

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии  
Институт Кибернетики

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 12**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**



Тбилиси  
2004

## Редакционная коллегия

### Главный редактор:

*Р. В. Гамкрелидзе* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

### Заместитель главного редактора:

*Г. Харатишвили* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

### Члены редколлегии:

*А. А. Аграчев* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

*А. А. Болибрух* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*Г. Гиоргадзе* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

*Е. С. Голод* (Московский государственный университет)

*А. Лашхи* (Грузинский технический университет)

*Е. Ф. Мищенко* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Овчинников* (Московский государственный университет)

*В. Л. Попов* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Сарычев* (Университет Флоренции)

*Г. Химшиашвили* (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

# **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 12**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი  
თბილისი

**2004**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Линейные дифференциальные соотношения между решениями класса уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу ( <i>А. В. Аксенов</i> ) . . . . .	3
Усреднение задач с градиентными ограничениями по периодическим мерам ( <i>Г. Кардоне, Г. Гарджиуло</i> ) . . . . .	38
Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных и стержневых каркасах критической толщины ( <i>С. Е. Пастухова</i> ) . . . . .	51
Об аппроксимативных свойствах соболевских пространств теории упругости на тонких стержневых структурах ( <i>С. Е. Пастухова</i> ) . . . . .	99
Об условиях трансмиссии в задаче Штурма—Лиувилля на сети ( <i>Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев</i> ) . . . . .	107
Асимптотическая устойчивость решений задачи Коши для моделей неравновесной термодинамики. Устойчивые гиперболические пучки ( <i>Е. В. Радкевич</i> ) . . . . .	138

## ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ

© 2004 г. А. В. АКСЕНОВ

Аннотация. Получены все линейные дифференциальные соотношения первого порядка вида

$$u^{(\beta)} = A(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + C(r, z) u^{(\alpha)}$$

между решениями  $u = u^{(\alpha)}$ ,  $u = u^{(\beta)}$  класса уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД). Рассматриваются приложения полученных соотношений для получения тождеств между операторами ЭПД, рекуррентных соотношений для функций Бесселя и общих решений уравнения ЭПД в специальных случаях применительно к одномерной газовой динамике политропного газа.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	3
2. Построение линейных дифференциальных соотношений с помощью групп непрерывных преобразований . . . . .	4
3. Нахождение всех линейных дифференциальных соотношений первого порядка . . . . .	10
4. Сравнение результатов, полученных с помощью групп непрерывных преобразований и прямым методом . . . . .	26
5. Тождества между операторами Эйлера—Пуассона—Дарбу . . . . .	27
6. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя . . . . .	29
7. Гиперболическое уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу . . . . .	33
8. Приложение к одномерной газовой динамике политропного газа . . . . .	35
Список литературы . . . . .	37

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД) можно записать в одной из следующих форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{2(\xi + \eta)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \tag{1.3}$$

где  $\alpha$  — вещественный параметр. Уравнение (1.1) представляет собой эллиптическое уравнение ЭПД. Оно еще называется обобщенным осесимметрическим уравнением Лапласа [27, 28]. При  $\alpha = 1$  оно является осесимметрическим уравнением Лапласа и было исследовано в [21]. Уравнения (1.2), (1.3) представляют собой гиперболическое уравнение ЭПД (уравнение (1.3) записано в характеристических переменных).

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 02–01–00613 и 03–01–00446).

Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу впервые было изучено Эйлером [23] и позднее исследовано Пуассоном [26], Риманом [14] и Дарбу [22] (см. историю вопроса в [11, с. 532], [19, с. 527]).

Уравнение ЭПД возникает во многих задачах механики и физики. Оно возникает в различных задачах механики сплошных сред (см. [1, 3–5, 10, 15, 16, 29]), физики (см. [6]).

Уравнение ЭПД допускает также многомерные аналоги (см. [13, 29]).

В настоящей работе получены все линейные дифференциальные соотношения первого порядка вида

$$u^{(\beta)} = A(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + C(r, z) u^{(\alpha)}$$

между решениями  $u = u^{(\alpha)}$ ,  $u = u^{(\beta)}$  класса уравнений ЭПД. Рассматриваются приложения полученных соотношений для получения тождеств между операторами ЭПД, рекуррентных соотношений для функций Бесселя и общих решений уравнения ЭПД в специальных случаях применительно к одномерной газовой динамике политропного газа. Настоящая работа является расширенным вариантом статьи [2].

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГРУПП НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим эллиптическое уравнение ЭПД

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Оно задает класс уравнений, определяемый параметром  $\alpha$ .

Уравнение (2.1) связано с трехмерным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2.2)$$

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z, \\ r &\geq 0, & 0 &\leq \varphi < 2\pi, & -\infty &< z < \infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет решения вида

$$V(r, \varphi, z) = C e^{\pm i \lambda \varphi} r^\lambda u(r, z), \quad (2.5)$$

где  $C$  — произвольная постоянная,  $i^2 = -1$ ,  $\lambda = (\alpha - 1)/2$  и функция  $u = u(r, z)$  удовлетворяет уравнению (2.1). Соотношение (2.4) задает редукцию уравнения (2.2) к классу уравнений (2.1).

Уравнение (2.2) линейно и однородно. Для линейного однородного уравнения алгебра Ли операторов симметрии всегда содержит бесконечномерную подалгебру, порожденную операторами симметрии, зависящими от произвольных решений этого уравнения. Поэтому в дальнейшем для уравнения (2.2) будем рассматривать лишь конечномерную часть алгебры Ли операторов симметрии.

Уравнение (2.2) допускает алгебру Ли операторов симметрии со следующим базисом [8, с. 94]:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_4 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_5 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_6 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & X_7 &= V \frac{\partial}{\partial V}, \\
X_8 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_9 &= (x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xz \frac{\partial}{\partial z} - xV \frac{\partial}{\partial V}, \\
X_{10} &= 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yz \frac{\partial}{\partial z} - yV \frac{\partial}{\partial V}, \\
X_{11} &= 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z} - zV \frac{\partial}{\partial V}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В цилиндрической системе координат (2.3) базис операторов симметрии (2.6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
X_2 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
X_5 &= z \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{z \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_6 &= z \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{z \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_7 &= V \frac{\partial}{\partial V}, & X_8 &= r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_9 &= (r^2 - z^2) \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(r^2 + z^2)}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2rz \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} - r \cos \varphi V \frac{\partial}{\partial V}, \\
X_{10} &= (r^2 - z^2) \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(r^2 + z^2)}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2rz \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} - r \sin \varphi V \frac{\partial}{\partial V}, \\
X_{11} &= 2rz \frac{\partial}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} - zV \frac{\partial}{\partial V}.
\end{aligned}$$

Вместо операторов  $X_1, X_2$  рассмотрим операторы

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 + iX_2 = e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{ie^{i\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
Z_2 &= X_1 - iX_2 = e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{ie^{-i\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},
\end{aligned}$$

вместо операторов  $X_5, X_6$  — операторы

$$Z_5 = X_5 + iX_6 = ze^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{ize^{i\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - re^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Z_6 = X_5 - iX_6 = ze^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{ize^{-i\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - re^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial z},$$

и вместо  $X_9, X_{10}$  — операторы

$$Z_9 = X_9 + iX_{10} = (r^2 - z^2)e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i(r^2 + z^2)e^{i\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2rze^{i\varphi}V \frac{\partial}{\partial z} - re^{i\varphi}V \frac{\partial}{\partial V},$$

$$Z_{10} = X_9 - iX_{10} = (r^2 - z^2)e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i(r^2 + z^2)e^{-i\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2rze^{-i\varphi}V \frac{\partial}{\partial z} - re^{-i\varphi}V \frac{\partial}{\partial V}.$$

Справедливо следующее предложение.

**Предложение 2.1.** Пусть линейное однородное уравнение  $Lv = 0$  допускает оператор симметрии

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, v) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, v) \frac{\partial}{\partial v}. \quad (2.7)$$

Тогда, если  $v = \varphi(x)$  является решением, то и

$$\tilde{v} = X[v - \varphi(x)]|_{v=\varphi(x)} \quad (2.8)$$

также является решением этого линейного однородного уравнения.

**Доказательство.** Группа преобразований, задаваемая инфинитезимальным оператором (2.7), преобразует решение  $v = \varphi(x)$  в решение

$$v = \varphi(x) + aX[v - \varphi(x)]|_{v=\varphi(x)} + O(a^2),$$

где  $a$  — групповой параметр.

Справедливость утверждения следует из линейности и однородности уравнения.  $\square$

Применим утверждение 2.1 для получения новых решений уравнения (2.4) с помощью операторов симметрии  $Z_1, Z_2, X_3, X_4, Z_5, Z_6, X_7, X_8, Z_9, Z_{10}, X_{11}$ , действуя ими на решения вида (2.5). Если при этом вид решений (2.5) не будет меняться, то мы сможем получить новые решения уравнения (2.1). Они и определяют искомые соотношения между решениями рассматриваемого класса уравнений (2.1).

Рассмотрим решение уравнения (2.4) вида

$$V(r, \varphi, z) = e^{i\lambda\varphi} r^\lambda u^{(\alpha)}(r, z). \quad (2.9)$$

1. Используя оператор  $Z_1$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda+1)\varphi} r^{\lambda+1} \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} \quad (2.10)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda+1)\varphi} r^{-(\lambda+1)} r^{2\lambda+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}. \quad (2.11)$$

Из (2.10), (2.11) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha+2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \\ u^{(-\alpha)} &= r^\alpha \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2. Используя оператор  $Z_2$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda-1)\varphi} r^{\lambda-1} \left( r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2\lambda u^{(\alpha)} \right) \quad (2.13)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda-1)\varphi} r^{-(\lambda-1)} \left( r^{2\lambda-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2\lambda r^{2\lambda-2} u^{(\alpha)} \right). \quad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1)

$$\begin{aligned} u^{(\alpha-2)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha-1)u^{(\alpha)}, \\ u^{(4-\alpha)} &= r^{\alpha-2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha-1)r^{\alpha-3}u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Используя оператор  $X_3$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i\lambda\varphi} r^\lambda \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} \quad (2.16)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i\lambda\varphi} r^{-\lambda} r^{2\lambda} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}. \quad (2.17)$$

Из (2.16), (2.17) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\alpha)} &= \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

4. Используя оператор  $X_4$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = i\lambda e^{i\lambda\varphi} r^\lambda u^{(\alpha)} \quad (2.19)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = i\lambda e^{i\lambda\varphi} r^{-\lambda} r^{2\lambda} u^{(\alpha)}. \quad (2.20)$$

Из (2.19), (2.5) следует тривиальное соотношение  $\tilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}$ , а из (2.20), (2.5) следует соотношение

$$u^{(2-\alpha)} = r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}. \quad (2.21)$$

5. Используя оператор  $Z_5$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda+1)\varphi} r^{\lambda+1} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda+1)\varphi} r^{-(\lambda+1)} \left( z r^{2\lambda+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^{2\lambda+2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} \right). \quad (2.23)$$

Из (2.22), (2.23) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha+2)} &= \frac{z}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ u^{(-\alpha)} &= z r^\alpha \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^{\alpha+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

6. Используя оператор  $Z_6$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda-1)\varphi} r^{\lambda-1} \left( r z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + 2\lambda z u^{(\alpha)} \right) \quad (2.25)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda-1)\varphi} r^{-(\lambda-1)} \left( z r^{2\lambda-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^{2\lambda} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + 2\lambda z r^{2\lambda-2} u^{(\alpha)} \right). \quad (2.26)$$

Из (2.25), (2.26) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha-2)} &= r z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha-1) z u^{(\alpha)}, \\ u^{(4-\alpha)} &= z r^{\alpha-2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^{\alpha-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha-1) z r^{\alpha-3} u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

7. Используя оператор  $X_7$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = e^{i\lambda\varphi} r^\lambda u^{(\alpha)} \quad (2.28)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = e^{i\lambda\varphi} r^{-\lambda} r^{2\lambda} u^{(\alpha)}. \quad (2.29)$$

Из (2.28) следует тривиальное соотношение  $\tilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}$ , а из (2.29), (2.5) следует соотношение, совпадающее с (2.21).

8. Используя оператор  $X_8$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i\lambda\varphi} r^\lambda \left( r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \lambda u^{(\alpha)} \right) \quad (2.30)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i\lambda\varphi} r^{-\lambda} \left( r^{2\lambda+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z r^{2\lambda} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \lambda r^{2\lambda} u^{(\alpha)} \right). \quad (2.31)$$

Из (2.30), (2.31) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\alpha)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \frac{(\alpha-1)}{2} u^{(\alpha)}, \\ u^{(2-\alpha)} &= r^\alpha \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z r^{\alpha-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \frac{(\alpha-1)}{2} r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

9. Используя оператор  $Z_9$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda+1)\varphi} r^{\lambda+1} \left[ \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (2\lambda + 1) u^{(\alpha)} \right] \quad (2.33)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda+1)\varphi} r^{-(\lambda+1)} \left[ (r^2 - z^2) r^{2\lambda+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z r^{2\lambda+2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (2\lambda + 1) r^{2\lambda+2} u^{(\alpha)} \right]. \quad (2.34)$$

Из (2.33), (2.34) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha+2)} &= \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)}, \\ u^{(-\alpha)} &= (r^2 - z^2) r^\alpha \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z r^{\alpha+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha r^{\alpha+1} u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

10. Используя оператор  $Z_{10}$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda-1)\varphi} r^{\lambda-1} \left[ r(r^2 - z^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (r^2 - 2\lambda z^2) u^{(\alpha)} \right] \quad (2.36)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i(\lambda-1)\varphi} r^{-(\lambda-1)} \left[ (r^2 - z^2)r^{2\lambda-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2zr^{2\lambda} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (r^2 - 2\lambda z^2)r^{2\lambda-2} u^{(\alpha)} \right]. \quad (2.37)$$

Из (2.36), (2.37) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha-2)} &= r(r^2 - z^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2] u^{(\alpha)}, \\ u^{(4-\alpha)} &= (r^2 - z^2)r^{\alpha-2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2zr^{\alpha-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2] r^{\alpha-3} u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

11. Используя оператор  $X_{11}$ , получаем новое решение уравнения (2.4), записанное в виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i\lambda\varphi} r^\lambda \left[ 2rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (2\lambda + 1)z u^{(\alpha)} \right] \quad (2.39)$$

или записанное в другом виде

$$\tilde{V}(r, \varphi, z) = -e^{i\lambda\varphi} r^{-\lambda} \left[ 2zr^{2\lambda+1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2)r^{2\lambda} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (2\lambda + 1)zr^{2\lambda} u^{(\alpha)} \right]. \quad (2.40)$$

Из (2.39), (2.40) и (2.5) следуют два соотношения между решениями класса уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\alpha)} &= 2rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)}, \\ u^{(2-\alpha)} &= 2zr^\alpha \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2)r^{\alpha-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Полученные парные соотношения (2.12), (2.15), (2.18), (2.21), (2.24), (2.27), (2.32), (2.35), (2.38), (2.41) не являются независимыми. В каждой паре этих соотношений второе соотношение всегда является следствием первого соотношения и соотношения (2.21).

**Замечание 2.1.** Если, следуя (2.5), вместо решения (2.9) рассмотрим решение

$$V(r, \varphi, z) = e^{-i\lambda\varphi} r^\lambda u^{(\alpha)}(r, z),$$

то не получим новых соотношений.

В результате получаем следующее предложение.

**Предложение 2.2.** На основе использования симметрий трехмерного уравнения Лапласа и редукции его к уравнению ЭПД можно получить следующие независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^{(\alpha)} &= \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\
\tilde{u}^{(\alpha)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\
\tilde{u}^{(\alpha)} &= 2rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)}, \\
u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}, \\
u^{(\alpha-2)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha - 1) u^{(\alpha)}, \\
u^{(\alpha-2)} &= rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha - 1) z u^{(\alpha)}, \\
u^{(\alpha-2)} &= r(r^2 - z^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2] u^{(\alpha)}, \\
u^{(\alpha+2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \\
u^{(\alpha+2)} &= \frac{z}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\
u^{(\alpha+2)} &= \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

**Замечание 2.2.** Четвертое соотношение в (2.42) было получено в [27], а восьмое — в [28].

**Замечание 2.3.** Первые четыре базисные соотношения в (2.42) можно получить, используя симметрии уравнения (2.1), которые при  $\alpha(\alpha - 2) \neq 0$  образуют следующий базис алгебры Ли операторов симметрии [1, 25]:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{\partial}{\partial z}, & Y_2 &= r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z}, & Y_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\
Y_4 &= 2rz \frac{\partial}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} - \alpha z u \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

### 3. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим класс уравнений ЭПД

$$L_\alpha u = 0, \quad L_\alpha \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Дадим полное описание всех соотношений вида

$$u^{(\beta)} = A(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + C(r, z) u^{(\alpha)} \tag{3.2}$$

между решениями  $u = u^{(\alpha)}$ ,  $u = u^{(\beta)}$  класса уравнений (3.1).

Из (3.1), (3.2) следует

$$L_\beta \left( A \frac{\partial u}{\partial r} + B \frac{\partial u}{\partial z} + Cu \right) \Big|_{L_\alpha u = 0} = 0. \tag{3.3}$$

Из (3.1) находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial r^2} &= -\frac{\alpha}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial r^3} &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial r \partial z^2}, \\ \frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial r^2 \partial z} &= -\frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial z^3}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$\begin{aligned}& \left\{ \left[ -2 \frac{\partial A}{\partial r} + 2 \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{(\beta-\alpha)}{r} A \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[ 2 \frac{\partial A}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta-\alpha)}{r} B \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \right. \\ & + \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{(\beta-2\alpha)}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{r^2} A + 2 \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{(\beta-\alpha)}{r} C \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) u \right\} \Big|_{u=u^{(\alpha)}} = 0.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Равенство (3.5) должно выполняться при произвольных значениях  $\partial^2 u^{(\alpha)}/\partial r \partial z$ ,  $\partial^2 u^{(\alpha)}/\partial z^2$ ,  $\partial u^{(\alpha)}/\partial r$ ,  $\partial u^{(\alpha)}/\partial z$ ,  $u^{(\alpha)}$ . Отсюда следует система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta-\alpha)}{2r} A &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta-\alpha)}{2r} B &= 0, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{(\beta-2\alpha)}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{r^2} A + 2 \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{(\beta-\alpha)}{r} C &= 0, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} &= 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Система уравнений (3.6) является переопределенной. Исследуем ее на совместность.

Определим порядок старшинства переменных:  $\{r, z\}$  — для независимых переменных,  $\{A, C, B\}$  — для зависимых переменных. В соответствии с этим запишем систему уравнений (3.6) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{(\beta-\alpha)}{2r} A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta-\alpha)}{2r} B, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{(\beta-2\alpha)}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{r^2} A - 2 \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{(\beta-\alpha)}{r} C, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\beta}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - 2 \frac{\partial C}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{\beta}{r} \frac{\partial C}{\partial r}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

В силу первого уравнения системы (3.7) третье уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = -\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha)}{2r^2} A + \frac{(2\alpha - \beta)}{r} \frac{\partial B}{\partial z} - 2 \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)}{r} C.\quad (3.8)$$

Из первого уравнения системы (3.7) находим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha + 2)}{4r^2} A.\quad (3.9)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.8), (3.9), находим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} + \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^2} A + \frac{(3\alpha - \beta)}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} - 2 \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)}{r} C. \quad (3.10)$$

Из второго уравнения системы (3.7) следует

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.10), (3.11), находим

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} A - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} C. \quad (3.12)$$

Подставляя выражение для  $\frac{\partial C}{\partial r}$  в пятое уравнение системы (3.7), получаем

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = -\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{\alpha\beta}{2r^2} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\beta(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^3} A + \frac{\beta(\beta - \alpha)}{2r^2} C. \quad (3.13)$$

Из первого уравнения системы (3.7), используя второе уравнение, находим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{(\beta - \alpha)}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)^2}{4r^2} B, \quad (3.14)$$

а из второго уравнения находим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r \partial z} = -\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{2r^2} B. \quad (3.15)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.14), (3.15) и используя четвертое уравнение системы (3.7), находим

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} B. \quad (3.16)$$

Подставляя выражение для  $\partial C / \partial z$  в четвертое уравнение системы (3.7), получаем

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{(\beta - \alpha)}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^2} B. \quad (3.17)$$

На данном этапе исследования на совместность системы уравнений (3.7) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} A - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} B, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{\alpha\beta}{2r^2} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\beta(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^3} A + \frac{\beta(\beta - \alpha)}{2r^2} C, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{(\beta - \alpha)}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^2} B. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В системе уравнений (3.18) первые два уравнения совместны.

Из третьего и первого уравнений системы (3.18) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} &= \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} + \frac{(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta - 6\alpha)}{8r^2} \frac{\partial B}{\partial z} - \\ &- \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha + 2)(\beta - \alpha - 2)}{8r^3} A + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha + 2)}{4r^2} C. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Приравнивая правые части пятого уравнения системы (3.18) и уравнения (3.19), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = & -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} - \frac{(\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta - 6\alpha)}{8r^2} \frac{\partial B}{\partial z} - \\ & - \frac{(\alpha - 2)(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^3} A + \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2)}{4r^2} C. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из четвертого уравнения системы (3.18) следует

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (3.21)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.20), (3.21), получаем

$$(\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta - 2\alpha) \frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{(\alpha - 2)(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{2r} A + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2)C. \quad (3.22)$$

Из третьего уравнения системы (3.18), используя второе и четвертое уравнения, находим

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r \partial z} = \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta - 2\alpha)}{8r^2} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\beta(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^3} B, \quad (3.23)$$

а из четвертого уравнения —

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r \partial z} = -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta + 6\alpha)}{8r^2} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^3} B. \quad (3.24)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.23), (3.24) и используя шестое уравнение системы (3.18), получаем

$$(\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2) \left[ \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha - 2)}{2r} B \right] = 0. \quad (3.25)$$

На данном этапе исследования на совместность системы уравнений (3.7) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} A - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} B, \\ (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2) &\left[ \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha - 2)}{2r} B \right] = 0, \\ (\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta - 2\alpha) &\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{(\alpha - 2)(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{2r} A + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2)C, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{(\beta - \alpha)}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^2} B. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В системе уравнений (3.26) первые две пары уравнений совместны.

Для дальнейшего исследования на совместность и последующего решения системы уравнений (3.26) необходимо рассмотреть различные случаи.

Случай 1:  $\beta = \alpha$ .

В этом случае система уравнений (3.26) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z}, \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}, \\
\frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\alpha}{2r^2} A, \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r}, \\
\alpha(\alpha - 2) \left( \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{r} A \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Случай 1.1:  $\beta = \alpha$ ,  $\alpha(\alpha - 2) \neq 0$ .

В этом случае, используя пятое уравнение системы (3.27), можно записать систему уравнений (3.27) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{1}{r} A, \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}, \\
\frac{\partial C}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r}, \\
\frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{1}{r} A, \\
\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Система уравнений (3.28) является совместной.

Из первого уравнения системы (3.28) находим

$$A = A_1(z)r, \tag{3.29}$$

а из второго уравнения —

$$B = -A_1'(z) \frac{r^2}{2} + B_1(z). \tag{3.30}$$

Из пятого уравнения системы (3.28) следует, что  $A_1''(z) = 0$ ,  $B_1'(z) = A_1(z)$ . Откуда находим

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= 2A_{00}z + A_{01}, \\
B_1(z) &= A_{00}z^2 + A_{01}z + B_{00},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

где  $A_{00}$ ,  $A_{01}$ ,  $B_{00}$  — произвольные постоянные.

Из третьего и четвертого уравнений системы (3.28) находим

$$C(z) = \alpha A_{00}z + C_{00}, \tag{3.32}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная.

Из (3.29)–(3.32) окончательно следует, что в случае 1.1

$$\begin{aligned}
A &= (2A_{00}z + A_{01})r, \\
B &= A_{00}(z^2 - r^2) + A_{01}z + B_{00}, \\
C &= \alpha A_{00}z + C_{00}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.33):

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}^{(\alpha)} &= u^{(\alpha)}, \\
 \tilde{u}^{(\alpha)} &= \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\
 \tilde{u}^{(\alpha)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\
 \tilde{u}^{(\alpha)} &= 2rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Случай 1.2:  $\beta = \alpha = 0$ .

В этом случае система уравнений (3.27) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z}, \\
 \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}, \\
 \frac{\partial C}{\partial r} &= 0, \\
 \frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Из системы (3.34) следует, что в случае 1.2

$$\begin{aligned}
 A &= \Psi(r, z), \\
 B &= \Phi(r, z), \\
 C &= C_{00},
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная,  $A = \Psi(r, z)$ ,  $B = \Phi(r, z)$  — произвольные решения системы уравнений Коши—Римана

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z}, \\
 \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.35):

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}^{(0)} &= u^{(0)}, \\
 \tilde{u}^{(0)} &= \Psi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + \Phi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Случай 1.3:  $\beta = \alpha = 2$ .

В этом случае система уравнений (3.27) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z}, \\
 \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}, \\
 \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{r^2} A, \\
 \frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r}, \\
 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Из второго и четвертого уравнений системы (3.39) следует

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z}. \quad (3.40)$$

Из уравнения (3.40) получаем

$$C = \frac{1}{r} A + C_1(r). \quad (3.41)$$

Из третьего уравнения системы (3.39), используя первое уравнение, находим

$$C_1(r) = C_{00}, \quad (3.42)$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная.

Таким образом, в случае 1.3

$$\begin{aligned} A &= \Psi(r, z), \\ B &= \Phi(r, z), \\ C &= \frac{1}{r} \Psi(r, z) + C_{00}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где  $A = \Psi(r, z)$ ,  $B = \Phi(r, z)$  — произвольные решения системы уравнений Коши—Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z}, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.43):

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(2)} &= u^{(2)}, \\ \tilde{u}^{(2)} &= \Psi(r, z) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} + \Phi(r, z) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \Psi(r, z) u^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

**Замечание 3.1.** Из первого уравнения из полученных ниже соотношений (3.56) следует, что

$$u^{(2)} = \frac{1}{r} u^{(0)}. \quad (3.46)$$

Тогда соотношения (3.45) можно получить композицией соотношений (3.38) и (3.46).

Случай 2:  $\beta = 2 - \alpha$ .

В этом случае система уравнений (3.26) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\alpha - 1)}{r} A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\alpha - 1)}{r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\alpha}{2r^2} A + \frac{(\alpha - 1)}{r} C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2r^2} B, \\ \alpha(\alpha - 2) \left( \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{r} A \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{2(\alpha - 1)}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{r^2} B. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Случай 2.1:  $\beta = 2 - \alpha$ ,  $\alpha(\alpha - 2) \neq 0$ .

В этом случае, используя пятое уравнение системы (3.47), можно записать систему уравнений (3.47) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\alpha}{r} A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\alpha-1)}{r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{(\alpha-1)}{r} C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2r^2} B, \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{1}{r} A, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= \frac{(2\alpha-1)}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{(\alpha^2-1)}{r^2} B.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Система уравнений (3.48) является совместной.

Из первого и третьего уравнений системы (3.48) находим

$$\begin{aligned}A &= A_1(z)r^\alpha, \\ C &= C_1(z)r^{\alpha-1}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Из второго и четвертого уравнений системы (3.48) следует

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial A}{\partial z}.\tag{3.50}$$

Откуда находим

$$C_1(z) = \frac{1}{2}\alpha A_1(z) + C_{00},\tag{3.51}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная.

Из второго уравнения системы (3.48) получаем

$$B = B_1(z)r^{\alpha-1} - \frac{1}{2}A_1'(z)r^{\alpha+1}.\tag{3.52}$$

Из пятого уравнения системы (3.48) следует, что  $A_1''(z) = 0$ ,  $B_1'(z) = A_1(z)$ . Откуда находим

$$\begin{aligned}A_1(z) &= 2A_{00}z + A_{01}, \\ B_1(z) &= A_{00}z^2 + A_{01}z + B_{00},\end{aligned}\tag{3.53}$$

где  $A_{00}$ ,  $A_{01}$ ,  $B_{00}$  — произвольные постоянные. Тогда из уравнения (3.51) находим

$$C_1(z) = \alpha A_{00}z + \bar{C}_{00},\tag{3.54}$$

где  $\bar{C}_{00} = \alpha A_{01}/2 + C_{00}$ .

Таким образом, в случае 2.1

$$\begin{aligned}A &= (2A_{00}z + A_{01})r^\alpha, \\ B &= [A_{00}(z^2 - r^2) + A_{01}z + B_{00}]r^{\alpha-1}, \\ C &= (\alpha A_{00}z + \bar{C}_{00})r^{\alpha-1}.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.55):

$$\begin{aligned}u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}, \\ u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} \left( \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} \right), \\ u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} \left[ 2rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)} \right].\end{aligned}\tag{3.56}$$

**Замечание 3.2.** Последние три соотношения из (3.56) можно получить композицией первого соотношения и соотношений (3.34).

Случай 2.2:  $\alpha = 0, \beta = 2$ .

В этом случае система уравнений (3.47) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{r} A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= -\frac{1}{r} C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial B}{\partial r}.\end{aligned}\tag{3.57}$$

Система уравнений (3.57) является совместной.

Запишем систему уравнений (3.57) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial(rA)}{\partial r} &= \frac{\partial(rB)}{\partial z}, \\ \frac{\partial(rA)}{\partial z} &= -\frac{\partial(rB)}{\partial r}, \\ \frac{\partial(rC)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial(rC)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2(rB)}{\partial z^2}.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Из системы (3.58) следует, что в случае 2.2

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{r} \Psi(r, z), \\ B &= \frac{1}{r} \Phi(r, z), \\ C &= \frac{1}{r} C_{00},\end{aligned}\tag{3.59}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная,  $\bar{A} = \Psi(r, z)$ ,  $\bar{B} = \Phi(r, z)$  — произвольные решения системы уравнений Коши—Римана

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} &= \frac{\partial \bar{B}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial r}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.43):

$$\begin{aligned}u^{(2)} &= \frac{1}{r} u^{(0)}, \\ u^{(2)} &= \frac{1}{r} \left( \Psi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + \Phi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{3.61}$$

**Замечание 3.3.** Соотношения (3.61) можно получить композицией соотношений (3.38) и соотношения (3.46).

Случай 2.3:  $\alpha = 2, \beta = 0$ .

В этом случае система уравнений (3.47) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{1}{r} A, \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r} B, \\
\frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{r^2} A + \frac{1}{r} C, \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2} B, \\
\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{2}{r^2} B.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Система уравнений (3.62) является совместной.

Запишем систему уравнений (3.62) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left( \frac{A}{r} \right)}{\partial r} &= \frac{\partial \left( \frac{B}{r} \right)}{\partial z}, \\
\frac{\partial \left( \frac{A}{r} \right)}{\partial z} &= -\frac{\partial \left( \frac{B}{r} \right)}{\partial r}, \\
\frac{\partial \left( \frac{C}{r} \right)}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \left( \frac{B}{r} \right)}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{A}{r} \right), \\
\frac{\partial \left( \frac{C}{r} \right)}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \left( \frac{B}{r} \right)}{\partial r}, \\
\frac{\partial^2 \left( \frac{B}{r} \right)}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 \left( \frac{B}{r} \right)}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Запишем систему уравнений (3.63) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} &= \frac{\partial \bar{B}}{\partial z}, \\
\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial r}, \\
\frac{\partial \bar{C}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \bar{A}, \\
\frac{\partial \bar{C}}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{B}}{\partial r}, \\
\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Система уравнений (3.64) совпадает с системой (3.39).

Таким образом, в случае 2.3

$$\begin{aligned}
A &= r\Psi(r, z), \\
B &= r\Phi(r, z), \\
C &= \Psi(r, z) + C_{00} r,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная,  $\bar{A} = \Psi(r, z)$ ,  $\bar{B} = \Phi(r, z)$  — произвольные решения системы уравнений Коши—Римана

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} &= \frac{\partial \bar{B}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial r}.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.65):

$$\begin{aligned}u^{(0)} &= ru^{(2)}, \\ u^{(0)} &= r\Psi(r, z)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} + r\Phi(r, z)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \Psi(r, z)u^{(2)}.\end{aligned}\tag{3.67}$$

**Замечание 3.4.** Соотношения (3.67) можно получить композицией соотношений (3.38) и соотношения (3.46).

Случай 3:  $(\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2) \neq 0$ .

В этом случае, используя пятое уравнений системы (3.26), можно записать систему уравнений (3.26) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r}A, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{1}{r}B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\alpha}{2r}\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2}A - \frac{(\beta - \alpha)}{2r}C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2}B, \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= -\frac{(\beta - \alpha - 2)}{2r}B, \\ (\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta - 2\alpha)\frac{\partial B}{\partial z} &= -\frac{(\alpha - 2)(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{2r}A + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2)C, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^2}B.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Из пятого уравнения системы (3.68) находим

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{4r^2}B.\tag{3.69}$$

Приравнивая правые части седьмого уравнения системы (3.68) и уравнения (3.69), получаем

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0.\tag{3.70}$$

Дифференцируя шестое уравнение системы (3.68) по  $y$  и используя второе и четвертое уравнения, имеем

$$(\beta + \alpha)(\beta + \alpha - 4)(\beta - \alpha + 2)(\beta - \alpha - 2)B = 0.\tag{3.71}$$

Таким образом, систему уравнений (3.68) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} A, \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{1}{r} B, \\
\frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} A - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} C, \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} B, \\
\frac{\partial B}{\partial r} &= -\frac{(\beta - \alpha - 2)}{2r} B, \\
(\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta - 2\alpha) \frac{\partial B}{\partial z} &= -\frac{(\alpha - 2)(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{2r} A + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2)C, \\
(\beta + \alpha)(\beta + \alpha - 4) [(\beta - \alpha)^2 - 4] B &= 0, \\
\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Случай 3.1:  $(\beta^2 - \alpha^2)(\beta + \alpha - 2)(\beta + \alpha - 4) [(\beta - \alpha)^2 - 4] \neq 0$ .

В этом случае, используя седьмое уравнение системы (3.72), можно записать систему уравнений (3.72) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} &= -\frac{(\beta - \alpha)}{2r} A, \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8r^2} A - \frac{(\beta - \alpha)}{2r} C, \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\
\frac{(\alpha - 2)(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{2r} A - (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2)C &= 0, \\
B &= 0.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Из первого и второго уравнений системы (3.73) находим

$$A = A_{00} r^{-\frac{\beta - \alpha}{2}}, \tag{3.74}$$

где  $A_{00}$  — произвольная постоянная.

Решая третье уравнение системы (3.73), получаем

$$C = C_{00} r^{-\frac{\beta - \alpha}{2}} - \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha - 2)}{8} A_{00} r^{-\frac{\beta - \alpha + 2}{2}}, \tag{3.75}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная.

Подставляя (3.74), (3.75) в пятое уравнение системы (3.73), находим

$$\frac{(\beta + \alpha)(\beta + \alpha - 4) [(\beta - \alpha)^2 - 4]}{8r} A_{00} - (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 2) C_{00} = 0. \tag{3.76}$$

Из (3.76) следует, что  $A_{00} = C_{00} = 0$ .

Таким образом, в случае 3.1

$$A = B = C = 0. \tag{3.77}$$

Случай 3.2:  $\beta = \alpha - 2$ ,  $\alpha \neq 2$ .

В этом случае, используя шестое уравнение системы (3.72), можно записать систему уравнений (3.72) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{1}{(\alpha - 2)} \left[ \frac{(3\alpha - 4)}{r} A - 2C \right], \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{1}{r} B, \\
\frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{2}{(\alpha - 2)r} \left[ \frac{(\alpha - 1)}{r} A - C \right], \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{(\alpha - 1)}{r^2} B, \\
\frac{\partial B}{\partial r} &= \frac{2}{r} B, \\
\frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{2}{(\alpha - 2)} \left[ \frac{(\alpha - 1)}{r} A - C \right].
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Из пятого уравнения системы (3.78) следует

$$B = B_1(z)r^2. \tag{3.79}$$

Дифференцируя шестое уравнение системы (3.78) по  $z$  и используя второе и четвертое уравнения, получаем

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0. \tag{3.80}$$

Тогда, используя (3.79), находим

$$B = (2B_{00}z + B_{01})r^2, \tag{3.81}$$

где  $B_{00}, B_{01}$  — произвольные постоянные.

Из третьего и шестого уравнений системы (3.78) следует уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial z}. \tag{3.82}$$

Откуда, используя (3.81), получаем

$$C = B_{00}r^2 + C_1(z). \tag{3.83}$$

Тогда из четвертого уравнения системы (3.78) получаем

$$C = B_{00} [r^2 - (\alpha - 1)z^2] - (\alpha - 1)B_{01}z + C_{00}, \tag{3.84}$$

где  $C_{00}$  — произвольная постоянная.

Подставляя выражения (3.81), (3.84) в шестое уравнение системы (3.78), находим

$$(\alpha - 1)A = (\alpha - 1)r [B_{00}(r^2 - z^2) - B_{01}z] + C_{00}r. \tag{3.85}$$

Тогда  $C_{00} = (\alpha - 1)\bar{C}_{00}$ .

Таким образом, в случае 3.2

$$\begin{aligned}
A &= r [B_{00}(r^2 - z^2) - B_{01}z] + \bar{C}_{00}r, \\
B &= (2B_{00}z + B_{01})r^2, \\
C &= B_{00} [r^2 - (\alpha - 1)z^2] - (\alpha - 1)B_{01}z + (\alpha - 1)\bar{C}_{00}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

**Замечание 3.5.** При  $\alpha = 1$  выражение для  $A$  не находится непосредственно из уравнения (3.85). Можно показать, рассматривая первое уравнение системы (3.78), справедливость (3.86) и для этого случая.

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.86):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha-2)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha - 1)u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha - 1)zu^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= r(r^2 - z^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2]u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Случай 3.3:  $\beta = 4 - \alpha$ ,  $\alpha \neq 2$ .

В этом случае, используя шестое уравнение системы (3.72), можно записать систему уравнений (3.72) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{1}{(\alpha - 2)} \left[ \frac{(\alpha^2 - 2\alpha + 2)}{r} A - 2C \right], \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{1}{r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{(\alpha - 1)}{(\alpha - 2)r} \left[ \frac{2}{r} A + (\alpha - 4)C \right], \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -\frac{(\alpha - 1)}{r^2} B, \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= \frac{(\alpha - 1)}{r} B, \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{2}{(\alpha - 2)} \left[ \frac{(\alpha - 1)}{r} A - C \right]. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Система уравнений (3.88) является совместной.

Из пятого уравнения системы (3.88) следует

$$B = B_1'(z)r^{\alpha-1}. \quad (3.89)$$

Тогда из второго и четвертого уравнений системы (3.88) получаем

$$\begin{aligned} A &= -B_1(z)r^{\alpha-2} + A_1(r), \\ C &= -(\alpha - 1)B_1(z)r^{\alpha-3} + C_1(r). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Из шестого уравнения системы (3.88) находим

$$\begin{aligned} B_1(z) &= B_{00} z^2 + B_{01} z + B_{02}, \\ C_1(r) &= \frac{(\alpha - 1)}{r} A_1(r) - (\alpha - 2)B_{00} r^{\alpha-1}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

где  $B_{00}$ ,  $B_{01}$ ,  $B_{02}$  — произвольные постоянные. Из первого уравнения системы (3.88), используя второе из уравнений (3.91), получаем

$$A_1(r) = A_{00} r^{\alpha-2} + B_{00} r^{\alpha}, \quad (3.92)$$

где  $A_{00}$  — произвольная постоянная. Тогда из второго уравнения (3.91) находим

$$C_1(r) = (\alpha - 1)A_{00} r^{\alpha-3} + B_{00} r^{\alpha-1}. \quad (3.93)$$

Таким образом, в случае 3.3

$$\begin{aligned} A &= [B_{00}(r^2 - z^2) - B_{01}z + \bar{A}_{00}]r^{\alpha-2}, \\ B &= (2B_{00}z + B_{01})r^{\alpha-1}, \\ C &= \left\{ B_{00}[r^2 - (\alpha - 1)z^2] - (\alpha - 1)B_{01}z + (\alpha - 1)\bar{A}_{00} \right\} r^{\alpha-3}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

где  $\bar{A}_{00} = A_{00} - B_{02}$ .

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.94):

$$\begin{aligned} u^{(4-\alpha)} &= r^{\alpha-3} \left[ r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha-1)u^{(\alpha)} \right], \\ u^{(4-\alpha)} &= r^{\alpha-3} \left[ rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha-1)zu^{(\alpha)} \right], \\ u^{(4-\alpha)} &= r^{\alpha-3} \left\{ r(r^2 - z^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha-1)z^2]u^{(\alpha)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

**Замечание 3.6.** Из первого уравнения из соотношений (3.56) следует, что

$$u^{(4-\alpha)} = r^{\alpha-3}u^{(\alpha-2)}. \quad (3.96)$$

Тогда соотношения (3.95) можно получить композицией соотношений (3.87) и соотношения (3.96).

Случай 3.4:  $\beta = \alpha + 2$ ,  $\alpha \neq 0$ .

В этом случае, используя шестое уравнение системы (3.72), можно записать систему уравнений (3.72) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= -\frac{1}{r}A + \frac{2}{\alpha}C, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{1}{r}B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{2}{\alpha}C. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (3.97) находим

$$C = \alpha B_{00}, \quad (3.98)$$

где  $B_{00}$  — произвольная постоянная, а из пятого и шестого уравнений —

$$B = 2B_{00}z + B_{01}, \quad (3.99)$$

где  $B_{01}$  — произвольная постоянная. Тогда из первого и второго уравнений системы (3.97) находим

$$A = B_{00} \frac{(r^2 - z^2)}{r} - B_{01} \frac{z}{r} + A_{00} \frac{1}{r}, \quad (3.100)$$

где  $A_{00}$  — произвольная постоянная.

Таким образом, в случае 3.4

$$\begin{aligned} A &= B_{00} \frac{(r^2 - z^2)}{r} - B_{01} \frac{z}{r} + A_{00} \frac{1}{r}, \\ B &= 2B_{00}z + B_{01}, \\ C &= \alpha B_{00}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.101):

$$\begin{aligned} u^{(\alpha+2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{z}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Случай 3.5:  $\beta = -\alpha$ ,  $\alpha \neq 0$ .

В этом случае, используя шестое уравнение системы (3.72), можно записать систему уравнений (3.72) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\alpha}{r} A + \frac{2}{\alpha} C, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{1}{r} B, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{(\alpha + 1)}{r} C, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial r} &= \frac{(\alpha + 1)}{r} B, \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{2}{\alpha} C.\end{aligned}\tag{3.103}$$

Система уравнений (3.103) совместна.

Из пятого уравнения системы (3.103), используя восьмое уравнение системы (3.72), находим

$$B = (2B_{00} z + B_{01}) r^{\alpha+1},\tag{3.104}$$

где  $B_{00}$ ,  $B_{01}$  — произвольные постоянные, а из шестого уравнения —

$$C = \alpha B_{00} r^{\alpha+1}.\tag{3.105}$$

Тогда из первого и второго уравнений системы (3.103) получаем

$$A = [B_{00} (r^2 - z^2) - B_{01} z + A_{00}] r^{\alpha},\tag{3.106}$$

где  $A_{00}$  — произвольная постоянная.

Таким образом, в случае 3.5

$$\begin{aligned}A &= [B_{00} (r^2 - z^2) - B_{01} z + A_{00}] r^{\alpha}, \\ B &= (2B_{00} z + B_{01}) r^{\alpha+1}, \\ C &= \alpha B_{00} r^{\alpha+1}.\end{aligned}\tag{3.107}$$

Выпишем базис соотношений, соответствующий решению (3.107):

$$\begin{aligned}u^{(-\alpha)} &= r^{\alpha} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \\ u^{(-\alpha)} &= r^{\alpha+1} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} \right), \\ u^{(-\alpha)} &= r^{\alpha+1} \left[ \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)} \right].\end{aligned}\tag{3.108}$$

**Замечание 3.7.** Из первого уравнения из соотношений (3.56) следует, что

$$u^{(-\alpha)} = r^{\alpha+1} u^{(\alpha+2)}.\tag{3.109}$$

Тогда соотношения (3.108) можно получить композицией соотношений (3.102) и соотношения (3.109).

Сформулируем основной полученный результат.

**Теорема 3.1.** *Класс уравнений ЭПД*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\tag{3.110}$$

при произвольных значениях параметра  $\alpha$  допускает из всех соотношений между решениями  $u = u^{(\alpha)}$ ,  $u = u^{(\beta)}$  вида

$$u^{(\beta)} = A(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + C(r, z) u^{(\alpha)} \quad (3.111)$$

только следующие независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\alpha)} &= \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ \tilde{u}^{(\alpha)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ \tilde{u}^{(\alpha)} &= 2rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)}, \\ u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha - 1) u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= rz \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha - 1) z u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= r(r^2 - z^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2] u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{z}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

При  $\beta = \alpha = 0$  происходит расширение первых четырех базисных соотношений до базисных соотношений

$$\tilde{u}^{(0)} = \Psi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + \Phi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}, \quad (3.113)$$

где  $A = \Psi(r, z)$ ,  $B = \Phi(r, z)$  — произвольные решения системы уравнений Коши—Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= \frac{\partial B}{\partial z}, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{\partial B}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

#### 4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ГРУПП НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПРЯМЫМ МЕТОДОМ

Докажем утверждение.

**Предложение 4.1.** *Случай  $\beta = \alpha = 0$  теоремы 3.1 также может быть получен на основе использования групп непрерывных преобразований.*

**Доказательство.** При  $\alpha = 0$  уравнение ЭПД (2.1) является уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) допускает операторы симметрии со следующим базисом [24]:

$$\begin{aligned} X_1 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_2 &= b(r, z) \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_3 &= \Psi(r, z) \frac{\partial}{\partial r} + \Phi(r, z) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $b = b(r, z)$  — произвольное решение уравнения Лапласа (4.1), а  $\Psi = \Psi(r, z)$ ,  $\Phi = \Phi(r, z)$  — произвольные решения системы уравнений Коши—Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Используя операторы симметрии (4.2), можно получить следующие независимые базисные соотношения для решений уравнений Лапласа:

$$\tilde{u}^{(0)} = \Psi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + \Phi(r, z) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}. \quad (4.3)$$

□

Таким образом, сравнение результатов, полученных с помощью групп непрерывных преобразований (утверждения 2.2 и 4.1) и прямым методом (теорема 3.1), показывает их полное совпадение.

## 5. ТОЖДЕСТВА МЕЖДУ ОПЕРАТОРАМИ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ

Введем в рассмотрение линейные дифференциальные операторы ЭПД

$$L_\alpha \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.1)$$

Используя соотношения (2.42), можно получить линейные дифференциальные соотношения между операторами (5.1). Соотношения (2.42) имеют вид

$$u^{(\beta)} = A(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r, z) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + C(r, z) u^{(\alpha)}. \quad (5.2)$$

Докажем следующее предложение.

**Предложение 5.1.** Пусть между решениями  $u^{(\alpha)}$ ,  $u^{(\beta)}$  уравнения ЭПД выполнены соотношения (5.2). Тогда справедливо следующее тождество между операторами ЭПД  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$ :

$$L_\beta \left( A \frac{\partial u}{\partial r} + B \frac{\partial u}{\partial z} + Cu \right) \equiv A \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + B \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + \left( C + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \right) L_\alpha u, \quad (5.3)$$

где  $u = u(r, z)$  — произвольная трижды дифференцируемая функция.

**Доказательство.** Запишем левую часть тождества (5.3) в виде

$$L_\beta \left( A \frac{\partial u}{\partial r} + B \frac{\partial u}{\partial z} + Cu \right) \equiv A \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + B \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + Lu, \quad (5.4)$$

где линейный дифференциальный оператор  $L$  не содержит частных производных третьего порядка. Если вместо функции  $u$  подставить в (5.4) произвольное решение уравнения  $L_\alpha u = 0$ , то левая часть (5.4) и первые два слагаемых правой части обратятся в нуль. Тогда  $Lu = 0$  на всех решениях уравнения  $L_\alpha u = 0$ , откуда следует, что  $L = \tilde{C}(r, z) L_\alpha$ . Таким образом, тождество (5.4) должно иметь следующий вид:

$$L_\beta \left( A \frac{\partial u}{\partial r} + B \frac{\partial u}{\partial z} + Cu \right) \equiv A \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + B \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + \tilde{C} L_\alpha u. \quad (5.5)$$

С другой стороны, можно непосредственно вычислить левую часть (5.5). Запишем ее в виде

$$\begin{aligned}
L_\beta \left( A \frac{\partial u}{\partial r} + B \frac{\partial u}{\partial z} + Cu \right) &\equiv A \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + B \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + CL_\alpha u + \\
&+ \left[ 2 \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{r} A \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\
&+ \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\alpha}{r^2} A + 2 \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{r} C \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \\
&+ \left[ 2 \frac{\partial A}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{r} B \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \\
&+ \left( \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) u.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (5.6) в силу (5.5) следует, что  $\tilde{C} = C + 2 \partial B / \partial z$ . Утверждение доказано.  $\square$

**Замечание 5.1.** Из (5.6) также следует, что

$$\tilde{C} = C + 2 \frac{\partial B}{\partial z} = C + 2 \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{r} A.$$

**Замечание 5.2.** Из (5.6), используя тождество (5.5) (приравнивая к нулю коэффициенты при  $\partial^2 u / \partial r \partial z$ ,  $\partial u / \partial z$ ,  $u$  и приводя правую часть (5.6) к виду правой части (5.5)), находим, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta - \alpha)}{2r} A &= 0, \\
\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{2r} B &= 0, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{(\beta - 2\alpha)}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\alpha(\alpha - \beta + 1)}{r^2} A + 2 \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{(\beta - \alpha)}{r} C &= 0, \\
\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial C}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Система уравнений (5.7) служит для определения всех линейных дифференциальных соотношений вида (5.2) между решениями класса уравнений ЭПД.

Используя предложение 5.1, из (2.42) получаем следующее предложение.

**Предложение 5.2.** *Линейным дифференциальным соотношениям (2.42) соответствуют следующие тождества между операторами ЭПД:*

$$\begin{aligned}
L_\alpha \frac{\partial u}{\partial z} &\equiv \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u, \\
L_\alpha \left( r \frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) &\equiv r \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + z \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + 2L_\alpha u, \\
L_\alpha \left[ 2rz \frac{\partial u}{\partial r} + (z^2 - r^2) \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha z u \right] &\equiv 2rz \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + (z^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + (\alpha + 4)z L_\alpha u, \\
L_{2-\alpha} (r^{\alpha-1} u) &\equiv r^{\alpha-1} L_\alpha u, \\
L_{\alpha-2} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} + (\alpha - 1)u \right] &\equiv r \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + (\alpha - 1)L_\alpha u, \\
L_{\alpha-2} \left[ rz \frac{\partial u}{\partial r} - r^2 \frac{\partial u}{\partial z} + (\alpha - 1)zu \right] &\equiv rz \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u - r^2 \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + (\alpha - 1)z L_\alpha u, \\
L_{\alpha-2} \left\{ r(r^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial r} + 2r^2 z \frac{\partial u}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2]u \right\} &\equiv \\
&\equiv r(r^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + 2r^2 z \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + [5r^2 - (\alpha - 1)z^2] L_\alpha u, \\
L_{\alpha+2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) &\equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u, \\
L_{\alpha+2} \left( \frac{z}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) &\equiv \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u - \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u, \\
L_{\alpha+2} \left[ \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha u \right] &\equiv \frac{(r^2 - z^2)}{r} \frac{\partial}{\partial r} L_\alpha u + 2z \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u + (\alpha + 4)L_\alpha u.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

## 6. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Получим с помощью соотношений (3.112) рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Решение уравнения ЭПД

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{6.1}$$

ищем в виде

$$u = e^z v(r). \tag{6.2}$$

**Замечание 6.1.** Очевидно, что если уравнение (6.1) допускает решение вида (6.2), то оно допускает и решения вида

$$u = e^{\lambda z} v(\lambda r),$$

где  $\lambda$  — произвольная постоянная.

Тогда из уравнения (6.1) следует, что  $v(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{dv}{dr} + v = 0, \tag{6.3}$$

которое заменой

$$v(r) = r^{-\nu} V(r), \quad \nu = \frac{\alpha - 1}{2}$$

сводится к уравнению Бесселя [17, с. 180]

$$r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + r \frac{dV}{dr} + (r^2 - \nu^2)V = 0. \tag{6.4}$$

Таким образом, уравнение ЭПД (6.1) допускает решение вида

$$u^{(\alpha)} = e^z r^{-\nu} V_\nu(r), \quad \nu = \frac{\alpha - 1}{2}, \tag{6.5}$$

где  $V_\nu(r)$  — произвольное решение уравнения Бесселя (6.4).

Из соотношений (3.112) рассмотрим только те, которые сохраняют структуру решения (6.5). Такие соотношения позволяют получить линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями класса уравнений Бесселя.

Из соотношения

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}$$

следует тривиальное соотношение

$$\tilde{V}_\nu(r) = V_\nu(r),$$

а из соотношения

$$u^{(2-\alpha)} = r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}$$

вытекает очевидное соотношение

$$V_{-\nu}(r) = V_\nu(r).$$

Из соотношения

$$u^{(\alpha-2)} = r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha - 1) u^{(\alpha)}$$

следует соотношение

$$V_{\nu-1}(r) = \frac{dV_\nu}{dr} + \frac{\nu}{r} V_\nu(r). \quad (6.6)$$

Оно совпадает с известным соотношением [17, с. 182].

Из соотношения

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}$$

следует соотношение

$$V_{\nu+1}(r) = \frac{dV_\nu}{dr} - \frac{\nu}{r} V_\nu(r). \quad (6.7)$$

Оно также совпадает с известным соотношением [17, с. 182].

Используя прямой метод, найдем все линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями класса уравнений Бесселя. Рассмотрим класс уравнений Бесселя

$$L_\nu V = 0, \quad L_\nu \equiv r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + (r^2 - \nu^2), \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$

Дадим полное описание всех соотношений вида

$$V_\mu = A(r) \frac{dV_\nu}{dr} + B(r) V_\nu \quad (6.9)$$

между решениями  $V = V_\nu$ ,  $V = V_\mu$  класса уравнений (6.8).

Из (6.8), (6.9) следует

$$L_\mu \left( A \frac{dV_\nu}{dr} + B V_\nu \right) \Big|_{L_\nu V_\nu = 0} = 0. \quad (6.10)$$

Из (6.8) находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_\nu}{dr^2} &= -\frac{1}{r} \frac{dV_\nu}{dr} - \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) V_\nu, \\ \frac{d^3 V_\nu}{dr^3} &= -\left(1 - \frac{\nu^2 + 2}{r^2}\right) \frac{dV_\nu}{dr} + \left(\frac{1}{r} - \frac{3\nu^2}{r^3}\right) V_\nu. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Используя (6.11), находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( A \frac{dV_\nu}{dr} + B V_\nu \right) \Big|_{L_\nu V_\nu = 0} &= \left( \frac{dA}{dr} - \frac{A}{r} + B \right) \frac{dV_\nu}{dr} + \left[ \frac{dB}{dr} - \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) A \right] V_\nu, \\ \frac{d^2}{dr^2} \left( A \frac{dV_\nu}{dr} + B V_\nu \right) \Big|_{L_\nu V_\nu = 0} &= \left[ \frac{d^2 A}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{dA}{dr} + 2 \frac{dB}{dr} - \left(1 - \frac{\nu^2 + 2}{r^2}\right) A - \frac{B}{r} \right] \frac{dV_\nu}{dr} + \\ &+ \left[ \frac{d^2 B}{dr^2} - 2 \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) \frac{dA}{dr} + \left(\frac{1}{r} - \frac{3\nu^2}{r^3}\right) A - \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) B \right] V_\nu. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.10), получаем

$$\begin{aligned} L_\mu \left( A \frac{dV_\nu}{dr} + BV_\nu \right) \Big|_{L_\nu V_\nu=0} &= \left[ r^2 \frac{d^2 A}{dr^2} - r \frac{dA}{dr} + 2r^2 \frac{dB}{dr} - (\mu^2 - \nu^2 - 1)A \right] \frac{dV_\nu}{dr} + \\ &+ \left[ r^2 \frac{d^2 B}{dr^2} - 2(r^2 - \nu^2) \frac{dA}{dr} + r \frac{dB}{dr} - \frac{2\nu^2}{r} A - (\mu^2 - \nu^2)B \right] V_\nu. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Равенство (6.13) должно выполняться при произвольных значениях  $dV_\nu/dr$  и  $V_\nu$ . Отсюда следует система для определения неизвестных величин  $A$  и  $B$

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 A}{dr^2} - r \frac{dA}{dr} + 2r^2 \frac{dB}{dr} - (\mu^2 - \nu^2 - 1)A &= 0, \\ r^2 \frac{d^2 B}{dr^2} - 2(r^2 - \nu^2) \frac{dA}{dr} + r \frac{dB}{dr} - \frac{2\nu^2}{r} A - (\mu^2 - \nu^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для решения системы (6.14) необходимо рассмотреть два случая.

Случай 1:  $\mu = \nu$ .

В этом случае первое уравнение системы (6.14) допускает понижение порядка, что позволяет следующим образом выразить неизвестную  $B$ :

$$B = -\frac{1}{2} \left( \frac{dA}{dr} - \frac{A}{r} \right) + C_0, \quad (6.15)$$

где  $C_0$  — произвольная постоянная. Тогда из второго уравнения системы (6.14) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения неизвестной  $A$ :

$$r^3 \frac{d^3 A}{dr^3} + r(4r^2 + 1 - 4\nu^2) \frac{dA}{dr} - (1 - 4\nu^2)A = 0. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.16) имеет следующее общее решение [7, с. 400]:

$$A = C_1 r J_\nu^2(r) + C_2 r J_\nu(r) Y_\nu(r) + C_3 r Y_\nu^2(r), \quad (6.17)$$

где  $J_\nu(r)$  и  $Y_\nu(r)$  — функции Бесселя первого и второго рода, соответственно [17, с. 180];  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные. Из (6.15) находим неизвестную  $B$

$$B = -C_1 r J_\nu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} - \frac{1}{2} C_2 r \left[ Y_\nu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} + J_\nu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} \right] - C_3 r Y_\nu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} + C_0. \quad (6.18)$$

Из (6.17), (6.18) вытекает следующее предложение.

**Предложение 6.1.** *Класс уравнений Бесселя (6.8) допускает из всех соотношений вида (6.9) в случае  $\mu = \nu$  только следующие три независимые базисные соотношения:*

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\nu &= r J_\nu^2(r) \frac{dV_\nu}{dr} - r J_\nu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} V_\nu, \\ \tilde{V}_\nu &= 2r J_\nu(r) Y_\nu(r) \frac{dV_\nu}{dr} - r \left[ Y_\nu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} + J_\nu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} \right] V_\nu, \\ \tilde{V}_\nu &= r Y_\nu^2(r) \frac{dV_\nu}{dr} - r Y_\nu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} V_\nu. \end{aligned} \quad (6.19)$$

**Замечание 6.2.** Пусть  $V_\nu = D_1 J_\nu(r) + D_2 Y_\nu(r)$  — общее решение уравнения Бесселя ( $D_1, D_2$  — произвольные постоянные). Тогда соотношения (6.19) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\nu &= D_2 \frac{2}{\pi} J_\nu(r), \\ \tilde{V}_\nu &= \frac{2}{\pi} [-D_1 J_\nu(r) + D_2 Y_\nu(r)], \\ \tilde{V}_\nu &= -D_1 \frac{2}{\pi} Y_\nu(r). \end{aligned} \quad (6.20)$$

При выводе (6.20) использовалась следующая формула для вронскиана [17, с. 182]:

$$W[J_\nu(r), Y_\nu(r)] = J_\nu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} - Y_\nu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} = \frac{2}{\pi r}.$$

**Замечание 6.3.** Соотношения (6.19) становятся очевидными, если их переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\nu &= rW[J_\nu(r), V_\nu]J_\nu(r), \\ \tilde{V}_\nu &= rW[Y_\nu(r), V_\nu]J_\nu(r) + rW[J_\nu(r), V_\nu]Y_\nu(r), \\ \tilde{V}_\nu &= rW[Y_\nu(r), V_\nu]Y_\nu(r)\end{aligned}$$

и использовать тот факт, что для уравнения Бесселя

$$rW[u_1(r), u_2(r)] = \text{const},$$

где  $u_1(r)$ ,  $u_2(r)$  — произвольные решения.

Случай 2:  $\mu \neq \nu$ .

В этом случае дифференцируем второе уравнение системы (6.14) и подставляем в полученное выражение исключенную из первого уравнения производную  $dB/dr$  и найденные из нее выражения для производных  $d^2B/dr^2$ ,  $d^3B/dr^3$ . В результате получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения неизвестной  $A$ :

$$\begin{aligned}r^4 \frac{d^4 A}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 A}{dr^3} + r^2(4r^2 - 2\mu^2 - 2\nu^2 + 1) \frac{d^2 A}{dr^2} + \\ + r(8r^2 + 2\mu^2 + 2\nu^2 - 1) \frac{dA}{dr} + [(\mu + \nu)^2 - 1][(\mu - \nu)^2 - 1]A = 0.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Уравнение (6.21) имеет следующее общее решение [9, с. 479]:

$$A = r[C_1 J_\mu(r) J_\nu(r) + C_2 J_\mu(r) Y_\nu(r) + C_3 Y_\mu(r) J_\nu(r) + C_4 Y_\mu(r) Y_\nu(r)],\quad (6.22)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные.

Исключая из первого уравнения системы (6.14) производную  $dB/dr$  и подставляя во второе уравнение выражения для  $dB/dr$  и  $d^2B/dr^2$ , находим следующее выражение для  $B$ :

$$B = -\frac{1}{2(\mu^2 - \nu^2)} \left[ r^2 \frac{d^3 A}{dr^3} + (4r^2 + 1 - \mu^2 - 3\nu^2) \frac{dA}{dr} - \frac{(1 - \mu^2 - 3\nu^2)}{r} A \right].\quad (6.23)$$

Отсюда, используя (6.22), находим решение для  $B$

$$B = r \left[ -C_1 J_\mu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} - C_2 J_\mu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} - C_3 Y_\mu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} - C_4 Y_\mu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} \right].\quad (6.24)$$

Из (6.22), (6.24) вытекает следующее предложение.

**Предложение 6.2.** Класс уравнений Бесселя (6.8) допускает из всех соотношений вида (6.9) в случае  $\mu \neq \nu$  только следующие четыре независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= rJ_\mu(r)J_\nu(r) \frac{dV_\nu}{dr} - rJ_\mu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} V_\nu, \\ \tilde{V}_\mu &= rJ_\mu(r)Y_\nu(r) \frac{dV_\nu}{dr} - rJ_\mu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} V_\nu, \\ \tilde{V}_\mu &= rY_\mu(r)J_\nu(r) \frac{dV_\nu}{dr} - rY_\mu(r) \frac{dJ_\nu(r)}{dr} V_\nu, \\ \tilde{V}_\mu &= rY_\mu(r)Y_\nu(r) \frac{dV_\nu}{dr} - rY_\mu(r) \frac{dY_\nu(r)}{dr} V_\nu.\end{aligned}\quad (6.25)$$

Аналогично замечанию 6.3 сформулируем следующее замечание.

**Замечание 6.4.** Соотношения (6.24) становятся очевидными, если их переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= rW[J_\nu(r), V_\nu]J_\mu(r), \\ \tilde{V}_\mu &= rW[Y_\nu(r), V_\nu]J_\mu(r), \\ \tilde{V}_\mu &= rW[J_\nu(r), V_\nu]Y_\mu(r), \\ \tilde{V}_\mu &= rW[Y_\nu(r), V_\nu]Y_\mu(r).\end{aligned}$$

Объединяя предложения 6.1 и 6.2, сформулируем основной полученный результат.

**Теорема 6.1.** *Класс уравнений Бесселя*

$$\frac{d^2V_\nu}{dr^2} + r\frac{dV_\nu}{dr} + (r^2 - \nu^2)V_\nu = 0, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

допускает из всех соотношений вида

$$V_\mu = A(r)\frac{dV_\nu}{dr} + B(r)V_\nu$$

при  $\mu \neq \nu$  следующие четыре независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= rJ_\mu(r)J_\nu(r)\frac{dV_\nu}{dr} - rJ_\mu(r)\frac{dJ_\nu(r)}{dr}V_\nu, \\ \tilde{V}_\mu &= rJ_\mu(r)Y_\nu(r)\frac{dV_\nu}{dr} - rJ_\mu(r)\frac{dY_\nu(r)}{dr}V_\nu, \\ \tilde{V}_\mu &= rY_\mu(r)J_\nu(r)\frac{dV_\nu}{dr} - rY_\mu(r)\frac{dJ_\nu(r)}{dr}V_\nu, \\ \tilde{V}_\mu &= rY_\mu(r)Y_\nu(r)\frac{dV_\nu}{dr} - rY_\mu(r)\frac{dY_\nu(r)}{dr}V_\nu.\end{aligned}\tag{6.26}$$

При  $\mu = \nu$  допускаются только три независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\nu &= rJ_\nu^2(r)\frac{dV_\nu}{dr} - rJ_\nu(r)\frac{dJ_\nu(r)}{dr}V_\nu, \\ \tilde{V}_\nu &= 2rJ_\nu(r)Y_\nu(r)\frac{dV_\nu}{dr} - r\left[Y_\nu(r)\frac{dJ_\nu(r)}{dr} + J_\nu(r)\frac{dY_\nu(r)}{dr}\right]V_\nu, \\ \tilde{V}_\nu &= rY_\nu^2(r)\frac{dV_\nu}{dr} - rY_\nu(r)\frac{dY_\nu(r)}{dr}V_\nu.\end{aligned}\tag{6.27}$$

**Замечание 6.5.** При  $\mu = \nu \pm 1$  одним из решений системы уравнений (6.14) является

$$\begin{aligned}A &= 1, \\ B &= \frac{(1 - \mu^2 - 3\nu^2)}{2(\mu^2 - \nu^2)r}\end{aligned}$$

(это следует из (6.21) и (6.23)). Отсюда следуют известные соотношения (6.6), (6.7).

## 7. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ

Рассмотрим гиперболическое уравнение ЭПД

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.\tag{7.1}$$

Оно задает класс уравнений, определяемый параметром  $\alpha$ .

Уравнение (7.1) связано с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.\tag{7.2}$$

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, t$ ,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad t = t,$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty,$$

оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) имеет решения вида

$$V(r, \varphi, z) = C e^{\pm i\lambda \varphi} r^\lambda u(r, t), \quad (7.4)$$

где  $C$  — произвольная постоянная,  $i^2 = -1$ ,  $\lambda = (\alpha - 1)/2$  и функция  $u = u(r, t)$  удовлетворяет уравнению (7.1). Соотношение (7.4) задает редукцию уравнения (7.2) к классу уравнений (7.1).

Гиперболическое уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу (7.1) можно получить из эллиптического уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (2.1) комплексной заменой  $z = it$ , где  $i^2 = -1$ . Используя эту замену, можно получить аналог теоремы 3.1 для гиперболического уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу.

**Теорема 7.1.** *Класс уравнений ЭПД (7.1) при произвольных значениях параметра  $\alpha$  допускает из всех соотношений между решениями  $u = u^{(\alpha)}$ ,  $u = u^{(\beta)}$  вида*

$$u^{(\beta)} = A(r, t) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r, t) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t} + C(r, t) u^{(\alpha)} \quad (7.5)$$

только следующие независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\alpha)} &= \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t}, \\ \tilde{u}^{(\alpha)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + t \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t}, \\ \tilde{u}^{(\alpha)} &= 2rt \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (r^2 + t^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t} + \alpha t u^{(\alpha)}, \\ u^{(2-\alpha)} &= r^{\alpha-1} u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= r \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha - 1) u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= rt \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + r^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t} + (\alpha - 1) t u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= r(r^2 + t^2) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 t \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t} + [r^2 + (\alpha - 1)t^2] u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{t}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{(r^2 + t^2)}{r} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2t \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial t} + \alpha u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

При  $\beta = \alpha = 0$  происходит расширение первых четырех базисных соотношений до базисных соотношений

$$\tilde{u}^{(0)} = [\Phi(r+t) + \Psi(r-t)] \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + [\Phi(r+t) - \Psi(r-t)] \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}, \quad (7.7)$$

где  $\Psi$ ,  $\Phi$  — произвольные функции своих аргументов.

В характеристических переменных  $\xi = r - t$ ,  $\eta = r + t$  уравнение (7.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{2(\xi + \eta)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (7.8)$$

**Теорема 7.2.** *Класс уравнений ЭПД (7.8) при произвольных значениях параметра  $\alpha$  допускает из всех соотношений между решениями  $u = u^{(\alpha)}$ ,  $u = u^{(\beta)}$  вида*

$$u^{(\beta)} = A(\xi, \eta) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + B(\xi, \eta) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} + C(\xi, \eta) u^{(\alpha)} \quad (7.9)$$

только следующие независимые базисные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(\alpha)} &= -\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta}, \\ \tilde{u}^{(\alpha)} &= \xi \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta}, \\ \tilde{u}^{(\alpha)} &= -\xi^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \alpha (\eta - \xi) u^{(\alpha)}, \\ u^{(2-\alpha)} &= \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right)^{\alpha-1} u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= \frac{1}{2} (\xi + \eta) \left( \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right) + (\alpha - 1) u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= \frac{1}{2} (\xi + \eta) \left( -\xi \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} (\alpha - 1) (\eta - \xi) u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha-2)} &= \frac{1}{2} (\xi + \eta) \left( \xi^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right) + \left[ \frac{1}{4} \alpha (\eta - \xi)^2 + \xi \eta \right] u^{(\alpha)}, \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{2}{\xi + \eta} \left( \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right), \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{2}{\xi + \eta} \left( -\xi \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right), \\ u^{(\alpha+2)} &= \frac{2}{\xi + \eta} \left( \xi^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right) + \alpha u^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

При  $\beta = \alpha = 0$  происходит расширение первых четырех базисных соотношений до базисных соотношений

$$\tilde{u}^{(0)} = \Psi(\xi) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + \Phi(\eta) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \eta}, \quad (7.11)$$

где  $\Psi$ ,  $\Phi$  — произвольные функции своих аргументов.

**Замечание 7.1.** Восьмое соотношение из (7.10) было получено Дарбу [22].

## 8. ПРИЛОЖЕНИЕ К ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

Система уравнений, описывающая одномерное изэнтропическое движение политропного газа, сводится в плоскости инвариантов Римана  $\xi$  и  $\eta$  к уравнению ЭПД [10, стр.99 ]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{2(\xi + \eta)} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad (8.1)$$

где  $\gamma$  — показатель политропы.

Случай  $\alpha = 0$  или  $\gamma = -1$  соответствует так называемому газу Чаплыгина. Этот случай имеет, главным образом, формальное аппроксимационное значение (С. А. Чаплыгин предложил использовать этот случай для приближенного интегрирования системы уравнений, описывающей плоские установившиеся движения газа [20]).

Случай  $\alpha = 2$  или  $\gamma = 3$  отвечает плотным газам, например, продуктам детонации (хорошо подходит для продуктов детонации конденсированных взрывчатых веществ). Этот случай, вследствие исключительной простоты решений, часто используется для аппроксимации ряда изэнтропических законов в случае обычных газов [18].

Случай  $\alpha = 4$  или  $\gamma = 5/3$  отвечает одноатомному газу при обычных температурах.

Случай  $\alpha = 6$  или  $\gamma = 7/5$  отвечает двухатомному газу при обычных температурах.

Приведенные выше случаи соответствуют четным неотрицательным целым значениям параметра  $\alpha$ . Построим для этих случаев, т.е. при  $\alpha = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), общее решение уравнения ЭПД (8.1).

Рассмотрим три последние соотношения из соотношений (7.10). Запишем их в следующем виде:

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{1}{\xi + \eta} \left( \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right), \quad (8.2)$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{1}{\xi + \eta} \left( -\xi \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right), \quad (8.3)$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{1}{\xi + \eta} \left( \xi^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial \eta} \right) + \frac{\alpha}{2} u^{(\alpha)}. \quad (8.4)$$

Общее решение уравнений (8.1) при  $\alpha = 0$  (случай волнового уравнения) запишем в следующем виде:

$$u^{(0)} = \int_{\xi_0}^{\xi} f(\tau) d\tau + \int_{\eta_0}^{\eta} g(\tau) d\tau, \quad (8.5)$$

где  $\xi_0, \eta_0$  — произвольные постоянные.

