ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии**
**Институт Кибернетики**

# СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## Том 15

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

**Тбилиси**
**2004**

## Редакционная коллегия

**Главный редактор:**

*Р. В. Гамкрелидзе* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

**Заместитель главного редактора:**

*Г. Харатишвили* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

**Члены редколлегии:**

*А. А. Аграчев* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)
*Г. Гиоргадзе* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)
*Е. С. Голод* (Московский государственный университет)
*А. Лашхи* (Грузинский технический университет)
*Е. Ф. Мищенко* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
*А. В. Овчинников* (Московский государственный университет)
*В. Л. Попов* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
*А. В. Сарычев* (Университет Флоренции)
*Г. Химшиашвили* (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)


©Институт кибернетики Академии наук Грузии, 2004

# СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## Том 15

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
**2004**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Обобщенные фуксовы системы дифференциальных уравнений (*А. Г. Александров*) . . . . . 3
О числе комплексных точек поверхности в $\mathbb{C}^2$ (*Т. Алиашвили*) . . . . . 14
О монодромии обобщенных аналитических функций (*Г. Гиоргадзе*) . . . . . 30
Деформации с сечением: касательная когомология, условия плоскости и модулярные подростки (*Тобиас Хирш, Бернд Мартин*) . . . . . 52
Многомерные вычеты и полиномиальные уравнения (*Г. Химшиашвили*) . . . . . 71
Граничные задачи на плоскости с разрезами (*Н. Манджавидзе*) . . . . . 121
Гипераналитические функции и их приложения (*А. П. Солдатов*) . . . . . 142

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 3–13

УДК 517.987.5

# ОБОБЩЕННЫЕ ФУКСОВЫ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2004 г. **А. Г. АЛЕКСАНДРОВ**

Аннотация. В статье обсуждается понятие обобщенной фуксовой системы дифференциальных уравнений с логарифмическими особенностями на дивизоре комплексного многообразия. Доказывается, что такая система характеризуется тем, что она регулярно особа вдоль дивизора в классическом смысле. Доказательство опирается на основные свойства логарифмических дифференциальных форм и векторных полей и в нем не используется традиционная техника разрешений особенностей, с помощью которой эта проблема сводится к изучению дивизоров с нормальными пересечениями. В случае, когда особенности рассматриваемой системы расположены на свободном дивизоре Саито, описывается алгебраический метод вычисления условия интегрируемости в терминах коммутационных соотношений на матрицы коэффициентов системы.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . . 3
1. Логарифмические дифференциальные формы и векторные поля . . . . . 4
2. Обобщенные фуксовы системы . . . . . 5
3. Фуксовы системы и регулярные особенности . . . . . 6
4. Свободные дивизоры Саито . . . . . 7
5. Условие интегрируемости и коммутационные соотношения . . . . . 9
Список литературы . . . . . 12

## Введение

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений в комплексной области

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \tag{0.1}$$

где $y = {}^{\mathsf{T}}(y_1, \dots, y_k)$ — вектор-столбец неизвестных функций. Предположим, что она обладает особенностями в точках $a_1, \dots, a_n$, так что $A(x)$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, где $\overline{\mathbb{C}}$ — сфера Римана. Система (0.1) называется *фуксовой* в точке $a_i$, если $A(x)$ имеет там полюс не более чем первого порядка. Система (0.1) *фуксова*, если она фуксова во всех точках $a_i$, $i = 1, \dots, n$. Точки $a_1, \dots, a_n$ называются *фуксовыми особенностями* системы. В научной литературе понятие фуксовой системы появляется в связи с изучением 21-й проблемы Гильберта, которую обычно называют проблемой Римана — Гильберта (см. [13], где излагается история вопроса и подробно обсуждаются основные результаты теории). На самом деле похожие вопросы интересно ставить и исследовать также и в рамках теории многих комплексных переменных. В предыдущих работах (см. [9, 10]) рассматривался класс систем линейных дифференциальных уравнений, названных обобщенными системами Пикара — Фукса, или фуксовыми системами дифференциальных уравнений с логарифмическими особенностями. Это понятие естественно возникает в контексте теории деформаций особенностей и тесно связано с теорией систем Гаусса — Манина [12]. Следует отметить, что класс фуксовых систем с логарифмическими особенностями содержит все типы классических фуксовых систем. Например, такая система с особенностями на дивизоре с нормальными пересечениями сводится

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований РФФИ (проект N 02-01-00623).

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

к системе типа Фукса в смысле [16]. Другой известный пример — это классическая система Пикара— Фукса, которая описывает связность Гаусса — Манина плоского отображения (см. [15, 23]). Далее, многие специальные функции могут рассматриваться как решения подходящих обобщенных фуксовых систем.

Сначала мы напоминаем основные понятия и определение обобщенной фуксовой системы дифференциальных уравнений, которая обладает логарифмическими особенностями вдоль гиперповерхности комплексного многообразия. Такую систему можно представить в виде системы Пфаффа линейных дифференциальных уравнений $d\mathbf{I} = \Theta\mathbf{I}$, где $\mathbf{I} = {}^{\mathsf{T}}(I_1, \ldots, I_k)$ — вектор-столбец неизвестных функций, а элементы матрицы $\Theta$ — мероморфные дифференциальные 1-формы с логарифмическими полюсами вдоль $D$, при этом $\Theta$ удовлетворяет стандартному условию интегрируемости $d\Theta = \Theta \wedge \Theta$. Пользуясь свойствами логарифмических дифференциальных форм и векторных полей, мы доказываем, что такая система характеризуется тем, что она регулярно особа вдоль дивизора. Это доказательство существенно опирается на основные свойства логарифмических дифференциальных форм и векторных полей. При этом важно отметить, что в нем не используется традиционная техника разрешений особенностей, с помощью которой эта проблема сводится к изучению дивизоров с нормальными пересечениями (см. [15]). В случае, когда особенности обобщенной фуксовой системы лежат на свободном дивизоре Саито, описывается алгебраический метод вычисления условия интегрируемости в терминах коммутационных соотношений на матрицы коэффициентов системы.

## 1. Логарифмические дифференциальные формы и векторные поля

Пусть $S$ — $m$-мерное комплексное многообразие. Без ограничения общности мы будем обычно предполагать, что $S = \mathbb{C}^m$ и $U$ — открытое подмножество $\mathbb{C}^m$. Далее, если рассматривается локальная ситуация, то для удобства будем считать, что точка $x$ — это начало координат, а $U$ содержит начало координат. Пусть $D$ — гиперповерхность, заданная в точке $x \in S$ локальным уравнением $h(z) = 0$, где $h(z) = h(z_1, \ldots, z_m)$ — голоморфная функция в области $U$ и $z_1, \ldots, z_m$ — система координат в $U$. Наконец, предположим, что $D$ *приведена,* т.е. у $h(z)$ нет кратных множителей.

**Определение 1.1.** Мероморфная дифференциальная $q$-форма $\omega$, $q \geqslant 0$, на $U$ с полюсами вдоль $D$ называется *логарифмической* вдоль дивизора $D$, если $\omega$ и ее дифференциал $d\omega$ обладают полюсами не более чем первого порядка. Это означает, что $h\omega$ и $hd\omega$ *голоморфны* на $U$.

**Замечание 1.** На самом деле, дифференциальные формы такого типа впервые были рассмотрены в 1972 г. в работе Ж.-Б. Поли [20], который доказал, что вычет Лере корректно определен для любой (не обязательно $d$-замкнутой) *полумероморфной* дифференциальной формы $\omega$, удовлетворяющей условиям определения 1.1. Несколько позднее К. Саито развивает в работах [21, 22] теорию *мероморфных* дифференциальных форм такого же типа, которые он называет *логарифмическими* вдоль гиперповерхности. Следует еще заметить, что логарифмические дифференциальные формы обладают многими замечательными аналитическими и алгебраическими свойствами (см. [1, 8, 22]).

Следуя [21], обозначим через $\Omega^q_S(\log D), q \geqslant 0$, когерентные пучки ростков логарифмических дифференциальных $q$-форм на $S$, а через $\mathrm{Der}_S(\log D)$ — $\mathcal{O}_S$-модуль векторных полей *логарифмических* вдоль $D \subset S$. Последний состоит из ростков голоморфных векторных полей $\eta$ на $S$ таких, что $\eta(h)$ принадлежит главному идеалу $(h) \cdot \mathcal{O}_S$ (в частности, векторное поле $\eta$ касается гиперповерхности $D$ в ее неособых точках). Внутреннее умножение векторных полей и дифференциальных форм индуцирует естественное спаривание $\mathcal{O}_S$-модулей

$$\mathrm{Der}_S(\log D) \times \Omega^q_S(\log D) \longrightarrow \Omega^{q-1}_S(\log D). \tag{1.1}$$

Более того, для $q = 1$ это $\mathcal{O}_S$-билинейное отображение является *невырожденным* (совершенным) спариванием, так что $\mathrm{Der}_S(\log D)$ и $\Omega^1_S(\log D)$ становятся $\mathcal{O}_S$-двойственными. Напомним [8], что существует точная последовательность $\mathcal{O}_S$-модулей

$$0 \to \frac{dh}{h}\mathcal{O}_S + \Omega^1_S \to \Omega^1_S(\log D) \xrightarrow{\cdot h} \mathrm{Tors}\,\Omega^1_D \to 0, \tag{1.2}$$

где $\Omega^1_S$ — модуль голоморфных дифференциальных 1-форм на $S$, порожденный дифференциалами $dz_1, \dots, dz_m$ над $\mathcal{O}_S$,

$$\Omega^1_D = \Omega^1_S / (h\,\Omega^1_S + \mathcal{O}_S dh) \tag{1.3}$$

— модуль регулярных голоморфных дифференциальных 1-форм на дивизоре $D$ и $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$ — подмодуль *кручения* $\Omega^1_D$. Носитель $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$ содержится в подмножестве особенностей $\operatorname{Sing} D$ гиперповерхности $D$, и $\mathcal{O}_D$-модуль кручения $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$ обладает системой образующих, содержащей по крайней мере $m-1$ элемент.

**Замечание 2.** Пусть $h = h_1 h_2$ — неприводимое разложение, так что $D = D_1 \cup D_2$ — дивизор, состоящий из двух компонент. Легко видеть, что *главные* 1-формы

$$\omega_1 = \frac{dh_1}{h_1}, \omega_2 = \frac{dh_2}{h_2} \in \Omega^1_S(\log D)$$

являются логарифмическими. Обозначим образы этих форм при умножении на $h$ в точной последовательности (1.2) через $\widetilde{\omega}_1$ и $\widetilde{\omega}_2$ и пусть $g = h_1 + h_2$, так что росток $g$ определяет не делитель нуля в $\mathcal{O}_{D,0}$. Поскольку

$$g\frac{dh_1}{h_1} = h_2\frac{dh}{h} + dh_1 - dh_2,$$

то $g\widetilde{\omega}_1 = h_2 dh + h(dh_1 - dh_2) = 0$ в $\Omega^1_D$. Это означает, что $\widetilde{\omega}_1 \in \operatorname{Tors}\Omega^1_D$ и определяет (нетривиальный) элемент подмодуля кручения. Такое же вычисление показывает, что $\widetilde{\omega}_2 \in \operatorname{Tors}\Omega^1_D$.

## 2. Обобщенные фуксовы системы

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений на $S$ с *мероморфными* коэффициентами из $\Omega^1_S(\log D)$, которую локально можно представить в следующем виде:

$$d\mathbf{I} = \left( A_0 \frac{dh}{h} + \sum_{i=1}^{\ell} A_i \frac{\vartheta_i}{h} \right) \mathbf{I}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{I} = {}^{\mathsf{T}}(f_1, \dots, f_k)$ — вектор-столбец неизвестных функций. Здесь дифференциальные 1-формы $\vartheta_i \in \Omega^1_S$, $i = 1, \dots, \ell$, соответствуют ненулевым элементам модуля кручения $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$ ввиду (1.2), а $A_i \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{O}_S$, $i = 0, 1, \dots, \ell$, — матрицы коэффициентов с голоморфными элементами, удовлетворяющие условию интегрируемости

$$d\Theta = \Theta \wedge \Theta, \quad \text{где} \quad \Theta = A_0 \frac{dh}{h} + \sum_{i=1}^{\ell} A_i \frac{\vartheta_i}{h}. \tag{2.2}$$

Если полный дифференциал $dh$ обозначить через $\vartheta_0$, то это условие эквивалентно тождеству

$$\sum_{i=0}^{\ell} dA_i \wedge \frac{\vartheta_i}{h} + A_i d(\frac{\vartheta_i}{h}) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant \ell} [A_i,\, A_j] \frac{\vartheta_i}{h} \wedge \frac{\vartheta_j}{h}. \tag{2.3}$$

**Определение 2.1** (ср. [10])**.** Система линейных дифференциальных уравнений (2.1) называется обобщенной *фуксовой системой,* или *фуксовой системой с логарифмическими особенностями.*

Пусть $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, где $D_i = \{z \in \mathbb{C}^m \colon h_i(z) = 0\}$, — локальное разложение дивизора $D$ в точке $o \in D$. Таким образом, если гиперповерхность $D$ определяется ростком голоморфной функции $h(z)$, то $h(z) = h_1(z) \cdots h_n(z)$, $n \geqslant 1$, — примарное разложение ростка $h(z)$. Предположим, что $D$ *приведен,* т.е. у $h(z)$ нет кратных множителей. Очевидно, что мероморфные формы

$$\frac{dh_1}{h_1}, \dots, \frac{dh_n}{h_n}$$

содержатся в $\Omega^1_S(\log D)$, а образы этих форм при умножении на $h$ из точной последовательности (1.2) определяют нетривиальные элементы подмодуля кручения $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$. Это можно показать

с помощью тех же вычислений, что и в замечании 2. В результате линейную систему дифференциальных уравнений типа Пфаффа вида (2.1) можно представить следующим образом:

$$d\mathbf{I} = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{dh_i}{h_i}\right)\mathbf{I}. \tag{2.4}$$

Системы дифференциальных уравнений такого вида исследовались в ряде работ (см. [24] и литературу там же). Один из наиболее важных результатов теории — это теорема К. Такано, которая заключается в следующем. Предположим, что полная сумма матриц коэффициентов $A_i$ в отмеченной точке $o \in S$ имеет собственные значения, разности которых не являются целыми положительными числами. Тогда с помощью *голоморфной* замены переменных в окрестности точки $o$ можно преобразовать систему (2.4) к системе подобного типа с постоянными матрицами коэффициентов $A_i(o)$. В случае, когда *неособые* гиперповерхности $D_i$ находятся в *общем положении*, фундаментальное решение таких систем было описано Жераром и Левелем [16], Иошидой и Такано [25] и А. Болибрухом [2].

**Замечание 3.** Предположим, что $h_i(z)$ — *линейные* или, более общо, *однородные* функции, так что все компоненты дивизора $D_i$, $i = 1, \ldots, n$, — *гиперплоскости* или *неособые* гиперповерхности степеней $d_i$, соответственно. Допустим, что $\sum_{i=1}^{n} d_i A_i = 0$. Тогда система (2.4) обладает каноническим продолжением на все $\mathbb{P}^m$. Такие системы дифференциальных уравнений исследуются в [16] и обычно называются системами *типа Пфаффа или Фукса* (ср. [13]).

## 3. Фуксовы системы и регулярные особенности

Пусть $\Phi$ — квадратная $k$-матрица, элементы которой — мероморфные дифференциальные 1-формы на $S$. Предположим, что $\Phi$ удовлетворяет условию интегрируемости

$$d\Phi = \Phi \wedge \Phi$$

и задается следующим образом:

$$\Phi = B_1(z)\frac{dz_1}{z_1} + \sum_{i=2}^{m} B_i(z)dz_i, \tag{3.1}$$

где $(z_1, \ldots, z_m)$ — локальная система координат в отмеченной точке $o \in S$, и $B_i(z) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{O}_S|_U$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — матрицы с голоморфными элементами на $S$. Следуя [15] говорят (ср. [19]), что система линейных мероморфных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{I} = \Phi \cdot \mathbf{I} \tag{3.2}$$

от неизвестной векторнозначной функции $\mathbf{I} = {}^{\mathsf{T}}(f_1, \ldots, f_k)$ имеет *регулярные особенности* вдоль подмножества $\{z_1 = 0\}$.

**Определение 3.1.** Система (3.2) имеет *регулярные особенности*, или регулярно особа вдоль гиперповерхности $D \subset S$, если и только если

1) все элементы матрицы $\Phi$ — голоморфные дифференциальные 1-формы на $S \setminus D$;

2) для любой неособой точки $x \in D$ существует окрестность $U \subset S$ точки $x$ такая, что матрица $\Phi$ регулярно особа вдоль множества $D \cap U$, определенного локальным уравнением $z_1 = 0$, т.е. $\Phi$ представляется в виде (3.1).

В терминологии [17], если $D$ — *неособая* гиперповерхность, то матричная дифференциальная 1-форма $\Phi$ определяет мероморфную связность с *логарифмическими полюсами* на $D$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\Phi$ — квадратная $k$-матрица как и выше, элементы которой — мероморфные дифференциальные 1-формы с полюсами вдоль гиперповерхности $D$. Тогда система (3.2) регулярно особа вдоль $D$, если и только если эта система является фуксовой вида (2.1), в частности, она обладает логарифмическими особенностями вдоль дивизора $D$.*

Доказательство прямо следует из элементарных свойств логарифмических дифференциальных форм и векторных полей. Рассмотрим обобщенную фуксову систему (2.1). Тогда любой элемент матрицы $\Phi$ является мероморфной дифференциальной формой $\omega \in \Omega^1_S(\log D)$. Зафиксируем *неособую* точку $x \in D$. Можно выбрать окрестность $U$ точки $x$ в $S$ и локальную систему координат таким образом, что локальное уравнение $D$ в $x \in U$ станет таким: $z_1 = 0$. Дифференциальная форма $\omega$ преобразуется в форму $\widetilde{\omega}$ с логарифмическими полюсами вдоль гиперплоскости $z_1 = 0$ в окрестности $U$ точки $x \in S$. Нетрудно понять, что

$$\widetilde{\omega} \in \mathcal{O}_U\langle dz_1/z_1\rangle = \Omega^1_S(\log D)|_U.$$

По определению, любое логарифмическое векторное поле $\eta$ касается гиперповерхности $D$ в ее неособых точках, т.е. $\eta = g(z)z_1\partial/\partial z_1$, где $g(z)$ голоморфна в $U$. Из невырожденности двойственности (1.1) следует, что $\widetilde{\omega} \in \Omega^1_S(\log D)|_U$ обладает искомым представлением:

$$\widetilde{\omega} = g_1(z)\frac{dz_1}{z_1} + \sum_{i=2}^{m} g_i(z)dz_i.$$

Следовательно, полная матрица коэффициентов преобразуется аналогично:

$$\widetilde{\Phi} = B_1(z)\frac{dz_1}{z_1} + \sum_{i=2}^{m} B_i(z)dz_i,$$

т.е. рассматриваемая система обладает регулярными особенностями вдоль гиперповерхности $D$ в смысле определения (3.1). Обратное доказывается аналогично. Действительно, в локальной системе координат элементы матрицы $\Phi$ имеют представление вида (3.1). Так как спаривание (1.1) совершенно, существуют векторное поле $\eta$ и функция $g$, голоморфные в $S \setminus \operatorname{Sing} D$ и такие, что

$$\eta(h) = g \cdot h.$$

Поскольку $D$ приведена, коразмерность аналитического подмножества $\operatorname{Sing} D$ в $S$ равна по крайней мере двум. А потому все коэффициенты векторного поля $\eta$ и функция $g$, равно как последнее тождество, могут быть продолжены голоморфным образом на все $S$. Таким образом, $\eta \in \operatorname{Der}_S(\log D)$ и, снова ввиду совершенной двойственности, $\eta$ определяет *логарифмическую* дифференциальную 1-форму $\omega \in \Omega^1_S(\log D)$, т.е. соответствующий элемент матрицы коэффициентов $\Phi$.

**Замечание 4.** Как обычно, мы определяем регулярные особенности для класса мероморфно эквивалентных когерентных пучков на $S$ (ср. [15, 23]), так что соответствующие системы дифференциальных уравнений рассматриваются с точностью до мероморфной замены независимых переменных. Более того, с этой точки зрения понятия системы с регулярными особенностями и с логарифмическими полюсами эквивалентны. Этот факт доказывается с помощью редукции общего случая к случаю дивизора с нормальными пересечениями. Следует отметить, что в работе [23] К. Саито ввел несколько отличное от предыдущего понятие регулярной особенности. В его терминологии система с регулярными особенностями вдоль дивизора $D$ обладает логарифмическими полюсами вдоль $D$. При этом обратное неверно по крайней мере в случае системы Пикара — Фукса, которая реализует связность Гаусса — Манина, ассоциированную с плоским семейством изолированных особенностей.

## 4. Свободные дивизоры Саито

В следующем разделе дано описание метода, с помощью которого условие интегрируемости фуксовой системы (2.1) можно представить в весьма удобной и наглядной форме, если $D$ — так называемый свободный дивизор, или свободный дивизор Саито (см. [14]), т.е. $\Omega^1_S(\log D)$ — локально *свободный* $\mathcal{O}_S$-модуль ранга $m$. Сначала напомним основные свойства таких дивизоров. Ввиду двойственности (5.1), модуль ростков логарифмических векторных полей $\operatorname{Der}_S(\log D)$ также свободен, и наоборот. В этом случае $\Omega^p_S(\log D) = \bigwedge^p \Omega^1_S(\log D)$, $p \geqslant 1$. Следующее утверждение принадлежит К. Саито [21].

**Предложение 4.1.** *Модуль логарифмических векторных полей* $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ *— свободный* $\mathcal{O}_{S,0}$*-модуль тогда и только тогда, когда существует* $m$ *ростков векторных полей* $V^1,\dots,V^m \in \mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ *таких, что детерминант квадратной* $m$*-матрицы* $\mathcal{V} = \|v_{ij}\|$*, элементы которой — коэффициенты полей* $V^i$*,* $i = 1,\dots,m$*, равен* $\alpha h$*, где* $\alpha$ *— обратимый росток. В этом случае множество векторных полей* $V^1,\dots,V^m$ *образует базис свободного* $\mathcal{O}_{S,0}$*-модуля* $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$.

Например, $\mathrm{Der}_S(\log D)$, равно как и $\Omega^1_S(\log D)$, локально свободен, если $D$ — дивизор со *строго* нормальными пересечениями, т.е. определяющее уравнение $D$ может быть записано как $h = z_1\cdots z_k = 0,\ k \leqslant m$. Дискриминант минимальной версальной деформации изолированной особенности гиперповерхности или полного пересечения — также свободный дивизор Саито (см. [21]).

Обозначим алгебраическое дополнение элемента $v_{ij}$ матрицы $\mathcal{V}$ через $\Upsilon_{ij}$ и рассмотрим голоморфные дифференциальные 1-формы

$$\vartheta_i = \sum_{j=1}^{m} \Upsilon_{ij} dz_j, \quad i = 1,\dots,m.$$

Пусть $\Delta = \det(\mathcal{V})$. Тогда элементы

$$\omega_i = \frac{\vartheta_i}{\Delta}, \quad i = 1,\dots,m,$$

образуют базис свободного $\mathcal{O}_S$-модуля $\Omega^1_S(\log D)$. Нетрудно видеть, что два базиса $V^1,\dots,V^m$ и $\omega_1,\dots,\omega_m$ двойственны относительно спаривания (5.1). В частности, получаем $\iota_{V^j}(\omega_i) = \delta^j_i$ для всех $i,j = 1,\dots,m$, где внутреннее умножение (стягивание) вдоль векторных полей $V$ обозначается через $\iota_V$. Следуя работе [1], немного изменив обозначения, приведем простейшие свойства дуальных базисов:

1) $df = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial z_i}\, dz_i = \sum\limits_{i=1}^{m} V^i(f)\,\omega_i$, если $f \in \mathcal{O}_{S,0}$;

2) $\iota_{V^i}(\vartheta_i) = \det(\mathcal{V}) = \Delta = \alpha h$, $\alpha \in \mathcal{O}^*_{S,0}$, $\iota_{V^i}(\vartheta_j) = 0$, $i \neq j$;

3) для произвольного упорядоченного $p$-набора $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant m$ из множества целых чисел $\{1,\dots,m\}$ справедливы следующие тождества:

$$\iota_{V^{i_1}} \ldots \iota_{V^{i_p}} \left(\frac{1}{\Delta} dz\right) = (-1)^{i_1+\ldots+i_p+p} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_p} \wedge \ldots \wedge \omega_m,$$

где $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m$, и символом $\widehat{\ }$ помечены пропущенные элементы. Для того чтобы доказать свойство 3), заметим, что если $\mathcal{V}'$ — *обратная* матрица к $\mathcal{V}$, то $\det(\mathcal{V}') = \det(\mathcal{V})^{m-1}$, так что $\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_m = \Delta^{m-1}(dz)$. Остается последовательно применить стягивания $\iota_{V^i}$ к обеим частям этого тождества. В заключение этого раздела выпишем полные дифференциалы базисных логарифмических дифференциальных форм в явном виде (см. [11]). Сначала заметим, что множество $V^1,\dots,V^m \in \mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ — это *инволютивная* система векторных полей с коммутационными соотношениями $[V^i, V^j] = \sum_{k=1}^{m} c^{ij}_k(z) V^k$, где $c^{ij}_k \in \mathcal{O}_{S,0}$ — «структурные константы» алгебры Ли $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ относительно этого базиса.

**Предложение 4.2** (см. [11])**.** *Пусть* $D$ *— свободный дивизор,* $\{\omega_1,\dots,\omega_m\}$ *и* $\{V^1,\dots,V^m\}$ *— система дуальных базисов свободных* $\mathcal{O}_S$*-модулей логарифмических дифференциальных форм* $\Omega^1_S(\log D)$ *и логарифмических векторных полей* $\mathrm{Der}_S(\log D)$*, соответственно. Тогда*

$$(-1)^{(\mathcal{M}+j+1)} d\omega_j = \frac{1}{2(m-3)!} \sum_k \sum_i \sigma(i_1,\dots,i_{m-1}) c^{i_1 i_2}_k \iota_{V^k} \iota_{V^{i_3}} \ldots \iota_{V^{i_{m-1}}} \left(\frac{1}{\Delta} dz\right) +$$
$$+ \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \sum_i \sigma(i_1,\dots,i_{m-1}) \mathcal{L}_{V^{i_{m-1}}} \iota_{V^{i_1}} \ldots \iota_{V^{i_{m-2}}} \left(\frac{1}{\Delta} dz\right),$$

*где* $\mathcal{M} = \frac{1}{2}m(m-1)$, *а все суммирования производятся по всевозможным подмножествам вида* $(i_1, \dots, i_{m-1}) \in \{1, \dots, \widehat{j}, \dots, m\}$ *и*

$$\mathcal{L}_V = \operatorname{Div}(V) - \frac{1}{\Delta}V(\Delta), \quad V = \sum_{k=1}^{m} v_k \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad \operatorname{Div}(V) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial z_k}.$$

**Следствие 4.3.** *В условиях Предложения* 4.2 *положим* $m = 3$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= -c_1^{23}\omega_2 \wedge \omega_3 + c_2^{23}\omega_1 \wedge \omega_3 - c_3^{23}\omega_1 \wedge \omega_2 + \mathcal{L}_{V^3}\omega_1 \wedge \omega_3 - \mathcal{L}_{V^2}\omega_1 \wedge \omega_2,\\
d\omega_2 &= c_1^{13}\omega_2 \wedge \omega_3 - c_2^{13}\omega_1 \wedge \omega_3 + c_3^{13}\omega_1 \wedge \omega_2 - \mathcal{L}_{V^3}\omega_2 \wedge \omega_3 + \mathcal{L}_{V^1}\omega_1 \wedge \omega_2,\\
d\omega_3 &= -c_1^{12}\omega_2 \wedge \omega_3 + c_2^{12}\omega_1 \wedge \omega_3 - c_3^{12}\omega_1 \wedge \omega_2 + \mathcal{L}_{V^2}\omega_2 \wedge \omega_3 - \mathcal{L}_{V^1}\omega_1 \wedge \omega_3.
\end{aligned}$$

## 5. Условие интегрируемости и коммутационные соотношения

Обсудим теперь задачу вычисления условий интегрируемости фуксовой системы (2.1) и представления их в терминах матриц коэффициентов $A_i$, $i = 1, \dots, \ell$. Сначала рассмотрим специальный случай системы (2.4), которую изучали Жерар и Левель и их последователи. А именно, предположим, что $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, и все дивизоры $D_i$ — *неособые* гиперповерхности. Как уже отмечалось ранее, пользуясь результатами [24], можно предполагать, что матрицы коэффициентов $A_i$, $i = 1, \dots, n$, состоят из констант. Допустим еще, что дивизоры $D_i$ находятся в общем положении в смысле работы [16]. Это означает, что для каждой пары $i$, $j$ найдутся точки $x \in D_i \cap D_j$ такие, что $x \notin D_k$ для всех $k \neq i, j$. Хорошо известно, что в этом случае условие интегрируемости (2.3) эквивалентно перестановочности матриц $A_i$, $i = 1, \dots, n$, т.е., эти матрицы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям [24]:

$$[A_i, A_j] = 0, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n. \tag{5.1}$$

В частности, это верно для дивизоров $D_i$ с *нормальными пересечениями*. Можно доказать, что похожие соотношения выполняются и без предположения о том, что $D_i$ находятся в общем положении (см. [3]). В общем же случае описание коммутационных соотношений — весьма нетривиальная и интересная задача.

Ниже мы покажем, что теория логарифмических форм дает довольно эффективные средства для вычисления коммутационных соотношений для систем (2.4), равно как и в случае обобщенных фуксовых систем (2.1). В следующих двух примерах $m = 2$ и дивизор $D$ — плоская кривая, так что $D$ — *свободный* дивизор [21]. Сначала рассмотрим случай, когда $D$ — *неприводимая* кривая. Пусть $x = z_1$, $y = z_2$ и $h = 27x^2 + 4y^3 = 0$. Таким образом, $D$ — «острие» на плоскости, совпадающее с дискриминантом минимальной версальной деформации особенности типа $A_2$. Рассмотрим обобщенную фуксову систему (2.1)

$$d\mathbf{I} = \nabla\mathbf{I}, \qquad \nabla = A_0\frac{dh}{h} + A_1\frac{\vartheta}{h} + A_2\frac{y\vartheta}{h}, \tag{5.2}$$

где дифференциальная форма $\vartheta = 2ydx - 3xdy$ соответствует элементу подмодуля кручения $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$. Допустим еще, что все элементы матриц $A_i$, $i = 0, 1, 2$, — *комплексные числа*. Положим $\omega_1 = dh/h$, $\omega_2 = \vartheta/h$. Можно проверить, что логарифмические дифференциальные формы $\omega_1$ и $\omega_2$ — *свободные* образующие $\Omega^1_S(\log D)$, а векторные поля

$$V^1 = \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad V^2 = -2y^2\frac{\partial}{\partial x} + 9x\frac{\partial}{\partial y}$$

— свободные образующие $\operatorname{Der}_S(\log D)$, причем $[V^1, V^2] = V^2$. Нетрудно проверить, что $dy = \frac{1}{3}y\omega_1 - 9x\omega_2$ и имеются тождества (ср. следствие 4.3 для случая $m = 3$)

$$d\omega_1 = 0,\ d\omega_2 = -\frac{1}{6}\omega_1 \wedge \omega_2,\ \omega_1 \wedge \omega_2 = -6\,\frac{dx \wedge dy}{h}.$$

Подставляя это в (2.3) и пользуясь тем, что модуль

$$\Omega^2_S(\log D) = \bigwedge^2 \Omega^1_S(\log D)$$

свободен, получаем с помощью несложных вычислений следующие коммутационные соотношения, как непосредственное следствие условия интегрируемости (2.3):

$$-\frac{1}{6}A_1 + [A_0,\, A_1] = 0,\ \frac{1}{6}A_2 + [A_0,\, A_2] = 0.$$

Нетрудно описать и все системы вида (5.2). Так, пользуясь естественной градуировкой на $\mathcal{O}_S$, $\Omega^1_S(\log D)$ и $\Omega^1_D$, индуцированной весами $x$ и $y$ (равными 3 и 2, соответственно), можно показать, что матрица $\nabla$ выглядит следующим образом:

$$\nabla = \begin{pmatrix} g\omega_1 & a\omega_2 \\ by\omega_2 & c\omega_1 \end{pmatrix},$$

где $a$, $b$, $c$, $g$ — $\mathbb{C}$-значные параметры. При этом условие интегрируемости $d\nabla = \nabla \wedge \nabla$ влечет $c = g + \frac{1}{6}$. В результате получаем 3-параметрическое семейство, зависящее от $a$, $b$ и $g$, которое определяет логарифмическую связность (см. подробности в работе [11]). Характеристический полином соответствующей системы дифференциальных уравнений равен

$$\lambda^2 - 2\left(g + \frac{1}{12}\right)\lambda + \left(\frac{ab}{4\cdot 27} + g\left(g + \frac{1}{6}\right)\right).$$

С другой стороны, можно рассмотреть *версальные интегралы* особенности типа $A_2$:

$$I_0(s) = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3 + s_1 z + s_0}}, \qquad I_1(s) = \int \frac{z dz}{\sqrt{z^3 + s_1 z + s_0}},$$

где в качестве контура интегрирования выбран класс циклов в группе гомологий эллиптической кривой, заданной уравнением $w^2 = z^3 + s_1 z + s_0$ (см. [7]). Пользуясь представлением из [7], нетрудно проверить непосредственными вычислениями, что систему Гаусса — Манина для версальных интегралов можно представить в виде (2.1), где

$$\Theta = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{3}\right)\frac{dh}{h} & -3(3q-1)\frac{\vartheta}{h} \\ (3q-2)s_1\frac{\vartheta}{h} & \left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{6}\right)\frac{dh}{h} \end{pmatrix},$$

а $q$ — это $\mathbb{C}$-значный параметр, $\vartheta = 2s_1 ds_0 - 3s_0 ds_1$, так что $\omega = \vartheta/h$ — *логарифмическая* дифференциальная форма и $d\Theta = \Theta \wedge \Theta$. Здесь характеристический полином равен $\lambda(\lambda + q - \frac{1}{2})$. Полагая $q = 1/2$, получаем представление из [21]:

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12}\frac{dh}{h} & -\frac{3}{2}\frac{\vartheta}{h} \\ -\frac{1}{2}s_1\frac{\vartheta}{h} & \frac{1}{12}\frac{dh}{h} \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система Пикара — Фукса сводится к уравнению второго порядка для интеграла $u = I_0$ и является не чем иным, как классическим уравнением Лежандра:

$$\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)u'' + 2tu' + \frac{5}{36}u = 0, \tag{5.3}$$

где $t = cs_0 s_1^{-3/2}$, $c \in \mathbb{C}$ — константа.

В действительности, уравнение (5.3) является частным случаем гипергеометрического дифференциального уравнения. Более того, это *фуксово* уравнение с 3 особыми точками $a_1 = 1/2$, $a_2 = -1/2$, $a_3 = \infty$ на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ (ср. введение). Выполняя подстановку $t := -t + 1/2$, можно

доказать с помощью формулы (7.3.6) из [13], что соответствующая *фуксова* система представляется в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{36} & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{t-1/2} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{t+1/2} \right) \mathbf{x},$$

где через $\mathbf{x}$ обозначается вектор-столбец ${}^{\mathsf{T}}(x_1, x_2)$ неизвестных функций. Нетрудно показать, что характеристический полином уравнения (5.3) имеет кратный корень: $\lambda^2 = 0$. Однако, все связности $\nabla$ описанного выше 3-параметрического семейства, у которых $ab = 3/4$, имеют характеристические полиномы того же сорта. Из общей теории вытекает (ср. [4]), что все соответствующие фуксовы системы или уравнения сводятся к уравнению (5.3). На самом деле, можно выписать в явном виде все фуксовы системы типа Пфаффа на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, особенности которых являются «острием» (см. подробности в [19]).

Таким же способом, пользуясь элементарными свойствами логарифмических дифференциальных форм, можно получить коммутационные соотношения для обобщенных фуксовых систем (2.1), ассоциированных с *приведенным свободным* дивизором Саито. Например, пусть $D$ состоит из двух неприводимых компонент

$$h = x(x^{n-1} - y^k), \quad h_1 = x, \quad h_2 = (x^{n-1} - y^k),$$

где $n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ и $D = D_1 \cup D_2 \subset S = \mathbb{C}^2$. Тогда свободный $\mathcal{O}_S$-модуль $\Omega^1_S(\log D)$ порождается двумя логарифмическими дифференциальными 1-формами $\omega_1 = dh/h$, $\omega_2 = \vartheta/h$, где

$$\vartheta = -\frac{n-1}{kn} y dx + \frac{1}{n} x dy.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{dh_1}{h_1} = \frac{1}{n}\omega_1 + k y^{k-1}\omega_2, \quad \frac{dh_2}{h_2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\omega_1 - k y^{k-1}\omega_2.$$

Следовательно, система (2.4) принимает вид

$$d\mathbf{I} = \left( A_1 \frac{dh_1}{h_1} + A_2 \frac{dh_2}{h_2} \right) \mathbf{I};$$

она эквивалентна следующей обобщенной фуксовой системе:

$$d\,\mathbf{I} = \left( \left( \frac{1}{n} A_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_2 \right) \frac{dh}{h} + k(A_1 - A_2) \frac{y^{k-1}\vartheta}{h} \right) \mathbf{I}. \tag{5.4}$$

Как и в первом примере, нетрудно проверить, что $dy = \frac{n-1}{nk} y\omega_1 + (nx^{n-1} - y^k)\omega_2$, и имеются тождества

$$d\omega_1 = 0, \; d\omega_2 = \frac{1}{nk}(n-1)(1-k)\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{1}{nk}(n-1)(1-k)\frac{dx \wedge dy}{h},$$
$$d(y^{k-1}\omega_2) = (k-1)y^{k-2} dy \wedge \omega_2 + y^{k-1} d\omega_2 \equiv 0.$$

Снова, ради простоты, допустим, что все элементы матриц $A_1$ и $A_2$ — константы, т.е. $dA_1 = dA_2 = 0$. Пользуясь тем, что модуль $\Omega^2_S(\log D)$ свободен, получаем, что стандартное условие интегрируемости эквивалентно следующему коммутационному соотношению:

$$0 = \left[ \frac{1}{n} A_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_2, k(A_1 - A_2) \right] = -k[A_1, A_2] = 0.$$

**Замечание 5.** Другой подход к вычислению коммутационных соотношений для систем (2.4) был разработан в [5, 6] и в ряде последующих статей. Согласно ему, при некоторых дополнительных предположениях на дивизор $D$ коммутационные соотношения между матрицами коэффициентов $A_i$ системы (2.4) отражают *топологические* свойства фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{P}^m \setminus D)$ дополнения объединения $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ и наоборот. Этот метод применим как в случае когда фундаментальная группа является абелевой, так и в случае когда все соотношения между образующими фундаментальной группы выражаются в терминах коммутаторов ее образующих. В последнем примере фундаментальная группа дополнения *не абелева* (ср., напр., [21]). Однако, в случае $n = 2$

она порождается двумя элементами $g_1$ и $g_2$, соответствующими неприводимым компонентам $D_1$ и $D_2$, соответственно, с базисным соотношением $(g_1g_2)^k = (g_2g_1)^k$. Так что в этом случае применим и упомянутый выше подход. Для полноты следует отметить, что К. Саито еще в 1976 году высказал гипотезу (см. [21]) о том, что существует некоторый тип «двойственности» между модулем логарифмических дифференциальных 1-форм $\Omega^1_S(\log D)$ и локальной фундаментальной группой $\pi_1(S \setminus D)$ дополнения к дивизору $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

В заключение опишем кратко еще один важный случай, когда система (2.1) корректно определена, и описанный выше метод позволяет вычислить все коммутационные соотношения. Напомним, что гиперповерхность $D$ называется нормальной, если коразмерность подмногообразия ее особенностей не меньше двух.

**Предложение 5.1** (см. [21], [22, 2.9]). *Предположим, что $D_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — нормальные гиперповерхности, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *$D_i \subset S$ и $D_j \subset S$ пересекаются трансверсально вне аналитического подмножества $D_{ij} \subset D_i \cup D_j$, коразмерность которого не меньше двух,*

2) $\dim_{\mathbb{C}} D_i \cap D_j \cap D_k \leqslant m-3$ *для всех* $i \neq j \neq k \neq i$, $i,j,k = 1,\dots,n$.

*Тогда $\mathcal{O}_S$-модуль $\Omega^1_S(\log D)$ порождается следующим набором логарифмических дифференциальных 1-форм:*

$$\frac{dh_1}{h_1}, \dots, \frac{dh_n}{h_n}. \tag{5.5}$$

**Замечание 6.** При этих условиях $\mathcal{O}_D$-модуль $\operatorname{Tors}\Omega^1_D$ обладает системой *образующих*, состоящей из $n-1$ элемента:

$$h\frac{dh_1}{h_1}, \dots, h\widehat{\frac{dh_i}{h_i}}, \dots, h\frac{dh_n}{h_n}.$$

Здесь одна из форм $hdh_i/h_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, исключается (ср. замечание 2). Таким образом, систему (2.4) можно рассматривать как специальный случай (2.1). В связи с замечанием 5 отметим также, что фундаментальная группа дополнения для таких дивизоров в проективном пространстве является *абелевой* [18, 3.1.2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Александров А. Г.* О комплексе де Рама неизолированных особенностей // Функц. анал. и его прил. — 1988. — *22*, № 2. — С. 59–60.
2. *Болибрух А. А.* О фундаментальной матрице системы Пфаффа типа Фукса // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — *41*, № 5. — С. 1084–1109.
3. *Василевич Н. Д., Громак В. И.* Интегрируемость комплексных пфаффовых уравнений // Дифференц. уравнения — 1981. — *17*, № 4. — С. 735–737.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
5. *Голубева В. А.* Фуксовы системы дифференциальных уравнений на комплексном проективном пространстве // Дифференц. уравнения. — 1977. — *13*, № 9. — С. 1570–1580.
6. *Лексин В. П.* Мероморфные системы Пфаффа на комплексных проективных пространствах // Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 201–217.
7. *Паламодов В. П.* Деформации комплексных пространств // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1985. — *10*. — С. 123–221.
8. *Aleksandrov A. G.* Nonisolated hypersurface singularities. — Theory of singularities and its applications. Adv. Sov. Math. (Arnold V.I., ed.). — 1990. — *1*. — С. 211–246.
9. *Aleksandrov A. G.* Generalized Picard — Fuchs systems in several complex variables // J. Shanghai Jiaotong Univ. — 1998. — *E-3*, Sup. (I). — С. 1–9.
10. *Aleksandrov A. G.* Fuchsian systems of differential equations with logarithmic singularities. — Proc. Second ISAAC Congress, *2* (H.Begehr et al., eds.). — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. — С. 1285–1299.
11. *Aleksandrov A. G.* Moduli of logarithmic connections along a free divisor // Topology and Geometry, Contemporary Mathematics. — 2002. — *314*. — С. 1–23.

12. *Aleksandrov A. G., Tanabé S.* Gauss — Manin connexions, logarithmic forms and hypergeometric functions. — In: Geometry from the Pacific Rim (edited by J.Berrick et al.). Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1997. — C. 1–21.
13. *Anosov D. V., Bolibruch A. A.* The Riemann — Hilbert problem. — Aspects of Mathematics. — *E22*. — Braunschweig — Wiesbaden: Vieweg, 1994.
14. *Cartier P.* Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire // Bourbaki Seminar, Vol. 1980/81, pp. 1–22. — Lect. Notes Math. — 1981. — *901*.
15. *Deligne P.* Equations différentieles à points singuliers réguliers // Lect. Notes Math. — 1970. — *163*.
16. *Gérard R., Levelt A. H. M.* Étude d'une classe particulière de système de Pfaff du type de Fuchs sur l'espace projectif complexe // J. Math. Pures Appl. — 1972. — *51*. — C. 189–217.
17. *Helminck G. F.* Integrable deformations of meromorphic equations on $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. — Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics // Contemp. Math. — 1992. — *134*. — C. 119–128.
18. *Lê D. T., Saito K.* The local $\Pi_1$ of the complement of a hypersurface with normal crossings in codimension 1 is abelian // Ark. für Mat. — 1984. — *22*, № 1. — C. 1–24.
19. *Namba M.* A class of differential equations of Fuchsian type // Tôhoku Math. J. — 1987. — *39*. — C. 391–406.
20. *Poly J.-B.* Sur un théorème de J. Leray en théorie des résidus // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. A-B. — 1972. — *274*. — C. A171–A174.
21. *Saito K.* On the uniformization of complements of discriminant loci. — Hyperfunctions and Linear partial differential equations. RIMS Kōkyūroku. — 1977. — *287*. — C. 117–137.
22. *Saito K.* Theory of logarithmic differential forms // J. Fac. sci. Univ. Tokyo. Ser. IA. — 1980. — *27*, № 2. — C. 265–291.
23. *Saito K.* Regularity of Gauss — Manin connection of flat family of isolated singularities. — Introduction à la théorie des singularités, I. Singularités et monodromie. Travaux en Cours. — Paris: Hermann, 1988. — *36*. — C. 135–149.
24. *Takano K.* A reduction theorem for a linear Pfaffian system with regular singular points // Arch. Math. — 1978. — *31*. — C. 310–316.
25. *Yoshida M., Takano K.* On a linear system of Pfaffian equations with regular singular points // Funkcial. Ekvac. — 1976. — *19*, № 2. — C. 175–189.

А. Г. Александров
Институт проблем управления РАН Профсоюзная ул. 65, ГСП-7, Москва, 117997
E-mail: alexandr@ipu.rssi.ru

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 14–29

УДК 515.173.4

# О ЧИСЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}^2$

© 2004 г. **Т. АЛИАШВИЛИ**

Аннотация. Рассматриваются комплексные точки двумерных поверхностей. Сначала кратко обсуждаются основные результаты о комплексных точках гладкой поверхности в $\mathbb{C}^2$. В случае алгебраической поверхности получена формула, которая выражает число комплексных точек как локальную степень явно заданного полиномиального эндоморфизма. С помощью этой формулы получены оценки числа комплексных точек и индекса Маслова в терминах алгебраических степеней заданных полиномов. Особое внимание уделяется графикам плоских эндоморфизмов. Получены также некоторые оценки для среднего числа комплексных точек для случайных эндоморфизмов плоскости.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . . 14
1. Алгебраические формулы для топологических инвариантов . . . . . 15
2. Комплексные точки двумерных поверхностей . . . . . 17
3. Комплексные точки и изолированные особенности . . . . . 20
4. Комплексные точки эндоморфизмов плоскости . . . . . 23
5. Комплексные точки случайных поверхностей . . . . . 25
Список литературы . . . . . 28

## Введение

Комплексные точки гладкой двумерной поверхности в $\mathbb{C}^2$ играют важную роль в некоторых задачах комплексного анализа [13, 18] и симплектической геометрии [21]. Например, существование комплексных точек иногда позволяет построить так называемые *подклеенные аналитические диски* с границами в заданной поверхности [13, 28]. Соответственно, комплексные точки связаны с *задачей Бишопа* о существовании аналитических дисков, подклеенных к графику произвольной гладкой комплексной функции на плоскости [13]. Несмотря на значительный прогресс, эта проблема пока еще не решена полностью, и комплексные точки плоскости эндоморфизмов вызывают постоянный интерес [28, 29]. Кроме того, комплексные точки ростков поверхностей возникают в некоторых задачах теории особенностей [2, 29].

Остается еще несколько открытых вопросов, связанных с комплексными точками на компактных поверхностях [18]. Следует заметить, что в случае компактных поверхностей эта задача имеет интересные топологические аспекты. В частности, хорошо известно, что геометрия комплексных точек комплексной поверхности $X$ тесно связана с ее эйлеровой характеристикой $\chi(X)$ [15, 18].

Недавно выяснилось, что в случае, когда поверхность задана полиномиальными уравнениями, некоторые из вышеупомянутых задач поддаются решению с использованием *сигнатурных формул для топологических инвариантов* [25]. Например, такой подход весьма эффективен в случае, когда поверхность представляет собой график *полиномиального эндоморфизма плоскости* [29]. Так же можно изучить случай полного пересечения, заданного двумя многочленами на $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Более точно, в таких ситуациях можно найти количество комплексных точек в терминах локальной степени явно заданных полиномиальных эндоморфизмов. Цель настоящей работы — описать соответствующие ситуации и привести некоторые результаты в этом направлении.

Сначала мы напоминаем нужные определения и технические средства. Во втором параграфе мы приводим основную формулу для подсчета количества комплексных точек на алгебраической поверхности в $\mathbb{C}^2$ (теорема 2.1). В третьем параграфе получены аналогичные результаты для ростка поверхности с изолированной особой точкой. Мы также получаем некоторые оценки для числа

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

комплексных точек и индекса Маслова в случае графика эндоморфизма плоскости. В заключение мы приводим некоторые результаты о среднем числе комплексных точек случайных плоских эндоморфизмов.

## 1. Алгебраические формулы для топологических инвариантов

Поскольку основной целью данной работы является нахождение явных формул для числа комплексных точек, мы начнем с напоминания нужных результатов о числе вещественных корней полиномиальных систем уравнений. При этом мы следуем работе [25] с небольшими модификациями, приспособленными к нашему контексту.

Прежде чем дать точную формулировку результата, необходимо ввести некоторые обозначения. Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, определенное в окрестности $U$ начала координат 0 в $\mathbb{R}^n$, причем $f(0) = 0$. В таком случае мы говорим, что начало координат является нулем отображения $f$. Следуя работе [17], мы можем рассматривать аналогичным образом и гладкий росток отображения $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$.

Пусть $R[n]$ — алгебра формальных степенных рядов от $n$ неизвестных с вещественными коэффициентами. Обозначим через $A$ локальную алгебру отображения $f$ в начале координат, т.е. $A = \mathbb{R}[n]/(\tilde{f})$, где $(\tilde{f})$ является идеалом, порожденным формальными разложениями Тейлора функций $f_j$ в начале координат.

В этом параграфе мы всегда предполагаем, что алгебра $A$ является конечномерным вещественным векторным пространством, и в таком случае говорим, что $f$ имеет конечную кратность в начале координат (на языке ростков $f$ называется конечным ростком [17]). Таким образом, мы предполагаем, что $A$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{R}$. Обозначим через $j$ класс якобиана отображения $f$ в $A$.

Известно, что главный идеал $(j)$, порожденный $j$ в $A$, состоит из вещественных кратных $(j)$, т.е. $(j) = \mathbb{R}j$. Действительно, поскольку кольцо $A$ является локальным, мы можем записать $A = M_A \oplus \mathbb{R}1$. Согласно сказанному, $M_A j = 0$. Отсюда следует, что $(j) = Aj = (M_A \oplus \mathbb{R}1)j = \mathbb{R}j$. Из сказанного вытекает, что для каждого $a \in (j)$ имеется единственное такое $r \in \mathbb{R}$, что $a = rj$. В этом случае будем писать $r = \frac{a}{j}$.

Для идеала $I$ конечномерной алгебры $A$ будем писать $I \lhd A$ и через $I^2$ обозначать его квадрат, то есть идеал, порожденный всеми попарными произведениями элементов из $I$. Обозначим через $N(A)$ множество всех идеалов в $A$, имеющих нулевые квадраты, т.е.

$$N(A) = \{I \lhd A : I^2 = 0\}.$$

Для любого подмножества $X \subset A$ положим $\operatorname{ann} X = \{a \in A : aX = 0\}$. Очевидно, что при $I \in N(A)$ имеем $I \subset \operatorname{ann} I$.

Наконец, отметим, что при условии конечной кратности начало координат есть изолированный нуль отображения $f$ или, другими словами, 0 является изолированным в $f^{-1}(0)$. Как известно, в таком случае мы можем определить локальную топологическую степень $\deg_0 f$ [25].

**Теорема 1.1** (см. [17, 25]). *Пусть $f$ — гладкое отображение конечной кратности в начале координат. Тогда для произвольного максимального элемента $N$ множества $N(A)$ имеем $(\operatorname{ann} N)^2 \subset (j)$. Кроме того, если $\operatorname{ann} N = N$, то $\deg_0 f = 0$, а если $N \subset \operatorname{ann} N$, то для произвольного элемента $a \in \operatorname{ann} N - N$ имеем*

$$\deg_0 f = \operatorname{sgn}\left(\frac{a^2}{j}\right)(\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} N - \dim_{\mathbb{R}} N). \tag{1.1}$$

Эта формула играет фундаментальную роль во многих вопросах, связанных с вычислением различных характеристик полиномиальных отображений и вещественных алгебраических множеств. Например, с ее помощью можно эффективно вычислить глобальную степень собственного полиномиального эндоморфизма, что нам потребуется в четвертом параграфе. Следует особо отметить, что все используемые в ней алгебраические конструкции можно эффективно реализовать в каждом конкретном случае.

Как показано в [14,25], эйлерова характеристика компактного алгебраического множества может быть явно выражена через локальную степень вспомогательного полиномиального отображения. Мы приведем соответствующую формулу из [14].

Пусть $X$ — аффинное алгебраическое подмножество множества $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что каждое такое подмножество может быть представлено в виде гиперповерхности $X = \{F = 0\}$ с $F = f_1^2 + \cdots + f_k^2$, где $f_j$ — полиномы, определяющие $X$. Для конечного множества $X$ эйлерова характеристика сводится к числу геометрически различных точек данного множества.

В наших рассмотрениях используется обычное понятие эйлеровой характеристики $\chi(X)$, определенной как альтернированная (знакопеременная) сумма рангов гомологических групп (чисел Бетти) рассматриваемого топологического пространства $X$ [35]. Нам достаточно рассматривать гомологии с целыми коэффициентами. Как обычно, через $\deg_p f$ обозначается локальная степень эндоморфизма $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $p \in f^{-1}(0)$, которая является изолированным прообразом начала координат.

**Теорема 1.2** (см. [14, 25]). *Пусть $f_1, \ldots, f_p \in \mathbb{R}_n$ — вещественные полиномы со степенями, не превышающими $d$. Допустим, что множество $X$ их вещественных общих нулей компактно. Положим*

$$h_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^{d+1} f_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right),$$

$$H = \sum_{i=1}^{p} h_i^2 - \sum_{k=0}^{n} x_k^{2d+4}.$$

*Тогда $H$ имеет алгебраически изолированную критическую точку в начале координат, и выполняется следующее равенство:*

$$\chi(X) = \big[(-1)^n - \deg_0(\operatorname{grad} H)\big]/2. \tag{1.2}$$

Заметим, что если множество $X$ конечно, то приведенная формула дает его мощность (количество содержащихся в нем точек). Ввиду возможности алгоритмического вычисления локальной степени, левая часть этой формулы также допускает эффективное вычисление, которое в конкретных примерах можно провести с помощью имеющихся компьютерных алгоритмов.

Существуют аналогичные формулы для числа точек данного множества, содержащихся в некотором полупространстве, то есть лежащих по одну сторону от заданной гиперплоскости. Это частный случай задачи о нахождении мощности заданного полуалгебраического множества, подробно изученной в [9,23,25]. Это позволит нам эффективно вычислить количество эллиптических комплексных точек плоского эндоморфизма.

Нам потребуются также оценки для степени отображения с фиксированными алгебраическими степенями компонент, полученные в [1,7,8]. Рассмотрим сначала случай однородного эндоморфизма. Такая ситуация возникает, например, в доказательстве неравенств Петровского — Олейник, предложенном В. И. Арнольдом [1]. Числа Петровского были введены в [1]. Немного более общее определение было предложено в [8]. Словосочетание «целая точка» означает, как обычно, точку целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

**Определение 1.1.** Для $n$-набора натуральных чисел $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ число Петровского $P_n(\mathbf{m})$ определяется как число всех целых точек $k = (k_1, \ldots, k_n)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant k_i \leqslant m_i - 1, \;\; i = 1, \ldots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - 1}{2}. \tag{1.3}$$

Следуя Арнольду [1], число $P_n(\mathbf{m})$ назовем $P$-числом типа $(n, \mathbf{m})$.

**Теорема 1.3** (см. [8]). *Пусть $F = (f_1, \ldots, f_n)$ — однородный эндоморфизм $\mathbb{R}^n$ типа $\mathbf{m}$. Тогда*

$$|\deg F| \leqslant P_n(\mathbf{m}). \tag{1.4}$$

А. Хованский установил справедливость и точность этой оценки в [8]. Нам потребуется также более общий результат для квазиоднородных полиномиальных эндоморфизмов, полученный в [25].

Предположим, что дан набор положительных рациональных чисел $w = (w_1, \dots, w_n)$, рассматриваемых как веса переменных $x_1, \dots, x_n$. Тогда $w$-степень монома $\prod x_i^{k_i}$ определяется как $\sum k_i w_i$, и полином $P \in \mathbb{R}_n$ называется квазиоднородным (qh) $w$-степени $k$, если $w$-степени всех мономов, входящих в $P$, равны $k$ [2]. Отображение $F$ называется квазиоднородным отображением $w$-степени $d = (d_1, \dots, d_m)$, если каждая из его компонент $f_i$ является квазиоднородным полиномом $w$-степени $d_i$ (см. [2]). Для краткости будем говорить, что $F$ имеет qh-тип $(w, d)$.

При $m = n$ имеем квазиоднородный эндоморфизм или квазиоднородное векторное поле. Отметим, что при изучении комплексных точек нам потребуется иметь дело именно с векторными полями, а не с эндоморфизмами, поэтому следующие утверждеия формулируются на языке векторных полей. Квазиоднородное векторное поле называется невырожденным, если полиномы $f_i$ не имеют общих нетривиальных нулей в $\mathbb{R}^n$.

**Определение 1.2.** $P$-число типа $(w, d)$ определяется как

$$P(n; w, d) = \operatorname{card}\left\{ k \in \mathbb{Z}^n,\ 0 \leqslant k_i \leqslant d_i - w_i \;\middle|\; \sum w_i k_i = \frac{1}{2}\sum (d_i - w_i) \right\}. \tag{1.5}$$

Здесь card обозначает число элементов конечного множества. Эти числа могут быть алгоритмически вычислены для любых конкретных значений $n, w, d$. Теперь мы можем сформулировать заключительный результат этого параграфа.

**Теорема 1.4.** *Пусть $F$ — невырожденное квазиоднородное векторное поле в $\mathbb{R}^n$ типа $(w, d)$. Тогда абсолютная величина его степени не превышает соответствующего $P$-числа*:

$$|\deg F| \leqslant P(n; w, d). \tag{1.6}$$

Очевидно, это дает также оценку локальной степени (индекса) $\operatorname{ind}_0 F$ поля $F$. Для целей третьего параграфа нужно немного обобщить эту теорему. Напомним, что векторное поле $G$ называется полуквазиоднородным (sqh) векторным полем типа $(w, d)$, если $g_j = f_j + h_j, j = 1, \dots, n$, где $f_j$ задают невырожденное квазиоднородное векторное поле типа $(w, d)$ и для каждого $j$ полином $h_j$ содержит только мономы $w$-степени большей, чем $d_j$ [2].

**Следствие 1.1.** *Для каждого полуквазиоднородного векторного поля $G$ типа $(w, d)$ на $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$|\operatorname{ind}_0 G| \leqslant P(n;\, w, d).$$

Это следует из того хорошо известного факта, что и локальная степень, и полином Пуанкаре такого sqh-поля $G$ — те же самые, что и у его невырожденной qh-части $f$ [19].

## 2. Комплексные точки двумерных поверхностей

В дальнейшем нам понадобятся обозначения и конструкции, касающиеся грассманиана $G = \mathrm{Gr}_+(2, 4)$ двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. Хорошо известно [20], что $G$ — компактное четырехмерное гладкое многообразие, гомеоморфное $S^2 \times S^2$. На самом деле, это многообразие можно вложить в $\mathbb{RP}^5$, используя так называемые *плюккеровы координаты* [20]. Мы существенно используем эти координаты и называем их стандартными координатами на $G$.

Для наших целей важно различать комплексные прямые и их антиподы — так называемые вполне вещественные плоскости в $\mathbb{C}^2$. Напомним, что плоскость $V \in G$ называется вполне вещественной, если и только если $V + \imath V = \mathbb{C}^2$. Мы будем обозначать через $G_{\mathbb{R}}$ подмножество таких вполне вещественных плоскостей в $G$.

Другой естественный объект — это подмножество комплексных прямых, снабженное естественной (внутренней комплексной) ориентацией, определенной умножением на $\imath$. Это множество, очевидно, гомеоморфно сфере Римана $\mathbb{CP}^1$. Мы будем обозначать его $\mathbb{CP}_+$, а через $\mathbb{CP}_-$ обозначим другой экземпляр сферы Римана, образованной всеми комплексными прямыми с противоположной ориентацией. Следовательно, совокупность $G_{\mathbb{C}}$ всех ориентированных комплексных прямых

гомеоморфна объединению двух дизъюнктных сфер $S^2$. Эти и все остальные подмногообразия в $G$ оснащены естественной ориентацией, происходящей из комплексной структуры в $\mathbb{C}^2$.

Пусть $X$ — гладкая двумерная поверхность в $\mathbb{C}^2$. Некоторые важные свойства этих объектов в $\mathbb{C}^2$ характеризуются локальным поведением в тех точках, где касательная плоскость представляет собой комплексную прямую [13]. В этой работе множество $X$ будет задано двумя алгебраическими уравнениями в $\mathbb{C}^2$, так что их можно ориентировать обычным путем, используя градиенты заданных функций. Тогда каждая касательная плоскость обладает ориентацией, индуцированной из $X$, и может рассматриваться как элемент из $G$. Если касательная плоскость является комплексной прямой, то мы можем сравнить ее ориентацию индуцированную из $X$ с естественной ориентацией, так что ее можно причислить либо к $\mathbb{CP}_+$, либо к $\mathbb{CP}_-$. Те же соображения применимы для любых гладких ориентированных поверхностей в $\mathbb{C}^2$.

**Определение 2.1.** Пусть $X$ — гладкая ориентируемая двумерная поверхность в $\mathbb{C}^2$. Точка $p \in X$ называется комплексной точкой множества $X$, если касательное пространство $T_pX$ представляет собой комплексную прямую в $\mathbb{C}^2$. Комплексная точка называется положительной, если $T_pX \in \mathbb{CP}_+$, и отрицательной в противном случае.

Множество всех комплексных точек обозначим через $\mathbb{C}(X)$. Если их число конечно, то мощность обозначим через $c(X)$. Известно, что если $X$ — поверхность общего положения, то множество комплексных точек конечно [18]. Наша основная цель — установить эффективные критерии для нахождения комплексных точек и методов вычисления $c(X)$. Для этого нам понадобится следующая интерпретация комплексных точек.

Рассмотрим отображение Гаусса $\Gamma : X \to G$. Тогда его образ представляет собой двумерную компактную поверхность в четырехмерном многообразии $G$. Очевидно, что точка $p$ является комплексной тогда и только тогда, когда $\Gamma(x) \in G_{\mathbb{C}}$. Таким образом, комплексные точки соответствуют пересечениям $\Gamma(X)$ с $G_{\mathbb{C}}$. Заметим, что последнее многообразие также будет двумерным, и можно определить локальный индекс пересечения этих двух подмногообразий в $G$ [20]. Назовем его *индексом* комплексной точки $p$.

В общем случае эти два подмногообразия пересекаются трансверсально, и тогда комплексная точка называется *трансверсальной*. Нетрудно проверить, что это эквивалентно тому, что индекс локального пересечения в этой точке равен $\pm 1$, и эта комплексная точка устойчива относительно малых возмущений $X$. Поэтому трансверсальные комплексные точки иногда называются *невырожденными* [29].

В общем случае, когда комплексные точки изолированы, но не обязательно трансверсальны, можно рассмотреть индекс пересечения $\Gamma(X)$ и $G_{\mathbb{C}}$ в $G$ (это возможно потому, что эти многообразия ориентированы). Это число будем называть *полным индексом* поверхности $X$. Обычно индекс пересечения можно вычислить как сумму локальных индексов пересечения. Для невырожденной поверхности $X$ все комплексные точки трансверсальны и потому в этом случае глобальный индекс — это в точности алгебраическое число комплексных точек [29]. Мы в основном заинтересованы случаем, когда $X$ — алгебраическая поверхность, заданная явными уравнениями. Обозначим через $\mathbb{R}_n$ алгебру вещественных полиномов от $n$ переменных, а через $\mathbb{R}_n^{d]}$ ($\mathbb{R}_n^{[d]}$) — подмножество полиномов с алгебраической степенью, не превосходящей $d$ (равной $d$). Пусть $f, g \in \mathbb{R}_4$ — два полинома от четырех неизвестных и $X = \{f = 0, g = 0\}$ — множество их общих нулей в $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$. Наша цель теперь — найти эффективные методы вычисления $c(X)$. В качестве первого шага мы получим явные уравнения, определяющие комплексные точки множества $X$ в $\mathbb{C}^2$ в терминах координат на $G$.

Напомним, что координаты на $G$ можно ввести следующим образом (эта конструкция восходит к Грассману [20]). Пусть $P \in G$ — двумерная плоскость. Выберем базис $(v_1, v_2)$ в $P$. Беря координаты этих векторов в качестве строк, получаем $(2\times 4)$-матрицу. Теперь *стандартные координаты* $P$ определяются как шесть $(2 \times 2)$-миноров этой матрицы. Их можно обозначить через $m_{ij}$, где $i, j$ — номера столбцов, входящих в указанный минор. Удобно их перенумеровать «антилексикографически», а именно:

$$s_1 = m_{12}, s_2 = m_{13}, s_3 = m_{14}, s_4 = m_{23}, s_5 = m_{24}, s_6 = m_{34}.$$

Числа $s_j$, очевидно, зависят от выбора базиса $(v_1, v_2)$, поэтому их можно рассматривать как проективные координаты [20]. Хорошо известно, что они удовлетворяют квадратному соотношению

$$s_1 s_6 - s_2 s_5 + s_3 s_4 = 0, \tag{2.1}$$

которое показывает, что определено отображение многообразия $G$ в квадрику, заданную этим уравнением в пространстве $\mathbb{RP}^5$. Это отображение — вложение [20], и таким путем мы получаем атлас локальных координат на $G$, которые мы тоже называем стандартными координатами. Уравнения, которые мы в итоге получим, будут однородными, поэтому мы можем работать с самими числами $s_j$. На следующем шаге мы выпишем условия на координаты $s_j$, которые выделяют комплексные прямые.

Для этого рассмотрим комплексную прямую $P \in G$. Поскольку $P$ инвариантна относительно умножения на $i$, то можно взять базис вида $(v, iv)$, где $v$ — ненулевой вектор в $P$. Обозначая через $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ координаты $v$, мы видим, что вторая строка ассоциированной $(2 \times 4)$-матрицы будет $(-a_2, a_1, -a_4, a_3)$. Вычисляя миноры $m_{ij}$, можно заметить, что наряду с квадратичным соотношением (2.1) имеется еще два линейных соотношения

$$s_2 = s_5, s_3 = -s_4. \tag{2.2}$$

Ввиду линейности, справедливость этих соотношений не зависит от выбора базиса в $P$. Легко видеть также, что эти соотношения независимы (как функции от координат $s_j$), и каждая 2-плоскость в $\mathbb{C}^2$ со стандартными координатами, удовлетворяющими этим соотношениям, является комплексной прямой. Так что (2.2) — это в точности уравнения, определяющие $G_{\mathbb{C}}$ в $G$.

Вернемся к случаю 2-поверхности $X$ и заметим, что в каждой точке $p \in X$ градиенты $\nabla_p f, \nabla_p g$ ортогональны касательному пространству $T_p X$ (в смысле стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$). Хорошо известен и легко проверяется тот факт, что 2-плоскость является комплексной прямой в том и только том случае, когда ее ортогональное дополнение — комплексная прямая. Итак, мы видим, что если $T_p X$ — комплексная прямая, то это эквивалентно тому, что справедливы уравнения (2.2) для $(2 \times 4)$-матриц, образованных $\nabla_p f, \nabla_p g$. Другими словами, точка $p \in X$ — комплексная тогда и только тогда, когда

$$f_2 g_3 - f_3 g_2 = 0, \quad f_1 g_4 + f_4 g_1 = 0, \tag{2.3}$$

где индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным, взятые в точке $p$. Эти уравнения вместе с уравнениями поверхности $X$ дают $(4 \times 4)$-систему вещественных полиномиальных уравнений, корни которых — комплексные точки поверхности $X$ в $\mathbb{C}^2$.

Для нахождения количества комплексных точек мы будем пользоваться теоремой 1.2. Выпишем в нашем случае вспомогательные функции, которые участвуют в этой теореме:

$$h_1(t,x,y,u,v) = t^{d+1} f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right), \quad h_2(t,x,y,u,v) = t^{d+1} g\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right),$$
$$h_3(t,x,y,u,v) = t^{d+1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right)\right],$$
$$h_4(t,x,y,u,v) = t^{d+1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right)\right],$$

$$H = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 - (t^{2d+4} + x^{2d+4} + y^{2d+4} + u^{2d+4} + v^{2d+4}), \tag{2.4}$$

где $d = 2m - 2$ и $(x, y, u, v)$ — стандартные вещественные координаты в $\mathbb{C}^2$.

Теперь из теоремы 1.2 мы получаем следующую формулу для числа комплексных точек.

**Теорема 2.1.** *Для типичной поверхности $X \subset \mathbb{C}^2$ число комплексных точек можно найти по формуле*

$$c(X) = \frac{1}{2}(1 - \deg_{\mathbb{O}} \nabla H), \tag{2.5}$$

*где $H$ задается формулой* (2.4).

Число комплексных точек может меняться при деформации $X$, но существует другая числовая характеристика, которая топологически инвариантна. Обозначим через $\mathbb{CP}_+ \cup -\mathbb{CP}_-$ объединение двух указанных подмногообразий $G$, причем первое взято с естественной ориентацией, а второе — с противоположной.

**Определение 2.2.** Индекс Маслова $X$ определяется как индекс пересечения $\Gamma(X)$ с $\mathbb{CP}_+ \cup -\mathbb{CP}_-$.

Из результатов [25] следует, что индекс пересечения двух явно заданных подмногообразий можно эффективно вычислить как локальную степень вспомогательного полиномиального эндоморфизма. Используя стандартные координаты на $G$, нетрудно написать явные уравнения для $\Gamma(X)$ при условии, что заданы уравнения для $X$, а уравнения для $\mathbb{CP}_+ \cup -\mathbb{CP}_-$ представлены формулой (2.2). Мы не выписываем окончательную формулу в терминах локальной степени, так как это сложное выражение, которое не используется в дальнейшем. В четвертой части мы укажем гораздо более простую и эффективную формулу в случае эндоморфизма плоскости. Основное методологическое заключение выражено в следующем предложении.

**Теорема 2.2.** *Индекс Маслова $X$ можно вычислить алгоритмически по коэффициентам $f$ и $g$.*

Хорошо известно, что глобальный индекс и индекс Маслова — главные числовые инварианты, характеризующие комплексную геометрию $X$. Существует много результатов о возможных значениях этих инвариантов и их поведении при разных преобразованиях и конструкциях [18]. Результаты этого параграфа дают общий подход к эффективному вычислению этих инвариантов, поэтому они допускают развитие и различные применения.

В последующих трех частях мы описываем несколько недавних результатов в этом направлении. В частности, интересные и полезные аналоги приведенных выше результатов существуют в локальном варианте, если рассмотреть ростки поверхностей, которые везде вполне вещественны, кроме отмеченной точки. Мы переходим к описанию соответствующих конструкций из [22,28,29].

## 3. Комплексные точки и изолированные особенности

В этом параграфе мы обсудим ростки вполне вещественных двумерных поверхностей с изолированной особенностью в $\mathbb{C}^2$, которые задаются полиномиальными параметризациями. Такие ростки, как известно, обладают двумя основными топологическими инвариантами — *индексом самопересечения* и *индексом Маслова* [3, 33], которые содержат важную геометрическую информацию [22,28]. В этом контексте естественной задачей является получение эффективных методов для алгебраического вычисления этих инвариантов и установление их связи с комплексными точками близких гладких ростков. Другой естественной задачей является получение явных оценок этих топологических инвариантов для разных классов гладких ростков.

Мы приводим некоторые результаты в этом направлении, связанные с топологическими инвариантами, введенными в [3, 22, 28]. Главное внимание будет уделено росткам, которые можно параметризовать четверками однородных полиномов, удовлетворяющих некоторым условиям невырожденности. Следуя [29], мы называем их *грубыми вполне вещественными ростками*. Такие ростки появляются в симплектической геометрии [3] и в комплексном анализе [22, 33] (все примеры, рассмотренные в [3, 22, 33], принадлежат этому классу), поэтому они и сами по себе заслуживают внимания.

В контексте вполне вещественных ростков естественно говорить об индексах векторных полей вместо топологических степеней, так как ниже мы будем работать с квазиоднородными векторными полями. Надо заметить, что в наших рассуждениях неминуемо появляются квазиоднородные векторные поля даже тогда, когда мы рассматриваем только ростки, определенные однородными полиномами.

Мы дадим определение и нужные свойства «грубых» вещественных ростков поверхностей с изолированными особенностями. В частности, мы введем индекс (локальный) самопересечения вполне вещественного ростка в смысле [22] и опишем, как можно его вычислить, пользуясь алгебраическими формулами из [22, 25].

Мы рассматриваем ростки двумерных алгебраических подмножеств в $\mathbb{C}^2$. Точнее, мы рассматриваем ростки $X \subset \mathbb{C}^2$, которые заданы как множество общих нулей нескольких полиномов на $\mathbb{R}^4$ (рассматриваемом как «овеществление» $\mathbb{C}^2$), удовлетворяющих некоторым условиям трансверсальности.

**Определение 3.1** (см. [22, 29])**.** Росток $X$ вещественной двумерной поверхности в $\mathbb{C}^2$ называется грубым вполне вещественным ростком (ROTORG), если он регулярен вне базисной точки, имеет трансверсальные пересечения со всеми достаточно малыми сферами вокруг базисной точки и для любой регулярной точки $p \in X$ касательная плоскость $T_pX$ — вполне вещественная плоскость.

Как легко видеть, такие объекты существуют и ниже мы опишем несколько источников примеров. Подобные понятия появлялись и раньше в [22] и [28]. Такие ростки могут иметь (не более чем) изолированную особенность (в обычном смысле алгебраической геометрии [20]) в базисной точке. В таком случае можно говорить о «вполне вещественной особенности» (TORS) и представлять ее себе как маленький кусок вполне вещественной поверхности с изолированной особенностью.

**Замечание 3.1.** Комбинируя определение 3.1 с данным в [22] определением ростков иммерсий поверхностей в $\mathbb{C}^2$, мы видим, что последнее понятие более узкое. В частности, примеры типичных иммерсий из [22] и [18] дают множество примеров ROTORG'ов.

Примеры ROTORG'ов естественно появляются в комплексном анализе и симплектической геометрии как особенности лагранжевых вложений [3]. Обычно они появляются как параметризованные (униформированные) ростки с квазиоднородными параметризующими полиномами. Это в точности соответствует нашим целям, поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что росток $X$ определен ростком квазиоднородного полиномиального отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Употребляя стандартную технику из теории особенностей, можно показать, что «в типичном случае» такие ростки грубы в смысле определения 3.1. Для краткости мы просто допустим, что $X$ есть ROTORG, заданный как образ квазиоднородного отображения как выше.

**Пример 1.** Типичный пример ROTORG'а дает так называемый «открытый зонтик Уитни» [3], который определяется как образ отображения

$$W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, (x, y) \mapsto \left(x^2, y, xy, \frac{2x^3}{3}\right),$$

и играет важную роль в теории лагранжевых вложений [3, 22].

Другой типичный пример — трансверсальная комплексная точка, подробно изученная Е. Бишопом [13]. Простейшая модель такого ростка определяется параметризацией

$$(u, v) \mapsto (u,\, v,\, (1 + 2\gamma)u^2 + (1 - 2\gamma)v^2 + P_3(u, v), Q_3(u, v)),$$

где $\gamma \neq \frac{1}{2}$ — положительное вещественное число, а $P_3, Q_3$ — некоторые сходящиеся ряды, содержащие только члены степени большей, чем три. Во многих ситуациях важно различать два случая, соответствующие двум существенно различным геометрическим картинам.

**Определение 3.2.** Трансверсальная комплексная точка называется эллиптической (соотв. гиперболической), если $\gamma < \frac{1}{2}$ (соотв. $\gamma > \frac{1}{2}$).

Заметим, что росток поверхности в трансверсальной комплексной точке может быть представлен как график полиномиального эндоморфизма плоскости $\mathbb{R}^2$, определенного последними двумя полиномами. Эллиптическую комплексную точку геометрически можно охарактеризовать тем фактом, что инфинитезимально поверхность лежит по одну сторону от касательной плоскости, тогда как вблизи гиперболической комплексной точки поверхность выглядит как седло.

Можно показать, что для типичного полиномиального эндоморфизма плоскости ростки этих графиков определяют ROTORG'и как выше. Другие источник ROTORG'ов дают так называемые вполне вещественные модели изолированных особенностей (псевдо)голоморфных кривых [29, 33]. В частности, как показано в [30], можно сконструировать такие модели для изолированных особенностей плоских алгебраических кривых [20]. В общем случае существование таких моделей

обусловлено соображениями трансверсальности [30], но в конкретных случаях их можно явно конструировать как подходящее малое возмущение данного особого ростка. Заметим, что в отличие от устойчивых малых деформаций (т.е. морсовизаций), используемых в теории особенностей, эти возмущения не меняют топологический тип особой точки, они только меняют ее вложение в $\mathbb{C}^2$.

Мы введем теперь основные топологические инварианты вполне вещественных ростков. Мы следуем [22, 33] и применяем некоторые вспомогательные геометрические конструкции. Из условий трансверсальности в определении 3.1 следует, что пересечения $K_t = X \cap S^3_t$ множества $X$ с достаточно малыми трехмерными сферами вокруг отмеченной точки определяют изотопные гладкие зацепления [2], которые мы будем называть *кантами* $X$. Фиксируем такой (малый) кант $K$. Очевидно, что $K$ обладает естественной ориентацией, индуцированной из $S^3$ и $X$.

Возьмем теперь произвольное касательное векторное поле $V$ на $X$, которое направлено наружу (относительно $X$) на канте $K$ (существование такого векторного поля легко доказать, и ниже мы объясним, как эффективно строить такие поля в конкретных примерах). Так как для любого $p \in K$ плоскость $T_pX$ вполне вещественна, поле $iV$ трансверсально $X$ вдоль $K$. Поэтому малое возмущение $X + s\ iV\ X$ снова трансверсально к $S = S^3_t$, и $K_s = \{X + s\ iV\} \cap S$ — гладкий узел в $S$, который не пересекает $K$.

Следовательно, мы получили два ориентированных подмногообразия $K$ и $K_s$ в $S^3$, причем сумма их размерностей на единицу меньше, чем размерность объемлющего многообразия $S^3$. Как известно, в такой ситуации можно определить *коэффициент зацепления* этих двух подмногообразий, который является гомотопическим инвариантом и обладает другими полезными свойствами [35]. Ввиду гомотопической инвариантности он не зависит от (достаточно малых) $t, s$ и представляет собой топологический инвариант ростка $X$.

**Определение 3.3.** В тех же обозначениях индекс самопересечения $i(X)$ ROTORG'а $X$ определяется как коэффициент зацепления $l(K, K_s)$, взятый в $S^3_t$, для достаточно малых $t, s$.

Основные свойства индекса самопересечения установлены в [33] и [22]. Он описывает некоторые свойства гладких (малых) возмущений $X$ и тесно связан с другим числовым инвариантом типичного ROTORG'а $X$, называемым *индексом Маслова* $m(X)$ [3, 22]. Пара этих инвариантов отражает важные геометрические свойства вложения $X$ в $\mathbb{C}^2$. В частности, они позволяют подсчитать близлежащие комплексные точки гладкого возмущения $X$. Следующая конструкция из [22] представляет локальную версию определения 2.2.

Рассмотрим гауссово отображение $X$, суженное на (малый) кант $K$: $\Gamma : K \to G$, $p \mapsto T_pX$. По определению ROTORG'а образ $\Gamma(K)$ лежит в $G_{\mathbb{R}}$, и потому он не пересекает $G_{\mathbb{C}}$. Следовательно, мы получаем два ориентированных подмногообразия в $G$, и сумма их размерностей снова на единицу меньше, чем размерность объемлющего многообразия $G$. Поэтому можно определить их коэффициент зацепления и заключить, что он не зависит от выбора (достаточно малого) канта $K$. Для того чтобы комплексные точки были подсчитаны правильно, необходимо взять коэффициент зацепления при противоположной ориентации второй компоненты $\mathbb{CP}_-$ из $G_{\mathbb{C}}$.

**Определение 3.4.** Индекс Маслова $m(X)$ ROTORG'а $X$ определяется как коэффициент зацепления $l(\Gamma(K), \mathbb{CP}_+ \cup (-\mathbb{CP}_-))$, взятый в $G$, для достаточно малого $K$.

Общий способ вычисления обоих этих инвариантов основан на рассмотрении подходящей (типичной) деформации $X$, подсчете ее комплексных точек и самопересечений и применении формул индекса из [18] или [22].

**Пример 2.** В случае открытого зонтика Уитни $W$ достаточно рассмотреть простую деформацию

$$W_t(u, v) = \left(x^2 + tx, y, xy, \frac{2x^3}{3}\right),\ 0 < t \ll 1,$$

которая не имеет самопересечений и имеет только одну комплексную точку гиперболического типа. Тогда формулы из теоремы 2 работы [22] дают

$$i(W) = -2,\ m(W) = -1.$$

В [22] можно найти другие примеры таких вычислений. Хотя этот метод универсален, он не алгоритмичен и не всегда легко осуществим в конкретных случаях. Поэтому важно развить более эффективные методы, и оказывается, что это возможно с помощью алгебраических формул, приведенных в предыдущих параграфах. Заметим, что наша теорема 2.1 позволяет алгебраическим путем подсчитать комплексные точки заданной гладкой деформации $X$.

**Замечание 3.2.** Нам хотелось бы добавить, что эти два инварианта не являются независимыми. Например, их четности (классы $\bmod 2$) всегда различны. Формулы, выражающие зависимость между $i(X)$ и $m(X)$, приведены в [22].

Естественная задача, подсказываемая результатами из [22, 30], состоит в следующем: какие значения $i(X)$ и $m(X)$ реализуются для $X$ из заданного класса, например, если зафиксирована алгебраическая степень задающих $X$ уравнений. Эта задача пока не решена. В связи с этим имеет смысл попытаться получить оценку абсолютных величин этих инвариантов в терминах алгебраических степеней заданных уравнений. Мы приведем один результат такого типа, полученный в [24].

**Теорема 3.1** (см. [24])**.** *Пусть $X$ — ROTORG в $\mathbb{C}^2$, определенный как график типичного $(w_1, w_2; d_1, d_2)$-квазиоднородного эндоморфизма плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда*

$$|i(X)| \leqslant P(4; (w_1, w_2, w_1, w_2), (W, W, D, D)), \tag{3.1}$$

*где $W = \min\{w_1, w_2\}, D = \min\{d_1, d_2\}$.*

*Доказательство.* Мы сведем дело к оценке индекса вспомогательного векторного поля. Это возможно с помощью следующей конструкции из [22].

Обозначим через $f$ эндоморфизм плоскости, задающий $X$. Тогда, как легко видеть, в нашем случае векторное поле $V$, используемое в определении $i(X)$, можно получить, положив $V = f_*(E)$, где $E$ — эйлерово векторное поле $E = u\partial_u + v\partial_v$. Тогда становится ясным, что в нашем случае соответствующая деформация $K_s$ многообразия $K$ может быть получена как образ отображения $f_s$, полученного из $f$ суммированием с малым кратным $s\imath V$ повернутого векторного поля $\imath V$. Легко проверить, что $f_s$ полуквазиоднородно $(w_1, w_2)$-мультистепени $(W, W, D, D)$ с $W$ и $D$ такими, как указаны в формулировке теоремы.

Хорошо известно, что коэффициенты зацепления могут быть представлены в терминах степени отображения или индексов векторных полей [35]. В нашем случае это означает, что коэффициент зацепления $l(K, K_s)$ можно представить как локальный индекс полиномиального векторного поля

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ F(x, y, u, v) = f_s(u, v) - f(x, y).$$

Так как компоненты такого поля $F$ — просто разности соответствующих компонент $f$ и $f_s$, легко оценить $(w_1, w_2)$-степень их слагаемых и увидеть, что $F$ можно рассматривать как квазиоднородное векторное поле мультистепени $(W, W, D, D)$ относительно весов $(w_1, w_2, w_1, w_2)$. Следовательно, требуемая оценка непосредственно вытекает из теоремы 1.4.

Таким же путем можно получить подобные оценки для произвольных параметризованных ROTORG'ов, если известен qh-тип этих параметризаций, как, например, если дана явная параметризация. Как известно, можно также получить информацию о qh-типе старших членов параметризации ROTORG'а, определенного как множество нулей полиномиальной системы с известным qh-типом, используя технику диаграмм Ньютона и разложений Пюизо [2]. Подобные оценки возможны для ROTORG'ов, заданных как множества нулей qh-полиномов. Точность этих оценок неизвестна, но мы надеемся, что этот вопрос можно исследовать тем же методом. Как уже было отмечено, интересно также исследовать, каких значений достигают $i(X)$ и $m(X)$ для ROTORG'ов фиксированного qh-типа.

## 4. Комплексные точки эндоморфизмов плоскости

Пусть снова $\mathbb{R}_2$ — алгебра вещественных полиномов от двух переменных. Через $P_d$ обозначим подмножество полиномов, алгебраическая степень которых не превосходит $d$. Пусть, наконец, $F = (f, g), f, g \in \mathbb{R}_2$ — эндоморфизм плоскости с компонентами $f$ и $g$.

Отождествим $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}^2$ естественным образом, тогда график $\Gamma_F$ отображения $F$ образует гладкую ($C^\infty$) двумерную поверхность в $\mathbb{C}^2$, что позволяет изучать $\Gamma_F$, используя приведенные выше результаты комплексной геометрии. Естественным шагом в этом направлении, как всегда, является изучение касательных плоскостей к графику.

Рассмотрим грассманиан $G = \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(2,4)$ ориентированных двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^4$, отождествленном с $\mathbb{C}^2$. Как известно, можно различать комплексные прямые и вполне вещественные плоскости. Гауссово отображение $T : \Gamma_F \to G$ посылает каждую точку $q = (p, F(p)) \in \Gamma_F$ в касательную плоскость $T_q\Gamma_F$. Хорошо известная методика теории особенностей предлагает рассмотреть объекты, удовлетворяющие подходящим условиям трансверсальности.

Напомним, что, согласно определению 2.1, точка $p$ называется комплексной точкой отображения $F$ (и его графика $\Gamma_F$), если касательная плоскость $T_p\Gamma_F$ в этой точке есть комплексная прямая [2]. В частности, для *совершенных* эндоморфизмов [2] комплексные точки могут быть либо эллиптическими, либо гиперболическими в зависимости от геометрических свойств графика $\Gamma_F$ в этих точках [13].

Обозначим через

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \imath \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

обычный «$\partial$ с чертой» оператор плоскости и обозначим через $F_{\overline{z}}$ плоский эндоморфизм, полученный применением $\overline{\partial}$ к обеим компонентам $F$. Тогда можно дать простую характеризацию комплексных точек в терминах $\overline{\partial}$.

**Предложение 4.1.** *Точка $p$ является комплексной точкой тогда и только тогда, когда $F_{\overline{z}}(p) = 0$.*

Этот факт может быть доказан с помощью прямой проверки того, что данное условие эквивалентно инвариантности касательной плоскости относительно умножения на $\imath$. Это также следует из условий (2.3), полученных во втором параграфе.

Напомним, что в классической работе Е. Бишопа важную роль играли эллиптические комплексные точки, так как подклеенные аналитические диски можно построить вблизи эллиптических комплексных точек [13]. Как известно, такой подход позволяет получить ряд результатов о существовании комплексных точек иммерсированных компактных поверхностей, которые в основном получаются топологическими методами [18]. Полезную для наших целей информацию о существовании и количестве комплексных точек можно получить с помощью сигнатурных формул для топологических инвариантов [25].

Заметим, что конструкция коэффициента зацепления из [22] для достаточно больших окружностей на плоскости дает целочисленный инвариант для собственных полиномиальных эндоморфизмов, который можно назвать (глобальным) индексом Маслова $M(F)$. Согласно формулам из [22] и [28], можно вычислить $M(F)$ с помощью подсчета комплексных точек вблизи совершенной деформации отображения $F$. Оказывается, что то же самое можно сделать без рассмотрения деформаций.

**Теорема 4.1.** *Индекс Маслова алгоритмически вычислим по коэффициентам данного эндоморфизма плоскости.*

Этот факт непосредственно следует из теоремы 1.1, которая, в частности, влечет эффективную вычислимость степени отображения явно данного полиномиального отображения. Заметим, что благодаря предложению 4.1, индекс Маслова есть топологическая степень эндоморфизма, определенного частными производными $\partial F/\partial \overline{z}$.

Одного индекса Маслова не достаточно для вычисления комплексных точек. Поэтому мы рассматриваем также числа $c(F)$ и $c_e(F)$ комплексных точек и эллиптических комплексных точек, соответственно. Полное количество $c(F)$ комплексных точек можно также выразить через степень подходящего отображения.

**Теорема 4.2.** *Полное количество комплексных точек эндоморфизма плоскости алгоритмически вычислимо по коэффициентам его компонент.*

Это заключение следует из теоремы 1.2. В самом деле, для совершенного эндоморфизма $F$ множество комплексных точек есть конечное алгебраическое подмножество в $\mathbb{R}^2$, определенное как нуль-множество системы полиномов $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(x,y)=0$. Следовательно, это число можно вычислить как локальную степень вспомогательного эндоморфизма $\mathbb{R}^3$, которую можно вычислить по теореме 1.2.

Теперь объясним, как можно найти число эллиптических комплексных точек. Основной момент состоит в том, чтобы представить подмножество $C_e(F)$ как полуалгебраическое подмножество плоскости. Тогда нужное число уже можно эффективно вычислить, используя результаты из [25] (см. также [9]).

Другими словами, нам нужно только указать точные алгебраические условия, которые характеризуют комплексные точки. Для этого мы используем геометрическую интерпретацию в терминах гауссовой кривизны $K_p(\Gamma_F)$ [18]. А именно, из нормальной формы вблизи типичной комплексной точки поверхности [13] следует, что эллиптические точки — это в точности те комплексные точки $p$, где кривизна $K_p(\Gamma_F)$ положительна. Это наблюдение позволяет показать, что указанное условие можно выразить как полиномиальное неравенство.

В самом деле, можно использовать точное выражение гауссовой кривизны параметризованной 2-поверхности, которое является частным случаем общих формул для тензора кривизны параметризованного подмногообразия [4]. Анализируя эти выражения, приходим к искомому заключению.

**Предложение 4.2** (см. [30])**.** *Множество эллиптических комплексных точек совершенного эндоморфизма плоскости $F$ совпадает с полуалгебраическим множеством*

$$\{\partial f/\partial \overline{z}=0, \partial g/\partial \overline{z}=0, K(x,y)>0\},$$

*где $K(x,y)$ - гауссова кривизна $\Gamma_F$ в точке $(x,y,f(x,y),g(x,y))$.*

Заметим, что главный смысл этого предложения в том, что указанное множество в самом деле полуалгебраическое, что не ясно a priori, так как гауссова кривизна графика в общем случае не выражается как полином от координат. Однако знак кривизны совпадает со знаком определенного полинома, который выписывается с помощью явной формулы для гауссовой кривизны параметризованной поверхности. Подробное обсуждение этой темы имеется, например, в [4].

**Теорема 4.3.** *Число эллиптических комплексных точек совершенного эндоморфизма плоскости может быть эффективно вычислено с помощью конечного числа алгебраических и логических операций над его коэффициентами.*

Сказанное следует из результатов [9] (а также из [25, теорема 9]), из которых следует эффективная вычислимость мощности конечного полуалгебраичского подмножества. Можно добавить, что используя компьютерную программу для вычисления топологической степени, разработанную А. Лецким и З. Шафранцем [32], можно легко пересчитать комплексные точки эндоморфизмов плоскости для не очень высоких степеней (в зависимости от мощности используемого компьютера). После определения бифуркационной диаграммы стандартными методами теории особенностей [2], в принципе становится возможным нахождение всех возможных значений введенных инвариантов для эндоморфизмов плоскости с фиксированной бистепенью, скажем, для элементов из $(P_d)^2$. Конкретные результаты в этом направлении будут приведены в последующих публикациях автора.

## 5. Комплексные точки случайных поверхностей

Как показано в недавних публикациях [5, 6, 16, 26, 27, 34], рассмотрение топологических инвариантов случайных полиномов приводит ко многим интересным результатам. В нашем контексте естественная задача в указанном направлении состоит в вычислении или оценке среднего числа комплексных точек гауссова случайного эндоморфизма плоскости.

Хорошо известно, что гауссов случайный эндоморфизм плоскости фиксированной алгебраической степени почти наверное (т.е. с вероятностью единица) собственен и устойчив в смысле Уитни [6, 26], что дает возможность ввести несколько полезных числовых характеристик геометрической природы, как, например, топологическая степень и число сборок [2]. Так что можно рассмотреть среднее значение этих характеристик и таким путем получить числовые инварианты

заданного случайного эндоморфизма плоскости. Такая стратегия была использована в [11, 26, 27] и позволила получить ряд новых результатов.

Следуя этому подходу, нетрудно показать, что случайный эндоморфизм фиксированной алгебраической степени почти наверное имеет конечное количество комплексных точек, причем все они трансверсальны. Это наводит на мысль рассмотреть *среднее число* комплексных точек случайного эндоморфизма. Мы изучаем этот инвариант с помощью техники, описанной в [25], и кратко описываем, как можно связать его с двумя другими инвариантами.

Напомним, что *среднее значение топологической степени* было найдено в [26] для случайного плоского эндоморфизма, заданного градиентом случайного полинома, коэффициенты которого имеют сферически инвариантные гауссовы (нормальные) распределения, указанные в [34]. Поскольку индекс Маслова $M(F)$ эндоморфизма плоскости можно выразить как топологическую степень связанного с ним эндоморфизма $\overline{\partial}F$, компоненты которого являются линейными комбинациями частных производных компонент $F$, оказывается, что оценки среднего значения степени градиента применимы для индекса Маслова. Если все коэффициенты случайного полинома независимы и распределены по стандартному нормальному закону, то можно найти асимптотику среднего значения $C(F)$, когда алгебраическая степень случайного эндоморфизма стремится к бесконечности.

Как уже было отмечено, мы будем иметь дело с *гауссовыми случайными полиномами*, что означает, что коэффициенты — вещественные случайные величины и имеют многомерное случайное нормальное распределение. Термин «случайный полином» всегда будет означать такую ситуацию. Для достижения большей строгости, приведем некоторые результаты и обозначения из теории вероятностей. Все необходимые сведения можно найти в [16].

Одномерная гауссова (нормальная) случайная величина $\xi$ определяется как вещественнозначная случайная переменная, плотность распределения которой выражается по формуле

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$, $-\infty < a < +\infty$. Параметры $a$ и $\sigma$ — математическое ожидание и дисперсия, соответственно:

$$a = E\xi,\ \sigma^2 = D\xi.$$

Если $a = 0$, то имеем *центральное нормальное распределение*. Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то получается *стандартное нормальное распределение*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Напомним также, что для пары случайных величин $(\xi, \eta)$ число

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\big[(\xi - E\xi) \cdot (\eta - E\eta)\big]$$

называется *ковариацией* $\xi$ и $\eta$. Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, то $\xi$ и $\eta$ некоррелированы. В частности, (стохастически) независимые случайные величины называются некоррелированными случайными величинами. Дисперсия $D\xi$ определяется как $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$.

Наконец, *многомерное центральное нормальное распределение* $\Xi$ определяется как распределение, плотность которого имеет вид

$$f_\Xi(x) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot Q(x)},$$

где

$$Q(x) = xAx^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

и $|A|$ — детерминант положительно определенной матрицы $A = (a_{ij})$. Слово «центральное» попрежнему означает, что $E\Xi = 0$ (иногда будем говорить, что имеем распределение с *нулевым средним* [16]). Матрица $A$ называется *матрицей ковариаций* данного распределения, так как ее элементы заданы попарными ковариациями компонент распределений $\Xi$.

Пусть $P$ — гауссов случайный полином на $\mathbb{R}^n$ в вышеуказанном смысле. Тогда можно записать его в виде

$$P(x) = \sum_{\alpha} \xi_\alpha x^\alpha$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $\xi_\alpha$ имеют многомерное нормальное распределение. Для полного определения распределения достаточно задать матрицу ковариаций в явном виде. Обозначим через $m$ алгебраическую степень полинома $P$.

**Пример 3.** Пусть все коэффициенты $\xi_\alpha$ представляют собой (независимые и одинаково распределенные) стандартные нормальные величины. Тогда $P$ называется стандартным гауссовым случайным полиномом от $n$ переменных алгебраической степени $m$. Беря набор из $n$ таких полиномов, получаем стандартный случайный эндоморфизм в $\mathbb{R}^n$.

