\quad \left. + \exp \{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_{11}(\lambda)) \right], \end{aligned}$$

где  $\eta(\lambda) = G(0, 1) = \frac{e^{-i\pi/4}(6\lambda-1)}{24\lambda(1-\lambda)^{3/2}}$ ,  $|\Phi_j(\lambda)| < K(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 8, 9, 10, 11$ . В  $\Sigma^{(1)}(\delta)$  собственные значения задачи (1)–(2) совпадают с нулями аналитических функций

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(\lambda) &= \exp \{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - i\pi/4 + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_8(\lambda)) + \\ &\quad + \exp \{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + i\pi/4 - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_9(\lambda)), \\ \tilde{\Delta}_2(\lambda) &= \exp \{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - i\pi/4 + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_{10}(\lambda)) + \\ &\quad + \exp \{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + i\pi/4 - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \} (1 + \Phi_{11}(\lambda)). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Доказательство проведем для определителя  $\Delta_1(\lambda)$ ; определитель  $\Delta_2(\lambda)$  рассматривается аналогично. Воспользуемся формулами для  $D_1(z, \lambda), D_2(z, \lambda)$  из леммы 4, обозначая коэффициенты при  $B_1(z, \lambda), B_2(z, \lambda)$  в выражениях для  $D_1(z, \lambda)$  и  $D_2(z, \lambda)$  через  $\beta_1, \beta_2$  и  $\beta_3, \beta_4$  соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= D_1(0, \lambda) D_2(1, \lambda) - D_1(1, \lambda) D_2(0, \lambda) = \\ &= (\beta_1 B_1(0, \lambda) + \beta_2 B_2(0, \lambda)) (\beta_3 B_1(1, \lambda) + \beta_4 B_2(1, \lambda)) - \\ &\quad - (\beta_1 B_1(1, \lambda) + \beta_2 B_2(1, \lambda)) (\beta_3 B_1(0, \lambda) + \beta_4 B_2(0, \lambda)) = \\ &= (\beta_1 \beta_4 - \beta_2 \beta_3) (B_1(0, \lambda) B_2(1, \lambda) - B_1(1, \lambda) B_2(0, \lambda)) = \\ &= \left[ \exp \{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 1/2) - \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1/2) \} (1 + \Phi_4(\lambda)) \times \right. \\ &\quad \times \exp \{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 1/2) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 1/2) \} (1 + \Phi_7(\lambda)) - \\ &\quad \left. - \exp \{ \varepsilon^{-1/2} (S(\sqrt{a}, 0) + S(1/2, 0)) \} \Phi_5(\lambda) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\{-\varepsilon^{-1/2}(S(\sqrt{a}, 0) + S(1/2, 0))\}\Phi_6(\lambda)\Big] \times \\ & \times (B_1(0, \lambda)B_2(1, \lambda) - B_1(1, \lambda)B_2(0, \lambda)) = \\ & = (1 + \Phi_{12}(\lambda))(B_1(0, \lambda)B_2(1, \lambda) - B_1(1, \lambda)B_2(0, \lambda)), \end{aligned}$$

где  $|\Phi_{12}(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ . Подставим в это выражение асимптотические представления для решений  $B_1(z, \lambda)$ ,  $B_2(z, \lambda)$  в точках  $z = 0$  и  $z = 1$  из лемм 1, 2, 6. В результате, пользуясь равномерной по  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  отделенностью величины  $\operatorname{Re} S(\sqrt{\lambda}, 0)$  от нуля, для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  получаем

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \frac{1 + \Phi_{12}(\lambda)}{\sqrt[4]{-\lambda}\sqrt[4]{1-\lambda}} \left[ -i \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}(S(\sqrt{a}, 0) + S(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) + S(\sqrt{\lambda}, 1)) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varepsilon^{1/2}(G(\sqrt{a}, 0) + G_+(0, h) - G(\sqrt{a}, h) - G(\sqrt{a}, 0) + G(\sqrt{a}, 1))\right\} \times \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \Phi_2(\lambda))(1 + \varphi_7(0, \lambda)) + \right. \\ & \quad \left. + \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}(S(\sqrt{a}, 0) + S(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) - S(\sqrt{\lambda}, 1)) + \varepsilon^{1/2}(G(\sqrt{a}, 0) - G(\sqrt{a}, 1))\right\} \times \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \Phi_3(\lambda))(1 + \varphi_7(0, \lambda)) - \right. \\ & \quad \left. - \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}(S(\sqrt{a}, 1) - S(\sqrt{a}, 0)) + \varepsilon^{1/2}(G(\sqrt{a}, 1) - G(\sqrt{a}, 0))\right\} \times \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \Phi_1(\lambda))(1 + \varphi_8(0, \lambda))\right] = \\ &= \frac{\exp\left\{\varepsilon^{-1/2}S(\sqrt{\lambda}, 0)\right\}}{\sqrt[4]{-\lambda}\sqrt[4]{1-\lambda}} \times \\ & \quad \times \left[ -i \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}S(\sqrt{\lambda}, 1) + \varepsilon^{1/2}(G_+(0, h) - G(\sqrt{a}, h) + G(\sqrt{a}, 1))\right\} (1 + \Phi_8(\lambda)) + \right. \\ & \quad \left. + \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S(\sqrt{\lambda}, 1) + \varepsilon^{1/2}(G(\sqrt{a}, 0) - G(\sqrt{a}, 1))\right\} (1 + \Phi_9(\lambda))\right]. \end{aligned}$$

Здесь  $|\Phi_j(\lambda)| < K(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 8, 9$ , с некоторой константой  $K(\delta) > 0$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} G_+(0, h) - G(\sqrt{a}, h) + G(\sqrt{a}, 1) &= G_+(0, h) + G(h, 1) = G_+(0, 1), \\ G(\sqrt{a}, 0) - G(\sqrt{a}, 1) &= G(1, 0) = -G(0, 1). \end{aligned}$$

Поскольку  $(1 - \lambda)_+^{3/2} = (1 - \lambda)_-^{3/2}$ , то  $G_+(0, 1) = G_-(0, 1)$  и утверждение доказано.  $\square$

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ОБЛАСТИ $\Omega^{(1)}(\delta)$

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 (см. [1]): устанавливается, что для некоторой константы  $C_1(\delta)$  при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  в  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности каждой точки  $\tilde{\lambda}_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} - \varepsilon\eta(\lambda_n^{(1)})/\xi'(\lambda_n^{(1)})$  такой, что  $\operatorname{dist}\{\tilde{\lambda}_n^{(1)}, \Omega^{(1)}(\delta)\} < C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ , находится ровно один нуль характеристического определителя  $\Delta_1(\lambda)$  ( $\Delta_2(\lambda)$ ) и других нулей у  $\Delta_1(\lambda)$  ( $\Delta_2(\lambda)$ ) в области  $\Omega^{(1)}(\delta)$  нет. Ввиду того, что все рассуждения для  $\Delta_1(\lambda)$  и  $\Delta_2(\lambda)$  идентичны, ограничимся рассмотрением определителя  $\Delta_1(\lambda)$ .

**Утверждение 2.** Для любого  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon_6 = \varepsilon_6(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6)$  корни  $\nu_n^{(1)}$  уравнения

$$\cos\left(\varepsilon^{-1/2}i\xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2}i\eta(\lambda)\right) = 0, \quad (8)$$

принадлежащие области  $\Sigma^{(1)}(\delta)$ , имеют вид

$$\nu_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} - \frac{\varepsilon\eta(\lambda_n^{(1)})}{\xi'(\lambda_n^{(1)})} + O(\varepsilon^2),$$

где оценка остатка равномерна для  $\nu_n^{(1)} \in \Sigma^{(1)}(\delta)$ .

*Доказательство.* Запишем уравнение (8) в виде

$$\exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \frac{i\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + \frac{i\pi}{4} - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} = 0$$

или

$$\exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \frac{i\pi}{4} \right\} (1 + \Phi_{17}(\lambda)) + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + \frac{i\pi}{4} \right\} (1 + \Phi_{18}(\lambda)) = 0,$$

где для голоморфных в  $\Pi$  функций  $\Phi_j(\lambda)$ ,  $j = 17, 18$ , справедливы оценки  $|\Phi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon^{1/2}$ . При этом (ср. [1]) существует  $\varepsilon_7 = \varepsilon_7(\delta) > 0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_7)$  корни указанного уравнения, принадлежащие области  $\Sigma^{(1)}(\delta)$ , имеют вид  $\nu_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} + \mu_n^{(1)}$ ,  $|\mu_n^{(1)}| < C(\delta)\varepsilon$ .

При  $\lambda_n^{(1)} \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  и достаточно малых  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\xi(\nu_n^{(1)}) = \xi(\lambda_n^{(1)}) + \xi'(\lambda_n^{(1)})\mu_n^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$

где оценка остатка равномерна для  $\nu_n^{(1)} \in \Sigma^{(1)}(\delta)$ , а  $\xi(\lambda_n^{(1)}) = i\varepsilon^{1/2}(\pi n - \frac{\pi}{4})$ . Таким образом,

$$\varepsilon^{-1/2} i \xi(\nu_n^{(1)}) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\nu_n^{(1)}) = \frac{\pi}{2} - \pi n + i\varepsilon^{-1/2} \xi'(\lambda_n^{(1)})\mu_n^{(1)} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\nu_n^{(1)}) + O(\varepsilon^{3/2})$$

и, следовательно,

$$\xi'(\lambda_n^{(1)})\mu_n^{(1)} = -\varepsilon \eta(\nu_n^{(1)}) + O(\varepsilon^2).$$

Далее, существует  $\varepsilon_8 = \varepsilon_8(\delta) > 0$  такое, что  $\eta(\nu_n^{(1)}) = \eta(\lambda_n^{(1)}) + O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_8)$ , с равномерной для рассматриваемых  $\nu_n^{(1)}$  оценкой остатка. Наконец, учитывая равномерную по  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  отделенность от нуля величины  $\xi'(\lambda)$ , для  $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_7, \varepsilon_8\})$  получаем

$$\mu_n^{(1)} = -\varepsilon \frac{\eta(\lambda_n^{(1)})}{\xi'(\lambda_n^{(1)})} + O(\varepsilon^2).$$

□

**Утверждение 3.** Для произвольного  $\delta > 0$  существуют положительные  $C_1(\delta)$  и  $\varepsilon_9 = \varepsilon_9(\delta)$  такие, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_9)$  в  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности каждой точки  $\tilde{\lambda}_n^{(1)} \in \Sigma^{(1)}(3\delta/4)$  расположен единственный нуль определителя  $\Delta_1(\lambda)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим точки  $\nu_n^{(1)}$  такие, что соответствующие  $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$  принадлежат  $\Sigma^{(1)}(3\delta/4)$ , и покажем, что можно выбрать  $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{10}(\delta) < \varepsilon_5(\delta/2)$  таким образом, чтобы для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{10})$  на окружностях  $|\lambda - \nu_n^{(1)}| = C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$ ,  $C_2(\delta) = 4K(\delta/2) / \min_{\Sigma^{(1)}(\delta/2)} |\xi'(\lambda)|$ , выполнялись неравенства

$$\left| 2 \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) \right| > \left| \exp \left\{ i \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) \right\} \Phi_9(\lambda) + \exp \left\{ -i \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) \right\} \Phi_8(\lambda) \right|. \quad (9)$$

Прежде всего, выберем  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{11})$  все указанные  $\nu_n^{(1)}$  вместе со своими  $C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестностями принадлежат области  $\Sigma^{(1)}(\delta/2)$  и  $C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности точек  $\nu_n^{(1)}$  не пересекаются (см. утверждение 2).

