ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 16

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Тбилиси
2004

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 16

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика и ее приложения. Том 16 (2004). С. 3–21

УДК 517.958:530.1

О СПЕКТРЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТКАНОЙ МЕМБРАНЫ

© 2004 г. **А. В. КОМАРОВ, О. М. ПЕНКИН**

Аннотация. Описываются условия физического характера, при которых низкочастотная часть спектра частот собственных колебаний натянутой сетки из струн, достаточно плотно заполняющей область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и закрепленной на ее границе, близка к аналогичной части спектра натянутой мембраны, накрывающей эту же область.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В данной работе описываются условия физического характера, при которых низкочастотная часть спектра частот собственных колебаний натянутой сетки из струн, достаточно плотно заполняющей область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и закрепленной на ее границе, близка к аналогичной части спектра натянутой мембраны, накрывающей эту же область. В последнее время интерес к таким задачам значительно возрос, и в ряде работ, посвященных данной тематике (см., например, [3–5, 10] и др.), разработаны достаточно сильные методы, пригодные для решения задач, включающих системы, составленные не только из тонких элементов (струн, стержней и т.п.), но и из толстых элементов (системы теории упругости) при достаточно правильном (например, периодическом) их соединении.

Применяемый метод представляет собой синтез методов, изложенных в монографиях [2,3]. Однако здесь остановимся только на близости спектров упомянутых выше систем, не затрагивая близости соответствующих собственных функций; по-видимому при сформулированных далее условиях возможно и полное исследование задачи на основе излагаемой техники.

Сформулированные далее условия близости низкочастотных частей спектров были обнаружены при изучении периодических сеток (см. [8, 13]).

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. Пусть далее задана конечная совокупность точек $a_i \in \overline{\Omega}$. Через $\overline{\Gamma}$ обозначим связный геометрический граф, имеющий a_i своими вершинами. Вершины, лежащие в $\Gamma = \overline{\Gamma} \cap \Omega$ назовем внутренними и их совокупность обозначим $\mathcal{J}(\Gamma)$. Остальные вершины (т.е. лежащие в $\partial\Omega$) будем называть граничными вершинами графа Γ и их совокупность обозначим через $\partial\Gamma$. Ребра графа Γ, обозначаемые далее через γ_i, предполагаются прямолинейными интервалами, соединяющими некоторые вершины.

В задаче о колебаниях системы связанных струн имеем соответствие: струны соответствуют ребрам графа, а места соединения струн — внутренним вершинам. Места закрепления всей системы соответствуют граничным вершинам в $\partial\Gamma$. Задача о спектре частот собственных колебаний сетки из струн описывается следующим набором дифференциальных соотношений:

$$(\sigma_i u')'(x) + \lambda\rho_i u(x) = 0, \quad x \in \gamma_i \subset \Gamma, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i \in I(a_j)} \sigma_i u'_{\gamma_i}(a_j) + \lambda m_j u(a_j) = 0, \quad a_j \in \mathcal{J}(\Gamma), \tag{2.2}$$

$$u(a_k) = 0, \quad a_k \in \partial\Gamma. \tag{2.3}$$

Здесь σ_i — натяжение, ρ_i — плотность струны γ_i, $m_j = m(a_j)$ — точечная масса в узле a_j. На каждом ребре γ_i предполагается заданной натуральная параметризация; под $u'(x)$ понимается производная по натуральному параметру l в точке x, т.е.

$$u'(x) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(l(x) + \Delta l) - u(l(x))}{\Delta l}.$$

Направление роста параметра l на γ_i не имеет значения для уравнения (2.1). В уравнении (2.2) под $u'_{\gamma_i}(x)$ понимается производная по направлению от вершины a_j внутрь ребра γ_i. Через $I(a_j)$ обозначено множество номеров ребер, примыкающих к вершине a_j.

Задаче (2.1)–(2.3) удобно придать классический вид, подчеркивающий ее аналогию с задачей о спектре частот собственных колебаний мембраны:

$$\nabla(\sigma^0 \nabla u) + \lambda\rho^0 u = 0,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

С этой целью определим на $\overline{\Gamma}$ меру μ, считая мерой $\mu(\widetilde{\Gamma})$ фрагмента $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ сумму

$$\mu(\widetilde{\Gamma}) = \sum_{\gamma_i} \mu_1(\widetilde{\Gamma} \cap \gamma_i) + \sum_{a_i} \mu_0(\widetilde{\Gamma} \cap a_i), \tag{2.4}$$

в которой $\mu_1(\widetilde{\Gamma} \cap \gamma_i)$ — одномерная мера Лебега части γ_i, попавшей в $\widetilde{\Gamma}$, а $\mu_0(a_i) = 1$ (нульмерная мера Лебега точки полагается равной единице). Хотя слагаемые в первой сумме формулы (2.4) по размерности отличаются от слагаемых второй суммы, в дальнейших рассмотрениях эти слагаемые будут умножаться на физические коэффициенты (плотности, натяжения и т.п.), выравнивающие размерности.

Определим оператор дивергенции ∇_μ на векторном поле, касательном к Γ (мы называем поле $\vec{F}$ касательным к Γ, если $\vec{F}(x) = 0$ при $x \in \mathcal{J}(\Gamma)$ и $\vec{F}(x)$ касается γ_i при $x \in \gamma_i$), как плотность потока этого поля по отношению к мере μ. Можно показать (в [15] это сделано для так называемых стратифицированных множеств, включающих геометрические графы как частный случай), что

$$\nabla F(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in \gamma_i, \\ \displaystyle\sum_{i \in I(a_j)} F\Big|_{\gamma_i}(a_j), & a_j \in \mathcal{J}(\Gamma). \end{cases}$$

В правой части этого равенства вместо $\vec{F}$ пишем F, поскольку задание векторного поля на ребре графа эквивалентно заданию скалярной функции F на нем и заданию ориентации этого ребра (направления роста натурального параметра). Это приводит к зависимости знака дивергенции от ориентации, но в дальнейшем мы в качестве $\vec{F}$ будем брать градиент скалярной функции, знак которого также зависит от ориентации; в целом же получается инвариантность выражения вида $\nabla(\nabla u)$, где внутренний значок ∇ означает взятие градиента. Во второй строчке определения дивергенции под $F\big|_{\gamma_i}(a_j)$ подразумевается проекция $\vec{F}$ на внутреннее к γ_i направление ($F\big|_{\gamma_i}(a_j) = \vec{F} \cdot \vec{e}_i$, где $\vec{e}_i$ направлен внутрь γ_i).

Векторные поля, для которых существует дивергенция, естественно назвать гладкими. Задача (2.1)–(2.3) может быть представлена в виде

$$\Delta_{\rho\sigma} u + \lambda u = \frac{1}{\rho}\nabla(\sigma\nabla u) + \lambda u = 0, \tag{2.5}$$

$$u\Big|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{2.6}$$

Здесь через ρ обозначена функция на Γ, равная ρ_i на γ_i и $m(a_j)$ в вершинах a_j. Она предполагается непрерывной на каждом γ_i (множество таких функций обозначается через $C_\gamma(\Gamma)$) и положительной. В уравнении (2.5) поле $\sigma\nabla u$ должно быть гладким (чтобы выражение $\nabla_\mu(\sigma\nabla u)$ имело смысл). Для этого достаточно потребовать, чтобы σ допускала продолжение по непрерывности во внутренние вершины вдоль каждого ребра и была непрерывно дифференцируемой внутри каждого ребра. Легко заметить, что значения σ в вершинах не используются в уравнении (2.5). Для определенности можно считать $\sigma(a_j) = 0$. Внутри каждого ребра σ предполагается строго положительной ($\sigma \geqslant \alpha > 0$).

Для дальнейшего отметим такой факт (аналог первой формулы Грина). Если непрерывная на Γ функция u такова, что $\sigma\nabla u$ — гладкое векторное поле (в указанном выше смысле), и обращающаяся в нуль на $\partial\Gamma$, то

$$\int\limits_\Gamma \rho v \Delta_{\rho\sigma} u \, d\mu = -\int\limits_\Gamma \sigma\nabla u \nabla v \, d\mu. \tag{2.7}$$

Доказательство этого факта для случая произвольного стратифицированного множества имеется в [11].

Рассмотрим последовательность сеток $\overline{\Gamma}_k$. Обозначим через $h(\Gamma_k)$ максимум длин ребер, входящих в Γ_k. Данная последовательность $\overline{\Gamma}_k$ порождает семейство задач Штурма—Лиувилля

$$\frac{1}{\rho^k}\nabla(\sigma^k\nabla u) + \lambda u = 0, \tag{2.8}$$

$$u\Big|_{\partial\Gamma_k} = 0. \tag{2.9}$$

В предположении, что $\partial\Gamma_k \subset \partial\Omega$ и $h(\Gamma_k) \to 0$, $k \to \infty$, в дальнейшем будем исследовать вопрос о сходимости спектра Λ_k задачи (2.8), (2.9) к спектру Λ_0 задачи

$$\frac{1}{\rho^0}\nabla(\sigma^0\nabla u) + \lambda u = 0, \tag{2.10}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.11}$$

где ρ^0 — некоторая положительная плотность, внешний значок ∇ — обычный оператор дивергенции в $\mathbb{R}^2$, а внутренний — градиент скалярной функции u. Задача (2.10), (2.11) описывает спектр частот ν собственных колебаний ($\lambda = \nu^2$) мембраны с плотностью ρ^0 и напряжением σ^0. Под сходимостью Λ_k к Λ_0 будем понимать следующее:

(i) для любого $\lambda_0 \in \Lambda_0$ найдется последовательность $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, сходящаяся к λ_0;

(ii) если последовательность $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, имеет конечный предел λ_0 при $k \to \infty$, то $\lambda_0 \in \Lambda_0$.

Укажем достаточно естественные условия физического характера, при которых это действительно имеет место. Тем самым, начальные куски (низкочастотные части) спектров Λ_k и Λ_0 близки при достаточно больших k.

Отметим, что высокочастотная часть спектра имеет существенно струнный характер. А именно, в предположении, что $m_k(a_j) = 0$ при всех k и j, асимптотика спектра Λ_k имеет вид (как показано в [6])

$$\lambda_k^{(m)} = \left[\frac{\pi m}{\rho}\left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]^2,$$

где

$$\rho = \int\limits_{\Gamma_k} \sqrt{\frac{\rho_k(x)}{\sigma_k(x)}}\, dl.$$

Кроме того, в случае, когда Γ_k имеет вид плоской сетки с квадратными ячейками, задача (2.8), (2.9) допускает решения явно не мембранного характера, показанные на рис. 1.

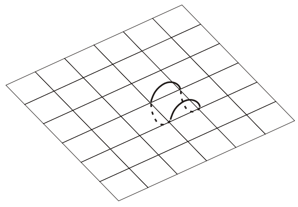

Рис. 1. Примеры форм высокочастотных колебаний.

Здесь предполагается, что сетка закреплена по контуру квадрата. Пунктиром изображены участки струн, расположенные ниже плоскости, в которой закреплена сетка. Приведенные формы составлены из арок синусоид ($\sin(\pi l/h)$ слева и $\sin(\pi l/(2h))$ справа) и соответствуют случаю единичных ρ_i, σ_i и нулевых m_i. Впрочем, для формы, изображенной слева, значения m_i несущественны. Очевидно, что формы с подобной локализацией собственных колебаний на мембране невозможны.

3. Об аппроксимации многомерных задач одномерными

Задача, изучаемая здесь, укладывается в следующую абстрактную схему, описанную, например, в [1]. Пусть рассматривается задача о спектре или, например, задача на собственные значения

$$U(\lambda)u = (A - \lambda I)u = 0, \tag{3.1}$$

где $U(\lambda)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства E в банахово пространство F (разумеется, E должно быть вложено в F). Наряду с задачей (3.1) рассмотрим последовательность задач вида

$$U_k(\lambda)u_k = (A_k - \lambda I)u_k = 0, \tag{3.2}$$

где оператор $U_k(\lambda)$ действует из банахова пространства E_k в банахово пространство F_k. При определенных условиях задачу (3.2) можно считать близкой к задаче (3.1). Один из вариантов описания такой близости состоит в задании диаграммы вида (подробности см. в [1])

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{U(\lambda)} & F \\ {\scriptstyle p_k}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_k} \\ E_k & \xrightarrow{U_k(\lambda)} & F_k, \end{array}$$

в которой $\{p_k\}$ — семейство так называемых связывающих операторов, позволяющих придать смысл сходимости (p-сходимости в терминологии [1]) последовательности $\{u_k\}$, $u_k \in E_k$, к элементу $u \in E$; пишем $u_k \xrightarrow{p} u$, если $\|u_k - p_k u\|_{E_k} \to 0$ при $k \to \infty$. От операторов p_k требуется выполнение следующих двух условий:

- p_k — аддитивный и однородный оператор;
- $\|p_k u\|_{E_k} \to \|u\|_E$ при $k \to \infty$ при любом $u \in E$.

Аналогично, с помощью семейства $\{q_k\}$ определяется q-сходимость последовательности $v_k \in F_k$ к $v \in F$. Теперь можно определить понятие так называемой pq-сходимости семейства операторов $U_k(\lambda)$ к оператору $U(\lambda)$. А именно, пишем $U_k(\lambda) \xrightarrow{pq} U(\lambda)$, если из p-сходимости к u последовательности $\{u_k\}$ следует q-сходимость к $U(\lambda)u$ последовательности $\{U_k(\lambda)u_k\}$. Иными словами,

$$\|u_k - p_k u\|_{E_k} \to 0 \Rightarrow \|U_k(\lambda)u_k - q_k U(\lambda)u\|_{F_k} \to 0. \tag{3.3}$$

Сама по себе pq-сходимость мало что дает; для приложений требуются дальнейшие ее уточнения. Для наших целей важную роль будет играть так называемая устойчивая сходимость семейства $\{U_k(\lambda)\}$ к $U(\lambda)$. Это, помимо pq-сходимости, предполагает обратимость всех операторов $U_k(\lambda)$ и ограниченность в совокупности норм операторов $U_k^{-1}(\lambda)$ (резольвент операторов A_k), начиная с некоторого номера. Разумеется, об устойчивой сходимости можно говорить лишь при λ, принадлежащих всем резольвентным множествам $\mathfrak{R}(A_k)$ операторов A_k, начиная с некоторого номера (своего для каждого λ). Потребуем устойчивой сходимости последовательности $U_k(\lambda)$ к $U(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathfrak{R}(A)$. Это довольно сильное условие, и его проверка в задаче оказывается довольно трудоемкой (см. далее).

Устойчивая сходимость при некоторых дополнительных требованиях на операторы $U_k(\lambda)$, $U(\lambda)$ обеспечивает близость (в указанном выше смысле) спектра Λ_k оператора $U_k(\lambda)$ к спектру Λ_0 оператора $U(\lambda)$. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть операторы A и A_k фредгольмовы с нулевым индексом, и на любом компакте $K \in \mathbb{C}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\max_{\lambda \in K} \|U_k(\lambda)\| \leqslant C = C(K).$$

Тогда, если последовательность $U_k(\lambda)$ устойчиво сходится к $U(\lambda)$ при $\lambda \in \mathfrak{R}(A)$, то $\Lambda_k \to \Lambda_0$.

Данное утверждение представляет собой уточненный для наших целей вариант теоремы из [1, теорема 2, стр. 69]. Поэтому доказательство весьма схематично и приводится лишь ради автономности изложения.

Фиксируем некоторое $\lambda_0 \in \Lambda_0$. Пусть замкнутый круг $\overline{B}_r(\lambda_0)$ на комплексной плоскости не содержит других точек спектра из Λ_0 (ввиду фредгольмовости оператора A, его спектр дискретен). Тогда при достаточно больших k в указанном круге обязательно найдется точка $\lambda_k \in \Lambda_k$. В противном случае найдутся сколь угодно большие k такие, что граница $\partial B_r(\lambda_0)$ содержится в $\mathfrak{R}(A_k)$, и тем самым, имеет смысл говорить об устойчивой сходимости к $U(\lambda)$ некоторой подпоследовательности последовательности $\{U_k(\lambda)\}$. Для простоты предположим, что это сама исходная последовательность. Можно показать, что устойчивая сходимость влечет равномерную ограниченность норм операторов $U_k^{-1}(\lambda)$ на $\partial B_r(\lambda_0)$ как по k, так и по λ. В силу голоморфной зависимости $U_k^{-1}(\lambda)$ от λ и принципа максимума, получаем $\|U_k^{-1}(\lambda)\| \leqslant C > 0$ на всем круге и, в частности, в точке λ_0. Теперь, опираясь на pq-сходимость $U_k(\lambda_0)$ к $U(\lambda_0)$, легко показать, что для любого $u \in E$ имеем $C\|u\| \leqslant \|U(\lambda_0)u\|$ (с константой, указанной выше). Отсюда следует, что $\lambda_0 \in \mathfrak{R}(A)$, что противоречит принадлежности λ_0 спектру оператора $U(\lambda)$.

Выбирая теперь последовательность радиусов r_k, стремящуюся к нулю, получаем последовательность $\lambda_k \in \Lambda_k$ ($\lambda_k \in \overline{B}_{r_k}(\lambda_0)$), сходящуюся к λ_0. Тем самым, в определении сходимости Λ_k к Λ_0 проверено условие (i).

Проверим условие (ii). Пусть последовательность $\{\lambda_k \in \Lambda_k\}$ имеет конечный предел λ_0. Из равенств $U_k(\lambda_k)u_k = 0$ (u_k — нормированная собственная функция) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|U_k(\lambda_0)u_k\|_{F_k} = 0. \tag{3.4}$$

Если $\lambda_0 \in \mathfrak{R}(A)$, то, в силу устойчивой сходимости $U_k(\lambda_0)$ к $U(\lambda_0)$, имеем $\|U_k^{-1}(\lambda_0)\| \leqslant C$. Отсюда и из (3.4) следует невозможное равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|U_k^{-1}(\lambda_0)U_k(\lambda_0)u_k\|_{F_k} = 0.$$

Следовательно, предположение $\lambda_0 \in \mathfrak{R}(A)$ ведет к противоречию. Отсюда заключаем, что $\lambda_0 \in \Lambda_0$.

Будем использовать ослабленный вариант pq-сходимости. А именно, вместо (3.3) будем требовать выполнения условия

$$\|u_k - p_k u\|_{E_k} \to 0 \Rightarrow \|U_k(\lambda)u_k\|_{F_k} \to \|U(\lambda)u\|_F. \tag{3.5}$$

Тогда нет необходимости вводить связывающие операторы $q_k : F \to F_k$. Рассуждения, проведенные выше, справедливы и в случае такой сходимости. Следует отметить, что именно это ослабление pq-сходимости лишает нас возможности обсуждать близость собственных функций. Проверка условия (3.5) намного легче проверки (3.3), но, как видим, за это приходится расплачиваться потерей информации о сходимости собственных функций.

Наряду с устойчивой сходимостью $U_k(\lambda)$ к $U(\lambda)$, полезно ввести еще понятие регулярной сходимости, весьма близкое к сходимости устойчивой. Следуя [1], будем говорить, что $U_k(\lambda)$ сходится к $U(\lambda)$ регулярно, если $U_k(\lambda)$ сходится к $U(\lambda)$ в смысле (3.5), и из того, что $\|u_k\|_{E_k} \leqslant \mathrm{const}$ и существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \|U_k(\lambda)u_k\|_{F_k}$, следует, что в $\{u_k\}$ имеется p-сходящаяся подпоследовательность.

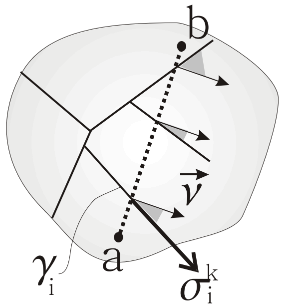

Рис. 2. Силы, действующие в системе струн и в мембране.

Кроме того, будем говорить, что последовательность $U_k(\lambda)$ компактно сходится к $U(\lambda)$, если выполнено (3.5), и из $\|u_k\|_{E_k} \leqslant \text{const}$ следует существование такой подпоследовательности $\{u_{k_i}\}$, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} \|U_{k_i}(\lambda)u_{k_i}\|_{F_{k_i}}$ конечен.

Связи между упомянутыми типами сходимости описываются следующими утверждениями.

Теорема 3.2. *Пусть $B_n \longrightarrow B$ устойчиво, $C_n \longrightarrow C$ компактно, а оператор $B : E \longrightarrow F$ сюръективен, тогда $A_n = B_n + C_n \longrightarrow B + C = A$ регулярно.*

Теорема 3.3. *Пусть ядро $N(A)$ оператора A вырождено, и $A_n \longrightarrow A$ регулярно, а все A_n, начиная с некоторого n, фредгольмовы с нулевым индексом. Тогда $A_n \longrightarrow A$ устойчиво.*

Хотя здесь приводятся несколько отличающиеся от [1] определения устойчивой, регулярной и компактной сходимости, доказательства этих утверждений отличаются от приведенных в [1] лишь незначительными деталями. В связи с этим не будем останавливаться на доказательствах.

4. Условия близости спектров Λ_k и Λ_0

Условия на коэффициенты в уравнении (2.8), обеспечивающие близость спектра Λ_k задачи (2.8),(2.9) к спектру Λ_0 задачи (2.10),(2.11), непосредственно вытекают из физических соображений. Ясно, что масса мембраны, сосредоточенная на участке $\omega \subset \Omega$, должна быть близка к массе струнной сетки, сосредоточенной на $\Gamma_k \cap \omega$. Отсюда первое условие:

$$\left| \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} \rho^k \, d\mu - \int\limits_{\omega} \rho^0 \, dx \right| \leqslant C_1 h(\Gamma_k) \int\limits_{\omega} \rho^0 \, dx. \tag{4.1}$$

Второе условие связывает между собой σ^k и σ^0. Требуется, чтобы для любого отрезка $[a;b]$, лежащего в Ω (см. рис. 2), и фиксированного направления $\vec{\nu}$, ортогонального этому отрезку, выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{\gamma_i} \sigma_i^k \cos(\vec{\nu}, \gamma_i) - \int\limits_{[a;b]} \sigma^0 \, dl \right| \leqslant C_2 h(\Gamma_k) \int\limits_{[a;b]} \sigma^0 \, dl, \tag{4.2}$$

где l — натуральный параметр на отрезке $[a;b]$, а суммирование производится по всем ребрам, пересекающим этот отрезок. Данное условие означает, что сила, действующая на отрезок $[a;b]$ в направлении $\vec{\nu}$ со стороны мембраны, обусловленная ее натяжением, близка к силе, действующей в этом же направлении со стороны сетки.

Если, к примеру, Ω — квадрат на плоскости, и все сетки Γ_k имеют квадратные ячейки, и если при этом $\rho^0 \equiv \text{const}$, $\sigma^0 \equiv \text{const}$, то, полагая все струны однородными, можно взять их плотности и натяжения такими, что $C_1 = C_2 = 0$.

5. Связывающие операторы

Начиная с этого параграфа, приступим к реализации схемы, намеченной в § 3. В первую очередь займемся построением связывающих операторов. Удобно (не меняя требований на гладкость коэффициентов) рассматривать оператор

$$\Delta_{\rho^k\sigma^k} = \frac{1}{\rho_k}\nabla(\sigma^k\nabla u),$$

действующий из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ в пространство $H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}$. Определения этих пространств аналогичны классическим. Сначала определяется пространство $L^2_{\rho^k}(\Gamma_k)$ как пополнение $C(\Gamma_k)$ непрерывных на Γ_k функций по норме $\|\cdot\|_{0,k}$ (k — номер графа), определяемой скалярным произведением

$$(u,v)_{\rho^k} = \int\limits_{\Gamma_k}(\rho^k uv)(x)\,d\mu^k,$$

где μ^k — мера, описанная в § 2. Аналогично определяются пространства $L^2_{\rho^0}(\Omega)$ и норма $\|\cdot\|_{0,0}$, порожденная скалярным произведением

$$(u,v)_{\rho^0} = \int\limits_{\Omega}(\rho^0 uv)(x)\,d\mu^0,$$

где $d\mu^0 = dx$ — обычная мера Лебега в $\mathbb{R}^2$.

Определим также пространство $C^1_0(\Gamma_k)$ как множество функций, непрерывных на Γ_k, непрерывно дифференцируемых на каждом ребре γ_i и обращающихся в нуль в окрестностях точек из $\partial\Gamma_k$. Предполагается также, что первые производные допускают продолжения по непрерывности во внутренние вершины графа Γ_k (вдоль каждого ребра поотдельности; при этом пределы могут оказаться разными). Для дальнейшего потребуется подмножество $C^1_0(\Gamma_k)$ функций, обращающихся в нуль в окрестности границы $\partial\Gamma_k$, обозначаемое через $C^1_{00}(\Gamma_k)$. Аналогичный смысл имеет пространство $C^1_{00}(\Omega)$. Теперь $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ определяется как пополнение $C^1_0(\Gamma_k)$ по норме

$$\|u\|_{1,k} = \left(\int\limits_{\Gamma_k}\rho^k u^2\,d\mu^k + \int\limits_{\Gamma_k}\sigma^k(\nabla u)^2\,d\mu^k\right)^{\frac12} = \left(\|u\|^2_{0,k} + \left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla u\right\|^2_{0,k}\right)^{\frac12}.$$

Аналогично определяются пространство $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ и норма в нем

$$\|u\|_{1,0} = \left(\|u\|^2_{0,0} + \left\|\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right\|^2_{0,0}\right)^{\frac12}.$$

Наконец, пространство $H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ определяется как сопряженное к $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ со стандартной нормой сопряженного пространства

$$\|f\|_{-1,k} = \sup_{\|\phi\|_{1,k}\neq 0}\frac{|f(\phi)|}{\|\phi\|_{1,k}}.$$

Аналогично определяются пространство $H^{-1}_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ и норма $\|\cdot\|_{-1,0}$.

Через $J_\varepsilon(u)$ обозначается сглаживание функции u по Соболеву—Фридрихсу. Связывающий оператор $p_k : \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ определяется как сужение T_k на множество Γ_k функции

$$J^\chi_k(u) = J_{\varepsilon_k}(\chi_{2\varepsilon_k}u)(x) = \int\limits_{\Omega}\omega_{\varepsilon_k}(x-y)\chi_{2\varepsilon_k}u(y)\,dy,$$

где число ε_k фиксируется для каждого Γ_k поотдельности так, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, а χ_ε — характеристическая функция множества

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\}.$$

Сглаживающая функция $\omega_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\omega\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right)$ определяется стандартно. Легко видеть, что $J_k^\chi(u) \in C_{00}^1(\Omega)$ при $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$, а потому

$$p_k(u) = T_k J_k^\chi(u) \in C_{00}^1(\Gamma_k).$$

Покажем, что операторы p_k обладают свойствами связывающих операторов (см. § 3). Аддитивность и однородность p_k очевидны. Для доказательства второго свойства связывающих операторов нам потребуются следующие леммы.

Лемма 5.1. *Пусть $v, g^0 \in C(\Omega)$, $g^k \in C(\Gamma_k)$, $g^0(s) > 0$, $g^k(x) \geqslant 0$. Пусть $\omega \subset \Omega$ и выполнено неравенство*

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k\,d\mu^k - \int\limits_\omega g^0\,d\mu^0\right| \leqslant C\int\limits_\omega g^0\,d\mu^0, \tag{5.1}$$

тогда

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k v\,d\mu^k - \int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| \leqslant C\left|\int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| + \operatorname{osc}(v;\omega)(C+1)\int\limits_\omega g^0\,d\mu^0, \tag{5.2}$$

где $\operatorname{osc}(v;\omega)$ — *колебания функции v на ω.*

Доказательство.

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k v\,d\mu^k - \int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| = \frac{1}{\int\limits_\omega g^0\,d\mu^0}\left|\int\limits_\omega g^0\,d\mu^0 \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k v\,d\mu^k - \int\limits_\omega g^0\,d\mu^0\int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k\,d\mu^k \int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0 - \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k\,d\mu^k\int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\int\limits_\omega g^0\,d\mu^0}\left|\left(\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k\,d\mu^k - \int\limits_\omega g^0\,d\mu^0\right)\int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| +$$

$$+\frac{1}{\int\limits_\omega g^0 d\mu^0}\left|\int\limits_\omega\left(g^0(s)\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k(x)(v(x)-v(s))\,d\mu_x^k\,d\mu_s^0\right)\right|.$$

Тогда, применяя (5.1) к первому модулю в последнем выражении и оценку $|v(x)-v(s)| \leqslant \operatorname{osc}(v;\omega)$ во втором слагаемом последнего выражения, получаем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k v\,d\mu^k - \int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| \leqslant C\left|\int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| + \operatorname{osc}(v;\omega)\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} g^k\,d\mu^k \leqslant$$

$$\leqslant C\left|\int\limits_\omega g^0 v\,d\mu^0\right| + \operatorname{osc}(v;\omega)(C+1)\int\limits_\omega g^0\,d\mu^0,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5.2. *Для всех* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ *выполняется неравенство*
$$\|J_k^\chi(u)\|_{1,0} \leqslant \|u\|_{1,0}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [12]), что для функций из $L^2(\Omega)$ выполняется неравенство
$$\|J_{\varepsilon_k}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.4}$$
Очевидно, что если заменить $L^2(\Omega)$ на $L^2_{\rho_0}(\Omega)$, то неравенство (5.4) сохранится, т.е. $\|J_{\varepsilon_k}(u)\|_{0,0} \leqslant \|u\|_{0,0}$. Отсюда
$$\|J_k^\chi(u)\|_{0,0} = \|J_{\varepsilon_k}(\chi_{2\varepsilon_k}u)\|_{0,0} \leqslant \|\chi_{2\varepsilon_k}u\|_{0,0} \leqslant \|u\|_{0,0}.$$
Теперь остается заметить, что, так как $\nabla u \in L^2_{\rho_0}(\Omega)$, имеем
$$\left\|J_k^\chi\left(\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right)\right\|_{0,0} \leqslant \left\|\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right\|_{0,0}.$$
Комбинируя два последних неравенства, получаем
$$\|J_k^\chi(u)\|^2_{1,0} = \|J_k^\chi(u)\|^2_{0,0} + \left\|J_k^\chi\left(\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right)\right\|^2_{0,0} \leqslant \|u\|^2_{0,0} + \left\|\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right\|^2_{0,0} = \|u\|^2_{1,0},$$
что и требовалось доказать. □

Как следствие получается утверждение.

Лемма 5.3. *При всех* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ *имеем*
$$\lim_{k\to\infty} \|J_k^\chi(u) - u\|_{1,0} = 0. \tag{5.5}$$

Доказательство. Имеем
$$\Big|\|J_k^\chi(u)\|_{0,0} - \|u\|_{0,0}\Big| \leqslant \|J_k^\chi(u) - u\|_{0,0}. \tag{5.6}$$

Пусть $v \in C(\Omega)$ такова, что
$$\|v - u\|_{0,0} \leqslant \varepsilon. \tag{5.7}$$
Тогда из (5.4) получаем
$$\|J_k^\chi(u) - J_k^\chi(v)\|_{0,0} = \|J_k^\chi(u - v)\|_{0,0} \leqslant \|u - v\|_{0,0} \leqslant \varepsilon. \tag{5.8}$$

Поскольку v непрерывна, то $J_k^\chi(v)$ равномерно сходится к v в Ω_{ε_k}, а потому
$$\|J_k^\chi(v) - v\|_{0,0} \leqslant \varepsilon \tag{5.9}$$
при достаточно больших k. Теперь, в силу соотношений (5.6)–(5.9), получаем
$$\big|\,\|J_k^\chi(u)\|_{0,0} - \|u\|_{0,0}\big| \leqslant \|J_k^\chi(u) - J_k^\chi(v)\|_{0,0} + \|J_k^\chi(v) - v\|_{0,0} + \|v - u\|_{0,0} \leqslant 3\varepsilon.$$
Итак,
$$\lim_{k\to\infty} \|J_k^\chi(u)\|^2_{0,0} = \|u\|^2_{0,0}.$$

Теперь, рассуждая, как в доказательстве предыдущей леммы, сначала получаем
$$\lim_{k\to\infty}\left\|J_k^\chi\left(\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right)\right\|^2_{0,0} = \left\|\sqrt{\frac{\sigma^0}{\rho^0}}\,\nabla u\right\|^2_{0,0},$$
а затем, складывая два последних предела, получаем равенство, эквивалентное доказываемому. □

В некоторых случаях используется более слабый вариант доказанного утверждения. А именно,

$$\lim_{k\to\infty} \|J_k^{\chi}(u)\|_{1,0} = \|u\|_{1,0}. \tag{5.10}$$

Доказанные леммы позволяют вместо предельного равенства $\lim\limits_{k\to\infty} \|p_k u\|_{1,k} = \|u\|_{1,0}$ на функциях из $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ проверять равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k(u)\|_{1,k} = \|u\|_{1,0}$$

на функциях из $C^1_{00}(\Omega)$.