Для полиномов от одной переменной такой класс случайных полиномов весьма естествен и удобен, и существует много результатов о числовых инвариантах стандартного гауссова полинома от одной переменной [16]. Однако в случае нескольких переменных работать с такими полиномами достаточно трудно, поэтому для нас особенно важен пример гауссова случайного полинома, предложенный в [34]. Нам здесь нужен только случай двух переменных, но пример легко описать для произвольной размерности.

**Пример 4** (см. [34])**.** Обозначим через $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ множество всех однородных полиномов алгебраической степени $m$ ($m$-форм) на $\mathbb{R}^{n+1}$ и рассмотрим однородный гауссов случайный полином $f$ из $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ вида

$$F(x) = \sum_{m_0+m_1+\ldots+m_n=m} F_{m_0,m_1,\ldots,m_n} x_0^{m_0} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где $F_{m_0,\ldots,m_n}$ — независимые нормальные случайные величины с нулевым средним и дисперсией

$$EF^2_{m_0,\ldots,m_n} = \frac{m!}{m_0! \ldots m_n!}.$$

Мы называем такой полином удобной гауссовой $m$-формой.

Можно проверить, что такой случайный полином инвариантен относительно естественного действия группы $O(n+1)$ на $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$. По этой причине он называется *сферически инвариантным*. Как было показано в [6], важная характеристика сферически инвариантного случайного гауссова полинома дается так называемым *параметром* $r$, который определяется по формуле

$$r = \frac{E\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(e)\right)^2}{EF(e)^2},$$

где $e = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ — выделенная точка. Можно непосредственным вычислением проверить, что в приведенном примере имеем $r = m$. Взяв $n$ независимых случайных полиномов такого типа, мы получим *удобный случайный эндоморфизм*.

Известен еще один класс случайных полиномов, который тоже пригоден для наших целей. Этот класс был введен в [6] и может быть описан следующим образом. Скалярное произведение на $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ определяется по формуле

$$(f, f') = \int_{x \in S^n} f(x) f'(x) dx, \quad f, f' \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Гауссова случайная $m$-форма называется допустимой, если

$$E\big((f, F)(f', F)\big) = (f, f'), \quad f, f' \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Согласно [6], такой случайный полином является сферически инвариантным, и его параметр $r$ равен

$$\frac{m(m+n+1)}{n+2}.$$

Рассмотрим теперь общий (т.е. не обязательно однородный) гауссов случайный полином на $\mathbb{R}^{n+1}$, алгебраическая степень которого равна $N$, причем каждая его однородная компонента степени $m \leqslant N$ имеет *удобное* гауссово распределение, описанное в примере 4. В такой ситуации мы говорим, что задан *удобный случайный полином* алгебраической степени $N$. Это в точности тот тип случайных полиномов, который мы хотим изучить. Существует по крайней мере две причины такого выбора: во-первых, такие полиномы и их числовые инварианты оказываются полезными в физике [12], и, во-вторых, для систем случайных полиномов такого типа М. Шуб и С. Смейл [34] получили точные формулы для среднего числа вещественных корней, которые позволяют получить много результатов о числовых инвариантах таких полиномов [16].

Аналогично можно определить (неоднородный) *допустимый случайный полином* алгебраической степени $N$. Для таких полиномов также можно получить некоторые полезные результаты об их числовых инвариантах.

После такой подготовки мы можем коснуться вопроса о комплексных точках гауссовых случайных эндоморфизмов плоскости. В первую очередь заметим, что в этом случае компоненты $\overline{\partial F}$ также являются гауссовыми случайными полиномами. Это следует из явных формул для коэффициентов $\overline{\partial F}$ и из того факта, что сумма независимых гауссовых случайных величин также является гауссовой случайной величиной.

Легко проверить, что для удобных случайных эндоморфизмов компоненты $\overline{\partial F}$ являются сферически инвариантными. Более того, прямой проверкой можно убедиться, что оба параметра компонентов удобного эндоморфизма равны параметру градиента удобного случайного полинома. Поскольку математическое ожидание сферически инвариантного гауссова случайного эндоморфизма полностью определяется его параметром, мы можем пользоваться основным результатом из [26], который непосредственно дает желаемый результат.

**Теорема 5.1.** *Среднее число комплексных точек $E(C(F))$ удобного случайного эндоморфизма $F$ алгебраической степени $m$ растет как $\sqrt{m}$ при $m \to \infty$.*

Добавим, что можно получить аналогичные результаты для любых допустимых случайных эндоморфизмов и индекса Маслова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Арнольд В. И.* Индекс особой точки векторного поля, неравенство Петровского — Олейника и смешанные структуры Ходжа // Функц. анал. и его прил. — 1978. — *12*. — С. 1–14.
2. *Арнольд В., Варченко А., Гусейн-Заде С.* Особенности диференцируемых отображений, т. 1. — М.: Наука, 1982.
3. *Гивенталь А.* Лагранжевы вложения поверхностей и открытые зонтики Уитни // Функц. анал. и его прил. — 1986. — *20*. — С. 35–41.
4. *Дубровин Б., Новиков С., Фоменко А.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
5. *Ибрагимов И., Подкорытов С.* О случайных алгебраических поверхностях // Докл. РАН. — 1995. — *343*. — С. 734–736.
6. *Подкорытов С.* Среднее значение эйлеровой характеристики случайных алгебраических гиперповерхностей // Алгебра и анал. — 1999. — *11*. — С. 185–193.
7. *Химшиашвили Г.* О локальной степени гладкого отображения // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1977. — *85*. — С. 31–34.
8. *Хованский А.* Индекс полиномального векторного поля // Функц. анал. и его прил. — 1979. — *13*. — С. 49–58.
9. *Aliashvili T.* Signature method for counting points in semi-algebraic subsets // Bull. Georgian Acad. Sci. — 1996. — *154*. — С. 34–36.
10. *Aliashvili T.* Counting real roots of polynomial endomorphisms // J. math. sci. — 2003. — *118*, № 5. — С. 5325–5346.
11. *Aliashvili T.* On invariants of random planar endomorphisms // Banach Center Publ. — 2004.— *62*. — С. 19–28.
12. *Berry M., Hannay J.* Umbilic points of Gaussian random surfaces // J. Phys. A: Math. Gen. — 1977. — *10*. — С. 1809–1821.
13. *Bishop E.* Differentiable manifolds in complex Euclidean space // Duke Math. J. — 1965. — *32*. — С. 1–21.

14. *Bruce W.* Euler characteristics of real varieties // Bull. London Math. Soc. — 1990. — *22*. — C. 213–219.
15. *Chern S., Spanier E.* A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space // Comm. Math. Helv. — 1951. — *25*. — C. 205–214.
16. *Edelman A., Kostlan E.* How many roots of a real polynomial are real? // Bull. Amer. Math. Soc. — 1995. — *32*. — C. 1–37.
17. *Eisenbud D., Levine H.* An algebraic formula for the degree of a $C^\infty$ map-germ // Ann. of Math. — 1977. — *106*. — C. 19–38.
18. *Forstneric F.* Complex tangents of real surfaces in complex surfaces // Duke Math. J. — 1992.— *67*. — C. 353–376.
19. *Greuel G.-M., Hamm H.* Invarianten quasihomogener Durchschnitte // Invent. Math. — 1978. — *49*. — C. 67–86.
20. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry. — New York: J. Wiley and Sons, 1978.
21. *Gromov M.* Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds // Invent. Math. — 1985. — *82*. — C. 307–347.
22. *Ishikawa G., Ohmoto T.* Local invariants of singular surfaces in an almost complex four-manifold // Ann. Glob. Anal. Geom. — 1993. — *11*. — C. 125–133.
23. *Khimshiashvili G.* On the cardinality of a semi-algebraic subset // Georgian Math. J. — 1994. — *1*. — C. 511–521.
24. *Khimshiashvili G.* On topological invariants of totally real singularities // Georgian Math. J. — 2001. — *8*. — C. 97–109.
25. *Khimshiashvili G.* Signature formulae for topological invariants // A. Razmadze Math. Inst. Proc. — 2001. — *125*. — C. 1–121.
26. *Khimshiashvili G.* Topological aspects of random polynomials // Bull. Georgian Acad. Sci. — 2003. — *168*. — C. 5–8.
27. *Khimshiashvili G., Ushveridze A.* On the average topological degree of random polynomials // Bull. Georgian Acad. Sci. — 1999. — *159*. — C. 385–388.
28. *Khimshiashvili G., Wegert E.* Analytic discs and totally real surfaces // Bull. Georgian Acad. Sci. — 2000. — *162*. — C. 41–44.
29. *Khimshiashvili G., Wegert E.* Complex points of planar endomorphisms // Bull. Georgian Acad. Sci. — 2002. — *165*. — C. 26–29.
30. *Khimshiashvili G., Wegert E.* Analytic discs and complex points of surfaces // Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz. — 2002. — *52*. — C. 145–164.
31. *Lai H.-F.* Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — *172*. — C. 1–33.
32. *Lecki A., Szafraniec Z.* An algebraic method for calculating the topological degree // Banach Center Publ. — 1996. — *35*. — C. 73–83.
33. *McDuff D.* The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds // J. Diff. Geom. — 1991. — *34*. — C. 143–164.
34. *Shub M., Smale S.* Complexity of Bezout's theorem. II: Volumes and probabilities // Progr. Math. — 1993. — *109*. — C. 267–285.
35. *Spanier E.* Algebraic topology. — New York: McGraw-Hill, 1966.

Т. Алиашвили
Тбилисский технический университет

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 30–51

УДК 515.177.54

# О МОНОДРОМИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2004 г. **Г. ГИОРГАДЗЕ**

Аннотация. Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с геометрическим подходом к изучению краевых задач для обобщенных аналитических функций. Описан геометрический подход к решению проблемы Римана — Гильберта и линейной задачи сопряжения в различных функциональных классах, в том числе для обобщенных аналитических функций и векторов. В частности, приведено решение задачи Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций и получено явное аналитическое представление для матриц монодромии в случае обобщенных аналитических векторов.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . . 30
1. Задача Римана — Гильберта . . . . . 31
2. Локальная теория обобщенных аналитических функций . . . . . 37
3. Глобальные аспекты обобщенных аналитических функций . . . . . 42
Список литературы . . . . . 49

## Введение

Мы рассмотрим некоторые глобальные конструкции и результаты для обобщенных аналитических функций и векторов в духе классических граничных задач для аналитических функций [9,16]. Нашей главной целью является обобщение некоторых классических результатов на случай обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях.

Мы обсудим проблему Римана — Гильберта, задачу линейного сопряжения с кусочно-непрерывными коэффициентами и аналитическое представление матриц монодромии. Для этого используется геометрический подход к проблеме Римана — Гильберта, развитый [3,27,50]. Показано, что такой подход применим для обобщенных аналитических функций [8] и векторов [4,6]. Мы применим также некоторые результаты об итерированных интегралах Чена [26] для построения матриц монодромии эллиптических систем.

Мы начинаем с обзора классической теории проблемы Римана — Гильберта и линейного сопряжения, которая служит ориентиром для дальнейших рассмотрений. Особое внимание уделяется решению задачи линейного сопряжения с кусочно-непрерывными коэффициентами, которое используется для решения проблемы Римана — Гильберта для регулярных систем дифференциальных уравнений [22]. Главный результат (теорема 3.1) основан на факторизационной теореме Биркгофа в классе $L_p$ [15]. Основные классические инварианты (индекс и частные индексы) интерпретируются как инварианты голоморфного векторного расслоения, построенного по представлению монодромии. Мы опишем также важную связь между $L_p$-факторизацией и ассоциированной регулярной системой, установленную в [29].

Во втором параграфе приводятся фундаментальные результаты об обобщенных аналитических функциях и векторах. Мы следуем работам [4,6,8,32], с упором на глобальные аспекты, играющие важную роль в нашем подходе. С этой точки зрения особенно важны свойства сингулярных интегральных операторов и экспоненциальные представления обобщенных аналитических функций, в частности, принцип подобия (теорема 2.1). Показано, что некоторый вариант принципа подобия справедлив для обобщенных аналитических векторов (предложение 2.1), что дает возможность распространить некоторые конструкции на этот случай.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

В последнем параграфе мы опишем в подходящем контексте граничные задачи для обобщенных аналитических функций на компактных римановых поверхностях. Сначала мы рассмотрим основные свойства обобщенного ядра Коши и интеграла типа Коши на компактных римановых поверхностях. После определения обобщенных аналитических функций и соответствующих интегральных операторов строится ассоциированное векторное расслоение с помощью тех же конструкций и рассуждений, что и в первом параграфе. Получены также некоторые свойства групп когомологий с коэффициентами в пучке обобщенных аналитических сечений ассоциированного расслоения (предложение 3.2).

В заключение показано, что итерированный интеграл Чена дает возможность получать в замкнутой форме матрицы монодромии, что является аналогом классического результата И. Лаппо-Данилевского [14]. После напоминания определения и основных свойств итеративного интеграла [26,37] показано, что оператор параллельного переноса, индуцированный эллиптической системой, задающей обобщенные аналитические функции, допускает экспоненциальное представление в смысле [37]. Как следствие общей теории формальных связностей [26], мы получаем теорему 3.3, в которой матрицы монодромии выражены как сходящиеся ряды из итерированных интегралов. В качестве иллюстрации приведен случай гипераналитических функций в смысле [28].

## 1. Задача Римана — Гильберта

В своей неоконченной работе [47] Б. Риман поставил задачу о построении обыкновенного дифференциального уравнения с заданными точками ветвления и монодромией. Приведем современную постановку этой задачи.

Рассмотрим на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$ регулярную систему дифференциальных уравнений

$$df = \omega f, \tag{1.1}$$

где $\omega$ — матричная мероморфная 1-форма на $\mathbb{CP}^1$ с полюсами в точках $s_1, ..., s_m$ (см. [22]). Система (1.1) определяет представление монодромии

$$\rho : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, ..., s_m\}, z_0) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \tag{1.2}$$

Следуя работам [3, 27], введем понятие *регулярной особой точки* системы (1.1), требуя, чтобы решение системы в секториальной окрестности особой точки имело не более чем полиномиальный рост.

**Задача 1.** Для заданных точек $s_1, ..., s_m \in \mathbb{CP}^1$, $\infty \neq s_j, j = 1, ..., m$ и представления монодромии (1.2) построить систему вида (1.1), которая имеет регулярные особенности в заданных точках, и представление монодромии которой совпадает с (1.2).

Эта задача оказалась фундаментальной и стимулировала дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами. Гильберт внес важный вклад в исследование этой задачи и включил ее в знаменитый список своих проблем под номером 21. По этой причине данная задача называется *проблемой Римана — Гильберта* или *21-й проблемой Гильберта* [22]. Риман предложил весьма плодотворный подход к задаче 1 и, в частности, показал, что она сводится к другой задаче, которая также оказалась очень интересной и важной.

Пусть $\Gamma$ — дифференцируемая замкнутая простая кривая, которая разделяет комплексную плоскость на ограниченную $U_+$ и неограниченную $U_-$ область с общей границей $\Gamma$.

**Задача 2.** Допустим, задана непрерывная по Гёльдеру матрица-функция $G : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Надо найти множество кусочно-голоморфных вектор-функций $\Phi(t)$ на $U^+ \cup U^-$, которые продолжаются до непрерывных функций на $\Gamma$, удовлетворяют граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$$

для любого $t \in \Gamma$ и имеют конечный порядок на $\infty$.

Эта задача называется *задачей линейного сопряжения* для аналитических функций или просто *задачей Римана* [9,16]. Мы будем называть ее *задачей линейного сопряжения* (ср. [25,41]).

Л. Фукс [30,31], почти одновременно с Риманом занимавшийся классификацией аналитических систем линейных дифференциальных уравнений с особыми точками, выделил среди регулярных систем важный класс систем дифференциальных уравнений, которые в современной литературе называются фуксовыми [22]. Отметим, что проблема Римана — Гильберта особенно интересна в классе фуксовых систем и исследования в этом направлении продолжаются до сих пор (см. [3,22]).

Если система (1.1) фуксова, то она имеет вид

$$\frac{df}{dz} = \left( \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z - s_j} \right) f, \quad \sum_{j=1}^{m} A_j = 0, \tag{1.3}$$

где $A_j$ являются квадратными матрицами соответствующего порядка.

Задачу 1 можно поставить для различных классов уравнений и систем. Например, можно поставить задачу построения систем уравнений с так называемыми ложными особыми точками или для решений эллиптических систем уравнений [3, 10, 22]. Это часто приводит к интересным и практически полезным результатам и конструкциям. Мы используем эту идею в случае обобщенных аналитических функций, что позволяет установить связи с некоторыми глобальными понятиями, вроде монодромии, векторных расслоений и пучков.

Значительный прогресс при решении задач 1 и 2 был достигнут Племелем [46], который свел задачу 2 с кусочно-постоянными коэффициентами к задаче с непрерывными коэффициентами и применил это к решению проблемы Римана — Гильберта. Племель не пользовался матричными обозначениями, поэтому его доказательства сложны и трудно проверяемы. Долгие годы считалось, что он решил при этом и проблему Римана — Гильберта, но в его доказательстве обнаружились пробелы [2], а затем А. Болибрух построил контрпример к утверждению Племеля [3].

Важный вклад был внесен И. Лаппо-Данилевским [14], развившим теорию функций от матриц. В последующие годы задачу 2 исследовали Н. Мусхелишвили и Н. Векуа [8, 16], которые весьма успешно использовали теорию функций от матриц, развитую Лаппо-Данилевским [14], и ввели важное понятие частных индексов для задачи 1 и сингулярных интегральных уравнений.

Напомним, что классический метод решения задачи линейного сопряжения основан на ее сведении к сингулярному интегральному уравнению фредгольмова типа

$$\varphi^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{G^{-1}(\tau)G(t) - \mathbb{I}}{t - \tau} \varphi^-(t) dt = 0. \tag{1.4}$$

Фредгольмовость такого сингулярного интегрального уравнения обеспечена, если коэффициент задачи $G(t)$ принадлежит гёльдеровскому классу, и в таком случае имеем

$$\frac{G^{-1}(\tau)G(t) - \mathbb{I}}{t - \tau} = \frac{K(t,\tau)}{|t - \tau|^\alpha}, \ 0 \leqslant \alpha < 1,$$

где $K(t,\tau)$ — гёльдеровская матрица-функция [16].

Для изучения решений проблемы Римана — Гильберта можно использовать подробные результаты о структуре ее решений в окрестности особой точки [22, 44]. Обозначим через $S = \{s_1, ..., s_m\}$ множество особых точек системы (1.1). Допустим, что $\gamma_1, ..., \gamma_m$ — образующие фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, ..., s_m\}, z_0)$, а $\rho(\gamma_j) = M_j, j = 1, ..., m,$ — матрицы монодромии. Пусть $E_j = \frac{1}{2\pi i} \ln \rho(\gamma_j)$ с собственными числами $\lambda_j^k$, удовлетворяющими условиям:

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_j^k < 1. \tag{1.5}$$

Известно, что система (1.1) фуксова в точке $s_j$ тогда и только тогда, когда матрица фундаментальных решений $\Phi(\widetilde{z})$ представима в следующем виде:

$$\Phi_j(\widetilde{z}) = U_j(z)(z - s_j)^{\Lambda_j} (\widetilde{z} - s_j)^{E_j}, \tag{1.6}$$

где $\widetilde{z}$ обозначает координату на универсальном накрытии, $U_j$ является голоморфно обратимой в точке $s_j$, $\Lambda_j = \operatorname{diag}(\alpha_j^1, ..., \alpha_j^n), \alpha_j^1 \geqslant ... \geqslant \alpha_j^n$, является диагональной матрицей с целочисленными элементами, а $E_j$ являются верхнетреугольными матрицами, определенными выше, и удовлетворяют условиям (1.5).

В современном подходе к задаче Римана — Гильберта и задаче линейного сопряжения применяются геометрические и когомологические методы [3, 10, 22, 27] (см. также цитированную там литературу). В частности, для задачи линейного сопряжения такой метод успешно применяется в работах [17, 20, 39–41, 50]. Одним из ключевых результатов для такого подхода является знаменитая теорема Г. Биркгофа [24]. Мы приведем необходимые определения и результаты, которые потребуются в дальнейшем.

Известно, что для достаточно регулярного $G$ существует представление (так называемая *факторизация Биркгофа*) [17, 24]) вида

$$G(t) = G_+(t)d_K(t)G_-(t),$$

где $d_K$ — диагональная матрица с элементами $z^{\kappa_i}$, и целые числа $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n$ удовлетворяют условиям

$$\kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant ... \geqslant \kappa_n.$$

Целые числа $\kappa_1, ..., \kappa_n$ называются частными индексами матрицы-функции $G(t)$ и соответствующей задачи линейного сопряжения (см. [9, 16]). Число

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i}\Delta_L \arg\det G(t)$$

называется *полным индексом* или просто *индексом* линейной задачи сопряжения.

**Теорема 1.1** (см. [16, 24])**.** *Для любой невырожденной гёльдеровой матрицы-функции $G(t)$ на окружности существует факторизация Биркгофа, последовательность чисел $\kappa_1, ..., \kappa_n$ однозначно определяется матрицей $G$ и*

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_n.$$

Рассмотрим голоморфное векторное расслоение на $\mathbb{CP}^1$, получаемое при помощи покрытия сферы Римана $\mathbb{CP}^1$ тремя открытыми множествами $\{U^+, U^-, U_3 = \mathbb{CP}^1\backslash\{0, \infty\}\}$ и функций перехода

$$g_{13} = h_1 : U^+ \cap U_3 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),$$
$$g_{23} = h_2 d_K : U^- \cap U_3 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Обозначим это расслоение через $E \to \mathbb{CP}^1$. Из теоремы Биркгофа вытекает, что любое векторное расслоение на сфере Римана разлагается в прямую сумму линейных расслоений

$$E \cong E(k_1) \oplus ... \oplus E(k_n).$$

В нашем случае классы Черна $k_j$ линейных расслоений совпадают с частными индексами $G$.

Обозначим через $\mathcal{O}(E)$ пучок ростков голоморфных сечений расслоения $E$. Решения линейной задачи сопряжения интерпретируются как элементы нулевой группы когомологии $H'(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(E))$. Следовательно, число $l$ линейно независимых решений равно $\dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(E))$, и число Черна $c_1(E)$ расслоения $E$ равно индексу функции $\det G(t)$. Это дает следующий критерий разрешимости задачи линейного сопряжения.

**Теорема 1.2** (см. [17, 36])**.** *Задача 2 имеет решение тогда и только тогда, когда $c_1(E) \geqslant 0$, и число $l$ линейно независимых решений выражается формулой*

$$l = \dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(E)) = \sum_{k_i \geqslant 0} k_i + 1.$$

Рассмотрим задачу 2 для кусочно-постоянной матрицы-функции $G(t)$. Решение задачи 2 в такой постановке редуцируется к задаче сопряжения с непрерывными коэффициентами [9]. Приведем ключевые моменты этого процесса приведения.

Пусть $\Gamma$ — простой замкнутый контур, $s_1, ..., s_m \in \Gamma$ и $M_1, ..., M_m \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Скажем, что кусочно-постоянная матрица-функция $G(t)$ индуцирована из совокупности $s = \{s_1, ..., s_m\}$, $M = \{M_1, ..., M_m\}$, если она выглядит следующим образом:

$$G(t) = M_j \cdot ... \cdot M_1, t \in [s_j, s_{j+1}),$$

где $M_j$ — матрица монодромии, которая соответствует обходу вокруг $s_j$ вдоль положительно ориентированной малой петли.

Допустим, что $\Gamma$ та же, что выше и $G : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ имеет в точках $s_1 \in \Gamma$ разрывы первого порядка. Положим $G(s_1 + 0) = \lim_{t \to s_1 + 0} G(t), G(s_1 - 0) = \lim_{t \to s_1 - 0} G(t)$ и

$$M = G^{-1}(s_1 + 0)G(s_1 - 0), E = \frac{1}{2\pi i} \ln M,$$

так что если $\lambda_i$ являются собственными значениями $M$, то $\mu_i = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_i$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant \operatorname{Re} \mu_i < 1$.

Рассмотрим функции

$$\omega^+(z) = (z - s_1)^E \stackrel{\text{def}}{=} e^{E \ln(z - s_1)}, \quad \omega^-(z) = \left(\frac{z - s_1}{z - z_0}\right)^E \stackrel{\text{def}}{=} e^{E \ln\left(\frac{z - s_1}{z - z_0}\right)},$$

где $z_0$ — некоторая фиксированная точка в $U^+$. Известно, что $\omega^+(z)$ является однозначной матрицей-функцией на $\mathbb{C} \setminus l_1$, где $l_1$ — кривая с конечными точками $s_1$ и $\infty$. Функция $\omega^-(z)$ является однозначной матрицей-функцией на $\mathbb{C} \setminus l_2$, где $l_1$ — кривая с конечными точками $z_0$ и $s_1$.

Введем новые вектор-функции $f_1^+(z)$ и $f_1^-(z)$:

$$f_1^+(z) = (z - s_1)^E G^{-1}(s_1 + 0) f^+(z), \quad f_1^-(z) = \left(\frac{z - s_1}{z - z_0}\right)^{-E} f^-(z).$$

Они являются голоморфными, соответственно, на $U^\pm$ и удовлетворяют условию

$$f_1^+(z) = (z - s_1)^{-E} G^{-1}(s_1 + 0) G(t) \left(\frac{z - s_1}{z - z_0}\right)^E f_1^-(z).$$

Обозначая $G_1(z) = (z - s_1)^{-E} G^{-1}(s_1 + 0) G(t) \left(\frac{z - s_1}{z - z_0}\right)^{-E}$, можно доказать, что $G_1(t)$ является непрерывной в точке $s_1$ [9].

Пусть $s_1, ..., s_m \in \Gamma$ — точки разрыва и пусть существуют конечные пределы $G(s_j + 0) = \lim_{t \to s_1 + 0} G(t)$ и $G(s_j - 0) = \lim_{t \to s_1 - 0} G(t)$. Кривая $\Gamma$ является объединением непересекающихся гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ с фиксированными ориентациями. Концами дуг $\Gamma_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$ являются $s_j$ и $s_{j+1}$.

Допустим, $M_j = G^{-1}(s_j + 0)G(s_j - 0)$ и $E_j = \frac{1}{2\pi i} \ln M_j$ таковы, что если $\lambda_j^i$ являются собственными числами $G^j$, то $\mu_i^j = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_j^i$. Обозначим $\rho_i^j = \operatorname{Re} \mu_i^j$ и нормализуем логарифм требованием, чтобы $0 \leqslant \rho_i^j < 1$.

Рассмотрим матрицы-функции

$$\Omega_j^+(z) = A_j G(s_j + 0)(z - s_j)^{E_j}, \Omega_j^-(z) = B_j \left(\frac{z - s_j}{z - z_0}\right)^{E_j},$$

где $A_j, B_j$ являются постоянными матрицами:

$$A_1 = E, A_j = \left[\prod_{k=1}^{j-1} \Omega_k^+(s_j)\right]^{-1}, \quad B_1 = E, B_j = \left[\prod_{k=1}^{j-1} \Omega_k^-(s_j)\right]^{-1}, \quad j = 2, 3, ...m.$$

Функции $\Omega_j^+(z)$ являются голоморфными, соответственно, в $U^\pm$. Введем новые вектор-функции

$$f^+(z) = \prod_{j=1}^{m} \Omega_j^+(z) f_1^+(z), \; f^-(z) = \prod_{j=1}^{m} \Omega_j^-(z) f_1^-(z).$$

Из условия сопряжения (2) получаем

$$f_1^+(t) = \left[\left(\prod_{j=1}^{m} \Omega_j^+(t)\right)^{-1} G(t) \prod_{j=1}^{m} \Omega_j^-(t)\right] f_1^-(t).$$

**Предложение 1.1.** *Матрица-функция*

$$G_1(t) = \left(\prod_{j=1}^{m} \Omega_j^+(t)\right)^{-1} G(t) \prod_{j=1}^{m} \Omega_j^-(t)$$

*непрерывна в точках* $s_1, ..., s_m$.

Согласно [9], существует каноническое решение $\chi_0(z)$ задачи линейного сопряжения, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\det \chi(z) \neq 0$ на $\mathbb{C}$, кроме, быть может, точек $s_1, s_2, ..., s_m$;

2. существует диагональная матрица-функция $d_K$ такая, что матрица $\lim_{z\to\infty} \chi(z) d_K(z)$ является голоморфной и обратимой на $\infty$;

3. если $s_j$ — некоторая особая точка, то

$$\lim_{z\to s_j} (z - s_j)^{\varepsilon} \chi(z) = 0$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Допустим, что $\omega = d\chi \cdot \chi^{-1}$ — голоморфная 1-форма на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, ..., s_m\}$. Соответствующая система дифференциальных уравнений (1.1) является регулярной системой с особыми точками $s_1, ..., s_m$ и с заданной монодромией, которая дает решение проблемы Римана — Гильберта в классе регулярных систем.

Пусть $\Gamma$ — кусочно-гладкий замкнутый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ как выше. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ являются кусочно-непрерывными матрицами-функциями и $\inf |\det \mathcal{A}(t)| > 0$. Пусть, наконец, $\rho$ — весовая функция вида

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{r} |t - t_k|^{\nu_k}, \quad t_k \in \Gamma, -1 < \nu_k < p - 1.$$

Допустим, что $T = \{t_k\}$ — множество, содержащее все точки контура $\Gamma$, где $\mathcal{A}$ разрывна. В общем случае $T$ содержит и другие точки из $\Gamma$.

В этой постановке важно изучить задачу 2 на весовом пространстве (см., например, [15]). Другими словами, надо найти кусочно-постоянную матрицу-функцию $\Phi$ такую, что $\Phi(z) \in \mathcal{E}_p^{\pm}(\Gamma, \rho)$ и на $\Gamma$ выполнено условие

$$\Phi^+(t) = \mathcal{A}(t)\Phi^-(t) + \mathcal{B}(t), t \in \Gamma,$$

где $\mathcal{B}(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$.

Введем следующие функциональные пространства. Как обычно, $f \in L_p(\Gamma, \rho)$, если и только если $\rho(t)|f(t)|^p$ — суммируемая (интегрируемая) функция на $\Gamma$. Это пространство является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Gamma,\rho)} = \left(\int_{\Gamma} \rho(t)|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В дальнейшем мы пишем $\Phi^{\pm} \in \mathcal{E}^{\pm}(\Gamma, \rho)$ тогда и только тогда, когда $\Phi$ представима следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t - z} + P,$$

где $P$ — полиномиальная функция и $f \in L_p(\Gamma, \rho)$.

Скажем, что $(n \times n)$-матрица-функция $\Phi$ является нормальной матрицей задачи 2, если $\Phi(z) \in \mathcal{E}_p^{\pm}(\Gamma, \rho)$, $\Phi^{-1}(z) \in \mathcal{E}_p^{\pm}(\Gamma, \rho^{1-q})$, $q = \frac{p}{p-1}$ и $\Phi$ удовлетворяет граничному условию $\Phi(z) \in \mathcal{E}_p^{\pm}(\Gamma, \rho)$ на $\Gamma$. Нормальная матрица, имеющая нормальную форму в бесконечности, т.е. такая, что существует предел $\lim_{z\to\infty} z^N \det \Phi(z) < \infty$ и он не равен нулю, называется канонической матрицей задачи.

Допустим, $s$ — некоторая точка из $T$. Обозначим через $\lambda_1, ..., \lambda_n$ собственные числа матрицы-функции $\mathcal{A}^{-1}(s + 0)\mathcal{A}(s - 0)$. Пусть

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_k.$$

Эти числа определены с точностью до кратного. Если $\operatorname{Re}\tau_k \in \mathbb{Z}$, то точка $s$ называется особой. В противном случае она называется неособой. Решение поставленной выше задачи линейного сопряжения описывается следующей теоремой.

**Теорема 1.3** (см. [15]). *Пусть $\mathcal{A}(t)$ — кусочно-непрерывная обратимая матрица-функция с точками разрыва $t_1, ..., t_r$ и пусть $\lambda_{kj}, k = 1, ..., r, j = 1, ..., n,$ — собственные числа матриц $\mathcal{A}^{-1}(t_k - 0)\mathcal{A}(t_k + 0)$. Пусть*

$$\mu_{kj} = \frac{1}{2\pi} \arg \lambda_{kj}, 0 \leqslant \arg \lambda_{kj} < 2\pi,$$

*и при этом*

$$\frac{1 + \nu_k}{p} \neq \mu_{kj}$$

*для всех допустимых значений $k$ и $j$. Тогда существует каноническое решение задачи сопряжения, т.е. матрица-функция из $\mathcal{E}^{\pm}(\Gamma, \rho)$, которая удовлетворяет поставленному выше граничному условию. Индекс $\kappa$ в пространстве $\mathcal{E}^{\pm}(\Gamma, \rho)$ вычисляется по формуле*

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg \frac{\det(\mathcal{A}(t))}{\prod_{k=1}^{r} (t - z_0)^{\sigma_k}} \right]_{\Gamma},$$

*где $\sigma_k = \sum_{j=1}^{r} \rho_{kj}, \rho_{kj} = -\frac{1}{2\pi} \ln \lambda_{kj}$. Здесь*

$$1 < \operatorname{Re} \rho_{kj} \leqslant 0, \text{ если } \mu_{kj} < \frac{1 + \nu_k}{p}$$

*и*

$$1 \leqslant \operatorname{Re} \rho_{kj} < 1, \text{ если } \mu_{kj} > \frac{1 + \nu_k}{p}.$$

Известно, что для заданных матриц монодромии $M_1, ..., M_m$ и особых точек $s_1, ..., s_m$ существует система дифференциальных уравнений типа (1.1), такая, что $s_1, ..., s_m$ являются полюсами первого порядка для (1.1), $\infty$ — ложная особая точка, матрицы $M_1, ..., M_m$ являются матрицами монодромии системы (1.1), и решения (1.1) в окрестности особой точки $s_j$ допускают представление

$$\Phi_j(\tilde{z}) = U_j(z)(\tilde{z} - s_j)^{E_j} C,$$

где матрица-функция $U_j(z)$ обратима и аналитична в окрестности $s_j$, а $C$ — невырожденная матрица. Такая система называется *системой стандартного вида*. В окрестности $\infty$ ее решение имеет вид:

$$\Phi_\infty(\tilde{z}) = \operatorname{diag}(k_1, ..., k_n) U_\infty(z) C, \tag{1.7}$$

где $U_\infty(z)$ аналитична и обратима на $\infty$ [29].

Обозначим через $L_p^+(\Gamma)$ пространство таких аналитических функций, которые являются граничными значениями функций из пространства $L^p(\Gamma)$; аналогично, пусть $L_p^-(\Gamma)$ обозначает пространство всех аналитических функций на $U_-$, продолжение которых на $\Gamma$ дает элементы пространства $L^p(\Gamma)$.

Пусть $L_\infty(\Gamma)$ — банахово пространство измеримых и существенно ограниченных функций. В этом случае можно определить факторизацию матрицы-функции $G \in L_\infty(\Gamma)$ в пространстве $L_p(\Gamma)$ (см. [29]). Скажем, что $G$ Ф-факторизуема, если она допускает представление

$$G(t) = G_+(t) \Lambda(t) G_-(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1.8}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(t^{k_1}, ..., t^{k_n})$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., n$, $G_+$ — обратимая матрица-функция с элементами из $L_p^+(\Gamma)$ и элементы $G_+^{-1}$ являются функциями из $L_q^+(\Gamma)$, а $G_-$ — обратимая матрица-функция с элементами из $L_q^-(\Gamma)$ и элементы $G_-^{-1}$ принадлежат пространству $L_p^-(\Gamma)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Пусть $PC(\Gamma)$ — подпространство кусочно-непрерывных матриц-функций. Для элементов этого пространства существуют односторонние пределы $G(t+0)$ и $G(t-0)$ для каждого $t \in \Gamma$. Необходимые и достаточные условия существования Ф-факторизации этой матрицы-функции в пространстве $L_p(\Gamma)$ таковы:

а) *матрицы $G(t + 0)$ и $G(t - 0)$ обратимы для каждого $t \in \Gamma$;*

б) *для каждого* $j = 1, ..., n$ *и* $t \in \Gamma$ *имеем* $\frac{1}{2\pi} \arg \lambda_j(t) + \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}$, *где* $\lambda_1(t)$,..., $\lambda_n(t)$ *являются собственными числами матрицы-функции* $G(t-0)G(t+0)^{-1}$.

Допустим, $G \in PC(\Gamma)$ — кусочно-постоянная матрица-функция с особыми точками $s_1, ..., s_m \in \Gamma$, расположенными в таком порядке на $\Gamma$. Пусть $G$ Ф-факторизуема в пространстве $L_p(\Gamma)$. Обозначим $M_k = G(s_k - 0)G(s_k + 0)^{-1}$, $k = 1, ..., m$. Тогда $G$ является постоянной на дугах $(s_k, s_{k+1})$ и $M_1 M_2 \cdots M_k = 1$. Следующая теорема описывает Ф-факторизацию кусочно-постоянной матрицы-функции, которая ассоциирована с матрицами монодромии регулярной системы.

**Теорема 1.4** (см. [29]). *Пусть* $G$ *— кусочно-постоянная матрица-функция с точками разрыва* $s_1, \ldots, s_m$. *Предположим, что* $G$ *допускает* Ф*-факторизацию в пространстве* $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, *и пусть* $[M_1, \ldots, M_m]$ *и* $[E_1, \ldots, E_m]$ *— данные, ассоциированные с* $G$ *относительно* $L^p(\Gamma)$.

*Допустим, что существует стандартная система с этими данными, особыми точками* $s_1, \ldots, s_m$ *и частными индексами* $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$. *Пусть* $Y_1$ *и* $Y_2$ *— решения этой системы в* $U_+$ *и* $U_- \setminus \{\infty\}$, *соответственно. Тогда существуют обратимые матрицы* $C_1, C_2$ *такие, что представление*

$$G(t) = G_+(t)d(t)G_-(t), \quad t \in \Gamma \tag{1.9}$$

*дает* Ф*-факторизацию* $G$ *в пространстве* $L^p(\Gamma)$, *где* $d(t) = \operatorname{diag}(t^{\kappa_1}, \ldots, t^{\kappa_n})$ *и*

$$G_+(z) = C_1^{-1} Y_1^{-1}(z), z \in U_+, \quad G_-(z) = d^{-1}(z) Y_2(z) C_2, \quad z \in U_- \setminus \{\infty\}.$$

Эта теорема устанавливает связь между задачей линейного сопряжения с кусочно-постоянными коэффициентами и проблемой Римана — Гильберта. Нашей следующей целью является установление аналогичной связи для обобщенных аналитических функций.

## 2. Локальная теория обобщенных аналитических функций

Обозначим через $H_\mu(U)$, $0 < \mu \leqslant 1$, пространство определенных на $U \subset \mathbb{C}$ и непрерывных по Гёльдеру функций, и пусть $H(U) = \cup_{0<\mu\leqslant 1} H_\mu(U)$. Для функции $f(\tau) \in L_p\overline{U}$, $p \geqslant 1$, рассмотрим следующие функции (см. [6, 8]):

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_U \frac{f(\tau)}{\tau - z} dU, \Pi f(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_U \frac{f(\tau)}{(\tau - z)^2} dU.$$

Если $U$ ограничена, то $Tf(z)$ непрерывна по Гёльдеру, точнее, $T$ является компактным оператором

$$T : L_p(\overline{U}) \to H_{\frac{p-2}{p}}(U).$$

Если граница $\Gamma$ множества $U$ является гладкой кривой и $1 < p \leqslant 2$, то $T$ — ограниченный линейный оператор из $L_p(\overline{U})$ в $L_q(\Gamma)$, $1 < q < \frac{p}{2-p}$.

Пусть $f \in L_p(U)$. Скажем, что $f$ имеет обобщенные частные производные по $\bar{z}$ и $z$, соответственно, если существуют функции $\theta_1$ и $\theta_2$ из класса $L_p(U)$ такие, что равенства

$$\iint_U f \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dU = -\iint_U \theta_1 \varphi dU, \quad \iint_U f \frac{\partial \varphi}{\partial z} dU = -\iint_U \theta_2 \varphi dU$$

выполняются для некоторой функции $\varphi \in C^1(U)$. Функции $\theta_1$ и $\theta_2$ называются *обобщенными частными производными* функции $f$ и обозначаются $f_{\bar{z}} = \theta_1$ и $f_z = \theta_2$.

Известно, что $\partial_{\bar{z}} Tf = f$ и $\partial_{\bar{z}} Tf = \Pi f$. Кроме того, если $f$ — решение уравнения

$$f - q\Pi f = q$$

в пространстве $L_p(\mathbb{C}), p > 2$, где $q(z)$ — измеримая и ограниченная функция на $\mathbb{C}$, $|q(z)| \leqslant q_0 < 1$, и уравнение $q(z) = 0$ выполняется в окрестности бесконечно удаленной точки, то функция $w(z) = z + Tf$ является решением уравнения Бельтрами [6, 8]:

$$\partial_{\bar{z}} w - q(z)\partial_z w = 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим следующую эллиптическую систему первого порядка:

$$\partial_{\bar{z}} f(z) + a(z)f(z) + b(z)\overline{f}(z) = F(z), \tag{2.2}$$

где $a, b, F \in L_p(U), p > 2$. Если $f$ удовлетворяет этому уравнению в окрестности некоторой точки из области $U$, кроме, может быть, точек некоторого дискретного множества $U_f = \{s_1, s_2, ...\}$, то мы скажем, что $f$ — обобщенное решение этого уравнения в окрестности $U$. Множество $U_f$ называется множеством особых точек и зависит от выбора решения. Если $U_f = \emptyset$, то $f$ называется регулярным решением в $U$.

Введем еще некоторые классы функций. Пусть $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, а функция $f(z)$ определена на $\mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям

$$f(z) \in L_p(\mathcal{D}_1) \text{ и } f_q(z) = z^{-q} f(\frac{1}{z}) \in L_p(\mathcal{D}_1), p \geqslant 1,$$

где $q$ — положительное число. Пространство таких функций обозначим через $L_{p,q}$. Каждое $L_{p,q}$ является банаховым пространством и

$$L_{p,l}(C) \supset L_p(C) \equiv L_{p,p/4}(C) \supset L_{p,q}(C),$$

где $pq \leqslant 4 \leqslant lp$. Через $\mathcal{M}_0$ обозначим пространство однолистных голоморфных функций, которые имеют дискретное множество особых точек (полюсы или существенно особые точки).

Пусть $\mathcal{G}^*(a, b, F)$ и $\mathcal{R}(a, b, F)$ — пространства обобщенных и регулярных решений уравнения (2.2), соответственно. Решения системы (2.2) называются *обобщенными аналитическими функциями* [8]. Известно, что они допускают следующие представления:

$$f(z, \overline{z}) = \phi(z) e^{\omega(z, \overline{z})},$$

где $\phi$ — аналитическая функция и $\omega$ ограничена. Существование такого представления обобщенных аналитических функций называется *принципом подобия* [8].

Обозначим через $\mathcal{G}(a, b, F)(U)$ пространство обобщенных аналитических функций, определенных уравнением (2.2). Если $a, b, F \in L_p$ ($a, b, F \in L_{p,2}$), то пространство обобщенных (соотв. регулярных) решений обозначим через $\mathcal{G}_p(a, b, F, U)$ (соотв. $\mathcal{R}_p(a, b, F)(U)$). Пространство $\mathcal{G}_p$ (соотв. $\mathcal{R}_p$) определяется как совокупность таких решений для всех допустимых $a, b, F$. Функции $a, b$ называются образующими $\mathcal{G}$ и $\mathcal{R}$. Пространство функций, которые имеют обобщенные производные в смысле Соболева, обозначим через $\mathcal{S}(U)$.

Пространство обобщенных решений уравнения Коши — Римана $\partial_{\overline{z}} = 0$ в $U$ совпадает с пространством аналитических функций, которые имеют только изолированные особые точки в области $U$ (полюсы или существенно особые точки). Аналогично, регулярными решениями уравнения $\partial_{\overline{z}} = 0$ являются голоморфные функции на $U$.

Основные свойства обобщенных аналитических функций были установлены в [4, 8]. Пусть $w(z)$ — обобщенная аналитическая функция из $\mathcal{R}_{p,2}, p > 2$, и пусть

$$g(z) = a(z) + b(z)\frac{\overline{w(z)}}{w(z)}, \text{ если } w(z) \neq 0, \quad z \in U,$$
$$g(z) = a(z) + b(z), \text{ если } w(z) = 0, \quad z \in U.$$

В этом случае функция

$$\Phi(z) = w(z) e^{-\omega(z)}, \tag{2.3}$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \int\int_U \frac{g(\tau) dU}{\tau - z}$$

голоморфна в $U$, т.е. $\Phi \in \mathcal{M}$. Из этого следует, что если $w(z)$ — голоморфное решение уравнения $\partial_{\overline{z}} w(z) + a(z) w(z) + b(z)\overline{w(z)} = 0$ в $U$, то $\Phi$ голоморфна в $U$. Из представления (2.3) следует, что особые точки (нули) $w(z)$ совпадают с особыми точками (соотв. нулями) функции $\Phi(z)$ и их кратности одни и те же.

Если $w(z)$ не тождественно равна нулю, то обобщенное решение уравнения (2.2) имеет вид [8]:

$$w(z) = \Phi(z) e^{\omega(z)}, \tag{2.4}$$

где

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\int\int_U a(\tau)+b(\tau)\frac{\overline{w(\tau)}}{w(\tau)}\frac{dU}{\tau-z}. \tag{2.5}$$

Приведенные формулы являются разновидностью принципа подобия и играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций. Если $b(z)\equiv 0$, то из (2.4) следует, что [8]

$$w(z)=\Phi(z)e^{\frac{1}{\pi}\int\int_U \frac{a(\tau)}{\tau-z}dU},\quad \Phi\in\mathcal{M}. \tag{2.6}$$

Функции $\Phi(z)$ и $\omega(z)$ из выражения (2.3) называются *аналитическим множителем* и *логарифмической разностью*, соответственно. В общем случае они не определены однозначно функцией $w(z)$, но для функции из $\mathcal{M}_{p,2}$, $p>2$, они однозначно определяются из формул (2.4) и (2.5). В этом случае $\Phi(z)$ и $\omega(z)$ называются, соответственно, *нормальным аналитическим множителем* и *формальной логарифмической разностью*. В дальнейшем мы применяем некоторые важные свойства обобщенных аналитических функций, которые собраны в следующей теореме.

**Теорема 2.1.** *Если функция $w\in\mathcal{R}_{p,2}(C), p>2$, непрерывна и ограничена в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то ее можно представить в виде*

$$w(z)=ce^{\omega(z)}, \tag{2.7}$$

*где $c$ — постоянная и $\omega(z)$ имеет вид* (2.5).

Функция (2.7) называется *обобщенной постоянной*. Следовательно, обобщенные постоянные в пространстве $\mathcal{R}_{p,2}(a,b,\mathbb{C})$ — это ограниченные (на $\mathbb{C}$) решения уравнения

$$\partial_{\overline{z}}w(z)+a(z)w(z)+b(z)\overline{w(z)}=0,\quad a,b\in L_{p,2},\quad p>2$$

с постоянным нормальным аналитическим множителем.

Функция из $\mathcal{G}_{p,2}$, $p>2$, называется *обобщенной рациональной функцией*, если она имеет только конечное число полюсов в комплексной плоскости. В этом случае нормальный аналитический множитель является рациональной аналитической функцией, полюсы которой совпадают с полюсами соответствующей обобщенной аналитической функции. Если обобщенная аналитическая функция имеет полюс только в $\infty$, то она называется *обобщенным многочленом*, и порядком многочлена называется порядок этого полюса.

Сингулярные интегральные операторы $T$ и $\Pi$, которые являются операторами типа Кальдерона — Зигмунда, называются операторами Помпейю и играют важную роль в иерархии интегральных операторов [23]. Заметим, что $\Pi$ является унитарным оператором в пространстве функций, определенных на $\mathcal{D}_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$. А именно, для $m,n\in\mathbb{Z}, m+n\geqslant 0, m^2+n^2\geqslant 1$ определим функции [23]

$$K_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{(-m)!(-1)^m}{(n-1)!\pi}z^{m-1}\overline{z}^{n-1}, & m\leqslant 0,\\ \dfrac{(-n)!(-1)^n}{(m-1)!\pi}z^{m-1}\overline{z}^{n-1}, & n\leqslant 0,\\ \dfrac{z^{m-1}\overline{z}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!\pi}\left[\ln|x|^2-\sum\limits_{\mu=1}^{m-1}\dfrac{1}{\mu}-\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\dfrac{1}{\nu}\right], & m,n\geqslant 1,\end{cases}$$

и интегральные операторы

$$T_{m,n}f(z)=\int_U K_{m,n}(z-\tau)f(\tau)dU,\quad \text{если}\quad m^2+n^2\geqslant 0,\qquad T_{0,0}f(z)=f(z).$$

Важные свойства этих операторов выражаются тождествами

$$T_{0,1}=T,\quad T_{1,0}=\overline{T},\quad T_{-1,1}=\Pi,\quad T_{1,-1}=\overline{\Pi}.$$

Если $m+n>0$, то $T_{m,n}$ — слабо сингулярный оператор и интеграл можно понимать в смысле главного значения по Коши, если $m+n=0$, но $m^2+n^2>0$. Эти операторы дают возможность строить решения некоторых дифференциальных уравнений высшего порядка.

**Теорема 2.2** (см. [23]). 1. *Каждое решение уравнения*

$$w_{\overline{z}} = f,$$

*где* $f \in L_1(U, C)$*, имеет вид* $w = \varphi + Tf$*, где* $\varphi$ *— аналитическая функция.*

2. *Каждое решение уравнения Пуассона*

$$w_{z\overline{z}} = f$$

*при помощи приведенных выше операторов выражается в виде* $w = \varphi + \overline{\psi} + T_{1,1}f$*, где* $\varphi$ *и* $\psi$ *являются аналитическими функциями.*

3. *Каждое решение уравнения Пуассона*

$$w_{\overline{z}\overline{z}} = f$$

*имеет вид* $w = \varphi + \overline{z}\psi + T_{0,2}f$*, где* $\varphi$ *и* $\psi$ *— аналитические функции.*

Как показал Б. Боярский, аналогичные результаты справедливы для *обобщенных аналитических векторов* [4, 5, 7]. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + B(x,y) + F, \tag{2.8}$$

где $u(x,y) = (u_1(x,y), ..., u_{2n}(x,y))^{\mathrm{T}}$ и $A(x,y)$ и $B(x,y)$ являются $(2n \times 2n)$-матрицами-функциями в области $U \subset \mathbb{C}$, $F(x,y) = (F_1(x,y), ..., F_{2n}(x,y))$.

Эта система эллиптична, если для любого $\Lambda \in U$, имеем

$$|A - \lambda E| \neq 0.$$

Для $n = 1$, система (2.8) приводится к канонической форме при помощи замены переменных $u$ и $x, y$ и переписывается в комплексной форме (2.2). Если $n > 1$, то существует аналогичная конструкция, и система (2.8) приводится к канонической форме в том случае, когда нормальная жорданова форма $A(x,y)$ не зависит от переменных $(x,y) \in U$. Это условие выполняется тогда, когда кратности собственных значений $\lambda_1(x,y), ..., \lambda_{2n}(x,y)$ не зависят от $(x,y) \in U$ и ранги $A - \lambda_k E, k = 1, \ldots, 2n$, являются постоянными в $U$. В этом случае система (2.8) имеет каноническую форму

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} - Q(z)\frac{\partial w}{\partial z} = Aw + B\overline{w} + F, \tag{2.9}$$

где $Q$ — квазидиагональная матрица-функция специального типа [4].

Допустим, что $A = B = 0$ и $F = 0$, и рассмотрим систему

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} - Q(z)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{2.10}$$

Решения этой системы $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_n)$ называются *$Q$-голоморфными векторами* в смысле Боярского. В работах [4, 5, 7] Боярский построил замкнутую теорию $Q$-голоморфных векторов и соответствующих граничных задач. Решение (2.10) имеет вид

$$\xi(z) = z\mathbb{I} + T\omega, \tag{2.11}$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица, а $\omega$ является решением класса $L_p(\mathbb{C}), p > 2$, интегрального уравнения

$$\omega(z) + Q(z)\Pi\omega = Q(z).$$

Решение (2.11) является аналогом главного гомеоморфизма уравнения Бельтрами в одномерном случае. Матрица-функция

$$V(t,z) = \frac{\partial \xi(t)}{\partial t}(\xi(t) - \xi(z))^{-1}, \tag{2.12}$$

является аналогом ядра Коши. Она называется *обобщенным ядром Коши* или *фундаментальным решением* для уравнения (2.10) и допускает представления

$$V(t,z)=\frac{1}{t-z}\left(\mathbb{I}+Q(t)\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\right)^{-1}+\frac{R_1(t,z)}{t-z},$$
$$V(t,z)=\frac{1}{t-z}\left(\mathbb{I}+Q(z)\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\right)^{-1}+\frac{R_2(t,z)}{|t-z|^{\alpha}},\quad \alpha\leqslant 1,$$

где $R_1(t,z), R_2(t,z)$ — непрерывные функции на $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ и $R_1(z,z)=0$. Элементы матрицы-функции $V(t,z)$ удовлетворяют условиям

$$|V_{jk}|\leqslant\frac{\text{const}}{|t-z|}.$$

Введем следующую 1-форму:

$$d_Qt=\mathbb{I}dt+Q(t)d\overline{t} \tag{2.13}$$

и рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Q\theta(t), \tag{2.14}$$

где $\theta(t)$ принадлежит в $L_1(\gamma)$.

**Предложение 2.1** (см. [6]). *Если $\theta(t)$ — непрерывная по Гёльдеру вектор-функция, то интеграл* (2.15) *непрерывен по Гёльдеру на $U^+\cup\Gamma$ и $U^-\cup\Gamma$ и граничное значение на $\Gamma$ задается следующим образом*:

$$\Phi^{\pm}(z)=\pm\frac{\theta(z_0)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z_0)d_Q\theta(t). \tag{2.15}$$

*В частности, $\Phi^+(z_0)-\Phi^-(z_0)=\theta(z_0)$. Указанный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.*

Если $\theta(t)\in L_p(\Gamma), p>1$, то равенства (2.15) выполняются почти всюду на $\Gamma$, где $\Phi^{\pm}$ являются угловыми граничными значениями $\Phi(z)$ [12]. Справедлива следующая формула:

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Qt\omega(t)-\frac{1}{\pi}\int\int_U V(t,z)\omega(t)dt, \tag{2.16}$$

где $\omega(t)=\omega_{\overline{t}}-Q(t)\omega_t$. Формула (2.16) справедлива для каждой области $U$ и каждой непрерывной вектор-функции из $W_p^1$, $p\geqslant 1$. По аналогии с одномерным случаем выражение (2.16) называется разложением Помпейю.

Из (2.16) следует формула Коши:

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Qt\omega(t),\ \text{если } z\in U, \tag{2.17}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(t,z)d_Qt\omega(t)=0,\ \text{если } z\overline{\in}U\cup\Gamma. \tag{2.18}$$

Более того, применяя результаты, приведенные выше, заключаем, что для каждой функции $\varphi$ с компактным носителем исчезающее на бесконечности решение $W(z)$ уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}-Q(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\varphi \tag{2.19}$$

имеет вид

$$W(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}V(t,z)\varphi(t)dt.$$

## 3. Глобальные аспекты обобщенных аналитических функций

Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Граничные задачи на таких поверхностях изучались многими авторами (см. [48] и цитированную там литературу). Ниже мы рассмотрим некоторые конструкции и задачи глобальной природы в духе геометрического подхода к задаче 1 и задаче 2, намеченного в первом параграфе.

Ключом для изучения вышеуказанных задач является представление функций при помощи интеграла Коши. Известно, что можно построить интеграл типа Коши на римановой поверхности $X$ [1,11,21,48]. Обозначим соответствующее ядро (оно описано, например, в [48]) через $K_X(\tau, z)d\tau$. Если разрежем поверхность $X$ вдоль циклов, которые являются элементами канонического гомологического базиса, получаем многоугольник $\widehat{X}$, и $K_X(\tau, z)d\tau$ будет однозначной функцией на $\widehat{X}$. Если $\gamma$ — некоторая малая кривая на $\widehat{X}$ и $\psi(\tau)$ — непрерывная по Гёльдеру функция на $\gamma$, мы можем рассмотреть интеграл типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(\tau)K_X(\tau, z)dz.$$

Граничные задачи на римановых поверхностях изучаются при помощи дифференциальных форм. Напомним, что дифференциальная 1-форма на компактной римановой поверхности, которая аналитична везде, кроме, быть может, конечного числа полюсов, называется *абелевым дифференциалом*, а соответствующий неопределенный интеграл называется *абелевым интегралом*. Аналитический абелев дифференциал на римановой поверхности без особых точек называется *абелевым дифференциалом первого рода*. Абелевы дифференциалы, которые имеют конечное число полюсов с нулевыми вычетами, называются *абелевыми дифференциалами второго рода*, а абелев дифференциал, который имеет конечное число полюсов с ненулевыми вычетами, называется *абелевым дифференциалом третьего рода*.

Если $M$ — компактная риманова поверхность рода $g$, то размерность (над полем действительных чисел) линейного пространства абелевых дифференциалов первого рода равна $2g$, и сумма вычетов абелева дифференциала равна нулю. Допустим,что $\gamma_1, ..., \gamma_{2g}$ — канонический базис гомологий $M$, и пусть $z_0$ и $z$ — любые отличные друг от друга точки на $M$. Нормализованные абелевы дифференциалы третьего рода $d\omega_{z_0 z}(\tau)$ и $d\Omega_{z_0 z}(\tau)$ определены как дифференциалы, которые имеют полюсы с вычетами $-1$ и $+1$ в точках $z_0$ и $z$, соответственно, а их периоды удовлетворяют условиям

$$\int_{\gamma_{2j-1}} d\omega_{z_0 z}(\tau) = 0, \quad j = 1, \dots, g,$$
$$\operatorname{Re}\int_{\gamma_j} d\Omega_{z_0 z}(\tau) = 0, \quad j = 1, \dots, 2g.$$

Главным инструментом для изучения граничных задач на римановых поверхностях является интеграл типа Коши. Из существования интеграла типа Коши, в частности, следует интегральное представление Коши и формулы Сохоцкого. Свойства ядра Коши могут быть установлены по аналогии со случаем комплексной плоскости.

**Предложение 3.1.** *Ядро $K(\tau, z)d\tau$ на комплексной плоскости является абелевым дифференциалом третьего рода относительно переменной $\tau$, имеет полюсы первого порядка в точках $\tau = z, \infty$ с вычетами, соответственно, $\pm 1$ и является аналитической функцией относительно $z$ с полюсом в $z = t$ и нулем в $z = \infty$. В частности, $K_{\mathbb{CP}^1}(\tau, z)d\tau = \frac{d\tau}{\tau - z}$.*

Исходя из интеграла типа Коши на сфере Римана, мы построим интеграл типа Коши для любой римановой поверхности. Прямое обобщение невозможно, но есть естественные аналоги. В первую очередь нужно, чтобы $K_X(\tau, z)d\tau$ была функцией относительно $z$ и дифференциальной формой относительно $\tau$. Любой разумный аналог интеграла Коши должен удовлетворять условию

$$K_X(\tau, z)d\tau = \frac{d\tau}{\tau - z} + \text{регулярные слагаемые}, \tag{3.1}$$

из которого вытекает формула Коши и формулы Племеля — Сохоцкого.

Следуя работе [11], обозначим через $d\omega_{qq_0}(p)$ абелев дифференциал третьего рода на римановой поверхности $X$, который а) имеет нулевые периоды и б) имеет два простых полюса в точках $p=q$ и $p=q_0$ с вычетами $+1$ и $-1$, соответственно. Обозначим через

$$d\omega_1(p), d\omega_2(p), ..., d\omega_g(p)$$

канонический базис абелевых дифференциалов первого рода (т.е. периоды задают единичную матрицу размера $g\times g$). Пусть $d\widetilde{\omega}_{qq_0}$ — однозначная ветвь многозначной дифференциальной формы $d\omega_{qq_0}(p)$ на $\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ получается из $X$ при разрезании вдоль $a_1, ..., a_g$ и $d\widetilde{\omega}_{qq_0}$ удовлетворяет условиям $d\widetilde{\omega}_{qq_0}(p)=0$. Эта ветвь выбирается из условия

$$d\widetilde{\omega}_{qq_0}(p)=\int_{q_0}^{q} d_t[d\omega_{tq_0}(p)],$$

где путь интегрирования не пересекает $a_1, ..., a_g$. Этот дифференциал удовлетворяет условиям (3.1). По этой причине $d\widetilde{\omega}_{qq_0}(p)$ можно рассматривать как ядро Коши, и он называется *разрывным ядром Коши*, так как он имеет разрывы вдоль кривых $a_j$. В некоторых случаях он имеет и другие хорошие свойства как в предложении 3.1.

Пусть $\Delta=p_1^{n_1}...p_k^{n_k}$ — дивизор на римановой поверхности $X$. *Мероморфным аналогом ядра Коши* с минимальным характеристическим дивизором $\Delta$ называется выражение вида $A(p,q)dp$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $A(p,q)dp=\frac{dp}{p-q}+$ регулярные слагаемые и является абелевым дифференциалом относительно переменной $p$ с дивизором $q^{-1}\Delta$;

2. относительно переменной $q$ форма $A(p,q)dp$ является мероморфной функцией на $X$ с дивизором $p^{-1}\Delta^{-1}$.

Существует несколько способов построения аналога ядра Коши (см. [1, 21, 48]). Мы описали наиболее естественную возможность, и в дальнейшем изложении используем ядро Коши, построенное таким образом. Заметим, что если разрезать поверхность $X$ вдоль циклов из канонического гомологического базиса, получим многоугольник $\widehat{X}$ и ядро $K_X(\tau,z)d\tau$ будет однозначной функцией на $\widehat{X}$. Если $\gamma$ — достаточно малая гладкая кривая на $\widehat{X}$ и $\psi(\tau)$ — непрерывная по Гёльдеру функция на $\gamma$, то мы можем рассмотреть интеграл типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(\tau)K_X(\tau,z)d\tau$$

для поверхности $X$ и получить формулы Сохоцкого — Племеля [48]:

$$f^{\pm}(z)=\pm\frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(\tau)K_X(\tau,z)d\tau.$$

Здесь интеграл берется в смысле главного значения по Коши и знак $\pm$ соответствует левому или правому граничному значению.

Для любой римановой поверхности $X$ имеется аналог обычного оператора дифференцирования $\partial_{\overline{z}}$ на плоскости, который называется *оператором Дольбо*. Этот оператор тоже обозначим $\partial_{\overline{z}}$ [48]. При помощи этого оператора можно определить эллиптическую систему дифференциальных уравнений на $X$ и исследовать ее с помощью аналога теории, описанной во втором параграфе.

Рассмотрим однородную эллиптическую систему первого порядка на римановой поверхности $X$ вида

$$\partial_{\overline{z}}w(z)+a(z)w(z)+b(z)\overline{w(z)}=0,\ a,b\in L_{p,2},\ p>2. \tag{3.2}$$

Решение этой системы называется *обобщенной аналитической функцией* на $X$. Пусть $s_1,\dots,s_m$ — особые точки форм $a$ и $b$. Скажем, что точка $s_j$ является регулярной особой точкой системы (3.2), если каждое решение имеет не более чем полиномиальный рост в каждой малой секториальной окрестности с вершиной в $s_j$. Система называется регулярной, если все особые точки регулярны. В исследовании такой системы важную роль играет следующий оператор:

$$Pv=-\frac{1}{\pi}\int\int_{\widehat{X}}(a(\tau)v(\tau)+b(\tau)\overline{v(\tau))}K_X(\tau,z)d\widehat{X}, \tag{3.3}$$

где интеграл берется на поверхности.

**Теорема 3.1** (см. [48]). *Оператор* (3.3) *определяет вполне непрерывное отображение*

$$P : L_m^0(X) \to L_l^0(X), \text{ где } \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{p} < 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} < \frac{1}{l} < 1.$$

*Функция* $Pf$ *имеет обобщенную производную и*

$$\partial_{\bar{z}} = a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)}.$$

*Для* $l > \frac{2p}{p-2}$ *функция* $(Pf)(z)$ *непрерывна по Гёльдеру.*

Применяя этот оператор, мы можем переписать верхнюю систему в виде интегрального уравнения.

**Теорема 3.2** (см. [48]). *Если* $v(z)$ *— решение системы* (3.2) *с полюсами не выше первого порядка, то* $v(z)$ *удовлетворяет следующему интегральному уравнению*:

$$v(z) + \frac{1}{\pi} \int \int_{\widehat{X}} (a(\tau)v(\tau) + b(\tau)\overline{v(\tau)})K_X(\tau, z)d\widehat{X} = F(z),$$

*где* $\widehat{F}(z)$ *— абелев интеграл.*

Известно, что размерности над $\mathbb{R}$ пространства обобщенных констант $c$ и обобщенных аналитических дифференциалов первого рода $h$ конечны и

$$c - h = \chi(X),$$

где $\chi$ — эйлерова характеристика.

Обозначим через $L(D)$ и $H(D)$ пространства обобщенных аналитических функций, которые являются кратными дивизора $-D$, а через $H(D)$ обозначим обобщенные дифференциалы, которые кратны дивизору $D$. Тогда имеем следующий аналог формулы Римана — Роха [19]:

$$\dim L(D) - \dim H(D) = 2 \deg D - \chi(X).$$

Заметим, что все рассмотрения второго параграфа для регулярной матричной системы

$$dF = \Omega F \tag{3.4}$$

имеют локальную природу и потому применимы для любой римановой поверхности $X$, что дает возможность построить голоморфное векторное расслоение над $X$ по монодромии данной системы. Более того, применяя решения системы (3.4), можно построить матричную 1-форму $\Omega = D_{\bar{z}}FF^{-1}$ на $X$, аналогичную той, что была в теории фуксовых систем. Все это дает возможность рассмотреть некоторые глобальные свойства решений системы (3.2), которая будет главным объектом исследования в дальнейшем.

Обозначим через $L_p^{\alpha,\beta}(X)$ пространство $L_p$-форм типа $(\alpha, \beta), \alpha, \beta = 0, 1$, с нормой $\|\omega\|_{L_p^{\alpha,\beta}(X)} = \sum_j \|\omega\|_{L_p^{\alpha,\beta}(U_j)}$, где $\{U_j\}$ — открытое покрытие $X$, и обозначим через $W_p(U) \subset L_p(U)$ подпространство функций, которые имеют обобщенную производную. Тогда можно определить следующие операторы:

$$D_z = \frac{\partial}{\partial z} : W_p(U) \to L_p^{1,0}(U), \quad f \mapsto \omega_1 dz = \partial_z f dz,$$
$$D_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : W_p(U) \to L_p^{0,1}(U), \quad f \mapsto \omega_2 d\bar{z} = \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}.$$

Ясно, что $D_{\bar{z}}^2 = 0$, и потому оператор $D_{\bar{z}}$ можно применить для построения групп когомологий, которые называются *группами когомологий Дольбо* (см. [19]).

Обозначим через $\mathbb{C}L_p^1(X)$ *комплексификацию* пространства $L_p^1(X)$, т.е. $\mathbb{C}L_p^1(X) = L_p^1(X) \otimes \mathbb{C}$. Тогда имеем естественное разложение

$$\mathbb{C}L_p^1(X) = L_p^{1,0}(X) \oplus L_p^{0,1}(X) \tag{3.5}$$

в сумму собственных пространств оператора Ходжа $*: L_p^1(X) \to L_p^1(X)$, $* = -\imath$ на $L_p^{1,0}(X)$ и $* = \imath$ на $L_p^{0,1}(X)$. Разложение (3.5) расщепляет оператор $d: L_p^0(X) \to L_p^0(X)$ в сумму $d = D_z + D_{\bar{z}}$.

Далее, пусть, как выше, $\mathcal{E} \to X - C^\infty$-векторное расслоение на $X$, $L_p(X, \mathcal{E})$ — пучок ростков $L_p$-сечений расслоения $\mathcal{E}$ и пусть $\Omega \in L_p^1(X,\mathcal{E}) \otimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ является матричной 1-формой на $X$. Приведенные выше построения можно применить к комплексу $L_p^*(X, \mathcal{E})$ с ковариантной производной $\nabla_\Omega$ и опять получаем разложение пространства $\mathbb{C}L_p^1(X, \mathcal{E})$ и оператор $\nabla_\Omega$: $\mathbb{C}L_p^1(X, \mathcal{E}) = L_p^{1,0}(X, \mathcal{E}) \oplus L_p^{0,1}(X, \mathcal{E})$, $\nabla_\Omega = \nabla'_\Omega + \nabla''_\Omega$.

Локально, в области $U$ имеем $\nabla_\Omega^U = d_U + \Omega$, где $\Omega \in L_p^1(X, U) \otimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 1-форма. Следовательно, $\nabla_\Omega^U = (D_z + \Omega_1) + (D_{\bar{z}} + \Omega_2)$, где $\Omega_1$ и $\Omega_2$ являются, соответственно, голоморфными и антиголоморфными частями матричной 1-формы на $U$. Скажем, что $W_p$-сечение $f$ расслоения $\mathcal{E}$ с $L_p$-связностью является голоморфным, если оно удовлетворяет системе уравнений

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = A(z) f(z), \tag{3.6}$$

где $A(z)$ — $(n \times n)$-матрица-функция с элементами из пространства $L_p^0(X) \otimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и $f(z)$ — вектор-функция $f(z) = (f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z))$. В эквивалентной форме (3.6) можно переписать следующим образом:

$$D_{\bar{z}} f = \Omega f,$$

где $\Omega \in L_p^1(X) \otimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Мы снова применим эти соображения для того, чтобы построить голоморфное векторное расслоение на сфере Римана $\mathbb{CP}^1$, ассоциированное с системой (3.4). Пусть $\{U_j\}$, $j = 1, 2$, открытое покрытие $\mathbb{CP}^1$. Тогда в каждой области $U_j$ решение $\Phi(z)$ можно представить в виде $\Phi(z) = V_j(z)F(z)$, где $V_j(z)$ — голоморфная невырожденная матрица-функция на $U_j^c - S_j$, где $S_j$ — некоторое конечное множество. Сузим $\Phi(z)$ на $(U_1^c \cap U_2^c) - S = (U_1 \cup U_2)^c - S$, $S = S_1 \cup S_2$ и рассмотрим голоморфную матрицу-функцию $\varphi_{12} = V_1(z)V_2(z)^{-1}$ на $(U_1 \cup U_2)^c - S$. Тогда выполняется условие коцикличности [19] и, следовательно, возникает голоморфное векторное расслоение $\mathcal{E}'$ на $\mathbb{CP}^1 - S$. Стандартным путем можно показать, что класс изоморфизма $\mathcal{E}' \to \mathbb{CP}^1 - S$ не зависит от выбора решения из класса калибровочной эквивалентности. Продолжение этого расслоения до голоморфного расслоения $\mathcal{E} \to \mathbb{CP}^1$ происходит хорошо известным путем (см. [3]) и полученное расслоение в общем случае голоморфно нетривиально.

Оператор $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \Omega(z, \bar{z})$ задает $L_p$-связность нашего расслоения. Из этого следует, что его индекс совпадает с индексом оператора Коши — Римана на $X$, так как последний есть в точности эйлерова характеристика пучка голоморфных сечений голоморфного векторного расслоения $\mathcal{E}$.

**Предложение 3.2.** *Группы когомологии $H^i(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(\mathcal{E}))$ и $H^i(\mathbb{CP}^1, \mathcal{G}(\mathcal{E}))$ являются изоморфными для $i = 0, 1$, где $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ являются, соответственно, пучками ростков голоморфных и $Q$-голоморфных сечений $\mathcal{E}$.*

Из этого предложения следует, что число линейно независимых решений задачи линейного сопряжения равно $\sum_{k_j<0} |k_j|$. В терминах групп когомологии $H^i(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(\mathcal{E}))$ и $H^i(\mathbb{CP}^1, \mathcal{G}(\mathcal{E}))$ можно описать число решений и условия устойчивости задачи Римана — Гильберта (см. [33]). Основные топологические конструкции для пучка $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ можно распространить на пучок $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, который содержит всю информацию о глобальных свойствах обобщенных аналитических функций, ассоциированных с системой (3.4).

Обозначим через $\widehat{V}(z)$ матрицу-функцию, которая является решением уравнения (2.10):

$$\widehat{V}_{\bar{z}}^T - (Q^T \widehat{V}^T)_z = 0 \tag{3.7}$$

и имеет вид

$$\widehat{V}(z) = \mathbb{I} - \frac{1}{\pi} \int_U V(t, z)\varphi(t)dt.$$

Такое решение всегда существует при сделанных предположениях. Теперь мы определим операторы $Q$-дифференцирования $\partial_z^Q \varphi$ и $Q$-интегрирования $(Q)\int \varphi$ следующим образом:

$$\partial_z^Q \varphi = \widehat{V}^{-1} \varphi_z,$$

$$(Q)\int\varphi=\int_{z_0}^{z}\widehat{V}(z)(dz+Q\overline{dz})\varphi(z).$$

Ясно, что $Q$-производная и $Q$-интеграл являются $Q$-голоморфными векторами. Аналогично $Q$-дифференцированию вектор-функции можно определить и $Q$-дифференцирование матрицы-функции $\Phi$ следующим образом:

$$\partial_z^Q\Phi=\widehat{V}^{-1}\Phi_z.$$

Обозначим $\Lambda^0_Q(U)\otimes\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ и $\Lambda^1_Q(U)\otimes\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, соответственно, пространства $n\times n$ матричных $Q$-голоморфных 0- и 1-форм на $U$. Пусть $S=\{s_1,..,s_m\}$ — конечное множество точек на комплексной плоскости и пусть $\Omega\in\Lambda^0_Q(\mathbb{C}\setminus S)\otimes\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, т.е. $\Omega$ имеет только изолированные особые точки. Рассмотрим следующую систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\partial_z^Q\Phi=\Omega\Phi. \tag{3.8}$$

**Предложение 3.3** (см. [25]). *В односвязной окрестности $U$ точки $z_0\in\mathbb{C}\setminus S$ система* (3.8) *имеет $Q$-голоморфное решение.*

Матрицу-функцию $\Phi$ можно аналитически продолжить вдоль замкнутого пути $\gamma_j$, который обходит особую точку $s_j$, и получить новое решение $M_j\Phi(z)$. Матрица $M_j\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ зависит только от гомотопического класса $\gamma_j$. Следовательно, мы получаем представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{CP}^1\setminus S,z_0)$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$:

$$\rho_Q:\pi_1(\mathbb{CP}^1\setminus S,z_0)\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \tag{3.9}$$

В этом контексте мы можем обобщить классическую проблему Римана — Гильберта для $Q$-голоморфных векторов следующим образом: заданы точки $s_1,...,s_m$ на $\mathbb{CP}^1$ и представление (3.9) и требуется найти $Q$-голоморфную 1-форму $\Omega$ на $\mathbb{CP}^1\setminus\{s_1,...,s_m\}$ такую, что $s_1,...,s_m$ являются полюсами первого порядка и представление монодромии системы (3.8) совпадает с представлением $\rho_Q$.

Теперь мы хотим применить итерированный интеграл Чена [26] в этом контексте и получить в явном виде матрицы монодромии для данного представления. При исследовании монодромии системы Пфаффа важную роль играет представление решений в экспоненциальном виде. Эту задачу в одномерном случае изучал В. Магнус в [45]. Мы применим итерированный криволинейный интеграл и теорию формальных связностей (понимаемых как операторы параллельного переноса) в форме, предложенной К.-Т. Ченом [26].

Пусть $\omega_1,...,\omega_r\in L^1_p(X)$ и $\gamma:[0,1]\to X$ — кусочно-непрерывный путь. Пусть $a_j$ — функции на $[0,1]$, удовлетворяющие тождествам $\gamma^*\omega_j=a_j(t)dt, j=1,...,r$. Известно, что $r$-итерированный интеграл определяется для 1-форм $\omega_1,...,\omega_r$ как функция на кусочно-непрерывных путях, значение которой на пути $\gamma$ есть число $\gamma\to\int_\gamma\omega_1...\omega_r$, где

$$\int_\gamma\omega_1...\omega_r=\int_{\triangle_r}a_1(t_1)a_2(t_2)...a_r(t_r)dt_1dt_2...dt_r.$$

Здесь в правой части стоит обычный интеграл Лебега по симплексу

$$\triangle_r=\{(t_1,...,t_r):0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant...\leqslant t_r\leqslant 1\}.$$

При переходе к кратному интегралу значение $r$-итерированного интеграла выражается следующим образом:

$$\int_\gamma\omega_1...\omega_r=\int_0^1a_r(t_r)...\int_0^{t_3}a_2(t_2)\left(\int_0^{t_2}a_1(t_1)dt_1\right)dt_2...dt_r.$$

Если $r=1$, получаем обычный криволинейный интеграл.

Допустим, $P_{z_0}X$ — пространство кусочно-непрерывных петель на $X$. Известно, что это дифференциальное пространство [26] и оператор внешнего дифференцирования $d$ определен на $P_{z_0}X$. Как показано в [26], если $d\int_\gamma\omega_1...\omega_r=0$, то $\int_\gamma\omega_1...\omega_r=0$ зависит только от гомотопического класса $\gamma$, следовательно, получаем функцию на $\pi_1(X,z_0)$.

Пусть $\Omega_1,...,\Omega_r$ являются $(m\times m)$-матричными формами с элементами из пространства $L^1_p(X)$. Итерированный интеграл от $\Omega_1,...,\Omega_r$ вводится следующим образом: рассмотрим произведение

матричных форм $\Omega = \Omega_1, ..., \Omega_r$ и определим итеративный интеграл от $\Omega$ поэлементно. Так как мы показали, что эллиптическая система (3.4) определяет связность, следующее предложение является следствием общей теории формальных связностей [26].

**Предложение 3.4.** *Оператор параллельного переноса, соответствующий эллиптической системе* (3.4)*, имеет экспоненциальное представление.*

Из тождества $\partial_{\bar{z}}\Phi\Phi^{-1} = \Omega$ следует, что особыми точками $\Omega$ являются нули матрицы-функции $\Phi$. Это означает, что имеет смысл говорить о регулярных особенностях и ложных особых точках системы (3.4). В частности, скажем, что $z_i \in \{z_1, ..., z_m\}$ являются регулярными особыми точками (3.4), если координаты решения $F(z)$ имеют не более чем полиномиальный рост, когда $z \to z_i$. Если решение $F(z)$ во всех особых точках $z_i, i = 1, ..., m$ имеет регулярные особенности, скажем, что (3.4) — регулярная система. Особая точка называется ложной, если соответствующая матрица монодромии является единичной.

Соответственно, мы можем рассмотреть вариант проблемы Римана — Гильберта для обобщенных аналитических векторов, допуская, что $\Omega$ имеет дополнительные особые точки (и заданную монодромию). В такой постановке, для исследования разрешимости проблемы Римана — Гильберта можно применить классическую схему. В частности, можно рассмотреть ассоциированную с проблемой Римана — Гильберта задачу сопряжения с кусочно-постоянными коэффициентами, которые задаются матрицами монодромии, как в параграфе 1. Для такой задачи линейного сопряжения справедлив аналог теоремы 1.1, который влечет разрешимость задачи в подходящем классе функций. Применяя технику, развитую Племелем [46], из решения такой задачи линейного сопряжения мы получим систему (3.4), которая имеет заданную монодромию.

Однако неясно, как можно контролировать появление ложных особенностей, поэтому это не гарантирует решения задачи в строгом смысле. Мы не развиваем высказанные соображения, так как основной интерес представляет именно решение задачи в строгом смысле слова. Как показывают замечания в конце данной работы, скорее всего строгая разрешимость не имеет места без дополнительных предположений вроде неприводимости заданного представления монодромии.

Имея в виду дальнейшее исследование этого вопроса и памятуя, что явные формулы для матриц монодромии чрезвычайно полезны в классическом случае [14], мы завершим обсуждение проблемы Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций, указав явные формулы для матриц монодромии системы (3.4).

Пусть $\tilde{z} \in U_{z_0}$ — некоторая точка и пусть $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ — петля с началом в $\tilde{z}$ такие, что каждая $\gamma_i$ обходит $z_i$ и не обходит других точек $z_j \neq z_i$. Рассмотрим аналитическое продолжение решения (3.4) $F(z)$ вдоль $\gamma_i$. Тогда получим аналитический элемент $\tilde{F}(z)$ функции $F(z)$ и имеем $\tilde{F}_i(z) = m_i F(z)$, где $M_i \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Это равенство зависит только от гомотопического класса петли $\gamma_i$. Следовательно, получаем представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \backslash \{z_1, ..., z_m\}, \tilde{z}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, заданное соответствием $\gamma_i \to M_i$.

**Теорема 3.3.** *Пусть система* (3.4) *имеет регулярные особые точки $z_1, ..., z_m$. Тогда она задает представление монодромии фундаментальной группы*

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C} \backslash \{z_1, ..., z_m\}, \tilde{z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

*и каждая матрица монодромии выражается в виде следующей суммы*:

$$\rho(\gamma_j) = 1 + \int_{\gamma_j} \Omega + \int_{\gamma_j} \Omega\Omega + \int_{\gamma_j} \Omega\Omega\Omega + ... + ...., \tag{3.10}$$

*где все члены ряда задаются при помощи интеграла Чена.*

Сходимость ряда (3.10) доказывается следующим образом. Пусть 1-форма $\Omega$ гладка везде, кроме как, быть может, в точках $s_1, ..., s_m \in X$. Пусть, как и выше, $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ и $X_m = X - S$. Тогда для любого $\gamma \in PX_m$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| \int_{\gamma_j} \overbrace{\Omega ... \Omega}^{r} \right| = o\left( \frac{C^r}{r!} \right),$$

и ряд (3.10) сходится абсолютно [37].

Во многих случаях, важных на практике, матрица $Q$ в (3.4) имеет специальный вид, и (3.4) может быть записана в канонической форме, что упрощает исследование. Например, если значения $Q$ — нижнетреугольные матрицы, чья форма не меняется во всей области задания, то говорят, что (3.4) имеет *нормальную форму Боярского* [51]. Если же $Q$ — постоянная квазитреугольная матрица, то (3.4) называется *нормальной формой Дуглиса* эллиптической системы на плоскости.

Проиллюстрируем предшествующие рассмотрения в последнем случае. Обозначим через $\mathcal{D}$ коммутативную ассоциативную алгебру с образующими $i, e$ и соотношениями:

$$i^2 = -1, \quad e^r = 0, r \in \mathbb{N}.$$

Элементы этой алгебры называются гиперкомплексными числами и имеют вид $\sum_{k=1}^{r-1}(a_k + ib_k)e^k$. Любую функцию $V : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{D}$ можно переписать следующим образом:

$$V(x,y) = \sum_{k=0}^{r-1}(u_k(x,y) + iv_k(x,y))e^k,$$

где $v_k, u_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ являются действительными функциями. Непрерывные функции такого вида называются гиперкомплексными функциями, и множество гиперкомплексных функций обозначим через $\mathcal{H}$. Определим на $\mathcal{H}$ дифференциальный оператор

$$D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

формулой

$$D = D_x + (a + ib + e)D_y, \text{ where } D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Этот оператор удовлетворяет правилу Лейбница, т.е. для любой пары гиперкомплексных функций $U, V \in \mathcal{H}$ имеем

$$D(UV) = DU \cdot V + U \cdot DV.$$

Оператор $D$ называется *обобщенным оператором Бельтрами*, а уравнение

$$DV = 0$$

называется *обобщенным уравнением Бельтрами*.

Рассмотрим теперь следующее дифференциальное уравнение:

$$DV + \sum_{k=0}^{r-1} e^k \sum_{l=0}^{k}(a_{kl}W_l + b_{kl}\overline{W}_l) = 0, \tag{3.11}$$

где $W$ является гиперкомплексной функцией, а $a_{kl}, b_{kl}$ являются комплексными функциями.

**Теорема 3.4** (см. [32]). *Пусть $W$ — непрерывное и ограниченное решение* (3.11)*, определенное на всей комплексной плоскости, и $a_{kl}, b_{kl} \in L^{p,2}(\mathbb{C})$. Тогда $W$ допускает экспоненциальное представление*

$$W(z) = C \exp \omega(z),$$

*где $C$ — гиперкомплексная постоянная, а $\omega$ — гиперкомплексная непрерывная по Гёльдеру функция с показателем $\frac{p-2}{p}$.*

Эта теорема является аналогом представления Векуа обобщенной аналитической функции [8]. В то же время она может быть выведена из теоремы 3.3 с помощью структурных свойств алгебры $\mathcal{D}$. Заметим, что если $a$ и $b$ являются гиперкомплексными числами, то

$$\exp(ab) = \exp a \exp b \text{ и } \log(\exp(a)) = \exp(\log(a)) = a.$$

Более того, каждая гиперкомплексная функция $f$ допускает каноническую факторизацию [32], т.е.

$$f(t) = f^+(t)\tau(t)^\kappa f^-(t), \tag{3.12}$$

где $f^+(z)$ гипераналитична и обратима в $U^+$, $f^-(z)$ гипераналитична в $U^- \cup \{\infty\}$, $\kappa$ — целое число, а $\tau(t)$ — так называемое *порождающее решение* системы

$$DW = 0, \tag{3.13}$$

где $DW = \sum_{k=0}^{r} e^k W_{k\overline{z}} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} e^{j+k} q_k W_{j\overline{z}}$.

Порождающее решение является специальным решением уравнения (3.13) и через оператор Помпейю $T$ (см. параграф 2) выражается следующим образом:

$$\tau(t) = z + T(z). \tag{3.14}$$

Более подробное обсуждение имеется в [32].

Рассмотрим задачу 2 для гиперкомплексных функций, которая заключается в отыскании кусочно-гиперкомплексной функции, удовлетворяющей граничному условию

$$\Phi^+(t) = f(t)\Phi^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $f(t)$ — квазидиагональная матрица и $\det f(t) \neq 0$.

Из работ [17, 39] следует, что $f(t)$ определяет голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{CP}^1$, которое мы обозначим через $\mathcal{E} \to \mathbb{CP}^1$ как в параграфе 1. Число линейно независимых решений приведенной выше задачи вычисляется как ранг нулевой группы когомологий $\mathbb{CP}^1$ с коэффициентами в пучке ростков гиперкомплексных сечений расслоения $\mathcal{E}$.

В заключение отметим, что проблема Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций связана с некоторыми тонкими феноменами, которые невозможно описать в топологических терминах. Например, известно, что разрешимость задачи 1 в классе фуксовых систем зависит от расположения заданных особых точек [22]. Оказывается, что аналог этого факта имеет место в контексте обобщенных аналитических функций.

Более точно, Г. Бегер в работе [23] рассмотрел следующую задачу Гильберта для особой эллиптической системы:

$$\partial_{\overline{z}} w = \frac{\mu}{\overline{z} - \overline{z}_0} w + aw + b\overline{w}, \tag{3.15}$$

где $\Gamma$ — единичная окружность, являющаяся границей единичного круга $U$, $\mu$ — постоянная, а $z_0 \in U \cup S^1$. Задача Гильберта заключается в отыскании регулярного решения $w$ системы (3.15) в $U$ такого, что оно непрерывно на $U \cup S^1$, $w_{\overline{z}}, w_z \in L^p(U \cup S^1)$ для некоторого $p > 2$ и удовлетворяет на $S^1$ следующему граничному условию:

$$\mathrm{Re}[\overline{G(z)} w(z)] = g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{3.16}$$

где $G$ и $g$ — заданные функции на $S^1$.

Бегер показал, что число линейно независимых решений зависит не только от индекса задачи, но также от расположения особой точки $z_0$. Из этого легко получается, что в общем случае число линейно независимых решений зависит от расположения и типа особых точек. Более того, в [18] авторы рассмотрели систему

$$\overline{\partial} W = AW + BW$$

с особыми коэффициентами на римановой поверхности и показали, что индекс этой системы зависит не только от рода поверхности, но также от типа особенностей коэффициентов. Эти результаты показывают, что задачи 1 и 2 в классе гипераналитических и обобщенных аналитических функций обладают интересными свойствами и заслуживают дальнейшего изучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Абдулаев Р.* Задача Римана на открытых римановых поверхностях // Докл. АН СССР. — 1963. — *152*, № 6. — С. 1279–1281.
2. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направнения. — 1985. — *1*. — С. 7–149.
3. *Болибрух А. А.* Проблема Римана — Гильберта // Успехи мат. наук. — 1990. — *45*, № 2. — С. 1–47.
4. *Боярский Б.* Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Pol. Math. — 1966. — *17*. — С. 281–320.

5. *Боярский Б.* Общее представление решений эллиптической системы $2m$ уравнений на плоскости // Докл. АН СССР. — 1958. — *122*, № 4. — С. 321–324.
6. *Боярский Б.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. — 1957. — *43*. — С. 451–503.
7. *Боярский Б.* Некоторые граничные задачи для системы $2m$ уравнений эллиптического типа на плоскости // Докл. АН СССР. — 1959. — *124*, № 1. — С. 15–18.
8. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1989.
9. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. — М.: Наука, 1970.
10. *Голубева В. А., Лексин В. П.* Экспоненциальное представление решений систем Пфаффа // Дифференц. уравнения. — 1991. — *27*, № 9. — С. 1526–1538.
11. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. — 1971. — *26*, № 1. — С. 113–179.
12. *Нго Ван Лыок* Граничная задача линейного сопряжения общего вида для $Q$-голоморфных векторов // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1970. — *57*, № 3. — С. 549–552.
13. *Нго Ван Лыок* Дифференциальные граничные задачи общего вида для обобщенных аналитических векторов // Труды Института прикладной математики им. И. Н. Векуа. — 1988. — *28*. — С. 20–131.
14. *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1957.
15. *Манджавидзе Г. Ф.* Граничные задачи сопряжения со смещением для аналитических и обобщенных аналитических функций. — Инст. прикл. мат. им. И. Н. Векуа, 1990.
16. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
17. *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. — М.: Мир, 1990.
18. *Родин Ю. Л., Тураколов А.* Краевая задача Римана для обобщенных аналитических функций с сингулярными коэффициентами на компактной римановой поверхности // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1979. — *96*, № 1. — С. 21–24.
19. *Форстер О.* Римановы поверхности. — М.: Мир, 1980.
20. *Химшиашвили Г. Н.* О задаче Римана — Гильберта для компактной группы Ли // Докл. АН СССР. — 1990. — *310*, № 5. — С. 1055–1058.
21. *Чибрикова Л. И.* Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Математический анализ. — 1980. — *18*. — С. 3–66.
22. *Anosov D. V., Bolibruch A. A.* The Riemann — Hilbert problem. — Aspects of Mathematics, Viehweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.
23. *Begehr H.* Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis // Integral Transforms and Special Functions. — 2002. — *13*. — С. 223–241.
24. *Birkhoff G.* Collected mathematical papers. Vol. 1. — Amer. Math. Soc., 1950.
25. *Bojarski B.* Connections between complex analytical and geometrical aspects of the Riemann — Hilbert transmission problem // «Complex Analysis. Methods, Trends, Applications». — Berlin: Akad. Verlag, 1983. — С. 21–35.
26. *Chen K. T.* Iterated path integrals // Bull. Amer. Math. Soc. — 1977. — *83*, № 5. — С. 831–879.
27. *Deligne P.* Equations differentielles a points singuliers reguliers // Lect. Notes Math. — 1970. — *163*.
28. *Douglis A.* A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. — 1963. — *6*. — С. 259–289.
29. *Ehrhardt T., Spitkovsky I.* Factorization of piecewise constant matrix functions and systems of linear differential equations // Algebra i Analiz. — 2001. — *13*, № 6. — С. 56–123.
30. *Fuchs L.* Zur Theorie der linearen Differentalgleichungen. — Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Einleitung und No. 1–7, 1888, 1115–1126; No. 8–15, 1888, 1273–1290; No. 16–21, 1889, 713–726; No. 23–31, 1890, 21–38. (Reprinted in «Gesammelte Mathematische Werke», Bd. 3. — Mayer and Müller, Berlin, 1909.)
31. *Fuchs L.* Über lineare Differentalgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen. — Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1892, 157–176. (Reprinted in «Gesammelte Mathematische Werke», Bd. 3. — Mayer and Müller, Berlin, 1909.)
32. *Gilbert R., Buchanan J.* First order elliptic systems: A function theoretic approach. — Academic Press, 1983.
33. *Giorgadze G.* On some geometric properties of the generalized analytic functions // Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math. — 1998. — *13*, № 1. — С. 6–10.

34. *Giorgadze G.* On the monodromy representation of elliptic system // Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Appl. Math. — 1999. — *14*, № 1. — С. 21–23.
35. *Giorgadze G.* G-systems and holomorphic principal bundles // J. Dyn. Contr. Syst. — 2002. — *8*. — С. 245–291.
36. *Giorgadze G.* Regular systems on Riemann surfaces // J. Math. Sci. — 2003. — *118*, № 5. — С. 5347–5399.
37. *Hain R.* On a generalization of Hilbert's 21st problem // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). — 1986. — *19*, № 4. — С. 609–627.
38. *Hilbert D.* Mathematische Probleme // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. — 1900. — С. 253–297.
39. *Khimshiashvili G.* Lie groups and transmission problems on Riemann surfaces // Contemp. Math. — 1992. — *131*. — С. 164–178.
40. *Khimshiashvili G.* Geometric aspects of Riemann — Hilbert problems // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2002. — *27*. — С. 1–114.
41. *Khimshiashvili G.* Global geometric aspects of linear conjugation problems // J. Math. Sci. — 2003. — *118*, № 5. — С. 5400–5466.
42. *Kohn T.* Un resultat de Plemelj // Progr. Math. Birkhäuser. — 1983. — *37*. — С. 307–312.
43. *Kostov V. P.* Fuchsian linear systems on $\mathbb{CP}^1$ and Riemann — Hilbert problem // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. 1. — 1992. — *315*. — С. 143–148.
44. *Levelt A. H. M.* Hypergeometric functions // Proc. Koninkl. Netherlands Acad. Wet., Ser. A, Math. Sci. — 1961. — *64*. — С. 361–401.
45. *Magnus W.* On the exponential representation of solutions of differential equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1954. — *7*. — С. 649–673.
46. *Plemelj J.* Riemannsche Funktionenscharen mit gegebenen Monodromiegruppe // Monatshefte für Math. und Phys. XIX, 1908, 211–245.
47. *Riemann B.* Zwei allgemeine Satze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten. — Gesammelte Werke. Leipzig: Teubner, 1892. — С. 379–390.
48. *Rodin Yu. L.* The Riemann boundary problem on the Riemann surfaces. — Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1988.
49. *Röhrl H.* Holomorphic vector bundles over Riemann surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — *68*, № 3. — С. 125–160.
50. *Röhrl H.* Der Riemann — Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen // Math. Ann. — 1957. — *133*. — С. 1–25.
51. *Wendland W. L.* Elliptic systems in the plane. — London — San Francisco — Melbourne: Pitman, 1979.

Г. Гиоргадзе
АН Грузии, Институт Кибернетики

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 52–70

УДК 515.172.23

# ДЕФОРМАЦИИ С СЕЧЕНИЕМ: КОКАСАТЕЛЬНАЯ КОГОМОЛОГИЯ, УСЛОВИЯ ПЛОСКОСТИ И МОДУЛЯРНЫЕ ПОДРОСТКИ

© 2004 г. **Т. ХИРШ, Б. МАРТИН**

Аннотация. Изучаются модулярные подпространства, соответствующие двум деформационным функторам, связанным с изолированной особенностью $X_0$: функтор $\mathrm{Def}_{X_0}$ деформаций $X_0$ и функтор $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ деформаций с сечением $X_0$. После напоминания основных результатов о касательной когомологии аналитических алгебр и общей теории деформаций с сечением приводятся несколько критериев модулярности в терминах модулей относительной касательной когомологии деформации. В частности, показано, что модулярные страты совпадают для функторов $\mathrm{Def}_{X_0}$ и $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ квазиоднородной особенности полного пересечения. В заключение проводится сравнение условий плоскости для модулей первой касательной когомологии рассматриваемых деформационных функторов.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . 52
1. Кокасательная когомология . . . 53
1.1. Кокасательная когомология аналитических алгебр . . . 53
1.2. Когомологические функторы $T^i(f,-)$ . . . 55
2. Деформации с сечением . . . 57
2.1. Функтор $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ . . . 57
2.2. Кокасательная когомология $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ . . . 57
2.3. Построение версальной деформации с сечением . . . 58
3. Модулярные деформации . . . 60
3.1. Определение и основные свойства . . . 60
3.2. Последовательность Кодаиры—Спенсера деформации . . . 61
3.3. Критерий модулярности в терминах $T^0$ . . . 62
3.4. Квазиоднородные полные пересечения . . . 64
4. Плоскость и модулярные деформации . . . 65
4.1. Модулярность как плоскость первого модуля Тюриной . . . 65
4.2. Сравнение условий плоскости . . . 67
Список литературы . . . 69

## Введение

При построении пространств модулей аналитических объектов одна из основных трудностей связана с тем, что полууниверсальные деформации рассматриваемых объектов, вообще говоря, не являются универсальными. Один из подходов к построению локальных пространств модулей состоит в изучении некоторого максимального универсального подмножества в базе полууниверсальной деформации. Соответствующее понятие модулярной деформации было введено В. П. Паламодовым [26] для комплексных пространств, а затем О. Лаудалем [16] в абстрактном контексте.