Далее, заметим, что

$$\cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) = (-1)^{n+1} \sin \left\{ i \varepsilon^{-1/2} \left[ \xi(\lambda) - \xi(\nu_n^{(1)}) + \varepsilon(\eta(\lambda) - \eta(\nu_n^{(1)})) \right] \right\},$$

поскольку  $\xi(\nu_n^{(1)}) + \varepsilon \eta(\nu_n^{(1)}) = (-\frac{\pi}{4} + \pi n) i \varepsilon^{1/2}$ . При условии достаточной малости величин  $|\lambda - \nu_n^{(1)}|$  и  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\frac{|\lambda - \nu_n^{(1)}|}{2} \min_{\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta/2)} |\xi'(\lambda)| \leq \left| \xi(\lambda) - \xi(\nu_n^{(1)}) + \varepsilon(\eta(\lambda) - \eta(\nu_n^{(1)})) \right| \leq 2 |\lambda - \nu_n^{(1)}| \max_{\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta/2)} |\xi'(\lambda)|.$$

В силу этой двусторонней оценки существует  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(\delta) < \varepsilon_{11}(\delta)$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{12})$  на окружности  $|\lambda - \nu_n^{(1)}| = C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$  справедливо неравенство

$$\left| \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) \right| \geq \frac{3}{2} K(\delta/2) \varepsilon. \quad (10)$$

Оценим теперь правую часть в (9) при  $\lambda$ , удовлетворяющих условию  $|\lambda - \nu_n^{(1)}| = C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$ . Если

$$\operatorname{Re} \left\{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \frac{i\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} \leq 0,$$

то правую часть (9) запишем в виде

$$\left| 2 \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) \left[ \Phi_8(\lambda) + \frac{\exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \frac{i\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} (\Phi_9(\lambda) - \Phi_8(\lambda))}{2 \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right)} \right] \right|,$$

где

$$\left| \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \frac{i\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} \right| \leq 1.$$

Отсюда и из оценки (10) с учетом неравенств  $|\Phi_j(\lambda)| < K(\delta/2)\varepsilon$ ,  $j = 8, 9$ , справедливых при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_5(\delta/2))$  (утверждение 1), следует существование  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}(\delta) < \min\{\varepsilon_5(\delta/2), \varepsilon_{12}(\delta)\}$  такого, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{13})$  для рассматриваемых точек окружности  $|\lambda - \nu_n^{(1)}| = C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$  выполнено неравенство

$$\left| \frac{\exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) - \frac{i\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} (\Phi_9(\lambda) - \Phi_8(\lambda))}{2 \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right)} \right| \leq \frac{2}{3}$$

и, стало быть, существует  $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{10}(\delta) < \varepsilon_{13}(\delta)$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{10})$  для рассматриваемых  $\lambda$  имеет место (9). В случае, если  $\operatorname{Re}\{\varepsilon^{-1/2}\xi(\lambda) - i\pi/4 + \varepsilon^{1/2}\eta(\lambda)\} \geq 0$ , то доказательство неравенства (9) проводится аналогично предыдущему случаю, с тем лишь отличием, что правая часть (9) записывается в виде

$$\left| 2 \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right) \left[ \Phi_9(\lambda) + \frac{\exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} \xi(\lambda) + \frac{i\pi}{4} - \varepsilon^{1/2} \eta(\lambda) \right\} (\Phi_8(\lambda) - \Phi_9(\lambda))}{2 \cos \left( \varepsilon^{-1/2} i \xi(\lambda) + \frac{\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} i \eta(\lambda) \right)} \right] \right|.$$

Неравенство (9) позволяет применить теорему Руше для локализации нулей функции  $\tilde{\Delta}_1(\lambda)$ : при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{10})$  в  $C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности каждой точки  $\nu_n^{(1)}$  такой, что соответствующее  $\tilde{\lambda}_n^{(1)} \in \Sigma^{(1)}(3\delta/4)$ , расположен ровно один (простой) нуль  $\tilde{\Delta}_1(\lambda)$ . Наконец, в силу утверждения 2 найдутся такие  $\varepsilon_9 = \varepsilon_9(\delta) < \varepsilon_{10}(\delta)$  и  $C_1(\delta) > 0$ , что  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности точек  $\tilde{\lambda}_n^{(1)} \in \Sigma^{(1)}(3\delta/4)$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_9)$  содержат  $C_2(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности точек  $\nu_n^{(1)}$ .  $\square$

Комбинируя установленные факты, завершим доказательство первой части теоремы 3.

**Предложение 2.** При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  в  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности каждой точки  $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$  такой, что  $\operatorname{dist}\{\tilde{\lambda}_n^{(1)}, \Omega^{(1)}(\delta)\} < C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ , находится единственный нуль характеристического определителя  $\Delta_1(\lambda)$  и других нулей у  $\Delta_1(\lambda)$  в области  $\Omega^{(1)}(\delta)$  нет.

*Доказательство.* В работе [1] построена область  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)$ , содержащая  $\Sigma^{(1)}(\delta) \cap \Sigma^{(1)}(\delta/2)$  и содержащаяся в  $\Sigma^{(1)}(3\delta/4)$ , такая, что для достаточно малых  $\varepsilon > 0$ :

- 1) функции  $\Delta_1(\lambda)$  и  $\cos(\varepsilon^{-1/2}i\xi(\lambda) + \pi/4)$  имеют в  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)$  одинаковое число нулей;
- 2) каждый нуль  $\lambda_n^{(1)}$  функции  $\cos(\varepsilon^{-1/2}i\xi(\lambda) + \pi/4)$  такой, что  $\operatorname{dist}\{\lambda_n^{(1)}, \tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)\} < C(\delta)\varepsilon$ , принадлежит области  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)$  вместе со своей  $C(\delta)\varepsilon$ -окрестностью.

В силу утверждения 3, отсюда следует существование  $\varepsilon_{14} = \varepsilon_{14}(\delta) > 0$  такого, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{14})$ :

- 1) все нули  $\Delta_1(\lambda)$ , принадлежащие  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon) \subset \Sigma^{(1)}(3\delta/4)$ , находятся в  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестностях точек  $\tilde{\lambda}_n^{(1)} \in \tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)$ ;

2) всякая точка  $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$  такая, что  $\text{dist} \{ \tilde{\lambda}_n^{(1)}, \tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon) \} < C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ , принадлежит области  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)$  вместе со своей  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестностью.

Поскольку  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\delta, \varepsilon)$  содержит  $\Sigma^{(1)}(\delta) \cap \Sigma^{(1)}(\delta/2) = \Omega^{(1)}(\delta) \cap \Omega^{(1)}(\delta/8)$ , то при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{14})$  в  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестности каждой точки  $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$  такой, что  $\text{dist} \{ \tilde{\lambda}_n^{(1)}, \Omega^{(1)}(\delta) \cap \Omega^{(1)}(\delta/8) \} < C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ , расположен единственный нуль определителя  $\Delta_1(\lambda)$  и других нулей у  $\Delta_1(\lambda)$  в  $\Omega^{(1)}(\delta) \cap \Omega^{(1)}(\delta/8)$  нет. Наконец, согласно теореме 1, существует  $\varepsilon_{15} = \varepsilon_{15}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{15})$  область  $\Omega^{(1)}(\delta) \setminus \Omega^{(1)}(\delta/8)$  не содержит нулей  $\Delta_1(\lambda)$ .

Таким образом установлено, что при  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_{14}(\delta), \varepsilon_{15}(\delta)\}$  спектр задачи (1)–(2) в области  $\Omega^{(1)}(\delta)$  состоит из простых собственных значений, находящихся в  $C_1(\delta)\varepsilon^{3/2}$ -окрестностях точек  $\tilde{\lambda}_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} - \varepsilon\eta(\lambda_n^{(1)})/\xi'(\lambda_n^{(1)})$ .  $\square$

## 5. ФОРМУЛЫ СВЯЗИ

**Лемма 5.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\varepsilon_{16} = \varepsilon_{16}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{16})$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  существует ФСР  $\{A_1(z, \lambda), A_2(z, \lambda)\}$  уравнения (1), для которой на отрезке  $[\sqrt{a}, 1]$  и некоторой кривой, соединяющей точки  $z = 1$  и  $z = h$ , справедливы представления:

$$A_1(z, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp\left(\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, z)\right) (1 + \varphi_5(z, \lambda)),$$

$$A_2(z, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp\left(-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, z)\right) (1 + \varphi_6(z, \lambda)),$$

$$A_1'(z, \lambda) = \varepsilon^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ \times \exp\left(\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2}(G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4}\frac{z}{2}(z^2 - \lambda)_-^{-3/2})\right) (1 + \phi_5(z, \lambda)),$$

$$A_2'(z, \lambda) = -\varepsilon^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ \times \exp\left(-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2}(G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4}\frac{z}{2}(z^2 - \lambda)_-^{-3/2})\right) (1 + \phi_6(z, \lambda)),$$

причем  $\text{Re} S_-(\sqrt{a}, 1) > 0$ , а для остаточных членов имеют место оценки

$$|\varphi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\phi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 5, 6.$$

**Лемма 6.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\varepsilon_{17} = \varepsilon_{17}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{17})$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  у уравнения (1) существует ФСР  $\{B_1(z, \lambda), B_2(z, \lambda)\}$ , имеющая на отрезке  $[0, \sqrt{a}]$  следующий вид:

$$B_1(z, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp\left(\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, z)\right) (1 + \varphi_7(z, \lambda)),$$

$$B_2(z, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp\left(-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, z)\right) (1 + \varphi_8(z, \lambda)),$$

где  $|\varphi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 7, 8$ , и для производных  $B_1'(z, \lambda), B_2'(z, \lambda)$  справедливы представления

$$B_1'(z, \lambda) = \varepsilon^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ \times \exp\left(\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2}(G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4}\frac{z}{2}(z^2 - \lambda)_-^{-3/2})\right) (1 + \phi_7(z, \lambda)),$$

$$B_2'(z, \lambda) = -\varepsilon^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ \times \exp\left(-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2}(G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4}\frac{z}{2}(z^2 - \lambda)_-^{-3/2})\right) (1 + \phi_8(z, \lambda)),$$

с оценками остаточных членов  $|\phi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 7, 8$ .

**Лемма 7.** Для произвольного  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon_{18} = \varepsilon_{18}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{18})$  и  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  существует ФСР  $\{C_1(z, \lambda), C_2(z, \lambda)\}$  уравнения (1), для которой на некоторой

кривой, соединяющей точки  $z = 0$  и  $z = h$ , справедливы представления:

$$\begin{aligned} C_1(z, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+} \exp\left(\varepsilon^{-1/2} S_+(0, z) + \varepsilon^{1/2} G_+(0, z)\right) (1 + \varphi_9(z, \lambda)), \\ C_2(z, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+} \exp\left(-\varepsilon^{-1/2} S_+(0, z) - \varepsilon^{1/2} G_+(0, z)\right) (1 + \varphi_{10}(z, \lambda)), \\ C'_1(z, \lambda) &= \varepsilon^{1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+ \times \\ &\quad \times \exp\left(\varepsilon^{-1/2} S_+(0, z) + \varepsilon^{1/2} (G_+(0, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)_+^{-3/2})\right) (1 + \phi_9(z, \lambda)), \\ C'_2(z, \lambda) &= -\varepsilon^{1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+ \times \\ &\quad \times \exp\left(-\varepsilon^{-1/2} S_+(0, z) - \varepsilon^{1/2} (G_+(0, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)_+^{-3/2})\right) (1 + \phi_{10}(z, \lambda)), \end{aligned}$$

причем  $\operatorname{Re} S_+(0, h) > 0$ , и остаточные члены удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\phi_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 9, 10.$$

Леммы 5–7 являются следствиями предложения 1. Проверка выполнения необходимых условий (в частности, построение канонических путей, указанных в формулировках лемм) проведена в работе [1].