Лемма 5.4. *При всех $u \in C^1_{00}(\Omega)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k(u)\|_{0,k} = \|u\|_{0,0} \tag{5.11}$$

при условии, что $h(\Gamma_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и выполнено условие (4.1).

Доказательство. При фиксированном $\varepsilon > 0$, ввиду равномерной непрерывности функции u на $\overline{\Omega}$, можно указать такое $\delta > 0$, что при разбиении Ω на попарно не пересекающиеся части $\omega_1, \dots, \omega_m$ с диаметрами, не превосходящими δ, колебание $\operatorname{osc}(u^2; \omega_j)$ функции u^2 не превосходит ε. Имеем

$$\big|\|u\|^2_{0,0} - \|T_k u\|^2_{0,k}\big| = \left| \int\limits_{\Omega} \rho^0 u^2\, d\mu^0 - \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u^2\, d\mu^k \right| \leqslant \sum_j \left| \int\limits_{\omega_j} \rho^0 u^2\, d\mu^0 - \int\limits_{\omega_j\cap\Gamma_k} \rho^k u^2\, d\mu^k \right|.$$

Заметим, что к последнему модулю можно применить лемму 5.1. Действительно, достаточно положить $\omega = \omega_j$, $g^0 = \rho^0$, $g^k = \rho^k$, $v = u^2$. При этом (5.1) выполнено с константой $C = C_1 h(\Gamma_k)$, в силу (4.1). Используя то, что $\operatorname{osc}(u^2; \omega_j) \leqslant \varepsilon$, получаем

$$\big|\|u\|^2_{0,0} - \|T_k u\|^2_{0,k}\big| \leqslant \sum_j \left(C_1 h(\Gamma_k) \int\limits_{\omega_j} \rho^0 u^2\, d\mu^0 + \varepsilon(C_1 h(\Gamma_k) + 1) \int\limits_{\omega_j} \rho^0\, d\mu^0 \right) =$$

$$= C_1 h(\Gamma_k) \int\limits_{\Omega} \rho^0 u^2\, d\mu^0 + \varepsilon(C_1 h(\Gamma_k) + 1) \int\limits_{\Omega} \rho^0\, d\mu^0.$$

При достаточно большом k можно считать $C_1 h(\Gamma_k) < \varepsilon$ (так как $h(\Gamma_k) \to 0$). В итоге

$$\big|\|u\|^2_{0,0} - \|T_k u\|^2_{0,k}\big| \leqslant \varepsilon \left(\int\limits_{\Omega} \rho^0 u^2\, d\mu^0 + (\varepsilon + 1) \int\limits_{\Omega} \rho^0\, d\mu^0 \right),$$

а отсюда получаем требуемое. □

Итак, показано, что $\|p_k u\|_{0,k} \to \|u\|_{0,0}$ при $k \to \infty$. Остается усилить это до сходимости $\|p_k u\|_{1,k} \to \|u\|_{1,0}$ при $k \to \infty$. Для этого потребуется сузить класс областей Ω. А именно, назовем Ω простой областью, если ее пересечение с любой прямой состоит из конечного числа компонент связности. В этом случае область Ω допускает разбиение на сколь угодно малые части $\omega_1, \dots, \omega_n$, также являющиеся простыми. Также удобно переформулировать условие (4.2) следующим образом.

Лемма 5.5. *Пусть $\omega \subset \Omega$ — простая область и $\vec{\nu}$ — фиксированное направление. Тогда*

$$\left| \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} \sigma^k(x) \cos^2(\vec{\nu}, \gamma_x)\, d\mu^k - \int\limits_{\omega} \sigma^0\, d\mu^0 \right| \leqslant C_2 h(\Gamma_k) \int\limits_{\omega} \sigma^0\, d\mu^0, \tag{5.12}$$

где γ_x — ребро, содержащее точку x, пробегающую $\Gamma_k \cap \omega$. Заметим, что поскольку во внутренних вершинах $\sigma^k(x) = 0$, то интегрирование по $\Gamma_k \cap \omega$ сводится к интегрированию только по участкам ребер графа Γ_k, лежащим в ω.

Доказательство получается интегрированием условия (4.2) по пересечениям ω с прямыми, перпендикулярными направлению $\vec{\nu}$; в силу простоты ω, такое пересечение будет состоять из конечного числа отрезков, на каждом из которых выполнено условие (4.2). Появление в формуле (5.12) $\cos^2(\vec{\nu},\gamma_x)$ вместо $\cos(\vec{\nu},\gamma_x)$ связано с тем, что интегрирование (4.2) по всем прямым, перпендикулярным $\vec{\nu}$ (и, разумеется, пересекающим ω), это фактически интегрирование по параметру l, изменяющемуся вдоль $\vec{\nu}$, а его дифференциал dl связан с дифференциалом $d\mu_k$ на ребре γ_x соотношением $dl = \cos(\vec{\nu},\gamma_x)\,d\mu_k$.

Нам также понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 5.6. *Пусть ω такая же, как и выше, а $v \in C(\Omega)$. Тогда*

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega} \sigma^k(x)\cos(\vec{\nu},\gamma_x)\sin(\vec{\nu},\gamma_x)v(x)\,d\mu_x^k\right| \leqslant C_2 h(\Gamma_k)\int\limits_{\omega}\sigma^0 v\,d\mu^0 + \operatorname{osc}(v;\omega)(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\omega}\sigma^0\,d\mu^0.$$

Доказательство. Положим α_x равным углу между $\vec{\nu}$ и γ_x. Тогда

$$\cos\alpha_x\sin\alpha_x = \frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\alpha_x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha_x+\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

а потому

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega}\sigma^k(x)\cos\alpha_x\sin\alpha_x v\,d\mu^k\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega}\sigma^k(x)\cos^2\left(\alpha_x-\frac{\pi}{4}\right)v\,d\mu^k - \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega}\sigma^k(x)\cos^2\left(\alpha_x+\frac{\pi}{4}\right)v\,d\mu^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega}\sigma^k(x)\cos^2\left(\alpha_x-\frac{\pi}{4}\right)v\,d\mu^k - \int\limits_{\omega}\sigma^0 v\,d\mu^0\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega}\sigma^k(x)\cos^2\left(\alpha_x+\frac{\pi}{4}\right)v\,d\mu^k - \int\limits_{\omega}\sigma^0 v\,d\mu^0\right|.$$

Заметим, что к каждому из выражений под знаком модуля можно применить лемму 5.1. При этом выполнение условия (5.1) обеспечивается тем, что каждое выражение под знаком модуля имеет вид левой части (5.12) с $\vec{\nu}$, повернутым на фиксированный угол. Поэтому каждый модуль поотдельности не превосходит

$$\frac{1}{2}C_2h(\Gamma_k)\int\limits_{\omega}\sigma^0 v\,d\mu^0 + \operatorname{osc}(v;\omega)(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\omega}\sigma^0\,d\mu^0,$$

откуда и следует требуемое. □

Из последних двух лемм получаем следующее утверждение.

Лемма 5.7. *При $u \in C^1_{00}(\Omega)$ имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla T_k(u)\right\|_{0,k} = \left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla u\right\|_{0,0},$$

если $h(\Gamma_k)\to 0$ при $k\to\infty$ и выполнено условие (4.2).

Доказательство. Принадлежность u пространству $C^1_{00}(\Omega)$ означает, в частности, что частные производные функции u равномерно непрерывны на Ω. Поэтому при фиксированном $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при разбиении Ω на попарно не пересекающиеся простые части $\omega_1, \dots, \omega_m$ с диаметрами, не превосходящими δ, колебания $\operatorname{osc}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x^i}\right)^2; \omega_j\right) < \varepsilon$ для всех i, j. Тогда имеем

$$\left| \left\| \sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\, \nabla T_k(u) \right\|^2_{0,k} - \left\| \sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\, \nabla u \right\|^2_{0,0} \right| = \left| \int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla u)^2\, d\mu^k - \int\limits_{\Omega} \sigma^0 (\nabla u)^2\, d\mu^0 \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^m \int\limits_{\Gamma_k \cap \omega} \sigma^k (\nabla u)^2\, d\mu^k - \int\limits_{\omega_j} \sigma^0 (\nabla u)^2\, d\mu^0 \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^m \left\{ \int\limits_{\Gamma_k \cap \omega_j} \sigma^k \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \cos(\vec{e}_1, \gamma_x) + \frac{\partial u}{\partial x^2} \cos(\vec{e}_2, \gamma_x) \right)^2 d\mu^k_x - \int\limits_{\omega_j} \sigma^0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^2 \right] d\mu^0 \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^2 \left| \int\limits_{\Gamma_k \cap \omega_j} \sigma^k \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 \cos^2(\vec{e}_i, \gamma_x)\, d\mu^k - \int\limits_{\omega_j} \sigma^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 d\mu^0 \right| + \right.$$

$$\left. +2 \left| \int\limits_{\Gamma_k \cap \omega_j} \sigma^k \frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial u}{\partial x^2} \cos(\vec{e}_1, \gamma_x) \cos(\vec{e}_2, \gamma_x)\, d\mu^k_x \right| \right\}, \tag{5.13}$$

где $\vec{e}_i$ — орты осей координат.

Заметим, что к первому модулю можно применить лемму 5.1. Действительно, достаточно положить $\omega = \omega_j$, $g^0 = \sigma^0$, $g^k = \sigma^k \cos^2(\vec{e}_i, \gamma_x)$, $v = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x^i}\right)^2$. При этом (5.1) выполнено с константой $C = C_2 h(\Gamma_k)$, в силу (4.2). Используя то, что $\operatorname{osc}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x^i}\right)^2; \omega_j\right) \leqslant \varepsilon$, получаем

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 \left| \int\limits_{\Gamma_k \cap \omega_j} \sigma^k \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 \cos^2(\vec{e}_i, \gamma_x)\, d\mu^k - \int\limits_{\omega_j} \sigma^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 d\mu^0 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 \left\{ C_2 h(\Gamma_k) \int\limits_{\omega_j} \sigma^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 d\mu^0 + \operatorname{osc}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2; \omega_j \right) (C_2 h(\Gamma_k) + 1) \int\limits_{\omega_j} \sigma^0\, d\mu^0 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^2 \left\{ C_2 h(\Gamma_k) \int\limits_{\Omega} \sigma^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 d\mu^0 + \varepsilon (C_2 h(\Gamma_k) + 1) \int\limits_{\Omega} \sigma^0\, d\mu^0 \right\} =$$

$$= C_2 h(\Gamma_k) \int\limits_{\Omega} \sigma^0 (\nabla u)^2\, d\mu^0 + 2\varepsilon (C_2 h(\Gamma_k) + 1) \int\limits_{\Omega} \sigma^0\, d\mu^0.$$

Оценим последний модуль в выражении (5.13). Заметим, что $\cos(\vec{e}_2, \gamma_x) = \sin(\vec{e}_1, \gamma_x)$, а следовательно, к последнему модулю можно применить лемму 5.6, из которой следует

$$2 \sum_{j=1}^m \left| \int\limits_{\Gamma_k \cap \omega_j} \sigma^k \frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial u}{\partial x^2} \cos(\vec{e}_1, \gamma_x) \sin(\vec{e}_1, \gamma_x)\, d\mu^k_x \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{m}\left\{C_2h(\Gamma_k)\int\limits_{\omega_j}\sigma^0\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\,d\mu^0+\operatorname{osc}\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2};\omega_j\right)(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\omega_j}\sigma^0\,d\mu^0\right\}\leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{C_2h(\Gamma_k)\int\limits_{\Omega}\sigma^0\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\,d\mu^0+\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\Omega}\sigma^0\,d\mu^0\right\}\leqslant$$
$$\leqslant C_2h(\Gamma_k)\int\limits_{\Omega}\sigma^0(\nabla u)^2\,d\mu^0+2\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\Omega}\sigma^0\,d\mu^0. \tag{5.14}$$

Подставляя полученные оценки в (5.13), получаем

$$\left|\left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla T_k(u)\right\|_{0,k}^2-\left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla u\right\|_{0,0}^2\right|\leqslant 2C_2h(\Gamma_k)\int\limits_{\Omega}\sigma^0(\nabla u)^2\,d\mu^0+4\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\Omega}\sigma^0\,d\mu^0.$$

При достаточно большом k можно считать $C_2h(\Gamma_k)<\varepsilon$ (так как $h(\Gamma_k)\to 0$). В итоге

$$\left|\left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla T_k(u)\right\|_{0,k}^2-\left\|\sqrt{\frac{\sigma^k}{\rho^k}}\,\nabla u\right\|_{0,0}^2\right|\leqslant 2\varepsilon\left(\int\limits_{\Omega}\sigma^0(\nabla u)^2\,d\mu^0+2(\varepsilon+1)\int\limits_{\Omega}\sigma^0\,d\mu^0\right),$$

а отсюда получаем требуемое. □

Леммы 5.4, 5.7 вместе означают, что

$$\lim_{k\to\infty}\|T_k(u)\|_{1,k}=\|u\|_{1,0} \tag{5.15}$$

для любой функции u из $C^1_{00}(\Omega)$. Отсюда, с учетом леммы 5.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для любой функции* $u\in\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ *выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\|p_k(u)\|_{1,k}=\|u\|_{1,0}.$$

6. Некоторые оценки прямых и обратных операторов

Данный параграф является подготовительным к доказательству сходимости операторов $\Delta_{\rho_k\sigma_k}+\lambda I$ к оператору $\Delta_{\rho_0\sigma_0}+\lambda I$ в различных смыслах, описанных в § 3.

Лемма 6.1. *Пусть* $u\in\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$. *Тогда*

$$\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}u+\lambda u\|_{-1,k}\leqslant(1+|\lambda|)\|u\|_{1,k}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Требуется показать, что

$$\sup_{\|\phi\|_{1,k}\neq 0}\frac{\left|\int\limits_{\Gamma_k}\rho^k\left(\frac{1}{\rho^k}\nabla(\sigma^k\nabla u)+\lambda u\right)\phi\,d\mu^k\right|}{\|\phi\|_{1,k}}\leqslant(1+|\lambda|)\|u\|_{1,k}.$$

Для этого, в силу формулы Грина (2.7), достаточно показать, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k}\sigma^k\nabla u\nabla\phi\,d\mu^k-\lambda\int\limits_{\Gamma_k}\rho^k u\phi\,d\mu^k\right|\leqslant(1+|\lambda|)\|u\|_{1,k}\|\phi\|_{1,k}.$$

В силу неравенства Шварца, имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k \nabla u \nabla \phi \, d\mu^k\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla u)^2 \, d\mu^k \cdot \int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla \phi)^2 \, d\mu^k\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u \phi \, d\mu^k\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u^2 \, d\mu^k \cdot \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k \phi^2 \, d\mu^k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k \nabla u \nabla \phi \, d\mu^k - \lambda \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u \phi \, d\mu^k\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla u)^2 \, d\mu^k \cdot \int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla \phi)^2 \, d\mu^k\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+|\lambda| \left(\int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u^2 \, d\mu^k \cdot \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k \phi^2 \, d\mu^k\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1+|\lambda|)\|u\|_{1,k}\|\phi\|_{1,k},$$

что и требовалось доказать. □

То, что оценка зависит только от λ, но не от Γ_k, важно для дальнейшего. Следующая лемма дает оценку норм операторов, обратных к $\Delta_{\rho^k\sigma^k} - I$, также не зависящую от Γ_k.

Лемма 6.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$. *Тогда*

$$\|\Delta_{\rho^k\sigma^k} u - u\|_{-1,k} \geqslant \|u\|_{1,k}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Имеем

$$\|\Delta_{\rho^k\sigma^k} u - u\|_{-1,k} = \sup_{\|\phi\|_{1,k}\neq 0} \frac{\left|\int\limits_{\Gamma_k} \rho^k \left(\frac{1}{\rho^k}\nabla(\sigma^k \nabla u) - u\right) \phi \, d\mu^k\right|}{\|\phi\|_{1,k}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left|\int\limits_{\Gamma_k} \rho^k \left(\frac{1}{\rho^k}\nabla(\sigma^k \nabla u) - u\right) u \, d\mu^k\right|}{\|u\|_{1,k}} = \frac{\left|\int\limits_{\Gamma_k} \nabla(\sigma^k \nabla u) u \, d\mu^k - \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u^2 \, d\mu^k\right|}{\|u\|_{1,k}} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla u)^2 \, d\mu^k + \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u^2 \, d\mu^k}{\|u\|_{1,k}} = \frac{\|u\|_{1,k}^2}{\|u\|_{1,k}} = \|u\|_{1,k},$$

что и требовалось доказать. □

Из предыдущей леммы легко следует, что оператор $\Delta_{\rho^k\sigma^k} - I$ осуществляет изоморфизм между $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ и $H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$. Отсюда, конечно, не следует, что таким же свойством обладает оператор $\Delta_{\rho^k\sigma^k} : \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k) \longrightarrow H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$. Поэтому остановимся на этом подробнее.

В [14] (см. также [9]) доказано, что на произвольном стратифицированном множестве выполняется неравенство Пуанкаре, которое в данном случае имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u^2 \, d\mu^k \leqslant C_k \int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k (\nabla u)^2 \, d\mu^k, \tag{6.3}$$

для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ с константой, зависящей только от Γ_k. В порядке комментария заметим, что при дополнительном условии на Γ_k

$$d_k(x,y) \leqslant Md(x,y),$$

где d_k — расстояние на Γ_k (минимум длин путей, соединяющих x и y), а d — евклидово расстояние между этими же точками, константу C_k в (6.3) можно выбрать не зависящей от Γ_k, если все прочие условия (на ρ^k, σ^k) считать также выполненными.

Неравенство (6.3) означает, в частности (см., например, [3]), что

$$\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}u\|_{-1,k} \geqslant \hat{C}_k\|u\|_{1,k},$$

где $\hat{C}_k > 0$, а отсюда следует, что $\Delta_{\rho^k\sigma^k} : \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k) \longrightarrow H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ является изоморфизмом.

Поскольку оператор $\lambda I : \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k) \longrightarrow H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ компактен, то оператор $\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I$ является фредгольмовым с нулевым индексом (см. например, [7]) при каждом k и любом λ. Хотя формально нужно рассматривать и случай комплексных λ, тем не менее можно ограничиться случаем вещественных и положительных λ. Это следует из того, что оператор $-\Delta_{\rho^k\sigma^k}$ формально самосопряженный и положительно определенный, а потому его спектр лежит на положительной полуоси в $\mathbb{R}$. Отметим также, что в силу упомянутой выше фредгольмовости, спектр оператора $-\Delta_{\rho^k\sigma^k}$ дискретен.

7. Сходимость операторов $\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I$

Теорема 7.1. *Пусть $u_k \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$. Тогда из $u_k \xrightarrow{P} u$ следует, что*

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}u_k + \lambda u_k\|_{-1,k} = \|\Delta_{\rho^0\sigma^0}u + \lambda u\|_{-1,0}. \tag{7.1}$$

Для доказательства данной теоремы потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 7.1. *Пусть $u_k \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$. Тогда из $u_k \xrightarrow{P} u$ следует, что*

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}(u_k - p_ku) + \lambda(u_k - p_ku)\|_{-1,k} = 0. \tag{7.2}$$

Доказательство. Согласно неравенству (6.1),

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}(u_k - p_ku) + \lambda(u_k - p_ku)\|_{-1,k} \leqslant (1+|\lambda|)\lim_{k\to\infty}\|u_k - p_ku\|_{1,k} = 0.$$

□

Лемма 7.2. *Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^0\sigma^0}(u - J_k^\chi u) + \lambda(u - J_k^\chi u)\|_{-1,0} = 0. \tag{7.3}$$

Доказательство. Используя неравенство, аналогичное (6.1), но для $\Delta_{\rho^0\sigma^0} + \lambda I$, а также лемму 5.3, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^0\sigma^0}(u - J_k^\chi u) + \lambda(u - J_k^\chi u)\|_{-1,0} \leqslant (1+|\lambda|)\lim_{k\to\infty}\|u - J_k^\chi u\|_{1,0} = 0.$$

□

Доказательство теоремы 7.1. Из леммы 7.1 следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}u_k + \lambda u_k\|_{-1,k} = \lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}p_ku + \lambda p_ku\|_{-1,k},$$

а из леммы 7.2

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^0\sigma^0}J_k^\chi u + \lambda J_k^\chi u\|_{-1,0} = \lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^0\sigma^0}u + \lambda u\|_{-1,0}.$$

С учетом того, что $p_ku = T_k(J_k^\chi u)$ и $J_k^\chi u \in C^1_{00}(\Omega)$, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\|\Delta_{\rho^k\sigma^k}T_k(u) + \lambda T_k(u)\|_{-1,k} = \|\Delta_{\rho^0\sigma^0}u + \lambda u\|_{-1,0}$$

при $u \in C^1_{00}(\Omega)$, т.е., с учетом применения формулы Грина,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\|\phi_k\|_{1,k}\neq 0} \frac{\left| -\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k \nabla u \nabla \phi_k \, d\mu^k + \lambda \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u \phi_k \, d\mu^k \right|}{\|\phi_k\|_{1,k}} = \tag{7.4}$$

$$= \sup_{\|\phi\|_{1,0}\neq 0} \frac{\left| -\int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi \, d\mu^0 + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right|}{\|\phi\|_{1,0}}. \tag{7.5}$$

Заметим также, что (без ограничения общности) супремумы можно рассматривать на плотных в $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ множествах. Например, $\phi \in C^1_{00}(\Omega)$ и $\phi_k = T_k(\phi)$. Также можно считать, что $\|\phi\|_{1,0} = 1$. При этом при фиксированном $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого k, имеем $\big|\|\phi\|_{1,0} - \|T_k(\phi)\|_{1,k}\big| < \varepsilon$. Тогда (7.4) принимает вид

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\|\phi\|_{1,0}=1} \left(\left| -\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k \nabla u \nabla \phi \, d\mu^k + \lambda \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u \phi \, d\mu^k \right| - \right.$$
$$\left. -\|T_k(\phi)\|_{1,k} \left| -\int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi \, d\mu^0 + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right| \right) = 0. \tag{7.6}$$

Принадлежность u и ϕ пространству $C^1_{00}(\Omega)$ означает, в частности, что частные производные функций u и ϕ равномерно непрерывны на Ω. Поэтому при фиксированном $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при разбиении Ω на попарно не пересекающиеся простые части $\omega_1, \ldots, \omega_m$ с диаметрами, не превосходящими δ, колебания $\operatorname{osc}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x^i}\right|^2; \omega_l\right) < \varepsilon$, $\operatorname{osc}(|u|^2; \omega_l) < \varepsilon$, $\operatorname{osc}\left(\left|\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right|^2; \omega_l\right) < \varepsilon$, $\operatorname{osc}(|\phi|^2; \omega_l) < \varepsilon$ для всех i, l. Тогда имеем

$$A_k = \left| \left| -\int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k \nabla u \nabla \phi \, d\mu^k + \lambda \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u \phi \, d\mu^k \right| - \|T_k(\phi)\|_{1,k} \left| -\int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi \, d\mu^0 + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right| \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi \, d\mu^0 - \int\limits_{\Gamma_k} \sigma^k \nabla u \nabla \phi \, d\mu^k \right| +$$
$$+|\lambda| \left| \int\limits_{\Gamma_k} \rho^k u \phi \, d\mu^k - \int\limits_{\Omega} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right| + \varepsilon \left| -\int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi \, d\mu^0 + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left| \int\limits_{\omega_l} \sigma^0 \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \, d\mu^0 - \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega_l} \sigma^k \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \cos^2(\vec{e}_i, \gamma_x) \, d\mu^k \right| + \right.$$
$$+ \left| \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega_l} \sigma^k \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right) \cos(\vec{e}_1, \gamma_x) \cos(\vec{e}_2, \gamma_x) \, d\mu^k_x \right| +$$
$$\left. +|\lambda| \left| \int\limits_{\Gamma_k\cap\omega_l} \rho^k u \phi \, d\mu^k - \int\limits_{\omega_l} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right| \right\} + \varepsilon \left| -\int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi \, d\mu^0 + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^0 u \phi \, d\mu^0 \right|, \tag{7.7}$$

где $\vec{e}_i$ — орты осей координат.

Заметим, что к первому и третьему модулям можно применить лемму 5.1. Действительно, достаточно положить $\omega=\omega_l$, $g^0=\sigma^0$ $(g^0=\rho^0)$, $g^k=\sigma^k\cos^2(\vec e_i,\gamma_x)$ $(g^k=\rho^k)$, $v=\dfrac{\partial u}{\partial x^i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}$ $(v=u\phi)$. При этом (5.1) выполнено с константой $C=C_2h(\Gamma_k)$ $(C=C_1h(\Gamma_k))$, в силу (4.2) (соответственно (4.1)). Используя также малость колебаний функций u и ϕ вместе со всеми их частными производными первого порядка, получаем для первого модуля

$$\sum_{l=1}^m\sum_{i=1}^2\left|\int\limits_{\omega_l}\sigma^0\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,d\mu^0-\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega_l}\sigma^k\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\cos^2(\vec e_i,\gamma_x)\,d\mu^k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^m\sum_{i=1}^2\left\{C_2h(\Gamma_k)\left|\int\limits_{\omega_l}\sigma^0\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,d\mu^0\right|+\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\omega_l}\sigma^0\,d\mu^0\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_2h(\Gamma_k)\int\limits_\Omega\sigma^0\sum_{i=1}^2\left|\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|d\mu^0+2\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_\Omega\sigma^0\,d\mu^0$$

и аналогично для третьего модуля

$$|\lambda|\sum_{l=1}^m\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega_l}\rho^ku\phi\,d\mu^k-\int\limits_{\omega_l}\rho^0u\phi\,d\mu^0\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda|\sum_{l=1}^m\left(C_1h(\Gamma_k)\left|\int\limits_{\omega_l}\rho^0u\phi\,d\mu^0\right|+\varepsilon(C_1h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\omega_l}\rho^0\,d\mu^0\right)\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda|C_1h(\Gamma_k)\int\limits_\Omega\rho^0|u\phi|\,d\mu^0+\varepsilon|\lambda|(C_1h(\Gamma_k)+1)\int\limits_\Omega\rho^0\,d\mu^0.$$

Оценим второй модуль в выражении (5.13). Заметим, что $\cos(\vec e_2,\gamma_x)=\sin(\vec e_1,\gamma_x)$, и следовательно, ко второму модулю можно применить лемму 5.6, из которой следует, что

$$\sum_{l=1}^m\left|\int\limits_{\Gamma_k\cap\omega_l}\sigma^k\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)\cos(\vec e_1,\gamma_x)\sin(\vec e_1,\gamma_x)\,d\mu_x^k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^m\left\{C_2h(\Gamma_k)\int\limits_{\omega_l}\sigma^0\left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right|\,d\mu^0+\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_{\omega_l}\sigma^0\,d\mu^0\right\}=$$

$$=C_2h(\Gamma_k)\int\limits_\Omega\sigma^0\left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right|\,d\mu^0+\varepsilon(C_2h(\Gamma_k)+1)\int\limits_\Omega\sigma^0\,d\mu^0.$$

Заметим, что при достаточно большом k можно считать $C_2h(\Gamma_k)<\varepsilon$ и $C_1h(\Gamma_k)<\varepsilon$ (так как $h(\Gamma_k)\to0$). В итоге, подставляя полученные оценки модулей в (7.6), получаем

$$A_k\leqslant\varepsilon\int\limits_\Omega\sigma^0\sum_{i=1}^2\left|\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|d\mu^0+2\varepsilon(\varepsilon+1)\int\limits_\Omega\sigma^0\,d\mu^0+$$

$$+\varepsilon\int\limits_\Omega\sigma^0\left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right|\,d\mu^0+\varepsilon(\varepsilon+1)\int\limits_\Omega\sigma^0\,d\mu^0+$$

$$+|\lambda|\varepsilon\int\limits_\Omega\rho^0|u\phi|\,d\mu^0+\varepsilon|\lambda|(\varepsilon+1)\int\limits_\Omega\rho^0\,d\mu^0+\varepsilon\left|-\int\limits_\Omega\sigma^0\nabla u\nabla\phi d\mu^0+\lambda\int\limits_\Omega\rho^0u\phi d\mu^0\right|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sigma^0 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right| d\mu^0 + \varepsilon|\lambda| \int\limits_{\Omega} \rho^0 |u\phi|\, d\mu^0 + \varepsilon(\varepsilon+1) \int\limits_{\Omega} \left(|\lambda|\rho^0 + 3\sigma^0\right)\, d\mu^0 +$$

$$+\varepsilon \left| -\int\limits_{\Omega} \sigma^0 \nabla u \nabla \phi\, d\mu^0 + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^0 u\phi\, d\mu^0 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sigma^0 \left((\nabla u)^2 + (\nabla\phi)^2\right)\, d\mu^0 + \varepsilon|\lambda| \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \rho^0 (u^2 + \phi^2)\, d\mu^0 + \varepsilon(\varepsilon+1) \int\limits_{\Omega} \left(|\lambda|\rho^0 + 3\sigma^0\right)\, d\mu^0 +$$

$$+\varepsilon \left(\left(\int\limits_{\Omega} \sigma^0 (\nabla u)^2 d\mu^0 \int\limits_{\Omega} \sigma^0 (\nabla\phi)^2\, d\mu^0 \right)^{\frac{1}{2}} + |\lambda| \left(\int\limits_{\Omega} \rho^0 u^2 d\mu^0 \int\limits_{\Omega} \rho^0 \phi^2\, d\mu^0 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\|u\|_{1,0}^2 + \|\phi\|_{1,0}^2) + \varepsilon|\lambda| \frac{1}{2} (\|u\|_{1,0}^2 + \|\phi\|_{1,0}^2) + \varepsilon(\varepsilon+1) \int\limits_{\Omega} \left(|\lambda|\rho^0 + 3\sigma^0\right)\, d\mu^0 +$$

$$+\varepsilon\left(\|u\|_{1,0}\|\phi\|_{1,0} + |\lambda|\|u\|_{1,0}\|\phi\|_{1,0}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\|u\|_{1,0} + \|\phi\|_{1,0})^2 \left(1 + \frac{|\lambda|}{2}\right) + \varepsilon(\varepsilon+1) \int\limits_{\Omega} \left(|\lambda|\rho^0 + 3\sigma^0\right)\, d\mu^0 \leqslant \varepsilon(M_1 + (\varepsilon+1)M_2),$$

где M_1, M_2 конечны в силу того, что u, $\phi \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$. Отсюда, в силу произвольности выбора ε, получаем требуемое. $\square$

Соберем все сказанное об операторах $\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I$ в единое целое.