Применяя  $n$  раз соотношение (8.2) к решению (8.5), получаем теорему.

**Теорема 8.1.** *Общее решение уравнения ЭПД (8.1) при  $\alpha = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , можно записать в виде*

$$u^{(\alpha)} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} \left[ \frac{f(\xi)}{(\xi + \eta)^n} \right] + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \eta^{n-1}} \left[ \frac{g(\eta)}{(\xi + \eta)^n} \right]. \quad (8.6)$$

Теорему нетрудно доказать, используя метод математической индукции,

**Замечание 8.1.** Формула (8.6) была получена Дарбу [22].

Аналогично, применяя  $n$  раз соотношение (8.3) к решению (8.5), получаем теорему.

**Теорема 8.2.** *Общее решение уравнения ЭПД (8.1) при  $\alpha = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , можно записать в виде*

$$u^{(\alpha)} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} \left[ \left( \frac{-\xi}{\xi + \eta} \right)^n f(\xi) \right] + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \eta^{n-1}} \left[ \left( \frac{\eta}{\xi + \eta} \right)^n g(\eta) \right]. \quad (8.7)$$

И, наконец, применяя  $n$  раз соотношение (8.4) к решению (8.5), получаем теорему.

**Теорема 8.3.** *Общее решение уравнения ЭПД (8.1) при  $\alpha = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , можно записать в виде*

$$u^{(\alpha)} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} \left[ \left( \frac{\xi^2}{\xi + \eta} \right)^n f(\xi) \right] + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \eta^{n-1}} \left[ \left( \frac{\eta^2}{\xi + \eta} \right)^n g(\eta) \right]. \quad (8.8)$$

**Замечание 8.2.** Формулы (8.6), (8.7), (8.8) можно использовать и при отрицательных целых значениях  $n$ , вводя обозначение

$$\frac{\partial^{-k} f(x)}{\partial x^{-k}} = \underbrace{\int^x dy \dots \int^y d\tau}_{k \text{ интегралов}} f(\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Замечание 8.3.** Хотя формулы (8.6), (8.7) и (8.8) задают одно и то же общее решение уравнения ЭПД (8.1) при  $\alpha = 2n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , с их помощью можно получать разные решения, зная решение (8.5) для простейшего случая волнового уравнения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов А. В. Периодические инвариантные решения уравнений абсолютно неустойчивых сред// Изв. РАН. Сер. Мех. тв. тела. — 1997. — 2. — С. 14–20.
2. Аксенов А. В. Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу// Докл. РАН. — 2001. — 381, № 2. — С. 176–179.
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.—Л.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948. — 296 с.
4. Джаиани Г. В. Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам. — Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1982. — 163 с.
5. Джаиани Г. В. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу. — Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1984. — 73 с.
6. Жданов В. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. — М.: Наука, 1991. — 176 с.
7. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.
8. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: Изд-во ин. лит., 1950. — 426 с.
11. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: Изд-во ин. лит., 1961. — 588 с.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
13. Олевский М. Н. Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению  $\Delta u + \frac{p}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = \rho$  для полусферической области// Докл. АН СССР. — 1949. — 64, № 6. — С. 767–770.
14. Риман Б. О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. — М.—Л.: ОГИЗ, 1948. — С. 376–395.
15. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. — М.—Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1949. — 166 с.
16. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. — М.: Стройиздат, 1987. — 335 с.
17. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
18. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 856 с.
19. Цалдастани О. Одномерное изэнтропическое течение жидкости// Пробл. мех. Сборник статей под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана. — М.: Изд-во ин. лит., 1955. — С. 519–552.
20. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собрание сочинений. Том II. — М.—Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1948. — С. 19–137.
21. Beltrami E. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche// Mem. R. Accad. sci. — Bologna, 1880. — 2. — С. 461–505
22. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Vol. II. Paris. 2 ed., 1915 (1 ed., 1888). 579 с.
23. Euler L. Institutiones calculi integralis. Vol III. Petropoli. 1770. Pt. II. Ch. III, IV, V (Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig, Berlin, 1914. — С. 212–230).
24. Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen// Arch. Math. — 1881. — 6, № 3. — С. 328–368.
25. Miller W. (Jr.) Symmetries of differential equations. The hypergeometric and Euler–Darboux equations// SIAM J. Math. Anal. — 1973. — 4, № 2. — С. 314–328.
26. Poisson S. D. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles// J. de L'École Polytechnique, Ser. 1. — 1823. — 19. — С. 215–248.
27. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized potential theory// Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — 63, № 2. — С. 342–354.
28. Weinstein A. The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations// Commun. Pure and Appl. Math. — 1954. — 7, № 1. — С. 105–116.
29. Weinstein A. Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics// Приложения теории функций в механике сплошных сред. Труды международного симпозиума. Т 2. Механика жидкости и газа, математические методы. — М.: Наука, 1965. — С. 440–453.

А. В. Аксенов

Московский государственный университет им. Ломоносова

E-mail: aksenov@mech.math.msu.su

## УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ С ГРАДИЕНТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ПЕРИОДИЧЕСКИМ МЕРАМ

© 2004 г. Г. КАРДОНЕ, Г. ГАРДЖИУЛО

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение решений задач минимизации интегральных функционалов с подынтегральными выражениями, удовлетворяющими условиям  $g$ -роста относительно ограничений, которые наложены на градиенты допустимых функций на периодическом дисперсионном множестве, и относительно периодических мер, которые предполагаются непрерывными и удовлетворяющими неравенству Пуанкаре.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Определения и предварительные результаты . . . . .	38
2. Постановка задачи . . . . .	42
3. Теорема об усреднении . . . . .	44
4. Примеры . . . . .	48
4.1. Перфорированные области . . . . .	48
4.2. Периодические графы . . . . .	48
Список литературы . . . . .	49

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы развивался новый подход к исследованию проблемы усреднения вариационных задач, сформулированных в терминах периодических мер (введенных отдельно в [1, 2, 5] для скалярных задач и в [3] для задач теории упругости). Этот подход основан на двухмасштабной сходимости и позволяет исследовать усреднение задач на сингулярных структурах.

С другой стороны, многие авторы изучали усреднение задач с градиентными ограничениями (см., например, [5, 6, 9]).

В последней статье [7] задачи усреднения с квадратичными лагранжевыми и быстро изменяющимися периодическими ограничениями, наложенными на градиенты допустимых функций на периодических дисперсных множествах, изучались с помощью метода, основанного на двухмасштабной сходимости и явном построении  $\Gamma$ -реализующей последовательности. Этот метод также используется для исследования задач, в которых дисперсные включения имеют нулевую меру Лебега, некоторых случаев, в которых включения не являются дисперсными, и обобщений на случай упругости.

В данной статье изучается асимптотическое поведение решений задач минимизации интегралов с лагранжианами, удовлетворяющими условиям  $p$ -роста ( $p > 1$ ) относительно периодических мер, и с градиентными ограничениями на допустимые функции на периодическом рассеянном множестве. Доказывается теорема об усреднении, в которой предполагается, что мера является невырожденной и удовлетворяет неравенству Пуанкаре. В конце работы приводятся некоторые примеры.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Относительно всех определений и доказательств результатов, которые приводятся в дальнейшем, мы отсылаем читателя к [2, 4].

Пусть  $\mu$  — это периодическая неотрицательная мера Бореля на  $\mathbb{R}^N$  такая, что  $\int_{\square} d\mu = 1$ , где  $\square = [0, 1)^N$  — это ячейка периодичности.

Определим соболевское пространство  $W^{1,p}(\Omega, d\mu)$ ,  $p > 1$ , как замыкание множества пар

$$\{(u, \nabla u) : u \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

в норме произведения  $L^p(\Omega, d\mu) \times L^p(\Omega, d\mu)^N$ . Элементы этого замыкания — пары  $(u, v)$ , где  $v$  называется «градиентом»  $u$  и обозначается через  $\nabla u$ . В дальнейшем будем считать соболевским пространством  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu)$  также и множество первых компонент этого множества; в этом случае для каждой функции  $u$  определенный выше градиент не единственен (см. [2, § 3.1]).

Множество  $\Gamma(u)$  всех градиентов фиксированной функции  $u$  в  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu)$  имеет структуру  $\nabla u + \Gamma(0)$ , где  $\nabla u$  — некоторый градиент функции  $u$  и  $\Gamma(0)$  — множество градиентов в нуле. По определению  $g \in \Gamma(0)$ , если существует последовательность  $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$  такая, что

$$\varphi_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \nabla \varphi_n \rightarrow g \quad \text{в} \quad L^p(\Omega, d\mu).$$

Множество  $\Gamma(0)$  есть подпространство векторного пространства  $L^p(\Omega, d\mu)^N$ .

Имеет место следующий результат (см. [2, теорема 9.3]).

**Теорема 1.** *Существует  $\mu$ -измеримое периодическое подпространство  $T(x)$  такое, что множество  $\Gamma(u)$  градиентов каждой функции из  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu)$  имеет вид  $\nabla u + g(x)$ , где  $\nabla u \in T(x)$  и  $g(x)$  — произвольный вектор в  $L^p(\Omega, d\mu)^N$  такой, что  $g(x) \in T^\perp(x)$ .*

Подпространство  $T(x)$  называется *тангенциальным пространством* в точке  $x$  и  $\nabla u$  называется *тангенциальным градиентом*. С очевидностью замечаем, что тангенциальный градиент единственен, и если  $\nabla u(x)$  — некоторый градиент  $u$ , то его ортогональная проекция на множество  $T(x)$  является тангенциальным градиентом.

Определим меру  $\mu_\varepsilon$  выражением

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}B)$$

для каждого  $B$  борелевского множества  $\mathbb{R}^N$  и  $\varepsilon^{-1}B = \{x : x \in B\}$ . Мера  $\mu_\varepsilon$  имеет период  $\varepsilon\square$  и

$$\mu_\varepsilon(\varepsilon\square) = \int_{\varepsilon\square} d\mu_\varepsilon = \varepsilon^N \int_{\square} d\mu = \varepsilon^N.$$

Отметим, что  $\mu_\varepsilon \rightarrow dx$  в смысле меры, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Допустим, что  $u_\varepsilon$  — ограниченная последовательность в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , т.е.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon < +\infty. \quad (1)$$

Будем говорить, что  $u_\varepsilon$  *слабо сходится* к  $u \in L^p(\Omega)$  и писать  $u_\varepsilon \rightharpoonup u \in L^p(\Omega)$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \varphi u dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (2)$$

Будем говорить, что  $u_\varepsilon$  *сильно сходится* к  $u \in L^p(\Omega)$  и писать  $u_\varepsilon \rightarrow u \in L^p(\Omega)$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon v_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} uv dx \quad \text{если} \quad v_\varepsilon \rightarrow v \in L^{p'}(\Omega). \quad (3)$$

Имеет место следующее предложение (см. [4, леммы 2.2 и 2.4]).

**Предложение 1.** Ограниченные последовательности в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  компактны относительно слабой сходимости. При этом  $u_\varepsilon \rightarrow u \in L^p(\Omega)$  тогда и только тогда, когда  $u_\varepsilon \rightharpoonup u \in L^p(\Omega)$  и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

**Определение 1.** Мера  $\mu$  называется  $p$ -связной на ячейке периодичности, если выполняется следующее свойство: если существует последовательность  $u_n \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square} |u_n - u|^p d\mu = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square} |\nabla u_n|^p d\mu = 0,$$

то функция  $u$  постоянна  $\mu$ -п.в.

Отметим, что мера Лебега  $p$ -связна.

**Замечание 1.** Достаточные условия  $p$ -связности даются неравенством Пуанкаре:

$$\int_{\square} |\varphi|^p d\mu \leq C \left[ \left| \int_{\square} \varphi d\mu \right|^p + \int_{\square} |\nabla \varphi|^p d\mu \right], \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

В дальнейшем будем обозначать  $\langle \varphi \rangle = \int_{\square} \varphi d\mu$ .

Теперь потребуем следующее свойство среднего значения (см. [4, § 3]).

**Предложение 2.** Пусть  $b(x)$  — периодическая  $\mu$ -измеримая функция на  $\mathbb{R}^N$ ,  $A$  — ограниченная область, граница которой имеет нулевую меру Лебега. Тогда

$$b(\varepsilon^{-1}x)d\mu_\varepsilon \rightharpoonup \langle b \rangle dx$$

слабо в смысле меры, т.е. для каждой  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{A}} \varphi(x)b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A \varphi(x)b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \int_A \int_{\square} \varphi(x)b(y) dx d\mu(y) = \langle b \rangle \int_A \varphi(x) dx.$$

Определим пространство  $V_{\text{pot}}^p = V_{\text{pot}}^p(\square, d\mu)$  потенциальных векторов на ячейке периодичности как замыкание множества  $\{\nabla \varphi : \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)\}$  в  $L_{\text{per}}^p(\square, d\mu)^N$  (см. [2, п. 3.2]).

Имеют место следующие свойства:

- 1) потенциальный вектор не обязательно имеет  $\mu$ -среднее значение, равное нулю;
- 2) если каждый потенциальный вектор имеет нулевое  $\mu$ -среднее значение, то  $\mu$  — мера Лебега;
- 3) потенциальный вектор не обязательно является градиентом функции из  $W_{\text{per}}^{1,p}$ ;
- 4) если выполняется неравенство Пуанкаре, то для каждого  $v \in V_{\text{pot}}^p$  существует единственная функция  $u \in W_{\text{per}}^{1,p}$  такая, что  $v = \nabla u$  и  $\langle u \rangle = 0$ .

При этом определяем множество  $L^p(\Omega, V_{\text{pot}}^p)$  как замыкание множества

$$\{\nabla_y \varphi(x, y) : \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(\square))\}$$

в  $L_{\text{per}}^p(\square, d\mu)^N$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что мера  $\mu$  невырождена, если каждый ненулевой постоянный вектор не является потенциальным.

**Замечание 2.** Если мера  $\mu$  невырождена, то

$$\inf_{v \in V_{\text{pot}}^p} \int_{\square} |\xi + v|^p d\mu \geq c_0 |\xi|^p, \quad c_0 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

где  $c_0$  может зависеть только от  $\mu$  и  $p$ .

Действительно, если  $\xi \neq 0$ , то  $\inf_{v \in V_{\text{pot}}^p} \int_{\square} |\xi + v|^p d\mu = 0$  тогда и только тогда, когда  $v = -\xi$ ; так как  $\mu$  невырождена, то постоянный вектор  $\xi$  не является потенциальным вектором. Таким образом,  $\inf_{v \in V_{\text{pot}}^p} \int_{\square} |\xi + v|^p d\mu > 0$ , и поскольку инфимум является непрерывной функцией от  $\xi$  и функция  $|\cdot|^p$  является  $p$ -однородной, то имеем  $\inf_{v \in V_{\text{pot}}^p} \int_{\square} |\xi + v|^p d\mu \geq c_0 |\xi|^p$  для некоторой постоянной  $c_0 > 0$ .

Напомним теперь определение и основные свойства двухмасштабной сходимости (см. [4, § 4]).

**Определение 3.** Пусть  $v_\varepsilon$  — ограниченная последовательность в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Будем говорить, что  $v_\varepsilon(x)$  слабо двухмасштабно сходится к  $v(x, y) \in L^p(\Omega \times \square, dx \times d\mu_\varepsilon) = L^p(\Omega \times \square)$  и писать  $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y) \in L^p(\Omega \times \square)$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\square} v(x, y) \varphi(x) b(y) dx d\mu(y) \quad (5)$$

для каждого  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  и  $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$ .

Доказательство следующих свойств двухмасштабной сходимости можно найти в [4, § 4].

(i) Каждая ограниченная последовательность в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  компактна относительно слабой двухмасштабной сходимости, т.е. она содержит подпоследовательность, слабо двухмасштабно сходящуюся к некоторому элементу пространства  $L^p(\Omega \times \square)$ .

Допустим, что  $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y) \in L^p(\Omega \times \square)$ . Тогда

- (ii) сходимости (5) выполняется также и для  $b \in L_{\text{per}}^p(\square, d\mu)$ ;
- (iii) при  $a \in L_{\text{per}}^\infty(\square, d\mu)$ , имеем

$$a(\varepsilon^{-1}x) v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} a(y) v(x, y);$$

(iv) выполняется полунепрерывность снизу

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \geq \int_{\Omega} \int_{\square} |v|^p dx d\mu(y); \quad (6)$$

(v) если  $\mu$  является  $p$ -связной невырожденной мерой,  $v_\varepsilon$  и  $\nabla v_\varepsilon$  ограничены в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , то для подходящей подпоследовательности имеем

$$v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (7)$$

$$\nabla v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla v(x) + v_1(x, y), \quad v_1 \in L^p(\Omega, V_{\text{pot}}^p). \quad (8)$$

Рассмотрим теперь лагранжиан  $f(y, \xi)$ , удовлетворяющий следующим свойствам:

- (i)  $f(y, \xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$  измерима по Борелю;
- (ii)  $f(y, \cdot)$  выпукла и полунепрерывна снизу,  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ;
- (iii)  $f(y, 0) = 0$ .

Тогда выполняется следующее свойство полунепрерывности снизу (см. [4, теорема 7.1]).

**Теорема 2.** Для каждого лагранжиана  $f$ , удовлетворяющего свойствам (i), (ii), и (iii), если  $v_\varepsilon$  — ограниченная последовательность в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^N$  и  $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v(x, y) \in L^p(\Omega \times \square, (dx) \times d\mu)^N$ , то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(\varepsilon^{-1}x, v_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} \int_{\square} f(y, v(x, y)) dx d\mu. \quad (9)$$

Рассмотрим семейство замкнутых выпуклых множеств  $K(y) \subset \mathbb{R}^N$ ,  $y \in \mathbb{R}^N$ , 1-периодически зависящих от  $y$ , т.е.  $K(y + z) = K(y)$  для любого вектора  $z$  с целыми компонентами.

Предположим, что

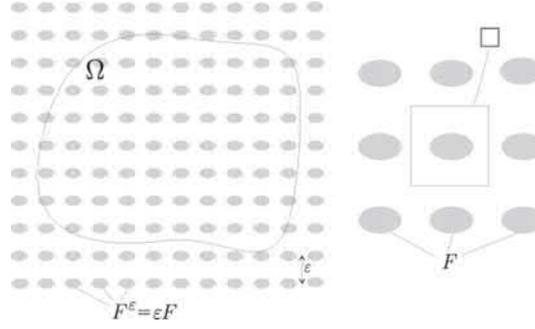


Рис. 1

а) для любого фиксированного  $a \in \mathbb{R}^N$  функция  $P(y)a$  измерима относительно  $y$ , где  $P(y) = P_{K(y)}$  — оператор проектирования из  $\mathbb{R}^N$  в множество  $K(y)$ , т.е. функция  $(a, y) \rightarrow P(y)a$  — каратеодориева.

В следующей лемме установим свойство двухмасштабной сходимости сохранять выпуклые ограничения (для доказательства см. [4, § 7, пример 3]).

**Лемма 1.** Пусть  $K(y) \subset \mathbb{R}^N$  — 1-периодичное семейство замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющих условию измеримости а). Пусть  $v_\varepsilon(x)$  — ограниченная последовательность в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^N$  такая, что  $v_\varepsilon(x) \in K(\varepsilon^{-1}x)$   $\mu$ -п.в. в  $\Omega$  и  $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$ . Тогда

$$v(x, y) \in K(y) \quad \text{п.в. в } \Omega \times \square. \quad (10)$$

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что для функции  $f(y, \xi)$ , удовлетворяющей свойствам (i), (ii) и (iii) предыдущего раздела, выполняется следующее условие  $p$ -роста:

$$(iv) \quad |\xi|^p \leq f(y, \xi) \leq c_1 |\xi|^p + 1 \quad \forall y, \xi \in \mathbb{R}^N, \quad c_1 > 0,$$

и что множество  $K(y)$  удовлетворяет условию а) предыдущего параграфа. Проверим следующие гипотезы:

б)  $0 \in K(y)$  для всех  $y$ ;

с)  $K(y) = \mathbb{R}^N$  для  $y \notin F$ , где  $F$  — заданное 1-периодическое множество в  $\mathbb{R}^N$ , которое является *рассеянным* в том смысле, что  $F \cap \square$  находится на положительном расстоянии от  $\partial \square$  (см. рис. 1).

Введем множество допустимых функций

$$\mathcal{V}^\varepsilon = \left\{ (u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon) : v(x) \in K(\varepsilon^{-1}x) \quad \mu\text{-п.в. в } \Omega \right\}.$$

Рассмотрим функционал

$$I_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} (f(\varepsilon^{-1}x, v) + |u|^p - gu) d\mu_\varepsilon, \quad (u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon), \quad (11)$$

где  $g \in L^{p'}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ ,  $\Omega$  — ограниченная липшицева область в  $\mathbb{R}^N$ , и задачу минимизации

$$\inf \{ I_\varepsilon(u, v) : (u, v) \in \mathcal{V}^\varepsilon \}. \quad (12)$$

Заметим, что множество  $\mathcal{V}^\varepsilon$  — непустое замкнутое выпуклое подмножество множества  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  и  $0 \in \mathcal{V}^\varepsilon$ .

Функционал  $I_\varepsilon(u)$  коэрцитивен в  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ .

Действительно, в силу условия роста (iv) и согласно неравенству Юнга, имеем

$$f(x, \nabla u) + |u|^p - gu \geq |\nabla u|^p + |u|^p - \frac{1}{p} |u|^p - \frac{1}{p'} |g|^{p'} = |\nabla u|^p + \frac{1}{p'} |u|^p - \frac{1}{p'} |g|^{p'}.$$

При этом  $I_\varepsilon(u)$  строго выпукл относительно  $u$  в силу строгой выпуклости  $|\cdot|^p$ , но в общем случае он нестрого выпукл относительно  $\nabla u$ .

Тогда задача минимизации (12) допускает решение  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ ; только  $u_\varepsilon$  единственна в силу строгой выпуклости члена  $|u_\varepsilon|^p$ , а  $v_\varepsilon$  — нет. Так что в теореме об усреднении будут фигурировать сходимости энергии и решений  $u_\varepsilon$ , но не градиента. Однако энергия не зависит от градиента решения.

Мы хотим исследовать асимптотическое поведение (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) последовательности решений  $u_\varepsilon$  задачи минимизации (12).

С этой целью введем *усредненный лагранжиан*

$$\widehat{f}(\xi) = \inf \left\{ \int_{\square} f(y, \xi + v(y)) d\mu(y) : v \in V_{\text{pot}}^p, \xi + v \in K(y) \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (13)$$

**Лемма 2.** *Инфимум (13) достигается (т.е. минимум существует). Кроме того, усредненный лагранжиан  $\widehat{f}(\xi)$  является выпуклой функцией на  $\mathbb{R}^N$ , удовлетворяющей неравенству*

$$c_0|\xi|^p \leq \widehat{f}(\xi) \leq c_2|\xi|^p + 1, \quad (14)$$

где  $c_0$  (определенное в замечании 2) зависит только от  $p$  и  $N$ , и  $c_2$  зависит от  $p$ ,  $N$ ,  $c_1$ . Кроме того, если  $f(y, \cdot)$  строго выпукла и  $\mu$  невырождена, то  $\widehat{f}$  строго выпукла.

**Доказательство.** В силу гипотез b) и c) на  $K(y)$  и так как  $F$  — рассеянное множество и потому  $F \cap \square$  лежит строго внутри  $\square$ , можно построить функцию  $\tilde{w}(y) \in C_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^N)$  такую, что

$$\begin{aligned} \tilde{w}(y)|_{\square} &= -(\xi \cdot y)\varphi(y), \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \varphi|_F = 1, \quad \varphi = 0 \text{ вне окрестности } F; \\ \xi + \nabla_y \tilde{w}|_F &= 0, \quad \xi + \nabla_y \tilde{w}(y) \in K(y). \end{aligned}$$

Тогда для любого  $\xi \in \mathbb{R}^N$  множество допустимых функций в (13) непусто.

Такое множество допустимых функций выпукло и замкнуто в  $V_{\text{pot}}^p$ . Так как

$$\int_{\square} f(y, \xi + v) d\mu \geq \int_{\square} |\xi + v|^p d\mu \quad \forall v \in V_{\text{pot}}^p,$$

то минимизируемый функционал (13) коэрцитивен на  $V_{\text{pot}}^p$ . Так что существует решение в  $V_{\text{pot}}^p$  (см. [8, гл. II, § 2]).

Теперь докажем оценку (14).

По определению усредненного лагранжиана и так как  $\mu$  невырождена, для каждого  $\xi \in \mathbb{R}^N$  существуют  $v \in V_{\text{pot}}^p$  такие, что

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\square} f(y, \xi + v) d\mu \geq \int_{\square} |\xi + v|^p d\mu \geq c_0|\xi|^p$$

(см. замечание 2). С другой стороны, если рассмотрим функцию  $\tilde{w}(y)$ , построенную выше, то получим

$$\widehat{f}(\xi) \leq \int_{\square} f(y, \xi + \nabla \tilde{w}) d\mu \leq c_1 \int_{\square} |\xi + \nabla \tilde{w}|^p d\mu + 1 \leq c_1 2^{p-1} |\xi|^p + c_1 2^{p-1} \int_{\square} |\nabla \tilde{w}|^p d\mu + 1.$$

Так как  $|\nabla \tilde{w}|^p \leq |\xi|^p (\varphi(y) + \varphi'(y))^p$ , то

$$\widehat{f}(\xi) \leq c_1 2^{p-1} |\xi|^p + \left( c_1 2^{p-1} \int_{\square} (\varphi(y) + \varphi'(y))^p d\mu \right) |\xi|^p + 1 = c_1 |\xi|^p + 1.$$

Теперь покажем что  $\widehat{f}(\xi)$  — выпуклая функция. Рассмотрим  $\xi^1 \neq \xi^2$ . Тогда существуют  $v^1(y), v^2(y) \in V_{\text{pot}}^p$  такие, что  $\xi^1 + v^1(y), \xi^2 + v^2(y) \in K(y)$  и

$$\widehat{f}(\xi^1) = \int_{\square} f(y, \xi^1 + v^1) d\mu, \quad \widehat{f}(\xi^2) = \int_{\square} f(y, \xi^2 + v^2) d\mu.$$

Пусть  $\lambda \in ]0, 1[$ . Очевидно, что

$$\lambda(\xi^1 + v^1(y)) + (1 - \lambda)(\xi^2 + v^2(y)) \in K(y)$$

и по определению  $\widehat{f}(\xi)$  имеем

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda\xi^1 + (1 - \lambda)\xi^2) &\leq \int_{\square} f(y, \lambda(\xi^1 + v^1) + (1 - \lambda)(\xi^2 + v^2)) d\mu \leq \\ &\leq \lambda \int_{\square} f(y, \xi^1 + v^1) d\mu + (1 - \lambda) \int_{\square} f(y, \xi^2 + v^2) d\mu = \lambda\widehat{f}(\xi^1) + (1 - \lambda)\widehat{f}(\xi^2). \end{aligned}$$

□

Рассмотрим усредненную задачу

$$\min \left\{ \widehat{I}(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}, \quad (15)$$

где функционал  $\widehat{I}(u)$  задан формулой

$$\widehat{I}(u) = \int_{\Omega} \left( \widehat{f}(\nabla u) + |u|^p - gu \right) dx. \quad (16)$$

В силу строгой выпуклости  $\widehat{f}(\xi)$  и в силу верхнего условия роста на  $f$  имеем, что  $\widehat{I}(u)$  строго выпукл и локально ограничен на  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Тогда он непрерывен на  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Кроме того, в силу неравенства Юнга и нижнего условия роста на  $f$  функционал  $\widehat{I}(u)$  коэрцитивен на  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Следовательно, существует единственное решение  $u_0$  задачи минимизации (15) (см. [8, гл. II, § 2]).

### 3. ТЕОРЕМА ОБ УСРЕДНЕНИИ

**Теорема 3.** Пусть  $\mu$  — невырожденная мера такая, что выполнено неравенство Пуанкаре. Пусть  $u_\varepsilon$  — последовательность решений задачи (12) и  $u_0$  — решение усредненной задачи (15). Тогда

(i)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \varphi u_0 dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N);$$

(ii)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} |u_0|^p dx;$$

(iii)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \widehat{f}(\nabla u_0) dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $u_\varepsilon$  — последовательность решений задачи (12). Таким образом,  $u_\varepsilon$  и  $\nabla u_\varepsilon$  ограничены в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ .

Действительно, так как  $f(y, 0) = 0$ , то  $I_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq I_\varepsilon(0) = 0$ ; таким образом, в силу нижнего условия роста на  $f$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p + |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \leq \int_{\Omega} f(\varepsilon^{-1}x, \nabla u_\varepsilon) + |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon; \quad (17)$$

в силу неравенства Юнга

$$\int_{\Omega} f(\varepsilon^{-1}x, \nabla u_{\varepsilon}) + |u_{\varepsilon}|^p d\mu_{\varepsilon} \leq \int_{\Omega} g u_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p d\mu_{\varepsilon} + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |g|^{p'} d\mu_{\varepsilon}. \quad (18)$$

Тогда в силу (17) и (18) имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^p + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p d\mu_{\varepsilon} \leq \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |g|^{p'} d\mu_{\varepsilon} < +\infty.$$

В силу свойства (v) двухмасштабной сходимости существуют  $\bar{u}(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  и  $v \in L^p(\Omega, V_{\text{pot}}^p)$  такие, что, с точностью до подпоследовательности,

$$u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \bar{u}(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

и

$$\nabla u_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \nabla \bar{u}(x) + v(x, y).$$

В силу леммы 1

$$\nabla \bar{u}(x) + v(x, y) \in K(y) \quad \text{п.в. в } \Omega \times \square.$$

Тогда в силу свойств полунепрерывности снизу, заданных (6) и теоремой 2, имеем

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \int_{\Omega} \int_{\square} f(y, \nabla \bar{u} + v(x, y)) dx d\mu + \int_{\Omega} |\bar{u}|^p dx - \int_{\Omega} g \bar{u} dx. \quad (19)$$

Так как

$$\int_{\square} f(y, \nabla \bar{u} + v(x, y)) dx d\mu \geq \hat{f}(\nabla \bar{u}),$$

то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \int_{\Omega} \hat{f}(\nabla \bar{u}) dx + \int_{\Omega} |\bar{u}|^p dx - \int_{\Omega} g \bar{u} dx = \hat{I}(\bar{u}) \geq \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \hat{I}(u) = \hat{I}(u_0).$$

Следующим шагом является построение  $\Gamma$ -реализующей последовательности, т.е. для данной  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  построение последовательности  $v^{\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_{\varepsilon})$  такой, что

$$\begin{aligned} v^{\varepsilon} &\rightharpoonup v \quad \text{в } L^p(\Omega, d\mu_{\varepsilon}), \quad \nabla v^{\varepsilon} \in K(\varepsilon^{-1}x), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^{\varepsilon}|^p d\mu_{\varepsilon} &= \int_{\Omega} |v|^p dx \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(\varepsilon^{-1}x, \nabla v^{\varepsilon}) d\mu_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \hat{f}(\nabla v) dx.$$

Построим  $\Gamma$ -реализующую последовательность (20) для достаточно гладких  $v$ .

Рассмотрим разбиение  $\mathbb{R}^N$  на симплексы и пусть  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , являются симплексами такими, что  $Q_j \cap \Omega \neq \emptyset$ .

Пусть  $v^0(x)$  — непрерывная функция такая, что

$$\nabla_x v^0 \Big|_{Q_j} = \xi^j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, N,$$

и равная нулю в окрестности  $\partial\Omega$  (кусочно-аффинная функция относительно данного разбиения). Считаем, что  $v^0 \equiv 0$  на всех других симплексах.

По определению усредненного лагранжиана для каждого  $\xi^j$ ,  $j = 1, \dots, N$  существует функция  $v^j(y) \in V_{\text{pot}}^p$  такая, что

$$\xi^j + v^j(y) \in K(y), \quad \hat{f}(\xi^j) = \int_{\square} f(y, \xi^j + v^j) d\mu.$$

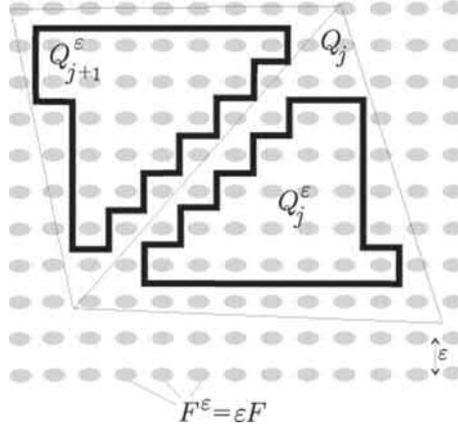


Рис. 2

Так как выполнено неравенство Пуанкаре, то, в силу свойства 4) потенциальных векторов, для каждого  $j = 1, \dots, N$  найдется функция  $w^j(y) \in W_{\text{per}}^{1,p}(\square, d\mu)$  такая, что  $v^j = \nabla w^j$ . Таким образом, пусть  $w(x, y)$  — кусочно-постоянная функция от  $x$  со значениями в  $W_{\text{per}}^{1,p}(\square, d\mu)$ , определенная соотношением

$$w(x, y) \Big|_{x \in Q_j} = w^j(y), \quad j = 1, \dots, N.$$

Заметим, что на каждом  $Q_j$  функция

$$V^\varepsilon(x) = v^0(x) + \varepsilon w(x, \varepsilon^{-1}x)$$

принадлежит  $W^{1,p}(Q_j, d\mu_\varepsilon)$  и  $\nabla V^\varepsilon(x) \Big|_{Q_j} = \xi^j + \nabla w^j(y) \in K(y)$ . Так как  $V^\varepsilon(x)$ , может быть разрывной вдоль граней симплексов  $Q_j$ , то для получения  $\Gamma$ -реализующей последовательности для  $v^0(x)$  необходимо изменить значения  $V^\varepsilon(x)$  вблизи граней симплексов  $Q_j$ .

Пусть  $Q_j^\varepsilon$  — объединение множеств  $\varepsilon(\square + z)$ , принадлежащих  $Q_j$ , где  $z \in \mathbb{Z}^N$ . Положим  $F^\varepsilon = \varepsilon F$  и  $Q^\varepsilon = Q_1^\varepsilon \cup \dots \cup Q_N^\varepsilon$ . Так как  $F$  — рассеянное множество, то можем считать, что  $\text{dist}(F^\varepsilon, \partial Q^\varepsilon) \geq s\varepsilon$ , где  $s = \text{dist}(F, \partial \square)$ .

Таким образом, можно построить функцию  $\psi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  такую, что

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{R}^N, \text{dist}(x, F^\varepsilon \setminus Q^\varepsilon) \geq s\varepsilon, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^N, \text{dist}(x, F^\varepsilon \setminus Q^\varepsilon) \leq s\varepsilon/2, \end{cases}$$

$$0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1, \quad |\nabla \psi_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{-1},$$

где  $c = c(s)$ .

Заметим, что  $\psi_\varepsilon(x) = 1$  на  $Q^\varepsilon$  и  $\psi_\varepsilon(x) = 0$  вблизи компонент  $F^\varepsilon$  вне  $Q^\varepsilon$ .

Изменим функцию  $v^0(x)$  так, чтобы она стала постоянной вблизи множества  $F^\varepsilon \setminus Q^\varepsilon$ , которое состоит из компонент  $F^\varepsilon$  вне всех  $Q_j^\varepsilon$ . Обозначим через  $\varepsilon(\square + z^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , кубы с целым  $z^k$ , покрывающие множество  $\mathbb{R}^N \setminus Q^\varepsilon$ , и пусть

$$v_\varepsilon^0(x) = \begin{cases} v^0(\varepsilon z^k) + \psi_\varepsilon(x)(v^0(x) - v^0(\varepsilon z^k)) & \text{при } x \in \varepsilon(\square + z^k) \subset \mathbb{R}^N \setminus Q^\varepsilon, \\ v^0(x) & \text{при } x \in Q^\varepsilon. \end{cases}$$

Можно также построить функцию  $\varphi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  такую, что

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in Q^\varepsilon, \text{dist}(x, \partial Q^\varepsilon) \geq s\varepsilon, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^N \setminus Q^\varepsilon, \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1, \quad |\nabla \varphi_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{-1}.$$

Жирная линия на рис. 2 представляет область, в которой  $\varphi_\varepsilon(x)$  убывает от 1 до 0.

Покажем, что функции

$$v^\varepsilon(x) = v_\varepsilon^0(x) + \varepsilon\varphi_\varepsilon(x)w(x, \varepsilon^{-1}x)$$

образуют  $\Gamma$ -реализующую последовательность для  $v^0(x)$ .

В окрестности  $Q^\varepsilon \cap F^\varepsilon$  имеем  $\varphi_\varepsilon = 1$ ,  $v_\varepsilon^0(x) = v^0(x)$ , и следовательно,  $\nabla v^\varepsilon(x) \in K(y)$  в этой окрестности. С другой стороны, в окрестности  $F^\varepsilon \setminus Q^\varepsilon$  имеем  $\varphi_\varepsilon(x) = 0$  и  $v_\varepsilon^0 = \text{const}$  (на каждой связной компоненте). Следовательно, в силу гипотезы b) относительно  $K(y)$ ,  $\nabla v_\varepsilon^0(x) = 0 \in K(y)$  в этой окрестности. Таким образом,  $\nabla v_\varepsilon^0 \in K(y)$  в окрестности  $F^\varepsilon$  и, следовательно, на всем  $\mathbb{R}^N$ , так как  $K(\varepsilon^{-1}x) = \mathbb{R}^N$  вне  $F^\varepsilon$ .

Можно написать

$$v^\varepsilon(x) = v^0(x) + (v_\varepsilon^0(x) - v^0(x)) + \varepsilon\varphi_\varepsilon(x)w(x, \varepsilon^{-1}x).$$

Имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi v_\varepsilon^0(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \varphi v^0(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_\varepsilon^0|^p d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} |v^0|^p dx, \quad (21)$$

так как  $v^0(x)$  равномерно непрерывна, ограничена и

$$|v^0(x) - v_\varepsilon^0(x)| \leq \omega(\varepsilon),$$

где  $\omega$  — модуль непрерывности  $v^0$ .

При этом, так как  $w^j(y) \in L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , то

$$\varepsilon|\varphi_\varepsilon(x)w(x, \varepsilon^{-1}x)| \leq \varepsilon|w^j(\varepsilon^{-1}x)| \quad \text{в} \quad Q^j.$$

Правая часть последнего неравенства сходится к нулю в  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  по свойству среднего значения (см. предложение 2).

В силу (21) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi v_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} \varphi v^0(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} |v^0|^p dx.$$

Кроме того, в силу свойства среднего значения и выбора  $w^j$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(\varepsilon^{-1}x, \nabla v^\varepsilon) d\mu_\varepsilon &= \sum_j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_j} f(\varepsilon^{-1}x, \xi^j + \nabla_y w^j(\varepsilon^{-1}x)) d\mu_\varepsilon = \\ &= \sum_j \int_{Q_j} \int_{\square} f(y, \xi^j + \nabla_y w^j(y)) dx d\mu = \sum_j \int_{Q_j} \widehat{f}(\xi^j) dx = \int_{\Omega} \widehat{f}(\nabla v^0) dx; \end{aligned}$$

это означает, что  $v^\varepsilon$  —  $\Gamma$ -реализующая последовательность для  $v^0(x)$ . Остается заметить, что такие функции  $v^0(x)$  образуют плотное множество в  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Действительно, для любой  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  можно построить непрерывную кусочно-аффинную функцию  $v^0(x)$ , которая совпадает с  $v$  в вершинах симплексов  $Q_j$ . Если эти симплексы достаточно малы, то  $v^0(x)$  заведомо близка к  $v$  в  $W^{1,\infty}(\Omega)$  и тем более в  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Действительно, легко видеть, что разница между градиентами функций  $v^0$  и  $v$  может быть оценена постоянной, кратной осцилляции  $\nabla v$  на каждом симплексе.

Итак, доказано, что можно построить  $\Gamma$ -реализующие последовательности для всех  $v$  из плотного множества в  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ . Тогда пусть  $v^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  —  $\Gamma$ -реализующие последовательности для таких  $v$  из плотного множества в  $W_0^{1,p}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ , т.е.  $v^\varepsilon$  удовлетворяет соотношениям (20).

Тогда

$$I_\varepsilon(v^\varepsilon) \geq I_\varepsilon(u_\varepsilon), \quad I_\varepsilon(v^\varepsilon) \rightarrow \widehat{I}(v),$$

и, в силу свойства полунепрерывности снизу,

$$\widehat{I}(v) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I(u_\varepsilon) \geq \widehat{I}(u^0). \quad (22)$$

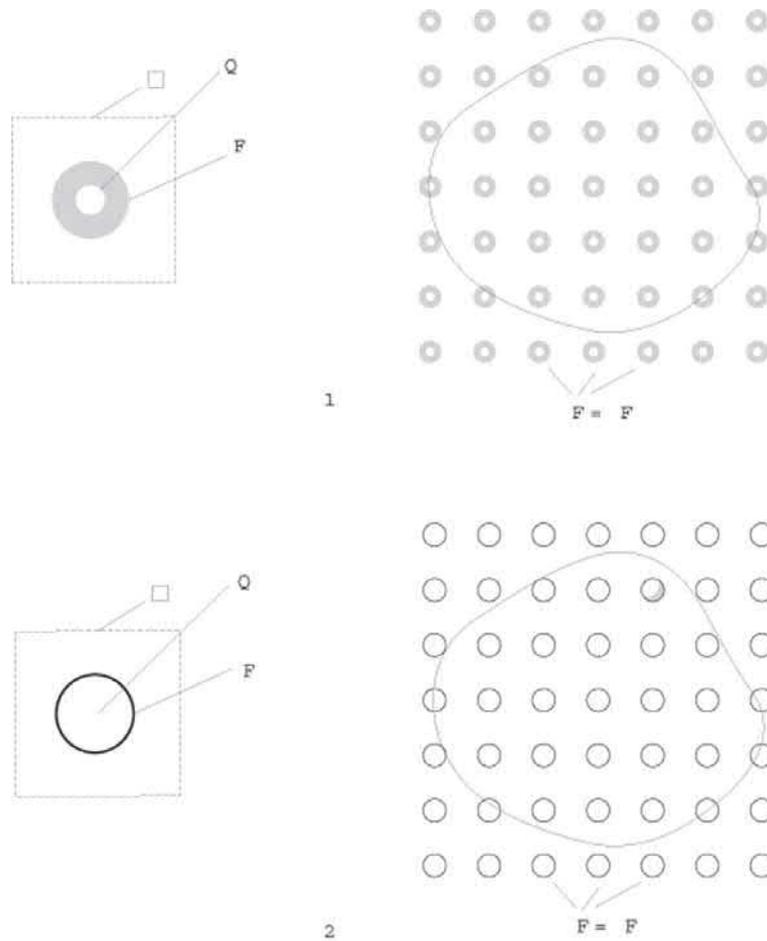


Рис. 3

Теперь, так как  $\hat{I}(v)$  непрерывна на  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , то неравенство (22) выполняется для каждого  $v$  в  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Следовательно,  $u_0$  — решение задачи (12),  $I(u_\varepsilon) \rightarrow \hat{I}(u^0)$ , и получаем утверждение.  $\square$

#### 4. ПРИМЕРЫ

**4.1. Перфорированные области.** Если  $Q$  — незамкнутое подмножество такое, что  $Q \subset\subset \square$  и

$$d\mu = \rho(x)dx, \quad \text{where } \rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\square \setminus Q|} & \text{где } \square \setminus Q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем  $d\mu_\varepsilon = \rho(\varepsilon^{-1}x)dx$  и, таким образом, задача минимизации рассматривается на перфорированной области  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \varepsilon Q$ . Заметим, что в этом случае обычная связность  $\square \setminus Q$  влечет  $p$ -связность  $\mu$ .

В этом случае можем рассматривать (при подходящем выборе множества  $F$ ) следующие задачи с градиентными ограничениями:

- (i) на рис. 3(1) показано множество  $F$ , и можно взять  $K(y)|_F = \{0\}$ ;
- (ii) Можно рассматривать множество  $F$ , как на рис. 3(2) или на рис. 4(3), но в этом случае множество допустимых функций будет  $\mathcal{V}^\varepsilon = \{v \in W_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon) : v(x)|_{F_\varepsilon} = \text{const}\}$ .

**4.2. Периодические графы.** Если рассмотрим обычную квадратную сеть или периодический в целом связный граф на плоскости, то можно определить меру  $\mu$  как сумму линейных мер на звеньях, взятых с положительными весами. Такие меры обладают свойством  $p$ -связности.

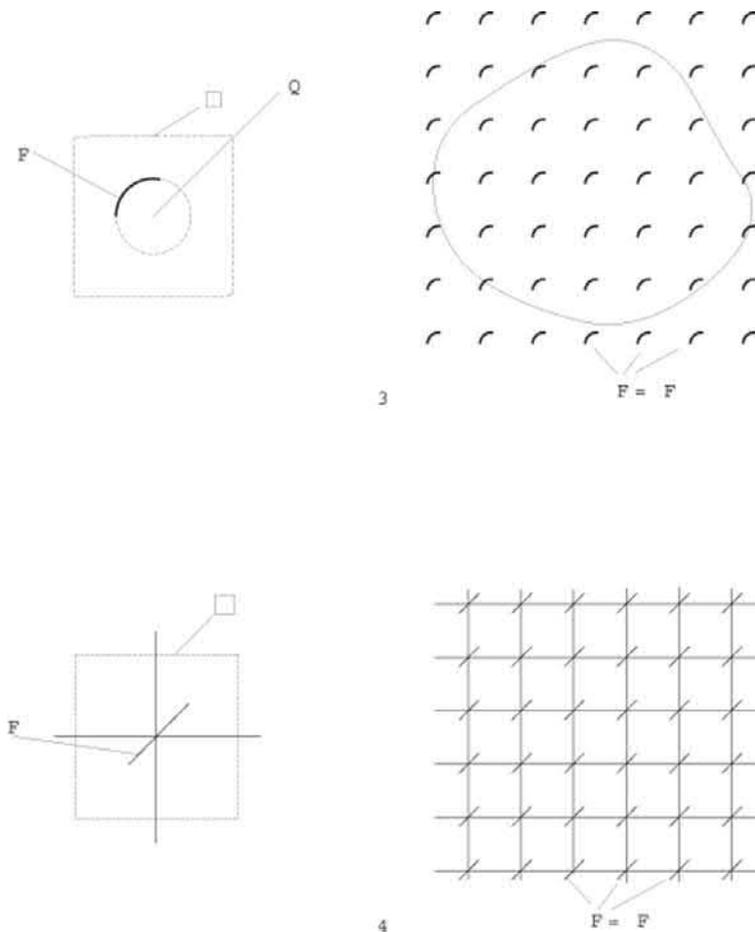


Рис. 4

Например, можно выбрать множество  $F$ , как на рис. 4(4), взять  $K(y)|_F = \{0\}$ . Но в этом случае замечаем, что  $\nabla v|_F = 0$ ; это означает, что единственный тангенциальный градиент равен нулю на  $F$ .

В этом случае  $\mu$  — одномерная мера Лебега на  $F$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В. В. О технике гомогенизации для вариационных задач// Функци. анализ и его прил. — 1999. — 33, № 1. — С. 1–15.
2. Жиков В. В. Об обобщении метода двухмасштабной сходимости и его применения// Мат. сб. — 2000. — 191, № 7. — С. 973–1014.
3. Жиков В. В. Усреднение задач теории эластичности на сингулярных структурах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — 66, № 2.
4. Жиков В. В. О двухмасштабной сходимости// Тр. сем. Петровского. — 2003. — 23.
5. Bouchitté G., Fragalà I. Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures// SIAM J. Math. Anal. — 2001. — 32, № 6. — С. 1198–1226.
6. Carbone L., De Arcangelis R. Unbounded functionals in the calculus of variations. Representation, relaxation and homogenization. — Monogr. and Surv. Pure and Appl. Mat. — 125, CRC Press (2002).
7. Cardone G., Corbo Esposito A., Yosifian G. A., Zhikov V. V. Homogenization of some problems with gradient constraints. — Prepr. Univ. Naples «Federico II». — 2002. — № 24.
8. Ekeland I., Temam R. Convex analysis and variational problems. — North-Holland, Amsterdam, 1976.
9. Zhikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A. Homogenization of differential operators and integral functionals. — Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Г. Кардоне  
Department of Civil Engineering,  
Second University of Naples  
E-mail: [giuseppe.cardone@unina2.it](mailto:giuseppe.cardone@unina2.it)

Г. Гарджиуло  
Department of Information Engineering and Applied Mathematics (DIIMA), University of Salerno  
E-mail: [gargiulo@diima.unisa.it](mailto:gargiulo@diima.unisa.it)

## УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯЩИЧНЫХ И СТЕРЖНЕВЫХ КАРКАСАХ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

© 2004 г. С. Е. ПАСТУХОВА

Аннотация. Изучается задача теории упругости в статической постановке на тонких периодических ящичных и стержневых каркасах, геометрия которых зависит от двух малых связанных между собой параметров  $\varepsilon$ ,  $h(\varepsilon)$ , определяющих ячейку периодичности и толщину составляющих (пластин или стержней соответственно). Получено усреднение этой задачи в наиболее трудном случае, когда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)/\varepsilon = \theta > 0$ .

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	51
2. Предварительные сведения	60
3. О двухмасштабной сходимости на периодической ящичной структуре критической толщины	63
4. Леммы о продолжении	77
5. Вывод усредненного уравнения	85
6. Некоторые вспомогательные утверждения	88
7. О стержневых каркасах	92
Список литературы	98

### 1. ВВЕДЕНИЕ

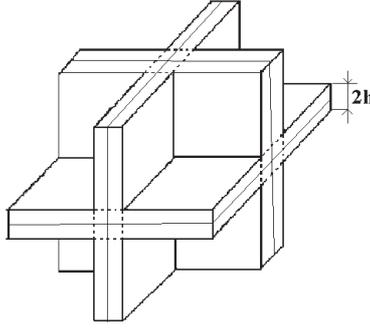
**1.1.** Пусть  $F$  — периодическая ящичная структура в  $\mathbb{R}^3$ , состоящая из координатных плоскостей и их сдвигов на целочисленные векторы. Ячейкой периодичности служит куб  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3$ . Введем периодическую нормированную меру  $\mu$ , которая сосредоточена на указанной структуре  $F$ , причем на каждой из составляющих ее граней она пропорциональна плоской мере Лебега,  $\int d\mu = 1$ ,  $\langle g \rangle = \int g d\mu$  — среднее по мере  $\mu$ .

Пусть  $F^h$  — 1-периодическая ящичная структура, составленная из бесконечных пластин (плит), толщина которых  $2h > 0$ , имеющих в качестве срединной плоскости соответствующую плоскость из структуры  $F$ . Фрагменты структур  $F$ ,  $F^h$  в пределах ячейки периодичности  $\square$  изображены на рис. 1.

Структуру  $F^h$  будем называть тонкой, в то время как исходную структуру  $F$  — сингулярной.

Пусть  $F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h$  — гомотетическое сжатие структуры  $F^h$ . Заметим, что структура  $F_\varepsilon^h$  состоит из плит, толщина которых  $2\varepsilon h$ .

Через  $A = \{a_{ijsp}\}$  обозначим тензор упругости, подчиненный обычным условиям симметрии:  $a_{ijsp} = a_{spij} = a_{jis p}$ . Скалярное произведение симметрических матриц  $\xi = \{\xi_{ij}\}$ ,  $\eta = \{\eta_{ij}\}$  определим как  $\xi \cdot \eta = \xi_{ij} \cdot \eta_{ij}$ , в частности,  $\xi \cdot \xi = |\xi|^2$ . Действие тензора  $A$  на матрицу  $\xi$  есть матрица  $A\xi = \{a_{ijsp}\xi_{ij}\}$ . Тогда  $A\xi \cdot \xi = a_{ijsp}\xi_{ij}\xi_{sp}$  — плотность упругой энергии. Предполагаем, что тензор  $A$  положительно определен,  $A\xi \cdot \xi \geq c_0|\xi|^2$ ,  $c_0 > 0$ .

Рис. 1. Ящичные структуры  $F, F^h$ .

Для *изотропного* тензора имеем

$$A\xi = k\xi + k_1 E \operatorname{Tr} \xi, \quad k > 0, \quad k_1 \geq 0,$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{33} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Tr} \xi = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

С ограниченной липшицевой областью  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  свяжем перфорированную область  $\Omega \cap F_\varepsilon^h$  и пространство  $W_{\varepsilon,h}$  — замыкание множества  $C_0^\infty(\Omega)^3$  по норме

$$\left( \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} [\varphi \cdot \varphi + e(\varphi) \cdot e(\varphi)] dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\}$$

— тензор деформации или упругий градиент.

Рассмотрим задачу: *найти вектор-функцию  $u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}$ , для которой выполнено интегральное тождество*

$$\int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} A e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) dx = \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^3, \quad f \in C^\infty(\bar{\Omega})^3. \quad (1.2)$$

Это — обобщенная или вариационная формулировка краевой задачи для системы теории упругости в области  $\Omega \cap F_\varepsilon^h$ , где на  $\partial\Omega \cap \partial F_\varepsilon^h$  задается условие закрепления, т.е. условие Дирихле  $u^{\varepsilon,h} = 0$ , а на остальной части границы области  $\Omega \cap F_\varepsilon^h$  — условие отсутствия напряжений  $A e(u^{\varepsilon,h})n = 0$ ,  $n$  — нормаль к границе.

Хорошо известно [1, 11, 14], что решение поставленной задачи существует и единственно. Это вытекает из индивидуального неравенства Корна для фиксированных  $\varepsilon, h$

$$\int_{F_\varepsilon^h} |u|^2 dx \leq C \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \quad (1.3)$$

где константа  $C$  зависит от диаметра носителя функции  $u$ , а также от геометрических параметров  $\varepsilon, h$ .

Цель усреднения состоит в том, чтобы изучить поведение решения  $u^{\varepsilon,h}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и найти уравнение, которому удовлетворяет предельная функция. Случай, когда толщина  $h > 0$  фиксирована, охватывается классической теорией усреднения в перфорированных областях. Будем считать, что толщина плит стремится к нулю вместе с  $\varepsilon$ , т.е.  $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такая постановка вопроса

не является новой. Например, для *скалярных* задач в аналогичной ситуации доказана «сильная» сходимость

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega} |u^{\varepsilon, h}(x) - u^0(x)|^2 dx = 0, \quad (1.4)$$

где  $u^0$  — решение усредненной задачи Дирихле с аналогичным исходному уравнением в «сплошной» области  $\Omega$ :

$$u^0 \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div} A^{\text{hom}} \nabla u^0 = f.$$

При этом усредненная матрица  $A^{\text{hom}}$  определяется с помощью некоторой периодической задачи на сингулярной структуре  $F$ . Важно, что предел решений  $u^{\varepsilon, h}$  не зависит от способа стремления  $h$  к нулю (см. [1, гл. 8]).

Для задач теории упругости обнаружен (см. [2, 3]) «масштабный эффект»: усредненное уравнение существенно зависит от того, как толщина  $h$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Были выделены три типа тонких структур:

- (i) достаточно толстые, когда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)\varepsilon^{-1} = \infty$ ;
- (ii) достаточно тонкие, когда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)\varepsilon^{-1} = 0$ ;
- (iii) структуры критической толщины, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)\varepsilon^{-1} = \theta > 0. \quad (1.5)$$

Объясним происхождение масштабного эффекта в теории упругости на периодических тонких структурах. Хорошо известно, что константа в неравенстве Корна на тонких структурах растет неограниченно, когда толщина структуры стремится к нулю. Например, этот факт легко понять для одиночной плиты, толщина которой равна  $t$  [13]. Напомним, что для плиты  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_3| < t/2\}$  справедливо анизотропное неравенство Корна

$$\int_{\Pi} [|u'|^2 + |\nabla' u|^2 + t^2(u_3^2 + |\nabla' u_3|^2)] dx \leq C_1 \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \quad (1.6)$$

где  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $(u_1, u_2) = u'$ ,  $\nabla'$  — градиент по продольным переменным  $x_1, x_2$ ,  $C_1$  — константа, зависящая лишь от диаметра носителя функции  $u$ . Из (1.6) вытекает неравенство

$$\int_{\Pi} |u|^2 dx \leq C_2 t^{-2} \int_{\Pi} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3,$$

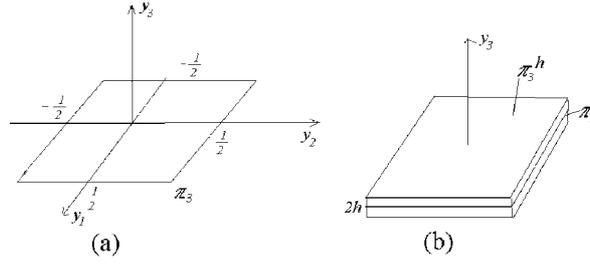
в котором степень  $t$  является точной, что проверяется, если взять

$$u = \left( -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} a(x'), -x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} a(x'), a(x') \right), \quad a \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{x'}^2), \quad x' = (x_1, x_2).$$

В нашем случае рассматривается не одиночная тонкая плита, а периодическая ящичная структура  $F_\varepsilon^h$ , составленная из тонких плит, образующих три взаимно перпендикулярные семейства. Это обстоятельство может сильно изменить поведение точной константы  $C = C(\varepsilon, h)$  из неравенства (1.3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ : она оказывается ограниченной при определенном соотношении между параметрами  $\varepsilon, h(\varepsilon)$  (см. [7, 8]). Для ящичной структуры  $F_\varepsilon^h$  справедливо неравенство Корна

$$\int_{F_\varepsilon^h} |u|^2 dx \leq C_0 \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right) \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \quad (1.7)$$

где константа  $C_0$  зависит лишь от диаметра  $\operatorname{supp} u$ . Для достаточно тонких структур константа  $C(\varepsilon, h) = C_0 \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \right)$  из (1.7) стремится к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . На примере можно показать, что в этом случае точная константа в неравенстве Корна, действительно, имеет порядок величины  $\left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^2$ .

Рис. 2. Плита  $\pi_3^h$  и ее срединная плоскость  $\pi_3$ .

**Пример.** Рассмотрим на плоской ячейке периодичности  $\left[0, \frac{1}{2}\right]^2$  функцию от двух переменных  $a(t) \in C_0^\infty\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)^2\right)$ ,  $a \not\equiv 0$ , продолжим ее по периодичности на всю плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Зададим в ячейке периодичности  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$  вектор-функцию  $v$  равенством

$$v(y) = \begin{cases} \left(-y_3 \frac{\partial a}{\partial y_1}(y_1, y_2), -y_3 \frac{\partial a}{\partial y_2}(y_1, y_2), a(y_1, y_2)\right), & \text{если } y \in \pi_3^h, \\ \left(-y_2 \frac{\partial a}{\partial y_1}(y_1, y_3), a(y_1, y_3), -y_2 \frac{\partial a}{\partial y_3}(y_1, y_3)\right), & \text{если } y \in \pi_2^h, \\ \left(a(y_2, y_3), -y_1 \frac{\partial a}{\partial y_2}(y_2, y_3), -y_1 \frac{\partial a}{\partial y_3}(y_2, y_3)\right), & \text{если } y \in \pi_1^h, \end{cases}$$

где  $\pi_i = \square \cap \{y_i = 0\}$  — единичный квадрат на координатной плоскости,  $\pi_i^h$  — плита толщины  $2h$  ( $h$  достаточно мало) со срединной плоскостью  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. рис. 2), и далее периодически продолжим  $v(y)$  на всю структуру  $F^h$ . Вычисления дают следующие соотношения:

$$\int_{\square \cap F^h} |v|^2 dy = O(h), \quad \int_{\square \cap F^h} |e(v)|^2 dy = O(h^3).$$

Положим  $u(x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  в  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$ , где  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ,  $n$  — натуральное число. Тогда  $u|_{\partial \square} = 0$ , благодаря свойствам функции  $a(t)$ , и выполнены следующие соотношения:

$$\int_{\square \cap F_\varepsilon^h} |u|^2 dx = \int_{\square \cap F^h} |v|^2 dy = O(h),$$

$$\int_{\square \cap F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx = \varepsilon^{-2} \int_{\square \cap F^h} |e(v)|^2 dy = O(h^3 \varepsilon^{-2}),$$

из которых следует искомое свойство константы  $C(\varepsilon, h)$ .

Видим, что для достаточно тонких структур, т.е. когда  $\varepsilon h^{-1}(\varepsilon) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , нет ограниченности решений задачи (1.2), а значит, задача (1.2) в этом случае усреднению не подлежит. Наоборот, для тонких структур, достаточно толстых и критической толщины, из неравенства (1.7) следует равномерная ограниченность решений задачи (1.2) по норме  $W_{\varepsilon, h}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Только для таких структур будем далее изучать поведение решений задачи (1.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Особенностью задач теории упругости на тонких периодических структурах является то, что решение  $u^{\varepsilon, h}$  «осциллирует», и для него, вообще говоря, не может быть сильной сходимости (1.4). Более точно, в нулевом приближении решение  $u^{\varepsilon, h}(x)$  не есть гладкая функция  $u^0(x)$ , а имеет вид

$u\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ , где  $u(x, y)$  — функция двух переменных, периодическая по аргументу  $y$ . Например, для тонких периодических сеток на плоскости этот эффект изучен в [3, 9, 10]. Функция  $u(x, y)$  служит «двухмасштабным пределом» последовательности  $u^{\varepsilon, h}$ . При этом структура функции  $u(x, y)$  и уравнение, которому она удовлетворяет, существенно различаются в указанных выше трех случаях, хотя всегда  $u(x, y)$ , как функция аргумента  $y$ , есть «периодическое жесткое перемещение на сингулярной сетке  $F$ ». Определим это ключевое понятие.

**Определение 1.1.** Скажем, что заданный на сингулярной структуре  $F$  вектор  $u \in L^2(\square, d\mu)^3$  есть периодическое жесткое перемещение, если найдется последовательность гладких периодических векторов  $\varphi_\delta \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^3$  такая, что

$$\varphi_\delta \rightarrow u, \quad e(\varphi_\delta) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(\square, d\mu).$$

Множество периодических жестких перемещений будем обозначать через  $\mathcal{R}$ . Доказано [3], что всякий вектор  $u \in \mathcal{R}$  допускает единственное представление

$$u(y) = c + \chi(y), \tag{1.8}$$

в котором  $c$  — постоянный вектор, а  $\chi$  — поперечное перемещение. Последнее означает, что на каждой грани структуры  $F$  вектор  $\chi$  ортогонален этой грани. Таким образом, справедливо разложение  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^3 + \mathcal{R}_1$ , где  $\mathcal{R}_1$  — множество всех поперечных перемещений.

Ортогональный проектор  $P_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1$  переводит постоянный вектор  $c \in \mathbb{R}^3$  в поперечное перемещение, которое на каждом звене равно нормальной компоненте этого вектора. Результат записывается как  $P_1(y)c$ . В выражении вида  $P_1(y)f(x)$  вектор  $f$  рассматривается как постоянный,  $x$  играет роль параметра.

**1.2.** Приведем результаты об усреднении задачи (1.2) при условии, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{h(\varepsilon)} = \text{const} \geq 0$ .

Начнем с общих фактов, справедливых как для достаточно толстых структур, так и для структур критической толщины.

1°. Найдется вектор-функция  $u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square, dx \times d\mu)^3$ , периодическая по  $y$ , такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} |u^{\varepsilon, h}(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx = 0. \tag{1.9}$$

Здесь требуется пояснение, так как функция  $u(x, \cdot)$  задана на сингулярной структуре  $F$ , а для интегрирования в (1.9) нужно, чтобы она была определена на тонкой структуре  $F^h$ . Достаточно продолжить эту функцию как постоянную в поперечном направлении на каждую  $h$ -плиту из ее срединной плоскости, являющейся некоторой гранью из структуры  $F$ . В точках, принадлежащих двум или трем  $h$ -плитам, построенные продолжения складываются. Так определяется «естественное продолжение» (см. § 22).

2°. Вектор  $u(x, \cdot)$  есть периодическое жесткое перемещение, и, в соответствии с разложением (1.8),

$$u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y), \quad \chi(x, \cdot) \in \mathcal{R}_1 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega. \tag{1.10}$$

3°. Выполнено соотношение

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad -\text{div} A^{\text{hom}} e(u^0) = f, \tag{1.11}$$

в котором  $A^{\text{hom}}$  — усредненный тензор,

$$A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \inf_{w \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^3} \int_{\square} A(\xi + e(w)) \cdot (\xi + e(w)) d\mu.$$

Тензор  $A^{\text{hom}}$  является положительно определенным:  $A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi \geq c_0 \xi^2$ ,  $c_0 > 0$ .

Чтобы получить усредненную задачу, добавим к двум соотношениям (1.10), (1.11) третье — для поперечной составляющей  $\chi$ . Для достаточно толстых сеток это соотношение имеет тривиальный вид  $\chi = 0$ . Получаем классическое усреднение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} |u^{\varepsilon, h}(x) - u^0(x)|^2 dx = 0, \quad (1.12)$$

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad -\operatorname{div} A^{\operatorname{hom}} e(u^0) = f. \quad (1.13)$$

**Теорема 1.2.** Пусть  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon/h(\varepsilon) = 0$ . Тогда для решений задачи (1.2) имеет место сходимост (1.12) к предельной функции, являющейся решением краевой задачи (1.13). При этом имеется сходимост интегралов энергии

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) dx = \int_{\Omega} A^{\operatorname{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx.$$

**1.3.** На протяжении всей работы будем обозначать через  $\Pi_i$  грань куба  $[0, 1]^3$ , лежащую на плоскости  $y_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Любую 1-периодическую функцию, заданную на структуре  $F$ , достаточно изучать на этих трех гранях. В критическом случае поперечная компонента  $\chi(x, y)$  из (1.10) как функция аргумента  $y$  на каждой грани  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , является решением отдельной краевой задачи для эллиптического уравнения четвертого порядка (в изотропном случае возникнет бигармоническое уравнение). Этой краевой задачей оказывается классическая задача о прогибе тонкой квадратной пластинки с жестко закрепленными краями под действием поперечной нагрузки, определяемой функцией  $P_1(y)f(x)$ , посредством которой компонента  $\chi(x, y)$  получает зависимость от переменной  $x$ . Взятые вместе эти три задачи однозначно определяют функцию  $\chi(x, y)$  на всей ячейке периодичности  $[0, 1]^3$ . Сформулируем точно задачи, определяющие функции  $\chi(x, y)$ .

Далее  $i, j, m$  — перестановка чисел 1, 2, 3. Любая из трех граней  $\Pi_i$  — плоская область (единичный квадрат), лежащая в координатной плоскости  $y_i = 0$ . Пусть  $H_0^2(\Pi_i)$  — обычное соболевское пространство скалярных функций от двух переменных в области  $\Pi_i$ .

Каждая компонента  $\chi_i$  поперечного вектора  $\chi$  может быть ненулевой лишь на одной грани ( $\chi_i \neq 0$  лишь на  $\Pi_i$ ). При этом, если исходный тензор  $A$  изотропен (см. (1.1)), то  $\chi_i|_{\Pi_i} = \chi_i$  находится как решение вариационной задачи на отыскание минимума

$$\min_{g \in H_0^2(\Pi_i)} \int_{\Pi_i} \left( \hat{k} \frac{\theta^2}{3} (\Delta_i g)^2 - 2g c_i \right) d\mu(y), \quad (1.14)$$

где  $\hat{k} = \frac{k(k + 2k_1)}{k + k_1}$ ,  $c_i = c \cdot e_i$ ,  $c = f(x)$  — постоянный (по  $y$ ) вектор,  $\Delta_i g = (\partial_j^2 + \partial_m^2)g$ ,  $\partial_s = \frac{\partial}{\partial y_s}$ .

Для решения этой вариационной задачи выполнено уравнение Эйлера в слабой форме

$$\chi_i \in H_0^2(\Pi_i), \quad \int_{\Pi_i} \left( \hat{k} \frac{\theta^2}{3} (\Delta_i \chi_i) (\Delta_i g) - g c_i \right) d\mu = 0 \quad \forall g \in H_0^2(\Pi_i), \quad (1.15)$$

откуда вытекает собственно уравнение Эйлера для решения задачи (1.14) в области  $\Pi_i$

$$\hat{k} \frac{\theta^2}{3} \Delta_i \Delta_i \chi_i = c_i, \quad c_i = c \cdot e_i, \quad c = f(x), \quad (1.16)$$

дополненное краевыми условиями на границе  $\partial\Pi_i$

$$\chi_i = 0, \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial n} = 0,$$

где  $n$  — единичная внешняя нормаль к  $\partial\Pi_i$ .

Задача (1.14) или эквивалентная ей краевая задача (1.16) (в обобщенной постановке) разрешимы, и их решение единственно.

**1.4.** Дадим более формальное описание усредненной задачи в критическом случае.

**Определение 1.3.** Пусть  $\mathcal{R}_1^0$  — это множество периодических поперечных перемещений  $v(y) = (v_1(y), v_2(y), v_3(y))$ , таких что  $v_i|_{\Pi_i} \in H_0^2(\Pi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Норму в  $\mathcal{R}_1^0$  определим как сумму  $H^2$ -норм на гранях  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Видим, что элементы пространства  $\mathcal{R}_1^0$  — это периодические поперечные перемещения  $v(y)$  (вообще говоря, из  $L^2(\square, d\mu)^3$ ), обладающие повышенной гладкостью на каждой грани  $\pi$  из структуры  $F$  и удовлетворяющие определенным условиям сопряжения на каждом ребре  $\gamma$  из структуры  $F$ . Более точно выполнены следующие условия (a)–(c).

a) На произвольной грани  $\pi$  с единичным нормальным вектором  $\nu$  скалярная функция  $v_\nu = v|_\pi \cdot \nu$  двух переменных имеет частные производные первого и второго порядка, суммируемые с квадратом на грани  $\pi$ , или коротко  $v_\nu \in H^2(\pi)$ .

Рассмотрим произвольное ребро  $\gamma$  в структуре  $F$ ; в нем сходятся четыре грани, которые обозначим через  $\pi_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ . Благодаря условию a) определены с каждой из четырех граней  $\pi_s$  следы  $v_s|_\gamma$ ,  $\frac{\partial v_s}{\partial n_s}|_\gamma$ , где  $v_s = v|_{\pi_s} \cdot \nu_s$ ,  $n_s$  — внутренняя нормаль к  $\gamma$  на  $\pi_s$ . При этом

b)  $v_s|_\gamma = 0$ ;

c)  $\frac{\partial v_s}{\partial n_s}|_\gamma = 0$  для всех  $s = 1, 2, 3, 4$ .

**Определение 1.4.** Пусть  $V$  — множество вектор-функций вида

$$u = u^0(x) + \chi(x, y), \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0). \quad (1.17)$$

Скажем, что  $u \in V$  есть решение усредненной задачи в изотропном случае, если интегральное тождество

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \hat{k} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_{\Pi_i} (\Delta_i \chi_i) (\Delta_i \psi_i) dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi dx d\mu \quad (1.18)$$

выполнено для любой вектор-функции  $\varphi = \varphi^0 + \psi \in V$ .

Множество  $V$  назовем энергетическим пространством усредненной задачи.

Здесь и далее для вектора  $g(x, \cdot) \in \mathcal{R}_1$ ,  $g_i = g|_{\Pi_i} \cdot e_i$ .

Полагая в тождестве (1.18)  $\psi = 0$ , получим соотношение (1.11). Далее, взяв  $\varphi^0 = 0$ ,  $\psi = \eta(x)v(y)$ , где  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $v \in \mathcal{R}_1^0$ ,  $\text{supp } v \in \Pi_i$ , получим тождество

$$\int_{\Pi_i} \left[ \frac{\theta^2}{3} \hat{k} (\Delta_y \chi_i) (\Delta_i v_i) - f \cdot v \right] d\mu(y) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{R}_1^0.$$

На грани  $\Pi_i$   $f \cdot v = c_i v_i$ , где  $c_i = c \cdot e_i$ ,  $c = f(x)$ , и тогда сначала выводим уравнение (1.15), а потом и (1.16).