В этой работе изучается исключительно локальный случай ростка аналитического пространства, то есть деформации особенностей. Этот вопрос уже изучался, см., например, [18,20]. Была получена следующая характеризация модулярных подпространств в базе полууниверсальной деформации $\xi : X \to S$ особенности $X_0$: $M \subseteq S$ модулярно, если и только если все векторные поля, касательные к специальному слою, поднимаются до вертикальных векторных полей семейства $\xi$. Этот критерий

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

имеется в [26] в контексте компактных комплексных пространств. Для деформаций полных пересечений и пространственных кривых модулярное подпространство может быть интерпретировано как страт уплощения относительного модуля Тюриной $T^1(X/S)$. Это может быть использовано для получения нетривиальных примеров модулярных стратов с помощью нового алгоритма для нахождения локальных уплощений. Этот алгоритм и его реализация в системе компьютерной алгебры `Singular` (см. [13]) также описаны в [20].

Мы изучаем сходную ситуацию *деформаций с сечением* ростка $X_0$, то есть деформаций $\xi : X \to S$ пространства $X_0$ вместе с морфизмом $\sigma : S \to X$ таким, что $\xi \circ \sigma = \mathrm{id}_S$. В первом разделе дается краткий обзор кокасательной когомологии аналитических алгебр и их морфизмов, которые будут использованы в основной части работы.

Второй раздел содержит основные результаты о деформациях с сечением. В частности, результаты работы [7] о кокасательной когомологии таких деформаций и построении полууниверсальной деформации с сечением приводятся в явном виде для полных пересечений.

В третьем разделе мы приводим разновидность последовательности Кодаиры—Спенсера деформации, которая содержит информацию о заданном сечении. Располагая этой техникой, мы формулируем и доказываем критерий модулярности в терминах поднятия векторных полей на $X_0$ со значениями в максимальном идеале $\mathcal{O}_{X_0}$ до вертикальных векторных полей семейства. В качестве приложения мы доказываем, что для квазиоднородного полного пересечения модулярные страты по отношению к обоим деформационным функторам совпадают. При доказательстве существенно используется описание модуля дифференцирований $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_0})$ для этого класса особенностей, полученное А. Г. Александровым [1].

В последнем разделе мы даем интерпретацию этого критерия в терминах плоскости модуля первой кокасательной когомологии $X$ над $S$ с коэффициентами в ядре $\sigma^* : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_S$. Затем мы сравниваем условия плоскости для модулей первой и нулевой кокасательной когомологий. В заключение исследуется связь между модулярными подпространствами обоих деформационных функторов, причем мы ограничиваемся деформациями с особым сечением в случае гиперповерхностей.

## 1. Кокасательная когомология

В этом вводном разделе мы приведем необходимые для дальнейшего результаты о кокасательной когомологии морфизма $(X, 0) \to (S, 0)$ ростков комплексных пространств или, что эквивалентно, морфизмов $\mathcal{O}_{S,0} \to \mathcal{O}_{X,0}$ аналитических алгебр. Поскольку мы работаем только в категории ростков комплексных пространств (Gan) (соответственно, в категории аналитических алгебр (Analg)), мы обычно не указываем отмеченную точку и пишем просто $X$ для обозначения ростка комплексного пространства $(X, 0)$.

**1.1. Кокасательная когомология аналитических алгебр.** Напомним конструкцию кокасательного комплекса морфизма аналитических алгебр $A \to B$, а также определение и свойства так называемых *кокасательных когомологических функторов* $T^i(B/A, -)$. Это комплексно-аналитический аналог когомологий Андрэ — Квиллена (см. [6, 27]). Детали и доказательства приводимых утверждений содержатся в [2, 7, 10, 25].

**Определение 1.** Пусть $A \to B$ — гомоморфизм аналитических алгебр.

1) *Резольвента* $R$ для $B$ над $A$ — это ДГ-алгебра (дифференциальная градуированная антикоммутативная аналитическая алгебра), которая свободна как $A$-алгебра, вместе с сюръективным квазиизоморфизмом комплексов, т.е. $H^n(R) = 0$ при $n < 0$ и $H^0(R) \simeq B$, причем этот изоморфизм индуцирован из $p$.
2) Комплекс
$$\mathbb{L}^{\bullet}_{B/A} := \Omega_{R/A} \otimes_R B$$
называется *кокасательным комплексом* $B$ над $A$. Здесь $\Omega_{R/A}$ обозначает модуль *кэлеровых дифференциалов* $R$ над $A$.

3) Для $B$-модуля $M$ мы определяем *модули касательной когомологии* $B$ над $A$ со значениями в $M$ как

$$T^i(B/A, M) := \operatorname{Ext}^i_B(\mathbb{L}^\bullet_{B/A}, M), \qquad i \geqslant 0.$$

**Замечание 1.** Существование резольвенты $B$ над $A$ и корректность определения $T^i$ установлены в вышеупомянутых работах. Для упрощения записи введем обозначения

$$T^i(B/A) := T^i(B/A, B), \qquad T^i(B, M) := T^i(B/\mathbb{C}, M).$$

Кроме того, если $X \to S$ — морфизм ростков пространств и $M$ — $\mathcal{O}_X$-модуль, положим

$$T^i(X/S, M) := T^i(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S, M).$$

**Предложение 1.1.** *Функторы $T^i$ имеют следующие свойства*:

1) $T^0(B/A, M) \simeq \operatorname{Der}_A(B, M)$;
2) *если $A \to B$ превращает $B$ в регулярную $A$-алгебру, то $T^i(B/A, M) = 0$ для $i > 0$;*
3) *если $B \simeq A\{x\}/(f_1, \ldots, f_k)$, причем $f_1, \ldots, f_k$ образуют регулярную последовательность в $A\{x\}$, то $T^i(B/A, M) = 0$ для $i > 1$;*
4) *если $A \to B$ — сюръекция с ядром $I$, то $T^1(B/A, M) \simeq \operatorname{Hom}_B(I/I^2, M)$;*
5) *если $T^1(B/A, \mathbb{C}) = 0$, то $B$ — регулярная $A$-алгебра*;
6) *если $T^2(B/A, \mathbb{C}) = 0$, то $B \simeq A\{x\}/(f_1, \ldots, f_k)$ с регулярной последовательностью $f_1, \ldots, f_k \in A\{x\}$.*

Из функториальных свойств кокасательной когомологии вытекают следующие точные последовательности.

**Предложение 1.2.** *Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — короткая точная последовательность $B$-модулей. Тогда имеется длинная точная последовательность когомологий*

$$0 \to T^0(B/A, M') \to T^0(B/A, M) \to T^0(B/A, M'') \to T^1(B/A, M') \to \ldots$$

Если, кроме того, задан морфизм $B \to C$, то имеется точная последовательность

$$0 \to \mathbb{L}^\bullet_{B/A} \otimes_B C \to \mathbb{L}^\bullet_{C/A} \to \mathbb{L}^\bullet_{C/B} \to 0,$$

откуда получаем следующее предложение.

**Предложение 1.3.** *Если $A \to B \to C$ — гомоморфизмы аналитических алгебр и $M$ — $C$-модуль, то имеется короткая точная последовательность когомологий*

$$0 \to T^0(C/B, M) \to T^0(C/A, M) \to T^0(B/A, M) \to T^1(C/B, M) \to \ldots.$$

В частности, объединяя предложения 1.1 и 1.3, получаем следующее предложение.

**Предложение 1.4.** *Пусть $B \simeq A\{x\}/I$ — факторалгебра регулярной аналитической $A$-алгебры $A\{x\}$ и пусть $M$ — $B$-модуль. Тогда имеется точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Der}_A(B, M) \to \operatorname{Der}_A(A\{x\}, M) \to \operatorname{Hom}_B(I/I^2, M) \to T^1(B/A, M) \to 0.$$

*Доказательство.* Применяя предложение 1.3 к гомоморфизмам $A \to A\{x\} \to B$, получаем точную последовательность

$$0 \to T^0(B/A, M) \to T^0(A\{x\}/A, M) \to T^1(B/A\{x\}, M) \to T^1(B/A, M) \to 0,$$

за счет свойства 2) в предложении 1.1 и того факта, что $T^0(B/A\{x\}, M) \simeq \operatorname{Der}_{A\{x\}}(B, M) = 0$. Теперь утверждение следует из соотношений 1) и 4) в предложении 1.1.

**Замечание 2.** На самом деле указанная последовательность получается применением $\operatorname{Hom}_B(-, M)$ к так называемой *конормальной последовательности*

$$I/I^2 \to \Omega_{A\{x\}/A} \otimes_{A\{x\}} B \to \Omega_{B/A} \to 0$$

(см., например, [9]).

Наконец, следующее предложение описывает поведение функторов $T^i$ при замене базы.

**Предложение 1.5.** *Пусть даны морфизмы аналитических алгебр $A \to B$ и $A \to A'$ и $B' := B \otimes_A A'$, т.е. имеется кодекартова диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' = B \otimes_A A' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A'. \end{array}$$

*Если $A \to A'$ или $A \to B$ — плоский морфизм, то для каждого $B'$-модуля $M$ и $i \geqslant 0$ существует естественный изоморфизм*

$$T^i(B/A, M) \simeq T^i(B'/A', M).$$

**Замечание 3.** Если в этом предложении $A \to A'$ и $B \to B'$ плоски, то для любого $B$-модуля $M$ справедливо также соотношение $T^i(B/A, M) \otimes_A A' \simeq T^i(B'/A', M \otimes_A A')$. Если только $A \to A'$ — плоский морфизм, то соответствующее отображение существует, но не обязательно является изоморфизмом.

Мы пока что привели определение и свойства относительной кокасательной когомологии морфизма аналитических алгебр $A \to B$; полагая $A := \mathbb{C}$, получаем абсолютную кокасательную когомологию алгебры $B$. Пусть теперь $X_0$ — росток комплексного пространства. Тогда согласно [25, §5], [7, 2.4.4], имеется следующая интерпретация $T^i(X_0)$ в терминах *деформаций* ростка $X_0$, то есть в терминах плоских отображений $\xi : X \to S$ с $\xi^{-1}(0) \simeq X_0$ (здесь и в дальнейшем $D$ обозначает одноточечное пространство $\{0\}$ с $\mathcal{O}_D \simeq \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$):

- $T^0(X_0)$ изоморфно модулю инфинитезимальных автоморфизмов $X_0$, то есть автоморфизмов $X_0 \times D$ над $D$;
- $T^1(X_0)$ совпадает с пространством инфинитезимальных деформаций первого порядка, т.е. с касательным пространством *деформационного функтора*

$$\mathrm{Def}_{X_0}(S) := \{\text{классы изоморфизма деформаций } X_0 \text{ над } S\};$$

- $T^2(X_0)$ содержит препятствия к поднятию деформаций до более высокого порядка.

Аналогичные утверждения верны для модулей $T^i(X/S)$, контролирующих относительные деформации $X$ над $S$, задаваемые хорошо известной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathcal{X} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \overset{\xi}{\searrow} & \\ & & & & B. \\ S & \overset{j}{\hookrightarrow} & S \times B & \overset{\mathrm{pr}_2}{\nearrow} & \end{array}$$

**1.2. Когомологические функторы $T^i(f, -)$.** В дальнейшем мы рассматриваем также деформации морфизмов ростков $f : X \to S$. Соответствующая кокасательная когомология дается функторами $T^i(f, -)$, которые мы сейчас определим. Детали и приложения приводимых конструкций и их глобальных вариантов к деформациям морфизмов комплексных пространств содержатся в [10].

**Определение 2.** Пусть $A, B$ и $C$ — аналитические алгебры такие, что $B$ и $C$ являются $A$-алгебрами, и пусть $f : B \to C$ — гомоморфизм $A$-алгебр (для приложений, которые мы имеем в виду, наиболее важен, конечно, случай $A = \mathbb{C}$). Выберем резольвенты $R$ (соответственно, $S$) для $B$ (соответственно, $C$) над $A$, которые согласованы с $f$, т.е. имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \overset{f}{\longrightarrow} & C \end{array}$$

ДГ-алгебр над $A$.

1) Определим
$$\mathbb{L}_f^\bullet := (\mathbb{L}_{B/A}^\bullet, \mathbb{L}_{C/A}^\bullet).$$
Формально, это комплекс в следующей категории $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}$ — абелева категория, объектами которой являются тройки $(M_1, M_2, h)$, состоящие из $B$-модуля $M_1$, $C$-модуля $M_2$ и гомоморфизма $h : M_1 \to M_2$ над $f : B \to C$. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}((M_1, M_2, h), (M_1', M_2', h'))$ состоит из всех пар $(g_1, g_2)$, где $g_1 : M_1 \to M_1'$ — гомоморфизм $B$-модулей, а $g_2 : M_2 \to M_2'$ — гомоморфизм $C$-модулей, таких, что $g_2 \circ h = h' \circ g_1$. Тогда $\mathbb{L}_f^\bullet$ — комплекс в производной категории $D^-(\mathcal{C})$.
2) Для $B$-модуля $M$ положим
$$T^i(f/A, M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\mathbb{L}_f^\bullet, (M, M \otimes_B C)), \qquad i \geqslant 0.$$
Как и выше, мы пишем просто $T^i(f, M)$, если $A = \mathbb{C}$ и $T^i(f/A) := T^i(f/A, B)$.
3) Более общо, полагаем
$$T^i(f/A, (M_1, M_2)) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\mathbb{L}_f^\bullet, (M_1, M_2)), \qquad i \geqslant 0,$$
для каждого объекта $(M_1, M_2, h)$ в $\mathcal{C}$.

Функтор $T^0(f, -)$ также можно описать более явно в терминах дифференцирований.

**Предложение 1.6.** *Пусть $f : B \to C$ как выше и $M$ — $B$-модуль. Тогда $T^0(f/A, M)$ состоит из всех пар согласованных деформаций $(\delta, \tilde{\delta}) \in \mathrm{Der}_A(B, M) \times \mathrm{Der}_A(C, M \otimes_B C)$, то есть пар $(\delta, \tilde{\delta})$ таких, что диаграмма*
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & M \otimes_B C \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{\delta} & M \end{array}$$
*коммутативна.*

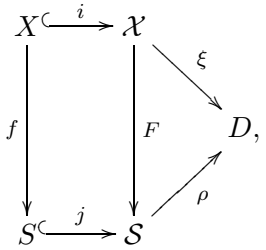
Кроме того, для каждого $B$-модуля $M$ имеется короткая точная последовательность комплексов
$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega_{S/R} \otimes_S C, M \otimes_B C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{L}_f^\bullet(M, M \otimes_B C)) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{R/A} \otimes_R B, M) \to 0,$$
которая дает следующую длинную точную последовательность когомологий.

**Предложение 1.7.** *Для каждого морфизма $f : B \to C$ аналитических $A$-алгебр и каждого $B$-модуля $C$ имеется длинная точная последовательность когомологий*
$$0 \to T^0(C/B, M \otimes_B C) \to T^0(f/A, M) \to T^0(B/A, M) \to T^1(C/B, M \otimes_B C) \to \dots .$$

**Следствие 1.8.** *Пусть $\xi : X \to S$ — морфизм ростков комплексных пространств и $M$ — $\mathcal{O}_S$-модуль. Тогда*:

1) *имеется длинная точная последовательность когомологий*
$$0 \to T^0(X/S, M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X) \to T^0(\xi, M) \to T^0(S, M) \to T^1(X/S, M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X) \to \dots;$$
2) *полагая $M := \mathcal{O}_S$, получаем так называемую последовательность Кодаиры—Спенсера отображения $\xi$*:
$$0 \to T^0(X/S) \to T^0(\xi) \to T^0(S) \to T^1(X/S) \to \dots .$$
*В частности, при $i = 0$ имеем*
$$T^0(\xi) = \left\{(\delta, \tilde{\delta}) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S) \times \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) : \xi^* \circ \delta = \tilde{\delta} \circ \xi^*\right\},$$
*где $\xi^*$ обозначает соответствующий гомоморфизм $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X$.*

При малых $i$ модули $T^i(f)$ имеют интерпретацию в терминах деформаций морфизма $f : X \to S$: $T^0(f)$ состоит из пар согласованных инфинитезимальных автоморфизмов $X$ и $S$ над двойной точкой $D$, а $T^1(f)$ совпадает со множеством классов изоморфизма деформаций $f$ над $D$, задаваемых коммутативной диаграммой




где $\xi$ и $\rho$ — деформации $X$ и $S$, соответственно.

## 2. Деформации с сечением

Мы приводим определение $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ деформаций с сечением изолированной особенности $X_0$, а также некоторые результаты о соответствующих модулях кокасательной когомологии и построение (мини)версальной деформации с сечением (ср. [7]).

### 2.1. Функтор $\mathrm{Def}^s_{X_0}$.

**Определение 3.** Пусть $X_0$ — росток комплексного пространства. *Деформацией с сечением* ростка $X_0$ над ростком $S$ называется пара, состоящая из деформации $\xi : X \to S$ ростка $X_0$ и сечения $\sigma : S \to X$ (т.е. $\xi \circ \sigma = \mathrm{id}_S$). Мы пишем $(\xi, \sigma)$ для обозначения деформации вместе с ее сечением. Две деформации $\xi : X \to S$ и $\xi' : X' \to S$ над $S$ с сечениями $\sigma$ и $\sigma'$ *изоморфны*, если существует морфизм $\psi : X \to X'$, превращающий соответствующую диаграмму в коммутативную (и тогда $\psi$ является изоморфизмом, что объясняет терминологию). Если $\varphi : T \to S$ — отображение ростков пространств, то *обратный образ* (или *индуцированная деформация*) деформации $\xi$ при $\varphi$ определяется как расслоенное произведение $X$ и $T$ над $S$ совместно с очевидными отображениями. Мы обозначаем обратный образ через $\varphi^*(\xi)$; если $T \overset{i}{\hookrightarrow} S$ — подпространство, мы пишем просто $\xi_{|T}$ вместо $i^*(\xi)$.

Располагая всеми этими понятиями, мы можем определить *функтор деформаций с сечением ростка* $X_0$, обозначаемый $\mathrm{Def}^s_{X_0} : (\mathrm{Gan}) \to (\mathrm{Sets})$, где $\mathrm{Def}^s_{X_0}(S)$ — множество классов изоморфизма деформаций с сечением ростка $X_0$ с базой $S$. Допуская небольшую вольность с обозначениями, мы применяем обозначение $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ также для ковариантного функтора $(\mathrm{Analg}) \to (\mathrm{Sets})$ деформаций с сечением аналитической алгебры $\mathcal{O}_{X_0}$.

### 2.2. Кокасательная когомология $\mathrm{Def}^s_{X_0}$.

Мы можем интерпретировать деформации с сечением ростка $X_0$ как деформации морфизма $0 \hookrightarrow X_0$, соответствующего факторотображению $\mathcal{O}_{X_0} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$. Его кокасательная когомология совпадает с кокасательной когомологией ростка $X_0$ со значениями в $\mathfrak{m}$ — максимальном идеале $\mathcal{O}_{X_0}$.

**Предложение 2.1.** *Пусть $X_0$ — росток комплексного пространства с минимальным вложением в $(\mathbb{C}^n, 0)$, задаваемым идеалом $I = (f_1, \ldots, f_k) \subseteq \mathcal{O}_n$. Тогда*

$$T^i(0 \hookrightarrow X_0) = T^i(X_0, \mathfrak{m}), i \geqslant 0,$$

*где $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_{X_0}$ — максимальный идеал. В частности, имеем*:

1) $T^0(X_0, \mathfrak{m}) \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_0}, \mathfrak{m})$;
2) $T^1(X_0, \mathfrak{m})$ *является коядром отображения*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n, \mathfrak{m}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(I/I^2, \mathfrak{m})$$
$$\delta \mapsto (g + I^2 \mapsto \delta(g)).$$

*Если $X_0$ — полное пересечение и $f_1, \ldots, f_k$ образуют регулярную последовательность, то*

$$T^1(X_0, \mathfrak{m}) \simeq \mathfrak{m}^{\oplus k}/(\mathfrak{m}J(f)),$$

*где $J(f)$ — модуль, порожденный столбцами матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \overline{\frac{\partial f_1}{x_1}} & \cdots & \overline{\frac{\partial f_1}{x_n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\frac{\partial f_k}{x_1}} & \cdots & \overline{\frac{\partial f_k}{x_n}} \end{pmatrix}.$$

3) *Полные пересечения не имеют препятствий по отношению к функтору* $\mathrm{Def}^s_{X_0}$*, т.е.* $T^2(X_0, \mathfrak{m}) = 0$.

*Доказательство.* Пусть $r$ обозначает факторотображение $\mathcal{O}_{X_0} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$. Поскольку кокасательный комплекс $\mathbb{C}$ тривиален, получаем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{L}^\bullet_r, (\mathcal{O}_{X_0}, \mathbb{C})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathbb{L}^\bullet_{\mathcal{O}_{X_0/\mathbb{C}}}, \mathfrak{m})$, где $\mathcal{C}$ обозначает категорию, описанную в пункте 1.2. Следовательно,

$$T^i(0 \hookrightarrow X_0) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\mathbb{L}^\bullet_r, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathbb{L}^\bullet_{\mathcal{O}_{X_0/\mathbb{C}}}, \mathfrak{m}) = T^i(X_0, \mathfrak{m}).$$

Свойства 1) и 3) непосредственно следуют из предложения 1.1. Свойство 2) следует из предложения 1.4, если заметить, что $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n, \mathfrak{m})$ порожден $\left\{ x_i \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right\}_{i,j}$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}((f)/(f^2), \mathfrak{m}) \simeq \mathfrak{m}^{\oplus k}$ для полных пересечений.

То же рассуждение, что и в случае функтора $\mathrm{Def}_{X_0}$, дает следующую лемму.

**Лемма 2.2.** *Пусть $X_0$ — росток комплексного пространства. Тогда $T^1(X_0, \mathfrak{m})$ изоморфно $\mathcal{O}_{X_0}$-модулю классов изоморфизмов деформаций с сечением первого порядка ростка $X_0$, где $\mathfrak{m}$ обозначает максимальный идеал $\mathcal{O}_{X_0}$, то есть i. $T^1(X_0, \mathfrak{m})$ совпадает с касательным пространством функтора* $\mathrm{Def}^s_{X_0}$.

**Замечание 4.** В частности, каждая инфинитезимальная деформация ростка $X_0 \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$, заданного $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}_n$, задается $f_i + \varepsilon g_i \in \mathcal{O}_n \otimes \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, $i = 1, \ldots, k$, где $g_i$ — элементы максимального идеала $\mathcal{O}_n$. Более общо, после подходящей замены координат можно предполагать, что (с точностью до изоморфизма) каждая деформация с сечением ростка $X_0$ над базой $S$ задается ростками $F_1, \ldots, F_k \in (x)\mathcal{O}_S\{x\}$ и $\sigma$ — нулевое сечение $g \mapsto g \bmod (x)$.

**2.3. Построение версальной деформации с сечением.** Перейдем к описанию построения версальной деформации с сечением изолированной особенности $X_0$, восходящего к [7]. При этом (мини)версальность понимается в стандартном смысле.

**Определение 4.** Обозначим через $h_Y$ (Sets)-значный функтор $X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$.

1) Деформация $\xi : X \to S$ с сечением $\sigma$ называется *версальной* (как деформация с сечением), если для любого ростка комплексного пространства $T$ отображение

$$h_S(T) \to \mathrm{Def}^s_{X_0}(T), \qquad \varphi \mapsto \varphi^*(\xi)$$

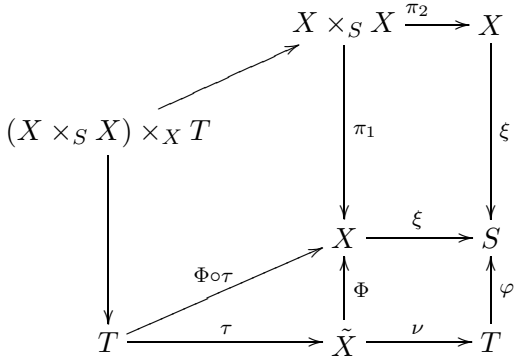
сюръективно, т.е. каждая пара $(\nu, \tau) \in \mathrm{Def}^s_{X_0}(T)$ индуцирована из $\xi$ при помощи некоторого морфизма $T \to S$.

2) Естественное отображение $\theta_\xi : T(S) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_S, \mathbb{C}[\varepsilon]) \to \mathrm{Def}^s_{X_0}(D)$ между касательными пространствами функторов $h_S$ и $\mathrm{Def}^s_{X_0}$ называется *отображением Кодаиры—Спенсера* деформации. $(\xi, \sigma)$ называется *полууниверсальной* или *миниверсальной* (как деформация с сечением), если она версальна и, кроме того, $\theta_\xi$ является биекцией.

**Теорема 2.3** (см. [7, 24])**.** *Предположим, что $\xi : X \to S$ — версальная деформация ростка $X_0$. Тогда $\pi_1 : X \times_S X \to X$ вместе с диагональным вложением $d : X \to X \times_S X$ задает версальную деформацию с сечением ростка $X_0$.*

*Доказательство.* Пусть $\nu : \tilde{X} \to T$ — деформация $X_0$ с сечением $\tau$. Версальность $\xi$ влечет существование такого морфизма $\varphi : T \to S$, что $\nu$ изоморфна обратному образу $\xi$ при $\varphi$, так что можно

считать, что $\tilde{X} = X \times_S T$. Обозначая через $\Phi$ проекцию $\tilde{X} \to X$, получаем с помощью взятия обратного образа $X \times_S X \to X$ над $\Phi \circ \tau$ коммутативную диаграмму:




Из $\tilde{X} = X \times_S T$ выводим, что (с точностью до изоморфизма):

$$(X \times_S X) \times_X T \simeq X \times_S (X \times_X T) \simeq X \times_S T = \tilde{X}.$$

После таких отождествлений мы можем отождествить $d \circ (\Phi \circ \tau)$ с $\tau$. Все это вместе взятое доказывает, что $(\nu, \tau)$ изоморфна обратному образу $(\pi_1, d)$ при отображении $\Phi \circ \tau$.

Поскольку, согласно классическому результату [11], каждая изолированная особенность имеет версальную деформацию, немедленно получаем такое следствие.

**Следствие 2.4.** *Каждая изолированная особенность $X_0$ имеет миниверсальную деформацию с сечением.*

Вместо того, чтобы использовать конструкцию из предыдущего доказательства, можно применить следующий подход к построению (по крайней мере $k$-струй) полууниверсальной деформации с сечением изолированной особенности $X_0$, заданной ростками $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}_n$. Сначала вычислим $g_1, \ldots, g_{\tau^s} \in \mathcal{O}_n^k$, образующие базис комплексного векторного пространства $T^1(X_0, \mathfrak{m})$. Получим версальное семейство деформаций первого порядка

$$F^{(1)} := f + \sum_{i=1}^{\tau^s} s_i g_i \in \left(\mathcal{O}_n \otimes \mathbb{C}\{s\}/(s)^2\right)^k$$

над $\mathbb{C}\{s\}/(s)^2$. Затем повысим порядок этой деформации (по $s$), уничтожая препятствия. Этот алгоритм описан в [19] с целью построения версальных деформаций особенностей, его компьютерная реализация имеется в библиотеке `Singular` под названием `deform.lib` (см. [21]).

Поскольку полные пересечения не имеют препятствий, получаем, что, в частности, полууниверсальная деформация с сечением изолированной особенности полного пересечения (ИОПП) $X_0$ задается формулой

$$F := f + \sum_{i=1}^{\tau^s} s_i g_i \in \mathcal{O}_{n+\tau^s}^k.$$

При этом размерность вложения базы $\tau^s$ тесно связана с обычным числом Тюриной $X_0$.

**Лемма 2.5.** *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{O}_n^k$ задают ИОПП $X_0 := (V(f), 0)$. Тогда*

$$\tau^s(X_0) := \dim_{\mathbb{C}} T^1(X_0, \mathfrak{m}) = \tau(X_0) + n - k,$$

*где $\tau(X_0) =: \dim_{\mathbb{C}} T^1(X_0)$ обозначает число Тюриной ростка $X_0$.*

*Доказательство.* Пусть $(x)$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. По лемме 2.1 имеем

$$T^1(X_0, \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^{\oplus k}/(\mathfrak{m}J(f)) = (x)^{\oplus k}/\left((f_i e_j)_{i,j} + \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{i,j}\right).$$

Поскольку $(x)^{\oplus k}$ имеет комплексную коразмерность $k$ в $\mathcal{O}_n^k$, приведенная формула эквивалентна линейной независимости над $\mathbb{C}$ набора $n$ частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ростка $f$ по модулю $(f,(x)J(f))$. Предположим обратное, т.е. что существуют $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, причем не все $\lambda_i$ равны нулю, такие, что

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0 \ ((f_i e_j)_{i,j} + (x)J(f)).$$

После линейного преобразования координат можно считать, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \equiv 0 \ ((f_i e_j)_{i,j} + (x)J(f))$, т.е.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = b f_i + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad b\in\mathcal{O}_n,\ c_j\in(x) \tag{$*$}$$

для всех $i$. К тому же, с помощью подходящего выбора образующих идеала $(f_1,\dots,f_k)$ можно достичь, чтобы каждая образующая $f_i$ задавала изолированную особенность. Следовательно, без потери общности можно считать, что они имеют вид

$$f_i = a_{i1}x_1^{d_{i1}} + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_1^{d_{ij}}x_j + r_i(x), \quad a_{ij}\in\mathbb{C},\ r_i\in(x_2,\dots,x_n)^2,\ i=1,\dots,n,$$

и все $a_{ij}=0$, $j=1,\dots,n$. Но тогда взятие частной производной по $x_1$ приводит к противоречию с $(*)$.

## 3. Модулярные деформации

**3.1. Определение и основные свойства.** Деформация (с сечением) $\xi : X\to S$ изолированной особенности $X_0$ называется *универсальной*, если каждая деформация $X'\to T$ ростка $X_0$ индуцирована из единственного (с точностью до изоморфизма) морфизма $T\to S$, то есть $\xi$ версальна и каждые два различных морфизма $\varphi,\psi : T\to S$ индуцируют неизоморфные деформации $X_0$. Хотя каждая изолированная особенность имеет полууниверсальную деформацию (с сечением), наличие тривиальных подсемейств в таких деформациях вызывает (вообще говоря) невозможность существования универсальной деформации $X_0$, т.е. функторы $\mathrm{Def}_{X_0}$ и $\mathrm{Def}^{\mathrm{s}}_{X_0}$ непредставимы. Такая ситуация возникает, например, в случае, когда $X_0$ — изолированная особенность полного пересечения.

Однако можно пытаться построить локальные модули особенностей, ограничивая полууниверсальное семейство на подростки базы, для которых выполнятся условие универсальности. Такие подростки мы называем *модулярными*, следуя В. Паламодову [26]. Аналогичное понятие *пропредставимого страта* в базе полууниверсальной деформации $X_0$ изучалось — в контексте формальных деформаций — в [17].

**Определение 5.** Пусть $\xi : X\to S$ — деформация ростка $X_0$ (с сечением $\sigma$). Подпространство $M\subseteq S$ называется *модулярным*, если выполняется следующее условие: если $\varphi : T\to M$ и $\psi : T\to S$ — такие морфизмы, что индуцированные деформации $\varphi^*(\xi_{|M})$ и $\psi^*(\xi)$ с базой $T$ изоморфны как деформации (с сечением), то $\varphi=\psi$.

Ограничение деформации на модулярный подросток называется *модулярной деформацией*.

**Замечание 5.** Следующие свойства вытекают непосредственно из определения.

1) Каждый подросток модулярного ростка модулярен.
2) $\{0\}\subseteq S$ является модулярным подпространством деформации $\xi : X\to S$ (с сечением $\sigma$), если и только если соответствующее отображение Кодаиры—Спенсера $\theta_\xi : T(S)\to T^1(X_0)$ (соотвественно, $\theta_\xi : T(S)\to T^1(X_0,\mathfrak{m})$) инъективно. Совместно с 1) это влечет, что $S$ содержит модулярное подпространство, если и только если отображение Кодаиры—Спенсера деформации инъективно. Следуя [3], мы называем такие деформации *монодеформациями*.
3) Если $M_1, M_2$ — модулярные подростки $S$, то $M_1\cup M_2\subseteq S$ также модулярен.

4) Как следствие теоремы единственности для степенных рядов, получаем, что два морфизма между ростками $\varphi, \psi : T \to S$ совпадают, если $\varphi_{|W} = \psi_{|W}$ для каждого артинова подростка $W$ в $T$, поэтому достаточно проверять условие, входящее в определение, для артиновых ростков $T$.
5) Существует единственный изоморфизм между любыми двумя максимальными модулярными подростками в базе полууниверсальной деформации $X_0$. Такой максимальный модулярный подросток называется *модулярным стратом* ростка $X_0$.

Отметим, что аналогичные понятия можно ввести в контексте банаховых аналитических пространств в смысле А. Дуади [8]. Для банаховых аналитических ростков, заданных фредгольмовыми уравнениями, это можно сделать благодаря существованию естественных конечномерных редукций, построенных Г. Химшиашвили [4]. Интересные примеры деформаций бесконечномерных аналитических множеств возникают из стратификаций Биркгофа в группе петель [5].

**3.2. Последовательность Кодаиры—Спенсера деформации.** Для того, чтобы получить критерий модулярности $M \subseteq S$, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками, объединяющую последовательность Кодаиры—Спенсера $\xi : X \to S$ (следствие 1.8 2)) и ее значение на специальном слое над $0 \in S$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & T^0(X/S) & \longrightarrow & T^0(\xi) & \longrightarrow & T^0(S) & \xrightarrow{\Theta_\xi} & T^1(X/S) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle ev} & & \downarrow{\scriptstyle ev'} & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & T^0(X_0) & \longrightarrow & T^0(\xi, (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{X_0})) & \longrightarrow & T^0(S, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\theta_\xi} & T^1(X_0) & \longrightarrow \cdots, \end{array} \tag{3.1}$$

(см. [3, §1]).

Взятие значения на специальном слое означает взятие когомологии со значениями в $\mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_S$ вместо $\mathcal{O}_S$. Кроме того, в нижней строке мы применяем предложение 1.5 для получения $T^i(X/S, M) \simeq T^i(X_0, M)$ для любого $i \geqslant 0$ и любого $\mathcal{O}_{X_0}$-модуля $M$. Здесь $\theta_\xi$ обозначает *отображение Кодаиры—Спенсера* деформации, а $\Theta_\xi$ — соответствующее *относительное отображение Кодаиры—Спенсера* $T^0(S) \to T^1(X/S)$.

Следующее предложение дает аналог последовательности (3.1) для деформаций с сечением.

**Предложение 3.1.** *Пусть $\xi : X \to S$ — деформация $X_0$ с сечением $\sigma$, $J_\sigma \subseteq \mathcal{O}_X$ — ядро $\sigma^*$. Тогда последовательность*

$$0 \longrightarrow T^0(X/S, J_\sigma) \longrightarrow T^0(\xi, (\mathcal{O}_S, J_\sigma)) \longrightarrow T^0(S) \xrightarrow{\Theta_\xi} T^1(X/S, J_\sigma) \longrightarrow \cdots \tag{3.2}$$

*точна, и беря значение на специальном слое над $0 \in S$, получаем диаграмму с точными строками*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & T^0(X/S, J_\sigma) & \longrightarrow & T^0(\xi, (\mathcal{O}_S, J_\sigma)) & \longrightarrow & T^0(S) & \xrightarrow{\Theta_\xi} & T^1(X/S, J_\sigma) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle ev} & & \downarrow{\scriptstyle ev'} & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & T^0(X_0, \mathfrak{m}) & \longrightarrow & T^0(\xi, (\mathbb{C}, \mathfrak{m})) & \longrightarrow & T^0(S, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\theta_\xi} & T^1(X_0, \mathfrak{m}) & \longrightarrow \cdots, \end{array} \tag{3.3}$$

*где $\mathfrak{m}$ обозначает максимальный идеал $\mathcal{O}_{X_0}$. Мы называем* (3.2) *последовательностью Кодаиры—Спенсера, а $\Theta_\xi$ — относительной последовательностью Кодаиры—Спенсера деформации $(\xi, \sigma)$.*

*Доказательство.* Выберем резольвенты $R_X$ и $R_S$ для $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_S$, соответственно, над $\mathbb{C}$ как в определении кокасательного комплекса $\mathbb{L}^\bullet_{\xi^*}$ в разделе 1.2. Сечение $\sigma^*$ дает расщепляемую точную последовательность

$$0 \longrightarrow J_\sigma \underset{\tau}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}_X \underset{\xi^*}{\overset{\sigma^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}_S \longrightarrow 0,$$

следовательно, получаем гомоморфизм $\tau \circ \xi^* : \mathcal{O}_S \to J_\sigma$ над $\xi^*$, т.е. $(\mathcal{O}_S, J_\sigma, \tau \circ \xi^*)$ является объектом категории $\mathcal{C}_{\xi^*:\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X}$, определенной в первом параграфе. Из кокасательных комплексов получается точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{R_X/R_S} \otimes_{R_X} \mathcal{O}_X, J_\sigma) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{L}^\bullet_{\xi^*}, (\mathcal{O}_S, J_\sigma, \tau \circ \xi^*)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{L}^\bullet_{\mathcal{O}_S/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_S) \to 0.$$

Выбор $R_X$ и $R_S$ обеспечивает изоморфизм $\Omega_{R_X/R_S} \otimes_{R_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathbb{L}^\bullet_{\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_S}$ (см. [10, гл. I]), поэтому мы получаем (3.2) как соответствующую длинную точную когомологическую последовательность.

Аналогично, взятие коэффициентов в $(\mathbb{C}, \mathfrak{m})$ дает точную нижнюю строку в (3.3), и тогда коммутативность этой диаграммы следует из функториальности.

**3.3. Критерий модулярности в терминах $T^0$.** Мы теперь дадим критерий модулярности $M \subseteq S$; аналогичные утверждения для деформаций комплексных пространств были получены ранее в [26]. В [15] изучаются модулярные подпространства для общих деформационных группоидов и дается аналог приводимого ниже критерия (3) с помощью так называемого *экспоненциального функтора*, который обобщает модуль дифференцирований $T^0(X/S)$. Нам потребуются два вспомогательных определения, первое из которых мотивировано тем фактом, что росток $\{0\} \subseteq S$ модулярен, если и только если $\theta_\xi$ инъективно.

**Определение 6.** Подросток $M \subseteq S$ в базе деформации $\xi : X \to S$ (с сечением $\sigma$) ростка $X_0$ называется

1) *инфинитезимально модулярным*, если ограничение на $M$ отображения
$$\tilde{\Theta}_{\xi|M} : T^0(S, \mathcal{O}_M) \to T^1(X/S)_{|M}$$
(соответственно $\tilde{\Theta}_{\xi|M} : T^0(S, \mathcal{O}_M) \to T^1(X/S, J_\sigma)_{|M}$, если $\xi$ рассматривается как деформация с сечением $\sigma$) инъективно;
2) *артиновым модулярным*, если каждый артинов подросток $M$ модулярен.

(Здесь и далее мы используем обозначение $T^i(X/S)_{|M} := T^i(X_{|M}/M)$ и т.д. для кокасательной когомологии ограничения деформации $\xi_{|M}$.)

**Лемма 3.2** (см. [20])**.** *Для обоих деформационных функторов модулярные подпространства инфинитезимально модулярны.*

*Доказательство.* Пусть $\delta \in \mathrm{Ker}(\tilde{\Theta}_{\xi|M}) \subseteq T^0(S, \mathcal{O}_M)$. Тогда $\delta$ соответствует некоторому морфизму $\varphi_\delta : M \times D \to S$ такому, что деформация $\varphi_\delta^*(\xi)$ изоморфна тривиальной, которая может быть также индуцирована из $\xi_{|M}$ посредством проекции $\mathrm{pr}_M : M \times D \to M$. Из модулярности $M$ заключаем, что $\varphi_\delta = i \circ \mathrm{pr}_M$, следовательно $\delta = 0$.

**Лемма 3.3.** *Предположим, что $\xi : X \to S$ — либо полууниверсальная, либо модулярная деформация $X_0$ (с сечением $\sigma$). Тогда в обоих случаях отображение $ev' : T^0(\xi) \to T^0(\xi, (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{X_0}))$ (соответственно, $ev' : T^0(\xi, (\mathcal{O}_S, J_\sigma)) \to T^0(\xi, (\mathbb{C}, \mathfrak{m}))$) сюръективно.*

*Доказательство.* В [18] утверждение доказано в случае, когда $\xi$ полууниверсальна, с помощью одной конструкции из [3, предложение 1.8]. Поэтому пусть $\hat{\xi} : Y \to M$ — модулярная деформация с сечением $\hat{\sigma}$. Можно считать, что $M$ — подпространство базы полууниверсальной деформации с сечением $\xi : X \to S$ ростка $X_0$ и $\hat{\xi} = \xi_{|M}$. Пусть $\tilde{\xi} := \hat{\xi} \times \mathrm{id}_D$, $T := (\{0\} \times D) \cup (S \times \{0\}$, $\varphi : T \to S$ — проекция, а $\tilde{a}_\delta$ — автоморфизм $\phi^*(\xi)$, индуцированный из $a_\delta$ на первой компоненте $T$ и из $\mathrm{id}_S$ на второй компоненте $T$. Деформация $\xi' := a_\delta \circ \phi^*(\xi)$ остается версальной, так что мы можем из нее индуцировать $\tilde{\xi} : Y \times D \to M \times D$ с помощью некоторого морфизма $\psi$:

$$\begin{array}{ccccc} a' : Y \times D & \longrightarrow & (X \times D)_{|T} & \xrightarrow{\tilde{a}_\delta \circ \mathrm{pr}_X} & X \\ \downarrow \tilde{\xi} & & \downarrow \xi' & & \downarrow \xi \\ \psi' : M \times D & \xrightarrow{\psi} & T & \xrightarrow{\varphi = \mathrm{pr}_S} & S \end{array}$$

С другой стороны, мы можем получить $\tilde{\xi}$ из $\xi$, просто беря проекцию $\mathrm{pr}_1 : M \times D \to M \subseteq S$. В силу модулярности $M$, имеем $\mathrm{pr}_1 = \psi'$, так что $a'$ и $\psi'$ можно рассматривать как отображения

$Y \times D \to Y$ (соответственно, $M \times D \to M$), индуцирующие искомое поднятие $\delta$ в $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_Y, J_{\hat{\sigma}})$ (соответственно, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_M)$).

После этих приготовлений мы можем сформулировать и доказать критерий модулярности.

**Теорема 3.4.** *Пусть $M \subseteq S$ — подпространство базы монодеформации $\xi : X \to S$ ростка $X_0$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$M$ — модулярный росток*;
2) *$M$ — инфинитезимально модулярный росток*;
3) *отображение $ev_{|M} : T^0(X/S)_{|M} \to T^0(X_0)$ сюръективно*;
4) *$M$ — артиново модулярный росток.*

**Теорема 3.5.** *Пусть $M \subseteq S$ — подпространство базы монодеформации $\xi : X \to S$ ростка $X_0$ с сечением $\sigma : S \to X$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$M$ — модулярный росток*;
2) *$M$ — инфинитезимально модулярный росток*;
3) *отображение $ev_{|M} : T^0(X/S, J_\sigma)_{|M} \to T^0(X_0, \mathfrak{m})$ сюръективно*;
4) *$M$ — артиново модулярный росток.*

Мы приведем только доказательство теоремы 3.5 — доказательство теоремы 3.4 получается, если опустить упоминание сечения и заменить $T^i(X_0, \mathfrak{m})$ на $T^i(X_0)$, $T^i(X/S, J_\sigma)$ на $T^i(X/S)$ и т.д.

*Доказательство теоремы 3.5.* 1) $\Rightarrow$ 2). Это лемма 3.2.

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим последовательность Кодаиры—Спенсера (3.2) деформации $(\xi, \sigma)$ с коэффициентами в $(\mathcal{O}_M, J_{\sigma|M})$. Эта последовательность может быть вставлена между строками (3.3) так, что в итоге получим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T^0(X/S, J_\sigma) & \longrightarrow & T^0(\xi, (\mathcal{O}_S, J_\sigma)) & \longrightarrow & T^0(S) & \xrightarrow{\Theta_\xi} & T^1(X/S, J_\sigma) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{ev}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{ev}'} & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & T^0(X/S, J_\sigma)_{|M} & \longrightarrow & T^0(\xi, (\mathcal{O}_M, J_{\sigma|M})) & \longrightarrow & T^0(S, \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{\tilde{\Theta}_{\xi|M}} & T^1(X/S, J_\sigma)_{|M} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle ev_{|M}} & & \downarrow{\scriptstyle ev'_{|M}} & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & T^0(X_0, \mathfrak{m}) & \longrightarrow & T^0(\xi, (\mathbb{C}, \mathfrak{m})) & \longrightarrow & T^0(S, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\theta_\xi} & T^1(X_0, \mathfrak{m}), \longrightarrow \cdots
\end{array} \tag{3.4}$$

По предположению, $\tilde{\Theta}_{\xi|M}$ инъективно и $\theta_{\xi|M}$ инъективно, поскольку $\xi$ — монодеформация. Поэтому в (3.4) можно отождествить $ev_{|M}$ и $ev'_{|M}$. Поскольку последнее отображение сюръективно в силу 3.3, композиция $ev' = ev'_{|M} \circ \tilde{ev}'$ сюръективна.

3) $\Rightarrow$ 4). Предположим, что $ev_{|M}$ сюръективно и рассмотрим артинов подросток $A \subseteq M$. Поскольку $A$ получено из $\mathbb{C}$ с помощью конечного числа малых расширений, и $\{0\} \subseteq S$ модулярен, если и только если $\theta_\xi$ инъективно, достаточно доказать следующее утверждение: пусть деформация $\xi$ модулярна над артиновым подростком $A_0$ в $M$, тогда она также модулярна над $A$, задаваемым инфинитезимальным расширением

$$\eta : 0 \to K \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_{A_0} \to 0.$$

Как в [18, предложение 1.4], с $\eta$ можно связать препятствие

$$ob_{\xi,\eta} \in \mathrm{Hom}(T^0(X_0, \mathfrak{m}), T^1(X_0, \mathfrak{m})) \otimes K,$$

зануление которого эквивалентно модулярности $A$, что доказывается совершенно аналогично [18, лемма 1.5]. Более конкретно, можно предполагать, что $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A_0}[\varepsilon]$ и $K = (\varepsilon)$, $\varepsilon^2 = 0$. Кроме того, пусть $X_0$ задается $f = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{O}_n^k$, а $X$ определяется $F = (F_1, \ldots, F_k) \in (\mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_S)^k$.

Тогда можно записать $F_{|A} = F_{|A_0} + \varepsilon\tilde{f}$, где $\varepsilon\tilde{f} \in \mathcal{O}_n^k$ определяет класс в $T^1(X_0, \mathfrak{m}) \otimes K$. Любой $\delta \in T^0(X_0, \mathfrak{m})$ представляется $\delta' \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n, (x))$ с $\delta'(f) = h \cdot f$ для некоторой матрицы $h$ с элементами из $\mathcal{O}_n$. По предположению 3), мы можем поднять $\delta$ до некоторого $\delta_{|A_0} \in T^0(X_{|A_0}, J_{\sigma|A_0})$,

представимого $\delta'_{|A_0}$ с $\delta'_{|A_0}(F_{|A_0}) = H_{|A_0}F_{|A_0}$, где $H_{|A_0}$ — поднятие $h$ в $\mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_{A_0}$. Поднятия $\delta'_{|A_0}$ и $H_{|A_0}$ до $\delta'_{|A}$ и $H_{|A}$ над $A$ индуцируют классы

$$\delta'_{|A}(F_{|A}) - H_{|A}F_{|A} = (\delta'(f) - h\tilde{f})\varepsilon \in T^1(X_0, \mathfrak{m}) \otimes K,$$

что дает гомоморфизм $ob_{\xi,\eta} : T^0(X_0, \mathfrak{m}) \to T^1(X_0, \mathfrak{m}) \otimes K$. В действительности, препятствие $ob$ индуцировано скобкой Ли $[-,-] : T^0(X_0, \mathfrak{m}) \times T^1(X_0, \mathfrak{m}) \to T^1(X_0, \mathfrak{m})$, что означает, что оно не зависит от выборов, сделанных при построении.

Теперь по предположению 3) найдется поднятие $\delta'_{|A} \in T^0(X_{|A}, J_{\sigma|A})$, поэтому $ob_{\xi,\eta}$ исчезает, следовательно, $A$ модулярен.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $Z$ — артинов росток и $\varphi : Z \to M$, $\psi : Z \to S$ — морфизмы такие, что $\varphi^*(\xi_{|M}) \simeq \psi^*(\xi)$. Мы можем профакторизовать $\varphi = i \circ \varphi_0$, где $\varphi_0 : Z \to M_0$ с артиновым $M_0$, а $i : M_0 \hookrightarrow M$ — включение. Поэтому $\psi^*(\xi) \simeq \varphi_0^*(i^*(\xi_{|M})) \simeq \varphi_0^*(\xi_{|M_0})$. По предположению, $M_0$ модулярен, так что $\psi = \varphi_0$, и поэтому $\psi$ и $\varphi$ также совпадают.

**Замечание 6.** Принятое нами определение инфинитезимальной модулярности слегка отличается от использованного в [18,20], где оно характеризуется инъективностью отображения Кодаиры—Спенсера $\Theta_{\xi|M} : T^0(M) \to T^1(X/S)_{|M}$ деформации $\xi_{|M}$. Для каждого подпространства $M \subseteq S$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^0(S, \mathcal{O}_M) & \xrightarrow{\tilde{\Theta}_{\xi|M}} & T^1(X_{|M}/M), \\ \uparrow & \nearrow_{\Theta_{\xi|M}} & \\ T^0(M) & & \end{array}$$

так что $\operatorname{Ker}(\tilde{\Theta}_{\xi|M}) = 0$ — более сильное условие, и это именно то, что нам нужно в приведенном выше доказательстве импликации 2) $\Rightarrow$ 3).

Как следствие вычисления препятствий в доказательстве импликации 3) $\Rightarrow$ 4), получаем следующее утверждение.

**Следствие 3.6.** *Касательное пространство $T(M)$ к модулярному страту ростка $X_0$ совпадает с подпространством*

$$\{t \in T(S) : \ [\theta_\xi(t), \delta] = 0 \text{ для всех } \delta \in T^0(X_0)\}$$

(*соответственно, с $T^0(X_0, \mathfrak{m})$ для деформаций с сечением*).

**3.4. Квазиоднородные полные пересечения.** Вообще говоря, модулярный страт изолированной особенности $X_0$ имеет неприведенную структуру. Например, так обстоит дело в случае полуквазиоднородных особенностей гиперповерхностей. Однако, как доказано в [1, п. 6.2], модулярный страт гладок и приведен в случае, когда $X_0$ — квазиоднородная особенность полного пересечения. В качестве приложения полученных нами критериев модулярности мы переносим этот результат на деформации с сечением.

**Предложение 3.7.** *Модулярный страт функтора $\operatorname{Def}^s_{X_0}$ для квазиоднородной особенности полного пересечения $X_0$ положительной размерности является приведенным и гладким.*

*Доказательство.* Пусть $X_0$ задается квазиоднородными полиномами $f = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{O}_n^k$ степеней $d_1, \ldots, d_k$ по отношению к некоторым натуральным весам $w_1, \ldots, w_n$. Для каждых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqslant n$ имеется *гамильтоново дифференцирование*, получаемое разложением

на множители по отношению к первой строке символической матрицы

$$H(i_1,\dots,i_{k+1}) := \det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_{k+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_{i_{k+1}}} \end{vmatrix},$$

и в [1, п. 6.1] доказано, что гамильтоновы дифференцирования совместно с эйлеровым дифференцированием $\delta_E := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ порождают $\mathcal{O}_{X_0}$-модуль $T^0(X_0) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_0})$. Заметим, в частности, что образы всех этих дифференцирований содержатся в максимальном идеале $\mathfrak{m}$ из $\mathcal{O}_{X_0}$, так что в этой ситуации имеем $T^0(X_0) = T^0(X_0, \mathfrak{m})$, и их можно взять в качестве образующих последнего модуля.

Пусть теперь $\xi : X \to S$ — полууниверсальная деформация с сечением $\sigma$ ростка $X_0$. В частности, согласно результатам раздела 2.3, $S \simeq (\mathbb{C}^{\tau^s}, 0)$ гладок. Очевидно, каждое $H(i_1,\dots,i_{k+1})$ может быть поднято в $T^0(X/S, J_\sigma)$, так что достаточно рассматривать $\delta_E$. Скобка $[-,-]$ в кокасательной когомологии индуцирует элемент $[\delta_E, -] \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T^1(X_0, \mathfrak{m}))$, который задает разложение $T^1(X_0, \mathfrak{m}) = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} T^1(X_0, \mathfrak{m})_\nu$ в прямую сумму его собственных подпространств $T^1(X_0, \mathfrak{m})_\nu$, отвечающих собственным числам $\nu$. Используя описание касательного пространства к модулярному страту $M$ в следствии 3.6, получаем, что $T(M) \simeq T^1(X_0, \mathfrak{m})_0$.

Теперь уже ясно, что нет других препятствий к поднятию $\delta_E$: если $F = f + \sum_{i=1}^{\tau^s} s_i g^{(i)}$ — полууниверсальное семейство с мономами $g^{(i)}$ как в разделе 2.3, то можно предполагать, что $g^{(1)},\dots,g^{(r)}$ составляют базис для $T^1(X_0, \mathfrak{m})_0$. Из сказанного выше следует, что $T(M) \simeq ((s_1,\dots,s_r)/(s_1,\dots,s_r)^2)^*$, и мы можем поднять $\delta_E$ в ограничение деформации $\xi$ на гладкое подпространство $(\mathbb{C}^r \times \{0\}, 0)$ в $S$, т.е. $\xi_{|(\mathbb{C}^r\times\{0\},0)}$ — максимальная модулярная деформация внутри $\xi$.

Приведенное рассуждение остается неизменным в контексте деформаций без сечения, оно является следствием тождества $T^0(X_0) = T^0(X_0, \mathfrak{m})$ для особенностей такого типа. В качестве следствия получаем совпадение модулярных стратов обоих типов.

**Следствие 3.8.** *Для каждой изолированной особенности полного пересечения $X_0$ положительной размерности модулярные страты по отношению к обоим деформационным функторам* $\mathrm{Def}_{X_0}$ *и* $\mathrm{Def}^{\mathrm{s}}_{X_0}$ *совпадают.*

## 4. Плоскость и модулярные деформации

**4.1. Модулярность как плоскость первого модуля Тюриной.** Рассмотрим теперь некоторое минимальное вложение $(X_0, 0) \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$. Пусть $X_0$ задается $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{O}_n$ и пусть $\xi : X \to S$ — деформация $X_0$, задаваемая $F_1,\dots,F_k \in \mathcal{O}_S\{x\}$. Обозначим через $J(f)$ якобиеву матрицу $f_1,\dots,f_k$, а через $J(F)$ — относительную (по отношению к $x_1,\dots,x_n$) якобиеву матрицу $F_1,\dots,F_k$. Наконец, положим $\tilde{T}^1(X/S) := \mathcal{O}_X^k/J(F)$. Теперь мы можем интерпретировать критерий из теоремы 3.4 как плоскость модуля $\tilde{T}^1(X/S)$.

**Предложение 4.1.** *Пусть $M \subseteq S$ — подпространство базы полууниверсальной деформации $\xi : X \to S$ изолированной особенности $X_0$. Тогда $M$ модулярен, если и только если $\tilde{T}^1(X/S) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_M$ является плоским $\mathcal{O}_M$-модулем.*

*Доказательство.* Имеем следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{O}_M\{x\}^{k^2+n} & \xrightarrow{(F_{i|M}\mathbf{e}_j, J(F))} & \mathcal{O}_M\{x\}^k & \longrightarrow & \tilde{T}^1(X/S) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_n^{k^2+n} & \xrightarrow{(f_i\mathbf{e}_j, J(f))} & \mathcal{O}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_0}^k/J(f) \longrightarrow 0, \end{array}$$

где $K$ и $K_0$ обозначают ядра соответствующих отображений. Согласно критерию плоскости в терминах поднятия (см., например, [23, §7]), $\tilde{T}^1(X/S) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_M = \tilde{T}^1(X_{|M}/M)$ является плоским $\mathcal{O}_M$-модулем, если и только если отображение $K \to K_0$ сюръективно. Мы покажем, что это эквивалентно сюръективности отображения $ev : T^0(X/S)_{|M} \to T^0(X_0)$, что позволит завершить доказательство утверждения, используя теорему 3.4. Каждый элемент $\binom{h_{il}}{g_j} \in K_0$ соответствует дифференцированию $\delta = \sum\limits_j g_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ такому, что $\sum\limits_j g_j \dfrac{\partial f_l}{\partial x_j} + \sum\limits_i h_{il} f_i = 0$ в $\mathcal{O}_n$ для всех $l$. Это порождает сюръекцию $\alpha_0 : K_0 \to T^0(X_0)$; аналогичным образом строится сюръекция $\alpha : K \to T^0(X/S)_{|M}$. Легко видеть, что отображение

$$\beta_0 : \mathcal{O}_n^{kn} \to \ker(\alpha_0),\ (m_{ij}) \mapsto \begin{pmatrix} \left(-\sum_j m_{ij} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}\right)_{i,l} \\ \left(\sum_i m_{ij} f_i\right)_j \end{pmatrix}$$

также сюръективно. Аналогичным образом возникает сюръекция $\beta : \mathcal{O}_M\{x\}^{kn} \to K$, и мы приходим к коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker(\beta) & \longrightarrow & \mathcal{O}_M\{x\}^{kn} & \xrightarrow{\beta} & K & \xrightarrow{\alpha} & T^0(X/S)_{|M} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ker(\beta_0) & \longrightarrow & \mathcal{O}_n^{kn} & \xrightarrow{\beta_0} & K_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & T^0(X_0) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Доказательство завершается применением стандартной леммы о пяти гомоморфизмах.

Если $X_0$ — полное пересечение, то $\tilde{T}^1(X/S)$ совпадает с $T^1(X/S)$, и приходим к следующему результату.

**Следствие 4.2.** *Модулярный страт изолированной особенности полного пересечения $X_0$ совпадает со стратом уплощения относительного модуля Тюриной $T^1(X/S)$, где $\xi : X \to S$ — полууниверсальная деформация ростка $X_0$.*

Имеется и аналогичное утверждение для деформаций с сечением, его доказательство такое же, как у предложения 4.1, если не считать очевидных изменений.

**Предложение 4.3.** *Пусть $\xi : X \to S$ — полууниверсальная деформация изолированной особенности $X_0$ с сечением $\sigma : S \to X$. Пусть $X_0$ задается ростками $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, а $X$ задается ростками $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{O}_S\{x_1, \dots, x_n\}$. Положим $J_\sigma := \operatorname{Ker}(\sigma^*) \subseteq \mathcal{O}_X$ и пусть $J(F) := \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \in \operatorname{Mat}(k, n; \mathcal{O}_X)$ — относительная якобиева матрица набора $F_1, \dots, F_k$.*

*Тогда подросток $M \subseteq S$ модулярен, если и только если $\tilde{T}^1(X/S, J_\sigma) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_M$ — плоский $\mathcal{O}_M$-модуль, где*

$$\tilde{T}^1(X/S, J_\sigma) := \mathcal{O}_X^k / J_\sigma \cdot J(F).$$

**Следствие 4.4.** *Если $X_0$ — изолированная особенность полного пересечения, то модулярный страт (с сечением) ростка $X_0$ совпадает со стратом уплощения относительного модуля Тюриной $T^1(X/S, J_\sigma)$, где $S$ — база полууниверсальной деформации $X \to S$ ростка $X_0$, а $J_\sigma = \ker(\sigma^*) \subseteq \mathcal{O}_X$ соответствует сечению $\sigma : S \to X$.*

*Доказательство.* Поскольку $X_0$ — полное пересечение, для каждого подпространства $M \subseteq S$ имеем точную последовательность

$$0 \to T^1(X/S, J_\sigma)_{|M} \to \tilde{T}^1(X/S, J_\sigma)_{|M} \xrightarrow{r} \mathcal{O}_M^k \to 0$$

$\mathcal{O}_M$-модулей, где $r$ — факторотображение. Следовательно, модуль $T^1(X/S, J_\sigma)_{|M}$ является $\mathcal{O}_M$-плоским, если и только если таковым является $\tilde{T}^1(X/S, J_\sigma)_{|M}$.

Эти характеризации модулярности как плоскости подходящего $\mathcal{O}_S$-модуля позволяют вычислить модулярный страт ростка $X_0$, по крайней мере с точностью до заданного порядка. Вычисление страта постоянства ранга аннулятора ассоциированного модуля кручения, тривиальность которого влечет плоскость (см., например, [12, Sec. 7.3]) не является эффективным подходом в данной ситуации, поскольку возникающие объекты слишком сложны для практических вычислений. Вместо этого, исходя из основного поля $\mathbb{C}$, можно найти максимальное малое расширение в $\mathcal{O}_S$, которое сохраняет плоскость. Соответствующий алгоритм и подробности, связанные с его реализацией в библиотеке `Singular modular.lib` (см. [22]) приводятся в [20], где также приводятся несколько нетривиальных примеров модулярных стратов для функтора $\mathrm{Def}_{X_0}$.

**Замечание 7.** Разумеется, можно рассматривать страт уплощения $T^1(X/S)$ для любой деформации $\xi : X \to S$ ростка $X_0$. Однако если $\xi$ — не монодеформация, это уже не имеет отношения к модулярному подпространству: последнее должно быть тривиальным, тогда как первое может не быть тривиальным, как показывает следующий пример. Возьмем произвольную особенность гиперповерхности $X_0$, задаваемую $f \in \mathcal{O}_n$ и $g \in (f, J(f))$. Тогда $f + \varepsilon g$ задает тривиальную деформацию $X_D$ ростка $X_0$ над двойной точкой $D$ и ее отображение Кодаиры—Спенсера нулевое. С другой стороны, $T^1(X_D/D)$ — плоский $\mathcal{O}_D = \mathbb{C}[\varepsilon]$-модуль. Действительно, пусть $rf + \sum_k r_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ — соотношение в $f, J(f)$. Тогда

$$r(f + \varepsilon g) + \sum_k r_k \frac{\partial}{\partial x_k}(f + \varepsilon g) = \varepsilon \left( rg + \sum_k r_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \right),$$

и можно проверить, что это выражение снова лежит в $\varepsilon(f, J(f))$, так что оно равно $\varepsilon \left( pf + \sum_k p_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \right)$ для некоторых $p, p_k \in \mathcal{O}_n$. Тогда $(r - \varepsilon p, r_1 - \varepsilon p_1, \ldots, r_n - \varepsilon p_n)$ является поднятием данного соотношения в $\mathcal{O}_n[\varepsilon]$. Следовательно, каждая нетривиальная деформация первого порядка такой гиперповерхности имеет плоский относительный модуль $T^1(X_D/D)$.

**4.2. Сравнение условий плоскости.** Как показано выше, $T^1(X/S)$ (соответственно, $T^1(X/S, J_\sigma)$) можно интерпретировать как модулярность соответствующей деформации $\xi : X \to S$ (с сечением $\sigma$). Естественно поинтересоваться, не связано ли это с плоскостью 0-мерного модуля кокасательной когомологии.

**Предложение 4.5.** *Пусть $\xi : X \to S$ — деформация изолированной особенности полного пересечения $X_0$. Если $T^1(X/S)_{|M}$ — плоский $\mathcal{O}_M$-модуль, то таков и $T^0(X/S)_{|M}$, т.е. страт уплощения $T^1(X/S)$ содержится в страте уплощения $T^0(X/S)$, и это включение может быть строгим. Аналогичное утверждение справедливо для деформаций с сечением.*

*Доказательство.* Расщепляя точную последовательность

$$0 \to T^0(X/S)_{|M} \to \mathcal{O}^n_{X_{|M}} \to \mathcal{O}^k_{X_{|M}} \to T^1(X/S)_{|M} \simeq \tilde{T}^1(X_{|M}/M) \to 0$$

на две короткие точные последовательности, заключаем, что $T^0(X/S)_{|M}$ является плоским, если таковым является $T^1(X/S)_{|M}$. В случае деформаций с сечением мы используем последовательность из доказательства предложения 4.3.

С другой стороны, допустим, что $X_0$ квазиоднородное полное пересечение, заданное $f = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{O}_n$, и возьмем базисный моном в $T^1(X_0)$ (соответственно, в $T^1(X_0, \mathfrak{m})$) со взвешенной степенью, отличной от взвешенной степени $f$. Пусть $\xi : X_D \to D$ — деформация над двойной

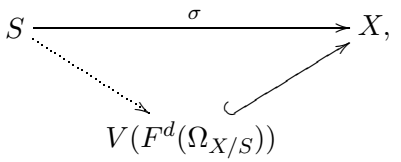
точкой $D$, заданная $f+\varepsilon g$ (с очевидным сечением $\sigma$). Из предложения 3.7 следует, что эта монодеформация имеет тривиальный модулярный страт, следовательно, страт уплощения $T^1(X_D/D)$ (соответственно, $T^1(X_D/D, J_\sigma)$) тривиален. Однако как подмодуль $\mathcal{O}^n_{X_D}$ (соответственно, $\mathcal{O}^{n^2}_{X_D}$), $T^0(X_D/D)$ (соответственно, $T^0(X_D/D, J_\sigma)$) не имеет кручения и, следовательно, является плоским $\mathcal{O}_D = \mathbb{C}[\varepsilon]$-модулем.

В заключение сравним модулярные страты гиперповерхности по отношению к обоим рассматриваемым деформационным функторам. Прежде всего, отметим следующий факт.

**Лемма 4.6.** *Пусть $\xi : X \to S$ — деформация $X_0$ с сечением $\sigma : S \to X$. Если $M \subseteq S$ — модулярный подросток для функтора* $\mathrm{Def}_{X_0}$ *(т.е. если рассматривать $\xi$ как обычную деформацию), то он модулярен и для функтора* $\mathrm{Def}^s_{X_0}$.

*Доказательство.* Пусть $M$ — $\mathrm{Def}_{X_0}$-модулярный росток, а $\varphi : T \to M$ и $\psi : T \to S$ — морфизмы такие, что $\varphi^*(\xi_{|M})$ и $\psi^*(\xi)$ — изоморфные деформации с сечением ростка $X_0$. Тогда они определяют один и тот же элемент в $\mathrm{Def}_{X_0}(S)$, поскольку $\varphi = \psi$ согласно предположению. Следовательно, $M$ также является $\mathrm{Def}^s_{X_0}$-модулярным.

Мы ограничимся теперь деформациями с *особым сечением* и обсудим обратное к данному утверждению: если $X_0$ — равноразмерный размерности $d$, то деформация с особым сечением ростка $X_0$ — это деформация $\xi : X \to S$ с сечением $\sigma : S \to X$ такая, что имеется факторизация




где $F^d(\Omega_{X/S})$ — $d$-й идеал Фиттинга модуля кэлеровых дифференциалов $\mathcal{O}_S$-модуля $\mathcal{O}_X$, а $C_\xi := V(F^d(\Omega_{X/S}))$ — *критическое множество* деформации $\xi$. Тогда выполняются следующие свойства.

1) Это определение приводит к подфунктору $\mathrm{Def}^{ss}_{X_0}$ функтора $\mathrm{Def}^s_{X_0}$. Версальная деформация ростка $X_0$ по отношению к функтору $\mathrm{Def}^{ss}_{X_0}$ получается следующим образом. Пусть $X \to S$ — версальная деформация $X_0$ (по отношению к $\mathrm{Def}_{X_0}$). Тогда, как показано в параграфе 2, $X \times_S X \to X$ версальна для $\mathrm{Def}^s_{X_0}$, и тогда деформация, индуцированная при замене базы $V(F^d(\Omega_{X/S})) \hookrightarrow X$ является версальной деформацией с особым сечением ростка $X_0$ (см. [7, 2.5.1]).
2) Если $f \in \mathcal{O}_n$ задает изолированную особенность гиперповерхности, то легко определить полууниверсальную деформацию с особым сечением ростка $X_0 := (V(f), 0)$ при помощи $F := f + \sum\limits_i s_i g_i$, где $\{g_i\}_i$ дают $\mathbb{C}$-базис $\mathfrak{m} \cdot T^1(X_0, \mathfrak{m})$, а $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $\mathcal{O}_{X_0}$.

Последняя конструкция не может быть обобщена на особенности более высокой коразмерности. В случае гиперповерхности можно интерпретировать деформации с особым сечением как деформации, сохраняющие постоянной размерность вложения. При этом слагаемые определяющих уравнений принадлежат $\mathfrak{m}^2$. Поэтому следующий результат удается доказать только для гиперповерхностей.

**Предложение 4.7.** *Пусть $\xi : X \to S$ — деформация с особым сечением гиперповерхности $X_0$ и пусть $M \subseteq S$. Тогда $T^1(X/S)_{|M}$ — плоский $\mathcal{O}_M$-модуль, если и только если плоским является $T^1(X/S, J_\sigma)_{|M}$.*

*Доказательство.* Короткая точная последовательность $\mathcal{O}_{X_{|M}}$-модулей

$$0 \to J_{\sigma|M} \to \mathcal{O}_{X_{|M}} \to \mathcal{O}_{X_{|M}}/J_{\sigma|M} \simeq \mathcal{O}_M \to 0$$

дает длинную точную последовательность когомологий

$$0 \longrightarrow T^0(X/S, J_\sigma)_{|M} \xrightarrow{\iota_0} T^0(X/S)_{|M} \xrightarrow{\pi_0} T^0(X/S, \mathcal{O}_S)_{|M} \xrightarrow{\delta_0}$$

$$\xrightarrow{\delta_0} T^1(X/S, J_\sigma)_{|M} \xrightarrow{\iota_1} T^1(X/S)_{|M} \xrightarrow{\pi_1} T^1(X/S, \mathcal{O}_S)_{|M} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Пусть $f \in \mathcal{O}_n$ задает $X_0$. Поскольку $X_{|M} \to M$ — деформация с особым сечением ростка $X_0$, можно предполагать, что $X_{|M}$ задается $F \in (x)^2\mathcal{O}_M\{x\}$. В этой ситуации имеем $T^1(X/S, \mathcal{O}_S)_{|M} \simeq \mathcal{O}_M$. Поскольку это коядро отображения

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{O}_M\{x\}, \mathcal{O}_M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|M}}((F)/(F^2), \mathcal{O}_M) \simeq \mathcal{O}_M, \qquad \delta \mapsto \delta(F),$$

которое является нулевым отображением, поскольку $F \in (x)^2\mathcal{O}_M\{x\}$. Кроме того, $\mathrm{Ker}(\iota_1)$ — это $\mathcal{O}_M$-модуль, порожденный $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ по модулю $(F) + \left(x_j \dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{i,j}$. На самом деле, это свободный $\mathcal{O}_M$-модуль. А именно, пусть

$$\sum_i G_i(s)\frac{\partial F}{\partial x_i} = H \cdot F + \sum_{i,j} H_{ij} x_j \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Поскольку $\left(F, \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ образуют регулярную последовательность, отсюда следует, что для всех $i$ имеем

$$G_i(s) - \sum_j H_{ij} x_j \in \left(F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),$$

т.е.

$$G_i(s) = \sum_j H_{ij} x_j + A \cdot F + \sum_k B_k \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

для некоторых $A, B_k \in \mathcal{O}_M\{x\}$. Это возможно только в случае, если $G_i = 0$, поскольку $F$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \in (x)\mathcal{O}_M\{x\}$. Поэтому длинная точная последовательность (4.1) может быть разложена на две короткие точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Ker}(\iota_1) \simeq \mathcal{O}_M \to T^1(X/S, J_\sigma)_{|M} \to \mathrm{Im}(\iota_1) \to 0$$

и

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi_1) \to T^1(X/S)_{|M} \to \mathcal{O}_M \to 0,$$

из которых мы заключаем, что если $T^1(X/S)_{|M}$ — $\mathcal{O}_M$-плоский модуль, то таковым является и $T^1(X/S, J_\sigma)_{|M}$.

В заключение отметим, что вычисления показывают, что весьма правдоподобной является следующая гипотеза.

**Гипотеза.** Пусть $X_0$ — изолированная особенность и $\xi : X \to S$ — деформация $X_0$ с сечением $\sigma : S \to X$ такая, что $\xi$ — монодеформация по отношению к обоим функторам $\mathrm{Def}_{X_0}$ и $\mathrm{Def}^s_{X_0}$. Тогда росток $M \subset S$ является $\mathrm{Def}_{X_0}$-модулярным, если и только если он $\mathrm{Def}^s_{X_0}$-модулярен.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Александров А. Г.* Когомология квазиоднородного полного пересечения // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — *49*, № 3. — С. 467–510.
2. *Паламодов В. П.* Когомология аналитических алгебр // Тр. моск. мат. общ. — 1982. — *44*. — С. 3–61.
3. *Паламодов В. П.* Касательные поля деформаций комплексных пространств // Мат. сб. — 1990, № 10. — *181*. — С. 1320–1340.
4. *Химшиашвили Г. Н.* О малых решениях нелинейных фредгольмовых уравнений // Вестн. МГУ. Сер. мат. — 1977. — *2*. — С. 27–31.
5. *Химшиашвили Г. Н.* О задаче Римана — Гильберта для компактной группы Ли // Докл. АН СССР. — 1990. — *310*, № 5. — С. 1055–1058.

6. *André M.* Homologie des algèbres commutatives. — Berlin: Springer-Verlag, 1974. — Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. *206*.
7. *Buchweitz R. O.* Contributions à la théorie des singularités. — Ph.D. Thesis, Université Paris VII, 1981.
8. *Douady A.* Le problème des modules pour les sous-espaces analytique compacts d'un espace analytique donné // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1966. — *16*. — С. 1–95.
9. *Eisenbud D.* Commutative algebra with a view toward algebraic geometry // Graduate Texts in Mathematics. — Vol. *150*. — New York: Springer-Verlag, 1995.
10. *Flenner H.* Über Deformationen holomorpher Abbildungen. — Habilitationsschrift, Universität Osnabrück, 1978.
11. *Grauert H.* Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen // Invent. Math. — 1972. — *15*. — С. 171–198.
12. *Greuel G.-M., Pfister G.* A `Singular` introduction to commutative algebra. — Berlin: Springer, 2002.
13. *Greuel G.-M., Pfister G., Schönemann H.* `Singular 2.0`, a computer algebra system for polynomial computations. — Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, 2001, `http://www.singular.uni-kl.de`.
14. *Khimshiashvili G. N.* The topology of Birkhoff strata in a smooth loop group, and the generalized Riemann — Hilbert problem // Trudy Tbilis. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzii. — 1992. — *97*. — С. 92–115.
15. *Kosarew S., Stieber H.* A construction of maximal modular subspaces in local deformation theory // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1990. — *60*. — С. 17–36.
16. *Laudal O. A.* Formal moduli of algebraic structures // Lect. Notes Math. — 1979. — *754*.
17. *Laudal O. A., Pfister G.* Local moduli and singularities // Lect. Notes Math. — 1988. — *1310*.
18. *Martin B.* Modular deformations and space curve singularities. — Algebraic Geometry and Singularities. — Sevilla 2001.
19. *Martin B.* Computing versal deformations with `Singular`. — Algorithmic algebra and number theory (Heidelberg, 1997). — Berlin: Springer, 1999. — С. 283–293.
20. *Martin B.* Algorithmic computation of flattenings and of modular deformations // J. Symbol. Comput. — 2002. — *34*, № 3. — С. 199–212.
21. *Martin B.* `deform.lib`, a `Singular 2.0` library for computing miniversal deformations of singularities and modules, 2002.
22. *Martin B.* `deform.lib`, a `Singular 2.0` library for computing the modular stratum, 2002.
23. *Matsumura H.* Commutative ring theory. — Cambridge University Press, 1986.
24. *Mond D., van Straten D.* The structure of the discriminant of some space-curve singularities // Quart. J. Math. — 2001. — *52*, № 3. — С. 355–365.
25. *Palamodov V. P.* Deformations of complex spaces // Russ. Math. Surv. — 1976. — *31*, № 3. — С. 129–197.
26. *Palamodov V. P.* Moduli in versal deformations of complex spaces. — Variétés analytiques compactes (Colloq., Nice, 1977). — Lect. Notes Math. — 1978. — *683*. — С. 74–115.
27. *Quillen D.* On the (co-)homology of commutative rings. — Applications of Categorical Algebra (Proc. Symp. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970. — С. 65–87.

T. Hirsch
Технический Университет Коттбуса
E-mail: `hirsch@math.tu-cottbus.de`

B. Martin
Технический Университет Коттбуса
E-mail: `martin@math.tu-cottbus.de`

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 71–120

УДК 517.552.2

# МНОГОМЕРНЫЕ ВЫЧЕТЫ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© 2004 г. **Г. ХИМШИАШВИЛИ**

Аннотация. Описываются некоторые недавние продвижения в вещественной алгебраической геометрии, основанные на применении многомерных вычетов. Основное внимание уделено алгебраическим формулам для топологических инвариантов, таких как степень отображения и эйлерова характеристика. Подробно описаны свойства многомерного логарифмического вычета, на которых основано приводимое нами доказательство алгебраической формулы для степени отображения. Приведено также несколько новых применений основных результатов. В частности, мы обсуждаем приложения к топологическому изучению квадратичных отображений, конфигурационных пространств, алгебраических пуассоновых структур и гауссовых случайных полиномов.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . . 71
1. Вступительные замечания . . . . . 73
2. Многомерный логарифмический вычет . . . . . 74
3. Алгебраическая формула для локальной степени . . . . . 77
4. Оценки степени отображения . . . . . 85
5. Эффективные формулы для эйлеровой характеристики . . . . . 90
6. Топологические инварианты квадратичных отображений . . . . . 97
7. Конфигурационные пространства многоугольников и шарнирников . . . . . 100
8. Инварианты квадратичных пуассоновых структур . . . . . 105
9. Топологические инварианты случайных полиномов . . . . . 115
Список литературы . . . . . 119

## Введение

Мы приводим некоторые результаты, связанные со следующей классической задачей. Дана система вещественных полиномиальных уравнений и требуется определить, имеет ли она вещественные решения (корни), и, если их конечное число, эффективно найти это число по коэффициентам заданных уравнений. Под эффективным нахождением принято понимать любой алгоритм, который позволяет найти указанное число с помощью конечного числа алгебраических и логических операций над коэффициентами. Для краткости такую постановку задачи будем называть *задачей Штурма*, в честь Ш. Штурма, который полностью решил эту задачу для одного вещественного полинома от одной переменной [42].

По многим причинам задача Штурма представляет особый интерес в случае, когда число уравнений равно числу переменных и все коэффициенты вещественны. Для удобства в таком случае будем говорить, что задана *вещественная квадратная система*. Если при этом число переменных равно $n$, скажем, что задана квадратная система на $\mathbb{R}^n$. Для краткости удобно обозначить через $\mathbb{R}_n$ множество (алгебру) всех полиномов от $n$ переменных с вещественными коэффициентами. Тогда множество всех квадратных систем на $\mathbb{R}^n$ естественно отождествляется с $\mathbb{R}_n^n$, и, имея дело с такой системой $\mathcal{S}$, мы пишем $\mathcal{S} \in \mathbb{R}_n^n$.

Интуитивно ясно, что для «большинства» таких систем множество корней конечно (даже если рассматривать все комплексные корни). Этому высказыванию легко придать точный смысл. Например, из теории результантов легко следует, что имеется открытое плотное подмножество во множестве коэффициентов всех квадратных систем уравнений с фиксированными алгебраическими степенями, для которого соответствующая система имеет конечное число корней при любой

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

правой части. Кроме того, в этом случае определен якобиан системы, и можно просуммировать знаки якобиана во всех прообразах какого-нибудь регулярного значения, что приводит к важному понятию *алгебраического числа корней* или *топологической степени* соответствующего отображения.

Предложенный Штурмом (одноименный) алгоритм стал классическим и послужил образцом для огромного количества последующих исследований, не говоря о многочисленных применениях в алгебре, анализе и прикладной математике. В частности, Дж. Сильвестр, Ш. Эрмит и К. Якоби подробно исследовали случай двух вещественных полиномов от двух переменных, причем использованный ими метод радикально отличался от метода Штурма (см. [12]). Основная идея их подхода заключалась в построении некой вспомогательной квадратичной формы, сигнатура которой равна числу вещественных корней системы. Для применимости их метода требуется, однако, чтобы система не имела кратных корней, что является неестественным и нежелательным ограничением.

Другая классическая задача связана с нахождением числа корней в заданной области. Напомним, что в XIX веке большой интерес вызывала задача описания так называемых *устойчивых полиномов*, все корни которых лежат в левой полуплоскости. Более общая задача такого рода была поставлена Дж. Максвеллом в связи с его исследованиями регуляторов паровых машин (см. [12]). Ее естественная формулировка в общем случае такова: задано некоторое полуалгебраическое множество в пространстве неизвестных и требуется найти число корней системы, принадлежащих этому множеству. Эту задачу мы будем для краткости называть *задачей Максвелла*.

Имеется ряд известных методов решения задачи об устойчивых полиномах и задачи Максвелла для некоторых классов областей, зиждущихся на соображениях, использованных в работах упомянутых классиков. С развитием алгебраической геометрии и теории особенностей стал возможен другой подход к задачам такого рода, основанный на использовании дифференциальной топологии, коммутативной алгебры и комплексного анализа, в частности, теории вычетов. Это позволило предложить единообразное решение названных классических задач, а также исследовать многие другие задачи вещественной алгебраической геометрии и нелинейного анализа.

Современный подход к решению перечислительных задач вещественной алгебраической геометрии типа задач Штурма и Максвелла основан на алгебраической формуле для топологической степени гладкого отображения, полученной в [16, 30]. Указанная формула допускает несколько существенно различных доказательств, причем доказательство, предложенное автором этих строк в [16], использовало теорию многомерных вычетов. Впоследствии выяснилось, что подход, основанный на теории вычетов, обладает рядом достоинств, позволяющих успешно применять его во многих задачах, связанных с нахождением ряда целочисленных инвариантов (эйлеровой характеристики, числа компонент связности, числа локальных ветвей) алгебраических и полуалгебраических множеств. Ниже приводятся некоторые результаты, полученные в рамках указанного подхода и имеющие достаточно широкую область применимости.

Мы начинаем с краткого описания основных используемых понятий и методов из комплексного анализа и теории особенностей. В частности, во втором параграфе подробно излагаются определение и основные свойства *многомерного логарифмического вычета*, часто называемого также *вычетом Гротендика* (мы используем второе название ввиду его краткости). В третьем параграфе доказывается упомянутая алгебраическая формула для степени отображения и отмечаются некоторые непосредственные следствия. Четвертый параграф содержит оценки для топологической степени полиномиального отображения в терминах чисел Петровского, введенных В. Арнольдом [3].

В пятом параграфе приводится явная формула (5.3) для эйлеровой характеристики компактного вещественного алгебраического множества, сводящая многомерную задачу Штурма к вычислению локальной степени явно заданного вспомогательного отображения. Эта формула на самом деле одновременно дает и решение задачи Максвелла, так как в принципе позволяет аналогичным образом свести последнюю к вычислению локальных степеней явно заданных вспомогательных отображений с помощью рассмотрения двулистных разветвленных накрытий, определяемых неравенствами, задающими полуалгебраическое множество, входящее в постановку задачи [4, 38]. Чтобы подчеркнуть связь с теорией вычетов, мы также уделяем достаточное внимание другому эффективному

способу решения задачи Максвелла, основанному на использовании глобального аналога вычета Гротендика.

В оставшихся четырех параграфах приводятся некоторые недавние приложения основных результатов. В шестом параграфе обсуждаются топологические инварианты квадратичных отображений. В седьмом параграфе они применяются к изучению конфигурационных пространств. В восьмом параграфе обсуждаются топологические аспекты некоторых алгебраических пуассоновых структур, а в последнем параграфе приводятся два результата (теоремы 9.1 и 9.2) о математическом ожидании степени случайного полиномиального отображения.

## 1. Вступительные замечания

Напомним, что вещественное полиномиальное отображение $F : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ задается набором $t$ полиномов $F_1, \dots, F_t$ от $s$ переменных с вещественными коэффициентами. Другими словами, $F$ можно интерпретировать как элемент $\mathbb{R}^t_s$. Мы будем рассматривать только ситуации, в которых $s \geqslant t$. Если $s = t$, то $F$ называется *полиномиальным эндоморфизмом* (или *полиномиальным векторным полем* как в [5]). Если все компоненты $F$ — однородные полиномы, то $F$ называется *однородным отображением*. Если все компоненты $F$ — однородные полиномы степени $m$ ($m$-формы), то $F$ называется $m$-однородным отображением.

Для $y \in \mathbb{R}^t$ множество $F^{-1}(y)$ называется *слоем* $F$ над $y$. Точка $x \in \mathbb{R}^s$ называется *регулярной точкой* $F$, если ранг матрицы Якоби $J(F)(x)$ максимален, т.е. равен $t$ (при $s = t$ это эквивалентно тому, что $\det JF(x) \neq 0$). Иначе (т.е. если этот ранг меньше $t$) точка $x$ называется *особой точкой* $F$. Слой $F^{-1}(y)$ называется *неособым*, если он не содержит особых точек $F$. В этом случае точка $y$ называется *регулярным значением* $F$. Множество регулярных значений $F$ обозначается $\operatorname{Reg} F$.

Хорошо известно, что каждый неособый слой является гладким многообразием размерности $s - t$ [26]. Отображение $F$ называется *собственным*, если прообраз $F^{-1}(X)$ каждого компактного множества $X \subset \mathbb{R}^t$ является компактным подмножеством $\mathbb{R}^s$ (здесь и далее мы всегда рассматриваем топологии, индуцированные евклидовой метрикой). Для удобства и краткости *собственное полиномиальное отображение* $F$ как выше будем называть *собалмором*. Однородное отображение $F \in \mathbb{R}^t_s$ собственно если и только если начало координат $O_s \in \mathbb{R}^s$ изолировано в $F^{-1}(O_t)$, в каковом случае $F$ называется *невырожденным* однородным отображением.

По определению, слои собалмора являются компактными алгебраическими множествами. Соответственно, неособые слои собалмора являются компактными гладкими многообразиями. По лемме Сарда [5], множество особых значений собалмора $F$ имеет меру нуль, так что «типичный» слой $F$ является компактным гладким многообразием размерности $s - t$. В частности, если $s = t$, то каждый слой $F^{-1}(y)$ состоит из конечного числа точек, и оказывается полезным рассматривать *алгебраическое число прообразов* регулярного значения $y$, что приводит к понятию *степени отображения*. Более точно, можно определить (топологическую) *степень отображения* $\deg F$ хорошо известной формулой

$$\deg F = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sign} \det JF(x),$$

где sign обозначает знак вещественного числа, а $y \in \operatorname{Reg} F$ — произвольное регулярное значение $F$ [33].

Сумма в правой части не зависит от $y \in \operatorname{Reg} F$, так что мы получаем инвариант эндоморфизма $F$. Кроме того, степень отображения инвариантна относительно собственных гомотопий и обладает рядом других полезных свойств, которые делают ее весьма полезной во многих задачах топологии и нелинейного анализа. Важную роль играет также *локальная степень* эндоморфизма, которую часто называют также *индексом изолированного нуля* векторного поля [5].

Локальная степень $\deg_p F$ полиномиального эндоморфизма $F$ определена в любой точке $p$, которая изолирована в $F^{-1}(F(p))$. Очевидно, что достаточно определить $\deg_p F$ эндоморфизма $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $p \in F^{-1}(0)$, которая является изолированным прообразом начала координат. В этом случае $\deg_p F$ определяется как топологическая степень отображения

$$\widehat{F} = F/\|F\| : S^{n-1}_\varepsilon(p) \to S^{n-1}_1(0) = S^{n-1},$$

где $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число [33].

Что особенно важно, из результатов [30] и [16] (см. ниже §3) следует, что $\deg_p F$ может быть вычислена чисто алгебраически как сигнатура некоторой невырожденной квадратичной формы, которая строится в явном виде по коэффициентам компонент $F_i$ эндоморфизма $F$. То же относится к (глобальной) степени отображения $\deg F$. Этот способ вычисления топологической степени может быть реализован в виде компьютерного алгоритма, основанного на вычислении базиса Грёбнера идеала $(F)$, порожденного компонентами $F$ в алгебре вещественных полиномов от $s$ переменных (см., например, [43]).

Степень отображения является одним из основных топологических инструментов вещественной алгебраической геометрии и играет важную роль в нашем изложении. Вторым основным топологическим инвариантом, используемым в данной работе, является эйлерова характеристика, определяемая, как обычно, как альтернированная сумма рангов групп гомологий [50]. Все необходимые результаты об этих топологических инвариантах могут быть найдены в книгах [33, 50], являющихся нашими основными источниками для ссылок на используемые далее топологические понятия и конструкции.

## 2. Многомерный логарифмический вычет

Мы определим сейчас важное аналитическое понятие, которое может быть интерпретировано двумя способами: как многомерный логарифмический вычет [2, 20] и как частный случай символа вычета Гротендика [32]. Обе точки зрения естественны и важны для наших рассмотрений, и для краткости мы будем просто говорить «вычет». Это понятие и его свойства играют ключевую роль в нашем доказательстве сигнатурной формулы для степени отображения. Некоторые из нужных свойств следуют из интегрального представления вычета, тогда как другие проще вывести из теории двойственности Гротендика [32]. Для наших целей особенно важна так называемая локальная двойственность Гротендика (теорема 2.2). Мы выводим ее из стандартных свойств вычетов и глубоких алгебраических результатов, полученных в [48] (теорема 2.1).

Пусть $U$ — некоторое подмножество (например, область, т.е. связное открытое множество) в $\mathbb{C}^n$. Через $A(\overline{U})$ мы будем обозначать множество всех комплекснозначных функций, каждая из которых определена и голоморфна в некотором открытом множестве, строго содержащем $U$. В частности, для точки $p \in \mathbb{C}^n$ символ $A(p) = A(\overline{p})$ обозначает множество всех функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности точки $p$.

Пусть теперь $U$ — окрестность начала координат в $\mathbb{C}^n$ и $f_1, \ldots, f_n \in A(\overline{U})$ — набор функций, голоморфных на $\overline{U}$. Предположим, что начало координат — изолированный общий нуль этих функций, и выберем окрестность начала $U_1$ так, чтобы она не содержала других общих нулей этих функций. Для достаточно малых положительных чисел $r_1, \ldots, r_n$ рассмотрим множество

$$\Gamma = \{z \in U_1 : |f_1(z)| = r_1, \ldots, |f_n(z)| = r_n\}. \tag{2.1}$$

Очевидно, $\Gamma$ — граница аналитического полиэдра и потому является вещественным алгебраическим множеством. Легко проверить, что в каждой регулярной точке оно является гладким многообразием вещественной размерности $n$. Более того, на открытом плотном подмножестве регулярных точек в качестве гладких координат на $\Gamma$ можно взять функции $\arg f_i$. Введем на $\Gamma$ ориентацию с помощью дифференциальной $n$-формы $\omega_f = d(\arg f_1) \wedge \ldots \wedge d(\arg f_n)$. А именно, мы всегда предполагаем, что ориентация на $\Gamma$ определяется условием $\omega_f > 0$. Это позволяет определить интеграл $n$-формы по $\Gamma$. Все эти факты и конструкции стандартны и содержатся, например, в [32].

**Определение 2.1.** Пусть $g \in A(\overline{U})$. Интеграл

$$\mathrm{Res}_0(g; f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdot \ldots \cdot f_n(z)} \tag{2.2}$$

называется вычетом функции $g$ (в начале координат) по отношению к функциям $f_1, \ldots, f_n$.

Этот интеграл хорошо известен в теории функций многих комплексных переменных под названием (многомерного) логарифмического вычета [2, 20]. Можно показать, что так называемый символ вычета Гротендика, введенный А. Гротендиком при построении локальной теории двойственности, над полем комплексных чисел может быть представлен в виде такого интеграла [32]. Соответственно, можно вывести его основные свойства из этих общих теорий. В статье автора [16] основные свойства вычетов были выведены непосредственно из интегрального представления (2.2). Такой подход представляется более простым и самодостаточным, поэтому ниже приводятся прямые аналитические доказательства нужных свойств вычетов.

Через $E_n$ обозначим $\mathbb{C}$-алгебру сходящихся комплексных степенных рядов от $n$ переменных. Как известно, она изоморфна слою (стеблю) структурного пучка пространства $\mathbb{C}^n$ над началом кординат. Для функции $g \in A(0)$ обозначим через $\tilde{g}$ элемент $E_n$, определенный ее рядом Тейлора в начале координат. Пусть $(f)$ — идеал в $E_n$, порожденный рядами Тейлора $\tilde{f}_i$ функций $f_i$ в начале координат, и пусть $A = E_n/(f)$ — локальная алгебра $f$ в начале координат. Пусть, кроме того, $J = \det(\partial f_i/\partial x_j)$ — якобиан функций $f_i$, а $dz$ обозначает дифференциальную форму $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$. Перечислим теперь нужные в дальнейшем свойства вычета.

**P1.** $\operatorname{Res}_0(g; f)$ кососимметричен по $f_j$ и линеен по $g$. Если $\tilde{g} \in (f)$, то $\operatorname{Res}_0(g; f) = 0$.

Первое утверждение очевидно, поскольку транспозиция функций $f_i$ приводит к изменению ориентации $\Gamma$. Далее, пусть $\tilde{g} \in (f)$. Тогда можно записать $g = \sum g_i f_i$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $g = g_1 h_1$. Тогда подынтегральное выражение принимает вид $\omega = \dfrac{g_1 dz}{f_2 \cdots f_n}$, откуда ясно, что эта $n$-форма голоморфна в окрестности $(n+1)$-мерного вещественного алгебраического множества

$$X = \{z \in U_1 : |f_1| \leqslant r_1, |f_j| = r_j, j = 2, \ldots, n\}.$$

Поскольку $\overline{\partial}\omega = 0$, легко проверить, что $d\omega = 0$. Значит, $\omega$ — замкнутая $n$-форма на границе $\Gamma = bX$ $(n+1)$-мерного множества $X$ в $2n$-мерном вещественном многообразии $U_1$. По формуле Стокса имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{bX} \omega = \int\limits_{X} d\omega = 0,$$

что и требовалось.

**P2.** Пусть начало координат — регулярная точка $f$, т.е. $J(0) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Res}_0(g; f) = \frac{g(0)}{J(0)}.$$

По теореме об обратном отображении, в этой ситуации $f$ является локальным биголоморфизмом, значит формулы $w_j = f_j(z)$ задают систему координат в окрестности начала координат. Пусть $z_i = z_i(w)$ — обратное отображение. Производя замену координат в интеграле (2.2), получаем

$$\operatorname{Res}_0(g; f) = C \int\limits_{|f_j|=r_j} \frac{g(z)dz}{\Pi f_j} = C \int\limits_{|w_j|=r_j} \frac{g(z(w)) \det(\frac{dz_i}{dw_k})dw}{\Pi w_j} = C \int\limits_{|w_j|=r_j} \frac{g(z(w))dw}{J(z(w))\Pi w_j},$$

где $C = \dfrac{1}{(2\pi i)^n}$.

Заметим теперь, что функция $\dfrac{g(z(w))}{J(z(w))}$ голоморфна в окрестности начала координат, следовательно, последнее выражение есть в точности многомерный интеграл Коши. Поэтому оно равно значению этой функции в начале координат. Поскольку $z(0) = 0$, значение интеграла равно $g(0)/J(0)$, как и утверждалось.

Чтобы сформулировать следующее свойство вычета, введем некоторые обозначения. Зададим $(2n-1)$-форму на $\mathbb{C}^n$ формулой

$$\eta_f = g(z)\frac{C_n\sum(-1)^{i-1}f_i\bigwedge\limits_{j\neq i}\overline{df_j}\wedge dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n}{(|f|)^{2n}}, \tag{2.3}$$

где $(|f|)^2=\sum(|f_i|)^2$ и $C_n$ — константа, зависящая только от $n$ (см. [32]). Обозначим через $S_t = S_t^{2n-1}$ сферу радиуса $t$ с центром в начале координат.

**P3.** Для всех достаточно малых положительных $r_i, t$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\omega_f = \int\limits_{S_t}\eta_f.$$

Это следует из основного свойства так называемого ядра Бохнера — Мартинелли $\beta(z,w)$ для шара [2], а именно, из того факта, что для каждой функции $g$, голоморфной в $U$, имеет место равенство

$$\int\limits_{S_t} g(z)\beta(z,\tilde{z}) = g(0).$$

Действительно, если ввести отображение

$$F: U\to\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n, F(z)=(z+f(z),z),$$

то становится очевидным, что $\eta_f = gF^*\beta$. Теперь для того, чтобы доказать данное свойство, остается произвести замену переменных $z_i = f_i$ в формуле Бохнера — Мартинелли [2,31].