Все операторы $\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I$, $\Delta_{\rho^0\sigma^0} + \lambda I$ фредгольмовы (как операторы, действующие в описанных выше пространствах) с нулевым индексом (см. конец § 6). На любом компакте K из $\mathbb{C}$ (а фактически, достаточно рассмотреть только компакты из $\mathbb{R}_+$) имеет место неравенство (см. лемму 6.1)

$$\max_{\lambda\in K} \|\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I\|_{-1,k} \leqslant C(K) = 1 + \max|\lambda|.$$

Заметим, что из теоремы 7.1 и леммы 6.2 следует, что операторы $\Delta_{\rho^k\sigma^k} - I$ устойчиво сходятся к $\Delta_{\rho^0\sigma^0} - I$. Кроме того, оператор $\Delta_{\rho^0\sigma^0} - I$ очевидно сюръективен. Заметим также, что операторы $(\lambda+1)I : \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k) \longrightarrow H^{-1}_{\rho^k\sigma^k}(\Gamma_k)$ сходятся к $(\lambda+1)I : \overset{\circ}{H}{}^1_{\rho^0\sigma^0}(\Omega) \longrightarrow H^{-1}_{\rho^0\sigma^0}(\Omega)$ компактно, в силу компактности каждого из этих операторов (см. конец § 6). Следовательно, выполнено условие теоремы 3.2, т.е. операторы $\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I = \Delta_{\rho^k\sigma^k} - I + (\lambda+1)I$ сходятся к $\Delta_{\rho^0\sigma^0} + \lambda I = \Delta_{\rho^0\sigma^0} - I + (\lambda+1)I$ регулярно, что, с учетом вышеупомянутой фредгольмовости с нулевым индексом этих операторов, позволяет воспользоваться теоремой 3.3, а, значит, последовательность $\Delta_{\rho^k\sigma^k} + \lambda I$ устойчиво сходится к $\Delta_{\rho^0\sigma^0} + \lambda I$ при $k \to \infty$ и $\lambda \in \mathfrak{R}(\Delta_{\rho^0\sigma^0})$.

Совокупность этих фактов показывает, что выполнено условие теоремы 3.1, следовательно, имеет место следующий итоговый результат.

Теорема 7.2. *Пусть выполняются условия* (4.1), (4.2) *и* $h(\Gamma_k) \longrightarrow 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда*

(i) *для любого* $\lambda_0 \in \Lambda_0$ *найдется последовательность* $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, *сходящаяся к* λ_0;

(ii) *если последовательность* $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, *имеет конечный предел* λ_0 *при* $k \to \infty$, *то* $\lambda_0 \in \Lambda_0$.

Конечно, в случае периодических сеток получается более полная картина поведения спектров Λ_k вплоть до совпадения кратностей. Подробности можно найти, например, в [3–5, 8]. Столь полное описание в рассматриваемом случае пока не получено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследрваний, грант 01–01–00417.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. — Тарту: Из-во Тартуск. ун-та, 1976.
2. *Вайникко Г. М.* Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. — Тарту: Из-во Тартуск. ун-та, 1970.
3. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
4. *Жиков В. В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 8. — С. 1109–1147.
5. *Жиков В. В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. — 2002. — *66*, № 2. — С. 81–148.
6. *Завгородний М. Г., Покорный Ю. В.* О спектре краевых задач второго порядка на пространственных сетях// Успехи мат. наук. — 1989. — *44*, № 4. — С. 220–221.
7. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. *Комаров А. В., Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О спектре равномерной сетки из струн// Изв. ВУЗов. Мат. — 2000. — *4*. — С. 23–27.
9. *Куляба В. В., Пенкин О. М.* Неравенство Пуанкаре на стратифицированных множествах// Докл. РАН. — 2002. — *386*, № 4. — С. 453–456.
10. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей// Труды семинара им. И. Г. Петровского.— *18*. — С. 3–78.
11. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах// Дифф. уравнения. — 1998. — *34*, № 8. — С. 1107–1113.
12. *Friedman A.* Partial Differential Equations. — Holt: Rinehart and Winston, 1969.
13. *Nicaise S., Penkin O.* Relationship between the lower frequency spectrum of plates and networks of beams// Math. Meth. Appl. Sci. — 2000. — *23*. — С. 1389–1399.
14. *Nicaise S., Penkin O.* Fundamental inequalities on firmly stratified sets and some applications// JIPAM. — 2003. — *4*, № 1, article 9.
15. *Penkin O.* About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions// В кн.: *Ali Mehmeti F., von Belov J., Nicaise S. (eds.)* Partial differential equations on multistructures. — Marcel Dekker, 2001. — С. 183–191.

А. В. Комаров
Воронежский государственный университет
E-mail: ttcatt@mail.ru

О. М. Пенкин
Воронежский государственный университет
E-mail: penkin@comch.ru

Современная математика и ее приложения. Том 16 (2004). С. 22–46

УДК 517.958.2

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИИ НЕОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2004 г. **А. С. КРАВЧУК**

Аннотация. Рассматриваются задачи идентификации и методы их решения, возникающие в теории упругости; в частности, рассматриваются методы импезантной и дифракционной томографии. Также изучаются некоторые задачи, важные для практики.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Задача идентификации распределений деформационных и/или жесткостных характеристик материала по обьему относится к числу актуальных и быстро развивающихся направлений механики деформируемого твердого тела. Актуальность проблемы обусловлена в первую очередь тем, что измерить значения таких параметров, как модули упругости внутри области, параметров геометрии дефектов непосредственно, без разрушения материала или изделия, очевидно, нельзя. Во-вторых, в процессе работы, при наложении постоянных (статических) или переменных во времени внешних воздействий свойства материала меняются — меняются модули упругости, пределы прочности и пластичности, меняется граница вследствие износа и т.д. Кроме того, наступает усталость материала, сопровождаемая появлением трещин внутри области (конструкции), наличие которых определить визуально также нельзя. Следует упомянуть также то обстоятельство, что в технологических процессах изготовления композиционных материалов, процессах поверхностного упрочнения очень сложно, а зачастую и невозможно контролировать результат — распределение компонентов композита в области, толщину и модули упругости упрочненного слоя и т.д.

Естественно, что определенную информацию можно получить путем изготовления образцов с помощью их вырезания из обьема и последующих испытаний традиционными средствами. Однако хорошо известно, что такая методика может приводить к существенному изменению свойств извлеченного (вырезанного) образца по сравнению со свойствами соответствующей подобласти в неразрушенном материале. Существуют ситуации, когда операция вырезания образцов в принципе невозможна — это относится к задаче определения свойств биотканей «vivo», а также к контролю качества уникальных изделий или сплошному (не выборочному) контролю качества изделий в поточном производстве.

Еще одна техническая и весьма актуальная проблема поставлена развитием современной микротехники и микромеханики, когда речь идет об определении тензора модулей упругости и других механических и геометрических характеристик изделий и материалов, характерные размеры которых находятся в микронном диапазоне.

Все сказанное позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемая проблема идентификации деформационных свойств и топологии материалов и изделий неразрушающими методами заслуживает самого пристального внимания. В настоящем обзоре сделана попытка изложить основные идеи и основные тенденции в развитии современной теории и методов идентификации в механике деформируемого твердого тела, дать описание наиболее важных задач, возникающих здесь.

Тип задач определяется в первую очередь используемыми техническими средствами и методами диагностики — характером внешних воздействий, типом измеряемых параметров, средствами сбора и методами обработки измеренной информации. Главная цель обзора — рассмотрение математических моделей диагностики, причем термин «диагностика» как раз и подразумевает методы и средства идентификации механических и геометрических параметров конструкции материала или изделия. Модели диагностики содержат два блока — блок решения прямых задач и блок идентификации, многократно использующий результаты решения прямых задач. Как правило (и это будет видно из дальнейшего), задачи идентификации являются нелинейными, и поэтому для их решения применяются итерационные методы — как правило, это метод Ньютона и его различные модификации.

Математические модели диагностики (идентификации) изучаются, как известно, достаточно длительное время под названием «обратные задачи математической физики» [1, 8, 18, 30]. По постановке и методам исследования и решения обратные задачи можно разделить на два связанных друг с другом класса — обратные коэффициентные задачи и задачи идентификации источников. В последних речь идет о локализации внутренних воздействий на структуру (типа источника землетрясения или источников электрического потенциала в мозге или на поверхности эпикарда).

В обратных коэффициентных задачах речь идет об определении коэффициентов уравнений или, в более общем случае, об определении операторов, описывающих реакцию системы на внешние воздействия. Именно эти задачи являются предметом настоящего обзора.

Главной особенностью обратных задач является, как хорошо известно [30], их некорректность, проявляющаяся в сильной зависимости идентифицируемых параметров от малых изменений величин, доступных измерениям в эксперименте. Проблема некорректности решается с использованием различных методов регуляризации, описание которых можно найти в [1, 8, 18, 30]. В настоящей работе эти методы анализироваться не будут, однако некоторые конкретные результаты, существенные для решения задач идентификации параметров твердых деформируемых тел, будут сформулированы.

Отметим, что существует один важный для приложений вариант, когда задача идентификации приводится к линейной. Это известная задача Радона о восстановлении (реконструкции) функции в области по заданным значениям интегралов от этой функции по всевозможным многообразиям, размерность которых меньше размерности исходной области. В частности, если речь идет о реконструкции функций в области на плоскости, то задаются интегралы по отрезкам прямых, пересекающим область по всем возможным направлениям для всех точек области. Если необходимо восстановить функцию на сфере, то необходимо задать значения интегралов по всем кругам на сфере.

Оригинальные результаты Радона изложены в [49], опубликованной еще в 1917 году. Перевод этой статьи на русский язык можно найти в [5]. Многочисленные и далеко идущие обобщения задачи и метода Радона имеются в [4, 5].

Задачи идентификации можно классифицировать по моделям поведения (определяющим соотношениям) материала. Проблема выбора структуры определяющих соотношений является критической, поскольку заранее, до проведения экспериментов, неизвестно, является ли материал упругим или неупругим, имеются ли внутренние дефекты и т.д. Неудачный выбор модели поведения материала для обработки результатов экспериментов с целью идентификации параметров может привести к ситуации, когда результаты обработки будут описывать данные уже проведенных экспериментов с высокой степенью точности, однако при переходе к реальной конструкции и реальным условиям эксплуатации теоретический прогноз поведения конструкции будет провальным.

Отметим, что в механике деформируемого твердого тела известен только один достаточно общий метод задания структуры определяющих соотношений, позволяющий строить модели поведения практически любых твердых деформируемых тел. Этот метод предложен А. А. Ильюшиным в [9] под названием «метод СН-ЭВМ» и опирается на гипотезу о возможности адекватного описания механического (термомеханического) поведения твердых деформируемых тел конечным набором функционалов и на гипотезу о возможности экспериментального определения множеств реализаций этих функционалов на различных, но заданных классах траекторий деформирования или нагружения — прямолинейных (простого деформирования или пропорционального нагружения), малой кривизны, с изломом и т.д. Больших технических приложений данный метод пока не получил и только сейчас, когда начинают выявляться его связи с современными методами и алгоритмами параметрической идентификации [34], намечаются серьезные перспективы его применения на практике.

Метод А. А. Ильюшина был обобщен на задачи линейной и нелинейной вязкоупругости в докторской диссертации Б. Е. Победри.

Структура настоящей работы следующая. § 1 — введение в проблематику. В § 2 выявляются основные идеи и типичные проблемы на модельной задаче об идентификации параметров дискретной стержневой системы. В § 3 рассматривается наиболее известная континуальная задача об идентификации скалярного коэффициента в обобщенном уравнении Лапласа. Данная задача, как известно, представляет собой математическую модель одного из методов томографии, получившего название «импедансная томография» и являющегося хорошим полигоном для отработки более сложных векторных и тензорных задач идентификации, возникающих в механике деформируемого твердого тела. В § 4 приведены соответствующие обобщения.

Заключительный § 5 посвящен динамическим методам идентификации. Здесь рассмотрен метод дифракционной томографии, основанный на решении задач рассеяния волн на неоднородностях. Изложен важный для приложений метод геометрической оптики, чаще всего используемый в задачах сейсморазведки.

Далее рассмотрены некоторые важные для практики частные задачи, в том числе задача об идентификации параметров внутренних трещин, методы идентификации вязко-упругих свойств, задачи идентификации параметров материалов и конструкций с нелинейными определяющими соотношениями.

2. Параметрическая идентификация дискретных систем

2.1. Постановка задачи. Эта задача является модельной и иллюстрирует основные аспекты теории и методов. Она была предложена и использована автором в курсе лекций для студентов научно-технического факультета университета Франш-Комте (г. Безансон) [45].

Исследуется система стержней (балок), расположенных в одной плоскости, при условии, что данная система не является механизмом. Пример такой системы показан на рис. 2.1. Состояние каждого стержня характеризуется 6 силовыми параметрами

$$\{\overrightarrow{F^{(i)}}, M^{(i)}; \overrightarrow{F^{(j)}}, M^{(j)}\},$$

где $\vec{F}^{(i)}$, $\vec{F}^{(j)}$ — силы, приложенные к концам i, j стержня (предполагается, что стержни соединены сваркой в концах, а точки соединения (узлы) пронумерованы целыми числами $1, 2, \ldots, NU$), $M^{(i)}$, $M^{(j)}$ — моменты в тех же узлах. Система на рис. 2.1 состоит из 14 стержней, и для нее $NU = 7$. Общее число силовых параметров, при помощи которых составляются уравнения равновесия, равно 84. Из этих уравнений следует, что система из недеформируемых стержней является гиперстатической порядка 24. Для решения прямой задачи об определении внутренних силовых и кинематических параметров вводится гипотеза о деформируемости стержней. Предполагается, что:

а) все стержни, сходящиеся в узле k, испытывают одно и то же перемещение $\vec{U}^{(k)}$;

б) соединения стержней в узлах являются абсолютно жесткими, т.е. углы поворота стержней (прямых сечений или касательных к нейтральным линиям) относительно оси Oz декартовой системы $Oxyz$ совпадают; обозначим угол поворота в узле k через $\theta^{(k)}$.

Эти предположения приводят к появлению 21 новой неизвестной (для системы на рис. 2.1), так что общее количество неизвестных будет равно 45. Разрешающая система уравнений состоит из уравнений равновесия и уравнений состояния для каждого стержня. В качестве уравнений состояния будем использовать гипотезу о пропорциональности продольной силы в стержне относительному удлинению и гипотезу Бернулли для изгиба. Общее количество полученных таким способом уравнений будет равно 42. Недостающие 3 уравнения следуют из условий закрепления, например, можно предположить, что поступательное смещение и угол поворота в первом узле равны нулю.

Исключая силовые параметры и предполагая, что во всех граничных узлах заданы значения перемещений и углов поворота, приведем эту систему к виду

$$A_\Omega U_\Omega = F, \tag{2.1}$$

где U_Ω — вектор-столбец всех кинематических параметров (перемещений и углов поворота), упорядоченных, например, по возрастанию номеров узлов, F — вектор-столбец, определяемый заданными извне воздействиями на систему; индекс Ω указывает на то, что неизвестные в системе относятся к внутренним узлам. Очевидно, что в рассматриваемом примере $\dim U = 9$, $\dim F = 9$, $\dim A = 9 \times 9$.

Положительная определенность матрицы A, обеспечивающая разрешимость и единственность решения прямой задачи, определяется условием положительности энергии деформации, что, в свою очередь, обеспечивается гипотезой о строгой положительности жесткостей всех стержней на растяжение и на изгиб.

Границу Σ исследуемой системы образует совокупность узлов 1, 2, 6, 7, внутреннюю область Ω, во внутренних точках которой измерения по предположению невозможны, образуют узлы 3, 4, 5.

Задача диагностики заключается в том, чтобы, измерив перемещения и соответствующие им усилия на границе, найти механические характеристики системы (жесткости на растяжение и на изгиб) внутри области и топологию — расположение внутренних узлов.

2.2. Идентификация. Отметим, прежде всего, некоторые особенности задачи идентификации. Во-первых, в рассматриваемой постановке внутренняя структура предполагается заданной в том смысле, что известно количество внутренних стержней и способ их соединения.

Второе важное замечание, относящееся к разрешимости задачи идентификации, заключается в том, что один эксперимент, вообще говоря, недостаточен для решения. В самом деле, в одном эксперименте можно задать 12 кинематических параметров и измерить соответствующие им 12 силовых. Поскольку система по предположению линейна, то связь между силовыми и кинематическим параметрами определяется матрицей 12×12; даже в случае учета условий взаимности ее независимые элементы содержат 78 независимых коэффициентов, которые являются функциями идентифицируемых параметров; количество этих параметров при учете только внутренних стержней будет равно 26.

Следовательно, возникает проблема выбора и проведения серии независимых экспериментов, результаты которых позволят решить поставленную задачу идентификации.

С этой целью выберем эксперименты, в которых поочередно в каждом граничном узле будем задавать единичное перемещение в направлении оси Ox, оси Oy и единичный угол поворота, оставляя все остальные узлы жестко закрепленными. Очевидно, что в евклидовом пространстве R^{12} такая система образует декартов базис. По этой причине соответствующие эксперименты назовем базисными.

Для математической формулировки задачи идентификации введем вектор перемещений граничных узлов $U_\Sigma^{(l)}$, вектор усилий $F_\Sigma^{(l)}$ в этих же узлах и матрицу A_Σ, связывающую эти векторы:

$$A_\Sigma U_\Sigma^{(l)} = F_\Sigma^{(l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, NEX, \quad \dim U_\Sigma = \dim F_\Sigma = NS = 12. \tag{2.2}$$

Верхний индекс (l) в соотношениях (2.2) указывает номер базисного эксперимента: $l = 1, 2, \ldots, NEX$; максимально возможное число этих экспериментов без учета соотношений взаимности равно NS^2.

Абстрактная формулировка задачи идентификации, принадлежащая А. Кальдерону [12], такова: имея отображение

$$U_\Sigma \longmapsto F_\Sigma, \tag{2.3}$$

найти параметры, характеризующие внутреннюю структуру диагностируемой системы. Подчеркнем, что в отображении (2.3) фигурируют данные, измеренные во всех базисных экспериментах.

Начиная с этого момента, необходимо зафиксировать набор параметров, подлежащих идентификации. Для системы на рис. 2.1 будем идентифицировать:

– координаты внутренних узлов (в количестве 6),

– упругие характеристики внутренних стержней — жесткость на растяжение R_t и жесткость на изгиб R_b; количество этих параметров равно 20.

Таким образом, полное число идентифицируемых параметров равно 26. Через эти параметры выражаются элементы матрицы A_Ω в системе уравнений (2.1). Если систему (2.1) рассматривать как систему уравнений относительно уравнений состояния U_Ω и относительно идентифицируемых параметров, то она будет, во-первых, незамкнутой, во-вторых, нелинейной.

Дополнительная информация, достаточная для решения задачи идентификации, содержится, как уже отмечалось, в отображении (2.3). Для формулировки алгоритма решения введем вектор X идентифицируемых параметров, так что система (2.1) будет иметь вид

$$A_\Omega(X) U_\Omega = F(X). \tag{2.4}$$

Ниже для простоты будем пренебрегать зависимостью правой части уравнения (2.4) от X (дать соответствующее обобщение на случай $F = F(X)$ несложно).

Один из наиболее употребительных алгоритмов идентификации формулируется следующим образом.

а) Задается начальное (нулевое) приближение вектора идентифицируемых параметров

$$X = X^{(0)}, \tag{2.5}$$

и вычисляются элементы матрицы A_Ω в нулевом приближении

$$A_\Omega^{(0)} = A_\Omega(X^{(0)}). \tag{2.6}$$

б) Решается система уравнений

$$A_\Omega^{(0)} U_\Omega^{(0,i)} = F^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, NEX, \tag{2.7}$$

относительно параметров состояния $U_\Omega^{(0,i)}$ для всех входных данных, извлекаемых из всех базисных экспериментов.

в) С использованием формулы (2.2) вычисляются усилия $F_\Sigma^{(0,i)}$, отвечающие кинематическим параметрам $U_\Omega^{(0,i)}$, и сравниваются с измеренными усилиями вэксперименте по некоторой норме:

$$\delta = \sum_i \|F_\Sigma^{(0,i)} - F_\Sigma^{(V,i)}\|, \tag{2.8}$$

где индекс V указывает на то, что соответствующая величина измерена в эксперименте.

Если $\delta \leqslant \varepsilon$, где ε — заданная точность идентификации, то вычисления заканчиваются; если же $\delta > \varepsilon$, то полагаем

$$X = X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X \tag{2.9}$$

и переходим к вычислению приращения ΔX; верхний индекс 1 здесь и ниже указывает, что соответствующая величина относится к первому приближению.

г) Вычисления приращения ΔX связаны с процедурой линеаризации в соотношениях (2.1) и (2.2), что и обьясняет название: метод Ньютона или квази-ньютоновский метод. Имеем

$$\begin{gathered} A_\Omega(X^{(1)}) U_\Omega^{(1,i)} = A_\Omega(X^{(0)} + \Delta X)[U_\Omega^{(0,i)} + \Delta U_\Omega^{(i)}] \approx \\ \approx A_\Omega(X^{(0)}) U_\Omega^{(0,i)} + A_\Omega(X^{(0)}) \Delta U_\Omega^{(i)} + (D_\Omega^{(0)} \cdot \Delta X) U_\Omega^{(0,i)}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где матрица $D_\Omega^{(0)}$ определяется по формуле

$$D_\Omega^{(0)} = \frac{\partial A_\Omega}{\partial X}\bigg|_{X = X^{(0)}}. \tag{2.11}$$

Аналогичная операция производится для уравнения (2.2):

$$\begin{gathered} (A_\Sigma(X^{(0)}) + \Delta X)(U^{(i,0)} + \Delta U^{(i)}) \approx \\ \approx A_\Sigma^{(0)} U^{(i,0)} + A_\Sigma^{(0)} \Delta U^{(i)} + (D_\Sigma^{(0)} \cdot \Delta X) U^{(i,0)} = F_\Sigma^{(i,0)} + \Delta F_\Sigma^{(i)}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

где

$$D_\Sigma^{(0)} = \frac{\partial A_\Sigma}{\partial X}\bigg|_{X = X^{(0)}}. \tag{2.13}$$

Подчеркнем, что в уравнении (2.12) фигурирует вектор кинематических параметров, в том числе в граничных узлах; очевидно, что в граничных узлах $\Delta U^{(i)} = 0$.

д) Уравнения (2.10) служат для того, чтобы исключить переменные состояния $\Delta U_\Omega^{(i)}$, т.е. выразить их через искомые приращения ΔX:

$$\Delta U_\Omega^{(i)} = \Delta U_\Omega^{(i)}(\Delta X) = -A_\Omega^{(0)-1} \big[\widetilde{D}_\Omega^{(0)}(U^{(i,0)})\big] \Delta X. \tag{2.14}$$

При построении данного решения использовано то обстоятельство, что

$$F_{(V,i)} = A_\Omega^{(0)} U_\Omega^{(0,i)}. \tag{2.15}$$

Зависимость $\Delta U_\Omega^{(i)}(\Delta X)$ является, очевидно, линейной.

е) Используется выражение (2.15) для того, чтобы найти невязку усилий на границе в соответствии с формулой (2.12):

$$\Delta F_\Sigma^{(i)} = A_\Sigma^{(0)} \Delta U^{(i)}(\Delta X) + (D_\Sigma^{(0)} \cdot \Delta X) U^{(i,0)}, \tag{2.16}$$

где

$$\Delta F_\Sigma^{(i)} = F_\Sigma^{(i,V)} - F_\Sigma^{(i,0)}. \tag{2.17}$$

Система уравнений (2.16), записанная для всех базисных экспериментов, представляет собой линейную и в общем случае переопределенную систему уравнений для нахождения приращений ΔX, по которым далее вычисляется первое приближение для значений идентифицируемых параметров.

ж) Решается система (2.16) методом наименьших квадратов. Для компактной записи решения перепишем эту систему в виде:

$$P^{(i)} \Delta X = \Delta F_\Sigma^{(i)}, \tag{2.18}$$

где $P^{(i)}$ — прямоугольная матрица размера $NS \times x \dim X$; представление всегда возможно, ввиду линейности оператора в правой части системы (2.16).

Введем матрицу $P = (P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(NEXP)})^T$ и вектор $\Delta F = (\Delta F^{(1)}, \Delta F^{(2)}, \ldots, \Delta F^{(N)})^T$. Тогда систему уравнений, соответствующую всем базисным экспериментам, можно записать следующим образом:

$$P\Delta X = \Delta F, \tag{2.19}$$

а ее решение по методу наименьших квадратов в виде

$$\Delta X = (P^T P)^{-1}(P^T \Delta F). \tag{2.20}$$

з) После вычисления первого приближения по формуле

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \beta \Delta X, \tag{2.21}$$

в которой скаляр β выбирается из условия наивысшей скорости сходимости (обычно это делается экспериментально), происходит переход к этапу б) описанного алгоритма с заменой $X^{(0)}$ на $X^{(1)}$.

Завершая этот параграф, заметим, что известная двойственность формулировок прямых задач в кинематических или силовых переменных позволяет сформулировать альтернативный вариант алгоритма, когда итерации начинаются с решения задач относительно силовых переменных, а коррекция идентифицируемых параметров производится путем минимизации невязок кинематических переменных на границе. Очевидно, что возможен также смешанный вариант с одновременным использованием переменных силового и кинематического типа.

3. Импедансная томография

3.1. Постановка задачи. Пусть теперь состояние системы описывается скалярны дифференциальным уравнением второго порядка

$$-\operatorname{div}[\sigma(x) \operatorname{grad} \varphi(x)] \equiv -\nabla \cdot [\sigma(x)\nabla\varphi(x)] = f(x), \tag{3.1}$$

где $\sigma(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ — функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω — открытая ограниченная область с границей $\Sigma = \partial\Omega$. Примером физической системы, состояние которой подчиняется уравнению (3.1), является область, заполненная электропроводящим материалом, который характеризуется электрической проводимостью $\sigma(x)$. В области распределены источники электрического потенциала с плотностью $f(x)$, на границе Σ задается распределение электрического потенциала относительно некоторой заземленной точки (или куска поверхности) или распределение электрического тока через границу. Плотность тока $\vec{j}$ в области определяется через потенциал φ в соответствии с законом Ома:

$$\vec{j}(x) = \sigma(x)\nabla\varphi(x). \tag{3.2}$$

Обратная задача для уравнения (3.1) заключается в том, чтобы найти распределение проводимости в области Ω на основе результатов измерений потенциалов и токов на границе. К данной задаче сводится математическая модель одного из видов биомедицинской диагностики — так называемой импедансной или потенциальной томографии см., например, [48].

Хорошо известно, что все основные свойства уравнения (3.1) обобщаются на системы дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа (если только $\sigma(x) \geqslant c_0 = \mathrm{const} > 0$), к которым относятся, в частности, уравнения линейной теории упругости. Следовательно, прежде чем переходить к обратным задачам для уравнений механики деформируемого твердого тела, имеет смысл изучить основные особенности обратных задач для уравнения (3.1). Более того, некоторые частные задачи теории упругости могут быть приведены к уравнению вида (3.1), например, задача о кручении неоднородных стержней в постановке Сен-Венана.

3.2. Математическая модель. Предположим, что в опыте измерены распределение φ_Σ электрического потенциала на поверхности Σ тела Ω и соответствующее распределение $j_{\Sigma\nu}$ электрического тока через ту же поверхность Σ. Граничные условия, которые можно добавить к уравнению (3.1), имеют вид

$$\varphi \mid_\Sigma = \varphi_\Sigma, \tag{3.3}$$

$$\sigma\nabla\varphi \cdot \nu \mid_\Sigma = j_{\Sigma\nu}, \tag{3.4}$$

где ν — вектор единичной внешней нормали к поверхности Σ (для упрощения записи «стрелка» в обозначении векторов x и ν опускается).

Математическая формулировка задач импедансной томографии (модель) заключается в том, чтобы найти электрическую проводимость $\sigma(x)$ в области Ω, используя уравнение (3.1) и граничные условия (3.3)–(3.4).

Поскольку, наряду с функцией $\sigma(x)$, необходимо находить распределение электрического потенциала $\varphi(x)$ в области Ω, то задача является нелинейной, что имело место в предыдущем случае, и сформулированная задача импедансной томографии, вообще говоря, не имеет решения, поскольку для определения двух функций $\sigma(x)$, $\varphi(x)$ трех переменных имеются всего две функции φ_Σ, $j_{\Sigma\nu}$ от двух независимых переменных, задающих двумерное многообразие Σ.

Следовательно, для разрешимости задачи необходимо использовать информацию, извлекаемую из многих независимых экспериментов. Выбор базиса в множестве возможных экспериментов представляет собой трудную задачу, поскольку необходимо знать структуру и свойства пространств функций, заданных на многообразии Σ. Известно, что для эллиптического оператора, определяемого левой частью уравнения (3.1), решения содержатся в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega)$, множество следов элементов которого на границе Σ плотно в сепарабельном пространстве $L^2(\Sigma)$ (см. [19]). Таким образом, выбор счетного базиса всегда возможен. Построив некоторый базис и ограничившись конечным его подмножеством, можно рассчитывать на успех в решении задачи идентификации. Эти соображения впервые были высказаны в [12], однако оценок в терминах норм в упомянутых пространствах пока нет. Обзор публикаций по проблеме существования и единственности решения дан в монографии [13].

Эксперименты, отвечающие указанному выше подмножеству счетного базиса, будем называть базисными.

3.3. Численный алгоритм. Построение конкретных решений задач импедансной томографии при помощи компьютера требует перехода к конечномерным аппроксимациям, т.е. дискретизации. Для областей сложной формы чаще всего используется метод конечных элементов. В ряде случаев более выгодным оказывается использование метода конечных разностей или метода разложения в ряды. При любой дискретизации получают систему линейных (по отношению к переменной состояния φ) уравнений вида

$$A(\sigma)\varphi = b, \tag{3.5}$$

в которой σ — вектор идентифицируемых параметров, вектор b правой части определяется граничными значениями потенциала φ и, вообще говоря, некоторыми из компонент вектора идентифицируемых параметров σ.

В качестве примера приведем дискретизацию уравнения (3.1) для двумерной области в виде прямоугольника по методу конечных разностей:

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2h_y^2}(\sigma_{ij}+\sigma_{i,j-1})\varphi_{i,j-1}-\frac{1}{2h_x^2}(\sigma_{ij}+\sigma_{i-1,j})\varphi_{i-1,j}+\\
+\left[\frac{1}{2h_y^2}(\sigma_{i,j-1}+2\sigma_{ij}+\sigma_{i,j+1})+\frac{1}{2h_y^2}(\sigma_{i-1,j}+2\sigma_{ij}+\sigma_{i+1,,j})\right]\varphi_{ij}-\\
-\frac{1}{2h_x^2}(\sigma_{ij}+\sigma_{i+1,j})\varphi_{i+1,j}-\frac{1}{2h_y^2}(\sigma_{ij}+\sigma_{i,j+1})\varphi_{i,j+1}=b_{ij},
\end{gathered} \tag{3.6}$$

где σ_{ij}, φ_{ij} — значения искомых функций $\sigma(x,y)$, $\varphi(x,y)$ в узле $(x = ih_x, y = jh_y)$ конечно разностной сетки, h_x, h_y — шаги сетки, предполагаемые постоянными; $i = 1,2,\ldots,N_x$, $j = 1,2,\ldots,N_y$. Значения $i = 1$, $j = 1$, $i = N_x$, $j = N_y$ индексов соответствуют граничным узлам, поэтому в системе номера узлов принимают значения $i = 2,3,\ldots,N_x-1$, $j = 2,3,\ldots,N_y-1$.