Усредненное уравнение в форме тождества (1.18) более удобно в некоторых вопросах. Например, полагая в этом тождестве  $\psi = u$ , получаем энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \hat{k} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_{\Pi_i} (\Delta_i \chi_i)^2 dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot u dx d\mu. \quad (1.19)$$

Для достаточно толстых структур энергетическое равенство, которое можно вывести из (1.12), имеет вид

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx = \int_{\Omega} f \cdot u^0 dx,$$

и оно естественно возникает из (1.19) при  $\chi \equiv 0$ .

Сформулируем основной результат по усреднению задачи (1.2) в критическом случае.

**Теорема 1.5.** Пусть  $u_{\varepsilon,h}$  — решение задачи (1.2), причем тензор  $A$  изотропен. Тогда имеет место соотношение (1.9), в котором  $u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y)$  — решение усредненной задачи (1.19). Имеет место также сходимость упругих энергий

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} A e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) dx = \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \hat{k} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_{\Pi_i} (\Delta_i \chi_i)^2 dx d\mu, \quad (1.20)$$

где  $\chi_i = \chi|_{\Pi_i} \cdot e_i$ ,  $\Delta_i = \partial_j^2 + \partial_m^2$  и  $i, j, m$  — перестановка чисел 1, 2, 3.

**1.5.** Выше предполагалось, что исходный тензор  $A$  изотропен. В случае тензора  $A$  общего вида, усредненное уравнение немного усложняется и требует предварительного введения тензора релаксации  $\hat{A}$ . Даже если  $A$  — постоянный тензор, то его релаксация  $\hat{A} = \hat{A}(y)$  оказывается зависящей от точки  $y \in F$ ; при этом сужение на каждую грань  $\hat{A}|_{\Pi_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , есть постоянный тензор.

Для определения тензора  $\hat{A}$  введем пространство  $\mathcal{E}_i$  — множество симметрических  $(3 \times 3)$ -матриц с ненулевыми элементами лишь в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце, а также ортогональное дополнение к нему  $\mathcal{E}_i^\perp$  — множество симметрических  $(3 \times 3)$ -матриц, у которых, наоборот,  $i$ -й столбец и  $i$ -я строка — нулевые. Здесь  $i = 1, 2, 3$ . Например,

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{13} \\ 0 & 0 & \xi_{23} \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{33} \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{E}_3^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 \\ \xi_{12} & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда, по определению, для  $i = 1, 2, 3$

$$\hat{A}|_{\Pi_i} = \hat{A}_i, \quad \hat{A}_i \xi \cdot \xi = \min_{\eta \in \mathcal{E}_i} A(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta). \quad (1.21)$$

Нетрудно установить, что для каждого  $i$  оператор  $\hat{A}_i$  как оператор, действующий на симметрических матрицах, имеет  $\text{Ker } \hat{A}_i = \mathcal{E}_i$ ,  $\text{Im } \hat{A}_i = \mathcal{E}_i^\perp$ , а сужение  $\hat{A}_i|_{\mathcal{E}_i^\perp}$  — невырожденный оператор, действующий на симметрических матрицах  $\tilde{\xi}$  второго порядка, которые получаются из матриц  $\xi \in \mathcal{E}_i^\perp$  вычеркиванием нулевых  $i$ -го столбца и  $i$ -й строки. В этом смысле в изотропном случае получаем тензор  $\hat{A}$ , одинаковый для всех граней  $\Pi_i$ , при этом  $\hat{A}$  снова изотропен, но с новым набором коэффициентов Ламе:

$$\hat{A}\tilde{\xi} = k\tilde{\xi} + \frac{kk_1}{k+k_1} (\text{Tr } \tilde{\xi})E, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если  $A$  — тензор общего вида, то его релаксация  $\hat{A}$  на каждой грани  $\Pi_i$  находится через элементы симметрической  $(6 \times 6)$ -матрицы (обозначаемой также символом  $A$ )

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{26} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{16} & A_{26} & \dots & A_{16} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

задающей действие тензора  $A$  (как оператора) в пространстве симметрических матриц третьего порядка

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{33} \end{pmatrix},$$

которые удобно записывать в виде вектор-столбцов из  $\mathbb{R}^6$ :  $\xi = (\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}, \xi_{33})^T$ . Дадим правило для вычисления  $\hat{A}(y)$ . Например, для  $y \in \Pi_3$  тензор  $\hat{A}(y) = \hat{A}_3$  как оператор, действующий в пространстве симметрических  $(2 \times 2)$ -матриц, сам задается симметрической  $(3 \times 3)$ -матрицей:

$$\hat{A}_3 = A_{I,I} - A_{I,II} A_{II,II}^{-1} A_{II,I}, \quad (1.23)$$

если

$$A = \begin{pmatrix} A_{I,I} & A_{I,II} \\ A_{II,I} & A_{II,II} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

и блоки, на которые разбита матрица  $A$ , — это  $(3 \times 3)$ -матрицы. Аналогично находится  $\hat{A}(y)$  для  $y \in \Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Теперь мы в состоянии сформулировать аналог вариационной задачи (1.14) для тензора  $A$  общего вида. Это задача на отыскание минимума

$$\min_{g \in H_0^2(\Pi_i)} \frac{\theta^2}{3} \int_{\Pi_i} (\hat{A}_i D_i(g) \cdot D_i(g) - 2g c_i) d\mu, \quad (1.25)$$

где  $c_i = c \cdot e_i$ ,  $c = f(x)$ ,

$$D_i(g) = \begin{pmatrix} \partial_i^2 g & \partial_j \partial_m g \\ \partial_j \partial_m g & \partial_m^2 g \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

$i, j, m$  — перестановка из чисел 1, 2, 3.

Тогда аналог интегрального тождества (1.18), задающего усредненную задачу для предельной функции  $u = u^0(x) + \chi(x, y) \in V$ , имеет вид

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A} D(\chi) \cdot D(\psi) d\mu dx = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi d\mu dx \quad (1.27)$$

для любого  $\varphi = \varphi^0(x) + \psi(x, y) \in V$ , где

$$D(\psi)|_{\Pi_i} = D_i(\psi_i), \quad \psi_i = \psi|_{\Pi_i}. \quad (1.28)$$

Иногда будем представлять  $D_i(\psi_i)$  симметрической матрицей третьего порядка с нулевыми элементами в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце, тогда как другие элементы определяются через частные производные функции  $\psi_i$ , т.е.

$$D_i(\psi_i) = \{d_{jm}\}_{j,m=1}^3, \quad d_{jm} = \partial_j \partial_m \psi_i, \quad \text{если } j, m \in \{1, 2, 3\}, \quad i, d_{jm} = 0 \text{ в противном случае.} \quad (1.29)$$

Например,

$$D_3(\psi_3) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 \psi_3 & \partial_1 \partial_2 \psi_3 & 0 \\ \partial_1 \partial_2 \psi_3 & \partial_2^2 \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (1.27) следует энергетическое тождество для случая тензора  $A$  общего вида:

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A} D(\chi) \cdot D(\chi) d\mu dx = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot u d\mu dx. \quad (1.30)$$

**1.6.** В задаче (1.2) можно рассмотреть более общую правую часть, а именно,  $f = f^{\varepsilon, h}$ , и имеет место равномерная оценка

$$\frac{1}{|\Omega \cap F_{\varepsilon}^h|} \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} |f^{\varepsilon, h}|^2 dx < C.$$

В этом случае также справедлив принцип усреднения, имеющий более сложную форму, при котором задача для поперечной составляющей  $\chi(x, y)$  не распадается, вообще говоря, на отдельные задачи на каждой грани структуры  $F \cap \square$ . Формулировка общего принципа усреднения дается в терминах двухмасштабной сходимости в «переменном»  $L^2$ -пространстве с мерой, зависящей от двух параметров, и, кроме того, требует введения более широкого, чем  $\mathcal{R}_1^0$ , подпространства  $\mathcal{R}'_1$  в пространстве жестких поперечных перемещений  $\mathcal{R}_1$ . Двухмасштабная сходимость вводится в § 2, а пространство  $\mathcal{R}'_1$  — в § 3. В § 4 дается техника продолжения, после чего в § 5 доказывается принцип усреднения для задачи (1.2) наиболее общего вида — теорема 5.2, из которой теорема 1.5 вытекает как следствие.

Несколько слов о теореме 1.2, в которой формулируется принцип усреднения для достаточно толстых ящичных структур. Ее можно доказать тем же методом, что используется в [3, § 14] при доказательстве аналогичной теоремы для достаточно толстых сеток на плоскости с уравнением в резольвентной форме, если учесть неравенство Корна (1.7).

В § 6 приводятся вспомогательные утверждения, в частности, о тензоре релаксации, а также об аппроксимативных свойствах меры  $\mu^h$ .

В § 7 речь идет о стержневых каркасах. Мы подробно останавливаемся только на моментах, отличающих стержни от пластин.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1.** В настоящей работе применяется метод В. В. Жикова двухмасштабной сходимости с переменной периодической мерой. Сейчас мы отметим только начальные моменты этого подхода.

Пусть  $\mu^h$  — периодическая нормированная мера в  $\mathbb{R}^3$ , сосредоточенная на структуре  $F^h$  и пропорциональная там трехмерной мере Лебега. Легко видеть, что

$$d\mu^h \rightharpoonup d\mu \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где  $\mu$  — мера на сингулярной ящичной структуре. Подробнее это означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} \varphi d\mu^h = \int_{\square} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square).$$

Определим  $\varepsilon$ -периодическую меру  $\mu_{\varepsilon}^h$  равенством

$$\mu_{\varepsilon}^h(B) = \varepsilon^3 \mu^h(\varepsilon^{-1}B) \quad \text{для любого борелева множества } B \subset \mathbb{R}^3.$$

Очевидно, что мера  $\mu_{\varepsilon}^h$  сосредоточена на сжатой структуре  $F_{\varepsilon}^h$ . Свяжем параметры  $h$  и  $\varepsilon$ , полагая, что  $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ .

В терминах меры  $\mu_{\varepsilon}^h$  задача (1.2) записывается как

$$u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}, \quad \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^3. \quad (2.1)$$

Здесь правая часть  $f^{\varepsilon,h}$  взята зависящей от  $\varepsilon$ ,  $h$ , в то время как в (1.2) она была фиксированной. Предполагается, что последовательность  $f^{\varepsilon,h}$  ограничена в  $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^3$ , т.е.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h < \infty.$$

В интегральном тождестве (2.1) можно взять пробную функцию  $\varphi = u^{\varepsilon,h}$  и получить энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h, \quad (2.2)$$

из которого в силу неравенства Корна (1.7) следует, что для структур достаточно толстых и критической толщины  $u^{\varepsilon,h}$

$$e(u^{\varepsilon,h}) \quad \text{ограничены в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h). \quad (2.3)$$

Видим, что необходимо изучать последовательности, ограниченные в «переменном» пространстве  $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ . Специальный математический аппарат позволяет это сделать: ограниченная последовательность оказывается компактной в смысле «слабой двухмасштабной сходимости».

Наиболее интересные проблемы обнаруживаются при совместном рассмотрении вектор-функции  $u^{\varepsilon,h}$  и ее тензора деформации  $e(u^{\varepsilon,h})$ , когда выполнено условие (2.3). В этом случае слабые двухмасштабные пределы последовательностей  $u^{\varepsilon,h}$  и  $e(u^{\varepsilon,h})$  связаны между собой и обладают важными для теории усреднения дополнительными свойствами. Указанные вопросы рассматривались в [3, § 16], но были отмечены только такие свойства, которые справедливы при любом  $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ .

В настоящей работе выясняется специфика критического случая для ящичных структур. Значительная часть излагаемого материала не связана прямо с уравнениями, а относится к доказательству особых свойств слабого двухмасштабного предела произвольной последовательности  $u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}$ , удовлетворяющей условию ограниченности (2.3).

**2.2.** Далее мы приводим известные или очевидные факты, связанные с двухмасштабной сходимостью.

Напомним сначала понятие слабой сходимости в  $L^2(\square, d\mu^h)$  и свойство среднего значения.

*Понятие слабой сходимости.* Если последовательность  $a^h$  ограничена в  $L^2(\square, d\mu^h)$ , то слабая сходимость  $a^h \rightharpoonup a$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$  означает, что

$$a \in L^2(\square, d\mu) \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} a^h \psi \, d\mu^h = \int_{\square} a \psi \, d\mu \quad \forall \psi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square).$$

Фиксируем некоторую функцию  $h(\varepsilon)$ ,  $h(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Свойство среднего значения.* Пусть  $\Omega$  — ограниченная измеримая по Жордану область и  $a^h \rightharpoonup a$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ . Тогда для любой  $\varphi \in C(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) a^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) a(y) \, d\mu \, dx. \quad (2.4)$$

**Определение 2.1.** Ограниченная в  $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$  последовательность  $v^{\varepsilon,h}(x)$  слабо двухмасштабно сходится к функции

$$v = v(x, y) \in L^2(\Omega \times \square, dx \times d\mu) = L^2(\Omega \times \square), \quad v^{\varepsilon,h}(x) \stackrel{2}{\rightharpoonup} v(x, y),$$

если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) \, d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} v(x, y) \varphi(x) b(y) \, dx \, d\mu \quad (2.5)$$

для любых  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ,  $b \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$ .

Отметим некоторые свойства:

- (i) ограниченная в  $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$  последовательность компактна в смысле слабой двухмасштабной сходимости;
- (ii) полунепрерывность снизу

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 \, d\mu_{\varepsilon}^h \geq \int_{\Omega} \int_{\square} |v|^2 \, dx \, d\mu. \quad (2.6)$$

**Предложение 2.2.** Если  $c^h \rightharpoonup c$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ , то  $c^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \stackrel{2}{\rightharpoonup} c(y)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим выражение

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega} c^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) \, d\mu_{\varepsilon}^h.$$

Так как  $c^h b \rightharpoonup c b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ , то по свойству среднего значения (2.4) получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\varepsilon) = \int_{\Omega} \int_{\square} c(y) b(y) \varphi(x) \, dx \, d\mu,$$

что и требовалось. □

В определении 2.1 используется достаточно узкий класс пробных функций  $\varphi(x)b(y)$  (к ним автоматически добавляются и линейные комбинации). Но и его полезно сузить.

**Предложение 2.3.** Сходимость  $v^{\varepsilon,h} \stackrel{2}{\rightharpoonup} v$  имеет место, если соотношение (2.5) выполнено для любых  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  и любых  $b \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$ , финитных в окрестности ребер структуры  $F$ .

Несложное доказательство опускается.

Пусть  $F_0^h$  — множество тех точек из  $F^h$ , которые отстоят на расстоянии меньшем, чем  $h$ , одновременно от двух или трех плоскостей структуры  $F$ . При гомотетическом сжатии  $F_0^h$  переходит в  $F_{0,\varepsilon}^h$ . Из предложения 2.3 получаем: если две ограниченные в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$  последовательности отличаются только на множестве  $F_{0,\varepsilon}^h$ , то они имеют одинаковые слабые двухмасштабные пределы.

Часто требуется расширить класс пробных функций, участвующих в определении 2.1, с сохранением самой сходимости (2.5) так, чтобы функцию  $b$  можно было брать негладкой и зависящей от  $h$ . Для этой цели привлечем понятие сильной сходимости в  $L^2(\square, d\mu^h)$ . Напомним, что ограниченная в  $L^2(\square, d\mu^h)$  последовательность  $b^h$  сильно сходится к функции  $b \in L^2(\square, d\mu)$ ,  $b^h \rightarrow b$ , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} b^h g^h d\mu^h = \int_{\square} b g d\mu \quad \text{как только} \quad g^h \rightarrow g \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h).$$

Сильная сходимость складывается из слабой сходимости и соотношения

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} |b^h|^2 d\mu^h = \int_{\square} |b|^2 d\mu.$$

**Лемма 2.4.** Пусть  $v^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} v$  и  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ . Тогда для любого  $\varphi \in C(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon,h}(x) b^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} v(x,y) b(y) \varphi(x) dx d\mu.$$

Мы подошли к понятию сильной двухмасштабной сходимости  $u^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} u(x,y)$ . По определению, это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h}(x) z^{\varepsilon,h}(x) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} u(x,y) z(x,y) dx d\mu \quad \text{как только} \quad z^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} z. \quad (2.7)$$

Известно, что сильная двухмасштабная сходимость складывается из слабой и соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} |u|^2 dx d\mu. \quad (2.8)$$

**Предложение 2.5.** Если  $c^h \rightarrow c$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ , то  $c^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} c(y)$ .

**Пример** (естественное продолжение). Дана функция  $g \in L^2(\square, d\mu)$ . Продолжим эту функцию как постоянную в поперечном направлении на каждую  $h$ -плиту, а на множестве  $F_0^h$  определим ее как сумму таких продолжений. Получается функция  $g_h \in L^2(\square, d\mu^h)$ , и нетрудно убедиться в том, что  $g_h \rightarrow g$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ . Таким образом, в силу предложения 2.5, для естественного продолжения имеем сходимость

$$g_h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} g(y).$$

Понятие сильной двухмасштабной сходимости выглядит довольно громоздким, но при определенных условиях его можно упростить.

**Лемма 2.6.** Пусть  $v^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} v(x,y)$ , и предельная функция  $v$  имеет структуру

$$v(x,y) = \sum \varphi_i(x) b_i(y), \quad \varphi_i \in C(\overline{\Omega}), \quad b_i \in L^2(\square, d\mu). \quad (2.9)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| v^{\varepsilon,h}(x) - v_h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 d\mu_\varepsilon^h = 0,$$

где  $v_h$  — естественное продолжение функции  $v(x, \cdot)$ .

3. О ДВУХМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЯЩИЧНОЙ СТРУКТУРЕ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

**3.1.** Здесь мы изучаем произвольную последовательность вектор-функций  $u^{\varepsilon, h} \in W_{\varepsilon, h}$ , удовлетворяющую условию ограниченности (2.3). Не ограничивая общности, считаем ее слабо двухмасштабно сходящейся, т.е.  $u^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup u(x, y)$ . Общая теория, справедливая в случае произвольного  $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ , дает некоторые сведения о структуре предельной функции, а именно

$$u^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y), \quad (3.1)$$

где  $u^0 \in H_0^1(\Omega)^3$ ,  $\chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1)$  (см. [3]).

Уточним указанную структуру предельной функции  $u(x, y)$  в критическом случае, когда  $h(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow \theta > 0$ .

При рассмотрении отдельных граней из структуры  $F$  в окрестности заданного ребра договоримся специальным образом выбирать на них тройку ортов. Пусть грань  $\pi$  имеет ребро  $\gamma$ , параллельное оси  $Oy_i$ . Тогда в окрестности  $\gamma$  будем выбирать на грани  $\pi$  тройку ортов  $(\tau, n, \nu)$  такую, что  $\tau = e_i$ ,  $n$  — нормаль к  $\gamma$  в плоскости  $\pi$  (которая может иметь два направления),  $\nu$  — нормаль к грани  $\pi$ , причем  $(\tau, n, \nu)$  — правая тройка ортов. Очевидно, что производная  $\frac{d}{dn}(g|_{\pi} \cdot \nu)|_{\gamma}$  не зависит от выбора вектора  $n$ , по которому однозначно определяется вся тройка ортов  $(\tau, n, \nu)$ .

**Определение 3.1.** Вектор  $v \in \mathcal{R}_1$  есть элемент подпространства  $\mathcal{R}'_1$ , если выполнены условия:

- а)  $v \cdot \nu \in H^2(\pi)$  на каждой грани  $\pi \subset F$ ;
- б) пусть  $\gamma$  — произвольное ребро в структуре  $F$  и по нему сходятся четыре грани  $\pi_s$ ,  $s = 1, \dots, 4$ , с каждой из которых связана правая тройка ортов  $(\tau, n_s, \nu_s)$ ; тогда

$$\frac{\partial v_1}{\partial n_1} \Big|_{\gamma} = \dots = \frac{\partial v_4}{\partial n_4} \Big|_{\gamma}, \quad \text{где } v_s = v|_{\pi_s} \cdot \nu_s, \quad s = 1, \dots, 4; \quad (3.2)$$

- в)  $v|_{\gamma} = 0$  на каждом ребре  $\gamma \in F$ .

Заметим, что, если функция  $v$  удовлетворяет условию (а), то имеют смысл сужения  $v|_{\gamma}$ ,  $\frac{\partial v_s}{\partial n_s} \Big|_{\gamma}$ ,

о которых идет речь в пунктах (б) и (в).

Введенное в § 1 подпространство  $\mathcal{R}'_1$  (см. определение 1.3 и последующее замечание) вкладывается в  $\mathcal{R}'_1$ , при этом условие (3.2) для функции из  $\mathcal{R}'_1$  становится более определенным, а именно:

$$\frac{\partial v_s}{\partial n_s} \Big|_{\gamma} = 0, \quad s = 1, \dots, 4.$$

В определении 3.1 некоторых пояснений требует условие (б). Среди граней, сходящихся по ребру  $\gamma$ , есть грани  $\pi_p$ ,  $\pi_q$ , лежащие в одной плоскости  $\pi$  по разные стороны от  $\gamma$ . Для этих граней выбранные на них орты связаны между собой:  $n_p = \pm n_q$ ,  $\nu_p = \pm \nu_q$ , где верхние и нижние индексы соответствуют друг другу.

Условие (3.2) означает совпадение предельных значений производной  $\frac{d(v \cdot \nu)}{dn}$  при подходе к  $\gamma$  с двух сторон на плоскости  $\pi$ , если тройка ортов  $(\tau, n, \nu)$  обслуживает обе грани  $\pi_p$ ,  $\pi_q$ .

Пусть теперь  $\pi_p$ ,  $\pi_q$  — грани, которые сходятся под прямым углом. Если  $\tau_p = e_i$ ,  $n_p = e_j$ ,  $\nu_p = (-1)^{\sigma} e_m$ ,  $\sigma$  — показатель, определяющий ориентацию вектора, при которой  $(e_i, e_j, (-1)^{\sigma} e_m)$  — правая тройка ортов, обслуживающая грань  $\pi_p$ , то  $(e_i, e_m, (-1)^{\sigma+1} e_j)$  — правая тройка ортов, обслуживающая грань  $\pi_q$  (см. рис. 3). Поперечное перемещение  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{R}_1$  равно вектору  $v_m(y_i, y_j)e_m$  на грани  $\pi_p$  и вектору  $v_j(y_i, y_m)e_j$  на грани  $\pi_q$ , и условие (3.2) в данном случае означает, что

$$\frac{\partial v_m}{\partial y_j}(y_i, 0) + \frac{\partial v_j}{\partial y_m}(y_i, 0) = 0.$$

**Теорема 3.2.** В критическом случае для поперечной компоненты  $\chi$  из (3.1) выполняется соотношение

$$\chi(x, y) \in L^2(\Omega, \mathcal{R}'_1). \quad (3.3)$$

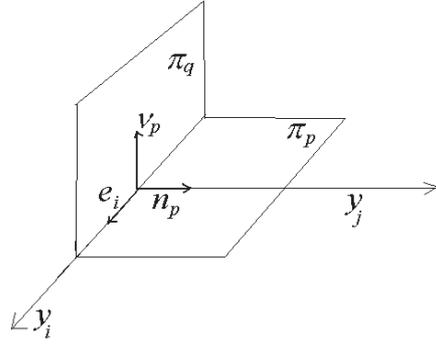


Рис. 3. Взаимно ортогональные грани с общим ребром.

Еще одно свойство из общей теории двухмасштабной сходимости будет уточнено в критическом случае, а именно, свойство полунепрерывности снизу выпуклых функционалов от упругих градиентов.

**Теорема 3.3.** Пусть в дополнение к (3.1) имеет место слабая двухмасштабная сходимост упругих градиентов

$$e(u^{\varepsilon, h}) \rightharpoonup p(x, y). \quad (3.4)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h \geq \int_{\Omega} \int_{\square} \left[ A p \cdot p + \frac{\theta^2}{3} \hat{A} D(\chi) \cdot D(\chi) \right] d\mu dx, \quad (3.5)$$

где  $A$  — тензор упругости,  $\hat{A}$  — его релаксация, определенная в (1.21), а матрица  $D(\chi)$  задана соотношениями (1.28), (1.29).

Отметим, что общая теория двухмасштабной сходимости дает в предположениях теоремы 3.3 неравенство (3.5) без второго слагаемого в правой части.

Для изотропного тензора  $A$  (см. (1.1)) релаксация  $\hat{A}$  есть тоже изотропный тензор, но с новым набором коэффициентов Ламе, так что (см. § 6.1)

$$\hat{A} \eta \cdot \eta = k \eta \cdot \eta + \frac{k k_1}{k + k_1} (\eta_{11} + \eta_{22})^2, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому неравенство (3.5) в изотропном случае приводится к виду

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_{\square} A p \cdot p d\mu dx + \frac{\theta^2}{3} \sum_{i=1}^3 \int_{\Pi_i} \left[ k D_i(\chi_i) \cdot D_i(\chi_i) + \frac{k k_1}{k + k_1} (\text{Tr } D_i(\chi_i))^2 \right] d\mu dx, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где матрица  $D_i(\chi_i)$  определена в (1.26). Выражение, стоящее в квадратной скобке (3.6), можно еще более конкретизировать. Например, для  $i = 3$  оно равно

$$k \sum_{j, m=1}^2 |\partial_j \partial_m \chi_3|^2 + \frac{k k_1}{k + k_1} [(\partial_1^2 + \partial_2^2) \chi_3]^2, \quad \chi_3 = \chi \cdot e_3,$$

а в общем случае

$$k \sum_{j, m} |\partial_j \partial_m \chi_i|^2 + \frac{k k_1}{k + k_1} [(\partial_j^2 + \partial_m^2) \chi_i]^2, \quad \chi_i = \chi \cdot e_i,$$

где суммирование происходит по всем  $m, j \in \{1, 2, 3\} \setminus i$ . Отсюда следует, что интегрируя по частям с учетом условий сопряжения на ребрах структуры  $F$  для функции  $\chi \in \mathcal{R}'_1$ , неравенство (3.6) можно привести к виду

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h \geq \int_{\Omega} \int_{\square} A p \cdot p d\mu dx + \frac{\theta^2}{3} \hat{k} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_{\Pi_i} (\Delta_i \chi_i)^2 d\mu dx,$$

$$\hat{k} = k + \frac{k k_1}{k + k_1} = \frac{k(k + 2k_1)}{k + k_1}, \quad \Delta_i \chi_i = (\partial_j^2 + \partial_m^2) \chi_i,$$

$i, j, m$  — перестановка чисел 1, 2, 3.

**3.2.** В этом пункте доказывается одна техническая лемма, из которой далее выводится повышенная гладкость по переменной  $y$  для поперечной составляющей  $\chi(x, y)$  из (3.1).

Пусть  $I$  — квадрат со стороной не больше 1, выделяемый из одной из плоскостей, образующих структуру  $F$ , причем безразлично, пересекает он ребра структуры или нет. Для определенности считаем, что квадрат  $I$  лежит на горизонтальной плоскости  $Oy_1y_2$ , причем целиком умещается в  $[0, 1]^2$  — ячейке периодичности на плоскости.

Введем 1-периодическую функцию  $\beta_0(t)$ , определенную на  $\mathbb{R}_t^1$ , такую, что на периоде  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\beta_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{h}, & \text{если } |t| \leq h, \\ 0, & \text{если } |t| > h, \end{cases}$$

где  $0 < h < \frac{1}{8}$ . Пусть функции  $a_1(y'), a_2(y') \in C_0^\infty(I)$ ,  $y' = (y_1, y_2)$ . Продолжим их сначала по периодичности на всю плоскость  $Oy_1y_2$  и будем считать их заданными во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$  с ячейкой периодичности — единичным кубом, рассматривая  $y_3$  как фиктивную переменную. Получаем вектор

$$a(y) = a(y') = (a_1(y'), a_2(y'), 0),$$

заданный во всем пространстве и перпендикулярный всюду на  $F$  орту  $e_3$ .

Изучим величину

$$J(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \left( u^{\varepsilon, h} \cdot a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \beta_0 \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

**Лемма 3.4.** *Имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u_3(x, y) \operatorname{div}_y a(y) \varphi(x) d\mu(y) dx. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Разобьем пространство  $\mathbb{R}^3$  на полуоткрытые кубы  $[0, \varepsilon]^3 + \varepsilon n$ ,  $n = (n_1, n_2, n_3)$  — целочисленный вектор, и обозначим отдельный куб через  $\varepsilon \square_j$ . Поскольку  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , то для изучения величины  $J(\varepsilon)$  достаточно ограничиться кубами  $\varepsilon \square_j$ , целиком содержащимися в области  $\Omega$ , их число имеет порядок  $\varepsilon^{-3}$ . Интегрирование в (3.7) ведется по пластинам  $\varepsilon I_j^h + \varepsilon n$ , где  $I^h = I \times [-h, h]$ ,  $\varepsilon I^h$  — гомотетическое сжатие.

С функцией  $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  свяжем функцию  $\varphi_{\varepsilon}(x)$ , определенную только на указанных пластинах  $\varepsilon I_j^h$ , такую что  $\varphi_{\varepsilon}(x)$  постоянна в поперечном направлении на каждой пластине и совпадает с  $\varphi(x)$  на срединной плоскости пластин. Очевидно, что

$$|\varphi(x) - \varphi_{\varepsilon}(x)| \leq C\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что, вычисляя предел (3.7), можем заменить в интеграле  $J(\varepsilon)$  функцию  $\varphi(x)$  на функцию  $\varphi_{\varepsilon}(x)$ , поскольку возникающая при этом погрешность имеет порядок  $O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Действительно, пусть

$$r(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (u^{\varepsilon, h} \cdot a) \beta_0 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) [\varphi(x) - \varphi_{\varepsilon}(x)] d\mu_{\varepsilon}^h,$$

тогда  $|r(\varepsilon)| \leq ch \int_{\Omega} |u^{\varepsilon, h}| d\mu_{\varepsilon}^h = O(\varepsilon)$ , так как  $|\beta_0| \leq 1$ .

Заметим, что для вектор-функции  $v(x) = (v_1, v_2, v_3)$ , определенной на пластине  $I^h$ , справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h y_3 v_i dy_3 &= \frac{h^2}{2} \int_{-h}^h \frac{\partial v_i}{\partial y_3} dy_3 - \frac{1}{2} \int_{-h}^h y_3^2 \frac{\partial v_i}{\partial y_3} dy_3 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h}^h (y_3^2 - h^2) \frac{\partial v_3}{\partial y_i} dy_3 + \int_{-h}^h e_{i3}(v) (h^2 - y_3^2) dy_3, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где использовано сначала интегрирование по частям, а далее формула  $\frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial y_3} = e_{i3}(v) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_i}$ . Отсюда, если  $g(y) = g(y')$ ,  $y' = (y_1, y_2)$  из класса  $C_0^{\infty}(I)$ , то имеем представление

$$\int_{I^h} y_3 g(y') v_i(y) dy = \frac{1}{2} \int_{I^h} (y_3^2 - h^2) g(y') \frac{\partial v_3}{\partial y_i} dy + \int_{I^h} e_{i3}(v) g(y') (h^2 - y_3^2) dy. \quad (3.8)$$

Преобразуем первое слагаемое справа. Интегрируя по частям по переменной  $y'$  и полагая

$$\bar{v}_3(y') = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_3(y) dy_3,$$

получим

$$\frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_3^2) v_3(y) \frac{\partial g}{\partial y_i} dy = \frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_3^2) \bar{v}_3(y') \frac{\partial g}{\partial y_i} dy + \frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_3^2) (v_3 - \bar{v}_3) \frac{\partial g}{\partial y_i} dy,$$

где

$$\frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_3^2) \bar{v}_3(y') \frac{\partial g}{\partial y_i} dy = \frac{2}{3} h^3 \int_I \bar{v}_3 \frac{\partial g}{\partial y_i} dy' = \frac{1}{3} h^2 \int_{I^h} v_3 \frac{\partial g}{\partial y_i} dy.$$

Из (3.8) и следующих за ним равенств вытекает представление

$$\begin{aligned} \int_{I^h} y_3 v_i(y) g(y') dy - \frac{1}{3} h^2 \int_{I^h} v_3(y) \frac{\partial g}{\partial y_i} dy &= \\ &= \frac{h^2}{2} \int_{I^h} g(y) \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_i} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y_3}{h} \right)^2 \right] dy + \frac{h^2}{2} \int_{I^h} (v_3 - \bar{v}_3) \frac{\partial g}{\partial y_i} \left[ 1 - \left( \frac{y_3}{h} \right)^2 \right] dy. \end{aligned}$$

Для вектора  $v = v(x)$ , заданного на пластине  $\varepsilon I^h$ , соответствующее равенство получается гомотетией и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon I^h} \beta_0 \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) v_i(x) g \left( \frac{x'}{\varepsilon} \right) dx - \frac{1}{3} \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} v_3(x) \frac{\partial g}{\partial y_i} \left( \frac{x'}{\varepsilon} \right) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon I^h} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right) g \left( \frac{x'}{\varepsilon} \right) \left[ 1 - \left( \beta_0 \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right] dx + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \int_{\varepsilon I^h} (v_3(x) - \bar{v}_3(x_1)) \frac{\partial g}{\partial y_i} \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \left[1 - \left(\beta_0\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)\right)^2\right] dx = T_1 + T_2.$$

Оценим стоящие справа слагаемые. Очевидно, что

$$|T_1| \leq \frac{lh^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon I^h} |e(v)| dx,$$

где  $l = \max(|g| + |\nabla g|)$ . Для второго слагаемого с помощью неравенства Пуанкаре

$$\int_{\varepsilon I^h} |v_3 - \bar{v}_3| dx \leq c_0 \varepsilon h \int_{\varepsilon I^h} \left| \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right| dx \leq c_0 h \varepsilon \int_{\varepsilon I^h} |e(v)| dx$$

получим аналогичную оценку

$$|T_2| \leq \frac{c_0 l h^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon I^h} |e(v)| dx.$$

Перепишем эти результаты в терминах меры  $\mu_\varepsilon^h$ . Пусть  $\rho$  — характеристическая функция пластины  $I^h$ , периодически продолженная на  $\mathbb{R}^3$ . Тогда выполнена оценка

$$\left| \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon \square} \beta_0\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) v_i(x) g\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) d\mu_\varepsilon^h - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \int_{\varepsilon \square} v_3(x) \frac{\partial g}{\partial y_i} \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\mu_\varepsilon^h \right| \leq \frac{c_1 l h^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon \square} |e(v)| d\mu_\varepsilon^h.$$

Теперь вернемся к величине  $J(\varepsilon)$ .

Используем последнюю оценку в каждом кубе  $\varepsilon \square_j$ , полагая в ней

$$v_i(x) = u_i^{\varepsilon, h}(x), \quad g(y') = a_i(y') \varphi_\varepsilon(\varepsilon y'), \quad i = 1, 2.$$

Поскольку в данном случае

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial a_i}{\partial y_i} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi_\varepsilon(x') + O(\varepsilon) = \frac{\partial a_i}{\partial y_i} \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \varphi(x) + O(\varepsilon),$$

то

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \int_{\Omega} u_3^{\varepsilon, h}(x) \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_1} + \frac{\partial a_2}{\partial y_2}\right) \varphi(x) \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\mu_\varepsilon^h + r(\varepsilon),$$

$$|r(\varepsilon)| \leq ch^2 \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} (|u^{\varepsilon, h}| + |e(u^{\varepsilon, h})|) d\mu_\varepsilon^h = O(\varepsilon).$$

Отсюда следует равенство (3.7), и лемма доказана.  $\square$

Сформулируем аналог леммы 3.4 для квадрата  $I$ , лежащего на произвольной координатной плоскости (необязательно горизонтальной), например, заданной уравнением  $y_m = 0$ . Пусть  $I^h$  — пластина толщины  $2h$ , в срединной плоскости которой оказывается квадрат  $I$ . Координаты  $y_i, y_j$  ( $i < j$ ) — продольные для пластины  $I^h$  ( $i, j, m$  — перестановка чисел 1, 2, 3),  $\nu = (\pm e_m)$  — единичная нормаль на  $I$  такая, что  $(e_i, e_j, \nu)$  — правая тройка ортов.

На ячейке  $\square$  определим функцию

$$\beta(y) = \begin{cases} \frac{1}{h} \nu \cdot y & \text{на } I^h, \\ 0 & \text{на } \square \setminus I^h, \end{cases} \quad (3.9)$$

и периодически продолжим ее на  $\mathbb{R}^3$ .

Если  $I$  — горизонтально расположенный квадрат, то  $\beta(y) = \beta_0(y_3)$ .

Пусть  $a(y)$  — периодическая гладкая вектор-функция, перпендикулярная направлению  $\nu$ , которая зависит только от продольных координат на пластине  $I^h$ , и равная нулю в окрестности ее торцов. Тогда выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \left( u^{\varepsilon, h}(x) \cdot a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \\ & = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u(x, y) \cdot \nu \operatorname{div}_y a \varphi(x) dx d\mu(y), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Например, если квадрат  $I$  лежит на координатной плоскости  $Oy_1y_3$ , то продольные координаты  $y_1, y_3$ ,  $\nu = -e_2$ . Пусть вектор  $a$  имеет нулевую координату вдоль оси  $Oy_2$ . Так как  $\beta(y) = -\beta_0(y_2)$ , то формула (3.10) в этом случае означает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h} \cdot a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \beta_0\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u_2(x, y) \operatorname{div}_{1,3} a(y_1, y_3) \varphi(x) d\mu(y) dx. \quad (3.11)$$

**3.3.** Теперь мы в состоянии доказать свойство повышенной гладкости по переменной  $y$  для предельной функции  $u(x, y)$  из (3.1).

**Лемма 3.5.** *Для произвольного квадрата  $I$ , расположенного на какой-то плоскости ящичной структуры  $F$  с нормалью  $\nu$ , имеет место свойство  $u \cdot \nu|_I \in H^2(I)$ .*

**Доказательство.**  $1^{\circ}$ . Начнем с горизонтально расположенного квадрата  $I$ . Возьмем произвольную функцию  $\alpha(y') \in C_0^{\infty}(I)$  и периодически продолжим ее на все пространство  $\mathbb{R}^3$  так, что  $y_3$  — фиктивная переменная,  $y' = (y_1, y_2)$ . Изучим выражение

$$T(\varepsilon) = -\frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} e_{ij}(u^{\varepsilon, h})(\alpha(y')\beta_0(y_3)) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h,$$

где каждый индекс  $i, j$  принимает значение 1 или 2.

После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \left[ \left( u_i^{\varepsilon, h} \frac{\partial}{\partial y_j} \alpha(y') + u_j^{\varepsilon, h} \frac{\partial}{\partial y_i} \alpha(y') \right) \beta_0(y_3) \right] \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left[ \left( u_i^{\varepsilon, h} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + u_j^{\varepsilon, h} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \alpha(y') \beta_0(y_3) \right] \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} d\mu_{\varepsilon}^h. \end{aligned}$$

В этой сумме из четырех слагаемых первые два имеют тип  $J(\varepsilon)$ , а последние два — тип  $\varepsilon J(\varepsilon)$  (см. (3.7)). По лемме 3.4

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) &= \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} u_3(x, y) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \alpha(y') + \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \alpha(y') \right) \varphi(x) d\mu(y) dx = \\ &= \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} u_3(x, y) \frac{\partial^2 \alpha(y')}{\partial y_i \partial y_j} \varphi(x) d\mu(y) dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Изучим величину  $T(\varepsilon)$  иным способом. Так как  $|\beta_0| \leq 1$ , то последовательность

$$w_{\varepsilon}(x) = -\frac{h}{\varepsilon} e_{ij}(u^{\varepsilon, h}) \beta_0\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)$$

ограничена в  $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ . Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, считаем ее слабо двухмасштабно сходящейся

$$w_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} w_{ij}(x, y) \in L^2(\Omega \times \square).$$

В частности,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_{\varepsilon}(x) \alpha\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} w_{ij}(x, y) \alpha(y') \varphi(x) d\mu dx.$$

Сравнивая пределы для  $T(\varepsilon)$ , полученные двумя способами, получаем, в силу произвольности  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , для п.в.  $x \in \Omega$  равенство

$$\int_I w_{ij}(x, y) \alpha(y') dy' = \frac{\theta^2}{3} \int_I (u_3^0(x) + \chi_3(x, y)) \frac{\partial^2 \alpha(y')}{\partial y_i \partial y_j} dy',$$

из которого следует, что

$$w_{ij}(x, \cdot)|_I = \frac{\theta^2}{3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_I = \frac{\theta^2}{3} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_I,$$

где  $w_{ij}(x, \cdot) \in L^2(I)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Значит,  $u_3(x, \cdot) \in H^2(I)$ .

2°. Пусть квадрат  $I$  — общего положения, тогда для изучения гладкости  $u(x, y)|_I$  рассмотрим выражение

$$T(\varepsilon) = -\frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} e_{sp}(u^{\varepsilon, h}) \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h,$$

где  $s, p \in \{i, j\}$ ,  $i, j$ ,  $\beta(y)$  — те же, что в (3.9), и  $e_{sp}(u^{\varepsilon, h})$  — какая-то компонента тензора  $e(u^{\varepsilon, h})$  по продольным координатам,  $\alpha(y) = \alpha(y_i, y_j)$  — скалярная функция, у которой те же свойства, что у компонент вектор-функции  $a(y)$  из (3.10).

Интегрируя по частям в  $T(\varepsilon)$  и используя затем соотношение (3.10), приходим к аналогу формулы (3.12):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} (u \cdot \nu) \frac{\partial^2 \alpha(y_i y_j)}{\partial y_s \partial y_p} \varphi(x) d\mu dx.$$

Отсюда так же, как в пункте 1°, выводим требуемую гладкость функции  $u \cdot \nu$ , и лемма доказана.  $\square$

На самом деле по ходу доказательства леммы была установлена важная для дальнейшего сходимости. Выделим этот результат в отдельную лемму. Но предварительно введем необходимые для этого понятия и обозначения.

В  $L^2$ -пространстве периодических симметрических  $3 \times 3$ -матриц с мерой  $\mu$ , т.е. в  $L^2(\square, d\mu)^6$  выделяется подпространство  $\mathcal{E}(0)$ , называемое множеством градиентов нуля. По определению, матрица  $z \in \mathcal{E}(0)$ , если найдется последовательность вектор-функций  $v_n \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^3$  такая, что

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu)^3, \quad e(v_n) \rightarrow z \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu)^6.$$

Существует периодическое  $\mu$ -измеримое подпространство  $T(y) \subset L^2(\square, d\mu)^6$  такое, что

$$\mathcal{E}(0) = \{z \in L^2(\square, d\mu)^6 : z(y) \in T(y)^{\perp}, \quad \mu\text{-п.в.}\},$$

причем ортогональность здесь можно понимать поточечно (см. [3, § 5]). Элементы пространства  $T(y)$  называются *тангенциальными матрицами*, а само пространство  $T(y)$  — *тангенциальным*.

Известно, что для меры  $\mu$ , сосредоточенной на ящичной структуре  $F$ , тангенциальная матрица  $z$  на грани  $\Pi_i$ , лежащей в координатной плоскости  $y_i = 0$ , имеет нулевые  $i$ -й столбец и  $i$ -ю строку. Например,

$$z|_{\Pi_3} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 \\ z_{12} & z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и, в силу поточечной ортогональности множеств  $\mathcal{E}(0)$  и  $T(x)$ , матрица  $g \in \mathcal{E}(0)$  имеет на грани  $\Pi_3$  следующий вид:

$$g|_{\Pi_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$P(y) : L^2(\square, d\mu)^6 \rightarrow T(y) \quad (3.13)$$

— ортогональный проектор, переводящий симметрические матрицы в тангенциальные. Например, для грани  $\Pi_3$  действие этого оператора на тензор деформации есть тангенциальная матрица

$$P(y)e(u)|_{\Pi_3} = \begin{pmatrix} e_{11}(u) & e_{12}(u) & 0 \\ e_{12}(u) & e_{22}(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

называемая плоским тензором деформации.

Пусть  $F_0^h, F_{0,\varepsilon}^h$  — множества, введенные в § 2:  $F_0^h$  — объединение всех точек ящичной структуры  $F^h$ , принадлежащих одновременно двум или трем  $h$ -плитам,  $F_{0,\varepsilon}^h$  — гомотетическое сжатие  $F_0^h$ . Тогда множества  $F^h \setminus F_0^h, F_\varepsilon^h \setminus F_{0,\varepsilon}^h$  можно представить как объединение не пересекающихся между собой плит  $I^h$  или  $\varepsilon I^h$  соответственно. На каждой из плит  $I^h$  определены корректно (с точностью до знака) поперечное направление  $\nu$ , а также продольные (тангенциальные) направления. Договоримся на произвольной такой плите  $I^h$ , где  $e_i, e_j$   $i < j$ , — продольные орты, выбирать нормаль  $\nu = \pm e_m$  ( $i, j, m$  — перестановки из чисел 1, 2, 3) так, чтобы получалась правая тройка ортов  $(e_i, e_j, \nu)$ . Таким образом, процедура выбора ортов для тонкой пластины  $I^h \subset F^h$  согласуется с аналогичной процедурой для сингулярной пластины  $I \subset F$  (см. объяснения, предваряющие формулу (3.9)).

Для операторнозначной функции  $P(y)$ , определенной в (3.13), рассмотрим ее естественное продолжение (в смысле § 2) на структуру  $F^h$ . При  $y \in F^h \setminus F_0^h$  это будет оператор  $P_h(y)$ , переводящий симметрические матрицы  $z \in L^2(\square, d\mu^h)^6$  в тангенциальные (относительно меры  $\mu$ ).

Рассмотрим матрицу

$$\sigma(u^{\varepsilon,h}) = \begin{cases} \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) P_h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e(u^{\varepsilon,h}), & \text{если } x \in F_\varepsilon^h \setminus F_{0,\varepsilon}^h, \\ 0, & \text{если } x \in F_{0,\varepsilon}^h, \end{cases} \quad (3.14)$$

где  $\beta(y) = \beta^h(y)$  — функция, которая равна нулю на  $F_0^h$ , а на каждой плите  $I_s^h$  из  $\square \setminus F_0^h$  определена соотношением  $\beta(y) = \frac{1}{h} y \cdot \nu_s$  и по периодичности продолжена на все пространство  $\mathbb{R}^3$ .

**Лемма 3.6.** *Имеет место слабая двухмасштабная сходимость*

$$-\frac{h}{\varepsilon} \sigma(u^{\varepsilon,h}) \rightharpoonup \frac{\theta^2}{3} D(\chi), \quad (3.15)$$

где матрица  $D(\chi)$  определена равенствами (1.28), (1.29).

**3.4.** Приступим к выяснению условий сопряжения на ребрах структуры  $F$  для функции  $\chi(x, y)$  из предела (3.1), а именно, докажем, что  $\chi(x, y)$  удовлетворяет условию (3.2).

Достаточно рассмотреть две сходящиеся под прямым углом грани и для них установить соответствующее равенство. Пусть это будут грани  $\Pi_2, \Pi_3$ , лежащие на координатных плоскостях  $Oy_1y_3, Oy_2y_3$  и сходящиеся по ребру  $\gamma$ , направленному по оси  $Oy_1$ . Выберем на этих гранях правые тройки векторов:  $(e_1, e_3, -e_2)$  на  $\Pi_2$ ,  $(e_1, e_2, e_3)$  на  $\Pi_3$ . Условие (3.2) означает в этом случае

$$\frac{\partial \chi_3(y_1, 0)}{\partial y_2} + \frac{\partial \chi_2(y_1, 0)}{\partial y_3} = 0.$$

На кубе  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$  зададим вектор  $b(y)$  равенством

$$b(y) = b^h(y) = \begin{cases} \left(0, \frac{y_3}{h} \Phi'(y_2), 0\right) \Phi_0(y_1), & y \in I_3^h, \\ \left(0, 0, \frac{y_2}{h} \Phi'(y_3)\right) \Phi_0(y_1), & y \in I_2^h, \\ 0, & y \in \square \setminus (I_2^h \cup I_3^h), \end{cases}$$

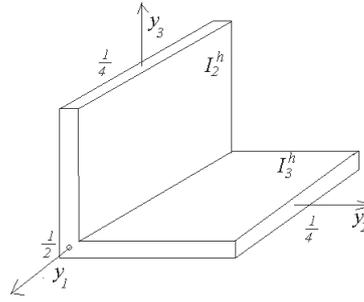


Рис. 4. «Уголок» в пространстве.

где  $I_3^h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-h, \frac{1}{4}\right] \times [-h, h]$ ,  $I_2^h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-h, h] \times \left[-h, \frac{1}{4}\right]$ , «уголок»  $I_3^h \cup I_2^h$  изображен на рис. 4, функции  $\Phi$ ,  $\Phi_0$  такие, что  $\Phi_0 \in C_0^\infty\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\Phi' \in C_0^\infty\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\Phi\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ . Ясно, что вектор  $b(y)$  равен нулю вблизи ребра  $\gamma$  (если  $h$  достаточно мало) и поэтому корректно определен в кубе  $\square$ . Продолжим его периодически на все пространство  $\mathbb{R}^3$ .

Введем выражение

$$l(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h} \cdot b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

которое, благодаря структуре вектора  $b$ , имеет вид

$$\begin{aligned} l(\varepsilon) &= \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_2^{\varepsilon, h}(x) \beta_0(\varepsilon^{-1} x_3) \Phi'(\varepsilon^{-1} x_2) \Phi_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h + \\ &+ \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_3^{\varepsilon, h}(x) \beta_0(\varepsilon^{-1} x_2) \Phi'(\varepsilon^{-1} x_3) \Phi_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h. \end{aligned}$$

Из соотношений (3.7), (3.10) следует равенство

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I_1} \varphi(x) u_3(x, y) \Phi''(y_2) \Phi_0(y_1) dx d\mu(y) + \\ &+ \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I_2} \varphi(x) u_2(x, y) \Phi''(y_3) \Phi_0(y_1) dx d\mu(y). \end{aligned}$$

Пока ничего нового не получено, мы просто сложили соотношения (3.7) и (3.10) для соответствующих векторов  $a(y)$ .

С другой стороны, величина  $l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\varepsilon)$  может быть изучена другим способом, что приводит к следующему результату.

**Предложение 3.7.** *Рассмотрим величину  $l$  как линейный функционал от  $\Phi$  при фиксированном  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\Phi_0 \in C_0^\infty\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Тогда справедливо неравенство*

$$|l|^2 \leq c \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt, \quad c = c(\varphi, \Phi_0). \quad (3.16)$$

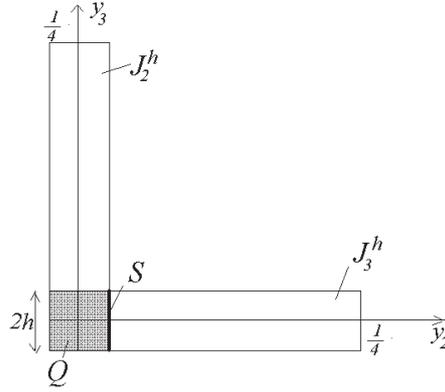


Рис. 5. «Уголок» на плоскости.

Воспользуемся этим неравенством, предварительно преобразовав интегральное выражение для  $l(\Phi)$ . Учитывая свойства функции  $\Phi(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{9}{\theta^2} l(\Phi) = & \int_{\Omega} \varphi(x) \left[ \int_0^{1/2} \Phi_0(y_1) \left( \int_0^{1/2} u_3(x_1, y_1, y_2) \Phi''(y_2) dy_2 \right) dy_1 + \right. \\ & \left. + \int_0^{1/4} \Phi_0(y_1) \left( \int_0^{1/2} u_2(x, y_1, y_3) \Phi''(y_3) dy_3 \right) dy_1 \right] dx; \end{aligned}$$

здесь мы учли, что  $d\mu|_{\Pi_3} = \frac{1}{3} dy_1 dy_2$ ,  $d\mu|_{\Pi_2} = \frac{1}{3} dy_1 dy_3$ .

Проинтегрируем дважды по частям в обеих круглых скобках

$$\begin{aligned} 9 \frac{l(\Phi)}{\theta^2} = & \int_{\Omega} \varphi(x) \int_0^1 \Phi_0(y_1) \Phi(0) \left[ \frac{\partial u_3}{\partial y_2} \Big|_{\gamma} + \frac{\partial u_2}{\partial y_3} \Big|_{\gamma} \right] dy_1 dx + \\ & + \int_{\Omega} \varphi(x) \left[ \int_0^1 \Phi_0(y_1) \left( \int_0^{1/4} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_2^2}(x_1, y_1, y_2) \Phi(y_2) dy_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{1/4} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_3^2}(x_1, y_1, y_3) \Phi(y_3) dy_3 \right) \right] dy_1 dx = l_1(\Phi) + l_2(\Phi). \end{aligned}$$

В силу леммы 3.5, слагаемое  $l_2(\Phi)$  — непрерывный функционал по норме  $\left( \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt \right)^{1/2}$ . Тогда

для непрерывности  $l(\Phi)$  необходимо, чтобы  $l_1(\Phi) = 0$ , что, в силу произвольности  $\varphi(x)$ ,  $\Phi_0(y_1)$ , возможно, если выражение в квадратной скобке слагаемого  $l_1(\Phi)$  равно нулю, и искомое условие сопряжения на ребре  $\gamma$  получено.

**Доказательство предложения 3.7.** Пусть

$$J_3^h = \left\{ (y_2, y_3) : -h < y_2 < \frac{1}{4}, -h < y_3 < h \right\}, \quad J_2^h = \left\{ (y_2, y_3) : -h < y_2 < h, -h < y_3 < \frac{1}{4} \right\},$$

$P = J_2^h \cup J_3^h$  — «уголок», изображенный на рис. 5.

Определим на плоскости  $\mathbb{R}_{y'}^2$ ,  $y' = (y_2, y_3)$ , двумерный вектор  $b'(y')$ , зависящий от  $y_1$  как от параметра. На квадрате  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$  зададим вектор  $b$  соотношением

$$b'(y') = \begin{cases} \Phi_0(y_1) \left( \frac{y_3}{h} \Phi'(y_2), 0 \right), & y' \in J_3^h, \\ \Phi_0(y_1) \left( 0, \frac{y_2}{h} \Phi'(y_3) \right), & y' \in J_2^h, \\ 0, & y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \setminus P, \end{cases}$$

где функции  $\Phi_0(t)$ ,  $\Phi(t)$  те же, что в определении вектора  $b(y)$ , и далее продолжим  $b'(y')$  на всю плоскость  $\mathbb{R}_{y'}^2$  по периодичности.

В области  $P$  рассмотрим плоскую задачу Неймана для уравнения  $-\operatorname{div}(e(v)) = b'$ . По определению, ее решение — функция  $v = (v_2, v_3)$ ;  $v = v(y')$  такая, что

$$v \in H^1(P)^2, \quad \int_P e(v) \cdot e(\varphi) dy' = \int_P b' \cdot \varphi dy' \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{P})^2, \quad (3.17)$$

где  $e(\varphi)$  — упругий градиент по переменным  $y' = (y_2, y_3)$ .

Для разрешимости этой задачи требуется, чтобы вектор  $b'$  был ортогонален на  $P$  всем жестким перемещениям на плоскости, т.е. векторам вида  $c + t(-y_2, y_1)$ ,  $c \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Выполнение этого условия ортогональности следует из структуры вектора  $b'$ . Решение  $v$  определено с точностью до жесткого перемещения (ниже мы этим воспользуемся).

Проверим оценку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_P e(v) \cdot e(v) dy' \leq c \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt, \quad c = c(\Phi_0). \quad (3.18)$$

В тождестве (3.17) возьмем пробную функцию  $\varphi = v$ . Тогда получим

$$h \int_{\square} e(v) \cdot e(v) dy = \Phi_0(y_1) \left( \int_{J_3^h} y_3 \Phi'(y_2) v_2(y) dy' + \int_{J_2^h} y_2 \Phi'(y_3) v_3(y') dy' \right) = \Phi_0(y_1)(T_3 + T_2). \quad (3.19)$$

Оценим величину  $T_3$ . Рассмотрим заштрихованный на рис. 5 квадрат  $Q$ . Пусть  $S$  — правая сторона квадрата. Напомним, что функция  $\Phi'(y_2)$  равна нулю в  $Q$ .

Из (3.18) в результате интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} T_3 &= - \int_{J_3^h} y_3 \Phi \frac{\partial v_2}{\partial y_2} dy' - \int_S \Phi(0) y_3 v_2 dy_3 = T_3' + T_3'', \\ |T_3'| &\leq 2h^{\frac{3}{2}} \left( \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_P e(v) \cdot e(v) dy \right)^{1/2}, \\ |T_3''| &\leq |\Phi(0)| h^{\frac{3}{2}} \left( \int_S |v_2|^2 dy_3 \right)^{1/2} \leq c |\Phi(0)| h^2 \left( \int_Q e(v) \cdot e(v) dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Во второй оценке на последнем шаге использовано неравенство

$$\int_S |v_2|^2 dy_2 \leq ch \int_Q e(v) \cdot e(v) dy,$$

которое доказывается следующим образом. По теореме о следе

$$\int_S |v_2|^2 dy_2 \leq c \left( h \int_Q |\nabla v_2|^2 dy' + h^{-1} \int_Q |v_2|^2 dy' \right).$$

Теперь нужно решение  $v$  выбрать ортогональным на  $Q$  всем жестким перемещениям и воспользоваться неравенством Корна

$$h^{-2} \int_Q |v|^2 dy' + \int_Q |\nabla v|^2 dy' \leq c \int_Q e(v) \cdot e(v) dy',$$

где  $\nabla$  — градиент по переменным  $y_2, y_3$ .

Мы оценили величину  $T_3$  из (3.19). Оценивая величину  $T_2$  аналогичным способом, получим неравенство

$$h \int_P e(v) \cdot e(v) dy' \leq c \left( \int_P e(v) \cdot e(v) dy' \right)^{1/2} \left[ h^{\frac{3}{2}} \left( \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt \right)^{1/2} + c_1 h^2 |\Phi(0)| \right],$$

из которого следует искомое неравенство (3.18).

Далее положим

$$g'(y') = \begin{cases} e(v) & \text{на } P, \\ 0 & \text{на } \square \setminus P, \end{cases}$$

и продолжим  $g'(y')$  периодически на всю плоскость  $\mathbb{R}_{y'}^2$ .

Из матрицы  $g'$ , имеющей размеры  $2 \times 2$ , добавлением нулевого столбца и нулевой строки делаем матрицу  $g$  третьего порядка:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g' & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $g$  можно считать заданной в пространстве  $\mathbb{R}_y^3$ ,  $y = (y_1, y') = (y_1, y_2, y_3)$ , причем периодической с ячейкой периодичности — единичным кубом, так как  $g$  получает зависимость от  $y_1$  как от параметра через функцию  $v$ . Напомним, что  $v$  — решение задачи (3.17), в которой правая часть  $b'$  зависит от  $y_1$  как от параметра. Тогда оценка (3.18) переписется в виде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} |g|^2 d\mu^h \leq c \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt, \quad c = c(\Phi_0), \quad (3.20)$$

где  $\square$  — трехмерная ячейка периодичности. Здесь мы учли то, что  $\text{supp } g \subset F^h$  по построению матрицы  $g$ .

Двумерный вектор  $b'$  и трехмерный вектор  $b = b^h$  связаны соотношением  $b = (0, b')$ , поэтому из тождества (3.17) получаем

$$\varepsilon \int_{\Omega} g \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot e(\psi(x)) dx = \int_{\Omega} b^h \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \psi(x) dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)^3.$$

Поскольку  $g \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  и  $b^h \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  сосредоточены на структуре  $F_\varepsilon^h$ , то вместо  $dx$  можно взять  $d\mu_\varepsilon^h$ , т.е.

$$\varepsilon \int_{\Omega} g \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot e(\psi(x)) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} b^h \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \psi(x) d\mu_\varepsilon^h, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)^3.$$

Полагая в этом тождестве  $\psi = \varphi(x)u^{\varepsilon,h}(x)$ , где  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , получим

$$\int_{\Omega} g \cdot e(\varphi u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h}(x) \cdot b^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \frac{\varepsilon}{h} l(\varepsilon).$$

Последовательность  $e(\varphi u^{\varepsilon,h})^6$  ограничена в  $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$ , и по неравенству Коши—Буняковского

$$|l(\varepsilon)|^2 \leq c \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \int_{\Omega} \left|g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h, \quad c = c(\varphi).$$

Покроем область  $\Omega$  кубами  $\varepsilon \square_j$  (их число имеет порядок  $O(\varepsilon^{-3})$ ). Тогда

$$\int_{\Omega} \left|g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leq \sum_{\varepsilon \square_j} \int_{\varepsilon \square_j} \left|g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = \sum_{\square} \varepsilon^3 \int_{\square} |g(y)|^2 d\mu^h \leq 2|\Omega| \int_{\square} |g|^2 d\mu^h.$$

Отсюда и из (3.20) следует искомое неравенство (3.16).  $\square$

**3.5.** Займемся проверкой условия закрепления на ребрах. Будем опираться на следующую теорему из теории двухмасштабной сходимости. В ней речь идет о скалярных функциях.

**Теорема 3.8.** Пусть  $h(\varepsilon) \rightarrow 0$  — произвольно, и последовательность гладких скалярных функций такова, что

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h + \int_{\Omega} |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leq c_1 < \infty. \quad (3.21)$$

Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$v^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y), \quad v(x, \cdot) \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \quad \varepsilon \nabla v^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} \nabla_y v(x, y), \quad (3.22)$$

где  $H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$  — соболевское пространство периодических функций.

Более подробно эта теорема обсуждается в § 6.

Для применения теоремы 3.8 нужна оценка вида (3.21) для каждой компоненты вектора  $u^{\varepsilon,h}$ . Такая оценка получается из следующего неравенства типа неравенства Корна (см. [7, 8]) для ящичных структур:

$$\varepsilon h \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leq c \int_{\Omega} [e(u) \cdot e(u) + u \cdot u] d\mu_{\varepsilon}^h, \quad u \in C_0(\Omega)^3, \quad (3.23)$$

где  $c$  — абсолютная константа.

В критическом случае неравенство (3.23) обеспечивает оценку вида (3.21) для каждой компоненты  $u^{\varepsilon,h}$ .

По теореме 3.8 каждая компонента вектора  $\chi$  принадлежит (для п.в.  $x \in \Omega$ ) соболевскому пространству  $H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$ . Поэтому определено сужение  $\chi_i|_{\gamma}$  любой компоненты  $\chi_i$  для любого ребра  $\gamma \subset F$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом сужение  $\chi_i|_{\gamma}$  можно получить, «спускаясь» с двух взаимно перпендикулярных граней, пересекающихся по  $\gamma$ , на одной из которых  $\chi_i$  — нулевая. Таким образом, для функции  $\chi$  доказано условие закрепления на ребрах структуры  $F$ . В предыдущих рассуждениях, ссылаясь на равенство двух сужений (с разных граней), мы воспользовались утверждением о структуре соболевского пространства  $H^1(\square, d\mu)$  для меры  $\mu$ , определенной в § 1 для ящичного каркаса  $F$ . Эта структура описана в следующем предложении, которое доказывается так же, как аналогичное утверждение для стержневых каркасов в [3, § 4].

**Предложение 3.9.** Скалярная функция  $u \in H^1(\square, d\mu)$  в том и только в том случае, когда для каждой грани  $\pi$  и для каждого ребра  $\gamma$  из ящичной структуры  $F$  выполнены следующие условия:

- (i)  $u \in H^1(\pi)$ , где  $H^1(\pi)$  — обычное соболевское пространство с плоской мерой Лебега;
- (ii) если  $\pi_i$ ,  $i \in J$ , — грани, сходящиеся по ребру  $\gamma$ , то след функции  $u|_{\pi_i}$  на ребро  $\gamma$ , т.е.  $(u|_{\pi_i})|_{\gamma}$ , не зависит от  $i \in J$ .

**3.6.** Цель этого пункта — доказать теорему 3.3. Но сначала приведем один результат о тензоре релаксации.

**Замечание о тензоре релаксации.** В пространстве симметрических  $3 \times 3$ -матриц определим подпространство

$$\mathcal{E}(y) = \{\xi = \{\xi_{sp}\} : \xi_{sp} = 0 \text{ для } s, p \in \{1, 2, 3\} \setminus i\}, \quad \text{если } y \in \Pi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

и ортогональное к нему дополнение

$$\mathcal{E}^\perp(y) = \{\xi = \{\xi_{sp}\} : \xi_{sp} = 0, \text{ если } s = i \text{ либо } p = i\}, \quad y \in \Pi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тензор релаксации  $\hat{A} = \hat{A}(y)$  для исходного тензора упругости  $A$ , согласно (1.21), можно задать формулой

$$\hat{A}(y)\xi \cdot \xi = \min_{\eta \in \mathcal{E}(y)} A(\xi + \eta) \cdot (\xi + \eta). \quad (3.24)$$

Тензор  $\hat{A}$  как оператор, действующий на симметрических матрицах, имеет

$$\text{Ker } \hat{A} = \mathcal{E}(y), \quad \text{Im } \hat{A} = \mathcal{E}^\perp(y); \quad (3.25)$$

при этом  $\hat{A}|_{\mathcal{E}^\perp(y)}$  — симметрический невырожденный оператор.

В соответствии с общим принципом двойственности (см. в [гл. XIII, § 1]3), используя сопряженные по Юнгу—Фенхелю функции, получаем

$$\begin{aligned} \hat{A}\xi \cdot \xi &= - \min_{z \in \mathcal{E}^\perp(y)} (A^*z \cdot z - 2z \cdot \xi), \\ \hat{A}\xi \cdot \xi &= \max_{z \in \mathcal{E}^\perp(y)} (2z \cdot \xi - A^{-1}z \cdot z). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Введем ортогональный проектор  $P(y) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathcal{E}^\perp(y)$ . Рассмотрим вариационную задачу (3.26) для  $\xi \in \mathcal{E}^\perp(y)$  (если  $\xi \in \mathcal{E}(y)$ , то  $\hat{A}\xi \cdot \xi = 0$ , согласно (3.25)). В ней можно перейти к максимуму по всему пространству симметрических матриц  $\mathbb{R}^6$ , а именно:

$$\hat{A}\xi \cdot \xi = \max_{z \in \mathbb{R}^6} (2z \cdot \xi - A^{-1}Pz \cdot Pz) = \max_{z \in \mathbb{R}^6} (2\xi \cdot z - (PA^{-1}P)z \cdot z), \quad (3.27)$$

что, по определению сопряженной функции, коротко можно записать в виде соотношения

$$\hat{A} = (PA^{-1}P)^* = (PA^{-1}P)^{-1}. \quad (3.28)$$

Здесь оператор  $PA^{-1}P$  рассматривается как невырожденный в пространстве матриц  $\mathcal{E}^\perp(y)$ , которое можно ассоциировать (через вычеркивание нулевого столбца и нулевой строки) с пространством всех симметрических  $2 \times 2$ -матриц, и именно в этом смысле берется его обращение в (3.28).

**Доказательство теоремы 3.3.** По неравенству Юнга

$$\int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_\varepsilon^h \geq 2 \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon, h}(x)) \cdot z(x) d\mu_\varepsilon^h - \int_{\Omega} A^{-1}z(x) \cdot z(x) d\mu_\varepsilon^h \quad (3.29)$$

для любой симметрической матрицы  $z \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^6$ . Возьмем

$$z(x) = \Phi_0(x, y) - \frac{h}{\varepsilon} \beta(y) P_h(y) \Phi_1(x, y), \quad y = \varepsilon^{-1}x,$$

где  $\beta(y)$ ,  $P_h(y)$  — скалярная функция и проектор, те же, что в (3.14),  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  — пробные матричные функции с компонентами вида  $\sum \varphi_i(x) b_i(y)$ ,  $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $b_i \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$ .

Предел первого слагаемого справа в (3.29) находим с использованием слабой двухмасштабной сходимости (3.4) и (3.15). В результате

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon, h}) \cdot z d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} \left[ p \cdot \Phi_0 + \frac{\theta^2}{3} D(\chi) \cdot P\Phi_1 \right] dx d\mu.$$

Учитывая конкретный вид матрицы  $z$ , имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{-1} z \cdot z \, d\mu_{\varepsilon}^h &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{-1} \Phi_0 \cdot \Phi_0 \, d\mu_{\varepsilon}^h - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} A^{-1} \Phi_0 \cdot [\beta(y) P_h(y) \Phi_1(x, y)] \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} d\mu_{\varepsilon}^h + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \int_{\Omega} A^{-1} P_h \Phi_1 \cdot P_h \Phi_1 \beta^2 \, d\mu_{\varepsilon}^h = T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Величину  $T_1$  находим по свойству среднего значения:

$$T_1 = \int_{\Omega} \int_{\square} A^{-1} \Phi_0 \cdot \Phi_0 \, dx \, d\mu.$$

Для вычисления величин  $T_2$  и  $T_3$  воспользуемся следующим утверждением.

**Предложение 3.10.** Пусть  $\beta = \beta^h(y)$  — функция та же, что в (3.14). Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} 0, \quad (3.30)$$

$$\left(\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 \xrightarrow{2} \frac{1}{3}. \quad (3.31)$$

Для доказательства нужно убедиться в том, что  $\beta^h \rightarrow 0$ ,  $(\beta^h)^2 \rightarrow \frac{1}{3}$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ , и воспользоваться предложением 2.2.

Из (3.30) следует, что  $T_2 = 0$ , так как  $A^{-1} \Phi_0 \cdot P_h \Phi_1$  можно рассматривать как пробную функцию при двухмасштабной сходимости.

Аналогично из (3.31) получаем

$$T_3 = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} A^{-1} P \Phi_1 \cdot P \Phi_1 \, dx \, d\mu.$$

В результате всех вычислений получаем неравенство

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) \, d\mu_{\varepsilon}^h &\geq \int_{\Omega} \int_{\square} [2p \cdot \Phi_0 - A^{-1} \Phi_0 \cdot \Phi_0] \, dx \, d\mu + \\ &+ \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} [2D(\chi) \cdot P \Phi_1 - A^{-1} P \Phi_1 \cdot P \Phi_1] \, dx \, d\mu. \end{aligned}$$

Возьмем в нем супремум по  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ ; тогда, учитывая формулы (3.27), (3.28), получим искомое неравенство (3.5). Теорема 3.3 доказана.  $\square$

#### 4. ЛЕММЫ О ПРОДОЛЖЕНИИ

**4.1.** Полезно выявить плотное множество в пространстве  $\mathcal{R}'_1$  (см. определение 3.1), из элементов которого будем конструировать пробные функции для специального предельного перехода в интегральном тождестве (2.1). Далее узлами структуры  $F$  будем называть точки пересечения ее ребер.

**Определение 4.1.** Скажем, что вектор  $g \in \mathcal{R}'_1$  принадлежит множеству  $D$ , если

- (i)  $\text{supp } g$  не содержит узлы структуры  $F$ ;
- (ii)  $g$  бесконечно дифференцируема вне некоторой окрестности ребер;
- (iii) в некоторой цилиндрической окрестности каждого ребра  $\gamma \subset \square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$  сужение  $g|_{\square}$  имеет структуру

$$g(y) = C(y_i) \omega_i(y), \quad (4.1)$$

где  $y_i$  — продольные координаты на ребре  $\gamma$ ,  $\omega_i(y)$  —  $i$ -й вектор-столбец матрицы

$$d = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$C(y_i)$  — гладкая функция.

Отметим, что  $\omega_i$  — жесткое перемещение в  $\mathbb{R}^3$ , т.е.  $e(\omega_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Подробнее условие (4.1) означает, что на любой из четырех сходящихся по ребру  $\gamma$  граней  $\pi_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , нормаль к которой  $\nu_j$ , выполнено равенство

$$g \cdot \nu_j = C(y_i)\omega_i(y) \cdot \nu_j$$

с одной и той же для всех  $j = 1, \dots, 4$  функцией  $C(y_i)$ , заданной на ребре  $\gamma$ . Очевидно, что  $C \equiv 0$  в окрестности узлов, что следует из условия (i) определения 4.1.

**Определение 4.2.** Скажем, что  $g \in \mathcal{R}_1^0$  принадлежит множеству  $D_0$ , если

- (i)  $\text{supp } g$  не пересекается с ребрами структуры  $F$ ;
- (ii)  $g$  бесконечно дифференцируема.

Ясно, что  $D_0 \subset D$ .

Пусть  $\pi = (0, 1)^2$ ,  $\dot{H}^2(\pi)$  — замыкание по норме  $H^2(\pi)$  множества гладких функций из  $C^\infty(\bar{\pi})$ , равных нулю на границе  $\partial\pi$ .