*Доказательство леммы 1.* Пусть  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  и

$$\begin{aligned} B_1(z, \lambda) &= \alpha_1 A_1(z, \lambda) + \alpha_2 A_2(z, \lambda), \\ B'_1(z, \lambda) &= \alpha_1 A'_1(z, \lambda) + \alpha_2 A'_2(z, \lambda), \end{aligned}$$

где  $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(\lambda)$ . Указанные соотношения в точке  $z = \sqrt{a}$  с учетом формул из лемм 5, 6 при  $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_{16}, \varepsilon_{17}\}$  дают:

$$\begin{aligned} (1 + \varphi_7(\sqrt{a}, \lambda)) &= \alpha_1 (1 + \varphi_5(\sqrt{a}, \lambda)) + \alpha_2 (1 + \varphi_6(\sqrt{a}, \lambda)), \\ \exp\left\{-\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a}}{2} (a - \lambda)_-^{-3/2}\right\} (1 + \phi_7(\sqrt{a}, \lambda)) &= \\ = \alpha_1 \exp\left\{-\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a}}{2} (a - \lambda)_-^{-3/2}\right\} (1 + \phi_5(\sqrt{a}, \lambda)) - \\ - \alpha_2 \exp\left\{\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a}}{2} (a - \lambda)_-^{-3/2}\right\} (1 + \phi_6(\sqrt{a}, \lambda)). \end{aligned}$$

Из этой системы линейных уравнений находим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[ (1 + \varphi_7(\sqrt{a}, \lambda)) \exp\left\{\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{a} (a - \lambda)_-^{-3/2}\right\} (1 + \phi_6(\sqrt{a}, \lambda)) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \phi_7(\sqrt{a}, \lambda)) (1 + \varphi_6(\sqrt{a}, \lambda)) \right] \Delta^{-1}, \\ \alpha_2 &= [(1 + \phi_5(\sqrt{a}, \lambda)) (1 + \varphi_7(\sqrt{a}, \lambda)) - (1 + \varphi_5(\sqrt{a}, \lambda)) (1 + \phi_7(\sqrt{a}, \lambda))] \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + \varphi_5(\sqrt{a}, \lambda)) \exp\left\{\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{a} (a - \lambda)_-^{-3/2}\right\} (1 + \phi_6(\sqrt{a}, \lambda)) + \\ &\quad + (1 + \phi_5(\sqrt{a}, \lambda)) (1 + \varphi_6(\sqrt{a}, \lambda)), \end{aligned}$$

причем

$$\exp\left\{\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{a} (a - \lambda)_-^{-3/2}\right\} = 1 + \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{a} (a - \lambda)_-^{-3/2} + O(\varepsilon),$$

и оценка остатка равномерна по  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$ . Кроме того,

$$|\varphi_j(\sqrt{a}, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\phi_j(\sqrt{a}, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 5, 6, 7,$$

и, стало быть, существует  $\varepsilon_{19} = \varepsilon_{19}(\delta) \in (0, \min\{\varepsilon_{16}, \varepsilon_{17}\})$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{19})$

$$|\alpha_1(\lambda) - 1| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\alpha_2(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon.$$

Учитывая это, с использованием формул из леммы 5 и положительности величины  $\operatorname{Re} S_-(\sqrt{a}, 1)$ , для рассматриваемых значений  $\lambda$  получаем

$$\begin{aligned} B_1(1, \lambda) &= \alpha_1(\lambda)A_1(1, \lambda) + \alpha_2(\lambda)A_2(1, \lambda) = \\ &= \frac{\alpha_1(\lambda)}{(\sqrt[4]{1-\lambda})_-} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, 1) + \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \varphi_5(1, \lambda)) + \\ &\quad + \frac{\alpha_2(\lambda)}{(\sqrt[4]{1-\lambda})_-} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, 1) - \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \varphi_6(1, \lambda)) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt[4]{1-\lambda})_-} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, 1) + \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \Phi_1(\lambda)), \end{aligned}$$

где  $|\Phi_1(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{19})$ .

Рассмотрим теперь решение  $B_2(z, \lambda)$ . Пусть  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  и

$$B_2(z, \lambda) = \alpha_3 A_1(z, \lambda) + \alpha_4 A_2(z, \lambda), \quad \alpha_3 = \alpha_3(\lambda), \quad \alpha_4 = \alpha_4(\lambda).$$

Аналогично предыдущему, в точке  $z = \sqrt{a}$  при  $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_{16}, \varepsilon_{17}\})$  имеем

$$\begin{aligned} (1 + \varphi_8(\sqrt{a}, \lambda)) &= \alpha_3(1 + \varphi_5(\sqrt{a}, \lambda)) + \alpha_4(1 + \varphi_6(\sqrt{a}, \lambda)), \\ &- \exp \left\{ \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a}}{2} (a - \lambda)_-^{-3/2} \right\} (1 + \phi_8(\sqrt{a}, \lambda)) = \\ &= \alpha_3 \exp \left\{ -\varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a}}{2} (a - \lambda)_-^{-3/2} \right\} (1 + \phi_5(\sqrt{a}, \lambda)) - \\ &- \alpha_4 \exp \left\{ \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a}}{2} (a - \lambda)_-^{-3/2} \right\} (1 + \phi_6(\sqrt{a}, \lambda)), \end{aligned}$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \exp \left\{ \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{a} (a - \lambda)_-^{-3/2} \right\} \left[ (1 + \varphi_8(\sqrt{a}, \lambda))(1 + \phi_6(\sqrt{a}, \lambda)) - \right. \\ &\quad \left. - (1 + \phi_8(\sqrt{a}, \lambda))(1 + \varphi_6(\sqrt{a}, \lambda)) \right] \Delta^{-1}, \\ \alpha_4 &= \left[ (1 + \varphi_5(\sqrt{a}, \lambda)) \exp \left\{ \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{a} (a - \lambda)_-^{-3/2} \right\} (1 + \phi_8(\sqrt{a}, \lambda)) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \phi_5(\sqrt{a}, \lambda))(1 + \varphi_8(\sqrt{a}, \lambda)) \right] \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

При этом существует  $\tilde{\varepsilon}_{19} = \tilde{\varepsilon}_{19}(\delta) > 0$  такое, что

$$|\alpha_3(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\alpha_4(\lambda) - 1| < C(\delta)\varepsilon,$$

если  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_{19})$ .

Имеющейся информации о поведении коэффициента  $\alpha_3(\lambda)$  при  $\varepsilon \downarrow 0$  недостаточно для определения асимптотики  $B_2(1, \lambda)$ , поскольку в выражении

$$B_2(1, \lambda) = \alpha_3(\lambda)A_1(1, \lambda) + \alpha_4(\lambda)A_2(1, \lambda)$$

величина  $A_2(1, \lambda)$  экспоненциально убывает, а  $A_1(1, \lambda)$  экспоненциально возрастает, когда  $\varepsilon \downarrow 0$ .  $\square$

*Доказательство леммы 2.* 1. Пусть  $\lambda \in \Sigma^{(1)}(\delta)$  и

$$B_2(z, \lambda) = \alpha_5 C_1(z, \lambda) + \alpha_6 C_2(z, \lambda), \quad B_2'(z, \lambda) = \alpha_5 C_1'(z, \lambda) + \alpha_6 C_2'(z, \lambda),$$

где  $\alpha_5 = \alpha_5(\lambda)$ ,  $\alpha_6 = \alpha_6(\lambda)$ . Используя формулы из лемм 6, 7 (в точке  $z = 0$ ) и учитывая, что  $(\sqrt[4]{-\lambda})_+ = -i(\sqrt[4]{-\lambda})_-$  для  $\lambda \in \Pi$ , при  $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_{17}, \varepsilon_{18}\})$  имеем

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, 0) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, 0)\right\}(1 + \varphi_8(0, \lambda)) &= i\alpha_5(1 + \varphi_9(0, \lambda)) + i\alpha_6(1 + \varphi_{10}(0, \lambda)), \\ \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, 0) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, 0)\right\}(1 + \phi_8(0, \lambda)) &= i\alpha_5(1 + \phi_9(0, \lambda)) - i\alpha_6(1 + \phi_{10}(0, \lambda)). \end{aligned}$$

Из полученной системы уравнений находим  $\alpha_5$  и  $\alpha_6$ . Поскольку

$$|\varphi_j(0, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\phi_j(0, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 8, 9, 10,$$

то существует  $\varepsilon_{20} = \varepsilon_{20}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{20})$

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= -i \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, 0) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, 0)\right\}(1 + \Psi_3(\lambda)), \\ \alpha_6 &= \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, 0) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, 0)\right\}\Psi_4(\lambda), \end{aligned}$$

где  $|\Psi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 3, 4$ .

2. Выразим  $C_1(z, \lambda)$  через  $\{A_1(z, \lambda), A_2(z, \lambda)\}$ :

$$C_1(z, \lambda) = \alpha_7 A_1(z, \lambda) + \alpha_8 A_2(z, \lambda), \quad \alpha_7 = \alpha_7(\lambda), \quad \alpha_8 = \alpha_8(\lambda).$$

Учитывая формулы из лемм 5, 7 (в точке  $z = h$ ) и замечая, что  $(\sqrt[4]{h^2 - \lambda})_+ = (\sqrt[4]{h^2 - \lambda})_-$  для  $\lambda \in \Pi$ , при  $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_{16}, \varepsilon_{18}\})$  получаем соотношения:

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\varepsilon^{-1/2}S_+(0, h) + \varepsilon^{1/2}G_+(0, h)\right\}(1 + \varphi_9(h, \lambda)) = \\ &= \alpha_7 \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, h) + \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, h)\right\}(1 + \varphi_5(h, \lambda)) + \\ &+ \alpha_8 \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, h) - \varepsilon^{1/2}G_-(\sqrt{a}, h)\right\}(1 + \varphi_6(h, \lambda)), \\ &\exp\left\{\varepsilon^{-1/2}S_+(0, h) + \varepsilon^{1/2}(G_+(0, h) - e^{-i\pi/4}\frac{h}{2}(h^2 - \lambda)_+^{-3/2})\right\}(1 + \phi_9(h, \lambda)) = \\ &= \alpha_7 \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, h) + \varepsilon^{1/2}(G_-(\sqrt{a}, h) - e^{-i\pi/4}\frac{h}{2}(h^2 - \lambda)_-^{-3/2})\right\}(1 + \phi_5(h, \lambda)) - \\ &- \alpha_8 \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}S_-(\sqrt{a}, h) - \varepsilon^{1/2}(G_-(\sqrt{a}, h) - e^{-i\pi/4}\frac{h}{2}(h^2 - \lambda)_-^{-3/2})\right\}(1 + \phi_6(h, \lambda)), \end{aligned}$$

откуда находим  $\alpha_7, \alpha_8$ . Здесь

$$|\varphi_j(h, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\phi_j(h, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 5, 6, 9,$$

и вследствие этого существует  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{21}(\delta) > 0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{21})$

$$\alpha_7 = \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}(S_+(0, h) - S_-(\sqrt{a}, h)) + \varepsilon^{1/2}(G_+(0, h) - G_-(\sqrt{a}, h))\right\}(1 + \Psi_5(\lambda)),$$

где  $|\Psi_5(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ . Аналогично выражаем  $C_2(z, \lambda)$  через  $\{A_1(z, \lambda), A_2(z, \lambda)\}$ :

$$C_2(z, \lambda) = \alpha_9 A_1(z, \lambda) + \alpha_{10} A_2(z, \lambda), \quad \alpha_9 = \alpha_9(\lambda), \quad \alpha_{10} = \alpha_{10}(\lambda).$$

При этом существует  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(\delta) > 0$  такое, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{22})$  коэффициент  $\alpha_9$  имеет вид

$$\alpha_9 = \exp\left\{-\varepsilon^{-1/2}(S_+(0, h) + S_-(\sqrt{a}, h)) - \varepsilon^{1/2}(G_+(0, h) + G_-(\sqrt{a}, h))\right\}\Psi_6(\lambda),$$

$|\Psi_6(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ .

3. Выразим  $B_2(1, \lambda)$  через  $A_1(1, \lambda), A_2(1, \lambda)$ :

$$B_2(1, \lambda) = \alpha_3 A_1(1, \lambda) + \alpha_4 A_2(1, \lambda), \tag{11}$$

где  $\alpha_4 = 1 + \Psi_7(\lambda)$ ,  $|\Psi_7(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{19})$ , и

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha_5 \alpha_7 + \alpha_6 \alpha_9 = \\ &= -i \exp\left\{\varepsilon^{-1/2}[S_+(0, h) - S_-(\sqrt{a}, 0) - S_-(\sqrt{a}, h)] + \varepsilon^{1/2}[G_+(0, h) - G_-(\sqrt{a}, 0) - G_-(\sqrt{a}, h)]\right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (1 + \Psi_3(\lambda))(1 + \Psi_5(\lambda)) + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} [S_+(0, h) + S_-(\sqrt{a}, 0) + S_-(\sqrt{a}, h)] - \right. \\ & \left. -\varepsilon^{1/2} [G_+(0, h) + G_-(\sqrt{a}, 0) + G_-(\sqrt{a}, h)] \right\} \Psi_4(\lambda) \Psi_6(\lambda), \end{aligned}$$

если  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_{20}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}\}$ . Учитывая равенства  $S_+(\sqrt{\lambda}, h) = S_-(\sqrt{\lambda}, h)$ ,  $S_+(0, \sqrt{\lambda}) = -S_-(0, \sqrt{\lambda})$  и  $S_+(0, h) = S_+(0, \sqrt{\lambda}) + S_+(\sqrt{\lambda}, h)$ , а также положительность величины  $\operatorname{Re} S_+(0, h)$  (лемма 7), находим

$$\alpha_3 = -i \exp \left\{ 2\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) + \varepsilon^{1/2} [G_+(0, h) - G_-(\sqrt{a}, 0) - G_-(\sqrt{a}, h)] \right\} (1 + \Psi_8(\lambda)),$$

$$|\Psi_8(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon.$$

4. Подставляя найденные выражения для  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  в (11) и используя формулы для  $A_1(z, \lambda)$ ,  $A_2(z, \lambda)$  из леммы 5, в результате получаем

$$\begin{aligned} B_2(1, \lambda) &= \frac{-i}{(\sqrt[4]{1-\lambda})_-} \exp \left\{ 2\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon^{1/2} [G_+(0, h) - G_-(\sqrt{a}, 0) - G_-(\sqrt{a}, h)] \right\} (1 + \Psi_8(\lambda)) \times \\ & \times \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, 1) + \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \varphi_5(1, \lambda)) + \\ & + \frac{1}{(\sqrt[4]{1-\lambda})_-} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, 1) - \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \varphi_6(1, \lambda)) (1 + \Psi_7(\lambda)) = \\ & = \frac{1}{(\sqrt[4]{1-\lambda})_-} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) \right\} \left[ -i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{\lambda}, 1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon^{1/2} [G_+(0, h) - G_-(\sqrt{a}, 0) - G_-(\sqrt{a}, h) + G_-(\sqrt{a}, 1)] \right\} (1 + \Phi_2(\lambda)) \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{\lambda}, 1) - \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 1) \right\} (1 + \Phi_3(\lambda)) \right], \end{aligned}$$

где  $|\Phi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 2, 3$ , если  $\varepsilon < \min\{\tilde{\varepsilon}_{19}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}\}$ .  $\square$

## 6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА В ОБЛАСТИ $\Omega^{(2)}(\delta)$

Следуя схеме доказательства первой части теоремы 3, рассмотрим область

$$\Sigma^{(2)}(\delta) = \{a + ib : f(a) + \delta < b < a - \delta, |a + b| < \delta/4\} \subset \Omega^{(2)}(\delta)$$

и для  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  построим три ФСР  $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ ,  $\{\tilde{B}_1, \tilde{B}_2\}$ ,  $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}$  уравнения (1) с известными асимптотическими (при  $\varepsilon \downarrow 0$ ) представлениями в точках  $\sqrt{a}$  и  $1$ ,  $\sqrt{a}$ ,  $0$  и  $id$ ,  $id$  и  $1$  соответственно.