Нетрудно видеть, что система (3.6) представляет собой полный аналог полученной ранее системы (2.1) с заменой $X = \sigma$. Свойства данной системы исследовались во многих работах (см., например, [14,15,41,44,54] и многие другие). В [15] установлено, в частности, что:

1) для достижения приемлемой точности необходимо использовать несколько сот итераций;

2) число итераций можно значительно сократить, иногда на порядок и более, если в описанном выше итерационном процессе использовать дополнительную априорную информацию: например, учесть границы изменения идентифицируемых параметров, учесть топологию областей неоднородностей и т.д.;

3) некорректность проявляется на этапе реализации метода наименьших квадратов, т.е. при вычислении приращений $\Delta X = (P^TP)^{-1}(P^T\Delta F)$ по формуле (2.19), поэтому именно на этом этапе необходимо применять регуляризацию;

4) при небольшом количестве параметров работает простейший способ регуляризации, состоящий в добавлении к диагональным элементам матрицы (P^TP) малых чисел (регуляризация нулевого порядка); если же число идентифицируемых параметров превышает 100, то необходимо использовать регуляризацию первого порядка — добавление к матрице системы некоторых аппроксимаций первых производных.

4. Вариационный метод

Вариационный метод решения задач импедансной томографии был предложен впервые в [56], а в задаче идентификации упругих модулей был реализован в [40]. Приведем описание метода для основной задачи импедансной компьютерной томографии (КТ) в континуальной форме.

Идея восстановления внутренней структуры с использованием вариационных принципов основана на вариационных постановках прямых задач об определении токов и потенциалов в области по заданным граничным условиям из обобщенного уравнения Пуассона

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \phi) = 0.$$

Из всего многообразия вариационных принципов, которые получаются друг из друга преобразованием Фридрихса (в более общих ситуациях — Юнга—Фенхеля—Моро (см. [16])), для решения обратных коэффициентных задач наиболее удобным оказался следующий принцип: найти минимум функционала

$$J(\vec{j}, \phi) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\vec{j} - \sigma \vec{\nabla} \phi|^2 \, d\Omega \tag{4.1}$$

на множестве функций, удовлетворяющих ограничениям

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \tag{4.2}$$

$$\phi \Big|_{\Sigma} = \phi_{\Sigma}, \tag{4.3}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{\nu} \Big|_{\Sigma} = j_{\Sigma\nu}. \tag{4.4}$$

Применяя стандартную технику вариационного исчисления — внося ограничения (4.2)–(4.4) в функционал (4.1) с помощью множителей Лагранжа и дифференцируя получившийся функционал по всем аргументам по произвольным направлениям, получим определяющее уравнение

$$\vec{j} = \sigma \vec{\nabla} \phi, \tag{4.5}$$

подстановка которого в ограничение (4.2) приводит к обобщенному уравнению Лапласа (3.1), для которого можно получить стандартные прямые задачи путем добавления граничных условий.

Если теперь предположить, что проводимость σ, наряду с потенциалом ϕ, является основной неизвестной, то, как уже отмечалось, необходимо иметь множество граничных условий, определяемых одной или несколькими новыми независимыми переменными, которые могут изменяться непрерывно или принимать дискретное множество значений. Если функция σ является непрерывной или кусочно-непрерывной (с конечным числом поверхностей разрыва) функцией пространственных координат, по физическому смыслу задачи подчиняющейся ограничениям

$$0 < \sigma_{\min} = \text{const} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{\max} = \text{const}, \tag{4.6}$$

то применение теорем функционального анализа о структуре пространств с нормой

$$\|\phi\| = \left(\int\limits_{\Omega} \sigma |\vec{\nabla} \phi|^2 d\Omega \right)^{1/2} \tag{4.7}$$

позволяет сделать вывод о том, что для реконструкции σ необходимо провести счетное множество экспериментов.

Пусть количество экспериментов конечно и равно N; экспериментальные данные представляют собой совокупность соответствующих друг другу пар граничных значений токов и потенциалов $(\sigma_{\Sigma}^{(i)},\ j_{\Sigma\nu}^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда приближенная постановка задачи об определении проводимости $\sigma(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega$, по этим граничным данным заключается в минимизации функционала (4.1) при ограничениях (4.2)–(4.4), причем в граничные условия (4.3)–(4.4) поочередно подставляются пары $(\sigma_{\Sigma}^{(i)},\ j_{\Sigma\nu}^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Отметим, что минимизация производится в смысле минимизации невязки по многим парам граничных данных (как будет указано ниже).

Существует немало работ по обоснованию такой постановки, однако в настоящее время исчерпывающего решения данной проблемы нет. Проведены численные эксперименты, результаты которых позволяют утверждать, что приведенная постановка имеет смысл; она дает решения, близкие к точным, при выборе надлежащих алгоритмов дискретизации и решения дискретных задач.

Рассмотрим подробнее один из таких алгоритмов, получивший название метода переменных направлений («alternating direction implicit method» в англоязычной литературе, сокращенно ADI).

1) Задается распределение проводимости в нулевом приближении $\sigma = \sigma^0$, и строится решение $2N$ задач минимизации функционала (4.1) — N задач по аргументу $\vec{j}$ с ограничениями (4.2), (4.4) при $j_{\Sigma\nu} = j^{(i)}_{\Sigma\nu}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и N задач минимизации по аргументу ϕ с ограничениями (4.3) при $\phi_\Sigma = \phi^{(i)}_\Sigma$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Нетрудно видеть, что первая серия задач — это задачи Неймана для уравнения

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma^{(0)} 0 \vec{\nabla}\phi) = 0, \tag{4.8}$$

вторая серия — это задачи Дирихле для того же уравнения.

2) Обозначим решения первой группы через $\phi^{(i)}_{NE}$, второй — через $\phi^{(i)}_{DI}$ и просуммируем функционалы вида (4.1) по всем значениям индекса i; результат запишем в виде

$$J\big(\{\vec{j}^{(i)}_{NE}\}^N_{i=1}, \{\phi^{(i)}_{DI}\}^N_{i=1}; \sigma\big) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\vec{j}^{(i)}_{NE} - \sigma\vec{\nabla}\phi^{(i)}_{DI}|^2 \, d\Omega, \tag{4.9}$$

где $\vec{j}^{(i)}_{NE} = \sigma^0 \vec{\nabla}\phi^{(i)}_{NE}$.

3) Найдем решение задачи минимизации функционала (4.9) по аргументу σ; обозначим это решение через σ^1 и перейдем к этапу 1) с заменой $\sigma^0 \leftarrow \sigma^1$.

Заметим, что задача минимизации функционала (4.1) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J(\vec{j}, \phi; \sigma) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\sigma^{-1/2}\vec{j} - \sigma^{1/2}\vec{\nabla}\phi|^2 \, d\Omega, \tag{4.10}$$

который был предложен Векслером и оказался удобным как для теоретических исследований, так и для численного решения конкретных задач.

5. Задача идентификации упругих модулей

Рассмотренные выше постановки задач идентификации и методы их решения переносятся на системы дифференциальных уравнений с частными производными. Рассмотрим одну из важнейших для технических приложений систем — систему уравнений линейной теории упругости неоднородных сред.

Пусть линейно упругое тело занимает область Ω с границей Σ и характеризуется тензором модулей упругости ${}^4\hat{a} ={}^4 \hat{a}(\vec{x})$; «крышка» здесь и ниже указывает, что соответствующая величина является тензором; индекс перед обозначением данной величины указывает ранг тензора. Тензоры второго ранга снабжены «крышкой»без индекса 2; в тензорах первого ранга векторы обозначаются стрелкой, как и ранее всюду в этой статье.

Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ — поле перемещений частиц области Ω, тогда

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T) \tag{5.1}$$

будет тензором деформаций Коши, связанным с тензором напряжений σ законом Гука

$$\hat{\sigma} ={}^4 \hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}; \tag{5.2}$$

здесь «$\cdot\cdot$» означает свертку тензоров $\hat{a}$ и $\hat{\varepsilon}$. В декартовой системе координат

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad \varepsilon_{kl} = \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial u_k}\right). \tag{5.3}$$

Предположим, что на упругое тело действуют или только поверхностные нагрузки $\vec{P}_\Sigma$, или же на всей поверхности задаются перемещения $(\vec{u})_\Sigma$. Тогда прямая задача об определении поля перемещений $\vec{u}$ в области Ω вместе с полем перемещений деформаций $\hat{\varepsilon}$ и напряжений $\hat{\sigma}$ сводится к решению уравнений равновесия

$$\vec{\nabla} \cdot ({}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})) = 0 \tag{5.4}$$

с граничными условиями типа Дирихле

$$\vec{u}\,\Big|_\Sigma = \vec{u}_\Sigma \tag{5.5}$$

или с граничными условиями типа Неймана

$$({}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})) \cdot \vec{\nu}\Big|_\Sigma = \vec{P}_\Sigma. \tag{5.6}$$

При решении задач теории упругости рассматриваются другие типы граничных условий: смешанные, контактного типа и т.д.; для наших целей можно ограничиться условиями вида (5.5)–(5.6).

Обратная коэффициентная задача теории упругости или, как ее еще называют, задача идентификации упругих модулей заключается в том, чтобы найти тензор модулей упругости ${}^4\hat{a}$, зная пары соответствующих друг другу граничных данных $\{\vec{u}^{(i)}\}_{i=1}^N$, $\{\vec{P}\}_{i=1}^N$. Как и в задачах импедансной томографии, при выполнении некоторых физически обоснованных предположений типа положительной определенности тензора упругих модулей, ограниченности или непрерывности входных данных и достаточной гладкости границы число независимых пар граничных данных будет счетным.

Поставленная задача, как и предыдущие, является нелинейной, и решение может быть построено итерационными методами, например, методом Ньютона или вариационным методом.

После дискретизации задачи по методу конечных элементов, методу конечных разностей и т.д. формальная структура метода Ньютона ничем не будет отличаться от структуры алгоритма, описание которого было дано в § 2, однако фактическая реализация будет намного сложнее. Как и в задачах импедансной томографии, процесс начинается с решения серии задач типа Дирихле с граничным условием (5.5), после чего коррекция упругих модулей осуществляется из условия минимума невязки вычисленных и измеренных граничных усилий $\vec{P}_\Sigma$.

Отметим одну возможность, кратко упомянутую выше, которая заключается в том, чтобы начинать итерационный процесс с решения N задач Неймана, а не задач Дирихле, в задаче идентификации упругих модулей — с решения задач с граничным условием вида (5.6), а коррекцию искомых коэффициентов производить из условия минимума рассогласования граничных условий типа Дирихле. Очевидно, что в рассмотренном выше вариационном методе граничные условия Дирихле и Неймана равноправны.

Приведем вариант вариационного метода для решения задач идентификации упругих модулей.

Пусть построены решения N задач Дирихле с граничным условием

$$\vec{u}\,\Big|_\Sigma = \vec{u}_\Sigma^{(i)} \tag{5.7}$$

и N задач типа Неймана с граничным условием

$$({}^4\hat{a}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\vec{u}))\cdot\vec{\nu}\,\Big|_\Sigma = \vec{P}_\Sigma, \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{5.8}$$

Обозначим через K_ε множество кинематически допустимых полей деформаций, определяемых по формуле

$$K_\varepsilon = \left\{\hat{\varepsilon} \mid \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T); \exists i, \vec{u}\,\big|_\Sigma = \vec{u}_\Sigma^{(i)}\right\}, \tag{5.9}$$

через K_σ — множество статически допустимых полей деформаций

$$K_\sigma = \big\{\hat{\sigma} \mid \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma} = 0; \exists i, \hat{\sigma}\cdot\vec{\nu}\,\big|_\Sigma = \vec{P}_\Sigma^{(i)}\big\}. \tag{5.10}$$

Вариационная постановка задачи идентификации упругих модулей заключается в нахождении тензоров деформаций, напряжений и модулей упругости, для которых функционал

$$J\big(\{\hat{\varepsilon}^{(i)}\}_{i=1}^N, \{\hat{\sigma}^{(i)}\}_{i=1}^N; {}^4\hat{a}\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\hat{\sigma}^{(i)} - {}^4\hat{a}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}^{(i)}|^2\, d\Omega \tag{5.11}$$

принимает минимальное значение на множестве кинематически допустимых полей деформаций, статически допустимых полей напряжений и симметричных положительно определенных тензоров модулей упругости.

Вместо функционала (5.11) можно (и удобнее) использовать аналог функционала (4.10)

$$\tilde{J}\big(\{\hat{\varepsilon}^{(i)}\}_{i=1}^N, \{\hat{\sigma}^{(i)}\}_{i=1}^N; {}^4\hat{a}\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |({}^4\hat{a})^{-1/2}\cdot\cdot\hat{\sigma}^{(i)} - ({}^4\hat{a})^{1/2}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}^{(i)}|^2\, d\Omega, \tag{5.12}$$

в котором символом $({}^4\hat{a})^{1/2}$ обозначена известная в линейной алгебре операция извлечения квадратного корня из симметричной положительно определенной матрицы (декомпозиция Холесского), а символом $({}^4\hat{a})^{-1/2}$ обозначена операция обращения квадратного корня из матрицы. Очевидно, что задача минимизации функционала (5.11) эквивалентна задаче минимизации функционала (5.12). Преимущество функционала (5.12) заключается в том, что он преобразуется в сумму энергий деформаций и напряжений.

В самом деле, раскрывая в подынтегральном выражении квадрат тензора и используя формулу Грина, устанавливаем, что

$$\tilde{J}(\{\hat{\varepsilon}^{(i)}\}_{i=1}^{N}, \{\hat{\sigma}^{(i)}\}_{i=1}^{N}; {}^4\hat{a}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}[\hat{\sigma}^{(i)} \cdot \cdot ({}^4\hat{a})^{-1} \cdot \cdot \hat{\sigma}^{(i)} +$$

$$+ \hat{\varepsilon}^{(i)} \cdot \cdot {}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}^{(i)}] d\Omega - \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Sigma}\vec{u}_{\Sigma}^{(i)} \cdot \vec{P}_{\Sigma}^{(i)}\, d\Sigma, \tag{5.13}$$

и поскольку последнее слагаемое в полученном функционале от варьируемых функций не зависит, то, стало быть, поставленная задача приводится к минимизации функционала

$$\tilde{J}(\{\hat{\varepsilon}^{(i)}\}_{i=1}^{N}, \{\hat{\sigma}^{(i)}\}_{i=1}^{N}; {}^4\hat{a}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}[\hat{\sigma}^{(i)} \cdot \cdot ({}^4\hat{a})^{-1} \cdot \cdot \hat{\sigma}^{(i)} + \hat{\varepsilon}^{(i)} \cdot \cdot {}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}^{(i)}]\, d\Omega \tag{5.14}$$

при указанных выше ограничениях.

Дальнейшие преобразования используют (эквивалентные) определения модулей жесткости и собственных упругих состояний, введенные в работах [24, 28]; собственным упругим состоянием линейно упругого тела называется тензор второго ранга $\hat{\omega}$, для которого

$${}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\omega} = \lambda\hat{\omega}, \tag{5.15}$$

где λ — скалярная величина.

Как известно, для существования нетривиального решения системы (5.15) необходимо, чтобы определитель данной системы был равен нулю

$$\det[{}^4\hat{a} - \lambda^4\hat{E}] = 0, \tag{5.16}$$

где ${}^4\hat{E}$ — единичный тензор четвертого ранга.

Корни уравнения (5.16) называются модулями жесткости, ниже для них используется обозначение λ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$.

Каждому модулю жесткости соответствует множество собственных упругих состояний, различающихся числовым множителем. Введем ортогональные проекции тензоров напряжений и деформаций на эти множества по формулам

$$\hat{\sigma}_\alpha = {}^4\hat{P}_\alpha \cdot \cdot \hat{\sigma}, \tag{5.17}$$

$$\hat{\varepsilon}_\alpha = {}^4\hat{P}_\alpha \cdot \cdot \hat{\varepsilon}, \tag{5.18}$$

где ${}^4\hat{P}_\alpha$ — оператор ортогонального проектирования (тензор четвертого ранга).

Нетрудно доказать, что плотность упругой энергии равна

$$\Phi = \frac{1}{2}\hat{\sigma} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{6}\lambda_\alpha\varepsilon_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{6}\frac{1}{\lambda_\alpha}\sigma_\alpha^2, \tag{5.19}$$

где

$$\varepsilon_\alpha = (\hat{\varepsilon}_\alpha \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_\alpha)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{6}\varepsilon_{\alpha,ij}\varepsilon_{\alpha,ij}\right)^{1/2}, \tag{5.20}$$

$$\sigma_\alpha = (\hat{\sigma}_\alpha \cdot \cdot \hat{\sigma}_\alpha)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{6}\sigma_{\alpha,ij}\sigma_{\alpha,ij}\right)^{1/2}. \tag{5.21}$$

Следовательно, функционал (5.14) преобразуется к виду:

$$J_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{6}\int[\lambda_\alpha^{-1}\sigma_\alpha^{(i)2} + \lambda_\alpha\varepsilon_\alpha^{(i)2}]\, d\Omega. \tag{5.22}$$

Формула (5.22) позволяет сделать два важных вывода.

1) При реализации итерационного процесса типа ADI на этапе минимизации по искомым коэффициентам при известных тензорах напряжений и деформаций, а вместе с ними и известных проекциях $\hat{\sigma}_\alpha^{(i)}$, $\hat{\varepsilon}_\alpha^{(i)}$ задача минимизации функционала (5.22) имеет точное решение

$$\lambda_\alpha^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_\alpha^{(i)} \cdot \cdot \hat{\sigma}_\alpha^{(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_\alpha^{(i)} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_\alpha^{(i)}\right)^{-1}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 6. \tag{5.23}$$

2) Поскольку в функционале (5.22) фигурируют только 6 модулей жесткости λ_α, то данный метод позволяет определить только эти модули, но не позволяет найти остальные 15 параметров: 12 дистрибуторов жесткости (определение см. в [28]) и три дополнительных параметра, например, углы Эйлера, задающие ориентацию упругого тела относительно лабораторной системы отсчета.

Поскольку для реализации итерационного процесса необходимо вычислять проекции тензоров напряжений и деформаций на подпространства собственных упругих состояний, то описанный вариационный метод будет работать только тогда, когда эти подпространства, определяемые перечисленными выше 15 параметрами, известны. В случае симметрии число этих трех дополнительных параметров уменьшается и равно нулю для изотропных материалов. Последнее обстоятельство объясняется тем, что в изотропном теле возможны только два собственных упругих состояния — всестороннее растяжение-сжатие и девиаторное состояние, при котором изменение объема отсутствует. Для плотности упругой энергии справедлива формула

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)^{-1} \operatorname{tr}(\hat{\sigma})^2 + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{tr}(\hat{\varepsilon})^2\right] + \frac{1}{2}[(2\mu)^{-1}\hat{\sigma}^D \cdot \cdot \hat{\sigma}^D + (2\mu)\hat{\varepsilon}^D \cdot \cdot \hat{\varepsilon}^D], \tag{5.24}$$

где λ и μ — параметры Ламе, являющиеся функциями пространственных координат; $\operatorname{tr}(\hat{\sigma})$ — след тензора (сумма диагональных компонент); $\hat{\sigma}^D$ — девиаторная составляющая тензора, определяемая по формуле

$$\hat{\sigma}^D = \hat{\sigma} - \operatorname{tr}(\hat{\sigma})\hat{E}, \tag{5.25}$$

где $\hat{E}$ — единичный тензор второго ранга. Определения для тензора деформаций аналогичны

$$\hat{\varepsilon}^D = \hat{\varepsilon} - \operatorname{tr}(\hat{\varepsilon})\hat{E}. \tag{5.26}$$

Завершая этот параграф, отметим, что впервые попытка дать систематическое изложение результатов, полученных по проблеме идентификации в теории упругости, была предпринята в [36]. Вариационная теория идентификации и первые численные результаты для трехмерной задачи впервые были получены в [40].

Теоретическое исследование разрешимости и единственности решения обратной задачи теории упругости об определении пространственных распределений упругих модулей в изотропном теле (параметров Ламе) было выполнено в при условии, что отклонения модулей от некоторых постоянных значений в области малы.

6. Динамическая идентификация: ультразвуковая томография

6.1. Введение. Использование динамических экспериментов для целей идентификации является намного более трудной технической задачей, нежели статические (стационарные) опыты и измерения. Однако информация, извлекаемая из результатов динамических испытаний, намного богаче, поскольку появляется дополнительная независимая переменная — время.

Возбуждение динамических процессов в деформируемых телах может осуществляться специальными техническими устройствами, в качестве которых в задачах контроля качества изделий и биомедицинской диагностике используются генераторы ультразвуковых колебаний [21, 25]. В геологоразведке для возбуждения упругих волн в земной коре используют поверхностные и глубинные взрывы [22], а также естественные источники сейсмических волн — землетрясения. Известен также метод возбуждения волн в земной коре при помощи мощных вибраторов на поверхности (см. [2] и библиографию в этой книге).

Для обработки полученной в экспериментах информации используются динамические (волновые) уравнения. Наибольшее количество работ посвящено задачам о распространении гармонических волн, математические модели которых содержат уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = f \tag{6.1}$$

и его различные обобщения.

В технической и биомедицинской диагностике применяются обычно динамические воздействия в виде гармонических волн (пакетов), при этом измеряются либо параметры отраженных волн (эхоскопия) [25], либо параметры прошедших волн (трансмиссонная томография) [11]. Отметим, что

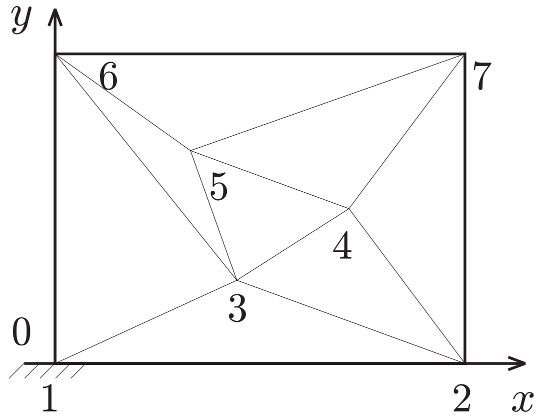

Рис. 1

аппаратура трансмиссионной томографии не вышла из стадии экспериментальных образцов. Эхоскопия позволяет реконструировать топологию внутренней структуры путем регистрации времен прихода волн, отраженных от неоднородностей. В трансмиссионной томографии с регистрацией моментов прохождения волн сквозь обьект реконструируется распределение локальной скорости звука в материале [11, 13]; при этом применяется схема измерений типа Хаунсфилда и Мак-Кормака [48], заимствованная из рентгеновской компьютерной томографии. Если в этой схеме измерять амплитуды волн на входе в обьект и на выходе из него, то можно найти распределение параметров вязкости среды по обьему.

Заметим, что и в эхоскопии, и в трансмиссионной томографии при обработке информации фактически применяется метод геометрической оптики (лучевое приближение) [3] в его простейшем варианте, когда траектории лучей (характеристики) считаются прямолинейными. Метод геометрической оптики в его стандартной форме с учетом криволинейности характеристик наибольшее распространение получил в сейсмологии и геологоразведке [22, 53].

Наиболее сложной является задача дифракционной томографии, когда измеряются параметры всех волн, рассеянных всеми неоднородностями обьекта во всех возможных направлениях.

Рассмотрим кратко математические модели методов ультразвуковой диагностики, основанные на использовании приближения геометрической оптики, и модели дифракционной томографии.

6.2. Аналог модели Радона. К этой задаче сводится модель трансмиссионной томографии, в которой производится «просвечивание» диагностируемого обьекта фокусированным лучом; фокусировка производится либо путем профилирования излучателя, либо путем применения электронных схем фокусировки, т.е. управлением временем задержки срабатывания кольцевых или (в последнее время) точечных излучателей. Для того чтобы иметь возможность контролировать расстояние между излучателем и детектором, диагностируемый обьект помещают в жидкость (обычно это вода с различными добавками, подбираемыми из условия согласования акустических импедансов жидкости и поверхностного слоя диагностируемого обьекта).

Схема сбора информации, заимствованная из рентгеновской компьютерной томографии и известная как схема Хаунсфилда и Мак-Кормака, заключается в использовании вращательного движения системы «излучатель-детектор», причем излучатель и детектор синхронно скользят вдоль направляющих, перпендикулярных вращающейся несущей балке.

Для обработки информации используют две координатные системы: неподвижную Oxy (лабораторную) и подвижную $O\zeta\xi$. Обе системы имеют общее начало в плоскости вращения — точку пересечения оси вращения с плоскостью; положение подвижной системы определяется углом поворота θ.

Принимая в качестве основной характеристики среды коэффициент линейного поглощения α, можно, используя стандартную методику (см., например, [13]), показать, что отношение амплитуды волны $I(\xi,\theta)$ на выходе из обьекта (точнее, на детекторе) к амплитуде на входе дается выражением

$$p(\xi,\theta) = -\ln\left[\frac{I(\xi,\theta)}{I_0}\right] = \int\limits_{-R}^{R} \alpha[x,y]\,d\zeta, \tag{6.2}$$

где R — расстояние излучателя и детектора от начала координат; квадратные скобки означают, что переменные $(x,\, y)$ берутся на луче, т.е.

$$\zeta = x\cos\theta + y\sin\theta, \qquad \xi = -x\sin\theta + y\cos\theta, \tag{6.3}$$

$$x = \zeta\cos\theta - \xi\sin\theta, \qquad y = \zeta\sin\theta + \xi\cos\theta. \tag{6.4}$$

Соотношение (6.2) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции α (стандартная задача Радона, методы решения которой можно найти в [13, 48] и др).

Такая же задача возникает в случае, когда измеряются времена движения луча от источника к детектору по той же схеме, что и в предыдущем методе.

В самом деле, пусть диагностируемый обьект в исследуемом плоском сечении Oxy характеризуется скоростью распространения ультразвуковых волн c:

$$c = c(x, y) = c(\zeta\cos\theta - \xi\sin\theta,\, \zeta\sin\theta + \xi\cos\theta), \tag{6.5}$$

где θ, как и ранее, угол наклона оси $O\zeta$ к оси Ox.

Для вывода разрешающего уравнения введем параметр L — расстояние от излучателя до приемника ультразвука; обозначая время прохождения ультразвуковой волной расстояния L через T_1, находим, что

$$T_1 = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \frac{d\zeta}{c[\vec{x}]}. \tag{6.6}$$

Формула (6.6) выведена в предположении, что подвижная и неподвижная системы координат выбраны так, как описано выше. Следовательно, интегрирование в формуле (6.6) ведется по лучу, отстоящему от оси $O\zeta$ на расстоянии ξ, и, стало быть, $T_1 = T_1(\xi, \theta)$.

Для построения функции, обращающейся в нуль вне диагностируемого обьекта, вычтем из величины T_1 время T_2 прохождения ультразвуковой волной расстояния L в воде при отсутствии биообъекта и получим

$$T_1 - T_2 \equiv q(\xi, \theta) = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{c[\vec{x}]} - \frac{1}{c_0}\right] d\zeta \tag{6.7}$$

где c_0 — скорость ультразвука в воде. Поскольку подынтегральная функция вне биообъекта равна нулю, то проекция q может быть записана в виде

$$q(\xi, \theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{c[\vec{x}]} - \frac{1}{c_0}\right] d\zeta. \tag{6.8}$$

Уравнения (6.7) и (6.8) полностью приспособлены к тому, чтобы для их решения применить хорошо развитые численные и аналитические методы решения задачи Радона.

7. Метод геометрической оптики

Метод геометрической оптики создан для решения задач о распространении волн в слабо неоднородных и слабо анизотропных средах, широко используется в геологоразведке и сейсмологии. Математические модели этих методов представляют собой обобщение преобразования Радона на случай, во-первых, криволинейных траекторий и, во-вторых, на векторные и тензорные поля различной размерности. Первое из упомянутых обобщений и будет рассмотрено в данном параграфе.

Пусть активное воздействие на диагностируемый объект представляет собой некоторую волну, описываемую скалярным волновым уравнением

$$\Delta U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{7.1}$$

в котором функция $U = U(\vec{x}, t)$ может быть давлением в среде, плотностью, изменением объема, электрическим потенциалом и т.д., c — локальная скорость волны, зависящая от координат и являющаяся характеристикой структуры.

Для гармонических волн с частотой ω_0

$$U(\vec{x}, t) = u(\vec{x})\exp(i\omega_0 t). \tag{7.2}$$

Подстановка выражения (7.2) приводит к уравнению Гельмгольца для амплитуды $u(\vec{x})$

$$\Delta u + k^2(\vec{x})u = 0, \tag{7.3}$$

где $k^2 = \omega_0^2/c^2$ — волновое число.

Для построения метода геометрической оптики используется представление решения в виде ряда

$$u(\vec{x}) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\vec{x})}{k_0^m}\right] \exp(ik_0\Psi(\vec{x})), \tag{7.4}$$

где k_0 — некоторое среднее значение волнового числа. Отклонения $|k - k_0|$ предполагаются малыми; точный смысл этого требования выясняется при обосновании метода геометрической оптики. Отметим только, что одним из физических ограничений при этом является малость длины волны по сравнению с характерным размером неоднородностей в среде.

Подставим выражение (7.4) в уравнение (7.3) и приравняем к нулю множители при одинаковых степенях k_0:

$$\begin{array}{c} \left[\frac{k^2}{k_0^2} - (\vec{\nabla}\Psi)^2\right] = 0, \\ A_0\Delta\Psi + 2\vec{\nabla}A_0 \cdot \vec{\nabla}\Psi = 0, \\ A_1\Delta\Psi + 2\vec{\nabla}A_1 \cdot \vec{\nabla}\Psi = i\Delta A_0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{7.5}$$

Метод решения волновых задач, основанный на использовании первых двух уравнений системы (7.5), называется методом геометрической оптики.

Первое из уравнений системы (7.5)

$$(\vec{\nabla}\Psi)^2 = \frac{k^2(\vec{x})}{k_0^2} \equiv n^2(\vec{x}), \tag{7.6}$$

называют уравнением эйконала; второе из уравнений данной системы называют уравнением переноса. Функция $n(\vec{x})$, в прямых задачах предполагаемая известной, называется коэффициентом преломления среды.

Уравнение (7.6) представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка. Как известно, решение таких уравнений сводится к решению задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [29]. Применив соответствующее преобразование (см. [3, 13]) для решения уравнения (7.6), придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{p_i}{n}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= \frac{1}{2n}\frac{\partial n^2}{\partial x_i}, \\ \frac{d\Psi}{ds} &= n. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Вводя единичный вектор

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{|\vec{\nabla}\Psi|} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{n}, \tag{7.8}$$

перепишем систему (7.7) в виде

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \tag{7.9}$$

$$\frac{dn\vec{\tau}}{ds} = \vec{\nabla}n, \tag{7.10}$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = n, \tag{7.11}$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Так как $\vec{\tau}$ — единичный вектор, то из уравнения (7.9) следует

$$ds^2 = dx_i dx_i. \tag{7.12}$$

Следовательно, ds — элемент длины дуги кривой $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $\vec{\tau}$ — вектор касательной к этой кривой (характеристике).

Подставляя вектор $\vec{\tau}$ из уравнения (7.9) в (7.10), находим уравнение

$$\frac{d}{ds}\left[n(\vec{x})\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = \vec{\nabla} n(\vec{x}), \tag{7.13}$$

которое при известной функции $n = n(\vec{x})$ позволяет найти семейство характеристик (лучей), исходящих из точек некоторого многообразия Σ (поверхности), касательные к которой в начальной точке параллельны вектору $\vec{\tau}$.

Интегрируя уравнение (7.11) вдоль характеристики $\vec{r} = \vec{r}(s)$, получаем эйконал (фазу)

$$\Psi(\vec{r}(s)) = \int\limits_{s_0}^{s} n(\vec{r}(s))\,ds + \Psi_0, \tag{7.14}$$

где Ψ_0 — начальное значение эйконала. Очевидно, что поверхность $\Psi = \mathrm{const}$ ортогональна проходящим через нее лучам и определяет фронт волны.