**Предложение 4.3.** В  $\dot{H}^2(\pi)$  плотно множество функций, равных нулю в окрестности вершин квадрата  $\pi$ .

**Доказательство.** 1°. В круге единичного радиуса

$$B = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$$

выделим одну из его четвертей — сектор

$$Q = \{z \in B : z_1 > 0, z_2 > 0\}.$$

В границу сектора  $Q$  входят лежащие на осях  $Oz_1$ ,  $Oz_2$  единичные отрезки  $I_1$ ,  $I_2$ . Имеет место следующее неравенство типа неравенства Фридрикса:

$$\int_Q (|\nabla u|^2 + u^2) dz \leq C \int_Q \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} \right|^2 dz, \quad u(z) \in C^\infty(\bar{Q}), \quad u|_{I_1 \cup I_2} = 0. \quad (4.2)$$

Это неравенство доказывается методом от противного.

2°. Пусть  $B_h = hB$  — круг радиуса  $h$ , его четверть  $Q_h = hQ$  — сектор, граница которого включает отрезки  $hI_1$ ,  $hI_2$ . С помощью гомотетии из неравенства (4.2) выводим аналогичное ему неравенство для сектора  $Q_h$

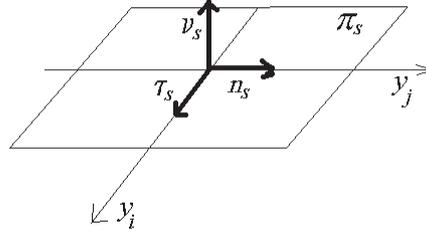
$$\int_{Q_h} (h^2 |\nabla u|^2 + u^2) dz \leq Ch^4 \int_{Q_h} \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx, \quad u(x) \in C^\infty(\bar{Q}_h), \quad u|_{hI_1 \cup hI_2} = 0. \quad (4.3)$$

3°. Пусть  $\varphi(z) \in C_0^\infty(B)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi(z) = 1$  при  $|z| < \frac{1}{2}$ . Положим  $\varphi^h = \varphi^h(x) = \varphi(h^{-1}x)$ .

Для функции  $u \in C^\infty(\bar{\pi})$ ,  $u|_{\partial\pi} = 0$ , рассматривая последовательно  $\varphi^h u$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi^h u)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi^h u)$ , выводим, благодаря оценке (4.3), следующее неравенство:

$$\int_{Q_h} (|\varphi^h u|^2 + |\nabla(\varphi^h u)|^2 + |\nabla \nabla(\varphi^h u)|^2) dx \leq C_1 \int_{Q_h} |\nabla \nabla u|^2 dx,$$

где константа  $C_1$  зависит лишь от функции  $\varphi(z)$  и константы  $C$  из (4.2). Отсюда следует, что  $\|\varphi^h u\|_{H^2(\pi)} < \delta$ , если  $h$  достаточно мало. Тогда  $(1 - \varphi^h)u \equiv 0$  в окрестности вершины  $(0, 0)$ ; при


 Рис. 6. Тройка ортов на грани  $\pi_s$ .

этом  $\|u - (1 - \varphi^h)u\|_{H^2(\pi)} < \delta$ . Аналогичную срезку с достаточно малым изменением  $H^2$ -нормы можно сделать в окрестности других трех вершин квадрата  $\pi$ . Предложение 4.3 доказано.  $\square$

**Предложение 4.4.** Множество  $D$  плотно в пространстве  $\mathcal{R}'_1$ .

**Доказательство.** Используя разбиение единицы, видим, что, в силу предложения 4.3, изучения требуют функции  $g \in \mathcal{R}'_1$  такие, что их носитель в пределах ячейки периодичности пересекает ровно одно ребро.

Итак, пусть  $g \in \mathcal{R}'_1$ ,  $\text{supp } g \cap \square$ ,  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$ , пересекает лишь ребро  $\gamma$ , на котором  $y_i$  — продольная координата. Покажем возможность аппроксимирования  $g$  функцией из множества  $D$  с любой степенью точности по  $H^2$ -норме.

На каждой из четырех граней  $\pi_s$ , сходящихся по ребру  $\gamma$ , выберем тройку ортов  $(\tau_s, n_s, \nu_s)$  по тому же принципу, что в § 3.1, т.е., если  $\pi_s$  лежит на координатной плоскости  $y_m = 0$ , то  $\tau_s = e_i$ ,  $n_s = e_j$ ,  $\nu_s = \pm e_m$ , где  $i, j, m$  — перестановка чисел 1, 2, 3, и выбор знака в равенстве для  $\nu_s$  диктуется требованием:  $(\tau_s, n_s, \nu_s)$  — правая тройка ортов (см. рис. 6). Тогда  $y_i, y_j, j = j(s)$ , — продольные координаты на  $\pi_s$ , и, по условию  $g \in \mathcal{R}'_1$ , скалярные функции  $g|_{\pi_s} \cdot \nu_s = g_s(y_i, y_j)$ , определенные на гранях  $\pi_s$ , имеют следующие свойства:

$$g_s \in H^2(\pi_s), \quad g_s|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial g_s}{\partial y_j} \Big|_{\gamma} = C(y_i), \quad (4.4)$$

где  $C(y_i)$  — одна и та же функция для всех четырех значений  $s$ . Тогда функцию  $g_s(y_i, y_j) - C(y_i)y_j$  можно аппроксимировать по  $H^2$ -норме функциями, финитными около ребра  $\gamma$ . В результате сами функции  $g_s(y_i, y_j)$  будут аппроксимированы функциями  $\bar{g}_s(y_i, y_j)$ , линейными по переменной  $y_j$  около ребра  $\gamma$ . Остается задать вектор  $\bar{g}(y)$  равенством  $\bar{g}(y) \cdot \nu_s = \bar{g}_s$ .

В силу выбора функций  $\bar{g}_s$  на каждой грани  $\pi_s$ , в некоторой окрестности ребра  $\gamma$  выполнено соотношение

$$\bar{g}(y) \cdot \nu_s = C(y_i)y_j. \quad (4.5)$$

Кроме того,

$$\omega_i(y) \cdot \nu_s = y_j, \quad (4.6)$$

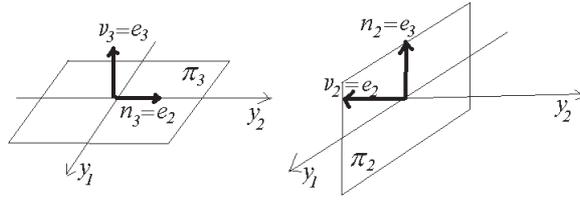
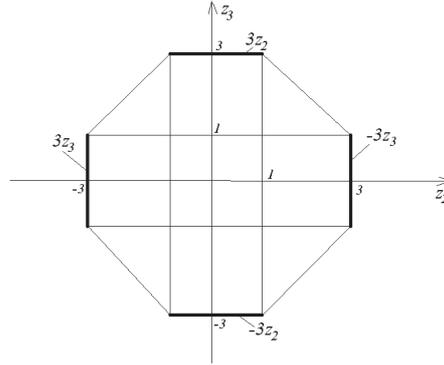
что проверяется непосредственно для всех столбцов матрицы  $d$  и соответствующих граней  $\pi_s$ . Например, для граней  $\pi_3, \pi_2$ , сходящихся по ребру, лежащему на оси  $Oy_1$  (см. рис. 7), (4.6) означает, что  $\omega_1(y) \cdot e_3 = y_2$ ,  $\omega_1(y) \cdot (-e_2) = y_3$ .

Из (4.5), (4.6) следует, что

$$\bar{g}(y) \cdot \nu_s = C(y_i)\omega_i(y) \cdot \nu_s,$$

т.е. равенство (4.1) выполнено.

Функцию  $C(y_i)$  из (4.1), если она негладкая, можно заменить ее сглаживанием по переменной  $y_i$  с финитным ядром, что не скажется на других свойствах аппроксимации.  $\square$

Рис. 7. Орты на гранях  $\pi_3$  и  $\pi_2$ .Рис. 8. Область  $G_0$ .

**4.2.** Введем одну вспомогательную функцию  $v_0(z_2, z_3)$ .

Пусть  $G_0$  — плоская область, изображенная на рис. 8,  $G_0$  — это восьмиугольник, «натянутый» на «крест», составленный из полос  $[-3, 3] \times [-1, 1]$  и  $[-1, 1] \times [-3, 3]$  на плоскости  $Oz_2z_3$ . На выделенных сторонах восьмиугольника заданы линейные функции, указанные на рисунке. Пусть  $l(z) \in C(\partial G_0)$ ,  $l(z)$  кусочно-линейна на сторонах восьмиугольника с заданными значениями на выделенных сторонах. Рассмотрим функцию  $v_0(y_2, y_3)$  — обобщенное решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta v_0 = 0 \quad \text{в } G_0, \quad v_0|_{\partial G_0} = l(z).$$

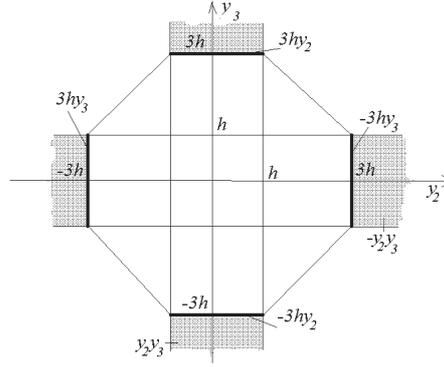
Для решения этой задачи имеется оценка

$$\int_{G_0} |\nabla v_0|^2 dz \leq C_0.$$

Пусть  $v^h(y) = h^2 v_0\left(\frac{y}{h}\right)$ , тогда  $v^h(y)$  задана в области  $G_h = hG_0$ , где  $G_h$  — восьмиугольник, «натянутый» на «крест», составленный из полос  $[-3h, 3h] \times [-h, h]$  и  $[-h, h] \times [-3h, 3h]$  (см. рис. 9). На выделенных сторонах восьмиугольника  $G_h$  значения  $v^h(y)$  указаны, и они совпадают со значениями функций  $y_2 y_3$  или  $-y_2 y_3$ , так что функция  $v^h$  «сшивает» эти две функции (заданные одна на вертикальной полосе  $(-h, h) \times (-\infty, \infty)$ , другая — на горизонтальной полосе  $(-\infty, \infty) \times (-h, h)$ ) в окрестности начала координат на восьмиугольнике  $G_h$ . При этом выполняется оценка

$$\int_{G_h} (|\nabla_y v^h(y)|^2 + |v^h|^2) dy \leq C_0 h^4.$$

**4.3.** В этом пункте рассматривается изотропный тензор упругости  $A$ . Далее для матрицы  $M$ , определенной на структуре  $F$ ,  $M_h$  — естественное продолжение ее на структуру  $F^h$  (поэлементное). Символом  $O(h^k)$  обозначаем слагаемые  $r(y)$  такие, что  $\int |r(y)| d\mu^h = O(h^k)$  при  $h \rightarrow 0$  в обычном смысле.  $\square$


 Рис. 9. Восьмиугольник  $G_h$ , «сшивающий» две полосы.

**Лемма 4.5.** Для любого вектора  $g \in D_0$ ,  $g(y) = a(y')e_3$ ,  $y' = (y_1, y_2)$ , существует его периодическое продолжение на структуру  $F^h$  такое, что

(i)

$$Ae(g^h) = -h\beta_0(y_3) \left[ kD_3(a) + \frac{kk_1}{k+k_1}(\Delta_3 a)E^{(3)} \right]_h + O(h^2), \quad (4.7)$$

где функция  $\beta_0(t)$  та же, что в лемме 3.4,

$$D_3(a) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 a & \partial_1 \partial_2 a & 0 \\ \partial_1 \partial_2 a & \partial_2^2 a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^{(3)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 a = \text{Tr } D_3(a) = (\partial_1^2 + \partial_2^2)a, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i};$$

(ii)

$$g^h \longrightarrow g \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h). \quad (4.8)$$

**Доказательство.** Из определения множества  $D_0$  следует, что в нашем случае  $g = (0, 0, a(y'))$ ,  $a(y') \in C_0^\infty(I)$ ,  $I$  — некоторый квадрат, лежащий на координатной плоскости  $y_3 = 0$  и не пересекающий ребра структуры  $F$ . Построим продолжение  $g^h$  на плиту  $I^h = I \times [-h, h]$  по формуле

$$g^h(y) = \left( -y_3 \partial_1 a, -y_3 \partial_2 a, a + c \frac{y_3^2}{2} \right), \quad (4.9)$$

где функцию  $c$ , финитную в  $I$ , еще предстоит найти, и далее по периодичности определим  $g^h$  во всем  $\mathbb{R}^3$ .

Непосредственные вычисления дают в  $I^h$

$$e(g^h) = \begin{pmatrix} -y_3 \partial_1^2 a & -y_3 \partial_1 \partial_2 a & O(h^2) \\ -y_3 \partial_1 \partial_2 a & -y_3 \partial_2^2 a & O(h^2) \\ O(h^2) & O(h^2) & Cy_3 \end{pmatrix}; \quad (4.10)$$

значит, если  $A$  — изотропный тензор вида (1.1), то матрица тензора напряжений имеет вид

$$s = Ae(g^h) = ke(g^h) + k_1 \text{Tr } e(g^h)E = \begin{pmatrix} ke_{11} + k_1 \sum_i e_{ii} & ke_{12} & O(h^2) \\ ke_{12} & ke_{22} + k_1 \sum_i e_{ii} & O(h^2) \\ O(h^2) & O(h^2) & ke_{33} + k_1 \sum_i e_{ii} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где  $e_{ij} = e_{ij}(g^h)$ .

Сначала подходящим выбором функции  $c$  добьемся того, чтобы у матрицы  $s$  элемент  $s_{33}$  был нулевым, т.е. обеспечим равенство

$$0 = s_{33} = ke_{33} + k_1 \sum_i e_{ii} = y_3((k + k_1)c - k_1(\partial_1^2 + a_2^2)a).$$

Тем самым, функция  $c$  определена однозначно соотношением

$$c = c(y_1, y_2) = \frac{k_1}{k + k_1}(\partial_1^2 + \partial_2^2)a = \frac{k_1}{k + k_1}\Delta_3 a. \quad (4.12)$$

Теперь можно найти другие диагональные элементы:

$$s_{11} = ke_{11} + k_1 \sum_i e_{ii} = -y_3 \left[ k\partial_1^2 a + k_1 \left( \Delta_3 a - \frac{k_1}{k + k_1} \Delta_3 a \right) \right] = -y_3 \left( k\partial_1^2 a + \frac{kk_1}{k + k_1} \Delta_3 a \right),$$

и аналогично

$$s_{22} = -y_3 \left( k\partial_2^2 a + \frac{kk_1}{k + k_1} \Delta_3 a \right).$$

Находим, согласно (4.10), (4.11), внедиагональные элементы матрицы  $s$ :

$$s_{ij} = -ky_3 \partial_i \partial_j a, \quad \text{если } i, j \in \{1, 2\}, \quad s_{ij} = O(h^2) \quad \text{в других случаях.}$$

Полученные представления для всех элементов матрицы  $s$  позволяют заключить, что соотношение (4.7), действительно, имеет место для вектора  $g^h$ , определенного формулами (4.9), (4.12).

Сходимость (4.8) следует непосредственно из определения (4.9), а также из свойств естественного продолжения (см. конец § 2). Лемма 4.5 доказана.  $\square$

В лемме 4.5 рассмотрен случай, когда вектор  $g \in D_0$  имеет носитель на горизонтальных гранях структуры  $F$ . Рассмотрим общую ситуацию, когда вектор  $g \in D_0$  таков, что

$$g(y) = a(y')\nu, \quad \nu = \pm e_i, \quad \text{supp } a \cup \square \subset \{y_i = 0\}, \quad y' = (y_j, y_m), \quad j < m; \quad (4.13)$$

при этом  $(e_j, e_m, \nu)$  — правая тройка ортов (что обеспечивается нужным знаком в равенстве для  $\nu$  в (4.13)). Тогда для вектора  $g$  существует периодическое продолжение  $g^h(y)$  на структуру  $F^h$  такое, что имеет место сходимость (4.8), и выполняется равенство (аналог (4.7))

$$Ae(g^h) = -h\beta(y) \left[ kD_i(a) + \frac{kk_1}{k + k_1} \Delta_i a E^{(i)} \right]_h + O(h^2), \quad (4.14)$$

где  $\beta(y)$  та же, что и в (3.9),  $D_i(a)$  —  $3 \times 3$ -матрица, определенная в (1.29),  $\Delta_i a = \text{Tr } D_i(a)$ ,  $E^{(i)}$  получается из единичной  $3 \times 3$ -матрицы заменой  $i$ -го диагонального элемента на нуль.

Зададим продолжение  $g^h$  для случаев  $i = 1, 2$  в (4.13), т.е. с граней  $\pi_1 \subset \{y_1 = 0\}$  и  $\pi_2 \subset \{y_2 = 0\}$  на соответствующие плиты  $\pi_1^h$  и  $\pi_2^h$  толщины  $2h$ , лежащие в ячейке периодичности  $\square = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^3$ : для грани  $\pi_1$

$$g^h = \left( a(y_2, y_3) + \frac{y_1^2}{2} \frac{k_1}{k + k_1} \Delta_1 a, -y_1 \partial_2 a, -y_1 \partial_3 a \right)$$

и для грани  $\pi_2$

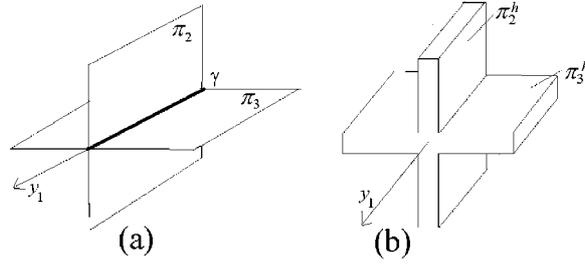
$$g^h = \left( y_2 \partial_1 a(y_1, y_3), a(y_1, y_3) + \frac{y_2^2}{2} \frac{k_1}{k + k_1} \Delta_2 a, y_2 \partial_3 a \right). \quad (4.15)$$

Теперь приведем лемму о продолжении для произвольного вектора  $g = (g_1, g_2, g_3) \in D$  такого, что  $\text{supp } g \cap \square$ , пересекая ребра структуры  $F$ , оказывается на двух координатных плоскостях.

Определим для него матрицы  $D(g)$ ,  $E^{(0)}$ . Заметим, что  $\square \cap F^h$ ,  $\square = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^3$ , есть объединение

трех плит толщины  $2h$ , т.е.  $\square \cap F^h = \pi_1^h \cup \pi_2^h \cup \pi_3^h$ . Плита  $\pi_3^h$  изображена на рис. 2, а другие плиты  $\pi_i^h$  строятся аналогично по квадратам  $\pi_i$ , лежащим в координатных плоскостях  $y_i = 0$ . Пусть  $D(g)$ ,  $E^{(0)}$  — нулевые в точках, принадлежащих хотя бы двум плитам  $\pi_i^h$  (т.е. множеству  $F_0^h$ ), а при  $y \in \pi_i^h$

$$D(g)(y) = D_i(g_i(y)), \quad E^{(0)}(y) = E^{(i)}.$$


 Рис. 10. Окрестность ребра  $\gamma$  на структурах  $F$  и  $F^h$ .

Правые части в последних равенствах — это те же матрицы, что в (4.14).

**Лемма 4.6.** *В изотропном случае для вектора  $g \in D$  существует его продолжение  $g^h$  на структуру  $F^h$  такое, что*

$$(i) \quad Ae(g^h) = -h\beta(y) \left[ kD(g) + \frac{kk_1}{k+k_1} \text{Tr} D(g)E^{(0)} \right]_h + O(h^2) \quad (4.16)$$

$$(ii) \quad g^h \longrightarrow g \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h)^3. \quad (4.17)$$

**Доказательство.** После того, как доказана лемма 4.5, достаточно рассмотреть вектор  $g \in D \setminus D_0$  с носителем  $\text{supp } g \cap \square$  из малой цилиндрической окрестности ребра  $\gamma$  и продолжить  $g$  непосредственно около ребра  $\gamma$  так, чтобы соотношения (4.16), (4.17) остались в силе.

Пусть, например, ребро  $\gamma$  лежит на оси  $Oy_1$  и по ребру  $\gamma$  пересекает две квадратные грани  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  (см. рис. 10(a)), лежащие на координатных плоскостях. Поэтому в некотором цилиндре  $Q_\delta$  с осью  $\gamma$ , сечение которого — круг радиуса  $\delta$ , вектор  $g$  задается формулой (4.1), где  $i = 1$ .

Определим продолжение на плитах  $\pi_3^h$  и  $\pi_2^h$  (см. рис. 10(b)) в точках  $y$ , удаленных от ребра  $\gamma$  не менее, чем на  $3h$ ,  $3h < \delta$ , с помощью формул (4.9), (4.15) соответственно. Тогда на этом множестве справедлива формула (4.16), а для  $y \in Q_\delta \setminus Q_{3h}$  продолжение задается соотношениями

$$g^h(y) = \left( -y_2y_3C'(y_1), -C(y_1)y_3, C(y_1)y_2 + \frac{k_2}{2}y_3^2y_2C''(y_1) \right), \quad y \in \pi_3^h,$$

$$g^h(y) = \left( y_2y_3C'(y_1), -C(y_1)y_3 - \frac{k_2}{2}y_2^2y_3C''(y_1), C(y_1)y_2 \right), \quad y \in \pi_2^h,$$

где  $k_2 = \frac{k_1}{k+k_1}$ , т.е.

$$g^h(y) = C(y_1)\omega_1(y) + \left( -y_2y_3C', 0, \frac{k_2}{2}y_3^2y_2C'' \right), \quad y \in \pi_3^h,$$

$$g^h(y) = C(y_1)\omega_1(y) + \left( y_2y_3C', -\frac{k_2}{2}y_2^2y_3C'', 0 \right), \quad y \in \pi_2^h,$$
(4.18)

и видим несовпадение правых слагаемых. Поэтому в цилиндре  $Q_{3h}$  устроим продолжение  $g^h$  таким образом, чтобы «срастить» соответствующие компоненты этих векторов. Положим в  $Q_{3h}$

$$g^h(y) = C(y_1)\omega_1(y) + (v_1^h(y), v_2^h(y), v_3^h(y)), \quad (4.19)$$

где, например,  $v_1^h(y) = C'(y_1)v^h(y)$ ,  $v^h(y)$  — функция, построенная в п. 4.2, так что  $v_1^h(y)$  сращивает несовпадающие первые компоненты  $-y_2y_3C'$ ,  $y_2y_3C'$  из второго слагаемого в (4.10). Функции  $v_2^h(y)$ ,  $v_3^h(y)$  в (4.19) строятся аналогично. Учтем оценку для «сшивающей» функции  $v^h(y)$  из п. 4.2, а также то, что  $\omega_1(y)$  — жесткое перемещение. Тогда получим соотношения

$$e(g^h) = e(C(y_1)\omega_1) + O(h^2) = \frac{1}{2}(\nabla C \times \omega_1 + \omega_1 \times \nabla C) + O(h^2),$$

$$\int_{Q_{3h}} |e(g^h)| d\mu^h \leq \int_{Q_{3h}} |\nabla C \times \omega_1| d\mu^h + O(h^2) \leq 3h \int_{Q_{3h}} d\mu^h + O(h^2) = O(h^2).$$

Тем самым, мы показали, что для построенного продолжения  $g^h$  вклад  $g^h|_{Q_{3h}}$  в тензор напряжений  $Ae(g^h)$  несущественный, т.е. его можно включить в слагаемое  $O(h^2)$  в (4.16). Точно так же можно объяснить, что второе слагаемое в сумме (4.19) несущественно для сходимости (4.17). Лемма 4.6 доказана.  $\square$

**4.4.** Пусть  $A$  — тензор упругости общего вида,  $\hat{A} = \hat{A}(y)$  — его релаксация (см. §§ 1, 3),  $D(y)$  — матрица, определенная в (1.28), (1.29).

**Лемма 4.7.** Для любого вектора  $g \in D$  существует его продолжение  $g^h$  на структуру  $F^h$  такое, что

$$(i) \quad s = Ae(g^h) = -h\beta(y)[\hat{A}(y)D(g)]_h + O(h^2); \quad (4.20)$$

$$(ii) \quad g^h \rightarrow g \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h)^3.$$

**Доказательство.** 1°. Пусть  $g \in D_0$ , и для определенности предположим, что  $g = (0, 0, a(y'))$ ,  $y' = (y_1, y_2)$ ,  $\text{supp } a \cap \square$ , лежит в квадрате  $\pi_3$  на плоскости  $y_3 = 0$ .

Положим на плите  $\pi_3^h$  (см. рис. 2)

$$g^h(y) = \left( -y_3 \partial_1 a + y_3^2 \frac{b_1}{2}, -y_3 \partial_2 a + y_3^2 \frac{b_2}{2}, a + y_3^2 \frac{b_3}{2} \right),$$

и вектор  $b = b(y')$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ , подберем так, чтобы выполнялось (4.20). Вычисления дают

$$e(g^h) = -y_3 \begin{pmatrix} \partial_1^2 a & \partial_1 \partial_2 a & -b_1 \\ \partial_1 \partial_2 a & \partial_2^2 a & -b_2 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{pmatrix} + O(h^2). \quad (4.21)$$

Запишем тензоры деформаций и напряжений в виде вектор-столбцов

$$e = (e_{11}, e_{22}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33})^T, \quad s = (s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{13}, s_{23}, s_{33})^T,$$

а действие тензора  $A$  будем задавать матрицей размера  $6 \times 6$  (обозначая ее тем же символом)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{26} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{16} & A_{26} & \dots & A_{66} \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (4.20) означает, в силу (4.21), что

$$(s_{11}, \dots, s_{33})^T = A(e_{11}, \dots, e_{33})^T + O(h^2), \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{s} = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix} &= -y_3 \left[ \begin{pmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1^2 a \\ \partial_2^2 a \\ \partial_1 \partial_2 a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] + O(h^2) = \\ &= -y_3 (A_{II,I} \tilde{a} - A_{II,II} b), \quad \tilde{a} = (\partial_1^2 a, \partial_2^2 a, \partial_1 \partial_2 a)^T, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$A_{II,I}$ ,  $A_{II,II}$  — блоки размера  $3 \times 3$  в матрице

$$A = \begin{pmatrix} A_{I,I} & A_{I,II} \\ A_{II,I} & A_{II,II} \end{pmatrix};$$

при этом

$$\tilde{s} = (0, 0, 0)^T. \quad (4.24)$$

Отсюда получаем

$$b = -A_{II,II}^{-1} A_{II,I} \tilde{a}.$$

В таком случае, в соответствии с (4.22), (4.21),

$$(s_{11}, s_{22}, s_{12})^T - y_3(A_{I,I} \tilde{a} - A_{I,II} b) = -y_3(A_{I,I} - A_{I,II} A_{II,II}^{-1} A_{II,I}) \tilde{a}. \quad (4.25)$$

Возвратимся к матричной записи тензоров деформаций и напряжений. Тогда соотношения (4.22)–(4.25) означают, что

$$Ae(g^h) = -y_3 \hat{A}_3 D_3(a) + O(h^2),$$

если использовать формулы (1.24), (1.27) для тензора релаксации  $\hat{A}(y)$  и матрицу вторых производных  $D(g)(y)$  при  $y \in \pi_3$ . Соотношение (4.20) в рассматриваемой ситуации получено.

2°. Для вектора  $g \in D \setminus D_0$  с носителем, пересекающим ребро  $\gamma$ , строим продолжение  $g^h$  в непосредственной близости от  $\gamma$  так же, как при доказательстве леммы 4.6, где мы никак не использовали изотропность тензора  $A$ .  $\square$

## 5. ВЫВОД УСРЕДНЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу (2.1), обобщенный вариант задачи (1.2), и установим для нее теорему усреднения. Предварительно введем более широкое, чем  $V$ , энергетическое пространство  $V'$ , а также определим общую усредненную задачу.

**Определение 5.1.** Пусть  $V'$  — множество вектор-функций вида

$$u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y), \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}'_1).$$

Скажем, что  $u \in V'$  есть решение общей усредненной задачи, если для  $u$  выполнено интегральное тождество (1.27) для любого  $\varphi = \varphi^0(x) + \psi(x, y) \in V'$ .

**Теорема 5.2.** Пусть  $u^{\varepsilon, h}$  — решение задачи (2.1), причем последовательность правых частей  $f^{\varepsilon, h}$  слабо двухмасштабно сходится, т.е.

$$f^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} f(x, y). \quad (5.1)$$

Тогда имеет место слабая двухмасштабная сходимость (3.1), и предельная функция  $u$  есть решение общей усредненной задачи.

Если сходимость правых частей является сильной двухмасштабной,  $f^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} f(x, y)$ , то сходимость решений становится также сильной двухмасштабной. При этом имеет место сходимость упругих энергий

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} Ae(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A}D(\chi) \cdot D(\chi) dx d\mu.$$

**Доказательство.** Сначала используем методы работы [3]. Так же, как в [3], можно доказать, что (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$e(u^{\varepsilon, h}) \xrightarrow{2} e(u^0) + v, \quad (5.2)$$

$$v \in L^2(\Omega, \mathcal{V}_{\text{pot}}), \quad A[e(u^0) + v] \in L^2(\Omega, \mathcal{V}_{\text{sol}}). \quad (5.3)$$

Здесь  $\mathcal{V}_{\text{pot}} = \mathcal{V}_{\text{pot}}(\square, d\mu)$  — пространство периодических потенциальных матриц, определяемое как замыкание множества  $\{e(\varphi), \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^3\}$  в  $L^2(\square, d\mu)^6$ , а  $\mathcal{V}_{\text{sol}} = \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  — пространство соле-ноидальных матриц,  $\mathcal{V}_{\text{sol}} = (\mathcal{V}_{\text{pot}})^{\perp}$  в  $L^2(\square, d\mu)^6$ . Кроме того, можно доказать соотношение

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad -\text{div} A^{\text{hom}} e(u^0) = \langle f \rangle, \quad (5.4)$$

совпадающее с (1.11) в том случае, когда  $f$  не зависит от  $y$ . Оно получено некоторым предельным переходом в интегральном тождестве (2.1). Теперь необходимо сделать специальный предельный переход в этом тождестве с учетом особенностей критического случая.

В интегральном тождестве (2.1) возьмем пробную функцию

$$\varphi(x) = w(x)g^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где  $w \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $g^h(y)$  — продолжение вектора  $g(y) \in D$  на  $F^h$ , рассмотренное в лемме 4.7. Тогда получим

$$\varepsilon^{-1} \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e_y(g^h)w \, d\mu_\varepsilon^h + \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot (g^h \times \nabla w) \, d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} f \cdot g^h w \, d\mu_\varepsilon^h. \quad (5.5)$$

Здесь при вычислении  $e(\varphi)$  воспользовались равенством

$$e(wg^h) = \varepsilon^{-1}we_y(g^h) + \frac{1}{2}[g^h \times \nabla w + \nabla w \times g^h].$$

Предел правой части в (5.5) вычисляется просто. Действительно, из пункта (ii) леммы 4.7 и предложения 2.5 следует сильная сходимость  $g^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} g(y)$ , которая вместе со слабой сходимостью (5.1) приводит к равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot g^h w \, d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot gw \, dx \, d\mu.$$

Найдем предел первого слагаемого в левой части (5.5). Из (4.20) получаем (см. также (3.14))

$$T_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e_y(g^h)w \, d\mu_\varepsilon^h = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot Ae_y(g^h)w \, d\mu_\varepsilon^h = -\frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} \sigma(u^{\varepsilon,h}) \cdot \hat{A}D(g)w \, d\mu_\varepsilon^h + O(\varepsilon).$$

Слабая сходимость (3.15) и сильная сходимость  $[\hat{A}D(g)]_h \xrightarrow{2} \hat{A}D(g)$  позволяют заключить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_1(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A}D(\chi) \cdot D(g)w \, dx \, d\mu = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A}D(\chi) \cdot D(gw) \, dx \, d\mu.$$

Рассмотрим второе слагаемое в левой части (5.5). Из сильной двухмасштабной сходимоссти  $g^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} g(y)$  и слабой двухмасштабной сходимоссти (5.2) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2(\varepsilon) = \int_{\Omega} \int_{\square} A[e(u^0(x)) + v(x, y)] \cdot [g(y) \times \nabla w] \, dx \, d\mu.$$

Поскольку периодическая матрица  $A[e(u^0(x)) + v(x, \cdot)]$  соленоидальна (см. (5.3)), то она поточечно ортогональна матрице  $g(\cdot) \times \nabla w(x)$  (см. [3, лемма 5.3]). Это означает, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2(\varepsilon) = 0$ .

Итак, установлено тождество

$$\frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A}D(\chi) \cdot D(\psi) \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \psi \, dx \, d\mu, \quad (5.6)$$

где  $\psi(x, y) = w(x)g(y)$ ,  $g \in D$ . Отсюда заключаем (в силу предложения 4.4), что это тождество выполнено для любого  $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}'_1)$ .

Рассмотрим произвольный элемент энергетического пространства  $V'$

$$\varphi(x, y) = \varphi^0(x) + \psi(x, y), \quad \varphi^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \psi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}'_1).$$

Из (5.4) заключаем, что

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) \, dx = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi^0 \, dx \, d\mu.$$

Если теперь сложить это тождество с тождеством (5.6), то получим, что  $u$  есть решение общей усредненной задачи (см. определение 4.1). Этим исчерпан случай слабой сходимоссти правых частей.

Изучим случай сильной сходимости  $f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x,y)$ . Для этого рассмотрим второй экземпляр задачи (2.1), в котором решение обозначено через  $v^{\varepsilon,h}$ , а правая часть — через  $z^{\varepsilon,h}$ , т.е.

$$v^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}, \quad \int_{\Omega} Ae(v^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} z^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^3.$$

Полагая здесь  $\varphi = u^{\varepsilon,h}$ , а в (2.1)  $\varphi = v^{\varepsilon,h}$ , получим формулу Грина—Бетти

$$\int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} v^{\varepsilon,h} \cdot f^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h.$$

Считаем, что  $z^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} z$ . Тогда получим второе усредненное уравнение для функции  $v(x,y) = v^0(x) + \zeta(x,y)$ , являющейся двухмасштабным пределом последовательности  $v^{\varepsilon,h}$ . Запишем это уравнение с пробной функцией  $u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y)$ :

$$\int_{\Omega} Ae(v^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \hat{A}D(\zeta) \cdot D(\chi) dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} z \cdot u dx d\mu.$$

Видим, что его левая часть такая же, как у тождества (1.27) с пробной функцией  $v(x,y)$ , поэтому

$$\int_{\Omega} \int_{\square} z \cdot u dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot v dx d\mu. \quad (5.7)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} v \cdot f dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} u \cdot z dx d\mu. \quad (5.8)$$

Здесь мы воспользовались сильной сходимостью  $f^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} f$  (см. (2.7)), слабой сходимостью  $v^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} v$  и равенством (5.7). Поскольку  $z^{\varepsilon,h}$  — произвольная слабо двухмасштабно сходящаяся последовательность, то равенство (5.8) дает искомую сильную двухмасштабную сходимость  $u^{\varepsilon} \xrightarrow{2} u$  (см. (2.7)).

Сходимость энергий устанавливается теперь совсем просто. Из (2.2) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot u dx d\mu.$$

Сравнивая это равенство с энергетическим равенством (1.30), получим искомую сходимость упругих энергий. Теорема 5.2 доказана.  $\square$

Теперь обратимся к исходной задаче (1.2) с гладкой правой частью  $f$ . Компонента  $u^0$  является решением эллиптической задачи (1.11), и поэтому  $u^0 \in C(\bar{\Omega})^3$ .

Решение задачи (5.6)  $\chi(x, \cdot)$  как функция аргумента  $y$  есть минимизант вариационной задачи на отыскание минимума

$$\min_{R'_1} \frac{\theta^2}{3} \int_{\square} (\hat{A}D(g) \cdot D(g) - 2g \cdot c) d\mu(y), \quad c = f(x). \quad (5.9)$$

Поскольку структура  $F$  инвариантна относительно поворота на  $180^\circ$  вокруг оси, проходящей через любое ребро, а вектор  $c$  — постоянный по  $y$ , то функция  $\chi(x, \cdot)$  обладает некоторыми свойствами четности по переменной  $y$ , а именно,

$$\chi(y_1, y_2, y_3) = \chi(y_1, -y_2, -y_3) = \chi(-y_1, -y_2, y_3) = \chi(-y_1, y_2, -y_3)$$

для любого  $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3$ . Поэтому условие (3.2) для этой функции приобретает более конкретный вид: соответствующие производные на ребрах — все нулевые. Значит, минимизант  $\chi(x, \cdot) \in R'_1$

задачи (5.9) есть, на самом деле, элемент более узкого пространства  $R_1^0$ , поэтому  $\chi(x, \cdot)$  является одновременно минимизантом вариационной задачи на отыскание минимума

$$\min_{R_1^0} \frac{\theta^2}{3} \int_{\square} (\hat{A}D(g) \cdot D(g) - 2g \cdot c) d\mu(y), \quad c = f(x).$$

Но последняя вариационная задача распадается на три отдельные задачи (1.25) на гранях  $\Pi_i$ . Отсюда делаем выводы: во-первых, функция  $\chi(x, y)$  может быть представлена в виде суммы типа (2.9); во-вторых, для решений задачи (1.2) имеет место сходимость (3.1) к предельной функции  $u(x, y) \in V$ , удовлетворяющей интегральному тождеству (1.27) ((1.18) в случае, когда  $A$  — изотропный тензор), причем сходимость (3.1) можно заменить на сильную двухмасштабную сходимость ввиду очевидного замечания:  $f(x) \xrightarrow{2} f(x)$  в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^3$ .

Так как выполнены условия леммы 2.6, то сильная сходимость  $u^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} u$  влечет соотношение (1.9). Тем самым и теорема 1.5 доказана, причем без предположения об изотропности тензора  $A$ .

## 6. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

### 6.1. О тензоре релаксации.

6.1.1. Найдем для ящичной структуры тензор релаксации, когда исходный тензор упругости  $A$  общего вида. В соответствии с определением (1.21) для  $i = 3$  вычислим  $\hat{A}\xi \cdot \xi$ , если  $\xi \in \mathcal{E}_3^\perp$ . Для этого надо найти матрицу  $\eta \in \mathcal{E}_3$  такую, что выполнено уравнение Эйлера

$$A(\xi + \eta) \cdot \zeta = 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{E}_3,$$

т.е.

$$A(\xi + \eta) \in \mathcal{E}_3^\perp, \tag{6.1}$$

и тогда

$$\hat{A}_3\xi \cdot \xi = A(\xi + \eta) \cdot \xi. \tag{6.2}$$

Удобно представлять матрицы  $\xi \in \mathcal{E}_3^\perp$ ,  $\eta \in \mathcal{E}_3$  в виде шестикомпонентных вектор-стлбцов

$$\xi = (\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{12}, 0, 0, 0)^T, \quad \eta = (0, 0, 0, \eta_{31}, \eta_{32}, \eta_{33})^T,$$

а действие тензора  $A$  задавать матрицей (1.22) размера  $6 \times 6$ , разбитой на блоки (1.24). Тогда условие (6.1) означает, что

$$A_{II,I}\tilde{\xi} + A_{II,II}\tilde{\eta} = 0, \quad \tilde{\xi} = (\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{12})^T, \quad \tilde{\eta} = (\eta_{31}, \eta_{32}, \eta_{33})^T.$$

Поэтому

$$\tilde{\eta} = -A_{II,II}^{-1}A_{II,I}\tilde{\xi}$$

и, в силу (6.2),

$$\hat{A}_3\xi \cdot \xi = A\xi \cdot \xi + A\eta \cdot \xi = A_{I,I}\tilde{\xi} \cdot \tilde{\xi} - A_{I,II}A_{II,II}^{-1}A_{II,I}\tilde{\xi} \cdot \tilde{\xi},$$

откуда следует формула (1.23).

6.1.2. В случае изотропного тензора  $A$  (см. (1.1)) найдем его релаксацию с помощью формулы (3.28). Для обратного тензора  $A^{-1}$  (тоже изотропного) имеются соотношения

$$A^{-1}\eta = \frac{1}{k}\eta - \frac{k_1}{k(k+3k_1)}(\text{Tr } \eta)E, \quad A^{-1}\eta \cdot \eta = \frac{1}{k}\eta \cdot \eta - \frac{k_1}{k(k+3k_1)}(\text{Tr } \eta)^2.$$

Пусть  $P(y)$  — проектор, определенный в п. 3.6 после формулы (3.26). Учитывая его действие на каждой грани  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , находим  $A^{-1}P(y)\eta \cdot P(y)\eta$ . Например, для  $y \in \Pi_3$

$$A^{-1}P(y)\eta \cdot P(y)\eta = \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{k}\eta_{ij}\eta_{ij} - \frac{k_1}{k(k+3k_1)}(\eta_{11} + \eta_{22})^2.$$

Поэтому  $PA^{-1}P|_{\Pi_i}$  как оператор, действующий на симметрических матрицах второго порядка  $\eta = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^2$ , является плоским изотропным тензором с коэффициентами Ламе  $\frac{1}{k}$ ,  $-\frac{k_1}{k(k+3k_1)}$ .

Обратный к нему тоже изотропен с коэффициентами Ламе  $k, \frac{kk_1}{k+k_1}$ . В соответствии с формулой (3.28), тензор релаксации найден, и

$$\hat{A}\eta \cdot \eta = \sum_{i,j=1}^2 k\eta_{ij}\eta_{ij} + \frac{kk_1}{k+k_1}(\eta_{11} + \eta_{22})^2. \quad (6.3)$$

Ограничение  $PA^{-1}P$  на другие грани, в силу изотропности тензора  $A^{-1}$ , приводит к той же формуле (6.3).

**6.2. Об аппроксимативных свойствах соболевских пространств теории упругости на ящичных структурах.** Пусть меры  $\mu^h, \mu$  — те же, что в §§ 1, 2. С мерой  $\mu$  свяжем пространства потенциальных и соленоидальных матриц. По определению,  $V_{\text{pot}}(\square, d\mu)$  — замыкание множества

$$\{e(\varphi), \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^3\} \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu)^6.$$

Пространство соленоидальных матриц  $V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  определяется как ортогональное дополнение к  $V_{\text{pot}}(\square, d\mu)$  в  $L^2(\square, d\mu)^6$ , т.е. имеет место разложение

$$V_{\text{pot}}(\square, d\mu) \oplus V_{\text{sol}}(\square, d\mu) = L^2(\square, d\mu)^6.$$

Аналогично определяются пространства  $V_{\text{pot}}(\square, d\mu^h), V_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$ .

Для вектора  $a \in L^2(\square, d\mu)^3$  и матрицы  $b \in L^2(\square, d\mu)^6$  скажем, что  $a = \text{div } b$  (в смысле меры  $\mu$ ), если

$$\int_{\square} a \cdot \varphi \, d\mu = - \int_{\square} b \cdot e(\varphi) \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^3.$$

Пространство жестких перемещений  $\mathcal{R}$  введено в § 1 (определение 1.1). Пусть  $\mathcal{R}^\perp$  — ортогональное дополнение в  $L^2(\square, d\mu)^3$ .

В [3] показано, что для справедливости основных свойств двухмасштабной сходимости и усреднения требуется, чтобы меры  $\mu^h, \mu$  были связаны между собой аппроксимативными свойствами:

(i) для любого вектора  $a$  из некоторого плотного в  $\mathcal{R}^\perp$  множества найдутся вектор  $a^h \in L^2(\square, d\mu)^2$  и матрица  $b^h \in L^2(\square, d\mu^h)$  такие, что  $\text{div } b^h = a^h$  (в смысле меры  $\mu^h$ ),  $a^h \rightarrow a, b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)^3$  и  $L^2(\square, d\mu^h)^6$  соответственно;

(ii) для любой матрицы  $b \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  найдется матрица  $b^h \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$  такая, что  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)^6$  (сильная аппроксимируемость соленоидальных матриц).

Для ящичных структур аппроксимативное свойство (i) проверено в [3, § 16]. К тому же, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.1.** *Для мер  $\mu^h, \mu$ , введенных в §§ 1, 2 для ящичных структур, справедливо свойство (ii) сильной аппроксимируемости соленоидальных матриц.*

Доказательство теоремы 6.1 использует следующие два утверждения из [3].

**Утверждение 1** (см. [3, лемма 16.4]). *Свойство сильной аппроксимируемости соленоидальных матриц эквивалентно свойству сохранения потенциальности при слабой сходимости матриц.*

**Утверждение 2** (см. [3, Теорема 16.2]). *Пусть мера  $\tilde{\mu}^h$  получена сглаживанием меры  $\mu$ . Тогда аппроксимативные свойства выполнены.*

Сделаем необходимые комментарии к приведенным утверждениям. В теории соболевских пространств с переменной мерой справедлив следующий факт: слабый предел потенциальных матриц не обязательно является потенциальной матрицей. Пример потенциальных матриц с таким поведением можно построить, используя конструкции из [4, 5]. Утверждение 1 означает, что если

$$v^h \in V_{\text{pot}}(\square, d\mu^h), \quad v^h \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h)^3, \quad (6.4)$$

то  $v \in V_{\text{pot}}(\square, d\mu)$  тогда и только тогда, когда выполнено аппроксимативное свойство (ii).

В связи с утверждением 2 напомним конструкцию сглаживания меры. По определению, мера  $\tilde{\mu}^h$  есть сглаживание меры  $\mu$ , если

$$\int_{\square} \varphi d\tilde{\mu}^h = \int_{\square} (\varphi)_h d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square).$$

Здесь  $(\varphi)_h$  — обычное сглаживание функции  $\varphi$ , т.е.

$$(\varphi)_h(x) = h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x-y) \omega(h^{-1}y) dy,$$

где ядро сглаживания  $w(y)$  — финитная неотрицательная четная функция,  $\int_{\mathbb{R}^3} w dy = 1$ .

Мера  $\tilde{\mu}^h$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега  $dx$ :

$$d\tilde{\mu}^h = \tilde{\rho}^h(x) dx, \quad \tilde{\rho}^h(x) = h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) d\mu(y). \quad (6.5)$$

### Доказательство теоремы 6.1.

Пусть  $\tilde{\mu}^h$  — сглаживание по Стеклову меры  $\mu$ , т.е. ядро сглаживания  $w$  есть ядро Стеклова (см. [12])

$$\omega(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & y \in [-1, 1]^3 = Q, \\ 0, & y \notin \bar{Q}. \end{cases}$$

В этом случае

$$\tilde{\rho}^h(x) = (2h)^{-3} \int_{x+Q_h} d\mu(y) = (2h)^{-3} \mu(x+Q_h),$$

где  $Q_h(x) = [-h, h]^3$ . Отсюда

$$\tilde{\rho}^h(x) = \begin{cases} 0, & x \notin F^h, \\ \frac{1}{6h}, & x \in \Pi_i, \quad i = 1, \dots, 12, \\ \frac{1}{3h}, & x \in \Pi_{ij}, \\ \frac{1}{2h}, & x \in Q_h. \end{cases} \quad (6.6)$$

Здесь  $\Pi_i$  — это те части  $h$ -плит, составляющих структуру  $F^h \cap \square$ , которые не попадают в пересечение с другими  $h$ -плитами. Как видно из рис. 1, можно выделить 12 таких кусков. Например,  $\Pi_1 = [h, \frac{1}{2}]^2 \times [-h, h]$ . Через  $\Pi_{ij}$  обозначены параллелепипеды (брусы), являющиеся пересечением только двух плит в ячейке периодичности  $\square$ . Таких брусков шесть, линейные размеры их:  $2h, 2h, \frac{1}{2} - h$ .

Мера  $\tilde{\mu}^h$  в «основном» сосредоточена на множестве  $\bigcup \Pi_i$ , где ее плотность равна  $\frac{1}{6h}$ .

Сравним меру  $\tilde{\mu}^h$  с естественной мерой  $\mu^h$ , введенной в § 2. Мера  $\mu^h$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега

$$d\mu^h = \rho^h dx, \quad \rho^h(x) = \begin{cases} c_h = \text{const}, & x \in F^h, \\ 0, & x \notin F^h. \end{cases} \quad (6.7)$$

Из условия нормировки  $\int_{\square} d\mu^h = 1$  находим, что

$$c_h = \frac{1}{6h}(1 + O(h)). \quad (6.8)$$

Из (6.5), (6.6) видим, что меры  $\tilde{\mu}^h, \mu^h$  «почти совпадают» на «основной» части  $\bigcup \Pi_i$ . Кроме того, справедлива очевидная оценка

$$c_1 \rho^h < \tilde{\rho}^h \leq c_2 \rho^h, \quad c_i > 0. \quad (6.9)$$

Пусть выполнено (6.4). Требуется проверить, что  $v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}(\square, d\mu)$ . Тогда, в силу утверждения 1, будет установлено и аппроксимативное свойство (ii).

Заметим, что  $v_h \in \mathcal{V}_{\text{pot}}(\square, d\tilde{\mu}^h)$  и  $v_h$  ограничена в  $\mathcal{V}_{\text{pot}}(\square, d\tilde{\mu}^h)$ , как это следует из оценки (6.9). Без потери общности считаем, что  $v_h \rightharpoonup \tilde{v}$  в  $L^2(\square, d\tilde{\mu}^h)$ . В силу утверждения 2, имеем  $\tilde{v} \in \mathcal{V}_{\text{pot}}(\square, d\mu)$ , и остается проверить равенство  $v = \tilde{v}$ .

Заметим, что для слабой сходимости  $a^h \rightharpoonup a$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$  достаточно, чтобы соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} a^h \psi d\mu^h = \int_{\square} a \psi d\mu$$

выполнялось для любой функции  $\psi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$ , финитной в окрестности ребер структуры  $F$ . Аналогичное свойство справедливо для слабой сходимости  $a^h \rightharpoonup \tilde{a}$  в  $L^2(\square, d\tilde{\mu}^h)$ . Но из (6.6)–(6.8) для такой пробной функции  $\psi$  получим

$$\int_{\square} a^h \psi d\mu^h = \int_{\square} a^h \psi d\tilde{\mu}^h + o(1).$$

Отсюда

$$\int_{\square} a \psi d\mu = \int_{\square} \tilde{a} \psi d\mu \implies a = \tilde{a}.$$

Поэтому, в самом деле,  $v = \tilde{v}$ , и теорема доказана.  $\square$

Итак, можно сделать следующий общий вывод. Для ящичных структур аппроксимативные свойства выполнены в полном объеме, что дает основание пользоваться общими результатами работы [3]. Например, в § 5 мы воспользовались теоремой 16.1 из [3].

**6.3. О теореме 3.8.** Теорема 3.8 есть следствие одного общего результата из теории двухмасштабной сходимости в  $L^2$ -пространствах с переменной мерой, приведенного в [10].

Если  $\mu$  — периодическая мера в  $\mathbb{R}^N$ , то соотношение  $\text{div } b = a$  (в смысле меры  $\mu$ ) означает, что  $a \in L^2(\square, d\mu)$ ,  $b \in L^2(\square, d\mu)^N$  и

$$\int_{\square} b \cdot \nabla \varphi d\mu = - \int_{\square} a \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square).$$

В частности, если  $a = 0$ , то вектор  $b$  соленоидален,  $b \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$ .

Пусть  $\mu^h, \mu$  — периодические меры,  $\mu^h \rightharpoonup \mu$ . Напомним (см. [3]) так называемые аппроксимативные условия для соболевских пространств скалярных функций.

(i) Для любой функции  $a$  из некоторого плотного в  $L^2(\square, d\mu)/\mathbb{R}^1$  множества найдутся  $a^h \in L^2(\square, d\mu^h)$ ,  $b^h \in L^2(\square, d\mu)^N$  такие, что  $\text{div } b^h = a^h$  (в смысле меры  $\mu^h$ ),  $a^h \rightarrow a$ ,  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ .

(ii) Для любого вектора  $b \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  найдется вектор  $b^h \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$  такой, что  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$  (сильная аппроксимируемость соленоидальных векторов).

Имеет место следующий общий результат (теорема 5.3 из [10]).

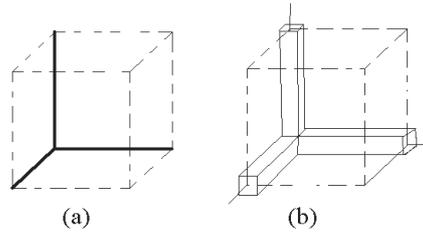


Рис. 11. Стержневые каркасы: сингулярный и тонкий.

Пусть  $\mu^h, \mu$  — периодические борелевы меры,  $\mu^h \rightarrow \mu$ , которые связаны аппроксимативными условиями (i), (ii). Пусть, кроме того, для предельной меры  $\mu$  справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_{\square} \varphi^2 d\mu \leq C \int_{\square} |\nabla \varphi|^2 d\mu, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square), \quad \int_{\square} \varphi d\mu = 0. \quad (6.10)$$

Тогда для последовательности скалярных функций  $v^{\varepsilon, h}$ , удовлетворяющей условию ограниченности (3.21), выполнено свойство (3.22).

В классическом случае, когда  $d\mu^h = dy$  — мера Лебега, эта теорема доказана в [15, 16].

Случай постоянной борелевой меры ( $\mu^h = \mu$ ) рассмотрен в [6, теорема 4.5]. Доказательство общей версии проводится аналогично с использованием аппроксимативных условий.

Обратимся непосредственно к теореме 3.8. Неравенство Пуанкаре (6.10) есть следствие связности сингулярной ящичной структуры. Поэтому остается проверить аппроксимативные условия (i), (ii) для пространства скалярных функций на ящичных структурах.

Условие (i) проверяется так же, как аналогичное условие для пространства теории упругости в [3, § 16]. Чтобы проверить условие (ii), надо повторить доказательство теоремы 6.1, изменив всюду потенциальные и соленоидальные матрицы на потенциальные и соленоидальные векторы.

## 7. О СТЕРЖНЕВЫХ КАРКАСАХ

**7.1.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  1-периодический бесконечно тонкий стержневой каркас  $F$ , составленный только из прямых, которые получены целочисленными сдвигами трех осей координат. Каркас  $F$  в пределах ячейки периодичности  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3$  имеет один узел, в нем сходятся шесть отрезков. Введем периодическую нормированную меру  $\mu$ ; она сосредоточена на каркасе  $F$  и пропорциональна на нем линейной мере Лебега,  $\int_{\square} d\mu = 1$ ,  $\int_{\square} g d\mu = \langle g \rangle$  — среднее по мере  $\mu$ .

Каркасу  $F$ , который будем называть сингулярным, сопоставим тонкий 1-периодический каркас  $F^h$ ,  $h > 0$ , составленный либо из бесконечных брусов, в сечении которых квадрат со стороной  $2h$ , либо из бесконечных цилиндров, в сечении которых круг радиуса  $h$ . В обоих случаях каждая прямая каркаса  $F$  является осью для соответствующего бесконечного стержня из каркаса  $F^h$  (см. рис. 11 (a), (b)).

Гомотетическим сжатием каркаса  $F^h$  получаем  $\varepsilon$ -периодический каркас  $F_{\varepsilon}^h = \varepsilon F^h$ . Стержни каркаса  $F_{\varepsilon}^h$  имеют в сечении либо квадрат со стороной  $2\varepsilon h$ , либо круг радиуса  $\varepsilon h$ .

Мера  $\mu^h$  сосредоточена на каркасе  $F^h$  и пропорциональна там трехмерной мере Лебега,  $\int_{\square} d\mu^h = 1$ . Далее там же, как для ящичных структур, вводим меру  $\mu_{\varepsilon}^h$ , сосредоточенную на каркасе  $F_{\varepsilon}^h$ .

Считаем, что  $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

На каркасе  $F_\varepsilon^h$  выполнены следующие неравенства Корна ([7, 8]) для функций  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ :

$$\int_{F_\varepsilon^h} |u|^2 dx \leq C_1 \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2\right) \int_{F_\varepsilon^h} |e(u)|^2 dx, \quad (7.1)$$

$$\varepsilon^2 \int_{F_\varepsilon^h} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \int_{F_\varepsilon^h} (|e(u)|^2 + |u|^2) dx, \quad (7.2)$$

где константа  $C_1$  зависит лишь от диаметра  $\text{supp } u$ , а  $C_2$  — абсолютная константа.

Так же, как в § 1, свяжем с ограниченной липшицевой областью  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  и введенной стержневой структурой  $F_\varepsilon^h$  перфорированную область  $\Omega \cap F_\varepsilon^h$ , пространство  $W_{\varepsilon,h}$  и рассмотрим задачу (2.1) с правой частью  $f^{\varepsilon,h}(x)$  такой, что  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h$ . Будем считать, что  $f^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} f(x,y)$  в  $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^3$ .

Задача (2.1) имеет единственное решение  $u^{\varepsilon,h}$ , равномерно ограниченное по  $\varepsilon, h$  (см. (2.3)), в силу неравенства (7.1), если структура  $F_\varepsilon^h$  достаточно толстая или критической толщины по классификации, данной в § 1, т.е. если  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{-1}(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \text{const} \geq 0$ .

Для достаточно толстой структуры ( $h^{-1}(\varepsilon) \cdot \varepsilon \rightarrow 0$ ) справедлива теорема усреднения, в точности аналогичная теореме 1.2, и мы ее не формулируем, а далее рассмотрим стержневую структуру критической толщины  $h(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-1} \rightarrow \theta > 0$ .

**7.2.** Пространство  $\mathcal{R}$  жестких периодических перемещений на сингулярной структуре  $F$  (см. определение 1.1) состоит из векторов, допускающих представление (1.8), в котором поперечное перемещение  $\chi(y)$  на каждом стержне структуры  $F$  есть произвольный вектор из плоскости, ортогональной стержню.

Назовем звеном отрезок  $I \subset F$  между узлами решетки  $F$ , не содержащий внутри себя другие ее узлы.

Для векторов  $g \in \mathcal{R}_1$  введем три условия.

(а) Для всякого орта  $\nu$ , ортогонального звену  $I$ , скалярная функция  $g \cdot \nu$  и ее первая и вторая производные суммируемы с квадратом на отрезке  $I$ , что коротко обозначаем  $g \cdot \nu \in H^2(I)$ .

Для функции из класса  $H^2(I)$  определены в любой точке отрезка  $I$  значения функции и ее производной. Таким образом, если условие (а) выполнено на каждом звене  $I$  структуры  $F$ , то можно говорить о следующих условиях в произвольном узле структуры  $F$ .

(b) Условие закрепления:  $g|_O = 0$ .

На сходящихся в узле  $O$  стержнях  $I_i, I_j$  с направлениями  $\tau_i, \tau_j$  выберем нормальные орты  $\nu_i, \nu_j$ , компланарные с парой  $\tau_i, \tau_j$ , так, что обе пары  $\tau_i, \nu_i$  и  $\tau_j, \nu_j$  — правые. При фиксированном  $\tau_i$  орт  $\nu_i$  определен однозначно, а производная  $(g \cdot \nu_i)'_{\tau_i}$  не зависит от выбора  $\tau_i$ .

(с) Для всякой пары стержней  $I_i, I_j$ , сходящихся в узле  $O$ , справедливо равенство

$$(g \cdot \nu_i)'_{\tau_i}|_O = (g \cdot \nu_j)'_{\tau_j}|_O.$$

По определению,  $\mathcal{R}_1^0$  — множество векторов  $g \in \mathcal{R}_1$ , для которых выполнены условия (а)–(с) на каждом звене и в каждом узле структуры  $F$ .

Рассмотрим подробно условие (с) для звеньев  $I_i, i = 1, 2, 3$ , изображенных на рис. 11(а):  $I_i$  сходятся в начале координат, звено  $I_i$  принадлежит оси  $Oy_i$ . На каждом звене  $I_i$  вектор  $g(y) = (g_1(y), g_2(y), g_3(y)) \in \mathcal{R}_1$  имеет координату  $g_i$ , тождественно равную нулю, а две другие его координаты  $g_j, g_m$  ( $i, j, m$  — перестановка чисел 1, 2, 3) — функции от переменной  $y_i$ . Условие (с) определяет три константы  $C_1, C_2, C_3$ :

$$g'_2(y_1)|_0 = -g'_1(y_2)|_0 = C_3, \quad g'_3(y_1)|_0 = -g'_1(y_3)|_0 = C_2, \quad g'_3(y_2)|_0 = -g'_2(y_3)|_0 = C_1. \quad (7.3)$$

Введем  $\rho(y)$  — кусочно-постоянную функцию, значение которой на звене  $I$  с направляющим ортом  $\tau$  определяется по формуле

$$\rho(y) = (A^{-1}\eta \cdot \eta)^{-1}, \quad \eta = \tau \times \tau. \quad (7.4)$$

Несложные вычисления показывают, что в изотропном случае  $\rho(y)$  принимает одно значение на всех звеньях

$$\rho(y) = \hat{k} = \frac{k(k + 3k_1)}{k + 2k_1}.$$

Далее для определенности рассматриваем тонкий каркас  $F^h$ , состоящий из брусов. В конце параграфа укажем, какие изменения надо внести в формулировки утверждений, если каркас  $F^h$  составлен из круговых цилиндров.

**Определение 7.1.** Пусть  $V$  — множество вектор-функций вида

$$u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y), \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \chi \in L^2(\Omega, R_1^0). \quad (7.5)$$

Скажем, что  $u \in V$  есть решение усредненной задачи, если интегральное тождество

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho(y) \chi'' \cdot \psi'' dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi dx d\mu \quad (7.6)$$

выполняется для любого вектора  $\varphi = \varphi^0 + \psi \in V$ .

Множество  $V$  назовем энергетическим пространством усредненной задачи.

Задача (7.6) распадается на отдельные задачи для векторов  $u^0$  и  $\chi$ :  $u^0$  — решение задачи (5.4), а  $\chi$  — минимизант вариационной задачи на отыскание минимума

$$\min_{\chi \in R_1^0} \int_{\square} \left( \frac{\theta^2}{3} \rho(y) \chi'' \cdot \chi'' - 2\chi \cdot f(x, y) \right) d\mu(y). \quad (7.7)$$

Получаем уравнение Эйлера (в обобщенной форме) для задачи (7.7)

$$\chi \in R_1^0 : \int_{\square} \frac{\theta^2}{3} \rho(y) \chi''(y) \cdot g''(y) d\mu(y) = \int_{\square} f(x, y) \cdot g(y) d\mu(y) \quad \forall g \in \mathcal{R}_1^0.$$

Правая часть в этом уравнении зависит от  $x$  как от параметра, и посредством нее решение  $\chi$  также получает зависимость от переменной  $x$ . Можно найти краевую задачу для точки минимума  $\chi$  на ячейке периодичности  $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3$ , более точно, на шести звеньях  $I_1, \dots, I_6$ , сходящихся в начале координат  $O$  с условиями сопряжения в узле  $O$ .

Пусть  $P_1 : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}_1$  — оператор, переводящий в каждой неузловой точке  $y \in I_j$  вектор  $c$  в поперечное перемещение  $P_1 c$ , равное ортогональной к  $I_j$  составляющей вектора  $c$  в точке  $y$ . Пусть также  $\chi_j = \chi|_{I_j}$ ,  $\rho_j = \rho|_{I_j}$ . Тогда

$$\chi \in R_1^0, \quad \frac{\theta^2}{3} \rho_j \chi_j^{(IV)}(y) = P_1 f(x, y) \quad \text{на } I_j, \quad j = 1, \dots, 6,$$

$$\sum_{I_j \subset \pi_k} \rho_j \frac{d^2}{d\tau_j^2} (\chi_j \cdot \nu_j) \Big|_O = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

В последней сумме суммирование ведется по тем звеньям  $I_j$ , которые принадлежат координатной плоскости  $\pi_k = \{y_k = 0\}$ ; при этом  $\tau_j, \nu_j$  — правая двойка ортов на  $I_j$ , компланарных  $\pi_k$ , и направляющий вектор  $\tau_j$  выходит из точки  $O$ .

Общую теорию двухмасштабной сходимости на тонких структурах [3] можно уточнить, если тонкая структура — стержневой каркас  $F_\varepsilon^h$  критической толщины.

**Теорема 7.2.** Пусть для последовательности функций  $u^{\varepsilon, h} \in W_{\varepsilon, h}$  выполнены соотношения (2.3), (3.1). Тогда предельная функция  $u(x, y)$  удовлетворяет соотношению (7.5), т.е. принадлежит энергетическому пространству усредненной задачи.

Этот результат применим к последовательности решений задачи (2.1). Более того, верен следующий принцип усреднения.

**Теорема 7.3.** Пусть  $u^{\varepsilon,h}$  — решение задачи (2.1), причем последовательность правых частей слабо двухмасштабно сходится

$$f^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} f(x, y).$$

Тогда имеет место слабая двухмасштабная сходимость (3.1), и предельная функция  $u(x, y)$  есть решение усредненной задачи (7.6).

Если сходимость правых частей является сильной двухмасштабной,  $f^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} f(x, y)$ , то сходимость решений становится также сильной двухмасштабной. При этом имеет место сходимость упругих энергий

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho(y) \chi'' \cdot \chi'' dx d\mu. \quad (7.8)$$

**7.3. О доказательстве теоремы 7.2.** Далее приводим основную техническую лемму (аналог леммы 3.4) для отрезка  $I$ , расположенного на оси  $Oy_1$  в пределах ячейки периодичности  $\square$ . Пусть  $\alpha(y_1) \in C_0^{\infty}(I)$  и периодически продолжена на  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , функция  $\beta_0(t)$  та же, что в § 3, и пусть

$$J_{\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon,h} \beta_0\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h, \quad i = 2, 3.$$

**Лемма 7.4.** Имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_i(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u_i(x, y) \alpha'(y_1) \varphi(x) dx d\mu(y), \quad i = 2, 3. \quad (7.9)$$

Пусть  $I \subset F$  — отрезок общего положения с тройкой ортов  $(\tau, \nu_1, \nu_2)$ , коллинеарных осям координат,  $I^h$  —  $h$ -стержень структуры  $F^h$ , продольная ось которого — отрезок  $I$ . Введем 1-периодическую функцию

$$\beta_i(y) = \begin{cases} \frac{1}{h} \nu_i \cdot y & \text{на } I^h, \\ 0 & \text{на } \square \setminus I^h, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (7.10)$$

Для стержня  $I$ , принадлежащего оси  $Oy_1$ ,  $\eta_1(y) = \beta_0(y_2)$ ,  $\beta_2(y) = \beta_0(y_3)$ .

Пусть  $\alpha(y)$  — гладкая функция, зависящая только от предельной координаты на стержне  $I^h$  и равная нулю в окрестности его торцов. Тогда выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\square} (u^{\varepsilon,h} \cdot \tau) \beta_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u(x, y) \cdot \nu_i \frac{\partial \alpha(y)}{\partial \tau} \varphi(x) dx d\mu(y). \quad (7.11)$$

При выводе соотношений (7.9), (7.11) используется неравенство Корна (7.2).

Пусть далее  $\beta_i(y)$ ,  $i = 1, 2$ , равна нулю в пересечении  $h$ -стержней и определяется по формуле (7.10) в точках, принадлежащих одному какому-то стержню  $I^h$ , и пусть

$$\sigma_i(y) = -(\tau \times \tau) \beta_i(y). \quad (7.12)$$

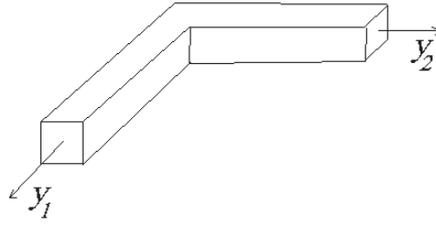
Применяя основную техническую лемму, выводим следующее утверждение.

**Лемма 7.5.** На каждом стержне  $I$ , принадлежащем структуре  $F$ , ортогональные проекции  $\chi \cdot \nu_1$ ,  $\chi \cdot \nu_2$  суть элементы пространства  $H^2(I)$ , при этом

$$\frac{h}{\varepsilon} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot \sigma_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} \frac{\theta^2}{3} (\chi \cdot \nu_i)''_{\tau\tau}, \quad i = 1, 2. \quad (7.13)$$

Итак, получено свойство (а) повышенной гладкости для компоненты  $\chi$ . Чтобы проверить для  $\chi$  условие (с) сопряжения в узлах структуры  $F$ , рассмотрим вспомогательную задачу на трехмерном «уголке» из двух  $h$ -стержней типа плоской задачи (3.17).

Пусть  $P = I_1^h \cup I_2^h$  — «уголок» из двух брусов  $I_1^h$ ,  $I_2^h$ , оси которых совпадают с осями  $Oy_1$ ,  $Oy_2$ ,  $p \subset \square$  (см. рис. 12).

Рис. 12. «Уголок»  $P$  из двух брусов.

Для вектора

$$b(y) = b^h(y) = \begin{cases} \frac{1}{h}(y_2\Phi'(y_1), 0, 0) & \text{на } I_1^h, \\ \frac{1}{h}(0, y_1\Phi'(y_2), 0) & \text{на } I_2^h, \end{cases}$$

где  $\Phi(t)$  такая же, как в § 3, в области  $P$  рассматриваем задачу Неймана

$$v \in H^1(P)^3 : \int_P e(v) \cdot e(\varphi) dy = \int_P b \cdot \varphi dy \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{P})^3.$$

Разрешимость этой задачи следует из того, что правая часть  $b(y)$  ортогональна всем жестким перемещениям в  $\mathbb{R}^3$ .

Свойство закрепления (b) для функции  $\chi(x, y)$  устанавливается с помощью неравенства Корна (7.2) так же, как аналогичное свойство в случае тонких сеток (см. [10]) или ящичных структур (см. § 3).

#### 7.4. О доказательстве теоремы 7.3.

**Лемма 7.6.** В пространстве  $\mathcal{R}_1^0$  плотно множество  $D$ , в которое входят векторы  $g$  такие, что

- (i)  $g$  — бесконечно дифференцируемы вне окрестности узлов;
- (ii) в окрестности начала координат  $O$  вектор  $g$  имеет структуру жесткого перемещения

$$g(y) = C \times y, \quad C = (C_1, C_2, C_3) \text{ — постоянный вектор,} \quad (7.14)$$

что означает равенство  $g|_I = C \times y|_I$  на каждом звене  $I$ , исходящем из узла  $O$ .

**Доказательство.** Изучим окрестность узла  $O$ , где вектор  $g \in \mathcal{R}_1^0$  удовлетворяет условиям (b), (c). Используя запись условия (c) в виде соотношений (7.3), получаем на звеньях  $I_1, I_2, I_3$ , изображенных на рис. 11(a), векторы

$$g_{I_1}(y_1) - (C_3 y_1 e_2 - C_2 y_1 e_3) = (g(y) - C \times y)|_{I_1},$$

$$g_{I_2}(y_2) - (C_1 y_2 e_3 - C_3 y_2 e_1) = (g(y) - C \times y)|_{I_2},$$

$$g_{I_3}(y_3) - (C_2 y_3 e_1 - C_1 y_3 e_2) = (g(y) - C \times y)|_{I_3},$$

которые обращаются в нуль в узле  $O$  вместе со своими продольными производными. Значит, их можно аппроксимировать по  $H^2$ -норме финитными в окрестности узла  $O$  векторами. Тогда сами векторы  $g|_{I_i}(y_i)$  можно аппроксимировать векторами  $\bar{g}_i$ , линейными вида (7.14) в окрестности узла  $O$ . Лемма 7.6 доказана.  $\square$

**Лемма 7.7.** Для любого вектора  $g \in D$  найдется его продолжение  $g^h = g^h(y)$  на структуру  $F^h$  такое, что

- (i)  $e(g^h) = 0$  в окрестности узлов;

(ii)

$$Ae(g^h) = \sum_{i=1}^2 h[(g \cdot \nu_i)'' \rho]_h \sigma_i(y) + O(h^2), \quad (7.15)$$

где  $[(g \cdot \nu_i)'' \rho]_h$  — естественное продолжение функции  $(g \cdot \nu_i)'' \rho$  на каркас  $F^h$ , функция  $\rho(y)$  определена в (7.4), а матрица  $\sigma_i(y)$  — в (7.12);

(iii)  $g^h \rightarrow g$  в  $L^2(\square, d\mu^h)^3$ .

**Доказательство.** В некоторой окрестности начала координат  $O$  вектор  $g \in D$  совпадает с жестким перемещением (см. (7.14)). Определим  $g^h$  этой же формулой и в  $\delta$ -окрестности узла  $O$ , т.е. положим

$$g^h(y) = C \times y, \quad |y| < \delta, \quad y \in F^h. \quad (7.16)$$

Теперь вектор  $g$  надо продолжить на каждый  $h$ -стержень вне окрестности узла  $O$ , причем это продолжение должно быть согласовано с (7.16).