**Лемма 8.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\tilde{\varepsilon}_{16} = \tilde{\varepsilon}_{16}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_{16})$  и  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  существует ФСР  $\{\tilde{A}_1(z, \lambda), \tilde{A}_2(z, \lambda)\}$  уравнения (1), для которой на отрезке  $[\sqrt{a}, 1]$  и некоторой кривой, соединяющей точки  $z = 1$  и  $z = h$ , справедливы представления:

$$\tilde{A}_1(z, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, z) \right\} (1 + \tilde{\varphi}_5(z, \lambda)),$$

$$\tilde{A}_2(z, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, z) \right\} (1 + \tilde{\varphi}_6(z, \lambda)),$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_1(z, \lambda) &= \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ & \times \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2} (G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)^{-3/2}) \right\} (1 + \tilde{\phi}_5(z, \lambda)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_2(z, \lambda) &= -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ & \times \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2} (G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)^{-3/2}) \right\} (1 + \tilde{\phi}_6(z, \lambda)), \end{aligned}$$

причем  $\operatorname{Re} S_-(\sqrt{a}, 1) > 0$ , а для остаточных членов имеют место оценки

$$|\tilde{\varphi}_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\tilde{\phi}_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 5, 6.$$

**Лемма 9.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\tilde{\varepsilon}_{17} = \tilde{\varepsilon}_{17}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_{17})$  и  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  у уравнения (1) существует ФСР  $\{\tilde{B}_1(z, \lambda), \tilde{B}_2(z, \lambda)\}$ , имеющая на ломаной  $[\sqrt{a}, 0] \cup [0, id]$  следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1(z, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, z) \right\} (1 + \tilde{\varphi}_7(z, \lambda)), \\ \tilde{B}_2(z, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_-} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, z) \right\} (1 + \tilde{\varphi}_8(z, \lambda)),\end{aligned}$$

где  $|\tilde{\varphi}_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 7, 8$ , и для производных  $\tilde{B}'_1(z, \lambda)$ ,  $\tilde{B}'_2(z, \lambda)$  справедливы представления

$$\begin{aligned}\tilde{B}'_1(z, \lambda) &= \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) + \varepsilon^{1/2} (G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)_-^{-3/2}) \right\} (1 + \tilde{\phi}_7(z, \lambda)), \\ \tilde{B}'_2(z, \lambda) &= -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_- \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_-(\sqrt{a}, z) - \varepsilon^{1/2} (G_-(\sqrt{a}, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)_-^{-3/2}) \right\} (1 + \tilde{\phi}_8(z, \lambda))\end{aligned}$$

с оценками остаточных членов  $|\tilde{\phi}_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 7, 8$ .

**Лемма 10.** Для произвольного  $\delta > 0$  существует  $\tilde{\varepsilon}_{18} = \tilde{\varepsilon}_{18}(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_{18})$  и  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  существует ФСР  $\{\tilde{C}_1(z, \lambda), \tilde{C}_2(z, \lambda)\}$  уравнения (1), для которой на некоторой кривой, соединяющей точки  $z = id$  и  $z = 1$ , справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1(z, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_+(id, z) + \varepsilon^{1/2} G_+(id, z) \right\} (1 + \tilde{\varphi}_9(z, \lambda)), \\ \tilde{C}_2(z, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_+(id, z) - \varepsilon^{1/2} G_+(id, z) \right\} (1 + \tilde{\varphi}_{10}(z, \lambda)), \\ \tilde{C}'_1(z, \lambda) &= \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+ \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S_+(id, z) + \varepsilon^{1/2} (G_+(id, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)_+^{-3/2}) \right\} (1 + \tilde{\phi}_9(z, \lambda)), \\ \tilde{C}'_2(z, \lambda) &= -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} (\sqrt[4]{z^2 - \lambda})_+ \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S_+(id, z) - \varepsilon^{1/2} (G_+(id, z) - e^{-i\pi/4} \frac{z}{2} (z^2 - \lambda)_+^{-3/2}) \right\} (1 + \tilde{\phi}_{10}(z, \lambda)),\end{aligned}$$

причем  $\operatorname{Re} S_+(id, 1) > 0$ , и остаточные члены удовлетворяют оценкам

$$|\tilde{\varphi}_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad |\tilde{\phi}_j(z, \lambda)| < C(\delta)\varepsilon, \quad j = 9, 10.$$

Далее решения  $\tilde{A}_1(z, \lambda)$ ,  $\tilde{A}_2(z, \lambda)$  выражаются через ФСР  $\{\tilde{B}_1(z, \lambda), \tilde{B}_2(z, \lambda)\}$ , причем решение  $\tilde{A}_2(z, \lambda)$  выражается сначала через пару  $\tilde{C}_1(z, \lambda)$ ,  $\tilde{C}_2(z, \lambda)$ , а она — через  $\{\tilde{B}_1(z, \lambda), \tilde{B}_2(z, \lambda)\}$ . При этом, аналогами лемм 1 и 2 будут следующие утверждения.

**Лемма 11.** Для произвольного  $\delta > 0$  существует  $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_1(\delta) > 0$  такое, что решение  $\tilde{A}_1(z, \lambda)$  при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_1)$  в точке  $z = 0$  имеет вид

$$\tilde{A}_1(0, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda}} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 0) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 0) \right\} (1 + \tilde{\Phi}_1(\lambda)),$$

где  $|\tilde{\Phi}_1(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$ .

**Лемма 12.** Для произвольного  $\delta > 0$  найдется  $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_2(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_2)$  решение  $\tilde{A}_2(z, \lambda)$  уравнения (1) в точке  $z = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{A}_2(0, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda}} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) \right\} \times \\ &\quad \times \left[ i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0) + \varepsilon^{1/2} (G_+(id, 1) - G_-(\sqrt{a}, 1) + G_-(id, 0)) \right\} (1 + \tilde{\Phi}_2(\lambda)) + \right.\end{aligned}$$

$$+ \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0) - \varepsilon^{1/2} G_-(\sqrt{a}, 0) \right\} (1 + \tilde{\Phi}_3(\lambda)) \Big],$$

где  $|\tilde{\Phi}_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 2, 3$ ,  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$ .

Доказательства этих лемм аналогичны доказательствам лемм 1 и 2, проведенным в разделе 5. Коэффициент  $\tilde{\alpha}_3$  (аналог коэффициента  $\alpha_3$  из доказательства леммы 2) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_3 &= \tilde{\alpha}_5 \tilde{\alpha}_7 + \tilde{\alpha}_6 \tilde{\alpha}_9 = i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} [S_+(id, 1) - S_-(\sqrt{a}, 1) - S_-(\sqrt{a}, id)] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{1/2} [G_+(id, 1) - G_-(\sqrt{a}, 1) - G_-(\sqrt{a}, id)] \right\} (1 + \Psi_9(\lambda)) + \\ &+ \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} d(-d - \lambda)^{-3/2} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} [S_+(id, 1) + S_-(\sqrt{a}, 1) + S_-(\sqrt{a}, id)] - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^{1/2} [G_+(id, 1) + G_-(\sqrt{a}, 1) + G_-(\sqrt{a}, id)] \right\} \Psi_{10}(\lambda) = \\ &= i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} [S_+(id, 1) - S_-(\sqrt{a}, 1) - S_-(\sqrt{a}, id)] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} [G_+(id, 1) - G_-(\sqrt{a}, 1) - G_-(\sqrt{a}, id)] \right\} (1 + \Psi_{11}(\lambda)), \end{aligned}$$

где  $|\Psi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 9, 10, 11$ .

Характеристические определители  $\Delta_j(\lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , строятся с помощью ФСР  $\{\tilde{D}_1(z, \lambda), \tilde{D}_2(z, \lambda)\}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(z, \lambda) &= \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 2/3) - \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 2/3) \right\} (1 + \Psi_{12}(\lambda)) A_1(z, \lambda) + \\ &\quad + \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 2/3) + \varepsilon^{1/2} (G(\sqrt{a}, 2/3) - e^{-i\pi/4} \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} - \lambda \right)^{-3/2}) \right\} \Psi_{13}(\lambda) A_2(z, \lambda), \\ \tilde{D}_2(z, \lambda) &= \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 2/3) - \varepsilon^{1/2} (G(\sqrt{a}, 2/3) - e^{-i\pi/4} \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} - \lambda \right)^{-3/2}) \right\} \Psi_{14}(\lambda) A_1(z, \lambda) + \\ &\quad + \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{a}, 2/3) + \varepsilon^{1/2} G(\sqrt{a}, 2/3) \right\} (1 + \Psi_{15}(\lambda)) A_2(z, \lambda), \end{aligned}$$

где  $|\Psi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 12, 13, 14, 15$ . Решения  $\tilde{D}_1(z, \lambda), \tilde{D}_2(z, \lambda)$  аналитичны по  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \tilde{D}_1(0, \lambda) \tilde{D}_2(1, \lambda) + \tilde{D}_1(1, \lambda) \tilde{D}_2(0, \lambda) = (1 + \Psi_{16}(\lambda)) (\tilde{A}_1(0, \lambda) \tilde{A}_2(1, \lambda) - \tilde{A}_1(1, \lambda) \tilde{A}_2(0, \lambda)), \\ \Delta_2(\lambda) &= \tilde{D}'_1(0, \lambda) \tilde{D}_2(1, \lambda) + \tilde{D}_1(1, \lambda) \tilde{D}'_2(0, \lambda) = (1 + \Psi_{17}(\lambda)) (\tilde{A}'_1(0, \lambda) \tilde{A}_2(1, \lambda) - \tilde{A}_1(1, \lambda) \tilde{A}'_2(0, \lambda)), \end{aligned}$$

где  $|\Psi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 16, 17$ .