Уравнение переноса (индекс 0 опускаем)

$$A\Delta\Psi + 2\vec{\nabla}A\cdot\vec{\nabla}\Psi = 0 \tag{7.15}$$

определяет изменение квадрата амплитуды A вдоль луча (квадрат амплитуды — множитель в выражении для энергии, поэтому иногда говорят, что уравнение (7.15) определяет изменение интенсивности луча). В самом деле, умножим уравнение (7.15) на величину A, преобразуем результат к виду

$$\vec{\nabla}\cdot(A^2 n\vec{\tau}) = 0 \tag{7.16}$$

и проинтегрируем его по области Ω, представляющей собой участок так называемой трубки тока. Трубкой тока называют область, заключенную между двумя фронтами $\Psi_1 = \mathrm{const}$ и $\Psi_2 = \mathrm{const}$, причем на фронте $\Psi_1 = \mathrm{const}$ выбирается бесконечно малая площадка $d\Sigma_1$, из точек контура которой проводятся характеристики до пересечения с фронтом $\Psi_2 = \mathrm{const}$, определяющие боковую поверхность области Ω и вырезающие из второго фронта бесконечно малую площадку $d\Sigma_2$. Имеем после интегрирования

$$\int\limits_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot(A^2 n\vec{\tau})\,d\Omega = 0. \tag{7.17}$$

Применяя к преобразованию интеграла слева формулу Гаусса—Остроградского и учитывая, что нормаль $\vec{\nu}$ к боковой поверхности трубки тока ортогональна вектору $\vec{\tau}$, находим, что

$$n_1 A_1^2 d\Sigma_1 = n_2 A_2^2 d\Sigma_2. \tag{7.18}$$

Зная траектории лучей и начальную интенсивность $n_0 A_0^2 d\Sigma_0$, при помощи соотношения (7.18) можно найти интенсивность в любой точке луча.

Полученные результаты позволяют поставить обратную задачу: зная некоторые интегральные параметры волны, определяемые из измерений на поверхностях Σ_1, Σ_2, не обязательно совпадающих с фронтами, но дающие возможность выявить из них характеристики, найти структуру среды в области Ω, ограниченной участками поверхностей Σ_1, Σ_2, для которых построены характеристики, и граничными характеристиками.

Измеряемыми интегральными параметрами волны могут быть:

— моменты $T_{12}(\Gamma(\vec{x}_i))$, $\vec{x}_i \in \Sigma_1$, движения возмущения, возникшего в точке $\vec{x}_i$ по лучу $\Gamma(\vec{x}_i)$ до его пересечения с поверхностью Σ_2:

$$T_{12} = \int\limits_{M_1}^{M_2} \frac{ds}{c(\vec{r}(s))}, \quad M_1 \in \Sigma_1, \quad M_2 \in \Sigma_2; \tag{7.19}$$

— амплитуды A_1, A_2;

— положения фронта в различные фиксированные моменты времени (для этого необходимо иметь множество датчиков, распределенных по объему).

Реконструируемым параметром, характеризующим внутреннюю структуру объема Ω, является локальная скорость звука $c(\vec{x})$ или однозначно связанный со скоростью показатель преломления $n(\vec{x})$.

Интеграл (7.19) представляет собой обобщение преобразования Радона на случай криволинейных путей интегрирования. В постановке обратной задачи данное преобразование содержит не известные заранее траектории интегрирования. Обратная задача упрощается, если эти траектории известны. Например, в случае, когда траектории прямолинейные, обратную задачу можно привести к обращению преобразования Радона (см. выше).

Описание методов решения данного уравнения применительно к геофизическим задачам (геологорзведки и сейсмологии) можно найти в [22, 53].

8. Дифракционная томография

Идея метода дифракционной томографии заключается в том, чтобы восстановить внутреннюю структуру по результатам измерений всех отраженных и прошедших через биообъект акустических сигналов. Данный метод является наиболее сложным как по организации измерений, так и по обработке информации. Тем не менее в настоящее время созданы основы теории [7] и лабораторные действующие образцы приборного комплекса, поэтому имеет смысл ознакомиться с главной идеей метода.

Будем использовать уравнение Эйлера, в котором дополнительно учтем заданные массовые силы с плотностью $\vec{f}$ (провести выкладки для этого случая предоставляется читателю в качестве упражнения)

$$\Delta\tilde{P} - \frac{1}{c^2(\vec{s})}\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial t^2} = -\operatorname{div}\vec{f} + \frac{\operatorname{grad}\rho_0}{\rho_0}\cdot(\operatorname{grad}\tilde{P} + \vec{f}) \tag{8.1}$$

(отметим, что для независимой переменной использовано новое обозначение $\vec{s}$).

Предположим, что исследуемый объект, как и в предыдущем методе, погружен в жидкость с подходящим значением акустического импеданса. Для постановки задачи и формулировки метода решения будем считать, что жидкость заполняет все пространство. Выделим в этом пространстве три области: X, $\mathbb{R}$, Y. Пусть выполнены условия:

— в области X распределены излучатели ультразвука; при постановке конкретных задач обычно в области X измеряют параметры пришедшей из бесконечности волны, так что данное предположение означает, что в области X заданы величины $\vec{f}$, $\tilde{P}$, $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, $c = c_0 = \mathrm{const}$;

— в области Y распределены приемники ультразвука, так что здесь известны значения $\vec{f}$, $\tilde{P}$, ρ_0, c_0;

— исследуемый объект занимает область $\mathbb{R}$, так что в этой области величины c, ρ — не известные заранее функции координат;

— области X, $\mathbb{R}$, Y не пересекаются.

Задача диагностики или дифракционной томографии заключается в нахождении распределений $c(\vec{s})$, $\rho(\vec{s})$ в области $\mathbb{R}$ по заданным значениям величин $\vec{f}$, $\tilde{P}$ в областях X, Y (в области Y $\vec{f} = 0$).

Для нахождения метода решения данной задачи используем прежде всего то обстоятельство, что возмущение $\vec{f}$, а также зондирующий и отраженный сигналы представляют собой гармонические волны; следовательно,

$$\begin{gathered} \tilde{P} = U(\vec{s},\omega)\exp(-i\omega t), \\ \vec{f} = \vec{F}(\vec{s},\omega)\exp(-i\omega t), \\ \operatorname{div}\vec{f} = -f_0(\vec{s},\omega)\exp(-i\omega t). \end{gathered} \tag{8.2}$$

Подставляя выражения (8.2) в уравнение (8.1) и сокращая экспоненту, находим

$$\Delta U + \frac{\omega^2}{c^2(\vec{s})}U = f_0(\vec{s}) + \frac{\operatorname{grad}\rho}{\rho}\cdot\operatorname{grad}U. \tag{8.3}$$

При выводе уравнения (8.3) использовано то обстоятельство, что $\operatorname{grad}\rho\cdot\vec{f} = 0$ из-за предположения об отсутствии общих точек областей X, Y, $\mathbb{R}$.

Докажем теперь утверждение о том, что поставленную задачу отыскания двух функций $\rho(\vec{s})$, $c(\vec{s})$ можно привести к задаче отыскания только одной неизвестной функции [1].

Для доказательства введем две новые неизвестные функции ξ, σ по формулам

$$\xi(\vec{s}) = \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\vec{s})}, \tag{8.4}$$

$$\sigma(\vec{s}) = \ln\frac{\rho(\vec{s})}{\rho_0}. \tag{8.5}$$

[1] Доказательство этого утверждения можно при первом чтении без ущерба для понимания дальнейшего опустить.

Находя отсюда величины c и ρ и подставляя в уравнение (8.3), получаем

$$\Delta U + k_0^2 U = \omega^2 \xi U + \operatorname{grad}\sigma \cdot \operatorname{grad} U + f_0, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}. \tag{8.6}$$

Используем теперь в уравнении (8.6) подстановку

$$U(\vec{s}) = \sqrt{\exp(\sigma(\vec{s}))}V(\vec{s}) = \sqrt{\frac{\rho(\vec{s})}{\rho_0}}V(\vec{s}). \tag{8.7}$$

После вычислений и преобразований приходим к уравнению

$$\Delta V(\vec{s}) + k_0^2 V(\vec{s}) = [n(\vec{s}) + \varepsilon(\vec{s})]V(\vec{s}) + \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\vec{s})}} f_0(\vec{s}), \tag{8.8}$$

в котором введены обозначения

$$n(\vec{s}) = \frac{3\operatorname{grad}\rho \cdot \operatorname{grad}\rho}{4\rho^2} - \frac{\Delta\rho}{2\rho} + \omega^2\left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\vec{s})}\right) =$$

$$= \omega^2\xi + \frac{\operatorname{grad}\sigma \cdot \operatorname{grad}\sigma}{4} - \frac{\Delta\sigma}{2}, \tag{8.9}$$

$$\varepsilon(\vec{s}) = \omega^2 \xi(\vec{s}). \tag{8.10}$$

Заметим теперь, что в уравнении (8.8) множитель перед $f_0(\vec{s})$ можно положить равным 1 из-за предположения об отсутствии общих точек областей X, Y, $\mathbb{R}$. Таким образом, обратная задача привелась к определению только одной функции $\nu(\vec{s}) = n + \varepsilon$. Проводя серию вычислений для разных значений частоты ω, можно найти значения скорости c и плотности ρ поотдельности.

Используя данное утверждение, можно ограничиться решением следующего уравнения:

$$\Delta U + k_0^2 U = \omega^2 \xi U + f_0. \tag{8.11}$$

Используем теперь известное из теории линейных уравнений с частными производными утверждение о том, что оператор $(\Delta + k_0^2)U$ имеет обратный, который действует следующим образом:

$$(\Delta + k_0^2)^{-1} U = \int\limits_{\Omega} G_0(\vec{s} - \vec{r}) U(\vec{r})\, d\Omega_r, \tag{8.12}$$

где G_0 — функция Грина, Ω — область, в которой решается уравнение (8.11). Если Ω совпадает со всем пространством, то функция Грина записывается в явном виде

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{2ik_0}\exp(ik_0|s|), && n = 1, \\ G_0 &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|\vec{s}|), && n = 2, \\ G_0 &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(ik_0|\vec{s}|)}{|\vec{s}|}, && n = 3, \end{aligned} \tag{8.13}$$

где n — размерность пространства, т.е. количество независимых пространственных переменных, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка.

Применив оператор (8.12) к левой и правой частям уравнения (8.11), придем к интегральному уравнению

$$U(\vec{s}) = U_0(\vec{s}) + \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(\vec{s} - \vec{r})\varepsilon(\vec{r}) U(\vec{r})\, d\Omega_r, \tag{8.14}$$

где

$$U_0(\vec{s}) = \int\limits_{X} G_0(\vec{s} - \vec{x}) f_0(\vec{x})\, d\Omega_x. \tag{8.15}$$

Уравнение (8.14) известно в физике как уравнение Липпмана—Швингера.

Поскольку полное поле амплитуд $U(\vec{s})$ известно лишь в области измерения Y и неизвестно в области рассеяния $\mathbb{R}$, то уравнение (8.15) фактически представляет собой пару уравнений:

$$U(\vec{y}) = U_0(\vec{y}) + \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(\vec{y} - \vec{r}')\varepsilon(\vec{r}')U(\vec{r}')\,d\vec{r}', \quad \vec{y} \in Y, \tag{8.16}$$

$$U(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) + \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(\vec{r} - \vec{r}')\varepsilon(\vec{r}')U(\vec{r}')\,d\vec{r}', \quad \vec{r}, \vec{r}' \in \mathbb{R}. \tag{8.17}$$

Для компактной записи уравнений (8.16)–(8.17) определим следующие операторы:

— оператор P_0, который преобразует распределение $f_0(\vec{x})$, $\vec{x} \in X$, в распределение $U_0(\vec{r})$ на области рассеяния $\mathbb{R}$ или в области наблюдения Y

$$P_0 f_0(\vec{x}) = U_0(\vec{r}) = \int\limits_{X} G_0(\vec{r} - \vec{x}) f_0(\vec{x})\,d\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}, \tag{8.18}$$

— оператор R_0, который переводит вторичные источники $F(\vec{r})$, возникающие в области рассеяния $\mathbb{R}$ в результате облучения, в распределение $u(\vec{r})$ на этой же области

$$R_0 F(\vec{r}) = u(\vec{r}) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(\vec{r} - \vec{r}')F(\vec{r}')\,d\vec{r}', \quad \vec{r}' \in \mathbb{R}, \tag{8.19}$$

— оператор Q_0, который переводит источники, возникающие в области $\mathbb{R}$, в рассеянное поле $u(\vec{y})$, $\vec{y} \in Y$, на приемной апертуре

$$Q_0 F(\vec{r}) = u(\vec{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(\vec{y} - \vec{r})F(\vec{r})\,d\vec{r}, \quad \vec{y} \in Y. \tag{8.20}$$

С использованием введенных обозначений пара подлежащих решению уравнений (8.16)–(8.17) запишется следующим образом:

$$U - U_0 = Q_0 \varepsilon U, \tag{8.21}$$

$$U - U_0 = R_0 \varepsilon U. \tag{8.22}$$

В левой части уравнения (8.21) разность $U - U_0$ является функцией переменной $\vec{y} \in Y$, в левой части уравнения (8.22) — функцией переменной $\vec{r} \in \mathbb{R}$.

При многопозиционном облучении на фиксированной частоте меняется только оператор P_0, при многопозиционном приеме меняется только оператор Q_0. Если же меняется частота облучающего сигнала, то меняются все три введенных выше оператора, поскольку частота ω входит в функцию ε.

Очевидно, что величина U_0 известна, поскольку она выражается через заданное поле f_0; запишем формальное решение уравнения (8.22) в следующем виде:

$$U = [E - R_0]^{-1} U_0, \tag{8.23}$$

где E — тождественный оператор. Подстановка выражения (8.23) в уравнение (8.21) приводит к следующему уравнению относительно функции ε:

$$u = U - U_0 = Q_0 \varepsilon [E - R_0 \varepsilon]^{-1} U_0. \tag{8.24}$$

Еще одно уравнение для функции ε получается путем умножения левой и правой частей уравнения (8.22) на ε, решения получившегося уравнения относительно произведения εU

$$\varepsilon U = [E - \varepsilon R_0]^{-1} \varepsilon U_0, \tag{8.25}$$

а также подстановки получившегося выражения (8.25) в (8.21)

$$u = Q_0 [E - \varepsilon R_0]^{-1} \varepsilon U_0. \tag{8.26}$$

Очевидно, что уравнения (8.24) и (8.26) нелинейные. Если нелинейность мала, то линеаризация этих уравнений (по ε) приводит к следующему уравнению для функции ε:

$$u(\vec{y}) = Q_0 \varepsilon U_0 = Q_0 \varepsilon P_0 f_0, \tag{8.27}$$

методы решения которого известны.

Рассмотрим наконец пример, в котором производится облучение области рассеяния плоской волной с амплитудой 1, идущей из бесконечности. По предположению, облучающее поле имеет вид

$$U_0 = \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}). \tag{8.28}$$

Подставляя выражение (8.28) в уравнение (8.27), учитывая выражение для функции G_0 и определения операторов P_0, Q_0, придем к следующему уравнению для функции $\varepsilon(\vec{r})$:

$$u(\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\exp(ik_0|\vec{r}-\vec{y}|)}{|\vec{r}-\vec{y}|}\varepsilon(\vec{r})\exp(i\vec{k}_0\cdot\vec{r})\,d\vec{r}, \quad k_0 = |\vec{k}_0|. \tag{8.29}$$

Для построения аналитического решения уравнения (8.29) используем следующие гипотезы:

— начало координат располагается в области $\mathbb{R}$;

— величины k_0^{-1}, $|\vec{y}|^{-1}$ малы, так что их квадратами и произведениями можно пренебречь.

Решение, которое будет построено на основании данных гипотез, называется приближением дальней зоны.

Преобразуем показатель экспоненты в уравнении (8.29) следующим образом:

$$\begin{gathered} k_0|\vec{r}-\vec{y}| = \frac{1}{\lambda}[|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2]^{1/2} = \frac{|\vec{y}|}{\lambda}\left[1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|^2} + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{y}|^2}\right]^{1/2} \approx \\ \approx k_0|\vec{y}|\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|^2}\right) = k_0\left(|\vec{y}| - \frac{\vec{r}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|}\right). \end{gathered} \tag{8.30}$$

Кроме того,

$$|\vec{r}-\vec{y}|^{-1} \approx \frac{1}{|\vec{y}|}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|}\right) \approx \frac{1}{|\vec{y}|}. \tag{8.31}$$

Подстановка выражений (8.30)–(8.31) в уравнение (8.29) дает

$$u(\vec{y}) \approx -\frac{1}{4\pi|\vec{y}|}\exp(ik_0|\vec{y}|)\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left[i\vec{r}\cdot\left(\vec{k}_0 - \frac{\vec{y}k_0}{|\vec{y}|}\right)\right]\varepsilon(\vec{r})\,d\vec{r} \approx \varepsilon^*(\vec{k}_{sk} - \vec{k}_0)D, \tag{8.32}$$

где ε^* — образ Фурье искомой функции ε, $\vec{k}_{sk} = k_0\vec{y}/|\vec{y}|$, D — некоторая постоянная.

Таким образом, удается связать образ Фурье искомой функции ε с измеряемой в опыте величиной $u(\vec{y})$. Следовательно, если измерения достаточно полные, то, используя известные методы обращения преобразования Фурье, можно получить искомое решение.

На практике используются два варианта облучения плоской волной, в первом из которых частота является постоянной $\omega = \omega_0 = c_0|\vec{k}_0|$, вектор $\vec{k}_0$ — переменный и принимает все возможные значения. Следовательно, вектор $\vec{k}_0$ описывает сферу радиуса $|\vec{k}_0|$ в трехмерном пространстве (k_1, k_2, k_3). Съем информации должен производиться со всех возможных направлений

$$\vec{k}_{sk} = \frac{\vec{y}k_0}{|\vec{y}|},$$

тогда эта информация даст образ Фурье искомой функции ε^* на сфере радиуса $2k_0$. Меняя радиус сферы при помощи изменения частоты облучения, можно, по крайней мере, в принципе, найти образ Фурье функции ε во всем пространстве.

При втором способе фиксируется сначала направление вектора $\vec{k}_0$, и прием сигнала ведется со всех возможных направлений, что дает образ Фурье ε^* на некоторой сфере, касающейся начала координат. Меняя частоту, будем менять радиус этой сферы, в результате чего получим образ Фурье в полупространстве. Изменив направление вектора $\vec{k}_0$ на противоположное, получим образ Фурье ε^* во всем пространстве. Обратив преобразование Фурье, получим решение задачи.

Завершая данный параграф, укажем некоторые работы по обратной задаче теории рассеяния, имеющие прямое отношение к проблемам дифракционной томографии.

Пионерскими в данном направлении были работы [6, 20], в которых была поставлена и изучена задача определения коэффициентов дифференциального уравнения по его спектру — доказаны теоремы существования и единственности, предложены алгоритмы решения.

Обзор работ, посвященных данной проблеме и ее обобщениям на многомерные задачи, можно найти в [27].

Обратные задачи теории рассеяния в акустике рассмотрены в [7], прямые и обратные задачи рассеяния акустических и электромагнитных волн исследованы в [39].

9. Некоторые частные задачи

9.1. Идентификация трещин в упругих телах. Задача идентификации трещин в упругих телах представляет собой частный, но очень важный случай общей задачи идентификации неоднородностей структуры в области. Особенность ее заключается в наличии зон концентрации напряжений вблизи края трещины, а также в том, что на поверхности трещины возникают граничные условия в виде неравенств, отражающие условия непроникания.

Идентификация трещин производится, как правило, с применением ультразвука, поэтому соответствующая математическая модель содержит уравнение типа (6.1). Если трещина возникает и распространяется в однородном материале, то при решении прямых задач можно использовать мощные классические методы, опирающиеся на понятие фундаментального решения, и граничные интегральные уравнения.

Итерационные процедуры для решения задач об идентификации трещин строятся по той же схеме, что и задача из § 2. Подсчет невязки в граничных условиях осложняется необходимостью вычисления особенностей в вершине трещины.

По этой схеме решена модельная задача для уравнения Гельмгольца в области с плоским разрезом в [47]. Для упрощения вычислений односторонние граничные условия на берегах трещины не учитывались, а для уменьшения размерности пространства идентифицируемых параметров было введено предположение о том, что трещина является плоской и эллиптической. Вычисления были проведены для области в форме куба и круговой трещины. Оказалось, что практически приемлемые результаты получаются при количестве итераций, равном 5.

Ссылки на более поздние работы в данном направлении, в которых используется система уравнений теории упругости, можно найти в [46]. В этой статье дано обстоятельное теоретическое исследование вопросов, связанных с указанными выше особенностями поведения трещин в упругих телах.

В статье [51], использующей также и уравнения теории упругости и граничные интегральные уравнения, дано сопоставление различных способов минимизации невязки, из теории оптимизации.

Анализ соотношений чувствительности в задаче идентификации трещин в балке выполнен в [52]; эти соотношения, как известно, позволяют связать приращения идентифицируемых величин с изменениями наблюдаемых. В работе продемонстрирована также эффективность применения аппарата всплесков («wavelets» или «ondolettes») для обработки информации в задачах идентификации.

Трехмерная задача об идентификации трещины в упругом теле решена в [55] с использованием метода конечных элементов. Здесь же имеется обширная библиография по проблеме идентификации трещин, в том числе с использованием метода конечных элементов.

Теория двумерных задач развита в [32]. Численные решения конкретных задач построены с использованием функций комплексного переменного. Изучено влияние случайных шумов на результаты идентификации эллиптической трещины.

9.2. Идентификация вязкоупругих свойств. Рассмотрим задачу идентификации параметров ядер интегральных зависимостей Больцмана—Вольтерра линейно термовязкоупругого тела

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{t} [G_{ijkl}(t-\tau)d\varepsilon_{kl}(\tau) - \varphi(t-\tau)d\theta(\tau)], \tag{9.1}$$

где $G_{ijkl}(t)$ — компонента тензора ядер релаксации, $\varphi(t)$ — компоненты тензора связи напряжений с температурой θ [10, 23], t — время; остальные обозначения те же, что в § 4.

Для построения математической модели идентификации примем следующие гипотезы:

- H1) материал изотропен в отношении механических и тепловых свойств;
- H2) процессы в материале установившиеся и соответствуют гармоническим воздействиям с частотой ω;
- H3) материал проявляет свойства вязкости только по отношению к сдвиговым деформациям;
- H4) вся работа части напряжений, соответствующей вязкости материала, переходит в тепло, причем мощность Q (локальная) источников тепла определеяется по формуле (см. [23])

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} G_1(2t-\tau-\eta)\, d\varepsilon_{kl}^{D}(\tau)\, d\varepsilon_{ij}^{D}(\eta), \tag{9.2}$$

где $G_1(t)$ — ядро сдвиговой релаксации.

Обозначая амплитудные значения всех функций, характеризующих состояние тела, теми же символами, что и исходные функции, получим систему уравнений: движения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\{2\mu(x) - \tilde{G}_1^*(x, i\omega)\varepsilon_{ij}^D + K(x)(\varepsilon_{kk})\delta_{ij}\} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{9.3}$$

и теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k}{T_0}\right) = -2i\omega C_p\theta - \frac{\omega^2}{2}\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t} G_1(2t-\tau-\eta)\exp(i\omega(2t-\tau-\eta))\,d\tau d\eta, \tag{9.4}$$

где μ — модуль сдвига (мгновенный), K — модуль всестороннего растяжения–сжатия, ρ — плотность материала,

$$\tilde{G}_1^*(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_1(t-\tau)\exp(-i\omega\tau)\,d\tau, \tag{9.5}$$

k — коэффициент теплопроводности, C_p — удельная теплоемкость, T_0 — температура приведения.

Поскольку в уравнение движения температура не входит, то задача идентификации вязкоупругих свойств решается теми же способами, что и задача идентификации упругих модулей, однако теперь появляются следующие обстоятельства, осложняющие решение проблемы идентификации:

1) каждую из серий прямых задач, возникающих в итерационных процедурах, необходимо решать в комплексных переменных или же решать каждый раз две отдельные задачи в вещественных переменных;
2) для восстановления ядра сдвиговой релаксации $G_1(t)$ необходимо построить его образ Фурье, другими словами, каждый из требуемых в соответствии с алгоритмом решения обратной задачи опытов необходимо провести с различными частотами;
3) уравнение (9.3) имеет структуру уравнения Гельмгольца, что может приводить к проблемам при построении решения вблизи резонансных частот.

Для построения алгоритма идентификации теплофизических параметров примем дополнительное предположение (не слишком ограничительное) о том, что

$$G_1 = \sum_k H_1^{(k)}(t-\tau)H_2^{(k)}(t-\eta). \tag{9.6}$$

Внося это выражение в уравнение (9.4) и повторяя выкладки, проведенные при выводе уравнения (9.3), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k}{T_0}\right) = -2i\omega C_p\theta + \frac{\omega^2}{2}\varepsilon_{ij}^D\varepsilon_{ij}^D \sum_k H_1^{(k)*}(i\omega)H_2^{(k)*}(i\omega) = 0, \tag{9.7}$$

в котором, как и в предыдущих выражениях, символом «*» помечено преобразование Фурье.

Таким образом, полученный результат — стационарное уравнение теплопроводности, обратную коэффициентную задачу для которого можно решать методами, развитыми в § 3, после соответствующих модификаций, связанных с появлением комплексных переменных.

Описанный метод опубликован в [17].

Другой подход к решению задачи идентификации вязкоупругих и термовязкоупругих характеристик материалов, в которых не используется предположение о периодичности внешних воздействий, развит, например, в работах [38, 43] и др. Здесь для определения функций релаксации изотропного материала построено интегральное уравнение первого рода, доказаны теоремы о разрешимости и единственности. Заметим, что речь не идет об определении зависимости параметров ядер от координат.

9.3. Идентификация параметров материалов с нелинейными определяющими соотношениями. При использовании нелинейных определяющих соотношений проблема идентификации параметров этих соотношений зачастую представляет собой весьма трудную задачу даже для однородного материала. Примером такой задачи является проблема описания так называемого «рэчета» (ratchet) — нарастания пластических деформаций при малых постоянных нагрузках в одном направлении (например, при приложении растягивающей нагрузки вдоль оси цилиндрического образца) и циклическом нагружении в другом (например, циклического кручения) [33, 35] (впервые это явление было описано Б. М. Малышевым).

Общий подход к решению данной задачи для однородных материалов и слоистых композитов предложен в [50]; в этой работе алгоритм параметрической идентификации (типа алгоритма из

§§ 2,3 выше) дополнен генетическим алгоритмом [42], позволяющим локализовать зоны возможных минимумов невязки теоретических и экспериментальных результатов.

Алгоритм идентификации параметров определяющих соотношений для нелинейно упругих материалов предложен в [17]. Идея метода та же, что и идея вариационного метода в § 5, но вместо функционала (5.11) используется функционал

$$J_{NL}(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\hat{\sigma} - \Xi(\hat{\varepsilon},\, x)|^2 \, d\Omega, \tag{9.8}$$

где Ξ — подлежащая определению тензорная функция, определяющая нелинейное поведение материала; к функционалу (9.8) необходимо присоединить ограничения, о которых шла речь в § 5.

Главной трудностью является то, что когда нет никакой информации относительно структуры функции Ξ, задача ее идентификации в области по результатам измерений на границе, по-существу, эквивалентна реконструкции оператора, отображающего кинематические граничные данные в силовые и обратно.

Задача упрощается, если предположить, что функция Ξ определяется конечным числом параметров $A_1, A_2, \ldots, A_s$, являющихся функциями только пространственных координат. В этом случае функционал (9.8) при фиксированных распределениях напряжений и деформаций будет зависеть только от этих параметров, и задача идентификации приводится к классической задаче нелинейного программирования: найти минимум функционала

$$J_{NL}(A_1, A_2, \ldots, A_s) = \frac{1}{2} \sum_i \int\limits_{\Omega} |\hat{\sigma}^{(i)} - \Xi(\hat{\varepsilon}^{(i)}, x)|^2 \, d\Omega d\Omega \tag{9.9}$$

по переменным $A_1, A_2, \ldots, A_s$ при соблюдении упомянутых выше ограничений на поля напряжений и деформаций.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект т 02–01–00789 и грантов Минобразования РФ, НТП «Университеты России», проект УР.04.01.026, и НТП «Технология живых систем», проект т 004.03.03.05.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аниконов Ю. Г.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. — Новосибирск: СО Наука, 1978. — 118 с.
2. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных смешанных задачах теории упругости. — М.: Наука, 1984. — 254 с.
3. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979. — 383 с.
4. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин В. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып.5 (Обобщенные функции). — 656 с.
5. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2000. — 208 с.
6. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1951. — *15*. — С. 309–360.
7. *Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. — М.: МГУ, 1989. — 151 с.
8. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ.
9. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: АН СССР, 1963. — 271 с.
10. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970. — 280 с.
11. *Косматов С. Л., Рубашов И. Б., Рязанцев О. Б., Черников Д. Г., Шнейдерман Б. И.* Ультразвуковой вычислительный томограф для диагностики заболеваний молочной железы/ Тез. докладов Всес. симп. по вычислительной томографии. — Новосибирск, 1983, С. 105–106.
12. *Кравчук А. С.* Алгоритмы томографии в теории упругости// Прикл. мат. и мех. — 1999. — *7 63*. — Вып. 3. — С. 491–494.
13. *Кравчук А. С.* Основы компьютерной томографии. — М.: Дрофа, 2001. — 240 с.
14. *Кравчук А. С.* Развитие диагностического метода импедансной томографии. Труды Междунар. конф. «Нечеткая логика, интеллектуальные системы и технологии — НЛИСТ-97». — Владимир: ВлГУ, 1997.
15. *Кравчук А. С.* Развитие математической модели импедансной компьютерной томографии для биомедицинской диагностики// Научные труды III Международной научно-технической конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы приборостроения, информатики, экономики и права». Книга «Приборостроение». М.: Изд-во МГАПИ, 2000. — С. 102–107.
16. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. — М.: Изд-во МГАПИ, 1997. — 339 с.