**P4.** Пусть $f_1(z,y),\ldots,f_n(z,y), g(z,y)$ — функции, голоморфные по $z$ в окрестности $U$ начала координат, и непрерывные по $y$ в некоторой окрестности начала координат. Допустим, что начало координат является изолированным нулем функций $f_1(z,0),\ldots,f_n(z,0)$ в $U$. Тогда для достаточно малого $y$ функции $f_1(z,y),\ldots,f_n(z,u)$ имеют конечное число общих нулей $P_j(y), j=1,\ldots,m_y$ в $U$, и сумма

$$\sum_{j=1}^{m_y}\mathrm{Res}_{P_j(y)}(g(z,y); f_1(z,y),\ldots,f_n(z,y))$$

непрерывна по $y$.

Это свойство является прямым следствием предыдущего. Действительно, ясно, что интеграл в правой части P3 непрерывен по $y$. С другой стороны, замкнутость формы $\omega_f$ означает, что она может быть локализована в общих нулях функций $f_1,\ldots,f_n$. Другими словами, этот интеграл можно выразить как сумму интегралов Бохнера — Мартинелли, входящих в правую часть P3, по малым сферам с центрами в этих нулях. Применяя P3 еще раз, видим, что каждый из этих локализованных интегралов равен соответствующему вычету, так что сумма, входящая в P4, непрерывно зависит от $y$, достаточно близких к началу координат.

**P5.**

$$\mathrm{Res}_0(J; f_1,\ldots,f_n) = m,$$

где $m=\dim_{\mathbb{C}} A_0(f)$ — алгебраическая кратность $f$ в начале координат.

Хорошо известно, что всегда можно построить такие деформации $f_j(z,y)$, что при достаточно малом $|y|$ функции $f_j(z,y)$ имеют только простые общие нули в $U$. Согласно теореме Паламодова [9], число этих общих нулей равно $m$. При $y\neq 0$ имеем $J(P_j(y),y)\neq 0$ для $j=1,\ldots,m(y)=m$, и применяя P2, получаем

$$\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}_{P_j(y)}(J(z,y); f(z,y)) = \sum_{j=1}^{m}\frac{J(P_j(y),y)}{J(P_j(y),y)} = m.$$

Согласно свойству P4, эта сумма непрерывна по $y$ вблизи начала координат, так что она постоянна, и ее значение в начале координат, которое и есть интересующий нас вычет, также равно $m$.

Чтобы установить следующее свойство вычета, удобно использовать чисто алгебраические результаты о конечномерных аналитических алгебрах (факторалгебрах алгебры степенных рядов). Пусть $k$ — поле характеристики нуль. Обозначим через $k_n$ алгебру формальных степенных рядов от $n$ переменных с коэффициентами в $k$, а через $M$ — ее максимальный идеал.

Для $h_1, \dots, h_n \in k_n$ положим $D = \det(\partial h_j/\partial x_k)$, $B = k_n/(h)$, где $(h) = (h_1, \dots, h_n)$ — идеал, порожденный $h_i$ в $k_n$, и пусть $d = \mathrm{cl}_B D$. Наконец, обозначим через $M_B$ максимальный идеал $B$. Алгебра $B$ является типичным примером так называемой аналитической алгебры [32]. В работе [48] установлены важные свойства таких алгебр, которые мы сформулируем в виде вспомогательной теоремы.

**Теорема 2.1** (см. [48]). *Пусть $h_i$ таковы, что $M^N \subset (h)$ для некоторого натурального $N$. Тогда*:

a) *$d \neq 0$, то есть $D$ не принадлежит идеалу $(h)$;*

b) *для каждого $c \in M_B$ выполняется равенство $cd = 0$ в $B$;*

c) *для каждого $a \neq 0$ в $B$ существует $b \in B$, такое, что $ab = d$.*

Введем в рассмотрение билинейное отображение $B_f : A \times A \to \mathbb{C}$, содержащее важную информацию об алгебраической структуре $A$. Пусть $a, b$ — произвольные элементы $A$. Они являются классами некоторых функций $g, h$, голоморфных в окрестности начала координат. Положим тогда

$$B_f(a, b) = \mathrm{Res}_0(gh; f).$$

Заметим, что корректность этого определения немедленно следует из свойства P1.

**Теорема 2.2** (ср. [32]). *Отображение $B_f$ — невырожденное билинейное отображение $A$.*

Это следует из приведенных выше результатов из [48]. Действительно, в нашей ситуации алгебраическая кратность $m$ конечна. В таком случае хорошо известно [9], что алгебра $A$ изоморфна аналитической алгебре, определенной идеалом $(f)$ в алгебре $\mathbb{C}_n$, так что приведенные выше результаты применимы к $A$. Ясно также, что класс $J$ в $A$ переходит в элемент $d$ при этом изоморфизме. Достаточно показать, что никакой ненулевой элемент $a$ не может быть ортогонален всей $A$ в смысле формы $B_f$. Если $a \neq 0$, то по Теореме 2.1 существует $b \in A$ такое, что $ab = j$. Тогда $B_f(a, b) = \mathrm{Res}_0(j; f) = m \neq 0$ согласно P5. Это означает, что $a$ не ортогонален всей алгебре $A$, что противоречит предположению и завершает доказательство.

**Замечание 2.1.** Ясно, что то же самое можно сделать в любой точке $p$, которая является изолированным общим нулем функций $f_i$. Следовательно, для каждой такой точки $p$ определен вычет $\mathrm{Res}_p(g; f)$. В §5 нам потребуется глобальный вариант этого понятия — так называемый глобальный логарифмический вычет [2, 20], который определяется как сумма локальных вычетов по всем общим нулям функций $f_i$ in $\mathbb{C}^n$. Его свойства могут быть выведены из (P1)–(P5). Теорема 2.2 также имеет глобальный аналог.

**Замечание 2.2.** Теорема 2.2 (так называемая локальная двойственность Гротендика [32]) может быть выведена непосредственно из интегрального представления (2.2). Теорема 2.1 также имеет аналитическое доказательство, основанное на так называемой формуле преобразования логарифмического вычета [2, 32].

Мы завершим обсуждение вычета Гротендика одним иллюстративным вычислением.

**Пример.** Пусть $f_i(z) = (z_i - p_i)^{k_i+1}$, $i = 1, \dots, n$, $k_i \in \mathbb{N}$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$. Тогда формула Коши для $n$ комплексных переменных [2] дает:

$$\mathrm{Res}_p(g; f) = \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} g}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}(p).$$

## 3. Алгебраическая формула для локальной степени

Основной результат этого параграфа и вместе с тем один из ключевых элементов нашего подхода — это алгебраическая формула для локальной степени гладкого отображения, установленная

в [30] и [16]. Мы приводим формулировку, предложенную в [16]. Вообще в этом параграфе мы везде следуем [16, 39] и используем те же обозначения, что и [39].

Следует отметить, что, хотя формулировка основного результата в [30] отличается от нашей лишь в технических деталях, доказательства, предложенные в [16] и [30], существенно различаются. Доказательство в [30] более алгебраично и использует глубокие результаты коммутативной алгебры. Наше доказательство имеет аналитическую природу и опирается на приведенные выше свойства логарифмического вычета.

Прежде чем дать точную формулировку результата, необходимо ввести некоторые обозначения. Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, определенное в окрестности $U$ начала координат 0 в $\mathbb{R}^n$, причем $f(0) = 0$. В таком случае мы говорим, следуя работе [30], что начало координат является нулем отображения $f$. Эквивалентным образом можно рассматривать и гладкий росток отображения $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ как в [30].

Пусть $R[n]$ есть алгебра формальных степенных рядов от $n$ переменных с вещественными коэффициентами. Обозначим через $A$ локальную алгебру отображения $f$ в начале координат, т.е. $A = \mathbb{R}[n]/(\tilde{f})$, где $(\tilde{f})$ является идеалом, порожденным формальными разложениями Тейлора функций $f_j$ в начале координат.

В этом параграфе мы всегда предполагаем, что алгебра $A$ является конечномерным вещественным векторным пространством и в таком случае говорим, что $f$ имеет конечную кратность в начале координат (на языке ростков $f$ называется конечным ростком [30]). Таким образом, мы предполагаем, что $A$ есть конечномерная алгебра над $\mathbb{R}$. Обозначим через $j$ класс якобиана отображения $f$ в $A$.

Известно, что главный идеал $(j)$, порожденный $j$ в $A$, состоит из вещественных кратных $(j)$, т.е. $(j) = \mathbb{R}j$, что легко проверить непосредственно. Действительно, поскольку кольцо $A$ является локальным, мы можем записать это в виде $A = M_A \oplus \mathbb{R}1$. Согласно сказанному, $M_A j = 0$. Отсюда следует, что $(j) = Aj = (M_A \oplus \mathbb{R}1)j = \mathbb{R}j$. Из сказанного вытекает, что для каждого $a \in (j)$ имеется единственное такое $r \in \mathbb{R}$, что $a = rj$. В этом случае будем писать $r = \frac{a}{j}$.

Для идеала $I$ конечномерной алгебры $A$ мы будем писать $I \lhd A$ и через $I^2$ обозначать его квадрат, то есть идеал, порожденный всеми попарными произведениями элементов из $I$. Обозначим через $N(A)$ множество всех идеалов в $A$, имеющих нулевые квадраты, т.е.

$$N(A) = \{I \lhd A : I^2 = 0\}.$$

Для любого подмножества $X \subset A$ положим $\operatorname{ann} X = \{a \in A : aX = 0\}$. Очевидно, что при $I \in N(A)$, $I \subset \operatorname{ann} I$. Наконец, отметим, что при условии конечной кратности начало координат есть изолированный нуль отображения $f$, или, другими словами, 0 изолирован в $f^{-1}(0)$. Как уже отмечалось, в таком случае можно определить локальную топологическую степень $\deg_0 f$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $f$ — гладкое отображение конечной кратности в начале координат. Тогда для произвольного максимального элемента $N$ множества $N(A)$ имеем $(\operatorname{ann} N)^2 \subset (j)$. Кроме того, если $\operatorname{ann} N = N$, то $\deg_0 f = 0$, а если $N \subset \operatorname{ann} N$, то для произвольного элемента $a \in \operatorname{ann} N - N$ имеем*

$$\deg_0 f = \operatorname{sgn}\left(\frac{a^2}{j}\right)(\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} N - \dim_{\mathbb{R}} N). \tag{3.1}$$

Мы воспроизведем доказательство из [16], опирающееся на свойства вычета Гротендика. Другие доказательства этой теоремы содержатся в [30] и [5].

*Доказательство.* Сначала покажем, что задача может быть сведена к полиномиальному случаю. Для этого мы используем локальные аналитические результаты из [9]. Действительно, в §1 работы [9] доказано, что для каждого такого $f$ существуют ростки $p_j(x, y)$ псевдополиномов по $x$ с гладкими по $y$ коэффициентами такие, что

$$(p_1, \ldots, p_n) = (F_1, \ldots, F_n), \tag{3.2}$$

где $F_j(x, y) = f_j(x) - y_j$.

Следовательно, беря $U$ и $V$ достаточно малыми, можно считать, что $(p) = (F)$ в $E(U \times V)$. Мы также предполагаем, что $\mathbb{R}^n$ стандартным образом («как вещественная часть») вложено в $\mathbb{C}^n$

путем $s(x) = x$. Обозначим через $\pi$ естественную проекцию $\pi(z) = \mathrm{Re}(z)$ и пусть $\tilde{p}$ — естественное продолжение $p_j$ на $\mathbb{C}^n \times V$. Из (3.2) ясно, что ранг матрицы

$$M_y(x,y) = \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_k}(x,y)\right)$$

равен $n$ в некоторой окрестности начала координат. Поэтому $D_y(x,y) = \det M_y(x,y)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат, скажем, отрицателен на $U \times V$.

Теперь мы находимся в ситуации, рассмотренной в [9], и из результатов §1.7 названной работы следует, что, переходя, если необходимо, к меньшим окрестностям $U, V$, можно предполагать, что для каждого $y \in V$ все корни системы $\tilde{p}_j(x,y) = 0$, лежащие в $U$, являются изолированными и стремятся к началу координат при $y \to 0$.

Далее, для каждого открытого $G \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $H(G)$ множество голоморфных функций в $G$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $G$. Как известно, $H(G)$ с этой топологией является комплексным пространством Фреше и, более того, комплексной алгеброй Фреше.

Если $G$ симметрично относительно $s(\mathbb{R}^n)$, то естественная инволюция комплексного сопряжения $\tau$ действует на $H(G)$. Обозначим через $H_R(G) = \mathrm{Fix}\,\tau$ множество неподвижных точек этой инволюции. Очевидно, необходимым и достаточным условием того, что функция $h \in H(G)$ принадлежит $H_R(G)$, является то, что ее соответственные коэффициенты Тейлора в комплексно сопряженных точках являются комплексно сопряженными. Заметим, что по построению $\tilde{p}_j(\cdot, y) \in H_R(U), j = 1, \ldots, n$.

Для $y \in V$ положим

$$E_y = H(U)/(\tilde{p}_j(\cdot, y)),$$

где в знаменателе стоит замкнутый идеал, порожденный функциями $\tilde{p}_j(x,y)$ в $\mathbb{C}$-алгебре Фреше $H(U)$. Значит, $E_y$ — также комплексная алгебра Фреше, и ниже мы покажем, что это конечномерная алгебра. □

**Лемма 3.1.** *Если окрестность $V$ достаточно мала, то для любого $y \in V$ имеем*

$$E_y \cong \sum_{z \in Z(y)} O_z(C^n)/(\tilde{p}_j(\cdot, y))_z, \tag{3.3}$$

*где $Z(y) = \{z \in U : \tilde{p}_j(z,y) = 0, j = 1, \ldots, n\}$.*

*Доказательство.* Пусть $O$ обозначает структурный пучок пространства $\mathbb{C}^n$, ограниченный на $U$, и пусть $J$ обозначает когерентный подпучок идеалов в $O$, порожденный функциями $\tilde{p}_j(x,y)$. Как обычно, можно выписать короткую точную последовательность пучков

$$0 \to J \to O \to O/J \to 0.$$

Пусть $P : O^n \to O$ — морфизм пучков, заданный послойно формулой

$$P_z : (h_j) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (h_j p_j(\cdot, y))_z.$$

Обозначим через $K$ ядро $P$. Как известно, $K$ является когерентным подпучком $O$-модулей в $O^n$. Следовательно, имеем короткую точную последовательность пучков $O$-модулей

$$0 \to K \to O^n \to J \to 0.$$

Используя стандартную теорию когомологий пучков, получаем точную последовательность пространств сечений

$$0 \to \Gamma(K, U) \to \Gamma(O^n, U) \to \Gamma(O, U) \to \Gamma(O, O/J) \to 0. \tag{3.4}$$

Она получается из рассмотрения точных последовательностей когомологий

$$0 \to \Gamma(J, \tilde{U}) \to \Gamma(O, \tilde{U}) \to \Gamma(O/J, \tilde{U}) \to H^1(\tilde{U}, J) \to \ldots,$$
$$0 \to \Gamma(K, \tilde{U}) \to \Gamma(O^n, \tilde{U}) \to \Gamma(J, \tilde{U}) \to H^1(\tilde{U}, K) \to \ldots.$$

Здесь группы $H^1(U,J)$ и $H^1(U,K)$ тривиальны по теоремам A и B Картана [32], что и дает приведенную выше четырехчленную точную последовательность. Из этой последовательности, в свою очередь, следует, что каждое сечение пучка $O$ над $U$, лежащее в $J$, представимо в виде $\sum h_j\tilde{p}_j(\cdot,y)$, где $h_j\in\Gamma(O,U)$. Поскольку $\Gamma(O,U)\cong H(U)$, получаем изоморфизм

$$H(U)/(\tilde{p}_j)\cong\Gamma(O/J,U).$$

Заметим теперь, что в силу выбора окрестностей $U$ и $V$ пучок $O/J$ является так называемым пучком-небоскребом, то есть он сконцентрирован в конечном множестве точек $z\in Z(y)$. Следовательно, $\Gamma(O,O/J)\cong\bigoplus O_z/J_z$. Это означает, что отображение

$$i_y:E_y\to\bigoplus O_z/J_z,\ i_y(\mathrm{cl}(h))=\{\mathrm{cl}(h_z),z\in Z(y)\}$$

является изоморфизмом, где cl обозначает класс в соответствующем факторпространстве. Очевидно, $i_y$ является изоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебр, что в точности эквивалентно утверждению леммы. Таким образом, лемма доказана. □

Из доказанной леммы легко следует, что

$$E_0\cong O_0(C^n)/(\tilde{p}_j(\cdot,0))\cong\mathbb{C}^m.$$

Действительно, согласно предположению, $(\tilde{f}_j)$ — система параметров [32] в $E_0(\mathbb{R}^n)$ и в то же время $(p_j)=(f_j)$. Следовательно, $(p_j)$ — также система параметров, и мы получаем

$$\mathbb{R}[[x]]/(p_j(x,0))\cong E_0(\mathbb{R}^n)/(f_j)\cong O_0(f)\cong\mathbb{R}^m.$$

Кроме того, хорошо известно [9] (и почти очевидно), что комплексная размерность комплексной локальной алгебры функций $(\tilde{p}_j)$ равна вещественной размерности соответствующей вещественной локальной алгебры функций $(p_j)$. Наконец, поскольку полиномы $(\tilde{p}_j)$ образуют систему параметров в $\mathbb{C}[[z]]$, мы получаем $\tilde{E}_0\cong\mathbb{C}^m$, что и утверждалось.

Положим $\tilde{E}=\bigcup\tilde{E}_y$ и введем естественную топологию на этом объединении как на факторпространстве тривиального расслоения (бесконечномерного векторного расслоения) $V\times H(\tilde{U})$ над $V$. Мы также рассматриваем $E=\bigcup E_y$, наделенное такой же фактортопологией.

**Лемма 3.2.** *Если окрестности $\tilde{U}$ и $V$ достаточно малы, то $\tilde{E}$ и $E$ — тривиальные векторные расслоения над $V$ со слоями $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.*

Построим теперь линейные функционалы $\tilde{L}$ и $L$ на расслоениях $\tilde{E}$ и $E$. Для $y\in V$ положим

$$\tilde{L}(y)=\tilde{L}_y:\tilde{E}_y\to\mathbb{C},\ \tilde{L}_y(a)=\sum_{z\in Z(y)}\mathrm{Res}_z(g;\tilde{p}(\cdot,y)),\tag{3.5}$$

где $a\in\tilde{E}_y$ и $g\in H(\tilde{U})$ — некоторый представитель класса $a$. Принимая во внимание, что $E$ естественно вложено в $\tilde{E}$, введем также

$$L(y)=L_y=\tilde{L}_y:E_y\to\mathbb{C}.\tag{3.6}$$

Эти функционалы корректно определены. Действительно, если $g'$ — другой представитель $a$, то существуют $h_j\in H(\tilde{U})$ такие, что $g-g'=\sum h_j\tilde{p}_j(\cdot,y)$ в $\tilde{U}$. Из свойства P1 вытекает, что для любого $z\in Z(y)$ $\mathrm{Res}_z g=\mathrm{Res}_z g'$, так что соответствующие суммы в (3.5) также равны. Линейность $\tilde{L}$ следует из линейности вычета. Непрерывность $\tilde{L}$ очевидным образом следует из свойства P3. Разумеется, то же самое верно для $L$.

Покажем теперь, что для любого $a\in E_y$ выполнено $\tilde{L}(a)\in\mathbb{R}$, то есть $L_y:E_y\to\mathbb{R}$. Это следует из перестановочности Res с комплексным сопряжением, которую легко усмотреть из интегрального представления вычета.

**Лемма 3.3.** *Пусть $z_0\in\tilde{U}$ — общий нуль функций $\tilde{p}_j$ и пусть $g\in H(\tilde{U})$. Тогда*

$$\mathrm{Res}_{\overline{z}_0}(\tau(g);\tilde{p}_j)=\overline{\mathrm{Res}_{z_0}(g;\tilde{p}_j(\cdot,y))}.$$

*В частности, если $z_0$ — вещественная точка и $g\in H_R(\tilde{U})$, то*

$$\mathrm{Res}_{z_0}g\in\mathbb{R}.$$

Используя тот факт, что слои расслоений $\tilde{E}$ и $E$ являются алгебрами, определим симметрические билинейные функционалы $\tilde{B}$ и $B$:

$$\tilde{B}_y : \tilde{E}_y \times \tilde{E}_y \to \mathbb{C}, (a,b) \mapsto \tilde{L}_y(ab);$$
$$B_y : E_y \times E_y \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto L_y(ab).$$

Непрерывность этих функционалов следует из непрерывности $\tilde{L}, L$ и непрерывности умножения в слоях данных расслоений.

Наконец, определим непрерывное семейство квадратичных форм на слоях расслоения $E$:

$$Q_y : E_y \to \mathbb{R}, Q_y(a) = B_y(a,a) = L_y(a^2).$$

В силу предыдущих замечаний получаем семейство невырожденных квадратичных форм на слоях $E$.

**Лемма 3.4.** *Если $V$ достаточно мало, то форма $Q_y$ невырождена для любого $y \in V$.*

Обозначим через $\sigma(y)$ сигнатуру формы $Q_y$ на $E_y$. Тогда в силу непрерывности $Q_y$ по $y$ заключаем, что $\sigma(y) = \text{const}$ на $V$. В частности, для любого $y \in V$ верно равенство $\sigma(y) = \sigma(0)$. Теперь утверждение теоремы следует из четырех алгебраических лемм.

**Лемма 3.5.** *Пусть $y \in \operatorname{Reg} f \cap V$ — регулярное значение $f$ в $V$, тогда*

$$\sigma(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} D(x). \tag{3.7}$$

**Лемма 3.6.** *Пусть $B$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на конечномерном вещественном векторном пространстве $X$, а $Q$ — ассоциированная с ней квадратичная форма. Тогда для любого максимального нейтрального (изотропного) подпространства $X_0$ формы $Q$ и $X_1 = \operatorname{ann}_B X_0 = \{x \in X : B(x, X_0) = 0\}$ справедливо соотношение $\dim X_1 = \dim X_0 + |\sigma(Q)|$, форма $Q \mid X_1 \setminus X_0$ не меняет знак и ее знак совпадает со знаком сигнатуры $\sigma(Q)$ формы $Q$.*

**Лемма 3.7.** *Пусть $A = R[[x]]/(f)$, где $f_j \in R[[x]]$ и $\dim_r A < \infty$. Пусть $d = \operatorname{cl}_A \det(\partial f_j/\partial x_k)$ и пусть $L : A \to \mathbb{R} — \mathbb{R}$-линейный функционал, такой, что $L(d) > 0$. Определим билинейную форму $B$ и квадратичную форму $Q$ на $A$ равенствами $B(a,b) = L(a \cdot b), Q(a) = B(a,a)$ и обозначим через $\sigma(Q)$ сигнатуру $Q$. Тогда*

a) *$Q$ — невырожденная квадратичная форма*;

b) *для любого идеала $I$ алгебры $A$ выполнено соотношение $\operatorname{ann}_B I = \operatorname{ann} I$*;

c) *если идеал $N$ максимален среди идеалов с нулевым квадратом, то $N$ — максимальное нейтральное (изотропное) подпространство формы $Q$*;

d) *для любого максимального элемента $N \in N(A)$ выполнено соотношение $(\operatorname{ann} N)^2 \subset (d)$*;

e) *если $\operatorname{ann} N = N$, то $\sigma(Q) = 0$*;

f) *если $\operatorname{ann} N \neq N$, то для любого $a \in \operatorname{ann} N - N$ имеем*:

$$\sigma(Q) = \frac{a^2}{d}(\dim_R \operatorname{ann} N - \dim_R N). \tag{3.8}$$

**Лемма 3.8.** *Пусть $s : A' = R[[x]]/(\tilde{p}_j(x,0)) \to A'' = R[[x]]/(Tf_j)$ — отображение, индуцированное тождественным отображением $R[[x]]$, где $Tf_j$ обозначает формальный ряд Тейлора функции $f_j$ в начале координат. Пусть $J$ — класс полинома $D_x(x,0)$ в $A'$ и пусть $d$ — класс функции $D$ в $A''$. Тогда существует такое положительное число $C$, что $s(J) = cd$.*

Покажем теперь, что теорема может быть выведена из этих четырех лемм. Прежде всего, из определения локальной степени и первой из этих лемм вытекает, что для любого достаточно малого регулярного значения $y$ имеем $\deg_0 f = \sigma(y)$. Как мы уже убедились, форма $Q_0$ невырождена, так что сигнатура $\sigma(y)$ постоянна вблизи начала координат, следовательно, $\deg_0 f = \sigma(0)$. Применение третьей леммы к алгебре $A'$ дает утверждение теоремы в терминах этой алгебры. Из последней

же леммы следует, что утверждение теоремы остается верным и в терминах алгебры $A''$. Наконец, наличие естественного изоморфизма $R[[x]]/(Tf_j) \cong E_0(R^n)/(Tf_j)$, переводящего $\mathrm{cl}(T_0 d)$ в $d$, означает, что утверждение теоремы верно в терминах алгебры $A$.

Таким образом, для завершения доказательства остается доказать эти четыре леммы. Вторая лемма есть попросту набор известных фактов о квадратичных формах (см., например, [42]). Остальные три леммы будут доказаны ниже.

*Доказательство леммы 3.5.* Пусть $y \in \mathrm{Reg}\, f \cap V$. Поскольку функции $f_j$ вещественны, очевидно, что множество $Z(y)$ представимо в виде

$$Z(y) = \{z_1, \dots, z_{k+2l}\}, z_j \in s(br^n), j = 1, \dots, k, z_{k+j} = \overline{z}_{k+j+l}, j = 1, \dots, l.$$

Для $y \in V$ определим $p_y : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, полагая $p_y(z) = (\tilde{p}_j(z, y))$. Тогда $O_z(p_y) \cong O_z(\mathbb{C}^n)/(\tilde{p}_j(\cdot, y))$, и мы получаем изоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр

$$\alpha_y : \tilde{E}_y \to O_y = \bigoplus O_{z_j}(p_y) \cong \mathbb{C}^m.$$

Положим $q_j = \dim_{\mathbb{C}} O_{z_j}(p_y)$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{k+2l} q_j = m$ и $q_j = 1$ для $j = 1, \dots, k$, поскольку $z_j, j = 1, \dots, k$ — вещественные прообразы регулярного значения $y \in \mathrm{Reg}\, f$, т.е. они являются регулярными точками отображения $f$, откуда ясно, что они также являются регулярными точками отображения $p_y$. Как легко усмотреть, $q_j = q_{j+l}$ для $j = k+1, \dots, k+l$. Кроме того, принимая во внимание эквивариантность $\tilde{f}$ по отношению к комплексному сопряжению, заключаем, что можно выбрать мономиальные базисы в каждой из алгебр $O_{z_j}(p_y)$ с элементами $e_s^{(j)}, s = 1, \dots, q_j$ таким образом, чтобы

$$e_1^{(j)} = 1, j = 1, \dots, k; \tau(e_s^j) = e_s^{(j+l)}, j = 1, \dots, k+l, s = 1, \dots, q_j.$$

Считая это сделанным, приходим к выводу, что

$$\tilde{\beta}_y : \tilde{E}_y \to \mathbb{C}^m, h \mapsto (T_s^j h),$$

является изоморфизмом, где $T_s^j h$ обозначает коэффициент при мономе $e_s^j$ в тейлоровском разложении функции $h$ в точке $z_j$. Заметим, что в силу нашего выбора мономиальных базисов $T_1^j h = h(z_j), j = 1, \dots, k$.

Теперь уже нетрудно построить естественные координаты на вещественном слое $E_y$, выделяя вещественную и мнимую часть. Это эквивалентно утверждению, что отображение

$$\beta_y : E_y \to \mathbb{R}^m, h \mapsto (h(z_1), \dots, h(z_k); (\mathrm{Re}\, T_s^j h, \mathrm{Im}\, T_s^j h))$$

также является изоморфизмом (доказательство является простым упражнением из линейной алгебры).

Это сопоставление определяет координаты на $E_y$, которые мы обозначим $w_1, \dots, w_{k+2l}$. Выпишем явное выражение для квадратичной формы $Q_y$ в этих координатах. Пусть $h \in H_r(\tilde{U})$, тогда, вспоминая определение $Q_y$ и $L_y$, получаем:

$$Q_y(h) = \sum_{j=1}^{k+2l} \mathrm{Res}_{z_j}(h^2; \tilde{p}_s(\cdot, y)). \tag{3.9}$$

Заметим теперь, что для $j = 1, \dots, k$ свойство P2 влечет равенства

$$\mathrm{Res}_{z_j}(h^2; \tilde{p}_s(\cdot, y)) = \frac{h^2(z_j)}{D_x(z_j, y)}.$$

Далее, из леммы 3.3 следует, что оставшаяся сумма может быть представлена в виде

$$\sum_{s,t=1}^{l} (a_{st} w_{k+s} w_{k+t} + \overline{a}_{st} w_{k+l+s} w_{k+l+t}).$$

Полагая $\operatorname{Re} w_{k+j} = u_j$, $\operatorname{Im} w_{k+j} = v_j$, $j = 1, \dots, l$, мы получаем, что в координатах, индуцированных на $E_y$ отображением $\beta_y$, форма $Q_y$ записывается в виде

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{w_j^2}{D_x(z_j, y)} + 2 \operatorname{Re} \sum_{s,t=1}^{l} a_{st}(u_s + iv_s)(u_t + iv_t). \tag{3.10}$$

Второе слагаемое является квадратичной формой на вещественном $(2l)$-мерном пространстве, причем ее сигнатура равна нулю. Последнее утверждение следует из того легко проверяемого факта, что эта форма меняет знак при замене координат $(u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_l) \mapsto (-v_1, \dots, -v_l, u_1, \dots, u_l)$.

Поэтому из (3.10) получаем, что

$$\sigma(Q_y) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn} D_x(z_j, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} D_x(x, y). \tag{3.11}$$

Для завершения доказательства леммы остается показать, что последняя сумма совпадает с аналогичной суммой для функции $D(x)$. Для этого заметим, что из выбора функций $p_j$ следует, в частности, что для каждого $x \in U$ выполняется равенство

$$p_j(x, f(x)) = 0, j = 1, \dots, n.$$

Дифференцируя эти равенства по $x_s$ в точке $(x, f(x))$, получаем $n^2$ равенств

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_s}(x, f(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial y_t}(x, f(x)) \frac{\partial f_t}{\partial x_s}, \quad j, s = 1, \dots, n.$$

Рассматривая эти равенства как соотношение между $(n \times n)$-матрицами и переходя к их детерминантам, получаем соотношение

$$D_x(x, f(x)) = -D_y(x, f(x)) D(x).$$

Вспомним теперь, что в начале доказательства мы выбрали $p_j(x, y)$ таким образом, что $D_y(x, y) < 0$ на $U \times V$, откуда следует, что для любого $x \in U$ имеет место равенство

$$\operatorname{sgn} D_x(x, f(x)) = \operatorname{sgn} D(x).$$

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\sigma(y) = \sigma(Q_y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} D(x),$$

что завершает доказательство леммы 3.5. □

**Замечание 3.1.** В случае когда $q_j = 1$ (что эквивалентно равенству $k + 2l = m$), наши рассмотрения можно упростить. На самом деле, можно показать, что предположение о простоте всех прообразов (включая комплексные прообразы) не ограничивает общности, поскольку наши предположения гарантируют существование вещественных регулярных значений комплексифицированного отображения $\tilde{f}$. Мы не уточняем здесь эти соображения, поскольку единственное известное нам обоснование этого факта опирается на лемму Сарда для эквивариантных отображений, обсуждение которой увело бы нас в сторону от основной темы.

*Доказательство леммы 3.7.* Утверждение a) было уже доказано при обсуждении свойств вычета. Далее, вполне ясно, что $\operatorname{ann} I \subset \operatorname{ann}_B I$. Предположим, что противоположное включение не имеет места. Тогда существует $a \in \operatorname{ann}_B I$ такое, что $a$ не лежит в $\operatorname{ann} I$, что означает существование некоторого $x \in I$, такого, что $ax \neq 0$. Как было доказано выше, существует также элемент $b \in A$, такой, что $(ax)b = d$. Следовательно, $B(a, xb) = L(d) \neq 0$, что противоречит предположению о том, что $a \in \operatorname{ann}_B I$, поскольку $xb \in I$. Таким образом, $\operatorname{ann}_B I \subset \operatorname{ann} I$, и утверждение b) доказано.

Пусть теперь $N$ — максимальный элемент в $N(A)$. Тогда из $N^2 = 0$ следует, что $N \subset \operatorname{ann} N = \operatorname{ann}_B N$, т.е. $N$ — нейтральное подпространство для формы $Q$. Покажем, что это максимальное нейтральное подпространство для $Q$. Предположим противное. Тогда существует $a \in A$ вне $N$ такое, что $B(a, N) = 0$ и $Q(a) = 0$. Построим $m \in A$ такое, что $ma$ не лежит в $N$, но $M_A ma \subset N$.

Если $M_A a \subset N$, то положим $m = 1$. Если $M_A a$ не лежит в $N$, то такой элемент $m$ можно построить тем же путем, что и в доказательстве b), и в этом случае $m \in M_A$. Положим $N' = N \oplus \mathbb{R}ma$. Тогда $N'$ также является идеалом в $A$ и легко проверить, что $(N')^2 = 0$ и $N'$ строго содержит $N$. Это противоречит максимальности $N$, так что c) доказано.

Заметим теперь, что для любых линейных функционалов $L_0, L_1 : A \to \mathbb{R}$ с $L_j(d) > 0, j = 1, 2$, форма $Q_0$ гомотопна $Q_1$ в пространстве всех невырожденных квадратичных форм на $A$. Например, можно использовать линейную гомотопию $L_t = tL_1 + (1-t)L_0, t \in [0,1]$. Невырожденность всех форм $L_t$ следует из того факта, что $L_t(d) = tL_1(d) + (1-t)L_0(d) > 0$ для $t \in [0,1]$. Следовательно, $\sigma(Q_0) = \sigma(Q_1)$.

Возьмем теперь максимальный элемент $N$ в $N(A)$. Как было показано, $N$ — максимальное нейтральное подпространство для обеих форм $Q_0$ и $Q_1$. В силу предыдущей леммы обе эти формы знакоопределены на $\operatorname{ann} N$ и имеют один и тот же знак на $\operatorname{ann} N = \operatorname{ann}_{B_0} N = \operatorname{ann}_{B_1} N$. Без ограничения общности можно считать, что обе они положительны на $\operatorname{ann} N$. Покажем, что $a^2 \in (d)$ для каждого $a \in \operatorname{ann} N$.

Действительно, если бы это было не так, мы могли бы построить линейный функционал $L : A \to \mathbb{R}$ такой, что $L(d) > 0$ и $L(a^2) < 0$. Другими словами, квадратичная форма $Q$, ассоциированная с $L$, была бы отрицательной на $a$, что противоречит сказанному выше, поскольку $a \in \operatorname{ann} N$. Теперь уже ясно, что $(\operatorname{ann} N)^2 \subset (d)$, что и требовалось доказать.

Заметим, наконец, что каждый элемент $a \in \operatorname{ann} N - N$ можно представить в виде $a^2 = cd$ с некоторым $c \in \mathbb{R}$. Тогда $Q(a) = L(a^2) = cL(d)$, так что

$$\operatorname{sgn} \sigma(Q) = \operatorname{sgn} Q(a) = \operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} \frac{a^2}{d}.$$

Таким образом, формула для сигнатуры квадратичной формы $Q$ установлена, что завершает доказательство леммы. □

*Доказательство леммы 3.8.* Заметим сначала, что тождественное отображение алгебры $R[[x]]$ индуцирует отображение факторалгебр $\gamma : A' \to A''$, поскольку мы установили совпадение идеалов $p_j(x,0)) = (\tilde{f}_j)$. Ясно также, что $\gamma(\operatorname{cl}_{A'} h = \operatorname{cl}_{A''} h$.

Введем функцию $F$ на $U \times V$, полагая

$$F(x,y) = D_x(x,y) + D_y(x,y)D(x).$$

Из сказанного выше ясно, что для каждого $x \in U$ выполняется $F(x, f(x)) = 0$. Без ограничения общности можно считать $V$ выпуклым множеством. Тогда для любых $x \in U, y \in V$ по формуле Ньютона — Лейбница можно записать

$$F(x,y) - F(x,f(x)) = \int_0^1 \frac{dF(x, ty + (1-t)f(x))}{dt} dt$$

или, более подробно,

$$F(x,y) - F(x,f(x)) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, ty + (1-t)f(x))(y_j - f_j(x))dt.$$

Отсюда следует, что можно записать функцию $F$ в виде

$$F(x,y) = \sum_{j=1}^n G_j(x,y)(f_j(x) - y_j), \qquad G_j(x,y) = -\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, ty + (1-t)f(x))dt.$$

Подставляя в эту формулу $y = 0$, получаем

$$D_x(x,0) = -D_y(x,0)D(x) + \sum_{j=1}^n G_j(x,0)f_j(x).$$

Переходя к формальным разложениям Тейлора в начале координат, получаем, что сумма в правой части предыдущей формулы принадлежит $(\tilde{f}_j)$. Принимая во внимание, что

$$D_y(x,0) = D_y(0,0) + (D_y(x,0) - D_y(0,0)),$$

где второе слагаемое лежит в максимальном идеале, мы получаем

$$\gamma(\tilde{J}) = cl_{A''}\tilde{D}_x(x,0) = \mathrm{cl}_{A''}(-\tilde{D}_y(x,0)\tilde{D}(x) = -D_y(0,0)\,\mathrm{cl}_{A''}\,\tilde{D} = -D_y(0,0)\tilde{d},$$

поскольку $M_{A''}\tilde{d} = 0$ (как было показано выше, класс якобиана всегда принадлежит аннулятору максимального идеала). Поскольку по построению $D_y(0,0) < 0$, и эта лемма доказана. □

Таким образом, все заявленные утверждения доказаны, так что доказательство теоремы 3.1 закончено. Проиллюстрируем эту теорему на простом примере.

**Пример.** Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение с компонентами $(x^2 - y^2, 2xy)$, так что это просто отображение $z \mapsto z^2$, записанное в вещественной форме. Очевидно, начало координат — изолированный нуль $f$, и каждая точка, кроме начала координат, является регулярным значением $f$ с ровно двумя прообразами, в каждом из которых якобиан $J = 4(x^2 + y^2)$ положителен. Поэтому из дифференциального определения степени отображения следует, что $\deg_0 f = 2$.

Подсчитаем теперь $\deg_0 f$ с помощью формулы (3.1). Локальной алгеброй $f$ в начале координат является $A = \mathbb{C}[[x,y]]/I$, где $I = (x^2 - y^2, xy)$. Легко проверить, что $\mathbb{R}$-базис алгебры $A$ задается классами мономов $\{1, x, y, x^2\}$. Следуя предписаниям теоремы 3.1, построим линейный функционал $l$ на $A$, полагая $l(1) = l(x) = l(y) = 0, l(x^2) = 1$. Поскольку $J = 4(x^2 + y^2) = 8x^2 - 4(x^2 - y^2) \equiv 8x^2 \bmod I$, имеем $l(j) = 8 > 0$, так что $l$ может быть использован для вычисления $\deg_0 f$ с помощью билинейной формы $B(a,b) = l(ab)$.

Найдем матрицу этой билинейной формы. Имеем $B(1,x^2) = B(x,x) = B(y,y) = 1$, и все остальные элементы этой матрицы равны нулю. Поэтому искомая квадратичная форма имеет вид $u_1u_4 + u_2^2 + u_3^2$. Следовательно, ее сигнатура равна двум, что согласуется с теоремой 3.1.

Имеется много примеров аналогичных вычислений в малых размерностях [5, 38]. На самом деле, теорема 3.1 позволяет получить эффективный алгоритм вычисления степени отображения. На основе этой теоремы А. Ленцки и З. Шафранец из университета Гданьска разработали соответствующую компьютерную программу [43]. Еще более эффективная программа была позднее предложена В. Кастелланосом-Варгасом [28].

Теорема 3.1 имеет разнообразные применения, некоторые из которых обсуждаются в данной работе. В заключение этого параграфа приведем одно непосредственное следствие, которое будет неоднократно использовано в дальнейшем изложении.

**Следствие 3.1.** *В условиях и обозначениях теоремы* 3.1 *имеет место равенство*

$$|\deg_0 f| = m - 2\dim_{\mathbb{R}} N.$$

Как показано в [3, 16, 19], это равенство позволяет получить нетривиальные оценки степени полиномиального отображения, находящие применения в вещественной алгебраической геометрии и нелинейном анализе.

## 4. Оценки степени отображения

Мы приведем некоторые оценки для степени полиномиального отображения в терминах так называемых чисел Петровского, веденных в [3,19]. Сначала рассмотрим случай однородного эндоморфизма (векторного поля), а потом обобщим основную оценку (4.2) на квазиоднородный случай. Как отмечено в первом параграфе, однородный эндоморфизм собственен, если и только если начало координат является изолированным прообразом своего образа, так что можно определить и локальную степень $\deg_O F$ и глобальную степень $\deg F$.

**Определение 4.1** (см. [19]). Для $n$-набора натуральных чисел $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ число Петровского $P_n(\mathbf{m})$ определяется как число всех целочисленных $n$-наборов $k = (k_1, \dots, k_n)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant k_i \leqslant m_i - 1,\ i = 1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - 1}{2}. \tag{4.1}$$

Это определение восходит к [3], где оно было дано в случае, когда все числа $m_i$ совпадают. Число $P_n(\mathbf{m})$ называется также *P-числом* типа $(n, \mathbf{m})$. Если $m_i = m$ для всех $i$, мы пишем $P_n(m)$ вместо $P_n(m, \dots, m)$. Положим еще $M = \prod m_j$.

**Теорема 4.1** (см. [19]). *Пусть $F = (f_1, \dots, f_n)$ — невырожденный однородный эндоморфизм $\mathbb{R}^n$ типа $\mathbf{m}$. Тогда*

$$|\deg F| \leqslant P_n(\mathbf{m}). \tag{4.2}$$

*Доказательство.* Хорошо известно (и легко проверить), что в данной ситуации $\deg F = \deg_O F$, где $O$ обозначает начало кординат в $\mathbb{R}^n$, и $F$ имеет конечную кратность в начале координат [5]. Поэтому можно использовать доказанную выше алгебраическую формулу для локальной степени. Для этого, подобно обсуждению в §3, обозначим через $A$ локальную алгебру $F$ в начале координат. Если $\mu = \dim_{\mathbb{R}} A$ — кратность $F$ в начале координат, то следствие 3.1 дает

$$|\deg_O F| = \mu - 2\dim_{\mathbb{R}} I,$$

где $I$ — любой идеал в $A$, который является максимальным среди идеалов с нулевым квадратом в $A$.

Согласно хорошо известной формуле для кратности однородного отображения [5], в нашем случае $\mu = M$. Другими словами, $\mu$ равно числу точек с целочисленными координатами в параллелепипеде $\Pi = [0, m_1] \times \ldots \times [0, m_n]$. Кроме того, в качестве $\mathbb{R}$-базиса в $A$ можно взять классы подходящих мономов, и число $b_d$ базисных мономов каждой степени $d$ равно числу целочисленных точек в $\Pi$, которые лежат на соответствующей плоскости [5]:

$$b_d = \operatorname{card}\Big\{k = (k_1, \dots, k_n) : 0 \leqslant k_s \leqslant m_s - 1, \sum k_s = d\Big\}.$$

Известно также, что максимальная возможная степень базисных мономов равна алгебраической степени $d_J$ якобиана $J$ отображения $F$, которая в данном случае равна $\sum(m_i - 1)$. Рассмотрим теперь вещественное подпространство $V$ в $A$, порожденное всеми классами базисных мономов степени большей, чем $d_J/2$. Из максимальности $d_J$ следует, что подпространство $V$ является идеалом, и его квадрат равен нулю. Следовательно,

$$|\deg_O F| \leqslant \mu - 2\dim_{\mathbb{R}} V.$$

Из вышеупомянутой формулы для $b_d$ явствует, что число базисных мономов степени $d$ равно числу базисных мономов степени $d_J - d$ (это проявление так называемой самодвойственности алгебры $A$ [48]). Отсюда следует, что правая часть последнего неравенства не превосходит числа базисных мономов «средней» степени $d_J/2$, которое совпадает с $P_n(\mathbf{m})$. Это завершает доказательство. □

Отметим, что рассуждение, использующее построенный выше идеал $V$ (оно восходит к [16], где такое рассуждение применялось в случае двух переменных), остается применимым в более общих ситуациях, что приводит к дальнейшим результатам такого рода. Кроме того, А. Хованский доказал точность этих оценок для различных классов однородных отображений [19]. Чтобы более полно обрисовать состояние дел в этой области, воспроизведем один результат из [19], а затем более подробно обсудим аналогичные результаты для квазиоднородных эндоморфизмов [39].

Оказывается, что можно описать весь спектр значений степени отображения для эндоморфизмов фиксированного типа однородности. Из следствия 3.1 ясно, что $\deg F$ не превосходит $M$ и при этом сравнима с $M \bmod 2$. В [19] показано, что эти два условия полностью определяют спектр возможных значений $\deg F$ для $F$ с фиксированными показателями однородности.

**Теорема 4.2** (см. [19]). *Пусть $\mathbf{m}$ — фиксированный $n$-набор натуральных чисел. Тогда для любого целого $d$, которое сравнимо с $M \bmod 2$ и удовлетворяет неравенству* (4.2)*, существует однородный эндоморфизм $\mathbb{R}^n$ с показателем однородности $\mathbf{m}$ такой, что $\deg F = d$.*

Такие эндоморфизмы в явном виде построены в [19]. Этот результат показывает, в частности, что указанная оценка точна на классе всех однородных эндоморфизмов фиксированного типа однородности. Однако если ограничиться только градиентными эндоморфизмами $F$ (это требуется в некоторых приложениях [3, 39]), то точность этой оценки не установлена. Можно также описать возможные значения степени на областях, заданных алгебраическими неравенствами фиксированной алгебраической степени [19].

Оказывается, что аналогичные результаты могут быть получены в более общем случае квазиоднородных эндоморфизмов, чем мы и займемся в оставшейся части параграфа. Отметим, что во многих задачах нелинейного анализа требуется оценить индекс (вращение) векторного поля. Кроме того, понятие индекса допускает обобщение на случай векторного поля на многообразии и особом множестве. Имея в виду эти обстоятельства, а также другие возможные приложения и обобщения, следующая теорема формулируется как оценка индекса квазиоднородного векторного поля.

Предположим, что задан набор положительных рациональных чисел $w = (w_1, \dots, w_n)$, которые рассматриваются как веса переменных $x_1, \dots, x_n$. Тогда $w$-степень любого монома $\prod x_i^{k_i}$ определяется как $\sum k_i w_i$ и полином $P \in \mathbb{R}_n$ называется *квазиоднородным* (qh) полиномом $w$-степени $k$, если $w$-степени всех мономов, входящих в $P$ с ненулевыми коэффициентами, равны $k$ [5].

Полиномиальное отображение $f$ называется квазиоднородным отображением $w$-степени $d = (d_1, \dots, d_m)$, если каждая из его компонент $f_i$ является квазиоднородным полиномом $w$-степени $d_i$ (ср. [5]). Для краткости будем говорить, что $f$ имеет qh-тип $(w, d)$. При $m = n$ получаем понятие квазиоднородного векторного поля. Квазиоднородное векторное поле называется невырожденным, если начало координат является его изолированным нулем, что эквивалентно отсутствию нетривиальных общих корней у полиномов $f_i$ в $\mathbb{R}^n$ и гарантирует собственность $f$ [5].

Мы намереваемся оценить индекс квазиоднородного векторного поля фиксированного qh-типа $(w, d)$ в терминах весов $w$ и степеней $d$. Оказывается, что эффективные и полезные оценки можно получить в терминах аналогов введенных выше $P$-чисел. Для этого введем целочисленный мультииндекс $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ и подсчитаем число целых точек, удовлетворяющих подходящим условиям.

**Определение 4.2.** $P$-число типа $(w, d)$ определяется как

$$P_n(w, d) = \operatorname{card}\Big\{k \in \mathbb{Z}^n,\ 0 \leqslant k_i \leqslant d_i - w_i : \sum w_i k_i = \frac{1}{2}\sum (d_i - w_i)\Big\}. \tag{4.3}$$

Здесь card обозначает количество элементов конечного множества. Таким образом, эта формула выражает число целых точек, лежащих на указанной гиперплоскости внутри параллелепипеда, заданного весами и степенями. Очевидно, эти числа легко подсчитать для конкретных значений «параметров» $n, w, d$. Их асимптотика и поведение для больших значений параметров подсказывают ряд интересных задач, на которых, однако, мы здесь останавливаться не будем. Теперь можно сформулировать основной результат данного параграфа.

**Теорема 4.3.** *Пусть $f$ — невырожденное квазиоднородное векторное поле на $\mathbb{R}^n$ типа $(w, d)$. Тогда абсолютная величина его индекса не превосходит соответствующего P-числа*:

$$|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant P_n(w, d). \tag{4.4}$$

Подобно теореме 4.1, этот результат будет выведен из теоремы 3.1. Для заданного квазиоднородного векторного поля $f$ его локальная алгебра в начале координат определяется как локальная алгебра соответствующего эндоморфизма

$$A = A_0(f) = \mathbb{R}_n[[x]]/(f),$$

где $\mathbb{R}_n[[x]]$ обозначает алгебру формальных степенных рядов от $n$ переменных с вещественными коэффициентами, а $(f)$ обозначает идеал, порожденный компонентами $f$. Обозначим еще через $J_f$ якобиан $f$ и через $j$ — его класс в $A$. Как уже отмечалось, $j$ — ненулевой элемент $A$.

Выберем $\mathbb{R}$-линейный функционал на $A$, удовлетворяющий условию $l(j) > 0$, и введем квадратичную форму $Q_f$, т.е. для $a \in A$ положим

$$Q_f(a) = l(a^2). \tag{4.5}$$

Тогда, по теореме 3.1,

$$\operatorname{ind}_0 f = \operatorname{sig} Q_f, \tag{4.6}$$

где sig обозначает сигнатуру $Q_f$.

Перед тем как доказать теорему 4.3, отметим другую оценку, также применимую в квазиоднородном случае.

**Следствие 4.1.**

$$|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant \left(\prod \frac{d_i}{w_i}\right)^{1-\frac{1}{n}}. \tag{4.7}$$

Это немедленно следует из «неравенства типа Минковского» $|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant \mu^{1-\frac{1}{n}}$, доказанного Б. Тессье и опубликованного в дополнении к работе [30]. Нужно только учесть, что кратность $\mu$ квазиоднородного векторного поля равна произведению степеней, деленному на произведение весов [5].

Предположим, что $f$ — невырожденное квазиоднородное векторное поле qh-типа $(w, d)$. Мы воспользуемся тем, что структура локальных алгебр таких полей подробно изучена в [5,31]. При этом мы будем свободно использовать нужные результаты из этих двух источников. С учетом всего этого доказательство теоремы 4.3 будет получено с помощью нескольких наблюдений, которые мы сформулируем в виде лемм.

*Доказательство теоремы 4.3.* Прежде всего, в qh-случае локальная алгебра $A$ имеет естественную градуировку, зависящую только от $w$ и $d$ [5]. Она индуцируется из естественной градуировки на $\mathbb{R}_n[[x]]$, определенной $w$-степенями мономов. Это подсказывает, что различные свойства $f$ могут быть выражены путем выбора $w$-квазиоднородного базиса в $A$ и подсчета базисных элементов фиксированной $w$-степени.

Действительно, согласно [31], полином Пуанкаре алгебры $A$ полностью определяется весами и степенями. Это означает, что для каждого такого векторного поля $f$ qh-типа $(w, d)$ и любого квазиоднородного базиса в $A_0(f)$ число элементов базиса, имеющих фиксированную $w$-степень, одно и то же. В частности, можно сформулировать два важных утверждения о структуре градуированной алгебры $A$, которые могут быть проверены с помощью явной формулы для полинома Пуанкаре алгебры $A$, полученной в [31]. Оба эти утверждения хорошо известны, и мы их приводим без доказательства, исключительно для полноты изложения.

**Лемма 4.1.** *$w$-Степень квазиоднородных элементов $A$ не превосходит числа $d_{\max} = \sum(d_i - w_i)$, которое совпадает с $w$-степенью якобиана $J_f$.*

Другими словами, класс якобиана $j$ является «высшим» элементом $A$ (в очевидном геометрическом смысле, апеллирующем к изображению мономов точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$). Очевидно, всегда можно выбрать базис в $A$ из (классов) квазиоднородных полиномов. В частности, в качестве элементов базиса могут быть выбраны подходящие мономы (мономиальный базис [5]). Наше следующее наблюдение следует непосредственно из теоремы 2.1.

**Лемма 4.2.** *Каждый квазиоднородный базис в $A$ (в частности, мономиальный базис) содержит в точности один элемент $w$-веса $d_{\max}$, в частности, можно всегда предполагать, что $j$ является единственным элементом базиса $w$-степени $d_{\max}$.*

Докажем теперь две леммы более специальной природы.

**Лемма 4.3.** *Для каждого квазиоднородного элемента базиса $a$, имеющего $w$-степень, бóльшую $d_{\max}/2$, имеет место равенство $Q_f(a) = 0$.*

Действительно, $A$ градуирована, поэтому элемент $a^2$ имеет $w$-степень, бóльшую $d_{\max}$, откуда, согласно лемме 4.1, вытекает, что $a^2$ — нулевой класс в $A$.

Обозначим теперь через $I$ идеал, порожденный всеми базисными элементами $w$-степени большей, чем $d_{\max}/2$. Из предыдущей леммы следует, что $I^2 = 0$ в $A$. Рассмотрим теперь его аннулятор $\operatorname{ann} I$. Очевидно, $I \subset \operatorname{ann} I$.

**Лемма 4.4.** *Идеал* $\operatorname{ann} I$ *не содержит ни одного базисного элемента* $w$*-степени меньшей, чем* $d_{\max}/2$.

Для доказательства леммы заметим, что из локальной двойственности Гротендика [32] (см. нашу теорему 2.2) следует (и этот факт в действительности эквивалентен данной теореме), что для каждого ненулевого элемента $a \in A$ существует элемент $b \in A$ такой, что $ab = j$ (так что имеет смысл запись $b = j/a$). Далее, для каждого квазиоднородного элемента (например, базисного монома) степени меньшей, чем $d_{\max}/2$, элемент $j/a$ имеет степень не меньше, чем $d_{\max}/2$, и потому принадлежит $I$, что противоречило бы предположению, что $a$ принадлежит $\operatorname{ann} I$.

Теперь мы можем доказать последнюю лемму, необходимую для доказательства теоремы 4.3.

**Лемма 4.5.** *Факторпространство* $\operatorname{ann} I/I$ *порождено базисными элементами* $w$*-степени* $d_{\max}/2$.

Обозначим через $p$ число базисных мономов $w$-степени $d_{\max}/2$. Разумеется, может случиться, что не все они нужны в качестве образующих этого факторпространства, но в любом случае справедливо неравенство

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} I - \dim_{\mathbb{R}} I \leqslant p. \tag{4.8}$$

Напомним, что по формуле (3.1) имеем

$$|\operatorname{ind}_0 f| = |\operatorname{sig} Q_f| = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} M - \dim_{\mathbb{R}} M, \tag{4.9}$$

где $M$ — любой идеал $A$, который максимален среди идеалов с нулевым квадратом. Разумеется, всегда можно выбрать такой идеал $M$ так, чтобы $I \subset M$. Тогда очевидно, что

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} M - \dim_{\mathbb{R}} M \leqslant \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} I - \dim_{\mathbb{R}} I,$$

и мы получаем неравенство

$$|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{ann} I - \dim_{\mathbb{R}} I.$$

Следовательно, $|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant p$, где число $p$ то же, что и выше. Для завершения доказательства остается заметить, что из результатов [31] следует, что число $p$ не превосходит введенного нами $P$-числа $P_n(w, d)$. Это доказывает теорему. □

Анализируя это доказательство, нетрудно вывести из леммы 4.5 более простую (но и намного более слабую) оценку в случае, когда начало координат является вырожденным (кратным) нулем векторного поля $f$ (как известно, это эквивалентно условию $\mu = \dim_{\mathbb{R}} A \geqslant 2$ [5]).

**Следствие 4.2.** *Если начало координат — вырожденный нуль* $(d, w)$*-квазиоднородного векторного поля* $f$*, то*

$$|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant \frac{1}{2} \prod \frac{d_i}{w_i}.$$

**Замечание 4.1.** Для заданых $(w, d)$ можно получить оценку для $|\operatorname{ind}_0 f|$, подсчитывая число базисных элементов $w$-степени $d_{\max}/2$ по явной формуле для полинома Пуанкаре, приведенной в [31].

**Замечание 4.2.** Было бы интересно установить, точна ли эта оценка на классе всех квазиоднородных векторных полей фиксированного $(w, d)$-типа. Во многих случаях это возможно за счет модификации примеров «экстремальных» векторных полей, построенных А. Хованским в однородном случае [19].

В завершение параграфа приведем небольшое обобщение теоремы 4.3. Напомним, что векторное поле $g$ называется полуквазиоднородным (sqh-) полем типа $(w, d)$, если $g_j = f_j + h_j, j = 1, \ldots, n$, где $f_j$ задают невырожденное qh-поле типа $(w, d)$ и для каждого $j$ полином $h_j$ содержит только мономы $w$-степени большей, чем $d_j$ [5].

**Следствие 4.3.** *Для любого sqh-векторного поля* $g$ *типа* $(w, d)$ *на* $\mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$|\operatorname{ind}_0 f| \leqslant P_n(w, d).$$

Следствие вытекает из того хорошо известного факта, что индекс и полином Пуанкаре такого полуквазиоднородного векторного поля $g$ совпадают, соответственно, с индексом и полиномом Пуанкаре его невырожденной qh-компоненты $f$ [31].

## 5. Эффективные формулы для эйлеровой характеристики

Мы приведем сейчас некоторые результаты об эффективном вычислении эйлеровой характеристики алгебраических и полуалгебраических множеств. Следуя [27], мы докажем явную формулу для эйлеровой характеристики компактного алгебраического множества, которая удобна для эффективных вычислений (теорема 5.2). Затем мы покажем, что эйлерова характеристика компактного полуалгебраического множества может быть найдена с помощью глобального аналога вычета Гротендика (2.2). Другой подход к вычислению эйлеровой характеристики в полуалгебраическом случае основан на использовании двулистных накрытий и сведении к теореме 5.2.

Пусть $X$ — аффинное алгебраическое подмножество $\mathbb{R}^n$. Очевидно, каждое такое множество может быть представлено как гиперповерхность $X = \{F = 0\}$ с $F = f_1^2 + \cdots + f_k^2$, где $f_j$ — полиномы, задающие $X$. Одна из наших главных целей — получение многомерных обобщений алгоритма Штурма для подсчета вещественных корней [42], поэтому мы особенно интересуемся случаем, когда $X$ конечно. Другими словами, мы будем рассматривать вещественную гиперповерхность, состоящую из конечного числа точек.

На первый взгляд, такой объект может показаться странным, но дело в том, что в случае гиперповерхности можно вычислить эйлерову характеристику алгоритмическим образом, как в [16, 27, 52]. Для конечного алгебраического множества $X$ эйлерова характеристика сводится к числу геометрически различных точек, так что эффективная формула для эйлеровой характеристики дает решение многомерной проблемы Штурма.

Мы используем обычное понятие эйлеровой характеристики $\chi(X)$, определенной как альтернированная сумма рангов групп гомологий (чисел Бетти) рассматриваемого топологического пространства $X$ [50]. Для наших целей достаточно рассматривать гомологии с целыми коэффициентами. Как и выше, $\deg_p f$ обозначает локальную степень эндоморфизма $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $p \in f^{-1}(0)$, являющейся изолированным прообразом начала координат. Нам потребуется следующий результат, установленный в [16].

**Теорема 5.1.** *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — полином с изолированной критической точкой в начале координат. Тогда для достаточно малого $\lambda > 0$ имеем*

$$\chi(\{F < \lambda\} \cap B_\delta^n) = 1 + (-1)^{n-1} \deg_0(\operatorname{grad} F), \tag{5.1}$$

*где $B_\delta^n$ — шар малого радиуса $\delta$. Если полином $F$ однороден, то для достаточно малого $\delta > 0$ имеет место также равенство*

$$\chi(\{F \geqslant 0\} \cap S_\delta^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1} \deg_0(\operatorname{grad} F). \tag{5.2}$$

Это результаты локальной природы, но они могут быть связаны с глобальными с помощью проективизации. Имея это в виду, рассмотрим однородные полиномы $f_1, \ldots, f_p$ степеней $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_p$ соответственно. Тогда помимо $X$ они определяют проективное алгебраическое многообразие $V_f$ в $\mathbb{RP}^{n-1}$, которое может быть задано одним однородным полиномом $f = \sum f_j^2 \cdot \|x\|^{2(d_p - d_j)}$ степени $2d_p$, где $\|x\|$ — обычная евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$. Теперь можно связать инварианты $X$ с инвариантами его проективизации с помощью следующей леммы, установленной в [27].

**Лемма 5.1.** *При этих условиях для любого $\lambda \neq 0$ полином $F_\lambda = f^2 - \lambda^2(\sum x_j^{2d+2})$ имеет изолированную особенность в $0$ и для достаточно малых $|\lambda|$ вещественная гиперповерхность $\{F_\lambda = 0\}$ не имеет особенностей в малых шарах и трансверсальна их границам. Кроме того, обозначая $Z = \{x \in S_1^{n-1} : f(x) = 0\}$, $Z_\lambda = \{x \in S_1^{n-1} : F_\lambda(x) \leqslant 0\}$, имеем, что $Z_\lambda \backslash Z$ диффеоморфно $Y_\lambda \times (0, \lambda]$, где $Y_\lambda = \{x \in S_1^{n-1} : F_\lambda(x) = 0\}$.*

Располагая этими вспомогательными результатами, мы можем получить явную формулу для эйлеровой характеристики, предложенную в [27].

**Теорема 5.2.** *Пусть $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{R}_n$ — вещественные полиномы с алгебраическими степенями, не превосходящими $d$. Предположим, что множество их общих вещественных нулей $X$ компактно. Положим*

$$h_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^{d+1} f_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), \qquad H = \sum_{i=1}^{p} h_i^2 - \sum_{k=0}^{n} x_k^{2d+4}.$$

*Тогда $H$ имеет алгебраически изолированную критическую точку в начале координат, и имеет место равенство*

$$\chi(X) = \big[(-1)^n - \deg_0(\operatorname{grad} H)\big]/2. \tag{5.3}$$

*Доказательство.* Очевидно, все полиномы $h_j$ однородны степени $d+1$, что позволяет перенести рассмотрения на единичную сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и использовать лемму.

С этой целью рассмотрим множество $Y = S^n \cap \{h_1 = \dots = h_p = 0\}$ и заметим, что $Y = Y_+ \cup Y_- \cup S^{n-1}$, где $Y_\pm = \{x \in S^n : \pm x_0 > 0, h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0\}$.

Очевидно, $Y_+$ и $Y_-$ гомеоморфны $X$, так что мы получаем равенство $\chi(Y) = 2\chi(X) - \chi(S^{n-1})$, или, что эквивалентно, $\chi(X) = [\chi(Y) + \chi(S^{n-1})]/2$, и остается подсчитать $\chi(Y)$, что может быть сделано путем применения теоремы 5.1 к $H$.

Используя гомологии с целыми коэффициентами и двойственность Лефшеца, получаем

$$\chi(S\backslash Y) = \sum (-1)^k \operatorname{rk} H_k(S\backslash Y) = \sum (-1)^k \operatorname{rk} H_{n-k-1}(S, Y) =$$
$$= (-1)^{n+1}\chi(S, Y) = (-1)^{n+1}[\chi(S) - \chi(Y)] = (-1)^n \chi(Y) + (-1)^{n+1} + 1.$$

С другой стороны, применяя лемму 5.1 с полиномом $H$ в роли $F$, получаем

$$S\backslash Y = (S \cap \{F_\lambda \leqslant 0\}) \cup (S \cap \{F_\lambda \leqslant 0\}).$$

Первое множество расслоено в силу теоремы Милнора [5], а второе не может содержать точек из $Y$, поскольку $\sum x_j^{2d+4} > 0$. Следовательно, получаем

$$\chi(S\backslash Y) = \chi\big(\{F_\lambda = 0\} \cap S\big) + \chi\big(\{F_\lambda \geqslant 0\} \cap S\big) - \chi\big(\{F_\lambda = 0\} \cap S\big) =$$
$$= \chi\big(\{F_\lambda \geqslant 0\}\big) = 1 + (-1)^{n+1} \deg_0(\operatorname{grad} F_\lambda).$$

Это, в свою, очередь, дает равенства

$$\chi(Y) = (-1)^n[(-1)^n + (-1)^{n+1} \deg_0(\operatorname{grad} F_\lambda)] = 1 - \deg_0(\operatorname{grad} F_\lambda).$$

По лемме 5.1, семейство $F_\lambda$ дает допустимую гомотопию с $F_1 = H$, так что можно положить $\lambda = 1$ и заключить, что $\chi(Y) = 1 - \deg_0(\operatorname{grad} H)$, откуда сразу следует формула (5.3). Теорема доказана. □

Эффективность этого результата следует из того, что локальная степень, согласно теореме 3.1, может быть выражена как сигнатура явно конструируемой квадратичной формы на локальной алгебре градиентного отображения $H' = \operatorname{grad} H$. Поскольку $H$ легко выписывается по исходным уравнениям, мы получаем весьма эффективный алгоритм вычисления $\operatorname{card} X$, который легко реализовать на компьютере, благодаря существованию компьютерных программ вычисления степени отображения [28, 43].

**Замечание 5.1.** Подчеркнем, что в ситуации, когда $X$ конечно (например, если $X$ задано $n$ независимыми полиномами $f_j \in \mathbb{R}_n$), теорема 5.2 дает эффективное решение проблемы Штурма и может рассматриваться как многомерное обобщение алгоритма Штурма.

Комбинируя этот результат с результатами об алгоритмическом вычислении локальной степени [28,43], можно оценить вычислительную сложность полученного метода подсчета вещественных корней. Кроме того, можно обобщить вышеприведенные результаты на случай произвольного вещественно замкнутого поля. Все необходимые для этого алгебраические и топологические понятия содержатся в [26]. Мы не следуем этой линии развития по соображениям объема.

Благодаря своей общности, теорема 5.2 может быть применена во многих конкретных случаях. В оставшейся части работы мы опишем ее применения к топологическому изучению квадратичных

отображений (§6), конфигурационных пространств (§7), алгебраических пуассоновых структур (§8) и случайных полиномов (§9). Имея в виду эти применения, приведем общую оценку эйлеровой характеристики алгебраического множества в терминах алгебраических степеней определяющих его полиномов.

**Теорема 5.3.** *Пусть $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{R}_n$ — вещественные полиномы с алгебраическими степенями, не превосходящими $d$. Предположим, что множество их общих вещественных корней $X$ компактно. Тогда*

$$|\chi(X)| \leqslant \frac{1}{2}\left[P_{n+1}(2d+3)+1\right].$$

*Доказательство.* Заметим сначала, что из (5.3) следует неравенство

$$|\chi(X)| \leqslant \frac{1}{2}(1+|\deg_O H'|),$$

где $H$ — вспомогательный полином из теоремы 5.2. Алгебраическая степень этого полинома равна $2d+4$, так что компоненты его градиента имеют алгебраические степени не выше $2d+3$. Это означает, что мы можем оценить сверху локальную степень $|\deg_O H'|$ с помощью теоремы 4.1, что сразу приводит к желаемому результату. □

**Замечание 5.2.** Заметим, что указанная оценка не зависит от числа полиномов $f_j$ — имеют значение только размерность объемлющего пространства $n$ и максимум алгебраических степеней данных полиномов. Этот факт априори не очевиден, он пригодится нам в дальнейшем.

Как можно убедиться на простых примерах, эта оценка не точна. Было бы интересно получить точную оценку в терминах степеней полиномов $f_i$. Отметим, что во многих случаях вышеприведенная оценка может быть улучшена за счет использования числа Петровского $P_{n+1}(2d+1)$ вместо $P_{n+1}(2d+3)$. Это возможно, если градиент однородной формы наименьшей степени $\sum f_j^2$, входящей в полином $H$, невырожден (можно показать, что это условие выполнено для «типичных» полиномов $f_j$). Действительно, в таком случае градиент $\operatorname{grad} H$ полуквазиоднороден, и мы можем оценить его локальную степень по следствию 4.3, что и дает упомянутое усиление оценки.

**Предложение 5.1.** *Для типичных полиномов $f_j \in \mathbb{R}_n$ с компактным множеством нулей $X$ справедливо неравенство*

$$|\chi(X)| \leqslant \frac{1}{2}[P_{n+1}(2d+3)+1].$$

Существует несколько различных модификаций и вариантов теоремы 5.2. Например, как показано в [51], для полного пересечения $W$ можно вычислить $\chi(W)$ несколько более прямым способом. Пусть $F=(F_1,\dots,F_k):\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ с $k<n$ — полиномиальное отображение и пусть $W=\{x\in\mathbb{R}^n | F(x)=0\}$. Предположим, что $W$ — полное пересечение, т.е. ранг якобиевой матрицы $[DF(x)]$ равен $k$ для любого $x\in W$. Пусть $H, H' : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ — отображения, определенные формулами

$$H(x,\lambda)=\Big(\nabla\Omega(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla F_i(x), F(x)\Big)=\Big(x+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla F_i(x), F(x)\Big),$$

$$H'(x,\lambda)=\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla F_i(x), F(x)\Big),$$

где $(x,\lambda)=(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ и $\Omega=(x_1^2+\dots+x_n^2)/2$. Пусть $C\subset W$ обозначает множество критических точек $\Omega|W$ и $B_R^{n+k}=\{(x,\lambda)\in\mathbb{R}^{n+k} \mid \|x\|^2+\|\lambda\|^2<R^2\}$.

**Лемма 5.2** (см. [51])**.** *Множества $C$ и $H^{-1}(0)$ компактны.*

*Доказательство.* Как известно (см., например, [5]), полиномиальная функция $\Omega|W$ может иметь только конечное число критических значений. Следовательно, множество $\{\Omega(x)|x\in C\}$ ограничено, и потому $C$ также ограничено. Очевидно, $C$ замкнуто и потому компактно. Далее, если $(x,\lambda)\in H^{-1}(0)$, то $x\in C$. Кроме того, для каждого $x\in C$ существует единственный вектор

$\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $H(x, \lambda) = 0$. Для каждого $x \in W$ ранг якобиевой матрицы $[DF(x)]$ равен $k$, откуда следует, что отображение $C \ni x \longrightarrow \lambda(x) \in \mathbb{R}^k$ непрерывно. Поскольку $C$ компактно, $H^{-1}(0)$ также компактно. □

**Предложение 5.2** (см. [51]). *Пусть $W = F^{-1}(0)$ — полное пересечение.*
(i) *Пусть $R$ — такое положительное число, что $H^{-1}(0) \subset B_R^{n+k}$. Тогда*

$$\chi(W) = (-1)^k \deg(H, B_R^{n+k}, 0).$$

(ii) *Пусть $W \subset B_R^n$ компактно. Тогда $(H')^{-1}(0) = W \times \{0\} \subset B_R^{n+k}$ и*

$$\chi(W) = (-1)^k \deg(H', B_R^{n+k}, 0).$$

*Доказательство.* (i) Легко проверить, что $C \subset B_R^n$. Можно выбрать $C^2$-функцию $\widetilde{\Omega} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, совпадающую с $\Omega$ на $\mathbb{R}^n - B_R^n$, так что $\widetilde{\Omega}|W$ имеет только невырожденные критические точки и $\widetilde{\Omega}$ равномерно приближает $\Omega$ в $C^1$-топологии Уитни. Очевидно, что $\{x \in W | \widetilde{\Omega}(x) \leqslant a\}$ компактно для любого $a \in \mathbb{R}$.

Пусть $\widetilde{H} = (\nabla\widetilde{\Omega} + \sum \lambda_i \nabla F_i, F)$. Имеем $H^{-1}(0) \subset B_R^{n+k}$. Если $\widetilde{\Omega}$ достаточно близка к $\Omega$, то $\widetilde{H}^{-1}(0) \subset B_R^{n+k}$. Предположим, что $(\overline{x}, \overline{\lambda}) \in \widetilde{H}^{-1}(0)$. Тогда $F(\widetilde{x}) = 0$ и потому $\widetilde{x} \in W$. Кроме того, $\widetilde{x}$ — критическая точка $\widetilde{\Omega}|W$. По предположению, $\widetilde{\Omega}|W$ имеет только невырожденные критические точки и $[S\widetilde{H}(\overline{x}, \overline{\lambda}) \neq 0$. Поэтому $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ - регулярное значение $\widetilde{H}$ и слой $\widetilde{H}^{-1}(0)$ конечен.

Пусть $\widetilde{H}^{-1}(0) = \{(x^1, \lambda^1), \ldots, (x^m, \lambda^m)\}$, $s_i$ обозначает индекс Морса $\widetilde{\Omega}|W$ в точке $x^1$ и $n_i = \operatorname{sign}\det[D\widetilde{H}(x^i, \lambda^i)]$. Очевидно, $\deg(\widetilde{H}, B_R^{n+k}, 0) = \sum n_i$. Кроме того, $n_i = (-1)^{k+s_i}$ и

$$\deg(\widetilde{H}, B_R^{n+k}, 0) \sum (-1)^{k+s_i} = (-1)^k \sum (-1)^{s_i}.$$

Многообразие $W$ имеет гомотопический тип $CW$-комплекса, построенного из конечного числа клеток — по одной $s_i$-клетке для каждой точки $x^i$. Следовательно, $\chi(W) = \sum(-1)^{s_i} = \deg(\widetilde{H}, B_R^{n+k}, 0)$. Если $\widetilde{\Omega}$ достаточно близка к $\Omega$, то отображения $H|\partial B_R^{n+k}$ и $\widetilde{H}|\partial B_R^{n+k}$ гомотопны, и потому $\chi(W) = (-1)^k \deg(H, B_R^{n+k}, 0)$.

(ii) Поскольку $W$ — полное пересечение, имеем $(H')^{-1}(0) = W \times \{0\}$. Доказательство аналогично, достаточно взять постоянную функцию вместо $\Omega$. □

**Пример** (см. [52]). Пусть $f(x, y) = y^2 - x^3 + 2x^2 + x - 2$. Компьютерное вычисление дает $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x, y)/(f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = 0$ и $\deg(H, B_R^3, 0) = -1$. Значит, $W$ — полное пересечение и $\chi(W) = 1$.

**Пример** (см. [52]). Пусть $f(x, y, z) = 5 + xyz + x^4 - 2y^4 + 3z^4$. Компьютерное вычисление дает $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x, y, z)/(f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z) = 0$, $\deg(H, B_R^4) = -2$. Значит, $W$ — полное пересечение и $\chi(W) = 2$.

Обратимся теперь к задаче Максвелла. Пусть $X$ — полуалгебраическое множество над упорядоченным полем $K$ [42]:

$$X = \{f_i = 0,\ g_j > 0;\ i \in I,\ j \in J\} \subset K^n, \tag{5.4}$$

где $I$ и $J$ — конечные множества индексов, и предположим, что заранее известно, что $X$ конечно (например, если оно является множеством нулей невырожденного полиномиального эндоморфизма). В задаче Максвелла требуется найти количество элементов $\operatorname{card} X$ алгоритмическим образом, без решения уравнений и приближенных вычислений.

Более формально, заданы $f_i$, $g_j$, принадлежащие кольцу $K_n$ полиномов от $n$ переменных с коэффициентами из $K$, и требуется эффективно вычислить (с помощью конечного числа алгебраических и логических операций над коэффициентами этих полиномов) $\operatorname{card} X$, т.е. число элементов в $X$.

Как уже отмечалось, в случае $K = \mathbb{R}$ такие задачи часто возникают в науке и технике [12] и достаточно хорошо исследованы [7,12]. Мы покажем, что некоторые общие результаты могут быть сформулированы в таких терминах, которые сохраняют смысл в контексте вещественно-замкнутых полей.

Сначала опишем подход, применимый над полем вещественных чисел и основанный на многомерном логарифмическом вычете (2.2). Мы не рассматриваем задачу в максимальной общности даже над полем вещественных чисел, чтобы избежать дополнительных трудностей, связанных с различного рода вырождениями. Затем мы опишем второй подход, основанный на использовании двулистных накрытий и многократном применении теоремы 5.2. Оба эти подхода алгоритмичны по своей сути и дают эффективное решение задачи Максвелла.

Итак предположим, что $K$ — вещественно-замкнутое поле, и все точки $X$ просты в смысле алгебраической геометрии (т.е. имеют кратность единица) [32]. Наши методы непосредственно применимы в двух практически важных случаях: когда $X$ — множество нулей невырожденного эндоморфизма (т.е. $\operatorname{card} I = n$ и $f_i$ задают собственный эндоморфизм $\bar{K}^n$, где $\bar{K} = K(\sqrt{-1})$ — алгебраическое замыкание поля $K$) и когда неравенства вообще отсутствуют (т.е. $J = \emptyset$). Заметим, что во втором случае задача Максвелла сводится к задаче Штурма, так что достаточно рассмотреть только первый случай.

В этом случае решение может быть получено в рамках подходящего обобщения классического метода Сильвестра — Эрмита. Для того чтобы показать эффективность этого подхода, мы используем глобальный аналог символа вычета Гротендика (2.2). Конечно, такой же подход применим во втором случае, но мы подчеркиваем, что решение, доставляемое теоремой 5.2 более общее, поскольку в ней не требуется предположение, что кратности всех точек равны единице.

Рассмотрим множество $X$ вида (5.4) и пусть $f_j$ задают невырожденный полиномиальный эндоморфизм $\bar{f} : \bar{K}^n \to \bar{K}^n$ с простыми корнями. Здесь, как обычно, невырожденность понимается в смысле отсутствия «корней на бесконечности», т.е. лидеры (однородные формы старших степеней $\deg f_i$) $f_i^*$ не имеют нетривиальных общих корней в $\bar{K}^n$ (для $K = \mathbb{R}$ это гарантирует собственность $\bar{f}$). Теорема Безу для вещественно-замкнутых полей [26] гласит, что $\bar{f}$ имеет в точности $N = \prod \deg f_j$ корней в $\bar{K}^n$, так что можно записать $\bar{f}^{-1}(0) = \{z_0, z_1 \dots, z_{N-1}\}$ с $z_i \neq z_j$ для $i \neq j$.

Без ограничения общности можно считать, что первые координаты корней попарно различны, в каковом случае мы говорим, что эндоморфизм *удобен*. Это условие может быть эффективно проверено в терминах результантов, и всегда можно свести задачу к этому случаю за счет подходящего поворота системы координат.

Запишем теперь каждый корень в виде $z_j = (u_j, z'_j)$ с выделенной первой координатой и введем вспомогательную квадратичную форму на $K^N$, зависящую от произвольного $g \in K_n$:

$$Q_f^g(\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} g(z_j)(\xi_0 + u_j\xi_1 + \dots + +u_j^{N-1}\xi_{N-1})^2. \tag{5.5}$$

Легко проверить, что все коэффициенты этой формы принадлежат $K$. Действительно, корни, не принадлежащие $K^n$, появляются только как сопряженные пары по отношению к естественной операции сопряжения в $\bar{K}$, откуда следует сделанное тремя строчками выше утверждение.

Напомним, что можно определить ранг $\operatorname{rk} Q_f^g$ и сигнатуру $\operatorname{sig} Q_f^g$ формы $Q_f^g$ точно так же, как над полем вещественных чисел [26]. Следующий результат является многомерным аналогом алгоритма Штурма и дает решение нашей задачи при $\operatorname{card} J = 1$, т.е. для областей вида $\{g > 0\}$.

**Теорема 5.4.** *Если $f : K^n \to K^n$ — удобный полиномиальный эндоморфизм над вещественно-замкнутым полем $K$, то для любого $g \in K_n$ ранг и сигнатура формы* (5.5) *удовлетворяют соотношениям*:

$$N - \operatorname{rk} Q_f^g = \operatorname{card}\big(f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)\big), \tag{5.6}$$

$$\operatorname{sig} Q_f^g = \operatorname{card}\big[f^{-1}(0) \cap \{g > 0\}\big] - \operatorname{card}\big[f^{-1}(0) \cap \{g < 0\}\big]. \tag{5.7}$$

Обозначая через $Q_f$ форму (5.5) с $g \equiv 1$, мы можем сформулировать некоторые следствия.

**Следствие 5.1.** *В условиях теоремы форма $Q_f$ невырождена и*

$$\operatorname{sig} Q_f = \operatorname{card} f^{-1}(0). \tag{5.8}$$

**Следствие 5.2.** *При тех же условиях и* $X = f^{-1}(0) \cap \{g > 0\}$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{card} X = \big(\operatorname{sig} Q_f + \operatorname{sig} Q_f^g + \operatorname{rk} Q_f^g - N\big)/2. \tag{5.9}$$

С помощью простых комбинаторных соображений теперь легко справиться со случаем, когда число неравенств произвольно.

**Следствие 5.3.** *Если, в дополнение к тем же условиям, выполняется условие* $f^{-1}(0) \cap g_j^{-1}(0) = \emptyset$ *для любого* $j \in J$, *то*

$$\operatorname{card} X = \Big(\sum_{\alpha} \operatorname{sig} Q_f^{\alpha}\Big)/2^{\operatorname{card} J},$$

*где* $\alpha$ *пробегает все мультииндексы вида* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ *с* $1 \leqslant k \leqslant \operatorname{card} J$ *и* $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$, *а* $Q_f^{\alpha} = Q_f^{g_\alpha}$ *с* $g_\alpha = g_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot g_k$.

Для простоты мы исключили вырождения, связанные с наличием корней на границах областей $\{g_j > 0\}$. До того как привести доказательство теоремы, объясним, почему она дает решение нашей задачи. Для этого достаточно показать, что коэффициенты (5.5) могут быть найдены с помощью конечного числа рациональных операций над коэффициентами $f_j$ и $g$.

Путем элементарных преобразований формулы (5.5) легко видеть, что коэффициенты $c_{ij}$ в стандартном представлении $Q_f^g(\xi) = \sum c_{ij}\xi_i\xi_j$ выражаются в виде так называемых *смешанных ньютоновых сумм* корней

$$S_\alpha(f) = \sum_{j=0}^{N-1} (z_j^1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (z_j^n)^{\alpha_n}, \tag{5.10}$$

где $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n$, $z_j = (z_j^1, \dots, z_j^n)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Отметим, что некоторые из сумм $S_\alpha$ легко подсчитать с помощью повторных результантов. Например, это верно для малых $|\alpha|$ и для «чистых» ньютоновых сумм (таких, в которые входит только один ненулевой индекс $\alpha_j$), что позволяет производить так называемое отделение корней, которое также является важной задачей теории алгебраических уравнений [7, 12]. В [7] есть некоторые замечания такого рода, относящиеся к случаю $n = 2$, но они не универсальны. Кроме того, такой подход сталкивается с большими трудностями при больших $n$.

При $K = \mathbb{R}$ радикальным средством преодоления всех этих трудностей является глобальный аналог вычета Гротендика (2.2). Как мы видели, такие вычеты появляются при вычислении степени отображения, поэтому достаточно естественно, что эта техника применима к рассматриваемой нами сейчас ситуации. Отметим, что глобальные логарифмические вычеты изучались, например, в [20, 32].

Напомним, что глобальный вычет $\operatorname{Res}_f$ определяется как оператор, сопоставляющий полиному $g \in \mathbb{R}_n$ комплексное число

$$\operatorname{Res}_f g = \operatorname{Res}(g; f) = \sum_{p \in Z(f)} \operatorname{Res}_p(g; f), \tag{5.11}$$

где $Z(f) = f^{-1}(0)$ и $\operatorname{Res}_p(g; f)$ обозначает логарифмический вычет вида (2.2). Основные свойства глобального вычета могут быть выведены из свойств P1–P5, установленных в §2. Мы опускаем соответствующие доказательства и отсылаем к [20, 32] за необходимыми свойствами глобального вычета. Для нас достаточно использовать, что глобальный вычет может быть выражен как интеграл

$$\operatorname{Res}_f g = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{f_1(z) \cdot \dots \cdot f_n(z)} d\mu, \tag{5.12}$$

где $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |f_j(z)| = R \text{ при } j = 1, \dots, n\}$ берется при достаточно больших $R > 0$, его ориентация индуцируется формой $d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n)$ и интеграл берется по обычной мере Лебега $d\mu$.

Этот интеграл не зависит от $R$ и зануляется на идеале $(f)$, порожденном компонентами $f$ в $\mathbb{R}_n$ [32]. Кроме того, если все корни $f$ просты, то из свойства P2 получаем

$$\operatorname{Res}_f g = \sum_{z\in f^{-1}(0)} \frac{g(z)}{J_f(z)}, \tag{5.13}$$

где $J_f(z) = \det(\partial f_j/\partial z_k)(z)$ — якобиан $f$.

Теперь ясно, что в ситуации теоремы 5.4 имеем

$$S_\alpha(f) = \operatorname{Res}_f(J_f e_\alpha), \tag{5.14}$$

где $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n$, а $e_\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ — соответствующий моном в $\mathbb{R}_n$.

В силу (5.14), вычисление коэффициентов (5.5) сводится к вычислению $\operatorname{Res}_f g$. Поскольку известно, что глобальный вычет может быть алгебраически выражен через коэффициенты $f$ и $g$ [20], заключаем, что все квадратичные формы $Q_f^g$ могут быть построены эффективно. Методы эффективного вычисления и различные явные формулы для глобального вычета приводятся в [2, 20]. Из этих результатов об алгебраической вычислимости глобального вычета с помощью стандартных соображений в духе принципа Зайденберга—Тарского [26] следует, что то же самое верно для любого вещественно-замкнутого поля $K$. Таким образом, мы приходим к следующему заключению, которое уточняет теорему 5.4 и дает алгебраическое решение задачи Максвелла.

**Теорема 5.5.** *Для каждого вещественно-замкнутого поля $K$ коэффициенты квадратичной формы* (5.5) *могут быть алгебраически выражены через коэффициенты заданных полиномов $f_1, \dots, f_n, g$.*

Опишем теперь схему доказательства теоремы 5.4. Запишем $\bar{f}^{-1}(0)$ в виде $\bar{f}^{-1}(0) = \{x_1, ..., x_r, z_1, ..., z_k, \bar{z}_1, ..., \bar{z}_k\}$, где $x_1, \dots, x_r \in K^n$, $z_j \notin K^n$, $r + 2k = N$ (это всегда возможно в силу предыдущих замечаний). Определим линейное преобразование $T$ в $K^N$ формулами

$$\begin{cases} \eta_j = \xi_0 + \xi_1 u_j + \dots + \xi_{N-1} u_j^{N-1}, & j = 1, \dots, r; \\ \eta_{r+j} = \operatorname{Re}(\xi_0 + \dots + \xi_{N-1} u_{r+j}^{N-1}), & j = 1, \dots, k; \\ \eta_{r+k+j} = \operatorname{Im}(\xi_0 + \dots + \xi_{N-1} u_{r+j}^{N-1}), & j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Очевидно, данное преобразование диагонализует нашу квадратичную форму. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.5, легко показать, что каждая пара сопряженных корней $z_j, \bar{z}_j$ соответствует паре квадратов с противоположными знаками в диагональной форме (5.5). Следовательно, корни, лежащие вне $K^n$, не влияют на сигнатуру формы $Q_f^g$. Поэтому формулы (5.6), (5.7) следуют из вида диагональной формы (5.5).

Для того чтобы завершить доказательство, остается проверить, что приведенные выше формулы задают настоящую линейную замену координат, то есть определитель соответствующей матрицы не равен нулю. Это можно проверить, сводя этот определитель к определителю Вандермонда первых координат $u_j$, который не равен нулю, поскольку $f$ удобен. Другой способ сделать это основан на наблюдении, что в нашей ситуации форма $Q_f$ невырождена и потому $\operatorname{rk} T = N$. Таким образом, преобразование $T$ действительно обратимо, что позволяет завершить доказательство.

Первые два следствия становятся теперь очевидными. Для доказательства 5.3 достаточно ввести числа $m_\alpha$, равные количеству корней в области $U_\alpha = \bigcap\{g_\alpha > 0\}$, и просуммировать соотношения (5.7) для функций $g_\alpha$.

Ясно, что аналоги модифицированных считающих форм могут быть определены и в терминах локальных алгебр соответствующих отображений, так что результаты этого параграфа допускают перевод на язык модифицированных гоpенштейновых квадратичных форм [30, 39]. В действительности, вычисление эйлеровой характеристики полуалгебраического множества может быть сведено к вычислению локальных степеней вспомогательных отображений, так что в конечном счете все вычисления могут быть проведены с помощью теоремы 3.1. В оставшейся части параграфа мы развиваем последнее замечание.

Итак, поясним, как можно вычислить эйлерову характеристику полуалгебраического множества с помощью теоремы 5.2. Основной технический прием заключается в рассмотрении двулистных

накрытий множества вещественных корней подобно тому, как это сделано [4, 17], что позволяет уменьшить число неравенств на единицу за счет введения новой переменной и одного дополнительного уравнения. В силу сказанного выше, достаточно рассмотреть случай, когда имеется всего одно неравенство. Поэтому предположим, что мы хотим найти число вещественных корней системы $\mathcal{S} \equiv \{f_j = 0\}$ в области $U = \{g > 0\}$. Предположим сначала, что множество всех корней $X$ системы $\mathcal{S}$ конечно и ни один из них не лежит на гиперповерхности $Y = \{g = 0\}$ (последнее условие всегда может быть эффективно проверено с помощью теоремы 5.2).

Введем новую переменную $t$ и добавим уравнение $g = t^2$ к системе $\mathcal{S}$. Минутное размышление приводит к выводу, что каждому вещественному корню системы $\mathcal{S}$ в $U$ соответствуют в точности два корня новой системы. Таким образом, задача Максвелла в этом случае может быть решена путем подсчета числа вещественных корней новой системы с помощью теоремы 5.2. В общем случае, добавление уравнения $g = t^2$ к системе $\mathcal{S}$ определяет двулистное накрытие $\tilde{X}$ множества корней $X$, разветвленное вдоль пересечения $X \cap Y$. Заметим, что для компактного $X$ можно вычислить эйлерову характеристику $\tilde{X}$ и $X \cap Y$ также с помощью теоремы 5.2. После этого для вычисления $\chi(X \cap U)$ остается использовать аддитивность эйлеровой характеристики. Теперь уже ясно, что таким же путем можно решить задачу Максвелла в общем случае при условии, что множество корней компактно.

**Замечание 5.3.** На самом деле, мы получили эффективное решение более общей задачи о вычислении эйлеровой характеристики любого компактного полуалгебраического множества, которая может быть названа обобщенной задачей Максвелла (подчеркнем, что в классической задаче Максвелла предполагается, что множество корней конечно, так что требуется просто подсчитать число точек в нем). Разумеется, обобщенная задача Максвелла связана со многими другими проблемами вещественной алгебраической геометрии, так что ее решение имеет различные следствия и применения. Эти вопросы будут рассмотрены в последующих работах автора.

## 6. Топологические инварианты квадратичных отображений

Теперь мы намереваемся обсудить некоторые эффективные методы вычисления топологических инвариантов квадратичных отображений. Напомним, что полиномиальное отображение $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ называется квадратичным, если все его компоненты являются полиномами степени, не большей двух. Как обычно, лидер $P^*$ полинома $P$ определяется как старшая однородная форма (сумма членов наивысшей степени) $P$. Если все компоненты $g$ — однородные полиномы второй степени (2-формы), то $g$ называется *однородным квадратичным отображением*. Таким образом, лидер любого квадратичного отображения является однородным квадратичным отображением.

Напомним, что $g$ называется собственным, если для любого компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^p$ полный прообраз $g^{-1}(K)$ также компактен. Очевидно, $g$ собственно, если среди лидеров его компонент имеется определенная (т.е. невырожденная и принимающая только значения одного знака) квадратичная форма. Конечно, для собственности достаточно, чтобы пучок квадратичных форм, определенный компонентами $g^*$, содержал определенную форму, но общие критерии такого рода пока неизвестны [1].

**Замечание 6.1.** Однородное квадратичное отображение в $\mathbb{R}^2$ собственно, если и только если пучок квадратичных форм $\lambda g_1 + \mu g_2$ содержит определенную форму [1]. В таком случае без потери общности можно предполагать, что $g_1$ положительно определена и принять ее за скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Тогда вторая форма может быть диагонализована ортогональным линейным преобразованием, и можно предполагать, что обе формы диагональны в одном и том же базисе. Тогда легко описать слои $g$ в терминах собственных значений $g_2$. Таким образом, слои легко описываются для собственных квадратичных отображений в $\mathbb{R}^2$, но эта задача становится весьма нетривиальной при $p \geqslant 3$ [1].

Мы хотим теперь исследовать топологическое строение слоев собственного квадратичного отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, то есть нас интересует топология прообразов $g^{-1}(c)$ с $c \in \mathbb{R}^p$. В нашей ситуации для типичного $c \in \mathbb{R}^p$ слой $g^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ является компактным гладким многообразием, и одним из интересующих нас инвариантов является эйлерова характеристика слоя $\chi(g^{-1}(c))$ [33].

В работе [1] А. А. Аграчев и Р. В. Гамкрелидзе изучили пространства квадратичных отображений и топологию слоев квадратичных отображений. Они указали различные способы вычисления эйлеровой характеристики прообразов регулярных значений. В некоторых случаях их метод проще применять, чем общую формулу для эйлеровой характеристики из пятого параграфа. В некоторых малоразмерных случаях, вроде рассматриваемых ниже в седьмом и восьмом параграфах, их подход оказывается весьма эффективным, так что мы воспроизведем соответствующие конструкции и результаты из [1]. В некоторых рассмотрениях не обязательно предполагать собственность отображения, поэтому мы начнем с результатов для произвольных однородных квадратичных отображений.

Обозначим через $P_N = P(\mathbb{R}^N)$ множество всех однородных квадратичных форм от $N$ переменных. Подмножество вырожденных форм обозначается $\Pi_N$. Обозначим еще через $P(N,k)$ множество симметрических билинейных отображений $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$. Как обычно, для каждого $p \in P(N,k)$ можно определить (однородное) квадратичное отображение $x \mapsto p(x,x)$. Квадратичное отображение $p \in P(N,k)$ называется вырожденным, если 0 является критическим значением отображения $p|(R^N - \{0\})$. Пространство вырожденных квадратичных отображений является собственным алгебраическим подмножеством в $P(N,k)$ и потому невырожденные отображения образуют плотное открытое подмножество в $P(N,k)$, которое мы обозначим $\widehat{P}(N,k)$.

Для изучения топологических инвариантов слоев полезно рассмотреть гомотопические классы квадратичных отображений. Два невырожденных отображения $p_1, p_2 \in \widehat{P}(N,k)$ называются жестко гомотопными, если они принадлежат одной компоненте множества $\widehat{P}(N,k)$. Известно, что если $p \in \widehat{P}(N,k)$, то $p^{-1}(0) \cap S^{N-1}$ — гладкое многообразие, причем если $p_1$, $p_2$ жестко гомотопны, то многообразия $p_1^{-1}(0) \cap S^{N-1}$ и $p_2^{-1}(0) \cap S^{N-1}$ диффеоморфны.

Поэтому для топологического описания слоев квадратичных отображений достаточно проделать это для одного представителя из каждого класса жесткой гомотопии. Оказывается, что для малых $k$ можно построить некоторые канонические представители классов жесткой гомотопии. Например, для невырожденных квадратичных эндоморфизмов плоскости $\mathbb{R}^2$ это может быть сделано элементарным образом.

**Предложение 6.1.** *Каждое квадратичное отображение из $\widehat{P}(2,2)$ жестко гомотопно одному из следующих отображений:*

$$q_1(x,y;x,y) = (x^2+y^2, 0);$$
$$q_2(x,y;x,y) = (x^2-y^2, 2xy);$$
$$q_3(x,y;x,y) = (x^2-y^2, -2xy).$$

**Замечание 6.2.** Для каждого собственного $q \in \widehat{P}(2,2)$ можно рассмотреть его топологическую степень $\deg q$. Очевидно, что $\deg q$ — инвариант жесткой гомотопии, так что можно пытаться классифицировать такие отображения по значению топологической степени, т.е. по отношению к обычному понятию гомотопии вместо жесткой гомотопии. Легко видеть, что в данном случае обе классификации совпадают. Действительно, из общих оценок для степени отображения в терминах чисел Петровского (см. §4) следует (а в данном случае может быть установлено и элементарными средствами), что топологическая степень квадратичного эндоморфизма плоскости может принимать только три значения: $-2, 0, 2$. Поэтому есть всего три гомотопических класса и указанные выше отображения являются представителями этих трех классов. Таким образом, в данном случае обе классификации действительно совпадают, что никоим образом не относится к общему случаю (см. [1]).

Можно попытаться предпринять аналогичное сравнение для $\widehat{P}(N,N)$ при произвольном $N$. Напомним, что степень однородного квадратичного эндоморфизма нечетномерного пространства всегда равна нулю [38]. В качестве некоторой замены можно рассматривать степень по модулю 2 индуцированного отображения $Q' : \mathbb{RP}^N \to S^N$ (оно, очевидно, корректно определено для однородного квадратичного отображения) [1]. При $N = 3$ эта степень классифицирует квадратичные

отображения с точностью до жесткой гомотопии, но неясно как сделать это для произвольного нечетного $N$. Для четного $N$ легко описать все возможные значения топологической степени (см. [38]), но не видно естественного способа перечислить классы жесткой гомотопии.