**Утверждение 4.** Для произвольного  $\delta > 0$  существует  $\tilde{\varepsilon}_5 = \tilde{\varepsilon}_5(\delta) > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_5)$  и  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  характеристические определители  $\Delta_1(\lambda)$ ,  $\Delta_2(\lambda)$ , построенные по ФСР  $\{\tilde{D}_1(z, \lambda), \tilde{D}_2(z, \lambda)\}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= -\frac{\exp\{\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 1)\}}{\sqrt[4]{-\lambda} \sqrt[4]{1-\lambda}} \left[ i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} S(\sqrt{\lambda}, 0) + \varepsilon^{1/2} e^{i\pi/4} G(0, 1) \right\} (1 + \Phi_{13}(\lambda)) + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{\lambda\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} e^{i\pi/4} G(0, 1) \right\} (1 + \Phi_{14}(\lambda)) \right], \\ \Delta_2(\lambda) &= -\frac{\sqrt[4]{-\lambda} e^{i\pi/4} \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 1) \right\}}{\varepsilon^{1/2} \sqrt[4]{1-\lambda}} \left[ i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} S(\sqrt{\lambda}, 0) + \varepsilon^{1/2} e^{i\pi/4} G(0, 1) \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 + \Phi_{15}(\lambda)) - \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{\lambda\pi}{4} + \varepsilon^{1/2} e^{i\pi/4} G(0, 1) \right\} (1 + \Phi_{16}(\lambda)) \right], \end{aligned}$$

где  $S(\sqrt{\lambda}, 0) = e^{i\pi/4}\lambda\pi/4$ ,  $|\Phi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 13, 14, 15, 16$ . В  $\Sigma^{(2)}(\delta)$  собственные значения задачи (1)–(2) совпадают с нулями аналитических функций

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_1(\lambda) &= i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{\lambda\pi}{4} \right\} (1 + \Phi_{13}(\lambda)) + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{\lambda\pi}{4} \right\} (1 + \Phi_{14}(\lambda)), \\ \hat{\Delta}_2(\lambda) &= i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{\lambda\pi}{4} \right\} (1 + \Phi_{15}(\lambda)) - \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{\lambda\pi}{4} \right\} (1 + \Phi_{16}(\lambda)).\end{aligned}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 1 и основано на следующем вычислении:

$$\begin{aligned}& \tilde{A}_1(0, \lambda) \tilde{A}_2(1, \lambda) - \tilde{A}_1(1, \lambda) \tilde{A}_2(0, \lambda) = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda} \sqrt[4]{1-\lambda}} \left[ \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} (S(\sqrt{a}, 0) - S(\sqrt{a}, 1)) + \varepsilon^{1/2} (G(\sqrt{a}, 0) - G(\sqrt{a}, 1)) \right\} \times \right. \\ & \quad \times (1 + \tilde{\Phi}_1(\lambda)) (1 + \tilde{\varphi}_6(1, \lambda)) - \\ & \quad - i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} (S(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) + S(\sqrt{\lambda}, 0) + S(\sqrt{a}, 1)) + \varepsilon^{1/2} (G_+(id, 1) + G(id, 0)) \right\} \times \\ & \quad \times (1 + \tilde{\Phi}_2(\lambda)) (1 + \tilde{\varphi}_5(1, \lambda)) - \\ & \quad - \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} (S(\sqrt{a}, 1) - S(\sqrt{a}, 0)) + \varepsilon^{1/2} e^{-i\pi/4} (G(\sqrt{a}, 1) - G(\sqrt{a}, 0)) \right\} \times \\ & \quad \left. \times (1 + \tilde{\Phi}_3(\lambda)) (1 + \tilde{\varphi}_5(1, \lambda)) \right].\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}S(\sqrt{\lambda}, \sqrt{a}) + S(\sqrt{\lambda}, 0) + S(\sqrt{a}, 1) &= S(\sqrt{\lambda}, 1) + S(\sqrt{\lambda}, 0), \\ S(\sqrt{a}, 0) - S(\sqrt{a}, 1) &= S(\sqrt{\lambda}, 0) - S(\sqrt{\lambda}, 1), \\ G_+(id, 1) + G(id, 0) &= G_+(id, 1) - G_+(id, 0) = G_+(0, 1) = G(0, 1)\end{aligned}$$

и, кроме того,  $\operatorname{Re} S(\sqrt{\lambda}, 1) \geq C(\delta) > 0$  (см. [1], доказательство теоремы 1). Отсюда видно, что при  $\lambda \in \Sigma^{(2)}(\delta)$  и достаточно малых  $\varepsilon > 0$  характеристический определитель задачи (1)–(2) имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_1(\lambda) &= - \frac{\exp \{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 1) + \varepsilon^{1/2} G(0, 1) \}}{\sqrt[4]{-\lambda} \sqrt[4]{1-\lambda}} \times \\ & \quad \times \left[ i \exp \left\{ \varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0) \right\} (1 + \Phi_{13}(\lambda)) + \exp \left\{ -\varepsilon^{-1/2} S(\sqrt{\lambda}, 0) \right\} (1 + \Phi_{14}(\lambda)) \right],\end{aligned}$$

где  $|\Phi_j(\lambda)| < C(\delta)\varepsilon$ ,  $j = 13, 14$ . Характеристический определитель  $\Delta_2(\lambda)$  рассматривается аналогично.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аржанов А. А., Степин С. А. Квазиклассическая локализация спектра в одной задаче сингулярной теории возмущений. — М.: МГУ. — Деп. в ВИНТИ, №1514-В2001.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974. — 295 с.
3. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об асимптотике собственных значений для несамосопряженной краевой задачи // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1964. — 4, № 2. — С. 267–277.
4. Евграфов М. А., Федорюк М. В. Асимптотика решений уравнения  $w'' - p(z, \lambda)w(z) = 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  в комплексной плоскости  $z$  // Успехи мат. наук. — 1966. — 21, № 1. — С. 3–50.
5. Маслов В. П. О предельном поведении некоторых квантово-механических величин // Докл. АН СССР. — 1954. — 94, № 4. — С. 623–626.
6. Степин С. А. Модель перехода от дискретного спектра к непрерывному в сингулярной теории возмущений // Фундам. и прикл. мат. — 1997. — 3, № 4. — С. 1189–1227.

7. *Степин С. А., Аржанов А. А.* Квазиклассические спектральные асимптотики и явление Стокса для уравнения Вебера// Докл. РАН. — 2001. — 378, № 1. — С. 18–21.
8. *Степин С. А., Аржанов А. А.* О локализации спектра в одной задаче сингулярной теории возмущений// Успехи мат. наук. — 2002. — 57, № 3. — С. 161–162.
9. *Morawetz C. S.* Asymptotic solutions of the stability equations of a compressible fluid// J. Math. and Phys. — 1954. — 33, № 1. — С. 1–26.

С. А. Степин, А. А. Аржанов  
Московский государственный университет  
E-mail: [stepin@iitp.ru](mailto:stepin@iitp.ru)

## О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

© 2003 г.    **Н. Г. ТОМИН**

Аннотация. В статье доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Штурма—Лиувилля на отрезке с показателем степени  $\alpha > 3/4$  и квадратично суммируемым комплекснозначным несимметричным потенциалом. При этом потенциал восстанавливается по смеси четырех спектров или по двум спектрам (как известно, даже в случае  $\alpha = 1$ , соответствующем задаче Штурма—Лиувилля, для восстановления несимметричного потенциала, в отличие от симметричного, одного спектра, вообще говоря, недостаточно). Исследуется также устойчивость решения обратной задачи.

**1.** Известно много различных результатов, относящихся к обратной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [5]). В идейном смысле используемый нами метод близок к методу, примененному в [2] к оператору Штурма—Лиувилля на отрезке для восстановления симметричного потенциала по смеси двух спектров (задач Дирихле и Неймана). Отметим также работу [4], содержащую теорему существования и единственности решения обратной задачи для дифференциальных уравнений высших порядков на отрезке по одному спектру в случае симметричного потенциала.

Метод настоящей работы может быть применен и к обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа на некоторых плоских ограниченных областях.

При каждом  $s = \overline{0, 3}$  через  $M_s$  обозначаем самосопряженный неотрицательный в  $L^2(0, \pi)$  оператор Штурма—Лиувилля, порожденный спектральной граничной задачей, определенной уравнением

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{на } [0, \pi] \quad (1)$$

и следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 & \quad \text{при } s = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 & \quad \text{при } s = 1, \\ y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 & \quad \text{при } s = 2, \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 & \quad \text{при } s = 3. \end{aligned}$$

В частности, случай  $s = 0$  соответствует граничным условиям Неймана, а  $s = 1$  — граничным условиям Дирихле для дифференциального уравнения (1).

Пусть при  $m = 0, 1, \dots$   $y_m(s) \equiv y_m(x; s) = \sqrt{2\gamma_{m+i_1}/\pi} \cos[(m + i_1/2)x - \pi i_2/2]$ , где числа  $i_1 = i_1(s)$  и  $i_2 = i_2(s)$  из  $\{0, 1\}$  однозначно определяются по  $s$  по формуле  $s = 2i_1 + i_2$ ;  $\gamma_0 = 1/2$ ,  $\gamma_j = 1$  при  $j = 1, 2, \dots$ . Полагаем  $m_0(s) = 1$  при  $s = 1$  и  $m_0(s) = 0$  при  $s \neq 1$ . Для любого  $\alpha > 0$   $Y_s \equiv \{y_m(s) \mid m \geq m_0(s)\}$  есть ортонормированная полная система (ОНПС) в гильбертовом пространстве  $L^2(0, \pi)$ , состоящая из собственных функций  $y_m(s)$  оператора  $T_s = M_s^\alpha$ , соответствующих его собственным числам  $\lambda_m(s) = (m + i_1/2)^{2\alpha}$ .

Через  $P$  обозначаем оператор умножения на функцию (потенциал)  $p \in L^2(0, \pi)$ ; вещественность функции  $p$  не предполагается. Полагаем  $\tilde{T}_s = T_s + P$ . Через  $\mu_m(p, s)$ , где  $m \geq m_0(s)$ , обозначаем собственные числа оператора  $\tilde{T}_s$ , занумерованные в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей.

Сформулируем основной результат статьи.

**Теорема.** Пусть  $\alpha > 3/4$ . Тогда существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что если вещественная последовательность  $\{s_M\}_{M=1}^\infty$  и комплексная последовательность  $\{\xi_M\}_{M=1}^\infty$  удовлетворяют условиям

- (i)  $s_M \in \{0, 1\}$  при четных  $M$  и  $s_M \in \{2, 3\}$  при нечетных  $M$ ,
- (ii)  $\Lambda \equiv \sqrt{\sum_{M=1}^{\infty} \left| \xi_M - \left(\frac{M}{2}\right)^{2\alpha} \right|^2} < \varepsilon_0$ ,

то при некотором  $\delta_0 > 0$ , зависящем только от  $\alpha$ , в шаре  $\|p\| < \delta_0$  гильбертова пространства  $L^2(0, \pi)$  существует один и только один потенциал  $p$ , для которого

$$\mu_m(p, s_M) = \xi_M \quad \forall M \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где  $m$  есть целая часть числа  $M/2$ . Этот потенциал  $p$  обладает следующими свойствами:

$$\int_0^{\pi} p(x) dx = 0 \tag{3}$$

$$\|p\| < C_0 \Lambda, \tag{4}$$

где постоянная  $C_0$  зависит только от  $\alpha$ .

**Замечание 1.** Условие (i) означает, что при любом  $M \geq 1$  число  $(M/2)^{2\alpha}$  является собственным числом оператора  $T_{s_M}$ , а именно,  $\lambda_m(s_M) = (M/2)^{2\alpha}$ .

**Замечание 2.** Из теоремы следует, что достаточно малые по норме  $L^2(0, \pi)$  потенциалы могут быть восстановлены по спектрам любых двух операторов  $\tilde{T}_s$  и  $\tilde{T}_{s'}$ , где  $s \in \{0, 1\}$  и  $s' \in \{2, 3\}$  (при этом в теореме нужно положить  $s_M = s$  при  $M$  четном и  $s_M = s'$  при  $M$  нечетном). В частном случае  $s = 1$ ,  $s' = 3$  условия (ii) и (2) записываются соответственно в виде

$$(ii') \quad \Lambda \equiv \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\xi_{2m} - \lambda_m(1)|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} |\xi_{2m+1} - \lambda_m(3)|^2} < \varepsilon_0,$$

$$\xi_{2m} = \mu_m(p, 1) \quad \text{при } m \in \mathbb{N}, \quad \xi_{2m+1} = \mu_m(p, 3) \quad \text{при } m = 0, 1, \dots \tag{2'}$$

В этом частном случае при  $\alpha = 1$  и вещественных  $\xi_M$  ( $M \geq 1$ ) теорема является следствием теоремы 1.8.2 из [5].

Доказательство теоремы проводится методом контурного интегрирования с учетом поправок теории возмущений и основывается на построении соответствующего сжимающего отображения в  $L^2(0, \pi)$ .

**2.** Пусть  $\sigma(T_s) = \{\lambda_m(s) \mid m \geq m_0(s)\}$  и  $\Omega_s = \mathbb{C} \setminus \sigma(T_s)$  — соответственно спектр и резольвентное множество оператора  $T_s$ . При любом  $m \geq m_0(s)$  через  $d_m(s)$  обозначаем расстояние от собственного числа  $\lambda_m(s)$  до остальной части спектра оператора  $T_s$ . Таким образом,  $d_m(s) = \lambda_m(s) - \lambda_{m-1}(s)$  при  $m > m_0(s)$  и  $d_m(s) = d_{m+1}(s)$  при  $m = m_0(s)$ . Заметим, что  $d_m(s) < d_{m+1}(s) \forall m > m_0(s)$ . Полагаем

$$d(s) = \min_{m \geq m_0(s)} d_m(s), \quad \eta(s) = \frac{d(s)}{4} \sqrt{\frac{\pi}{7 + 2\alpha}}.$$

Имеем  $d(0) = 1$ ,  $d(1) = 4^\alpha - 1$ ,  $d(2) = d(3) = (9^\alpha - 1)/4^\alpha$ ; в частности, при  $\alpha > 1/2$  справедливы соотношения  $d(0) < d(2) = d(3) < d(1)$ .