17. *Кравчук А. С.* Об определении линейных и нелинейных свойств неоднородных материалов// Математическое моделирование систем и процессов. — 2001. — *9*. — С. 67–77.
18. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — Новосибирск: СО Наука, 1980. — 286 с.
19. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
20. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы дифференциального оператора второго порядка// Докл. АН СССР, 1950. — *76*, т 3. — С. 457–460.
21. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник. Под ред. В. В. Клюева. — М.: Машиностроение, 1995. — 487 с.
22. *Нолет Г., Чепмен К. и др.* Сейсмическая томография: с приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике. — М.: Мир, 1990. — 450 с.
23. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.
24. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: МГУ, 1986. — 263 с.
25. Применение ультразвука в медицине. Физические основы. Под ред. К. Хилла. — М.:Мир, 1989. — 567 с.
26. *Радон И.* Об определении функций по их интегралам вдоль некоторых многообразий/ В кн.: *Хелгасон С.* Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983.
27. *Рамм А. Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. — М.: Мир, 1994. — 495 с.
28. *Рыхлевский Я.* CEIIINOSSSTTOY. Математическая структура упругих тел. — М.: ИП механики АН СССР, препринт т 217, 113 с.
29. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 468 с.
30. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
31. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для уравнений теории упругости. — Новосибирск: СО Наука, 1980. — 280 с.
32. *Arens T.* Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering// Inverse Problems. 2001. — *17*. — С. 1445–1464.
33. *Bocher L., Delobelle P.* Etude experimental du comportement cyclic d'un acier du type 316L sous chargement multiaxial complexe en traction-torsion-pression interne et externe// J. Phis. III France. — 1997. — *7*. — С. 1755–1777.
34. *Bonnans J. F., Gilbert J. S., Lemarechal C., Sagastizabal C.* — Optimisation numerique, Springer-Verlag, 1997. — 340 с.
35. *Bouchou A., Delobelle P.* Behaviour and modelization of a 17–20 SPH stainless steel under cyclic, unidirectional and bidirectional anisothermal loadings// Nuclear Engineering and design. — 1996. — *162*. — С .21–45.
36. *Bui H. D.* Introduction aux problémes inverse en mécanique des matériaux. — Paris, Eyrolles, 1993. — 200 с.
37. *Calderon A. P.* On an inverse boundary value problem/ Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics. Soc. Brasiliera de Mathematica, Rio de Janeiro, 1980.
38. *Cavaterra C., Graselli M.* Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzman type// Universita degli studi di Milano, 1993. Quaderno n. 36/1993. — 38 с.
39. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1998. — 302 с.
40. *Constantinescu A.* On the Identification of Elastic Moduli from Displacement-Force Boundary Measurements// Inverse Problems in Engineering. — 1995. — *1*. — С. 293–313.
41. *Dines K. A., Lytles R. J.* Analysis of electrical conductivity imaging// Geophysics. — 1981. — *46*, т 7. — С. 1025–1036.
42. *Goldberg D. E.* Genetic Algorithms in Search, Optimization and Macine Learning. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989. — 600 с.
43. *Graselli M.* An inverse problem in three-dimensional linear thermoviscoelasticity of Bolzmann type. В кн.: Некорректно поставленные задачи в естественных науках. Под ред. акад. А. Н. Тихонова. — М.: ТВП, 1992. — С. 284–299.
44. *Karkkainen T.A.* Linearization technique and error estimates for distributed parameter identification in quasilinear problems// Num. Funct. Anal. Optim. — 1996. — *17*, т 3–4. — С. 345–364.
45. *Kravchuk A. S.* Identification des proprietés mécanique et de la topologie des structures. — Besancon, Université de Franche-Comté, UFR Science et Technique, 2002. — 27 с.
46. *Kress A.* Inverse elastic scattering from a crack// Inverse Problems. — 1996. — *12*. — С. 667–684.
47. *Nishimura N.* A numerical method of crack determination by boundary integral equation method. В кн.: Некорректно поставленные задачи в естественных науках. Под ред. акад. А. Н. Тихонова. — М.: ТВП, 1992. — С. 553–562.
48. The Physics of Medical Imaging. Medical Science Series Ed. by S. Webb. Bristol; Philadelphia: Adam Hilger IOP Publ, 1988.— 633 с. Имеется перевод: Физика визуализации изображений в медицине. — М.: Мир, 1991. — *1* — 407 с., *2* — 406 с.
49. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Inegralwrte langs gewisser Mannigfaltigkeiten// Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften. — Leipzig: Math.-Phys. Kl., 69. — С. 262–267.
50. *Richard F., Rousseau J., Ferry L., Perreux D.* Optimization du dimensionnement d'une structure composite: prise en compte du risque de defaillance// Revue des composites et deas materiaux avances. — 1998. — *8*.

51. *Rus G., Gallego R.* Optimization algorithm for identification inverse problems with the boundary element method// Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2002. — *26.* — С. 315–327.
52. *Ser-Tong Quek et all* Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique// Int. J. of Mechanical Sciences. — 2001. — *243.* — С. 2899–2910.
53. *Tarantola A.* Inverse Problem Theory. — Elsevier, 1987. — 600 с.
54. *Vauhkonen M., Kaipio J. P., Somersalo E., Karjalainen P. A.* Electrical impedance tomography with basis constraints// Inverse Problems. — 1997. — *13.* — С. 523–530.
55. *Weik W., Andra H., Schnack E.* An alternating iterative algorithm for the reconstruction of internal cracks in a three-dimensional body// Inverse Problems. — 2001. — *17.* — С. 1957–1975.
56. *Wexler A., Fry B., Neuman M. R.* Impedance-computed tomography algorithm and systems// Appl. Optics. — 1985. — *24.* — С. 3985–3992.

А. С. Кравчук
Московский государственный университет им. Ломоносова

Современная математика и ее приложения. Том 16 (2004). С. 47–63

УДК 517.982.27

АППРОКСИМАТИВНЫЕ УСЛОВИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ТОНКИХ И СОСТАВНЫХ СТРУКТУРАХ

© 2004 г. **С. Е. ПАСТУХОВА**

Аннотация. Аппроксимативные свойства переменных мер составляют основу метода двухмасштабной сходимости относительно переменной меры, который используется при усреднении на периодических тонких и составных структурах. Дается обзор способов проверки аппроксимативных свойств. Особое внимание уделено мало изученным составным мерам.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В [1] для усреднения задач теории упругости (а также и скалярных) в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, на периодических тонких структурах F_ε^h (типа сетки на плоскости), зависящих от двух малых взаимосвязанных геометрических параметров ε и $h = h(\varepsilon)$, контролирующих размеры ячейки периодичности и толщину структуры, В. В. Жиковым была введена *двухмасштабная сходимость относительно переменной* 1-*периодической меры* μ^h, слабо сходящейся к 1-периодической мере μ. При этом подходе к классическим задачам математической физики на конкретной периодической тонкой структуре F_ε^h меры μ^h и μ возникают естественно. Мера μ^h сосредоточена на 1-периодической структуре F^h, которая характеризуется параметром толщины $h > 0$ и переходит при $h \rightharpoonup 0$ в предельную структуру F. Самая тонкая структура F_ε^h есть гомотетическое сжатие F^h:

$$F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h, \quad \text{причем} \quad h(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Более точно *естественная мера* μ^h определяется равенством

$$d\mu^h = \rho^h(x)dx,$$

где dx — d-мерная мера Лебега, $\rho^h(x) = c_h = \mathrm{const} > 0$ на F^h и $\rho^h(x) = 0$ вне F^h, константа c_h выбирается из условия нормировки: $\int\limits_Y d\mu^h = 1$, где Y — ячейка периодичности (единичный куб). Ясно, что $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \to 0$, при этом мера μ сосредоточена на предельной структуре F и пропорциональна $(d-r)$-мерной мере Лебега $(r > 0)$.

Метод двухмасштабной сходимости относительно переменной меры μ^h такой, что $\mu^h \rightharpoonup \mu$, обобщает предложенный ранее В. В. Жиковым [2] аналогичный метод относительно борелевой меры μ. Напомним, что первоначально в теории усреднения метод двухмасштабной сходимости относительно меры Лебега был введен Г. Нгуетсенгом [10] и Г. Алайре [8]. В. В. Жиковым [1, § 16] были сформулированы так называемые *аппроксимативные свойства* (или условия) для мер μ^h и

μ, необходимые для того, чтобы двухмасштабная сходимость относительно переменной меры μ^h вписывалась в ставшую уже традиционной технику усреднения.

Для каждого типа тонких структур F^h (сетки на плоскости, ящичные или стержневые каркасы в пространстве, армированная структура с тонкими армирующими составляющими) аппроксимативные свойства естественных мер приходится проверять отдельно. Эту (часто далеко не тривиальную) задачу необходимо прежде всего решить, приступая к усреднению на тонкой двухпараметрической структуре F_ε^h.

Аппроксимативные свойства переменных мер составляют основу не только теории усреднения, но и теории соболевских пространств с переменной мерой. Оказывается, возможность предельного перехода в H^1-пространствах с мерой μ^h и аппроксимативные условия для мер μ^h в некотором смысле эквивалентны. На этом основан один из универсальных методов проверки аппроксимативных условий.

В настоящей работе дается обзор методов проверки аппроксимативных условий для естественных мер. Основное внимание уделено наименее изученным составным мерам, характеризующим армированные (или составные) среды с тонким армированием.

Для простоты изложение ведется только для плоских структур, хотя методы применимы и для их пространственных аналогов. Аппроксимативные свойства обсуждаются с точки зрения пространств теории упругости. Те же вопросы для скалярных пространств решаются аналогично или даже значительно проще.

Наконец заметим, что аппроксимативные свойства естественных мер с точки зрения скалярной теории изучались в [3, 9, 11], а с точки зрения теории упругости в [5–7].

2. Пространства периодических вектор-функций с мерой

2.1. Пусть μ — периодическая борелева мера в $\mathbb{R}^d$, нормированная условием $\int\limits_Y d\mu = 1$, $Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ — ячейка периодичности,

$$\langle g \rangle = \int\limits_Y g\, d\mu \quad \text{— среднее по мере} \quad \mu.$$

Соболевские пространства, связанные с мерой μ, принято определять через замыкание множества гладких функций в подходящей норме. Например, для задач теории упругости соболевское пространство периодических вектор-функций $\mathcal{H}_{\text{per}} = \mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)$ определяют как замыкание множества

$$\{(\varphi, e(\varphi)), \quad \varphi \in C^\infty_{\text{per}}(Y)^d\} \quad \text{в произведении} \quad L^2(Y, d\mu)^d \times L^2(Y, d\mu)^{d(d+1)}.$$

Здесь

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}(\nabla\varphi + (\nabla\varphi)^T) \quad \text{— симметрический градиент вектор-функции} \quad \varphi,$$

$e(\varphi)$ — симметрическая матрица с элементами $e_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)$, $C^\infty_{\text{per}}(Y)$ — множество гладких периодических функций. Видим, что элементами $\mathcal{H}_{\text{per}}$ являются пары (u, v), u — вектор, v — симметрическая матрица, причем

$$\exists\varphi_n \in C^\infty_{\text{per}}(Y)^d, \qquad \int\limits_Y |u - \varphi_n|^2 d\mu \to 0, \qquad \int\limits_Y |v - e(\varphi_n)|^2 d\mu \to 0. \tag{2.1}$$

Компоненту v из пары (u, v) обозначаем $e(u)$ и называем симметрическим градиентом или просто градиентом вектор-функции u.

Следуя традиции, множество первых компонент из пар (u, v), составляющих соболевское пространство, будем обозначать через $\mathcal{H}_{\text{per}}$.

В дальнейшем (если это не вызывает недоразумений) не будем делать различий в обозначении лебеговых пространств скалярных, векторных и матричных.

Функция $u \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}$ может иметь много градиентов, их множество обозначим через $\mathcal{E}(u)$.

Особую роль играет множество $\mathcal{E}(0)$ градиентов нуля. По определению $z \in \mathcal{E}(0)$, если

$$\exists \varphi_n \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d, \quad \varphi_n \to 0, \quad e(\varphi_n) \to z \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu).$$

Скажем, что периодическая матрица b тангенциальна, если $b \perp z$ для любого $z \in \mathcal{E}(0)$.

Множество $\mathcal{E}(u)$ имеет структуру

$$\mathcal{E}(u) = e(u) + \mathcal{E}(0), \quad \text{где } e(u) \text{ — какой-то градиент функции } u,$$

при этом произвольный градиент функции u допускает единственное представление

$$e(u) = e^t(u) + g, \quad g \in \mathcal{E}(0), \quad e^t(u) \perp g;$$

компонента $e^t(u)$ называется тангенциальным градиентом. В пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}$ выделим множество $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mu)$ жестких периодических перемещений. По определению, $u \in \mathcal{R}$, если $0 \in \mathcal{E}(u)$, т.е.

$$\exists \varphi_n \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d, \quad \varphi_n \to u, \quad e(\varphi_n) \to 0 \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu).$$

Далее используется неравенство Корна

$$\int\limits_Y |\varphi|^2 \, d\mu \leqslant c \int\limits_Y |e(\varphi)|^2 \, d\mu, \quad \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d, \quad \varphi \perp \mathcal{R}. \tag{2.2}$$

Пример 2.1. Пусть $I = [0,1] \times \{0\}$ — отрезок на плоскости $\mathbb{R}^2_x$, $x = (x_1, x_2)$, $d\mu = dx_1 \,|_I$. Тогда

$$\mathcal{R} = \{(c, \alpha(x_1)), \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in L^2(I)\},$$

$$\mathcal{E}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in L^2(I) \right\},$$

тангенциальные матрицы имеют вид $b = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (см. [1, § 6]).

Для $u \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}$ имеем

$$e^t(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— тангенциальный градиент},$$

$$e(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in L^2(I) \quad \text{— произвольный градиент.}$$

Для отрезка I с продольным ортом $\tau = (\tau^1, \tau^2)$ тангенциальные матрицы пропорциональны матрице

$$\tau \times \tau = \begin{pmatrix} \tau^1\tau^1 & \tau^1\tau^2 \\ \tau^1\tau^2 & \tau^2\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Выделим в $L^2(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ подпространства потенциальных и соленоидальных матриц:

$$V_{\mathrm{pot}} = V_{\mathrm{pot}}(Y, d\mu) \quad \text{есть замыкание множества} \quad \{e(\varphi),\ \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d\} \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}},$$

$$V_{\mathrm{sol}} = V_{\mathrm{sol}}(Y, d\mu) = V_{\mathrm{pot}}^\perp,$$

т.е. $b \in V_{\mathrm{sol}}$, если $\langle b \cdot e(\varphi) \rangle = 0$ $\forall \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d$. Здесь и далее скалярное произведение $\xi \cdot \eta$ симметрических матриц $\xi = \{\xi_{ij}\}$, $\eta = \{\eta_{ij}\}$ определено по формуле $\xi \cdot \eta = \sum\limits_{i,j} \xi_{ij}\eta_{ij}$.

Из определения $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}$ следует (см. (2.1)): если $(u, e(u)) \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}$, то $e(u) \in V_{\mathrm{pot}}$, т.е. градиент функции из соболевского пространства является потенциальной матрицей. Обратное утверждение верно при дополнительных предположениях. Например, справедливо следующее предложение.

Предложение 2.2. *Пусть выполнено неравенство Корна* (2.2). *Тогда любая матрица* $v \in V_{\mathrm{pot}}$ *допускает представление* $v = e(u)$ *для некоторого вектора* $u \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}$.

Доказательство этого утверждения дадим позже.

Скажем, что вектор $a \in L^2(Y, d\mu)^d$ и симметрическая матрица $b \in L^2(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ связаны отношением

$$a = \operatorname{div}\, b \quad (\text{по мере}\, \mu),$$

$$\text{если } \langle a \cdot \varphi \rangle = -\langle b \cdot e(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in C^{\infty}_{\mathrm{per}}(Y)^d. \tag{2.3}$$

2.2. Теперь введем новое (двойственное) определение соболевского пространства теории упругости с мерой μ. Двойственное определение соболевского пространства скалярных функций предложено В. В. Жиковым [12].

Определение 2.3. Скажем, что пара (u, v), где $u \in L^2(Y, d\mu)^d$, $v \in L^2(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$, принадлежит пространству $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$, если

$$\langle a \cdot u \rangle = -\langle b \cdot v \rangle, \quad \text{как только} \quad a = \operatorname{div}\, b \quad (\text{по мере}\, \mu). \tag{2.4}$$

Из определения множества $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$ следует его замкнутость в $L^2(Y, d\mu)^d \times L^2(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$.

Теорема 2.4. *Пространства* $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}$ *и* $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$ *совпадают.*

Доказательство. Если $(u, e(u)) \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}$, то (в силу (2.3)) для φ_n из (2.1)

$$\langle a \cdot \varphi_n \rangle = -\langle b \cdot e(\varphi_n) \rangle$$

и, значит,

$$\langle a \cdot u \rangle = -\langle b \cdot e(u) \rangle,$$

т.е. пара $(u, e(u))$ удовлетворяет соотношению (2.4) и $(u, e(u)) \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$. Таким образом, доказано вложение $\mathcal{H}_{\mathrm{per}} \subset \tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$.

Допуская, что $\mathcal{H}_{\mathrm{per}} \neq \tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$, найдем пару $(u, v) \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathrm{per}}$, для которой

$$\langle u \cdot \varphi \rangle + \langle v \cdot e(\varphi) \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C^{\infty}_{\mathrm{per}}(Y)^d.$$

Тогда u и v связаны отношением (2.3), и, взяв в (2.4) $a = u$, $b = v$, получаем

$$\langle u \cdot u \rangle + \langle v \cdot v \rangle = 0, \quad \text{откуда} \quad u = 0, \quad v = 0.$$

Теорема доказана. □

Используя определение 2.3, докажем предложение 2.2.

Доказательство предложения 2.2. По определению $v \in V_{\mathrm{pot}}$, найдется φ_n такая, что $e(\varphi_n) \to v$ в $L^2(Y, d\mu)$. При необходимости вычитаем из φ_n проекцию φ_n на пространство $\mathcal{R}$, добиваясь того, что $\varphi_n \perp \mathcal{R}$. Тогда по неравенству Корна (2.2) $\varphi_n \to u$ в $L^2(Y, d\mu)$. Докажем, что $v = e(u)$. Для любых a, b, связанных отношением (2.3), имеем равенства

$$\langle \varphi_n \cdot a \rangle = -\langle e(\varphi_n) \cdot b \rangle,$$
$$\langle u \cdot a \rangle = -\langle v \cdot b \rangle,$$

последнее из которых совпадает с (2.4). Значит, $(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}$, т.е. $v = e(u)$. Предложение доказано. □

3. Пространства периодических функций с переменной мерой

3.1. Пусть μ^h — периодическая нормированная борелева мера с ячейкой периодичности $Y = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)^d$, слабо сходящаяся к мере μ: $\mu^h \rightharpoonup \mu$, т.е.

$$\lim_{h\to 0} \int_Y \varphi\, d\mu^h = \int_Y \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\mathrm{per}}(Y).$$

Напомним понятия слабой и сильной сходимости в $L^2(Y, d\mu^h)$ [1, 4]. Пусть b^h ограничена в $L^2(Y, d\mu^h)$, т.е. $\limsup\limits_{h\to 0} \int\limits_Y |b^h|^2 d\mu^h < \infty$. Тогда слабая сходимость $b^h \rightharpoonup b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ означает, что

$$b \in L^2(Y, d\mu), \qquad \lim_{h\to 0} \int_Y b^h \varphi\, d\mu^h = \int_Y b^h \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y).$$

Сильная сходимость $b^h \to b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ означает, что

$$\lim_{h\to 0} \int_Y b^h z^h\, d\mu^h = \int_Y bz\, d\mu, \quad \text{как только} \quad z^h \to z \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h).$$

Справедливы следующие утверждения:
из всякой ограниченной в $L^2(Y, d\mu^h)$ последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность;

$$b^h \to b \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h) \Longleftrightarrow b^h \rightharpoonup b \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h), \qquad \lim_{h\to 0} \int_Y |b^h|^2\, d\mu^h = \int_Y |b|^2\, d\mu. \tag{3.1}$$

Пример 3.1 (естественное продолжение на тонкую сетку F^h)**.** Дана функция $b \in L^2(Y, d\mu)$. На каждом звене сетки F продолжим эту функцию как постоянную в поперечном направлении на полосу I^h ширины h (h-стержень). В точках, принадлежащих нескольким h-стержням, функцию считаем равной нулю. Построенное таким образом естественное продолжение b_h имеет сходимость

$$b_h \to b \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h).$$

Тот же результат сохраняется, если функцию b_h положить равной нулю в некоторой $c_0 h$-окрестности каждого узла.

Отметим еще одно простое утверждение.

Предложение 3.2. *Пусть $b \in L^2(Y, d\mu)$, b_h — его естественное продолжение, $b^h \in L^2(Y, d\mu^h)$ удовлетворяет условию*

$$\int_Y |b^h - b_h|^2\, d\mu^h \to 0.$$

Тогда имеет место сильная сходимость $b^h \to b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$.

Скажем, что в *пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, \mu^h)$ возможен предельный переход*, когда

$$u^h \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h)^d, \quad e(u^h) \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h)^{\frac{d(d+1)}{2}} \tag{3.2}$$

и

$$(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, d\mu), \quad \text{т.е.} \quad v = e(u). \tag{3.3}$$

Введем следующие два предположения:

$$\forall u \in L^2(Y, d\mu) \quad \exists u^h \in L^2(Y, d\mu^h): \quad u^h \to u \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h); \tag{3.4}$$

для меры μ^h пространство жестких периодических перемещений состоит только из постоянных векторов

$$\mathcal{R}(\mu^h) = \mathbb{R}^d. \tag{3.5}$$

Оба условия легко проверяются для конкретных естественных мер на тонких структурах.

Теперь введем более тонкие аппроксимативные условия, связывающие меры μ и μ^h:

(i) для любых a, b, связанных отношением (2.3), найдутся $a^h \in L^2(Y, d\mu^h)^d$, $b^h \in L^2(Y, d\mu^h)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ такие, что

$$a^h = \operatorname{div} b^h \quad (\text{по мере} \quad \mu^h) \tag{3.6}$$

$$a^h \to a, \quad b^h \to b \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h); \tag{3.7}$$

(ii) если в (i) $a \equiv 0$, то и $a^h \equiv 0$ (сильная аппроксимируемость соленоидальных матриц).

Теорема 3.3. *Из аппроксимативного условия* (i) *следует возможность предельного перехода в* $\mathcal{H}_{\rm per}(Y, d\mu^h)$.

Доказательство. Для a^h и b^h из условия (i) и u^h из (3.2) имеем

$$\int_Y a^h \cdot u^h \, d\mu^h = -\int_Y b \cdot e(u^h) \, d\mu^h,$$

$$\int_Y a \cdot u \, d\mu = -\int_Y b \cdot v \, d\mu.$$

В силу произвольности пары a, b, по определению 2.3 соболевского пространства, выводим соотношение (3.3). Теорема доказана. □

Справедливо в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть в дополнение к условиям* (3.4), (3.5) *выполнено равномерное по* h *неравенство Корна*

$$\int_Y |\varphi|^2 \, d\mu^h \leqslant C \int_Y |e(\varphi)|^2 \, d\mu^h, \quad \varphi \in C^\infty_{\rm per}(Y)^d, \quad \int_Y \varphi \, d\mu^h = 0. \tag{3.8}$$

Тогда возможность предельного перехода в соболевском пространстве $\mathcal{H}_{\rm per}(Y, d\mu^h)$ *влечет выполнение аппроксимативных условий* (i), (ii).

Доказательство. Заметим, что вектор a из (2.3) имеет нулевое среднее: $\langle a \rangle = \int_Y a d\mu = 0$. Возьмем произвольные продолжения

$$\tilde{a}^h \to a, \qquad \tilde{b}^h \to b \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h), \tag{3.9}$$

что возможно, в силу предположения (3.4). Положив $a^h = \tilde{a}^h - \int_Y \tilde{a}^h d\mu^h$, получим

$$a^h \longrightarrow a \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h). \tag{3.10}$$

Рассмотрим периодическую задачу

$$u^h \in \mathcal{H}_{\rm per}(Y, d\mu^h), \qquad \operatorname{div} e(u^h) = \operatorname{div} \tilde{b}^h - a^h, \qquad \int_Y u^h d\mu^h = 0,$$

решение которой удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Y e(u^h) \cdot e(\varphi) \, d\mu^h = \int_Y \tilde{b}^h \cdot e(\varphi) \, d\mu^h + \int_Y a^h \cdot \varphi \, d\mu^h. \tag{3.11}$$

Существование решения и равномерная ограниченность u^h, $e(u^h)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ следуют из неравенства Корна (3.8). Переходя, если требуется, к подпоследовательности, можем считать, что имеют место соотношения (3.2), (3.3).

В тождестве (3.11) можно взять $\varphi = u^h$, и тогда

$$\int_Y e(u^h) \cdot e(u^h) \, d\mu^h = \int_Y \tilde{b}^h \cdot e(u^h) \, d\mu^h + \int_Y a^h \cdot u^h \, d\mu^h,$$

$$\lim_{h\to 0}\int_Y e(u^h)\cdot e(u^h)\,d\mu^h = \int_Y [b\cdot e(u)+a\cdot u]\,d\mu = 0,$$

в силу (3.9), (3.10), (2.4), т.е. $e(u^h)\longrightarrow 0$ в $L^2(Y,d\mu^h)$.

Полагая

$$b^h = \tilde b^h - e(u^h),$$

получаем сильную аппроксимацию матрицы b. Свойство (i) доказано. Свойство (ii) тоже доказано (см. выбор a^h по a). Теорема доказана. □

В теории усреднения вместо условия (i) можно рассматривать более слабое, но более простое для проверки условие:

(i)′ для любого вектора a из некоторого плотного в $\mathbb{R}^\perp$ множества найдутся a^h и b^h такие, что $a^h = \operatorname{div} b^h$ (по мере μ^h), $a^h\to a$, $b^h\to b$ в $L^2(Y,d\mu^h)$.

При замене условия (i) на (i)′ аналогом теоремы 3.3 служит следующая теорема.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены аппроксимативные условия* (i)′, (ii) *и неравенство Корна* (2.2). *Тогда возможен предельный переход в* $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y,d\mu^h)$.

Доказательство. Для u^h, $e(u^h)$ из соотношений (3.2) и b^h из аппроксимативного условия (ii) следуют равенства

$$0=\int_Y e(u^h)\cdot b^h\,d\mu^h,\qquad \int_Y v\cdot b\,d\mu = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $b\in V_{\mathrm{sol}}(Y,\mu)$, получаем $v\in V_{\mathrm{pot}}(Y,d\mu)$ и $v=e(\tilde u)$ (см. предложение 2.2). Установим связь между u, $\tilde u$. Для a^h, b^h из условия (i)′ выполняется равенство

$$\int_Y a^h\cdot u^h\,d\mu^h = -\int_Y b^h\cdot e(u^h)\,d\mu^h$$

или после перехода к пределу

$$\int_Y a\cdot u\,d\mu = -\int_Y b\cdot e(\tilde u)\,d\mu^h.$$

С другой стороны, поскольку a, b связаны соотношением (2.3) (следует из условия (i)′), то

$$-\int_Y b\cdot e(\tilde u)\,d\mu = \int_Y a\cdot \tilde u\,d\mu.$$

Следовательно,

$$\int_Y a(u-\tilde u)\,d\mu = 0,\quad \text{т.е.}\quad u-\tilde u\in\mathcal{R}\quad\text{и}\quad e(u)=e(\tilde u).$$

Соотношение (3.3) получено. Теорема доказана. □

Примерно такое же утверждение, как теорема 3.5, доказано в [1, § 16].

Наконец рассмотрим в качестве примера предельный переход в простейшем «переменном» соболевском пространстве, связанном с полосой

$$I^h = I\times\Big[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\Big],\quad I=[0,1]\times 0,$$

$$d\lambda^h = dx|_{I^h},\quad dx = dx_1dx_2 \text{ — плоская мера Лебега},\quad d\lambda = dx_1|_I.$$

Ясно, что $\lambda^h \rightharpoonup \lambda$.

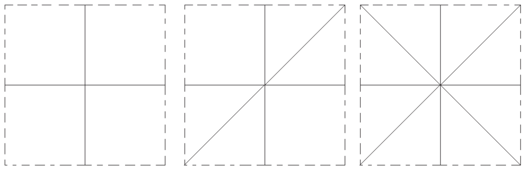

Рис. 1

Предложение 3.6. *Пусть*
$$u^h \rightharpoonup u, e(u^h) \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L^2(I^h, d\lambda^h). \tag{3.12}$$
Тогда вектор-функция $u = (u_1, u_2)$ *имеет компоненту* $u_1 \in H^1(I)$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = v_{11}$ *и, значит,* $v = e(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, α, $\beta \in L^2(I)$.

Это предложение выводится из следующих простых фактов:
$$\text{если } g^h \rightharpoonup g \text{ в } L^2(I^h, d\lambda^h), \quad \text{то} \quad \bar{g}^h(x_1) = \frac{1}{h}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g^h(x_1, x_2)\, dx_2 \rightharpoonup g \text{ в } L^2(I);$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{g}^h = \frac{1}{h}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial g^h}{\partial x_1}\, dx_2, \qquad |\bar{g}^h|^2_{H^1(I)} \leqslant \int \left(|g^h|^2 + \left|\frac{\partial g^h}{\partial x_1}\right|^2 \right) d\lambda^h,$$
а также свойств градиента $e(u)$ для $u \in \mathcal{H}(I, d\lambda)$, приведенных в примере 2.1.

Если отрезок I имеет произвольное направление τ, то предельная функция u из (3.12) удовлетворяет соотношениям
$$u \cdot \tau \in H^1(I), \quad v = e(u) = \frac{d(u\cdot\tau)}{d\tau}\tau \times \tau + z,$$
где $z \in \mathcal{E}(0)$.

Предложение 3.7. *Для вектора* u^h *из* (3.12) *поперечные средние* $\bar{u}_1^h$ *имеют сходимости*: $\bar{u}_1^h \rightharpoonup u_1$ *в* $H^1(I)$, $\bar{u}_1^h \to u_1$ *в* $C(I)$.

4. Соболевские пространства на тонких и составных структурах

4.1. В качестве тонких структур рассмотрим тонкие сетки на плоскости. Определим их точно.

Пусть F — 1-периодический граф на плоскости, называемый далее сингулярной сеткой, $Y = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)^2$ — ячейка периодичности. Тонкая сетка F^h получается из сетки F, если заменить каждое звено I в F на полосу I^h ширины h со средней линией, совпадающей с I. Иногда удобно включить в тонкую сетку F^h круги с центрами в узлах радиуса $h/2$. Процедура h-утолщения упрощается, если сетка F — *простейшая*, т.е. может быть составлена из нескольких семейств параллельных прямых. Тогда тонкая сетка F^h получается заменой каждой прямой l из сетки F на бесконечную полосу ширины h со средней линией l. К простейшим относятся сетки, изображенные на рис. 1, которые будем называть *модельными*. Пример сетки, не являющейся простейшей, дан на рис. 2.

Наделим сингулярную и тонкую сетки F и F^h *естественными мерами*. Пусть λ — мера, сосредоточенная на F и пропорциональная линейной мере Лебега, λ^h — мера, сосредоточенная на F^h и пропорциональная плоской мере Лебега. Меры λ, λ^h нормированы: $\displaystyle\int\limits_Y d\lambda = \int\limits_Y d\lambda^h = 1$. Ясно, что $\lambda^h \rightharpoonup \lambda$ при $h \to 0$.

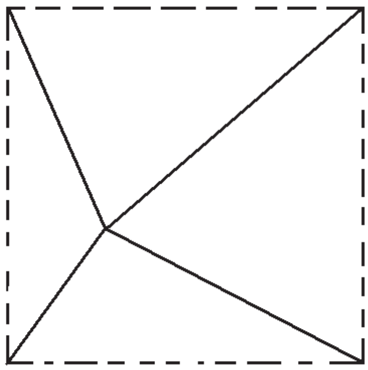

Рис. 2

Плоские армированные среды с армирующей составляющей в виде сингулярной или тонкой сетки можно описать с помощью составных мер

$$d\mu = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda, \qquad d\mu^h = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda^h, \tag{4.1}$$

где dx — плоская мера Лебега. Ясно, что $\int\limits_Y d\mu = \int\limits_Y d\mu^h = 1$, $\mu^h \rightharpoonup \mu$.

Приведем описание соболевских пространств теории упругости $\mathcal{H}(Y, d\lambda)$, $\mathcal{H}(Y, d\mu)$ для сеточной и составной мер λ и μ (см. [1, § 6]).

Далее τ — продольный орт на звене I. Рассматривая окрестность произвольного узла O сетки F, будем считать, что $I_1, \dots, I_m$ — все сходящиеся в узле O звенья и продольные орты $\tau_1, \dots, \tau_m$ выбраны на них выходящими из узла O.

Через $H^1(Y)$, $H^1(I)$ обозначим обычные соболевские пространства на квадрате Y и отрезке I с плоской или линейной мерой Лебега соответственно.