Рассмотрим, например, стержень  $I$ , принадлежащий оси  $Oy_1$ , и пусть на нем вектор  $g \in D$  имеет вид  $g = (0, a(y_1), 0)$ ,  $a(y_1) = C_3 y_1$ ,  $0 \leq y_1 \leq \delta$ , т.е.

$$g = C \times y \quad \text{при} \quad 0 \leq y_1 \leq \delta, \quad \text{где} \quad C = (0, 0, C_3). \quad (7.17)$$

В изотропном случае продолжение вектора  $g$  на стержень  $I^h$  задаем равенством

$$g^h(y) = (-y_2 a', a, 0) + a'' \left( 0, \alpha \frac{y_2^2}{2} - \alpha \frac{y_3^2}{2}, \alpha y_2 y_3 \right), \quad \alpha = \frac{k_1}{k + 2k_1}.$$

Данное продолжение согласовано с ранее построенным продолжением (7.16), так как в силу условия (7.17) при  $0 \leq y_1 \leq \delta$ ,  $|y_2| < h$ ,  $|y_3| < h$ ,

$$g^h(y) = (-y_2 C_3, C_3 y_1, 0) = C_3 (-y_2, y_1, 0) = C \times y, \quad C = (0, 0, C_3).$$

Очевидно, что условие (i) выполнено.

Вычисления показывают, что

$$e(g^h) = -y_2 a'' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} + O(h^2),$$

$$Ae(g^h) = -\hat{k} y_2 a''(y_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(h^2), \quad \hat{k} = \frac{k(k + 3k_1)}{k + 2k_1} = \rho(y),$$

что дает соотношение (7.15).

Для тензора  $A$  общего вида продолжение  $g^h$  задается равенством

$$g^h(y) = (-y_2 a', a, 0) - a'' \left( z_{12} y_2^2 + 2z_{13} y_2 y_3, z_{22} \frac{y_2^2}{2} - z_{33} \frac{y_3^2}{2}, z_{33} y_2 y_3 + z_{23} y_2^2 \right),$$

где  $z_{ij}$  — некоторые константы, значения которых указаны ниже. Вычисления показывают, что

$$e(g^h) = -y_2 a'' \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & z_{13} \\ z_{12} & z_{22} & z_{23} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} \end{pmatrix} + O(h^2) = -y_2 a'' z + O(h^2),$$

$$Ae(g^h) = -y_2 a'' Az + O(h^2).$$

Тогда соотношение (7.15) выполнено, если

$$Az = c\eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = (A^{-1} \eta \cdot \eta)^{-1} = \rho,$$

т.е.  $z = cA^{-1}y$ . Последнее равенство определяет однозначно матрицу  $z$ , а значит, константы  $\{z_{ij}\}_{i,j}^3 = 1$ , при этом автоматически  $z_{11} = z \cdot \eta = cA^{-1} \eta \cdot \eta = 1$ .

Аналогичные продолжения строятся для стержня  $I$ , когда  $g = (0, 0, a(y_1))$ . Случай стержня общего положения также рассматривается аналогично. Условие сходимости (iii) следует непосредственно из формул, определяющих  $g^h$ . Лемма 7.7 доказана.  $\square$

После того, как получена лемма о продолжении, доказательство теоремы (7.3) проводим аналогично доказательству соответствующей теоремы для плоского стержневого каркаса в работе [10], при этом существенно используется сходимость (7.13).

Если стержни каркаса  $F^h$  — круговые цилиндры, то в соотношениях (7.6), (7.8), (7.9), (7.11), (7.13), надо заменить константу 3 на константу 4. Можно рассматривать каркас  $F^h$ , стержни которого имеют в сечении произвольную область  $\omega$  такую, что  $\text{diam } \omega = c_0 h$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Докл. РАН. — 2001. — 380, № 6. — С. 741–745.
3. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2002. — 66, № 2. — С. 81–148.
4. Жиков В. В. О весовых соболевских пространствах// Мат. сб. — 1998. — 189, № 8. — С. 27–58.
5. Жиков В. В. К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях// Функц. анализ и его прил. — 2001. — 35, № 1. — С. 23–35.
6. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — 191, № 7. — С. 31–72.
7. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О неравенствах Корна на тонких периодических структурах// Докл. РАН. — 2003. — 388, № 5. — С. 588–592.
8. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О неравенствах Корна на тонких периодических каркасах// Соврем. мат. и прил. — 2003. — 2. — С. 25–45.
9. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Докл. РАН. — 2002. — 385, № 5. — С. 590–595.
10. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Мат. сб. — 2003. 194, № 5.
11. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
12. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
13. Назаров С. А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. — Новосибирск: Научная книга, 2002. — 408 с.
14. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
15. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization// SIAM J. Math. Anal. — 1989. — 20. — С. 608–623.
16. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — 23. — С. 1482–1518.

С. Е. Пастухова

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет)

E-mail: leonowmw@cs.msu.su

## ОБ АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ТОНКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СТРУКТУРАХ

© 2004 г. С. Е. ПАСТУХОВА

Аннотация. Соболевские пространства периодических вектор-функций на соответствующих друг другу тонкой и сингулярной структурах должны удовлетворять двум условиям аппроксимации для того, чтобы выводы теории усреднения были справедливы для задач теории упругости. Доказывается, что эти условия выполнены для достаточно общих стержневых структур на плоскости и в пространстве.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .		99
2. Тонкие сетки . . . . .		101
3. Об аппроксимативных свойствах . . . . .		102
4. Доказательство основных утверждений . . . . .		103
Список литературы . . . . .		106

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе В. В. Жикова [1] показано, что для усреднения задач с двумя малыми параметрами, возникающих при изучении тонких периодических структур с толщиной, стремящейся к нулю, необходимо требовать выполнения некоторых аппроксимативных условий. Эти условия связывают определенным образом меру  $\mu^h$ , естественно вводимую на тонкой структуре с ее предельной мерой  $\mu$ , где мера  $\mu$  есть слабый предел  $\mu^h$  при  $h \rightarrow 0$ , и  $\mu$  определяет предельную структуру, которой отвечает толщина, равная нулю.

В данной работе аппроксимативные условия рассматриваются с точки зрения соболевских пространств вектор-функций, связанных с задачами теории упругости на стержневых периодических структурах. Для проверки аппроксимативных условий нет особого различия в том, являются ли эти структуры пространственными или плоскими, поэтому далее изложение ведется для плоских стержневых структур, которые мы также называем сетками. Трехмерный случай стержневых структур, принципиально не отличающийся от двумерного, требует лишь более громоздкого изложения.

Обозначим через  $F$  периодический граф на плоскости, составленный из отрезков, называемый далее сингулярной сеткой или просто сеткой. Ячейкой периодичности будет квадрат  $\square = [0, 1]^2$ . Пусть  $\mu$  — периодическая нормированная мера, сосредоточенная на сингулярной сетке  $F$  и пропорциональная там одномерной мере Лебега,

$$\langle g \rangle = \int_{\square} g d\mu \text{ — среднее по мере } \mu.$$

Множество симметрических матриц  $2 \times 2$  со скалярным произведением  $\xi \cdot \lambda = \xi_{ij} \cdot \lambda_{ij}$  обозначим через  $\mathbb{R}^3$ .

С мерой  $\mu$  свяжем пространство потенциальных матриц  $V_{\text{pot}} = V_{\text{pot}}(\square, d\mu)$ , замыкание множества

$$\{(e(\varphi)) : \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^2\} \text{ в } L^2(\square, d\mu)^3.$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00114), гранта Минобразования (проект № Е-02-1.0-57).

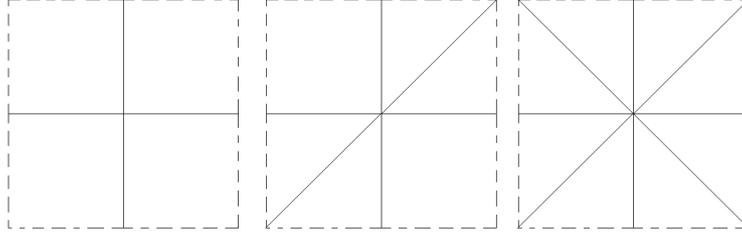


Рис. 1. Модельные сетки.

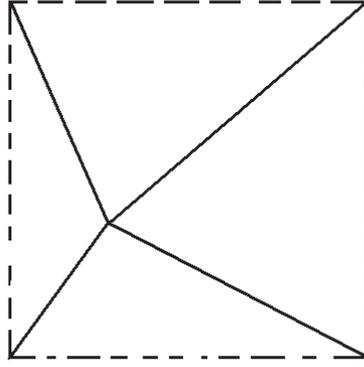


Рис. 2. Сетка, не являющаяся простейшей.

Здесь  $C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$  — множество всех периодических бесконечно дифференцируемых функций,

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)$$

— тензор деформации (или симметрический градиент). Пространство соленоидальных матриц  $V_{\text{sol}} = V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  определим как ортогональное дополнение к  $V_{\text{pot}}$  в  $L^2(\square, d\mu)^3$ .

Условимся называть звеном сетки  $F$  отрезок  $I \subset F$ , соединяющий два узла и не содержащий внутри себя других узлов. Звено называется *пронизывающим*, если сетке принадлежит вся прямая, проходящая через это звено. Сетка называется *простейшей*, если все ее звенья — пронизывающие. Простейшими будут сетки, изображенные на рис. 1, в дальнейшем называемые модельными.

Сетка, не являющаяся простейшей, изображена на рис. 2.

Обозначим через  $\tau$  орт, идущий вдоль звена. Этим же символом обозначим и кусочно-постоянную вектор-функцию, равную на каждом звене соответствующему орту. Положим

$$\tau \times \tau = \begin{pmatrix} \tau^1 \tau^1 & \tau^1 \tau^2 \\ \tau^1 \tau^2 & \tau^2 \tau^2 \end{pmatrix} \quad \tau = (\tau^1, \tau^2).$$

Ведем соболевское пространство  $\mathcal{H}_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$ , определенное как замыкание множества пар

$$\{(u, e(u)) : u \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^2\} \quad \text{в произведении} \quad L^2(\square, d\mu)^2 \times L^2(\square, d\mu)^3.$$

Элементами этого замыкания служат пары  $(u, v)$ , где  $u$  — вектор,  $v$  — симметрическая матрица. Компоненту  $v$  обозначим через  $e(u)$  и назовем (симметрическим) градиентом вектора  $u$ . Вектор  $u$  может иметь много симметрических градиентов [1].

Множество  $\mathcal{E}(u)$  градиентов функции  $u$  имеет структуру

$$\mathcal{E}(u) = e(u) + \mathcal{E}(0), \tag{1}$$

где  $e(u)$  — какой-то фиксированный градиент функции  $u$ ,  $\mathcal{E}(0)$  — множество градиентов нуля. По определению

$$z \in \mathcal{E}(0), \quad \text{если} \quad \exists \varphi_n \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^2 : \varphi_n \rightarrow 0, \quad e(\varphi_n) \rightarrow z \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu).$$

Из определения следует, что  $\mathcal{E}(0) \subset V_{\text{pot}}$ . Скажем, что матрица  $z$  тангенциальна, если  $z \in \mathcal{E}(0)^\perp$  (ортогональное дополнение в  $L^2(\square, d\mu)^3$ ).

В работе [1, § 5] доказано, что для  $I = [0, 1] \times \{0\}$ , единичного отрезка на плоскости  $Ox_1x_2$ ,

$$\mathcal{E}(0)|_I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta - \text{произвольные функции из } L^2(I) \right\}.$$

Тогда тангенциальная матрица на отрезке  $I$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in L^2(I).$$

В общем случае на отрезке  $I$  с направляющим вектором  $\tau$  тангенциальная матрица  $z$  имеет представление

$$z = c\tau \times \tau, \quad c \in L^2(I).$$

Вектор  $u \in \mathcal{H}_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$  называется *периодическим жестким перемещением*, если нулевая матрица  $o \in \mathcal{E}(u)$ , или, в соответствии с (1),  $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(0)$ . Множество всех периодических жестких перемещений обозначается через  $\mathcal{R}$ . В [1] доказано, что любой вектор  $u \in \mathcal{R}$  допускает единственное представление

$$u(y) = c + g(y),$$

где  $c$  — постоянный вектор, а  $g(y)$  — поперечное перемещение, т.е. на каждом звене вектор  $g$  ортогонален  $\tau$ . Таким образом, справедливо разложение

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 + \mathcal{R}_1, \quad (2)$$

где  $\mathcal{R}_1$  — множество всех поперечных перемещений.

## 2. ТОНКИЕ СЕТКИ

Наряду с сингулярными сетками  $F$ , рассмотрим также аппроксимирующие их тонкие сетки  $F^h$ . Например, простейшей сетке, составленной из прямых, соответствует тонкая сетка, которая получается, если каждую прямую заменить полосой, симметричной относительно этой прямой. Ширина каждой полосы в сетке  $F^h$  равна  $2h$ . Для сеток, не являющихся простейшими, условимся строить соответствующую тонкую сетку следующим образом. Для каждого звена  $I$  сетки  $F$  строим полосу  $I^h$  с шириной  $2h$  и средней линией  $I$ . Тогда сетка  $F^h$  определяется как объединение всех построенных полос и кругов радиуса  $h$  с центром во всех узлах сетки  $F$ .

Пусть  $\mu^h$  — периодическая нормированная мера, сосредоточенная на сетке  $F^h$  и пропорциональная там плоской мере Лебега. Имеет место слабая сходимость  $\mu^h \rightharpoonup \mu$ , где  $\mu$  — введенная ранее мера на сингулярной сетке.

Напомним, как определяется сходимость в «переменном»  $L^2$ -пространстве, связанном с мерой  $\mu^h$ . Пусть последовательность  $b^h$  ограничена в  $L^2(\square, d\mu^h)$ , т.е.

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\square} |b^h|^2 d\mu^h < \infty.$$

Тогда слабая сходимость  $b^h \rightharpoonup b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$  означает, что

$$b \in L^2(\square, d\mu) \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} b^h \varphi d\mu^h = \int_{\square} b \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

Известно, что из всякой ограниченной в  $L^2(\square, d\mu^h)$  последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Сильная сходимость  $b^h \rightarrow b$ ,  $b \in L^2(\square, d\mu)$  означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} b^h z^h d\mu^h = \int_{\square} bz d\mu \quad \text{как только} \quad z^h \rightarrow z.$$

Справедливо следующее свойство сходимости в  $L^2(\square, d\mu^h)$ : если  $b^h \rightarrow b$ , то

$$\int_{\square} |b^h|^2 d\mu^h \geq \int_{\square} |b|^2 d\mu,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $b^h \rightarrow b$ .

**Пример** (естественное продолжение на тонкую сетку  $F^h$ ). Дана функция  $b \in L^2(\square, d\mu)$ . На каждом звене сетки  $F$  продолжим эту функцию как постоянную в поперечном направлении на полосу  $I^h$  ширины  $2h$  ( $h$ -стержень). В точках, принадлежащих нескольким  $h$ -стержням, функцию считаем равной нулю. Так строится естественное продолжение  $b_h$ . Можно убедиться в том, что

$$b_h \rightarrow b \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h).$$

Тот же результат сохраняется, если функцию  $b_h$  положить равной нулю в некоторой  $c_0h$ -окрестности каждого узла.

Отметим еще одно простое утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $b \in L^2(\square, d\mu)$ ,  $b_h$  — его естественное продолжение, а  $b^h \in L^2(\square, d\mu^h)$  удовлетворяет условию

$$\int_{\square} |b^h - b_h|^2 d\mu^h \rightarrow 0.$$

Тогда имеет место сильная сходимость  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ .

### 3. ОБ АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ

Для вектора  $a \in L^2(\square, d\mu)^2$  и матрицы  $b \in L^2(\square, d\mu)^3$  скажем, что  $a = \operatorname{div} b$  (в смысле меры  $\mu$ ), если

$$\int_{\square} a \cdot \varphi d\mu = - \int_{\square} b \cdot e(\varphi) d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^2.$$

В работе [1] показано, что для справедливости основных фактов двухмаштабной сходимости и усреднения требуется, чтобы меры  $\mu^h$  и  $\mu$  были связаны следующими аппроксимативными свойствами:

- (i) для любого вектора  $a$  из некоторого плотного в  $\mathcal{R}^{\perp}$  множества ( $\mathcal{R}^{\perp}$  — ортогональное дополнение в  $L^2(\square, d\mu)^3$ ) найдутся вектор  $a^h \in L^2(\square, d\mu^h)^2$  и матрица  $b^h \in L^2(\square, d\mu)^3$  такие, что  $a^h = \operatorname{div} b^h$  (в смысле меры  $\mu^h$ ),  $a^h \rightarrow a$ ,  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$ ;
- (ii) для любой матрицы  $b \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  найдется матрица  $b^h \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$  такая, что  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)^3$ .

Аппроксимативные свойства для модельной сетки (рис. 1) проверены в работе [1]. Проверка была основана на специфическом свойстве модельных сеток — полном расщеплении пространства  $V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$ , что не является обязательным для произвольной сетки (см. замечание после теоремы 4). Тем не менее, имеет место общий результат.

**Теорема 2.** Для любой, без исключения, сингулярной сетки выполнены аппроксимативные свойства.

В доказательстве этой теоремы используются результаты двух других теорем.

**Теорема 3.** Следующее неравенство Корна

$$\int_{\square} \varphi \cdot \varphi \, d\mu \leq C \int_{\square} e(\varphi) \cdot e(\varphi) \, d\mu, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^2, \quad \varphi \perp \mathcal{R}, \quad (3)$$

выполнено для любой, без исключения, сингулярной сетки.

**Теорема 4.** Периодическая матрица  $z \in L^2(\square, d\mu)^3$  соленоидальна тогда и только тогда, когда

а) на каждом звене с направляющим ортом  $\tau$

$$z = b\tau \times \tau, \quad (4)$$

где  $b$  — некоторая константа;

б) в каждом узле выполнено векторное равенство

$$\sum_i b_i \tau_i = 0, \quad (5)$$

где сумма берется по всем выходящим из узла ортам.

Для модельной сетки имеет место полное расщепление пространства  $V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$  в том смысле, что каждая соленоидальная матрица постоянна вдоль прямых, причем соответствующая константа может быть выбрана произвольной. Однако если эту же модельную сетку рассматривать как периодическую с периодом  $2\square$ , то расщепления пространства  $V_{\text{sol}}$  уже нет, т.е. нет постоянства соленоидальных матриц вдоль прямых, они лишь кусочно постоянны.

Вот почему актуальна проверка аппроксимативных свойств, не использующая расщепление пространств  $V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$ .

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

**Вывод неравенства Корна.** Предположив, что неравенство (3) не выполняется, найдем последовательность вектор-функций  $v_n \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^2$  такую, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\square} |v_n|^2 \, d\mu = 1, \quad \int_{\square} |e(v_n)|^2 \, d\mu \rightarrow 0, \quad v_n \perp \mathcal{R}. \quad (6)$$

Условие  $(v_n \perp \mathcal{R})$  влечет, в частности, ортогональность всем поперечным перемещениям (см. (2)), т.е.  $v_n \perp \mathcal{R}_1$ . Поэтому  $v_n$  — тангенциальный вектор на каждом звене,  $v_n = (v_n \cdot \tau)\tau$ ,

$$\int_{\square} |v_n \cdot \tau|^2 \, d\mu = 1.$$

Согласно равенству

$$(\tau \times \tau) \cdot e(v_n) = \frac{d}{d\tau}(v_n \cdot \tau),$$

из (6) следует, что

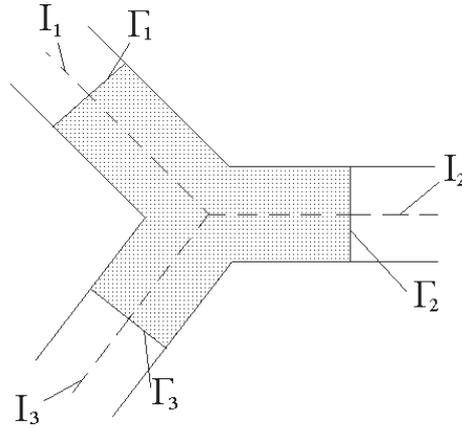
$$\int_{\square} \left| \frac{d}{d\tau}(v_n \cdot \tau) \right|^2 \, d\mu \rightarrow 0.$$

Видим, что на каждом звене  $I$  последовательность  $v_n \cdot \tau$  ограничена в соболевском пространстве  $H^1(I)$ . Отсюда вытекают сильная сходимости скалярных функций

$$v_n \cdot \tau \rightarrow v_{\tau} \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu)$$

и соотношения для соответствующего тангенциального вектора  $v = v_{\tau}\tau$

$$\int_{\square} |v|^2 \, d\mu = 1, \quad \int_{\square} |e(v)|^2 \, d\mu = 0, \quad v \perp \mathcal{R},$$

Рис. 3. Область  $Q_h$ .

которые одновременно не выполнимы. Из двух последних свойств следует  $v \equiv 0$ , что не согласуется с первым свойством. Получили противоречие. Тем самым доказали неравенство (3).

**Доказательство теоремы 4.** Если  $z \in V_{\text{sol}}$ , то  $z \perp \mathcal{E}(0)$ , так как  $\mathcal{E}(0) \subset V_{\text{pot}}$ . Поэтому  $z$  — тангенциальная матрица, т.е.  $z = c(x)\tau \times \tau$ . Тогда равенство, определяющее соленоидальность матрицы  $z$ ,

$$\int_{\square} z \cdot e(\varphi) d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)^2,$$

означает

$$0 = \int_{\square} c(x)(\tau \times \tau \cdot e(\varphi)) d\mu = \int_{\square} c(x) \frac{d}{d\tau}(\varphi \cdot \tau) d\mu. \quad (7)$$

Взяв здесь вектор  $\varphi$ , сосредоточенный внутри некоторого звена, получим постоянство функции  $c(x)$  на этом звене. Отсюда следует свойство (4).

Наоборот, возьмем в (7) вектор  $\varphi$  с носителем в некоторой окрестности произвольного фиксированного узла  $O$ , не содержащей других узлов сетки. Тогда, с учетом доказанного уже свойства (4), можно вывести, что

$$0 = \int_{\square} z \cdot e(\varphi) d\mu = \sum_j b_j \int_{I_j} \tau_j \times \tau_j \cdot e(\varphi) d\mu = \sum_j b_j \int_{I_j} \frac{d}{d\tau_j}(\varphi \cdot \tau_j) d\mu = - \sum_j b_j (\varphi \cdot \tau_j)|_0 = -\varphi|_0 \cdot \sum_j b_j \tau_j.$$

Это дает свойство (5) для узла  $O$ . Теорема доказана.  $\square$

### Доказательство теоремы 2.

Начнем с проверки свойства (ii). Для построения матрицы  $b^h \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$ , аппроксимирующей матрицу  $b \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu)$ , решим вспомогательную задачу в некоторой окрестности  $Q_h$  каждого узла  $O$ .

Определим окрестность  $Q_h$  как объединение круга радиуса  $h$  с центром в узле  $O$  и  $m$  полос, у которых ширина равна  $2h$ , длина равна  $4h$ , а средняя линия лежит на  $I_i$ . Пусть  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  — внешние торцы этих полос (см. рис. 3).

В области  $Q_h$  рассмотрим следующую задачу Неймана:

$$\operatorname{div} e(u) = 0 \quad \text{в } Q_h, \quad e(u)n|_{\partial Q_h} = g, \quad (8)$$

где  $n$  — единичная внешняя нормаль к  $\partial Q_h$ ,

$$g = \begin{cases} bn = b_i \tau_i & \text{на } \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ 0 & \text{на остальной части } \partial Q_h, \end{cases}$$

где  $n$  — единичная внешняя нормаль к  $\partial Q_h$ ,  $b_i \tau_i \times \tau_i = b|_{I_i}$ .

Эта задача разрешима, так как вектор-функция  $g$  удовлетворяет условию

$$\int_{\partial Q_h} g(x) \cdot r(x) d\sigma = 0, \quad (9)$$

где  $r(x)$  — произвольное жесткое перемещение на плоскости, т.е.  $r(x) = c + t(-x_2, x_1)$ ,  $c \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . В самом деле, для постоянного вектора  $r(x) = c$

$$\int_{\partial Q_h} g(x) \cdot r(x) d\sigma = \sum_i \int_{\Gamma_i} b_i \tau_i \cdot c d\sigma = 2hc \cdot \sum_i b_i \tau_i = 0$$

в силу согласования (5). Далее, без потери общности, считаем, что узел  $O$  находится в начале координат. Для вектора  $r(x) = (-x_2, x_1)$  имеем

$$\tau_i \cdot (-x_2, x_1) = \nu_i \cdot x,$$

где  $\nu_i$  — орт, идущий вдоль торца  $\Gamma_i$ ,  $(\tau_i, \nu_i)$  — правая двойка векторов. Поэтому

$$\int_{\Gamma_i} g(x) \cdot r(x) d\sigma_i = b_i \int_{\Gamma_i} \tau_i \cdot (-x_2, x_1) d\sigma_i = b_i \int_{\Gamma_i} x \cdot \nu_i d\sigma_i = 0,$$

откуда следует условие (9).

Решение задачи (8) определяется с точностью до жесткого перемещения. Выберем  $u(x)$  так, чтобы

$$\int_{Q_h} u(x) \cdot r(x) dx = 0 \quad \forall r(x). \quad (10)$$

Докажем для выбранного решения оценку

$$\int_{Q_h} |e(u)|^2 dx \leq Ch^2. \quad (11)$$

Из интегрального тождества для решения задачи (8) имеем

$$\int_{Q_h} |e(u)|^2 dx = \int_{\partial Q_h} e(u)n \cdot u d\sigma = \sum_i \int_{\Gamma_i} b_i \tau_i \cdot u d\sigma_i. \quad (12)$$

Теперь воспользуемся неравенством Корна

$$\int_{Q_h} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{Q_h} |e(u)|^2 dx,$$

которое справедливо при условии (10), и неравенством для следа скалярной функции

$$\int_{\partial Q_h} v^2 d\sigma \leq h \int_{Q_h} |\nabla v|^2 dx,$$

которое справедливо при условии  $\int_{Q_h} v dx = 0$ . Из этих неравенств получаем, что

$$\int_{\partial Q_h} |u|^2 d\sigma \leq ch \int_{Q_h} |e(u)|^2 dx.$$

Отсюда и из равенства (12) следует, что

$$\int_{Q_h} |e(u)|^2 dx \leq ch \left( \int_{Q_h} |e(u)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

и оценка (11) доказана.

Теперь положим

$$b^h = \begin{cases} e(u) & \text{в } Q_h, \\ b_h & \text{вне } Q_h, \end{cases}$$

где  $b_h$  — естественное продолжение соленоидальной матрицы  $b$ . Легко понять, что  $b^h \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$ . Кроме того,  $b^h \rightarrow b$  в  $L^2(\square, d\mu^h)$  в силу (11) и предложения 1. Тем самым, аппроксимативное свойство (ii) проверено.

Проверим аппроксимативное свойство (i).

В пространстве  $\mathcal{R}^\perp$  плотно множество гладких вектор-функций, равных нулю в окрестности узлов.

Пусть  $a$  — такая периодическая функция. Из неравенства Корна (3) следует разрешимость задачи

$$v \in \mathcal{H}_{\text{per}}^1(\square, d\mu), \quad \text{div } e(v) = a.$$

Положим  $b = e(v)$ . Вне окрестностей  $Q_h$  вектор  $a$  и матрицу  $b$  продолжим естественным образом. В окрестности узлов матрица  $b$  соленоидальна, и ее можно продолжить в область  $Q_h$  указанным выше способом с помощью задачи Неймана. Оба аппроксимативных свойства установлены, и теорема 2 доказана.  $\square$

В заключение, отметим, что вопросы, связанные с аппроксимативными свойствами соболевских пространств скалярных функций, рассматривались в [2, 3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Известия РАН. Сер. мат. — 2002. — 66, № 2. — С. 81–148.
2. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Матем сб. — 2003. — 193, №. 5.
3. Chechkin G. A., Zhikov V. V., Lukkassen D., Piatnitskii A. L. On Homogenization of Networks and Junctions// Asymptotic Analysis. — 2002. — 30, №. 1. — С. 61–80.

С. Е. Пастухова

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет)

E-mail: leonowmw@cs.msu.su

## ОБ УСЛОВИЯХ ТРАНСМИССИИ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ НА СЕТИ

© 2004 г. Ю. В. ПОКОРНЫЙ, В. Л. ПРЯДИЕВ

Аннотация. Изучаются различные подходы к задачам трансмиссии на графах на основе их редукции к задачам для одного уравнения на графе. Предложены методы их решения.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Предисловие . . . . .		108
2. Своеобразие задач на графах . . . . .		108
3. Постановка обыкновенного дифференциального уравнения на сети . . . . .		118
4. Краевая задача на сети . . . . .		124
5. Неосциллирующее на сети уравнение и неравенство Гарнака . . . . .		130
6. Некоторые комментарии . . . . .		136
Список литературы . . . . .		137

За последние годы чрезвычайно активизировался интерес математиков к задачам, где с некоторым метрическим графом  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  связан набор дифференциальных уравнений обычного вида

$$-(pu')' + qu = f \quad (= \lambda \rho u), \quad (0.1)$$

каждое из которых как бы задано на своем ребре  $\Gamma$ . Во внутренних вершинах решения «примыкающих» к ним уравнений помимо предположения о непрерывной стыковке связываются обычно условиями трансмиссии типа

$$\sum_{\gamma} \alpha_{\gamma}(a) u'_{\gamma}(a) = 0, \quad (0.2)$$

где суммирование производится по ребрам  $\gamma$ , примыкающим к вершине  $a$ , через  $u_{\gamma}$  обозначается сужение  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  на ребро  $\gamma$ , и  $u'_{\gamma}(a)$  — крайняя производная. Дифференциальные системы такого типа возникают в самых разнообразных задачах естествознания и техники (см., например, последние обзоры [15,17]). Как правило, помимо (0.1), (0.2), в реальных задачах возникают условия и в граничных ( $a \in \partial\Gamma$ ) вершинах, чаще всего в виде условий типа Дирихле

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (0.3)$$

В работе обсуждаются различные подходы к описанной задаче и, в частности, взгляд на пару (0.1), (0.2) как на единое обыкновенное дифференциальное уравнение на  $\Gamma$ . Излагается роль условий (0.2), а также методы, развитые при анализе различных качественных свойств задачи и ее функции Грина в разных версиях.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 01–01–00418, 02–01–00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект № E02–1.0–46) и программы «Университеты России» (проект № УР.04.01.047).

## 1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Канонизированная трактовка таких задач — взгляд на них как на краевые задачи для системы уравнений (0.1), заданных на ребрах. Условия (0.2) и (0.3) рассматриваются как краевые, что позволяет обсуждать задачу (0.1)–(0.3) в рамках традиционных взглядов [2]. Подобный подход при анализе уже самых простых свойств требует постоянного манипулирования с матрицей инцидентий (или матрицей графа), что позволяет устанавливать лишь свойства, где структура графа непринципиальна. Достаточно емкие свойства типа неотрицательности функции Грина (как в [6]), требуют изнурительных усилий, связанных с матрицей инцидентий.

Ниже излагается другой подход, показавший достаточно высокую эффективность при изучении весьма тонких качественных свойств (типа аналогов принципа максимума, неравенства Гарнака, распределения нулей решений дифференциальных неравенств). При этом подходе условия трансмиссии трактуются как реализация во внутренних узлах дифференциального уравнения

$$-\frac{d}{d\Gamma}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x) \quad (1.1)$$

на геометрической сети  $\Gamma$ . Это уравнение подразумевает стандартную форму

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \quad (1.2)$$

на всех ребрах сети, а в ее внутренних узлах трактуется как

$$-\left(\sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \frac{d}{d\gamma} u(x)\right) + q(x)u(x) = f(x). \quad (1.3)$$

Решения такого уравнения — заданные на всем  $\Gamma$  функции  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , уподобляемые обычным скалярным функциям, заданным на области. Только их графики вместо поверхностей являются «паутинками над  $\Gamma$ ».

Предваряя такой «скаляризирующий» взгляд, мы обсуждаем (см. § 2) некоторые особенности проблем, порождаемых наличием условий трансмиссии. В частности, пример «тканой мембраны» показывает, что достаточно густая сетка начинает приближать объект к непрерывному именно за счет условий трансмиссии, а уравнения на ребрах уходят на задний план. В остальном § 2 показывает, что условия трансмиссии несут в себе заряд иррегулярных особенностей, подобных  $\delta$ -функциям в потенциале уравнения Шредингера.

В § 3 на фоне вариационного объяснения условий трансмиссии обосновывается право считать  $\frac{d}{d\Gamma}$  аналогом обыкновенной производной как из соображений теории потенциала, так и с позиций обобщенного дифференцирования по мере с атомами в узлах  $\Gamma$ .

В § 4 мы сопоставляем различные трактовки исходной задачи, показываем возможность простого обоснования достаточно серьезных свойств (типа мероморфности решения Вейля), различные конструкции и основные свойства функции Грина.

В § 5 обсуждается аналог эллиптических свойств решений дифференциальных неравенств вида  $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu \geq 0$ . Устанавливается аналог классического неравенства Гарнака, приводящего функцию Грина к неравенству  $G(x, s) \geq u_0(x) \max_z G(z, s)$  при  $u_0(x) > 0$  на  $\Gamma$ .

В § 6 приводятся некоторые библиографические комментарии.

## 2. СВОЕОБРАЗИЕ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

Приведем несколько весьма простых примеров, позволяющих наблюдать своеобразие качественных свойств, их несколько неожиданный характер на фоне классических задач.

**2.1. Классическая задача Штурма—Лиувилля.** Согласно знаменитым результатам Штурма задача

$$-(pu')' + qu = \lambda tu, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (2.2)$$

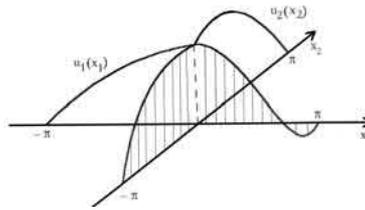


Рис. 1

с достаточно регулярными вещественными коэффициентами при  $p > 0$  и  $q \geq 0, m \geq 0 (\neq 0)$  обладает следующими свойствами:

а) ее спектр состоит из неограниченной последовательности положительных простых собственных значений  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ .

Если через  $\varphi_k$  обозначить как-либо нормированные собственные функции, отвечающие  $\lambda_k$ , то

б)  $\varphi_0$  не имеет нулей внутри  $(0; l)$ , а  $\varphi_k$  ( $k \geq 1$ ) имеет точно  $k$  нулей; все эти нули простые;

в) при каждом  $k$  нули функций  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k+1}$  перемежаются, т.е. между любыми соседними нулями  $\varphi_k$  есть точно один нуль  $\varphi_{k+1}$  и наоборот.

Эти свойства, наглядные или легко интерпретируемые физически, чрезвычайно важны для приложений. Называемые гармоническими, эти свойства характерны и для собственных колебаний обычной струны (в качественном описании они были известны еще древним грекам). Распространению этих свойств на более широкие классы краевых задач, начатому в работах Келлога и М. Крейна, посвящена обширная литература. В частности, они сохраняются для задачи вида (2.1)–(2.2), в которой уравнение (2.1) исключается в конечном наборе  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m$  точек из  $(0; l)$ , заменяясь связями вида

$$u'(\xi_i + 0) - u'(\xi_i - 0) = k_i u(\xi_i), \quad k_i > 0,$$

для непрерывных в точке  $\xi_i$  решений, либо связями вида

$$u'(\xi_i - 0) = u'(\xi_i + 0) = k_i (u(\xi_i + 0) - u(\xi_i - 0)), \quad k_i > 0,$$

где для случая струны первые связи соответствуют сосредоточенным упругим опорам (типа пружин), а вторые — упругим сочленениям в точках разрыва  $\xi_i$ . После этого результата для явно нестандартной задачи естественно ожидать, что подобные свойства в той или иной форме должны сохраниться и для сетки из обычных струн. Однако ожидания эти проваливаются уже в совершенно простых ситуациях.

**2.2. «Струнный крест».** Рассмотрим пару одинаковых натянутых однородных струн, расположенных в одной плоскости перпендикулярно друг другу и имеющих общую середину, где они связаны. Будем считать, что этот узел помещен в начале координат  $x_1 O x_2$ , оси которых направлены вдоль струн. Считая их длины равными  $2\pi$  для удобства вычислений предположим единичными натяжение и плотность распределения масс. Тогда отклонения (деформации) этих струн в ортогональном к  $x_1 O x_2$  направлению определяются парой функций  $u_1(x_1)$  и  $u_2(x_2)$ , заданных при  $-\pi \leq x_1, x_2 \leq \pi$ . (см. рис. 1).

Если собственные колебания возможны, то соответствующие амплитудные функции должны быть собственными функциями для следующей задачи:

$$-u_1'' = \lambda u_1, \quad -u_2'' = \lambda u_2 \tag{2.3}$$

при условиях закрепления концов, аналогичных (2.2),

$$u_1(\pm\pi) = 0, \quad u_2(\pm\pi) = 0 \tag{2.4}$$

и условию связи в узле ( $x_1, x_2 = 0$ )

$$u_1(0) = u_2(0). \tag{2.5}$$

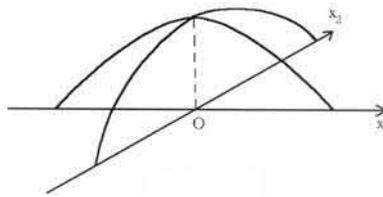


Рис. 2



Рис. 3

Условие баланса натяжений в этом узле означает дополнительно

$$u'_1(+0) - u'_1(-0) + u'_2(+0) - u'_2(-0) = 0. \quad (2.6)$$

Взаимодействуя друг с другом в нуле,  $u_1(x_1)$  и  $u_2(x_2)$  могут иметь в нем изломы, что означает правомерность (2.3) лишь при  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ . Тем самым, мы имеем в (2.3) фактически не два, а четыре уравнения — по числу сторон нашего «струнного креста».

Несложно показывается, что спектр описанной задачи вещественен и лежит на положительной полуоси. Положим в (2.3)  $\lambda = \omega^2$ . В силу симметрии «креста» и условий (2.4)–(2.6) собственные функции  $\varphi^k(x)$  должны на каждой стороне креста иметь вид (с точностью до множителя)

$$\varphi_1^k(x) = \sin \frac{k+1}{2}(x + \pi), \quad \varphi_2^k(x) = \sin \frac{k+1}{2}(x + \pi), \quad (2.7)$$

и спектр состоит из последовательности  $\omega_k = \frac{k+1}{2}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . При этом каждому четному  $k$  ( $= 0, 2, 4, \dots$ ) соответствует простое собственное значение, которому отвечает собственное колебание в точности вида (2.7) как по  $x_1$ , так и по  $x_2$ : обе струны колеблются с одинаковой собственной частотой, совпадая по амплитуде в общей точке без изломов в ней (график  $\varphi^0$  приведен на рис. 2). Каждому нечетному  $k$  соответствует трехмерное собственное пространство, причем отвечающие  $\omega_k$  линейно независимые собственные функции могут быть выбраны так: две из них соответствуют собственному колебанию, при котором одна из поперечных струн молчит, а другая звучит при нулевой амплитуде в нуле (см. рис. 3). Третья собственная функция соответствует колебанию, при котором звучат лишь две накрест лежащие половинки струн, тогда как другие две половинки молчат, как если бы в нуле система была закреплена.

Последняя форма собственного колебания подсказывает, что на однородной сетке из струн любая квадратная ячейка может являться носителем стоячей волны, для которой всё снаружи ячейки молчит, стороны ячейки колеблются с одинаковой частотой, причем противоположные стороны синхронизированы одинаковыми по направлению колебаниями, а соседние — противоположными (см. рис. 4).

Таким образом, для рассмотренной системы (струнного креста) за счет взаимодействия пары обычных струн всего лишь в одной точке нарушается самое первое свойство а) — теряется простота точек спектра. Остальные свойства б), в) уже для собственных частот  $\omega_k$  с нечетными  $k$  оказываются неподдающимися для формулировки каких-то аналогов, так как у собственных функций появляются неизолированные нули, и неясно, как говорить о «перемежаемости» нулей (см., например, рис. 2, 3).

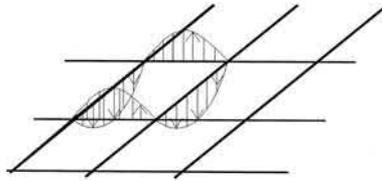


Рис. 4

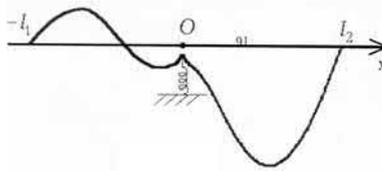


Рис. 5

**2.3. Пучок из трех струн.** Упростим предыдущую ситуацию, отбросив одно из четырех ребер креста, т.е. рассмотрим систему из трех струн, натянутую в форме рога (или буквы Y), с одним общим для всех концом. На каждом ребре имеем

$$\begin{aligned} -u_1'' &= \lambda u_1, & 0 \leq x_1 \leq l_1, \\ -u_2'' &= \lambda u_2, & 0 \leq x_2 \leq l_2, \\ -u_3'' &= \lambda u_3, & 0 \leq x_3 \leq l_3. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь мы через  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$  обозначаем деформации (отклонения от состояния равновесия) каждой из трех струн, считая их длины, соответственно, равными  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и используя в качестве аргумента натуральный параметр. Условия в общей точке примут вид

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0), \quad u_1'(0) + u_2'(0) + u_3'(0) = 0. \tag{2.9}$$

При  $l_1 = l_2 = l_3$  спектр собственных частот этой задачи аналогичен предыдущей: простота отсутствует у каждой нечетной собственной частоты (кратности их равны двум).

Сделаем теперь одно изменение в данной задаче, чтобы заведомо исключить симметрию и одновременно допустить переформулировку задачи в виде одномерной. Предположим, что третья струна не загружена массами. Это означает, что третье уравнение в (2.8) будет иметь вид  $-u_3'' = 0$ , и решения его — просто линейные функции с нулем в точке  $x_3 = l_3$ . Для каждой из них  $u_3' \equiv \text{const}$ , и поэтому  $u_3'(x_3) = u_3'(0) = -u_3(0)/l_3$ . Отсюда в силу (2.9) следует

$$u_1'(0) + u_2'(0) = \frac{1}{l_3} u_1(0) = \frac{1}{l_3} u_2(0). \tag{2.10}$$

Теперь мы можем скаляризовать задачу: изменив знак аргумента в первом уравнении (2.8), припишем его отрезку  $[-l_1; 0]$ , оставив второе уравнение на отрезке  $[0; l_2]$ . Тем самым, мы получаем единообразное уравнение

$$-u'' = \lambda u, \quad -l_1 \leq x \leq l_2, \tag{2.11}$$

сразу на всем отрезке  $[-l_1; l_2]$ , причем слева от нуля изображаются деформации первой струны, а справа — второй. Однако, есть одна неприятность: в точке  $x = 0$  можно говорить лишь об односторонних производных  $u'(-0)$  и  $u'(0)$ , а потому уравнение (2.11) при  $x = 0$  лишено смысла. Зато в этой точке  $x = 0$  имеются адекватные (2.10) условия

$$u(-0) = u(+0) = l_3[u'(0) - u'(-0)]. \tag{2.12}$$

Полученная задача имеет две интерпретации.

Уравнение (2.11) описывает (при  $x \neq 0$ ) вместе с (2.12) и условиями  $u(-l_1) = u(l_2) = 0$  упругие колебания натянутой вдоль отрезка  $[-l_1; l_2]$  единой струны, у которой в точке  $x = 0$  имеется упругая опора (пружина) с жесткостью  $k = 1/l_3$ .

Математическая интерпретация уравнения (2.11) (при  $x \neq 0$ ) и спецификации (2.12) в точке  $x = 0$  тоже внешне несложны и представляют собой уравнение

$$-u'' + k\delta(x)u = \lambda u, \quad (2.13)$$

склеенное из двух уравнений единым на  $[-l_1; l_2]$  образом, где  $\delta(x)$  — обычная дельта-функция Дирака и  $k = 1/l_3$ . Однако формальная простота уравнения (2.13) обманлива: для случая обобщенных коэффициентов аналогов осцилляционных теорем Штурма—Лиувилля пока нет. Теория обобщенных функций (распределений) не располагает средствами, позволяющими устанавливать кратность нулей собственных функций, число этих нулей, их перемежаемость и пр.

Последний пример с его физической наглядностью (струна с пружиной) и формальной простотой (2.13) обнажил в свое время главную проблему: беспомощность стандартных математических методов перед условиями склейки при качественном анализе деформаций струнных сеток и их упругих колебаний.

**2.4. «Тканая мембрана».** Ниже описывается связь спектров квадратной мембраны и аппроксимирующей ее «тканой мембраны», являющейся достаточно густой равномерной сеткой из струн. Показывается, что главные части обоих спектров совпадают вплоть до кратностей собственных значений. Исследования этого вопроса можно найти в [3].

2.4.1. Плоская сетка из струн явно не является одномерным объектом и при достаточно мелких ячейках должна обнаруживать родственность с мембраной. Вопрос о сходстве их спектров, возникший более десяти лет назад, уже на этапе постановки сопровождался серьезными сомнениями интуитивно-физической природы: реакции мембраны и прямоугольной сетки на точечное воздействие принципиально различны: мембрана противодействует по континууму направлений, а сетка — всего лишь по четырем (если усилие сосредоточено в узле) или даже по двум направлениям.

На примере квадратной однородной мембраны ниже показывается, что переход к достаточно густой сетке из струн («тканой мембране») не меняет спектра мембраны в главном.

2.4.2. Спектр  $\Lambda$  однородной мембраны, натянутой на квадрате  $Q = [0; l] \times [0; l]$ , определяется задачей

$$\sigma \Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad (2.14)$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad (2.15)$$

где  $\rho (\equiv \text{const})$  — плотность распределения масс и  $\sigma (\equiv \text{const})$  — внутреннее напряжение мембраны, обеспечиваемое равномерным ее натяжением. Спектр  $\Lambda$ , очевидно, веществен, положителен и состоит из последовательности

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 \sigma}{l^2 \rho} k \quad (2.16)$$

при таких натуральных  $k$ , которые допускают представление  $k = n^2 + m^2$  с натуральными  $n, m$ . Количество таких представлений при каждом  $k$  определяет кратность  $\lambda_k$ .

Рассмотрим на том же квадрате  $Q = [0; l] \times [0; l]$  сетку  $\Gamma_h$  из струн с квадратными ячейками  $h \times h$ , закрепленную в узлах, лежащих в  $\partial Q$  (их совокупность обозначим через  $\partial \Gamma_h$ ). Обозначим через  $\rho_h$  плотность струн, а через  $\sigma_h$  — их натяжение. Будем считать, что в узлах  $\Gamma_h$ , не лежащих на границе  $\partial Q$ , т.е. не попавших в  $\partial \Gamma_h$  (их совокупность обозначим через  $I(\Gamma_h)$ ), помещены грузы с массами  $m_h$ . Если значения  $m_h, \sigma_h$  и  $\rho_h$  связать с параметрами  $\sigma, \rho$  мембраны равенствами

$$\rho = \frac{2\rho_h h + m_h}{h^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_h}{h}, \quad (2.17)$$

то такую сетку можно считать физической дискретизацией исходной мембраны и, наоборот, мембрану — осреднением такой сетки. Назовем такую сетку из струн «тканой мембраной». Оказывается, ее спектр при малых  $h$  адекватен «началу»  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  спектра  $\Lambda$  с как угодно большим  $n$ . Точнее говоря, верна следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Для того, чтобы положительное число  $\lambda$  было точкой спектра описанной «тканой мембраны»  $\Gamma_h$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda$  удовлетворяло одному из уравнений

$$2 \cos \frac{\pi h}{l} i + 2 \cos \frac{\pi h}{l} j = 4 \cos h \sqrt{\lambda \frac{\rho h}{\sigma_h}} - m_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}} \sin h \sqrt{\lambda \frac{\rho h}{\sigma_h}}, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \quad (2.18)$$

$$\left( \sin h \sqrt{\lambda \frac{\rho h}{\sigma_h}} \right)^{N^2-1} = 0, \quad (2.19)$$

где обозначено  $N = l/h$ .

Равенства (2.18), (2.19) дают точное описание спектра  $\Gamma_h$  и определяют кратность каждой точки спектра. Так, решения уравнения (2.19) имеют кратность  $N^2 - 1$ . Решения уравнений (2.18) при фиксированной сумме  $i^2 + j^2$  сливаются при  $h \rightarrow 0$ , что опять же определяет кратность общего решения как точки спектра. Из (2.19) видно, что решения  $\lambda$  этого уравнения при малых  $h$  как угодно далеки от нуля. Поэтому «начало» спектра  $\Lambda_h$  сетки  $\Gamma_h$  определяется уравнениями (2.18), из которых следует

$$\lambda_k^h = \lambda_k + O(h), \quad (2.20)$$

где  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  — спектр мембраны, т.е. последовательность (2.16), а  $\lambda_0^h, \lambda_1^h, \dots$  — спектр сетки  $\Gamma_h$ , расположенный по возрастанию.

**2.4.3.** Для доказательства теоремы 2.1 опишем вначале соответствующую «тканой мембране»  $\Gamma_h$  математическую модель колебаний. Напомним, что  $h = l/N$  определяет размер квадратной ячейки. На каждом ребре этой ячейки (если оно не лежит на границе  $\partial Q$ ) для струны справедливо обычное соотношение

$$\sigma_h u'' + \lambda \rho_h u = 0, \quad (2.21)$$

где производные берутся вдоль ребра ячейки. Обозначим через  $a_{ij}$  узел сетки  $\Gamma_h$  с координатами  $(ih, jh)$  при  $i, j = \overline{0, N}$ . Горизонтальное ребро сетки, соединяющее соседние вершины  $a_{ij}$  и  $a_{i+1, j}$  обозначим через  $\gamma_{ij}^1$ , а вертикальное ребро между  $a_{i, j}$  и  $a_{i, j+1}$  — через  $\gamma_{ij}^2$ . Для функции  $u(x)$ , заданной на  $\Gamma_h$ , сужения на ребра  $\gamma_{ij}^k$  будем обозначать через  $u_{ij}^k$ . Любое из этих сужений удовлетворяет уравнению (2.21). Рассматриваемые функции  $u(x) : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны во всех внутренних узлах и, кроме того, в этих узлах должны удовлетворять условию баланса натяжений, что означает

$$\sigma_h [(u_{ij}^1)'(a_{ij}) - (u_{i-1, j}^1)'(a_{ij}) + (u_{ij}^2)'(a_{ij}) - (u_{i, j-1}^2)'(a_{ij})] + \lambda m_h u_{ij}(a_{ij}) = 0. \quad (2.22)$$

Закрепление сетки на границе квадрата  $Q$  приводит к аналогичным (2.15) условиям

$$u_{i0}(0) = u_{iN}(N) = u_{0j}(0) = u_{Nj}(0) = 0. \quad (2.23)$$

Нам удобно далее каждое ребро  $\gamma_{ij}^k$ ,  $k = 1, 2$ , параметризовать в направлении от  $a_{ij}$  скаляром  $t$ , меняющимся от 0 до  $h$ . Вид уравнения (2.21) для функций  $u_{ij}^k(t)$  сохранится.

Решение  $u_{ij}^k(t)$  уравнения (2.21) представимо в виде

$$u_{ij}^k(t) = A_{ij}^k \sin \sqrt{\frac{\lambda \rho h}{\sigma_h}} t + B_{ij}^k \cos \sqrt{\frac{\lambda \rho h}{\sigma_h}} t, \quad (2.24)$$

где  $A_{ij}^k, B_{ij}^k$  — некоторые постоянные. В силу непрерывности решений в целом на сетке для каждого из внутренних узлов  $a_{ij}$  значения  $u_{ij}$  вдоль примыкающих ребер должны быть одинаковы. Обозначая это значение через  $\overline{u_{ij}}$ , имеем

$$\overline{u_{ij}} = u_{ij}^k(0) = u_{i-1, j}^1(h) = u_{i, j-1}^2(h)$$

или, с учетом (2.24),

$$\begin{aligned}\overline{u_{ij}} &= B_{ij}^k, \\ \overline{u_{ij}} &= A_{i-1,j}^1 \sin h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} + B_{i-1,j}^1 \cos h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}}, \\ \overline{u_{ij}} &= A_{i,j-1}^2 \sin h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} + B_{i,j-1}^2 \cos h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}}.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Условия на границе (2.23) дополняют (2.25) соотношениями

$$\overline{u_{ij}} = 0 \quad \text{при} \quad a_{ij} \in \partial \Gamma_h. \quad (2.26)$$

Подстановка (2.24) в (2.22) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}& \sqrt{\lambda \rho_h \sigma_h} \left[ A_{ij}^1 - A_{i-1,j}^1 \cos h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} + B_{i-1,j}^1 \sin h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} + \right. \\ & \left. + A_{ij}^2 - A_{i,j-1}^2 \cos h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} + B_{i,j-1}^2 \sin h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} \right] + \lambda m_h \overline{u_{ij}} = 0\end{aligned}$$

или, если для упрощения обозначить

$$\sin \left( h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} \right) = s, \quad \cos \left( h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}} \right) = c, \quad (2.27)$$

к соотношениям

$$\begin{aligned}& \frac{1}{s} \sqrt{\lambda \rho_h \sigma_h} \left[ (\overline{u_{i+1,j}} - c \overline{u_{ij}}) - c(\overline{u_{ij}} - c \overline{u_{i-1,j}}) + s^2 \overline{u_{i-1,j}} + \right. \\ & \left. + (\overline{u_{i,j+1}} - c \overline{u_{ij}}) - c(\overline{u_{ij}} - c \overline{u_{i,j-1}}) + s^2 \overline{u_{i,j-1}} \right] + \lambda m_h \overline{u_{ij}} = 0,\end{aligned}$$

что преобразуется к виду

$$\frac{1}{s} \left[ (\overline{u_{i-1,j}} + \overline{u_{i+1,j}} + \overline{u_{i,j-1}} + \overline{u_{i,j+1}}) - \left( 4c - sm_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}} \right) \overline{u_{ij}} \right] = 0. \quad (2.28)$$

Таким образом, для каждого  $\lambda$  имеем систему уравнений (2.25), (2.26), (2.28), линейных относительно  $A_{ij}^k$ ,  $B_{ij}^k$ ,  $\overline{u_{ij}}$ . Нули по  $\lambda$  определителя этой системы дают искомый спектр. Этот определитель, с учетом специфики системы, допускает представление в виде

$$\begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_3 \end{vmatrix}, \quad (2.29)$$

где строки фрагмента  $(D_1 \ D_2)$  составлены из коэффициентов уравнений (2.25), (2.26), причем

$$D_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} s & c & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & s & c \\ & & & & & 1 \end{matrix}}^{4N(N-1)} \end{pmatrix},$$

где также использованы обозначения (2.27). Блок  $D_3$  в (2.29) составлен из коэффициентов соотношений (2.28), а определитель  $D_3$  допускает представление  $(s)^{-(N-1)^2} |\tilde{D}_3|$ , где  $\tilde{D}_3$  составлен из коэффициентов системы уравнений

$$(\overline{u_{i-1,j}} + \overline{u_{i+1,j}} + \overline{u_{i,j-1}} + \overline{u_{i,j+1}}) - \alpha \overline{u_{ij}} = 0, \quad \alpha = 4c - sm_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}}.$$

Таким образом, определитель (2.29) обращается в нуль лишь при  $s^{N^2-1} = 0$ , что приводит к (2.19), или при  $|\tilde{D}_3| = 0$ .

Следующий шаг обусловлен представлением  $|\tilde{D}_3| = |G - \alpha I|$ , где  $G$  — матрица смежности графа, полученного из  $\Gamma_h$  выбрасыванием граничных вершин  $a_{ij} (\in \partial\Gamma_h)$  и ребер, примыкающих к ним. Тем самым, нули  $|\tilde{D}_3| = 0$  совпадают со спектром алгебраического графа с матрицей смежности  $G$ . Этот спектр (согласно, например, [14]) состоит из чисел вида:  $\alpha = 2 \cos \frac{\pi i}{N} + 2 \cos \frac{\pi j}{N}$  при  $i, j = \overline{1, N-1}$ , т.е.

$$4c - sm_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}} = 2 \cos \frac{\pi i h}{l} + 2 \cos \frac{\pi j h}{l},$$

что с учетом (2.27) приводит к (2.18).

2.4.4. Формулы (2.18), (2.19) позволяют изучить спектр «тканой мембраны» достаточно подробно. Вполне очевидный уход в бесконечность при  $h \rightarrow 0$  решений уравнения (2.19) отмечался выше. Зависимость решений (2.18) от  $h$  достаточно нетривиальна, так как множество этих решений для каждой пары  $i, j$  образует неограниченную последовательность, а конечное число таких пар  $i, j$  при фиксированном  $h$  неограниченно возрастает при  $h \rightarrow 0$ . Рассмотрим вначале поведение решений (2.18) при фиксированных  $i, j$ . Оно особенно просто, если все  $m_h = 0$ , т.е. загрузка массами в узлах сетки отсутствует. Тогда уравнения (2.18) принимают вид

$$2 \cos \frac{\pi i h}{l} + 2 \cos \frac{\pi j h}{l} = 4 \cos h \sqrt{\frac{\lambda \rho_h}{\sigma_h}},$$

что дает явное представление для собственных значений

$$\lambda_{hk} = \left[ \pm \arccos \left( \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi i h}{l} + \cos \frac{\pi j h}{l} \right) \right) + 2\pi k \right]^2 \frac{\sigma_h}{h^2 \rho_h}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь общий случай ненулевых  $m_h$ . Положим

$$\mu = \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} h, \quad \beta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi i h}{l} + \cos \frac{\pi j h}{l} \right), \quad g = \frac{m_h}{2\rho_h h}. \quad (2.30)$$

Для  $\mu$  эквивалентное (2.18) уравнение имеет вид

$$\beta_{ij} - \cos \mu + g \mu \sin \mu = 0. \quad (2.31)$$

Это уравнение при фиксированных  $i, j$  имеет лишь простые корни. Для его левой части  $f(\mu) = \beta_{ij} - \cos \mu + g \mu \sin \mu$  соседние экстремумы имеют противоположные знаки (проверяется непосредственно). Поэтому нули  $f$  перемежаются с экстремумами, что позволяет давать оценки нулям  $f$ . Значения  $i, j$  мы по-прежнему фиксируем.

Эквивалентное  $f'(\mu) = 0$  уравнение имеет вид  $\tan \tau = -\frac{g}{g+1} \tau$ , и его положительные решения оцениваются так:

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) \leq \tau_k \leq \pi k, \quad (2.32)$$

причем  $\tau_0 = 0$ . Здесь  $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  — последовательность корней уравнения  $f'(\mu) = 0$ . Если через  $\mu^0, \mu^1, \mu^2, \dots$  обозначить последовательность корней уравнения (2.31) при фиксированных  $i, j$ , то из (2.32) сразу следует, например, что  $0 \leq \tau_0 \leq \mu^0 \leq \tau_1 \leq \pi$  и, в общем,

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) \leq \tau_k \leq \mu_k \leq \tau_{k+1} \leq \pi(k+1).$$

Особенно важно здесь, что эти оценки не зависят от  $i, j$ . Отсюда с учетом связи (2.30)  $\mu^k(h)$  с  $\lambda_k(h)$  легко увидеть, что  $\lambda_1(h), \lambda_2(h), \dots$  при  $h \rightarrow 0$  уходят в бесконечность равномерно по  $i, j$ . Для оценки поведения наименьшего (при фиксированных  $i, j$ ) корня  $\lambda_0(h)$  уравнения (2.18)

представим (2.18) с помощью разложения Тейлора по степеням  $h$ . С учетом равенств (2.17) получим  $\frac{\pi^2}{l^2}(i^2 + j^2) = \frac{\rho}{\sigma}\lambda + O(h^2)$ , что означает

$$\lambda = \frac{\pi^2\sigma}{l^2\rho}(i^2 + j^2) + O(h^2).$$

Сопоставление этого равенства с (2.20) приводит к основному результату.

**Теорема 2.2.** При каком угодно большом  $M$  спектр «тканой мембраны»  $\Gamma_h$  при достаточно малых  $h$  отличается (в пределах  $|\lambda| < M$ ) от спектра непрерывной мембраны лишь на  $O(h^2)$ .

## 2.5. Простая стыковка. Простейшее уравнение

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.33)$$

возникает для малых деформаций  $u(x)$  натянутой струны с закрепленными концами

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2.34)$$

Представим себе, что струна связана в точке  $x = \xi$ ,  $0 < \xi < 1$ , из двух кусков. Для каждого из них справедливо аналогичное (2.33) уравнение

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 \leq x < \xi, \quad -u''(x) = f(x), \quad \xi < x \leq 1. \quad (2.35)$$

Решения (2.33) удовлетворяют в точке  $\xi$  очевидным условиям:

(C<sub>1</sub>) условие непрерывности

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0); \quad (2.36)$$

(C<sub>2</sub>) условие гладкости

$$u'(\xi - 0) = u'(\xi + 0). \quad (2.37)$$

Если теперь забыть об исходном уравнении (2.33) и попытаться из двух кусков (2.35) с помощью (C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>) связать единое на  $[0; 1]$  уравнение, то нам еще необходимо вспомнить об отсутствующей в (2.35)–(2.37) точке  $x = \xi$  и доопределить в ней решения общим значением в силу (2.36), т.е. выполнить условие

(C<sub>3</sub>) положить значение  $u(\xi)$  равным

$$u(\xi) = u(\xi - 0) (= u(\xi + 0)). \quad (2.38)$$

Условия (C<sub>1</sub>)–(C<sub>2</sub>) стандартны при склейке двух соседних уравнений в единое. При этом (C<sub>2</sub>) является частным случаем *условий гладкости (трансмиссии)*, используемых в задачах на сетях при сшивании во внутренних узлах решений уравнений на смыкающихся ребрах. Назовем пару уравнений вместе с условиями (C<sub>1</sub>)–(C<sub>3</sub>) *сшитым уравнением*, а при дополнительных условиях (2.34) — *сшитой задачей*. Рассматривая эту задачу в классе непрерывных решений, мы можем ее считать краевой для (2.35) при условиях (C<sub>2</sub>) и (2.34). Обычно так и делается.

Адекватна ли «сшитая задача» исходной (2.33), (2.34)?

**Предложение 2.1.** Функция Грина  $G_\xi(x, s)$  сшитой задачи не совпадает с функцией Грина  $G(x, s)$  исходной задачи.

Доказательство заключается в прямой проверке. Исходя из стандартных аксиом, имеем

$$G(x, s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \leq 1, \\ s(1-x), & 0 \leq s < x \leq 1, \end{cases} \quad (2.39)$$

и  $G_\xi(x, s) \equiv G(x, s)$  при  $s \neq \xi$ . Если же  $s = \xi$ , то  $G_\xi(x, \xi)$ , удовлетворяя уравнениям (2.35) при  $f \equiv 0$  (т.е.  $u'' = 0$ ) и условиям (2.34) и (2.37), ничем иным, кроме тождественного нуля, быть не может. Итак,

$$G_\xi(x, \xi) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.40)$$

в то время, как  $G(x, \xi) > 0$  при  $x \in (0, 1)$ .

На первый взгляд, разница несущественна (всего лишь на одной прямой  $s = \xi$  из квадрата  $[0; 1] \times [0; 1]$ , т.е. на множестве меры нуль) и формула

$$u(x) = \int_0^1 G_\xi(x, s) f(s) ds \equiv \int_{[0, \xi)} G(x, s) f(s) ds + \int_{(\xi, 1]} G(x, s) f(s) ds$$

для непрерывных (например) правых частей ничего дать не может, кроме решений исходной задачи. И все же эта разница  $G$  и  $G_\xi$  настораживает, привлекая дополнительное внимание к точке  $x = \xi$ .

**Суждение 2.1.** Нулевое значение  $G(x, s)$  при  $s = \xi$  делает несущественным значение  $f(\cdot)$  в точке  $x = \xi$ , "убивает  $f(\xi)$ ", вынимая точку  $\xi$  из области интегрирования. Тем самым (2.40) как бы *спасает* задачу от погрешности.

Какие здесь могут быть погрешности? А хотя бы уже те, которые сделаны нами в предыдущем, казалось бы, совсем элементарном разговоре.

Предположим, что, как нам и хотелось, «сшитая задача» соответствует струне, связанной в точке  $\xi$  из двух кусков. Пусть  $F(x)$  — внешняя нагрузка, приложенная на промежутке  $[0; x]$ . Тогда  $F$  имеет ограниченное изменение, и соответствующая деформация  $u(x)$  выразится в виде

$$u(x) = \int_0^1 G_\xi(x, s) dF(s),$$

где интеграл понимается по Лебегу—Стилтьесу. Равенство (2.40) означает, что скачок  $F(\xi + 0) - F(\xi - 0)$  будет в этом интеграле «вырублен», т.е. никакого значения для решения задачи не будет иметь. Но этот скачок — сосредоточенная сила. Почему струна (хотя и связанная) на нее не реагирует?

С другой стороны, решение  $u(x)$  сшитой задачи с нагрузкой  $F(x)$  должно удовлетворять равенству  $-u'(x) = F(x)$ . Но тогда условие (2.37) означает, что у  $F(x)$  скачка в точке  $x = \xi$  и быть не должно. С чем же тогда борется «защитное» свойство (2.40), само порожденное условием (2.37)?

Функция Грина  $G_\xi(x, s)$  должна быть функцией влияния связанной пары струн, т.е. определять форму отклонения системы под влиянием единичной силы, сосредоточенной в точке  $s$ . Равенство (2.40) означает, что при воздействии на систему только лишь в точке  $x = \xi$  она (система) не изменяет состояния. Но это возможно только в случае, если она в точке  $x = \xi$  закреплена, т.е. при условии

$$u(\xi) = 0. \tag{2.41}$$

Но такого условия у нас не было, да и не могло быть.

К условию (2.41) нас неизбежно приводит другое соображение. Отвечающая связанной паре струн (как любой физической системе) краевая задача должна быть самосопряженной, а ее функция Грина — симметричной. Поэтому из (2.40) должно следовать  $G_\xi(\xi, s) \equiv 0$  при  $0 \leq s \leq 1$ , что приводит к (2.41).

**Суждение 2.2.** Сшитая задача (2.34)–(2.38) не отвечает паре связанных струн. При этом условии (2.37) нельзя считать краевым, поскольку оно связано с поведением правой части  $f$  в точке  $x = \xi$ .

**Следствие.** Условия (2.36)–(2.38) не решают задачу объединения пары (2.35) в единое уравнение (2.33) на  $[0; 1]$ .

В чем главный промах? В точке  $x = \xi$  так и остались не расшифрованными ни объединяющее уравнение, ни его правая часть. Поэтому доопределение (2.38) в точке  $x = \xi$  хоть и физично, но математически не подкреплено ни уравнением в этой точке, ни значением  $f(\xi)$ . Эта точка, бывшая граничной для двух многообразий, так и осталась граничной в их объединении. Поэтому и функцию Грина  $G(x, s)$  объединенной задачи нельзя определить ни при  $x = \xi$ , ни при  $s = \xi$ .

**Предложение 2.2.** *Функция Грина  $G(x, s)$  задачи (2.33), (2.34) совпадает с функцией Грина для уравнения*

$$-u''(x) = f(x), \quad x \neq \xi, \quad -[u'(\xi + 0) - u'(\xi - 0)] = f(\xi) \quad (2.42)$$

при условиях

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u(\xi + 0) = u(\xi - 0). \quad (2.43)$$

Обратим сразу внимание на то, что в постановке (2.42) объединенное нами уравнение задано и в точке  $x = \xi$ . По сравнению с предыдущим прежнее условие гладкости (2.37) вынули из перечня краевых и, превратив его в неоднородное, отнесли к толкованию объединенного уравнения в точке  $x = \xi$ . Что нам дает право такого толкования?

Введем функцию  $\mu(x) = x + \theta(x - \xi)$ , где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда, т.е.  $\theta(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{|x|} \right)$  при  $x \neq 0$ . Так как  $d\mu(x) = dx$  (по Стильтесу) при  $x \neq \xi$  и  $\frac{d\varphi}{d\mu} \Big|_{x=\xi} = \frac{\varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)} = \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0)$  (по Радону—Никодиму), то оба равенства (2.42) есть реализация одного

$$-\frac{d}{d\mu} u'(x) = f(x) \quad (2.44)$$

без всяких оговорок о точке  $\xi$ . Включение производных по мере в последнем уравнении не меняет при условиях (2.43) аксиом функции Грина, что позволяет убедиться в совпадении функций Грина непосредственной проверкой. Последний взгляд (2.44) на объединяющее дифференциальное уравнение уже допускает включение  $\xi$  в область определения решений, превращая и ее в связное множество.

### 3. ПОСТАНОВКА ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА СЕТИ

Ниже приводятся точная постановка и внешний анализ уравнения

$$-\frac{d}{d\Gamma}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x) \quad (3.1)$$

на геометрической сети  $\Gamma$ . Это уравнение подразумевает стандартную форму

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \quad (3.2)$$

на всех ребрах сети, а в ее внутренних узлах трактуется как

$$-\left( \sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \frac{d}{d\gamma} u(x) \right) + q(x)u(x) = f(x), \quad (3.3)$$

где суммирование осуществляется по всем ребрам  $\gamma$ , примыкающим к  $x$ , а  $\frac{d}{d\gamma} u(x)$  означает производную  $u(\cdot)$  внутрь ребра  $\gamma$ .

Начав с необходимых понятий и договоренностей, мы приводим затем физическую мотивацию (на основе вариационного принципа) рассматриваемого класса уравнений, показываем дивергентную природу  $\frac{d}{d\Gamma}$  и устанавливаем, что (3.3) есть «слабая реализация (1.3)» в узлах.

#### 3.1. Функции на сетях.

*3.1.1.* Пусть  $\Gamma$  — геометрическая сеть из  $\mathbb{R}^n$ , реализованная в виде открытого связного геометрического графа. Удобно считать, что  $\Gamma$  состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

называемых ребрами, и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначается далее через  $J(\Gamma)$ , а каждая точка из него называется *внутренней вершиной (узлом)* графа  $\Gamma$ . Концы интервалов (3.4), не включенные в  $J(\Gamma)$ , называются *граничными* или *тупиковыми вершинами*  $\Gamma$ , а их множество обозначается через  $\partial\Gamma$ . Объединение всех ребер обозначается через  $R(\Gamma)$ . Тем самым,  $\Gamma = R(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ . На  $\Gamma$  индуцируется топология из  $\mathbb{R}^n$ , и всюду далее, когда

будет идти речь об открытых и замкнутых подмножествах  $\Gamma$ , будет подразумеваться именно эта топология.

3.1.2. Ведущая роль топологии на  $\Gamma$ , ее постоянное использование для анализа непрерывных на  $\Gamma$  функций делают открытые (в относительной топологии  $\Gamma$ ) множества постоянным инструментом анализа.

**Определение.** Любое непустое связное открытое подмножество  $\Gamma$  называется *подграфом*  $\Gamma$ .

Подграф  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  имеет внутренние вершины только из  $J(\Gamma)$ , а точнее,  $J(\Gamma_0) = J(\Gamma) \cap \Gamma_0$ . С граничными для  $\Gamma_0$  вершинами ситуация *в принципе* другая. Их множество  $\partial\Gamma_0$  может содержать точки, не входящие ни в  $\partial\Gamma$ , ни в  $J(\Gamma)$ , когда точка  $a \in \partial\Gamma_0$  оказывается внутренней для одного из ребер  $\Gamma$ . Если  $\gamma$  — ребро  $\Gamma$ , содержащее  $a \in \partial\Gamma_0$ , то в подграф  $\Gamma_0$  оно входит не все, а лишь одним куском, отсекаемым  $a$ . Эта особенность отличает наш термин *подграф* от используемого в алгебраической теории, где «куски ребер» — бессмысленное понятие и где вершинами подграфа могут являться лишь вершины исходного графа.

3.1.3. Рассмотрим далее множество  $C[\Gamma]$  скалярнозначных функций, определенных и равномерно непрерывных на  $\Gamma$ . Последнее означает возможность непрерывного доопределения их на  $\partial\Gamma$ . Множество таких функций обозначается далее через  $C[\Gamma]$ .