На самом деле, аналогичный результат имеет место для пар квадратичных форм в любой размерности. А именно, согласно [1], любое $q \in \widehat{P}(N,2)$, рассматриваемое как отображение в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, жестко гомотопно отображению следующего вида:

$$q(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, ..., z_m) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{\theta_j i} + \sum_{j=1}^{m} z_j^2, \tag{6.1}$$

где $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{C}^m$, $n + 2m = N$, $(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$. Кроме того, квадратичное отображение вида (6.1) невырождено, если и только если $e^{\theta_{j_1} i} + e^{\theta_{j_2} i} \neq 0$ для любой пары $j_1$, $j_2$, и можно еще уточнить форму таких канонических отображений [1].

В общем случае можно использовать следующий топологический подход. Для заданного квадратичного отображения $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ рассмотрим пучок квадратичных форм, заданный его компонентами,

$$\omega p = \sum_{i=1}^{k} \omega_i p_i, \quad \omega \in (\mathbb{R}^k)^*, |\omega| = 1.$$

Этот пучок определяет $(k-1)$-сферу $S_p$ в $P(\mathbb{R}^N)$. Оказывается, что $p$ невырождено, если и только если эта сфера ни в одной точке не касается $\Pi_N$. Можно показать, что существует деформация $S_p(t)$ сферы $S_p$ в сферу положительно определенных квадратичных форм такая, что в процессе деформации могут появляться только изолированные точки касания с $\Pi_N$ [1]. Более того, корректно определено алгебраическое число точек касания с $\Pi_N$ в процессе такой деформации [1], и мы обозначим его $T\text{-ind}(S_p(t), \Pi_N)$. Этот инвариант естественно возникает в задачах анализа и теории управления, так что полезно иметь в распоряжении эффективные методы его вычисления.

**Теорема 6.1** (см. [1]). *В указанных выше предположениях и обозначениях имеет место равенство*

$$T\text{-}\operatorname{ind}(S_p(t), \Pi_N) = \frac{(-1)^k}{2}[\chi(p^{-1}(0) \cap S^{N-1}) + (-1)^N - 1]. \tag{6.2}$$

Помимо самостоятельного интереса, эта теорема практически полезна, поскольку позволяет эффективно вычислить индекс $T\text{-ind}(S_p(t), \Pi_N)$ по коэффициентам $p$ с помощью нашей теоремы 5.2. Как показывают примеры из [1], эта теорема может быть использована также для вычисления $\chi(p^{-1}(0) \cap S^{N-1})$ с помощью геометрических соображений. Кроме того, можно получить аналогичный результат в более общем контексте.

Пусть задано вещественное симметричное билинейное отображение

$$p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k.$$

Положим $\omega \in (\mathbb{R}^k)^*$, тогда $\omega p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ — скалярная квадратичная форма. Пусть $K$ — конус в $\mathbb{R}^k$ и

$$K^o = \{\omega \in (\mathbb{R}^k)^* | \omega y \leqslant 0 \text{ для любого } y \in K\}$$

— двойственный конус. Поскольку отображение $p|S^{N-1}$ четно, оно задает отображение $\overline{p} : \mathbb{RP}^{N-1} \to \mathbb{R}^k$. Для фиксированного $p$ введем функцию $\operatorname{ind} p : \omega \mapsto \operatorname{ind}(\omega p)$ с $\omega \in (\mathbb{R}^k)^*$, где ind обозначает обычный индекс (число отрицательных квадратов в диагональной форме) скалярной квадратичной формы.

Пусть $\Omega = S^{k-1} \cap K^o$ и

$$\Omega_p^n = (\operatorname{ind} p)^{-1}([0, n]) \cap \Omega, n \geqslant 0.$$

Из тождества $K = K^{oo} = \Omega^o$ следует, что

$$\overline{p}^{-1}(K) = \overline{p}^{-1}(\Omega^o) = \{x \in \mathbb{RP}^{N-1} | \omega \overline{p}(x) \leqslant 0 \text{ для каждого } \omega \in \Omega\}.$$

Предположим, что последнее множество является гладким многообразием, тогда имеем еще одну полезную формулу для эйлеровой характеристики.

**Теорема 6.2** (см. [1])**.**

$$\chi(\overline{p}^{-1}(K)) = \frac{1+(-1)^{N-1}}{2} - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n \chi(\Omega_p^n). \tag{6.3}$$

Беря $K = \{0\}$, видим, что эта теорема указывает еще один способ вычисления $\chi(\overline{p}^{-1}(0))$. Наглядные примеры ее применения приведены в [1]. Следует отметить, что методы [1] также применимы к неоднородным квадратичным отображениям за счет стандартной редукции к однородным отображениям с помощью проективизации. Для собственных отображений, как, например, отображения, возникающие в связи с изучением конфигурационных пространств многоугольников, эта редукция легко выполнима, в большинстве других случаев она также оказывается полезной [1]. Можно также использовать формулу (6.3) в обратном направлении для вычисления эйлеровой характеристики полуалгебраических подмножеств $\Omega_p^n$, что оказывается необходимым в некоторых задачах нелинейного анализа и оптимального управления [1].

Мы отсылаем к [1] за различными применениями вышеприведенных теорем и завершаем параграф общей оценкой для эйлеровой характеристики слоев квадратичного отображения.

**Теорема 6.3.** *Пусть $q \in \mathbb{R}_n^m$ — собственное квадратичное отображение и $X$ — любой из его слоев. Тогда*

$$|\chi(X)| \leqslant \frac{1}{2}\left[P_{n+1}(7)+1\right]. \tag{6.4}$$

Эта оценка получается как частный случай оценки из теоремы 5.3, но заслуживает отдельного упоминания, так как из нее следует, что спектр возможных значений эйлеровой характеристики пересечения нескольких квадрик $\mathbb{R}^n$ не зависит от числа этих квадрик. Пересечения квадрик встречаются во многих алгебраических и топологических задачах, поэтому приведенные результаты находят конкретные приложения. Одно из таких приложений, связанное с топологическим изучением конфигурационных пространств многоугольников и шарнирников, обсуждается в следующем параграфе.

## 7. Конфигурационные пространства многоугольников и шарнирников

Конфигурационные пространства многоугольников в евклидовом пространстве естественно возникают в механике и технике (см. [53]) и приводят к интересным геометрическим проблемам. В частности, значительное внимание в последнее время было уделено топологии конфигурационных пространств [36, 53]. Для многоугольников с небольшим числом сторон описание конфигурационного пространства является достаточно наглядной задачей, которую можно эффективно исследовать с помощью теории Морса [36, 37]. В то же время некоторые топологические инварианты таких конфигурационных пространств (например, эйлерова характеристика) могут быть эффективно вычислены с помощью результатов, приведенных в предыдущих параграфах. Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением *конфигурационных пространств плоских многоугольников*.

Пусть $P_n$ — многоугольник с $n$ сторонами и вершинами $v_1, ..., v_n$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и пусть $l_i$ — длина стороны $v_i v_{i+1}, i = 1, ..., n, v_{n+1} = v_1$. Неформально говоря, мы хотим изучить множество всех возможных положений (реализаций) $P_n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, при которых сохраняются длины всех сторон (так что стороны рассматриваются как твердые стержни). Для нормировки (в частности, чтобы исключить сдвиги всего $P_n$ как единого целого) принято не различать между собой два положения, отличающиеся друг от друга на сохраняющую ориентацию гомотетию плоскости [53].

При таком соглашении мы можем без ограничения общности предполагать, что одна из сторон, скажем первая, имеет единичную длину (за счет применения подходящей гомотетии). Кроме того, применяя сдвиг и вращение, всегда можно достичь того, чтобы первая сторона совпадала с первым координатным ортом стандартного базиса плоскости, конец которого $(1, 0)$ обозначается $e$ (мы всегда предполагаем, что $l_1 = 1$). Тогда достаточно рассматривать только реализации $P_n$ с первой стороной, совпадающей с первым ортом. Как обычно, евклидово расстояние между точками $a, b \in \mathbb{R}^k$ обозначается $d(a, b)$. Для удобства записи введем еще «виртуальную» вершину $v_{n+1} = v_1$.

**Определение 7.1.** Планарное конфигурационное пространство $C(P_n, 2)$ многоугольника $P_n$ определяется как множество отображений

$$F : V \to \mathbb{R}^2$$

его множества вершин $V$ в $\mathbb{R}^2$, таких, что

a) для каждого $i = 2, ..., n$ имеем $d(F(v_i), F(v_{i+1})) = l_i$;

b) $F(v_1) = 0(\equiv (0, 0)), F(v_2) = e(\equiv (1, 0))$.

Мы наделяем такие пространства естественными топологиями и интересуемся их классами гомеоморфизма на множестве всех $n$-угольников. Заметим, что при наших предположениях множество всех $n$-угольников параметризуется неотрицательным вектором длин сторон $l = (l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$. Будем обозначать соответствующий многоугольник через $P_n(l)$. Хорошо известно (см., например, [36]), что для вектора $l$ из открытого плотного множества пространства параметров пространство $C(P_n(l), 2)$ является гладким многообразием. В таких случаях мы говорим о гладком конфигурационном пространстве.

**Предложение 7.1.** *Для почти всех $l \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ конфигурационное пространство $C(M_n(l), 2)$ является ориентируемым компактным гладким многообразием размерности $n - 3$.*

Следующее простое, но полезное наблюдение заключается в том, что конфигурационное пространство плоского $n$-угольника $P(l)$ может быть представлено как слой квадратичного отображения следующим образом. Обозначим через $(x_j, y_j)$ координаты вершины $v_j$, $j = 1, ..., n$, в $\mathbb{R}^2$. Тогда имеем условия

$$(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2 = l_j^2, \quad j = 2, ..., n \tag{7.1}$$

(как и выше, мы предполагаем, что $v_{n+1} = v_1$). Отсюда заключаем, что каждому $n$-угольнику $P_n(l)$ отвечает квадратичное отображение

$$Q : \mathbb{R}^{2(n-2)} \to \mathbb{R}^{n-1},$$

и конфигурационное пространство $C(P_n, k)$ может быть представлено как прообраз точки $(l_2, ..., l_n)$ при этом отображении. Здесь $(l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ обозначают длины сторон рассматриваемого $n$-угольника. Теперь ясно, что предложение следует из леммы Сарда.

Покажем теперь, как можно описать все возможные топологические типы конфигурационных пространств плоских четырехугольников, то есть $n = 4$. В этом случае конфигурационное пространство задается тремя квадратичными уравнениями (7.1):

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = l_2^2, \quad (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = l_3^2, \quad x_3^2 + x_4^2 = l_4^2.$$

Конфигурационное пространство $C(P_4(l), 2)$ естественно изоморфно полному прообразу начала координат при отображении $\Phi_l : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, определенном левыми частями выписанных уравнений. Заметим, что это отображение собственное, но не однородное, так что для вычисления эйлеровой характеристики слоя нужна теорема 5.2 в полной общности.

Следуя стандартной парадигме теории особенностей, теперь следует найти бифуркационную диаграмму выписанного квадратичного отображения. Это сводится к описанию тех наборов длин сторон $l$, для которых конфигурационное пространство соответствующего четырехугольника является особым. Это может быть сделано с помощью общего критерия гладкости конфигурационнго пространства [36], который в данной ситуации приобретает следующий вид.

**Предложение 7.2.** *Четырехугольник $M_4(l)$ имеет особое конфигурационное пространство, если и только если существуют числа $c_i \in \{-1, 1\}$, $i = 2, 3, 4$, такие, что*

$$\sum c_i l_i = 1. \tag{7.2}$$

Это означает, что конфигурационное пространство является особым в точности в тех случаях, когда соответствующий четырехугольник способен вырождаться в прямолинейный сегмент, то есть имеет такие реализации, при которых все вершины лежат на одной прямой (оси абсцисс в данном случае). Следовательно, бифуркационная диаграмма $B(4, 2)$ состоит из объединения

восьми гиперплоскостей $H_c$ в $\mathbb{R}^3$, определенных линейными уравнениями вида (7.2). Более того, топологический тип конфигурационного пространства ведет себя в точности так, как предсказывает теория особенностей.

**Предложение 7.3.** *Топологический тип конфигурационного пространства не меняется внутри каждой компоненты связности дополнения к* $B(4,2)$.

Мы можем теперь найти все возможные значения эйлеровой характеристики конфигурационных пространств плоских четырехугольников. В силу сказанного, для этого достаточно выбрать по одной точке в каждой компоненте связности дополнения к бифуркационной диаграмме и на каждой из ее граней на гиперплоскостях $H_c$ (грани определяются как компоненты дополнения в $H_c$ к $(B(4,2)-H_c)\cap H_c$) и вычислить эйлеровы характеристики прообразов этих точек с помощью теоремы 5.2. Для гладких конфигурационных пространств мы, разумеется, не получим ничего интересного, поскольку все они по размерностным причинам гомеоморфны объединению окружностей. Из общей теории следует, что число компонент связности может быть единица или двойка, и можно различить эти два случая, проверяя выполнимость некоторых неравенств для длин сторон [36]. Таким образом, гладкое конфигурационное пространство либо гомеоморфно окружности (для четырехугольников с «длинной» третьей стороной, как в случае вектора длин $(1,1,2,1)$), либо несвязному объединению двух окружностей (для четырехугольников с «короткой» третьей стороной, как в случае вектора длин $(1,1,0.5,1)$).

Однако для негладких конфигурационных пространств ответ не совсем тривиален. А именно, выбирая точки на всех гранях бифуркационной диаграммы $B(4,2)$ и вычисляя эйлерову характеристику, мы обнаруживаем, что $\chi(C(P_4(l),2))$ может равняться $-1$, $-2$ и $-3$. Например, первое значение реализуется для вектора длин сторон $(1,1,1.5,0.5)$, второе — для $(1,2,1,2)$ (параллелограмм), а третье — для $(1,1,1,1)$ (ромб). Известно, что конфигурационные пространства имеют только особенности типа квадратичного конуса [36], так что для описания их топологической структуры в данном случае достаточно знать, сколько локальных ветвей имеется в каждой особой точке. Это можно выяснить с помощью общей формулы для числа ветвей одномерного аналитического множества (см., например, [38]), что дает окончательный результат.

**Предложение 7.4.** *С точностью до гомеоморфизма, все возможные топологические типы конфигурационных пространств* $C(M_4,2)$ *таковы*: *окружность, несвязное объединение двух окружностей, две окружности с одной общей точкой* (*букет двух окружностей*), *две окружности с двумя общими точками и две окружности с тремя общими точками.*

Нетрудно проверить, что конфигурационные пространства трех последних типов реализуются в точности для трех наборов длин сторон, указанных перед формулировкой предложения.

**Замечание 7.1.** Этот результат не нов, но известные ранее доказательства использовали теорию Морса или другие геометрические рассмотрения (ср. [36, 53]), тогда как при нашем подходе все сводится к нескольким алгоритмическим вычислениям.

Такой же подход вполне эффективен для плоских пятиугольников, поскольку неособые конфигурационные пространства в данном случае — это замкнутые (компактные и без края) ориентируемые поверхности, так что их топологические типы полностью определяются эйлеровой характеристикой. Нашим методом удается легко проверить, что эйлерова характеристика гладких слоев соответствующего квадратичного отображения может равняться $-6,-4,-2,0,2$, и мы получаем еще один известный результат (ср. [36]).

**Предложение 7.5.** *Все возможные топологические типы гладких конфигурационных пространств плоских пятиугольников* $C(P_5,2)$ *содержатся в следующем списке:* $S^0\times S^1\times S^1$ (*несвязное объединение двух торов* $\mathbb{T}^2$); *компактная ориентируемая поверхность без края* $M^2_g$ *рода* $g$, *не превосходящего четырех.*

Аналогично можно описать топологические типы особых слоев, отвечающих точкам бифуркационной диаграммы. В частности, оказывается, что их эйлеровы характеристики могут быть любым целым числом на сегменте $[-6,2]$. Окончательный результат дает довольно монотонный список топологических типов, который мы опускаем (он может быть получен также из результатов [37]).

**Замечание 7.2.** С помощью теоремы 6.3 можно получить универсальную оценку для эйлеровой характеристики конфигурационного пространства плоского многоугольника с фиксированным числом сторон. Однако получаемая таким путем оценка не точна, и возникает интересная задача получения точной оценки эйлеровой характеристики конфигурационного пространства плоского $n$-угольника.

Можно также рассматривать реализации заданного многоугольника в евклидовых пространствах произвольной размерности. Это приводит к более общему понятию конфигурационного пространства, использующему факторизацию по действию подходящей группы преобразований. Стандартное определение таково. Множество реализаций заданного многоугольника $P_n$ в $\mathbb{R}^k$ определяется как множество $R(n,k)$ всех наборов из $n$ точек таких, что расстояния между ними, взятые в циклическом порядке, совпадают с длинами сторон многоугольника $P_n$. Это множество факторизуется по действию группы $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^k)$ сохраняющих ориентацию изометрий пространства $\mathbb{R}^k$.

**Определение 7.2.** $k$-тое конфигурационное пространство $C(P_n,k)$ определяется как

$$R(n,k)/\mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^k).$$

При $k=3$ получаются конфигурационные пространства *пространственных многоугольников*. Отметим, что эти пространства априори не связаны с квадратичными отображениями, но такую связь нетрудно установить. Ограничимся пространственными четырехугольниками, то есть берем $n=3, k=3$.

Заметим, что всегда можно поместить первую сторону на первую координатную ось с помощью изометрии, а затем повернуть всю конфигурацию так, чтобы четвертая сторона лежала в плоскости, ортогональной второй координатной оси. Поэтому достаточно с самого начала рассматривать только такие реализации $P_n$ в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, здесь имеется пять «свободных параметров» — три координаты второй вершины и две координаты третьей вершины (ее ордината равна нулю согласно проведенному построению) и три квадратичных соотношения указанного выше типа. Поэтому возникает квадратичное отображение $\mathbb{R}^5$ в $\mathbb{R}^3$.

Его слои двумерны, поэтому, чтобы описать гладкие конфигурационные пространства $C(P_4(l),3)$, достаточно подсчитать эйлерову характеристику слоя над началом координат, что опять же выполнимо с помощью теоремы 5.2. Например, для квадрата немедленно получаем, что эйлерова характеристика слоя равна двум и потому его конфигурационное пространство гомеоморфно сфере $S^2$. Повторяя описанные выше рассмотрения в терминах бифуркационной диаграммы, можно убедиться, что значение эйлеровой характеристики конфигурационного пространства одинаково для всех пространственных четырехугольников.

**Предложение 7.6.** *Конфигурационное пространство любого пространственного четырехугольника гомеоморфно двумерной сфере $S^2$.*

Таким же образом можно вычислить эйлерову характеристику конфигурационного пространства любого пространственного правильного многоугольника. Более того, аналогичные результаты можно получить для более сложных объектов, например, для произвольных *плоских шарнирников* и *взвешенных графов*.

Механические шарнирники, в особенности плоские шарнирники, и их математические модели активно изучаются на протяжении по крайней мере 150 лет. Их можно представлять себе как механизмы, построенные из жестких стержней (ребер), соединенных (в вершинах) шарнирами, обеспечивающими подвижность механизма. Некоторые из вершин (шарниров) могут быть закреплены на неподвижной плоскости, а другие предполагаются подвижными. Для практических приложений бывает важно иметь наглядное описание всех возможных положений механизма, а также всех возможных положений каждой вершины (рабочее пространство вершины). Адекватное математическое описание плоских шарнирников выглядит следующим образом (ср. [37, 53]).

Напомним, что *взвешенный граф* определяется как тройка $\Gamma=(V,E,d)$, состоящая из множества вершин $V$, множества ребер $E=\{(V_{i_k},V_{j_k})\}$ и весовой функции $d: E\to\mathbb{R}_+$, которая сопоставляет каждому ребру $(V_{i_k},V_{j_k})$ некоторое положительное число (длину) $d(V_{i_k},V_{j_k})\in\mathbb{R}_+$. Мы всегда предполагаем, что граф $\Gamma$ связен, то есть каждая пара его вершин может быть соединена

последовательностью элементов из $E$. Предполагается также, что множество вершин $V$ разложено в объединение двух подмножеств $V = V_f \cup V_m$ с $V_f = \{V_1, \dots, V_m\}$ и $V_m = \{V_{m+1}, \dots, V_n\}$. Вершины из $V_f$ предполагаются (и называются) *неподвижными*, а вершины из $V_m$ — *подвижными*. В дальнейшем естественно предполагать, как мы и делаем, что $m \geqslant 2$ (это, по существу, означает, что мы факторизуем по действию группы евклидовых движений, т.е. исключаем банальные сдвиги и повороты шарнирника как твердого целого).

Связный взвешенный граф называется *N-реализуемым* в $\mathbb{R}^N$, если существует отображение $f : V \to \mathbb{R}^N$ такое, что евклидово расстояние $|f(V_i) - f(V_j)|$ равно $d(V_i, V_j)$ для любого $(V_i, V_j) \in E$. Это понятие, в отличие от размерности вложения, имеет специфически метрическую природу. Например, правильный тетраэдр 3-реализуем, но не 2-реализуем.

Связный взвешенный граф $\Gamma$ называется *плоским шарнирником*, если он реализуем в $\mathbb{R}^2$. Реализация $\Gamma$ определяется как соответствующий набор точек $(f(V_1), \dots, f(V_n)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Для того чтобы получить полезное определение конфигурационного пространства плоского шарнирника, фиксируют $m$ точек $p_1, \dots, p_m$ в $\mathbb{R}^2$ таких, что $|p_i - p_j| = d(V_i, V_j)$ для всех $V_i, V_j \in V_f$, где $(V_i, V_j) \in E$. Тогда *конфигурационное пространство* $\Gamma$ определяется как

$$C(\Gamma) = \{f - \text{реализация } \Gamma | f(V_f) = (p_1, \dots, p_m)\}.$$

Другими словами,

$$C(\Gamma) = \{x = (x_j) \in \mathbb{R}^{2n} | x_j = p_j, 1 \leqslant j \leqslant m \text{ и } |x_i - x_j| = d(V_i, V_j), \text{ если } (V_i, V_j) \in E\}.$$

Конфигурационное пространство иногда называют *пространством модулей* механического шарнирника [37]. Теперь уже ясно, что можно определить и «высшие» конфигурационные пространства $C_N(\Gamma)$ с помощью рассмотрения реализаций $\Gamma$ в $\mathbb{R}^N$. Все конфигурационные пространства рассматриваются с естественными топологиями, индуцированными евклидовым расстоянием.

Введенные конфигурационные пространства весьма интересны с топологической точки зрения, поскольку известно, что для каждого связного *замкнутого* (то есть компактного и без границы) гладкого многообразия $M$ существует такой плоский шарнирник $\Gamma$, что одна из компонент его конфигурационного пространства диффеоморфна $M$ [37, 53]. Во многих случаях можно выбрать $\Gamma$ так, чтобы $C(\Gamma)$ было связно и диффеоморфно $M$, но остается неясным, для каких многообразий это возможно, и это одна из интересных задач в данной тематике.

Если задан граф с фиксированной комбинаторной структурой, то можно получить из него шарнирник, выбрав 2-реализуемую весовую функцию $d$ как выше. Мы говорим, что некоторое свойство шарнирника *типично*, если оно выполняется для почти всех (т.е. для открытого плотного множества) весовых функций. Используя лемму Сарда, легко показать, что для типичного шарнирника $\Gamma$ конфигурационное пространство $C(\Gamma)$ является компактным гладким многообразием размерности $2(n - m) - (\mathrm{card}(E) - k)$, где $n$ — число вершин $\Gamma$, а $k$ — число ребер, соединяющих вершины из $V_f$.

Конфигурационные пространства шарнирников обобщают конфигурационные пространства плоских многоугольников и демонстрируют интересные геометрические явления. Они активно изучались, и их эйлеровы характеристики подсчитаны во многих случаях (см., например, [35]). Из последующего обсуждения явствует, что такие результаты могут быть получены с помощью нашей теоремы 5.2. Основной результат можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 7.1.** *Эйлерова характеристика конфигурационного пространства любого шарнирника* $\Gamma = (V, E, d)$ *может быть алгоритмически вычислена по его комбинаторным данным* $(V, E)$ *и весовой функции* $d$.

Доказательство основано на наблюдении, что конфигурационное пространство каждого шарнирника является слоем некоторого явно заданного квадратичного отображения $Q_\Gamma$, и использовании теоремы 5.2. Компоненты отображения $Q_\Gamma$ получаются путем выписывания (в стандартных координатах на $\mathbb{R}^{2n}$) условий, выражающих равенство квадрата расстояния от $f(V_i)$ до $f(V_j)$ числу $d(V_i, V_j)^2$ для каждого ребра $(V_i, V_j) \in E$. Очевидно, имеется ровно $t(\Gamma) = \mathrm{card}\, E - k$ таких условий, где $k$ — число ребер, соединяющих вершины из $V_f$, поскольку названные ребра не накладывают условий. Поэтому $Q_\Gamma$ является квадратичным отображением из $\mathbb{R}^{2(n-m)}$ в $\mathbb{R}^{t(\Gamma)}$ и можно

прямо применить формулу (5.3), полагая в ней $F = Q_\Gamma$. Мы получаем требуемое, поскольку в силу [16, 30] локальная степень в формуле (5.3) допускает алгоритмическое вычисление.

Эта теорема также имеет вполне конкретные применения. Как показано в [18], она позволяет перечислить все топологические типы плоских четырехугольников и пятиугольников. Используя подход работы [18], можно также описать всевозможные топологические типы конфигурационных пространств для шарнирников с двумерными конфигурационными пространствами. Другое применение связано с понятием рабочего пространства вершины. Напомним, что для каждой подвижной вершины $V_j \in V_m$ ее *рабочее пространство* $W_\Gamma(V_j)$ определяется как подмножество $\{f(V_j) | f \in C(\Gamma)\}$ в $\mathbb{R}^2$.

**Теорема 7.2.** *Эйлерова характеристика рабочего пространства любой подвижной вершины может быть алгоритмически вычислена.*

Для доказательства отметим сначала, что, будучи проекцией алгебраического множества $C(\Gamma)$, рабочее пространство является полуалгебраическим подмножеством плоскости согласно общим результатам вещественной алгебраической геометрии [26]. Более того, легко выписать неравенства, которым должны удовлетворять компоненты построенного выше отображения $Q_\Gamma$. Поэтому желаемое заключение следует из результатов пятого параграфа об алгоритмическом вычислении эйлеровой характеристики полуалгебраического множества (ср. [38, 39]).

Отметим, что результаты этого параграфа легко обобщаются на конфигурационные пространства *пространственных* шарнирников и некоторые другие типы конфигурационных пространств, но мы на этом здесь останавливаться не будем.

## 8. Инварианты квадратичных пуассоновых структур

Мы переходим к обсуждению топологических построений и инвариантов, связанных с некоторыми алгебраическими пуассоновыми структурами на векторных пространствах. Удобно проводить рассмотрения в более широком контексте, поэтому мы начнем с определения достаточно широкого класса пуассоновых структур. Пусть $M$ — аффинное алгебраическое многообразие и $F(M)$ — некоторая (ассоциативная) алгебра функций на $M$.

**Определение 8.1** (см. [54])**.** Пуассонова структура (скобка Пуассона) на многообразии $M$ — это билинейное отображение $\{\cdot,\cdot\} : F(M) \times F(M) \to F(M)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\text{кососимметричность} \qquad \{f,g\} = -\{g,f\}, \tag{8.1}$$

$$\text{правило Лейбница} \qquad \{f,gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g, \tag{8.2}$$

$$\text{тождество Якоби} \qquad \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0. \tag{8.3}$$

В этой ситуации говорят также, что задана скобка Пуассона на $F(M)$. Для поля $K$ характеристики нуль через $K_n = K[x_1, \ldots, x_n]$ обозначим алгебру полиномов от $n$ переменных с коэффициентами в $K$ (на самом-то деле мы будем использовать только поля вещественных и комплексных чисел). Мы рассмотрим один класс пуассоновых структур на $K^n$, который был введен в [40].

**Определение 8.2.** Якобиева скобка на $K^n$ определяется как билинейное отображение $\{\cdot,\cdot\} : K_n \times K_n \to K_n$,

$$\{f,g\} = uJ(f,g,P_1,\ldots,P_{n-2}), \tag{8.4}$$

где $u, P_i \in K_n$, $i = 1,\ldots,n-2$, а $J$ обозначает обычный якобиан $J(h_1,\ldots,h_n) = \det(\partial h_i/\partial x_j)$.

Мы покажем, что эта формула действительно определяет скобку Пуассона на $K^n$. Пуассонова структура, определенная якобиевой скобкой, будет называться якобиевой пуассоновой структурой (JPS). Для полей вещественных и комплексных чисел та же формула определяет пуассонову структуру на $C^\infty(K^n)$. Мы ограничиваемся полиномиальным контекстом в основном ради простоты изложения.

Обозначим через $\chi(M)$ векторное пространство гладких векторных полей (то есть гладких сечений касательного расслоения $T(M) \to M$), через $\chi^k(M)$ — пространство $k$-векторов и через

$\Omega^k(M)$ — пространство дифференциальных $k$-форм на $M$, снабженное операцией внешнего дифференцирования $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Если многообразие $M$ снабжено формой объема $\Omega$, то можно определить операцию

$$\Phi_k : \chi^k(M) \to \Omega^{n-k}(M), \tag{8.5}$$

$$\Phi_k : v \mapsto i(v)\Omega. \tag{8.6}$$

Располагая всем этим, мы можем определить оператор

$$D = \Phi_{k-1}^{-1} \circ d \circ \Phi_k : \chi^k(M) \to \chi^{k-1}(M).$$

В дальнейшем будет удобно записывать скобку (8.4) в терминах пуассонова бивектора. Пусть $\Lambda$ обозначает структуру Пуассона, определенную якобиевой скобкой Пуассона. Тогда:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ \omega^{ij} &= \epsilon^{ijk_1 \dots k_{n-2}} \frac{\partial P_1}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial P_{n-2}}{\partial x^{k_{n-2}}}, \\ \{f, g\} &= \Lambda(df, dg) = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

**Теорема 8.1** (ср. [40]). *Каждая якобиева скобка задает пуассонову структуру.*

*Доказательство.* Кососимметричность и правило Лейбница следуют непосредственно из свойств определителей. Лишь немногим больше усилий требуется для доказательства тождества Якоби. На самом деле можно было бы получить тождество Якоби для якобиевой скобки как частный случай обобщенного тождества Якоби для так называемой скобки Намбу [40], но мы предпочитаем привести прямое доказательство ввиду его простоты и поучительности.

Достаточно рассмотреть только случай, когда полиномы $P_1, \dots, P_{n-2}$ функционально независимы [32], так как иначе якобиева скобка тождественно равна нулю. Поскольку тождество Якоби не зависит от выбора системы координат, можно доказывать его локально, выбрав удобные координаты.

Если $P_1, \dots, P_{n-2}$ — функционально независимы, то локально всегда можно выбрать систему координат, в которой они являются координатными функциями, т.е. $\dfrac{\partial P_i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, \dots, n-2$. Тогда формула (8.4) дает: $\{f, g\} = \partial_{n-1} f \partial_n g - \partial_{n-1} g \partial_n f$, где $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. После этого доказательство тривиальным образом следует из симметричности смешанных вторых производных. □

Чтобы сформулировать следующее важное свойство якобиевых скобок, нам потребуется еще одно общее определение.

**Определение 8.3** (см. [54]). Пуассонова структура $\Lambda$ называется точной, если $D(\Lambda) = 0$.

**Теорема 8.2** (см. [40]). *Пуассонова структура, определенная якобиевой скобкой Пуассона, всегда является точной.*

*Доказательство.* Как и выше, доказательство получается совсем просто за счет выбора подходящей системы координат. Действительно, выбирая систему координат в точности так же, как выше, мы получим, что $\omega^{ij} = \epsilon^{ij}$ — постоянный бивектор. Следовательно,

$$D(\Lambda) = \Phi^{-1} \circ d \circ \Phi^2(\Lambda) = \partial_j \omega^{ij} \partial_i - \partial_i \omega^{ij} \partial_j = 2\partial_j \omega^{ij} \partial_i = 2\partial_j \epsilon^{ij} \partial_i = 0, \tag{8.8}$$

что завершает доказательство. □

**Замечание 8.1.** Свойство точности пуассоновой структуры может быть выражено в терминах модулярного векторного поля [54]. Действительно, из обсуждения в [54] можно усмотреть, что $D(\Lambda)$ фактически совпадает с модулярным векторным полем пуассонова многообразия $(M, \Lambda)$. Это, в свою очередь, означает, что при условии точности $\Omega$ является инвариантной плотностью для всех потоков, задаваемых гамильтоновыми векторными полями на $M$, то есть $L_{X_f}\Omega = 0$, где $L_{X_f}$ обозначает производную Ли по отношению к гамильтонову векторному полю $X_f$ функции $f \in C^\infty(M)$

($X_f := \{f, \cdot\}$). При этом условии пуассоново многообразие $(M, \Lambda)$ называется унимодулярным [54]. Таким образом, все якобиевы пуассоновы структуры на векторных пространствах унимодулярны.

Очевидно, что функции $P_1, \ldots, P_{n-2}$ являются функциями Казимира порожденной ими якобиевой пуассоновой структуры (8.4), т.е. $\{f, P_i\} = 0 \ \forall f \in K_n, \ i = 1, \ldots, n-2$. Оказывается, что существование достаточного количества функционально независимых функций Казимира является характеристическим свойством якобиевых пуассоновых структур.

**Теорема 8.3.** *Пуассонова структура на $K^n$, имеющая $n-2$ функционально независимые полиномиальные функции, является якобиевой пуассоновой структурой.*

Для простоты обозначений мы приведем доказательство только при $n = 4$. Общий случай вполне аналогичен и рассмотрен в [40].

**Доказательство.** При $n = 4$ имеем две функции Казимира; обозначим их $P$ и $Q$. Обозначая координаты через $x^1, x^2, x^3, x^4$, имеем:

$$\{x^i, P\} = \omega^{ij}\partial_j P = 0, \qquad \{x^i, Q\} = \omega^{ij}\partial_j Q = 0; \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Заметим теперь, что в этой системе восьми уравнений есть не более пяти линейно независимых, поскольку выполняются тождества

$$\partial_i P\{x^i, P\} = 0, \quad \partial_i Q\{x^i, Q\} = 0, \quad \partial_i P\{x^i, Q\} + \partial_j Q\{x^j, P\} = 0.$$

На самом деле, ранг этой системы равен пяти. Следовательно, можно принять одну из ненулевых компонент пуассонова бивектора $\omega^{ij}$ за параметр, и тогда стандартная процедура решения линейных систем показывает, что компоненты $\omega^{ij}$ пропорциональны $\epsilon^{ijkl}\partial_k P \partial_l Q$, что и означает, что это якобиева пуассонова структура.

В малых размерностях можно установить и другие любопытные свойства якобиевых пуассоновых структур. Например, иногда точность оказывается характеристическим свойством таких структур. Так, обращение предыдущей теоремы верно в размерности три. Мы укажем еще один специфический факт о пуассоновых структурах на $K^3$.

**Теорема 8.4.** *Для каждого бивектора $\Lambda$ на $K^3$ условие точности ($D(\Lambda) = 0$) влечет тождество Якоби.*

*Доказательство.* Используем одну общую формулу исчисления бивекторов (см., например, [54]), которая гласит, что для любых двух бивекторных полей $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ имеет место равенство:

$$D(\Lambda_1 \wedge \Lambda_2) = [\Lambda_1, \Lambda_2]_S + D(\Lambda_1) \wedge \Lambda_2 - \Lambda_1 \wedge D(\Lambda_2), \tag{8.9}$$

где $[\cdot, \cdot]_S$ обозначает скобку Схоутена [54]. В частности,

$$D(\Lambda \wedge \Lambda) = [\Lambda, \Lambda]_S + 2D(\Lambda) \wedge \Lambda. \tag{8.10}$$

Поскольку $\Lambda \wedge \Lambda = 0$ на $K^3$ из размерностных соображений, становится ясным, что условие $D(\Lambda) = 0$ влечет равенство $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$, которое в точности эквивалентно тождеству Якоби. □

Мы хотим теперь изучить топологические инварианты некоторых малоразмерных якобиевых пуассоновых структур. Интересные примеры таких структур дают так называемые алгебры Склянина [13], определяемые следующим образом:

$$\{x^\alpha, x^0\} = 2J^{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma, \qquad \{x^\alpha, x^\beta\} = -2x^0 x^\gamma, \tag{8.11}$$

где $J^{\alpha\beta} = J^\alpha - J^\beta$; $J^\alpha, J^\beta$ — некоторые комплексные числа, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Итак, алгебры Склянина являются *квадратичными пуассоновыми структурами* на $\mathbb{C}^4$ и нетрудно проверить, что они являются якобиевыми пуассоновыми структурами. Действительно, если в формуле (8.4) положить $P = \sum_{i=0}^{3} a_i (x^i)^2$, $Q = \sum_{j=0}^{3} b_i (x^j)^2$, то якобиева пуассонова структура, порожденная $P$ и $Q$, совпадает с (8.11), если $J^{\alpha\beta} = (a_\alpha - a_\beta)/a_0$ и $a_\gamma b_0 - a_0 b_\gamma = 1/2$ для любых $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$.

В [13] показано, что центр алгебры Склянина допускает простое описание. Мы обобщим этот факт на произвольную якобиеву пуассонову структуру на $K^n$. Чтобы сформулировать результат, обозначим через $K\{x^1,\dots,x^n\}$ алгебру сходящихся степенных рядов с коэффициентами из $K$.

**Теорема 8.5.** *Для произвольного $n$ центр якобиевой пуассоновой структуры* (8.4) *в $K\{x^1,\dots,x^n\}$ совпадает с подалгеброй, порожденной полиномами $P_1,\dots,P_{n-2}$.*

**Доказательство.** Для краткости рассмотрим только случай $n=4$. Общий случай может быть доказан по индукции. Ключевым является тот факт, что в любой размерности для якобиевой пуассоновой структуры $\mathrm{rk}(\omega^{ij})=2$.

В размерности четыре якобиева пуассонова структура имеет вид

$$\Lambda=\epsilon^{ijpq}\frac{\partial P}{\partial x^p}\frac{\partial Q}{\partial x^q}\partial_i\wedge\partial_j, \tag{8.12}$$

где $P=P_1$ и $Q=P_2$.

Для любого полинома $f$ такая структура позволяет построить векторное поле $X_f\in\chi(M)$ по формуле

$$X_f=\Lambda(df,\cdot)=\{f,\cdot\}=\omega^{ij}\partial_i f\partial_j. \tag{8.13}$$

Если $g$ — другой полином, то

$$(dg)(X_f)=(X_f)g=\Lambda(df,dg)=\{f,g\}. \tag{8.14}$$

Положим $X_{x^i}\equiv X_i$ и пусть $h$ — функция Казимира. Очевидно, что $(dh)(X_i)=0$ для $i=1,2,3,4$. Мы покажем, что $h$ — аналитическая функция от $P$ и $Q$. Положим $dh=h_1dx^1+h_2dx^2+h_3dx^3+h_4dx^4$. Затем попробуем найти функции $h_i$, удовлетворяющие системе уравнений $(dh)(X_i)=0$, где $i=1,2,3,4$. Поскольку лишь два из векторов $X_i$ линейно независимы ($\mathrm{rk}(\omega^{ij})=2$), можно принять две функции, скажем, $h_3$, $h_4$ за параметры и записать

$$h_1=\frac{1}{\omega^{12}}(\omega^{23}h_3+\omega^{24}h_4), \tag{8.15}$$

$$h_2=-\frac{1}{\omega^{12}}(\omega^{13}h_3+\omega^{14}h_4), \tag{8.16}$$

$$\omega^{ij}=\epsilon^{ijkl}\partial_kP\partial_lQ:=\epsilon^{ijkl}P_kQ_l. \tag{8.17}$$

Перепишем эти формулы в виде:

$$\begin{pmatrix}\omega^{12}h_1\\ \omega^{12}h_2\\ \omega^{12}h_3\\ \omega^{12}h_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^{23}h_3+\omega^{24}h_4\\ -\omega^{13}h_3-\omega^{14}h_4\\ \omega^{12}h_3\\ \omega^{12}h_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(Q_4h_3-Q_3h_4)P_1+(P_3h_4-P_4h_3)Q_1\\ (Q_4h_3-Q_3h_4)P_2+(P_3h_4-P_4h_3)Q_2\\ (Q_4h_3-Q_3h_4)P_3+(P_3h_4-P_4h_3)Q_3\\ (Q_4h_3-Q_3h_4)P_4+(P_3h_4-P_4h_3)Q_4\end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Далее, если мы положим

$$\alpha=\frac{1}{\omega^{12}}(Q_4h_3-Q_3h_4),\qquad \beta=\frac{1}{\omega^{12}}(P_3h_4-P_4h_3), \tag{8.19}$$

то получим соотношение

$$dh=\alpha dP+\beta dQ, \tag{8.20}$$

откуда следует, что $h$ может быть представлена как аналитическая функция от $P$ и $Q$ [9].

**Замечание 8.2.** Некоторые свойства алгебр Склянина обобщаются на более широкие классы пуассоновых структур. Скажем, что задана пуассонова структура типа Склянина, если скобка любых двух переменных является функцией, зависящей только от оставшихся $(n-2)$ переменных. Например, для квадратичных структур имеем:

$$\{x^i,x^j\}=J^{ij}_{mn}x^mx^n, \tag{8.21}$$

где мы используем обычное правило суммирования по повторяющимся индексам и предполагаем, что и $m$, и $n$ не принимают значений $i$ и $j$. Некоторые из свойств таких структур обусловлены однородностью базисных скобок, так что наш следующий результат применим ко всем скобкам склянинского типа (см. [40]).

Пуассоновы структуры со свойством однородности обладают некоторыми специфическими свойствами. Мы приведем точное определение и два результата о таких структурах.

Пусть задан набор $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ положительных рациональных чисел $w_i$, рассматриваемых как веса переменных $x_1, \ldots, x_n$. Как обычно, $\mathbf{w}$-степень монома $e = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ определяется как $\sum w_i k_i$ и полином $P \in K_n$ называется квазиоднородным $\mathbf{w}$-степени $d$, если все мономы, входящие в $P$, имеют $\mathbf{w}$-степень $d$ (ср. [5]).

**Определение 8.4.** Пуассонова структура называется квазиоднородной $\mathbf{w}$-степени $d$, если каждая компонента $\omega^{ij}$ соответствующего бивектора является квазиоднородным полиномом $\mathbf{w}$-степени $d + w_i + w_j$.

Введем так называемое эйлерово векторное поле $X_E = \sum w_i x^i \partial_i$, ассоциированное с весами $(w_1, \ldots, w_n)$. Тогда легко проверить, что для квазиоднородной пуассоновой структуры $\mathbf{w}$-степени $d$ имеет место равенство $L_{X_E}\Lambda = d\Lambda$. Кроме того, для однородных пуассоновых структур (все $w_i = 1$) имеется следующее полезное разложение.

**Теорема 8.6.** *Если $\Lambda$ — однородная пуассонова структура степени $d$ на $K^n$, то она может быть представлена в виде $\Lambda = \Lambda_0 - \dfrac{1}{d+n-2} X_\Lambda \wedge X_E$, где $\Lambda_0$ — точная пуассонова структура, $X_\Lambda = D(\Psi)$ и $X_E = \sum\limits_i x^i \partial_i$.*

*Доказательство.* Начнем с рассмотрения общего квазиоднородного случая, когда $X_E = \sum w_i x^i \partial_i$, и пусть $\Lambda = \Lambda_0 - \frac{1}{c} X_\Lambda \wedge X_E$ с некоторым $c \in K$ и точным бивектором $\Lambda_0$. Тогда поскольку $D(\Lambda_0) = 0$, получаем

$$D(\Lambda - \frac{1}{c} X_\Lambda \wedge X_E) = X_\Lambda - \frac{1}{c}([X_E, X_\Lambda] + D(X_E)X_\Lambda - D(X_\Lambda)X_E) =$$
$$= \frac{1}{c}\left(c - d + w_i + w_j - \sum_{k=1}^{n} w_k\right) X_\Lambda = 0. \tag{8.22}$$

Это равенство возможно, если $w_i = w_j$ для всех $i, j$. Это означает, что оно возможно только в однородном случае. Значит, можно положить $w_i = 1$, и тогда сразу получаем, что $c = d + n - 2$. □

Теперь мы уже можем начать топологическое изучение некоторых конкретных пуассоновых структур. Здесь мы ограничимся квадратичными пуассоновыми структурами, в частности, алгебрами Склянина. Как было показано, алгебры Склянина являются якобиевыми пуассоновыми структурами. В действительности существует пятипараметрическое семейство якобиевых пуассоновых структур, обобщающих исходное трехпараметрическое семейство, указанное Е. Скляниным [13]. Упомянутые структуры задаются пуассоновыми матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & auv & byv & cyu \\ -auv & 0 & dxv & exu \\ -buv & -dxv & 0 & fxy \\ -cyu & -exu & -fxy & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.23}$$

Для того чтобы получились настоящие скобки Пуассона, постоянные $a, b, c, d, e, f$ должны удовлетворять соотношению $af - be + cd = 0$. При этом условии легко выписать соответствующие функции Казимира $P_1, P_2$. Возникает вопрос о том, сколько неизоморфных пуассоновых структур имеется в этом семействе, являющийся частным случаем важного вопроса об описании классов изоморфизма квадратичных пуассоновых структур на $K^4$. Отметим, что для $K^3$ такое описание имеется в [54]. Как мы увидим, при исследовании этого вопроса можно использовать некоторые топологические инварианты якобиевых пуассоновых структур, которые можно вычислять с помощью результатов предыдущих параграфов.

Другая естественная тематика, связанная с якобиевыми пуассоновыми структурами, относится к редукциям пуассоновых структур. Роль таких редукций в математической физике выявлена в

классических работах П. Дирака, и ограничение пуассоновых структур на различные подмногообразия фазового пространства (так называемая редукция Дирака [54]) используется во многих задачах.

Оказывается, что в случае якобиевых скобок можно построить некоторые редукции в явном виде. Для того, чтобы адекватно обсуждать этот вопрос, полезно ввести аналоги якобиевых скобок Пуассона для произвольного подмногообразия евклидова пространства и более общо, для любого многообразия, наделенного формой объема.

Рассмотрим $n$-мерное многообразие $M$ с заданной формой объема $\mu$. В этой ситуации для любого набора $n$ функций $f_1, \dots, f_n$ можно определить аналог якобиана путем сравнения внешнего произведения их дифференциалов с формой $\mu$. Более точно, для каждой точки $x \in M$ имеется соотношение вида $df_1 \wedge \dots \wedge df_n(x) = J(x)\mu(x)$ с однозначно определенным коэффициентом $J(x)$. Функция $J$ является естественным обобщением якобиана, и можно рассмотреть скобки, определенные формулой (8.4) для гладких функций $f, g \in C^\infty(M)$ при фиксированных гладких функциях $P_1, \dots, P_{n-2}$ на $M$.

Принимая во внимание, что такие скобки Пуассона можно локализовать, т.е. их значение в точке зависит только от ростков функций в этой точке, мы видим, что тождество Якоби для таких обобщенных якобиевых скобок можно проверять локально. Поскольку в локальных координатах функция $J$ превращается в обычный якобиан, мы можем применить все предыдущие результаты и установить основные свойства введенных обобщенных якобиевых скобок.

**Теорема 8.7.** *Для любого набора $n-2$ гладких функций на гладком $n$-мерном многообразии $M$ с заданной формой объема введенные выше скобки задают пуассонову структуру на $C^\infty(M)$. Все такие структуры точны, т.е. $D(\tau)$ обращается в нуль для соответствующего бивекторного поля $\tau$ на $M$.*

Теперь появляется возможность ограничить якобиеву пуассонову структуру на подмногообразие, взяв ограничения ее функций Казимира на это подмногообразие и построив по ним обобщенные якобиевы скобки как выше. В частности, это применимо к подмногообразиям евклидова пространства.

Мы не будем обсуждать здесь свойства этой общей конструкции, а кратко обсудим ограничения якобиевых скобок на некоторые, не обязательно гладкие, подмногообразия в $K^3$ и $K^4$, поскольку при этом возникают интересные связи с алгебраической геометрией и теорией особенностей. Заметим сначала, что формула (8.4) дает много примеров пуассоновых структур на гиперповерхностях в $\mathbb{C}^3$. Мы покажем, что некоторые свойства этих структур могут быть выражены в терминах алгебраических инвариантов функций Казимира, что устанавливает связь между пуассоновой геометрией и теорией особенностей.

Обычный подход алгебраической геометрии заключается в описании свойств алгебраических многообразий в терминах алгебр регулярных функций. Применительно к нашей ситуации это выражается в том, что структуру Пуассона на гиперповерхности $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ можно задать как скобку Пуассона на алгебре регулярных функций $A = \mathbb{C}_3/(f)$ в смысле определения 8.1.

**Предложение 8.1.** *Для любого $P \in \mathbb{C}_3$ якобиева скобка Пуассона* (8.4) *задает пуассонову структуру $\tau_P$ на $X = \{P = 0\}$.*

Это следует из того, что $P$ — функция Казимира для $\{\cdot,\cdot\}_P$. Действительно, достаточно проверить, что ограничение скобок $\{f, g\}_P$ на $X$ не меняется от прибавления к $f$ (или $g$) любой функции вида $hP$. По правилу Лейбница имеем равенство

$$\{f + hP, g\} = \{f, g\} + h\{P, g\} + P\{h, g\}.$$

Второе слагаемое равно нулю, поскольку $P$ — функция Казимира, а третье обращается в нуль при ограничении на $X$, что и дает желаемый результат.

Как известно, для коммутативной алгебры $A$ с пуассоновой структурой $\tau_P$, определенной сужением на $X$ скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_P$ на $\mathbb{C}^3$, можно рассмотреть ее пуассоновы гомологии $HP_*(A, \tau_P)$ [54], которые играют важную роль в пуассоновой геометрии. Мы рассмотрим только нульмерную

группу гомологий $HP_0$, которая по определению изоморфна факторалгебре $A/\{A,A\}$, где в знаменателе стоит идеал, порожденный всеми попарными скобками элементов $A$. Напомним также, что важным топологическим инвариантом изолированной особой точки $p \in X$ алгебраической гиперповерхности $X$ в $\mathbb{C}^n$ является число Милнора $X$ в точке $p$, которое определяется как число так называемых исчезающих циклов слоя Милнора $X$ в точке $p$ [5].

**Теорема 8.8.** *Пусть $P \in \mathbb{C}_3$ — квазиоднородный полином с изолированной критической точкой в начале координат. Тогда размерность нульмерной группы гомологий $HP_0(A, \tau_P)$ равна числу Милнора гиперповерхности $\{P = 0\}$ в начале координат.*

Для доказательства можно использовать следующее соотношение между идеалами в $\mathbb{C}_3$, которое следует из условия квазиоднородности полинома:

$$\{\mathbb{C}_3, \mathbb{C}_3\} + (P) = (\partial_1 P, \partial_2 P, \partial_3 P)$$

(на самом деле, аналогичное соотношение выполняется для квазиоднородного полинома от любого числа переменных). Это соотношение нетрудно проверить, применяя правило Лейбница и формулу Эйлера для квазиоднородных полиномов. Затем надо профакторизовать $\mathbb{C}_3$ по идеалам, стоящим в обеих частях этого соотношения и заметить, что «левое» факторпространство изоморфно нульмерной группе гомологий, тогда как размерность «правого» фактора равна числу Милнора $P$ по теореме Паламодова [9].

Эта теорема допускает различные обобщения, так как подобные соображения сохраняют силу, например, для пары полиномов на $\mathbb{C}^4$ и порожденной ими пуассоновой структуры на множестве их общих корней. В случае, когда полиномы задают полное пересечение [32], определено так называемое число Милнора полного пересечения, являющееся прямым обобщением числа Милнора гиперповерхности [5].

**Теорема 8.9.** *Для полного пересечения с изолированной особенностью в начале координат, заданного полиномами $P, Q \in \mathbb{C}_4$, которые оба квазиоднородны по отношению к одной и той же системе весов переменных, размерность нульмерной группы пуассоновых гомологий $\mathbb{C}_4/(P,Q)$ равна числу Милнора полного пересечения $\{P = Q = 0\}$ в начале координат.*

Доказательство вполне аналогично приведенному выше, нужно только использовать вместо формулы Паламодова явную формулу для числа Милнора полного пересечения [31]. Аналогичные результаты существуют для каждой размерности. Описанная связь между пуассоновой геометрией и теорией особенностей открывает интересные перспективы, в частности, для вычисления пуассоновых гомологий, но здесь нет возможности вдаваться в обсуждение результатов такого рода. Отметим лишь недавний прогресс в вычислении пуассоновых гомологий якобиевых пуассоновых структур, достигнутый в работах [45, 47]. Мы же переходим к обсуждению топологических инвариантов якобиевых пуассоновых структур, которые удается исследовать методами, описанными в данной работе.

Как было отмечено, якобиева пуассонова структура на $\mathbb{R}^n$ определяется любым набором из $(n-2)$ функционально независимых функций Казимира. Такой набор будем называть полным набором функций Казимира. Разумеется, для данной якобиевой пуассоновой структуры существует много таких систем, но любая из них содержит, в основном, ту же самую информацию о данной пуассоновой структуре и может быть использована в дальнейших рассмотрениях. Мы ограничимся рассмотрением вещественных алгебр Склянина [13].

Для этого удобно использовать обозначения и соглашения из [13]. Обозначим через $x_0, x_1, x_2, x_3$ координаты на $\mathbb{R}^4$ и введем индексы $i, j, k$, принимающие значения $1, 2, 3$, а также соглашение, что в формулах (8.11) каждая тройка $i, j, k$ является циклической перестановкой чисел $1, 2, 3$ (так что каждая из формул (8.11) на самом деле выражает три различных соотношения).

Введем, наконец, три вещественных постоянных $J_{12}, J_{23}, J_{31}$, удовлетворяющих условию $J_{12} + J_{23} + J_{31} = 0$, и определим алгебру Склянина как квадратичную пуассонову структуру на $\mathbb{R}^4$ со следующими определяющими соотношениями, указанными в [13]:

$$\{x_i, x_j\} = 2J_{ij} x_0 x_k, \{x_0, x_i\} = -2x_j x_k. \tag{8.24}$$

Из сказанного выше вытекает, что каждая такая пуассонова структура замкнута, и ее центр $\mathbb{R}_4[[x]]$ состоит из аналитических функций от ее функций Казимира. Как было показано в [13,14], некоторые важные свойства таких алгебр определяются топологией совместных поверхностей уровня их функций Казимира. В частности, указанные поверхности уровня компактны, и можно полностью описать их классы гомеоморфизма. Такие рассмотрения приводят к интересным заключениям, которые имеют важные следствия для теории представлений квантованных алгебр Склянина [14].

Для того чтобы соответствующим образом формализовать топологические аспекты этих алгебр, введем некоторые определения и обозначения. Напомним, что для любого компактного алгебраического множества $X$ определена эйлерова характеристика $\chi(X) \in \mathbb{Z}$.

**Определение 8.5.** Пусть задана якобиева пуассонова структура на $\mathbb{R}^4$ с функционально независимыми функциями Казимира $P_1, P_2$. Для $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ алгебраическое множество $M_c = \{x \in \mathbb{R}^4 : P_1(x) = c_1, P_2(x) = c_2\}$ назовем казимировым уровнем. Слоение (вообще говоря, с особенностями) пространства $\mathbb{R}^4$, заданное казимировыми уровнями, назовем казимировым слоением данной пуассоновой структуры. Множества $E_k = \{c \in \mathbb{R}^2 : \chi(M_c) = k\} \subset \mathbb{R}^2$ назовем эйлеровыми множествами этой структуры. Соответствующее же разложение $\mathbb{R}^2$ назовем эйлеровым разбиением, связанным с данной пуассоновой структурой.

Легко проверить, что классы изоморфизма казимирова слоения и эйлерова разбиения якобиевой пуассоновой структуры не зависят от выбора полной системы функций Казимира. Следовательно, они являются геометрическими инвариантами само́й пуассоновой структуры, которые можно вычислять по любой такой системе. Мы предположим, что такая система зафиксирована и далее работаем с выбранными полиномами.

Отметим, что результаты из [13] дают важную информацию о казимировом слоении и эйлеровом разбиении алгебры Склянина. Эта информация тесно связана с классификацией алгебр Склянина и их квантований с точностью до изоморфизма [14]. С целью формализации некоторых существенных черт алгебр Склянина, в [39, 40] был введен более общий класс пуассоновых структур со структурными свойствами, похожими на свойства алгебр Склянина, которые дают естественный контекст для наших дальнейших рассмотрений.

**Замечание 8.3.** Одним из оснований для такого обобщения, как и изучения якобиевых пуассоновых структур в целом, было то, что алгебры Склянина тесно связаны с некоторыми точно решаемыми моделями математической физики и весьма полезны при исследовании последних [13]. Поэтому были все основания ожидать, что введенные нами более общие пуассоновы структуры могут пригодиться для построения и исследования новых примеров физически интересных точно решаемых моделей (см. замечание 13.9 в [39]). В частности, можно без особого труда выписать различные вполне интегрируемые гамильтонианы, возникающие из таких пуассоновых структур (ср. [13]), но выяснение их физического смысла требует более углубленного междисциплинарного исследования за пределами наших целей и возможностей в данной работе. Поэтому мы ограничиваемся изучением введенных пуассоновых структур «per se». Добавим, что результаты и примеры, приводимые в недавней работе [8], значительно подкрепляют высказанную выше (и в [39]) гипотезу о том, что якобиевы пуассоновы структуры должны привести к новым результатам о точно решаемых моделях.

**Определение 8.6.** Обобщенная алгебра Склянина (ОСА) определяется как пуассонова структура на $\mathbb{R}^4$ с двумя функционально независимыми полиномами Казимира и компактными казимировыми уровнями.

Из определения очевидно, что попарные скобки координатных функций задаются квадратичными полиномами, а из нашей теоремы 8.3 следует, что они являются якобиевыми пуассоновыми структурами.

**Предложение 8.2.** *Обобщенные алгебры Склянина принадлежат классу квадратичных якобиевых пуассоновых структур.*

**Следствие 8.1.** *Центр произвольной ОСА в $\mathbb{R}_4$ состоит из аналитических функций от полиномов Казимира.*

Некоторые другие свойства алгебр Склянина (например, формулы для размерностей градуированных компонент и квантования) также переносятся на этот класс алгебр, но мы отложим их обсуждение на будущее и посвятим остаток этого параграфа изучению топологии казимировых уровней. Основная причина такого выбора темы заключается в том, что это может быть весьма эффективно проделано с помощью результатов предыдущих параграфов.

Мы намереваемся заняться вычислением эйлеровых характеристик казимировых уровней. Начнем с рассмотрения гладких казимировых уровней алгебры Склянина. Ответ можно получить с помощью теоремы 5.1, сводящей задачу к вычислению локальной степени явно заданного полиномиального отображения. В качестве следствия мы получим топологическую классификацию гладких казимировых уровней, приведенную в [14]. Вообще же, теорема 5.2 позволяет найти эйлерову характеристику любого казимирова уровня обобщенной алгебры Склянина. Мы приведем некоторые следствия этого обстоятельства и сформулируем несколько задач, естественно возникающих в этом контексте.

Напомним, что полиномы Казимира алгебры Склянина имеют вид

$$P_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, P_2 = x_0^2 + \sum_{i=1}^{3} J_i x_i^2,$$

где $J_i$ — вспомогательные постоянные, удовлетворяющие равенствам $J_i - J_j = J_{ij}$. Ясно, что добавляя к $P_2$ подходящее положительное кратное $P_1$, можно сделать второй полином Казимира положительно определенной квадратичной формой на $\mathbb{R}^4$. Обозначим ее через $g$ (по аналогии с римановой метрикой). Аналогично, полагая $f = P_1 + cP_2$, получаем другой полином Казимира $f$, который является невырожденной квадратичной формой и потому имеет изолированную критическую точку в начале координат. Заметим, что эта форма задается диагональной матрицей с собственными значениями (диагональными элементами) $1, 1 + cJ_1, 1 + cJ_2, 1 + cJ_3$.

Заметим, что казимировы уровни либо пусты (при отрицательных $cJ_2$), либо совпадают с пересечениями поверхностей уровня $f$ с эллипсоидами $\{g = r\}$. Это наводит на мысль использовать простую алгебраическую формулу для эйлеровой характеристики локальной поверхности уровня (т.е. пересечения поверхности уровня с малым шаром) полинома вблизи его изолированной критической точки, доказанную в [16], поскольку казимировы уровни являются границами таких локальных поверхностей уровня. Для удобства мы предварительно приведем приспособленный к нашей ситуации вариант теоремы 5.1 для однородных полиномов.

**Предложение 8.3.** *Если $f$ — однородный полином на $\mathbb{R}^4$ с изолированной критической точкой в начале координат, то для любого достаточно малого положительного $r$ имеет место равенство:*

$$\chi(\{f = 0\} \cap S_r^3) = 2(1 - \deg_0 \operatorname{grad} f), \tag{8.25}$$

*где $S_r^3$ обозначает сферу радиуса $r$ с центром в начале координат, $\deg_0 \operatorname{grad} f$ — локальная топологическая степень градиентного отображения полинома $f$.*

В силу сделанных предположений, указанная локальная степень определена. Заменяя каноническое скалярное произведение на квадратичную форму $g$, немедленно получаем, что эта формула применима и для пересечений локальных поверхностей уровня с эллипсоидами $\{g = r\}$, которые совпадают с интересующими нас казимировыми уровнями.

*Доказательство.* Рассмотрим множества $X_t = \{f = t\}$ и $X_t \cap S_r^3$, где $S = S_r^3$ — сфера радиуса $r$ с центром в начале координат. Поскольку мы стремимся вычислить $\chi(X_0 \cap S)$, разложим малую сферу $S = S_r^3$ следующим образом:

$$S = (X_0 \cap S) \cup (X_+ \cap S) \cup (X_- \cap S), \tag{8.26}$$

где $X_\pm = \{\pm f > 0\}$.

Как известно (см., например, [5]), для малых положительных $t, r$ при $t \ll r$ множества $X_\pm \cap S$ гомеоморфны множествам $X_{\pm t} \cap B_r^4$. Поэтому из аддитивности эйлеровой характеристики получаем:

$$0 = \chi(S) = \chi(X_t \cap B) + \chi(X_{-t} \cap B) - \chi(X_0 \cap S). \tag{8.27}$$

Заметим теперь, что для $n = 4$ из формулы из теоремы 5.2 следует, что эйлерова характеристика локальной поверхности уровня $X_t \cap B$ равна $1 - \deg_0 \operatorname{grad} f$. Это, очевидно, дает желаемое равенство и заканчивает доказательство. □

Применяя это к функции Казимира $f$ алгебры Склянина, мы видим, что локальная степень ее градиента может равняться либо 1, либо $-1$, в зависимости от четности (класса $\bmod 2$) числа положительных собственных значений вида $1 + cJ_j$. Соответственно, $\chi(M_c)$ может равняться 0 или 4 в зависимости от того, четно или нечетно число тех $cJ_j$, которые больше $-1$. Поэтому казимиров уровень гомеоморфен либо двумерному тору, либо несвязному объединению двух двумерных сфер $S^2$, что согласуется с описанием, полученным в [14]. Можно также описать изменения топологии слоев казимирова слоения, имеющие место, когда набор значений параметров $J_j$ проходит критическое значение. Эти результаты относятся к гладким казимировым уровням и существенно используют тот факт, что в качестве одного из полиномов Казимира может быть взята положительно определенная квадратичная форма. Это априори не гарантировано в определении обобщенной алгебры Склянина, но эйлеровы характеристики казимировых слоев все же могут быть легко вычислены с помощью теоремы 5.2.

**Предложение 8.4.** *Для любой обобщенной алгебры Склянина и любой точки плоскости $c \in \mathbb{R}^2$ эйлерова характеристика $\chi(M_c)$ казимирова уровня $M_c$ может быть алгоритмически вычислена по коэффициентам полиномов Казимира.*

Поскольку для замкнутых гладких поверхностей эйлерова характеристика является полным топологическим инвариантом, мы получаем полную информацию о топологии гладких казимировых уровней. При этом множество особых (негладких) казимировых уровней конечно. Хотя для компактных поверхностей с особенностями эйлерова характеристика уже не является полным инвариантом, в этом случае также можно описать топологию слоя, используя дополнительные инварианты, вроде пуассоновых гомологий сужений соответствующей пуассоновой структуры, рассмотренных выше.

**Предложение 8.5.** *Для каждой обобщенной алгебры Склянина множество возможных значений $\chi(M_c)$ конечно.*

**Следствие 8.2.** *Эйлерово разбиение имеет топологическую структуру конуса над конечным разбиением окружности.*

Оба эти утверждения легко следуют из предшествующих замечаний. Можно, например, сослаться на оценки топологической степени полиномиального эндоморфизма с фиксированными алгебраическими степенями компонент, полученные в четвертом параграфе (см. также [3, 19]).

**Замечание 8.4.** Легко показать, что типичная обобщенная алгебра Склянина имеет положительно определенный полином Казимира. В таком случае мы можем снова использовать теорему 5.1 и получить тот же результат, что и для классических алгебр Склянина. В частности, эйлерова характеристика гладких казимировых слоев может принимать только три значения (для удобства эйлерова характеристика пустого множества принимается равной $-1$). Однако даже в таком случае это еще не дает всего спектра значений $\chi(M_c)$ из-за негладких казимировых слоев, которые имеются у любой такой алгебры (например, для классических алгебр Склянина вся ось $Ox_0$ состоит из особых значений отображения, заданного любой парой функций казимира).

Следуя общему подходу к построению топологических инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем, развитому А. Т. Фоменко и его учениками (см. [15]), можно предложить достаточно наглядные и эффективно вычислимые топологические инварианты якобиевых пуассоновых структур. Простейшая конструкция такого рода заключается в рассмотрении графа смежности эйлерова разбиения (ср. [15]). Это всегда конечный граф (на самом деле, его можно наделить дополнительной комбинаторной структурой, но здесь не имеет смысла входить во все тонкости).

**Следствие 8.3.** *Граф эйлерова разбиения является инвариантом класса изоморфизма обобщенной алгебры Склянина, который может быть эффективно вычислен по коэффициентам полиномов Казимира.*

В заключение отметим некоторые любопытные задачи, естественно возникающие в рамках принятого нами подхода. Прежде всего, наше определение обобщенных алгебр Склянина легко распространить на произвольную размерность $n(\geqslant 3)$, просто потребовав, чтобы существовали $n-2$ функционально независимые функции Казимира с компактными совместными уровнями. Нашими методами можно изучать их топологическую структуру в любой размерности, что подсказывает различные возможности и задачи, некоторые из которых интересны уже в малых размерностях.

Например, какова топологическая структура наборов квадратичных полиномов, которые могут служить функциями Казимира обобщенных алгебр Склянина? Что можно сказать, если допускаются полиномы Казимира произвольных алгебраических степеней? Как можно описать их центры в алгебре полиномов $K_n$ (это намного сложнее, чем получить такое описание в кольце сходящихся степенных рядов)?

Кроме того, много различных вопросов возникает, если допустить произвольные размерности и степени полиномов Казимира. Например, каково максимальное возможное количество различных значений эйлеровой характеристики казимировых слоев в общем случае? Какими могут быть топологические типы особых казимировых уровней? Отметим, что для алгебр Склянина особые казимировы уровни возникают как «промежуточные» формы, отделяющие гладкие уровни одного топологического типа от гладких уровней другого топологического типа. Например, возникает тор с двумя меридианами, сжатыми в точки, который является «промежуточной формой» между обычным тором и двумя сферами $S^2$. Добавим, что существенная информация о возникающих бифуркациях и «промежуточных формах» была получена в уже упоминавшейся топологической теории интегрируемых гамильтоновых систем, развитой А. Т. Фоменко с учениками [15].

Можно поставить много других вопросов об обобщенных алгебрах Склянина, из которых мы здесь упомянем только два. Каков точный спектр возможных значений эйлеровой характеристики казимировых слоев для якобиевых пуассоновых структур с фиксированными алгебраическими степенями полиномов Казимира? Каковы возможные топологические типы графов их эйлеровых разбиений? Есть все основания надеяться, что методы и результаты, описанные в настоящей работе, позволят получить дальнейшие результаты по этой тематике.

## 9. Топологические инварианты случайных полиномов

Теперь мы приведем некоторые результаты о статистике топологических инвариантов слоев случайных полиномиальных отображений. Для этого нам потребуются некоторые понятия и результаты, относящиеся к *гауссовым случайным полиномам*. Под этим подразумевается, что коэффициенты таких полиномов являются вещественными случайными величинами и имеют совместное многомерное гауссово (нормальное) распределение. Термин «случайный полином» всегда понимается в этом смысле. Для точного описания рассматриваемой ситуации нам требуются некоторые обозначения и понятия из теории вероятностей [21].

Напомним, что гауссово (нормальное) распределение задается плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$, $-\infty < a < +\infty$. Если $\xi$ — случайная величина с такой плотностью распределения, то параметры $a$ и $\sigma$ выражают ее математическое ожидание и дисперсию

$$a = E\xi, \sigma^2 = D\xi.$$

Соответственно, гауссово (нормальное) распределение задается формулой

$$\mathrm{P}(\xi \in B) = \Phi_{a,\sigma^2}(B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_B e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то получаем стандартное нормальное распределение $\Phi_{0,1}$ (часто обозначаемое просто $\Phi(x)$):

$$\Phi(x) = \Phi_{0,1}(-\infty, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Если $(\xi, \eta)$ — пара случайных величин, то число

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\big[(\xi - E\xi) \cdot (\eta - E\eta)\big]$$

называется коэффициентом корреляции $\xi$ и $\eta$. Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, то $\xi$ и $\eta$ называются некоррелированными, в частности, (стохастически) независимые случайные величины некоррелированы [21]. Дисперсия $D\xi$ определяется как $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$.

*Многомерное нормальное распределение* определяется как распределение с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot Q(x)},$$

где

$$Q(x) = xAx^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

и $|A|$ обозначает определитель положительно определенной матрицы $A = (a_{ij})$. Прилагательное «центральный» указывает на то, что $E\xi = 0$, другими словами, это распределение с *нулевым средним*. Здесь мы рассматриваем только центральные гауссовы распределения.

Пусть $P$ — центральный гауссов случайный полином на $\mathbb{R}^n$ в вышеуказанном смысле. Тогда его можно записать как

$$P(x) = \sum_{\alpha} \xi_\alpha x^\alpha$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где случайные величины $\xi_\alpha$ имеют многомерное центральное нормальное распределение. Чтобы полностью задать это распределение, достаточно указать его матрицу корреляций. Для нас особенно важен следующий пример гауссова случайного полинома, предложенный в [49].

**Пример** («удобный случайный полином» [49])**.** Обозначим через $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ множество всех однородных полиномов алгебраической степени $m$ ($m$-форм) на $\mathbb{R}^{n+1}$ и рассмотрим случайный однородный полином $f$ из $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ вида

$$F(x) = \sum_{m_0+m_1+\ldots+m_n=m} F_{m_0,m_1,\ldots,m_n} x_0^{m_0} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где $F_{m_0,\ldots,m_n}$ — независимые нормальные случайные величины с нулевым средним и дисперсиями

$$EF^2_{m_0,\ldots,m_n} = \frac{m!}{m_o! \ldots m_n!}.$$

Можно проверить, что такой случайный полином инвариантен по отношению к естественному действию группы $O(n+1)$ на $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$.

Этот пример может быть обобщен следующим образом [11]. Введем скалярное произведение на $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ по формуле

$$(f, f') = \int\limits_{x \in S^n} f(x) f'(x) dx, \quad f, f' \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$$

и назовем гауссов случайный полином $F \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ *сферически инвариантным*, если

$$E\big((f, F)(f', F)\big) = (f, f'), \quad f, f' \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Легко проверить, что удобный случайный полином из предыдущего примера является сферически инвариантным.

Как показано в [11], важной характеристикой сферически инвариантного гауссова случайного полинома является так называемый *параметр* $r$, определенный формулой

$$r = \frac{E\Big(\Big[\frac{\partial F}{\partial x_0}(e)\Big]^2\Big)}{E\left[F(e)^2\right]},$$

где $e = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ — выделенная точка. Легко проверить, что в приведенном примере $r = m$.

Рассмотрим теперь гауссов случайный полином на $\mathbb{R}^{n+1}$ алгебраической степени $N$ такой, что каждая из его однородных компонент степени $m \leqslant N$ имеет сферически инвариантное нормальное распределение. В такой ситуации мы говорим, что задан *сферически инвариантный гауссов случайный полином* алгебраической степени $N$. Именно такие случайные полиномы мы хотим рассматривать в этой работе. Основная причина нашего выбора заключается в том, что для таких распределений имеются подробные результаты о среднем числе вещественных корней случайной системы уравнений [29,49] и среднем значении эйлеровой характеристики случайной гиперповерхности [11], один из которых используется ниже.

Дадим теперь точное описание некоторых задач, естественно возникающих в этой ситуации. Пусть задан гауссов случайный полином $P$ от $s$ переменных. Тогда можно связать с ним *каноническое случайное полиномиальное отображение* $F : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ с компонентами, заданными набором из $t$ независимых случайных полиномов с тем же распределением коэффициентов, что у $P$. В частности, при $t = s$ получаем *случайное векторное поле*, связанное с данным нормальным распределением. Разумеется, необязательно требовать, чтобы компоненты $F$ были независимыми и имели одинаковое распределение, и тогда мы приходим к понятию *общего нормального случайного отображения*.

Теперь можно сформулировать целый ряд интересных задач о вычислении *математических ожиданий* (случайных величин) различных топологических инвариантов слоев случайных полиномиальных отображений. Например, при $t = 1$ средняя эйлерова характеристика слоев в некоторых случаях вычислена в [11]. Многие из таких задач имеют смысл $t \leqslant s$, но мы для краткости коснемся только случайных векторных полей.

Заметим, что гауссово случайное векторное поле $F$ почти наверное (п.н.) собственно, так что его слои п.н. конечны, и можно поинтересоваться, какова его *средняя кратность* $E(m_F)$, определенная как среднее число точек в слоях $F^{-1}(0)$, или *среднее число вещественных корней* соответствующей случайной $(s \times s)$-системы уравнений. Аналогично, почти наверное определена топологическая степень отображения $\operatorname{Deg} F$, и можно попробовать вычислить математическое ожидание $E(\operatorname{Deg} F)$ этой случайной величины и/или ее абсолютной величины $E(|\operatorname{Deg} F|)$. Мы называем эти математические ожидания *средней топологической степенью* и *средней абсолютной степенью* $F$, соответственно.

Для канонического случайного векторного поля, ассоциированного с удобным гауссовым случайным полиномом *среднее число вещественных корней* было вычислено в [29,49]. Однако остается неясным, как вычислить его среднюю степень или среднюю абсолютную степень. Ниже мы получим результаты об этих инвариантах при несколько отличной постановке задачи.

А именно, рассмотрим случайное векторное поле $F = P'$, определенное как градиентное отображение заданного случайного полинома $P$, то есть компонентами $P'$ являются частные производные $P$. Заметим, что в этом случае компоненты $F$ не являются ни независимыми, ни одинаково распределенными, так что это пример общего случайного векторного поля. Математическое ожидание $E(\operatorname{Deg} P')$ называется *средней градиентной степенью* случайного полинома $P$.

Чтобы вычислить этот инвариант, предположим, что $P$ — удобный гауссов полином, как выше. Мы сперва сформулируем основной результат в случае четного числа переменных (заметим, что в обозначениях примера это число равно $n+1$). Таким образом, мы предполагаем, что $n$ нечетно, и $P$ — удобный гауссов случайный полином алгебраической степени $m$. Определим число $M_n(m)$ по формуле

$$M_n(m) = \frac{I_n(\sqrt{m})}{I_n(1)}, \qquad I_n(s) = \int\limits_0^s (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

**Теорема 9.1.** *Для любого нечетного $n \geqslant 1$ средняя градиентная степень $E(\operatorname{Deg} P')$ удобного гауссова случайного полинома $P$ алгебраической степени $m$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ равна $1 - M_n(m)$.*

Теорема доказывается следующим образом. Рассмотрим случайную гиперповерхность $V_P$ в $\mathbb{RP}^n$, заданную однородным уравнением $\{Q = 0\}$, где $Q = P^*$ — лидер (однородная форма старшей степени) полинома $F$ (таким образом, вещественная размерность $V_P$ равна $n-1$). Как было доказано в [11], в этой ситуации гиперповерхность $V_Q$ почти наверняка гладкая и определена ее эйлерова

характеристика $\chi(V_Q)$. Мы выведем искомый результат и из формулы для математического ожидания $E(\chi(V_Q))$, полученной в [11]. Для этого мы используем формулу, связывающую эйлерову характеристику однородной гиперповерхности с градиентной степенью задающего его полинома (см. [16, 39]).

А именно, обозначая через $Y$ пересечение гиперповерхности $\{Q = 0\}$ с единичной сферой $S^n$ и используя теорему 2 из [16], получаем

$$\chi(Y) = 2(1 - \operatorname{Deg} Q').$$

Принимая во внимание, что $Y$ является дублем $V_Q$, заключаем, что

$$\chi(V_Q) = 1 - \operatorname{Deg} Q'.$$

Заметим теперь, что почти наверное выполняется равенство $\operatorname{Deg} Q' = \operatorname{Deg} P'$. Действительно, хорошо известно (см., например, [39]), что это равенство выполнено, если компоненты однородного векторного поля $Q' = (P^*)'$ не имеют нетривиальных общих вещественных нулей, а последнее обстоятельство, как легко проверить, имеет место с вероятностью единица. Поэтому, беря математические ожидания обеих частей последнего равенства, получаем:

$$E(\chi(V_Q)) = 1 - E(\operatorname{Deg} Q') = 1 - E(\operatorname{Deg} P').$$

Остается добавить, что, согласно основному результату из [11], в нашей ситуации математическое ожидание $E(\chi(V_Q))$ равно введенному выше числу $M_n(m)$, поскольку параметр рассматриваемого случайного полинома равен $m$. Это завершает доказательство.

На самом деле, из доказательства видно, что достаточно требовать, чтобы лидер $P^* \in H^m(\mathbb{R}^{n+1})$ был сферически инвариантным случайным полиномом, а коэффициенты членов меньшей степени могут иметь произвольные нормальные распределения. Ответ может быть вновь выражен через параметр $P^*$ по аналогичной формуле.

Используя эту формулу, легко подсчитать $E(\operatorname{Deg} P')$ для малых нечетных $n$. Например, полагая $n = 1$, мы получаем, что средняя градиентная степень гауссова случайного полинома на плоскости равна $1 - \sqrt{m}$, что согласуется с асимптотическим результатом, полученным в [41].

Поскольку эйлерова характеристика равна нулю для всех компактных нечетномерных многообразий, вышеприведенное рассуждение не проходит для четного $n$. Чтобы оценить интересующий нас инвариант в этом случае, приходится рассматривать среднюю абсолютную степень градиента $E(|\operatorname{Deg} P'|)$. Используя аддитивность эйлеровой характеристики, можно оценить этот инвариант в любой размерности и найти его асимптотику при $m \to \infty$.

**Теорема 9.2.** *Математическое ожидание абсолютной градиентной степени $E(|\operatorname{Deg} P'|)$ удобного гауссова случайного полинома алгебраической степени $m$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ асимптотически эквивалентно $n^{-1}m^{\frac{n}{2}}$ при $m \to \infty$.*

Как уже отмечалось, задача вычисления средней степени общего случайного векторного поля не решена и представляется достаточно трудной. Другая нерешенная задача — вычислить эйлерову характеристику проективизированных слоев случайного однородного полиномиального отображения. Это не сделано даже для квадратичных отображений. Решение этой задачи имело бы интересные следствия, например, можно было бы найти среднюю эйлерову характеристику конфигурационного пространства случайного плоского многоугольника, изучавшуюся в восьмом параграфе, и средний коэффициент зацепления случайных кривых в $\mathbb{R}^3$. Как показывают недавние результаты А. Макленнана [44], некоторые продвижения в этих задачах возможны для специальных сферически инвариантных распределений коэффициентов.

Существует много других задач такого типа, которые интересны уже в малых размерностях. Например, можно попробовать найти среднее число комплексных точек (см. [39]) или омбилических точек (см. [24]) для гауссова нормального полинома на плоскости. Похоже, что описанные выше методы и результаты будут полезны при исследовании обеих последних задач (ср. [22, 23]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Аграчев А., Гамкрелидзе Р.* Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлерова характеристика множества уровня // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1989. — *35*. — С. 179–239.
2. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. — Новосибирск: Наука, 1979. — 366 с.
3. *Арнольд В. И.* Индекс особой точки векторного поля, неравенство Петровского — Олейника и смешанные структуры Ходжа // Функц. анал. и его прил. — 1978. — *12*. — С. 1–14.
4. *Арнольд В. И.* Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей // Успехи мат. наук. — 1979. — *34*, № 2. — С. 3–38.
5. *Арнольд В., Варченко А., Гусейн-Заде С.* Особенности диференцируемых отображений, т. 1. — М.: Наука, 1982.
6. *Ибрагимов И., Подкорытов С.* О случайных алгебраических поверхностях // Докл. РАН. — 1995. — *343*. — С. 734–736.
7. *Крейн М., Наймарк М.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории разделения корней алгебраических полиномов. — Харьков: ГНТИ, 1936
8. *Одесский А., Рубцов В.* Полиномиальные пуассоновы алгебры с регулярной структурой симплектических листов // Теор. мат. физ. — 2002. — *133*. — С. 3–23.
9. *Паламодов В. П.* О кратности голоморфного отображения // Функц. анал. и его прил. — 1967. — *1*. — С. 54–65.
10. *Паламодов В. П.* Замечания о дифференцируемых отображениях // Функц. анал. и его прил. — 1972. — *6*. — С. 52–61.
11. *Подкорытов С.* Среднее значение эйлеровой характеристики случайных алгебраических гиперповерхностей // Алгебра и анал. — 1999. — *11*. — С. 185–193.
12. *Постников М.* Устойчивые полиномы. — М.: Наука, 1982.
13. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера // Функц. анал. и его прил. — 1982. — *16*, № 4. — С. 27–34.
14. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. Представления квантовой алгебры // Функц. анал. и его прил. — 1983. — *17*, № 4. — С. 34–38.
15. *Трофимов В., Фоменко А.* Алгебра и топология интегрируемых гамильтоновых систем. — М.: Факториал, 1995.
16. *Химшиашвили Г.* О локальной степени гладкого отображения // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1977. — *85*. — С. 31–34.
17. *Химшиашвили Г.* Эйлерова характеристика многообразия и особые точки гладких функций // Труды Тбилис. мат. инст. А. Размадзе. — 1982. — *85*. — С. 123–141.
18. *Химшиашвили Г.* О конфигурационных пространствах плоских пятиугольников // Науч. зап. семин. СПб отд. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2002. — *292*. — С. 121–128.
19. *Хованский А.* Индекс полиномального векторного поля // Функц. анал. и его прил. — 1979. — *13*. — С. 49–58.
20. *Цих А.* Многомерные вычеты и их приложения. — Новосибирск: Наука, 1998.
21. *Ширяев А.* Вероятность. — М.: Наука, 1976.
22. *Aliashvili T.* Topological invariants of random polynomials // Banach Center Publ. — 2004. — *62*. — С. 19–28.
23. *Aliashvili T.* Counting real roots of polynomial endomorphisms // J. Math. Sci. — 2003. — *118*. — С. 5325–5346.
24. *Berry M., Hannay J.* Umbilic points of Gaussian random surfaces // J. Phys. A: Math. Gen. — 1977. — *10*. — С. 1809–1821.
25. *Bharucha-Reid A., Sambandham M.* Random polynomials. — New York: Academic Press, 1980.
26. *Bochnak J., Coste M., Roy M.-F.* Géometrie algébrique réelle. — Berlin: Springer, 1990.
27. *Bruce J.* Euler characteristics of real varieties // Bull. London Math. Soc. — 1990. — *22*. — С. 213–219.
28. *Castellanos Vargas V.* The index of non algebraically isolated singularities // Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 2002. — *8*. — С. 141–147.
29. *Edelman A., Kostlan E.* How many roots of a random polynomial are real? // Bull. Amer. Math. Soc. — 1995. — *32*. — С. 1–37.

30. *Eisenbud D., Levine H.* An algebraic formula for the degree of a $C^\infty$ map-germ // Ann. of Math. — 1977. — *106*. — С. 19–38.
31. *Greuel G.-M., Hamm H.* Invarianten quasihomogener Durchschnitte // Invent. Math. — 1978. — *49*. — С. 67–86.
32. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry. — New York: J. Wiley and Sons, 1978.
33. *Hirsh M.* Differential topology. — Berlin: Springer, 1976.
34. *Kac M.* On the average number of real roots of a random algebraic equation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — *49*. — С. 314–320.
35. *Kamiyama Y.* The Euler characteristic of the moduli space of polygons in higher-dimensional Euclidean space // Kyushu J. Math. — 2000. — *54*. — С. 333–369.
36. *Kapovich M., Millson J.* On the moduli spaces of polygons in the Euclidean plane // J. Diff. Geom. — 1995. — *42*. — С. 133–164.
37. *Kapovich M., Millson J.* Universality theorems for configuration spaces of planar linkages // Topology. — 2002. — *41*. — С. 1051–1107.
38. *Khimshiashvili G.* On the cardinality of a semi-algebraic subset // Georgian Math. J. — 1994. — *1*. — С. 511–521.
39. *Khimshiashvili G.* Signature formulae for topological invariants // A. Razmadze Math. Inst. Proc. — 2001. — *125*. — С. 1–121.
40. *Khimshiashvili G., Przybysz R.* On certain super-integrable Hamiltonian systems // J. Dyn. and Contr. Syst. — 2002. — *8*. — С. 217–244.
41. *Khimshiashvili G., Ushveridze A.* On the average topological degree of random polynomials // Bull. Georgian Acad. Sci. — 1999. — *159*. — С. 385–388.
42. *Lang S.* Algebra. — Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
43. *Lecki A., Szafraniec Z.* An algebraic method for calculating the topological degree // Banach Center Publ. — 1996. — *35*. — С. 73–83.
44. *McLennan A.* The expected number of real roots of a multihomogeneous system of polynomial equations // Amer. J. Math. — 2002. — *124*. — С. 49–73.
45. *Nakanishi N.* Poisson cohomology of plane quadratic Poison structures // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1997. — *33*. — С. 73–89.
46. *Nash J.* Real algebraic manifolds // Ann. of Math. — 1952. — *56*. — С. 405–421.
47. *Przybysz R.* On one class of exact Poisson structures // J. Math. Phys. — 2001. — *42*. — С. 1913–1920.
48. *Scheja G., Storch U.* Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten // J. Reine Angew. Math. — 1975. — *278/279*. — С. 174–190.
49. *Shub M., Smale S.* Complexity of Bezout's theorem. II: Volumes and probabilities // Progr. Math. — 1993. — *109*. — С. 267–285.
50. *Spanier E.* Algebraic topology. — New York: McGraw-Hill, 1966.
51. *Szafraniec Z.* On the Euler characteristic of analytic and algebraic sets // Topology. — 1986. — *25*. — С. 411–414.
52. *Szafraniec Z.* The Euler characteristic of algebraic complete intersections // J. Reine Angew. Math. — 1989. — *397*. — С. 194–201.
53. *Thurston W.* Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere // Geom. Topol. Monogr. — 1998. — *1*. — С. 511–549 (electronic).
54. *Vaisman I.* Lectures on the geometry of Poisson manifolds. — Boston: Birkhäuser, 1994.

Г. Химшиашвили
Математический институт им. А. М. Размадзе, АН Грузии

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 121–141

УДК 517.544

# ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ

© 2004 г. **Н. МАНДЖАВИДЗЕ**

Аннотация. Дается обзор теории граничных задач на плоскости с криволинейными разрезами. Задачи линейного сопряжения, Римана — Гильберта, Римана — Гильберта — Пуанкаре рассматриваются как в классической постановке, так и в случае плоскости с разрезами, включая задачи со сдвигами. Основное внимание уделяется условиям разрешимости и формулам индекса в различных функциональных классах.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . . 121
1. Основные определения и обозначения . . . . . 122
2. Задачи линейного сопряжения и системы сингулярных интегральных уравнений . . . . 125
3. Задачи линейного сопряжения со сдвигом . . . . . 128
4. Задача Римана — Гильберта на плоскости с разрезами . . . . . 129
5. Дифференциальные граничные задачи на плоскости с разрезами . . . . . 130
6. Заключительные замечания . . . . . 136
Список литературы . . . . . 139

## Введение

К настоящему времени опубликованы многочисленные исследования по теории граничных задач на плоскости. В частности, классические задачи линейного сопряжения, задачи типа Римана — Гильберта, дифференциальные задачи, одномерные сингулярные интегральные уравнения и их приложения к задачам математической физики были подробно изучены в [8, 9, 12, 52, 65] (мы ограничиваемся указанием на некоторые фундаментальные первоисточники).

В дальнейшем появилось много модификаций и обобщений этих классических задач (см., например, [5,39,41,53,59]). В данной работе мы сосредоточимся на недавних продвижениях в теории задач в плоскости с разрезами и задач со смещением (сдвигом), которые оказались очень важными во многих прикладных задачах (см., например, [24, 28]). Мы в основном придерживаемся линии развития, предложенной в [24, 28], связывая ее с некоторыми современными исследованиями [4, 41, 51, 57].

Систематические исследования по теории задач линейного сопряжения со сдвигом для аналитических функций начались после появления работ [19,20]. В последние годы появилось много работ, касающихся различных аспектов этой теории (см., например, [5, 9, 15, 24, 28, 31, 36, 39] и библиографию в [23]). Более того, выяснилось, что многие аспекты этой теории могут быть обобщены на подобные задачи в классах гипераналитических и обобщенно аналитических функций [1,37,48,53]. Применения задач сопряжения со смещением в теории упругости можно найти в работах [2,24,38].

Значительно меньше известно о подобных задачах в случае плоскости с криволинейными разрезами (в этом случае для краткости будем говорить о *плоскости с разрезами*). Такие задачи имеют большое значение для приложений в теории упругости [2], теории трещин [14] и во многих других вопросах математической физики и техники (см., например, [64]). По этой причине автор в последнее время продолжил исследования в направлении, предложенном в [9, 19, 24, 39]. Выяснилось, что основные результаты классической теории, такие как необходимые и достаточные условия разрешимости и формулы индекса, могут быть обобщены на случай задач на плоскости с разрезами [30, 61, 62].

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

Целью настоящей работы является представление полученных результатов вместе с их классическими аналогами для того, чтобы подчеркнуть существующий параллелизм между классической теорией и граничными задачами на плоскости с разрезами. Сначала мы приводим некоторые понятия и обозначения. Во втором разделе мы достаточно подробно рассматриваем задачу линейного сопряжения с кусочно-непрерывными коэффициентами.

Мы приводим условия разрешимости и формулу индекса (теоремы 2.1 и 2.2) и аналогичный результат для систем сингулярных интегральных уравнений (теорема 2.3). В третьем разделе мы приводим аналогичные результаты для задач линейного сопряжения со сдвигом (теорема 3.2). В четвертом разделе кратко обсуждается тесно связанная с ними задача Римана — Гильберта.

Последние два раздела посвящаются граничным задачам на плоскости с разрезами. Сначала мы рассматриваем несколько дифференциальных задач типа задачи Римана — Гильберта — Пуанкаре и описываем их приведение к задачам, рассмотренным выше. В заключение мы приводим в общих чертах теорию Фредгольма для задач линейного сопряжения и дифференциальных граничных задач со сдвигом на плоскости с разрезами.

## 1. Основные определения и обозначения

Мы будем в основном придерживаться обозначений и терминов, принятых в [3, 8, 9, 24, 52, 53, 59, 63, 65, 69]. Пусть $S$ — некоторое множество на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Если функция $f = f(z)$, определенная на $S$, удовлетворяет условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant A|z_1 - z_2|^{\mu}, \quad z_1, z_2 \in S, \tag{$H$}$$

где постоянные $A$ и $\mu$ не зависят от $z_1, z_2$ ($A \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$), то будем говорить, что $f(z)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ (т.е. условию Гёльдера с показателем $\mu$).

Класс функций, удовлетворяющих условию $(H)$ (постоянная $A$ не фиксирована), будем обозначать через $H_\mu(S)$. Очевидно, функции этого класса $H(S)$ — непрерывные функции; поэтому иногда функции этого класса будем называть функциями, непрерывными по Гёльдеру.

Если $S$ — область, то через $C^m(S)[H^m_\mu(S)]$ будем обозначать класс всех функций, удовлетворяющих условиям

$$f \in C(\bar{S})[f \in H(S)], \quad \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k} \in C(S)[H_\mu(S)], \quad k = 0, ..., m.$$

Рассмотрим множество функций $f(z) = f(x, y)$, определенных и измеримых в области $S$ и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_S |f(z)|^p dxdy < \infty, \quad p \geqslant 1.$$

Класс функций, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $L_p(\bar{S})$; через $L_p(\bar{S})$ будем обозначать также банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\iint\limits_S |f(z)|^p dxdy\right)^{1/p}.$$

Через $L_p(S)$ будем обозначать класс функций, суммируемых в степени $p$ на каждом замкнутом подмножестве области $S$.

Пусть $\Gamma$ — простая спрямляемая кривая $z = z(s)$, где $s$ — дуговая абсцисса, $0 \leqslant s \leqslant \ell$, $\ell$ — длина кривой. Мы будем говорить, что $\Gamma$ принадлежит классу $C^m$, если производные функции $z(s)$ по $s$ до порядка $m$ включительно непрерывны на сегменте $[0, \ell]$ (предполагается, что если $\Gamma$ замкнута, то $z^{(k)}(0) = z^{(k)}(\ell)$, $k = 1, ..., m$); если, кроме того, производная $z^{(m)}(s) \in H_\mu([0, \ell])$, то скажем, что $\Gamma$ принадлежит классу $H^m_\mu$. Кривые класса $C^1$ будем называть гладкими кривыми. Кусочно-гладкими кривыми будем называть кривые, состоящие из конечного числа гладких кривых. Если граница области $D$ состоит из конечного числа простых замкнутых кривых класса $C^m[H^m_\mu]$, то будем писать $D \in C^m[D \in H^m_\mu]$.

Пусть $\Gamma$ — простая кривая, $c_1$, $c_2$, ... $c_r$ — точки $\Gamma$, расположенные в том порядке, в каком мы их встречаем, обходя $\Gamma$ в положительном направлении. Обозначим через $C_0(\Gamma, c_1, ..., c_r)$ класс

функций, непрерывных на $\Gamma$, за исключением быть может точек $c_k$, где они могут иметь разрывы первого рода; такие функции будем называть кусочно-непрерывными.

Мы скажем, что функция $f$ принадлежит классу $H_0^\mu(\Gamma, c_1, ..., c_r)$, если $f \in C_0(\Gamma, c_1, ..., c_r)$ и если на каждой из замкнутых дуг $c_k c_{k+1}$ функция $f$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, при условии, что ей приписываются значения $f(c_k + 0)$ и $f(c_{k+1} - 0)$ в точках $c_k$ и $c_{k+1}$ $(k = 1, ..., r, \ \ c_{k+1} = c_1)$.

Обозначим через $C_0(\Gamma)$ $[H_0(\Gamma)]$ объединение классов $C_0(\Gamma, c_1, ..., c_r)$ $[H_0^\mu(\Gamma, c_1, ..., c_r)]$, $0 < \mu \leqslant 1$. Если функция $f(t)$, заданная на $\Gamma$, допускает представление

$$f(t) = f_0(t) \prod_{k=1}^{r} |t - c_k|^{-\alpha}, \ \ c_k \in \Gamma, \ \ f_0(t) \in H_0(\Gamma), \ \alpha < 1,$$

то мы скажем, что $f(t)$ принадлежит классу $H^*(\Gamma)$. Если $\prod\limits_{k=1}^{r} |t - c_k|^{\varepsilon} f(t) \in H(\Gamma)$ при сколь угодно малом положительном $\varepsilon$, то $f(t)$ принадлежит классу $H_\varepsilon^*(\Gamma)$.

Пусть $\Gamma$ — спрямляемая кривая , $0 \leqslant s \leqslant \ell$, $f(t)$ — функция, определенная на $\Gamma$. Если функция вещественного переменного $f(t(s))$ измерима (суммируема) на сегменте $[0, \ell]$, то мы скажем, что $f(t)$ измерима (суммируема) на $\Gamma$; в случае суммируемости $f(t)$ интеграл определим равенством

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)dt = \int\limits_{0}^{\ell} f(t(s))t'(s)ds.$$

Пусть $\rho(t) \geqslant 0$, $f(t)$ — измеримые функции, определенные на $\Gamma$. Если $\rho(t)|f(t)|^p$ $(p \geqslant 1)$ — суммируемая на $\Gamma$ функция, то скажем, что $f(t)$ принадлежит классу $L_p(\Gamma, \rho)$; вместо $L_p(\Gamma, 1)$ будем писать $L_p(\Gamma)$. Через $L_p(\Gamma, \rho)$ будем обозначать банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p(\Gamma,\rho)} = \left( \int\limits_{\Gamma} \rho(t)|f(t)^p|dt \right)^{1/p}$$

Пространства $L_p(\Gamma, \rho)$ и $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

т.е. $q = p/(p-1)$, будем называть сопряженными пространствами.