Предложение 4.1. *Функция $u \in \mathcal{H}(Y, d\lambda) \iff u \cdot \tau \in H^1(I)$ на каждом звене I; для каждого узла O найдется постоянный вектор C такой, что*

$$(u - C) \cdot \tau|_I(O) = 0 \tag{4.2}$$

для любого исходящего из узла O звена I.

Для составной меры μ из (4.1) любой элемент $g \in L^2(Y, d\mu)$ представлен парой $g = (g^0, \tilde{g})$, где $g^0 \in L^2(Y, dx)$, $\tilde{g} \in L^2(Y, d\lambda)$, и можно считать, что функция g^0 задана вне сетки F, а функция $\tilde{g}$, наоборот, на сетке F.

Предложение 4.2. *Функция $u \in \mathcal{H}(Y, d\mu) \iff u = (u^0, \tilde{u})$, где $u^0 \in H^1(Y)^2$, $\tilde{u} \in \mathcal{H}(Y, d\lambda)$; если $u^0\,|_F$ — след функции $u^0 \in H^1(Y)^2$, то $\tilde{u} = u^0\,|_F$.*

4.2. Изучим аппроксимативные условия и предельный переход в пространстве $\mathcal{H}(Y, d\lambda^h)$. Предварительно напомним некоторые факты, доказанные в [5, теоремы 3, 4]:

1) для меры $\mu = \lambda$ справедливо неравенство Корна (2.2);
2) периодическая матрица $z \in L^2(Y, d\lambda)^3$ соленоидальна тогда и только тогда, когда
   a) на каждом звене

$$z = b\tau \times \tau, \quad \text{где } b \text{ — некоторая константа;} \tag{4.3}$$

   b) в каждом узле O выполнено векторное равенство

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \tau_i = 0, \quad b_i = b|_{I_i}, \tag{4.4}$$

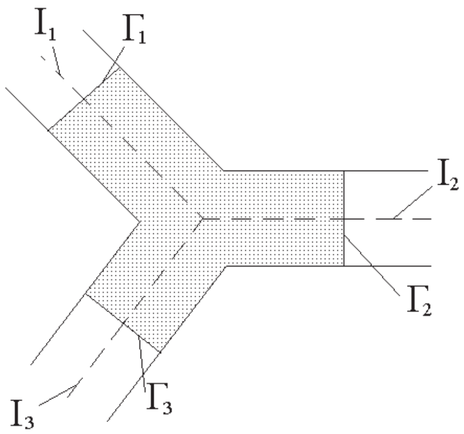

Рис. 3

где $I_1, \dots, I_m$ — все сходящиеся в узле O звенья.

Теорема 4.3. *В пространстве* $\mathcal{H}(Y, d\lambda^h)$ *выполнены аппроксимативные условия* (i), (ii).

Для доказательства этой теоремы полезны следующие два предложения.

Предложение 4.4. *В пространстве* $\mathcal{R}^\perp$ *плотно множество* S*, состоящее из векторов, равных нулю в* h*-окрестности каждого узла.*

Доказательство. Пусть найдется $v \in \mathcal{R}^\perp$ такой, что

$$\langle v \cdot \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in S. \tag{4.5}$$

Выбирая φ ненулевыми только на одном каком-то звене, выводим из (4.5) постоянство вектора v на каждом звене, т.е.

$$v = c\tau, \quad \tau \text{ — продольный орт},$$

где c — кусочно-постоянная функция с возможными скачками в узлах. Покажем, что $c \equiv 0$, тогда и $v \equiv 0$. Для этого возьмем в (4.5) $\varphi = \tilde{v}$, где $\tilde{v} = \tilde{c}\tau$, $\tilde{c} = 0$ в h-окрестности узлов и $\tilde{c} = c\dfrac{|I|}{|I| - 2h}$ на каждам звене I вне h-окрестности узлов. Тогда равенство в (4.5) возможно лишь при $c \equiv 0$, что и требовалось доказать. □

Предложение 4.5. *Вектор* $a \in \mathcal{R}^\perp$ *представим в виде*

$$a = \operatorname{div} e(u) \quad (\textit{по мере}\, \mu), \tag{4.6}$$

при этом выполнена оценка

$$\int\limits_Y |e(u)|^2 \, d\mu \leqslant c \int\limits_Y |a|^2 \, d\mu, \quad c = \mathrm{const}(F). \tag{4.7}$$

Разрешимость периодической задачи (4.6) в пространстве $H^1(Y, d\mu)$ и оценка (4.7) выводятся с помощью неравенства Корна (2.2) для сетки F.

Доказательство теоремы 4.3. Начнем с проверки свойства (ii). Для построения матрицы $b^h \in V_{\mathrm{sol}}(Y, d\mu^h)$, аппроксимирующей матрицу $b \in V_{\mathrm{sol}}(Y, d\mu)$, решим вспомогательную задачу в некоторой окрестности Q_h каждого узла O.

Определим окрестность Q_h как объединение круга радиуса $h/2$ с центром в узле O и m полос, у которых ширина равна h, длина — $2h$, а средняя линия лежит на I_i, и пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ — внешние торцы этих полос (см. рис. 3).

В области Q_h рассмотрим следующую задачу Неймана:

$$\operatorname{div} e(u) = 0 \quad \text{в} \quad Q_h, \qquad e(u)n \,|_{\partial Q_h} = g, \tag{4.8}$$

$$g = \begin{cases} bn = b_i\tau_i & \text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 & \text{на остальной части } \partial Q_h, \end{cases}$$

где n — единичная внешняя нормаль к ∂Q_h, $b_i\tau_i \times \tau_i = b\,|_{I_i}$.

Далее без потери общности считаем, что узел O находится в начале координат.

Задача (4.8) разрешима, так как вектор-функция g удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\partial Q_h} g(x) \cdot r(x)\, d\sigma = 0, \tag{4.9}$$

где $r(x)$ — произвольное жесткое перемещение на плоскости, т.е. $r(x) = c + t(-x_2, x_1)$, $c \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}^1$. В самом деле, для постоянного вектора $r(x) = c$

$$\int\limits_{\partial Q_h} g(x) \cdot r(x)\, d\sigma = \sum_i \int\limits_{\Gamma_i} b_i\tau_i \cdot c\, d\sigma = hc \cdot \sum_i b_i\tau_i = 0,$$

в силу согласования (4.4). Для вектора $r(x) = (-x_2, x_1)$ имеем

$$\tau_i \cdot (-x_2, x_1) = \nu_i \cdot x,$$

где ν_i — орт, идущий вдоль торца Γ_i, (τ_i, ν_i) — правая двойка векторов. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_i} g(x) \cdot r(x)\, d\sigma_i = b_i \int\limits_{\Gamma_i} \tau_i \cdot (-x_2, x_1)\, d\sigma_i = b_i \int\limits_{\Gamma_i} x \cdot \nu_i\, d\sigma_i = 0,$$

откуда следует условие (4.9).

Решение задачи (4.8) определяется с точностью до жесткого перемещения. Выберем $u(x)$ так, чтобы

$$\int\limits_{Q_h} u(x) \cdot r(x)\, dx = 0 \quad \forall r(x). \tag{4.10}$$

Докажем для выбранного решения оценку

$$\int\limits_{Q_h} |e(u)|^2\, dx \leqslant Ch^2. \tag{4.11}$$

Из интегрального тождества для решения задачи (4.8) следует равенство

$$\int\limits_{Q_h} |e(u)|^2\, dx = \int\limits_{\partial Q_h} e(u)n \cdot u\, d\sigma = \sum_i \int\limits_{\Gamma_i} b_i\tau_i \cdot u\, d\sigma_i. \tag{4.12}$$

Теперь воспользуемся неравенством Корна

$$\int\limits_{Q_h} |\nabla u|^2\, dx \leqslant C \int\limits_{Q_h} |e(u)|^2\, dx,$$

которое справедливо при условии (4.10), и неравенством для следа скалярной функции

$$\int\limits_{\partial Q_h} v^2 d\sigma \leqslant h \int\limits_{Q_h} |\nabla v|^2\, dx,$$

которое справедливо при условии $\int\limits_{Q_h} v\, dx = 0$. Из этих неравенств получаем

$$\int\limits_{\partial Q_h} |u|^2 d\sigma \leqslant ch \int\limits_{Q_h} |e(u)|^2\, dx.$$

Отсюда и из равенства (4.12) следует

$$\int\limits_{Q_h} |e(u)|^2\,dx \leqslant ch \left(\int\limits_{Q_h} |e(u)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

и оценка (4.11) доказана.

Теперь положим

$$b^h = \begin{cases} e(u) & \text{в} \quad Q_h, \\ b_h & \text{вне} \quad Q_h, \end{cases}$$

где b_h — естественное продолжение соленоидальной матрицы b. Легко понять, что $b^h \in V_{\rm sol}(Y, d\mu^h)$. Кроме того, $b^h \to b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$, в силу (4.11) и предложения 2.2. Тем самым, аппроксимативное свойство (ii) проверено.

Проверим аппроксимативное свойство (i). Пусть a, b связаны соотношением (2.3). Найдем $a^h \in \mathcal{R}^\perp$ такие, что $a^h \to a$ в $L^2(Y, d\mu)^2$, $a^h \equiv 0$ в $4h$-окрестности каждого узла (см. предложение 4.4). Вектор a^h представим в виде (см. предложение 4.5)

$$a^h = \operatorname{div} B^h \quad (\text{по мере}\,\mu),$$

где $B^h = e(z^h)$, $B^h \to B$ в $L^2(Y, d\mu)^3$, $B = e(z)$,

$$a = \operatorname{div} B \quad (\text{по мере}\,\mu).$$

Вне окрестностей Q_h всех узлов сетки F вектор a^h и матрицу B^h продолжим естественным образом. В окрестности узлов матрица B^h соленоидальна, и ее можно продолжить в области Q_h указанным выше способом с помощью задачи Неймана. Полученные таким образом продолжения обозначаем, по-прежнему, через a^h и B^h. Для них

$$a^h = \operatorname{div} B^h \quad (\text{по мере}\,\mu^h), \quad a^h \to a, \quad B^h \to B \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h).$$

Поскольку свойство сильной аппроксимируемости соленоидальных матриц проверено, то для $s = b - B \in V_{\rm sol}(Y, d\mu)$ найдется сильная аппроксимация $s^h \in V_{\rm sol}(Y, d\mu^h)$. Тогда $b^h = B^h + s^h$ — искомая сильная аппроксимация для матрицы b, так как

$$a^h = \operatorname{div} b^h \quad (\text{по мере}\,\mu^h), \quad a^h \to a, \quad b^h \to b \quad \text{в} \quad L^2(Y, d\mu^h).$$

Оба аппроксимативных свойства установлены. Теорема доказана. □

Из теорем 4.3, 3.3 вытекает следующее предложение.

Предложение 4.6. *В пространстве $\mathcal{H}(Y, d\lambda^h)$ возможен предельный переход.*

Дадим другое, не опирающееся на теорему 3.3, доказательство предложения 4.6, которое использует лишь аппроксимативное условие (ii) — сильную аппроксимируемость соленоидальных матриц.

Пусть u^h, $e(u^h)$ удовлетворяют соотношениям (3.2). Не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{supp} u^h$ содержит только один узел O. Из описания пространства $\mathcal{H}(Y, d\lambda)$ (см. предложение 4.1), а также из предложения 3.6 следует необходимость проверки лишь условия согласования (4.2) для предельной функции u в узле O. Переформулируем это условие в более удобном виде.

Продольным ортам $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$ на звеньях I_i, $i = 1, \ldots, m$, сходящихся в узле O, сопоставим векторы

$$\tau^{(1)} = (\tau_1^1, \ldots, \tau_m^1), \quad \tau^{(2)} = (\tau_1^2, \ldots, \tau_m^2), \quad t = (u \cdot \tau_1, \ldots, u \cdot \tau_m)\,|_O\,.$$

Пусть $L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ — линейная оболочка векторов $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ в $\mathbb{R}^m$, тогда условие (4.2) эквивалентно тому, что

$$t \in L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}). \tag{4.13}$$

Для $z \in V_{\rm sol}(Y, d\lambda)$ возьмем сильную аппроксимацию z^h, построенную при доказательстве теоремы 4.3. Тогда из свойств этой матрицы выводим соотношения:

$$0 = \int\limits_Y e(u^h) \cdot z^h \, d\lambda^h, \qquad \lim_{h\to 0} \int\limits_{Y\setminus Q_h} e(u^h) \cdot z^h \, d\lambda^h = 0,$$

$$\int\limits_{Y\setminus Q_h} e(u^h) \cdot z^h \, d\lambda^h = -\sum_i \frac{1}{h} \int\limits_{\Gamma_i} z^h u^h \tau_i \, d\sigma = \sum_i b_i \frac{1}{h} \int\limits_{\Gamma_i} u^h \cdot \tau_i \, d\sigma = -\sum_i b_i t_i^h,$$

где $t_i^h = \dfrac{1}{h} \int\limits_{\Gamma_i} u^h \cdot \tau_i \, d\sigma \to t_i = u \cdot \tau_i \,|_O$ при $h \to 0$ (см. предложение 3.7). Следовательно, $0 = \sum\limits_i b_i t_i$, т.е. $b \cdot t = 0$, где $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Поскольку вектор

$$b \in L(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})^\perp$$

(эквивалентная формулировка условия согласования (4.4)), то искомое условие (4.13) получено. Предложение 4.6 доказано.

4.3. Изучим аппроксимативные условия и предельный переход в пространстве $\mathcal{H}(Y, d\mu^h)$, μ^h — составная мера из (4.1).

Предложение 4.7. *В пространстве $\mathcal{H}(Y, d\mu^h)$ возможен предельный переход.*

Доказательство. Пусть $u^h \rightharpoonup u$, $e(u^h) \rightharpoonup v$ в $L^2(Y, d\mu^h)$, тогда $u = (u^0, \tilde u)$, $v = (v^0, \tilde v)$,

$$\begin{aligned} &u^h \rightharpoonup u^0, \qquad && e(u^h) \rightharpoonup v^0 \qquad && \text{в} \quad L^2(Y), \\ &u^h \rightharpoonup \tilde u, && e(u^h) \rightharpoonup \tilde v && \text{в} \quad L^2(Y, d\lambda^h). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Предельный переход возможен в переменном пространстве $\mathcal{H}(Y, d\lambda^h)$ (см. предложение 4.6), а также в обычном соболевском пространстве периодических вектор-функций $H^1(Y)^2$. Поэтому из (4.14) следует $v^0 = e(u^0)$ и $u^0 \in H^1(Y)^2$, $\tilde v = e(\tilde u)$ и $\tilde u \in \mathcal{H}(Y, d\lambda)$. Кроме того, из неравенства

$$\int\limits_Y g^2 \, d\lambda^h \leqslant \delta \int\limits_Y |\nabla g|^2 \, dx + C_\delta \int\limits_Y g^2 \, dx, \quad g \in C^\infty(\overline{Y}),$$

можно вывести соотношение $u^0|_F = \tilde u$. И, значит, $u = (u^0, \tilde u) \in \mathcal{H}(Y, d\mu)$ (см. предложение 4.2). $\square$

Предложение 4.8. *Для составной меры μ^h из* (4.1) *имеют место равномерные неравенства Корна и Пуанкаре*

$$\int\limits_Y |u|^2 \, d\mu^h \leqslant C_1 \int\limits_Y |e(u)|^2 \, dx, \quad u \in C^\infty_{\rm per}(Y)^2, \quad \int\limits_Y u \, d\mu^h = 0, \tag{4.15}$$

$$\int\limits_Y v^2 \, d\mu^h \leqslant C_2 \int\limits_Y |\nabla v|^2 \, dx, \quad v \in C^\infty_{\rm per}(Y), \quad \int\limits_Y v \, d\mu^h = 0, \tag{4.16}$$

где константы C_1, C_2 не зависят от h.

Доказательство. Из равномерного (по h) неравенства для прямоугольника $\Pi = [0, a] \times [0, b]$, в котором выделена полоса $\Pi^h = [0, h] \times [0, b]$,

$$\frac{1}{h} \int\limits_{\Pi^h} \varphi^2 \, dx \leqslant c_1 \int\limits_\Pi (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) \, dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Pi}), \quad c_1 = \mathrm{const}(\Pi),$$

а также обычного неравенства Пуанкаре

$$\int\limits_Y \varphi^2 \, dx \leqslant c_2 \int\limits_Y |\nabla\varphi|^2 \, dx, \quad \varphi \in C^\infty_{\rm per}(Y), \quad \int\limits_Y \varphi \, dx = 0,$$

выводим неравенство

$$\int\limits_Y \varphi^2\, d\mu^h \leqslant C \int\limits_Y |\nabla\varphi|^2\, dx, \quad \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y), \quad \int\limits_Y \varphi\, dx = 0.$$

Полагая в нем $\varphi = v - m$, $m = \int\limits_Y v\, dx$, получаем

$$\int\limits_Y (v-m)^2\, d\mu^h \leqslant C \int\limits_Y |\nabla v|^2\, dx, \quad v \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y).$$

Отсюда следует неравенство Пуанкаре (4.16) для скалярных функций.

Следовательно, для вектор-функций имеем неравенство

$$\int\limits_Y |u|^2\, d\mu^h \leqslant C \int\limits_Y |\nabla u|^2\, dx, \quad u \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^2, \quad \int\limits_Y u\, d\mu^h = 0,$$

из которого, используя обычное неравенство Корна для меры Лебега

$$\int\limits_Y |\nabla u|^2\, dx \leqslant C \int\limits_Y |e(u)|^2\, dx, \quad u \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^2,$$

выводим неравенство (4.15). Предложение доказано. □

Поскольку неравенство (4.12) влечет неравенство Корна (3.8), то из возможности предельного перехода в пространстве $\mathcal{H}(Y, d\mu^h)$, в силу теоремы 3.4, выводим следующее предложение.

Предложение 4.9. *Для составных мер* μ^h, μ *из* (4.1) *выполнены аппроксимативные условия* (i)*,* (ii).

5. Проверка аппроксимативных условий для структур с особой геометрией

В § 4 при проверке аппроксимативных свойств мер использовались либо непосредственные конструкции (специальная склейка соленоидальных полей в окрестности узлов, естественное продолжение вдали от узлов), либо возможность предельного перехода в переменном соболевском пространстве. Оба метода проверки допускают произвольную геометрию сингулярной сетки F. Приведем еще два метода проверки, которые применимы только в случае, если F обладает особой геометрией.

5.1. Пусть F — простейшая сетка (см. § 4), причем каждая ее прямая параллельна одному из двух заданных направлений. Самый простой пример такой сетки — квадратная (первая на рис. 1). При сделанном предположении *естественные меры* (сеточная λ^h и составная μ^h, см. (4.1)), по существу, совпадают с подходящими *мерами сглаживания*, для которых справедлив общий факт, доказанный В. В. Жиковым [1, § 16]: пусть m — произвольная периодическая борелева мера, и $\tilde{m}^h$ — любое ее сглаживание с допустимым ядром сглаживания (см. [1, § 3]), тогда меры m, $\tilde{m}^h$ связаны аппроксимативными условиями.

Проверим аппроксимативные условия для естественной меры μ^h на составной структуре с квадратной сеткой, доказав, что мера μ^h близка к некоторой мере сглаживания.

1°. Для меры μ строим меру сглаживания $\tilde{\mu}^h$, определенную соотношением

$$\int\limits_Y \varphi\, d\tilde{\mu}^h = \int\limits_Y (\varphi)_h\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\mathrm{per}}(Y),$$

где $(\varphi)_h$ — сглаживание с ядром $\omega(y) = \chi_Y(y)$ (характеристическая функция единичного квадрата Y)

$$(\varphi)_h(x) = h^{-2} \int \varphi(x-y)\omega(h^{-1}y)\, dy.$$

Сравним меру μ^h из (4.1) с мерой сглаживания $\tilde{\mu}^h$. Обе они абсолютно непрерывны относительно плоской меры Лебега

$$\tilde{\mu}^h = \tilde{\rho}^h(x)dx, \qquad \mu^h = \rho^h(x)dx,$$

где $\tilde{\rho}^h(x) = h^{-2}\displaystyle\int_{x+Y_h} d\mu(y)$, $Y_h = [-h/2, h/2)^2$ и, значит,

$$\tilde{\rho}^h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{вне } F^h, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4h} & \text{на} \quad F^h \setminus Y_h, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2h} & \text{на} \quad Y_h, \end{cases}$$

$$\rho^h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{вне} \quad F^h, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4h}(1 + O(h)) & \text{на} \quad F^h. \end{cases}$$

Видим, что вне Y_h плотности $\tilde{\rho}^h(x)$, $\rho^h(x)$, по существу, совпадают.

2°. Меры μ и $\tilde{\mu}^h$ связаны аппроксимативными условиями. Тогда для a и b, удовлетворяющих соотношению (2.3), найдутся вектор $\tilde{a}^h$ и матрица $\tilde{b}^h$, удовлетворяющие соотношению

$$\tilde{a}^h = \operatorname{div} \tilde{b}^h \quad (\text{по мере}\, \tilde{\mu}^h),$$

т.е.

$$\int_Y \tilde{b}^h \cdot e(\varphi)\, d\tilde{\mu}^h = -\int_Y \tilde{a}^h \cdot \varphi\, d\tilde{\mu}^h \quad \text{для любого} \quad \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^2.$$

Положим

$$b^h = \tilde{b}^h \frac{\tilde{\rho}^h}{\rho^h}, \qquad a^h = \tilde{a}^h \frac{\tilde{\rho}^h}{\rho^h}.$$

Тогда, по построению, a^h, b^h удовлетворяют соотношению (3.6). Остается проверить сходимости (3.7), которые вытекают из следующих трех утверждений.

Предложение 5.1. *Сходимость $g^h \rightharpoonup g$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ достаточно проверять на пробных функциях из множества*

$$\Pi = \{\varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y) : \varphi = 0 \quad \textit{в окрестности узлов сетки } F\}.$$

Для доказательства этого предложения достаточно заметить, что множество Π плотно в $L^2(Y, d\mu^h)$ и $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$.

Из предложения 5.1, учитывая структуру плотностей $\tilde{\rho}^h$, ρ^h, получаем следующее предложение.

Предложение 5.2. *Для мер $\tilde{\mu}^h$, μ^h*

$$v^h \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad L^2(Y, d\mu^h) \Longleftrightarrow v^h \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad L^2(Y, d\tilde{\mu}^h).$$

Наконец, справедливо следующее предложение.

Предложение 5.3. *Если $\tilde{g}^h \to g$ в $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$, то $g^h = \tilde{g}^h \dfrac{\tilde{\rho}^h}{\rho^h} \to g$ в $L^2(Y, d\mu^h)$.*

Доказательство. Возьмем произвольную $v^h \rightharpoonup v$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. В силу предложения 5.2, одновременно имеется сходимость $v^h \rightharpoonup v$ в $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$. Тогда

$$\int_Y g^h v^h\, d\mu^h = \int_Y \tilde{g}^h v^h\, d\tilde{\mu}^h \to \int_Y gv\, d\mu$$

по определению сильной сходимости $\tilde{g}^h$ в $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$. Но последнее соотношение означает также искомую сходимость $g^h \to g$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Предложение доказано. $\square$

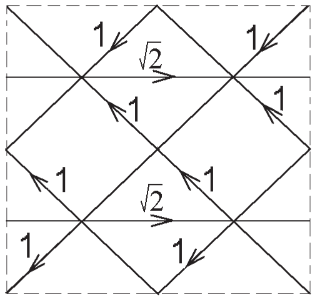

Рис. 4

Вместе с тем доказано аппроксимативное условие (i) для меры μ^h. Аппроксимативное условие (ii) для меры μ^h доказывается аналогично.

5.2. Для проверки аппроксимативных свойств естественных мер, сосредоточенных на сетках, хронологически первым был использован метод расщепления пространства $V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$ (см. [1, § 12]). Это крайне редкое явление наблюдается для естественных мер λ, сосредоточенных на модельных сетках (см. рис. 1). Заметим, что любая модельная сетка F составлена из двух, или трех, или четырех семейств параллельных прямых F_i, т.е.

$$F = \bigcup_i F_i, \qquad F_i \cap Y = I_i, \tag{5.1}$$

где I_i — отрезок в единичном квадрате Y, соединяющий либо диаметрально противоположные вершины, либо середины противоположных сторон. Скажем, что для меры λ, сосредоточенной на модельной сетке, имеет место расщепление пространства $V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$, если

$$b \in V_{\text{sol}}(Y, d\lambda) \iff b\,|_{F_i} \in V_{\text{sol}}(Y, d\lambda_i) \quad \text{для каждой меры} \quad \lambda_i = \lambda\,|_{F_i}\,. \tag{5.2}$$

Согласно (4.3), в случае, когда $F \cap Y = I$ — один отрезок и, значит, в сетке F отсутствуют узлы, любые постоянные тангенцильные матрицы, и только они, являются соленоидальными.

Предложение 5.4. 1°. *Для любой модельной сетки F с ячейкой периодичности $Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$ имеет место расщепление пространства $V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$ (см.* (5.2)*).*

2°. *Для модельной сетки, содержащей не менее трех семейств параллельных прямых F_i, с ячейкой периодичности $Y = [-1, 1)^2$ принцип расщепления* (5.2) *не выполняется.*

Доказательство. 1°. Используя свойства (4.3), (4.4) для $z \in V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$, убедимся в том, что z постоянна вдоль каждого отрезка I_i из разложения (5.1) и b из формулы (4.3) может быть произвольной постоянной. Для вертикального и горизонтального отрезков I_i (см. рис. 1 и разложение (5.1)) это следует из соображений периодичности, а для наклонных отрезков I_i — из следующего наблюдения: соленоидальная матрица постоянна вдоль прямой в окрестности узла, где пересекаются две прямые (см. условие (4.4)).

2°. На рис. 4 дан «портрет» нерасщепляющейся матрицы $z \in V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$. В соответствии с равенством (4.3), чтобы предъявить матрицу $z \in V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$, надо задать на всех звеньях сетки F константу b и направление продольного орта τ. Это сделано на рис. 4 для каждого звена I, где $b|_I \neq 0$. Видим, что условие согласования (4.4) выполнено во всех узлах, а вдоль каждой прямой кусочно-постоянная функция $b(y)$ из (4.3) принимает два значения: нулевое и ненулевое. Следовательно, изображенная на рис. 4 матрица $z \in V_{\text{sol}}(Y, d\lambda)$ «не расщепляется». Предложение доказано. □

Покажем, как можно проверить аппроксимативные свойства меры λ^h на основе принципа расщепления (5.2).

Из расщепления пространства $V_{\mathrm{sol}}(Y, d\lambda)$ следует аналогичное расщепление $V_{\mathrm{pot}}(Y, d\lambda)$, а значит, и следующее расщепление:

$$a = \operatorname{div} b \quad (\text{по мере}\, \lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \operatorname{div} b \quad (\text{по мере}\, \lambda_i)$$

для каждой меры $\lambda_i = \lambda\,|_{F_i}$. В этом случае аппроксимативные условия (i), (ii) достаточно проверить лишь для отрезка $I = [0,1]\times\{0\}$ с мерой $d\lambda = dx_1\,|_I$, когда, в соответствии со структурой множеств $\mathcal{R}$ и $\mathcal{E}(0)$ (см. пример 2.1), отношение $a = \operatorname{div} b$ (по мере λ) сводится к равенству

$$\int\limits_I a_1(x_1)\varphi_1(x)\,dx_1 = -\int\limits_I b_{11}(x_1)\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}\,dx_1, \tag{5.3}$$

где $a = (a_1, 0)$, $b = b_{11}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Если рассматривать a, b на полосе $I^h = [0,1]\times\left[-\dfrac{h}{2}, \dfrac{h}{2}\right]$, равенство (5.3) естественно переходит в равенство на полосе I^h

$$\int\limits_{I^h} a\cdot\varphi\,d\lambda^h = -\int\limits_{I^h} b\cdot e(\varphi)\,d\lambda^h, \quad d\lambda^h = dx\,|_{I^h},$$

что означает $a = \operatorname{div} b$ (по мере λ^h). Сильная сходимость построенных аппроксимаций очевидна. Аппроксимативные условия (i), (ii) для отрезка проверены.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02–01–00114 и Мин. образования РФ, проект № Е02–157.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиков В. В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 81–148.
2. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 31–72.
3. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 5. — С. 61–96.
4. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 8. — С. 27–58.
5. *Пастухова С. Е.* Об аппроксимативных свойствах соболевских пространств теории упругости на тонких стержневых структурах// Соврем. мат. и ее прил. — 2004. — *12*. — С. 99–106.
6. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных и стержневых каркасах критической толщины// Соврем. мат. и ее прил. — 2004. — *12*. — С. 51–98.
7. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости для периодической составной структуы// Докл. РАН. — 2004. — *395*, № 3. — С. 1–6.
8. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence //SIAM J. Math. Anal. — 1992. — *23*, № 5. — С. 1482–1518.
9. *Chechkin G. A., Jikov V. V., Lukakassenn D., Piatnitski A. L.* On homogenization of networks and junctions// Asymptotic Anal. — 2002. — *30*, № 1. — С. 61–80.
10. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of gomogenization// SIAM J. Math. Anal. — 1989. — *20*, № 5. — С. 608–623.
11. *Shumilova V. V.* On approximative properties for thin structures// Cont. Math. and Appl. — 2003. — *9*. — С. 231–234
12. *Zhikov V. V.* Note on Sobolev space// Cont. Math. and Appl. — 2003. — *10*. — С. 54–58.

С. Е. Пастухова
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет)
E-mail: leonowmw@cs.msu.su

Современная математика и ее приложения. Том 16 (2004). С. 64–97

УДК 517.986.7,517.956.326

УСРЕДНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ТОНКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП В ПЕРЕМЕННОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2004 г. **С. Е. ПАСТУХОВА**

Аннотация. В абстрактном переменном гильбертовом пространстве исследована резольвентная сходимость неотрицательных самосопряженных операторов, когда пределом резольвент служит псевдорезольвента (ситуация, характерная для задач теории упругости на тонких периодических структурах). В частности, резольвентная сходимость влечет сходимость полугрупп и проекционных операторов. На основе сходимости гиперболических полугрупп получено усреднение задач, указанных в названии статьи, причем с различным типом сходимости: поточечной по времени или в среднем по времени. Кроме того, изучены спектр предельного оператора теории упругости и сходимость к нему спектра исходного оператора соответствующей стационарной задачи при ее усреднении.

СОДЕРЖАНИЕ

0. Введение

1. Многие задачи в классической теории усреднения имеют вид операторных уравнений

$$A_\varepsilon u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f, \tag{0.1}$$

где $\lambda > 0$, A_ε — неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H типа L^2-пространства. Сам принцип усреднения формулируется в виде сильной сходимости решений

$$u_\varepsilon \to u \tag{0.2}$$

к решению операторного уравнения

$$Au + \lambda u = f, \tag{0.3}$$

где A — также неотрицательный самосопряженный оператор в том же пространстве H, называемый *усредненным* или *предельным*. Соотношения (0.1)–(0.3) означают сильную резольвентную сходимость в пространстве H

$$(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} f \to (A + \lambda)^{-1} f \tag{0.4}$$

ISSN 1512–1712

для любого $f \in H$ и любого $\lambda > 0$ (достаточно для $\lambda = 1$). По классической теореме Троттера—Като из сходимости (0.4) следует сходимость полугрупп

$$e^{-tA_\varepsilon} f \to e^{-tA} f \quad \forall t \geqslant 0,$$

которая эквивалентна тому, что решения эволюционных операторных уравнений в пространстве H

$$u'_\varepsilon(t) + A_\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0, \quad u_\varepsilon(0) = f,$$
$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = f,$$

связаны сильной поточечной сходимостью. Приведенные уравнения относятся к параболическому типу. Аналогично с помощью теоремы Троттера—Като изучается сходимость гиперболических операторных уравнений

$$u''_\varepsilon(t) + A_\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0, \quad u_\varepsilon(0) = v, \quad u'_\varepsilon(0) = w.$$

В качестве примера, когда справедлив классический принцип усреднения (0.1)–(0.3), рассмотрим задачу Дирихле

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad -\operatorname{div}(a(\varepsilon^{-1}x)\nabla u) + u = f \in L^2(\Omega) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

где Ω — область в $\mathbb{R}^d$, $a(y)$ — измеримая 1-периодическая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности и ограниченности. Предельная задача имеет вид

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad -\operatorname{div} a^{\mathrm{hom}} \nabla u + u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

где a^{hom} — некоторая постоянная матрица, называемая *усредненной*. Из резольвентной сходимости (0.4) для операторов, отвечающих этим задачам, с помощью теоремы Троттера—Като выводится усреднение для соответствующих параболической и гиперболической задач.