Говоря о непрерывной лишь на  $R(\Gamma)$  функции, мы подразумеваем всякий раз ее равномерную непрерывность на каждом ребре  $\Gamma$ . Множество таких функций обозначается далее через  $C[R(\Gamma)]$ . Во внутренних узлах  $\Gamma$  функция из  $C[R(\Gamma)]$  может иметь различные пределы вдоль различных ребер, примыкающих к одному узлу. Естественно считать, что  $C[\Gamma] \subset C[R(\Gamma)]$ . Заданная на  $\Gamma$  функция  $z(x)$ , лежащая в  $C[R(\Gamma)]$ , может иметь в точках  $J(\Gamma)$  (во внутренних узлах) значения, не равные ее пределам вдоль примыкающих ребер. Поэтому для  $a \in J(\Gamma)$  мы будем отличать  $z(a)$  от  $z_\gamma(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a, x \in \gamma} z(x)$ .

Всюду далее для заданной на  $R(\Gamma)$  функции  $z(x)$  ее сужение на ребро  $\gamma$  обозначается через  $z_\gamma(x)$ , а  $z_i(x)$  означает сужение  $z(x)$  на ребро  $\gamma_i$ .

3.1.4. Дифференцирование  $u(x) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  внутри любого ребра  $\gamma$  осуществляется по натуральному параметру, причем предполагается, что для этого на ребре выбрана одна из двух возможных ориентаций. При изменении ориентации знак  $u'$  меняется на противоположный. Однако знак второй производной  $u''$  (или квазипроизводной  $(pu)'$ ) уже не зависит от ориентации ребра.

3.1.5. С производными первого порядка нам придется иметь дело в основном в крайних точках ребер. Чтобы не обременять себя оговорками о временной (на несколько фраз) локальной параметризации, введем понятие *крайней производной* — производную  $u'(x)$  в точке  $x = a$ , являющейся концом интервала  $\gamma = (a, b)$ , при его параметризации «от  $a$ », т.е. *внутри интервала*. Обозначим *крайнюю производную* через  $\frac{du}{d\gamma}(a)$ .

Крайние производные удобны уже симметричностью равенства

$$\int_{(a,b)} (pu)' dx = - \left[ p(a) \frac{du}{d\gamma}(a) + p(b) \frac{du}{d\gamma}(b) \right]$$

относительно концов  $a, b$  интервала  $\gamma = (a, b)$ .

3.1.6. Чтобы выделить из  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$  те ребра, которые примыкают к данной вершине  $a$ , введем множество  $\Gamma(a)$  — подграф, состоящий из  $a$  и примыкающих к  $a$  ребер. Тем самым высказывание « $\gamma_i$  примыкает к  $a$ » равносильно « $\gamma_i \subset \Gamma(a)$ ».

**3.2. Вариационная природа условий трансмиссии.** В этом пункте мы приводим один из аргументов в пользу естественности толкования (3.1) в узлах сети как (3.3). Аргумент весомый и важный, так как речь идет об одном из первоисточков уравнений на сетях, дающем не только «право на жизнь» этим уравнениям, но и обнажающем их суть.

3.2.1. Пусть  $\Gamma$  — геометрическая сеть, расположенная вдоль некоторого физического объекта, отклонение элементов которого от состояния равновесия одномерно. Обозначим это отклонение через  $u(x)$ . Пусть  $f(x)$  при  $x \in R(\Gamma)$  — плотность внешней силы в точке  $x$ , а при  $x \in J(\Gamma)$  — сосредоточенная сила, приложенная к точке  $x$ . Тогда энергия воздействия этих сил на систему выразится затраченной работой, т.е.

$$V_1(u) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f u \, dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} f(a) u(a).$$

Если отклонению системы упруго препятствует внешняя среда, то накапливаемая энергия равна работе, затрачиваемой на преодоление сопротивления среды, т.е.

$$V_2(u) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} q \frac{u^2}{2} \, dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} q(a) \frac{u^2(a)}{2},$$

где  $q(x)$  — плотность распределения упругости среды, и  $q(a)$  — коэффициент упругости опоры (типа пружины), сосредоточенной в узле  $a$ .

Будем предполагать, что за счет внутренней реакции система накапливает энергию, равную

$$V_3(u) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} p \frac{u'^2}{2} \, dx,$$

как, например, при упругих деформациях (поперечных — для струн, продольных — для стержней и пр.). Производные  $u'(x)$  входят здесь во вторых степенях, что допускает произвол в ориентации ребер.

Пусть в граничных точках (из  $\partial\Gamma$ ) положение системы фиксировано, т.е.

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (3.5)$$

Общая потенциальная энергия системы  $V(u)$ , соответствующая возможной (виртуальной) деформации  $u(x)$ , определяется равенством

$$V(u) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \left( f u - \frac{q u^2}{2} - \frac{p u'^2}{2} \right) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \left( f(a) u(a) - q(a) \frac{u^2(a)}{2} \right). \quad (3.6)$$

*Реальная деформация системы, отвечающая устойчивому равновесию, должна давать минимум  $V(u)$ .* Это положение вместе с конкретикой (3.5), (3.6) служит (со времен Гильберта) фундаментом математического описания физического объекта. В физике обычно говорят о принципе стационарного (т.е. экстремального для  $V$ ) положения.

Мы также предполагаем неразрывность системы, что означает непрерывность  $u(x)$  на  $\Gamma$  и достаточную гладкость деформации на ребрах.

Классическая схема Лагранжа для отыскания первой вариации  $\delta\Phi(u)h = \left. \frac{d}{d\lambda} V(u + \lambda h) \right|_{\lambda=0}$  приводит к выражению

$$\delta\Phi(u)h = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} [f h - q u h - p u' h'] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} [f(a) u(a) - q(a) u(a) h(a)].$$

Преобразуя  $\int_{\gamma_i} p u' h' dx$  интегрированием по частям, получаем

$$\delta\Phi(u)h = \Sigma_1(u, h) + \Sigma_2(u, h),$$

где

$$\Sigma_1(u, h) = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} [(p u')' - q u + f] h \, dx,$$

и

$$\Sigma_2(u, h) = \sum_{i=1}^m \left( p_i(a_i) \frac{du}{d\gamma_i}(a_i) h_i(a_i) + p_i(b_i) \frac{du}{d\gamma_i}(b_i) h(b_i) \right) + \sum_{a \in J(\Gamma)} [f(a) - q(a)u(a)] h(a),$$

где  $a_i, b_i$  означают концы ребра  $\gamma_i$ . Так как  $h|_{\partial\Gamma} = 0$ , то в первой сумме в  $\Sigma_2(u, h)$  ненулевыми являются лишь слагаемые с  $a_i$  и  $b_i$  из  $J(\Gamma)$ . Перегруппировав эту сумму, можно представить  $\Sigma_2$  в виде

$$\Sigma_2(u, h) = \sum_{a \in J(\Gamma)} h(a) \left[ \left( \sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} p_i(a) \frac{du}{d\gamma_i}(a) \right) + f(a) - q(a)u(a) \right].$$

Из равенства  $\delta\Phi(u)h = 0$  ( $\forall h$ ), следующего из принципа Ферма, в силу произвольности  $h$  получаем

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in R(\Gamma), \quad (3.7)$$

$$- \sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} p_i(a) \frac{du}{d\gamma_i}(a) + q(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma). \quad (3.8)$$

Для правомерности проведенных рассуждений достаточно, к примеру, чтобы  $p'$  и  $q$  были равномерно непрерывны на каждом ребре, а  $f$  суммируема. Из физических соображений, как правило, ясно, что  $p > 0$  равномерно на  $\Gamma$  и  $q \geq 0$ .

**3.2.2.** Итак, реальная деформация  $u(x)$  исходного объекта должна удовлетворять помимо (3.5) еще и равенствам (3.7) и (3.8). Является ли эта система равенств полной, т.е. совпадает или нет количество равенств с количеством подлежащих определению параметров?

Равенства (3.7), реализуемые на каждом ребре — это обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Семейство всех решений каждого уравнения зависит от двух параметров, а на всех ребрах в целом число этих неизвестных параметров  $2m$ . Количество условий (3.5) равно  $\sum_{a \in \partial\Gamma} \text{ind}(a)$ , где через  $\text{ind}(a)$  обозначено количество примыкающих к  $a$  ребер. Число условий (3.8) равно  $|J(\Gamma)|$ . Кроме того, предположение о непрерывности  $u(x)$  во внутренних вершинах означает, что  $u_i(a) = u_j(a)$  для любой  $a \in J(\Gamma)$  и любых  $\gamma_i, \gamma_j$  из  $\Gamma(a)$ . Таких условий (линейно независимых) в каждой точке  $a \in J(\Gamma)$  будет  $(\text{ind}(a) - 1)$ . Складывая количества условий трех типов, получаем  $\sum_{a \in \partial\Gamma \cup J(\Gamma)} \text{ind}(a)$ . Последняя сумма равна, как известно, удвоенному числу ребер, т.е.  $2m$ .

Таким образом, задача (3.5), (3.7), (3.8) в классе непрерывных в целом на  $\Gamma$  и непрерывно дифференцируемых на каждом ребре функций поставлена вполне разумно. Если с самого начала речь вести не о статической деформации, а о собственных колебаниях, то  $f$  должна быть заменена силой инерции, что по принципу Даламбера приводит к замене в правых частях (3.7) и (3.8)  $f$  на  $\omega^2 \rho u$ , где  $\omega$  — собственная частота,  $\rho(x)$  — плотность распределения масс на  $R(\Gamma)$  и  $\rho(a)$  — сосредоточенные массы во внутренних узлах  $a \in J(\Gamma)$ .

**3.3. Естественные условия.** Условия (3.5) принципиально отличаются от (3.8) тем, что первые были даны априори, а вторые получены при вариационном обосновании. Такого типа условия, не оговоренные заранее, обычно называют *естественными*. Покажем далее, что эти условия не просто естественны, но могут считаться *реализацией* (3.7) *во внутренних узлах*.

**3.3.1.** Во-первых, условия (3.8) получены *совершенно однотипно* с (3.7) из условия  $\delta\Phi(u)h = 0$   $\forall h$ , т.е. имеют идентичное происхождение.

**3.3.2.** Во-вторых, эти условия имеют дивергентную природу. Действительно, пусть  $u$  — достаточно гладкая на  $R(\Gamma)$  функция, а  $\nabla u(x) = \text{grad } u(x)$  — задаваемое на  $R(\Gamma)$  векторное поле. Воспользуемся гидродинамической интерпретацией и найдем поток поля  $p(\nabla u(x))$  через поверхность достаточно малой окрестности внутреннего узла  $a \in J(\Gamma)$ .

Эта окрестность имеет вид «ε-ёжика» — пучка с узлом в точке  $a$  и достаточно малыми кусками  $(a, a + \varepsilon_i)$  интервалов  $\gamma_i$ , примыкающих к  $a$ . Граница этой окрестности представляет собой набор точек  $a + \varepsilon_i$  из  $\gamma_i \subset \Gamma(a)$ . Проекция  $\nabla u(a + \varepsilon_i)$  на внешнюю к взятой окрестности нормаль совпадает

с производной  $u'(a + \varepsilon_i)$ , вычисленной при ориентации  $\gamma_i$  в направлении «от  $a$ ». Поэтому поток поля  $p(\nabla u)$  через рассматриваемую поверхность равен  $\sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} p(a + \varepsilon_i)u'(a + \varepsilon_i)$ , и при стягивании этой окрестности к точке  $a$  (т.е. при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ) он стремится к

$$(L_0 u)(a) = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} p_i(a) \frac{d}{d\gamma_i} u'(a). \quad (3.9)$$

Приписывая точке  $a$  единичный объем, получим  $(L_0 u)(a) = \operatorname{div}(p\nabla u)(a)$ .

3.3.3. Третье соображение — возможность толкования выражения (3.9) как «слабой производной по  $\Gamma$ » от  $(pu')$  в точке  $a$ .

Введем на  $\Gamma$  меру  $\mu$ , полагая ее линейной (и единичной плотности) на каждом из ребер  $\gamma_i$  и атомарной (сосредоточенной) в каждой из внутренних вершин  $a \in J(\Gamma)$ , полагая в них соответствующий дифференциал Стильбеса  $(d\mu)(a) = 1$ . Эта мера позволяет, например, свернуть выражение для энергии  $V(u)$ :

$$V(u) = \int_{\Gamma} \left( fu - p \frac{u'^2}{2} - q \frac{u^2}{2} \right) d\mu,$$

если положить

$$(pu')(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \quad (3.10)$$

Последнее допущение в рамках пункта 3.2 вполне физично, т.к. функция  $p(x)$ , определяющая линейную упругость системы в точке  $x$ , сама, в свою очередь, определяется двусторонними окрестностями точки  $x$ , а в крайних точках каждого ребра линейная упругость отсутствует.

Введем, наконец, в рассмотрение достаточное множество  $\Phi$  бесконечно дифференцируемых на  $R(\Gamma)$  и непрерывных в целом на  $\Gamma$  (т.е. и в точках из  $J(\Gamma)$ ) финитных функций с компактными относительно  $\Gamma$  носителями. Для любой функции  $\varphi \in \Phi$ , носитель которой  $U_\varphi$  содержит лишь одну внутреннюю вершину  $a \in J(\Gamma)$ , имеем

$$\int_{\Gamma} (pu')\varphi' d\mu = \int_{\Gamma \cap U_\varphi} (pu')\varphi' d\mu = (pu'\varphi')(a) + \sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} \int_a^{x_i} (p_i u') d\varphi,$$

где  $(a, x_i) = \gamma_i \cap U_\varphi$ . Отсюда, в силу (3.10) и равенства

$$\int_a^{x_i} (p_i u') d\varphi = - \left[ \left( p_i \frac{du}{d\gamma_i} \right) (a) \varphi(a) \right] - \int_a^{x_i} (p_i u')' \varphi dx$$

(учитываем, что  $\varphi(x_i) = 0$ ) следует

$$\int_{\Gamma} (pu')\varphi' d\mu = - \left[ \sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} \left( p_i \frac{du}{d\gamma_i} \right) (a) \right] \varphi(a) - \int_{(\Gamma \setminus \{a\})} (pu')' \varphi dx. \quad (3.11)$$

Здесь  $p_i(a)$  — предельное в точке  $a$  значение  $p(x)$  вдоль ребра  $\gamma_i$  (напомним, что, вообще говоря,  $p_i(a) \neq p(a)$ ). С учетом того, что  $(d\mu)(x) = dx$  при  $x \in R(\Gamma)$  и  $(d\mu)(a) = 1$  при  $a \in J(\Gamma)$ , пользуясь (3.10), можно переписать (3.11) в виде

$$\int_{\Gamma} (pu')\varphi' d\mu = - \int_{\Gamma} \frac{d}{d\Gamma} (pu') \varphi d\mu, \quad (3.12)$$

где  $\frac{d}{d\Gamma} (pu')(x) = (pu')'(x)$  при  $x \in R(\Gamma)$  и  $\frac{d}{d\Gamma} (pu')(x) = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma(x)} p_i(x) \frac{du}{d\gamma_i}(x)$  при  $x \in J(\Gamma)$ . Так как любая  $\varphi \in \Phi$  может быть представлена в виде конечной суммы функций, носитель каждой из которых содержит ровно одну внутреннюю вершину, то можно считать, что (3.12) выполняется при всех  $\varphi \in \Phi$ . А выполнение равенства (3.12) при всех  $\varphi \in \Phi$  означает, что функция  $\frac{d}{d\Gamma} (pu')$  реализует

слабую  $\mu$ -производную от функции  $(pu')(x)$ , доопределяемой в  $J(\Gamma)$  нулями, согласно (3.10). Таким образом, (3.7) и (3.8) могут считаться реализациями на  $\Gamma$  одного уравнения  $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = f$  вида (3.1).

**3.4. О «физической границе».** Согласно предыдущему, граничные вершины сети  $\Gamma$  отличаются от внутренних совсем не количеством примыкающих к ним ребер, одним или несколькими. Для нас разница определяется задачей, которая ставится на графе, и граничными являются лишь те вершины, где система изначально закреплена. Тем самым, мы допускаем в  $J(\Gamma)$  точки, к которым примыкает лишь по одному ребру. В таких вершинах равенства (3.8) принимают вид

$$-p_\gamma(a)u'(a) + q(a)u(a) = f(a)$$

( $\gamma$  — примыкающее к  $a$  ребро), где  $u'(a)$  — крайняя производная. Если  $q(a)$  и  $f(a)$  равны нулю, то имеем  $u'(a) = 0$  — типичное условие свободного (незакрепленного) конца в задаче о струне. При  $f(a) = 0$  и  $q(a) \neq 0$  получаем хорошо известное из скалярной теории условие Штурма—Лиувилля.

Предлагаемый нами взгляд на подобные (*естественные*) условия как на реализацию уравнения в точке приводит к неожиданному даже для обычных одномерных задач наблюдению: уже в задаче об одной струне с упругими креплениями концов при нашем подходе  $\partial\Gamma = \emptyset$ , а концы составляют  $J(\Gamma)$ .

**3.5. Некоторые свойства однородного уравнения на сети.**

3.5.1. В этом пункте приведем только некоторые (лишь те, которые нам необходимы для дальнейшего) свойства соответствующего (3.1) однородного уравнения

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = 0, \tag{3.13}$$

где полагаем

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) = \begin{cases} (pu')'(x), & x \in R(\Gamma), \\ \sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \frac{d}{d\gamma} u(x), & x \in J(\Gamma). \end{cases}$$

(Значительно полнее свойства уравнения (3.13) представлены в [8].) Функция  $p(x)$  предполагается заданной на  $R(\Gamma)$ , а  $q(x)$  — на  $\Gamma$ , и обе — лежащими в  $C[R(\Gamma)]$ , т.е. равномерно непрерывными на каждом ребре. Дополнительно предполагается дополнительно положительность  $\inf_{R(\Gamma)} p$  и чисел  $\alpha_\gamma(x)$ .

Решения (3.13) будем искать лишь среди заданных на всем  $\Gamma$  функций  $u(x)$  из  $C[\Gamma]$ , для которых  $(pu')' \in C[R(\Gamma)]$ . Множество таких функций обозначается далее через  $D^2[\Gamma]$ .

3.5.2. Будучи промежуточным объектом между скалярным и многомерным уравнениями, (3.13) несет в себе заряд свойств эллиптического типа.

**Теорема 3.1** (см. [8]). *Любое знакопостоянное решение  $u(x)$  уравнения (3.13) либо тривиально ( $\equiv 0$ ), либо не имеет нулей в  $\Gamma$ . В последнем случае из равенства  $u(a) = 0$  при  $a \in \partial\Gamma$  следует  $u'(a) \neq 0$ .*

**Следствие** (аналог принципа максимума). *Если  $u(x)$  — решение (3.13) без нулей в  $\Gamma$ , то для любого решения  $v(x)$  того же уравнения, неколлинеарного с  $u(x)$ , отношение  $v(x)/u(x)$  не может иметь внутри  $\Gamma$  ни глобальных максимумов, ни глобальных минимумов.*

**Доказательство.** Если  $\lambda_0$  — экстремальное значение  $v/u$ , то функция  $h = v - \lambda_0 u$  должна быть знакопостоянной на  $\Gamma$ , имея внутри нулевое значение, что влечет по теореме 3.1  $h \equiv 0$ , т.е. коллинеарность  $v$  и  $u$ . □

## 4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА СЕТИ

В математических работах задачи на сетях в той или иной степени общности возникли в форме вопроса о непрерывных решениях системы

$$-(pu')' + qu = f, \quad x \in R(\Gamma), \quad (4.1)$$

$$-\sum_{\gamma \subset \Gamma(a)} \alpha_\gamma(a) \frac{du}{d\gamma}(a) + q(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad (4.2)$$

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad (4.3)$$

где (4.1) — обыкновенные дифференциальные уравнения, заданные порознь на ребрах  $\gamma_i$ , а (4.2) и (4.3) — линейные связи, заданные локально в конечном наборе точек во внутренних и граничных вершинах  $\Gamma$ . Ниже рассмотрим систему (4.1)–(4.3) преимущественно как краевую задачу

$$-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = f, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0,$$

относя равенства (4.3) к краевым условиям, а (4.1), (4.2) — к реализациям на  $\Gamma = R(\Gamma) \cup J(\Gamma)$  единого уравнения на целом связном множестве  $\Gamma$ . Такой взгляд, однако, не единственно возможный и даже не первый. Более того, этот взгляд, открывая перспективу для получения качественных результатов (типа п. 3.5), оставляет в стороне такие важные и традиционные для ОДУ вопросы, как разрешимость обыкновенного дифференциального уравнения (4.1)–(4.2) на всем  $\Gamma$ , продолжительность решений, заданных на части  $\Gamma$  (скажем, на ребре), размерность пространства решений, условия однозначности решений и пр. Ответы на подобные вопросы возможны на основе общей теории краевых задач, если на систему (4.1)–(4.3) посмотреть по-другому.

**4.1. Версии задачи (4.1)–(4.3).** При традиционном взгляде ситуация вроде бы ясна: перед нами обычная краевая задача для системы (4.1) дифференциальных уравнений. Однако, если присмотреться, то:

- уравнения (4.1), хоть и совсем простые, скалярные, но заданы на разных носителях, каждое на своем, что не позволяет сразу считать систему (4.1) уравнением для вектор-функции от скалярного аргумента;
- если на систему (4.1) смотреть поэлементно как на набор уравнений, то следует помнить об условии непрерывности

$$u_i(a) = u_j(a), \quad \gamma_i, \gamma_j \subset \Gamma(a); \quad (4.4)$$

напомним, что здесь  $\gamma_i \subset \Gamma(a)$  означает примыкание  $\gamma_i$  к  $a$ , а  $u_i(x)$  — сужение функции  $u(x)$  на ребро  $\gamma_i$ ;

- если мы захотим забыть о графе  $\Gamma$ , переформулировав задачу в независимых от  $\Gamma$  терминах на некоторой системе интервалов, объявив их концы граничными точками, то это (забыть про  $\Gamma$ ) все равно не удастся: условия (4.2)–(4.4) придется-таки оснастить дополнительной фиксированной матрицей, определяющей связь между индексами согласуемых решений  $u_i$  с номерами концов соответствующих интервалов. В качестве такой матрицы можно брать либо матрицу графа, либо его матрицу инцидентности. Последнее обстоятельство особенно затрудняет восприятие существа картины.

Сведение поставленной задачи к стандартной с последующим использованием результатов общей теории краевых задач [2] может осуществляться одним из следующих способов.

а) *Декомпозиционный подход.* Пусть  $[\gamma]$  — замыкание интервала  $\gamma = (a; b)$  из  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $C^2[\gamma]$  множество определенных на  $\gamma$  функций  $u(x)$ , для которых  $(pu')'(x)$  доопределяема непрерывно на  $[\gamma]$ . Для данного набора  $\{\gamma_i\}_1^m$  ребер  $\Gamma$  обозначим через  $D^2E^m$  произведение таких пространств  $C^2[\gamma_i]$ . Система (4.1) может теперь рассматриваться как единое уравнение в  $D^2E^m$ . Условия (4.2)–(4.4) порождаются системой линейных и непрерывных в  $D^2E^m$  функционалов, определяемых с участием матрицы инцидентности.

б) *Скаляризирующий подход* сводит задачу к одному скалярному уравнению на отрезке. Пусть  $\alpha_i$  — длина интервала  $\gamma_i$ . Очевидный линейный изоморфизм отождествляет  $\gamma_1$  с интервалом  $(0; \alpha_1)$ , ребро  $\gamma_2$  — с интервалом  $(\alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2)$ , и, в общем, ребро  $\gamma_i$  — с интервалом  $(\xi_{i-1}; \xi_i)$ , где  $\xi_i =$

$\alpha_1 + \dots + \alpha_i$  и  $i = \overline{1, m}$ . Тогда каждое из уравнений системы (4.1) отождествляется с уравнением на соответствующем интервале  $(\xi_{i-1}; \xi_i)$ , что приводит к единому уравнению второго порядка на  $(0; \xi_m)$ , правда, с оговоркой: это уравнение нарушается, вообще говоря, во всех точках  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ . Условия (4.2)–(4.4), сопровождаемые матрицей инциденции, переходят в многоточечные краевые условия нелокального типа, они связывают значения и производные решений в разных точках  $\xi_i$ .

в) *Векторный подход* сводит задачу к стандартной постановке в классе вектор-функций. На каждом ребре  $\gamma_i$  вместо натуральной параметризации вводится каноническая параметризация отрезком  $[0; 1]$ , после чего можно считать все уравнения заданными на одном отрезке  $[0; 1]$ , а решения  $u_i(t)$  на разных ребрах  $\gamma_i$  — координатами одной вектор-функции  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Синхронизация аргументов не портит дела, так как решения (4.1) никак не взаимосвязаны во внутренних точках разных ребер. Условия (4.2)–(4.4) оказываются двухточечными. Разумеется, без матрицы графа (или инциденций) и здесь не обойтись. Возникающая в результате двухточечная задача не является, вообще говоря, распадающейся, так как некоторые краевые условия могут связывать решение обоими концами. Для того, чтобы за счет переориентации ребер система краевых условий оказалась распадающейся, необходимо, чтобы граф был двудольным (например, не содержал бы циклов).

г) *Связный подход* предполагает обязательно однородность условий (4.2). Граф  $\Gamma$  из рассмотрений не выбрасывается, а служит носителем аргументов искомым функций. Решение системы (4.1)–(4.2) ищется в классе функций, определенных и непрерывных на *едином* множестве  $\Gamma$ . Нет необходимости помнить об условиях (4.4) так же, как и о матрице инциденций. Условия (4.2), будучи однородными (называемые *условиями гладкости* или *условиями трансмиссии*), вносятся в определение решения уравнений (4.1). Сами эти уравнения рассматриваются скорее уже не как система, а как комплект уравнений на  $\Gamma$ , что приближает этот подход к декомпозиционному. Краевыми признаются лишь условия (4.3), задаваемые на границе:  $u|_{\partial\Gamma} = 0$ . Связный подход позволяет посмотреть на решения как на формы деформированной сетки, как на определенные на всей сети  $\Gamma$  функции, графиками которых являются «паутинки над  $\Gamma$ ».

д) *Синтетический подход*. Условия (4.2) считаются реализацией исходного уравнения во внутренних вершинах, а (4.1) — реализацией того же уравнения на ребрах. Таким образом, мы имеем одно уравнение второго порядка сразу на всем графе, включая и вершины из  $J(\Gamma)$ . Краевые условия только на границе:  $u|_{\partial\Gamma} = 0$ . В отличие от предыдущего подхода снимаются возможные особенности решений во внутренних узлах, устраняемые дополнительными ограничениями на условия гладкости (трансмиссии). Вместо последних, допуская ненулевые правые части  $f(a)$ , возникает «уравнение в точке  $a \in J(\Gamma)$ ».

Последний подход используется в дальнейшем как основной взгляд на задачу (4.1)–(4.3), позволяя даже внешне отразить эллиптическую природу устанавливаемых качественных свойств. Остальные оказываются полезными при использовании отдельных результатов классической теории.

**4.2. Разрешимость краевой задачи и свойства решений.** Всюду далее предполагаются выполненными *естественные условия*, когда в (4.1) функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  равномерно непрерывны на каждом ребре  $\Gamma$ , причем  $\inf p > 0$  и  $\alpha_\gamma(a) > 0$  для всех  $a \in J(\Gamma)$  и всех  $\gamma \subset \Gamma(a)$ .

4.2.1. В *естественных условиях* для каждого ребра  $\gamma$  соответствующее ему уравнение (4.1) однозначно разрешимо на всем  $\gamma$  для любой начальной задачи, в том числе и для крайних задач вида

$$u(a) = 0, \quad \frac{d}{d\gamma}u(a) = 1, \tag{4.5}$$

$$u(a) = 1, \quad \frac{d}{d\gamma}u(a) = 0, \tag{4.6}$$

где  $a$  — один из концов  $\gamma$ ,  $u(a)$  — предельное (вдоль  $\gamma$ ) значение  $u(\cdot)$  в точке  $x = a$ ,  $\frac{d}{d\gamma}u(a)$  — соответствующая крайняя производная.

Разрешимость в целом на  $\Gamma$  или на  $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^m \gamma_i$  задачи (4.1)–(4.4) будет определяться взаимодействием всех отдельных связей этой задачи.

4.2.2. Пусть  $L$  — аддитивное однородное отображение из  $E_1$  в  $E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — линейные пространства. Пусть  $E_2 \subseteq LE_1$  и  $L$  имеет конечномерное ядро  $N(L) = \{u \in E_1 : Lu = 0\}$ . Пусть  $l_1, \dots, l_k$  — линейные на  $E_1$  функционалы, где  $k = \dim N(L)$ .

**Лемма 4.1.** Для однозначной разрешимости в  $E_1$  общей краевой задачи

$$Lu = f, \quad l_i(u) = c_i, \quad f \in E_2, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.7)$$

при любой  $f \in E_2$  и любых  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , необходимо и достаточно, чтобы однородная задача

$$Lu = 0, \quad l_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (4.8)$$

имела в  $E_1$  только нулевое решение.

Общая задача (4.7) называется невырожденной, если однородная задача (4.8), кроме тривиального  $u = 0$ , никаких других решений в  $E_1$  не имеет. Для невырожденности (4.7) необходимо и достаточно, чтобы был отличен от нуля  $\det \|l_i(\psi_j)\|_{i,j=1}^k$ , где  $\{\psi_j\}_{j=1}^k$  — произвольный базис из  $N(L)$ .

4.2.3. Пусть  $\{\psi_j\}$  — какой-либо базис из  $N(L)$ . Введем форму (предполагая невырожденность задачи)

$$\Theta(y; A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{\det \|l_i(\psi_j)\|_{i,j=1}^k} \begin{vmatrix} y & \psi_1 & \dots & \psi_k \\ A_1 & l_1(\psi_1) & \dots & l_1(\psi_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_k & l_k(\psi_1) & \dots & l_k(\psi_k) \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} y \in E_1, \\ A_i \in \mathbb{R}, \end{array}$$

удобную для явного представления решений задачи (4.7). Так, если  $y$  — какое-то решение уравнения  $Lu = f$ , то решение  $z$  задачи (4.7) дается выражением  $z = \Theta(y; l_1(y) - c_1, l_2(y) - c_2, \dots, l_k(y) - c_k)$ . Решение полуоднородной задачи  $Lu = f$ ,  $l_i(u) = 0$ ,  $i = \overline{1, k}$ , дается выражением  $\Theta(y; l_1(y), l_2(y), \dots, l_k(y))$ . Если  $K : E_2 \rightarrow E_1$  — какое-либо правое обратное к  $L$  отображение, т.е.  $LKf \equiv f$  при  $f \in E_2$ , то равенство

$$Gf = \Theta(Kf; l_1(Kf), \dots, l_k(Kf))$$

определяет «оператор Грина», дающий формулой  $u = Gf$  решение полуоднородной задачи  $Lu = f$ ,  $l_i(u) = 0$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

При нулевом функциональном аргументе  $\Theta(0; A_1, A_2, \dots, A_k)$  дает решения однородного уравнения  $Lu = 0$  с условиями  $l_i(u) = -A_i$ . В частности, формула

$$h_j = \Theta(0; \underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, -1, 0, \dots, 0), \quad j = \overline{1, k},$$

определяет базис в  $N(L)$ , биортогональный к  $\{l_i\}_1^k$ , т.е.  $l_i(h_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, k}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Этот базис позволяет, например, представить оператор Грина в виде

$$Gf = Kf - \sum_{j=1}^k l_j(Kf)h_j.$$

4.2.4. Каждый из пяти приведенных в п. 4.1 взглядов на задачу (4.1)–(4.4) будем называть *версией* этой задачи. К любой версии применима лемма 4.1, причем  $(Lu)(x) \equiv (-pu')'(x) + (qu)(x)$  в первых четырех версиях и  $(Lu)(x) \equiv -\left(\frac{d}{d\Gamma}pu'\right)(x) + (qu)(x)$  — в пятой. Пространство  $E_1$  везде состоит из функций, заданных и достаточно гладких на множестве  $\Omega$ , где  $\Omega = R(\Gamma)$  в декомпозиционной версии,  $\Omega = (0; \xi_1) \cup (\xi_1; \xi_2) \cup \dots \cup (\xi_{m-1}; \xi_m)$  в скаляризирующей версии,  $\Omega = (0; 1)$  при векторном подходе и  $\Omega = \Gamma$  в последних двух версиях, где вдобавок  $E_1$  сужено условиями непрерывности (4.4). Для всех версий однородные задачи (4.8), соответствующие (4.1)–(4.4), эквивалентны.

**Лемма 4.2.** *Для невырожденности задачи (4.1)–(4.4) необходимо и достаточно невырожденности любой из ее версий.*

4.2.5. Внешне наиболее простой для задачи (4.1)–(4.4) является декомпозиционная версия. Скаляризирующая и векторная версии превращают исходную задачу, сводя ее к функциям скалярного аргумента, в объект стандартной теории, из которой следует, в частности, следующая лемма.

**Лемма 4.3.** *Пусть  $\rho(x) \in C[R(\Gamma)]$ . Тогда при каждом  $\lambda$  существуют линейно независимые на  $R(\Gamma)$  решения  $\psi_\lambda^1(x), \psi_\lambda^2(x), \dots, \psi_\lambda^{2m}(x)$  уравнения*

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda\rho(x)u, \quad x \in R(\Gamma), \quad (4.9)$$

*каждое из которых аналитично по  $\lambda$  (в смысле нормы  $C^1[R(\Gamma)]$ ).*

**Доказательство.** Выберем на каждом ребре  $\gamma_i$  один из концов  $a$ , с помощью которого при фиксированном  $\lambda$  определим условиями (4.5) и (4.6) два линейно независимых на  $\gamma_i$  решения  $h_i^1(x), h_i^2(x)$ . Продолжая  $h_i^1$  и  $h_i^2$  на остальные ребра  $\gamma_k$  тождественным нулем (с сохранением обозначений), получим линейно независимую в целом на  $R(\Gamma)$  систему  $\{h_i^1, h_i^2\}_{i=1}^m$ . Так как условия (4.5) и (4.6) в векторной версии определяют обычную задачу Коши, то из общей теории следует аналитическая зависимость от  $\lambda$  каждой из функций  $h_i^1, h_i^2$ , построенных как указано, при каждом фиксированном  $\lambda$ .  $\square$

4.2.6. Рассмотрим для уравнения (4.9) однородные условия

$$-\sum_{\gamma \subset \Gamma(a)} \alpha_\gamma(a) \frac{d}{d\gamma} u(a) + q(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \quad (4.10)$$

соответствующие (4.2), вместе с однородными условиями (4.3), (4.4). Число  $\lambda$  назовем точкой спектра этой задачи, если она при этом значении  $\lambda$  вырождена, т.е. имеет нетривиальное решение.

**Теорема 4.1.** *Спектр задачи (4.9) с условиями (4.10), (4.3), (4.4) дискретен и образует последовательность, вообще говоря, неограниченную.*

**Доказательство.** Пусть  $\{\psi_\lambda^k(x)\}_{k=1}^{2m}$  — построенный в лемме 4.3 базис решений уравнения (4.9), а  $l_1, \dots, l_{2m}$  — порождающие (4.3), (4.4), (4.10) функционалы. Тогда невырожденность рассматриваемой спектральной задачи означает отличие от нуля определителя

$$\Delta(\lambda) = \det \|l_i(\psi_\lambda^k)\|_{i,k=1}^{2m}, \quad (4.11)$$

который оказывается аналитической по  $\lambda$  функцией.  $\square$

4.2.7. В синтетической версии, в отличие от остальных, спектральная задача определяется более сильным уравнением  $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda\rho u$ , которое дополняет (4.9) вместо условий (4.10) условиями (4.2) при  $f(a) = \lambda\rho(a)u(a)$ . Однородные условия (4.3), (4.4) сохраняются. Спектр этой задачи, вообще говоря, отличается от предыдущего, но структура его аналогична.

Действительно, характеристический детерминант  $\Delta_\Gamma(\lambda)$  для синтетической версии будет отличаться от (4.11) заменой строки вида

$$- \sum_{\gamma \in \Gamma(a)} \alpha_\gamma(a) \frac{d}{d\gamma} \psi_\lambda^k(a) + q(a) \psi_\lambda^k(a), \quad k = 1, \dots, 2m,$$

соответствующей условию (4.2) в каждой точке  $a \in J(\Gamma)$ , на строку

$$- \sum_{\gamma \in \Gamma(a)} \alpha_\gamma(a) \frac{d}{d\gamma} \psi_\lambda^k(a) + q(a) \psi_\lambda^k(a) - \lambda \rho(a) \psi_\lambda^k(a), \quad k = 1, \dots, 2m,$$

что сохранит для  $\Delta_\Gamma(\lambda)$  аналитичность по  $\lambda$ .

4.2.8. Мощным инструментом анализа свойств собственных функций является извлечение их из аналитического семейства, так называемого решения Вейля (см., например, [4]). Такое решение дает следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Пусть  $u_\tau^\lambda(x)$  — решение уравнения  $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda pu$  при условиях  $u(\tau) = 1$ ,  $u(x) = 0$ ,  $x \in \partial\Gamma$ ,  $x \neq \tau$  при какой-либо  $\tau \in \partial\Gamma$ . Тогда функция  $\Delta_\Gamma(\lambda) \cdot u_\tau^\lambda(x)$  аналитична по  $\lambda$  в норме  $C^1[R(\Gamma)]$ .

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться явным представлением (см. п. 4.2.3) формы  $\Theta$  и учесть аналитичность исходной системы  $\{\psi_\lambda^k\}_{k=1}^{2m}$ .  $\square$

### 4.3. Функция Грина.

4.3.1. Исходной задаче в каждой из версий может быть придан общий вид (4.7).

**Определение 4.1.** Функцией Грина для той или иной версии назовем функцию  $G(x, s)$  такую, что решение соответствующей полунормированной задачи

$$Lu = f, \quad l_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.12)$$

при любой  $f$  может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) f(s) ds, \quad (4.13)$$

где  $\Omega$  — область аргументов  $u(\cdot)$ .

Кроме векторного подхода, где  $\Omega = (0; 1)$  и где функция  $G(x, s)$  является матрицей для каждой пары  $x, s \in (0; 1)$ , в остальных версиях  $G(x, s)$  скалярнозначна, а интеграл в (4.13) берется либо по  $R(\Gamma)$ , либо по объединению интервалов  $(\xi_i; \xi_{i+1})$ , либо по  $\Gamma$ ; в синтетической версии интеграл берется по мере  $\mu(x)$ , введенной в п. 3.3.3.

4.3.2. Для невырожденной задачи имеем следующую теорему.

**Теорема 4.3.** Для невырожденной задачи каждая ее версия имеет функцию Грина, единственную в классе функций, непрерывных по  $x$  на  $\Omega$ .

**Доказательство.** Проведем его единообразно для всех версий (кроме пока синтетической) в терминах задачи (4.12). Пусть  $H(x, s)$  — какое-нибудь фундаментальное решение уравнения  $Lu = f$ .

Другими словами,  $z(x) = \int_{\Omega} H(x, s) f(s) ds$  есть решение  $Lu = f$  при любой непрерывной на  $\Omega$  функции  $f(x)$ .

Пусть  $\{\psi_j\}_1^k$  — фундаментальная система решений уравнения  $Lu = 0$ , причем  $l_i(\psi_j) = \delta_{ij}$ ,  $j = \overline{1, k}$  (здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера). Тогда равенство

$$G(x, s) = H(x, s) - \sum_{i=1}^k l_i(H(\cdot, s)) \psi_i(x) \quad (4.14)$$

определяет функцию Грина; это проверяется либо впрямую, либо согласно п. 4.2.3; в любом случае существенно, что  $l_i$  коммутируют с  $\int_{\Omega}$  благодаря специфике условий (4.2)–(4.4), локализованных в узлах  $\Gamma$ , т.е. в граничных для  $\Omega$  точках. Единственность функции Грина тривиально следует из невырожденности.

Остается доказать существование фундаментального решения. Мы его просто предъявим. Сначала для уравнения (4.1) на любом ребре  $\gamma = (a; b)$ , где можно взять функцию Грина любой невырожденной краевой задачи на  $\gamma$  или же функцию Коши

$$H_{\gamma}(x, s) = \frac{1 + \text{sign}(x - s)}{-2p(s)} \cdot \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)}{\varphi_1'(s)\varphi_2(s) - \varphi_2'(s)\varphi_1(s)},$$

здесь ребро  $\gamma$  параметризовано в любом из двух направлений отрезком  $[0; l]$  ( $l$  — длина  $\gamma$ ) при отождествлении точек  $x, s \in \gamma$  с числами из  $(0; l)$ . В качестве  $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$  взята произвольная фундаментальная на  $\gamma$  система решений уравнения  $Lu = 0$ . Функция  $H_{\gamma}(x, s)$  удовлетворяет по первой переменной (при фиксированном  $s \in \gamma$ ) условию

$$-p(s) \left[ \frac{d}{d\gamma'_s} u(s) + \frac{d}{d\gamma''_s} u(s) \right] = 1, \tag{4.15}$$

где в символах крайних производных участвуют два интервала  $\gamma'_s$  и  $\gamma''_s$ , составляющие  $\gamma \setminus \{s\}$ .

Теперь построим «диагональное» фундаментальное решение  $H(x, s)$  на всем  $R(\Gamma) \times R(\Gamma)$ :

$$H(x, s) = \begin{cases} H_{\gamma}(x, s), & x, s \in \gamma, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Использование такого фундаментального решения в формуле (4.14) сразу переносит на функцию Грина свойство (4.15) скачка ее производной на «диагонали»  $x = s$  в  $R(\Gamma) \times R(\Gamma)$ .

Для синтетической версии формула (4.13) уточняется необходимостью учета значений  $f(x)$  в узлах из  $J(\Gamma)$  посредством взятия интеграла по Стильтесу с мерой  $\mu(x)$ , линейной и единичной на всех ребрах и единичной (атомарной) в точках из  $J(\Gamma)$ . Поэтому функция Грина  $G_{\mu}(x, s)$  этой версии доопределяется еще и при  $x, s \in J(\Gamma)$ . Обозначим через  $G(x, b)$ ,  $b \in J(\Gamma)$ , решение однородного уравнения  $-(pu')' + qu = 0$ ,  $x \in R(\Gamma)$ , удовлетворяющего всем условиям (4.3), (4.4), а также условиям

$$(Lu)(a) = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \in J(\Gamma), a \neq b, \end{cases}$$

где через  $(Lu)(a)$  обозначается левая часть (4.2). В силу невырожденности задачи функции  $G(x, b)$  определяются однозначно. Тогда формула (4.13) уточняется:

$$u(x) = \int_{\Gamma} G_{\mu}(x, s)f(s) d\mu(s) = \int_{R(\Gamma)} G_{\Sigma}(x, s)f(s) ds + \sum_{a \in J(\Gamma)} G(x, a)f(a),$$

причем на  $R(\Gamma) \times R(\Gamma)$  функция  $G_{\mu}(x, s)$  совпадает с функцией Грина  $G_{\Sigma}(x, s)$  связанной версии и адекватна функции Грина  $G_0(x, s)$  декомпозиционной версии. Теорема доказана.  $\square$

4.3.3. Представление функции Грина (4.14) удобно тем, что можно выбирать различные фундаментальные решения сообразно изучаемым вопросам. Непосредственно из представления (4.14) следует теорема.

**Теорема 4.4.** *Если задача (4.1)–(4.4) невырождена, то функция Грина  $G_0(x, s)$  ее декомпозиционной версии обладает следующими свойствами:*

- а) при каждом  $s \in R(\Gamma)$  функция  $g_s(x) = G_0(x, s)$  удовлетворяет однородному уравнению  $(Lu)(x) = 0$  при  $x \neq s$ ;
- б)  $g_s(x)$  удовлетворяет (4.15);
- в)  $g_s(x)$  удовлетворяет всем однородным условиям (4.3), (4.4), (4.10);
- г)  $G_0(x, s)$  равномерно непрерывна на любом из прямоугольников  $\gamma_i \times \gamma_j$ ;

д) при параметризации в любом из двух направлений каждого ребра  $\gamma_i$  функция  $\frac{\partial}{\partial x} G_0(x, s)$  равномерно непрерывна на  $\gamma_i \times \gamma_j$ ,  $i \neq j$ , и на треугольниках  $T_i^\pm = \{(x, s) \in \gamma_i \times \gamma_i \mid \pm(s - x) > 0\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , (знак « $\pm$ » здесь в соответствии с выбранной параметризацией  $\gamma_i$ ).

**Следствие.** Функция Грина  $G_\Sigma(x, s)$  связанной версии обладает следующими свойствами:

- (а $_\sigma$ ) при каждом  $s \in R(\Gamma)$  она является по  $x$  непрерывным на  $\Gamma$  решением уравнения  $(Lu)(x) = 0$  при  $x \neq s$ ;
- (б $_\sigma$ ) удовлетворяет условиям (4.15);
- (в $_\sigma$ ) удовлетворяет по  $x$  условиям  $u|_{\partial\Gamma} = 0$ ;
- (г $_\sigma$ ) равномерно непрерывна на каждой из компонент связности множества  $\Gamma \times R(\Gamma)$ ;
- (д $_\sigma$ ) обладает свойством д).

**Замечание.** Все свойства (а $_\sigma$ )–(д $_\sigma$ ) сохраняются и для функции Грина  $G_\mu(x, s)$  синтетической версии. При этом свойство (а $_\sigma$ ) верно и при  $s \in J(\Gamma)$ , а в (б $_\sigma$ ) свойство (4.15) меняется при  $s \in J(\Gamma)$  на равенство  $(Lu)(s) = 1$  (где  $(Lu)(s)$  при  $s \in J(\Gamma)$  определяется левой частью (4.2) при  $a = s$ ).

#### 4.4. $s$ -расширение задачи на сети.

4.4.1. Если для данной невырожденной задачи фиксировать точку  $s \in R(\Gamma)$  и объявить ее новым узлом, обозначив новообразованный граф через  $(\Gamma + s)$ , то равенство (4.15) можно рассматривать как условие трансмиссии типа (4.2), полагая  $\alpha_{\gamma'_s}(s) = p(s) = \alpha_{\gamma''_s}(s)$ ,  $q(s) = 0$ ,  $f(s) = 1$ , в новоявленном узле  $s \in J(\Gamma + s)$ . Перенос на  $(\Gamma + s)$  исходное уравнение (4.1) при  $x \neq s$  и все условия (4.2)–(4.4), включая и предположение о непрерывности решений в дополнительном (новообретенном) внутреннем узле  $s$ , получим для новой  $G_\Sigma(x, s)$  задачу по  $x$ , аналогичную исходной. Решение соответствующей однородной задачи совпадает с решением однородной задачи, отвечающей (4.1)–(4.4), поэтому невырожденность новой задачи обеспечена невырожденностью исходной.

**Теорема 4.5.** Свойства (а $_\sigma$ )–(д $_\sigma$ ) не только необходимы для  $G_\Sigma(x, s)$ , но и достаточны для ее однозначного определения.

4.4.2. Описанный прием оказывается продуктивным и для синтетической версии. Пусть  $s$  — произвольная точка из  $R(\Gamma)$ . Сохраним все связи (4.2)–(4.4), а также уравнения (4.1) при  $x \neq s$ , дополнив их в точке  $x = s$  условием непрерывности и уравнением

$$-p(s) \left[ \frac{d}{\gamma'_s} u(s) + \frac{d}{\gamma''_s} u(s) \right] = f(s),$$

аналогичным (4.15). При  $s \in J(\Gamma)$  задачу (4.1)–(4.4) мы не меняем. Новообразованную задачу на  $(\Gamma + s)$  назовем  $s$ -расширением исходной. Невырожденность  $s$ -расширения, очевидно, эквивалентна невырожденности исходной задачи. Проведенный анализ резюмирует следующая теорема.

**Теорема 4.6.** Функция Грина  $G_\mu(x, s)$  при каждом  $s \in \Gamma$  есть решение  $s$ -расширения исходной задачи при  $f(x) \equiv 0$  на  $\Gamma \setminus \{s\}$  и при  $f(s) = 1$ .

4.4.3. Взгляд на функцию Грина как на обычное решение (по  $x$ ) чуть измененной задачи резко упрощает анализ важных качественных свойств, снимая завесу вокруг поведения функции Грина на «диагонали»  $x = s$ , которая, в отличие от скалярного случая, не диагональ обычного квадрата  $a \leq x, s \leq b$ , а граф, расположенный в  $\Gamma \times \Gamma$ , об упорядоченности на котором (как и об аналогах левого и правого треугольников  $a \leq x \leq s \leq b$  и  $a \leq s \leq x \leq b$  скалярного квадрата) говорить трудно, в особенности, если  $\Gamma$  имеет циклы.

### 5. НЕОСЦИЛЛИРУЮЩЕЕ НА СЕТИ УРАВНЕНИЕ И НЕРАВЕНСТВО ГАРНАКА

Всюду далее разговор об исходной задаче на сети мы ведем в синтетической версии. Поэтому, говоря о функции Грина, будем применять стандартное обозначение  $G(x, s)$ , опуская символ версии  $\mu$ .

*Неосцилляция* обыкновенного дифференциального уравнения

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -(pu')' + qu = 0 \tag{5.1}$$

на отрезке  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  означает, что любое нетривиальное ( $\neq 0$ ) решение (5.1) имеет в  $[a; b]$  не более одного нуля. В вариационном исчислении это свойство соответствует так называемому условию Якоби. Свойство *неосцилляции* играет важную роль в теории дифференциальных неравенств вида  $Lu \geq 0$ : там оно эквивалентно наличию у этого неравенства положительного на  $[a; b]$  решения (теорема Валле—Пуссена). Последнее свойство имеет самые разнообразные приложения в теории краевых задач для уравнения (5.1). Не удивительно, что подобные свойства играют решающую роль и для краевых задач на пространственных сетях.

**5.1. Неосциллирующие на сети уравнения.** Для непрерывной на сети функции  $u(x)$  аналогом промежутка между соседними нулями является  $S$ -зона.

**Определение.** Под  $S$ -зоной непрерывной на  $\Gamma$  функции  $u(x)$  понимается подграф  $\Gamma_0$  графа  $\Gamma$  такой, что  $u(x) \neq 0$  на  $\Gamma_0$  и  $u|_{\partial\Gamma_0} = 0$ .

**Определение.** Уравнение

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = 0 \tag{5.2}$$

и порождающий его оператор  $L$  называются *неосциллирующими на графе*  $\Gamma$ , если любое нетривиальное решение (5.2) не может иметь  $S$ -зоны в  $\Gamma$ .

Ниже уравнение (5.2) рассматривается в предположениях п. 3.5. Решения (5.2), как и в п. 3.5, ищутся в пространстве  $D^2[\Gamma]$ .

5.1.1. Если  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ , то задача

$$Lu = f, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{5.3}$$

невырождена. Действительно, если  $u(x)$  — решение задачи (5.3) при  $f \equiv 0$ , то любая компонента связности множества  $\{x \in \Gamma \mid u(x) \neq 0\}$  оказывается  $S$ -зоной  $u(x)$ .

5.1.2. Пусть задача (5.3) невырождена. Рассмотрим задачу

$$Lu = 0, \quad u(\tau) = 1, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Gamma, \quad x \neq \tau, \tag{5.4}$$

обозначая ее решение через  $u_\tau$ . Нам потребуется следующая теорема.

**Теорема 5.1** (см. [8]). *Если  $\partial\Gamma \neq \emptyset$ , то следующие свойства эквивалентны:*

- а) каждая из задач (5.4) имеет неотрицательное на  $\Gamma$  решение;
- б) существует решение  $w$  уравнения (5.2) такое, что  $\inf_{\Gamma} w > 0$ ;
- в) существует неотрицательное на  $\Gamma$  решение уравнения (5.2), ненулевое хотя бы в одной из точек  $\partial\Gamma$ ;
- г) уравнение (5.2) не осциллирует на  $\Gamma$ ;
- д) существует функция  $h$  такая, что  $\inf_{\Gamma} h > 0$ , и при всех  $u \in D^2[\Gamma]$

$$Lu \equiv -\frac{1}{h} \frac{d}{d\Gamma} \left( h^2 p \left( \frac{u}{h} \right)' \right).$$

**5.2. Дифференциальные неравенства на сетях.**

5.2.1. Аналогично эллиптическим задачам на дифференциальные неравенства

$$(Lu)(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma \tag{5.5}$$

переносится ряд важных свойств уравнений.

Под решением дифференциального неравенства (5.5) мы понимаем решение уравнения  $Lu = f$  с неотрицательной  $f \in C[R(\Gamma)]$ .

5.2.2. Скажем, что  $L$  не осциллирует внутри  $\Gamma$ , если  $L$  не осциллирует на любом собственном ( $\neq \Gamma$ ) подграфе графа  $\Gamma$ .

**Теорема 5.2** (см. [8]). Пусть  $L$  не осциллирует внутри  $\Gamma$ . Тогда любое нетривиальное решение  $u(x)$  неравенства  $Lu \geq 0$ , неотрицательное на  $\partial\Gamma$ , положительно на  $\Gamma$ .

**Следствие.** Для неосцилляции  $L$  на  $\Gamma$  необходимо и достаточно, чтобы функция Грина  $G(x, s)$  задачи (5.3) была положительной на  $\Gamma \times \Gamma$ .

**Доказательство.** Из неосцилляции  $L$  следует (п. 5.1.1) невырожденность задачи (5.3). Ее функция Грина  $G(x, s)$  при  $x \neq s$  удовлетворяет (по  $x$ ) уравнению  $Lu = 0$ . Сохраняя это свойство для  $s$ -расширения исходной задачи (см. п. 4.4.2), функция  $g(x) = G(x, s)$ , согласно теореме 4.6, удовлетворяет на  $(\Gamma + s)$  уравнению  $Lu = f$  при  $f(x) \equiv 0$  на  $\Gamma \setminus \{s\}$  и  $f(s) = 1$ . Поэтому  $Lg \geq 0$  на  $(\Gamma + s)$  и  $g|_{\partial(\Gamma+s)} = 0$ . А так как расширенное на  $(\Gamma + s)$  уравнение не осциллирует вместе с уравнением (5.2), то по теореме 5.2  $g(x) > 0$ .

Пусть теперь задача (5.3) невырождена и  $G(x, s)$  — ее неотрицательная функция Грина. Покажем вначале ее строгую положительность. Функция  $g(x) = G(x, s)$  при фиксированной  $s \in \Gamma$  является решением  $s$ -расширения задачи (5.3), а значит, решением неоднородной задачи, и  $g(x) \neq 0$ . А так как  $(Lg)(x) \equiv 0$  при  $x \neq s$ , то на каждой из компонент связности множества  $\Gamma \setminus \{s\}$  функция  $g(x)$  оказывается в условиях теоремы 3.1, и потому  $g(x) > 0$ .

Предполагая теперь осцилляцию  $L$  на  $\Gamma$ , будем иметь решение уравнения  $Lu = 0$  с  $S$ -зоной  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ . Из невырожденности (5.3) следует  $\Gamma_0 \neq \Gamma$ . Поэтому существует точка  $s_0 \in \Gamma$ , не лежащая в  $\Gamma_0$ . Функция  $g(x) = G(x, s_0)$  положительна на  $\Gamma_0$  и отлична от нуля хотя бы в одной точке  $\partial\Gamma_0$ , которая не входит в  $\partial\Gamma$  ( $\partial\Gamma_0 \not\subseteq \partial\Gamma$ ). Отсюда, в силу теоремы 5.1 (в)  $\Rightarrow$  г)) следует неосцилляция  $L$  на  $\Gamma_0$ , что противоречит определению  $\Gamma_0$ .  $\square$

**5.3. Неравенство Гарнака. Шатры на сетях.** Ниже показывается, что при неосцилляции  $L$  на  $\Gamma$  для любого неотрицательного на  $\Gamma$  решения  $u(x)$  неравенства  $Lu \geq 0$  на каждом локально компактном (относительно  $\Gamma$ ) подмножестве  $\Omega \subset \Gamma$  справедлива оценка

$$\max_{\Omega} u(x) \leq \kappa \min_{\Omega} u(x), \quad (5.6)$$

где константа  $\kappa$  зависит только от  $\Omega$ . Это точный аналог классического неравенства Гарнака для эллиптических задач на многообразиях.

5.3.1. *Определение.* Шатром (*marquee*) с вершиной в точке  $\xi \in \Gamma \cup \partial\Gamma$  назовем функцию  $M_{\xi}(x)$  из  $C[\Gamma]$ , удовлетворяющую уравнению  $Lu = 0$  при  $x \neq \xi$  и условиям  $u(x)|_{\partial\Gamma \setminus \{\xi\}} = 0$ . Шатер назовем *единичным*, если  $M_{\xi}(\xi) = 1$ .

Наглядная интерпретация шатра — это форма упруго растянутой плоской сетки, если ее оттянуть в одной точке на единичное расстояние. Функция Грина  $G(x, s)$  невырожденной задачи (5.3) дает математически содержательный пример шатра:  $M_{\xi}(x) = \frac{G(x, \xi)}{G(\xi, \xi)}$ . Неотрицательность шатра влечет, в силу теоремы 3.1, его положительность. В свою очередь, неосцилляция  $L$  на  $\Gamma$  достаточна для неотрицательности единичного  $M_{\xi}(x)$  в силу теоремы 5.1 (г)  $\Rightarrow$  а)), ввиду неосцилляции  $L$  на любой компоненте связности  $\Gamma \setminus \{\xi\}$ .

5.3.2. Имеем следующую лемму.

**Лемма 5.1.** Пусть  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ , а  $w(x)$  — положительное на  $\Gamma \cup \partial\Gamma$  решение уравнения  $Lu = 0$ . Тогда для единичного  $M_{\xi}$  функция  $M_{\xi}/w$  достигает максимума только в точке  $\xi$ .

**Доказательство.** Заметим, что существование  $w$  следует из теоремы 5.1 (г)  $\Rightarrow$  б)). Далее, для любой компоненты связности  $\Gamma_0$  множества  $\Gamma \setminus \{\xi\}$  точка  $\xi$  принадлежит  $\partial\Gamma_0$ . Согласно следствию из теоремы 3.1, функция  $M_{\xi}/w$  не может иметь точек глобального максимума в  $\Gamma_0$ . А так как  $M_{\xi}(x) = 0$  при всех  $x \in \partial\Gamma_0 \setminus \{\xi\}$ , то  $\xi$  — единственная точка максимума  $M_{\xi}/w$  на  $\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$ .  $\square$

**Лемма 5.2.** *Если  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ , то  $M_\xi(x) \geq M_\eta(x)$  при всех  $x \in \Gamma$  тогда и только тогда, когда  $M_\eta(\eta) \geq M_\eta(\eta)$ .*

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Случай  $\xi = \eta$  тривиален, поэтому далее  $\xi \neq \eta$ . Пусть вначале  $M_\xi(\eta) = M_\eta(\eta)$ . Рассмотрим  $h = M_\xi - M_\eta$ . На любой компоненте связности  $\Gamma_0$  множества  $\Gamma \setminus \{\eta\}$ , не содержащей  $\xi$  в своем замыкании, уравнение  $Lu = 0$  не осциллирует, а  $h$  — его решение, причем  $h|_{\partial\Gamma_0} = 0$ . Значит,  $h \equiv 0$  на  $\Gamma_0$ . Пусть теперь  $\Gamma_1$  — компонента связности  $\Gamma \setminus \{\eta\}$ , содержащая в своем замыкании  $\xi$ . По предыдущей лемме  $\xi$  — единственная точка максимума  $M_\xi/w$ , а  $\eta$  — единственная точка максимума  $M_\eta/w$ . Поэтому  $(M_\xi/w)(\xi) > (M_\xi/w)(\eta) = (M_\eta/w)(\eta) \geq (M_\eta/w)(\xi)$ , и значит,  $h(\xi) > 0$ . К тому же  $(Lh)(x) = 0$  при  $x \in \Gamma_1 \setminus \{\xi\}$  и  $h|_{\partial\Gamma_1 \setminus \{\xi\}} = 0$ . Значит,  $h$  — шатер на  $\Gamma_1$ , и тогда (см. п. 5.3.1), ввиду неосцилляции  $L$  на  $\Gamma$  (а значит, и на  $\Gamma_1$ ),  $h > 0$  на  $\Gamma_1$ .

Если же  $M_\xi(\eta) > M_\eta(\eta)$ , то для функции  $M_\eta^1(x) \equiv \gamma M_\eta(x)$  при  $\gamma = M_\xi(\eta)/M_\eta(\eta)$  выполнено  $M_\xi(\eta) = M_\eta^1(\eta)$ , что в силу только что доказанного влечет, ввиду  $\gamma > 1$ , требуемое.  $\square$

**Лемма 5.3.** *Пусть  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$  и  $(a, b)$  — ребро  $\Gamma$ . Тогда для любой  $\xi \in (a, b)$*

$$M_a(x) \geq M_a(\xi)M_\xi(x) \geq M_a(b)M_b(x), \quad x \in \Gamma, \quad (5.7)$$

где все шатры единичны.

**Доказательство.** Первое неравенство следует из леммы 5.2: достаточно сравнить значения шатров  $M_a(\cdot)$  и  $M_a(\xi)M_\xi(\cdot)$  в точке  $\xi$ . Второе, в силу той же леммы, следует из  $(M_a(\xi)M_\xi)(b) = (M_a(b)M_b)(b)$ . А это равенство будет доказано (так как  $M_b(b) = 1$ ), если мы установим, что  $(M_a(\xi)M_\xi)(x) \equiv M_a(x)$  при  $x \in (\xi, b)$ .

Рассмотрим множество  $\Gamma \setminus \{\xi\}$  и его компоненту связности  $\Gamma_0$ , содержащую  $(\xi, b)$ . На  $\Gamma_0$  разность  $(M_a(\xi)M_\xi)(x) - M_a(x)$  удовлетворяет неосциллирующему уравнению  $Lu = 0$ , обнуляясь на  $\partial\Gamma_0$ , включая точку  $\xi$ . Поэтому она тождественно равна нулю на  $\Gamma_0$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 5.4.** *Пусть  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ . Тогда существует положительная на  $\Gamma$  функция  $g_0(x) \in C[\Gamma]$ , ограничивающая снизу все единичные шатры на  $\Gamma$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\gamma$  — произвольное ребро  $\Gamma$  с концами  $a$  и  $b$ . Согласно (5.7), для любой  $\xi \in \gamma$  (далее все шатры единичны)

$$M_\xi(x) \geq \frac{M_a(b)}{M_a(\xi)} M_b(x),$$

где считаем, что  $b \in J(\Gamma)$ , тогда  $M_a(\xi)$  отделена от нуля при  $\xi \in \gamma$ . (Если граф  $\Gamma = (a, b)$ , то можем добавить в  $(a, b)$  фиктивную внутреннюю вершину  $s$  и провести рассуждения для  $s$ -расширения.) Таким образом, для любого ребра  $\gamma$  существует единичный шатер  $M_b(x)$  с вершиной  $b \in J(\Gamma)$  такой, что при некотором  $K = K(\gamma)$  для всех  $\xi \in \gamma$  верно  $M_\xi(x) \geq K(\gamma)M_b(x)$ . А так как число ребер и число вершин у  $\Gamma$  конечны, то это неравенство верно и при некотором  $K_0 > 0$  (вместо  $K(\gamma)$ ), не зависящем от  $\gamma$ . Остается положить

$$g_0(x) = K_0 \min_{b \in J(\Gamma)} M_b(x). \quad (5.8)$$

$\square$

**Лемма 5.5.** *Пусть  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ . Тогда для любого неотрицательного на  $\Gamma$  решения  $u(x)$  неравенства  $Lu \geq 0$  справедливо соотношение*

$$u(x) \geq u(\xi)M_\xi(x), \quad x, \xi \in \Gamma,$$

где  $M_\xi$  — единичный шатер с вершиной в точке  $\xi$ .

**Доказательство.** На каждой компоненте связности  $\Gamma_0$  множества  $\Gamma \setminus \{\xi\}$  функция  $h(x) = u(x) - u(\xi)M_\xi(x)$  есть решение неравенства  $Lu \geq 0$ , неотрицательное на  $\partial\Gamma_0$ . Остается применить теорему 5.2.  $\square$

5.3.3. Докажем следующую теорему.

**Теорема 5.3.** Если  $L$  не осциллирует на сети  $\Gamma$ , то любое неотрицательное на  $\partial\Gamma$  решение неравенства  $Lu \geq 0$  удовлетворяет оценке

$$u(x) \geq \|u\| \cdot g_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad (5.9)$$

где  $\|u\| = \sup_{x \in \Gamma} u(x)$ , а  $g_0(x)$  — положительная на  $\Gamma$  функция, определяемая равенством (5.8).

**Доказательство.** В условиях теоремы  $u(x) > 0$  на  $\Gamma$  (по теореме 5.2). Пусть  $s$  — точка максимума  $u(x)$  на  $\Gamma \cup \partial\Gamma$ . Тогда, в силу леммы 5.5,  $u(x) \geq u(s) M_s(x) = \|u\| M_s(x)$ , и остается применить лемму 5.4, учитывая (5.8).  $\square$

**Следствие 1.** В условиях теоремы для любого локально компактного в  $\Gamma$  множества  $\Omega$  существует константа  $\kappa = \kappa(\Omega, L)$  такая, что для каждого неотрицательного на  $\partial\Gamma$  решения неравенства  $Lu \geq 0$  верно неравенство Гарнака (5.6).

Достаточно рассмотреть (5.9) при  $x = x_0$ , где  $x_0$  — точка минимума функции  $u(x)$  на  $\Omega$ , и положить  $\kappa = \min_{\Omega} g_0(x)$ .

**Следствие 2.** Если  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ , то функция Грина  $G(x, s)$  задачи (5.3) удовлетворяет аналогичному (5.9) неравенству

$$G(x, s) \geq g_0(x) \sup_{\tau \in \Gamma} G(\tau, s), \quad x, s \in \Gamma. \quad (5.10)$$

**Доказательство.** Для любой неотрицательной на  $\Gamma$  функции  $f$  решение задачи (5.3) удовлетворяет (5.9). Значит, с учетом неотрицательности  $G(x, s)$ ,

$$\int_{\Gamma} G(x, s) f(s) d\mu(s) \geq g_0(x) \left\| \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) d\mu(s) \right\| \geq \int_{\Gamma} g_0(x) G(\tau, s) f(s) d\mu(s)$$

при всех  $x, \tau \in \Gamma$ . Но тогда  $\int_{\Gamma} [G(x, s) - g_0(x) G(\tau, s)] f(s) d\mu(s) \geq 0$ ,  $x, \tau \in \Gamma$ , что, в силу произвольности неотрицательной  $f(\cdot)$ , влечет  $G(x, s) - g_0(x) G(\tau, s) \geq 0$ ,  $x, \tau, s \in \Gamma$ . Последнее эквивалентно (5.10).  $\square$

5.3.4. Аналогично из (5.10) следует (5.9) для любого решения задачи (5.3) с неотрицательной  $f$ . Поэтому утверждение теоремы 5.3 эквивалентно (5.10).

**5.4. О локализации носителя.** Задача (5.3) может быть сужена на подмножество  $\Gamma$ , если  $f \equiv 0$  на существенной части  $\Gamma$ . Физически такое сужение вполне разумно, так как иногда экспериментировать с системой (воздействовать на нее, наблюдать за ней) мы можем только на некоторой ее части или когда ставится задача о собственных колебаниях в случае масс, распределенных лишь на части системы.

Ниже предполагается неосцилляция  $L$ .

5.4.1. Пусть  $\Omega$  — подмножество  $\Gamma$  такое, что  $f(x) \equiv 0$  вне  $\Omega$ , т.е. на  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Omega$ . Поставим вопрос о возможности переопределения исходной задачи на множество  $\Omega$  так, чтобы решение новой задачи совпадало на  $\Omega$  с решением исходной (т.е. чтобы о прежней «составляющей» задачи на  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Omega$  можно было полностью забыть). Если  $G(x, s)$  — функция Грина задачи (5.3), то ее решение при  $f \equiv 0$  на  $\Gamma_0$  имеет вид

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) f(s) d\mu(s), \quad x \in \Gamma, \quad (5.11)$$

где, подчеркнем, суммирование происходит по  $\Omega$ . Интересуясь решением  $u(x)$  лишь на  $\Omega$ , мы все равно от представления (5.11) никуда не денемся. А в нем  $x \in \Gamma$ , так как сужая интегрирование

на  $\Omega$ , т.е. пользуясь значениями  $G(x, s)$  лишь при  $s \in \Omega$ , мы, тем не менее, пользуемся  $G(x, s)$  как функцией по  $x$ , определенной на всем  $\Gamma$ . Сужение (5.11) по  $x$  на  $\Omega$  означает, тем самым, задание на  $\Omega$  такой задачи, чтобы ее функция Грина при  $x, s \in \Omega$  совпадала с  $G(x, s)$ .

5.4.2. Назовем ребро  $\gamma$  *перемычкой* в  $\Gamma$ , если выбрасывание любой его точки из  $\Gamma$  приводит к потере связности. Если  $\Gamma$  имеет структуру дерева, т.е. не содержит циклов (подмножеств, гомеоморфных окружности), то все его ребра являются перемычками.

Пусть  $x_0$  — какой-либо внутренний узел  $\Gamma$ , а  $\Gamma_0$  — одна из компонент связности  $\Gamma \setminus \{x_0\}$ , образующихся при выбрасывании  $x_0$  из  $\Gamma$ . Если к  $x_0$  из  $\Gamma_0$  примыкает всего лишь одно ребро, оказывающееся перемычкой, то  $\Gamma_0$  назовем *ветвью (веткой)* исходной сети  $\Gamma$ . Очевидно,  $\partial\Gamma_0 \setminus \{x_0\} \subseteq \partial\Gamma$ . Точку  $x_0$  назовем *основанием* ветви  $\Gamma_0$ .

Пусть  $f(x) \equiv 0$  на ветви  $\Gamma_0$ . Нас интересует далее вопрос о сужении задачи (5.3) и формулы (5.11) на  $\Omega = \Gamma \setminus \Gamma_0$ . Функция Грина  $G(x, s)$  при  $s \in \Omega$  есть шатер с вершиной в  $\Omega$ , определенный, однако, и на  $\Gamma_0$ , причем с помощью условий на  $\partial\Gamma_0 \setminus \{x_0\}$ . При нужном нам переопределении необходимо для всех шатров  $M_\xi(x)$  с вершинами в  $\Omega$  отбросить их куски «над  $\Gamma_0$ », сохранив их в целости «над  $\Omega$ ». Согласно лемме 5.2, шатром  $M_\xi(x) = G(x, \xi)$  при  $\xi \in \Omega$  мажорируется шатер

$$M_{x_0}(x) = \frac{G(x_0, \xi)}{G(x_0, x_0)} G(x, x_0), \quad M_\xi(x) \geq M_{x_0}(x),$$

так как значения их в точке  $x = x_0$  совпадают.

Рассуждениями такими же, как и во второй части доказательства леммы 5.3, устанавливается, что обе эти функции на  $\Gamma_0$  совпадают. Таким образом, переход к новой задаче на  $\Omega$  означает утрату  $G(x, x_0)$  на  $\Gamma_0$  и замену этой утраты каким-то условием в точке  $x_0$ .