В качестве весовой функции в этой работе, как правило, будем рассматривать функцию вида

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{r} |t - t_k|^{\nu_k}, \ \ t_k \in \Gamma, \ -1 < \nu_k < p - 1, \ p > 1. \qquad (W)$$

Легко видеть, что в этом случае $L_p(\Gamma, \rho) \subset L_\lambda(\Gamma)$ при некотором $\lambda > 1$.

Пусть $\Gamma$ — конечная совокупность простых гладких кривых на плоскости комплексного переменного $z$. Пусть $\phi(z)$ — функция, заданная и непрерывная в окрестности $\Gamma$, кроме, быть может, точек самой $\Gamma$. Пусть $t$ — некоторая точка $\Gamma$, не совпадающая с угловыми, концевыми точками и точками самопересечения (если такие точки имеются). Мы будем говорить, что функция $\phi(z)$ непрерывно продолжима в точку $t$ слева (или справа), если $\phi(z)$ стремится к определенному пределу $\phi^+(t)$ $[\phi^-(t)]$, когда $z$ стремится к $t$ по любому пути, оставаясь слева (или справа) от $\Gamma$. Если упомянутый предел существует, когда $z$ стремится к $t$ по любому некасательному пути, оставаясь слева (справа) от $\Gamma$, то мы скажем, что $\phi(z)$ имеет угловое граничное значение $\phi^+(t)[\phi^-(t)]$.

Под кусочно-голоморфной функцией $\phi$ будем понимать функцию, голоморфную на разрезанной вдоль $\Gamma$ плоскости (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки), непрерывно продолженную на $\Gamma$ слева и справа всюду, кроме, быть может, конечного множества точек $c_k$; вблизи этих точек $\phi(z)$ должна допускать оценку

$$|\phi(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z - c_k|^\alpha}, \ \ 0 \leqslant \alpha < 1.$$

В точке $z = \infty$ функция может иметь полюс.

Запись $A \in K$, где $A$ — матрица, а $K$ — класс функций, означает, что каждый элемент матрицы $A_{\alpha\beta}$ принадлежит классу $K$. Если $K$ — некоторое линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_K$, то $\|A\|_K = \max\limits_{\alpha,\beta} \|A_{\alpha\beta}\|_K$. Матрицу $A$ размера $(n \times 1)$ иногда будем называть вектором и, для удобства, будем писать в виде строки $A = (A_1, ..., A_n)$.

Пусть $D$ — односвязная область расширенной комплексной плоскости, ограниченная спрямляемой жордановой кривой $\Gamma$. Класс $E_p(D)$, $p > 0$, по определению, — это множество функций, аналитических в $D$, для которых существует последовательность областей $D_k$ со спрямляемыми границами $\Gamma_k$, удовлетворяющая условиям

$$\overline{D}_k \subset D, \;\; D_k \subset D_{k+1}, \;\; \bigcup_k D_k = D, \; \sup \int\limits_{\Gamma_k} |f(z)|^p |dz| < \infty.$$

Пусть $\Gamma$ — простая замкнутая спрямляемая кривая, ограничивающая конечную область $D^+$ и бесконечную область $D^-$ (область $D^+$ остается слева при движении вдоль $\Gamma$ в положительном направлении); интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t - z}, \quad f(t) \in L_1(\Gamma) \tag{C}$$

имеет почти всюду на $\Gamma$ угловые граничные значения $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ из $D^+$ и $D^-$ (слева и справа от $\Gamma$).

Обозначим через $E_p^{\pm}(\Gamma)$, $p \geqslant 1$ ($E_p^{\pm}(\Gamma, \rho)$), где $\rho$ — функция вида $(W)$, класс функций $\phi(z)$, представленных в виде

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{t - z} + P(z), \;\; f \in L_p(\Gamma) \; (L_p(\Gamma, \rho)), \tag{E}$$

где $P(z)$ — некоторый полином, $\Gamma$ — простая спрямляемая кривая.

Обозначим через $E_{p,0}^{\pm}(\Gamma)$ $[E_{p,0}^{\pm}(\Gamma, \rho)]$ класс функций вида $(E)$, для которых $P(z) = 0$. Через $E_{\infty}^{\pm}(\Gamma)$ обозначим пересечение

$$\bigcap_{p>1} E_p^{\pm}(\Gamma) \;\; (\bigcap_{p>1} E_{p,0}^{\pm}(\Gamma)).$$

Для функций класса $E_p^{\pm}(\Gamma)$ справедливы следующие утверждения:

а) если $\phi(z) \in E_1^{\pm}(\Gamma)$ и $\phi^+(t) = \phi^-(t)$ почти всюду на $\Gamma$, то $\phi(z)$ некоторый полином;

б) если $\phi(z) \in E_p^{\pm}(\Gamma)$, $p > 1$, $\Gamma \in \mathbb{R}$, то $\phi(z) \in E_p(D^+)$, $\phi(z) - P(z) \in E_p(D^-)$.

Очевидно, если

$$\phi_1(z) \in E_p(D^+), \;\; \phi_2(z) \in E_p(D^-), \;\; p \geqslant 1,$$

то функция

$$\phi(z) = \begin{cases} \phi_1(z), & z \in D^+, \\ \phi_2(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

принадлежит классу $E_p^{\pm}(\Gamma)$;

в) пусть $\phi_1(z) \in E_p^{\pm}(\Gamma, \rho)$, $\phi_2(z) \in E_q^{\pm}(\Gamma, \rho^{1-q})$. Тогда

$$\phi_1(z)\phi_2(z) \in E_1^{\pm}(\Gamma);$$

г) если $\phi(z) \in E_1^{\pm}(\Gamma)$, то $\phi(z) \in E_{1-\varepsilon}(D^+)$, $\phi(z) \in E_{1-\varepsilon}(D^-)$ при малом положительном $\varepsilon$.

Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $A$ — линейный ограниченный оператор, переводящий $X$ в $Y$. Оператор $A$ называется фредгольмовым, если

а) образ оператора $A$ в $Y$ замкнут (оператор $A$ нормально разрешим по Хаусдорфу);

б) нуль-пространства (ядра) $N = \{x \in X, \; Ax = 0\}$ и $N^*\{f \in Y^* : A^*f = 0\}$ — конечномерные подпространства ($A^*$ — сопряженный оператор, $X^*$ и $Y^*$ — сопряженные пространства).

Индексом фредгольмова оператора $A$ называется разность $\ell - \ell^*$, где $\ell$ и $\ell^*$ обозначают, соответственно, размерности подпространств $N$ и $N^*$.

## 2. Задачи линейного сопряжения и системы сингулярных интегральных уравнений

Предположим, что $\Gamma$ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая; на $\Gamma$ заданы две матрицы $a(t)$ и $b(t)$ размера, соответственно, $(n\times n)$ и $(n\times l)$; $a(t)$ — кусочно-непрерывная матрица, $\inf|\det a(t)|>0, b(t)\in L_p(\Gamma,\rho), p>1$, а весовая функция $\rho$ имеет вид

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{r}|t-t_k|^{\nu_k},\quad t_k\in\Gamma,\quad -1<\nu_k<p-1. \tag{1}$$

Множество $\{t_k\}$ содержит все точки разрыва матрицы; оно может содержать также другие точки $\Gamma$. Под граничной задачей линейного сопряжения понимается следующая задача: требуется найти матрицу $\Phi(z)$ размера $(n\times l)$ класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$, угловые граничные значения которой удовлетворяют почти всюду на $\Gamma$ условию

$$\Phi^+(t)=a(t)\Phi^-(t)+b(t). \tag{2}$$

Будем говорить, что квадратная матрица $\chi(z)$ порядка $n$ является нормальной матрицей для граничной задачи 2 (или для матрицы $a(t)$), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\chi(z)\in E_q^{\pm}(\Gamma,\rho),\quad \chi^{-1}(z)\in E_p^{\pm}(\Gamma,\rho^{1-q}),\quad q=\frac{p}{p-1},\quad \chi^+(t)=a(t)\chi^-(t)$$

почти всюду на $\Gamma$.

Нормальную матрицу, которая имеет нормальную форму на бесконечности, т.е. для которой предел $\lim\limits_{z\to\infty}(z^{-\sigma}\det\chi(z))$ ($\sigma$ — сумма порядков столбцов $\chi(z)$) конечен и отличен от нуля, будем называть канонической матрицей. В связи с тем, что можно рассматривать различные классы $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$, мы будем говорить о канонических (нормальных) матрицах класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$.

Если для данной матрицы $a(t)$ существует каноническая матрица класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$, то будем говорить, что $a(t)$ факторизуема в этом классе. Нетрудно доказать следующее предложение.

**Предложение 2.1** (см. [9]). *Если $\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$ — нормальные (в частности, канонические) матрицы задачи* (2) *одного и того же класса, то*

$$\chi_1(z)=\chi_2(z)P(z),$$

*где $P(z)$ — полиномиальная матрица с постоянным отличным от нуля определителем.*

Следовательно, определители всевозможных нормальных (канонических) матриц данного класса задачи (2) имеют на бесконечности один и тот же порядок. Это дает возможность определить индекс (суммарный индекс) задачи (2) в классе $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$ (или индекс класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$ матрицы $a(t)$) как порядок на бесконечности определителя нормальной (канонической) матрицы данного класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$, взятый с обратным знаком [65].

Имея нормальную матрицу $\chi(z)$ (некоторого класса), мы придем к канонической матрице, умножив $\chi(z)$ справа на подобранную соответствующим образом полиномиальную матрицу с постоянным, отличным от нуля, определителем. Пусть $\chi(z)$ — каноническая матрица для $a(t)$ (данного класса). Обозначим через $-\zeta_1,\dots,-\zeta_n$ порядки на бесконечности столбцов $\chi(z)$. Целые числа $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ называют частными индексами матрицы $a(t)$ или граничной задачи (2) (данного класса). Сумма $\zeta_1+\zeta_2+\dots+\zeta_n$ равна индексу $a(t)$ (или задачи (2) данного класса) [9].

Заметим, что если $\chi(z)$ — каноническая матрица класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$ для матрицы $a(t)$, то матрица $[\chi'(z)]^{-1}$ будет канонической матрицей класса $E_q^{\pm}(\Gamma,\rho^{1-q})$ для матрицы $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho^{1-q})$.

Следующий результат является фундаментальным во всей теории.

**Теорема 2.1** (см. [26,28]; ср. [47,51,59]). *Пусть $a(t)$) — кусочно-непрерывная неособая матрица с точками разрыва $t_k$ $(k=1,\dots,r)$ и пусть $\lambda_{kj}$ $(k=1,\dots r, j=1,\dots,n)$ — корни уравнения*

$$\det[a^{-1}(t_{k-0})a(t_{k+0})-\lambda I]=0,$$

*и обозначим $\mu_{kj}=\arg\lambda_{kj}/2\pi$ и $0\leqslant\arg\lambda_{kj}<2\pi$.*

*Если выполнены неравенства*

$$\frac{1+\nu_k}{p}\neq\mu_{kj} \tag{3}$$

*то каноническая матрица задачи* (2) *класса* $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$ *существует и все решения задачи* (2) *даются формулой*

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{[\chi^{+}(t)]^{-1}b(t)dt}{t-z}+\chi(z)P(z), \tag{4}$$

*где* $P(z)$ *— произвольная полиномиальная* $(n\times l)$*-матрица.*

*Индекс матрицы* $a(t)$ *этого класса вычисляется по формуле*

$$\zeta=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det a(t)}{\prod\limits_{k=1}^{r}(t-z_0)^{\sigma_k}}\right]_{\Gamma}, \tag{5}$$

*где* $\sigma_k=\sum\limits_{j=1}^{r}\rho_{kj}$ *и*

$$1<\operatorname{Re}\rho_{kj}\leqslant 0,\quad \textit{если}\quad \mu_{kj}<\frac{1+\nu_k}{p},$$
$$0\leqslant\operatorname{Re}\rho_{kj}<1,\quad \textit{если}\quad \mu_{kj}>\frac{1+\nu_k}{p},\qquad \rho_{kj}=-\frac{1}{2\pi}\ln\lambda_{kj}.$$

Здесь $(z-z_0)^{\sigma_k}$ — однозначная ветвь, определенная на всей плоскости, разрезанной вдоль линии $l_k$, соединяющей точку $z_0\in D^{+}$ с точкой $t_k$ и потом $\infty$. Символ $[\quad]_{\Gamma}$ обозначает приращение выражения, содержащегося в скобках при обходе $\Gamma$ в положительном направлении.

**Теорема 2.2.** *При соблюдении условий* (3) *необходимым и достаточным условием разрешимости задачи* (2) *в классе* $E_{p,0}^{\pm}(\Gamma,\rho)$ *является выполнение условий*

$$\int\limits_{\Gamma}b(t)\Psi^{+}(t)dt=0, \tag{6}$$

*где* $\Psi(z)$ *— произвольное решение союзной однородной задачи класса* $E_{q,0}^{\pm}(\Gamma,\rho^{1-q})$.

**Замечание 2.1.** Если $a(t)\in C(\Gamma),\det a(t)\neq 0$, то существует каноническая матрица $\chi(z)$ некоторого класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$, обладающая следующими свойствами: $\chi(z)\in E_p^{\pm}(\Gamma)$, $\chi^{-1}(z)\in E_p^{\pm}(\Gamma)$ для некоторого $p$. Если $a(t)\in H(\Gamma)$, то $\chi^{\pm}(t)\in H(\Gamma)$, $[\chi^{\pm}(t)]^{-1}\in H(\Gamma)$.

Теперь мы кратко опишем хорошо известную связь между граничной задачей линейного сопряжения и сингулярными интегральными уравнениями [9, 65]. Вспомним, что так называемая характеристическая система сингулярных интегральных уравнений имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta=1}^{n}[A_{\alpha\beta}(t_0)\varphi_\beta(t_0)+\frac{B_{\alpha\beta}(t_0)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_\beta(t)dt}{t-t_0}]=f_\alpha(t_0),\ \ \alpha=1,...,n, \tag{7}$$

где $A_{\alpha\beta},\ B_{\alpha\beta}$ — заданные на $\Gamma$ кусочно-непрерывные функции, $f_\alpha$ — заданные на $\Gamma$ функции класса $L_p(\Gamma,\rho)$. Решение системы (7) будем разыскивать в классе $L_p(\Gamma,\rho)$.

Введя матрицы и векторы

$$A=(A_{\alpha\beta}),\ \ B=(B_{\alpha\beta}),\ \ \varphi=(\varphi_1,...,\varphi_n),\ \ f=(f_1,...,f_n),$$

мы можем записать (7) в виде

$$K^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt=f(t_0). \tag{8}$$

Пусть $\varphi$ — решение уравнения (7). Обозначим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt. \tag{9}$$

Тогда имеем

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0). \tag{10}$$

Подставляя эти значения в уравнение (8), получаем

$$S(t)\Phi^+(t) = D(t)\Phi^-(t) + f(t), \tag{11}$$

где $S = A + B, \;\; D = A - B$. Пусть

$$\inf|\det S(t)| > 0, \inf|\det D(t)| > 0, \;\; t \in \Gamma. \tag{12}$$

Тогда

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t), \tag{13}$$

где $a = S^{-1}D, \;\; b = S^{-1}f$.

Таким образом, уравнение (8) свелось к граничной задаче (13): каждому решению уравнения (8) класса $L_p(\Gamma,\rho)$, согласно формуле (9), отвечает решение задачи (13) класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$, а каждому такому решению задачи (13) по формуле (10) отвечает решение уравнения (8) класса $L_p(\Gamma,\rho)$.

Эта связь между уравнениями и граничной задачей (2) позволяет установить следующее предложение [28, 59].

**Теорема 2.3.** *Пусть соблюдены условия* (12), (3). *Для разрешимости уравнения* (8) *в классе* $L_p(\Gamma,\rho)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_\Gamma f(t)\psi(t)dt = 0, \tag{14}$$

*где* $\Psi(z)$ *— произвольное решение класса* $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$ *союзного однородного уравнения*

$$K^{0\prime}\psi = A'(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{B'(t)\psi(t)}{t-t_0}dt = 0. \tag{15}$$

*При выполнении условия* (14) *все решения уравнения* (8) *в классе* $L_p(\Gamma,\rho)$ *даются формулой*

$$\begin{gathered}\varphi(t_0) = A^*(t_0)f(t_0) - \frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{[Z(t)]^{-1}f(t)}{t-t_0}dt + B^*(t_0)Z(t_0)P(t_0),\\ A^*(t_0) = \frac{1}{2}[S^{-1}(t) + D^{-1}(t)], \;\; B^*(t) = -\frac{1}{2}[S^{-1}(t) - D^{-1}(t)],\\ Z(t_0) = S(t)\chi^+(t) = D(t)\chi^-(t),\end{gathered} \tag{16}$$

*где* $\chi(z)$ *— каноническая матрица класса* $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$ *для матрицы* $a(t) = S^{-1}D$, *а* $P(t)$ *— вектор*

$$P(t) = (P_{\zeta_1-1}, ..., P_{\zeta_n-1}),$$

*где* $P_\alpha(t)$ *обозначает произвольные степени не выше* $\alpha$, $P_\alpha(t) = 0$ *при* $\alpha < 0$.

Разность числа $l$ линейно независимых решений однородного уравнения $K^0\varphi = 0$ (в $L_p(\Gamma,\rho)$) и числа $l'$ линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K^{0\prime}\psi = 0$ (в $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$) равна индексу $\zeta$ матрицы $a = S^{-1}D$ класса $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$:

$$l - l' = \zeta.$$

Этот результат является основным для теории сингулярных интегральных уравнений. Он также необходим и в нашем случае, потому что мы сводим граничные задачи на плоскости с разрезами к сингулярным интегральным уравнениям.

**Замечание 2.2.** Используя свойства решений граничной задачи линейного сопряжения, приходим к предложению: если коэффициенты и свободный член приведенных в этом параграфе уравнений непрерывны в смысле Гёльдера, то решения любого класса также непрерывны в смысле Гёльдера, а если коэффициенты и свободные члены принадлежат классу $H_0(\Gamma)$, то решения любого класса принадлежат классу $H^*(\Gamma)$.

## 3. Задачи линейного сопряжения со сдвигом

Пусть $\Gamma_k$ $(k = 1, 2)$ — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную и бесконечную области $D_k^+$ и $D_k^-$ на плоскости комплексного переменного $z = x + \imath y$.

Рассмотрим следующую граничную задачу: найти вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in E_p^{\pm}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, угловые граничные значения которого почти всюду на $\Gamma$ удовлетворяют условию

$$\varphi^+[a(t)] = a(t)\varphi^-(t) + b(t), \tag{17}$$

где $a(t)$ — заданная на $\Gamma_1$ непрерывная неособая квадратная матрица порядка $n$; $b(t) = (b_1, ..., b_n)$ — заданный на $\Gamma_1$ вектор класса $L_p(\Gamma_1), p > 1$, $\alpha(t)$ — функция, переводящая $\Gamma_1$ в $\Gamma_2$ взаимнооднозначно с сохранением ориентации, причем $\alpha(t)$ имеет отличную от нуля непрерывную производную $\alpha'(t)$.

Квадратную матрицу-функцию порядка $n$ назовем канонической матрицей граничной задачи (17), если она обладает следующими свойствами:

1) $\chi(z), \chi^{-1}(z) \in E_\infty^{\pm}(\Gamma_1, \Gamma_2)$;

2) удовлетворяет однородному граничному условию

$$\chi^+[\alpha(t)] = \chi^-(t), \quad t \in \Gamma_1;$$

3) имеет нормальную форму на бесконечности по столбцам.

Порядок на бесконечности столбцов канонической матрицы с обратным знаком назовем частными индексами задачи (17), сумму частных индексов — индексами. В этих терминах имеет место следующая теорема [9, 65].

**Теорема 3.1.** *Для граничной задачи* (17) *существует каноническая матрица при любой непрерывной неособой матрице* $a(t)$.

В случае кусочно-непрерывных коэффициентов имеет место аналог теоремы 3.1.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $a(t)$ *— кусочно-непрерывная матрица-функция с точками разрыва* $t_k (k = 1, ..., r)$, $\inf |\det a(t)| > 0$ *и пусть* $\lambda_{kj} (k = 1, ..., r, j = 1, ..., n)$ *— корни уравнения*

$$\det[a^{-1}(t_k - 0)a(t_k + 0) - I] = 0$$

$$\mu_{kj} = \arg \lambda_{kj}/2\pi, \quad 0 \leqslant \arg \lambda_{kj} < 2\pi.$$

*Если выполнены неравенства*

$$\frac{1 + \nu_k}{p} \neq \mu_{kj},$$

*то существует каноническая матрица задачи* (17) *класса* $E_p^{\pm}(\Gamma_1, \Gamma_2, \rho)$; *индекс этого класса вычисляется по формуле*

$$\zeta = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\left[\prod_{k=1}^{r}(t - z_0)^{-\sigma_k} \det a(t)\right]\right\}_{\Gamma_1},$$

*где* $\sigma_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \rho_{kj}$, $\rho_{kj} = -\dfrac{1}{2\pi i} \ln \lambda_{kj}$;

$$-1 < \operatorname{Re} \rho_{kj} \leqslant 0 \ \textit{при} \ \mu_{kj} < (1 + \nu_k)/p,$$

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_{kj} < 1 \ \textit{при} \ \mu_{kj} > (1 + \nu_k)/p.$$

*Все решения класса* $E_p^{\pm}(\Gamma_1, \Gamma_2, \rho)$ *задачи* (17) *даются формулой*

$$\Phi(z) = \chi(z)[\varphi_0(z) + P(\omega(z))], \tag{18}$$

*где* $P$ *— произвольный полиномиальный вектор,* $\varphi_0(z)$ *— решение класса* $E_{1+\varepsilon,0}^{\pm}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ($\varepsilon$ *— достаточно малое положительное число*) *задачи*

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] = \varphi_0^-(t) + b_0(t), \quad t \in \Gamma_1, \quad b_0(t) = \{\chi^+[\alpha(t)]\}^{-1} b(t). \tag{19}$$

*Решения, исчезающие на бесконечности, даются той же формулой* (18), *в которой* $P = (P_{\zeta_1 - 1}, ..., P_{\zeta_n - 1})$, $\zeta_1 \geqslant ... \geqslant \zeta_s$ *— частные индексы задачи* (17) *класса* $E_p^{\pm}(\Gamma_1, \Gamma_2, \rho)$, $P_j(z)$ —

*произвольный полином степени $j$ ($P_j = 0$, если $j < 0$ . Если все частные индексы неотрицательны, то исчезающие на бесконечности решения существуют при любом $b(t) \in L_p(\Gamma_1, \rho)$; если $0 > \zeta_{s+1} \geqslant ... \geqslant \zeta_n$, то вектор $b(t)$ должен удовлетворять условиям*

$$\int_{\Gamma_k} t^k \rho_j^0(t) dt = 0, \quad k = 0, ..., |\zeta_j| - 1, \quad j = s+1, ..., n, \tag{20}$$

*где вектор $(\rho_1^0, ..., \rho_n^0) = \rho_0$ – решение уравнения $K(I)\rho_0 = \tilde{b_0}$ в классе $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ или $\rho_0 = L_1 b_0$.*

## 4. Задача Римана — Гильберта на плоскости с разрезами

Пусть $D$ обозначает плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, разрезанную вдоль непересекающихся простых разомкнутых ляпуновских контуров $a_k b_k$, $k = 1, \ldots, m$. Обозначим $\Gamma_k = a_k b_k$ и $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k$.

Рассмотрим функцию вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t - z} + P(z), \tag{21}$$

где $f(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$, $p > 1$, — весовая функция,

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - c_k|^{\alpha_k}, \ -1 < \alpha_k < p - 1, \ c_{2k-1} = a_k, \ c_{2k} = b_k, \ (k = 1, \ldots, m), \tag{22}$$

$P(z)$ — произвольный полином. Подкласс этого класса, состоящий из функций вида (21) при $P(z) \equiv 0$ ($P(z) \equiv \text{const}$), обозначим через $E^{\pm}_{p,0}(\Gamma, \rho)$ ($E^{\pm}_{p,c}(\Gamma, \rho)$.

Рассмотрим следующую граничную задачу: найти вектор $\Phi(z) \in E^{\pm}_{P,0}(\Gamma, \rho)$ по граничному условию

$$\text{Re}[A_\pm(t)\Phi^\pm(t)] = f^\pm(t), \tag{23}$$

которое должно выполняться почти всюду на $\Gamma$. Здесь $A_+(t)$, $A_-(t)$ — заданные на $\Gamma$ непрерывные неособые квадратные матрицы порядка $n$, $f^+(t) = (f_1^+, \ldots, f_n^+)$, $f^-(t) = (f_1^-, \ldots, f_n^-)$ — заданные на $\Gamma$ действительные векторы класса $L_p(\Gamma, \rho)$, а $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ обозначают граничные значения вектора $\Phi(z)$ слева и справа от $\Gamma$.

Наряду с задачей (23) рассмотрим следующую однородную задачу:

$$\text{Re}[A^*_\pm(t)\Psi^\pm(t)] = 0, \ t \in \Gamma, \tag{24}$$

где $A^*_\pm(t) = t'(s)[A'_\pm(t)]^{-1}$. Решение этой задачи $\Psi(z)$ разыскивается в классе $E^{\pm}_q(\Gamma, \rho^{1-q})$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Задачу (24) будем называть союзной задачей задачи (23). Из граничного условия имеем

$$\Phi^\pm(t) = [A_\pm(t)]^{-1}[f^\pm(t) + i\mu_\pm(t)], \tag{25}$$

где $\mu^+(t)$, $\mu^(t)$ — действительные векторы класса $L_p(\Gamma, \rho)$ и

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{A_+^{-1}(t)\mu^+(t) - A_-^{-1}(t)\mu^-(t)}{t - z} dt + F(z), \tag{26}$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{A_+^{-1}(t)f^+(t) - A_-^{-1}(t)f^-(t)}{t - z} dt. \tag{27}$$

Подставляя формулы (25), (26) в граничное условие (23) и вводя вектор $2n$ компонентами $\mu(t) = (\mu^+(t), \mu^-(t))$, получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$a(t_0)\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{K(t_0, t)\mu(t)}{t - t_0} dt = g(t_0), \tag{28}$$

где

$$a=\operatorname{Im}\begin{pmatrix}A_-A_+^{-1} & 0\\ 0 & -A_+A_-^{-1}\end{pmatrix},\quad K(t_0,t)=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}N_+^1 & N_-^1\\ N_+^2 & N_-^2\end{pmatrix}, \tag{29}$$

а матрицы $N_\pm^1$, $N_\pm^2$ определены формулами

$$\begin{gathered}N_\pm^1(t_0,t)=A_-(t_0)A_\pm^{-1}(t)+\overline{A_-(t_0)}\,\overline{A_\pm^{-1}(t)}h(t_0,t),\\ N_\pm^2(t_0,t)=A_+(t_0)A_\pm^{-1}(t)+\overline{A_+(t_0)}\,\overline{A_\pm^{-1}(t)}h(t_0,t),\\ g=(g^+,g^-),\ \ g^\pm=2\operatorname{Re}f^\pm-2\operatorname{Re}[A_\pm F^\pm],\ \ h(t_0,t)=\frac{t-t_0}{\overline{t}-\overline{t}_0}\overline{t}^2.\end{gathered} \tag{30}$$

Имеем

$$a(t)+b(t)=i\begin{pmatrix}\overline{A}_-\overline{A_+^{-1}} & I\\ I & A_+A_-^{-1}\end{pmatrix},$$

$$a(t)-b(t)=-i\begin{pmatrix}A_-A_+^{-1} & I\\ I & \overline{A_+}\overline{A_-^{-1}}\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$Q(t)\equiv\det(\overline{A_-}\,\overline{A_+^{-1}}A_+A_-^{-1}-I).$$

Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Если $Q(t)\neq 0$, тогда индекс задачи* (23) *в классе $E_{p,0}^\pm(\Gamma,\rho)$ равен индексу уравнения* (23) *класса $L_p(\Gamma,\rho)$ при условии, что $1+\alpha_k\neq p\,\mu_j^{(k)}$, где $\mu_j^{(k)}=\frac{\arg\lambda_j^{(k)}}{2\pi}$, $0\leqslant\arg\lambda_j^{(k)}<2\pi$, $\lambda_j^{(k)}$ — корни уравнения $\det[H(a_k)-\lambda I]=0$ или уравнения $\det[H^{-1}(b_k)-\lambda I]=0$, для нечетных и четных $k$, соответственно, $H(t)=[a(t)+b(t)]^{-1}[a(t)-b(t)]$; необходимые и достаточные условия разрешимости задачи* (23) *в классе $E_{p,0}(\Gamma,\rho)$ имеют вид*

$$\operatorname{Im}\int_\Gamma[A_+^{-1}f^+\omega_k^+(t)-A_-^{-1}(t)f^-\omega_k^-(t)]dt=0,\quad k=1,\dots,l',$$

*где $\omega_k(z)$ — полная система линейно независимых решений задачи* (3) *в классе $E_{q,0}^\pm(\Gamma,\rho^{1-q})$.*

## 5. Дифференциальные граничные задачи на плоскости с разрезами

В теории дифференциальных граничных задач для аналитических функций, содержащих граничные значения производных искомых функций, важную роль играет интегральное представление аналитических функций, построенное И. Векуа [8]. Посредством этого представления мы можем исследовать граничную задачу Римана — Гильберта — Пуанкаре. Мы рассмотрим три случая.

$1^0$. Пусть $S$ — комплексная плоскость, разрезанная вдоль простой дуги $c_1c_2\equiv\Gamma$ класса $C_\alpha^2$. Сначала рассмотрим следующую задачу: найти вектор $\Phi(z)=(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$, голоморфный в $S$, по граничному условию

$$\operatorname{Re}[a_\pm(t)\Phi'_\pm(t)+b_\pm\Phi_\pm(t)]=f_\pm(t),\ \ t\in\Gamma, \tag{31}$$

где заданные матрицы $a_\pm(t),b_\pm(t)\in H(\Gamma)$, а заданные действительные векторы $f_\pm(t)\in H^*(\Gamma)$. Здесь предполагается, что искомый вектор $\Phi(z)$ и его производная $\Phi'(z)$ непрерывно продолжимы с обеих сторон на $\Gamma$, причем $\Phi'(z)$ допускает в окрестности точек $c_k$ оценку

$$|\Phi_j(z)|\leqslant\operatorname{const}|z-c_k|^{-\alpha},\ \ 0\leqslant\alpha<1,\ \ j=1,2,\dots,n. \tag{32}$$

Пусть

$$z=\omega(\xi) \tag{33}$$

— конформное отображение области $S$ на единичный круг $D(|\xi|<1)$ с границей $\gamma$; пусть точки $c_k$ переходят в точки $d_k$ окружности $\gamma$, одна сторона $\Gamma$ — в часть $\gamma_1$ этой окружности, а другая — в

$\gamma_2$. Используя результаты С. Варшавского [70] о свойствах функции (33) и ее обратной функции $\xi = \eta(z)$, относительно нового вектора

$$\Psi(\xi) \equiv \Phi[\omega(\xi)] \tag{34}$$

получаем граничную задачу Римана — Гильберта — Пуанкаре со следующим граничным условием:

$$\mathrm{Re}[A(\sigma)\Psi'(\sigma) + B(\sigma)\Psi(\sigma)] = F(\sigma), \quad \sigma \in \gamma, \tag{35}$$

где $A(\sigma), B(\sigma), F(\sigma) \in H^*(\gamma)$ и они в явном виде выражаются через заданные матрицы $a_\pm(t)$, $b_\pm(t)$ и векторы $f_\pm(t)$.

Применяя интегральное представление И. Векуа [8] (см. также [27,28]), мы ищем решение $\Psi(\xi)$ в виде

$$\Psi(\xi) = \int\limits_\gamma \mu(\sigma) \ln\left(1 - \frac{\xi}{\sigma}\right) ds + \int\limits_\gamma \mu(\sigma) ds + iC, \tag{36}$$

где $C = (C_1, \ldots, C_n)$ — действительный постоянный вектор, $\mu(\sigma)$ — действительный вектор класса $H^*(\gamma)$, под $\ln\left(1 - \frac{\xi}{\sigma}\right)$ понимается ветвь этой функции, которая обращается в нуль при $\xi = 0$, а $\mu(\sigma)$ и $C$ однозначно определяются по $\Phi(z)$.

Внося представление (36) в граничное условие (35), для определения вектора $\mu$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$E(\sigma_0)\mu(\sigma_0) + \int\limits_\gamma H(\sigma_0, \sigma)\mu(\sigma) ds = F(\sigma_0) - k(\sigma_0)C, \tag{37}$$

где

$$\begin{gathered} k(\sigma) = \mathrm{Re}[iB(\sigma)], \ E(\sigma) = \mathrm{Re}[A(\sigma)\bar{\sigma}], \\ H(\sigma_0, \sigma) = \frac{I_m[A(\sigma_0)\bar{\sigma}]}{\Pi(\sigma - \sigma_0)} + \frac{H_0(\sigma_0, \sigma)}{|\sigma - \sigma_0|^\delta}, \quad H_0(\sigma_0, \sigma) \in H(\gamma \times \gamma), \quad 0 \leqslant \delta < 1. \end{gathered} \tag{38}$$

Отсюда мы имеем

$$S = A(\sigma_0)\bar{\sigma}_0, \ \ D = \overline{A(\sigma_0)}\sigma_0, \ \ G = S^{-1}D = \sigma_0^2[A(\sigma_0)]^{-1}\overline{A(\sigma_0)}.$$

Для того, чтобы уравнение (37) было фредгольмовым, должно выполняться условие

$$\inf |\det A(t)| > 0 \quad (\det a_+(t) \neq 0, \ \det a_-(t) \neq 0\ ). \tag{39}$$

Если обозначим через $g(\sigma)$ матрицу $[A(\sigma)]^{-1}\overline{A(\sigma)}$, а через $\lambda_{kj}$ — корни уравнения $\det[g^{-1}(d_k + 0)g(d_k - 0) - \lambda I] = 0$, то индекс уравнения (37) в классе $h_0$ равен $2n + \kappa$, где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\det g(\sigma)}{\prod\limits_{k=1}^{2} \det \overset{k}{\underset{0}{\mathrm{X}}}(\sigma)}\right]_\Gamma, \tag{40}$$

(см. [26]), где

$$\det \overset{k}{\underset{0}{\mathrm{X}}}(\sigma) = (\sigma - \xi_0)^{q_k}, \ \ q_k = \sum_{j=1}^{n} \rho_{k_j}, \ \ \rho_{k_j} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_{k_j} \ \ (-1 < \mathrm{Re}\, \rho_{k_j} \leqslant 0). \tag{41}$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (37) в классе $h_0$ имеют вид

$$\int\limits_\gamma [F(\sigma) - k(\sigma)]c\overset{j}{\nu}(\sigma) ds = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, l', \tag{42}$$

где $\overset{j}{\nu}(\sigma)$ — полная система почти всюду ограниченных линейно независимых решений союзного однородного уравнения.

Для вычисления индекса задачи (31) можно положить $B \equiv 0$. Тогда $k(\sigma) \equiv 0$, и индекс будет равен

$$n + l - l' = n + (2n + \kappa) = 3n + \kappa, \tag{43}$$

где $\kappa$ вычисляется по формуле (40). Итак, мы получили следующую теорему.

**Теорема 5.1.** *Если выполнено условие* (39)*, то задача* (31) *нормально разрешима в классе* $H^*(\Gamma)$. *В этом случае необходимые и достаточные условия разрешимости в классе* $h_0$ *имеют вид* (42)*, а индекс в этом классе вычисляется по формуле* (43).

Аналогичные задачи рассматривались в исследованиях Б. Хведелидзе [39], Н. Векуа [9] и других авторов (см., например, [1,42]). Рассмотренная задача в более общем случае будет решена ниже, но мы будем следовать иному пути. Мы приведем эту задачу к сингулярному интегральному уравнению без применения конформного отображения.

$2^0$. Во втором случае формулировка задачи такова (для наглядности рассмотрим только скалярный случай): найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в $S$, по граничному условию

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{2}[a_{\pm}^{k}(t)\Phi_{\pm}^{(k)}(t)] = f_{\pm}(t), \quad t\in\Gamma, \tag{44}$$

где $a_{\pm}^{k}(t)$ $(k=0,1,2)$ — заданные функции из $H(\Gamma)$, а правые части $f_{\pm}$ — действительные функции класса $H^*(\Gamma)$ с точками разрыва $c_k$.

Пусть неизвестная функция $\Phi(z)$ обладает следующими свойствами: $\Phi''(z)$, $\Phi'(z)$, $\Phi^{(0)}(z)=\Phi(z)$ непрерывно продолжимы на $\Gamma$ с обеих сторон за исключением точек $c_k$, и граничные значения $\Phi_{\pm}(t)$ имеют вид

$$\Phi_{\pm}''(t) = \lambda_{\pm}(t)[|t-c_1||t-c_2|]^{-\delta}, \quad 0\leqslant\delta<2, \quad \lambda_{\pm}(t)\in H(\Gamma). \tag{45}$$

Отображая область $S$ на единичную окружность $D(|\xi|<1)$ посредством функции $z=\omega(\xi)$ $(\xi=\eta(z))$, а затем применяя представление И. Векуа и вышеупомянутые рассуждения, после некоторых преобразований решение нашей задачи при условии $a_{\pm}^{2}\neq 0$ приводится к регуляризации уравнения типа Фредгольма, которую можно осуществить хорошо известными методами [46,52].

**Замечание 5.1.** Такое приведение возможно и тогда, когда граничное условие содержит производные любого порядка, однако, этот случай технически более сложен. Аналогичным образом, вышеупомянутые задачи могут быть рассмотрены в случае нескольких разрезов с помощью конформного отображения на соответствующую многосвязную область.

$3^0$. Теперь мы рассмотрим дифференциальную граничную задачу более общего вида. Пусть $D$ обозначает комплексную плоскость $z=x+\imath y$, разрезанную вдоль ляпуновских дуг $a_kb_k$ $(k=1,\ldots,p)$. Обозначим $\Gamma=a_kb_k$ и $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{p}\Gamma_k$. Рассмотрим следующую граничную задачу: найти аналитический вектор

$$\phi(z)=(\phi_1(z),\ldots,\phi_n(z))$$

по граничному условию

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}[a_{\pm}^{(k)}(t)\phi_{\pm}^{(k)}(t)] = f_{\pm}(t), \quad t\in\Gamma, \tag{46}$$

где $a_{+}^{(k)}(t), a_{-}^{(k)}(t)$ $(k=0,\ldots,m)$ — заданные квадратные матрицы порядка $n$ на $\Gamma$, $f_{+}(t)=(f_{+}^{1},\ldots,f_{+}^{n})$, $f_{-}(t)=(f_{-}^{1},\ldots,f_{-}^{n})$ — заданные действительные векторы на $\Gamma$, а $a_{+}^{(k)}(t)$, $a_{-}^{(k)}(t)$ — непрерывные по Гёльдеру матрицы-функции. Кроме того, допустим, что $f_{+}(t), f_{-}(t)$ удовлетворяют условию (ср. [52,56]):

$$f_{\pm}(t)\cdot\Pi(t)\in H^*(\Gamma), \quad \Pi(t)=\prod_{k=1}^{p}(t-a_k)^{m-1}(t-b_k)^{m-1}.$$

Уточним, что в граничном условии (46) $\phi_{+}^{(k)}(t)$, $\phi_{-}^{(k)}(t)$ обозначают граничные значения векторов

$$\frac{d^k\phi(z)}{dz^k}$$

слева и справа на $\Gamma$.

Граничное условие (46) должно выполняться всюду на $\Gamma$, кроме точек $a_k, b_k$. В окрестностях этих точек должны иметь место следующие оценки:

$$|\phi^{(m)}(z)| \leqslant \text{const} \cdot |z-c|^{-\beta}, \quad 0 \leqslant \beta < m, \quad c = a_k \text{ или } b_k. \tag{47}$$

На бесконечности $\psi(z)$ может иметь полюс

$$\phi_k(z) = q_k(z) + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где $q_k(z)$ — полиномиальный вектор.

Если мы введем новый искомый вектор

$$\psi(z) = \phi^{(m)}(z), \tag{48}$$

то

$$\left.\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{(m-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-\xi)^{m-1}\psi(\xi)d\xi + P(z), \\ \phi^{(k)}(z) &= \frac{1}{(m-k-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-\xi)^{m-k-1}\psi(\xi)d\xi + P^{(k)}(z), \\ & k = 1, \ldots, m-1, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где $z_0$ — фиксированная точка в $D$, а $P(z)$ — полиномиальный вектор степени не выше, чем $m-1$:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (z-z_0)^k, \tag{50}$$

где $c_k = (c_k^1, \ldots, c_k^n)$ — постоянные векторы, $c_k = \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(z_0)$.

В формулах (49) интегрирование производится вдоль кусочно-гладкой дуги, которая лежит в $D$ и соединяет точку $z_0$ с переменной точкой $z$. Ввиду того, что эти интегралы не зависят от путей интегрирования, должны выполняться следующие условия:

$$\int_{\lambda_j} t^k \psi(t)dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{51}$$

где $\lambda_j$ обозначает кусочно-гладкий простой замкнутый контур, который содержит дугу $\Gamma_j$, а остальные дуги $\Gamma_k$ находятся вне этого контура. Поэтому для вектора $\psi(z)$ мы получим следующее граничное условие на $\Gamma$:

$$\operatorname{Re}\left[a_{\pm}^{(m)}(t)\psi_{\pm}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_{\pm}^{(k)}(t)\rho_{\pm}^{(k)}(t)\right] = f_{\pm}(t) - \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m-1} a_{\pm}^{(k)}(t)P^{(k)}(t), \tag{52}$$

где $\rho_{\pm}^{(k)}(t)$ обозначают граничные значения вектора

$$\frac{1}{(m-k-1)!}\int_{z_0}^{z}(z-\xi)^{m-k-1}\psi(\xi)d\xi$$

с обеих сторон на $\Gamma$, а $\psi(z)$ удовлетворяет интегральным условиям (51) и оценке

$$|\psi(z)| \leqslant \text{const} \cdot |z-c|^{-\beta}, \quad c = a_k \text{ или } b_k. \tag{53}$$

Если введем новый неизвестный вектор

$$\omega(z) = \Pi(z)\psi(z), \tag{54}$$

то $\omega(z)$ будет удовлетворять оценке

$$|\omega(z)| \leqslant A|z-c|^{-\alpha}, \ \ 0 \leqslant \alpha < 1,$$

и поэтому его можно будет представить в виде

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)dt}{t-z} + Q(z), \tag{55}$$

где $Q(z)$ — полиномиальный вектор $Q(z)=\Pi(z)q^{(m)}(z)+\gamma(z)$, а $\gamma(z)$ — полиномиальный вектор степени не выше, чем $s=2p(m-1)-m-1$. Неизвестный вектор $\mu(t)$ принадлежит классу $H^*(\Gamma)$.

Подставляя (55) в граничное условие (52), получаем

$$\operatorname{Re}\left[b_\pm(t_0)\left(\pm\frac{1}{2}\mu(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(t)dt}{t-t_0}\right)\right]+L_\pm\mu=g_\pm(t_0), \tag{56}$$

где

$$g_\pm(t)=F_\pm(t)+R_\pm(t),\quad b_\pm(t)=a_\pm^{(m)}(t)\cdot\frac{|\Pi(t)|}{\Pi(t)}. \tag{57}$$

В (57) $R_\pm(t)$ линейно содержит коэффициенты вектора $Q(z)$, а в (56) $L_\pm\mu$ — вполне непрерывные операторы. Рассматривая вектор $\nu=(\operatorname{Re}\mu,\operatorname{Im}\mu)$ с $2n$ компонентами, можно (52) привести к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$A(t_0)\nu(t_0)+\frac{B(t_0)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\nu(t)dt}{t-t_0}+K\nu=g, \tag{58}$$

где

$$A=\begin{bmatrix}\operatorname{Re}b_+, & -\operatorname{Im}b_-\\ -\operatorname{Re}b_-, & \operatorname{Im}b_-\end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$B=\begin{bmatrix}\operatorname{Im}b_+, & \operatorname{Re}b_+\\ \operatorname{Im}b_-, & \operatorname{Re}b_-\end{bmatrix}, \tag{60}$$

$$g=(2g_+,2g_-), \tag{61}$$

и $K$ — вполне непрерывный оператор.

Следовательно,

$$A+B=\begin{bmatrix}b_+, & ib_+\\ -\overline{b}_-, & i\overline{b}_-\end{bmatrix},\quad A-B=\begin{bmatrix}\overline{b}_+, & -\overline{b}_+i\\ -\overline{b}_-, & -\overline{b}i\end{bmatrix}. \tag{62}$$

Легко проверить, что $\det(A+B)\neq0$, $\det(A-B)\neq0$, если $\det a_\pm^{(m)}(t)\neq0$. Рассмотрим теперь матрицы

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}b_+^{-1}, & -i\overline{b}_-^{-1}\\ -ib_+^{-1}, & -i\overline{b}_-^{-1}\end{bmatrix} \tag{63}$$

$$G(t)=(A+B)^{-1}(A-B), \tag{64}$$

и уравнения

$$\det[G(b_k-0)-\lambda I]=0, \tag{65}$$

$$\det[G(a_k+0)+\lambda I]=0. \tag{66}$$

Обозначим через $\lambda_j^k(k=1,\dots,p,\ j=1,\dots,n)$ корни уравнения (65), а через $\lambda_j^{p+k}(k=1,\dots,p,\ j=1,\dots,n)$ — корни уравнения (66), и положим

$$\mu_j^k=\frac{1}{2\pi i}\ln\lambda_j^k,\ k=1,2,\dots,2p,\ -1<\operatorname{Re}\mu_j^k\leqslant0. \tag{67}$$

Точки $a_k$ или $b_k$ называются *особыми*, если

$$\operatorname{Re}\mu_j^k=0,\ j=1,\dots,n.$$

В противном случае точки называются *неособыми*. Мы ищем решение в классе $H^*(\Gamma)$. Решение должно удовлетворять условию (51), которое имеет вид

$$\int_{\lambda_j}\tau^k[\Pi(\tau)]^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(t)dt}{t-\tau}+Q(\tau)\right)d\tau=0,\ j=1,\dots,p,\ k=0,\dots,m-1, \tag{68}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\mu(t)\left(\int_{\lambda_j}\frac{\tau^k[\Pi(\tau)]^{-1}d\tau}{t-\tau}\right)dt+\int_{\lambda_j}\tau^k[\Pi(\tau)]^{-1}Q(\tau)d\tau=0. \tag{69}$$

Поэтому $\mu(t) \in H^*(\Gamma)$ будет удовлетворять уравнению (58), правую часть которого можно представить следующим образом

$$g(t) = g_0(t) + \sum_{k=1}^{N} d_k g_k(t), \tag{70}$$

где вектор $g_0(t)$ выражается через векторы $f_+(t)$ и $f_-(t)$, $g_k(t)$ — линейно независимые векторы, а $d_k$ — произвольные действительные векторы, зависящие от коэффициентов полиномиальных векторов $P(t)$ и $Q(t)$.

Векторы $f_+(t)$, $f_-(t)$ и параметры $d_k$ должны удовлетворять следующим условиям разрешимости:

$$\int_\Gamma g(t)\lambda_j(t)dt = 0, \quad j = 1, ..., l, \tag{71}$$

где $\lambda_j(t)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения (58) союзного класса $h(c_1, c_2, ..., c_s)$, а $c_1, c_2, ..., c_s$ — все неособые точки среди точек $a_k$, $b_k$. Кроме того, векторы $\mu(t)$ и $Q(t)$ должны удовлетворять условиям (69).

После определения векторов $\mu(t), P(t), Q(t)$ из (58) и (69), (71) мы найдем $\omega(z)$ из (55), после этого найдем $\psi(z)$ из (54) и определим $\phi(z)$ по формуле (49). Перепишем условия (69) в виде

$$\int_\Gamma F_{jk}(t)\mu(t)dt + \int_{\lambda_j} \tau^k [\Pi(\tau)]^{-1}\gamma(\tau)d\tau = 0, \quad j = 1, ..., p, \ k = 0, ..., m-1, \tag{72}$$

где

$$F_{jk}(t) = \frac{1}{2\pi I}\int_{\lambda_j} \frac{\tau^k [\Pi(\tau)]^{-1} d\tau}{t - \tau}.$$

Функции $F_{jk}(t)$ голоморфны на $\Gamma$ и в ее окрестности. Условия (72) (для фиксированного $\mu$) могут быть представлены как система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномиального вектора $\gamma(\tau)$. Число уравнений равно $2pmn$ (мы рассматриваем действительные уравнения), а число неизвестных равно $2[2p(m-1) - m]n$, если $m > 1$ (если $m = 1$, $\gamma \equiv 0$).

Пусть ранг системы (72) равен $r$ и

$$r \leqslant \min[2mpn, 2n(2p(m-1) - m)].$$

Тогда необходимыми и достаточными условиями разрешимости этой системы являются $2mpn - r$ линейно независимых условий следующего вида:

$$\int_\Gamma \sum_{k=1}^{n} \left[ H_{jk}^{(1)} \operatorname{Re}\mu_k(t) + H_{jk}^{(2)} \operatorname{Im}\mu_k(t) \right] ds = 0, \quad j = 1, ..., 2mnp - r. \tag{73}$$

Если (73) имеет место, то из $2n[2p(m-1) - m]$ коэффициентов ровно $r$ выражаются с помощью вектора $\mu$, а все остальные остаются неопределенными.

Поэтому условия (72) должны быть заменены на (73). Подставим значения коэффициентов полиномиального вектора $\gamma(z)$ ($\Omega(z)$) в правую часть этого уравнения. Число $N$ должно быть заменено на $N - r$. Перенесем возникшие конечномерные операторы в левую часть. Это не повлияет на фредгольмовость уравнений и на индекс. Так что индекс задачи для нахождения вектора $\mu(t)$ будет равен

$$\kappa_\mu = \kappa + N - r - (2mnp - r) = \kappa + N - 2mnp, \tag{74}$$

где $\kappa$ обозначает индекс оператора

$$A(t_0)\nu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\nu(t)dt}{t - t_0}$$

в классе $H^*$.

Легко видеть, что индекс задачи нахождения вектора $\omega(z)$ тот же самый, что и задачи для вектора $\psi(z)$, т.е. он равен $\kappa_\mu$, и для исходной задачи (46) индекс будет

$$\kappa_\phi = \kappa_\mu + 2mn, \tag{75}$$

если все коэффициенты полиномиального вектора $p(t)$ остаются неопределенными в течение этой процедуры. Если определены $\delta$ коэффициентов полиномиального вектора $p(t)$, то в формуле (75)

вместо $2mn$ останется $2mn-\delta$. Собрав вместе вышесказанное, мы приходим к конечному результату.

**Теорема 5.2.** *Задача* (46) *нормально разрешима в классе* $H^*(\Gamma)$, *если* $\det a_{\pm}^m(t)\neq 0$. *В этом случае необходимые и достаточные условия разрешимости даются посредством* (51), *и индекс в этом классе вычисляется по формуле* (75), *где* $k_\mu$ — *индекс задачи* (56) *того же класса.*

## 6. Заключительные замечания

Рассмотренные методы и результаты дают возможность исследования многих других задач для плоскости с разрезами (см. [1,17,18,21,27,29,32–34,42,60]). В качестве иллюстрации мы рассмотрим ниже две задачи такого типа на плоскости с разрезами. Вкратце объясним, как они могут быть исследованы с помощью того же же самого подхода. А именно, на комплексной плоскости с разрезами вдоль некоторых гладких дуг $a_kb_k\,(k=1,...,l)$, мы рассмотрим две задачи: задачу линейного сопряжения со сдвигом и дифференциальную граничную задачу, содержащую комплексно сопряженные величины.

$1^0$. Сначала покажем, как найти аналитическую вектор-функцию

$$\Phi(z)=(\Phi_1(z),...,\Phi_n(z))$$

по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in\Gamma, \tag{76}$$

где $\Gamma\equiv\bigcup_1^n a_kb_k$, $G(t)$ — заданная на $\Gamma$ непрерывная матрица порядка $n$, $\det|G(t)|\neq 0$, $g(t)=(g_1(t),...,g_n(t))$ — заданный вектор класса $L_p(\Gamma,\rho)$, $p>1$, $\rho(t)$ — весовая функция вида

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{2l}|t-c_k|^{\nu_k},\ \ -1<\nu_k<p-1,\ \ c_{2s-1}=a_s,\,c_{2s}=b_s,\ s=1,...,l. \tag{77}$$

Решения этой задачи ищутся в классе $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho(t))$; это означает, что неизвестный вектор представим в форме

$$\Phi(z)=\int_\Gamma\frac{f(t)}{t-z}dt+P(z), \tag{78}$$

где $f(t)\in L_p(\Gamma,\rho)$, $P(z)$ — полиномиальный вектор. Допустим, что $\alpha(t)$ отображает дуги $a_kb_k$ на себя с сохранением направления, имеет непрерывную производную $\alpha'(t)\neq 0$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{array}{ll}\alpha(a_k)=a_k, & \alpha(b_k)=b_k;\\ \alpha'(a_k)=1, & \alpha'(b_k)=1.\end{array} \tag{79}$$

Первое из этих двух условий является вполне естественным, но второе несколько искусственно.

Для решения этой задачи дополним $\Gamma$ до простой замкнутой гладкой кривой $\Gamma_0$ гладкими дугами $b_ka_{k+1}$ и введем вспомогательные матрицу-функцию $a$, вектор-функцию $b$ и функцию $\tilde\alpha$ по формулам

$$a(t)=t_\Gamma G(t)+i_{\Gamma_0\setminus\Gamma}I,\ b(t)=i_\Gamma g(t)+i_{\Gamma_0\setminus\Gamma}0,\ \tilde\alpha(t)=i_\Gamma\alpha(t)+i_{\Gamma_0\setminus\Gamma}t, \tag{80}$$

где $i_X$ обозначает характеристическую функцию подмножества $X$, которая равняется единице на $X$ и обращается в нуль вне $X$. Заметим, что новая функция $\tilde\alpha(t)$ отображает $\Gamma_0$ взаимно однозначно на себя с сохранением ориентации и имеет непрерывную производную $\tilde\alpha'(t)\neq 0$. Тогда мы получаем следующую граничную задачу:

$$\Phi^+[\tilde\alpha(t)]=a(t)\Phi^-(t)+b(t),\ t\in\Gamma_0, \tag{81}$$

где $\alpha(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ определяются формулами (80). Следовательно, мы получили задачу линейного сопряжения с кусочно-непрерывными коэффициентами рассмотренного выше типа (см. раздел 2).

Легко показать, что задачи (76) и (80) являются эквивалентными (если решения задачи (81) ищутся в классе $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho)$). Таким образом наша задача сведена к хорошо известной задаче, решение которой было дано в статьях Д. Квеселава [19,20], Г. Манджавидзе [24,24,25] и в монографиях Н. Мусхелишвили [65] и Н. Векуа [9].

Мы также хотим отметить, что формулы (80) подсказывают интересную связь с теорией фуксовых уравнений [4]. Для простоты допустим, что $G(t)$ постоянна на каждой из дуг $a_kb_k$. Тогда можно заметить, что коэффициент $a(t)$ задачи (80) имеет такой же вид, как в известной проблеме Римана — Гильберта построения фуксова уравнения с заданной группой монодромии [4,66]. Поэтому представляется перспективным изучение задач типа (80) методами теории фуксовых уравнений (ср. [54, 55]).

$2^0$. Ниже мы рассмотрим следующую задачу (граничное условие может содержать также интегральный член, который мы опустим ради простоты записи): найти вектор

$$\Phi(z) = (\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)),$$

аналитический в плоскости, разрезанной вдоль дуг $a_jb_j \in H^1$, по граничному условию

$$A\Phi = g(t), \tag{82}$$

где $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ — заданный вектор класса $L_p(\Gamma, \rho(t))$, $\rho$ — та же самая весовая функция, что выше. Здесь оператор $A$ определяется по формуле

$$A\Phi = \sum_{k=0}^{m} \left[ a_k(t)\Phi_+^{(k)}(\alpha(t)) + b_k(t)\overline{\Phi_+^{(k)}}(\alpha(t)) + c_k(t)\Phi_-^{(k)}(t) + d_k(t)\overline{\Phi_-^{(k)}}(t) \right], \tag{83}$$

где $a_k(t), b_k(t), c_k(t), d_k(t)$ $(k = 0, \ldots, m)$ — заданные на $\Gamma$ непрерывные матрицы порядка $n$, а $\alpha(t)$ — вышеупомянутая функция с той разницей, что производная последней, $\alpha'(t) \neq 0$, предполагается непрерывной по Гёльдеру.

Мы ищем решение в классе $E_p^{\pm}(m, \Gamma, \rho(t))$. Другими словами, $\Phi(z)$ — аналитический вектор в плоскости с разрезами (он может иметь полюс в $z = \infty$) и существует последовательность простых замкнутых спрямляемых кривых $\Gamma_k^s$ $(k = 1, \ldots, l,\ s = 1, 2, \ldots)$, сходящихся к дугам $a_kb_k$ и таких, что последовательности из интегралов

$$\int\limits_{\Gamma_k^s} \left|\Phi_j^m(z)\right|^{\lambda} |dz| < c \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{84}$$

ограничены, где $\lambda = 1 + \epsilon$, а $\epsilon$ — достаточно малое положительное число. В этом случае почти всюду существуют граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ и они принадлежат классу $L_p(\Gamma, \rho)$.

Рассмотрим задачу (82) для простой замкнутой гладкой кривой $\Gamma_0$, построенной как выше. После продолжения соответствующих матриц, векторов и функций на дугах $a_jb_j$ и $b_ja_{j+1}$ должно удовлетворяться следующее условие:

$$\Phi_+^{(m)}(\alpha(t)) - \Phi_-^{(m)}(t) = 0. \tag{85}$$

Так что мы получаем определенное граничное условие на $\Gamma_0$. Соответствующая задача с разрывными коэффициентами для простой замкнутой кривой (для обобщенного аналитического вектора) была исследована в работе Нго Ван Лыока [32] с помощью результатов Н. Векуа [9] и Р. Исаханова [16].

Нго Ван Лыок доказал, что условие нормальности для этой задачи имеет вид

$$\inf_{t \in \Gamma_0} |\det \Omega(t)| > 0, \tag{86}$$

где $\Omega(t)$ — блочная матрица

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{c_m(t)}{d_m(t)} & \dfrac{b_m(t)}{a_m(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma, \tag{87}$$

и на $\Gamma_0/\Gamma$ имеем

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Легко видеть, что соответствующее условие выполнено на дополнительных дугах $b_ja_{j+1}$. Как доказал Нго Ван Лыок [33], необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (82) в

классе $E_p^{\pm}(m,\Gamma,\rho(t))$ для векторов, исчезающих на бесконечности, имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma_0} b(t)\Psi_j(t)dt = \operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma} g(t)\Psi_j(t)dt = 0,\ \ j=1,...,k', \tag{89}$$

где $\Psi_j(t)$ — некоторая система линейно независимых векторов из сопряженного класса $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$, $q=p/p-1$.

Если удовлетворяется условие (89), то существует решение задачи (82), и интегрирование граничного условия на дополнительных дугах $b_ja_{j+1}$ дает нам условие

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = P_j(t), \tag{90}$$

где $P_j(t)=(P_{1j},...,P_{nj})$ — полиномиальный вектор порядка $m+1$, который имеет $j+1$ произвольных коэффициентов

$$P_{sj}(t) = \sum_{s=0}^{m} h_{js+s}.$$

При этом требуется, чтобы $P_j(t)=0$. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий $P_j(c_{sj})=0$, где $c_{sj}$ $(s=0,...,m,\ j=1,...,l)$ — произвольные фиксированные точки на дополнительных дугах $b_ja_{j+1}$. Это влечет добавление конечного числа условий вида (89). В результате мы получим решение задачи (82).

Теперь становится возможным использование результата З. Прёссдорфа и Л. Вольферсдорфа [68], из которого, в частности, следует, что индексы исходной и модифицированной задачи совпадают. Индекс задачи линейного сопряжения с кусочно-непрерывными коэффициентами в классе $E_p^{\pm}(\Gamma,\rho(t))$, где $\rho(t)$ — весовая функция вида (77), имеет вид

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det a(t)}{\prod\limits_{k=0}^{r}(t-z_0)^{\sigma_k}}\right]_{\Gamma}, \tag{91}$$

где

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{r}\rho_{kj},\ \ \rho_{kj} = -\frac{1}{2\pi}\ln\lambda_{kj},\ \ -1<\operatorname{Re}\rho_{kj}<1.$$

Выберем $-1<\operatorname{Re}\rho_{kj}\leqslant 0$ или $0\leqslant\operatorname{Re}\rho_{kj}<1$, в зависимости от рассматриваемого класса. Кроме того, должны удовлетворяться следующие условия:

$$\mu_{kj}\neq\frac{1+\nu_k}{p}, \tag{92}$$

где $\mu_{kj}=\frac{1}{2\pi}\arg\lambda_{kj},\ 0\leqslant\arg\lambda_{kj}<2\pi,\ \lambda_{kj}\,(k=1,...,r,\ j=1,...,n)$ — корни уравнения

$$\det[a^{-1}(c_k+0)a(c_k-0)-\lambda I]=0, \tag{93}$$

а $c_k$ — точки разрыва матрицы-функции $a$.

Индекс задачи со сдвигом дается той же самой формулой, так как он не зависит от $\alpha$. Индекс дифференциальной граничной задачи, рассмотренной в [32], также имеет такой вид, но вместо матрицы $a(t)$ используется матрица $G(t)$, определенная формулой

$$G(t) = S^{-1}(t)T(t), \tag{94}$$

где

$$S(t) = 2\begin{pmatrix}\dfrac{a_m(t)}{b_m(t)} & \dfrac{-d_m(t)}{-c_m(t)}\end{pmatrix},\ T(t) = 2\begin{pmatrix}\dfrac{-c_m(t)}{-d_m(t)} & \dfrac{b_m(t)}{a_m(t)}\end{pmatrix},\ t\in\Gamma, \tag{95}$$

и на дополнительной части (т.е. при $t\in\Gamma_0\setminus\Gamma$) имеем

$$S(t)=T(t)=2\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}. \tag{96}$$

Применяя эти результаты, можно изучить задачу (76) с точки зрения разрешимости, устойчивости и асимптотики решений (ср. [5, 7]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ахалая Г. Я., Манджавидзе Г. Ф.* Дифференциальная граничная задача для обобщенных аналитических функций // Тр. ин-та прикл. мат. Тбилис. ун-т. — 1987. — *21*. — С. 5–17.
2. *Банцури Р.* Контактная задача для клина с упругим усилением // Докл. АН СССР. — 1977. — *211*, № 4. — С. 797–800.
3. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
4. *Болибрух А. А.* Проблема Римана — Гильберта // Успехи мат. наук. — 1990. — *45*, № 2. — С. 1–47.
5. *Боярский Б.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. — 1957. — *43*. — С. 451–503.
6. *Боярский Б. В.* Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1960. — *25*, № 4. — С. 385–390.
7. *Боярский Б. В.* Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Pol. Math. — 1966. — *17*, № 3. — С. 281–320.
8. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1989.
9. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. — М.: Наука, 1970.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
11. *Голузин Г.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на прямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. — 1958. — *13*, № 2. — С. 3–72.
13. *Гохберг И., Крупник Н.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений. — Кишинев, 1973.
14. *Греков М.* Сингулярные задачи теории упругости на плоскости. — СПб. ун-т, 2001.
15. *Зверович Е.* Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях // Сиб. мат. ж. — 1966. — *7*, № 4. — С. 804–819.
16. *Исаханов Р. С.* Об одном классе сингулярных интегродифференциальных уравнений // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1958. — *20*, № 1. — С. 9–21.
17. *Исаханов Р. С.* О некоторых граничных задачах линейных конфигураций // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1962. — *28*. — С. 73–84.
18. *Исаханов Р. С.* Граничная задача линейного сопряжения для конечного числа областей // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1973. — *44*. — С. 79–99.
19. *Квеселава Д.* Решение одной граничной задачи теории функций // Докл. АН СССР. — 1946. — *53*, № 8. — С. 683–686.
20. *Квеселава Д.* Некоторые граничные задачи теории функций // // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1948. — *16*. — С. 39–80.
21. *Кокилашвили В.* Сингулярные и бисингулярные операторы в весовых пространствах // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1982. — *69*. — С. 51–79.
22. *Кордадзе Р.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений со сдвигом // Докл. АН СССР. — 1966. — *168*, № 6. — С. 1245–1248.
23. *Литвинчук Г.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977.
24. *Манджавидзе Г.* Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1950. — *11*, № 6. — С. 351–356.
25. *Манджавидзе Г.* Краевая задача линейного сопряжения и ее соотношение с теорией обобщенных аналитических функций // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1967. — *33*. — С. 82–87.
26. *Манджавидзе Г.* О поведении решения краевой задачи линейного сопряжения // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1969. — *35*. — С. 173–182.
27. *Манджавидзе Г.* Приложение теории обобщенных аналитических функций к изучению краевой задачи линейного сопряжения со смещением // Дифференц. интеграл. уравнения. Краевые задачи. Тбилисск. ун-т. — 1979. — С. 125–132.
28. *Манджавидзе Г., Хведелидзе Б.* Граничные задачи линейного сопряжения и сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и непрерывными коэффициентами // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1962. — *28*. — С. 85–105.

29. *Манджавидзе Г., Нго Ван Лыок* Дифференциальные граничные задачи для обобщенных аналитических векторов // Совр. пробл. мат. физ. Тбилисск. ун-т. — 1987. — С. 74–84.
30. *Манджавидзе Н.* Граничная задача Римана — Гильберта — Пуанкаре на плоскости с разрезом // Сообщ. АН Грузии. — 2003. — *168*, № 3. — С. 441–444.
31. *Михлин С.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.
32. *Нго Ван Лыок* Граничная задача линейного сопряжения общего вида для $Q$-голоморфных векторов // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1970. — *57*, № 3. — С. 549–552.
33. *Нго Ван Лыок* Об одной дифференциальной граничной задаче линейного сопряжения для аналитических векторов // Сообщ. расшир. сессии семин. ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. — 1982. — *2*, № 1. — С. 50–53.
34. *Пааташвили В.* О сингулярных интегралах Коши // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1969. — *53*, № 3. — С. 529–532.
35. *Привалов И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.: Гостехиздат, 1950.
36. *Симоненко И.* Краевая задача Римана и задача Хаземана с разрывными коэффициентами. Исследования в области современных задач теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1961.
37. *Солдатов А.* Краевые задачи сопряжения со сдвигом на кусочно-гладких кривых в весовых пространствах // Докл. АН СССР. — 1980. — *253*, № 5. — С. 1050–1055.
38. *Схиртладзе Н.* Краевые задачи теории упругости на плоскости для тел с криволинейными разрезами // Тр. ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. — 1988. — *28*. — С. 132–162.
39. *Хведелидзе Б.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярных интегральных уравнений и некоторые приложения // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. — 1957. — *23*. — С. 3–158.
40. *Хведелидзе Б.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одного комплексного переменного // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1975. — С. 5–162.
41. *Химшиашвили Г. Н.* О задаче Римана — Гильберта для компактной группы Ли // Докл. АН СССР. — 1990. — *310*, № 5. — С. 1055–1058.
42. *Akhalaia G., Manjavidze G.* Generalized analytic vectors. — «Complex methods for partial differential equations». — Dordrecht: Kluwer, 1999. — С. 57–97.
43. *Bers L.* Theory of pseudo-analytic functions. — New York: Courant Institute, 1953.
44. *Birkhoff G. D.* A theorem on matrices of analytic functions // Math. Ann. — 1913. — *74*, № 1. — С. 122–133.
45. *Calderon A. P.* Cauchy integrals on Lipschits curves and related operators // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1977. — *74*, № 4. — С. 1324–1327.
46. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications. // Verband des Intern. Math. Kongr., Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
47. *Clancey K., Gohberg I.* Factorization of matrix functions and singular integral operators. — Basel — Boston — Stuttgart. — Birkhäuser, 1981.
48. *Douglis A.* A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. — 1963. — *6*. — С. 259–289.
49. *Duren P. L.* Theory of $H^p$ spaces. — New York: Academic Press, 1970.
50. *Dzhuraev A.* Method of singular integral equations. — Harlow: Longman, 1992.
51. *Ehrhardt T., Spitkovsky I.* Factorization of piecewise constant matrix functions and systems of linear differential equations // Algebra i Analiz. — 2001. — *13*, № 6. — С. 56–123.
52. *Gakhov F. D.* Boundary value problems. — Oxford: Pergamon, 1962.
53. *Gilbert R. P., Buchanan J. L.* First order elliptic systems. A function theoretical approach. — New York: Academic Press, 1983.
54. *Giorgadze G.* G-systems and holomorphic principal bundles // J. Dyn. Contr. Syst. — 2002. — *8*. — С. 245–291.
55. *Giorgadze G.* Regular systems on Riemann surfaces // J. Math. Sci. — 2003. — *118*, № 5. — С. 5347–5399.
56. *Hasemann C.* Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf lineare Randwertaufgaben. — Göttingen, 1907.
57. *Khimshiashvili G.* Lie groups and transmission problems on Riemann surfaces // Contemp. Math. — 1992. — *131*. — С. 164–178.
58. *Khimshiashvili G.* Geometric aspects of Riemann — Hilbert problems // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. — 2002. — *27*. — С. 1–114.
59. *Litvinchuk G., Spitkovsky I.* Factorization of measurable matrix-functions. — Berlin: Akademie Verlag, 1987.

60. *Manjavidze G.* The boundary value problem of linear cojugation with displacement // Complex Anal. and Appl. Sofia. — 1984. — С. 375–382.
61. *Manjavidze N.* Differential boundary value problems of the theory of analytic functions on a cut plane // Complex variables. Theory and Appl. — 2001. — *46*, № 3. — С. 265–277.
62. *Manjavidze N.* Some boundary value problems of the theory of analytic functions on a cut plane // Proc. 3rd Intern. Congress ISAAC. Berlin, 2001. — *2*. — С. 763–769.
63. *Mikhlin S., Prössdorf S.* Singular integral operators. — Berlin: Akademie Verlag, 1986.
64. *Monakhov V.* Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1983.
65. *Muskhelishvili N.* Singular integral equations. — Groningen — Leyden: Noordhoff, 1953.
66. *Plemelj J.* Riemannsche Funktionenscharen mit gegebenen Monodromiegruppe // Monatshefte für Math. und Phys. XIX, 1908, 211–245.
67. Prössdorf S. Some classes of singular equations. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
68. *Prössdorf S., von Wolfersdorf L.* Zur Theorie der Nötherschen Operatoren und einiger singularer Integral und Integrodifferentialgleichungen // Wiss. Z. Tech. Hochschule Karl-Marx-Stadt. — 1971. — *13*. — С. 103–116.
69. *Wendland W.* Elliptic systems in the plane. — London: Pitman, 1979.
70. *Warshawski S.* Über Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung // Math. Z. — 1932. — *35*, № 3. — С. 321–456.

Н. Манджавидзе
Тбилисский технический университет

Современная математика и ее приложения. Том 15 (2004). С. 142–199

УДК 515.177.54

# ГИПЕРАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2004 г. **А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Излагается теория функций, аналитических по Дуглису. Дается ее приложение к описанию решений эллиптических систем высокого порядка с постоянными коэффициентами на плоскости. Особое внимание уделено системам плоской теории упругости и линеаризованной системе Стокса гидромеханики.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . . 143
1. Элементы линейной алгебры . . . . . 144
1.1. Функции от матриц . . . . . 144
1.2. Жорданова нормальная форма матрицы . . . . . 148
1.3. Матричные многочлены . . . . . 149
2. Аналитичность по Дуглису . . . . . 151
2.1. Основные понятия . . . . . 151
2.2. Интеграл Коши . . . . . 155
2.3. Степенные ряды Тейлора и Лорана . . . . . 157
2.4. Неопределенный интеграл . . . . . 159
3. Эллиптические системы произвольного порядка . . . . . 161
3.1. Представление решений . . . . . 161
3.2. Комплексные системы . . . . . 166
3.3. Случай одного уравнения . . . . . 167
3.4. Приложение к краевым задачам . . . . . 168
4. Эллиптические системы второго порядка . . . . . 171
4.1. Слабо и сильно связанные системы . . . . . 171
4.2. Сильно и усиленно эллиптические системы . . . . . 173
4.3. Сопряженные и вырожденные решения . . . . . 175
4.4. Задача Неймана . . . . . 178
5. Система двух уравнений второго порядка . . . . . 180
5.1. Классификация систем . . . . . 180
5.2. Параметрическое описание систем . . . . . 183
5.3. Система Ламе анизотропной плоской упругости . . . . . 186
5.4. Ортотропный и изотропный случаи . . . . . 188
6. Системы Дуглиса — Ниренберга . . . . . 190
6.1. Аналог теоремы Жордана . . . . . 190
6.2. Представление решений . . . . . 192
6.3. Сопряженные функции . . . . . 194
6.4. Система Стокса гидродинамики . . . . . 196
Список литературы . . . . . 198

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

## Введение

Аналитические функции комплексного переменного $\phi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ характеризуются уравнением Коши — Римана

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \tag{0.1}$$

Замена его более общим уравнением

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial x} = a\phi + b\overline{\phi}$$

приводит к обобщенным аналитическим функциям [6], теория которых построена И. Н. Векуа, М. А. Лаврентьевым и Л. Берсом в 50-е годы.

Другое естественное обобщение уравнения (0.1) доставляет система уравнений

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \tag{0.2}$$

для вектор-функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_s)$, где $J$ — постоянная $(s \times s)$-матрица, не имеющая действительных собственных значений.

Впервые с этой точки зрения уравнение (0.2) было исследовано А. Дуглисом [31] в предположении, что матрица $J$ треугольна и тёплицева, т.е. ее элементы зависят только от разности индексов. Функции $\phi$, принимающие значения в классе таких матриц и удовлетворяющие (матричному) уравнению (0.2), были названы А. Дуглисом гипераналитическими. В дальнейшем это направление развивалось Д. Хорватц [38], Б. Боярским [5], Р. Гилбертом [33,34], Д. Хайлом [37], Х. Бегером [28,29] и др. В частности, для решений уравнения (0.2) построен аналог теории аналитических функций, поэтому эти решения мы называем функциями, аналитическими по Дуглису.

Хорошо известно, что решения уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{0.3}$$

описываются как вещественная часть аналитических функций. Через аналитические функции выражаются и решения более общих эллиптических уравнений с вещественно аналитическими коэффициентами.

Единый подход к изучению этих представлений был предложен И. Н. Векуа [7]. В дальнейшем А. В. Бицадзе [2] было получено представление через аналитические вектор-функции и их производные общего решения эллиптических систем.

Сравнительно недавно (А. П. Солдатов [22], Р. Йех [40]) было обнаружено, что с помощью функций, аналитических по Дуглису, представление Бицадзе существенно упрощается. Можно сказать, что по отношению к эллиптическим уравнениям и системам с постоянными (и только старшими) коэффициентами эти функции играют ту же роль, что и аналитические функции по отношению к уравнению Лапласа (0.3). Аналогичные свойства выявлены (Н. А. Жура [10]) и для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу, а также для систем, гиперболических по Лере и Петровскому.

Коротко о содержании работы. Для удобства чтения в §1 включены необходимые сведения из теории матриц. В §2 развит аналог теории аналитических функций для уравнения (0.2). В §3 рассмотрены эллиптические уравнения и системы произвольного порядка. Главное внимание уделено вопросам представления общего решения этих уравнений через функции, аналитические по Дуглису. В конце данного раздела указано применение этих представлений к исследованию краевых задач. В §4 подробно изучены различные типы эллиптичности для систем уравнений второго порядка, наиболее часто встречающихся в приложениях. В §5 отдельно разобран случай из двух уравнений второго порядка, для которых можно провести полную классификацию. Здесь же даны приложения к плоской теории упругости. В §6 изложены некоторые результаты Н. А. Жура [11] о представлении общего решения систем второго порядка эллиптических в смысле Дуглиса — Ниренберга. В качестве примера указано приложение к линеаризованной системе Стокса гидромеханики.

## 1. Элементы линейной алгебры

**1.1. Функции от матриц.** Обозначим $\mathbb{C}^{s_1\times s_2}$ класс всех комплексных матриц порядка $s_1\times s_2$, аналогичный смысл имеет символ $\mathbb{R}^{s_1\times s_2}$ для действительных матриц. Операции сложения и умножения матриц (соответствующих порядков), а также основные свойства определителей квадратных ($s_1=s_2$) матриц предполагаются известными (см., например, [9]). Матрицы можно записывать в блочном виде. Например, если $A\in\mathbb{C}^{l\times s}$ и $l=l_1+\ldots+l_k$, $s=s_1+\ldots+s_r$, то запись $A=(A_{ij})$ означает, что $A_{ij}\in\mathbb{C}^{l_i\times s_j}$. При $k=1$ и $r=1$ эта матрица представляет собой, соответственно, блочную строку и блочный столбец. В этом случае используем записи $A=(A_1,\ldots,A_r)$, где $A_j\in\mathbb{C}^{l\times s_j}$, и, соответственно, $A=\downarrow(A_1,\ldots,A_r)$, $A_i\in\mathbb{C}^{l_j\times s}$. При $k=r$ блочная матрица $(A_{ij})$ будет квадратной. Если $l_i=s_i$ для всех $i$ и $A_{ij}=0$ при $i>j$ ($i<j$), то получим блочную верхне- (нижне)треугольную матрицу. В случае $A_{ij}=0$ при $i\neq j$ эта матрица блочно-диагональна и обозначается $A=\operatorname{diag}(A_{11},\ldots,A_{kk})$ (аналогично случаю обычных диагональных матриц). Отметим, что определитель $\det A$ блочно-треугольной матрицы $A$ совпадает с произведением $\det A_{ii}$, $i=1,\ldots,n$. По отношению к операциям сложения и умножения класс $\mathbb{C}^{s\times s}$ называют алгеброй. Символы 0 и 1 ниже означают, соответственно, нулевую и единичную матрицы, число $z\in\mathbb{C}$ отождествляем со скалярной матрицей $z\cdot 1\in\mathbb{C}^{s\times s}$. Если $\det A\neq 0$, то обычным образом определяется обратная матрица $B=A^{-1}$, для нее $AB=BA=1$.

Многочлен $s$-й степени

$$\det(z-A)=\prod_{j=1}^{n}(z-\nu_j)^{s_j} \tag{1.1}$$

называется характеристическим многочленом матрицы $A$. В формуле (1.1) предполагается, что $\nu_i\neq\nu_j$ при $i\neq j$. Комплексные числа $\nu_i$ называются *собственными значениями* матрицы $A$. Как точки комплексной плоскости, они образуют спектр $\sigma(A)$. Натуральное число $s_j$ называется *кратностью* собственного значения $\nu_j$.

Каждому многочлену $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k$ с коэффициентами $a_j\in\mathbb{C}$ поставим в соответствие матрицу

$$p(A)=a_0+a_1A+\cdots+a_kA^k, \tag{1.2}$$

которую естественно называть значением этого многочлена от $A$.

Из определения (1.2) непосредственно следует, что для любых двух многочленов $p_1,p_2$ справедливы равенства

$$\begin{gathered}(p_1+p_2)(A)=p_1(A)+p_2(A),\\ (p_1p_2)(A)=p_1(A)p_2(A),\\ p_1[p_2(A)]=p(A),\ \ p(z)=p_1[p_2(z)].\end{gathered} \tag{1.3}$$

В качестве иллюстрации этих свойств докажем соотношение

$$\sigma(p(A))=\{p(\nu),\nu\in\sigma(A)\}, \tag{1.4}$$

связывающее спектры матриц $A$ и $p(A)$.

В самом деле, для $\nu\in\sigma(A)$ запишем: $p(z)-p(\nu)=(z-\nu)q(z)$ с некоторым многочленом $q$. В силу (1.3) отсюда следует $p(A)-p(\nu)=(A-\nu)q(A)$, откуда по свойству определителей $p(\nu)\in\sigma(p(A))$. Обратно, пусть $\lambda\in\sigma(p(A))$, так что $\det[p(A)-\lambda]=0$. Запишем $p(z)-\lambda=\prod_i(A-z_i)^{k_i}$, где $z_i\neq z_j$ при $i\neq j$. В силу (1.2) отсюда

$$p(A)-\lambda=\prod_i(A-z_i)^{k_i}$$

Следовательно, $\det(A-z_i)=0$ для некоторого $i$, так что $z_i\in\sigma(A)$. Поскольку $\lambda=p(z_i)$, это завершает доказательство (1.4).

Из определения (1.2) также непосредственно следует, что

$$\begin{gathered}B^{-1}p(A)B=p(B^{-1}AB),\\ p(\operatorname{diag}(A_1,\ldots,A_n))=\operatorname{diag}(p(A_1),\ldots,p(A_n)).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Говорят, что многочлен $p(z)$ аннулирует $A$, если $p(A)=0$. Пример такого многочлена доставляет следующая теорема Гамильтона — Кэли.

**Теорема 1.1.** *Характеристический многочлен матрицы $A$ аннулирует $A$.*

*Доказательство.* Пусть матрица $R(z)\in\mathbb{C}^{s\times s}$ составлена из алгебраических дополнений к элементам матрицы $z-A$, точнее, пусть $(-1)^{i+j}R_{ij}(z)$ — определитель матрицы, полученной из $z-A$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца. Тогда, как известно,

$$(z-A)R(z)=R(z)(z-A)=X(z), \tag{1.6}$$

где $X(z)$ — определитель матрицы $z-A$, т.е. характеристический многочлен $A$. Очевидно, $R_{ij}(z)$ являются многочленами от $z$ порядка $s-1$, или, в матричной форме,

$$R(z)=R_1+R_2z+\ldots+R_sz^{s-1}.$$

Из первого равенства (1.6) вытекает, что $R_jA=AR_j$, поэтому второе равенство

$$X(z)=(R_1+\ldots+z^{s-1}R_s)(z-A)$$

сохранится, если в него вместо $z$ подставить $A$. Следовательно, $X(A)=0$ и теорема доказана.

Среди всех многочленов, аннулирующих $A$, рассмотрим многочлен $M(z)$ минимальной степени $r$ (и с коэффициентом 1 при старшем члене). Если $p(z)$ аннулирует $A$ и $p(z)=\tilde{p}(z)M(z)+q(z)$, то в силу условия минимальности степени многочлен $q=0$. Таким образом, $p$ делится нацело на $M$, в частности, многочлен $M$ единственен, он называется минимальным многочленом матрицы $A$.

В силу теоремы 1.1, многочлен (1.1) делится нацело на $M$, причем согласно (1.1) множество $\{M(\nu),\,\nu\in\sigma(A)\}$ состоит из единственной точки $z=0$ для всех $j$. Следовательно,

$$M(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-\nu_j)^{r_j},\quad 1\leqslant r_j\leqslant s_j, \tag{1.7}$$

так что $r=r_1+\ldots r_n$. Степень $r_j$ в этом разложении называется порядком собственного значения $\nu_j$.

С помощью минимального многочлена определение (1.2) можно распространить на функции $f(z)$, аналитические в окрестности $\sigma(A)$. С этой целью каждой функции $f$ поставим в соответствие вектор $c=Lf\in\mathbb{C}^k$ по формуле

$$Lf=\left(f^{(i)}(\nu_j),\ 0\leqslant i\leqslant k_j-1,\ j=1,\ldots,n\right). \tag{1.8}$$

Очевидно, равенство $Lf=0$ означает, что $f(z)$ имеет нуль порядка не меньше $r_j$ в каждой точке $z=\nu_j$, $j=1,\ldots,n$. Это равносильно тому, что $f(z)=\tilde{f}(z)M(z)$, где $\tilde{f}$ аналитична в окрестности $\sigma(A)$.

**Лемма 1.1.** *На классе $P_{k-1}$ многочленов степени не выше $r-1$ отображение $L$ взаимно-однозначно и имеет обратное $L^{(-1)}:\ \mathbb{C}^r\to P_{r-1}$.*

*Доказательство.* Если $Lp=0$, $p\in P_{k-1}$, то $p(z)$ делится нацело на $(z-\nu_j)^{r_j}$ при каждом $j$ и, значит, делится нацело на многочлен $M(z)$. Поскольку степень $p$ не превосходит $k-1$, это возможно только при $p=0$. Таким образом, линейное отображение $L:P_{r-1}\to\mathbb{C}^r$ взаимно-однозначно. Поскольку размерность пространства многочленов $P_{r-1}$ равна $r$, это отображение имеет обратное $L^{(-1)}:\ \mathbb{C}\to P_{r-1}$.

Для заданного семейства $c=(c_{ij},\ 0\leqslant i\leqslant r_j-1,\ j=1,\ldots,n)\in\mathbb{C}^k$ многочлен $L^{(-1)}c\in P_{r-1}$ называют *интерполяционным* (по отношению к набору $(\nu_j,r_j),\ j=1,\ldots,n$).

Из леммы следует, что для любой аналитической в окрестности $\sigma(A)$ функции $f$ найдется такая функция $\tilde{f}$, что

$$f(z)=\tilde{f}(z)M(z)+q(z),\quad q=L^{(-1)}Lf. \tag{1.9}$$

В соответствии с этим значение $f(A)$ функции $f$ от матрицы $A$ естественно определить равенством $f(A)=q(A)$.

**Теорема 1.2.** (а) *Пусть последовательность аналитических функций $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в окрестности $\sigma(A)$. Тогда $f_n(A) \longrightarrow f(A)$ в смысле поэлементной сходимости матриц. В частности, соотношения* (1.3), (1.5) *сохраняют свою силу и для аналитических функций.*

(б) *Пусть функция $g(z,t)$ непрерывна на $G \times \Gamma$, где $G$ — окрестность $\sigma(A)$, $\Gamma$ — некоторая кривая. Тогда если $g(z,t)$ аналитична по $z$ в $G$, то матрица-функция $g(A,t)$ непрерывна на $\Gamma$ и*

$$g(A) = \int\limits_\Gamma g(A,t)dt, \quad g(z) = \int\limits_\Gamma f(z,t)dt. \tag{1.10}$$

*Доказательство.* (а) Пусть $q_n$ определяется по $f_n$ аналогично (1.9), тогда $q_n \longrightarrow q$ в смысле покоэффициентной сходимости. Следовательно, $q_n(A) \longrightarrow q(A)$ при $n \longrightarrow \infty$. Чтобы убедиться в справедливости соотношений (1.3), (1.5) для аналитических функций, достаточно записать их для многочленов, аппроксимирующих эти функции, и затем перейти к пределу.

(б) Обозначим $g^{(i)}(z,t)$ производную $i$-го порядка по $z$ функции $g(z,t)$. В силу известных свойств аналитических функций она непрерывна на $G \times \Gamma$ и

$$f^{(i)}(z) = \int\limits_\Gamma g^{(i)}(z,t)dt.$$

Следовательно, если $p(z,t)$ и $q(z)$ определяются аналогично (1.9), соответственно, по $g(z,t)$ и $f(z)$, то

$$q(z) = \int\limits_\Gamma p(z,t)dt.$$

В свою очередь отсюда следует (1.10).

Отметим несколько следствий теоремы. Если функция $f$ раскладывается в окрестности $\sigma(A)$ в степенной ряд $a_0 + a_1 z + \cdots$, то в силу (а) имеем сходящийся матричный ряд

$$f(A) = a_0 + a_1 A + \cdots,$$

что составляет естественное обобщение определения (1.2). В частности, ряд

$$\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

сходится для любой матрицы $A$ и определяет значение функции $e^z = \exp z$ от $A$. Аналогично, если собственные значения $A$ по модулю меньше 1, то ряд

$$(1 - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + \cdots$$

сходится и определяет матрицу, обратную к $1 - A$.

Следствием соотношений (1.3) для функций является, например, тот факт, что $A^{-1}$ совпадает с $f(A)$, $f(z) = z^{-1}$. Достаточно учесть, что $zf(z) = f(z)z = 1$. Из этих же соображений матрица $f(A)$ коммутирует с $A$ для любой $f$.

В качестве следствия теоремы 1.2(б) отметим аналог формулы Коши

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(t)(t - A)^{-1}dt, \tag{1.11}$$

где контур $\Gamma$ охватывает $\sigma(A)$ и ориентирован так, что $\sigma(A)$ остается слева. Для доказательства достаточно заметить, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(t)(t - z)^{-1}dt$$

и применить (б) к функции $g(z,t) = f(t)(t - z)^{-1}$.

Еще одно следствие теоремы выделим особо.

**Лемма 1.2.** *Пусть матрица-функция $A(\tau)$ задана и непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причем*

$$A'(\tau)A(\tau) = A(\tau)A'(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{1.12}$$

*Пусть функция $f$ аналитична в открытом множестве, содержащем $\sigma(A(\tau))$ для всех $\tau$. Тогда матрица-функция $B(\tau) = f(A(\tau))$ непрерывно дифференцируема, причем*

$$B'(\tau) = f'(A(\tau))A'(\tau). \tag{1.13}$$

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу-функцию двух переменных $(t - A(\tau))^{-1},\ t \in \Gamma,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1$, где $\Gamma$ фигурирует в (1.11). Очевидно, она непрерывно дифференцируема по $\tau$ и с учетом (1.12) ее производная

$$[(t - A(\tau))^{-1}]' = (t - A(\tau))^{-2}A'(\tau).$$

Следовательно, (1.11) можем продифференцировать под знаком интеграла:

$$B' = \left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)(t - A)^{-2}dt\right] A'.$$

Остается отметить, что в силу теоремы 1.2(б), примененной к равенству

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(t)(t - z)^{-2}dt,$$

выражение в квадратных скобках совпадает с $f'(A)$.

Лемму 1.2 легко доказать и с помощью аппроксимационных соображений. В силу (1.12) для многочленов $f = p$ равенство (1.13) очевидно. В общем случае рассмотрим последовательность многочленов $f_n$, равномерно сходящуюся к $f$ в окрестности $\sigma(A(\tau))$ для всех $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Тогда по теореме 1.2(а)

$$B_n(\tau) = p_n(A(\tau)) \to B(\tau), \quad B_n'(\tau) \to f'(A(\tau))A'(\tau)$$

равномерно по $\tau$, откуда все следует.

Отметим особо случай, когда матрица $A$ имеет единственное собственное значение $\nu$. В этом случае (1.1) и (1.7) принимают вид

$$\det(z - A) = (z - \nu)^s,\ M(z) = (z - \nu)^m,$$

так что $(A - \nu)^k = 0$ и в соответствии с (1.8)

$$f(A) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\nu)}{i!}(A - \nu)^i. \tag{1.14}$$

При $\nu = 0$ матрица A называется нильпотентной, для нее $A^r = 0$.

В качестве иллюстрации рассмотрим треугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

которая называется клеткой Жордана (или $\nu$-клеткой, если нужно указать ее зависимость от $\nu$). Очевидно, $A - \nu$ представляет собой матрицу, у которой все элементы равны 0, кроме элементов на $i$-й диагонали над главной, которые равны 1. Поэтому в соответствии с (1.14),

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\nu) & f'(\nu) & \dots & f^{(s)}(\nu)/s! \\ 0 & f(\nu) & \dots & f^{(s-1)}(\nu)/(s-1)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\nu) \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

**1.2. Жорданова нормальная форма матрицы.** Удобно пользоваться геометрической интерпретацией матриц $A = (A_{ij})_1^s \in \mathbb{C}^{s\times s}$, рассматривая их как линейное преобразование в $X = \mathbb{C}^s$. Это преобразование, которое обозначаем той же буквой, действует по формуле

$$(Ax)_i = \sum_{i=1}^{s} A_{ij}x_j, \quad i = 1, \cdots, s.$$

Сумме и произведению матриц отвечают, соответственно, сумма и произведение преобразований, определяемых этими матрицами. Само произведение матриц можно истолковать в терминах данного преобразования:

$$(AB)_{(i)} = AB_{(i)}, \quad (BC)_{(i)} = \sum_{j=1}^{s} C_{ji}B_{(j)}, \tag{1.17}$$

где $C = (C_{ij})_i^s$ и $B_{(i)}$ — $i$-й столбец матрицы $B$, рассматриваемый как элемент $(B_{1i}, \ldots, B_{si}) \in \mathbb{C}^s$. Подпространство $X_0 \subseteq \mathbb{C}^s$ называется инвариантным относительно $A$, если $Ax \in X_0$ для $x \in X_0$. Примером таких подпространств служит образ $\operatorname{Im} A = A(X)$ и ядро $\operatorname{Ker} A = \{x, Ax = 0\}$ линейного преобразования $A$. Спектр $\sigma(A) = \{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$ можно определить как множество всех $\nu$, для которых преобразование $\nu - A$ не является обратимым, или, что равносильно, $\operatorname{Ker}(\nu - A) \neq 0$.

Преобразование $P$ называется проектором, если $P^2 = P$, или, что равносильно, если $P$ действует тождественно на подпространстве $X_0 = \operatorname{Im} P$. Это подпространство инвариантно относительно $A$ тогда и только тогда, когда $A$ коммутирует с $P$, т.е. когда $AP = PA$. Пусть $x_i, i = 1, \ldots, s_0,$ — базис $X_0$. Тогда инвариантность $A$ в $X_0$ означает, что

$$Ax_i = \sum_{j=1}^{s_0} \alpha_{ji}x_j, \quad i = 1, \ldots, s_0. \tag{1.18}$$

Матрица $A_0 = (\alpha_{ij})_1^{s_0}$ называется матрицей линейного преобразования $A : X_0 \to X_0$ в базисе $(x_i)$.

Согласно (1.17), соотношения (1.18) можно переписать в матричной форме $AB_0 = B_0A_0$, где матрица $B_0 \in \mathbb{C}^{s\times s_0}$ составлена из $x_i$ как столбцов. Применим этот факт к нескольким подпространствам, раскладывающим $X$ в простую сумму.

**Лемма 1.3.** *Пусть $\mathbb{C}^s = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ и $A$ инвариантно на каждом из $X_i$. Пусть матрица $B_i \in \mathbb{C}^{s\times s_i}$ составлена из столбцов, образующих базис $X_i$, а $J_i$ есть матрица $A$ в этом базисе. Тогда*

$$AB = B\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n), \quad B = (B_1, \ldots, B_n). \tag{1.19}$$

*Доказательство.* Как отмечено выше, $AB_i = B_iJ_i$ при каждом $i$. В свою очередь, эти соотношения равносильны (1.19).

Матрицы $A$ и $\tilde{A} = B^{-1}AB$ называются подобными. В этом смысле лемма 1.3 показывает способ приведения матрицы $A$ к подобной блочно-диагональной матрице. Ясно, что ее утверждение можно обратить: если $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n)$, $B = (B_1, \ldots, B_n)$, где $B_i \in \mathbb{C}^{s_i\times s}$ и $J_i \in \mathbb{C}^{s_i\times s_i}$, то столбцы матрицы $B_i$ образуют базис пространства $X_i$, на котором $A$ инвариантно.

Следующая теорема дает важный пример подобного приведения.

**Теорема 1.3.** *С каждым собственным значением $\nu_i$ матрицы $A$ можно связать такое инвариантное подпространство $X_i$, $i = 1, \ldots, n$, что при каждом $i$ преобразование $A : X_i \to X_i$ имеет $\nu_i$ единственным собственным значением и все пространство $\mathbb{C}^s$ раскладывается в прямую сумму этих подпространств. В частности, имеют место соотношения* (1.19) *с $\sigma(J_i) = \{\nu_i\}$.*

Пространство $X_i$ называется собственным подпространством матрицы $A$, отвечающим $\nu_i$. Его размерность совпадает с кратностью $s_i$ собственного значения $\nu_i$ в (1.1). В самом деле, согласно (1.19), имеем равенство $B^{-1}(z - A)B = \operatorname{diag}(z - J_1, \ldots, z - J_n)$, откуда

$$\det(z - A) = \prod_i \det(z - J_i), \quad \det(z - J_i) = (z - \nu_i)^{s_i},$$

где $s_i$ — размерность пространства $X_i$.

Особо отметим случай вещественных матриц $A$. В этом случае многочлен (1.1) для действительных $z$ принимает действительные значения, в частности, каждому собственному $\nu$ соответствует комплексно сопряженное собственное значение $\overline{\nu}$ той же кратности.

**Лемма 1.4.** *Если $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$, то матрицу $B$ в теореме* 1.3 *можно выбрать так, чтобы $B_i = \overline{B_j}$ при $\nu_i = \overline{\nu_j}$.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что

$$X_i = \{\overline{x}, x \in X_j\}. \tag{1.20}$$

С этой целью введем в классе аналитических функций операцию $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Если $f$ определена в окрестности $\sigma(A)$, то $f^*$ — в окрестности $\sigma(\overline{A})$. Если $M$ — минимальный многочлен $A$, то $M^*$ — минимальный многочлен $\overline{A}$. Применяя операцию «$*$» к равенству (1.8), отсюда заключаем, что $\overline{f(A)} = f^*(\overline{A})$. В частности, $\overline{f(A)} = f^*(A)$ для вещественных матриц $A$. Поскольку $(p_i)^* = p_j$ при $\nu_i = \overline{\nu_j}$, отсюда $\overline{P_i} = P_j$, что завершает доказательство (1.20) и леммы.