Будем использовать следующие обозначения:  $(\cdot, \cdot)$  и  $\|\cdot\|$  — соответственно скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве  $L^2(0, \pi)$ ;  $E$  — единичный оператор в  $L^2(0, \pi)$ ; при  $\lambda \in \Omega_s$   $R_\lambda(s) = (T_s - \lambda E)^{-1}$  — резольвента оператора  $T_s$ ;  $Q_\lambda(p, s) = PR_\lambda(s)$ ;  $\tilde{R}_\lambda(p, s) = (\tilde{T}_s - \lambda E)^{-1}$  — резольвента оператора  $\tilde{T}_s$ , определенная на его резольвентном множестве  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\tilde{T}_s)$ , где  $\sigma(\tilde{T}_s)$  — спектр оператора  $\tilde{T}_s$ . Далее, через  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  обозначаем соответственно обычную (равномерную) операторную норму (для ограниченного линейного оператора в  $L^2(0, \pi)$ ), ядерную норму (для ядерного оператора в  $L^2(0, \pi)$ ) и абсолютную операторную норму (для оператора Гильберта—Шмидта в  $L^2(0, \pi)$ ). Необходимые сведения об операторных нормах, ядерных операторах и операторах Гильберта—Шмидта можно найти, например, в [1, 3].

Пусть

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}'_s &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_m(s)| \geq d_m(s)/2 \quad \forall m \geq m_0(s)\}, \\ \Gamma_m(s) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_m(s)| = d_m(s)/2 \quad \forall m \geq m_0(s)\};\end{aligned}$$

имеем  $\Gamma_m(s) \subset \bar{\Omega}'_s$ . Полагаем  $b_m(s) = [\lambda_m(s) + \lambda_{m+1}(s)]/2$  при  $m \geq m_0(s)$ . Для любого  $\lambda \in \Omega_s$  через  $k(\lambda, s)$  обозначаем наибольшее  $k \geq m_0(s)$ , для которого  $\lambda_k(s)$  является ближайшим к  $\lambda$  собственным числом оператора  $T_s$ . Отметим, что при  $\lambda \in \Gamma_m(s)$  имеем  $k(\lambda, s) = m$  (за исключением случая  $m = m_0(s)$ ,  $\lambda = b_m(s)$ , для которого  $\lambda \in \Gamma_m(s) \cap \Gamma_{m+1}(s)$ , но  $k(\lambda, s) = m + 1$ ).

Всюду далее в настоящем пункте число  $s = \bar{0}, \bar{3}$  — произвольное, но фиксированное, поэтому для краткости до конца этого пункта зависимость от параметра  $s$  в обозначениях опускаем. Таким образом, вместо  $d_m(s)$ ,  $\tilde{R}_\lambda(p, s)$ ,  $T_s$ ,  $k(\lambda, s)$ , ... всюду ниже в настоящем пункте пишем  $d_m$ ,  $\tilde{R}_\lambda(p)$ ,  $T$ ,  $k(\lambda)$ , ... .

**Лемма 1.** Для любого  $\alpha > 1/2$  и любого  $\lambda \in \Omega$  при  $k = k(\lambda)$  имеем

$$\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|}, \quad \|R_\lambda\|_2^2 < \|R_\lambda\|^2 + \frac{10 + 4\alpha}{d_k^2}, \quad \|Q_\lambda(p)\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|p\| \cdot \|R_\lambda\|_2. \quad (5)$$

*Доказательство.* Первое равенство (5) очевидно и справедливо при любом  $\alpha > 0$ . Переходим к оценке квадрата абсолютной нормы резольвенты оператора  $T$ , т.е. величины

$$\|R_\lambda\|_2^2 = \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_m - \lambda|^2}. \quad (6)$$

Имеем  $b_{k-1} \leq \operatorname{Re} \lambda < b_k$  при  $k > m_0$  и  $\operatorname{Re} \lambda < b_k$  при  $k = m_0$ . Так как при  $m_0 \leq k < m$  справедливо неравенство  $|\lambda - \lambda_m| > \lambda_m - b_k$ , а при  $k > m_0$  и  $m < k$  — неравенство  $|\lambda - \lambda_m| \geq b_{k-1} - \lambda_m$ , причем  $b_{k-1} - \lambda_{k-1} = d_k/2$  при всех  $k > m_0$  и  $\lambda_{k+1} - b_k = d_{k+1}/2$  при всех  $k \geq m_0$ , то из (6) находим

$$\|R_\lambda\|_2^2 < \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|^2} + \sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_m - b_k)^2} + \frac{4}{d_k^2} + \frac{4}{d_{k+1}^2} + \sum_{m=m_0}^{k-2} \frac{1}{(b_{k-1} - \lambda_m)^2}, \quad (7)$$

где при  $k = m_0$  из пяти слагаемых в правой части нужно оставить только первые три, а при  $k = m_0 + 1$  — только первые четыре.

Пусть  $\beta = 2\alpha$ , тогда по условию  $\beta > 1$ .

При всех  $k \geq m_0$  с учетом неравенства  $v_k \equiv (\lambda_{k+1}/b_k)^{1/\beta} > 1$  и замены переменной интегрирования по формуле  $x + i_1/2 = b_k^{1/\beta} u$  получаем

$$\begin{aligned}\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_m - b_k)^2} &< \int_{k+1}^{\infty} \frac{dx}{((x + i_1/2)^\beta - b_k)^2} = \frac{1}{b_k^{2-1/\beta}} \int_{v_k}^{\infty} \frac{du}{(u^\beta - 1)^2} = \\ &= \frac{1}{b_k^{2-1/\beta}} \left[ \frac{1}{\beta(v_k^\beta - 1)} + \int_{v_k}^{\infty} \frac{1 - u^{\beta-1}}{(u^\beta - 1)^2} du \right] < \frac{1}{\beta b_k^{2-1/\beta} (v_k^\beta - 1)} = \frac{2}{\beta b_k^{1-1/\beta} d_{k+1}}.\end{aligned}$$

Так как при  $k > m_0$  справедливы неравенства

$$\beta b_k^{1-1/\beta} > \beta \lambda_k^{1-1/\beta} = \beta(k + i_1/2)^{\beta-1} > (k + i_1/2)^\beta - (k - 1 + i_1/2)^\beta = d_k,$$

а при  $k = m_0$  — неравенства

$$\beta b_k^{1-1/\beta} > \beta(\lambda_{k+1}/2)^{1-1/\beta} > \beta(k + 1 + i_1/2)^{\beta-1}/2 > [(k + 1 + i_1/2)^\beta - (k + i_1/2)^\beta]/2 = d_k/2,$$

то с учетом неравенства  $d_{k+1} \geq d_k$  имеем

$$\sum_{m=k+2}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_m - b_k)^2} < \frac{t_k}{d_k^2}, \quad (8)$$

где  $t_k = 4$  при  $k = m_0$  и  $t_k = 2$  при  $k > m_0$ .

При всех  $k \geq m_0 + 2$  с учетом неравенства  $w_k \equiv (\lambda_{k-1}/b_{k-1})^{1/\beta} < 1$  и замены переменной интегрирования по формуле  $x + i_1/2 = b_{k-1}^{1/\beta} u$  находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_0}^{k-2} \frac{1}{(b_{k-1} - \lambda_m)^2} &< \int_{m_0}^{k-1} \frac{dx}{(b_{k-1} - (x + i_1/2)^\beta)^2} \leq \frac{1}{b_{k-1}^{2-1/\beta}} \int_0^{w_k} \frac{du}{(1 - u^\beta)^2} = \\ &= \frac{1}{b_{k-1}^{2-1/\beta}} \left[ \frac{w_k}{1 - w_k^\beta} - (\beta - 1) \int_0^{w_k} \frac{u^\beta du}{(1 - u^\beta)^2} \right] < \frac{w_k}{b_{k-1}^{2-1/\beta} (1 - w_k^\beta)} = \frac{2\lambda_{k-1}^{1/\beta}}{b_{k-1} d_k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что для функции  $\varphi(u) = 4/[(1 + u)^\beta + 1]$  при всех  $u \geq 0$  выполняется неравенство  $\varphi''(u) > 0$ . Поэтому всюду на  $(0, +\infty)$  ее график лежит выше своей касательной, проведенной в точке с абсциссой  $u = 0$ . Таким образом, имеем  $\varphi(u) > 2 - \beta u$  при всех  $u > 0$ . Полагая  $u = 1/x$ , получаем, что при всех  $x > 0$  справедливо неравенство  $2x[(x + 1)^\beta - x^\beta] < \beta[(x + 1)^\beta + x^\beta]$ . При всех  $k \geq m_0 + 2$  находим  $x_k \equiv k - 1 + i_1/2 \geq m_0 + 1 + i_1/2 \geq 1$ , поэтому имеем

$$2\lambda_{k-1}^{1/\beta} d_k = 2x_k[(x_k + 1)^\beta - x_k^\beta] < \beta[(x_k + 1)^\beta + x_k^\beta] = 4\alpha b_{k-1}.$$

Отсюда и из (9) следует, что при любом  $k \geq m_0 + 2$  выполняется неравенство

$$\sum_{m=m_0}^{k-2} \frac{1}{(b_{k-1} - \lambda_m)^2} < \frac{4\alpha}{d_k^2}. \tag{10}$$

Из (7) с учетом неравенства  $d_{k+1} \geq d_k$ , (8) и (10) (при условии отбрасывания соответствующих слагаемых в правой части (7) в случае  $k \leq m_0 + 1$ ) следует неравенство

$$\|R_\lambda\|_2^2 < \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|^2} + \frac{\tau(k)}{d_k^2}, \tag{11}$$

где  $\tau(m_0) = 8$ ,  $\tau(m_0 + 1) = 10$ ,  $\tau(k) = 10 + 4\alpha$  при  $k \geq m_0 + 2$ . Отсюда получаем вторую оценку (5).

Система  $Y = \{y_m \mid m \geq m_0\}$  есть ОНПС в  $L^2(0, \pi)$ , причем при всех  $m \geq m_0$  и  $x \in [0, \pi]$  имеем  $|y_m(x)| \leq \sqrt{2/\pi}$ , поэтому ввиду (6)

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \|Q_\lambda(p)y_m\|^2 = \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{\|Py_m\|^2}{|\lambda_m - \lambda|^2} \leq \frac{2}{\pi} \|p\|^2 \|R_\lambda\|_2^2 < +\infty.$$

Следовательно,  $Q_\lambda(p)$  есть оператор Гильберта—Шмидта в  $L^2(0, \pi)$  и выполняется третья оценка (5). Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha > 1/2$ ,  $p \in L^2(0, \pi)$ ,  $\lambda \in \bar{\Omega}'$ ,  $k = k(\lambda)$ . Тогда

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{2}{d_k}, \quad \|R_\lambda\|_2 < \frac{\sqrt{14 + 4\alpha}}{d_k}, \quad \|Q_\lambda(p)\|_2 < 2\sqrt{\frac{7 + 2\alpha}{\pi}} \frac{\|p\|}{d_k}, \tag{12}$$

где при  $p = 0$  третье неравенство (12) заменяется равенством.