Взяв сужение  $G(x, x_0)$  на  $\Gamma_0$ , имеем шатер, однозначно определяемый своим значением в вершине  $x_0$  (в остальных точках  $\partial\Gamma_0$  его значения нулевые). Множество шатров на  $\Gamma_0$  с вершиной в точке  $x_0$  одномерно. Обозначим через  $g_0(x)$  единичный из них по высоте. Пусть  $\gamma_0$  — ребро из  $\Gamma_0$ , примыкающее к  $x_0$ . Из сказанного ранее следует, что  $\gamma_0$  — перемычка, соединяющая  $\Gamma_0 \setminus \gamma_0$  с  $\Omega = \Gamma \setminus \Gamma_0$ . Любой шатер с вершиной в точке  $x_0$  определяется его высотой:  $M_{x_0}(x) = M_{x_0}(x_0)g_0(x)$ . Поэтому  $\frac{d}{d\gamma_0}M_{x_0}(x) = M_{x_0}(x_0)\frac{d}{d\gamma_0}g_0(x)$ . Полагая здесь  $\frac{d}{d\gamma_0}g_0(x_0) = \kappa_0$  и учитывая, что на  $\gamma_0$  шатры  $M_{x_0}$  и  $M_\xi$ ,  $\xi \in \Omega$ , совпадают, имеем

$$\left. \frac{d}{d\gamma_0}G(x, \xi) \right|_{x=x_0} = \kappa_0 G(x, \xi) \Big|_{x=x_0}.$$

Но тогда и для любого решения задачи (5.3) в точке  $x = x_0$  должно выполняться равенство

$$\frac{d}{d\gamma_0}u(x_0) = \kappa_0 u(x_0), \tag{5.12}$$

что означает возможность представления в точке  $x_0$  исходного уравнения  $Lu = f$ , т.е.

$$-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = f, \tag{5.13}$$

в виде

$$\left( - \sum_{\gamma \subset \Gamma(x_0) \setminus \gamma_0} \alpha_\gamma(x_0) \frac{d}{d\gamma} u(x_0) \right) + (q(x_0) - \alpha_{\gamma_0}(x_0)\kappa_0)u(x_0) = f(x_0). \tag{5.14}$$

Таким образом, при  $f(x) \equiv 0$  на  $\Gamma_0$  мы, интересуясь решениями задачи (5.3) на  $\Omega = \Gamma \setminus \Gamma_0$ , можем полностью забыть о  $\Gamma_0$ , заменив уравнение (5.13) в точке  $x = x_0$  на (5.14), и использовать прежнее уравнение в остальных точках  $\Omega$ . Поскольку  $\Omega$  — связное множество (точку  $x_0$  мы из него не удаляли), имеем тем самым на  $\Omega$  типичное (для нас) уравнение на  $\Omega$ , как на сети, с краевыми условиями  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

Проведенные выше рассуждения подытоживает следующая теорема.

**Теорема 5.4.** Пусть  $L$  не осциллирует на  $\Gamma$ , и  $\Gamma_0$  — некоторая ветвь  $\Gamma$  с основанием  $x_0$ . Тогда для любой  $f$ , тождественно равной нулю на  $\Gamma_0$ , при некотором  $\kappa_0$  решение задачи (5.3)

совпадает на  $\Omega = \Gamma \setminus \Gamma_0$  с решением суженной задачи

$$(L_\Omega u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\Omega}(pu')(x) + q_\Omega(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

идентичной исходной задаче во всех точках  $\Omega \cup \partial\Omega$ , кроме точки  $x = x_0$ . Точнее,  $\frac{d}{d\Omega}(pu')(x) = \frac{d}{d\Gamma}(pu')(x)$  при всех  $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ , равно, как и  $q_\Omega(x) = q(x)$  при тех же  $x$ . Если же  $x = x_0$ , то  $q_\Omega(x_0) = q(x_0) - \alpha_{\gamma_0}(x_0)\kappa_0$ , а для  $\frac{d}{d\Omega}(pu')(x_0)$  в соответствующей сумме по  $\gamma \subset \Omega(x_0)$  отсутствует слагаемое  $\alpha_{\gamma_0}(x_0)\frac{d}{d\gamma_0}u(x_0)$ . Суженный таким образом на  $\Omega$  оператор  $L_\Omega u = -\frac{d}{d\Omega}(pu') + q_\Omega u$  не осциллирует на  $\Omega$ .

Что касается неосцилляции  $L_\Omega$ , то здесь достаточно заметить лишь, что если решение  $v$  уравнения  $L_\Omega u = 0$ ,  $x \in \Omega$ , имеет  $S$ -зону  $\Omega_0$ , то в случае  $x_0 \notin \Omega_0$  множество  $\Omega_0$  будет  $S$ -зоной «расширения  $v$ » на  $\Gamma$  (т.е. того решения  $w$  уравнения  $Lu = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , сужением которого на  $\Omega$  является  $v$ ); в случае же  $x_0 \in \Omega_0$  множество  $\Omega_0 \cup \Gamma_0$  будет  $S$ -зоной  $w$ , так как ввиду неосцилляции  $L$  на  $\Gamma$  (а значит, и на  $\Gamma_0$ ),  $w(x)w(x_0) > 0$  для всех  $x \in \Gamma_0$ . Таким образом, осцилляция  $L_\Omega$  на  $\Omega$  повлечет осцилляцию  $L$  на  $\Gamma$ , что противоречит условию теоремы.

5.4.3. В порядке физической интерпретации, на упругой сети  $\Gamma$  рассмотрим точку  $x_0 \in J(\Gamma)$ , являющуюся основанием некоторой ветви  $\Gamma_0$ . Предположим, что  $q(x_0) = 0$ , т.е. в точке  $x_0$  отсутствует внешняя упругая опора (типа пружины). Тогда для любой внешней нагрузки  $f(x)$  с носителем вне  $\Gamma_0$  (т.е. при  $f \equiv 0$  на  $\Gamma_0$ ) реакция системы на  $\Gamma \setminus \Gamma_0$  за счет (5.12) такова, как будто влияние  $\Gamma_0$  на систему заменено влиянием подставляемой (вместо всего  $\Gamma_0$ ) упругой опоры в точке  $x_0$ .

5.4.4. Описанный прием может быть обращен «обнулением  $q(x)$  во внутренних вершинах». К точкам  $a \in J(\Gamma)$ , для которых  $q(a) \neq 0$ , мы можем «прирастить» дополнительное ребро, на котором связь типа (5.12) обеспечивается элементарным уравнением  $-u'' = 0$  (пружины меняются на элементарные струны).

5.4.5. В рамках описанного подхода  $\Gamma_0$  и  $\Omega = \Gamma \setminus \Gamma_0$  играют почти симметричную роль: если к  $\Omega$  добавить  $\gamma_0$ , то  $\Omega \cup \gamma_0$  окажется такой же ветвью, что и  $\Gamma_0$ . Поэтому проделанную процедуру можно назвать *сужением задачи на ветвь*. Аналогично может быть описана процедура сужения задачи на пару несмежных ветвей (с разными основаниями)  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ . Множество  $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$  оказывается несвязным, в отличие от выбрасываемого множества  $\Gamma \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1)$ , являющегося подграфом  $\Gamma$ . Суженная на  $\Omega_0 \cup \Omega_1$  задача, сохраняя взаимодействие  $\Omega_0$  с  $\Omega_1$  в рамках исходного уравнения (с помощью исходной функции Грина), может быть определена на некотором связном графе  $\widehat{\Omega}$ , изоморфном объединению  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  с некоторой добавленной точкой, в которой решение суженной задачи будет разрывным (разные пределы вдоль  $\Omega_1$  и вдоль  $\Omega_2$ ), что накладывает отпечаток на аналогичные (5.14) условия. Подробнее на этом мы здесь не останавливаемся.

## 6. НЕКОТОРЫЕ КОММЕНТАРИИ

Наш интерес к задачам, составленным из простых фрагментов, вначале был связан с цепочкой стержней [9, 10], где удалось установить весь перечень спектральной теоремы Штурма. Попытке хотя бы частично перенести такие свойства на простейший граф (пучок) были посвящены работы [6, 7], где обнажилась проблема склеек решений, и была утрачена надежда на перенос методов скалярной осцилляционной теории Келлога—Крейна (см. обзор в [1]).

Основным толчком к развитию качественной теории на графе послужили: а) взгляд на решение как на единую скалярнозначную функцию  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  и б) аналог теорем Штурма о перемежаемости нулей, что стало возможным после введения понятия  $S$ -зоны — аналога интервала между соседними нулями [11, 12].

Изложенные в настоящей работе результаты имели предысторию лишь для условий трансмиссии простейшего вида (0.2). Это касается и достаточно детального анализа функции Грина [13].

В начале 80-х годов анализ задач на графах начали и другие творческие коллективы (см. [5, 16, 18, 19], а также библиографию в [17] и [15]). Круг вопросов, обсуждаемых в этих направлениях исследований, далек от изложенных в настоящей работе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских А. В., Покорный Ю. В. Системы Чебышева—Хаара в теории разрывных ядер Келлога// Успехи мат. наук. — 1994. — 49, № 3. — С. 3–42.
2. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
3. Комаров А. В., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О спектре равномерной сетки из струн// Изв. ВУЗов., Мат. — 2000. — № 4. — С. 23–27.
4. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. — М., 1970.
5. Павлов Б. С., Фаддеев М. Д. Модель свободных электронов и задача рассеяния// Теор. мат. физ. — 1983. — 55, № 2. — С. 257–269.
6. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О краевой задаче на графе// Дифференц. уравн. — 1988. — 24, № 4. — С. 701–703.
7. Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н. Об одной векторной краевой задаче// Краевые задачи. — Пермь, 1983. — С. 64–70.
8. Покорный Ю. В. О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях// Дифференц. уравн. — 2001. — 37, № 5. — С. 661–671.
9. Покорный Ю. В. О неклассической задаче Валле—Пуссена// Дифференц. уравн. — 1978. — 14, № 6. — С. 1018–1027.
10. Покорный Ю. В. О знакорегулярных функциях Грина некоторых неклассических задач// Успехи мат. наук. — 1981. — 36, № 4. — С. 205–206.
11. Покорный Ю. В. О неосцилляции на графах// Докл. расшир. засед. семинара ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. — 1988. — 3, № 3. — С. 139–142.
12. Покорный Ю. В. О краевых задачах на графах// Численные методы и оптимизация. — АН ЭССР., Таллин, 1988. — С. 158–161.
13. Покорный Ю. В., Карелина И. Г. О функции Грина задачи Дирихле на графе// Докл. АН СССР. — 1991. — 318, № 3. — С. 942–944.
14. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и приложения. — Киев: Наукова Думка, 1984.
15. Akkermans E., Comtet A., Desbois J., Montambaux G., Texier C. Spectral determinant on quantum graphs// Ann. Phys. — 2000. — 284. — С. 10–51.
16. von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks// Math. Meth. Appl. Sci. — 1988. — 10. — С. 383–395.
17. Kuchment P. Graph models for waves in thin structures// Waves Random Media. — 2002. — 12. — С. 1–24.
18. Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission// Lect. Notes Math. — № 1771. Springer-Verlag, 1985. — С. 532–541.
19. Partial differential equations on multistructures ed. by F. ALi-Mehmeti, J. von Below, S. Nicaise// Lect. Notes Pure Appl. Math. — 2001. — 219.

Ю. В. Покорный

Воронежский государственный университет

E-mail: Pokorny@kma.vsu.ru

В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет

E-mail: Pryadiev@kma.vsu.ru

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ. УСТОЙЧИВЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПУЧКИ

© 2004 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. Выделен класс устойчивых полиномиальных расслоений, воспроизводимых первыми моментами в иерархии Града для кинетических уравнений Больцмана и Фоккера—Планка.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Задача Уизема (G. V. Whitham, 1974) . . . . .	138
1.1. Система моментов . . . . .	140
1.2. Проблема замыкания . . . . .	142
1.3. Система моментов Града . . . . .	142
2. Уравнение Фоккера—Планка . . . . .	143
3. Пучки гиперболических полиномов . . . . .	146
4. Параметрическая теорема Эрмита . . . . .	149
4.1. Замечания о теореме Эрмита . . . . .	149
4.2. Строгие и нестрогие пары гиперболических полиномов . . . . .	151
4.3. Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия устойчивости гиперболических пучков общего вида . . . . .	152
5. Достаточные условия устойчивости пучка из пяти полиномов . . . . .	156
5.1. Устойчивые пятерки гиперболических полиномов, $N = 4$ . . . . .	156
5.2. Условия Раусса—Гурвица . . . . .	159
6. Предварительная теорема Эрмита . . . . .	161
6.1. Алгоритм Раусса . . . . .	163
7. Полиномиальные параметрические пучки . . . . .	165
8. Пучки гиперболических полиномов . . . . .	165
8.1. Алгоритм Раусса для параметрического пучка . . . . .	167
9. Приложение. Примеры . . . . .	172
Список литературы . . . . .	172

### 1. Задача УИЗЕМА (G. V. WHITHAM, 1974)

В этой статье мы продолжим исследования [2, 3, 5, 7] систем законов сохранения с релаксацией, возникающих в неравновесной термодинамике.

Хорошо известна регуляризация систем квазилинейных уравнений методом вязкости. Но, как говорят физики, такая регуляризация нарушает волновую природу задачи: система становится параболической, и возникает бесконечная скорость распространения возмущений.

Другой подход, не нарушающий гиперболичность исходной задачи, связан с системами квазилинейных уравнений с релаксацией. В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим одно квазилинейное уравнение

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{1.1}$$

и свяжем с ним систему с релаксацией (релаксация — возврат к положению равновесия)

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_x p(u) + \frac{1}{\varepsilon}(v - f(u)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Эта система гиперболична. Если  $p'(u) > 0$ , то характеристические скорости  $\Lambda^\pm(u) = \pm\sqrt{p'(u)}$ . Положительный параметр  $\varepsilon > 0$  — время релаксации. Предельная система при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \quad v - f(u) = 0 \quad (1.3)$$

эквивалентна уравнению (1.1). Состояние равновесия определяется уравнением состояния  $v - f(u) = 0$ .

Рассмотрим кусочно-постоянное разрывное решение уравнения (1.3), равное, соответственно,  $u^+$  при  $x > x(t)$  и  $u^-$  при  $x < x(t)$ , где  $\Gamma_t = \{x = x(t)\}$ ,  $t \geq 0$ , — фронт разрыва. Покажем, что если разность  $u^+ - u^-$  не очень велика, то при некоторых условиях типа энтропии, существует решение системы (1.2) типа бегущей волны

$$v = V\left(\frac{(x - \alpha)t}{\varepsilon}\right), \quad u = U\left(\frac{x - \alpha t}{\varepsilon}\right), \quad (1.4)$$

стремящееся к  $U^\pm, V^\pm$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , где  $(U^\pm, V^\pm)$  определяют состояния равновесия системы (1.2) при  $x = \pm\infty$  соответственно, т.е.  $V^\pm = f(U^\pm)$ . Решение типа бегущей волны (1.4) определяется стабилизирующимся на бесконечности (сепаратрисным) решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha U'(\xi) + V'(\xi) &= 0, \\ \alpha V'(\xi) + p(U(\xi))' + V(\xi) - f(U(\xi)) &= 0, \\ U^\pm &= \lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi), \quad V^\pm = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} V(\xi) = f(U^\pm). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Интегрируя первое уравнение в (1.5), сведём систему (1.5) к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(p'(U) - \alpha^2)U' = \alpha(U - U^-) + f(U) - f(U^-).$$

Условие существования сепаратрисного решения однозначно определяет скорость фронта

$$\alpha = \frac{f(U^+) - f(U^-)}{U^+ - U^-}$$

и условие «на силу» ударной волны (условие регулярности)

$$\left(\frac{f(U^+) - f(U^-)}{U^+ - U^-}\right)^2 < p'(u). \quad (1.6)$$

Заметим, что (1.6) возможно только при выполнении условия гиперболичности  $p'(u) > 0$  системы (1.2). Условие типа энтропии в этом случае:

1) либо

$$\frac{f(U^+) - f(U^-)}{U^+ - U^-}(U - U^-) + f(U) - f(U^-) > 0, \quad U \in (U^-, U^+),$$

тогда

$$U^- < U^+,$$

2) либо

$$\frac{f(U^+) - f(U^-)}{U^+ - U^-}(U - U^-) + f(U) - f(U^-) < 0, \quad U \in (U^+, U^-),$$

тогда

$$U^+ < U^-.$$

Как видим, это хорошо известные геометрические условия Н. Введенской устойчивости ударной волны метода вязких решений для предельного уравнения (1.3):

- 1) если на интервале  $(U^-, U^+)$  график функции  $f(U)$  выше хорды, соединяющей точки  $(U^-, f(U^-))$ ,  $(U^+, f(U^+))$ , то допустимым является разрыв  $U^- > U^+$  монотонно убывающего профиля  $U(\xi)$  сглаживания разрыва;
- 2) если на интервале  $(U^-, U^+)$  график функции  $f(U)$  ниже хорды, соединяющей точки  $(U^-, f(U^-))$ ,  $(U^+, f(U^+))$ , то допустимым является разрыв  $U^- < U^+$  монотонно возрастающего профиля  $U(\xi)$  сглаживания разрыва.

В 1-D случае для системы уравнений Эйлера газовой динамики регуляризацией с помощью релаксации является 13-моментная система Града

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (1.7)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + RT\rho + \sigma) = 0, \quad (1.8)$$

$$\partial_t(\rho v^2 + 3RT\rho) + \partial_x(\rho v^3 + 5RT\rho v + 2\sigma v + 2q) = 0, \quad (1.9)$$

$$\partial_t\left(\frac{2}{3}\rho v^2 + \sigma\right) + \partial_x\left(\frac{2}{3}\rho v^3 + \frac{4}{3}RT\rho v + \frac{7}{3}\sigma v + \frac{8}{15}q\right) = -\frac{4}{5}B\rho\sigma, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v^3 + 5RT\rho v + 2\sigma v + 2q) + \partial_x\left(\rho v^4 + 8RT\rho v^2 + 5\sigma v^2 + \frac{32}{5}qv + RT(5RT\rho + 7\sigma)\right) = \\ = -\frac{8}{5}B\rho\left(\frac{2}{3}q + \sigma v\right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $R$  — газодинамическая постоянная. В случае, когда переменные  $\sigma$ ,  $q$  равны нулю, первые три уравнения системы переходят в систему уравнений Эйлера равновесной газовой динамики:

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + RT\rho) = 0, \quad (1.12)$$

$$\partial_t(\rho v^2 + 3RT\rho) + \partial_x(\rho v^3 + 5RT\rho v) = 0.$$

Уравнения (1.12) являются законами сохранения массы, момента и энергии. Системы типа (1.7)–(1.11) также называются законами сохранения с релаксацией.

Для разреженного газа число Кнудсена  $B$  — большой параметр. Разделив уравнения (1.10), (1.11) на  $B$ , мы можем рассматривать систему (1.7)–(1.11) как малое сингулярное возмущение системы (1.12), поскольку после деления на  $B$  левые и правые части (1.10) и (1.11) формально стремятся к нулю при  $B \rightarrow \infty$ . Отсюда, формально,  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow 0$  при  $B \rightarrow \infty$ . Таким образом, функции  $\sigma$  и  $q$  можно трактовать как неравновесные переменные, а функции  $\rho$ ,  $v$  и  $T$  — как базовые или равновесные переменные. С точки зрения сглаживания решений типа ударных волн системы уравнений Эйлера система (1.12) играет ту же роль, что и метод вязких решений, с одной оговоркой: сглаживаются, в терминологии Лакса, ударные волны средней силы. Это разумно с физической точки зрения, поскольку система (1.7)–(1.11) описывает неравновесный процесс отхода от состояния равновесия, и здесь естественно ожидать, что, в общем, допустимые значения величин должны находиться в некоторой окрестности состояния равновесия, адекватно описывающей неравновесный процесс. Неформальное обоснование предельного перехода является серьезной и трудной проблемой. Хотелось бы ответить на следующий основной вопрос об иерархии волн в системах законов сохранения с релаксацией, поставленный Дж. Б. Уиземом [8]: при каких условиях неравновесные переменные  $\sigma$ ,  $q$  стремятся к нулю при  $Bt \rightarrow \infty$ ? Ниже мы обоснуем эту проблему для линейризованных систем моментов неравновесной термодинамики.

**1.1. Система моментов.** Система уравнений (1.7)–(1.11) получена замыканием Града моментной аппроксимации кинетического уравнения Больцмана

$$\partial_t f + c\partial_x f = \mathcal{S}(f), \quad (1.13)$$

где неизвестная функция  $f(t, x, c)$  — неотрицательное распределение плотности частиц по пространственно-временным переменным  $(t, x)$  и скоростям  $c$ . Оператор столкновения  $f \rightarrow \mathcal{S}(f)$

действует только по переменной  $c$ . Для простоты будем считать, что масса  $m$  одной частицы равна 1.

Моментом распределения  $f$  называется величина

$$m^\alpha(t, x) = \langle c^\alpha f \rangle := \int c^\alpha f(t, x, c) dc.$$

Здесь  $\langle f \rangle = \int f(c) dc$  — интеграл скалярной или векторной измеримой функции  $f$  по  $d$ -мерной мере Лебега. Воспользуемся мультииндексными обозначениями  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  и  $c^\alpha = c_1^{\alpha_1} \dots c_d^{\alpha_d}$ . Последовательно умножая (1.13) на  $c^\alpha$ , можно формально переписать уравнение Больцмана в виде бесконечной системы (цепочки) моментных уравнений. Уравнения для первых моментов  $m^\alpha$ ,  $|\alpha| \leq N-1$ , рассматриваемых как зависимые переменные, содержат старшие моменты  $m^\alpha$ ,  $|\alpha| = N$ , и система оказывается незамкнутой.

В термодинамике проблема замкнутости системы моментов решается разными способами. В одном из них предполагается, что старшие моменты  $M_N = \{m^\alpha, |\alpha| = N\}$  являются вещественными функциями первых моментов

$$m^\alpha = F(M_0, M_1, \dots, M_{N-1}), \quad |\alpha| = N.$$

Существует много различных способов получения неизвестных функций  $F$ . Остановимся на методе Эрмита—Града. Предполагается, что первые моменты рассматриваемого класса операторов столкновения  $\mathcal{S}$ , так называемых операторов близкого действия, существуют и равны нулю:

$$\langle \mathcal{S} \rangle = 0, \quad \langle c \mathcal{S} \rangle = 0, \quad \langle |c|^2 \mathcal{S} \rangle = 0 \quad (1.14)$$

для любой плотности  $f$  из области определения  $\mathcal{D}(\mathcal{S})$  оператора столкновения  $\mathcal{S}$ .

Величина  $g(c)$  называется *консервативной*, если

$$\langle g(c) \mathcal{S}(f) \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{S}).$$

Рассматриваются такие операторы столкновения  $\mathcal{S}$ , для которых любая консервативная величина является линейной комбинацией первых моментов  $1, c_1, \dots, c_d, |c|^2$ . Как следствие, из (1.14) получаем, что моменты решения кинетического уравнения (1.13) формально удовлетворяют локальным законам сохранения

$$\begin{aligned} \partial_t \langle f \rangle + \partial_x \langle c f \rangle &= 0, \\ \partial_t \langle c f \rangle + \partial_x \langle c \vee c f \rangle &= 0, \\ \partial_t \left\langle \frac{1}{2} |c|^2 f \right\rangle + \partial_x \left\langle \frac{1}{2} |c|^2 c f \right\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь  $\vee$  обозначает операцию симметрического тензорного внешнего произведения (симметрическое тензорное внешнее произведение действует на симметричные  $k$ - и  $l$ -тензоры, симметризуя их обычное тензорное внешнее произведение. Заметим, что в уравнениях (1.15) стоят средние по переменным  $c$ , т.е. имеем уравнения в  $(x, t)$  переменных. Соотношения (1.15) представляют три закона сохранения первых моментов: массы, момента и энергии. Для рассматриваемого класса операторов столкновения других законов сохранения нет.

Теперь положим

$$\langle f \rangle = \varrho, \quad \langle c f \rangle = \varrho v, \quad \left\langle \frac{1}{2} |c|^2 f \right\rangle = \frac{1}{2} \varrho |v|^2 + \frac{d}{2} \varrho \theta. \quad (1.16)$$

Величина  $\varrho$  называется плотностью,  $v$  — средняя скорость газа как целого. Через кинетическую энергию хаотического движения частиц газа  $\theta$  определяется термодинамическая температура  $\theta = \frac{d}{2} \varrho RT$ . Таким образом, (1.15) можно трактовать как законы сохранения плотности, момента и энергии.

С учетом (1.16) распределение потоков в системе (1.15) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \langle c \vee c f \rangle &= \varrho v \vee v + \varrho \theta I + \Sigma, \\ \left\langle \frac{1}{2} c |c|^2 f \right\rangle &= \frac{1}{2} \varrho |v|^2 v + \frac{d+2}{2} \varrho \theta v + \Sigma v + q, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где тензор напряжений  $\Sigma$  — симметрическая матрица с нулевым следом,  $q$  — вектор теплового потока. С учетом (1.17) законы сохранения (1.15) переписываются в виде

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_x \circ (\varrho v \vee v) + \partial_x(\varrho \theta) + \partial_x \circ \Sigma &= 0, \\ \partial_t \left( \frac{1}{2} \varrho |v|^2 + \frac{d}{2} \varrho \theta \right) + \partial_x \circ \left( \frac{1}{2} \varrho |v|^2 v + \frac{d+2}{2} \varrho \theta v + \Sigma v + q \right) &= 0.\end{aligned}$$

В 1-D случае тензор  $\Sigma$  сводится к одной неизвестной функции  $\sigma$ , тепловому потоку отвечает функция  $q$ , и наша система совпадает с рассмотренными выше первыми уравнениями системы с релаксацией.

Теперь возникает вопрос о замыкании системы, т.е. об определении замыкающих соотношений или дополнительных уравнений, связанных с дополнительными функциями — компонентами вектора  $q$  тензора  $\Sigma$ .

Оператор столкновения удовлетворяет локальному диссипативному соотношению

$$\langle \log f \mathcal{S}(f) \rangle \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{S}). \quad (1.18)$$

Левая часть в (1.18) — локальное распределение энтропии. Точнее, для любого  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$  следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\langle \log f \mathcal{S}(f) \rangle = 0$ ;
2.  $\mathcal{S}(f) = 0$ ;
3.  $f$  — распределение Максвелла.

**1.2. Проблема замыкания.** Предполагается, что локально равновесные состояния для решения  $\mathcal{S}$  уравнения Больцмана являются распределением Максвелла

$$f = \mathcal{E}(\varrho, v, \theta) = \frac{\varrho}{(2\pi\theta)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|c-v|^2}{2\theta}\right), \quad (1.19)$$

для которых  $(\varrho, v, \theta)$  совпадают с введенными ранее плотностью, средней скоростью и средней кинетической энергией хаотического движения частиц.

В неравновесном случае Град предлагает искать решение кинетического уравнения в виде дифференциального оператора бесконечного порядка, примененного к распределению Максвелла

$$f = (a + a_i \partial_{c_i} + a_{ij} \partial_{c_i} \partial_{c_j} + a_{ijk} \partial_{c_i} \partial_{c_j} \partial_{c_k} + \dots) \mathcal{E},$$

что эквивалентно представлению  $f$  в виде ряда по функциям Эрмита:

$$\begin{aligned}f = \mathcal{E} \left\{ a - a_i \frac{1}{RT} c_i + a_{ij} \left( \frac{1}{RT} \right)^2 (c_i c_j - RT \delta_{ij}) + \right. \\ \left. + a_{ijk} \left( \frac{1}{RT} \right)^3 (c_i c_j c_k - RT(\delta_{ij} c_k + \delta_{jk} c_i + \delta_{ki} c_j)) + \dots \right\}. \quad (1.20)\end{aligned}$$

Простейшему замыканию (обрыву бесконечной цепочки уравнений для моментов) соответствуют аппроксимации  $f$  в форме единственного распределения Максвелла.

**1.3. Система моментов Града.** Для распределения Максвелла  $f = \mathcal{E}$  неравновесные величины  $\Sigma = 0$ ,  $q = 0$ , и система первых законов сохранения (1.11) сводится к системе уравнений Эйлера

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) &= 0, \\ \partial_t(\varrho v) + \partial_x \circ (\varrho v \vee v) + \partial_x(\varrho \theta) &= 0, \\ \partial_t \left( \frac{1}{2} \varrho |v|^2 + \frac{d}{2} \varrho \theta \right) + \partial_x \circ \left( \frac{1}{2} \varrho |v|^2 v + \frac{d+2}{2} \varrho \theta v \right) &= 0.\end{aligned}$$

Если оборвать разложение на первых трёх группах членов в (1.20), то получим аппроксимацию Града (13-моментную систему Града)

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_{x_k}(\varrho v_k) &= 0, \\ \partial_t v_i + v_k \partial_{x_k} v_i + \frac{1}{\varrho} \partial_{x_i}(\varrho RT) + \frac{1}{\varrho} \partial_{x_k} p_{\langle ij \rangle} &= 0, \\ \frac{3}{2} \varrho R(\partial_t T + v_k \partial_{x_k} T) + \partial_{x_k} q_k + p_{\langle ij \rangle} \partial_{x_i} v_j + \varrho RT \partial_{x_i} v_i &= 0, \\ \partial_t p_{\langle ij \rangle} + \partial_{x_k}(p_{\langle ij \rangle} v_k) + \frac{2}{5}(\partial_{x_j} q_i + \partial_{x_i} q_j) + (p_{\langle ki \rangle} + p \delta_{ki}) \partial_{x_k} v_j + (p_{\langle kj \rangle} + p \delta_{kj}) \partial_{x_k} v_i &= -B \varrho p_{\langle ij \rangle}, \\ \partial_t q_i + v_k \partial_{x_k} q_i + \frac{5}{2} \varrho R^2 T \partial_{x_i} T + RT \partial_{x_k} p_{\langle ik \rangle} + \frac{7}{2} p_{\langle ik \rangle} R \partial_{x_k} T - \\ - \frac{1}{\varrho} p_{\langle il \rangle} \partial_{x_k}(p_{\langle lk \rangle} + RT \delta_{lk}) + \frac{7}{5} q_k \partial_{x_k} v_i + \frac{2}{5} q_k \partial_{x_i} v_k &= \frac{2}{3} B \varrho q_i. \end{aligned}$$

Для 1-D и 2-D случаев эта система исследовалась нами ранее [2, 5, 7]. Заметим, что для системы Града матрица представления оператора столкновений в базисе первых  $N$  функций Эрмита

$$\mathcal{S}_N = (\langle S(\Psi_\alpha) \Psi_\beta \rangle)_{|\alpha|, |\beta| \leq N} = - \begin{pmatrix} 0_{N_b} & 0_{N_b, N} \\ (*)_{N_b} & B_{N-N_b}^S \end{pmatrix}.$$

Здесь  $N_b$  — число базовых переменных системы моментов Града, равное числу уравнений системы Эйлера,  $0_{K,L}$  — нулевая матрица размерности  $K \times L$ . Условием диссипации системы моментов Града (законов сохранения с релаксацией) по неравновесным переменным является положительная определенность матрицы  $B_{N-N_b}^S$  размерности  $(N - N_b) \times (N - N_b)$ . Для дисперсионного уравнения линеаризованной системы моментов Града полином

$$\mathcal{R}(\tau, 0) = \det \left( E_{N\tau} - i \begin{pmatrix} 0_{N_b} & 0_{N_b, N} \\ (*)_{N_b} & B_{N-N_b}^S \end{pmatrix} \right) = \tau^{N_b} \det \left( E_{N-N_b} \tau - i B_{N-N_b}^S \right) \quad (1.21)$$

устойчив тогда и только тогда, когда положительно определена матрица  $B^S$ , что совпадает с условием диссипации. Здесь  $E_K$  —  $K$ -мерные единичные матрицы. Из (1.21) следует, что так называемые погранслои корни дисперсионного уравнения

$$\tau_j(0) = b_{j,j}, \quad j = N_b + 1, \dots, N$$

равны диагональным элементам матрицы представления оператора столкновений в базисе функций Эрмита.

## 2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА

Аппроксимацию Града можно рассмотреть и для других кинетических уравнений, описывающих близкое действие, например для уравнения Фоккера—Планка, связанного с движением броуновских частиц:

$$\partial_t f + c_k \partial_{x_k} f = \partial_{c_k} (c_k + \partial_{c_k}) f. \quad (2.1)$$

В этой статье мы подробно остановимся на исследовании этого уравнения с наиболее простой формой оператора столкновений  $\mathcal{S}(f)$

$$\mathcal{S}(f) = \partial_{c_k} (c_k f + \partial_{c_k} f).$$

Здесь  $f(t, x, c)$  — распределение числа броуновских частиц,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $c \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ . В дальнейшем мы предполагаем суммирование по повторяющимся индексам.

Равновесное распределение (распределение Максвелла) определяется единственным, с точностью до мультипликативной константы, аннулятором оператора столкновений

$$\mathcal{S}(f_E) = 0 \quad \longrightarrow \quad f_E(c) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{d/2}} \exp \left( -\frac{|c|^2}{2} \right),$$

не зависящим от пространственных переменных и времени. Удивительным оказалось то, что подобно кинетическим уравнениям типа Больцмана дисперсионные уравнения Фоккера—Планка линеаризованных в окрестности состояния равновесия систем моментов (систем законов сохранения), полученных методом Града, обладают чрезвычайно жесткими структурными свойствами.

Как и в случае уравнения Больцмана, методом Града (аналогом метода Галеркина) мы аппроксимируем решение кинетического уравнения бесконечномерным оператором

$$f(t, x, c) = \left( \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} m^\alpha(x, t) (-1)^{|\alpha|} \partial_c^\alpha \right) f_E(c). \quad (2.2)$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ,  $\partial_c^\alpha = \partial_{c_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{c_d}^{\alpha_d}$ . Используя функции Эрмита

$$\Psi_\alpha(c) = \partial_c^\alpha f_E(c) = H^\alpha(c) f_E(c),$$

где  $H^\alpha(c) = \Psi_\alpha(c)/f_E(c)$  — полиномы Эрмита, (1.21) можно переписать в виде ряда

$$f(t, x, c) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} m^\alpha(x, t) \Psi^\alpha(c) f_E(c) \quad (2.3)$$

по ортогональным функциям Эрмита в гильбертовом весовом пространстве  $L_E^2(\mathbb{R})$  со скалярным произведением

$$\langle \Psi^\alpha, \Psi^\beta \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi^\alpha(c) \Psi^\beta(c) \frac{dc}{f_E(c)} = \alpha! \delta_{\alpha, \beta}.$$

Приведем некоторые функции Эрмита и соотношения между ними:

$$H_0(c) = 1, \quad H_j(c) = c_j, \quad H_{ij}(c) = c_i c_j - \delta_{ij}, \quad H_{ijk}(c) = c_i c_j c_k - \delta_{ij} c_k - \delta_{jk} c_i - \delta_{ki} c_j.$$

Положим  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где единственная единица стоит на  $j$ -м месте. Тогда

$$\Psi^{\alpha+e_j}(c) = -\partial_{c_j} \Psi^\alpha(c), \quad (2.4)$$

$$\Psi^{\alpha+e_j}(c) + \alpha_j \Psi^{\alpha-e_j}(c) - c_j \Psi^\alpha(c) = 0, \quad (2.5)$$

$$\partial_{c_j} \Psi^\alpha(c) + c_j \Psi^\alpha(c) - \alpha_j \Psi^{\alpha-e_j}(c) = 0, \quad (2.6)$$

$$\partial_{c_j}^2 \Psi^\alpha(c) + c_j \partial_{c_j} \Psi^\alpha(c) + (1 + \alpha_j) \Psi^\alpha(c) = 0. \quad (2.7)$$

Эти соотношения проверяются непосредственным вычислением. Например, проверим второе соотношение. Положим  $\alpha = \hat{\alpha} + \alpha_j e_j$ . Имеем

$$\Psi^{\alpha+e_j} = (-1)^{|\alpha|} \partial_c^\alpha \left( -\partial_{c_j} \Psi^{\hat{\alpha}}(c) \right) = (-1)^{|\alpha|} \partial_c^\alpha \left( c_j \Psi^{\hat{\alpha}}(c) \right) = -\alpha_j \Psi^{\alpha-e_j}(c) + c_j \Psi^\alpha(c).$$

Теперь подставим ряд (2.3) в уравнение Фоккера—Планка, умножим на  $\Psi^\alpha(c)$  и проинтегрируем по  $c$ . В силу ортогональности функций Эрмита, получим

$$\partial_t m_\alpha(x, t) + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} a_j^{\alpha, \beta} \partial_{x_j} m_\beta(x, t) = - \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} b^{\alpha, \beta} m_\beta(x, t),$$

постоянные коэффициенты

$$a_j^{\alpha, \beta} = \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^d} c_j \Psi^\beta(c) \Psi^\alpha(c) dc,$$

$$b^{\alpha, \beta} = \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{c_j} \left( c_j + \partial_{c_j} \right) \Psi^\beta(c) \Psi^\alpha(c) dc = -\frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^d} \left( c_j + \partial_{c_j} \right) \Psi^\beta(c) \partial_{c_j} \Psi^\alpha(c) dc.$$

Из (2.7) следует, что

$$\partial_{c_j} \left( c_j + \partial_{c_j} \right) \Psi^\beta = \Psi^\beta - \Psi^\beta - \beta_j \Psi^\beta = -\beta_j \Psi^\beta.$$

Отсюда, в силу ортогональности функций Эрмита,

$$b_{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}(\Psi^\beta) \Psi^\alpha \frac{dc}{f_E} = -|\alpha| \delta_{\beta,\alpha}.$$

Далее для  $\beta_j = \alpha_j + 1$  из (2.5) получаем

$$a_j^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^d} c_j \Psi^\beta(c) \Psi^\alpha(c) dc = \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^d} (\Psi^{\beta+e_j}(c) + \beta_j \Psi^{\beta-e_j}(c)) \Psi^\alpha(c) \frac{dc}{f_E} = \delta_{\beta-e_j,\alpha}.$$

Для  $\beta_j = \alpha_j - 1$  получаем

$$a_j^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^d} (\Psi^{\beta+e_j}(c) + \beta_j \Psi^{\beta-e_j}(c)) \partial_{c_j} \Psi^\alpha(c) dc = \alpha_j \delta_{\beta+e_j,\alpha}.$$

Таким образом, получаем следующие матрицы:

$$A_j = (a_j^{\alpha,\beta}), \quad j = 1, \dots, d, \quad B^S = (b^{\alpha,\beta}),$$

где матрица  $B$  — диагональная,  $b^{\alpha,\beta} = |\alpha| \delta_{\alpha,\beta}$ , в матрице  $A_j$  не равны нулю только члены

$$a_j^{\alpha-e_j,\alpha} = \alpha_j, \quad a_j^{\alpha+e_j,\alpha} = 1.$$

Так, для  $N = 4$  в 1-D случае имеем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение ищем в виде плоской волны  $M_N(x, t) = (m_0, m_1, m_2, m_3)^T$ ,  $M_N = R_N \exp(i(x\xi + t\tau(\xi)))$ ,  $R_N$  — постоянный вектор. Тогда  $\tau(\xi)$  — корень дисперсионного уравнения

$$\det \left( \tau E + \xi A - i \begin{pmatrix} 0_1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & B^S \end{pmatrix} \right) = P_0(\tau, \xi) - i\gamma_1 P_1(\tau, \xi) - \gamma_2 P_2(\tau, \xi) + iP_3(\tau, \xi) = 0,$$

$$P_0 = \tau^4 - 6\tau^2\xi^2 + 3\xi^4, \quad P_1 = \tau \left( \tau^2 - \frac{5}{6}\xi^2 \right), \quad (2.8)$$

$$P_2 = \tau^2 - \frac{3}{5}\xi^2, \quad P_3 = \tau, \quad \gamma_1 = 6, \quad \gamma_2 = 10, \quad \gamma_3 = 3.$$

Нетрудно проверить, что все полиномы строго гиперболические, и корни соседних строго взаимно разделяют друг друга. Для констант  $\gamma_j$  справедливо условие Раусса—Гурвица.

Из (2.8) следует, что так называемые погранслойные корни дисперсионного уравнения

$$\tau_j(0) = j - 1, \quad j = 1, 2, 3,$$

равны диагональным элементам блока  $B^S$  матрицы представления

$$S_4 = - \begin{pmatrix} 0_1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & B^S \end{pmatrix}, \quad B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

оператора столкновений в базисе первых четырех функций Эрмита.

Таким образом, имеем приближенное решение уравнения Фоккера—Планка, которое является плоской волной по пространственным переменным  $(x, t)$

$$f_N(t, x, c) = \sum_{|\alpha| \leq N-1} R_N^\alpha \exp(i(x\xi + t\tau_k(\xi))) \Psi^\alpha(c),$$

где  $\tau_k(\xi)$  — один из корней дисперсионного уравнения.

Удивительным оказалось то, что для кинетических уравнений Больцмана и Фоккера—Планка аппроксимации решений задачи Коши системами моментов Града обладают общими чрезвычайно жесткими структурными свойствами.

### 3. ПУЧКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Линейный анализ устойчивости решений задачи Коши линеаризованных в окрестности состояния равновесия систем моментов Града сводится к исследованию устойчивости дисперсионного уравнения задачи Коши

$$P_0(t, x, \tau, \xi) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{-i}{\varepsilon}\right)^j \gamma_j(t, x) P_j(t, x, \tau, \xi) = 0, \quad (3.1)$$

которое называется полиномиальным пучком порядка  $(m, N)$  [10, 15],  $N = m - N_b$ , где  $N_b \geq 1$  — число базовых переменных системы моментов. Здесь  $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \geq 0$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр (или  $\varepsilon = 1$ ),  $P_j$  являются однородными полиномами порядков  $m, m-1, \dots, m-N$ , где  $m-N > 0$ . Например, для уравнения Фоккера—Планка  $N_b = 1$ , для кинетического уравнения Больцмана  $N_b = d+2$ ,  $d$  — число пространственных переменных.

**Определение 3.1** (строго гиперболического пучка). Пучок (3.1) однородных полиномов  $P_j(\tau, \xi)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , порядков  $m-j$ ,  $m > N$ , с вещественными коэффициентами называется *строго гиперболическим пучком* порядка  $(m, N)$ , если

- 1) все полиномы  $P_j$  строго гиперболически относительно  $\tau$  со старшими коэффициентами  $P_j(1, 0)$ , равными единице;
- 2) корни соседних полиномов  $P_j, P_{j+1}$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , строго разделяют друг друга;
- 3) полином

$$\mathcal{R}G(\tau) \equiv \frac{(\mathcal{P} - i\mathcal{Q})(\tau, 0)}{\tau^{m-N}} = \tau^N + \sum_{j=1}^N (-i)^j \gamma_j(t, x) \tau^{N-j} \quad (3.2)$$

— устойчивый, т.е. для коэффициентов  $\gamma_j$  справедливо условие Раусса—Гурвица.

**Определение 3.2** (нестрого гиперболического пучка). Пучок (3.1) однородных полиномов  $P_j(\tau, \xi)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , порядков  $m-j$ ,  $m > N$ , с вещественными коэффициентами называется *нестрого гиперболическим пучком* порядка  $(m, N)$ , если

- 1) все полиномы  $P_j$  — гиперболические относительно  $\tau$  со старшими коэффициентами, равными единице;
- 2) корни соседних полиномов  $P_j, P_{j+1}$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , нестрого разделяют друг друга;
- 3) для коэффициентов  $\gamma_j$  полинома (3.2) справедливо условие Раусса—Гурвица.

**Определение 3.3** (правильной кратности корней). Полиномиальный пучок  $P_0, \dots, P_N$  удовлетворяет условию правильной кратности корней, если кратный корень  $p(\xi)$  полинома  $P_j(\tau, \xi) = (\tau - p(\xi))^r \tilde{P}_j(\tau, \xi)$  кратности  $r(\xi) \geq 2$  является корнем полиномов  $P_s$  порядка  $r(\xi) + j - s$ ,  $s = 0, \dots, j-1$ , и корнем полиномов  $P_{j+s}$  порядка  $r - s$ ,  $s = 1, \dots, r-1$ , соответственно.

**Проблемы.** С какими проблемами мы сталкиваемся при самом предварительном анализе систем моментов Града?

1. Какова причина воспроизводства на каждом шаге метода моментов Града цепочки гиперболических однородных полиномов дисперсионного уравнения, для которой корни соседних полиномов нестрого разделяют друг друга?

2. Как меняется минимум  $\omega_N(\xi) = \min_{j=2, \dots, N} \Im \tau_j(\xi)$  мнимых частей так называемых погранслоевых корней ( $\Im \tau_j(\xi) = O(1)$  если  $\xi \rightarrow 0$ ), отвечающий за скорость стремления неравновесных переменных в состояние равновесия при увеличении числа уравнений  $N \rightarrow \infty$  в системе моментов? Для системы Града уравнения Фоккера—Планка  $\tau_1(\xi) = 0$ .

Покажем, что при любом  $N$  справедливы следующие утверждения.

**Лемма 3.1.** Пусть старший полином  $P_0$  пучка (3.1) имеет вещественные корни постоянной кратности, и релаксационная матрица  $B_N = -S_N$ , где  $S_N$  — матрица представления оператора столкновения в базисе первых  $N$  функций Эрмита, являющаяся диагональной. Ее диагональные коэффициенты

$$b_{jj} = 0, \quad j = 1, \dots, N_b, \quad b_{jj} > 0, \quad j = N_b + 1, \dots, N.$$

Здесь  $N_b$  — число базовых равновесных переменных. Тогда:

- 1) полиномы  $P_0, P_1$  полиномиального пучка (3.1) дисперсионного уравнения систем моментов Града составляют правильную гиперболическую пару полиномов, т.е. они гиперболически, кратные корни общие, на единицу меньшей кратности у  $P_1$ , нестрого разделяют друг друга;
- 2) полином  $P_N, N = m - N_b$ , — строго гиперболический, тогда полиномы  $P_{N-1}, P_N$  полиномиального пучка (3.1) составляют строго гиперболическую пару полиномов, т.е. они строго гиперболически, и их корни строго разделяют друг друга;
- 3) полином  $P_N$  — нестрого гиперболический, тогда полиномы  $P_{N-1}, P_N$  образуют правильную нестрого гиперболическую пару полиномов. В этом случае все полиномы  $P_j, j = 0, \dots, N$ , цепочки имеют общий вещественный корень.

Не ослабляя общности, достаточно привести доказательство этого утверждения для случая  $N_b = 1$ , отвечающего системе моментов Града уравнения Фоккера—Планка.

Для систем моментов матрица  $\sum_{j=1}^d \xi A_j$  имеет вещественные собственные значения постоянной кратности. Отсюда следует существование невырожденного преобразования  $C(\xi), \det(C(\xi)) > 0$ , которое приводит эту матрицу к каноническому виду

$$\sum_{j=1}^d \xi A_j = C(\xi) \left( -\tau_j(\xi) \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi).$$

Прежде всего покажем, что транспонированная факорматрица миноров

$$\frac{M'}{P_0} = C(\xi) \left( \frac{1}{\tau - \tau_j(\xi)} \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi).$$

Имеем

$$\tau E + \sum_{j=1}^d \xi A_j = C(\xi) \left( (\tau - \tau_j(\xi)) \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi),$$

т.е.

$$C(\xi) \left( (\tau - \tau_j(\xi)) \delta_{jk} \right)^{-1} C^{-1}(\xi) \left( \tau E + \sum_{j=1}^d \xi A_j \right) = E.$$

Следовательно,

$$\frac{M'}{P_0} = C(\xi) \left( \frac{1}{\tau - \tau_j(\xi)} \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi).$$

Тогда из уравнения

$$\left( \tau E + \sum_{j=1}^d \xi A_j + iS_N \right) R = 0$$

следует, что

$$\left( E + iC(\xi) \left( \frac{1}{\tau - \tau_j(\xi)} \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi) S_N \right) R = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \det \left( E + iC(\xi) \left( \frac{1}{\tau - \tau_j(\xi)} \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi) \mathcal{S}_N \right) = \\ & = 1 - i \sum_{j=1}^N \left( C(\xi) \left( \frac{1}{\tau - \tau_j(\xi)} \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi) \mathcal{S}_N e_j, e_j \right) + \dots, \\ P_1(\tau, \xi) & = -P_0(\tau, \xi) \left( C(\xi) \left( \frac{1}{\tau - \tau_j(\xi)} \delta_{jk} \right) C^{-1}(\xi) \mathcal{S}_N e_j, e_j \right) = \\ & = -P_0(\tau, \xi) \sum_{s=1}^N \frac{1}{\tau - \tau_s(\xi)} \sum_{j=1}^N (j-1) \left( C^{-1}(\xi) e_j, e_s \right) \left( e_j, C(\xi) e_s \right). \end{aligned}$$

Так как  $\det C > 0$ , то знак скалярного произведения  $(e_j, C(\xi) e_s)$  такой же, как знак  $(C^{-1}(\xi) e_j, e_s)$ . Следовательно, знак  $(C^{-1}(\xi) e_j, e_s) (e_j, C(\xi) e_s)$  такой же, как знак  $(C^{-1}(\xi) e_j, e_s)^2 > 0$ . Отсюда

$$\mu_s(\xi) = \sum_{j=1}^N (j-1) \left( C^{-1}(\xi) e_j, e_s \right) \left( e_j, C(\xi) e_s \right) > 0.$$

Из интерполяционной формулы Лагранжа следует, что корни полинома  $P_1 = P_0 \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{\tau - \tau_j}$  вещественны, кратные корни те же, что и у полинома  $P_0$ , на единицу меньшей кратности; корни полинома  $P_1$  нестрого разделяют корни  $P_0$ .

Теперь рассмотрим крайние полиномы  $P_{N-2}$ ,  $P_{N-1}$ . Положим  $\mathcal{B}_N = -\mathcal{S}_N$ . Для уравнения Фоккера—Планка матрица  $\mathcal{B}_N$  диагональная с диагональными коэффициентами  $b_{jj} = j - 1$ . В младшем полиноме  $P_{N-1}(\tau, \xi)$  собраны члены детерминанта

$$\det \left( \tau E - \sum_{j=1}^d \xi_j A^j + i \mathcal{B}_N \right),$$

содержащие  $(-i)^{N-1}$ . Очевидно,

$$P_{N-1}(\tau, \xi) = \tau, \quad \gamma_{N-1} = \prod_{j=2}^N b_{jj} = (N-1)!.$$

Полином  $P_{N-2}$  отвечает членам детерминанта с  $(-i)^{N-2}$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \gamma_{N-2} P_{N-2}(\tau, \xi) & = \sum_{k=2}^N \prod_{j \neq k, 1} b_{jj} \det \begin{pmatrix} \tau & \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{1k}^j \\ \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{k1}^j & \tau - \tau_k + \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{kk}^j \end{pmatrix} = \\ & = \prod_{j=2}^N b_{jj} \sum_{k=2}^N \frac{1}{b_{kk}} \det \begin{pmatrix} \tau & \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{1k}^j \\ \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{k1}^j & \tau - \tau_k + \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{kk}^j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $a_{kl}^j$  — коэффициенты матриц  $A^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Отсюда следует, что скобка Пуассона

$$\begin{aligned}
 & [\gamma_{N-2}P_{N-2}, P_{N-1}] = \\
 & = \prod_{j=2}^N b_{jj} \sum_{k=2}^N \frac{1}{b_{kk}} \left\{ \tau \left( 2\tau - \tau_k + \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{kk}^j \right) - \tau \left( \tau - \tau_k + \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{kk}^j \right) + \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{1k}^j \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{k1}^j \right\} = \\
 & = \prod_{j=2}^N b_{jj} \sum_{k=2}^N \frac{1}{b_{kk}} \left( \tau^2 + \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{1k}^j \sum_{j=1}^3 \xi_j a_{k1}^j \right) = \\
 & = \sum_{k=2}^N \prod_{j \neq k, 1}^N b_{jj} \tau^2 + \prod_{j=2}^N b_{jj} \left\langle \widehat{B} \left( \sum_{j=1}^3 \xi_j A^j \right) e_1, \left( \sum_{j=1}^3 \xi_j A^j \right) e_1 \right\rangle > 0 \quad \forall (\tau, \xi) \neq 0,
 \end{aligned}$$

коэффициенты диагональной матрица  $\widehat{B}$  размера  $N \times N$

$$\widehat{b}_{11} = 0, \quad \widehat{b}_{jj} = \frac{1}{b_{jj}}, \quad j = 2, \dots, N.$$

Следовательно, полином  $P_{N-2}$  — строго гиперболический, и его корни строго разделяются корнем  $\tau = 0$  полинома  $P_{N-1}$ ,  $\gamma_{N-2} = \sum_{k=2}^N \prod_{j \neq k, 1}^N b_{jj}$ .

#### 4. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ЭРМИТА

Теорема о необходимых и достаточных условиях устойчивости полинома (3.1), которую мы хотим доказать, является обобщением классической теоремы Эрмита—Биллера на полиномы, коэффициенты которых являются гладкими однородными функциями многомерного параметра.

**4.1. Замечания о теореме Эрмита.** Нам будет удобна следующая форма теоремы Эрмита (см. [3]).

**Предложение 4.1.** Пусть  $p(\tau)$  и  $q(\tau)$  — полиномы от одного переменного  $\tau$  с вещественными коэффициентами степеней  $m$  и  $m-1$  соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) все нули комплексного полинома  $r(\tau) := p(\tau) - iq(\tau)$  лежат в открытой полуплоскости  $\Im \tau > 0$ ;
- (ii) старшие коэффициенты многочленов  $p$  и  $q$  имеют одинаковые знаки, а нули многочленов  $p$  и  $q$  вещественные и простые, причем нули  $q$  строго разделяют нули  $p$ ;
- (iii) все нули  $p$  — вещественные и простые; если их обозначить через  $p_1, \dots, p_m$ , то

$$\frac{q(\tau)}{p(\tau)} = \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j}{\tau - p_j},$$

где числа  $\mu_j$  положительны.

- (iv) все нули полинома  $p$  — вещественные и простые, и, кроме того,

$$[[p, q]](\tau) := -\frac{\Im[p(\tau)\overline{q(\tau)}]}{\Im \tau} > 0, \quad \Im \tau \leq 0, \quad \operatorname{Re} \tau \in \mathbb{R}; \quad (4.1)$$

- (iv<sub>0</sub>) все нули  $p$  — вещественные, и, кроме того, для вещественных  $\tau := \sigma$  имеем

$$[p, q](\sigma) := p'q(\sigma) - q'p(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Эквивалентность (i) и (ii) составляет содержание классической теоремы Эрмита. Хермандер сформулировал это утверждение как эквивалентность (i), (ii) и (iii) (см. [7, лемма 9.1.3]). Таким образом, осталось показать эквивалентность условий (iii), (iv) и (iv<sub>0</sub>).

*Доказательство.* (iii)  $\rightarrow$  (iv). Заметим, что

$$p(\tau)\overline{q(\tau)} = |p(\tau)|^2 \left( \frac{\overline{q(\tau)}}{p(\tau)} \right).$$

Разлагая  $p(\tau)$  на множители и пользуясь (iii), получим

$$\Im[p(\tau)\overline{q(\tau)}] = |p(\tau)|^2 \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j}{\overline{\tau} - p_j} = \Im\tau \sum_{j=1}^m \mu_j \prod_{k \neq j} |\tau - p_k|^2.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$[[p, q]](\tau) = \sum_{j=1}^m \mu_j \prod_{k \neq j} |\tau - p_k|^2. \quad (4.3)$$

При  $\Im\tau < 0$  это выражение положительно, поскольку все корни  $p_k$  — вещественные, а числа  $\mu_j$  — положительные. В случае  $\Im\tau = 0$  надо воспользоваться тем, что все корни  $p_j$  различны.

(iv)  $\rightarrow$  (iv<sub>0</sub>). Заметим, что при малых  $\Im\tau < 0$  и  $\sigma = \operatorname{Re} \tau$

$$-\Im[p(\tau)q(\overline{\tau})] = -\Im\tau(p'(\sigma)q(\sigma) - q'(\sigma)p(\sigma)) + O(|\Im\tau|^3).$$

Отсюда вытекает, что

$$[p, q](\sigma) = \lim_{\rho \rightarrow -0} [[p, q]](\sigma + i\rho) > 0. \quad (4.4)$$

(iv<sub>0</sub>)  $\rightarrow$  (iii). Прежде всего заметим, что, согласно определению, функция  $[p, q](\sigma)$  обращается в нуль в кратных вещественных нулях полинома  $p$ . Таким образом, из (4.2) следует, что полином  $p$  имеет вещественные и различные корни. Далее имеем

$$[p, q](\sigma) = -(p(\sigma))^2 \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{q(\sigma)}{p(\sigma)} \right).$$

Так как корни  $p_1, \dots, p_m$  — вещественные и простые, то, согласно интерполяционной формуле Лагранжа, найдутся такие числа  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , что имеет место представление (ii). В результате неравенство (4.2) примет вид

$$[p, q](\sigma) = (p(\sigma))^2 \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j}{(\sigma - p_j)^2} = \sum_{j=1}^m \mu_j \prod_{k \neq j} (\sigma - p_k)^2 > 0.$$

Подставляя  $\sigma = p_j$ , получим

$$\mu_j \prod_{k \neq j} (p_j - p_k)^2 > 0,$$

откуда и вытекает положительность чисел  $\mu_1, \dots, \mu_m$ .  $\square$

Нам понадобится одно простое, но очень важное для наших дальнейших целей следствие из предложения 4.1. Мы будем рассматривать вещественные полиномы  $p(\tau, \theta) = a_0\tau^m + \sum_{j \geq 1} a_j(\theta)(-1)^j \tau^{m-2j}$  и  $q(\tau, \theta) = b_0\tau^{m-1} + \sum_{j \geq 1} b_j(\theta)(-1)^j \tau^{m-1-2j}$ , младшие коэффициенты которых являются непрерывными функциями некоторого параметра  $\theta$ , пробегающего отрезок  $[\theta_1, \theta_2]$ .

**Предложение 4.2.** Пусть для полинома  $r(\tau, \theta) := p(\tau, \theta) - iq(\tau, \theta)$  выполнено условие (см. (4.2))

$$[p(\cdot, \theta), q(\cdot, \theta)](\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \quad (4.5)$$

Дополнительно предположим, что для некоторого  $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$  полином  $r(\tau, \theta_0)$  является устойчивым. Тогда полиномы  $r(\tau, \theta)$  при всех  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  являются устойчивыми.

*Доказательство.* Обозначим через  $\tau_j(\theta)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , корни полинома  $r(\tau, \theta) = 0$ . Так как коэффициент при старшей степени  $r$  не зависит от  $\theta$ , а остальные коэффициенты являются непрерывными функциями этого параметра, то можно выбрать  $m$  непрерывных ветвей корней  $\tau_j(\theta)$ . Согласно условию предложения,

$$\Im \tau_j(\theta_0) > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если для некоторых значений  $\theta$  устойчивость  $r(\tau, \theta)$  нарушается, то найдутся такие  $\theta_* \in [\theta_1, \theta_2]$  и  $j$ , для которых  $\Im \tau_j(\theta_*) = 0$ . Но тогда  $\tau_j(\theta_*)$  будет общим вещественным нулем полиномов  $p(\tau, \theta_*)$  и  $q(\tau, \theta_*)$ . Существование такого нуля противоречит (4.2). Предложение доказано.  $\square$

**4.2. Строгие и нестрогие пары гиперболических полиномов.** В этом пункте мы приведем некоторые результаты [13], касающиеся пар гиперболических полиномов. Будем говорить, что однородные вещественные полиномы  $P(\tau, \xi)$  и  $Q(\tau, \xi)$  степеней  $m$  и  $m-1$  соответственно, образуют нестрогую гиперболическую пару, если  $P$  и  $Q$  разрешены относительно старшей степени  $\tau$ , причем соответствующие коэффициенты имеют одинаковый знак, корни  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  этих полиномов — вещественные, корни полинома  $Q$  разделяют (нестрого) корни  $P$ . Последнее означает, что при подходящей нумерации корней этих полиномов имеют место неравенства

$$p_1(\xi) \geq q_1(\xi) \geq \dots \geq q_{m-1}(\xi) \geq p_m(\xi). \quad (4.6)$$

Нестрогая гиперболическая пара  $P(\tau, \xi)$  и  $Q(\tau, \xi)$  называется *строгой*, если при  $\xi \neq 0$  все корни  $P$  и  $Q$  попарно различны, а неравенства (4.6) — строгие.

Сохраним для полиномов от многих переменных обозначения (4.1), (4.2), полагая

$$[[P, Q]](\tau, \xi) = -\frac{P(\tau, \xi)\overline{Q(\tau, \xi)}}{\Im \tau}, \quad (4.7)$$

$$[P, Q](\sigma, \xi) = \partial_\sigma P(\sigma, \xi)Q(\sigma, \xi) - \partial_\sigma Q(\sigma, \xi)P(\sigma, \xi). \quad (4.8)$$

Строгие и нестрогие гиперболические пары были изучены в [7]. В случае строгих гиперболических пар с учетом соображений однородности предложение 4.1 может быть переформулировано в следующем виде.

**Предложение 4.3.** Пусть  $P(\tau, \xi)$  и  $Q(\tau, \xi)$  — однородные полиномы с вещественными коэффициентами степеней  $m$  и  $m-1$  соответственно, разрешенные относительно старшей степени  $\tau$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) полином  $\mathcal{R}(\tau, \xi) := P(\tau, \xi) - iQ(\tau, \xi)$  является устойчивым, т.е.

$$\mathcal{R}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \Im \tau \leq 0, \quad |\tau| + |\xi| > 0; \quad (4.9)$$

(ii) многочлены  $P(\tau, \xi)$  и  $Q(\tau, \xi)$  образуют строгую гиперболическую пару;

(iii) все нули  $p_j(\xi)$  полинома  $P(\tau, \xi)$  вещественные и различные при  $\xi \neq 0$ ; более того,

$$\frac{Q(\tau, \xi)}{P(\tau, \xi)} = \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j(\xi)}{\tau - p_j(\xi)}, \quad (4.10)$$

где функции  $\mu_j(\xi)$  однородны степени 0 и положительны;

(iv) все нули полинома  $P(\tau, \xi)$  — вещественные и различные при  $\xi \neq 0$ ; при этом найдется такое  $\kappa > 0$ , что

$$[[P, Q]](\tau, \xi) > \kappa(|\tau| + |\xi|)^{2m-2}, \quad \Im \tau \leq 0, \quad (\operatorname{Re} \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad (4.11)$$

(iv<sub>0</sub>) все нули полинома  $P(\tau, \xi)$  — вещественные; кроме того, найдется такое  $\kappa > 0$ , что для вещественных  $\tau := \sigma$  имеем

$$[P, Q](\sigma, \xi) > \kappa(|\sigma| + |\xi|)^{2m-2}, \quad (\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (4.12)$$

Нестрогие гиперболические пары связаны с ослабленным свойством устойчивости. Имеет место следующее предложение (см. [7]).

**Предложение 4.4.** Пусть  $P(\tau, \xi)$  и  $Q(\tau, \xi)$  — однородные полиномы с вещественными коэффициентами степеней  $m$  и  $m-1$  соответственно, разрешенные относительно старшей степени  $\tau$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) полином  $\mathcal{R}(\tau, \xi) := P(\tau, \xi) - iQ(\tau, \xi)$  является нестрого устойчивым, т.е.

$$\mathcal{R}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \Im \tau < 0; \quad (4.13)$$

(ii) для любого  $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$  полиномы  $p(\tau) := P(\tau, \xi)$  и  $q(\tau) = Q(\tau, \xi)$  могут быть представлены в виде

$$p(\tau) = h(\tau)\tilde{p}(\tau), \quad q(\tau) = h(\tau)\tilde{q}(\tau), \quad (4.14)$$

где полином  $h(\tau)$  имеет только вещественные корни, а полиномы  $\tilde{p}(\tau)$  и  $\tilde{q}(\tau)$  удовлетворяют эквивалентным утверждениям предложения 4.1;

(iii) все нули полинома  $P(\tau, \xi)$  — вещественные и

$$[[P, Q]](\tau, \xi) > 0, \quad \Im \tau < 0, \quad (\operatorname{Re} \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad (4.15)$$

(iv) все нули полинома  $P(\tau, \xi)$  вещественные; кроме того, для вещественных  $\tau := \sigma$  имеем

$$[P, Q](\sigma, \xi) \geq 0, \quad (\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (4.16)$$

Отметим, что условие (ii) имеет место тогда и только тогда, когда полиномы  $P(\tau, \xi)$  и  $Q(\tau, \xi)$  образуют нестрогую гиперболическую пару.

**4.3. Некоторые необходимые и некоторые достаточные условия устойчивости гиперболических пучков общего вида.** Вернемся к вопросу об устойчивости пучков вида (3.1), т.е. к описанию условий, при которых

$$\mathcal{R}(\tau, \xi) := \mathcal{P}(\tau, \xi) - i\mathcal{Q}(\tau, \xi) \neq 0, \quad \Im \tau \leq 0, \quad |\tau| + |\xi| > 0, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau, \xi) &= P_0(\tau, \xi) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau, \xi), \\ \mathcal{Q}(\tau, \xi) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau, \xi). \end{aligned}$$

**Теорема 4.1.** Пусть полиномы  $P_j(\tau, \xi)$  удовлетворяют условиям 1, 2 из определений 3.1, 3.2. Пусть выполнено условие устойчивости (4.17). Тогда:

- (I) полином от одного переменного  $r(\tau) := \mathcal{R}(\tau, 0)/\tau^{m-N}$  является устойчивым;
- (II) полиномы  $P_0(\tau, \xi)$  и  $P_1(\tau, \xi)$  образуют нестрогую гиперболическую пару;
- (III) полиномы  $P_{N-1}(\tau, \xi)$  и  $P_N(\tau, \xi)$  образуют нестрогую гиперболическую пару;
- (IV) выполнено условие

$$[[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]](\tau, \xi) > 0, \quad \Im \tau \leq 0 \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

*Доказательство.* Условие (I) очевидно, условие (IV) непосредственно следует из предложения 4.1.

Доказательство условия (II). Согласно предложению 4.1(ii), из условия устойчивости (4.17) следует, что для любого фиксированного  $\xi \in \mathbb{R}^n$  полиномы  $\mathcal{P}(\tau, \xi)$  и  $\mathcal{Q}(\tau, \xi)$  имеют различные вещественные корни, причем корни  $\mathcal{Q}(\tau, \xi)$  строго разделяют корни  $\mathcal{P}(\tau, \xi)$ .

Для  $l = 0, 1, \dots, N$  обозначим через  $p_j^l(\xi)$  корни полинома  $P_l(\tau, \xi)$ . Корни  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  полиномов  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  запишем в виде

$$p_j(\xi) = |\xi| \tilde{p}_j(\omega, |\xi|), \quad q_j(\xi) = |\xi| \tilde{q}_j(\omega, |\xi|), \quad \omega = \frac{\xi}{|\xi|}.$$

Следуя [2], покажем, что

$$p_j^0(\omega) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(\omega, |\xi|), \quad p_j^1(\omega) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \tilde{q}_j(\omega, |\xi|). \quad (4.18)$$

В силу этих равенств, из вещественности корней  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  следует вещественность корней  $p_j^0(\xi) = |\xi|p_j^0(\omega)$  и  $p_j^1(\xi) = |\xi|p_j^1(\omega)$ . Из строгого разделения корней  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  в пределе получаем нестрогое разделение  $p_j^0(\xi)$  и  $p_j^1(\xi)$ .

Для доказательства первого равенства из (4.18) следует заметить, что  $\tilde{\tau} = \tilde{p}_j(\omega, |\xi|)$  являются корнями алгебраического уравнения

$$P_0(\tilde{\tau}, \omega) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (-1)^j |\xi|^{-2j} \gamma_{2j} P_{2j}(\tilde{\tau}, \omega) = 0,$$

и при больших  $|\xi|$  они непрерывно зависят от малого параметра  $|\xi|^{-1}$ . Отсюда следует первое равенство из (4.18). Второе доказывается аналогично.

Доказательство условия (III) основано на изучении корней  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  при малых  $|\xi|$ . Для определенности в обозначениях будем сначала считать, что число  $N$  — четное (случай нечетных  $N$  мы обсудим ниже). Прежде всего заметим, что  $\tilde{\tau} = \tilde{p}_j(\omega, |\xi|)$  и  $\tilde{\tau} = \tilde{q}_j(\omega, |\xi|)$  являются корнями алгебраических уравнений

$$(-1)^{\frac{N}{2}} \gamma_N P_N(\tilde{\tau}, \omega) + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^j |\xi|^{N-2j} \gamma_{2j} P_{2j}(\tilde{\tau}, \omega) = 0, \quad (4.19)$$

$$(-1)^{\frac{N}{2}-1} \gamma_{N-1} P_{N-1}(\tilde{\tau}, \omega) + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^j |\xi|^{N-2j-1} \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tilde{\tau}, \omega) = 0, \quad (4.20)$$

где мы формально положили  $\gamma_0 = 1$ . Первое из этих уравнений имеет  $m - N$  корней; обозначим их через  $\tilde{p}_{\frac{N}{2}+j}(\omega, |\xi|)$ ,  $j = 1, \dots, m - N$ , которые при  $|\xi| \rightarrow 0$  стремятся к корням  $p_j^N(\omega)$  предельного уравнения  $P_N(\tilde{\tau}, \omega) = 0$ . Отсюда вытекает вещественность корней  $p_j^N(\omega)$ . Таким образом, при нашей нумерации имеем корни

$$p_{\frac{N}{2}+j}(\xi) = |\xi| \tilde{p}_{\frac{N}{2}+j}(\omega, |\xi|) = p_j^N(\xi) + o(|\xi|), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m - N. \quad (4.21)$$

Аналогично, уравнение (4.20) имеет  $m - N + 1$  корней; обозначим их через  $\tilde{q}_{\frac{N}{2}-1+j}(\omega, |\xi|)$ ,  $j = 1, \dots, m + 1 - N$ , которые стремятся к  $m + 1 - N$  корням  $p_j^{N-1}(\omega)$  предельного уравнения  $P_{N-1}(\tilde{\tau}, \omega) = 0$ . Отсюда вытекает вещественность корней  $p_j^{N-1}(\omega)$ . Таким образом,

$$q_{\frac{N}{2}-1+j}(\xi) = |\xi| \tilde{q}_{\frac{N}{2}-1+j}(\omega, |\xi|) = p_j^{N-1}(\xi) + o(|\xi|), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m + 1 - N. \quad (4.22)$$

Кроме указанных выше корней уравнения (4.19) и (4.20) имеют также так называемые «пограничные корни». Учет этих корней необходим для доказательства чередования нулей полиномов  $P_N$  и  $P_{N-1}$ .

Итак, для нахождения пограничных корней заметим, что уравнения

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) = 0, \quad \mathcal{Q}(\tau, \xi) = 0$$

при  $\xi = 0$  переходят в уравнения

$$z^{m-N} \left( z^N + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} (-1)^j \gamma_{2j} z^{N-2j} \right) = 0, \quad z^{m-N+1} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^j \gamma_{2j+1} z^{N-2-2j} = 0. \quad (4.23)$$

Воспользовавшись введенным выше обозначением  $r(z) := z^{-m+N} \mathcal{R}(z, 0)$ , в силу (4.23), получим

$$z^N + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} (-1)^j \gamma_{2j} z^{N-2j} = \operatorname{Re} r(z), \quad z \left( \gamma_1 z^{N-2} + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^j \gamma_{2j+1} z^{N-2-2j} \right) = \Im r(z).$$

Как уже было отмечено выше, полином  $r(z)$  является устойчивым.

С учетом предложения 4.1, корни  $z_1, \dots, z_N$  уравнения  $\operatorname{Re} r(z) = 0$  будут вещественными и различными. Поскольку  $\operatorname{Re} r(z)$  является полиномом от  $z^2$ , то наряду с корнем  $z_j > 0$ , будет и корень  $-z_j$ . В силу этого обстоятельства занумеруем корни  $z_1, \dots, z_N$  таким образом, что

$$z_1 > z_2 > \dots > z_{\frac{N}{2}} > z_{\frac{N}{2}+1} = -z_{\frac{N}{2}} > \dots > z_N = -z_1. \quad (4.24)$$

Обозначим через  $\zeta_1, \dots, \zeta_{N-2}$  корни уравнения

$$\gamma_1 z^{N-2} + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^j \gamma_{2j+1} z^{N-2-2j} = 0,$$

которое также является полиномом от  $z^2$ . Мы можем занумеровать эти корни таким образом, чтобы  $\zeta_{\frac{N}{2}-1+j} = -\zeta_j$ ,  $j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ . Таким образом, при соответствующей нумерации получим

$$\zeta_1 > \zeta_2 > \dots > \zeta_{\frac{N}{2}-1} > 0 > \zeta_{\frac{N}{2}} > \dots > \zeta_{N-2}. \quad (4.25)$$

Заметим, что числа в (4.24) являются корнями уравнения  $\operatorname{Re} r(z) = 0$ , а числа в (4.25) являются корнями уравнения  $\Im r(z) = 0$ . Отсюда вытекает условие чередования этих корней:

$$\begin{aligned} z_1 > \zeta_1 > z_2 > \zeta_2 > \dots > z_{\frac{N}{2}-1} > \zeta_{\frac{N}{2}-1} > z_{\frac{N}{2}} > 0 > \\ > z_{\frac{N}{2}+1} > \zeta_{\frac{N}{2}} > \dots > z_{N-1} > \zeta_{N-2} > z_N. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, получаем наборы «погранслойных корней»:

$$\begin{aligned} p_j(\xi) &= z_j + o(1), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, \frac{N}{2}, \\ p_j(\xi) &= z_{j-m+N} + o(1), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = m - \frac{N}{2} + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.27)$$

и аналогично,

$$\begin{aligned} q_j(\xi) &= \zeta_j + o(1), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ q_j(\xi) &= \zeta_{j-m+N} + o(1), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = m - \frac{N}{2} + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Добавляя корни

$$p_j(\xi) = p_{j-\frac{N}{2}}^N(\xi) + o(|\xi|), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = \frac{N}{2} + 1, \dots, m - \frac{N}{2}, \quad (4.29)$$

и

$$q_j(\xi) = p_{j-\frac{N}{2}+1}^{N-1}(\xi) + o(|\xi|), \quad |\xi| \rightarrow 0, \quad j = \frac{N}{2}, \dots, m - \frac{N}{2}, \quad (4.30)$$

к корням (4.27) и (4.28) соответственно, получим наборы всех корней полиномов  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  при малых  $|\xi|$ , причем корни  $q_j$  строго разделяют корни  $p_j$ . Как следует из формул (4.27) и (4.28), при малых  $|\xi|$  погранслойные корни суть  $O(1)$ , а корни (4.29) и (4.30) суть  $o(1)$ . В силу этого обстоятельства погранслойные корни чередуются в соответствии с (4.26), а корни (4.29) строго разделяют (при подходящей нумерации) корни (4.30). Переходя к пределу при  $|\xi| \rightarrow 0$ , докажем, что корни  $P^N$  нестрого разделяют корни  $P^{N-1}$ .