Ненулевой вектор $x \in X_i$, удовлетворяющий уравнению $(A - \nu_i)^{r+1}x = 0$, называется *собственным* $(r = 0)$ или *присоединенным* $(r \geqslant 1)$ вектором, отвечающим собственному значению $\nu_i$. Полагая $x_j = (A - \nu_i)^{r-j}$, $j = 0, 1, \ldots, r$, получаем цепочку собственных и присоединенных векторов со свойством

$$(A - \nu_i)x_0 = 0, \quad (A - \nu_i)x_1 = x_0, \ldots, (A - \nu_i)x_r = x_{r-1}. \tag{1.21}$$

Легко видеть, что векторы $x_j$ линейно независимы и $A$ инвариантно в пространстве, порожденном этими векторами. Из сравнения (1.15) и (1.21) видно, что матрицей преобразования $A$ в базисе $(x_j)$ служит $\nu_i$-клетка Жордана.

Следующая теорема Жордана, которую приведем без доказательства, занимает в линейной алгебре центральное место.

**Теорема 1.4** (Жордана)**.** *Собственное подпространство $X_i$ матрицы $A$ допускает базис, составленный из цепочек собственных и присоединенных векторов. В частности, матрицу $B$ в теореме* 1.3 *можно выбрать так, чтобы каждое $J_i$ являлось прямой суммой $\nu_i$-клеток Жордана. С точностью до перестановки эти клетки определяются однозначно по $A$.*

Матрица $J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n)$ называется жордановой нормальной формой матрицы $A$. Говорят также, что матрица $B$ приводит $A$ к жордановой форме.

Равенство (1.19) можно записывать и в форме $AB_i = B_iJ_i$, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, свойство линейной независимости столбцов $B_i$ выполняется автоматически, если $J_i$ состоит из одной клетки. Собственное значение $\nu_i$ в этом случае называется простым. В терминах (1.1), (1.7) требование простоты $\nu_i$ равносильно совпадению $s_i = r_i$ кратности и порядка $\nu_i$.

**1.3. Матричные многочлены.** Выражение $z - A$, играющее важную роль в п. 1.2, можно рассматривать как многочлен первой степени с матричным коэффициентом $A$. Рассмотрим общий матричный многочлен этого типа:

$$P(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}^{l\times l}, \tag{1.22}$$

который уже встречался при доказательстве теоремы 1.1. Матричные многочлены (1.22) называются также $z$-матрицами [17]. Обычно их исследуют с помощью так называемых элементарных преобразований, не меняющих характеристического уравнения

$$\det P(z) = 0. \tag{1.23}$$

В данном пункте, следуя терминологии М. В. Келдыша [13], эти многочлены рассмотрим со спектральной точки зрения. Именно, корни $\nu_j$ уравнения (1.23) назовем собственными значениями (кратности $s_i$) многочлена $P(z)$. Матрица $P^{-1}(z)$ является рациональной функцией, элементы которой в точке $\nu_j$ допускают полюса. Наивысший из порядков полюса этих элементов назовем

порядком собственного значения $\nu_j$. Наконец, с многочленом $P(z)$ свяжем матрицу $A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$, записанную в блочном $(n\times n)$-виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

при $n = 1$ эта матрица совпадает с $a_0$.

**Лемма 1.5.** *Матрица $A$ и матричный многочлен $P(z)$ имеют один и тот же набор собственных значений, причем их кратности и (при $\nu \neq 0$) порядки совпадают.*

*Доказательство.* При $n = 1$ достаточно установить, что порядки собственных значений многочлена $z - A$ и матрицы $A = a_0$ совпадают. Согласно (1.5), (1.19),

$$B^{-1}[(z - A)^{-1}]B = \operatorname{diag}[f(J_1), \dots, f(J_n)],$$

где $f(u) = (z-u)^{-1}$. Применяя к $f(J_i)$ формулу (1.14), где $r = r_i$ — порядок собственного значения $\nu_i$, приходим к заключению, что $r_i$ является и порядком многочлена $z - A$.

В общем случае при $n > 1$ все следует из матричного тождества

$$(z - A)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & z & z & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

где $P_k(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$, $k = 0, 1, \dots, k$. Справедливость этого равенства устанавливается непосредственно прямой проверкой.

Если $\nu$ — собственное значение $P(z)$, то, аналогично (1.21), векторы $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{C}^l$, определяемые из равенств

$$\begin{gathered} P(\nu)x_0 = 0, \quad P(\nu)x_1 + P'(\nu)x_0 = 0, \dots, \\ P(\nu)x_r + P'(\nu)x_{r-1} + \dots + \frac{P^{(r)}(\nu)}{r!}x_0 = 0, \end{gathered} \tag{1.26}$$

назовем цепочкой собственных и присоединенных векторов многочлена $P(z)$, отвечающих собственному значению $\nu$.

**Теорема 1.5.** *В обозначениях* (1.24) *равенство $AB = B_0 J_0$, где $B_0 \in \mathbb{C}^{s\times s_0}$, $J_0 \in \mathbb{C}^{s_0\times s_0}$, равносильно тому, что*

$$B_0 = \downarrow (b_0, b_0 J, \dots, b_0 J^{n-1}), \quad b_0 J^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_0 J_0^i. \tag{1.27}$$

*Матрица $J_0$ здесь является клеткой Жордана тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $b_0 \in \mathbb{C}^{l\times s_0}$ образуют цепочку собственных и присоединенных векторов многочлена $p(z)$.*

*Доказательство.* В одну сторону утверждение получается непосредственно из правила блочного перемножения матриц (1.24) и (1.27). Обратно, пусть

$$AB_0 = B_0 J_0, \quad B_0 = \downarrow (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}).$$

Тогда в силу (1.24)

$$b_{j+1} = b_j J_0, \ j = 0, 1, \dots, n-1, \ \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i = b_{n-1} J_0,$$

откуда следует (1.27).

Пусть $J_0 = J$ является клеткой Жордана (1.15), и $x_0, \dots, x_r$ — последовательные столбцы матрицы $b_0$. Согласно (1.16),

$$(J^p)_{ij} = \begin{cases} f_p^{(i-j)}(\nu)/(i-j)!, & i \geqslant j, \\ 0, & i < j, \end{cases} \tag{1.28}$$

где $f_p(u) = u^p,\ i, j = 0, 1, \dots, r$. Применяя соотношения (1.17) к (1.27), получим:

$$\sum_j (J^n)_{ji} x_j = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \sum_j (J^p)_{ji} x_j.$$

Подставляя сюда выражения (1.28) и учитывая, что

$$P(z) = f_n(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p f_p(z),$$

приходим к соотношениям (1.26):

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{(i-j)!} P^{(i-j)}(\nu) x_j = 0, \quad i = 0, \dots, r.$$

Поскольку эти рассуждения можно обратить, теорему можно считать доказанной.

Рассмотрим особо скалярный случай $l = 1$. Запишем

$$P(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - \nu_j)^{s_j}, \quad s_1 + \ldots + s_m = n, \tag{1.29}$$

где $\nu_i \neq \nu_j$ при $i \neq j$, и пусть $J_i$ означает $\nu_i$-клетку Жордана порядка $s_i$. Положим

$$\begin{gathered} b_i = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{1 \times s_i}, \quad B_i = \downarrow (b_i, b_i J, \dots, b_i J^{n-1}) \in \mathbb{C}^{n \times s_i}, \\ B = (B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^{n \times n}. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Так как $P^{(j)}(\nu_i) = 0,\ j = 0, 1, \dots, s_i - 1$, по определению (1.26) матрица $b_i$ составлена из цепочки собственных и присоединенных «векторов» $x_k \mathbb{R}$. Поэтому на основании теоремы 1.5 и замечания в конце п. 1.2 матрица $B$ обратима и приводит $A$ к жордановой форме

$$B^{-1} A B = J, \quad J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_n). \tag{1.31}$$

Ясно, что собственные значения $\nu_j$ матрицы $A$ просты. В этом легко убедиться и с помощью леммы 1.5, поскольку при $l = 1$ порядок и кратность собственного значения $\nu_j$ многочлена (1.29) совпадают и равны $s_j$.

Отметим, что в силу (1.28) матрица $B_i$ в (1.30) составлена из столбцов

$$h^{(j)}(\nu_i)/j!, \quad i = 0, 1, \dots, s_i - 1,$$

где $h(z) = \downarrow (1, z, \dots, z^{n-1})$.

## 2. Аналитичность по Дуглису

**2.1. Основные понятия.** Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{s \times s}$ обратима и все ее собственные значения $\nu$ имеют положительную мнимую часть, т.е. лежат в верхней полуплоскости. Рассмотрим в области $D$ на комплексной плоскости непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\phi(z) = (\phi_1(z), \dots, \phi_s(z))$ комплексной переменной $z = x + iy$. Эта функция называется *аналитической по Дуглису*, если ее частные производные связаны соотношением

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \tag{2.1}$$

При $J = i$ это соотношение составляет условие Коши — Римана и, следовательно, определение совпадает с определением обычной аналитичности. В общем случае, чтобы подчеркнуть зависимость от $J$, функцию $\phi$ называем также *$J$-аналитической*.

Если матрица $B \in \mathbb{C}^{s\times s}$ обратима, то при подстановке $\tilde{\phi} = B\phi$ уравнение (2.1) переходит в

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y} - \tilde{J}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} = 0 \qquad (2.1^{\sim})$$

с подобной матрицей $\tilde{J} = B^{-1}JB$. Другими словами, вектор-функция $\tilde{\phi}$ является $\tilde{J}$-аналитической в области $D$.

Согласно теореме 1.3, матрицу $B = (B_1, \dots, B_n)$, $B_k \in \mathbb{C}^{s\times s_k}$ можно выбрать так, чтобы

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m), \quad \sigma(J_k) = \{\nu\}. \qquad (2.2)$$

В этом случае по отношению к соответствующей блочной записи $(\phi_1, \dots, \phi_k)$ вектора $\phi$ система (2.1) распадается на

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial y} - J_k\frac{\partial\phi_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Другими словами, блочные компоненты $\phi_k$ являются $J_k$-аналитическими функциями.

Согласно теореме 1.4, можно также добиться, чтобы все матрицы $J_k$ в (2.2) были клетками Жордана (в этом случае $\nu_k$ могут повторяться и $n$ есть число всех клеток в жордановой форме матрицы $J$). В дальнейшем, однако, если не оговорено особо, на матрицу $J$ не накладываем дополнительных ограничений вида (2.2).

Как отмечено выше, уравнение (2.1) можно рассматривать как аналог условия Коши — Римана. Точно так же можно ввести эквивалентное ему понятие моногенности, т.е. существования комплексной производной. Удобно с каждым комплексным числом $t = t_1 + it_2 \in \mathbb{C}$ связать $(s \times s)$-матрицу

$$[t] = t_1 + t_2 J, \quad t_j \in \mathbb{R}. \qquad (2.3)$$

Ее собственными значениями служат числа $t_1 + \nu t_2$, $\nu \in \sigma(J)$. В частности, матрица $[t]$ обратима при $t \neq 0$. Обратная матрица $[t]^{-1}$ как функция $t$ однородна степени $-1$ и, следовательно, ее норма в $\mathbb{C}^{s\times s}$ допускает оценку

$$|[t]^{-1}| \leqslant C|t|^{-1}. \qquad (2.4)$$

Если вектор-функция $\phi$ аналитична по Дуглису в области $D$, то при фиксированном $z \in D$ по условию дифференцируемости

$$\phi(z + ty) - \phi(z) = t_1\phi_x(z) \ + \ t_2\phi_y(z) + o(t) \ \text{ при } \ t \to 0.$$

С учетом (2.1) и (2.3), (2.4) отсюда следует, что $[t]^{-1}\{\phi(z + t) - \phi(z)\} = \phi_x(z) + o(1)$ при $t \to 0$. Таким образом, в каждой точке $z \in D$ существует предел

$$\lim_{t\to 0}[t]^{-1}\{\phi(z_t) - \phi(z)\} = \phi'(z), \qquad (2.5)$$

который совпадает с частной производной $\phi_x$ в точке $z$. Обратно, пусть предел (2.5) существует в каждой точке $z \in D$ и полученная вектор-функция $\phi'$ непрерывна. Тогда, полагая последовательно $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$ в (2.4), приходим к выражениям $\phi_x = \phi'$, $\phi_y = J\phi'$ для частных производных $\phi$. В свою очередь, они означают $J$-аналитичность $\phi$.

Таким образом, понятие $J$-аналитичности можно определить условием «моногенности» (2.5). Если функция $\phi$ принадлежит классу $C^{n+1}(D)$, то вместе с ней аналитическими по Дуглису будут и все ее частные производные до $n$-го порядка включительно, при этом

$$\phi^{(k)} = \frac{\partial^k\phi}{\partial x^k}$$

можно рассматривать как последовательные «комплексные» производные (2.5) функций $\phi^{(0)} = \phi$, $\phi^{(1)} = \phi'$, $\phi^{(2)} = (\phi')'$ и т.д. Остальные частные производные, согласно (2.1), выражаются по формуле

$$\frac{\partial^k\phi}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = J^r\phi^{(k)}, \quad 0 \leqslant r \leqslant k. \qquad (2.6)$$

Ниже в п. 2.2 будет показано, что в действительности $J$-аналитические функции бесконечно дифференцируемы в области своего задания.

Наряду с $s$-вектор-функциями $\phi$, уравнение (2.1) рассматриваем и для $(s\times s)$-матриц-функций $F(z)$ при дополнительном предположении коммутирования $F(z)J=JF(z)$ для всех $z$. Последнее требование обеспечивает инвариантность преобразования $\phi\to F\phi$ в классе аналитических по Дуглису $s$-вектор-функций $\phi$. При этом, очевидно, производная $(F\phi)'=F'\phi+F\phi'$.

Наиболее важные примеры $J$-аналитических матриц-функций строятся с помощью функций от матриц. Именно, пусть скалярная функция $f$ аналитична в открытом множестве, которое при каждом $\nu\in\sigma(J)$ содержит образ $D$ при аффинном преобразовании

$$z=x+iy\to x+\nu y. \tag{2.7}$$

комплексной плоскости. Тогда, согласно п. 1.2, можем ввести матрицу-функцию $F(z)=f([z])$, определенную для всех $z\in D$. Очевидно, ее значения коммутируют с $J$ и на основании леммы 1.2 ее частные производные $F_x=f'([z])$, $F_y=Jf'([z])$. Следовательно, эта функция $J$-аналитична, причем

$$\{f([z])\}'=f'([z]). \tag{2.8}$$

Очевидно, матрицу $[z]$ здесь можно заменить на $[z-z_0]$ с фиксированной точкой $z_0$. В частности, при любом целом $k$ матрица $[z-z_0]^k$ и вектор $[z-z_0]^kc$, $c\in\mathbb{C}^s$, аналитичны по Дуглису. Соответственно, конечные суммы

$$\sum_k[z-z_0]^kc_k,\quad c_k\in\mathbb{C}^s \tag{2.9}$$

являются рациональными $J$-аналитическими вектор-функциями. При $k\geqslant 0$ эти суммы описывают $J$-аналитические многочлены.

Существует обратимое линейное преобразование, переводящее аналитические вектор-функции в $J$-аналитические.

**Теорема 2.1.** *Пусть матрица $J$ имеет блочно-диагональный вид* (2.2) *и соответственно этому записываются $s$-векторы $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ с $s_k$-векторами $\varphi_k$. Пусть задана $J$-аналитическая в области $D$ функция $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_m)\in C^\infty(D)$ и $D_k$ есть образ $D$ при аффинном преобразовании $x=x+iy\to x+\nu_k y$. Тогда формула*

$$\phi_k(x+iy)=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{y^r}{r!}(J_k-\nu_k)^r\psi_k^{(r)}(x+\nu_k y),\quad k=1,\dots,m, \tag{2.10}$$

*устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\phi$ и $s$-вектором $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_m)$, где $s_k$-вектор-функция $\psi_k$ задана и аналитична в области $D_k$, $k=1,\dots,m$.*

*Доказательство.* Доказательство достаточно провести в предположении $m=1$, т.е. когда матрица $J$ имеет единственное собственное значение $\nu$. В этом случае матрица $J=\nu$ нильпотентна:

$$(J-\nu)^s=0. \tag{2.11}$$

Введем в классе $C^\infty(D)$ линейную операцию

$$\exp\left\{y(J-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\right\}=\sum_{i\geqslant 0}\frac{y^i}{i!}(J-\nu)^i\frac{\partial^i}{\partial x^i}. \tag{2.12}$$

В силу (2.11), сумма здесь конечна и обрывается на $i=s-1$.

Записывая соотношение $e^{-z}e^z=1$ в форме рядов, определяющих экспоненты, нетрудно убедиться, что эта операция обратима и обратной к ней служит $\exp(-yJ_0\partial/\partial x)$, $J_0=J-\nu$. По определению (2.12) имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-J\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(yJ_0\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\left(J_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^k+$$

$$+\sum_{k\geqslant 0}\frac{y^k}{k!}\left(J_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}-J\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(yJ_0\frac{\partial}{\partial x}\right) = \exp\left(yJ_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \nu\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Следовательно, $\phi$ удовлетворяет уравнению (2.1) тогда и только тогда, когда вектор-функция $u = \exp(-yJ_0\partial/\partial x)\phi$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.13}$$

В свою очередь, при аффинном преобразовании (2.7) это уравнение переходит в уравнение Коши — Римана. Другими словами, функция $\psi$, определенная равенством $u(x,y) = \psi(x+\nu y)$, аналитична в области $\{x+\nu y \,|\, x+iy \in D\}$. Вместе с соотношением $\phi = \exp(yJ_0\partial/\partial x)u$ это обстоятельство завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в формуле (2.12) суммирование фактически ведется по $0 \leqslant i \leqslant r-1$, где $r$ — порядок собственного значения $\nu$. Соответственно в формуле (2.10) суммирование ведется по $0 \leqslant r \leqslant r_k - 1$, где $r_k$ — порядок собственного значения $\nu_k$.

Если функция $f = \psi$ скалярна, то формула (2.10) определяет $J$-аналитическую матрицу-функцию $F = \phi$. С учетом (1.14) она в точности совпадает с матрицей $f([z])$, определенной выше.

В качестве иллюстрации рассмотрим функцию $f(t) = t^\zeta p(\ln t)$ в некотором секторе комплексной плоскости $t$ с вершиной $t = 0$, где $\zeta \in \mathbb{C}$ и $p$ — скалярный многочлен. Запишем

$$\{t^\zeta p(\ln t)\}^{(k)} = t^{\zeta-k}p_k(\ln t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.14}$$

где многочлен $p_k$ имеет одинаковую с $p$ степень и определяется равенством

$$p_k(t) = \prod_{i=0}^{k-1}(\zeta - i + d/dt)p(t).$$

Подставляя это равенство в (2.10), получим

$$[z]^\zeta p(\ln[z]) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{y^k(x+\nu y)^{\zeta-k}}{k!}p_k(\ln(x+\nu y))(J-\nu)^k.$$

В полярных координатах $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ оно перепишется в форме

$$[z]^\zeta p(\ln[z]) = r^\zeta \sum_{i\geqslant 0}\frac{\ln^i r}{i!}R_i(\theta),$$

$$R_i(\theta) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\sin^k\theta(\cos\theta+\nu\sin\theta)^{\zeta-k}}{k!}h_k^{(i)}[\ln(\cos\theta+\nu\sin\theta)](J-\nu)^k.$$

Все суммы здесь конечны, поскольку многочлен $h_k$ имеет ту же степень, что и $h$ и, значит, $R_i = 0$ при номерах $i$, превосходящих эту степень.

Отметим еще следующую связь $J$-аналитических функций с аналитическими. Пусть $X(D)$ — некоторое линейное над полем $\mathbb{R}$ пространство непрерывных в $D$ функций. Условимся говорить, что $X(D)$ является классом единственности для уравнения (2.13), если любое его решение из этого класса может быть только константой.

Например, класс функций $u \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на некоторой граничной дуге $\Gamma \subseteq \partial D$, является классом единственности. В самом деле, преобразование (2.7) переводит решения уравнения (2.13) в аналитические функции в области $\{x+\nu y, x+iy \in D\}$, поэтому этот факт есть следствие известной теоремы единственности.

Рассмотрим другой пример этого типа. Пусть область $D$ имеет кусочно-гладкую границу и $X(D)$ состоит из непрерывных в $\overline{D}$ ограниченных функций, действительная часть которых обращается в нуль на границе. Тогда $X(D)$ является классом единственности для уравнения (2.1). Доказательство совершенно аналогично.

**Лемма 2.1.** *Пусть матрица $J$ треугольна и $X(D)$ является классом единственности для уравнения* (2.7) *при любом $\nu \in \sigma(J)$. Тогда $X(D)$ — класс единственности для уравнения* (2.1). *Другими словами, если вектор-функция $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_s)$ является $J$-аналитической и все ее компоненты $\phi_k \in X(D)$, то эта функция постоянна в области $D$.*

*Доказательство.* Пусть, например, матрица $J$ нижнетреугольна, т.е. $J_{kr} = 0$ при $k < r$. Тогда диагональные элементы $\nu_k = J_{kk}$ являются собственными значениями матрицы $J$ и (2.1) запишется покомпонентно в виде

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \nu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \nu_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = J_{21} \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \ \dots, \ \frac{\partial \phi_s}{\partial y} - \nu_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = \sum_{k=1}^{s-1} J_{sk} \frac{\partial \phi_k}{\partial y}.$$

По условию $\phi_1 \in X(D)$, так что из первого уравнения следует $\phi_1 = \mathrm{const}$. Следовательно, второе уравнение переходит в (2.7) с $\nu = \nu_2$ и из тех же соображений $\phi_2 = \mathrm{const}$. Повторяя эту процедуру, получим $\phi = \mathrm{const}$ в области $D$.

Часто используют комплексные обозначения производных:

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.15}$$

В этих обозначениях система (2.1) переходит в

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = Q \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad Q = (1 - iJ)^{-1}(1 + iJ). \tag{2.16}$$

Очевидно, собственные значения $q$ матрицы $Q$ удовлетворяют неравенству $|q| < 1$.

Поскольку $z + \overline{z}Q = 2(1 - iJ)(x + Jy)$, все рассмотрения можно провести в рамках этой системы, заменяя всюду $[z]$ матрицей $z_Q = z + \overline{z}\ Q$. В частности, формула (2.14) переходит в

$$\phi(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\overline{z}^k}{k!} (Q - q)^k \psi^{(k)}(z + q\overline{z}), \quad \sigma(Q) = \{q\}.$$

Особенно простая картина получается при $\sigma(J) = \{i\}$, когда матрица $Q$ нильпотентна.

Например, предыдущая формула принимает вид

$$\phi(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\overline{z}^k}{k!} Q^k \psi^{(k)}(z), \quad \sigma(Q) = \{0\}. \tag{2.17}$$

**2.2. Интеграл Коши.** Как и в скалярном случае, для аналитических по Дуглису функций можно развить теорию интеграла Коши. Нужно лишь выражение $dt/(t - z)$ заменить его матричным аналогом $[t - z]^{-1}[dt]$, где матричный дифференциал $[dt] = d\xi + J\, d\eta$ имеет тот же смысл, что и в (2.3).

Пусть вектор-функция $\phi$ непрерывна в замкнутой конечной области $\overline{D}$, ограниченной кусочно-гладким контуром $\Gamma$, и $J$-аналитична внутри нее. Тогда, применяя к левой части (2.1) формулу Грина, приходим к равенству

$$\int_\Gamma [dt]\phi(t) = 0, \tag{2.18}$$

которое является аналогом теоремы Коши. Контур $\Gamma$ здесь ориентирован положительно по отношению к $D$, т.е. оставляет область $D$ слева.

Убедимся далее, что для любого целого $k$ и $z \in D$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [t - z]^{-1}[dt] = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 1, & k = -1. \end{cases} \tag{2.19}$$

В самом деле, рассмотрим в верхней полуплоскости $\{\mathrm{Im}\, u > 0\}$ аналитическую функцию

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (\xi - x + u(\eta - y))^k (d\xi + u\, d\eta), \tag{2.20}$$

где $z = x + iy, t = \xi + i\eta$. Очевидно, при фиксированном $u = \nu$ преобразование (2.7) плоскости оставляет неподвижными точки действительной прямой и переводит верхнюю полуплоскость $y > 0$ на себя. Применяя эту подстановку к интегралу (2.20), получим:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\Gamma}_0} \left(\tilde{t} - \tilde{z}\right)^k \, d\tilde{t} = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 1, & k = -1. \end{cases}$$

На основании теоремы 1.2(б) отсюда следует (2.19).

В свою очередь, с помощью (2.19) легко обосновать формулу Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} [t - z]^{-1} [dt] \phi(t), \quad z \in D. \tag{2.21}$$

Действительно, в силу (2.19) ее достаточно доказать в предположении, что $\phi(z) = 0$ (точка $z \in D$ фиксирована). Применяя к функции $\tilde{\Phi}(t) = [t - z]^{-1}\Phi(t)$ в области $D \cap \{t, |t - z| > \epsilon\}$, где $\epsilon > 0$ достаточно мало, формулу (2.18), получим:

$$\int\limits_{\Gamma_0} [t - z]^{-1} [dt] \Phi(t) = \int\limits_{|t-z|=\epsilon} [t - z]^{-1} [dt] \Phi(t) = \int\limits_0^{2\pi} [e^{i\theta}]^{-1} [ie^{i\theta}] \Phi(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Правая часть этого равенства непрерывно зависит от $\theta$ и при $\varepsilon \to 0$ обращается в нуль, поскольку по предположению $\Phi(z) = 0$. Это рассуждение завершает доказательство (2.21).

Интеграл в правой части (2.21) определяет внутри $D$ функцию, которую можно дифференцировать под знаком интеграла, пользуясь правилом (2.8). Следовательно, функция $\phi$ бесконечно дифференцируема (факт, отмеченный в п. 2.1) и ее комплексные производные $\phi^{(n)}$ вычисляются по правилу

$$\phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} [t - z]^{-n-1} [dt] \phi(t). \tag{2.22}$$

Как и в аналитическом случае, из формулы Коши можно вывести ряд следствий. Часть из них, касающиеся изолированных особых точек, отложим до п. 2.3, остальные объединим в следующей теореме.

**Теорема 2.2.** (а) *Пусть последовательность функций $\phi_k(z)$, аналитических по Дуглису в области $D$, стремится к функции $\phi$ равномерно на компактных подмножествах $D$. Тогда функция $\phi$ также аналитична по Дуглису и все производные $\phi_k^{(n)} \to \phi^{(n)}$ в указанном выше смысле.*

(б) *Пусть функция $\phi$ непрерывна в $D$ и аналитична по Дуглису в $D \backslash \gamma$, где $\gamma$ — некоторая гладкая дуга. Тогда $\phi$ аналитична по Дуглису во всей области $D$.*

*Доказательство.* (а) Переходя при необходимости к меньшей подобласти, не ограничивая общности, можно считать, что область $D$ конечна и ограничена кусочно-гладким контуром $\Gamma$, а функция $\phi$ непрерывна в $\overline{D}$.

Применяя формулу (2.21) к $\phi_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, убеждаемся, что $\phi$ аналитична по Дуглису в области $D$. С помощью (2.22) точно так же показываем, что $\phi_k^{(n)} \longrightarrow \phi^{(n)}$ равномерно на компактных подмножествах $D_0$.

(б) Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma$ соединяет две точки контура $\Gamma$ и, за исключением их, содержится в $D$. Достаточно показать, что $\phi$ аналитична по Дуглису внутри $D$. Пусть $D_0, D_1$ — области, на которые разбивается $D$ дугой $\gamma$. Тогда на основании формул (2.18) и (2.21), примененных к $D_k$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_k} [t - z]^{-1} [dt] \phi(t) = \begin{cases} \phi(z), & z \in D_k, \\ 0, & z \in D_{1-k}. \end{cases}$$

Складывая эти равенства и учитывая, что интегралы по общей дуге взаимно уничтожаются, приходим к формуле (2.21), справедливой для всех $z \in D$. Отсюда следует $J$-аналитичность $\phi$ всюду в $D$.

**2.3. Степенные ряды Тейлора и Лорана.** По аналогии с аналитическим случаем, степенной ряд (2.9) по всем целым $k$ назовем рядом Лорана (Тейлора при $k \geqslant 0$). Если его частичные суммы сходятся равномерно на компактных подмножествах области, то сумма этого ряда является функцией, аналитической по Дуглису в этой области.

Для исследования вопросов сходимости необходима оценка норм целых степеней матрицы (2.3). Удобно нормы в $\mathbb{C}^s$ и в $\mathbb{C}^{s\times s}$ определить как сумму модулей элементов, соответственно, векторов и матриц. Этот выбор обусловлен тем, что

$$|Ax| \leqslant |A|\,|x|, \quad |AB| \leqslant |A|\,|B| \tag{2.23}$$

для любых $x \in \mathbb{C}^s$, $A, B \in \mathbb{C}^{s\times s}$.

Аффинное преобразование (2.7) плоскости переводит единичную окружность на эллипс, большую и малую полуоси которого обозначим $a_\nu$ и $b_\nu$. Таким образом,

$$b_\nu \leqslant |x+\nu y| \leqslant a_\nu, \quad x^2+y^2=1. \tag{2.24}$$

В частности, при $x=1,\ y=0$ отсюда получаем неравенства $b_\nu \leqslant 1 \leqslant a_\nu$. Положим

$$a = \max_{\nu\in\sigma(J)} a_\nu, \quad b = \min_{\nu\in\sigma(J)} b_\nu, \quad q = \frac{a}{b}.$$

**Лемма 2.2.** *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} |[z]^k| &\leqslant C a^k |z|^k, \quad k \geqslant 0, \\ |[z]^k| &\leqslant C\, b^k |z|^k, \quad k \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

*где постоянная $C>0$ зависит только от $J$.*

*Доказательство.* Пусть $B^{-1}JB = \tilde{J}$ и $[\tilde{z}]$ определяется аналогично (2.1) по $\tilde{J}$. Тогда $B^{-1}[z]^k B = [\tilde{z}]^k$, и с учетом (2.23) отсюда следует

$$|[z]^k| \leqslant |B|\,|B^{-1}|\,|[\tilde{z}]^k|.$$

Поэтому, не ограничивая общности, матрицу $J$ можно взять в форме (2.2) с клетками Жордана $J_k$. Проводя рассмотрения поблочно, можно с самого начала считать $J$ клеткой Жордана (1.15). В этом случае явное выражение для матрицы $[z]^k = f_k(J)$, $f_k(u) = (x+uy)^k$, дается равенством (1.16). В соединении с (2.24) оценка (2.25) отсюда следует непосредственно.

**Теорема 2.3.** (а) *Пусть функция $\phi$ аналитична по Дуглису в области $D$, содержащей круг $|z-z_0| \leqslant qR$. Тогда в круге $|z-z_0| \leqslant R$ функция $\phi$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Тейлора*

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[z-z_0]^k \phi^{(k)}(z_0). \tag{2.26}$$

(б) *Пусть функция $\phi$ аналитична по Дуглису в области $D$, содержащей кольцо $q^{-1}R_0 \leqslant |z-z_0| \leqslant qR_1$. Тогда в кольце $R_0 \leqslant |z-z_0| \leqslant R_1$ функция $\phi$ раскладывается в ряд Лорана*

$$\phi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [z-z_0]^k c_k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [t-z_0]^{-k-1}[dt]\phi(t), \tag{2.27}$$

*где $\Gamma$ — окружность $|z-z_0|=R$, $R_0 \leqslant R \leqslant R_1$, ориентированная против часовой стрелки. При этом ряды $\sum_{k\geqslant 0}$ и $\sum_{k\leqslant 0}$ сходятся абсолютно и равномерно в областях $|z| \leqslant R_1$ и $|z| \geqslant R_0$, соответственно.*

*Доказательство.* (а) При достаточно малом $\varepsilon > 0$ окружность $\Gamma : |z - z_0| = q(R + \varepsilon)$ содержится в $D$, так что по формуле Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [t - z]^{-1} [dt] \phi(t), \quad |z - z_0| \leqslant R. \tag{2.28}$$

Запишем $[t - z] = [t - z_0]\,(1 - [t - z_0]^{-1}[z - z_0])$ и воспользуемся леммой 2.2, согласно которой ряд

$$[t - z]^{-1} = [t - z_0]^{-1} \sum_{k \geqslant 0} [t - z_0]^{-k} [z - z_0]^k$$

сходится абсолютно и равномерно по $t \in \Gamma$, $|z - z_0| \leqslant R$. Подставляя его в (2.28), приходим к разложению (2.27), где $k \geqslant 0$. Применяя к интегралам, определяющим $c_k$, формулу (2.22), получим разложение Тейлора (2.26).

(б) Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что окружности $\Gamma_1 : |z - z_0| = q(R_1 + \varepsilon)$ и $\Gamma_0 : |z - z_0| = q^{-1}(R_0 - \varepsilon)$ содержатся в $D$. Тогда по формуле Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} [t - z]^{-1} [dt] \phi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} [t - z]^{-1} [dt] \phi(t), \tag{2.29}$$

где $R_0 \leqslant |z - z_0| \leqslant R_1$. Действуя аналогично (а), отсюда приходим к разложению

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} [t - z]^{-1} [dt] \phi(t) = \sum_{k \geqslant 0} [z - z_0]^k c_k,$$

где $c_k$ определяется как в (2.27) по окружности $\Gamma_1$. По теореме Коши эту окружность можно заменить на $\Gamma$.

Для второго интеграла воспользуемся разложением

$$[t - z]^{-1} = -[z - z_0]^{-1} \sum_{k \leqslant 0} [t - z_0]^{-k} [z - z_0]^k,$$

которое абсолютно и равномерно сходится по $t \in \Gamma_0$, $|z - z_0| \geqslant R_0$. В результате аналогично предыдущему получим разложение

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} [t - z]^{-1} [dt] \phi(t) = -\sum_{k \leqslant -1} [z - z_0]^k c_k,$$

где $c_k$ определяется, как в (2.27), по окружности $\Gamma_0$, которую можно опять заменить на $\Gamma$. Подставляя эти разложения в (2.29), получим (2.27).

Точка $z_0$ называется изолированной особой точкой функции $\phi$, если область $D$ содержит некоторую «проколотую» окрестность $\{z,\ 0 < |z - z_0| < R\}$. Условимся, что $\phi$ имеет порядок $r$ в точке $z_0$, если функция $|\phi(z)||z - z_0|^{-r}$ ограничена в окрестности $z_0$.

Теорема 2.3 позволяет дать другой вариант этого определения. Именно, функция $\phi$ имеет порядок $r$ в точке $z_0$ тогда и только тогда, когда $c_k$ при $k < r$ в разложении (2.17) или, что равносильно, функция $[z - z_0]^{-r}\phi(z)$ аналитична по Дуглису в окрестности $z_0$. В частности, при $r \geqslant 0$ особая точка $z_0$ «устранима».

В самом деле, если $\phi$ имеет порядок $r$ в точке $z_0$, то в силу (2.25), (2.27) имеем оценку

$$|c_k| \leqslant M R^{r-k}, \tag{2.30}$$

где постоянная $M > 0$ зависит только от $k$ и $R_0 \leqslant R \leqslant R_1$. Поскольку $R_0$ можно взять сколь угодно малым, отсюда $c_k = 0$ при $k < r$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Другим следствием теоремы 2.3 является известный результат о нулях функции: если $\phi(z_n) = 0$ и последовательность $\{z_n\}$ имеет предельную точку внутри $D$, то $\phi \equiv 0$ в области $D$. В комбинации с теоремой 2.2(б) он приводит к другому варианту теоремы единственности: если функция $\phi \in \mathbb{C}(\overline{D})$ аналитична по Дуглису в $D$ и обращается в нуль на граничной дуге, то $\phi \equiv 0$ в области $D$. Доказательство совершенно аналогично аналитическому случаю [3].

С помощью бесконечно удаленной точки $\infty$ комплексная плоскость расширяется до сферы Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где окрестностями бесконечности $\infty$ считаются дополнения к кругам. Понятие изолированной особой точки сохраняется и для $z_0 = \infty$, порядок $r$ на $\infty$ определяется условием ограниченности в окрестности $\infty$ функции $|z|^{-r}|\phi(z)|$. Устремляя в (2.30) радиус $R$ к $\infty$, убеждаемся, что это равносильно $c_k = 0$ в разложении (2.27). В частности, при $r \leqslant 0$ точку $\infty$ называем *устранимой особой точкой*. При $r = -1$ используется также выражение «$\phi$ исчезает на $\infty$», широко употребительное для аналитических функций.

Аналогичные соображения доказывают и теорему Лиувилля: если $\phi$ аналитична по Дуглису и ограничена во всей плоскости, то $\phi$ — постоянный вектор.

В самом деле, имеет место оценка (2.20) с $r = 0$. Устремляя здесь $R \to 0$ при $k < 0$ и $R \to \infty$ при $k > 0$, получим $c_k = 0$, $k \neq 0$.

Как следствие, отсюда получаем разложение рациональных (по Дуглису) функций на простейшие дроби. Именно, если $\phi$ аналитична по Дуглису всюду на сфере Римана, за исключением конечного числа точек $z_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, $z_n = \infty$, в которых имеет конечные порядки $r_j \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, $r_n \geqslant 0$, то

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} [z - z_j]^k c_{kj}.$$

Отметим в заключение, что условие на радиусы, определяющие круг и кольцо в теореме 2.3, не являются точными. Пусть матрица $J$ имеет единственное собственное значение $\nu$. Если $\nu = i$, то, очевидно, $a = b = 1$ в (2.24) и ситуация с радиусами сходимости аналогична аналитическому случаю.

В общем случае положим $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = \phi(z)$, $\tilde{z} = x + \nu y$. Функция $\tilde{\phi}$ задана и $\tilde{J}$ -аналитична в области $\tilde{D}$, являющейся образом $D$ при преобразовании $z \to \tilde{z}$, где $\tilde{J} = i\nu^{-1}J$. Поэтому с учетом (2.24) отсюда заключаем, что точные условия на радиусы состоят в том, чтобы круг $\{|\tilde{z} - \tilde{z_0}| \leqslant Ra\}$ в теореме 2.3(а) и кольцо $\{R_0 b \leqslant |\tilde{z} - \tilde{z_0}| \leqslant R_1 a\}$ в теореме 2.3(б) содержались в области $D$.

**2.4. Неопределенный интеграл.** Рассмотрим в классе функций, аналитических по Дуглису в области $D$, уравнение

$$\phi^{(k)} = \psi, \tag{2.31}$$

определяемое оператором $k$-кратного дифференцирования. При $\psi = 0$ все его решения являются $J$-аналитическими многочленами

$$p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} [z]^j c_j$$

степени не выше $k-1$, как это следует из теоремы 2.3(а). Класс этих многочленов обозначим $P_{k-1}$.

**Теорема 2.4.** *Если область $D$ односвязна, то интеграл*

$$\phi(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{z_0}^{z} [z - t]^{k-1} [dt] \psi(t) \tag{2.32}$$

*не зависит от пути интегрирования и определяет решение уравнения* (2.31) *В случае произвольной области $D$ функция $\phi(z)$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\Gamma} [t]^i [dt] \psi(t) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{2.33}$$

*для любого контура $\Gamma \subseteq D$.*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала вторую часть теоремы. При $k = 1$ ее утверждение почти очевидно. В самом деле, согласно (2.1), (2.3), для $t = \xi + i\eta$ выражение

$$[dt]\phi'(t) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta$$

является полным дифференциалом функции $\phi$, так что

$$\int_{z_1}^{z_2}[dt]\phi'(t)=\phi(z_2)-\phi(z_1).$$

В частности, замыкая здесь дугу $\overline{z_1z_2}$, приходим к выводу о справедливости условия (2.24) по отношению к $\psi=\phi'$. Обратно, пусть функция $\psi$ удовлетворяет этому условию. Пусть $\gamma_j$, $j=1,2$ — две дуги, соединяющие точки $z_0$ и $z$ в области $D$. Подберем аналогичную кривую $\gamma_0$ так, чтобы кривые $\Gamma_j=\gamma_j\cup\gamma_0, j=1,2$, были контурами, т.е. были гомеоморфны окружностям. Полагая в условии (2.26) $\Gamma'=\Gamma_j$, отсюда приходим к заключению, что интеграл

$$\phi(z)=\int_{z_0}^{z}[dt]\psi(t)$$

не зависит от пути интегрирования. То, что $\phi'(t)=\Psi(t)$ в смысле определения (2.2), проверяется непосредственно.

Общий случай $k\geqslant 2$ легко сводится к рассмотренному случаю. При $1\leqslant j\leqslant k-1$

$$[t]^j\phi^{(k)}=([t]^j\phi^{(k-1)})'-j[t]^{j-1}\phi^{(k-1)}.$$

Повторяя эту процедуру, убеждаемся, что при $\psi=\phi^{(k)}$ функции $[t]^j\psi$ являются полными производными. Поэтому условия (2.24) необходимы для разрешимости уравнения (2.21) в классе однозначных функций. Обратно, пусть эти условия выполнены. Раскрывая выражение $[z-t]^{k-1}=([z]-[t])^{k-1}$, перепишем (2.23) в форме

$$\phi(z)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!(k-1-j)!}[z]^{k-1-j}\int_{z_0}^{z}[t]^j[dt]\psi(t).$$

По доказанному выше интегралы здесь не зависят от пути интегрирования. Как и выше, прямая проверка показывает, что функция (2.23) дифференцируема в смысле (2.31), причем $\phi'$ определяется тем же выражением с заменой $k$ на $k-1$. Повторяя эту процедуру, завершим доказательство рассматриваемого предложения.

Что касается первой части теоремы, то по известной теореме Жордана простой контур $\Gamma$ (т.е. контур, состоящий из одной компоненты) разбивает плоскость на две области, одна из которых конечна, а другая является окрестностью $\infty$. Поэтому если область $D$ односвязна и $\Gamma\subseteq D$, то область внутри $\Gamma$ целиком содержится в $D$ и по теореме Коши условие (2.33) выполняется автоматически.

Если условие (2.33) нарушено, то интеграл (2.32) зависит от пути интегрирования и определяет многозначную функцию. Пример такого типа в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ доставляет функция

$$\phi(z)=\ln[z]p(z),\quad p\in P_{k-1},\tag{2.34}$$

первый множитель которой уже рассматривался в п. 2.1. При обходе точки $z=0$ против часовой стрелки ее «элемент» $\phi(z)=\phi_0(z)$, рассматриваемый в окрестности $z=1$, переходит в $\phi(z)=\phi_0(z)+2\pi ip(z)$. С другой стороны, $k$-я производная $\psi=\phi^{(k)}$ этой функции по формуле Лейбница дается равенством

$$\psi(z)=\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\binom{k}{s}[z]^{-s}p^{(k-s)}(z),$$

определяющим однозначную функцию.

Таким образом, по теореме 2.4 одно из условий (2.33) для окружности $\Gamma$, охватывающей точку $z=0$, должно быть нарушено.

С помощью функций вида (2.34) можно полностью описать характер многозначности интеграла (2.32) в конечно-связной области. Область $D\subseteq\mathbb{C}$ назовем $m$-связной, если ее граница на сфере

Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ состоит из $m$ связных компонент. Например, граница всей плоскости $\mathbb{C}$ на этой сфере состоит из одной точки $\{\infty\}$, а граница области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ — из двух точек $z = 0$ и $z = \infty$.

**Теорема 2.5.** *Пусть область $D$ является $m$-связной, $m \geqslant 2$ и точки $z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$ принадлежат различным компонентам дополнения $\mathbb{C} \setminus D$. Тогда интеграл* (2.32) *единственным образом представим в виде*

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \sum_{j=1}^{m-1} \ln[z - z_j] p_j(z), \tag{2.35}$$

*где функция $\phi_0(z)$ однозначна, а $p_j \in P_{k-1}$.*

*Доказательство.* Пусть контур $\Gamma_j \subseteq D$, $j = 1, \ldots, m-1$, охватывает точку $z_j$ и оставляет вовне остальные точки $z_k$, $k \neq j$. Запишем равенство (2.35) в форме $\phi = \phi_0 + \phi_1$ и пусть $\psi = \psi_0 + \psi_1$ соответствует $k$-м производным этих функций.

По теореме Коши условие (2.33) однозначности интеграла (2.32) сводится к соотношениям

$$\int_{G_j} [t]^i [dt] \psi(t) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad j = 1, \ldots, m-1. \tag{2.36}$$

Пространство $P_{k-1}^{m-1}$ векторов $p = (p_1, \ldots, p_{m-1})$, составленных из многочленов $p_j \in P_{k-1}$, имеет размерность $ks(m-1)$. Каждому $p \in P_{k-1}^{m-1}$ поставим в соответствие вектор $Lp = (L_{ij}p \in \mathbb{C}^s$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $1 \leqslant j \leqslant m-1)$, где $L_{ij}p$ определяется левой частью (2.36) по отношению к $\psi = \psi_1$. В результате получаем линейное отображение $L : P_{k-1}^{m-1} \to \mathbb{C}^{sk(m-1)}$.

Равенство $Lp = 0$ по теореме 2.4 означает однозначность функции $\phi_1(z)$. Как и в случае функции (2.34) убеждаемся, что приращение «элемента» $\phi_1$ вдоль контура $\Gamma_j$ равно $2\pi i p_j$. Поэтому функция $\phi_1$ однозначна тогда и только тогда, когда $p = 0$. Таким образом, отображение $L$ взаимно-однозначно и потому обратимо $P_{k-1}^{m-1} \to \mathbb{C}^{sk(m-1)}$.

Следовательно, для заданной правой части $\psi$ уравнения (2.31) найдется единственным образом такой набор $p \in P_{k-1}^{m-1}$, что $L_{ij}p$ совпадает с левой частью (2.36). Поэтому, на основании теоремы 2.4, функция $\phi_0$ в разложении (2.35) будет однозначной, что завершает доказательство теоремы.

Как видно из доказательства теоремы, $p_j = 0$ в разложении (2.35) тогда и только тогда, когда $\psi = \phi^{(k)}$ удовлетворяет условию (2.36) для рассматриваемого номера $j$. В этом случае говорим, что функция $\phi$ не имеет ветвления в соответствующей компоненте $D'$, определяемой точкой $z_j$.

Рассмотрим особо случай, когда этой компонентой служит $\{\infty\}$. Пусть в условиях теоремы область $D$ является окрестностью $\infty$, так что $D'$ состоит из $m-1$ конечных компонент, содержащих по точке $z_j$, и точки $\infty$. Тогда, очевидно, следующие условия равносильны:

1) $\phi$ не имеет ветвления вокруг $\infty$;

2) $\sum p_j = 0$ в разложении (2.35);

3) в разложении Лорана функции $\psi = \phi^{(k)}$ отсутствуют члены со степенями $[z]^j$,$1 \leqslant j \leqslant k$.

Следовательно, если $\psi$ имеет порядок $-k-1$ на $\infty$, то $\phi$ будет иметь порядок $k-1$ и в интеграле (2.32) можно взять $z_0 = \infty$.

## 3. Эллиптические системы произвольного порядка

**3.1. Представление решений.** Рассмотрим на плоскости $D$ систему уравнений с частными производными $n$-го порядка

$$\frac{\partial^n y}{\partial y^n} - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{\partial^n u}{\partial x^{r-n} \partial y^r} = 0 \tag{3.1}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Под его решением понимается вещественная вектор-функция $u = (u_1, \ldots, u_l)$, удовлетворяющая (3.1) тождественно.

Поставим в соответствие этой системе характеристический матричный многочлен

$$P(z) = z^n - \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \tag{3.2}$$

степени $n$ и скалярный многочлен

$$\chi(z) = \det P(z) \tag{3.3}$$

степени $nl$. По определению, система (3.1) эллиптична, если уравнение $\chi(z) = 0$ не имеет вещественных корней. Поскольку коэффициенты многочлена $\chi$ вещественны, его корни можно разбить на комплексно сопряженные пары, так что число

$$nl = 2s \tag{3.4}$$

четно и в верхней полуплоскости лежит ровно $s$ корней.

Уравнение (3.1) представляет собой каноническую форму более общего уравнения

$$\sum_{r=0}^{n} a_{(r)} \frac{\partial^n u}{\partial x^{r-n} y^r} = 0.$$

Его эллиптичность заключается в том, чтобы скалярный многочлен $\chi(z) = \det \sum a_{(r)} z^r$ имел степень $nl$ и его корни не были вещественными. В частности, матрицы $a_{(0)}$ и $a_{(n)}$ обратимы и уравнение всегда может быть сведено к каноническом виду (3.1). Условие эллиптичности равносильно тому, что

$$\det\left(\sum_{r=0}^{n} \lambda_1^{n-r} \lambda_2^r a_{(r)}\right) \neq 0$$

для любых ненулевых $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Общее решение эллиптической системы (3.1) может быть выражено через функции, аналитические по Дуглису. Особенно просто этот вопрос решается для эллиптической системы

$$\frac{\partial u}{\partial y} - a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{3.5}$$

первого порядка. Для нее многочлен (3.4) сводится к $P(z) = z - a$, так что условие эллиптичности означает, что матрица $a \in \mathbb{R}^{l \times l}$ не имеет вещественных собственных значений. В частности, число $l = 2s$ четно. Согласно теореме 1.3 и леммам 1.3, 1.4, матрицу $a$ можем привести к блочно-диагональной форме

$$B^{-1} a B = \operatorname{diag}(J, \overline{J}),\ B = (b, \overline{b});\quad J \in \mathbb{C}^{s \times s},\quad b \in \mathbb{C}^{l \times s}, \tag{3.6}$$

где собственные значения матрицы $J$ лежат в верхней полуплоскости. При подстановке $u = bU$ уравнение (3.5) перейдет в

$$\partial U/\partial y - \operatorname{diag}(J, \overline{J}) \partial U/\partial x = 0.$$

В силу (3.6) эта подстановка переводит вещественный вектор $u$ в комплексный вектор $U$ блочной структуры $(\phi, \overline{\phi})$, где $s$-вектор-функция $\phi$ удовлетворяет уравнению (2.1), а $\overline{\phi}$ — комплексно сопряженному уравнению. В результате, заменяя $\phi$ на $\phi/2$, приходим к следующему предложению.

**Теорема 3.1.** *В обозначениях* (3.5) *любое решение* $u = (u_1, \dots, u_l)$ *системы* (3.5) *единственным образом представляется в виде*

$$u = \operatorname{Re} b\phi \tag{3.7}$$

*с некоторой* $J$*-аналитической функцией* $\phi$*. Эта функция выражается через* $u$ *равенством* $\phi = 2cu$*, где матрица* $c \in \mathbb{C}^{s \times s}$, $(c, \overline{c}) = B^{-1}$.

Согласно теореме 1.3, матрицу $B$ в (3.6) всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось требование (2.2) для матрицы $J$. В соответствии с теоремой 1.4 блоки $J_k$ здесь можно считать клетками

Жордана. Если $J_k \in \mathbb{C}^{s_k\times s_k}$, $k=1,\dots,m$, и, соответственно этому, матрица $b\in\mathbb{C}^{l\times s}$ записана в блочном виде $b=(b_1,\dots,b_m)$, $b_k\in\mathbb{C}^{l\times s_k}$, то (3.7) перейдет в представление

$$u=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re} b_k\phi_k \tag{3.8}$$

с $J_k$-аналитическими функциями $\phi_k$.

Обратимся к случаю эллиптических систем порядка $n\geqslant 2$. Согласно п. 1.3, с многочленом (3.2) тесно связана матрица $A\in\mathbb{R}^{nl\times nl}$, записываемая в блочном виде (1.24):

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

По теореме 1.5 ее можно привести к блочно-диагональному виду

$$\begin{gathered} B^{-1}AB=\operatorname{diag}(J,\overline{J}),\quad B=(B_0,\overline{B}_0),\\ B_0=\downarrow(b,bJ,\dots,bJ^{n-1}),\quad b\in\mathbb{C}^{l\times s}.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Как показывает лемма 1.5, в обозначениях (3.3), (3.4) собственные значения матрицы $J\in\mathbb{C}^{s\times s}$ являются корнями характеристического уравнения $\chi(\nu)=0$ в верхней полуплоскости, причем соответствующие им кратности и порядки совпадают. Из теоремы 1.5 также следует, что матрицы $b\in\mathbb{C}^{l\times s}$ и $J\in\mathbb{C}^{s\times s}$ можно рассматривать как решения уравнения

$$bJ^n=\sum_{r=0}^{n-1}a_r bJ^r. \tag{3.11}$$

Если $s$-вектор-функция $\phi(z)$ удовлетворяет уравнению (2.1), т.е. $J$-аналитична, то с учетом (2.6) из (3.11) непосредственно следует, что $l$-вектор-функция $u=\operatorname{Re} b\phi$ является решением уравнения (3.1). Как показывает следующая теорема, обратное также справедливо, однако в отличие от теоремы 3.1 функция $\phi$, вообще говоря, многозначна (причем ее производная $\phi^{(n-1)}$ однозначна).

Рассмотрим класс $P_{n-2}$ многочленов $p(z)=c_0+[z]c_1+\ldots+[z]^{n-2}c_{n-2}$, $c_k\in\mathbb{C}^s$, являющихся $J$-аналитическими функциями.

**Лемма 3.1.** (а) *Пространство $P_{n-2}$ раскладывается в прямую сумму подпространств*

$$\begin{aligned} P^0&=\{p\in P_{n-2}\mid \operatorname{Re} bJ^r p^{(r)}(0)=0,\ 0\leqslant k<r\leqslant n-1\},\\ P^1&=\{p\in P_{n-2}\mid \operatorname{Re} bJ^r p^{(r)}(0)=0,\ 0\leqslant r\leqslant k<n-1\},\end{aligned} \tag{3.12}$$

*имеющих одну и ту же размерность $(n-1)s$ (над полем $\mathbb{R}$).*

(б) *Для $p\in P_{n-2}$ функция $\operatorname{Re} bp\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $p\in P^0$. В частности, любой многочлен*

$$q(x,y)=\sum_{i+j\leqslant n-2}c_{ij}x^iy^j,\quad c_{ij}\in\mathbb{R}^l, \tag{3.13}$$

*однозначно представим в виде $q=\operatorname{Re} bp$, $p\in P^1$.*

*Доказательство.* (а) Положим $L_{k,r}p=\operatorname{Re} bJ^r p^{(r)}(0)$ и рассмотрим линейные отображения $L^0=\{L_{kr},\ 0\leqslant k<r\leqslant n-1\}$ и $L^1=\{L_{kr},\ 0\leqslant r\leqslant k<n-1\}$. Так как $2s=nl$, они оба действуют $P_{n-2}\to\mathbb{R}^{(n-1)s}$. Следовательно, совместное линейное отображение $L=(L^0,L^1)$ действует в пространствах одной размерности $2(n-1)$.

Предположим, что $Lp=0$ для некоторого $p\in P_{n-2}$. Тогда должны выполняться равенства

$$\operatorname{Re} bJ^r p^{(k)}(0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant n-1,$$

для всех $k=0,1,\dots,n-2$. В обозначениях (3.6) их можно переписать в виде

$$Bx_k=0,\quad x_k=(p^{(k)}(0),\overline{p^{(k)}(0)}\in\mathbb{C}^{nl}.$$

Поскольку матрица $B$ обратима, $x_k=0$ и, значит, $p=0$.

Таким образом, линейное отображение $L$ осуществляет изоморфизм $P_{n-2}$ на $\mathbb{R}^{(n-1)s} \times \mathbb{R}^{(n-1)s}$. В частности, $P^0 \cap P^1 = 0$ и $\dim P^j = (n-1)s$, так что $P_{n-2} = P^0 \oplus P^1$.

(б) Условие $\operatorname{Re} bp = 0$ равносильно соотношениям

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{k-r}\partial y^r}(\operatorname{Re} bp)(0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n-2.$$

С учетом (2.6) и (3.12) они, в свою очередь, эквивалентны $p \in P^0$. Поскольку пространство $X$ многочленов (3.14) имеет размерность $(n-1)s$, отсюда заключаем, что отображение $p \to \operatorname{Re} bp$ осуществляет изоморфизм $P^1$ на $X$.

**Теорема 3.2.** (а) *В обозначениях* (3.10) *любое решение* $u(x,y)$ *уравнения* (3.1) *в односвязной области* $D$ *представимо в виде* (3.7) *с некоторой* $J$*-аналитической функцией* $\phi$*, причем* $u = 0$ *влечет* $\phi \in P_{n-2}$*. Функция* $\phi$ *восстанавливается по* $u$ *соотношением*

$$\phi^{(n-1)} = 2\sum_{r=0}^{n-1} c_r \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1-r}\partial y^r}, \tag{3.14}$$

*где в обозначениях* $B^{-1} = \downarrow (C_0, \overline{C}_0)$ *матрицы* $c_r \in \mathbb{C}^{s\times l}$ *определяются равенством* $C_0 = (c_0, \dots, c_{n-1})$*. Эта функция однозначно представима в виде суммы* $\phi_0 + p_0$*, где* $p_0 \in P^1$*, и* $\phi_0$ *удовлетворяет условиям*

$$\phi_0^{(r)}(z_0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-2 \tag{3.15}$$

*в фиксированной точке* $z_0 \in D$*.*

(б) *Пусть область* $D$ *является* $m$*-связной,* $m \geqslant 2$ *и точки* $z_j$*,* $j = 1, \dots, m-1$*, принадлежат различным компонентам связности дополнения* $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$*. Тогда в представлении* (3.7) *функция* $\phi$ *многозначна и единственным образом представима в виде суммы*

$$\phi(z) = \phi_0(z) + p_0(z) + \sum_{j=1}^{m-1} \ln[z - z_j] p_j(z), \tag{3.16}$$

*где функция* $\phi_0$ *однозначна и удовлетворяет условию* (3.15)*, а*

$$p_0 \in P^1, \quad p_j \in P^0, \ j = 1, \dots, m-1. \tag{3.17}$$

*Доказательство.* (а) Пусть $l$-вектор-функция $u \in C^n(D)$ является решением уравнения (3.1). Положим

$$U = (U_0, \dots, U_{n-1}), \quad U_r = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial^{n-1-r} x \partial^r y}. \tag{3.18}$$

В этих обозначениях уравнение (3.1) можно переписать в форме

$$\frac{\partial U_{n-1}}{\partial y} - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{\partial U_r}{\partial x} = 0.$$

Присоединяя к нему $n-1$ очевидное соотношение

$$\frac{\partial U_r}{\partial y} = \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x}, \quad r = 0, 1, \dots, n-2,$$

в соответствии с (3.9) для вектор-функции $U$ получаем систему

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Применяя к ней теорему 3.1, в обозначениях (3.11) приходим к представлению $U = \operatorname{Re} B_0\psi$ с некоторой $J$-аналитической функцией $\psi$. С учетом (3.10), (3.17) это представление можем переписать в виде

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1-r}\partial^r y} = \operatorname{Re} bJ^r\psi, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть $J$-аналитическая функция $\phi$ является решением уравнения $\phi^{(n-1)} = \psi$, рассмотренного в п. 2.4. Тогда с учетом (2.6)

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1-r} \partial y^r} (\operatorname{Re} b\phi) = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1-r} \partial y^r}$$

и, следовательно, разность $u - \operatorname{Re} b\phi$ является многочленом вида (3.14). В соединении с леммой 3.1(б) отсюда приходим к следующему заключению.

Любое решение $u$ системы (3.1) представимо в виде (3.7) с некоторой многозначной $J$-аналитической функцией $\phi$, причем ее $(n-1)$-ая производная (3.18) однозначна и связана линейной подстановкой (3.14) с вектором (3.18). В частности, если $u = 0$, то $U = \psi = 0$ и, значит, $\phi = p \in P_{n-2}$. В действительности, согласно лемме 3.1(б), многочлен $p \in P^1_{n-2}$.

(б) По теореме 2.5 функцию $\phi$ можно однозначно представить в виде (2.35). Удобно в этом равенстве $\phi_0$ разложить на два слагаемых, одно из которых удовлетворяет условию (3.15) и обозначено снова $\phi_0$, а второе принадлежит $P_{n-2}$. Тогда для $u$ получим представление (3.16), где $\phi_0$ однозначна и удовлетворяет условию (3.15), а $p_j \in P_{n-2}$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$.

Пусть контуры $\Gamma_j$, $j = 1, \ldots, m-1$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве теоремы 2.5. При обходе вдоль контура $\Gamma_j$ элемент $\phi$ получает приращение, равное $p_j(z)$. Поскольку функция $u$ однозначна в многосвязной области $D$, то должны выполняться соотношения $\operatorname{Re} bp_j \equiv 0$, $j = 1, \ldots, m-1$. Согласно лемме 3.1(б), они равносильны $p_j \in P^0$. Что касается многочлена $p_0 \in P_{n-2}$ в (3.16), то на основании леммы 2.1(б) его всегда можно подчинить требованию $p_0 \in P^1$.

Остается установить, что представление (3.16) с дополнительными условиями (3.15), (3.17) единственно. Если $u \equiv 0$, то как отмечено выше, в этом представлении $\phi = p \in P_{n-2}$. В частности, функция

$$p - \phi_0 - p_0 = \sum_{j=1}^{m-1} \ln[z - z_j] p_j$$

однозначна, что возможно только при $p_1 = \ldots = p_{m-1} = 0$. Таким образом, $p = \phi_0 + p_0$ и в силу (3.15) отсюда $p = p_0$, $\phi_0 = 0$, так что $\operatorname{Re} bp_0 = 0$, $p_0 \in P^1$. Но согласно лемме 3.1, отсюда следует $p_0 \in P^0 \cap P^1$, т.е. $p_0 = 0$. Итак, $u = 0$ в (3.16) влечет $\phi_0 = 0$ и $p_j = 0$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$.

Отметим особо случай, когда область $D$ бесконечна и является окрестностью $\infty$, рассмотренной в конце п. 2.4. Пусть частные производные $(n-1)$-го порядка решения $u(x, y)$ уравнения (3.1) допускают в окрестности $\infty$ оценку

$$\left| \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1-r} \partial y^r} \right| \leqslant C|z|^{-n}, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1 \tag{3.19}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. На основании (3.14) функция $\psi$ удовлетворяет аналогичной оценке, т.е. имеет порядок $-n$ на $\infty$. Как отмечено в конце п. 2.4, в этом случае $\phi$ имеет порядок $n-1$ на $\infty$ и не имеет ветвления вокруг $\infty$. Это равносильно тому, что $\sum p_j = 0$ в разложении (3.16). Соответственно, условия (3.15) можно заменить на $\phi_0(\infty) = 0$.

Как и в случае систем первого порядка, отметим еще, что выбор матрицы $B$ в (3.6) можно подчинить условию (2.2). Тогда, полагая $J_k \in \mathbb{C}^{s_k \times s_k}$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$, $b_k \in \mathbb{C}^{l \times s_k}$, представление (3.16) можем записать в форме (3.8) с $J_k$-аналитическими матрицами $\phi_k$. Выражение для $\phi_k$ в (3.16) пишется по отношению к матрице $J_k$ и соответственно понимаются условия (3.15), (3.17).

Подставляя вместо $\phi$ в (3.7) представление (2.10) через аналитические $s_k$-вектор-функции $\psi_k$, $k = 1, \ldots, m$, приходим к представлению

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{s-1} b_k \frac{y^r}{r!} (J_k - \nu_k)^r \psi_k^{(r)}(x + \nu_k y) \tag{3.20}$$

общего решения системы (3.1) через $s$-вектор $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, составленного из аналитических в области $D_k = \{x + \nu_k y | x + iy \in D\}$ вектор-функций $\psi_k$. Это представление принадлежит А. В. Бицадзе [2].

**3.2. Комплексные системы.** Пусть коэффициенты уравнения (3.1) комплексны: $a_r \in \mathbb{C}^{l\times l}$, так что и решение $u$ является комплексной $l$-вектор-функцией. Условие эллиптичности определяется аналогично предыдущему, однако число $nl$ уже не обязательно четно и корни характеристического уравнения могут быть расположены произвольно в верхней и нижней полуплоскостях (соответствующие числа корней обозначим $s^\pm$). Роль (3.4) здесь играет равенство $s^+ + s^- = nl$. Случаи, когда $s^+ = 0$ или $s^- = 0$ не исключаются. Если $s^+ = s^-$, то уравнение (3.1) называется правильно эллиптическим.

В случае эллиптической системы (3.5) первого порядка условие эллиптичности по-прежнему означает, что комплексная матрица $a \in \mathbb{C}^{s\times s}$ не имеет вещественных собственных значений. В частности, уравнение (2.1), определяющее $J$-аналитические функции, эллиптично, для него $s^+ = s$, $s^- = 0$.

Согласно теореме 1.3, матрицу $a$ можно привести к аналогичной (3.6) блочно-диагональной форме

$$\begin{gathered} B^{-1}aB = \operatorname{diag}(J^+, \overline{J^-}), \quad B = (b^+, \overline{b^-}), \\ J^\pm \in \mathbb{C}^{s^\pm\times s^\pm}, \quad b^\pm \in \mathbb{C}^{l\times s^\pm}. \end{gathered} \tag{3.21}$$

В результате приходим к представлению

$$u = b^+\phi^+ + \overline{b^-\phi^-} \tag{3.22}$$

общего решения системы (3.5) через пару $J^\pm$-аналитических функций $\phi^\pm$.

Матрицу $B$ в (3.21) можно выбрать так, чтобы $J^\pm$ удовлетворяли аналогичному (2.2) условию

$$J^\pm = \operatorname{diag}(J_1^\pm, \dots, J_{m^\pm}^\pm), \quad \sigma(J_k^\pm) = \nu_k^\pm. \tag{3.23}$$

Тогда (3.22) перейдет в представление

$$u = \sum_k b_k^+\phi_k^+ + \sum_k \overline{b_k^-\phi_k^-}. \tag{3.24}$$

Аналогично обстоит дело и с системами порядка $n \geqslant 2$. В этом случае матрица (3.9) комплексна и (3.10) заменится на

$$\begin{gathered} B^{-1}AB = \operatorname{diag}(J^+, \overline{J^-}), \quad B = (B^+, \overline{B^-}), \\ B^\pm =\downarrow (b^\pm, b^\pm J^\pm, \dots, b^\pm (J^\pm)^{n-1}), \quad b^\pm \in \mathbb{C}^{l\times s^\pm}. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Пусть $[z]^\pm$ определяется по $J^\pm$ как в (2.3) и $P_{n-2}$ означает пространство пар $p = (p^+, p^-)$, составленных из $J^\pm$-аналитических многочленов $p^\pm$ степени $n-2$. Соответственно этому, выделим в $P_{n-2}$ подпространство $P^j$, $j = 0, 1$, заменяя $\operatorname{Re} bJ^r p^{(r)}$ в (3.12) выражением

$$b^+J^+(p^+)^{(k)} + \overline{b^-J^-(p^-)^{(k)}}.$$

Тогда совершенно аналогично п. 3.1 приходим к следующему аналогу теоремы 3.2.

**Теорема 3.3.** *В условиях теоремы* 3.2 *любое решение* $u(x, y)$ *комплексного уравнения* (3.1) *единственным образом представимо в виде* (3.22) *с* $J^\pm$*-аналитическими функциями*

$$\phi^\pm(z) = \phi_0^\pm(z) + p_0^\pm(z) + \sum_{j=1}^{m-1} \ln[z - z_j]^\pm p_j^\pm(z), \tag{3.26}$$

*где* $\phi_0^\pm$ *и* $p_j = (p_j^+, p_j^-)$ *удовлетворяют условиям* (3.15), (3.16)

Если матрица $B$ в (3.25) выбрана так, что $J^\pm$ имеют блочно-диагональный вид (3.23), то представление (3.22) переходит в (3.24) с соответствующими разложениями (3.26) для $\phi_k^\pm$. Конечно, в случае вещественных систем имеем равенства $s^\pm = s$, $J^\pm = J$, $b^\pm = b$, так что с точностью до множителя 2 представление (3.22) переходит в (3.16).

Любая комплексная система может быть сведена к действительной по отношению к $2l$-вектору $\hat{u} = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u)$. Проще всего ее получить, добавляя к (3.1) комплексно-сопряженное уравнение и учитывая связь

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tilde{u}$$

между $\hat{u}$ и $\tilde{u} = (u, \overline{u})$. Тогда приходим к системе

$$\frac{\partial^n \hat{u}}{\partial y^n} = \sum_{r=0}^{n-1} \hat{a}_r \frac{\partial^n \hat{u}}{\partial x^{n-r} \partial y^r} \tag{3.27}$$

с действительными коэффициентами

$$\hat{a}_r = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_r & -\operatorname{Im} a_r \\ \operatorname{Re} a_r & \operatorname{Re} a_r \end{pmatrix}.$$

Пусть $\hat{P}$ и $\hat{A}$, соответственно, характеристический многочлен (3.2) и сопутствующая матрица (3.9) этой системы. Поскольку

$$\hat{a}_r = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_r & 0 \\ 0 & \overline{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

то аналогичным образом

$$\hat{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(z) & 0 \\ 0 & \overline{P(\overline{z})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

В частности, характеристическое уравнение системы (3.27) переходит в $\det P(z) \det P(\overline{z}) = 0$, а матрицу $\hat{A}$ можно привести к блочной структуре (3.10), в которой $J = \operatorname{diag}(J^+, J^-)$.

**3.3. Случай одного уравнения.** В случае $l = 1$ система (3.1) переходит в одно скалярное уравнение с коэффициентами $a_r \in \mathbb{C}$. В этом случае оно вполне определяется своим характеристическим уравнением $\det P(z) = 0$, которое запишем в форме

$$\prod_{k=1}^{m^+} (z - \nu_k^+)^{s_k^+} \prod_{k=1}^{m^-} (z - \overline{\nu_k^-})^{s_k^-} = 0, \tag{3.28}$$

где $\operatorname{Im} \nu_k^\pm > 0$ и $s^+ + s^- = n$, $s^\pm = \sum s_k^\pm$. Обозначим $J_k^\pm$ клетку Жордана порядка $s_k^\pm$, отвечающую собственному значению $\nu_k^\pm$. Согласно п. 1.3, в рассматриваемом случае матрицу $B$ в (3.25) можно выбрать так, чтобы $J^\pm$ имели жорданову форму (3.23). Тогда $b^\pm = (b_1^\pm, \dots, b_{m^\pm}^\pm)$ с матрицами-строками $b_k^\pm = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{1 \times s_k^\pm}$. Соответственно этому, представление (3.24) для решения скалярного уравнения (3.1) в формулировке теоремы 3.3 переходит в

$$u = \sum_{k=1}^{m^+} (\phi_k^+)_1 + \sum_{k=1}^{m^-} \overline{(\phi_k^-)_1}, \tag{3.29}$$

где $(\phi_k^\pm)_1$ означает первую компоненту $s_k^\pm$-вектора $\phi_k^\pm$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{s^+} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{s^-} u = 0, \quad s^+ + s^- = n \tag{3.30}$$

в комплексных обозначениях (2.15) для производных. Решения этого уравнения называют $(s^+, s^-)$-полианалитическими функциями, им посвящена обширная литература [1]. При $s^\pm = s$ получаем уравнение

$$\Delta^s u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

решения которого называют $s$-полигармоническими функциями (гармоническими при $s = 1$).

Пусть $J^{\pm}$ — клетки Жордана порядка $s^{\pm}$, отвечающие $\nu = i$. Тогда представление (3.29) для уравнения (3.30) переходит в

$$u = (\phi^+)_1 + \overline{(\phi^-)_1} \tag{3.31}$$

с $J^{\pm}$-аналитическими $s^{\pm}$-вектор-функциями $\phi^{\pm}$. В случае полигармонического уравнения матрицы $J^{\pm} = J$ совпадают и (3.31) сводится к

$$u = \operatorname{Re}(\phi)_1 \tag{3.32}$$

с $J$-аналитической функцией $\phi$.

Согласно замечанию в конце п. 2.1, функцию $\phi$ можно выразить через аналитическую вектор-функцию $\psi$ по формуле (2.17) с нильпотентной матрицей $Q = (1 - iJ)^{-1}(1 + iJ)$. Очевидно, эта матрица треугольна с нулевыми диагональными элементами. Рассмотрим первую компоненту векторного равенства (2.17):

$$(\phi)_1 = \sum_{r=0}^{s-1} \overline{z}^r \psi_r(z) \tag{3.33}$$

со скалярными аналитическими функциями $\psi_r = (1/r!)(Q^r \psi^{(r)})_1$. При $s = 2$ подстановка (3.33) в (3.32) дает известную формулу Гурса [7] для решений бигармонического уравнения. Аналогичным образом, комбинируя (3.33) с (3.31), получим представление $(s^+, s^-)$-полианалитических функций

$$u(z) = \sum_{r=0}^{s^+-1} \overline{z}^r \psi_r^+(z) + \sum_{r=0}^{s^--1} z^r \overline{\psi_r^-}(z)$$

через семейство $(\psi_r^{\pm})$ аналитических функций. Это представление можно получить путем непосредственного интегрирования уравнения (3.30), рассматривая переменные $z$ и $\overline{z}$ как независимые (что в рассматриваемом случае вещественно-аналитических функций корректно).

**3.4. Приложение к краевым задачам.** Результаты п. 3.1 позволяют общую краевую задачу для уравнения (3.1) эквивалентным образом редуцировать к соответствующей краевой задаче для $J$-аналитических функций. В свою очередь, с помощью аппарата интегралов типа Коши п. 2.2 последнюю задачу можно эквивалентным образом свести к системе сингулярных интегральных уравнений. Эта программа реализована в [23, 24] для областей, соответственно, с гладкой и кусочно-гладкой границами. Поэтому ниже укажем краткую схему редукции, отсылая за деталями к цитированной работе [23].

Рассмотрим уравнение (3.1) в области $D \subseteq \mathbb{C}$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial D$. Зададим на $\Gamma$ дифференциальные операторы

$$B_i = \sum_{k+r \leqslant n_i} B_{ikr} \frac{\partial^{k+r}}{\partial x^k \partial y^r}, \quad i = 1, \ldots, s$$

порядков $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2, \ldots \leqslant n_s = n_\Gamma$ (случай $n_\Gamma \geqslant n$ не исключается). Под $B_{ikr}(t)$, $t \in \Gamma$, здесь понимаются достаточно гладкие $1 \times l$-матрицы-функции на $\Gamma$.

Требуется найти решение $u \in C^n(\overline{D})$ уравнения (3.1) по краевым условиям

$$(B_i u)\big|_\Gamma = f_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{3.34}$$

где $f_i$ — заданные $l$-вектор-функции на $\Gamma$.

Задача (3.1), (3.34) называется *фредгольмовой*, если

(а) однородная задача (в выбранном классе решений $u$) имеет конечное число $k$ линейно независимых решений;

(б) существует такое число $k'$ линейно независимых функционалов (над выбранным пространством правых частей), что их обращение в нуль от правой части $f = (f_1, \ldots, f_s)$ необходимо и достаточно для разрешимости задачи.

Разность $\Lambda = k - k'$ определяет индекс задачи.

Подставляя в краевое условие выражение (3.7), (3.16) общего решения уравнения (3.1), данную задачу эквивалентным образом редуцируем к соответствующей задаче для пары $(\phi, p)$, составленной из $J$-аналитической функции $\phi \in C^n(\overline{D})$ и семейства $p = (p_j, 0 \leqslant j \leqslant m-1)$ соответствующих многочленов $p_0 \in P^1$ и $p_j \in P^0$, $j = 1, \ldots, m-1$

На фредгольмовости (но не индексе) задачи наличие слагаемых с $p_j$ в краевом условии никак не сказывается. Поэтому задача (3.1), (3.34) будет фредгольмово эквивалентной задаче

$$\operatorname{Re} \sum_{k+r \leqslant n_i} [B_{ikr} b J^r \phi^{(k+r)}]\big|_\Gamma = f_i, \quad i = 1, \ldots, s$$

для $J$-аналитической функции $\phi \in C^{n_\Gamma}(\overline{D})$.

Пусть $d/ds$ означает оператор дифференцирования на $\Gamma$ по параметру длины дуги. Действие этого оператора на краевое условие не сказывается на фредгольмовости задачи. Поэтому можем перейти к фредгольмово эквивалентной задаче

$$\operatorname{Re} \sum_{k+r \leqslant n_i} \left(\frac{d}{ds}\right)^{n_\Gamma - n_i} \left[B_{ikr} b J^r \phi^{(k+r)}\right]\Big|_\Gamma = \tilde{f}_i, \qquad \tilde{f}_i = \left(\frac{d}{ds}\right)^{n_\Gamma - n_i} f_i \tag{3.35}$$

с «выровненными» порядками дифференцирования.

Пусть $s = (s_1, s_2)$ означает единичный касательный вектор на $\Gamma$, ориентированный положительно по отношению к $D$. Он представляет собой достаточно гладкую 2-вектор-функцию. Если оператор дифференцирования $d/ds$ рассматривать как граничный оператор $s_1 \partial/\partial x + s_2 \partial/\partial y$, то

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^k = \left(s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^k + \ldots \ ,$$

где многоточие означает младшие члены, зависящие только от производных функций $s_1$, $s_2$ по параметру длины дуги. Применительно к (3.35) это дает соотношение

$$\operatorname{Re} \sum_{k+r \leqslant n_i} [B_{ikr} b J^r (s_1 + s_2 J)^{n_\Gamma - n_i} \phi^{(n_\Gamma)} + \ldots] = \tilde{f}_i.$$

Наличие младших членов в этом краевом условии никак не сказывается на фредгольмовости задачи. Следовательно, исходная задача (3.10), (3.34) фредгольмово эквивалентна задаче Римана — Гильберта

$$\operatorname{Re} G \tilde{\phi}\big|_\Gamma = \tilde{f}, \quad \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_s). \tag{3.36}$$

для $J$-аналитической вектор-функции $\tilde{\phi} = \phi^{(n_\Gamma)}$. Здесь $(s \times s)$-матрица-функция $G$ определяется равенством

$$G = \downarrow (G_1, \ldots, G_s), \qquad G_i = \sum_{k+r \leqslant n_i} B_{ikr} b J^r (s_1 + s_2 J)^{n_\Gamma - n_i}. \tag{3.37}$$

Для аналитических вектор-функций метод исследования краевой задачи (3.36), основанный на использовании интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений, хорошо известен [19]. Как уже отмечалось выше, этот метод естественным образом распространяется и на $J$-аналитические функции [23]. При этом принадлежность задачи к нормальному типу, выраженная условием

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{3.38}$$

необходима и достаточна для фредгольмовости задачи. Применительно к матрице-функции (3.37) это условие представляет собой другую форму известного условия дополнительности (или Шапиро — Лопатинского) краевой задачи (3.1), (3.34). Отметим еще, что задача (3.36) обычно рассматривается в классе $C^{+0}(D)$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$ (т.е. принадлежащих классу $C^\mu$ с некоторым $0 < \mu < 1$). Соответственно, и исходную задачу (3.1), (3.34) естественно рассматривать в классе $C^{n_\Gamma, +0}(\overline{D})$.

Особо остановимся на случае, когда область $D$ совпадает с верхней полуплоскостью. В этом случае аффинное преобразование (3.7) инвариантно на $D$, так что в условиях теоремы 2.1 аналитические функции $\psi_k$ заданы в той же полуплоскости $D$.

Убедимся, что для $\phi \in C^{+0}(\overline{D})$ аналитическая функция $\psi$ в представлении (2.10) принадлежит к тому же классу и совпадает с $\phi$ на границе $y = 0$ области $D$.

**Лемма 3.2.** *Пусть функция $\psi(z)$, $z = x + iy$ аналитична в области $D$ и удовлетворяет условию Гёльдера*

$$\{\psi\}_\mu = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\psi_(z_1) - \psi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} < \infty \tag{3.39}$$

*с некоторым показателем $0 < \mu < 1$. Тогда $J$-аналитическая функция $\phi$ в представлении* (2.10) *удовлетворяет аналогичному условию $\{\phi\}_\mu < \infty$ и совпадает с $\psi$ на границе $y = 0$ полуплоскости $D$.*

*Верно и обратное утверждение.*

*Доказательство.* Применяя формулу Коши к полукругу $\{|z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$, дифференцируя ее и переходя к пределу при $R \to \infty$, получим равенства

$$\psi^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{(t - z)^{r+1}} dt, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{3.40}$$

справедливые для любого $t_0 \in \mathbb{R}$. Отсюда

$$|\psi^{(r)}(t_0 + iy)| \leqslant \frac{\{\psi\}_\mu}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|t - t_0|^\mu \, dt}{|(t - t_0)^2 + y^2|^{(r+1)/2}} \leqslant C_r \{\psi\})_\mu \tag{3.41}$$

с некоторой постоянной $C_r$, зависящей только от $r$ и $\mu$.

В частности, $|y^r \psi^{(r)}(z)| \leqslant C_r \{\psi\}_\mu y^\mu$, $r \geqslant 1$. Следовательно, функция $\phi$ в (2.10) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и совпадает с $\psi$ на ее границе. Дифференцируя соотношение (2.10), совместно с (3.41) получим также оценку $|\phi'(z)| \leqslant C y^{\mu - 1}$, из которой следует, что $\{\phi\}_\mu < \infty$.

В обратную сторону рассуждения совершенно аналогичны. Пусть $\{\phi\}_\mu < \infty$ и аналитическая функция $\psi$ определяется соотношением (2.10), где $y^r$ надо заменить на $(-y)^r$. В силу теоремы Коши из п. 2.2 для производных $J$-аналитических функций $\phi$ имеем аналогичное (3.40) представление

$$\phi^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} [t - z]^{-r-1} \{\phi(t) - \phi(t_0)\} dt.$$

Отсюда для $\phi^{(r)}$ выводим аналогичную (3.41) оценку. Дальнейшие рассуждения проходят без изменений.

Обратимся к задаче Римана—Гильберта (3.36), где волна в обозначениях опущена, в полуплоскости $D$. Из леммы 3.2 следует, что эту задачу достаточно сначала решить для аналитических вектор-функций $\psi$, а затем вернуться к $\phi$ с помощью представления (2.10).

Особенно простая ситуация возникает в случае, когда матрица $G$ постоянна. Пусть вещественная $s$-вектор-функция $f(t)$ задана на прямой $\mathbb{R}$ и $\{f\}_\mu < +\infty$. Тогда решение задачи $\operatorname{Re} G\psi = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в классе аналитических в $D$ функций $\chi(z)$, $\{\psi\}_\mu < \infty$, дается формулой Шварца [19]

$$G\psi'(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t) dt}{(t - z)^2}. \tag{3.42}$$

Строго говоря, эта формула имеет смысл для функций $f$ с поведением $O(|t|^{-1})$ на $\infty$. В общем случае достаточно $f$ приблизить функциями этого типа. Из (3.42), в частности, следует, что

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \left[ \frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - z_0} \right] G^{-1} f(t) dt + \psi(z_0).$$

Подставляя это выражение в (2.10), приходим к явному решению задачи (3.36) с постоянной матрицей $G \in \mathbb{C}^{s \times s}$ для $J$-аналитических функций $\phi$ в классе $\{\phi\}\mu < \infty$.

Заметим, что если $\det G = 0$, то существует бесконечное число линейно независимых аналитических вектор-функций $\psi \in C^\infty(\overline{D})$, для которых $G\psi = 0$ на границе полуплоскости $D$.

Эти функции можно подчинить дополнительному требованию

$$|\psi^{(r)}(z)| \leqslant C(1+|z|)^{-r-1}, \quad r=0,1,\dots,s. \tag{3.43}$$

В этом случае формула (2.10) дает бесконечное число линейно независимых $J$-аналитических функций $\phi$, удовлетворяющих оценке (3.43) и краевому условию $G\phi=0$ на границе полуплоскости.

## 4. Эллиптические системы второго порядка

**4.1. Слабо и сильно связанные системы.** В приложениях наиболее часто встречаются вещественные эллиптические системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.1}$$

второго порядка. Для системы этого типа характеристический многочлен (3.2) представляет собой матричный квадратичный двучлен $P(z)=z^2-a_1z-a_0$, величина $s=nl/2$ в (3.4) совпадает с $l$, а выражения (3.9)–(3.11) принимают вид

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}AB=\operatorname{diag}(J,\overline{J}), \qquad b,J\in\mathbb{C}^{l\times l}. \tag{4.2}$$

Матрицы $b$ и $J$ можно рассматривать как решения уравнения

$$J^2=a_0b+a_1bJ, \tag{4.3}$$

подчиненного требованию

$$\det\begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}\neq 0. \tag{4.4}$$

При $n=2$ пространство $P_{n-2}$ многочленов совпадает с $\mathbb{C}^l$, так что (3.12) сводится к $P^0=\{\xi\in\mathbb{C}^l|\operatorname{Re}b\xi=0\}$ и $P^1=\{\xi\in\mathbb{C}^l|\operatorname{Re}bJ\xi=0\}$.

Одной из основных краевых задач для этой системы служит задача Дирихле. Она заключается в отыскании решения $u$ уравнения (3.34) в области $D$ по краевому условию

$$u\big|_\Gamma = f \tag{4.5}$$

на ее границе $\Gamma=\partial D$. В отличие от случая $l=1$ одного скалярного уравнения, для систем эта задача может оказаться некорректной. Впервые этот факт был обнаружен А. В. Бицадзе. В его работе [4] была указана эллиптическая $(2\times 2)$-система с коэффициентами

$$a_0=1, \quad a_1=\pm\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

для которой однородная задача Дирихле в единичном круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Позднее А. В. Бицадзе [2] выделил класс эллиптических систем, названных им *слабо связанными,* для которых задача Дирихле фредгольмова. В обозначениях (2.34) этот класс определяется условием

$$\det b\neq 0. \tag{4.7}$$

Соответственно, системы, для которых данное условие нарушено, называются *сильно связанными.*

С помощью представления (3.7) задача Дирихле редуцируется к задаче Римана — Гильберта (3.36) с постоянным коэффициентом $G=b$. Поэтому условие (4.7), определяющее нормальный тип данной задачи, служит одновременно и критерием фредгольмовости задачи Дирихле. Действуя в рамках указанной в п. 3.4 схемы [23], нетрудно также убедиться, что индекс этой задачи равен нулю.

Как показывает замечание в конце п. 3.4, для сильно связанных систем однородная задача Дирихле, рассматриваемая в верхней полуплоскости, имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Следующая лемма показывает, что определение слабо связанной системы корректно, т.е. не зависит от выбора блочной матрицы $B$ в (4.2). Эта лемма решает вопрос, поставленный в монографии А. В. Бицадзе [2].

**Лемма 4.1.** *Система* (4.1) *слабо связана тогда и только тогда, когда вещественная матрица*

$$\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda^2 - a_1\lambda - a_0)^{-1} d\lambda \tag{4.8}$$

*обратима.*

Заметим, что в силу эллиптичности матрица-функция $P(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$ обратима для $\lambda \in \mathbb{R}$ и элементы обратной к ней матрицы имеют порядок $-2$ на $\infty$. Поэтому интеграл (4.8) имеет смысл.

*Доказательство.* В рассматриваемом случае $n = 2$ тождество (1.25) принимает вид

$$(z - A)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ -a_0 & P(z) \end{pmatrix}, \quad P(z) = z^2 - a_1 z - a_0.$$

Переходя в нем к обратным матрицам и используя соотношение (3.35), получим

$$\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ z^{-1}P^{-1}a_0P^{-1} & p^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} \\ 0 & -z^{-1} \end{pmatrix}(z - A)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} (z-J)^{-1} & 0 \\ 0 & (z-J)^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} z^{-1}(z-J)^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1}(z-J)^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим контур $\Gamma$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, охватывающий все собственные значения матрицы $A$. Имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z^k (z - J)^{-1} dz = J^k, \quad \int\limits_{\Gamma} z^k (z - \overline{J})^{-1} dz = 0,$$

справедливые для любых $k = 0, \pm 1, \dots$ . Первое из них вытекает из (1.11), а второе является следствием теоремы Коши, поскольку матрица-функция $(z - \overline{J})^{-1}$ аналитична внутри $\Gamma$.

Интегрируя по $\Gamma$ равенство (4.9) и пользуясь этими соотношениями, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ z^{-1}P^{-1}(z)a_1 & P^{-1}(z) \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} B^{-1},$$

где принята во внимание блочная структура $B$ в (4.2). Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} P_0^{-1}(z) dz = 2\pi i b c_{12}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

По теореме Коши контур $\Gamma$ здесь можем заменить действительной прямой, что дает выражение

$$\Delta = 2\pi i b c_{12} \tag{4.10}$$

для интеграла (4.8).

Из этого соотношения следует, что $\det \Delta \neq 0$ влечет $\det b \neq 0$. Обратно, пусть $\det b \neq 0$. Согласно (2.34), уравнение $B\xi = \eta$ перепишется в виде системы $b\xi_1 + \overline{b}\xi_2 = \eta_1$, $bJ\xi_1 + \overline{bJ}\xi_2 = \eta_2$, откуда $\xi_2 = \overline{b}^{-1}(\eta_1 - b\xi_1)$ и, значит, $q\xi_1 = -bJ\overline{b}^{-1}\eta_1 + \eta_2$, $q = bJ - \overline{bJ}\overline{b}^{-1}b$. В силу обратимости матрицы $B$ множитель $q$ здесь обратим, так что блочный элемент $c_{12}$ матрицы $B^{-1}$ совпадает с $q^{-1}$. Таким образом, все матрицы в правой части (4.10) обратимы и, значит, $\det \Delta \neq 0$.

Для коэффициентов (4.6) системы Бицадзе характеристический матричный многочлен $P(z) = z^2 - a_1 z - a_0$ и обратная к нему рациональная функция $P^{-1}(z)$ даются выражениями

$$P(z) = \begin{pmatrix} z^1 - 1 & \pm 2z \\ \mp 2z & z^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}(z) = \frac{1}{z^2 - 1}\begin{pmatrix} z^1 - 1 & \mp 2z \\ \pm 2z & z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому интеграл (4.8) равен нулевой матрице и, следовательно, рассматриваемая система сильно связана.

Как уже отмечалось, соотношение (4.3) совместно с (4.4) является определяющим для (4.2). Именно, если пара $(b, J)$ удовлетворяет (4.3), (4.4), то (4.3) выполняется автоматически. В этом нетрудно убедиться и непосредственной проверкой.

Пара $(b, J)$ уравнением (4.8) определяется неоднозначно. Например, вместе с ней ему удовлетворяет $(b_1, J_1)$, где $b_1 = bd$, $J_1 = d^{-1}Jd$ и матрица $d \in \mathbb{C}^{l\times l}$ обратима. Соответствующие матрицы $B$ и $B_1$ связаны соотношением $B = B_1 \operatorname{diag}(d, \overline{d})$, так что необходимое требование (4.9) выполнено.

В частности, при выполнении условия (4.7) можем положить $d = b^{-1}$ и тогда (4.8) перейдет в уравнение $J_1^2 = a_0 + a_1 J_1$ относительно матрицы $J_1$. Таким образом, для слабо связанных систем в соотношении (4.2) всегда можно положить $b = 1$. В этом случае $\det B \neq 0$ равносильно $\det(\operatorname{Im} J) = 0$ и справедлив следующий аналог теоремы 1.1 (Гантмахер [9]). Если $J^2 = a_0 + a_1 J$, то матрица $J$ удовлетворяет уравнению $\chi(J) = 0$, $\chi(z) = \det(z^2 - a_1 z - a_0)$. Это предложение, в частности, показывает, что в жордановой форме матрицы $J$ порядок ее $\nu$-клеток не превосходит кратности корня $\nu$ характеристического уравнения $\chi(z) = 0$.

В общем случае, приводя матрицу $A$ в (4.2) к жордановой форме, матрицу $J$ в (4.3) можно выбрать блочно-диагональной, составленной из клеток Жордана. Тогда по теореме 1.5 столбцы матрицы $b$ можно разбить на группы, являющиеся цепочками собственных и присоединенных векторов $x_0, \dots, x_r \in \mathbb{C}^l$ многочлена $P(z) = z^2 - a_1 z - a_0$. В рассматриваемом случае соотношения (1.26), определяющие эту цепочку, принимают вид

$$\begin{aligned} &P(\nu)x_0 = 0,\ P(\nu)x_1 + P'(\nu)x_0 = 0,\\ &P(\nu)x_2 + P'(\nu)x_1 + 2x_0 = 0, \dots,\\ &P(\nu)x_r + P'(\nu)x_{r-1} + 2x_{r-2} = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Таким образом, если $J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m)$, где $J_k$ является $\nu_k$-клеткой Жордана порядка $r_k$ (числа, $\nu_k$ как и $r_k$, могут совпадать для различных $k$), то матрица $b$ имеет блочную структуру $(b_1, \dots, b_m)$, где $b_k$ для $\nu_k = \nu$ и $r_k = r+1$ представляет собой матрицу $\downarrow (x_0, \dots, x_r)$, составленную из цепочки векторов $x_0, \dots, x_r \in \mathbb{C}^l$.

Именно эта структура матрицы $b$ описана в [2] применительно к представлению (3.21) системы (4.1). Условие (4.7) слабой связанности означает, что указанные выше цепочки в совокупности образуют базис пространства $\mathbb{C}^l$. В этом смысле для соответствующего многочлена справедлив аналог теоремы Жордана.

Если $\det b = 0$, т.е. если система (4.1) сильно связана, то необходимое условие (4.4) накладывает на ранг матрицы $b$ определенное ограничение.

**Лемма 4.2.** *Для сильно связанной системы ранг матрицы $b \in \mathbb{C}^{l\times l}$ не меньше $l/2$.*

*Доказательство.* Как отмечено выше, класс решений $(b, J)$ уравнения (4.3), (4.4) инвариантен относительно преобразования $b \to bd$, $J \to d^{-1}Jd$. Поэтому подходящим выбором $d$ можно добиться, чтобы первые $r$ столбцов матрицы $b$ были линейно независимыми, а последние $l - r$ столбцов были равными нулю. Очевидно, умножение коэффициентов системы (4.1) справа на необратимую вещественную матрицу $e$ приводит к эквивалентной системе, которая получается подстановкой $u = e\tilde{u}$ искомого решения $u$. Следовательно, матрицу $b$ можно умножать слева на необратимые вещественные матрицы. Таким образом, при $\det b = 0$ матрицу $b$ в (4.3) всегда можно привести к виду, когда последние ее $l - r$ столбцов равны нулю, а на первых $l$ строках и столбцах стоит единичная матрица. В силу (4.4) это возможно только при $\operatorname{rang} b \geqslant l/2$.

**4.2. Сильно и усиленно эллиптические системы.** Эллиптическую систему (4.1) часто записывают в форме

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = 0, \quad x_1 = x,\ x_2 = y. \tag{4.12}$$

Условие ее эллиптичности состоит в том, что

$$\det\left(\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_i\lambda_j a_{ij}\right)\neq 0 \tag{4.13}$$

для $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\neq 0$. В частности, матрицы $a_{ii}$ обратимы и (4.12) можно привести к каноническому виду (4.1) с коэффициентами

$$a_0=-a_{22}^{-1}a_{11},\quad a_1=-a_{22}^{-1}(a_{12}+a_{21}). \tag{4.14}$$

Соответственно этому с точностью до множителя $a_{22}$ характеристический матричный многочлен (3.2) перейдет в

$$P(z)=a_{11}+(a_{12}+a_{21})z+a_{22}z^2. \tag{4.15}$$

Очевидно, собственные и присоединенные векторы, из которых составляются столбцы матрицы $b$ в (4.2) (в предположении жордановой формы матрицы $J$), можно определять по отношению к этому многочлену.

Работа А. В. Бицадзе [4] стимулировала появление различных классов эллиптических систем, для которых задача Дирихле всегда фредгольмова. Наиболее важным является введенное М. И. Вишиком [8] понятие сильной эллиптичности. Оно заключается в положительной определенности для всех $\lambda_1$, $\lambda_2$ матрицы под знаком определителя в (4.13). Условимся положительную (неотрицательную) определенность матрицы $d$ указывать обозначением $d>0$ ($d\geqslant 0$), включая в него и требование симметричности матрицы. Тогда свойство сильной эллиптичности системы (4.12) выразится условием

$$\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\lambda_i\lambda_j>0. \tag{4.16}$$

Очевидно, матрицы $P^{\pm 1}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ в (4.15) также положительно определены, так что этим свойством обладает и матрица $\Delta$ в (4.8). На основании леммы 4.1 отсюда заключаем, что сильно эллиптические системы слабо связаны, т.е. задача Дирихле для них действительно фредгольмова.

Примером сильно эллиптической системы служит самосопряженная по Лагранжу система (4.12) с коэффициентами

$$a_{11}=a_{22}=1,\quad a_{12}=a_{21}^{T}=p, \tag{4.17}$$

где $p$ — ортогональная матрица, не имеющая вещественных собственных значений. В частности, порядок $l$ системы должен быть обязательно четным. Для этой системы многочлен $P(z)=(z+p)(z+p)^T$, так что условие $P(\lambda)>0$ сильной эллиптичности (4.16) выполнено.