Если, кроме того,  $\|p\| \leq \eta$ , то

$$\|Q_\lambda(p)\|_2 < 1/2. \tag{13}$$

*Доказательство.* Из леммы 1 с учетом неравенства  $|\lambda - \lambda_k| \geq d_k/2$ , справедливого для любого  $\lambda \in \bar{\Omega}'$ , получаем (12). Из третьего неравенства (12) при  $\|p\| \leq \eta$  следует неравенство  $\|Q_\lambda(p)\|_2 < d/(2d_k)$ , откуда и вытекает (13).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\alpha > 1/2$ ,  $\|p\| \leq \eta$ ,  $\lambda \in \bar{\Omega}'$ . Тогда:

1)  $R_\lambda(p)$  есть ядерный оператор в  $L^2(0, \pi)$ , разлагающийся в ряд Неймана

$$\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - R_\lambda Q_\lambda(p) + R_\lambda Q_\lambda^2(p) - \dots + (-1)^n R_\lambda Q_\lambda^n(p) + \dots, \tag{14}$$

который сходится в ядерной норме равномерно по  $\lambda \in \bar{\Omega}'$ ; при этом

$$\|\tilde{R}_\lambda(p)\| \leq 2\|R_\lambda\|, \quad \|\tilde{R}_\lambda(p)\|_2 \leq 2\|R_\lambda\|_2; \tag{15}$$

2) оператор  $\tilde{T}$  дискретен; все его собственные числа  $\mu_m(p)$ , занумерованные числами  $m \geq m_0$  в порядке возрастания вещественных частей, имеют алгебраическую кратность, равную 1, и удовлетворяют неравенству

$$|\mu_m(p) - \lambda_m| < d_m/2. \quad (16)$$

*Доказательство.* 1) Рассмотрим очевидное операторное тождество, справедливое при всех  $\lambda \in \Omega$ :

$$\tilde{T} - \lambda E = (E + Q_\lambda(p))(T - \lambda E). \quad (17)$$

Применим лемму 2. Так как при  $\alpha > 1/2$ ,  $\|p\| \leq \eta$  и  $\lambda \in \bar{\Omega}'$  из (13) следует

$$\|Q_\lambda(p)\| \leq \|Q_\lambda(p)\|_2 < 1/2 < 1,$$

то для любых таких  $\alpha$ ,  $p$  и  $\lambda$  существует линейный ограниченный в  $L^2(0, \pi)$  оператор

$$(E + Q_\lambda(p))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q_\lambda^n(p), \quad (18)$$

причем ряд в правой части (18) сходится по обычной операторной норме в  $L^2(0, \pi)$  равномерно по  $\lambda \in \bar{\Omega}'$  и

$$\|(E + Q_\lambda(p))^{-1}\| \leq 2 \quad \forall \lambda \in \bar{\Omega}'. \quad (19)$$

Но тогда из (17) следует существование всюду на  $\bar{\Omega}'$  линейного ограниченного оператора

$$\tilde{R}_\lambda(p) = (\tilde{T} - \lambda E)^{-1} = R_\lambda(E + Q_\lambda(p))^{-1}. \quad (20)$$

Поскольку  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < +\infty$ , то при всех  $\lambda \in \Omega$  оператор  $R_\lambda$  является ядерным в  $L^2(0, \pi)$ . Так как, согласно (20), оператор  $\tilde{R}_\lambda(p)$  при  $\alpha > 1/2$ ,  $\|p\| \leq \eta$  и  $\lambda \in \bar{\Omega}'$  есть произведение ядерного оператора  $R_\lambda$  на ограниченный оператор (18), то при всех таких  $\alpha$ ,  $p$  и  $\lambda$  оператор  $\tilde{R}_\lambda(p)$  является ядерным в  $L^2(0, \pi)$ . Из (20) и (18) получаем, что при  $\alpha > 1/2$ ,  $\|p\| \leq \eta$  и  $\lambda \in \bar{\Omega}'$  резольвента  $\tilde{R}_\lambda(p)$  разлагается в ряд Неймана (14), сходящийся в ядерной, абсолютной и обычной операторной нормах равномерно по  $\lambda \in \bar{\Omega}'$ , причем, согласно (19) и (20), всюду на  $\bar{\Omega}'$  имеем (15), а также неравенство  $\|\tilde{R}_\lambda(p)\|_1 \leq 2\|R_\lambda\|_1$ .

2) Так как  $\tilde{R}_\lambda(p)$  является компактным оператором в  $L^2(0, \pi)$ , то оператор  $\tilde{T}$  дискретен и  $\sigma(\tilde{T})$  представляет собой бесконечно большую последовательность  $\{\mu_m(p)\}_{m=m_0}^{\infty}$  его собственных чисел, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей [3, с. 330]; поскольку  $\sigma(\tilde{T}) \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}'$ , то для любого  $n \geq m_0$  существует  $m \geq m_0$  такое, что  $|\mu_n(p) - \lambda_m| < d_m/2$ .

Согласно вытекающему из (14) операторному тождеству  $\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - \tilde{R}_\lambda(p)Q_\lambda(p)$  с учетом (13), первой оценки (15), первой оценки (12) и вложения  $\Gamma_m \subset \bar{\Omega}'$  получаем для любого  $m \geq m_0$  при  $\|p\| \leq \eta$ :

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\tilde{R}_\lambda(p) - R_\lambda) d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \|\tilde{R}_\lambda(p)\| \|Q_\lambda(p)\| |d\lambda| < \frac{d_m}{2} \cdot \frac{4}{d_m} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Норма разности проекторов Рисса, рассмотренная в левой части последнего неравенства, меньше 1, поэтому, как и у оператора  $T$ , все корневые подпространства оператора  $\tilde{T}$ , соответствующие его собственным числам, являются одномерными, и справедливо неравенство (16).  $\square$

Согласно лемме 3, собственное число  $\mu_m(p)$  оператора  $\tilde{T}$  при любом  $m \geq m_0$  лежит внутри окружности  $\Gamma_m$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\alpha > 1/2$  и  $\|p\| \leq \eta$ . Тогда для любого  $m \geq m_0$  имеем

$$\mu_m(p) = \lambda_m + (Py_m, y_m) + \beta_m(p), \quad (21)$$

где

$$\beta_m(p) \equiv \beta_m(p, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \text{Sp}[\tilde{R}_\lambda(p)Q_\lambda^2(p)] d\lambda. \quad (22)$$

*Доказательство.* Применим операцию следа к вытекающему из (14) операторному тождеству

$$\tilde{R}_\lambda(p) = R_\lambda - R_\lambda Q_\lambda(p) + \tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda^2(p) \quad (\lambda \in \bar{\Omega}'),$$

после чего при любом  $m \geq m_0$  умножим обе части полученного таким образом равенства на  $(\lambda_m - \lambda)/(2\pi i)$  и проинтегрируем в положительном направлении по окружности  $\Gamma_m$ . Получим числовое равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda(p) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp} R_\lambda d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp}[R_\lambda Q_\lambda(p)] d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp}[\tilde{R}_\lambda(p) Q_\lambda^2(p)] d\lambda. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя теорему В. Б. Лидского [3] о равенстве матричного и спектрального следов ядерного оператора, получаем при всех  $\lambda \in \bar{\Omega}'$ :

$$(\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda(p) = \sum_{n=m_0}^{\infty} \frac{\lambda_m - \lambda}{\mu_n(p) - \lambda}, \quad (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp} R_\lambda = \sum_{n=m_0}^{\infty} \frac{\lambda_m - \lambda}{\lambda_n - \lambda}, \quad (24)$$

причем ввиду сходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n(p)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$  и ограниченности контура  $\Gamma_m$  ряды в правых частях равенств (24) сходятся равномерно по  $\lambda$  из  $\Gamma_m$ . После их почленного интегрирования по  $\Gamma_m$  находим при любом  $m \geq m_0$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda(p) d\lambda = \mu_m(p) - \lambda_m, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp} R_\lambda d\lambda = 0. \quad (25)$$

Для любого  $\lambda \in \Omega$  с учетом справедливого при всех  $n \geq m_0$  равенства  $(R_\lambda Q_\lambda(p)y_n, y_n) = (Py_n, y_n)/(\lambda_n - \lambda)^2$  получаем

$$(\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp}[R_\lambda Q_\lambda(p)] = \sum_{n=m_0}^{\infty} \frac{(\lambda_m - \lambda)(Py_n, y_n)}{(\lambda_n - \lambda)^2}, \quad (26)$$

причем в силу сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n^2$ , ограниченности контура  $\Gamma_m$  и выполняющегося при всех  $n \geq m_0$  неравенства  $|(Py_n, y_n)| \leq \sqrt{2/\pi} \|p\|$  ряд в правой части (26) сходится равномерно по  $\lambda \in \Gamma_m$ . Интегрируя этот ряд почленно по  $\Gamma_m$ , находим для любого  $m \geq m_0$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp}[R_\lambda Q_\lambda(p)] d\lambda = -(Py_m, y_m). \quad (27)$$

Из (23)–(27) следуют соотношения (21), (22). □

**Лемма 5.** Пусть  $\alpha > 1/2$  и  $\|p_j\| \leq \eta$  при  $j = 1, 2$ . Тогда для любого  $m \geq m_0$  справедливо неравенство

$$|\beta_m(p_1) - \beta_m(p_2)| \leq \frac{8(7 + 2\alpha)}{\pi d_m} [\|p_1\| + \|p_2\|] \cdot \|p_1 - p_2\|. \quad (28)$$

*Доказательство.* Из (22) с учетом известных свойств [1] следа ядерного оператора вытекает

$$\begin{aligned} |\beta_m(p_1) - \beta_m(p_2)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_m} (\lambda_m - \lambda) \operatorname{Sp}[\tilde{R}_\lambda(p_1) Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2) Q_\lambda^2(p_2)] d\lambda \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} d_m^2 \cdot \max_{\lambda \in \Gamma_m} \|\tilde{R}_\lambda(p_1) Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2) Q_\lambda^2(p_2)\|_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Всюду на  $\Gamma_m$  получаем

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2) = \\ & = [\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)]Q_\lambda^2(p_1) + \tilde{R}_\lambda(p_2)[Q_\lambda(p_1)Q_\lambda(p_1 - p_2) + Q_\lambda(p_1 - p_2)Q_\lambda(p_2)], \end{aligned}$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \|\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2)\|_1 \leq \\ & \leq \|\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)\| \|Q_\lambda(p_1)\|_2^2 + \|\tilde{R}_\lambda(p_2)\| \cdot \|Q_\lambda(p_1 - p_2)\|_2 \cdot [\|Q_\lambda(p_1)\|_2 + \|Q_\lambda(p_2)\|_2]. \end{aligned}$$

Так как

$$\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2) = \tilde{R}_\lambda(p_1)(P_2 - P_1)\tilde{R}_\lambda(p_2) = \tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda(p_2 - p_1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q_\lambda^n(p_2),$$

то на  $\Gamma_m$  находим

$$\|\tilde{R}_\lambda(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)\| \leq 2\|\tilde{R}_\lambda(p_1)\| \|Q_\lambda(p_2 - p_1)\|.$$

Отсюда с учетом леммы 1 и соотношений (13), (15) получаем

$$\begin{aligned} & \|\tilde{R}_\lambda(p_1)Q_\lambda^2(p_1) - \tilde{R}_\lambda(p_2)Q_\lambda^2(p_2)\|_1 \leq \\ & \leq \|Q_\lambda(p_1 - p_2)\|_2 \{2\|\tilde{R}_\lambda(p_1)\| \cdot \|Q_\lambda(p_1)\|_2 \cdot (1/2) + \|\tilde{R}_\lambda(p_2)\| \cdot [\|Q_\lambda(p_1)\|_2 + \|Q_\lambda(p_2)\|_2]\} \leq \\ & \leq (8/\pi)\|R_\lambda\| \cdot \|R_\lambda\|_2^2 (\|p_1\| + \|p_2\|) \|p_1 - p_2\|. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом  $m \geq m_0$  ввиду (29) и (12) справедливо неравенство (28).  $\square$

**3.** Разложим функцию  $p(x)$  в сходящийся в  $L^2(0, \pi)$  ряд Фурье по полной ортогональной на  $(0, \pi)$  системе косинусов  $\{\cos Mx \mid M \geq 0\}$ :

$$p(x) = \frac{1}{2}a_0(p) + \sum_{M=1}^{\infty} a_M(p) \cos Mx, \quad (30)$$

где

$$a_M(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(x) \cos Mx \, dx \quad (M \geq 0) \quad (31)$$

— коэффициенты Фурье функции  $p(x)$  по системе косинусов на  $(0, \pi)$ .

Нетрудно убедиться, что при  $s = 0, 3$  и  $m \geq m_0(s)$

$$(Py_m(s), y_m(s)) = \frac{1}{2} \gamma_{m+i_1} [a_0(p) + (-1)^{i_2} a_{2m+i_1}(p)], \quad (32)$$

где  $s = 2i_1 + i_2$  и  $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$ .