В случае нечетных  $N$  уравнения (4.23) переписутся в виде

$$z^{m-N+1} \left( z^{N-1} + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^j \gamma_{2j} z^{N-1-2j} \right) = 0, \quad z^{m-N+1} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^j \gamma_{2j+1} z^{N-2-2j} = 0, \quad (4.31)$$

где

$$z \left( z^{N-1} + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^j \gamma_{2j} z^{N-1-2j} \right) = \operatorname{Re} r(z), \quad \gamma_1 z^{N-1} + \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}-1} (-1)^j \gamma_{2j+1} z^{N-2-2j} = \Im r(z).$$

Обозначим через  $z_1, \dots, z_N$ ,  $z_{\frac{N-1}{2}+j} = -z_j$  корни полинома в скобках в первом члене (4.31) и, соответственно, через  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ ,  $\zeta_{\frac{N-1}{2}+j} = -\zeta_j$  — корни, отвечающие второму полиному в (4.31). В силу устойчивости  $r(z)$ , имеет место неравенство

$$z_1 > \zeta_1 > z_2 > \zeta_2 > \dots > z_{\frac{N-1}{2}} > \zeta_{\frac{N-1}{2}} > 0 > \zeta_{\frac{N+1}{2}} > z_{\frac{N+1}{2}} > \dots > \zeta_{N-1} > z_{N-1}.$$

Дальнейшее является дословным повторением вывода для случая четных  $N$ . Теорема доказана.  $\square$

Обращением теоремы 4.1 является следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Пусть полиномы  $P_j(\tau, \xi)$  удовлетворяют условиям 1, 2 из определений 3.1, 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

- (I) полином от одного переменного  $r(\tau) := \mathcal{R}(\tau, 0)/\tau^{m-N}$  является устойчивым;
- (II<sub>0</sub>) полиномы  $P_0(\tau, \xi)$  и  $P_1(\tau, \xi)$  образуют строгую гиперболическую пару;
- (III<sub>0</sub>) полиномы  $P_{N-1}(\tau, \xi)$  и  $P_N(\tau, \xi)$  образуют строгую гиперболическую пару;
- (IV<sub>0</sub>) выполнено условие

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\sigma, \xi) > 0 \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тогда выполняется условие устойчивости (4.17).

Более того, имеет место оценка

$$-\Im \mathcal{P}(\tau, \xi) \overline{\mathcal{Q}(\tau, \xi)} \geq C |\Im \tau| \left( (|\tau| + |\xi|)^{2m-2} + (|\tau| + |\xi|)^{2m-4} + \dots + (|\tau| + |\xi|)^{2m-2N-2} \right). \quad (4.32)$$

*Доказательство.* При доказательстве свойства (II) в теореме 4.1 была установлена связь между корнями  $\mathcal{P}$  и  $P_0$  при больших  $|\xi|$  (соответственно, между корнями  $\mathcal{Q}$  и  $P_1$ ), т.е.

$$p_j(\xi) = p_j^0(\xi) + o(|\xi|), \quad q_j(\xi) = p_j^1(\xi) + o(|\xi|), \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Если полиномы  $P_0$  и  $P_1$  образуют строгую гиперболическую пару, то при больших  $|\xi|$  корни  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  будут вещественными и различными, причем корни  $q_j(\xi)$  будут строго разделять корни  $p_j(\xi)$ . Применяя предложение 4.1, получим, что полином  $\mathcal{R}(\tau, \xi)$  будет устойчивым при больших  $|\xi|$ , скажем, при  $|\xi| > \delta^{-1}$ .

Аналогично, из условия (III<sub>0</sub>) выводится, что при малых  $|\xi|$ , скажем при  $|\xi| < \delta$ , корни  $p_j(\xi)$  и  $q_j(\xi)$  будут вещественными и различными, причем корни  $q_j(\xi)$  будут строго разделять корни  $p_j(\xi)$ . Применяя предложение 4.1, получим, что полином  $\mathcal{R}(\tau, \xi)$  будет устойчивым при малых  $|\xi|$ , скажем, при  $|\xi| < \delta$ .

Чтобы доказать устойчивость (4.17) для всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$  воспользуемся предложением 4.2. Сначала рассмотрим одномерный случай  $\xi \in \mathbb{R}$ . Взяв вместо параметра  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  параметр  $\xi \in [\pm\delta, \pm\delta^{-1}]$ , получим устойчивость (4.17). В общем случае следует перейти к полярным координатам  $\xi = \Lambda\omega$ ,  $|\omega| = 1$ . Взяв  $\Lambda \in [\delta, \delta^{-1}]$ , мы закончим доказательство устойчивости.

Применяя теорему 4.1, получим, что должно выполняться более сильное (по сравнению с (IV<sub>0</sub>)) условие (IV), т.е. выполнено неравенство

$$[[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]](\tau, \xi) > 0, \quad \Im \tau \leq 0 \quad \forall (\operatorname{Re} \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Переходим к доказательству неравенства (4.32). Заметим, что согласно (4.7),

$$-\Im \mathcal{P}(\tau, \xi) \overline{\mathcal{Q}(\tau, \xi)} = -\Im \tau [[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]](\tau, \xi) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^{i+j} \gamma_{2i} \gamma_{2j+1} [[P_{2i}, P_{2j+1}]](\tau, \xi), \quad (4.33)$$

и неравенство (4.32) сводится к неравенству

$$[[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]](\tau, \xi) \geq \left( (|\tau| + |\xi|)^{2m-2} + (|\tau| + |\xi|)^{2m-4} + \dots + (|\tau| + |\xi|)^{2m-2N-2} \right). \quad (4.34)$$

На компакте  $\delta \leq |\tau| + |\xi| \leq \delta^{-1}$  неравенство (4.34) выполнено в силу условия (IV) (разумеется, с константой, зависящей от  $\delta$ ).

Из (4.33) следует, что

$$[[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]](\tau, \xi) = \gamma_1 [[P_0, P_1]](\tau, \xi) + O((|\tau| + |\xi|)^{2m-4}), \quad (4.35)$$

$$[[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]](\tau, \xi) = \gamma_{N-1}\gamma_N[[P_{N-1}, P_N]](\tau, \xi) + O((|\tau| + |\xi|)^{2m-2}) + \dots + |\tau| + |\xi|)^{2m-2N+2}). \quad (4.36)$$

Согласно (4.11), первый член в правой части (4.35) оценивается снизу через

$$\gamma_1\kappa(|\tau| + |\xi|)^{2m-2},$$

и при  $|\tau| + |\xi| \geq \delta^{-1}$  с достаточно малым  $\delta$  правая часть (4.35) будет оцениваться снизу через правую часть (4.34).

Аналогично, согласно (4.11), первый член в правой части (4.36) оценивается снизу через

$$\gamma_{N-1}\gamma_N\kappa(|\tau| + |\xi|)^{2m-2N},$$

и при  $|\tau| + |\xi| \leq \delta$  с достаточно малым  $\delta$  правая часть (4.36) будет оцениваться снизу через правую часть (4.34).  $\square$

Обоснование алгоритма Раусса для полиномиального пучка требует восстановления в памяти некоторых понятий классического алгоритма Раусса и связанных с ним свойств устойчивых полиномов с вещественными коэффициентами.

## 5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА ИЗ ПЯТИ ПОЛИНОМОВ

В этом параграфе мы приведем теорему о достаточных условиях устойчивости пучка из пяти полиномов (близких к необходимым)

$$P_0(\tau, \xi) - \gamma_2 P_2(\tau, \xi) + \gamma_4 P_4(\tau, \xi) - i(\gamma_1 P_1(\tau, \xi) - \gamma_3 P_3(\tau, \xi)) = 0,$$

которая показывает необходимость сужения класса исследуемых пучков: условия устойчивости становятся всё более необозримыми с увеличением числа полиномов в пучке. Необходимо вернуться к первоначальной задаче исследования пучков дисперсионных уравнений, чтобы выделить их общие свойства, позволяющие разумно сузить класс рассматриваемых пучков.

**5.1. Устойчивые пятерки гиперболических полиномов,  $N = 4$ .** Для пучка из пяти полиномов

$$\begin{aligned} P_0(\tau, \xi) - \gamma_2 P_2(\tau, \xi) + \gamma_4 P_4(\tau, \xi) - i(\gamma_1 P_1(\tau, \xi) - \gamma_3 P_3(\tau, \xi)) &= 0, \\ \mathcal{P}(\tau, \xi) = P_0(\tau, \xi) - \gamma_2 P_2(\tau, \xi) + \gamma_4 P_4(\tau, \xi), \quad \mathcal{Q}(\tau, \xi) = \gamma_1 P_1(\tau, \xi) - \gamma_3 P_3(\tau, \xi) \end{aligned} \quad (5.1)$$

скобка Пуассона в полярных координатах

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, \xi) &= \lambda^{2(m-3)} \left( \gamma_1 [P_0, P_1] \lambda^6 + (\gamma_1 \gamma_2 [P_2, P_3] - \gamma_3 [P_2, P_3]) \lambda^4 + \right. \\ &\left. + (\gamma_2 \gamma_3 [P_2, P_3] - \gamma_1 \gamma_4 [P_1, P_4]) \lambda^2 + \gamma_3 \gamma_4 [P_3, P_4] \right) (\hat{\tau}, \hat{\xi}), \quad (\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из теоремы Эрмита следует, что необходимыми и достаточными условиями устойчивости полинома (5.1) являются следующие:

- 1) строгая гиперболичность полинома  $\mathcal{P} = P_0 - \gamma_2 P_2 + \gamma_4 P_4$ ;
- 2) положительность скобки Пуассона (5.2) для вещественных  $\lambda \geq 0$  и  $(\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}$ .

Для полинома относительно  $Z = \lambda^2$  в круглых скобках в (5.2) можно сформулировать необходимые и достаточные условия справедливости неравенства

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_G(Z) &= \gamma_1 [P_0, P_1] (\hat{\tau}, \hat{\xi}) Z^3 + (\gamma_1 \gamma_2 [P_2, P_3] - \gamma_3 [P_2, P_3]) (\hat{\tau}, \hat{\xi}) Z^2 + \\ &+ (\gamma_2 \gamma_3 [P_2, P_3] - \gamma_1 \gamma_4 [P_1, P_4]) (\hat{\tau}, \hat{\xi}) Z + \gamma_3 \gamma_4 [P_3, P_4] (\hat{\tau}, \hat{\xi}) > 0, \quad \forall Z \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Рассмотрим конусы

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{0,3;1,4} &= \left\{ (\tau, \xi) \in S^{d+1}; \left( [P_0, P_3] - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] \right) (\tau, \xi) > 0; \left( [P_1, P_4] - \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_4} [P_1, P_2] \right) (\tau, \xi) > 0 \right\}, \\ \mathcal{K}^{0,3} &= \left\{ (\tau, \xi) \in S^{d+1}; \left( [P_0, P_3] - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] \right) (\tau, \xi) > 0; \left( [P_1, P_4] - \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_4} [P_1, P_2] \right) (\tau, \xi) \leq 0 \right\}, \\ \mathcal{K}^{1,4} &= \left\{ (\tau, \xi) \in S^{d+1}; \left( [P_0, P_3] - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] \right) (\tau, \xi) \leq 0; \left( [P_1, P_4] - \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_4} [P_1, P_2] \right) (\tau, \xi) > 0 \right\}. \end{aligned}$$

В «полярных» координатах

$$(\tau, \xi) = \lambda(\hat{\tau}, \hat{\xi}), \quad (\hat{\tau}, \hat{\xi}) \in S^{d+1}, \quad \lambda \geq 0,$$

оценка (5.3) в конусах сводится к оценке снизу полинома

$$\begin{aligned} P_G(Z) &= Z^3 + aZ^2 + bZ + c > 0 \quad \forall Z \geq 0, \\ a &= \frac{(\gamma_1\gamma_2[P_1, P_2] - \gamma_3[P_0, P_3])(\hat{\tau}, \hat{\xi})}{\gamma_1[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi})}, \\ b &= \frac{(\gamma_2\gamma_3[P_1, P_2] - \gamma_1\gamma_4[P_1, P_4])(\hat{\tau}, \hat{\xi})}{\gamma_1[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi})}, \\ c &= \frac{\gamma_3\gamma_4[P_3, P_4](\hat{\tau}, \hat{\xi})}{\gamma_1[P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi})}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

**Лемма** (о монотонности оценки (5.4)). 1. Пусть для значений параметров  $a_*$ ,  $b_*$ ,  $c_*$  справедлива оценка (5.4). Тогда для любых  $a > a_*$ ,  $b > b_*$ ,  $c > c_*$  выполнено (5.4).

2. Для пучков с положительной скобкой Пуассона  $[P_0, P_1] > 0$ , если (5.4) справедливо для некоторых  $\gamma_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , то (5.4) остается справедливым для любых  $\frac{\gamma_3\gamma_4}{\gamma_1} \geq \frac{\gamma_3^*\gamma_4^*}{\gamma_1^*}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \left( \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] - [P_0, P_3] \right) &\geq \frac{\gamma_3^*}{\gamma_1^*} \left( \frac{\gamma_1^*\gamma_2^*}{\gamma_3^*} [P_1, P_2] - [P_0, P_3] \right), \\ \gamma_4 \left( \frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1\gamma_4} [P_1, P_2] - [P_1, P_4] \right) &\geq \gamma_4^* \left( \frac{\gamma_2^*\gamma_3^*}{\gamma_1^*\gamma_4^*} [P_1, P_2] - [P_1, P_4] \right). \end{aligned}$$

Лемма очевидна. Приведём лемму о необходимых и достаточных условиях положительности полинома (5.4) для неотрицательных  $Z \geq 0$ .

**Лемма** (о необходимых и достаточных условиях справедливости оценки (5.4)). Оценка (5.4) выполняется тогда и только тогда, когда коэффициент  $c > 0$ . В этом случае:

1) если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , либо  $a^2 - 3b < 0$ , либо  $a^2 - 3b \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то минимум

$$P_{\min}^G = \min_{Z \geq 0} P_G(Z) = c > 0;$$

2) минимум  $P_{\min}^G > 0$ , если  $b < 0$ ,  $a > 0$ , и

$$\frac{|b|}{a^2} < \frac{1}{3} \left( Y_+^2 \left( \frac{c}{a^3} \right) - 1 \right), \tag{5.5}$$

где  $Y_+(c/a^3) > 1$  — корень уравнения

$$2Y^3 - 3Y^2 + 1 - 27\frac{c}{a^3} = 0;$$

3) минимум  $P_{\min}^G > 0$ , если  $a < 0$ ,  $b < 0$ , и

$$\frac{|b|}{a^2} < \frac{1}{3} \left( Y_+^2 \left( \frac{c}{a^3} \right) - 1 \right), \quad \frac{c}{|a|^3} \geq \frac{4}{27}, \tag{5.6}$$

где  $Y_+(c/|a|^3) > 1$  — корень уравнения

$$2Y^3 - 3Y^2 - 1 - 27\frac{c}{a^3} = 0.$$

Эта лемма позволяет сформулировать достаточные условия устойчивости пучка из пяти полиномов.

**Теорема** (Достаточные условия устойчивости полиномиального пучка из пяти полиномов). Полиномиальный пучок (5.1) устойчив, если:

1) пучок (5.1) определяется цепочкой  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  однородных гиперболических полиномов порядков  $m, m-1, m-2, m-3, m-4, m-4 > 0$ , для которых

$$[P_0, P_1](\tau, \xi) > 0, \quad [P_3, P_4](\tau, \xi) > 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (\tau, \xi) \neq 0; \quad (5.7)$$

2) для любой точки  $(\tau, \xi) \in \mathcal{K}^{1,4}$  имеем

$$[P_1, P_4](\tau, \xi) < \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_4} [P_2, P_3](\tau, \xi) + \frac{1}{3} \left( Y_+^2(\nu_c) - 1 \right) \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2 \gamma_4} \frac{\left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] - [P_0, P_3] \right)^2}{[P_0, P_1]}(\tau, \xi); \quad (5.8)$$

3) для любой точки  $(\tau, \xi) \in \mathcal{K}^{0,3;1,4}$  справедливы неравенства

$$[P_0, P_3](\tau, \xi) < \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2](\tau, \xi) + \frac{27}{4} \left( \frac{\gamma_1^2 \gamma_4}{\gamma_3^2} [P_0, P_1]^2 [P_3, P_4] \right)^{1/3}(\tau, \xi), \quad (5.9)$$

$$[P_1, P_4](\tau, \xi) < \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_4} [P_2, P_3](\tau, \xi) + \frac{1}{3} \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2 \gamma_4} \left( Y_*^2(\nu_c) - 1 \right) \frac{\left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] - [P_0, P_3] \right)^2}{[P_0, P_1]}(\tau, \xi). \quad (5.10)$$

Здесь

$$\nu_c = \frac{\frac{\gamma_4 \gamma_1^2}{\gamma_3^2} ([P_3, P_4] [P_0, P_1]^2)(\tau, \xi)}{\left| \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} [P_1, P_2] - [P_0, P_3] \right|^3(\tau, \xi)}.$$

*Доказательство.* Теорема Эрмита—Биллера сводит доказательство теоремы об устойчивости пучка из пяти полиномов к проверке двух условий: строгой гиперболичности полинома  $\mathcal{P} = P_0 - \gamma_2 P_2 + \gamma_4 P_4$  и положительности скобки Пуассона  $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]$ .

Строгая гиперболичность  $\mathcal{P}$  для  $\lambda \gg 1$  следует из высокочастотной асимптотики корней  $p_j(\xi)$  полиномов  $\mathcal{P}$ . Из (5.7) получаем

$$p_j(\xi) = c_j(\xi) + o(|\xi|), \quad j = 1, \dots, m,$$

где  $c_j$  — корни строго гиперболического в силу (5.7) полинома  $P_0$ . Отсюда для больших  $\lambda \gg 1$  имеем

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, \xi) = [P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \lambda^{2(m-1)} + O(\lambda^{2(m-2)}) > 0,$$

откуда следует строгая гиперболичность  $\mathcal{P}$  для больших  $\lambda \gg 1$ . Если с уменьшением  $\lambda$  появляется кратный корень полинома  $\mathcal{P}$ , то скобка Пуассона должна в этой точке обратиться в нуль. Поэтому, если мы докажем, что эта скобка Пуассона положительна для любых  $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, (\tau, \xi) \neq 0$ , то полином  $\mathcal{P}$  остается строго гиперболическим при  $(\tau, \xi) \neq 0$ .

Таким образом, основным шагом в доказательстве устойчивости является оценка скобки Пуассона

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \gamma_1 [P_0, P_1] + \gamma_1 \gamma_2 [P_1, P_2] + \gamma_2 \gamma_3 [P_2, P_3] + \gamma_3 \gamma_4 [P_3, P_4] - \gamma_4 \gamma_1 [P_1, P_4] - \gamma_3 [P_0, P_3] \quad (5.11)$$

на конусах  $\mathcal{K}^{0,3;1,4}, \mathcal{K}^{0,3}, \mathcal{K}^{1,4}$ , так как вне этих конусов все нормированные скобки Пуассона положительны и, тем самым, положителен минимум (5.11). В «полярных» координатах

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\lambda(\hat{\tau}, \hat{\xi})) = \lambda^{2(m-3)} \left\{ \gamma_1 [P_0, P_1](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \lambda^6 + \gamma_3 \gamma_4 [P_3, P_4](\hat{\tau}, \hat{\xi}) + \left( \gamma_1 \gamma_2 [P_1, P_2](\hat{\tau}, \hat{\xi}) - \gamma_3 [P_0, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \right) \lambda^4 + \left( \gamma_2 \gamma_3 [P_2, P_3](\hat{\tau}, \hat{\xi}) - \gamma_4 \gamma_1 [P_1, P_4](\hat{\tau}, \hat{\xi}) \right) \lambda^2 \right\}. \quad (5.12)$$

Таким образом, оценка скобки Пуассона (5.12) сводится к рассмотренной выше лемме. Сформулированные в теореме условия (5.8)–(5.10) являются переложением на коэффициенты полинома

(5.12) условий леммы о необходимых и достаточных условиях отсутствия неотрицательных корней для полинома третьего порядка.

Из приведенного анализа следует, что полином  $\mathcal{P} - i\mathcal{Q}$  устойчив вне любой окрестности начала  $(\tau, \xi) = 0$ . В достаточно малой окрестности  $\xi = 0$  из низкочастотных асимптотик корней этого полинома следует, что для корней  $\tau_j(\xi) = o(|\xi|)$  справедливо разложения вида

$$\tau_j(\xi) = \lambda a_j(\hat{\xi}) - i\lambda^2 \frac{\gamma_3 P_3(a_j(\hat{\xi}), \hat{\xi})}{\gamma_4 \prod_{k \neq j} (a_j(\hat{\xi}) - a_k(\hat{\xi}))} + o(\lambda^2),$$

где  $\lambda a_j(\hat{\xi})$  — корни полинома  $P_4$ . Заметим, что в силу (5.7), имеем

$$[P_3, P_4](a_j(\hat{\xi}), \hat{\xi}) = -P_3(a_j(\hat{\xi}), \hat{\xi}) \prod_{k \neq j} (a_j(\hat{\xi}) - a_k(\hat{\xi})) > 0.$$

Следовательно, корни в окрестности нуля лежат в верхней полуплоскости комплексной плоскости переменной  $\tau$ . Отсюда следует, что для строго гиперболического пучка из пяти полиномов условия теоремы достаточны для его устойчивости. Это завершает доказательство теоремы.  $\square$

**5.2. Условия Раусса—Гурвица.** Исследуем условия теоремы (см. п. 5.1) при  $\xi = 0$ . Имеем

$$[P_0, P_3](\tau, 0) = 3\tau^{m-4} > 0, \quad [P_1, P_4](\tau, 0) = 3\tau^{m-6} > 0, \quad \tau \neq 0.$$

Тогда для любой точки  $(\tau, 0) \in \mathcal{K}^{0,3;1,4}$ ,  $\xi = 0$ , в конусе  $\mathcal{K}^{0,3;1,4}$

$$\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_3 < 0, \quad \gamma_2\gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_4 < 0, \quad (5.13)$$

должны быть справедливы неравенства

$$3 < \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} + \frac{27}{4} \left( \frac{\gamma_1^2\gamma_4}{\gamma_3^2} \right)^{1/3}, \quad (5.14)$$

$$3 < \frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1\gamma_4} + \frac{1}{3} \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2\gamma_4} \left( Y_*^2(\nu_c) - 1 \right) \left( \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} - 3 \right)^2. \quad (5.15)$$

1. Неравенство

$$\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1\gamma_4} + \frac{1}{3} \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2\gamma_4} \left( Y_*^2(\nu_c) - 1 \right) \left( \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} - 3 \right)^2 > 3$$

можно доказать, исследовав минимум функции двух переменных:

$$F(X, Z) = Z + \frac{1}{3} \left( \frac{Z}{X} \right)^{1/3} G(\nu_c(X, Z)) \implies \min, \quad (5.16)$$

$$\nu_c(X, Z) = \frac{X}{(3-X)^3}, \quad G(\nu_c) = \frac{(Y_+^2(\nu_c)^2 - 1)}{\nu_c^{2/3}},$$

$$Z = \frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1\gamma_4}, \quad X = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3},$$

$$2Y_+(\nu_c)^3 - 3Y_+(\nu_c)^2 - 1 - 27\nu_c = 0, \quad Y_+(\nu_c) > 1, \quad (5.17)$$

в области

$$\mathcal{D} = \{XZ > 4, 1 < X < 3, 1 < Z < 3\}. \quad (5.18)$$

Первое ограничение в (5.18) следует из оценки

$$\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1\gamma_4} \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_4} > 4,$$

справедливой в силу условия Раусса—Гурвица для семейства постоянных  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ .

Вычислим частные производные функции  $F$ . Сначала определим

$$\partial_{\nu_c} G(\nu_c) = \frac{2 \ 3Y_+(\nu_c)\partial_{\nu_c} Y_+(\nu_c) - Y_+^2(\nu_c) + 1}{\nu_c^{5/3}}.$$

Из (5.17) следует, что

$$(Y_+(\nu_c) - 1)Y_+(\nu_c)\partial_{\nu_c} Y_+(\nu_c) = \frac{9}{2}.$$

Отсюда, в силу уравнения (5.17),

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_c} G(\nu_c) &= \frac{1}{3} \frac{27Y_+(\nu_c) - 2(Y_+^2(\nu_c) - 1)(Y_+(\nu_c) - 1)Y_+(\nu_c)}{\nu_c^{5/3}(Y_+(\nu_c) - 1)Y_+(\nu_c)} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{2Y_+^3 - 3Y_+^2 - 1 - 2(Y_+^2 - 1)(Y_+ - 1)}{\nu_c^{5/3}(Y_+ - 1)} < 0 \quad \forall 1 < Y_+ < \sqrt{3}, \end{aligned}$$

так как

$$2Y_+^3 - 3Y_+^2 - 1 - 2(Y_+^2 - 1)(Y_+ - 1) = Y_+^2 - 3.$$

Стационарная точка  $\nu_* = \frac{1}{27}(6\sqrt{3} - 10) < 0$  находится вне допустимых значений  $\nu_c$ . Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\nu_c \rightarrow +\infty} G(\nu_c) = \lim_{\nu_c \rightarrow +\infty} \frac{Y_+^2 - 1}{\nu_c^{2/3}} = \frac{9}{2^{2/3}}.$$

Тогда частные производные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \partial_X F &= -\frac{1}{9} \left(\frac{Z}{X}\right)^{-2/3} \frac{Z}{X^2} F(\nu_c) + \frac{1}{3} \left(\frac{Z}{X}\right)^{1/3} \nu_c \partial_{\nu_c} G \left(\frac{1}{X} + \frac{3}{3-X}\right) > 0, \\ \partial_Z F &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{Z}{X}\right)^{-2/3} \frac{1}{X} F(\nu_c) - \frac{1}{3Z} \left(\frac{Z}{X}\right)^{1/3} \nu_c \partial_{\nu_c} G > 0. \end{aligned}$$

Отсюда минимум функции  $F$  достигается в точке  $X = 3$ ,  $Z = 4/3$ :

$$F_{\min} = \frac{4}{3} + 3^{1/3} > 3,$$

что доказывает неравенство (5.14).

Докажем также (5.13). Из второго неравенства в (5.13) получаем

$$\frac{\gamma_4}{\gamma_2^2} > \frac{1}{3} \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} + \frac{27}{4} \left(\frac{\gamma_1^2 \gamma_4}{\gamma_3^2}\right)^{1/3} > \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} + \frac{27}{4 \cdot 3^{1/3}} \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3}\right)^{1/3} > 3,$$

если, в силу условия Раусса—Гурвица,  $(\gamma_1 \gamma_2)/\gamma_3 > 1$ .

2. Для  $\xi = 0$  в конусе  $\mathcal{K}^{1,4}$ , где

$$\gamma_1 \gamma_2 - 3\gamma_3 \geq 0, \quad \gamma_2 \gamma_3 - 3\gamma_1 \gamma_4 < 0, \quad (5.19)$$

при  $\tau \neq 0$  из (5.8) следует, что

$$3 < \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_4} + \frac{1}{3} (Y_+^2(\nu_c) - 1) \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2 \gamma_4} \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} - 3\right)^2, \quad (5.20)$$

где  $Y_+(\nu_c) > 1$  — корень уравнения

$$2Y^3 - 3Y^2 + 1 - 27\nu = 0,$$

$$\nu_c = \frac{\frac{\gamma_4 \gamma_1^2}{\gamma_3^2}}{\left| \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3} - 3 \right|^3}.$$

В конусе  $\mathcal{K}^{1,4}$  из первого неравенства в (5.19), очевидно, следует (5.8).

Как видим, формулировка условий устойчивости достаточно сложна. Это указывает на тот факт, что, возможно, мы учли не все специфические свойства дисперсионных уравнений систем моментов Града, которые позволили бы разумно сузить класс исследуемых полиномиальных пучков.

## 6. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЭРМИТА

Приведем предварительную теорему Эрмита [5] для полинома с вещественными коэффициентами

$$p(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_m, \quad p_0 \neq 0 \quad (6.1)$$

и её эквивалентную форму для полиномиального пучка

$$\mathcal{P}(\tau) - i\mathcal{Q}(\tau) = 0, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{P} = \sum_{j \geq 0} p_{2j} (-1)^j \tau^{m-2j}, \quad \mathcal{Q} = \sum_{j \geq 0} p_{1+2j} (-1)^j \tau^{m-1-2j},$$

полученного из (6.1) при замене  $x = i\tau$

$$\mathcal{P}(\tau) - i\mathcal{Q}(\tau) = \frac{p(i\tau)}{i^m}.$$

Полиному (6.1) сопоставим два полинома

$$m_0(x) = \sum_{j \geq 0} p_{2j} x^{m-2j}, \quad m_1(x) = \sum_{j \geq 0} p_{1+2j} x^{m-1-2j},$$

в сумме составляющих  $p(x)$ . Очевидно,

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{m_0(i\tau)}{i^m}, \quad \mathcal{Q}(\tau) = \frac{m_1(i\tau)}{i^{m-1}}. \quad (6.3)$$

Теперь сопоставим полиному (6.1) производящую функцию Эрмита

$$P(x, y) = \frac{p(x)p(y) - p(-x)p(-y)}{x + y}, \quad P = \sum_{i, j=1}^m P_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \quad (6.4)$$

где матрица  $\Pi = (P_{ij})$ , составленная из коэффициентов полинома  $P(x, y)$ , является симметрической. Одна из формулировок теоремы Эрмита—Биллера [5] утверждает следующее.

**Теорема 6.1** (теорема Эрмита). *Полином  $p(x)$  устойчив, т.е. все его корни находятся в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда матрица  $\Pi$  положительно определена.*

Такие полиномы  $p(x)$  принято называть гурвицевыми. Доказательство этой теоремы получается многократным применением предварительной теоремы Эрмита.

**Теорема 6.2** (предварительная теорема Эрмита). *Пусть*

$$P \equiv \sum_{i, j=1}^m P_{ij} x^{i-1} y^{j-1} = \sigma m_1(x)m_1(y) + \sum_{i, j=1}^{m-1} P_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \quad (6.5)$$

$$m_1(x) = \sum_{j \geq 0} p_{1+2j} x^{m-1-2j}.$$

Для того чтобы матрица  $\Pi$  была строго положительно определенной формой, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- 1)  $p_1 \neq 0$ ;
- 2)  $\sigma = p_0/p_1 > 0$ ;
- 3) квадратичная форма  $P^{(1)}(\xi, \xi) \equiv \sum_{i,j=1}^{m-1} P_{ij}x^{i-1}y^{j-1}$  строго положительно определена.

Таким образом, мы представили полином  $p(x)$  в виде суммы полиномов

$$p(x) = m_0(x) + m_1(x),$$

$$m_0 = p_0x^m + p_2x^{m-2} + \dots, \quad m_1 = p_1x^{m-1} + p_3x^{m-3} + \dots.$$

В каждом из полиномов  $m_0, m_1$  отличными от нуля являются лишь коэффициенты при степенях  $x$ , имеющих только одну четность. Тогда

$$P(x, y) = 2 \frac{m_0(x)m_1(y) - m_0(-x)m_1(-y)}{x + y}.$$

Отсюда  $P_{mm} = 2p_0p_1$ . По теореме Эрмита—Биллера производящая функция гурвицева полинома определяет положительно определенную квадратичную форму  $P(x, y)$ . Отсюда следует, что  $P_{mm} = p_0p_1 > 0$ , т.е. старшие коэффициенты полиномов  $m_0(x), m_1(x)$  отличны от нуля и имеют совпадающие знаки. Это позволяет сделать первый шаг алгоритма Раусса — представить полином

$$m_0(x) = \sigma_1 m_1(x) + m_2(x), \quad \sigma_1 = \frac{p_0}{p_1} > 0,$$

где полином  $m_2(x)$  имеет степени  $x$  той же четности, что и  $m_0$ . Тогда производящую функцию можно записать в виде

$$P(x, y) = \sigma_1 m_1(x)^2 + 2 \frac{m_1(x)m_2(y) - m_1(-x)m_2(-y)}{x + y}.$$

Отсюда следует следующий вариант теоремы Эрмита—Биллера.

**Теорема 6.3** (теорема Эрмита—Биллера). *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) полином  $p(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \dots + p_m$ ,  $p_0 \neq 0$ , с вещественными коэффициентами есть полином Гурвица;
- 2) квадратичная форма  $\Pi = (P_{ij})$ , определяемая производящей функцией  $P(x, y)$  полинома  $p(x)$ , положительно определена;
- 3) постоянная  $\sigma_1 > 0$ , полином  $p^{(1)}(x) = m_1(x) + m_2(x)$  — полином Гурвица.

Условие 3 этой теоремы следует из предварительной теоремы Эрмита.

Отсюда вытекает следующая эквивалентная формулировка теоремы Эрмита для пучка (6.2).

**Теорема 6.4.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

I. Пусть

$$\mathcal{P}(\tau) \equiv \gamma\tau\mathcal{Q}(\tau) - \mathcal{P}^{(1)},$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(\tau) = \sum_{j \geq 0, m-2 \geq 2j} (-1)^j p_{2j}^{(1)} \tau^{m-2-2j}.$$

Для того чтобы пучок (6.2) был устойчив, т.е. все его корни находились в верхней комплексной полуплоскости, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- 1)  $p_1 \neq 0$ ;
- 2)  $\gamma = p_0/p_1 > 0$ ;
- 3) полиномиальный пучок  $\mathcal{Q}(\tau) - i\mathcal{P}^{(1)}(\tau)$  устойчив.

II. Пусть полином  $\mathcal{P}$  — строго гиперболический и

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau) \equiv (\partial_\tau \mathcal{P} \mathcal{Q} - \partial_\tau \mathcal{Q} \mathcal{P})(\tau) = \gamma\tau\mathcal{Q}(\tau)^2 + [\mathcal{Q}, \mathcal{P}^{(1)}](\tau). \quad (6.6)$$

Для того чтобы  $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau) > 0 \forall \tau \in \mathbb{R}$ , необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- 1)  $p_1 \neq 0$ ;

- 2)  $\gamma = p_0/p_1 > 0$ ;  
 3) *полином  $Q$  — строго гиперболический и  $[Q, \mathcal{P}^{(1)}](\tau) > 0 \forall \tau \in \mathbb{R}$ .*

Приведём из [5] доказательство предварительной теоремы Эрмита. Положим

$$P_{mj}^{(1)} = P_{j,m}^{(1)} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда из (6.5) следует, что

$$P_{ij} = \gamma \mu_i \mu_j + P_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

В частности,

$$P_{mm} = \gamma p_1^2 > 0.$$

Отсюда следует необходимость условий 1 и 2.

Квадратичную форму  $P^{(1)}(\xi, \xi)$  можно представить в виде суммы квадратов  $m - 1$  линейно независимых линейных форм

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} P_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{j=1}^{m-1} \omega_j \pi_j(\xi)^2, \quad \pi_j(\xi) = \mu_{1,j} \xi_1 + \dots + \mu_{m-1,j} \xi_{m-1}, \quad (6.7)$$

с положительными, отрицательными и нулевыми коэффициентами  $\omega_j$ . Так как квадратичная форма  $P(\xi, \xi) = \langle \Pi \xi, \xi \rangle$  — ранга  $m$ , то линейные формы  $m_{m-1}(x)$ ,  $\pi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ , должны быть линейно независимыми, что эквивалентно тому, что  $p_1 \neq 0$ . Для строгой определенности  $P(\xi, \xi)$  при этом ещё необходимо выполнение неравенств

$$\gamma > 0, \quad \omega_1 > 0, \dots, \omega_{m-1} > 0, \quad (6.8)$$

т.е. необходима строгая положительная определенность формы  $P^{(1)}(\xi, \xi)$ .

Наоборот, из условия 3 следует представление (6.7) с положительными постоянными  $\omega_j > 0$ . Тогда

$$\sum_{i,j=1}^m P_{ij} \xi_i \xi_j = \gamma m_1(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \omega_j \pi_j(\xi)^2, \quad m_1(\xi) \equiv p_1 \xi_m + p_3 \xi_{m-2} + \dots + p_{m-1} \xi_1.$$

Из условия  $\mu_m \neq 0$  следует линейная независимость линейных форм  $m_1(\xi)$  и  $\pi_j(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ , что вместе с условием 2 ( $\gamma > 0$ ) и вытекающими из 3 неравенствами  $\omega_j > 0$  гарантирует положительную определенность квадратичной формы  $P$ .

Это завершает доказательство предварительной теоремы Эрмита.

### 6.1. Алгоритм Раусса.

**Первый шаг алгоритма Раусса.** На первом шаге алгоритма Раусса полином  $p(x)$  представляется суммой полиномов

$$p(x) = m_0(x) + m_1(x), \quad (6.9)$$

$$m_0 = p_0 x^m + p_2 x^{m-2} + \dots, \quad m_1 = p_1 x^{m-1} + p_3 x^{m-3} + \dots.$$

В каждом из полиномов  $m_0$ ,  $m_1$  отличными от нуля являются лишь коэффициенты при степенях  $x$ , имеющих только одну четность. Тогда

$$P(x, y) = 2 \frac{m_0(x)m_1(y) - m_0(-x)m_1(-y)}{x + y}.$$

Отсюда  $P_{mm} = 2p_0 p_1$ . По теореме Эрмита—Биллера производящая функция гурвицева полинома определяет положительно определенную квадратичную форму  $P(x, y)$ . Отсюда следует, что  $P_{mm} = p_0 p_1 > 0$ , т.е. старшие коэффициенты полиномов  $m_0(x)$ ,  $m_1(x)$  отличны от нуля и имеют совпадающие знаки.

**Второй шаг алгоритма Раусса.** Это позволяет сделать второй шаг алгоритма Раусса — представить полином

$$m_0(x) = \sigma_1 x m_1(x) + m_2(x), \quad \sigma_1 = \frac{p_0}{p_1} > 0,$$

где полином  $m_2(x)$  имеет степени  $x$  той же четности, что и  $m_0$ . Тогда производящую функцию можно записать в виде

$$P(x, y) = \sigma_1 m_1(x)^2 + 2 \frac{m_1(x)m_2(y) - m_1(-x)m_2(-y)}{x + y}.$$

Таким образом, необходимые и достаточные условия устойчивости полинома  $p(x)$  приводят к тому, что старшие коэффициенты полиномов  $m_1$ ,  $m_2$  отличны от нуля и их знаки совпадают, что позволяет сделать следующий шаг алгоритма Раусса построения полинома  $m_3(x)$ :

$$m_3(x) = m_1(x) - \sigma_2 x M_2(x), \quad \gamma_2 > 0.$$

**Третий шаг алгоритма Раусса.** Полином  $p^{(1)}(x)$  гурвицев, если старшие коэффициенты  $p_1$  и  $p_{0,2}$  полиномов  $m_1(x)$ ,  $m_2(x)$  отличны от нуля и имеют совпадающие знаки. Это позволяет определить строго положительный коэффициент  $\sigma_2 = p_1/p_{0,2} > 0$  так, чтобы полином

$$m_3(x) = m_1(x) - \sigma_2 x m_2(x),$$

имеющий степени  $x$  той же четности что и  $m_1$ , был полиномом степени  $m - 3$ . Полином  $p^{(1)}(x) = m_1(x) + m_2(x)$  гурвицев тогда и только тогда, когда  $\sigma_2 > 0$  и полином  $p^{(2)}(x) = m_2(x) + m_3(x)$  тоже гурвицев.

**Четвертый шаг алгоритма Раусса.** Отсюда следует, что старшие коэффициенты  $p_{0,2}$  и  $p_{1,3}$  полиномов  $m_2$ ,  $m_3$  отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Тогда существует коэффициент  $\sigma_3 > 0$  такой, что полином

$$m_4(x) = m_2(x) - \sigma_3 x m_3(x)$$

оказывается степени  $m - 4$ . Для гурвицевости полинома  $p^{(2)}(x)$  необходимо и достаточно гурвицевости полинома  $p^{(3)}(x) = m_2(x) + m_4(x)$  и строгой положительности  $\sigma_3 > 0$ .

Продолжая рекуррентный процесс Раусса, определим цепочку полиномов  $m_0(x), \dots, m_m(x)$  и строго положительные постоянные  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Если полином  $p(x)$  устойчив, то этот процесс не может оборваться на некотором шаге  $j < m$ . Для гурвицевости полинома  $p(x)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) постоянные

$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \dots, \sigma_m > 0;$$

2) полином  $p^{(m-1)}(x) = M_{m-1} + M_m(x)$  гурвицев. Здесь

$$m_{m-1} = \alpha x, \quad m_m(x) = \beta,$$

и для гурвицевости  $p^{(m-1)}$  необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha, \beta$  были одного знака и отличны от нуля. Иными словами,

$$m_{m-1}(x) - \sigma_m x m_m = 0, \quad \sigma_m > 0.$$

Постоянные  $\sigma_j$  совпадают с главными минорами матрицы Гурвица.

Таким образом, окончательным выводом является следующее утверждение.

**Теорема 6.5.** Полином  $p(x)$  с вещественными коэффициентами устойчив тогда и только тогда, когда все постоянные  $\sigma_j$  процесса Раусса

$$m_j(x) = \sigma_{j+1} x m_{j+1}(x) + m_{j+2}(x), \quad j = 0, \dots, m - 2,$$

положительны; старшие коэффициенты полиномов  $m_j(x)$  отличны от нуля и одного знака.

## 7. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПУЧКИ

Исследование устойчивости решений задачи Коши для систем моментов приводит к проблеме устойчивости полиномиальных пучков (6.1) (дисперсионных уравнений). При исследовании априорных оценок решений вместо производящей функции (6.5) предпочтительнее использовать аппарат скобок Пуассона.

Приведём эквивалентную форму алгоритма Раусса, приспособленную к задачам исследования полиномиального пучка (6.1). Цепочке полиномов  $m_j(x)$  алгоритма Раусса сопоставим полиномы

$$\mathcal{P}^{(2j)}(\tau) = \frac{m_{2j}(i\tau)}{i^{m-2j}}, \quad \mathcal{Q}^{(1+2j)}(\tau) = \frac{m_{1+2j}(i\tau)}{i^{m-1-2j}},$$

имеющие степени  $\tau$  одинаковой четности (четные — для четных  $j$  и  $j = 0$ , нечетные — для нечетных  $j$ ). Отсюда структура этих полиномов

$$\mathcal{P}^{(2k)}(\tau) = g_k(\tau^2), \quad \mathcal{Q}^{(2k+1)}(\tau) = \tau f_k(\tau^2). \quad (7.1)$$

**Теорема 7.1** (теорема Эрмита). *Следующие условия эквивалентны:*

- I. полиномиальный пучок  $\mathcal{P}(\tau) - i\mathcal{Q}(\tau)$  устойчив;
- II. скобка Пуассона

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau) = \sum_{j=1}^m \sigma_j \pi_j(\tau)^2 > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

- III. постоянные  $\sigma_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , старшие коэффициенты полиномов  $\pi_{2j}(\tau) = \mathcal{P}^{(2j)}(\tau)$ ,  $\pi_{2j+1}(\tau) = \mathcal{Q}^{(2j)}(\tau)$  порядка  $m - j$  и одного знака.

- IV. полиномиальные пучки

$$\mathcal{P}^{(k)}(\tau) - i\mathcal{Q}^{(k+1)}(\tau), \quad \mathcal{Q}^{(k+1)}(\tau) - i\mathcal{P}^{(k+2)}(\tau), \quad k \geq 0,$$

*устойчивы.*

## 8. ПУЧКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Анализ полиномиальных пучков (7.1) порядка  $(m, N)$  дисперсионных уравнений систем моментов Града для кинетических уравнений Больцмана [2, 3, 5, 7] и Фоккера—Планка

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) - i\mathcal{Q}(\tau, \xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) = \sum_{j \geq 0, N \geq 2j, m-N \geq 0} (-1)^j P_{2j}(\tau, \xi), \quad (8.1)$$

$$\mathcal{Q}(\tau, \xi) = \sum_{j \geq 0, N \geq 1+2j, m-N \geq 0} (-1)^j P_{1+2j}(\tau, \xi)$$

показал, что структура однородных полиномов  $P_j(\tau, \xi)$  степени  $m - j$  напоминает структуру полиномов  $\mathcal{P}(\tau)$ ,  $\mathcal{Q}(\tau)$  в представлении полинома Гурвица как полиномиального пучка (8.1). А именно, в каждом из полиномов  $P_j$  отличными от нуля являются лишь коэффициенты при степенях  $\tau$ , имеющих *только одну четность*, т.е. структура полиномов такова:

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) = g(\tau^2, \xi), \quad \mathcal{Q}(\tau, \xi) = \tau f(\tau^2, \xi). \quad (8.2)$$

**Пример.** Другой пример. В двумерном случае  $d = 2$  для первых шести моментов методом Града решение ищем в виде

$$f_2(x, t, c) = m_0(x, t)\Psi_0(c) + m_{10}(x, t)\Psi_{10}(c) + m_{01}(x, t)\Psi_{01}(c) + \\ + \frac{1}{2}m_{20}(x, t)\Psi_{20}(c) + m_{11}(x, t)\Psi_{11}(c) + \frac{1}{2}m_{02}(x, t)\Psi_{02}(c). \quad (8.3)$$

Получаем систему из 6 уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left( E\partial_t + \partial_{x_1} A_1 + \partial_{x_2} A_2 + B \right) M_6(x, t) = 0, \quad (8.4)$$

$$M_6 = (m_0, m_{10}, m_{01}, m_{20}, m_{11}, m_{02})^T$$

относительно первых шести моментов. Здесь  $E$  — единичная матрица,

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение типа плоской волны  $M_6 = R_6 \exp(i(t\tau + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2))$ , где  $R_6$  — постоянный собственный вектор, приводит к дисперсионному уравнению

$$\det(E\tau + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 - iB) = P_0 - \gamma_2 P_2 + \gamma_4 P_4 - i(\gamma_1 P_1 - \gamma_3 P_3 + \gamma_5 P_5),$$

$$\gamma_1 = 8, \quad \gamma_2 = 25, \quad \gamma_3 = 38, \quad \gamma_4 = 28, \quad \gamma_5 = 1,$$

$$P_0(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^2 \left( \tau^4 - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tau^2 + 3(\xi_2^2 + \xi_1^2)^2 \right),$$

$$P_1(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau \left( \tau^4 - \frac{11}{4}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tau^2 + (\xi_2^2 + \xi_1^2)^2 \right),$$

$$P_2(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^4 - \frac{42}{25}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \tau^2 + \frac{4}{25}(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2,$$

$$P_3(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau \left( \tau^2 - \frac{16}{19}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \right), \quad P_4(\tau, \xi_1, \xi_2) = \tau^2 - \frac{2}{7}(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad P_5 = \tau.$$

Получили нестрогий гиперболический пучок из шести полиномов. Полиномы  $P_j$  пучка — нестрогий гиперболические и корни соседних нестрогий разделяют друг друга

$$[P_0, P_1](\tau, \xi) = \tau^2 \left( \tau^8 - \frac{29}{4} \tau^6 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{39}{4} \tau^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - \frac{11}{4} \tau^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 \right),$$

$$\min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} \left( \tau^8 - \frac{29}{4} \tau^6 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{39}{4} \tau^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - \frac{11}{4} \tau^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 \right) = 0.63046179,$$

$$\min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_0, P_1] = 3, \quad \min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_1, P_2] = \frac{33}{20},$$

$$\min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_2, P_3] = \frac{581}{475}, \quad \min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_3, P_4] = \frac{163}{133}, \quad \min_{\tau^2 + |\xi|^2 = 1} [P_4, P_5] = \frac{2}{7}.$$

Другие примеры мы приведем в приложении в конце статьи.

**8.1. Алгоритм Раусса для параметрического пучка.** Покажем, что (8.2) позволяет перенести процедуру Раусса на параметрические пучки (8.1).

**Лемма 8.1.** Для любого однородного строго гиперболического полинома

$$p(\tau, \xi) = \tau f(\tau^2, \xi)$$

порядка  $m = 2j + 1$  и любого однородного гиперболического полинома

$$q(\tau, \xi) = g(\tau^2, \xi)$$

порядка  $2j$ , корни которого нестрого разделяют корни  $p(\tau, \xi)$

$$[p, q](\tau, \xi) \geq 0, \quad (\tau, \xi) \neq 0,$$

и в любой точке  $\xi \in \mathbb{R}^d$  полином  $p$  не кратен  $q$ , справедливо представление

$$p(\tau, \xi) = \mu_{p,q} \tau q(\tau, \xi) - \gamma_{p,q}(\xi) b_{p,q}(\tau, \xi), \quad (8.5)$$

где  $\gamma_{p,q}(\xi)$  — положительная однородная функция порядка 2, постоянная  $\mu_{p,q} = p_0/q_0$  равна отношению старших коэффициентов полиномов  $p$  и  $q$ , функция  $b_{p,q}(\tau, \xi) \in \mathcal{O}P_G^{2j-1}$  со старшим коэффициентом по  $\tau$ , равным единице.

Также для любого однородного строго гиперболического полинома

$$p(\tau, \xi) = f(\tau^2, \xi)$$

порядка  $m = 2(j + 1)$  и любого однородного гиперболического полинома

$$q(\tau, \xi) = \tau g(\tau^2, \xi)$$

порядка  $2j + 1$ , корни которого нестрого разделяют корни  $p(\tau, \xi)$ , и в любой точке  $\xi \in \mathbb{R}^d$  полином  $p$  не кратен  $q$ , справедливо представление (8.5).

В первом случае

$$\begin{aligned} p(\tau, \xi) &= \tau \left( p_0 \tau^{2j} + p_2(\xi) \tau^{2(j-1)} + \dots \right), \\ q(\tau, \xi) &= q_0 \tau^{2j} + q_2(\xi) \tau^{2(j-1)} + \dots, \\ p_2(\xi) &= - \sum_{k=1}^j c_k(\xi)^2, \quad q_2(\xi) = - \sum_{k=1}^{j-1} b_k(\xi)^2, \end{aligned}$$

где  $\pm c_k, k = 1, \dots, j$  и  $0, \pm b_k, k = 1, \dots, j - 1$ , — корни полиномов  $p$  и  $q$  соответственно. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} p(\tau, \xi) &= \frac{p_0}{q_0} \tau q(\tau, \xi) - p^{(1)}(\tau, \xi), \\ p^{(1)}(\tau, \xi) &= \left( p_2(\xi) - q_2(\xi) \right) \tau^{2(j-1)} + \dots \end{aligned}$$

Из условия нестрогого разделения корней следует, что

$$p_2(\xi) - q_2(\xi) = \sum_{k=1}^{j-1} (c_k^2(\xi) - b_k^2(\xi)) + c_j^2(\xi) \geq 0$$

и

$$p_2(\xi) - q_2(\xi) = \sum_{k=1}^{j-1} (c_k^2(\xi) - b_k^2(\xi)) + c_j^2(\xi) > 0,$$

если полином  $p$  не кратен  $q$  для любого  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Положим  $\gamma_{p,q}(\xi) = p_2(\xi) - q_2(\xi) > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ . Тогда

$$p^{(1)}(\tau, \xi) \equiv \gamma_{p,q}(\xi) b_{p,q}(\tau, \xi).$$

Второй случай разбирается аналогично. Теперь покажем, что справедлива следующая лемма.

**Лемма 8.2.** В условиях предыдущей леммы корни гиперболического полинома  $b_{p,q}(\tau, \xi) \in \mathcal{O}P_G^{m-2}$  всегда нестрого разделяют корни полинома  $q(\tau, \xi)$ .

Рассмотрим случай  $m = 2(m_0 + 1)$  (случай  $m = 2m_0 + 1$  исследуется так же). Из формулы Лагранжа имеем

$$q(\tau, \xi) = \tau \sum_{j=1}^{m_0+1} \nu_j(\xi) \prod_{k \neq j} (\tau^2 - c_k^2(\xi)).$$

Отсюда для любого корня  $b_s(\xi) \neq 0$  полинома  $q$  имеем

$$\begin{aligned} b_{p,q}(b_s(\xi), \xi) &= \sum_{j=1, \dots, m_0+1} \frac{\nu_j(\xi) c_j^2(\xi)}{\gamma_{p,q}(\xi)} \prod_{k \neq j} (b_s^2(\xi) - c_k^2(\xi)) = \\ &= - \prod_{k=1}^{m_0+1} (b_s^2(\xi) - c_k^2(\xi)) \frac{\sum_{j=1}^{m_0+1} \mu_j(\xi)}{\gamma_{p,q}(\xi)} + \frac{b_s(\xi)}{\gamma_{p,q}(\xi)} b_s(\xi) \sum_{j=1}^{m_0+1} \nu_j(\xi) \prod_{k \neq j} (b_s^2(\xi) - c_k^2(\xi)) \\ &= - \prod_{k=1}^{m_0+1} (b_s^2(\xi) - c_k^2(\xi)) \frac{\sum_{j=1}^{m_0+1} \mu_j(\xi)}{\gamma_{p,q}(\xi)}. \end{aligned}$$

Таким образом, корни полинома  $b_{p,q}(\tau, \xi)$  чередуются с корнями полинома  $\hat{q} = q/\tau$ , и, следовательно, корни полинома  $b_{p,q}(\tau, \xi)$  строго разделяют корни полинома  $q$ .

**Определение пучка Града.** Полиномиальный пучок

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau, \xi) - i\mathcal{Q}(\tau, \xi) &= 0, \\ \mathcal{P}(\tau, \xi) &= \sum_{j \geq 0, N \geq 2j} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau, \xi), \\ \mathcal{Q}(\tau, \xi) &= \sum_{j \geq 0, N \geq 2j+1} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau, \xi), \end{aligned} \tag{8.6}$$

однородных полиномов  $P_j$  порядка  $m-j$  с вещественными коэффициентами будем называть пучком Града порядка  $(m, N)$ , если:

1) полиномы  $P_{2j}$ ,  $j \geq 0$ , и полиномы  $P_{2j+1}$ ,  $j \geq 0$ , имеют одну четность, т.е.

$$P_{2j}(\tau, \xi) = \begin{cases} g_j(\tau^2, \xi), & (m-2j) \text{ — четное,} \\ \tau f_j(\tau^2, \xi), & (m-2j) \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

и также

$$P_{2j+1}(\tau, \xi) = \begin{cases} g_j(\tau^2, \xi), & (m-2j-1) \text{ — четное,} \\ \tau f_j(\tau^2, \xi), & (m-2j-1) \text{ — нечетное;} \end{cases}$$

2) для коэффициентов  $\gamma_j$  справедливо правило Раусса—Гурвица;

3) скобки Пуассона соседних полиномов

$$[P_j, P_{j+1}](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

т.е. полиномы  $P_j$ ,  $j = 0, \dots, N$ , нестрого гиперболичны, и корни соседних полиномов  $P_j$ ,  $P_{j+1}$  нестрого разделяют друг друга.

**Теорема 8.1.** *Любой пучок Града либо устойчив, либо*

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) - i\mathcal{Q}(\tau, \xi) = \tau^l (\mathcal{P}_1(\tau, \xi) - i\mathcal{Q}_1(\tau, \xi))$$

с устойчивым пучком Града  $\mathcal{P}_1(\tau, \xi) - i\mathcal{Q}_1(\tau, \xi)$ .

Как следствие получаем следующее предложение.

**Предложение 8.1.** Пучок Града, для которого справедливо дополнительное условие

$$[P_{N-1}, P_N](\tau, \xi) > 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (\tau, \xi) \neq 0,$$

для крайней пары полиномов  $P_{N-1}, P_N$ , в силу которого их корни взаимно разделяют друга друга, является устойчивым.

**Лемма.** Для любого пучка Града существует аналог алгоритма Раусса построения семейства положительных непрерывных функций  $\varrho_j(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , и полиномов

$$\pi_j(\tau, \xi) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{[(m-j)/2]} a_{kj}(\xi) \tau^{2k}, & (m-j) - \text{четное}, \\ \tau \sum_{k=0}^{[(m-j-1)/2]} a_{kj}(\xi) \tau^{2k}, & (m-j) - \text{нечетное}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, m,$$

с непрерывными коэффициентами таких, что

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, \xi) = \sum_{j=1}^m \varrho_j(\xi) \pi_j^2(\tau, \xi). \quad (8.7)$$

**Первый шаг параметрического алгоритма Раусса.** Рассмотрим пары полиномов  $P_{2j}, P_{2j+1}$ ,  $j \geq 0$ , из  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  соответственно. В силу определения пучка Града, скобки Пуассона удовлетворяют неравенству

$$[P_{2j}, P_{2j+1}](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (8.8)$$

Тогда лемма 8.1 позволяет получить представления

$$P_0(\tau, \xi) = \tau P_1(\tau, \xi) - \gamma_{0,1}(\xi) \widehat{P}_2(\tau, \xi),$$

$$P_2(\tau, \xi) = \tau P_3(\tau, \xi) - \gamma_{2,3}(\xi) \widehat{P}_4(\tau, \xi),$$

$$P_4(\tau, \xi) = \tau P_5(\tau, \xi) - \gamma_{4,5}(\xi) \widehat{P}_6(\tau, \xi),$$

и т.д.

Однородные функции второго порядка удовлетворяют неравенству  $\gamma_{2j,2j+1}(\xi) \geq 0$  для любого  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Старшие коэффициенты полиномов  $\widehat{P}_{2j}$  равны единице. Более того, в силу этой же леммы,

$$[P_{2j+1}, \widehat{P}_{2(j+1)}](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad j = 0, \dots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor. \quad (8.9)$$

Положим

$$P_2^{(1)}(\tau, \xi) = \left( \gamma_2 - \frac{\gamma_3 \gamma_0}{\gamma_1} \right) P_2(\tau, \xi) + \gamma_{0,1}(\xi) \widehat{P}_2(\tau, \xi),$$

$$P_4^{(1)}(\tau, \xi) = \left( \gamma_4 - \frac{\gamma_5 \gamma_0}{\gamma_1} \right) P_4(\tau, \xi) + \gamma_{2,3}(\xi) \widehat{P}_4(\tau, \xi),$$

$$P_6^{(1)}(\tau, \xi) = \left( \gamma_6 - \frac{\gamma_7 \gamma_0}{\gamma_1} \right) P_6(\tau, \xi) + \gamma_{4,5}(\xi) \widehat{P}_6(\tau, \xi),$$

и т.д. Отсюда следует, что

$$\mathcal{P}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_0 \tau}{\gamma_1} \mathcal{Q}(\tau, \xi) - \mathcal{P}^{(1)}(\tau, \xi),$$

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}](\tau, \xi) = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \mathcal{Q}^2(\tau, \xi) + [\mathcal{Q}, \mathcal{P}^{(1)}](\tau, \xi),$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(\tau, \xi) = \gamma_2^{(1)} P_2^{(1)}(\tau, \xi) - \gamma_4^{(1)} P_4^{(1)}(\tau, \xi) + \gamma_6^{(1)} P_6^{(1)}(\tau, \xi) + \dots,$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_{2j}^{(1)}(\xi) &= \gamma_{2j} - \frac{\gamma_{2j+1}\gamma_0}{\gamma_1} + \gamma_{2(j-1),2j-1}(\xi), \quad j \geq 1, \quad N \geq 2j, \\ P_{2j}^{(1)}(\tau, \xi) &= \left( \gamma_{2j} - \frac{\gamma_{2j+1}\gamma_0}{\gamma_1} \right) P_{2j}(\tau, \xi) + \gamma_{2(j-1),2j-1}(\xi) \widehat{P}_{2j}(\tau, \xi).\end{aligned}\tag{8.10}$$

Теперь заметим, что, в силу определения пучка Града, имеем

$$[P_{2j+1}, P_{2(j+1)}](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad j \geq 0.$$

Отсюда и в силу (8.9) следует, что

$$\gamma_2^{(1)}(\xi)[P_1, P_2^{(1)}](\tau, \xi) = \left( \gamma_2 - \frac{\gamma_3\gamma_0}{\gamma_1} \right) [P_1, P_2](\tau, \xi) + \gamma_{0,1}(\xi)[P_1, \widehat{P}_2](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

$$\gamma_4^{(1)}(\xi)[P_3, P_4^{(1)}](\tau, \xi) = \left( \gamma_4 - \frac{\gamma_5\gamma_0}{\gamma_1} \right) [P_3, P_4](\tau, \xi) + \gamma_{2,3}(\xi)[P_3, \widehat{P}_4](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Также получим

$$\gamma_6^{(1)}(\xi)[P_5, P_6^{(1)}](\tau, \xi) = \left( \gamma_6 - \frac{\gamma_7\gamma_0}{\gamma_1} \right) [P_5, P_6](\tau, \xi) + \gamma_{4,5}(\xi)[P_5, \widehat{P}_6](\tau, \xi) \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

и т.д.

Таким образом, полиномы  $P_{2j+1}$  и  $P_{2(j+1)}^{(1)}$  в  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{P}^{(1)}$  соответственно, связаны соотношениями типа (8.8), позволяющими, в силу леммы 8.1, перейти к следующему шагу алгоритма Раусса.

Заметим, что при  $\xi = 0$  из (8.10) получаем один из коэффициентов алгоритма Раусса

$$\gamma_{2j}^{(1)}(0) = \gamma_{2j} - \frac{\gamma_{2j+1}\gamma_0}{\gamma_1},\tag{8.11}$$

который должен быть положителен в силу необходимого условия устойчивости. В то же время для пучка Града соотношения (8.11) выполнены. Отсюда следует

$$\gamma_2^{(1)}(\xi) = \gamma_2 - \frac{\gamma_3\gamma_0}{\gamma_1} + \gamma_{0,1}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

$$[P_1, P_2^{(1)}](\tau, \xi) = \frac{1}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \left\{ \left( \gamma_2 - \frac{\gamma_3\gamma_0}{\gamma_1} \right) [P_1, P_2](\tau, \xi) + \gamma_{0,1}(\xi)[P_1, \widehat{P}_2] \right\} \geq 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Также для пучка Града

$$\gamma_4 - \frac{\gamma_5\gamma_0}{\gamma_1} > 0,$$

отсюда следует

$$\gamma_4^{(1)}(\xi) = \gamma_4 - \frac{\gamma_5\gamma_0}{\gamma_1} + \gamma_{2,3}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

и т.д.

**Второй шаг параметрического алгоритма Раусса.** Таким образом, мы можем сделать следующий шаг алгоритма Раусса:

$$P_1(\tau, \xi) = \tau P_2^{(1)}(\tau, \xi) - \gamma_{1,2}^{(1)}(\xi) \widehat{P}_3(\tau, \xi),$$

где

$$\gamma_{1,2}^{(1)}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad [P_2^{(1)}, \widehat{P}_3](\tau, \xi) \geq 0, \quad (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1},\tag{8.12}$$

и

$$P_3(\tau, \xi) = \tau P_4^{(1)}(\tau, \xi) - \gamma_{3,4}^{(1)}(\xi) \widehat{P}_5(\tau, \xi),$$

где

$$\gamma_{3,4}^{(1)}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad [P_4^{(1)}, \widehat{P}_5](\tau, \xi) \geq 0, \quad (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}.\tag{8.13}$$

Так же, как выше, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\tau, \xi) &= \frac{\gamma_1 \tau}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \mathcal{P}^{(1)}(\tau, \xi) - \mathcal{Q}^{(2)}(\tau, \xi), \\ \mathcal{Q}^{(2)}(\tau, \xi) &= \gamma_3^{(2)}(\xi) P_3^{(2)}(\tau, \xi) - \gamma_5^{(2)}(\xi) P_5^{(2)}(\tau, \xi) + \gamma_7^{(2)}(\xi) P_7^{(2)}(\tau, \xi) + \dots, \\ \gamma_3^{(2)}(\xi) &= \frac{\gamma_1 \tau}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \gamma_{1,2}^{(1)}(\xi) + \gamma_3 - \frac{\gamma_1 \gamma_4^{(1)}(\xi)}{\gamma_2^{(1)}(\xi)}, \\ P_3^{(2)}(\tau, \xi) &= \frac{1}{\gamma_3^{(2)}(\xi)} \left\{ \frac{\gamma_1 \tau}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \gamma_{1,2}^{(1)}(\xi) \widehat{P}_3 + \left( \gamma_3 - \frac{\gamma_1 \gamma_4^{(1)}(\xi)}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \right) P_3 \right\}, \\ \gamma_5^{(2)}(\xi) &= \gamma_5 + \left( \gamma_3 - \frac{\gamma_1 \gamma_6^{(1)}(\xi)}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \right) \frac{\gamma_1 \tau}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \gamma_{3,4}^{(1)}(\xi), \\ P_5^{(2)}(\tau, \xi) &= \frac{1}{\gamma_5^{(2)}(\xi)} \left\{ \gamma_5 P_5 + \frac{\gamma_1 \tau}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \gamma_{3,4}^{(1)}(\xi) \widehat{P}_5 - \left( \frac{\gamma_1 \gamma_6^{(1)}(\xi)}{\gamma_2^{(1)}(\xi)} \right) P_5 \right\}, \end{aligned}$$

и т.д.

Отсюда следует

$$[\mathcal{Q}, \mathcal{P}^{(1)}](\tau, \xi) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2^{(1)}} \left( \mathcal{P}^{(1)} \right)^2(\tau, \xi) + [\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{Q}^{(2)}](\tau, \xi).$$

Заметим, что полиномы  $P_{2j}^{(1)}$ ,  $j \geq 1$ , и  $P_{2j+1}^{(2)}$ ,  $j \geq 1$ , входящие в  $\mathcal{P}^{(1)}$  и  $\mathcal{Q}^{(2)}$  соответственно, связаны соотношением

$$[P_{2j}^{(1)}, P_{2j+1}^{(2)}] \geq 0, \quad (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad j \geq 1,$$

откуда следует возможность перехода к следующему шагу алгоритма Раусса. Индукция завершает доказательство леммы, если в (8.7) положим

$$\pi_1(\tau, \xi) = \mathcal{Q}(\tau, \xi), \quad \varrho_1 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad \pi_2(\tau, \xi) = \mathcal{P}^{(1)}(\tau, \xi), \quad \varrho_2(\xi) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2^{(1)}(\xi)}, \quad (8.14)$$

и для любого  $j = 2, \dots, N$  положим

$$\begin{aligned} \pi_{2j}(\tau, \xi) &= \mathcal{P}^{(2j-1)}(\tau, \xi), & \varrho_{2j}(\xi) &= \frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_{2j}^{(j-1)}(\xi)}, \\ \pi_{2j-1}(\tau, \xi) &= \mathcal{Q}^{(2j)}(\tau, \xi), & \varrho_{2j-1}(\xi) &= \frac{\gamma_{2(j-1)}}{\gamma_{2j-1}^{(j-1)}(\xi)}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Теперь отметим, что из разложения (8.7) следует устойчивость пучка Града, если полиномы  $\pi_j(\tau, \xi)$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , линейно независимы и  $\pi_m(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $\xi \neq 0$ . Очевидно, первое условие выполнено для цепочки полиномов (8.14), (8.15). Их старшие коэффициенты степеней  $\tau^{m-j}$  соответственно, равны единице. Что можно сказать о полиноме нулевого порядка  $\pi_m(\xi)$ ? Для определенности рассмотрим случай четного  $m = 2l$  (случай  $m = 2l + 1$  исследуется аналогично). Из построения видно, что

$$\pi_m(\xi) = \gamma_m^{(m-1)}(0) + \Gamma_m(\xi),$$

где  $\Gamma_m(\xi) \geq 0 \forall \xi \neq 0$  и  $\Gamma_m(\xi) = O(|\xi|)$ . Постоянная  $\gamma_m^{(m-1)}(0)$  — последняя в ряду констант Раусса—Гурвица; она положительна в силу определения пучка Града и должна быть положительна по необходимому условию устойчивости пучка (8.6).

**Заключение.** Таким образом, нам удалось выделить класс устойчивых полиномиальных пучков, названных нами пучками Града, которые воспроизводятся, как показали прямые вычисления, для первых в иерархии систем моментов Града для кинетических уравнений Больцмана и Фоккера—Планка.

Мы установили, что второе условие в определении пучка Града — справедливость условий Раусса—Гурвица для старших коэффициентов полиномов  $P_j$  пучка — является следствием диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита. Вторым следствием диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита была установлена неотрицательность скобок Пуассона крайних пар соседних полиномов пучка дисперсионного уравнения.

Осталась проблема воспроизводства причин неотрицательности скобок Пуассона всех пар соседних полиномов пучка на каждом шаге построения аппроксимации кинетического уравнения системой моментов Града, что мы отмечаем для всех просчитанных примеров.

## 9. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРИМЕРЫ

В 3-D случае система моментов Града порядка не выше двух для уравнения Фоккера—Планка имеет вид

$$\left( E\partial_t + A_1\partial_{x_1} + A_2\partial_{x_2} + A_3\partial_{x_3} \right) M_{10} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & B^S \end{pmatrix} M_{10} = 0,$$

где

$$M_{10} = (m_0, m_{100}, m_{010}, m_{001}, m_{200}, m_{110}, m_{020}, m_{011}, m_{002}, m_{101}),$$

матрицы представления уравнения Фоккера—Планка в базисе десяти функций Эрмита:

$$A_1, A_2, A_3, B^S.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. — Москва, 1999.
2. Волевич Л. Р., Радкевич Е. В. Равномерные оценки решений задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 4. — С. 1–14.
3. Волевич Л. Р., Радкевич Е. В. Устойчивые пучки гиперболических полиномов и асимптотическая устойчивость задачи Коши для некоторых систем неравновесной термодинамики// Тр. моск. мат. об-ва. — 2004 (в печати).
4. Годунов С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. — Изд. Новосибирского ун-та, 1994.
5. Захарченко П. А., Радкевич Е. В. О гиперболических пучках систем моментов Града неравновесной термодинамики// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2004 (в печати).
6. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. — М.: Наука, 1986.
7. Радкевич Е. В. Корректность математических моделей механики сплошных сред и термодинамика// Совр. мат. и ее прил. — 2003. — 3. — С. 3–144.
8. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
9. Chapman S. C., Cowling T. C. The mathematical theory of non-uniform gases. — 1961, Cambridge University Press.
10. Chen G. Q. Quasidécoupling method for discontinuous solutions to conservation law// Commun. Pure and Appl. Math. — 1993. — 46. — С. 755–781.
11. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases// Commun. Pure and Appl. Math. — 1949. — 2.
12. Hermite Ch. Oeuvres I. — Paris, 1905. — С. 397–414.
13. Junk M. Domain of definition of Levermore's five-moment system// J. Stat. Phys. — 1998. — 93. — С. 1143–1167.
14. Levermore C. D. Moment closure hierarchies for kinetic theories// J. Stat. Phys. — 1996. — 83. — С. 1021–1065.

15. *Müller I., Ruggeri T.* Extended Thermodynamics. — Springer-Verlag, 1993.

Е. В. Радкевич

Московский государственный университет им. Ломоносова

E-mail: [radk@mech.math.msu.su](mailto:radk@mech.math.msu.su)