Еще более узкий класс эллиптических систем выделяет введенное в [26] понятие усиленной эллиптичности. Оно заключается в том, чтобы $(2l\times 2l)$-матрица, составленная из коэффициентов системы, была неотрицательно определенной:

$$a=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\geqslant 0, \tag{4.18}$$

причем однородная система линейных уравнений $a\xi=0$ не имеет ненулевых решений $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ с линейно зависимыми векторами $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^l$. Очевидно, (4.18) равносильно условиям

$$a_{ji}^{T}=a_{ij},\quad \sum_{i,j=1}^{2}(a_{ij}\xi_j)\xi_i\geqslant 0 \tag{4.19}$$

для всех $\xi_i,\xi_j\in\mathbb{R}^l$. В частности, эта система — самосопряженная. При $\xi_i=\lambda_i\xi$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$ неравенство (4.19) в силу второго требования строгое, так что для рассматриваемых систем условие сильной эллиптичности (4.17) выполнено.

Заметим, что система (4.12) с коэффициентами (4.17) усиленно эллиптична, так как для нее

$$\sum(a_{ij}\xi_j)\xi_i=\xi_1^2+2(p\xi_1)\xi_2+\xi_2^2\geqslant\xi_1^2-2|\xi_1|\,|\xi_2|+\xi_2^2\geqslant 0,$$

где учтено, что $|p\xi_1|=|\xi_1|$ в силу ортогональности матрицы $p$.

Если при $\xi \neq 0$ неравенство (4.19) строгое, т.е. если матрица (4.18) положительно определена, то система (4.12) называется *сильно эллиптической по Сомильяно* [2].

Введенное понятие особенно полезно по отношению к задаче Дирихле [26].

**Теорема 4.1.** *Для усиленно эллиптической системы задача Дирихле однозначно разрешима.*

*Доказательство.* Согласно п. 4.1, для этой системы задача Дирихле фредгольмова и имеет нулевой индекс, так что достаточно установить единственность ее решения.

Пусть $u \in C^1(\overline{D})$ — решение однородной задачи Дирихле. Тогда применяя к левой части (4.12) формулу Грина, получим равенство

$$0 = -\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int\limits_\Gamma u \sum_{i=1}^{2} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) n_i \, ds. \tag{4.20}$$

Следовательно,

$$\int\limits_D (a \nabla u) \nabla u dx = 0$$

для вектора градиента $\nabla u = (u_x, u_y)$.

Поскольку матрица $a$ неотрицательно определена, отсюда $(a\nabla u)\nabla u = 0$ и, значит, $a\nabla u = 0$ или, в развернутой форме,

$$a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.21}$$

Поскольку по условию $u = 0$ на $\Gamma$, векторы $u_x$ и $u_y$ линейно зависимы в каждой точке $t \in \Gamma$. По определению усиленной эллиптичности отсюда следует, что $u_x = u_y = 0$ на границе $\Gamma$ области $D$.

Рассмотрим $J$-аналитическую функцию $\phi$, участвующую в представлении (3.7) решения $u$. Согласно теореме 2.2, ее производная $\phi'$ связана с $u$ соотношением (3.14), так что она также обращается в нуль на $\Gamma$. В соединении с теоремой Коши п. 2.2 отсюда $\phi' = 0$ всюду в области $D$ и, значит, функция $u$ постоянна. С учетом однородного краевого условия (4.5) это возможно только при $u = 0$.

**4.3. Сопряженные и вырожденные решения.** С каждым решением $u(x, y)$ системы (4.12) можем связать функцию $v(x, y)$, определяемую соотношениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left( a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.22}$$

Необходимое условие существования этой функции вытекает из уравнения (4.12), записанного в форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Функция $v$ называется сопряженной к решению $u$ системы (4.12). Она определена с точностью до аддитивной постоянной и (в случае многосвязной области) вообще говоря, многозначна.

С помощью матрицы

$$c = -(a_{21} b + a_{22} bJ), \tag{4.23}$$

сопряженная функция $v$ может быть выражена через $J$-аналитическую функцию $\phi$ аналогично (3.7).

**Теорема 4.2.** *Функция, сопряженная к $u = \operatorname{Re} b\phi$, дается равенством*

$$v = \operatorname{Re} c\phi + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l. \tag{4.24}$$

*Доказательство.* Подставляя (3.7) в (4.22), получим

$$v_x = -\operatorname{Re}(a_{21} b + a_{22} bJ)\phi', \quad v_y = \operatorname{Re}(a_{11} b + a_{12} bJ)\phi'.$$

Записывая уравнение (4.3) для системы (4.12), (4.14) в форме $a_{11} b + a_{12} bJ = -(a_{21} b + a_{22} bJ)J$, в обозначениях (4.23) отсюда выводим:

$$v_x = \operatorname{Re} c\phi', \quad v_y = \operatorname{Re} cJ\phi'.$$

Следовательно, частные производные функции $v - \operatorname{Re} c\phi$ обращаются в нуль, что и дает представление (4.23).

Может случиться, что сопряженная функция $v$ постоянна, т.е. правая часть (4.22) тождественно равна нулю. В этом случае решение $u$ системы (4.12) называется *вырожденным*. Таким образом, оно определяется переопределенной системой первого порядка (4.21). Очевидным примером вырожденных решений служат многочлены первой степени

$$u_0(x) = \eta + \xi_1 x + \xi_2 x_2, \quad (a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.25}$$

Опишем системы (4.12), класс вырожденных решений которых совпадает с этими многочленами. Положим для краткости

$$\begin{gathered} \tilde{a}_1 = a_{11}^{-1} a_{12}, \quad \tilde{a}_2 = a_{22}^{-1} a_{21}, \\ X = \{x \in \mathbb{R}^l \,|\, x = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 x = \tilde{a}_2 \tilde{a}_1 x\}. \end{gathered} \tag{4.26}$$

**Теорема 4.3.** *Если $X = \{0\}$, то любое вырожденное решение эллиптической системы* (4.12) *имеет вид* (4.25). *В противном случае класс вырожденных решений бесконечномерен.*

*Доказательство.* Покажем, что в обозначениях (4.2), (4.18) условие $x \in X$ равносильно системе уравнений

$$a\xi = aA\xi = 0 \tag{4.27}$$

по отношению к вектору $\xi = (-\tilde{a}_1 x, x) \in \mathbb{R}^{2l}$.

Очевидно, матрицу $a$ здесь можно заменить на

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Ясно также, что $\tilde{a}\xi = 0$ равносильно $\xi = (-\tilde{a}_1 x, x)$, $x - \tilde{a}_1\tilde{a}_2 x = 0$ и равносильно $\xi = (y, -\tilde{a}_2 y)$, $y - \tilde{a}_2\tilde{a}_1 y = 0$. Поэтому высказанное утверждение вытекает из равенства

$$A \begin{pmatrix} -\tilde{a}_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

которое с учетом (4.14), (4.26) проверяется непосредственно.

Из (4.29) также следует, что (4.27) влечет

$$aA^r\xi = 0, \quad r = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.30}$$

В самом деле, пространстве $X \subseteq \mathbb{R}^l$ матрицы $\tilde{a}_j$ определяют взаимно обратные преобразования, так что $(x, \tilde{a}_2 x) = (-\tilde{a}_1 y, y)$, $y = -\tilde{a}_2 x$. Поэтому (4.29) дает соотношение

$$A^r \begin{pmatrix} -\tilde{a}_1 x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_1 y \\ y_r \end{pmatrix}, \quad y_r = (-\tilde{a}_2)^r x, \ r \geqslant 1,$$

откуда следует (4.30).

Обратимся теперь к утверждениям теоремы. Пусть $u = 2\operatorname{Re} b\phi$ — решение системы (4.12). Тогда $\nabla u = (u_x, u_y)$ и $\tilde{\psi} = (\phi', \overline{\phi'})$ связаны соотношением $\nabla u = B\tilde{\psi}$. Следовательно, решение $u$ вырождено, т.е. удовлетворяет системе (4.24) тогда и только тогда, когда $aB\tilde{\psi} = 0$. Дифференцируя по $x$ и $y$ это тождество, с учетом (2.6) получим соотношения

$$aB\tilde{J}^r\tilde{\Psi}^{(k)} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant k, \tag{4.31}$$

где для краткости положено $\tilde{J} = \operatorname{diag}(J, \overline{J})$. В силу (4.2) $B\tilde{J}^r = A^r B$, и предыдущие соотношения равносильны

$$aA^r\tilde{\phi}^{(k)} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant k.$$

Следовательно, если система (4.28) имеет только нулевое решение, то $\psi' = 0$ и, следовательно, $\psi = \phi' \in \mathbb{C}^l$. Другими словами, вырожденное решение $u$ имеет вид (4.25).

Обратно, пусть пространство $Y \subseteq \mathbb{R}^{2l}$ всех решений системы (4.27) имеет ненулевую размерность. Тогда для $\xi \in Y$ выполнены и все соотношения (4.30). Выберем произвольно ограниченную

последовательность $\xi_k \in Y$, $k = 0, 1, \ldots$ и положим $\tilde{\eta}_k = (\eta_k, \overline{\eta}_k) = B^{-1}\xi_k$, $\eta_k \in \mathbb{C}^l$. Рассмотрим $J$-аналитическую функцию

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[z]^k \eta_k = \sum_{0 \leqslant r \leqslant k} \frac{x^{k-r}y^y}{(k-r)!r!} J^r \eta_k.$$

Аналогичное разложение справедливо и для $\tilde{\psi}$ по отношению к $\tilde{J}$ и $\tilde{\eta}_k$. Таким образом,

$$aB\tilde{\psi} = \sum_{0 \leqslant r \leqslant k} \frac{x^{k-r}y^r}{(k-r)!r!} aA^r \xi_k, \quad \xi_k = B\tilde{\eta}_k$$

и в силу (4.31) функция $aB\tilde{\psi} \equiv 0$. Следовательно, $u = \operatorname{Re} b\phi$, где $\phi' = \psi$, является вырожденным решением. Ясно, что класс таких решений бесконечномерен.

**Лемма 4.3.** (а) *Размерность пространства $X$ четна.*

(б) *Ранг матрицы $a = (a_{ij})_1^2$ заключен между $l$ и $2l$. При* $\operatorname{rang} a = l$ *пространство $X$ совпадает с $\mathbb{R}^l$ (так что $l$ четно). При* $\operatorname{rang} a \geqslant 2l - 1$ *пространство $X = 0$.*

*Доказательство.* (а) Матрицы $\tilde{a}_j$ определяют на $X$ взаимно обратные линейные преобразования, которые обозначим $\tilde{a}_{(j)}$. Утверждается, что $\tilde{a}_{(j)}$ не имеет вещественных собственных значений.

В самом деле, предположим противное: пусть для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$ и ненулевого $x \in X$ выполнены соотношения $\tilde{a}_1 x = \mu x$, $\tilde{a}_2 x = \mu^{-1} x$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{2} (a_{ij}\lambda_i\lambda_j)x = \{a_{11}(\lambda_1 + a_1'\lambda_2)\lambda_1 + a_{22}(a_2'\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\}x$$

и при $\lambda_1 + \mu\lambda_2 = 0$ левая часть этого выражения обращается в нуль, что противоречит условию эллиптичности (4.13) системы (4.12).

(б) Очевидно, ранг матрицы $\tilde{a}$ в (4.29) не меньше $l$. Если этот ранг в точности равен $l$, то матрицы $\tilde{a}_j$, $j = 1, 2$ взаимно обратны и $X = \mathbb{R}^l$. Если же $\operatorname{rang} a \geqslant 2l - 1$, то $\dim X \leqslant 1$ и в силу (а) это возможно только при $X = 0$.

Заметим, что первому утверждению в (б) удовлетворяет система (4.12), (4.17) с ортогональной матрицей $p$, не имеющей вещественных собственных значений.

Введенное выше понятие сопряженного решения можно несколько расширить. Рассмотрим матрицы $d \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ и $dB \in \mathbb{C}^{2l \times 2l}$, записанные в $(2 \times 2)$-блочном виде:

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad dB = \begin{pmatrix} c_0 & \overline{c}_0 \\ c_1 & \overline{c}_1 \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

Пусть матрица $d$ связана с коэффициентами уравнения (4.1) соотношениями

$$d_{21} = d_{12}a_0, \quad d_{22} - d_{11} = d_{12}a_1. \tag{4.33}$$

Тогда в силу очевидного тождества

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(d_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(d_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = d_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right),$$

с каждым решением $u$ уравнения (4.1) можем связать функцию $v$, для которой

$$\frac{\partial v}{\partial x} = d_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = d_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.34}$$

Эта функция, которую называем $d$-сопряженной с $u$, определена с точностью до аддитивной постоянной и, вообще говоря, многозначна (если область $D$ многосвязна).

Совершенно аналогично теореме 4.2 проверяется, что для нее справедливо представление (4.23) с матрицей $c = c_0$ из (4.32). В самом деле, согласно (4.2), (4.32)

$$c_0 = d_{11}b + d_{12}bJ, \quad c_1 = d_{12}b + d_{22}bJ.$$

С учетом (4.3), (4.33) отсюда следует

$$c_0 J - c_1 = d_{12}(bJ^2 - a_0 b - a_1 bJ) = 0.$$

Таким образом, дифференцируя равенство $v = \operatorname{Re} c_0\phi$, получим:

$$v_x = \operatorname{Re} c_0\phi' = d_{11}\operatorname{Re} b\phi' + d_{12}\operatorname{Re} bJ\phi',$$
$$v_y = \operatorname{Re} c_0 J\phi' = d_{21}\operatorname{Re} b\phi' + d_{22}\operatorname{Re} bJ\phi',$$

что доказывает (4.34).

При некоторых дополнительных предположениях функция $v$ является решением вполне определенной эллиптической системы второго порядка.

**Лемма 4.4.** *Если* $\det d \neq 0$*, то функция* $v$ *является решением эллиптической системы*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \tilde{a}_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{a}_1\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 \end{pmatrix} = dAd^{-1}. \tag{4.35}$$

*В частности, если* $da = ad$*, то условие* (4.32) *выполнено и функция* $v$ *является решением того же уравнения* (4.1)*, что и* $u$*.*

*Доказательство.* Очевидно, градиент $\nabla u = (u_x, u_y)$ удовлетворяет системе

$$(\nabla u)_y - A(\nabla u)_x = 0.$$

Записывая (4.34) в форме $v = du$, отсюда приходим к системе

$$(\nabla v)_y - \tilde{A}(\nabla v)_x = 0, \quad \tilde{A} = dAd^{-1}. \tag{4.36}$$

С учетом специального вида (4.2) матрицы $A$ соотношения (4.32) можно переписать в форме

$$(dA)_{11} = d_{21}, \quad (dA)_{12} = d_{22}, \tag{4.37}$$

поэтому матрица $\tilde{A}$ имеет аналогичную (4.2) блочную структуру. В соединении с (4.36) отсюда приходим к (4.35).

Наконец, если $Ad = dA$, то, поскольку $(Ad)_{11} = d_{21}, (Ad)_{12} = d_{22}$, соотношения (4.37), а значит, и (4.32) выполняются автоматически.

Условию коммутирования с $A$ удовлетворяет, например, матрица

$$d = B\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}B^{-1},$$

для нее $c_0 = -ib$ и, следовательно, $v = \operatorname{Im} b\phi$.

**4.4. Задача Неймана.** Наряду с задачей Дирихле (4.5) для эллиптической системы (4.12) важную роль играет и краевая задача

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)n_i\Big|_\Gamma = g, \tag{4.38}$$

где $n = (n_1, n_2)$ есть единичная внешняя нормаль к границе $\Gamma = \partial D$ области $D$. В скалярном случае $l = 1$ левая часть этого выражения определяет дифференцирование вдоль вектора с компонентами $a_{11}n_1 + a_{21}n_2$, $a_{12}n_1 + a_{22}n_2$, называемой *конормалью*. В этом случае данная задача носит название задачи Неймана. Этот термин используем и в общем случае $l > 1$.

Из (4.21) видно, что вырожденные решения удовлетворяют однородному краевому условию (4.38) в любой области $D$. В соединении с теоремой 4.3 отсюда следует, что при $\dim X > 0$ однородная задача Неймана имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Вырожденные решения $\tilde{u}$, отвечающие эллиптической системе

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ji}^T\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x_i\partial x_j} = 0, \tag{4.12$^\sim$}$$

сопряженной по Лагранжу с системой (4.12), определяют естественные необходимые условия разрешимости однородной задачи (4.38).

В самом деле, пусть $Lu$ и $\tilde{L}\tilde{u}$ означают левые части, соответственно, выражений (4.12) и (4.12$^\sim$). Тогда, применяя к тождеству

$$(Lu)\tilde{u} - u(\tilde{L}\tilde{u}) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\tilde{u} - u\left(a_{ji}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}\right)\right]$$

формулу Грина, мы можем записать указанные условия разрешимости в виде условий ортогональности

$$\int_\Gamma g u_0 ds = 0 \tag{4.39}$$

ко всем вырожденным решениям $u_0$ системы (4.12$^\sim$). При $u_0 = \xi \in \mathbb{R}^l$ они включают в себя и необходимое условие разрешимости

$$\int_\Gamma g ds = 0.$$

В частности, на гладком контуре можно ввести функцию $f$, производная от которой по параметру длины дуги совпадает с $g$. В терминах (4.22) сопряженной функции $v$ левая часть (4.38) совпадает с касательной производной $v' = v_x s_1 + v_y s_2 = -v_x n_2 + v_y n_1$. Следовательно, задачу Неймана можно переписать в виде

$$v|_\Gamma = f$$

задачи Дирихле по отношению к $v$. Поэтому с учетом теоремы 4.2 она фредгольмово эквивалентна задаче Гильберта (3.36) с постоянным коэффициентом $G = c$, определяемым матрицей (4.23). Соответственно, условие

$$\det c \neq 0 \tag{4.40}$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи Неймана. Как и в случае задачи Дирихле убеждаемся, что индекс рассматриваемой задачи равен нулю.

Если условие (4.40) выполнено, то класс вырожденных решений должен быть конечномерным, что по теореме 4.3 возможно только при $X = 0$. Для усиленно эллиптических систем это утверждение можно обратить.

**Лемма 4.5.** *Пусть система* (4.12) *усиленно эллиптична. Тогда любое решение однородной задачи Неймана является вырожденным, а условие* (4.40) *в обозначениях* (4.26) *равносильно* $X = 0$.

*Доказательство.* Пусть $u \in C^1(\overline{D})$ — решение однородной задачи Неймана. Тогда в правой части (4.20) второе слагаемое обращается в нуль. Как и при доказательстве теоремы 4.2 выводим отсюда, что $a\nabla u = 0$, т.е. что $u$ является вырожденным решением.

Если $\det c \neq 0$, то пространство решений однородной задачи конечномерно и на основании теоремы 4.3 отсюда $X = 0$.

Пусть $\det c = 0$. Рассмотрим задачу Неймана в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Согласно замечанию в конце п. 3.4, существует бесконечное число линейно независимых $J$-аналитических функций $\phi$, которые допускают оценку

$$|\phi'(z)| \leqslant C(1 + |z|^2)^{-1}$$

и для которых $c\phi(z) = 0$ на границе $\operatorname{Im} z = 0$ полуплоскости. В силу этой оценки соотношение (4.20) справедливо для $u = \operatorname{Re} b\phi$ и в полуплоскости, поэтому решения $u$ являются вырожденными. На основании теоремы 4.3 отсюда заключаем, что $\dim X > 0$.

Для усиленно эллиптических систем аналогично случаю задачи Дирихле характер разрешимости задачи Неймана значительно упрощается.

**Теорема 4.4.** *Пусть система* (4.12) *усиленно эллиптична и выполнено условие* (4.40). *Тогда решения однородной задачи Неймана состоят только из многочленов* (4.25)*, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (4.39) *по отношению к этим многочленам.*

*Если условие* (4.40) *нарушено, то однородная задача Неймана имеет бесконечное число линейно независимых решений.*

*Доказательство.* Пусть выполнено условие (4.40). Тогда на основании фредгольмовости задачи, леммы 4.5 и теоремы 4.4 однородная задача Неймана состоит только из многочленов (4.25). Поскольку сопряженная система (4.12) совпадает с (4.12$^\sim$), условия ортогональности (4.39) к этим многочленам необходимы для разрешимости неоднородной задачи. Как было отмечено выше, индекс задачи равен нулю, так что эти условия ортогональности и достаточны.

Пусть, далее, $\det c = 0$. Тогда на основании леммы 4.5 и теоремы 4.3 пространство вырожденных решений системы (4.12), а значит, и решений однородной задачи бесконечномерно.

## 5. Система двух уравнений второго порядка

**5.1. Классификация систем.** При $l = 2$ эллиптические системы (4.12) допускают полное описание. В этом случае характеристический многочлен (4.15) представляет собой $(2 \times 2)$-матрицу

$$P(z) = a_1 + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2 = (P_{ij})_1^2, \tag{5.1}$$

а скалярный характеристический многочлен $\chi(z) = \det P(z)$ имеет степень 4. Соответственно, в верхней полуплоскости он имеет два корня, быть может совпадающие. Более точно, для этих корней возможны следующие три случая: (i) корни $\nu_1$ и $\nu_2$ различны; (ii) имеется один кратный корень $\nu$, причем $P(\nu) \neq 0$; (iii) матрица $P(\nu) = 0$.

Условимся ниже матрицу $J$ в (4.2) считать жордановой, так что, соответственно этим трем случаям,

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} \nu_1 & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Как указано в п. 4.1, столбцы $x \in \mathbb{R}^2$ матрицы $b$ являются решением цепочки уравнений (4.11). Соответственно трем случаям (5.2), эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && P(\nu_1)x = P(\nu_2)y = 0; \\ &\text{(ii)} && P(\nu)x = 0,\ P(\nu)y + P'(\nu)x = 0; \\ &\text{(iii)} && P(\nu)x = P(\nu)y = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Для каждого из этих трех случаев найдем связь между матрицами $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ и $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ в (4.2).

**Лемма 5.1.** *В обозначениях*

$$b = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} p &= \operatorname{Im}(x_1\overline{x}_2), \\ q &= \operatorname{Im}(y_1\overline{y}_2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

*имеет место равенство*

$$\frac{1}{4}\det B = \begin{cases} |\nu_1 - \nu_2|^2 pq - (\operatorname{Im}\nu_1)(\operatorname{Im}\nu_2)|\det b|^2, & \text{(i)} \\ p^2 - (\operatorname{Im}\nu)^2|\det B|^2, & \text{(ii)} \\ -(\operatorname{Im}\nu)^2|\det b|^2. & \text{(iii)} \end{cases} \tag{5.5}$$

*Доказательство.* Введем в классе $(2 \times 2)$-матриц операцию

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Очевидно, $(xy)^* = y^*x^*$ и $xx^* = x^*x = \det x$. В частности, при $\det x \neq 0$ обратная матрица $x^{-1} = (\det x)^{-1}x^*$. Обратимся к равенству (4.2). Если $\det b \neq 0$, то

$$\det B = \det b \det(bJ) \det \begin{pmatrix} 1 & b^{-1}\overline{b} \\ 1 & J^{-1}b^{-1}\overline{bJ} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\det B = \det \Delta, \quad \Delta = b^* \overline{bJ} - Jb^* \overline{b}. \tag{5.7}$$

Поскольку матрица $\Delta$ здесь непрерывно зависит от $b$, в силу соображений плотности соотношение (5.6) сохраняет свою силу и при $\det b = 0$.

В обозначениях (5.4) матрицу $b^* \overline{b}$ в правой части (5.7) можно записать в форме

$$b^* \overline{b} = \begin{pmatrix} r & -2iq \\ 2ip & r \end{pmatrix}, \quad r = y_2 \overline{x}_1 - y_1 \overline{x}_2. \tag{5.8}$$

В частности,

$$|r|^2 = |\det b|^2 + 4pq. \tag{5.9}$$

Вычисляя элементы матрицы $\Delta$ в (5.7) для каждого из трех случаев (i)–(iii) и пользуясь (5.9), приходим к справедливости (5.5).

Из (5.5), в частности, следует, что в случае (iii) матрица $b$ всегда обратима. Поэтому ее столбцы $x, y$ линейно независимы, так что, согласно (5.3), должно быть $P(\nu) = 0$. Тогда многочлен $P(z)$ делится нацело на $z - \nu$ и $z - \overline{\nu}$, так что он дается равенством

$$P(z) = a_{22}[z^2 - 2(\operatorname{Re} \nu)z + |\nu|^2]. \tag{5.10}$$

Отметим, что равенство $P(\nu) = 0$ следует и из уравнения (4.3), которому удовлетворяет скалярная матрица $J = \nu$.

Из (5.10) видно, что в рассматриваемом случае (iii) умножением на $a_{22}^{-1}$ слева система (4.12) сводится к одному скалярному уравнению. По этой причине в дальнейшем основное внимание уделяем системам, отвечающим случаям (i) и (ii).

Столбцы $x, y$ матрицы $b$ в уравнениях (5.3) определены с точностью до линейных преобразований

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad x' = \lambda_1 x, \ \ y' = \lambda_2 y, \ \ \lambda_j \neq 0; \\ &\text{(ii)} \quad x' = \lambda_1 x, \ \ y' = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \ \ \lambda_1 \neq 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Другими словами, выполнение над столбцами этих преобразований не меняет матрицы $A$ в (4.2).

Согласно п. 4.1, сильно связанные системы выделяются условием линейной зависимости своих столбцов $x$ и $y$. Для таких систем подходящим преобразованием (5.11) всегда можно добиться, чтобы $x = y$ в случае (i) и $y = 0$ в случае (ii). Иначе говоря, сильно связанные системы характеризуются условием

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad P(\nu_1)x = P(\nu_2)x = 0; \\ &\text{(ii)} \quad P(\nu)x = P'(\nu)x = 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

для некоторого ненулевого $x \in \mathbb{C}^2$.

Векторы $x$ и $y$ в (5.3) можно определить в терминах элементов самой матрицы $P(z)$. Кроме того, удобно наряду с $b$ описать и матрицу $c$ в (4.23), играющую важную роль для задачи Неймана. Очевидно, достаточно ограничиться первыми двумя случаями (i) и (ii), поскольку в случае (iii) можно положить $b = 1$ и $c = -(a_{11} + a_{22}\nu)$.

В обозначениях (5.1), (5.6) свяжем с матрицей $P(z)$ матричные многочлены

$$Q(z) = P^*(z), \quad R(z) = -(a_{21} + a_{22}z)Q(z). \tag{5.13}$$

**Лемма 5.2.** (i) *Пусть номера $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ выбраны так, что $i$-й и $j$-й столбцы матриц, соответственно, $Q(\nu_1)$ и $Q(\nu_2)$, отличны от нуля. Тогда можем положить*

$$\begin{aligned} b_{(1)} &= Q_{(i)}(\nu_1), \quad b_{(2)} = Q_{(j)}(\nu_2), \\ c_{(1)} &= R_{(i)}(\nu_1), \quad c_{(2)} = R_{(j)}(\nu_2), \end{aligned} \tag{5.14}$$

*где $x_{(k)}$ означает $k$-й столбец матрицы $x$.*

(ii) *Пусть номер $i = 1, 2$ выбран так, что $i$-й столбец матрицы $Q(\nu)$ отличен от нуля. Тогда можем положить*

$$\begin{aligned} b_{(1)} &= Q_{(i)}(\nu), \quad b_{(2)} = Q'_{(j)}(\nu), \\ c_{(1)} &= R_{(i)}(\nu), \quad c_{(2)} = R'_{(j)}(\nu). \end{aligned} \tag{5.15}$$

*Доказательство.* (i) Из определений (5.6), (5.13) видно, что

$$P(z)Q(z) = \chi(z), \tag{5.16}$$

где $\chi = \det P$. Поскольку $\chi(\nu_1) = \chi(\nu_2) = 0$, столбцы $x$ матрицы $Q(\nu_k)$ служат решением уравнения $P(\nu_k)x = 0$, что доказывает соотношения (5.14) для $b$. Согласно (1.17) и (5.2), для столбцов матрицы $c$ в (4.23) имеем: $c_{(k)} = -(a_{21}b_{(k)} + a_{22}b_{(k)}\nu_k) = -[(a_{21} + a_{22}\nu_k)n]_{(k)}$. В соответствии с (5.13) это приводит к соотношениям (5.14) для $c$.

(ii) Поскольку $\nu$ — это кратный корень многочлена $\chi(z)$, то $\chi(\nu) = \chi'(\nu) = 0$. Отсюда после дифференцирования (5.16) выводим соотношение $P(\nu)Q'(\nu) + P'(\nu)Q(\nu) = 0$. Сравнивая его с уравнением (5.3) для рассматриваемого случая, аналогично предыдущему получим соотношения (5.15) для $b$.

Что касается $c$, то, как и выше, имеем: $c_{(k)} = -[a_{21}b_{(k)} + a_{22}(bJ)_{(k)}]$, $k = 1, 2$. В рассматриваемом случае $\nu$-клетки Жордана $J$ столбцы $(bJ)_{(1)} = b_{(1)}\nu$, $(bJ)_{(2)} = b_{(1)} + b_{(2)}\nu$, так что $c_{(1)} = -(a_{21} + a_{22}\nu)b_{(1)}$, $c_{(2)} = -(a_{21} + a_{22}\nu)b_{(2)} - a_{22}b_{(1)}$. С учетом (5.13) и соотношения (5.15) для $b$ отсюда получаем

$$\begin{aligned} c_{(1)} &= -(a_{21} + a_{22}\nu)Q_{(i)}(\nu) = Q_{(i)}(\nu), \\ c_{(2)} &= -(a_{21} + a_{22}\nu)Q'_{(i)}(\nu) - a_{22}Q_{(i)}(\nu) = R'_{(i)}(\nu), \end{aligned}$$

что завершает доказательство (5.15) и леммы.

Предыдущие рассмотрения проиллюстрируем на примере систем вида (4.1), полученных разделением действительной и мнимой части одного комплексного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \beta\frac{\partial}{\partial x}\right)(u_1 + iu_2) = 0.$$

Следуя п. 3.2, в результате получим систему (4.1) с матричными коэффициентами

$$a_0 = -(\alpha\beta)^\wedge, \quad a_1 = -(\alpha + \beta)^\wedge, \tag{5.17}$$

где принято обозначение

$$(x + iy)^\wedge = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Для подходящих $\alpha, \beta$ имеем системы любого из трех случаев (i)–(iii). Более точно, при $\alpha = \beta = \pm i$ получаются системы Бицадзе с коэффициентами (4.6). При $\alpha = \nu$, $\beta = \overline{\nu}$ имеем случай (iii), так как тогда многочлен $P(z)$ с коэффициентами (5.17) совпадает с (5.10). Случаи (i) и (ii) получаются, соответственно, при $\alpha \neq \beta, \overline{\beta}$ и $\alpha = \beta$, причем $\nu_1 = \operatorname{Re}\alpha + i|\operatorname{Im}\alpha|$, $\nu_2 = \operatorname{Re}\beta + i|\operatorname{Im}\beta|$.

При $\operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}\beta = 0$ коэффициенты (5.17) имеют вид

$$a_0 = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & s_0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

с некоторыми $r_j, s_j \in \mathbb{R}$. Рассмотрим систему (4.1) с этими коэффициентами, для которой многочлен $\chi(z)$ имеет $z = i$ своим кратным корнем. Поскольку

$$P(z) = \begin{pmatrix} z^2 - r_0 & -r_1 z \\ -s_1 z & z^2 - s_0 \end{pmatrix}$$

и $\chi(z) = \det P(z) = z^4 - (r_0 + s_0 + r_1 s_1)z^2 + r_0 s_0$, указанное требование равносильно условиям

$$r_0 + s_0 + r_1 s_0 = -2, \quad r_0 s_0 = 1. \tag{5.19}$$

При $r_1 = s_1 = 0$ уравнение (4.1), (5.18) переходит в уравнение Лапласа, так что этот случай можно исключить. В остальных случаях для рассматриваемого многочлена $P(z)$ матрица $Q$ и ее производная $Q'$ в точке $z = i$ равны

$$Q(i) = \begin{pmatrix} -s_0 - 1 & ir_1 \\ is_1 & -r_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad Q'(i) = \begin{pmatrix} 2i & r_1 \\ s_1 & 2i \end{pmatrix}.$$

Поэтому на основании леммы 5.2 можем положить

$$b = \begin{pmatrix} -s_0 - 1 & 2i \\ is_1 & s_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} ir_1 & r_1 \\ -r_0 - 1 & 2i \end{pmatrix}$$

в случаях, соответственно, $s_1 \neq 0$ и $r_1 \neq 0$. В частности, с учетом (5.19) рассматриваемая система сильно связана при $s_0 = r_0 = 1$ и слабо связана в противном случае.

**5.2. Параметрическое описание систем.** Эллиптические системы (4.12) инвариантны относительно линейных преобразований уравнений, составляющих системы, и искомого вектора $u$, а также линейных преобразований независимых переменных $x, y$. В терминах характеристического многочлена эти преобразования заключаются в умножении $P(z)$ слева и справа на обратимые матрицы $d \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ и применении дробно-линейной подстановки

$$z = \frac{\alpha_{11}u + \alpha_{12}}{\alpha_{21}u + \alpha_{22}}, \quad \det \alpha \neq 0.$$

Если рассмотрения вести в рамках систем (4.1), то первые два преобразования объединяются и сводятся к преобразованиям подобия $P(z) \to dP(z)d^{-1}$. Очевидно, все три случая (i)–(iii) являются инвариантными относительно данных преобразований.

Системы двух уравнений второго порядка были предметом систематического исследования в монографии [39]. В частности, в ней показано, что с помощью указанных преобразований система (4.1) может быть приведена к одной из нескольких канонических форм типа (5.19).

Рассмотрим другой подход, основанный на соотношении (4.2), в котором матрица $J$ одного из трех типов (5.12) фиксирована, а матрица $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ рассматривается как параметр. Единственное требование заключается в условии (4.4), т.е. в обратимости матрицы $B$ в (4.2). В явном виде оно описывается леммой 5.1 При выполнении данного условия параметру $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ отвечает эллиптическая система (4.1) с коэффициентами $a_0$, $a_1$, определяемыми из соотношения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix} B^{-1}, \quad B = \begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Все множество эллиптических систем разбивается на три подмножества, отвечающие трем типам (5.2) матрицы $J$.

С помощью леммы 5.1 нетрудно дать гомотопическую классификацию каждого из этих подмножеств.

**Теорема 5.1.** *Множество $E$ эллиптических систем, отвечающих случаю* (iii)*, связно. В случаях $(i)$ и $(ii)$ это множество состоит из трех связных компонент $E^{\pm}$ и $E^0$, в параметрическом описании* (5.20) *которых, соответственно,*

$$\begin{aligned} &(\pm) \qquad \det B > 0, \quad \pm p > 0; \\ &(0) \qquad \det B < 0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

*где $p$ фигурирует в* (5.4).

*Доказательство.* Для фиксированной матрицы $J$ обозначим $G$ множество всех матриц $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, для которых $\det B \neq 0$ в соотношении (5.5) леммы 5.1. Зависимость коэффициентов $a_0, a_1$ в (5.20) от $b$ обозначим $(a_0, a_1) = h(b)$. В результате получаем непрерывное отображение $h$ множества $G \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^8$ на $E \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^8$. Как показывает выражение (5.5), множество $G$ открыто. Из леммы 5.2 следует, что отображение $h$ обладает непрерывным правым обратным $h^{(-1)} : E \to G$, т.е. выполняется свойство $hh^{(-1)}(a_0, a_1) = (a_0, a_1)$. Следовательно, множество $E$ открыто и $h$ переводит связные компоненты $G$ на связные компоненты $G$. Соответствующее индуцированное отображение компонент взаимно-однозначно. В самом деле, если паре $(a_0, a_1) \in E$ отвечают две матрицы $b$ и $\overline{b}$ при отображении $h$, то эти матрицы связаны между собой элементарным преобразованием (5.11). Поэтому $b$ и $\overline{b}$ принадлежат одной связной компоненте $G$.

Таким образом, утверждение теоремы достаточно установить по отношению к $G$. В случае (iii), согласно (5.5), множество $G$ совпадает с $\{b \in \mathbb{C}^{2\times 2},\ \det b \neq 0\}$ и потому связно. Обратимся к

случаям (i) и (ii). В этих случаях матрицу $b$ с помощью элементарных преобразований (5.11) можно привести к одному из следующих двух видов в каждом из случаев (i), (ii):

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}; \\ &\text{(ii)} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Здесь учтено, что в случае (i) неравенства $x_1 \neq 0$ всегда можно добиться путем перестановки столбцов и перенумерации $\nu_1$, $\nu_1$.

Дальнейшие рассуждения достаточно провести по отношению к этим матрицам. Рассмотрим сначала матрицу первого типа в (5.22). Полагая $x_2 - y_2 = x - iy$, $x_1 + y_2 = u + iv$, равенство (5.5) для (i) запишем в виде

$$\det B = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{v^2}{c^2} \tag{5.23}$$

с положительными постоянными $a, b, c$, зависящими только от $\nu_1, \nu_2$. Следовательно, уравнение $\det B = 0$ определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных $x, y, v$ эллиптический конус. Дополнение к нему состоит из трех компонент $K^0$, $K^{\pm}$, определяемых знаками $\det B$ и $v$ аналогично (5.21). В четырехмерном пространстве переменных $x, y, u, v$, определяющих матрицу $b$, получаем соответствующие компоненты $K^0 \times \mathbb{R}$ и $K^{\pm} \times \mathbb{R}$. Здесь нужно только учесть, что $\det B > 0$ влечет за собой неравенство $pq > 0$ в (5.4), (5.5) и, значит, знаки $p$, $q$ и $p + q$ совпадают.

Аналогичным образом действуем и для матрицы $b$ первого типа в (5.22)(ii). Здесь нужно положить $y_2 = x - iy$, $x_2 = u - iv$ и тогда (5.5) по-прежнему запишется в виде (5.23). Для матриц $b$ второго типа в (5.22) определитель $\det B < 0$. Ясно, что эти матрицы образуют связное подмножество $G^0$. Это завершает доказательство теоремы.

Было бы интересно вывести теорему 5.1 в рамках общего подхода к гомотопической классификации эллиптических краевых задач для обобщенных систем Коши — Римана, предложенного в [44]. То же относится к критериям эллиптичности систем с постоянными коэффициентами, приведенным в п. 3.3.

Как было отмечено в п. 5.1, сильно связанные системы могут возникнуть только в случаях (i) и (ii). Из (5.5) и теоремы 5.1 видно, что они соответствуют матрицам $b \in G^{\pm}$. Например, для системы Бицадзе с коэффициентами (4.6) указанных знаков матрица $b \in G^{\pm}$. Сильно эллиптическим системам отвечают матрицы $b \in G^0$. Это следует из того, что матричные многочлены $P_t(\lambda) = tP(\lambda) + (1-t)(1+\lambda^2)$ переменной $\lambda$, зависящие от параметра $0 \leqslant t \leqslant 1$, положительно определены для всех $t$.

С помощью отображения $h: \ b \to (a_1, a_2)$ можно строить эллиптические системы с любой наперед заданной матрицей $b$. Поэтому желательно описать это отображение явно. Пусть операция $*$ означает то же, что и (5.6).

**Лемма 5.3.** *Для коэффициентов $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ системы* (4.1) *справедливы формулы*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2(\det B)^{-1} \operatorname{Re}[(\det \overline{bJ})d_2 - (\det J)d_1\overline{d}_1], \\ a_1 &= 2(\det B)^{-1} \operatorname{Re}[(\det \overline{b}J)d_1 - d_2\overline{d}_1^*], \end{aligned} \tag{5.24}$$

*где $d_k = bJ^k b^*$, $k = 1, 2$.*

*Доказательство.* Доказательство основывается на явных выражениях для блочных элементов обратной матрицы $B^{-1}$. Они получаются путем обращения системы $B\xi = \eta$ или, подробнее, $b\xi_1 + \overline{b}\xi_2 = \eta_1$, $bJ\xi_1 + \overline{bJ}\xi_2 = \eta_2$.

Предположим сначала, что $\det b \neq 0$. Тогда, исключая одну переменную $\xi$ из первого уравнения и подставляя во второе, получим:

$$\begin{aligned} (bJ - \overline{bJb}^{-1}b)\xi_1 &= -\overline{bJb}^{-1}\eta_1 + \eta_2, \\ (\overline{bJ} - bJb^{-1}\overline{b})\xi_2 &= -bJ\overline{b}^{-1}\eta_1 + \eta_2. \end{aligned}$$

В обозначениях (5.7) для матрицы $bJ-\overline{bJb}^{-1}b=\overline{b}(\overline{b}^{-1}bJ-\overline{Jb}^{-1}b)$ имеем выражение $\overline{b}(\det\overline{b})^{-1}\overline{\Delta}=(\overline{b^*})^{-1}\overline{\Delta}$. Из (5.7) и вещественности $\det B$ следует, что $\overline{\Delta}^{-1}=(\det B)^{-1}\overline{\Delta^*}$. Поэтому формулы для $\xi_1,\xi_2$ можно переписать в форме $\xi_1=c_0\eta_1+c_1\eta_2$, $\xi_2=\overline{c}_0\eta_1+\overline{c}_1\eta_2$ с матрицами

$$c_0=-(\det B)^{-1}\overline{\Delta^*}\overline{b}^*\overline{bJb}^{-1},\quad c_1=(\det B)^{-1}\overline{\Delta^*}\overline{b}^*.$$

Поскольку $\overline{\Delta^*}=J^*b^*\overline{b}-b^*\overline{bJ}^*$, то $\overline{\Delta^*}\overline{b}^*=(\det\overline{b})J^*b^*\overline{b}^*-\overline{bJ}^*\overline{b}^*$ и, следовательно, $\overline{\delta^*}\overline{b}^*\overline{bJb}^{-1}=J^*b^*\overline{bJb}^*-(\overline{\det bJ})b^*$. Таким образом,

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} c_0 & c_1\\ \overline{c}_0 & \overline{c}_1\end{pmatrix},\quad \begin{aligned} c_0&=(\det B)^{-1}[(\det\overline{bJ})b^*-J^*b^*\overline{bJb}],\\ c_1&=(\det B)^{-1}[(\overline{\det b})J^*b^*-b^*\overline{bJ}^*\overline{b}^*].\end{aligned}$$

В силу соображений плотности эти формулы сохраняются и в случае $\det b=0$.

Согласно (5.20), теперь имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bJ & \overline{bJ}\\ bJ^2 & \overline{bJ}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2\\ \overline{c}_1 & \overline{c}_2\end{pmatrix},$$

откуда $a_j=2\operatorname{Re}bJ^2c_j$, $j=1,2$. Подставляя сюда явные выражения для матриц $c_j$, приходим к формулам (5.24).

Заметим, что в случае (iii) матрицы $d_k=\nu^k\det b$ скалярны и формулы (5.24) переходят в соответствующие коэффициенты многочлена, фигурирующего в правой части (5.10).

В качестве иллюстрации леммы рассмотрим сильно связанную систему, отвечающую матрице

$$b=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ i & i\end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Очевидно, это возможно только в случаях (i), (ii).

Согласно (5.4), (5.5), определитель $\det B=4|\nu_1-\nu_2|^2$ в случае (i) и $\det B=4$ в случае (ii). Поэтому подстановка (5.25) в формулы (5.24) дает выражения

$$a_j=\operatorname{Re}\alpha_j(1+ie),\quad j=0,1, \tag{5.26}$$

где

$$\alpha_0=\begin{cases} -\nu_1\nu_2,\\ -\nu^2,\end{cases},\quad \alpha_1=\begin{cases}\nu_1+\nu_2,\\ 2\nu,\end{cases},\quad e=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

В частности, при $\nu=i$ формулы (5.26) согласуются с (5.18).

Полагая $a_{22}=1$, запишем систему (4.1), (5.26) в форме (4.12). Тогда (4.14) и (4.23) переходят в

$$a_0=-a_{11},\quad a_1=-a_{12}-a_{21},\quad c=-a_{21}b-bJ.$$

Слагаемое $a_{21}$ здесь можно подчинить условию $\det c\neq 0$. В самом деле, в силу (5.25) можем записать

$$a_{21}b=\begin{pmatrix} x & x\\ iy & iy\end{pmatrix}$$

с произвольными наперед заданными $x,y$.

Как показывает простая проверка, $\det c\neq 0$ при $x\neq y$ в обоих случаях (i) и (ii). Таким образом, задача Неймана для сильно связанной системы может оказаться фредгольмовой.

С другой стороны, условие $\det c\neq 0$ фредгольмовости задачи Неймана может нарушаться даже для сильно эллиптических систем, относящихся к случаю (iii).

В самом деле, согласно (5.10), в этом случае $a_{21}+a_{12}=-2(\operatorname{Re}\nu)a_{22}$, причем матрица $a_{22}$ положительно определена, а $a_{21}^T=a_{12}$. Поэтому можем положить $a_{21}=-(\operatorname{Re}\nu)a_{22}-\Delta$ с кососимметрической матрицей $\Delta$. Тогда $c=-a_{21}b-a_{22}\nu=[\Delta-i(\operatorname{Im}\nu)a_{22}]b$. Поэтому достаточно убедиться, что при подходящем выборе $\Delta$ матрица в квадратных скобках имеет нулевой определитель. Запишем

$$a_{22}=\begin{pmatrix} p & r\\ r & q\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix} 0 & s\beta\\ -s\beta & 0\end{pmatrix},\ \beta=\operatorname{Im}\nu,$$

где $p,q$ положительны и $pq>r^2$. В этих обозначениях $\det[\Delta-i(\operatorname{Im}\nu)a_{22}]=0$ при $s^2=pq-r^2$.

**5.3. Система Ламе анизотропной плоской упругости.** Состояния среды в плоской анизотропной теории упругости [15, 27] характеризуются тензорами напряжения $\sigma$ и деформации $\varepsilon$ — симметричными $(2\times 2)$-матрицами-функциями, элементы которых запишем в виде $\sigma_{ii}=\sigma_i$, $\varepsilon_{ii}=\varepsilon_i$, $i=1,2$, и $\sigma_{12}=\sigma_{21}=\sigma_3$, $\varepsilon_{21}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_3$. Здесь $\varepsilon_j$ выражаются через вектор смещения $u=(u_1,u_2)$ формулами

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u_1}{\partial x},\ \varepsilon_2=\frac{\partial u_2}{\partial y},\ 2\varepsilon_3=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{5.27}$$

Если в среде выделить разрез вдоль дуги с нормалью $n=(n_1,n_2)$, то на единицу длины этой дуги действует сила $\sigma n$, называемая нормальной компонентой тензора напряжений. Удобно столбцы $(2\times 2)$-матрицы $\sigma$ записывать $\sigma_{(1)}$ и $\sigma_{(2)}$, тогда вектор $\sigma n$ представляет собой линейную комбинацию $\sigma_{(1)}n_1+\sigma_{(2)}n_2$. При отсутствии массовых сил матрица $\sigma$ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{(2)}}{\partial y}=0 \tag{5.28}$$

и связана с тензором деформации $\varepsilon$ законом Гука. В линейной теории эта связь осуществляется соотношениями

$$\begin{aligned}&\sigma_1=\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_4\varepsilon_2+2\alpha_6\varepsilon_3,\\ &\sigma_2=\alpha_4\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+2\alpha_5\varepsilon_3,\\ &\sigma_3=\alpha_6\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_2+2\alpha_3\varepsilon_3,\end{aligned}\qquad \alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_4&\alpha_6\\ \alpha_4&\alpha_2&\alpha_5\\ \alpha_6&\alpha_5&\alpha_3\end{pmatrix}>0 \tag{5.29}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_j$, называемыми модулями упругости. Напомним, что символ неравенства для матриц означает ее знакоопределенность. В частности, все главные миноры матрицы $\alpha$, включая ее определитель $\det\alpha=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+2\alpha_4\alpha_5\alpha_5-\alpha_1\alpha_5^2-\alpha_2\alpha_6^2-\alpha_3\alpha_4^2$, положительны. Таким образом, $\alpha_j>0$, $j=1,2,3$ и $\alpha_1\alpha_2>\alpha_4^2$, $\alpha_1\alpha_3>\alpha_6^2$, $\alpha_2\alpha_3>\alpha_5^2$.

С учетом (5.27) соотношения (5.29) можем переписать в форме

$$\sigma_{(i)}=a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y},\quad i=1,2 \tag{5.30}$$

с матричными коэффициентами

$$\begin{aligned}&a_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_6\\ \alpha_6&\alpha_3\end{pmatrix},\quad a_{12}=\begin{pmatrix}\alpha_6&\alpha_4\\ \alpha_3&\alpha_5\end{pmatrix},\\ &a_{21}=\begin{pmatrix}\alpha_6&\alpha_3\\ \alpha_4&\alpha_5\end{pmatrix},\quad a_{22}=\begin{pmatrix}\alpha_3&\alpha_5\\ \alpha_5&\alpha_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Подставляя выражения (5.30) в (5.28), получим систему уравнений (4.12) для вектора смещений $u=(u_1,u_2)$, которая носит название системы Ламе.

Рассмотрим блочную матрицу $a=(a_{ij})_1^2\in\mathbb{R}^{4\times 4}$, составленную из матриц (5.31). Перестановка ее столбцов и строк с номерами 2 и 4 приводит к симметричной матрице, у которой последние два столбца (и строки) равны, а главный минор третьего порядка совпадает с матрицей $\alpha$, фигурирующей в (5.29). Поэтому матрица $a$ неотрицательно определена и ее ранг равен 3, причем пространство решений однородной системы $a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2=0$, $i=1,2$, одномерно и натянуто на вектор $e=(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^4$ с блочными компонентами

$$e_1=(0,1),\ e_2=(-1,0)\in\mathbb{R}^2. \tag{5.32}$$

По определению п. 4.2 отсюда следует, что система Ламе усиленно эллиптична.

Как известно, основные краевые условия для системы Ламе, рассматриваемой в области $D$ на плоскости, состоят в задании либо вектора смещений $u$ на границе $\Gamma=\partial D$, либо нормальной компоненты $\sigma_{(1)}n_1+\sigma_{(2)}n_2$ тензора напряжения $\sigma$, где $n=(n_1,n_2)$ — единичная внешняя нормаль на $\Gamma$, либо комбинации этих условий. С учетом (5.30) это соответствует задачам Дирихле (4.5) и Неймана (4.38), называемым еще первой и второй краевыми задачами.

В исследованиях краевых задач анизотропной плоской упругости можно выделить два классических направления. Первое из них состоит в использовании аналитических функций по аналогии с формулами Колосова — Мусхелишвили [16,20] в изотропном случае. Второе направление основано на применении метода потенциала [15].

Результаты предыдущих параграфов позволяют развить другой теоретико-функциональный подход, основанный на применении функций, аналитических по Дуглису. В изотропном случае он был изложен в работе [25], в общем анизотропном случае этот метод использовался С. П. Митиным [18]. Относительно других близких подходов см. [30, 35, 36].

Рассмотрим применительно к системе Ламе (4.12), (5.31) матрицы $b$ и $c$, фигурирующие в (4.2) и (4.23). В силу сильной эллиптичности системы Ламе, $\det b \neq 0$. На основании лемм 4.3(a) и 4.5, аналогичное условие для $c$ также выполнено. Поэтому теоремы 4.1 и 4.4 приводят к следующему результату.

**Теорема 5.2.** *Для системы Ламе задача Дирихле однозначно разрешима, а решения однородной задачи Неймана состоят только из многочленов* $u_0(x,y) = c + \lambda_1 x e_1 + \lambda_2 y e_2$, $c \in \mathbb{R}^2$, *где* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *и векторы* $e_j$ *фигурируют в* (5.32). *Соответственно, неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (4.39) *по отношению к этим многочленам.*

Матрицы $b$ и $c$, о которых шла речь выше, могут быть описаны явно с помощью леммы 5.2. Применительно к системе Ламе (4.12), (5.31) это описание можно конкретизировать. Характеристический матричный многочлен (4.15) и связанный с ним многочлен $Q$ в (5.13) можно для этой системы записать в виде

$$P = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} g_2 & -g_3 \\ -g_3 & g_1 \end{pmatrix}$$

с многочленами

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2, \\ g_2(z) &= \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2, \\ g_3(z) &= \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4) z + \alpha_5 z^2. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Удобно наряду с $(3 \times 3)$-матрицей $\alpha$ в (5.29) ввести в рассмотрение матрицу

$$\beta = (\det \alpha)\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

которая также положительно определена. В явном виде

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2, \qquad \beta_2 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2, \qquad \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2, \\ &\beta_4 = \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4, \quad \beta_5 = \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5, \quad \beta_6 = \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6. \end{aligned} \tag{5.34}$$

С помощью этих обозначений характеристический скалярный многочлен $\chi(z) = g_1 g_2 - g_3^2$ можно представить в форме

$$\chi(z) = h_1(z) - z h_2(z) + z^2 h_3(z), \qquad \begin{aligned} h_1(z) &= \beta_2 - \beta_5 z + \beta_4 z^2, \\ h_2(z) &= \beta_5 - \beta_3 z + \beta_6 z^2, \\ h_3(z) &= \beta_4 - \beta_6 z + \beta_1 z^2. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Заметим, что многочлены $h_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, одновременно в нуль не обращаются ни при каком $z$. В самом деле, если $h_1(z) = h_2(z) = h_3(z) = 0$, то вектор $(1, -z, z^2)$ служит решением однородной системы, определитель которой совпадает с $\det \beta$. Но это противоречит неравенству $\det \beta > 0$.

Простые вычисления показывают, что для матрицы

$$R(z) = -(a_{21} + a_{22} z) Q(z) = \begin{pmatrix} \alpha_6 + \alpha_3 z & \alpha_3 + \alpha_5 z \\ \alpha_4 + \alpha_5 z & \alpha_5 + \alpha_2 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g_2 & g_3 \\ g_3 & -g_1 \end{pmatrix}$$

в (5.13) получается следующее выражение:

$$R = \begin{pmatrix} -z h_3 & -h_1 \\ h_3 & h_2 - z h_3 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

В частности, многочлены $g_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, также одновременно в нуль не обращаются ни в одной точке $z$. Следовательно, для системы Ламе возможны только первые два случая в (5.2). Отметим, что в случае (i) одно из чисел $h_3(\nu_1)$, $h_3(\nu_2)$ обязательно отлично от нуля, так как только один

из корней квадратного трехчлена $h_3$ может лежать в верхней полуплоскости. В каждом из двух случаев (i), (ii) матрицы $b$ и $c$ могут быть описаны следующим образом.

**Теорема 5.3.** (i) *Пусть, для определенности,* $h_3(\nu_2) \neq 0$. *Тогда*

$$b = \begin{pmatrix} g_2(\nu_1) & g_2(\nu_2) \\ -g_3(\nu_1) & -g_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_3(\nu_1) & -\nu_2 h_3(\nu_2) \\ h_3(\nu_1) & h_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ h_3(\nu_1) \neq 0,$$
$$b = \begin{pmatrix} -g_3(\nu_1) & g_2(\nu_2) \\ g_1(\nu_1) & -g_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_2(\nu_1) & -\nu_2 h_3(\nu_2) \\ h_2(\nu_1) & h_3(\nu_2) \end{pmatrix},\ h_3(\nu_1) = 0.$$

(ii) *Справедливы равенства*

$$b = \begin{pmatrix} g_2(\nu) & g_2'(\nu) \\ -g_3(\nu) & -g_3'(\nu) \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} -\nu h_3(\nu) & -h_3(\nu) - \nu h_3'(\nu) \\ h_3(\nu) & h_3'(\nu) \end{pmatrix}.$$

Во всех случаях определители матриц $b$ и $c$ здесь отличны от нуля, что из общих соображений было отмечено ранее.

*Доказательство.* (i) Если $h_3(\nu) \neq 0$, то, согласно (5.36), первый столбец матрицы $Q(\nu)$ отличен от нуля. Если $h_3(\nu) = 0$, то в силу (5.35), каждое из чисел $h_2(\nu)$, $h_3(\nu)$ отлично от нуля и, следовательно, второй столбец матрицы $Q$ отличен от нуля. Таким образом, утверждение теоремы является следствием леммы 5.2.

(ii) Рассуждая как в (i), достаточно убедиться, что $h_3(\nu) \neq 0$. Предположим противное: $\chi(\nu) = \chi'(\nu) = h_3(\nu) = 0$. Тогда в силу (5.35) должно быть $h_j(\nu) \neq 0$, $j = 1, 2$. Полагая $p = \alpha_6 + \alpha_3\nu$, $q = \alpha_3 + \alpha_5\nu$, из (5.36) выводим: $pg_2(\nu) - qg_3(\nu) = 0$, $-pg_3(\nu) + qg_1(\nu) = h_1(\nu)$. Поскольку $g_1(\nu)g_2(\nu) = g_3^2(\nu)$ и $pq \neq 0$, это возможно только при $g_2(\nu) = g_3(\nu) = 0$. С учетом равенств $\chi = g_1g_2 - g_3^2$, $\chi' = g_1'g_2 + g_1g_2' - 2g_3g_3'$ отсюда и $g_1(\nu) = 0$, что невозможно.

**5.4. Ортотропный и изотропный случаи.** Упругая среда называется ортотропной, если координатные прямые служат осями симметрии. Этот случай соответствует обращению в нуль

$$\alpha_5 = \alpha_6 = 0 \tag{5.37}$$

модулей упругости матрицы $\alpha$, фигурирующей в законе Гука (5.29). В частности, матрица $\alpha$ блочно-диагональна. В этом случае выражения (5.33) и (5.35) несколько упрощаются:

$$\begin{gathered} g_1 = \alpha_1 + \alpha_3 z^2,\quad g_2 = \alpha_3 + \alpha_2 z^2,\quad g_3 = (\alpha_3 + \alpha_4)z, \\ h_1 = \beta_2 + \beta_4 z^2,\quad h_2 = -\beta_3 z,\quad h_3 = \beta_4 + \beta_1 z^2, \\ \chi = \beta_2 + (\beta_3 + 2\beta_4)z^2 + \beta_1 z^4. \end{gathered} \tag{5.38}$$

В частности, корни $\nu_j$ биквадратного уравнения $\chi(z) = 0$ определяются из равенства

$$2\beta_1\nu^2 = -\beta_3 - 2\beta_4 \pm \sqrt{\gamma}, \tag{5.39}$$

где $\gamma = (\beta_3 + 2\beta_4)^2 - 4\beta_1\beta_2$. В частности, при $\gamma \geqslant 0$ корни лежат на мнимой оси. Случай (ii) кратных корней отвечает равенству $\gamma = 0$, т.е. $\beta_3 + 2\beta_4 = 2\sqrt{\beta_1\beta_2}$. С учетом (5.34) это равносильно соотношению

$$2\alpha_3 + \alpha_4 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}. \tag{5.40}$$

Из (5.38), (5.39) также следует, что $2h_3(\nu) = -\beta_3 \pm \sqrt{\gamma}$. Следовательно, $h_3(\nu_j) = 0$ равносильно соотношению $\beta_3\beta_4 = \beta_1\beta_2 - \beta_4^2$, или в терминах $\alpha$, равенству $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Таким образом, равенство (5.40) соответствует теореме 5.3(ii), а первый и второй случаи в теореме 5.3(i) получаются, соответственно, при $\alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$ и $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

Что касается самих формул для матриц $b$ и $c$ теоремы 5.3, то в них следует подставить выражения (5.38).

Пусть, в дополнение к (5.37), выполнены соотношения $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 + 2\alpha_3$, или, что равносильно,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda + 2\mu,\quad \alpha_3 = \mu,\quad \alpha_4 = \lambda \tag{5.41}$$

с некоторыми положительными $\lambda$ и $\mu$. Тогда получаем изотропный случай, когда любая прямая служит осью симметрии упругой среды. В этом случае линейные соотношения (5.27), (5.29) переходят в

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x},\\ \sigma_2 &= \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial y},\\ \sigma_3 &= \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),\end{aligned} \tag{5.42}$$

а система Ламе может быть записана в форме

$$\begin{aligned}\mu\Delta u_1+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0,\\ \mu\Delta u_2+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0.\end{aligned} \tag{5.43}$$

Соотношение (5.40) в этом случае, очевидно, выполнено, так что корень $\nu$ кратный и, как легко видеть, равен $i$. Таким образом, находимся в условиях случая (ii) с клеткой Жордана $J$, отвечающей собственному значению $\nu=i$.

В силу (5.34), (5.41) имеем: $\beta_1=\beta_2=\mu(\lambda+2\mu)$, $\beta_3=(\lambda+2\mu)^2$, $\beta_4=-\mu\lambda$, $\beta_5=\beta_6=0$. Поэтому по теореме 5.3(ii)

$$b=\begin{pmatrix}-(\lambda+\mu) & 2i(\lambda+2\mu)\\ -i(\lambda+\mu) & -(\lambda+\mu)\end{pmatrix},\quad c=2\mu\begin{pmatrix}i(\lambda+\mu) & 2\lambda+3\mu\\ -(\lambda+\mu) & i(\lambda+2\mu)\end{pmatrix}.$$

Прибавляя ко второму столбцу первый, умноженный на $2i(\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu)$, и сокращая на общий скалярный множитель $-(\lambda+\mu)$, можно привести эти матрицы также к виду [45]

$$b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -\Lambda\end{pmatrix},\quad c=\mu\begin{pmatrix}2i & \Lambda-1\\ 2 & i(\Lambda+1)\end{pmatrix},\quad \Lambda=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}. \tag{5.44}$$

Согласно теореме 3.2, общее решение системы Ламе (5.43) выражается через $J$-аналитическую функцию по формуле

$$u=\operatorname{Re} b\phi. \tag{5.45}$$

С другой стороны, хорошо известны классические формулы Колосова — Мусхелишвили [20] дающие представление $\sigma$ и $u$ через пару аналитических функций:

$$\begin{aligned}\sigma_1+\sigma_2 &= 4\operatorname{Re}\chi_1'(z),\\ \sigma_2-\sigma_1+2i\sigma_3 &= 2[\overline{z}\chi_1''(z)+\chi_2'(z)],\\ 2\mu(u_1+iu_2) &= \Lambda\chi_1(z)-z\overline{\chi_1'(z)}-\overline{\chi_2(z)}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Связь этой формулы с (5.45) осуществляется с помощью теоремы 2.1, используемой в форме (2.17). В рассматриваемом случае формула (2.17) принимает вид

$$\phi(z)=\psi(z)+\frac{\overline{z}}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\psi'(z).$$

Подставляя ее в (5.45), для компонент вектора

$$u=\operatorname{Re} b\phi=\operatorname{Re}\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -\Lambda\end{pmatrix}\psi+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\overline{z}\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & -1\end{pmatrix}\psi'$$

получаем выражения

$$\begin{aligned}2u_1 &= \psi_1+\overline{\psi}_1+(i\overline{z}\psi_2'-iz\overline{\psi}_2')/2,\\ 2u_2 &= i\psi_1-\Lambda\psi_2-i\overline{\psi}_1-\Lambda\overline{\psi}_2-(\overline{z}\psi_2'+z\overline{\psi}_2')/2,\end{aligned}$$

и, соответственно, $2(u_1+iu_2)=2\overline{\psi}_1-i\Lambda(\psi_2+\overline{\psi}_2)-iz\overline{\psi}_2'$. Полагая здесь $\chi_1=-\mu i\psi_2$, $\chi_2=-2\mu\psi_1-i\Lambda\mu\psi_2$, в результате приходим к последнему равенству формулы (5.46).

Что касается первых двух равенств этой формулы, то их можно получить из последнего с помощью соотношений (5.42). Можно также привлечь сопряженную к $u$ вектор-функцию $v$ п. 4.3. Согласно теореме 4.2 она выражается через $J$-аналитическую функцию $\phi$ по формуле (4.24) с матрицей $c$ из (5.42). С учетом (5.30) касательная производная функции $v$ вдоль гладкой дуги совпадает с нормальной компонентой тензора напряжений $\sigma$:

$$\frac{dv}{ds} = \sigma n, \tag{5.47}$$

что и дает искомое выражение для элементов $\sigma_j$ матрицы $\sigma$.

## 6. Системы Дуглиса — Ниренберга

**6.1. Аналог теоремы Жордана.** Пусть натуральное $l$ представлено в виде сумм $l = l_1 + l_2 = m_1 + m_2$ неотрицательных слагаемых. Исходя из прямоугольных матриц $a_k^{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times l_j}$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} a_0^{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2} + a_1^{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + a_2^{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2} + a_0^{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + a_1^{12}\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \\ a_0^{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_1^{21}\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \end{gathered} \tag{6.1}$$

относительно вещественных $l_j$-вектор-функций $u_j$, $j = 1, 2$. Как обычно, под регулярным решением понимаются функции $u_1 \in C^2$, $u_2 \in C^1$, удовлетворяющие (6.1) тождественно. Аналогично (3.2), (3.3), системе (6.1) сопоставим характеристический матричный многочлен

$$P(z) = \begin{pmatrix} a_0^{11} + a_1^{11} z + a_2^{11} z^2 & a_0^{12} + a_1^{12} z \\ a_0^{21} + a_1^{21} z & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

и скалярный многочлен

$$\chi(z) = \det P(z). \tag{6.3}$$

Система (6.1) называется *эллиптической по Дуглису — Ниренбергу,* если степень многочлена $\chi$ равна $l_1 + m_1$, а характеристическое уравнение $\chi(z) = 0$ не имеет вещественных корней. В несколько иной форме системы этого типа были введены М. Дуглисом и Л. Ниренбергом [32] в 1955 г. При $l_2 = 0$ данные системы встречались ранее в работе И. Г. Петровского [21].

**Лемма 6.1.** *Если система* (6.1) *эллиптична по Дуглису — Ниренбергу, то число* $2s = l_1 + m_1$ *четно, причем* $m_2 \leqslant l_1$ *и* $l_2 \leqslant m_1$. *В частности,*

$$2s = l_1 + m_1 = m_1 + m_2 + s_0 = l_1 + l_2 + s_0 \tag{6.4}$$

*для некоторого* $s_0 \geqslant 0$.

*Доказательство.* Согласно (6.2), произведение

$$\operatorname{diag}(1 \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_1},\ z \in \mathbb{C}^{m_2 \times m_2})\ P(z) \operatorname{diag}(1 \in \mathbb{C}^{l_1 \times l_1},\ z \in \mathbb{C}^{l_2 \times l_2})$$

является матричным многочленом $\tilde{P}(z) = \tilde{P}_0 + \tilde{P}_1 z + \tilde{P}_2 z^2$ со старшим коэффициентом

$$\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} a_2^{11} & a_1^{12} \\ a_1^{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению эллиптичности, $\det \tilde{P}(z)$ является многочленом степени $2l = m_2 + l_2 + m_1 + l_1$ и, значит, $\det \tilde{P}_2 \neq 0$. Отсюда следует, что строки матрицы $a_1^{21}$ линейно независимы, так что $m_2 \leqslant l_1$. Аналогично, рассматривая столбцы $a_1^{12}$, получим неравенство $l_2 \leqslant m_1$. Наконец, четность числа $m_1 + l_1$ вытекает из вещественности коэффициентов многочлена $\chi(z)$.

Как и в п. 1.3, корни $\nu$ характеристического уравнения $\chi(z) = 0$ называем собственными значениями многочлена $P(z)$ соответствующей кратности, порядок этого значения $\nu$ есть порядок полюса матрицы-функции $P^{-1}(z)$ в точке $z = \nu$.

Основная цель данного пункта — установить аналог теоремы 1.5 для многочлена (6.2). Запишем его в виде

$$P(z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 \tag{6.5}$$

В отличие от п. 1.3, определитель матрицы $P_2$ здесь равен нулю. Пусть $J \in \mathbb{C}^{s\times s}$ — жорданова матрица (т.е. прямая сумма клеток Жордана) с собственными значениями в верхней полуплоскости. По аналогии с п. 1.3 говорим, что матрица $b \in \mathbb{C}^{(l_1+l_2)\times s}$ приводит $P(z)$ к жордановой форме $J$, если

$$P_0 b + P_1 b J + P_2 b J^2 = 0. \tag{6.6}$$

Как и в теореме 1.5, легко убедиться, что столбцы $b$ составлены из цепочек собственных и присоединенных векторов многочлена $P(z)$, т.е. из векторов $x_0, x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}^s$, для которых выполнены равенства (1.26):

$$P(\nu)x_0 = 0, \quad P(\nu)x_1 + P'(\nu)x_0 = 0,$$
$$P(\nu)x_i + P'(\nu)x_{i-1} + (1/2)P''(\nu)x_{i-2} = 0, \quad i = 2, ..., r,$$

где учтено, что $P^{(k)} = 0$ при $k > 2$.

Число $\nu$ здесь отвечает собственному значению соответствующей клетки Жордана, в силу первого равенства оно является и собственным значением многочлена $P(z)$.

**Теорема 6.1.** *Существует матрица $b =\downarrow (b_1, b_2)$, $b_j \in \mathbb{C}^{l_j\times s}$, приводящая многочлен $P(z)$ к жордановой форме $J$. Матрица $J$ имеет те же собственные значения, что и многочлен $P(z)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, причем их соответствующие кратности и порядки совпадают. Столбцы $((2l_1 + l_2) \times 2s)$-матрицы $B$, определяемой из равенств*

$$B = (B_0, \overline{B_0}), \quad B_0 =\downarrow (b_1, b_1 J, b_2), \tag{6.7}$$

*линейно независимы.*

*Доказательство.* Сравнивая (6.5) с блочной формой (6.2), можно переписать равенство (6.6) в следующем блочном виде:

$$\sum_{k,j} a_k^{ij} b_j J^k = 0, \quad i = 1, 2, \tag{6.8}$$

где $b_j \in \mathbb{C}^{l_j} \times s$ определяются последним соотношением (6.7). С многочленом (6.2) свяжем две блочные матрицы

$$a_0 = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & l_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a_0^{11} & a_1^{11} & a_0^{12} \\ a_0^{21} & a_1^{21} & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{11} & a_1^{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

которые, согласно (6.4), квадратны и имеют порядок $2l_1 + l_2 = 2s + m_2$. Непосредственно проверяется, что

$$(a_0 + a_1 z) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l_1 & l_1 & l_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline a_1^{11} + a_2^{11} z & \\ a_1^{21} & P(z) \end{array}\right) \tag{6.10}$$

Это тождество, которое служит аналогом (1.25), показывает, что многочлены $P(z)$ и $a_0 + a_1 z$ имеют одни и те же собственные значения, причем их кратности и порядки совпадают. Точно так же легко видеть, что в обозначениях (6.7) равенства (6.8) и

$$a_0 B_0 + a_1 B_0 J = 0 \tag{6.11}$$

равносильны. Поэтому теорему достаточно установить по отношению к многочлену $a_0 + a_1 z$ первой степени.

Согласно (6.9), матрицы $a_j$ имеют блочную структуру

$$a_0 =\downarrow (a_0^1, a_0^2), \ a_1 =\downarrow (a_1^1, 0), \quad a_j^1 \in \mathbb{R}^{2s\times(2s+m_2)}. \tag{6.12}$$

В силу (6.5) строки матрицы $a_0^2$ линейно независимы и значит, найдутся $m_2$ линейно независимых ее столбца. Подберем такую обратимую матрицу $d$, чтобы

$$a_0 d = \begin{array}{c} \\ 2s \\ m_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2s & m_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}, \quad a_1 d = \left(\begin{array}{c} \cdots \\ \hline 0 \end{array}\right).$$

Обозначая $a_j d$ и $d^{-1}B_0$ снова $a_j$ и $B_0$, можем с самого начала считать, что $a_0^2 = (0, 1)$, $1 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$. Тогда, полагая $B_0 =\downarrow (B_0^1, 0)$, $B_0^1 \in \mathbb{C}^{2s \times s}$, сведем соотношение (6.12) к случаю

$$a_0^1 + a_1^1 B_0^1 J = 0 \tag{6.13}$$

$(2s \times 2s)$-матриц $a_j^1$. Поскольку уравнение $\det(a_0^1 + a_1^1 z) = 0$ имеет ровно $s$ корней в верхней полуплоскости $\det a_1^1 \neq 0$, равенство (6.13) составляет содержание теоремы 1.4 (теоремы Жордана).

**6.2. Представление решений.** Для общего решения $u$ уравнения (6.1) справедлив следующий аналог теоремы 3.2. Как и в §4, здесь следует иметь в виду, что при $n = 2$ соотношения (3.12) определяют соответствующие подпространства $\mathbb{C}^s$.

**Теорема 6.2.** (а) *В обозначениях* (6.7) *любое решение* $u = (u_1, u_2)$ *уравнения* (6.1) *в односвязной области* $D$ *представимо в виде*

$$u_1 = \operatorname{Re} b_1 \phi, \quad u_2 = \operatorname{Re} b_2 \phi' \tag{6.14}$$

*с некоторой* $J$*-аналитической функцией* $\phi$*, причем* $u = 0$ *влечет* $\phi \in \mathbb{C}^s$*. Функция* $\phi$ *однозначно представима в виде суммы* $\phi_0 + c$*, где* $c \in \mathbb{C}^s$ *и* $\phi_0$ *удовлетворяют условиям*

$$\phi_0(z_0) = 0, \ \operatorname{Re} b_1 J c = \operatorname{Re} b_2 c = 0, \tag{6.15}$$

*в фиксированной точке* $z_0 \in D$*.*

(б) *Пусть область* $D$ *является* $m$*-связной,* $m \geqslant 2$*, и точки* $z_j$*,* $j = 1, \ldots, m-1$ *принадлежат различным компонентам связности дополнения* $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$*. Тогда в представлении* (6.14) *функция* $\phi$ *многозначна и единственным образом представима в виде суммы*

$$\phi(z) = \phi_0(z) + c + \sum_{j=1}^{m-1} \ln[z - z_j] c_j, \ c, c_j \in \mathbb{C}^s, \tag{6.16}$$

*где функция* $\phi_0$ *однозначна и в дополнение к* (6.15) *выполнены условия* $\operatorname{Re} b_1 c_j = \operatorname{Re} b_1 c_j = 0$*,* $j = 1, \ldots, m-1$*.*

*Доказательство.* Пусть $u_1, u_2$ — решение (6.1) и

$$U = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, u_2\right). \tag{6.17}$$

Сравнивая (6.1) с (6.9), (6.12), непосредственно убеждаемся, что вектор-функция $U$ удовлетворяет системе уравнений

$$a_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} + a_1^1 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad a_0^2 U = 0. \tag{6.18}$$

Аналогично можно расписать и систему (6.11):

$$a_0^1 B_0 + a_1^1 B_0 J = 0, \quad a_0^2 B_0 = 0. \tag{6.19}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2l_1 + l_2}$ подпространство $X$ векторов $\xi$, $a_0^2 \xi = 0$. Поскольку строки матрицы $a_0^2$ линейно независимы, его размерность равна $2l_1 + l_2 - m_2 = 2s$. Согласно (6.18), преобразование $\xi \to \operatorname{Re} B_0 \xi$ действует $\mathbb{C}^s \to X$ По теореме 6.1 столбцы матрицы $B = (B_0, \overline{B_0})$ линейно независимы, поэтому данное преобразование взаимно-однозначно переводит $\mathbb{C}^s$ на $X$. Следовательно, равенство

$$U = \operatorname{Re} B_0 \psi \tag{6.20}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $(2l_1+l_2)$-векторами $U$, удовлетворяющими второму уравнению в (6.18), и комплексными $s$-вектор-функциями $\psi$. Подставляя (6.20) в первое уравнение, получим

$$0 = a_1^1 \operatorname{Re} B_0 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} - J \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}.$$

Из сравнения (6.5) с (6.9), (6.12) видно, что равенства $a_1^1 \xi = 0$, $a_0^2 \xi = 0$ возможны только для $\xi = 0$. В частности, фигурная скобка в предыдущем выражении обращается в нуль, что означает $J$-аналитичность функции $\psi$.

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны использованным в доказательстве теоремы 3.2.

Точно так же сохраняет свою силу и заключение, сделанное в конце п. 3.1. Именно, пусть область $D$ является окрестностью $\infty$ и решение $u_1, u_2$ удовлетворяет в некоторой окрестности этой точки оценке

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right| + |u_2| \leqslant C|z|^{-2}.$$

Тогда функция $\phi$ в (6.14) не имеет ветвления вокруг $\infty$, т.е. $\sum c_j = 0$ в (6.16), и ее порядок на $\infty$ равен 0, т.е. эта функция ограничена в окрестности $\infty$.

Комплексный случай системы (6.1) может быть рассмотрен по той же схеме, что и в п. 3.2. В этом случае число $l_1 + m_1$ не обязательно четно и (6.4) заменяются равенствами

$$s^+ + s^- = l_1 + m_1 = m_1 + m_2 + s_0 = l_1 + l_2 + s_0,$$

где $s^+(s^-)$ — число корней характеристического уравнения $\chi(z) = 0$ в верхней (нижней) полуплоскости. Соответствующие поправки нужно внести и в теорему 6.1. Равенство (6.7) в ней нужно заменить на

$$B = (B^+, \overline{B^-}), \quad B^\pm =\downarrow (b_1^\pm, b_1^\pm J^\pm, b_2^\pm),\ b_j^\pm \in \mathbb{C}^{l_j \times s^\pm}.$$

Матрицы $J^\pm$ соответствуют корням многочлена (6.3) в верхней и нижней полуплоскостях. Матричное соотношение (6.6) должно выполняться по отношению к $b^\pm =\downarrow (b_1^\pm, b_2^\pm)$ и $J^\pm$:

$$P_0 b^\pm + P_1 b^\pm J^\pm + P_2 b^\pm (J^\pm)^2 = 0.$$

В этих обозначениях аналог теоремы 6.2 справедлив и для комплексного случая, нужно лишь (6.14) заменить на

$$u_1 = b_1^+ \phi^+ + \overline{b_1^- \phi^-}, \quad u_2 = b_2^+ (\phi^+)' + \overline{b_2^- (\phi^-)'}$$

и соответствующие поправки внести в условия (6.15) (так, как это сделано в п. 3.2).

Точно так же рассматривается случай, когда $J$ записано в виде прямой суммы блоков. Скалярный случай $l_1 = l_2 = 1$ здесь соответствует ситуации п. 3.3.

Особо отметим системы, эллиптические по Петровскому, которые получаются из (6.1) при $l_2 = 0$:

$$\begin{aligned} a_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2^1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ a_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{6.21}$$

где $a_k^i \in \mathbb{R}^{m_i \times l}$, $m_1 + m_2 = l$. Для таких систем матрица $b_2$ в (6.7) отсутствует и представление (6.14) их решений по форме совпадает с представлением (3.7) для систем классического типа (3.1).

В комплексном случае к системам (6.21) возможен другой подход. Именно, применяя оператор Коши — Римана $\partial/\partial\overline{z}$ ко второму уравнению, получим систему

$$\begin{gathered} a_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2^1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0, \end{gathered}$$

которая эллиптична в классическом смысле.

Поэтому теорему 6.2 для системы (6.21) можно вывести из теоремы 3.2. В принципе, аналогичные соображения можно применить и к общей системе (6.1), если в дополнение к дифференцированию второго уравнения сделать подстановку

$$u_2 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}_2$$

в первом уравнении системы. Найдя затем представление $u_1, \tilde{u_2}$ решения полученной системы как в §3, представление для функции $u_2$ получим из $\tilde{u_2}$ дифференцированием. В несколько иной форме теорема 6.2 впервые установлена Н. А. Жура [11].

**6.3. Сопряженные функции.** Понятия п. 4.3 естественным образом распространяются на системы (6.1). Пусть заданы $l_i$-вектор-функции $u_i, v_i$, $i = 1, 2$, связанные линейными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= d_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial u_1}{\partial y} + d_{13}u_2, \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= d_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial u_1}{\partial y} + d_{23}u_2, \\ v_2 &= d_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{32}\frac{\partial u_1}{\partial y} + d_{33}u_2, \end{aligned} \tag{6.22}$$

где $d_{ij}$ — постоянные матрицы соответствующих порядков. Вектор-функция $v = (v_1, v_2)$ из этих соотношений определяется по $u$ однозначно (с точностью до постоянного аддитивного вектора $(\xi, 0)$) и называется сопряженной к $u$.

Квадратную $((2l_1 + l_2) \times (2l_1 + l_2))$-матрицу $d = (d_{ij})$ назовем согласованной с системой (6.1), если каждое ее решение $u = (u_1, u_2)$ допускает сопряженную функцию. Вопрос об описании таких матриц решается аналогично лемме 4.4.

**Лемма 6.2.** *Матрица $d$ согласована с* (6.1) *тогда и только тогда, когда*

$$(d_{11}b_1 + d_{12}b_1J + d_{13}b_2)J = d_{21}b_1 + d_{22}b_1J + d_{23}b_2. \tag{6.23}$$

*При выполнении этого условия функция $v$, сопряженная к* (6.14)*, дается равенствами*

$$v_1 = \operatorname{Re} c_1\phi + \xi, \quad v_2 = \operatorname{Re} c_2\phi' \tag{6.24}$$

*с матрицами $c_1 = d_{11}b_1 + d_{12}b_1J + d_{13}b_2$, $c_2 = d_{31}b_1 + d_{32}b_1J + d_{33}b_2$.*

*Условие* (6.23) *будет выполнено, если найдутся такие матрицы $\tilde{a}_j$, что в блочной структуре* (6.9) *их первая строка совпадает с первой строкой $a_j$ и*

$$da_j = \tilde{a}_j d, \quad j = 0, 1. \tag{6.25}$$

*В частности, если $d$ коммутирует с $a_j$, то функция $v$ является решением той же системы* (6.1).

*Доказательство.* Существование функции $v$ в (6.22) равносильно тождеству

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(d_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial u_1}{\partial y} + d_{13}u_2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(d_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial u_1}{\partial y} + d_{23}u_2\right) \equiv 0.$$

Согласно теореме 6.2, любое решение $u$ системы (6.1) представляется в форме (6.14). Подставляя его в предыдущее тождество, запишем последнее в виде

$$\operatorname{Re} Q\phi'' = 0,$$

где $Q$ есть матрица разности между левой и правой частями равенства (6.23). Поскольку $J$-аналитическая функция $\phi$ произвольна, отсюда следует, что $Q = 0$.

Переходим ко второй части леммы. Пусть выполнено равенство (6.25) с указанными $\tilde{a}_j$. Тогда, умножая (6.11) слева на $d$, получим аналогичное равенство

$$\tilde{a}_0\tilde{B}_0 + \tilde{a}_1\tilde{B}_0J = 0 \tag{6.26}$$

по отношению к $\tilde{B}_0 = dB_0$. Как и при доказательстве теоремы 6.1, отсюда заключаем, что $\tilde{B}_0$ имеет аналогичную (6.7) блочную структуру. В частности, это означает справедливость (6.23).

Пусть $\tilde{b}_j$ определяются по $\tilde{B}_0$ как в (6.7). Тогда при $\tilde{a}_j = a_j$ равенство (6.26) можем переписать в блочной форме (6.8), где $b_j$ нужно снабдить сверху волной. Полагая $c_1 = \tilde{b}_1,\ c_2 = \tilde{b}_2$ в (6.24), отсюда приходим к уравнению (6.1) для $v$.

Если матрица $d$ обратима, то, аналогично (4.32), условие (6.25) можно переписать в терминах соотношений, связывающих элементы матриц $a$ и $d$. В соответствии с блочной структурой (6.9) представим векторы $\xi \in \mathbb{R}^{2l_1+l_2}$ в виде $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^{l_1}, \xi_3 \in \mathbb{R}^{l_2}$. Тогда элементы первой строки матриц $a_j$ в (6.9) можем описать условиями

$$(a_1\xi)_1 = -\xi_2, \quad (a_2\xi)_1 = \xi_1.$$

Этим же условиям должны удовлетворять и матрицы $\tilde{a}_j$, фигурирующие в (6.25). Полагая $\xi = d\eta$, предположение (6.25) можем таким образом заменить условиями $(da_1\eta)_1 = -(d\eta)_2$, $(da_2\eta)_1 = (d\eta)_1$ или, в матричной записи,

$$(da_1)_{1j} = -d_{2j}, \quad (da_2)_{1j} = d_{1j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{6.27}$$

Чтобы раскрыть здесь произведения матриц, запишем $(l_1 \times (l_1 + l_2))$-матрицу $(d_{12}, d_{13})$ в блочном виде

$$(d_{(12)}, d_{(13)}), \quad d_{(12)} \in \mathbb{R}^{l_1 \times m_1}, d_{(13)} \in \mathbb{R}^{l_1 \times m_2}.$$

Тогда с учетом (6.9) предыдущие равенства запишутся в следующей развернутой форме:

$$\begin{gathered} d_{(12)}a_0^{11} + d_{(13)}a_0^{21} = -d_{21},\ d_{(12)}a_1^{11} + d_{(13)}a_1^{21} = d_{11} - d_{22}, \\ d_{(12)}a_0^{12} = -d_{23},\ d_{(12)}a_2^{11} = d_{12}, d_{(13)}a_2^{12} = d_{13}. \end{gathered} \tag{6.28}$$

Итак, если матрица $d$ обратима и в обозначениях (6.27) связана с $a_0,\ a_1$ соотношениями (6.28), то эта матрица согласована с системой (6.1).

Не представляет труда выписать систему уравнений для сопряженной функции $v$. По условию, матрицы $\tilde{a}_j$ имеют блочную структуру

$$\tilde{a}_0 = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l_1 & l_1 & l_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ g_{21} & q_{22} & q_{23} \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя второе уравнение в (6.18), получим систему

$$a_0\frac{\partial U}{\partial x} + a_1\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Поскольку $\tilde{a}_j = da_jd^{-1}$, отсюда получаем

$$\tilde{a}_0\frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{a}_1\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad V = dU.$$

В силу (6.22), вектор $V$ строится по функциям $v_1, v_2$ аналогично (6.17), поэтому с учетом данных выше выражений матриц $\tilde{a}_j$ для этих функций получим следующие уравнения:

$$p_{i1}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (p_{i2} + q_{i1})\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + q_{i2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + p_{i3}\frac{\partial v_2}{\partial x} + q_{i3}\frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Каждое из них по форме совпадает с первыми уравнениями системы (6.1).

Хотя соотношения (6.28) непосредственно выражают условие согласования $d$ с (6.1), на практике удобнее пользоваться условиями (6.1), которые к тому же и необходимы для согласованности матрицы $d$ с уравнением (6.1).

**6.4. Система Стокса гидродинамики.** Линеаризованная двумерная стационарная система уравнений Навье — Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости [14], называется системой Стокса. В безразмерных величинах ее можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u^1}{\partial x}+\frac{\partial u^2}{\partial y}=0, \tag{6.29}$$

где $u=(u^1,u^2)$ является вектором скорости, а $p$ — давлением. По отношению к $u_1=u$,$u_2=p$ эта система принадлежит к типу систем Дуглиса — Ниренберга (6.1) с $m_1=l_1=2$, $m_2=l_2=1$.

Хорошо известно [14] представление ее решений через аналитические функции. Положим $\omega=u^1+iu^2$ и второе уравнение в (6.29), умноженное на $i$, сложим с первым. Тогда в комплексных обозначениях (2.15) для производных систему (6.29) можно переписать в виде

$$2\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}}-\frac{\partial p}{\partial\overline{z}}=0,\quad \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=0, \tag{6.30}$$

откуда следует аналитичность функции

$$4\varphi'=2\frac{\partial\omega}{\partial z}-p.$$

Поскольку

$$4\overline{\varphi}'=2\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}}-p,$$

для $p$ получаем выражение

$$p=-4\operatorname{Re}\varphi'. \tag{6.31}$$

Исключая $p$ из предыдущих комплексно сопряженных равенств и пользуясь вторым уравнением (6.30), получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\varphi'-\overline{\varphi}',$$

откуда

$$\omega=\varphi-z\overline{\varphi}'+\overline{\psi} \tag{6.32}$$

с некоторой аналитической функцией $\psi$.

Представление (6.31), в частности, показывает, что функция $p$ является гармонической.

С другой стороны, к системе Стокса (6.30) можно применить результаты п. 6.2. Полагая $u_1=u$, $u_2=p$, запишем характеристический многочлен (6.2) этой системы

$$P(z)=\begin{pmatrix}1+z^2 & 0 & -1\\ 0 & 1+z^2 & -z\\ 1 & z & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det P(z)=(1+z^2)^2$, характеристическое уравнение имеет в верхней полуплоскости один корень $\nu=i$ кратности 2. Согласно теореме 6.1, матрица $b\in\mathbb{C}^{3\times 2}$, приводящая $P(z)$ к жордановой форме, составлена из собственного $x_0$ и присоединенного $x_1$ векторов:

$$P(i)x_0=0,\quad P(i)x_1+P'(i)x_0=0.$$

Таким образом,

$$b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}i & 1\\ 0 & i\end{pmatrix},$$

и представление (6.14) теоремы 6.2 принимает вид

$$u=\operatorname{Re}\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -1\end{pmatrix}\phi,\quad p=\operatorname{Re}(2i\phi_2'), \tag{6.33}$$

где $\phi_2$ — вторая компонента 2-вектора $\phi$.

Согласно теореме 2.1, функция $\phi$ выражается через аналитическую вектор-функцию $\psi$ по формуле (2.17):

$$\phi = \psi + \frac{i\overline{z}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi'.$$

Подставляя ее в (6.33), получим

$$2u_1 = \mathrm{Re}(2\psi_1 + i\overline{z}\psi_2'), \quad 2u_2 = \mathrm{Re}(2i\psi_1 - 2\psi_2 - \overline{z}\psi_2'), \quad p = \mathrm{Re}(2i\psi_2'),$$

или, полагая $\omega = u_1 + iu_2$,

$$2\omega = \overline{\psi}_1 - 4i(\psi_2 + \overline{\psi}_2) + \overline{zi\psi_2'}, \ p = \mathrm{Re}(2i\psi_2').$$

При $2\varphi = -i\psi_2', \ 2\psi = \psi_1 + 4i\psi_2$ эти формулы переходят в (6.31), (6.32).

По аналогии с п. 5.3, введем тензор «напряжения»

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_3 & T_2 \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

с элементами

$$T_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{p}{2}, \ T_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{p}{2}, \ T_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right).$$

С решением $(u, p)$ системы Стокса свяжем пару функций $(v, q)$ по формулам

$$\frac{\partial v}{\partial s} = Tn, \quad q = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}, \tag{6.35}$$

первая из которых имеет тот же смысл, что и равенство (5.47). Этим формулам можно придать вид соотношений (6.22). Именно, обозначая $T_{(j)}$, $j = 1, 2$, столбцы матрицы $T$, ее определение (6.34) перепишем в форме

$$T_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}p,$$
$$T_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}p.$$

Расписывая первое уравнение (6.35),

$$T_{(1)}n_1 + T_{(2)}n_2 = \frac{\partial v}{\partial x}(-n_2) + \frac{\partial v}{\partial y}n_1,$$

в результате приходим к соотношениям (6.22):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}p,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}p, \tag{6.36}$$
$$q = (0, -1)\frac{\partial u}{\partial x} + (1, 0)\frac{\partial u}{\partial y}$$

для пары $(v, q)$. Прямая проверка показывает, что основное условие (6.23) леммы 6.2 по отношению к данным матрицам $d_{ij}$ и матрицам

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = (0, 2i), \quad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

фигурирующим в (6.33), выполняется, причем в обозначениях (6.24)

$$c_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = -ib_1, \quad c_2 = (0, 2) = ib_2.$$

Таким образом, пара $(v, q)$ имеет аналогичное (6.33) представление

$$v = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix}\phi, \quad q = \mathrm{Im}(2i\phi_2'), \tag{6.37}$$

и, в частности, является решением той же системы (6.29). Нетрудно проверить также, что матрица $d$ в (6.36) коммутирует с матрицами (6.9), соответствующими системе (6.29). Это согласуется с последним утверждением леммы 6.2.

Соотношения (6.35) являются естественным аналогом условий Коши — Римана, связывающих действительную и мнимую части аналитической функции. Вместе с представлениями (6.33), (6.37) они были получены Н. А. Жура и использованы им для исследования новых нелокальных задач гидромеханики [12]. Заметим, что, заменяя в (6.33), (6.37) функцию $\phi$ на $i\phi$, соотношения «Коши — Римана» (6.35) можно обратить. В частности, отсюда

$$p = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

С физической точки зрения, это позволяет толковать давление как «вихрь» сопряженного вектора скорости $v$, а сопряженное давление $q$ — как взятый с противоположным знаком «вихрь» исходного вектора скорости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Балк М. Б.* Полианалитические функции и их приложения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1991. — *85*.
2. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
3. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1972.
4. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. — 1948. — *III*. — С. 153–154.
5. *Боярский Б. В.* Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Pol. Math. — 1966. — *17*, № 3. — С. 281–320.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
7. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
8. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. — 1951. — *29*. — С. 615–676.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
10. *Жура Н. А.* Об общем решении систем Лере — Дуглиса — Ниренберга с постоянными коэффициентами на плоскости // Докл. АН СССР. — 1993. — *331*, № 5. — С. 546–549.
11. *Жура Н. А.* Общая краевая задача для эллиптических систем в смысле Дуглиса — Ниренберга в областях с кусочно-гладкой границей // Докл. АН СССР. — 1993. — *330*, № 2. — С. 151–154.
12. *Жура Н. А.* Нелокальная краевая задача для стационарной линеаризованной двумерной системы уравнений Стокса // Докл. АН СССР. — 1990. — *311*, № 3. — С. 524–527
13. *Келдыш М. В.* Математика. — Избр. труды. М.: Наука, 1985.
14. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: ГИФМИ, 1963.
15. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963.
16. *Лехницкий Г. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
17. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.
18. *Митин С. П.* О представлении решений анизотропной теории упругости // Дифференц. уравнения. — 1998. — *34*, № 1. — С. 94–100.
19. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
20. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
21. *Петровский И. Г.* Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. — Избр. труды. М.: Наука, 1986.
22. *Солдатов А. П.* Эллиптические системы высокого порядка // Дифференц. уравнения. — 1989. — *25*, № 1. — С. 136–142.
23. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — *55*, № 5. — С. 1070–1100.
24. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай // Изв. АН СССР. — 1992. — *56*, № 3. — С. 566–604.
25. *Солдатов А. П.* Смешанная задача плоской теории упругости // Дифференц. уравнения. — 1987. — *23*, № 1. — С. 161–168.

26. *Солдатов А. П., Митин С. П.* Об одном классе сильно эллиптических систем // Дифференц. уравнения. — 1997. — *33*, № 8. — С. 1118–1122.
27. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. — М.: Наука, 1988.
28. *Begehr H., Gilbert R. P.* Pseudohyperanalytic functions // Complex variables. Theory Appl. — 1988. — *9*. — С. 343–357.
29. *Begehr H., Gilbert R. P.* Transformations, transmutations, and kernel functions: I, II. — Harlow: Longman, 1992, 1993.
30. *Begehr H., Lin Wei* A mixed-contact problem in orthotropic elasticity // Partial diifferential equations with Real Analysis. — Longman Scientific and Technical, 1992. — С. 219–239.
31. *Douglis A.* A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. — 1953. — *6*. — С. 259–289.
32. *Douglis M., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1955. — *8*. — С. 503–538.
33. *Gilbert R. P., Buchanan J. L.* First order elliptic systems. A function theoretical approach. — New York: Academic Press, 1983.
34. *Gilbert R. P., Hile G. N.* Generalized hypercomplex function theory // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — *195*. — С. 1–29.
35. *Gilbert R. P., Lin Wei* Function theoretical solutions to problems of orthotropic elasticity // J. Elasticity. — 1985. — *15*. — С. 143–154.
36. *Gilbert R. P., Wendland W. L.* Analytic, generalized, hyperanalytic function theory and an application to elasticity // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1975. — *73A*. — С. 317–371.
37. *Hile G. N.* Elliptic systems in the plane with order term and constant coefficients // Comm. Pure Appl. Math. — 1978. — *3*, № 10. — С. 949–977.
38. *Horvath J.* A generalization of the Cauchy — Riemann equations // Contrib. Diff. Equat. — 1961. — *1*. — С. 39–57.
39. *Hua Loo Keng, Lin Wei, Wu Ci-Quian.* Second Order Systems of Partial Differential Equantions in the Plane. — Boston–Melburn: Pitman, 1985.
40. *Ieh R. Z.* Hyperholomorphic functions and higher order partial differential equations in the plane // Pacif. J. Math. — 1990. — *142*, № 2. — С. 379–399.
41. *Khimshiashvili G.* Signature formulae for topological invariants // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2001. — *125*. — С. 1–121.
42. *Khimshiashvili G.* Towards Homotopy Classification of Elliptic Boundary Value Problems. — Preprint 97-01, TU Bergakademie Freiberg, 1996.
43. *Khimshiashvili G.* Elliptic boundary value problems for Cauchy — Riemann systems // Proc. Symp. Anal. Numer. Meth. Quatrn. Cliff. Anal. (Seiffen, 1996). — TU Bergakademie Freiberg, 1996. — С. 77–83.
44. *Khimshiashvili G. N.* Geometric aspects of Riemann — Hilbert problems // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. — 2002. — *27*. — С. 1–114.
45. *Soldatov A. P.* To elliptic theory for domains with piecewise smooth boundary on the plane // Proc. Congress ISAAC'97 (3–7 June 1997). University of Delaware, Newark, USA. — Partial Differ. and Integral. Equations. Kluver Acad. Publ., 1999. — С. 177–186.

А. П. Солдатов
Новгородский государственный университет