**Лемма 6.** Если  $\alpha > 3/4$ , то последовательность  $\{s_M\}_{M=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию i) теоремы,

$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{9^\alpha - 1}{4^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{7 + 2\alpha}}, & \text{если } s_M \neq 0 \ \forall M \geq 1, \\ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{7 + 2\alpha}}, & \text{если } \exists M \geq 1 \text{ такое, что } s_M = 0, \end{cases} \quad (33)$$

и  $\|p\| \leq \delta_1$ , то при всех  $M \in \mathbb{N}$  имеем

$$\mu_m(p, s_M) = \left(\frac{M}{2}\right)^{2\alpha} + \frac{1}{2}a_0(p) + (-1)^{s_M} \frac{1}{2}a_M(p) + \beta_m(p, s_M), \quad (34)$$

где  $t$  есть целая часть числа  $M/2$  и

$$\beta_m(p, s_M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m(s_M)} \left( \left(\frac{M}{2}\right)^{2\alpha} - \lambda \right) \text{Sp}[\tilde{R}_\lambda(p, s_M)Q_\lambda^2(p, s_M)] \, d\lambda. \quad (35)$$

При этом

$$\sqrt{\sum_{M=1}^{\infty} |\beta_m(p, s_M)|^2} \leq C_1 \|p\|^2, \quad (36)$$

где

$$C_1 = \frac{8(7+2\alpha)}{\pi} \sqrt{\sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{d_m^2(s_M)}}. \quad (37)$$

Если, кроме того,  $\|p_j\| \leq \delta_1$  при  $j = 1, 2$ , то

$$\sqrt{\sum_{M=1}^{\infty} |\beta_m(p_1, s_M) - \beta_m(p_2, s_M)|^2} \leq C_1 [\|p_1\| + \|p_2\|] \cdot \|p_1 - p_2\|. \quad (38)$$

*Доказательство.* Согласно лемме 4 с учетом замечания 1 и вытекающего из (33) равенства  $\delta_1 = \min_{M \geq 1} \eta(s_M)$ , при всех  $M \geq 1$  имеем

$$\mu_m(p, s_M) = \left(\frac{M}{2}\right)^{2\alpha} + (Py_m(s_M), y_m(s_M)) + \beta_m(p, s_M).$$

В силу условия i), наложенного на последовательность  $\{s_M\}_{M=1}^{\infty}$ , при любом  $M \geq 1$  справедливы соотношения  $M = 2m + i_1(s_M)$  и  $m + i_1(s_M) \geq 1$ . Ввиду (32) и равенства  $(-1)^{i_2(s_M)} = (-1)^{s_M}$ , получаем

$$(Py_m(s_M), y_m(s_M)) = [a_0(p) + (-1)^{s_M} a_M(p)]/2$$

при всех  $M \geq 1$ . Отсюда в силу леммы 4 следуют соотношения (34) и (35).

Пусть  $\|p_j\| \leq \delta_1$  при  $j = 1, 2$ . Тогда из леммы 5 следует неравенство (38) при  $C_1$  из (37). Сходимость ряда в правой части (37) вытекает из неравенства  $d_m(s) \geq 2\alpha(m-1)^{2\alpha-1}$ , справедливого при всех  $s = \overline{0, 3}$  и  $m \geq 2$ .

Из (38) при  $p_1 = p, p_2 = 0$  следует (36). Лемма доказана.  $\square$

**Замечание 3.** Так как  $d_0(s_1) = (9^\alpha - 1)/4^\alpha, d_1(0) = 1, d_1(1) = 4^\alpha - 1$  и

$$d_m(s_M) = [M^{2\alpha} - (M-2)^{2\alpha}]/4^\alpha$$

при всех  $M \geq 3$ , то (37) записывается в виде

$$C_1 = \frac{8(7+2\alpha)}{\pi} \left\{ \frac{16^\alpha}{(9^\alpha - 1)^2} + 1 + \left[ \frac{1}{(4^\alpha - 1)^2} - 1 \right] s_2 + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{16^\alpha}{(M^{2\alpha} - (M-2)^{2\alpha})^2} \right\}^{1/2}. \quad (39)$$

В частности, при  $\alpha = 1$  (случай задачи Штурма—Лиувилля) и  $s_2 \neq 0$  из (39) получаем

$$C_1 = \frac{72}{\pi} \sqrt{\frac{13}{36} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{12}{\pi} \sqrt{6\pi^2 - 23}.$$

**Лемма 7.** Пусть  $\alpha > 3/4$ , последовательность  $\{s_M\}_{M=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию (i) теоремы, последовательность  $\{\xi_M\}_{M=1}^{\infty}$  обладает свойством  $\Lambda < +\infty$  при  $\Lambda$  из условия (ii) теоремы,  $\|p\| \leq \delta_1$  при  $\delta_1$  из (33). Тогда для выполнения условия (2) необходимо и достаточно, чтобы потенциал  $p$  являлся решением операторного уравнения

$$p = q + \mathcal{B}(p) \equiv \mathcal{A}(p) \quad (40)$$

в шаре  $\|p\| \leq \delta_1$  гильбертова пространства  $L^2(0, \pi)$ . Здесь

$$q(x) = 2 \sum_{M=1}^{\infty} (-1)^{s_M} \left[ \xi_M - \left(\frac{M}{2}\right)^{2\alpha} \right] \cos Mx, \quad (41)$$

$$\mathcal{B}(p) = 2 \sum_{M=1}^{\infty} (-1)^{s_{M+1}} \beta_m(p, s_M) \cos Mx. \quad (42)$$

Заметим, что в условиях леммы 7  $q \in L^2(0, \pi)$  ввиду конечности  $\Lambda$  из (ii), а  $\mathcal{B}(p) \in L^2(0, \pi)$  в силу сходимости ряда в левой части (36).

*Доказательство леммы 7. Необходимость.* Пусть для потенциала  $p$  выполнено условие (2). Применяя лемму 6, получаем справедливость формулы (34). Поскольку  $p \in L^2(0, \pi)$  и, согласно лемме 6, сходится ряд в левой части (36), то находим соответственно, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_M(p) = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \beta_m(p, s_M) = 0.$$

Но тогда из (34) и (2) следует

$$\lim_{M \rightarrow \infty} [\xi_M - (M/2)^{2\alpha}] = a_0(p)/2.$$

Отсюда с учетом неравенства  $\Lambda < +\infty$  получаем  $a_0(p) = 0$ . Поэтому из (34) и (2) вытекает равенство

$$a_M(p) = (-1)^{s_M} 2 \left[ \xi_M - \left( \frac{M}{2} \right)^{2\alpha} \right] + (-1)^{s_M+1} 2\beta_m(p, s_M) \quad (M \geq 1). \quad (43)$$

Из (30), (41), равенства  $a_0(p) = 0$  и соотношений  $q \in L^2(0, \pi)$  и  $\mathcal{B}(p) \in L^2(0, \pi)$  получаем выполнение (40).

*Достаточность.* Пусть  $p$  есть решение операторного уравнения (40) в шаре  $\|p\| \leq \delta_1$  пространства  $L^2(0, \pi)$ . Тогда из (40)–(42) следуют (43) и равенство  $a_0(p) = 0$ . Из (43) для этого потенциала  $p$  находим

$$\xi_M = \left( \frac{M}{2} \right)^{2\alpha} + (-1)^{s_M} \frac{1}{2} a_M(p) + \beta_m(p, s_M) \quad (M \geq 1). \quad (44)$$

Применяя к  $p$  лемму 6, из (44), (34) и равенства  $a_0(p) = 0$  получаем выполнение для рассматриваемого потенциала  $p$  условия (2).  $\square$

#### 4. Доказательство теоремы. Полагаем

$$\delta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}C_1}, \quad \delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Рассмотрим функцию  $\varepsilon = g(\delta)$ , где  $g(\delta) = \delta/\sqrt{2\pi} - C_1\delta^2$  при  $0 < \delta \leq \delta_2$ . Пусть  $\delta = h(\varepsilon)$  — обратная к ней функция, т.е.

$$h(\varepsilon) = \delta_2 - \sqrt{\delta_2^2 - 2\delta_2\sqrt{2\pi}\varepsilon} \quad \left( 0 < \varepsilon \leq \frac{\delta_2}{2\sqrt{2\pi}} \right).$$

Полагаем  $\varepsilon_0 = g(\delta_0)$ , тогда  $\delta_0 = h(\varepsilon_0)$ .

Пусть числовые последовательности  $\{s_M\}_{M=1}^{\infty}$  и  $\{\xi_M\}_{M=1}^{\infty}$  удовлетворяют условиям (i) и (ii) теоремы. Построим по этим двум последовательностям функцию  $q \in L^2(0, \pi)$  согласно (41) и рассмотрим порождаемое этой функцией операторное уравнение (40) с неизвестным  $p$ , пробегающим шар  $\|p\| \leq \delta_1$  пространства  $L^2(0, \pi)$ .

Если  $\|p_j\| \leq \delta_1$  при  $j = 1, 2$ , то из (40) следует

$$\|\mathcal{A}(p_1) - \mathcal{A}(p_2)\| = \|\mathcal{B}(p_1) - \mathcal{B}(p_2)\|. \quad (45)$$

Применяя лемму 6 с учетом (42), неравенства (38) и равенства Парсеваля для тригонометрических рядов Фурье по косинусам на  $(0, \pi)$ , находим

$$\|\mathcal{B}(p_1) - \mathcal{B}(p_2)\| = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2} \sum_{M=1}^{\infty} |\beta_m(p_1, s_M) - \beta_m(p_2, s_M)|^2} \leq \sqrt{2\pi}C_1[\|p_1\| + \|p_2\|] \cdot \|p_1 - p_2\|. \quad (46)$$

Рассмотрим произвольное  $\varepsilon \in [\Lambda, \varepsilon_0]$  и положим  $\delta = h(\varepsilon)$ ; тогда  $\varepsilon = g(\delta)$  и справедливы неравенства  $0 \leq h(\Lambda) \leq \delta < \delta_0 \leq \delta_1$ .

Из (45) и (46) следует, что если  $\|p_j\| \leq \delta$  при  $j = 1, 2$ , то

$$\|\mathcal{A}(p_1) - \mathcal{A}(p_2)\| \leq 2\sqrt{2\pi}C_1\delta\|p_1 - p_2\|. \quad (47)$$

Если  $\|p\| \leq \delta$ , то согласно (40)–(42), (36), неравенству  $\Lambda \leq \varepsilon$  и равенству Парсеваля имеем

$$\|\mathcal{A}(p)\| \leq \|q\| + \|\mathcal{B}(p)\| \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\varepsilon + \sqrt{2\pi}C_1\|p\|^2 \leq \sqrt{2\pi}(\varepsilon + C_1\delta^2) = \delta. \quad (48)$$

Из (47) и (48) получаем, что рассматриваемый нами оператор  $\mathcal{A}(p)$  отображает замкнутый шар  $\|p\| \leq \delta$  пространства  $L^2(0, \pi)$  в себя и является оператором сжатия на этом замкнутом шаре. Согласно принципу Банаха сжимающих отображений, операторное уравнение  $p = \mathcal{A}(p)$  имеет единственное решение в замкнутом шаре  $\|p\| \leq \delta = h(\varepsilon)$ . Поскольку это верно при любом  $\varepsilon \in [\Lambda, \varepsilon_0)$ , то это операторное уравнение имеет единственное решение в открытом шаре  $\|p\| < \delta_0$ . Рассмотрим это решение  $p$ ; в силу леммы 7 оно является единственным решением рассматриваемой обратной задачи в шаре  $\|p\| < \delta_0$  пространства  $L^2(0, \pi)$ . Так как, согласно (40), имеем  $p = q + \mathcal{B}(p)$ , а  $q$  и  $\mathcal{B}(p)$  ввиду (41) и (42) ортогональны функции  $\psi(x) \equiv 1$  в  $L^2(0, \pi)$ , то для этой функции  $p$  выполнено условие (3). Далее, из (40) и (48) получаем  $\|p\| \leq h(\varepsilon)$  при любом  $\varepsilon \in [\Lambda, \varepsilon_0)$ . Полагая  $\varepsilon = \Lambda$ , находим

$$\|p\| \leq h(\Lambda). \quad (49)$$

При  $0 < \delta < \delta_0$  имеем  $g(\delta) > \varepsilon_0\delta/\delta_0$ , поэтому при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  выполняется неравенство  $0 < h(\varepsilon) < C_0\varepsilon$ , где  $C_0 = \delta_0/\varepsilon_0$  (заметим, что  $0 < C_0 \leq \delta_2/\varepsilon_2 = 2\sqrt{2\pi}$ ). Отсюда и из (49) получаем (4). Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
2. Дубровский В. В., Великих А. С. Теорема о существовании и единственности решения обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля// *Фундам. и прикл. мат.* — 1998. — 4, № 2. — С. 535–541.
3. Садовничий В. А. Теория операторов. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
4. Хачатрян И. Г. О восстановлении дифференциального уравнения по спектру// *Функц. анал. и его прилож.* — 1976. — 10, № 1. — С. 93–94.
5. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. — Саратов: Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001.

Н. Г. Томин

Ивановская государственная текстильная академия

E-mail: pavlov\_michael@indi.ru