Однако в теории усреднения рассматриваются и такие задачи, для которых изложенная выше стройная схема не проходит по следующим причинам.

(i) Последовательность решений уравнения (0.1) не может быть компактной в L^2-пространстве, тогда о сильной сходимости (0.4) речь уже не идет.

(ii) Исходный оператор A_ε действует в переменном пространстве H_ε типа $L^2(\Omega_\varepsilon)$, где Ω_ε — переменная область.

В случае (i) тем не менее последовательность решений u_ε ограничена в L^2-норме, и можно было бы искать уравнение, которому удовлетворяет слабый предел. Но этот подход непродуктивен, поскольку со слабой сходимостью связаны различные патологии, в частности, исходное уравнение может потерять резольвентный вид. Важным примером здесь является модель двойной пористости. Выяснилось, что при усреднении этой модели сильную резольвентную сходимость требуется заменить на сильную двухмасштабную резольвентную сходимость. Это понятие было введено в [2] и обсуждается подробнее ниже.

Случай (ii) охватывает задачи в перфорированной области Ω_ε, а также все другие задачи, которые можно записать с помощью интегрального тождества в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ с осциллирующей мерой μ_ε. Например, в случае перфорированной области Ω_ε, полученной «перфорацией» из области Ω, имеем меру μ_ε, заданную соотношением $d\mu_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x)dx$, где $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция области $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, dx — мера Лебега. Сталкиваясь при усреднении с переменным гильбертовым пространством H_ε, необходимо прежде всего осмыслить сходимость элементов из переменного пространства H_ε, а также сходимость операторов, действующих в переменном пространстве H_ε. Это лишь одна из проблем, которая успешно решается с помощью понятий слабой и сильной сходимости в переменном пространстве.

В задачах теории упругости на тонких структурах обнаруживается комбинация проблем типа (i) и (ii), так что семейство решений не является сильно компактным в соответствующем переменном пространстве. Выходом из этой ситуации снова является идея двухмасштабного предела.

2. Перечислим основные виды сходимости, встречающиеся в теории усреднения.

1°. *Сходимость в переменном пространстве* $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Пусть меры μ_ε, μ — меры Радона в Ω такие, что $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$, т.е. $\int\limits_\Omega \varphi d\mu_\varepsilon \to \int\limits_\Omega \varphi d\mu$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Скажем, что ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$

последовательность u_ε слабо сходится к функции $u \in L^2(\Omega, d\mu)$, $u_\varepsilon(x) \rightharpoonup u(x)$, если

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon \varphi\, d\mu_\varepsilon \to \int\limits_\Omega u\varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Скажем, что $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ сильно сходится к $u \in L^2(\Omega, d\mu)$, $u_\varepsilon \to u(x)$, если

$$\int\limits_\Omega v_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x)\, d\mu_\varepsilon \to \int\limits_\Omega v(x)u(x)\, d\mu, \quad \text{как только} \quad v_\varepsilon \rightharpoonup v(x).$$

Сходимость в переменном L^2-пространстве рассматривалась в работах В. В. Жикова, в связи с его известным подходом к задачам усреднения (Zhikov measure approach) [2–4].

2°. *Двухмасштабная сходимость.* Пусть $Y = [0,1)^d$ — ячейка периодичности с мерой Лебега dy. По определению, ограниченная в $L^2(\Omega, dx)$ последовательность $u_\varepsilon(x)$ слабо двухмасштабно сходится к функци $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$, $u_\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} u(x,y)$, если

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \to \int\limits_\Omega \int\limits_Y u(x,y)\varphi(x) by\, dx\, dy$$

для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $b(y) \in C_{\rm per}^\infty(Y)$.

Скажем, что $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ сильно двухмасштабно сходится к функции $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$, $u_\varepsilon \overset{2}{\longrightarrow} u(x,y)$, если

$$\int\limits_\Omega v_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x)\, dx \to \int\limits_\Omega \int\limits_Y v(x,y)u(x,y)\, dx\, dy, \quad \text{как только} \quad v_\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y).$$

Двухмасштабная сходимость введена Г. Нгуетсенгом [27] и развита в [23]. Термины «слабая и сильная двухмасштабные сходимости» появились в работах В. В. Жикова.

3°. *Двухмасштабная сходимость с мерой.* Пусть μ — произвольная 1-периодическая нормированная борелева мера, μ_ε — ε-периодическая мера, заданная соотношением

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}B) \tag{0.5}$$

для любого борелева множества $B \subset \mathbb{R}^d$. Легко понять, что $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \to 0$.

По определению, ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ последовательность функций u_ε слабо двухмасштабно сходится к $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$, $u_\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} u(x,y)$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, если

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\mu_\varepsilon \to \int\limits_\Omega \int\limits_Y u(x,y)\varphi(x) b(y)\, dx\, d\mu(y) \tag{0.6}$$

для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $b(y) \in C_{\rm per}^\infty(Y)$.

Скажем, что $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ сильно двухмасштабно сходится к функции $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$, если

$$\int\limits_\Omega v_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x)\, dx \to \int\limits_\Omega \int\limits_Y v(x,y)u(x,y)\, dx\, d\mu, \quad \text{как только} \quad v_\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon).$$

4°. *Двухмасштабная сходимость с переменной мерой.* Пусть 1-периодическая нормированная борелева мера μ^h зависит от параметра $h \to 0$, при этом имеет место слабая сходимость ее к мере μ: $\mu^h \rightharpoonup \mu$, т.е. $\int\limits_Y \varphi d\mu^h \to \int\limits_Y \varphi d\mu$ $\forall \varphi \in C_{\rm per}^\infty(Y)$. Введем ε-периодическую меру μ_ε^h, заданную соотношением (0.5). Свяжем параметры ε, h, положив $h = h(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Легко понять, что имеет место слабая сходимость мер $\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^{h(\varepsilon)}$ к мере Лебега: $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$.

Для ограниченной в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ последовательности $u_\varepsilon(x)$ имеем сходимость $u_\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, если выполнено соотношение (0.6), где $\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^{h(\varepsilon)}$. Сильная двухмасштабная сходимость определяется аналогично.

Введем соответствующую резольвентную сходимость. Пусть A_ε — неотрицательный самосопряженный оператор в $H_\varepsilon = L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, A_0 — неотрицательный самосопряженный оператор в некотором подпространстве H_0 пространства $H = L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$, $P : H \to H_0$ — ортопроектор. Тогда сильная двухмасштабная резольвентная сходимость означает:

$$\forall\lambda > 0 \quad (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} f_\varepsilon \xrightarrow{2} (A_0 + \lambda)^{-1} P f \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon), \quad \text{как только} \quad f_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} f(x, y) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon). \tag{0.7}$$

Обратим внимание на то, что в (0.7) пределом резольвент служит псевдорезольвента — оператор-функция, удовлетворяющая резольвентному уравнению, но не являющаяся резольвентой (см. [13, с. 299]).

Двухмасштабная сходимость с мерой, в том числе переменной, введена и изучена В. В. Жиковым [2, 5–7] и рассматривалась также Ж. Бушитте и И. Фрагала [24]. В работах В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой [6, 8–10, 15–19] эта сходимость играет основную роль при усреднении задач теории упругости на тонких структурах, в частности, принцип усреднения стационарных задач доказан в форме резольвентной сходимости (0.7). Для усреднения аналогичной нестационарной задачи теории упругости требуется вывести из резольвентной сходимости (0.7) сходимость соответствующей гиперболической полугруппы. Это и составляет основное содержание настоящей работы.

Вопросы о сходимости полугрупп и другие вопросы анализа в переменных пространствах обсуждались в работах и лекциях В. В. Жикова. В § 1 приводится изложенная в его лекции теорема Троттера—Като в переменном пространстве при резольвентной сходимости, охватывающей и случай (0.7) с псевдорезольвентой в пределе (ситуация, ранее не исследованная). В основу положено абстрактное понятие «сильной сходимости» в переменном пространстве, в качестве которого можно брать не только гильбертовы пространства, но и банаховы. Все рассмотренные выше виды сильной сходимости в L^2-пространствах являются примерами этой абстрактной сходимости. Отталкиваясь от указанной теоремы, рассматриваем далее только гильбертовы пространства и в них порождаемые неотрицательными самосопряженными операторами полугруппы, среди которых главный интерес представляют гиперболические полугруппы.

Затрагиваются также связанные с гиперболическими задачами вопросы спектральной сходимости.

Работа организована следующим образом. Сначала в § § 1–8 в ситуации абстрактного переменного пространства, банахова или гильбертова, изучены резольвентная сходимость типа (0.7) и вытекающие из нее сходимости полугрупп и проекционных операторов (здесь можно заметить некоторые аналогии с известной работой У. Моско [26]). Далее в §§ 9, 10 общие результаты применяются для усреднения эволюционных задач для оператора теории упругости на тонких периодических сетках, а также для изучения спектра этого оператора. В § 10 дано полное описание спектра усредненного оператора в случае сеток критической толщины. Этот спектр, хотя и чисто точечный, имеет сложную структуру, самая примечательная особенность которой — наличие лакун.

Теория упругости на тонких периодических структурах — не единственная возможная сфера приложения общих теорем, полученных в первой части работы. Например, поточечная сходимость гиперболических полугрупп дает новые результаты даже в случае классических задач теории усреднения. Но эти приложения абстрактной теории резольвентной сходимости остаются за пределами настоящей работы.

Заметим, что усреднение гиперболических задач (прежде всего скалярных) в классической ситуации изучалось, например, в [1, 25], где использованы совсем другие методы: метод асимптотических разложений Н. С. Бахвалова [1] или вариационный метод с элементами компенсированной компактности [25]. С точки зрения теории полугрупп усреднение различных гиперболических задач рассматривалось в [12, гл. IV], [21].

1. Теорема Троттера—Като в переменном пространстве (по В. В. Жикову)

1.1. Пусть X_ε, X_0 — банаховы пространства. Считаем, что введена некоторая «сильная» сходимость $u_\varepsilon \to u$ элементов $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$ к элементу $u \in X_0$, причем сильно сходящаяся последовательность ограничена, т.е. $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$.

Относительно сильной сходимости предполагаем выполнение следующих свойств.

Свойство 1. Если $u_\varepsilon \to u$, $u'_\varepsilon \to u'$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u'_\varepsilon\|_\varepsilon = \|u - u'\|_0$.

Свойство 2. Пусть $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$, $u \in X_0$, и для любого $\delta > 0$ найдутся $v_\varepsilon \in X_\varepsilon$, $v \in X_0$ такие, что

$$v_\varepsilon \to v, \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \delta, \quad \|u - v\|_0 \leqslant \delta; \tag{1.1}$$

тогда $u_\varepsilon \to u$.

Пусть B_ε, B_0 — ограниченные операторы в X_ε и X_0 соответственно, $\|B_0\|, \|B_\varepsilon\| \leqslant \alpha < \infty$.

Определим сильную сходимость операторов. Скажем, что $B_\varepsilon \to B_0$, если $B_\varepsilon f_\varepsilon \to B_0 f$, как только $f_\varepsilon \to f$.

Лемма 1.1. *Если $B_\varepsilon \to B_0$, $B'_\varepsilon \to B'_0$, то $B_\varepsilon B'_\varepsilon \to B_0 B'_0$.*

Эта лемма очевидна.

В случае постоянного пространства $X_\varepsilon \equiv X_0$ важным инструментом является теорема Банаха—Штейнгауза: если $B_\varepsilon f \to B_0 f$ для f из некоторого всюду плотного в X_0 множества, то $B_\varepsilon \to B$.

Для переменных пространств аналогом этой теоремы служит следующая лемма.

Лемма 1.2. *Пусть для любого $\tilde f$ из всюду плотного в X_0 множества Γ найдутся $\tilde f_\varepsilon$ такие, что $\tilde f_\varepsilon \to \tilde f$ и $B_\varepsilon \tilde f_\varepsilon \to B_0 \tilde f$. Тогда $B_\varepsilon \to B_0$.*

Доказательство. Пусть $f_\varepsilon \to f$. Выберем элемент $\tilde f \in \Gamma$ такой, что $\|f - \tilde f\|_0 \leqslant \delta/\alpha$. Тогда $\|B_0 f - B_0 \tilde f\|_0 \leqslant \delta$, а по свойству 1

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|B_\varepsilon f_\varepsilon - B_\varepsilon \tilde f_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \alpha \lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - \tilde f_\varepsilon\|_\varepsilon = \alpha \|f - \tilde f\|_0 \leqslant \delta.$$

Поэтому свойство 2 обеспечивает искомую сходимость $B_\varepsilon f_\varepsilon \to B_0 f$. Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Пусть $B_\varepsilon B'_\varepsilon \to B_0 B'_0$, $B'_\varepsilon \to B'_0$ и образ оператора B'_0 плотен в X_0. Тогда $B_\varepsilon \to B_0$.*

Эта лемма есть следствие предыдущей.

Пусть A_ε, A_0 — производящие операторы сильно непрерывных полугрупп сжатий $T_\varepsilon(t) = e^{-tA_\varepsilon}$, $T_0(t) = e^{-tA_0}$ в X_ε и X_0 соответственно. Тождественный оператор обозначаем символом «1». Если $R(\lambda, A_\varepsilon) = (A_\varepsilon + \lambda)^{-1}$, $R(\lambda, A_0) = (A_0 + \lambda)^{-1}$, то $\|R(\lambda, A_\varepsilon)\|, \|R(\lambda, A_0)\| \leqslant \lambda^{-1}$.

Теорема 1.4. *Пусть при любом $\lambda > 0$*

$$(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} \to (A_0 + \lambda)^{-1}. \tag{1.2}$$

Тогда при любом $t \geqslant 0$

$$T_\varepsilon(t) \to T_0(t). \tag{1.3}$$

Для доказательства теоремы 1.4 понадобится один результат из теории полугрупп ([14, с. 596]): *если A есть производящий оператор сильно непрерывной группы сжатий $T(t) = e^{-tA}$ в банаховом пространстве, то справедлива оценка*

$$\left\| \left[T(t) - \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^{-n} \right] f \right\| \leqslant \frac{t^2}{2n} \|A^2 f\| \quad \forall f \in D(A^2), \quad n = 1, 2 \dots . \tag{1.4}$$

Эту оценку можно переписать в несколько ином виде. Поскольку

$$A^2 R^2(\lambda, A) = 1 - 2\lambda R(\lambda, A) + \lambda^2 R^2(\lambda, A),$$

то из $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \lambda^{-1}$ следует, что $\|A^2R^2(\lambda, A)\| \leqslant 4$. Положив

$$K_n(t, A) = \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^{-n} R^2(1, A) = \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right]^n R^2(1, A), \tag{1.5}$$

получим

$$\|T(t)R^2(1, A) - K_n(t, A)\| \leqslant \frac{2t^2}{n}. \tag{1.6}$$

Что касается оценки (1.4), то она следует из тождества

$$\left[T(t) - \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^{-n}\right] f = \frac{1}{n} \int\limits_0^t (s - t) \left(1 + \frac{t - s}{n} A\right)^{-n-1} T(s) A^2 f ds,$$

поскольку нормы операторов $\left(1 + \dfrac{t}{n} A\right)^{-1}$, $T(s)$ не превосходят единицы. Это тождество, в свою очередь, легко получить, если вычислить производную

$$\frac{d}{ds} \left(1 + \frac{t - s}{n} A\right)^{-n} T(s) f$$

и проинтегрировать полученное равенство в пределах от 0 до t.

Докажем собственно теорему 1.4. Пусть $f_\varepsilon \to f$, $\|f_\varepsilon\| \leqslant C$. Положив

$$v_\varepsilon = K_n(t, A_\varepsilon) f_\varepsilon, \qquad v = K_n(t, A_0) f,$$
$$u_\varepsilon = T_\varepsilon(t) R^2(1, A_\varepsilon) f_\varepsilon, \qquad u = T_0(t) R^2(1, A_0) f,$$

из резольвентной сходимости (1.2), определения K_n (см. (1.5)), леммы 1.1 и оценки (1.6) получим

$$v_\varepsilon \to v, \quad \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \frac{2t^2}{n} C, \quad \|u - v\|_0 \leqslant \frac{2t^2\|f\|}{n}.$$

Тогда свойство 2 (см. (1.1)) дает сходимость $u_\varepsilon \to u$, т.е.

$$T_\varepsilon(t) R^2(1, A_\varepsilon) \to T_0(t) R^2(1, A_0).$$

Так как $R^2(1, A_\varepsilon) \to R^2(1, A_0)$ по лемме 1.1 и область значений оператора $R^2(1, A_0)$ плотна в X_0, то лемма 1.3 дает искомую сходимость (1.3). Теорема доказана. □

1.2. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $X_\varepsilon \equiv H$ — гильбертово пространство, $X_0 = H_0 \subset H$ — подпространство, $P : H \to H_0$ — ортогональный проектор. Сходимость $u_\varepsilon \to u$ — это обычная сильная сходимость в H к элементу $u \in H_0$.

Резольвентная сходимость (1.2) в данном случае эквивалентна соотношению

$$(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} f \to (A_0 + \lambda)^{-1} f \quad \forall f \in H_0,$$

а сходимость полугрупп (1.3) — аналогичному соотношению

$$T_\varepsilon(t) f \to T_0(t) f \quad \forall f \in H_0.$$

Предельный оператор A_0 действует в подпространстве H_0, а не во всем пространстве H. Если $H_0 \neq H$, то оператор-функция $(A + \lambda)^{-1} P : H \to H$ удовлетворяет резольвентному уравнению, но сама не является резольвентой (а является «псевдорезольвентой»).

В приложениях часто наблюдается сходимость резольвент к псевдорезольвенте,

$$(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} f \to (A + \lambda)^{-1} P f \quad \forall f \in H, \tag{1.7}$$

которая влечет сходимость (1.2). Однако аналогичная сходимость полугрупп $T_\varepsilon(t) \to T_0(t) P$ отсюда, в общем, не следует. Это можно видеть на простом примере, когда $H_\varepsilon \equiv H$ — двумерное (комплексное) пространство, H_0 — одномерно, $A_\varepsilon = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$. Полугруппа $T_\varepsilon(t)$ не «поворачивается» в сторону подпространства H_0, так как $T_\varepsilon(t) g = e^{-i\frac{t}{\varepsilon}} g$ для $g \in H_0^\perp$. Впрочем, последнее выражение осциллирует по t, и, как будет показано ниже, такого рода осцилляции гасятся в «среднем» по времени.

Пример. Пусть Ω, $\Omega_0 \Subset \Omega$ – ограниченные липшицевы области в $\mathbb{R}^N$,

$$a^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{в} \quad \Omega_0, \\ \varepsilon^{-1} & \text{в} \quad \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases}$$

$H_\varepsilon \equiv H = L^2(\Omega)$, $H_0 = L^2(\Omega_0) \subset L^2(\Omega)$, A_ε — оператор в $L^2(\Omega)$, отвечающий задаче Дирихле

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div} a^\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f.$$

Тогда можно установить резольвентную сходимость (1.7), где A_0 — оператор в $L^2(\Omega_0)$, отвечающий задаче Дирихле для лапласиана в области Ω_0, P — оператор сужения на Ω_0. Теорема 1.4 дает сходимость (1.3), но в данном случае имеет место и сходимость $T_\varepsilon(t) \to T_0(t)P$.

Покажем теперь, что поворот полугруппы $T_\varepsilon(t)$ к подпространству H_0 все же имеет место, но только в «среднем» по времени.

Предложение 1.5. *Пусть $H_\varepsilon \equiv H$, и при любом $\lambda > 0$ имеет место сходимость* (1.7). *Тогда имеет место слабая сходимость*

$$T_\varepsilon(t)f \rightharpoonup T_0(t)Pf \quad \textit{в} \quad L^2(0, t_0, H) \quad \forall t_0 > 0.$$

Доказательство. Для преобразований Лапласа

$$u_\varepsilon(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\varepsilon(t) f\, dt, \qquad u(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_0(t) Pf\, dt \tag{1.8}$$

выполнено

$$A_\varepsilon u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f, \qquad A_0 u + \lambda u = Pf,$$
$$u_\varepsilon(\lambda) \to u(\lambda) \quad \text{в} \quad H \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.9}$$

Если (с точностью до подпоследовательности)

$$T_\varepsilon(t) f \rightharpoonup z(t) \quad \text{в} \quad L^2(0, t_0, H),$$

то из (1.8), (1.9) следует соотношение

$$u(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} z(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_0(t) Pf\, dt,$$

которое (в силу теоремы единственности для преобразования Лапласа) дает равенство $z(t) = T_0(t)Pf$, и предложение доказано. □

2. О резольвентной сходимости в переменном гильбертовом пространстве

2.1. Пусть H_ε, H — гильбертовы пространства. Считаем, что введена некоторая «слабая сходимость» $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ элементов $v_\varepsilon \in H_\varepsilon$ к элементу $v \in H$, причем слабо сходящаяся последовательность ограничена, т.е. $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \|v_\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$.

Введем «сильную сходимость».

Определение 2.1. Пусть $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$, $u \in H$. Тогда $u_\varepsilon \to u$, если $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, а также

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (v_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon = (v, u), \quad \text{как только} \quad v_\varepsilon \rightharpoonup v. \tag{2.1}$$

Очевидно,

$$\text{если} \quad u_\varepsilon \to u, \quad \text{то} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_\varepsilon = \|u\|. \tag{2.2}$$

От сильной и слабой сходимостей потребуем дополнительных свойств.

(i) Всякая ограниченная последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность (принцип компактности).

(ii) Для любого $u \in H$ найдется последовательность $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$ такая, что $u_\varepsilon \to u$ (аппроксимационное свойство).

В сделанных предположениях можно выделять сильно сходящиеся последовательности одним соотношением (2.1).

Лемма 2.2. *Из условия* (2.1) *следует, что* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, *а значит,* $u_\varepsilon \to u$.

Доказательство. 1°. Прежде всего докажем ограниченность u_ε. Пусть от противного, по некоторой подпоследовательности, $(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^2 \to \infty$, тогда $v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon$ ограничена. По принципу компактности имеем сходимость $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ с точностью до подпоследовательности. Тогда $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \to \infty$. С другой стороны, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \to (u, v)$, в силу (2.1), где $(u, v) < \infty$. Получили противоречие, и, значит, в самом деле, u_ε ограничена.

2°. Для произвольного $z \in H$ возьмем $z_\varepsilon \to z$ (что возможно, в силу условия (ii)), в частности, $z_\varepsilon \rightharpoonup z$ по определению сильной сходимости. Из ограниченности u_ε по принципу компактности имеем сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup v$ с точностью до подпоследовательности. Тогда $(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \to (v, z)$, так как $z_\varepsilon \to z$. С другой стороны, $(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \to (u, z)$, в силу (2.1), так как $z_\varepsilon \rightharpoonup z$. Ввиду произвольности z, получаем $u = v$, и значит, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ по всей последовательности ε. Искомая сходимость получена. Лемма доказана. □

Заметим, что при доказательстве леммы 2.2 достаточно иметь аппроксимационное свойство (ii) в ослабленном виде, а именно: для любого z из некоторого плотного в H множества найдется $z_\varepsilon \in H_\varepsilon$ такая, что $z_\varepsilon \to z$.

Пусть $H_0 \subset H$ — подпространство, $P : H \to H_0$ — ортопроектор. Далее B_0, B, B_ε — это ограниченные операторы в H_0, H, H_ε соответственно, B_ε ограничены по норме: $\|B_\varepsilon\| \leqslant \alpha < \infty$.

Дадим определение сильной сходимости операторов. Скажем, что $B_\varepsilon \to B_0$, если $B_\varepsilon f_\varepsilon \to B_0 f$, как только $f_\varepsilon \to f$ и $f \in H_0$.

Аналогично определяется сильная сходимость $B_\varepsilon \to B$; здесь требование $f \in H_0$ отсутствует. Легко понять, что из сходимости $B_\varepsilon \to B_0 P$ следует сходимость $B_\varepsilon \to B_0$, но не наоборот. Очевидно, что оба варианта сильной сходимости операторов имеют свойства из леммы 1.1.

2.2. Пусть A_0, A_ε — неотрицательные самосопряженные операторы в H_0, H_ε с областью определения $D(A_0)$, $D(A_\varepsilon)$ соответственно, при этом имеет место сильная резольвентная сходимость вида (1.2):

$$\text{при любом } \lambda > 0 \quad (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} f_\varepsilon \to (A_0 + \lambda)^{-1} P f, \quad \text{как только} \quad f_\varepsilon \to f. \tag{2.3}$$

Проверим, что сильная резольвентная сходимость операторов влечет свойство полунепрерывности снизу для соответствующих квадратичных форм. Заметим, что областью определения квадратичной формы $(A_\varepsilon u, u)_\varepsilon$ служит пространство W_ε — замыкание $D(A_\varepsilon)$ по норме $((A_\varepsilon + 1)u, u)_\varepsilon^{1/2}$. Аналогично областью определения квадратичной формы $(A_0 u, u)$ служит пространство W_0 — замыкание $D(A_0)$ по норме $((A_0 + 1)u, u)^{1/2}$.

Лемма 2.3. *Если* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, *то* $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon \geqslant (A_0 u, u)$.

Доказательство. Всегда можно считать, что выполнено условие

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon < \infty. \tag{2.4}$$

В противном случае переходим к подпоследовательности, имеющей свойство (2.4), а если такой не существует, то утверждение леммы очевидно. Полагая

$$S_\varepsilon = A_\varepsilon + \lambda, \qquad S_0 = A_0 + \lambda, \quad \lambda > 0, \tag{2.5}$$

определим в пространствах H_ε и H функционалы

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(S_\varepsilon u, u)_\varepsilon, & u \in W_\varepsilon, \\ +\infty, & u \in H_\varepsilon \setminus W_\varepsilon, \end{cases}$$

$$F(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(S_0u,u), & u\in W_0,\\ +\infty, & u\in H\setminus W_0.\end{cases}$$

Найдем преобразования Юнга—Фенхеля [12, с. 357], [22] от этих функционалов:

$$F_\varepsilon^*(v)=\sup_{u\in H_\varepsilon}\big((u,v)_\varepsilon-F_\varepsilon(u)\big)=\frac{1}{2}(S_\varepsilon^{-1}v,v)_\varepsilon,\quad v\in H_\varepsilon,$$

$$F^*(v)=\sup_{u\in H}\big((u,v)-F(u)\big)=\frac{1}{2}(S_0^{-1}Pv,v),\qquad v\in H.$$

Поскольку $F(u)$ — замкнутый выпуклый функционал, не принимающий значение $-\infty$, то по теореме Фенхеля—Моро [12, с. 359]

$$F^{**}=F. \tag{2.6}$$

По неравенству Юнга [12, с. 358] для любых $u_\varepsilon,z_\varepsilon\in H_\varepsilon$

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon)\geqslant(u_\varepsilon,z_\varepsilon)_\varepsilon-F_\varepsilon^*(z_\varepsilon).$$

В предположении (2.4) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}(S_\varepsilon u_\varepsilon,u_\varepsilon)_\varepsilon\geqslant(u_\varepsilon,z_\varepsilon)_\varepsilon-\frac{1}{2}(S_\varepsilon^{-1}z_\varepsilon,z_\varepsilon)_\varepsilon,$$

в котором перейдем к пределу, взяв $z_\varepsilon\to z$. Поскольку, в силу (2.3) и по определению сильной сходимости,

$$S_\varepsilon^{-1}z_\varepsilon\to S_0^{-1}Pz,\qquad (S_\varepsilon^{-1}z_\varepsilon,z_\varepsilon)_\varepsilon\to(S_0^{-1}Pz,z),\qquad (u_\varepsilon,z_\varepsilon)_\varepsilon\to(u,z),$$

то

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}(S_\varepsilon u_\varepsilon,u_\varepsilon)_\varepsilon\geqslant(u,z)-\frac{1}{2}(S_0^{-1}Pz,z)=(u,z)-F^*(z),$$

где z можно считать произвольным элементом H, благодаря аппроксимационному свойству (ii). Следовательно,

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}(S_\varepsilon u_\varepsilon,u_\varepsilon)_\varepsilon\geqslant\sup_{z\in H}\big((u,z)-F^*(z)\big)=F^{**}(u)=F(u),$$

где на последнем этапе использовалось соотношение (2.6). Осталось записать полученное неравенство через операторы A_ε, A_0 (см.(2.5)) и перейти к пределу при $\lambda\to0$. Лемма доказана. □

Наряду с сильной сходимостью резольвент (2.3) полезно оперировать с несколько иной сходимостью

$$\forall\lambda>0\quad (A_\varepsilon+\lambda)^{-1}g_\varepsilon\rightharpoonup(A_0+\lambda)^{-1}Pg,\quad \text{как только}\quad g_\varepsilon\rightharpoonup g. \tag{2.7}$$

Обычно в задачах усреднения сначала доказывается сходимость (2.7), а из нее уже выводится сильная сходимость (2.3).

Лемма 2.4. *Сходимости* (2.3) *и* (2.7) *эквивалентны.*

Справедлива более общая лемма.

Лемма 2.5. *Сходимость*

$$B_\varepsilon f_\varepsilon\to Bf,\quad \textit{как только}\quad f_\varepsilon\to f, \tag{2.8}$$

эквивалентна сходимости сопряженных операторов

$$B_\varepsilon^\star g_\varepsilon\rightharpoonup B^\star g,\quad \textit{как только}\quad g_\varepsilon\rightharpoonup g. \tag{2.9}$$

Доказательство. 1°. Предположим, что имеет место (2.8). Так как $B_\varepsilon^\star g_\varepsilon$ ограничена, то по условию (i) $B_\varepsilon^\star g_\varepsilon\rightharpoonup z$ (хотя бы по некоторой подпоследовательности). Требуется проверить равенство $z=B^\star g$. Имеем $(B_\varepsilon^\star g_\varepsilon,f_\varepsilon)_\varepsilon\to(z,f)$, поскольку $f_\varepsilon\to f$. С другой стороны, $(B_\varepsilon^\star g_\varepsilon,f_\varepsilon)_\varepsilon=(g_\varepsilon,B_\varepsilon f_\varepsilon)_\varepsilon\to(g,Bf)=(B^\star g,f)$, в силу (2.8). Отсюда $z=B^\star g$, так как f может быть произвольным элементом H по условию (ii). Сходимость (2.9) доказана.

2°. Пусть выполнено условие (2.9). Тогда

$$(B_\varepsilon f_\varepsilon,g_\varepsilon)_\varepsilon=(f_\varepsilon,B_\varepsilon^\star g_\varepsilon)_\varepsilon\to(f,B^\star g)=(Bf,g).$$

Отсюда, ввиду произвольности $g_\varepsilon \rightharpoonup g$, на основании леммы 2.2 выводим $B_\varepsilon f_\varepsilon \to Bf$. Лемма доказана. □

Введенная в определении 2.1 сильная сходимость обладает сформулированными в § 1 свойствами, необходимыми для того, чтобы теорема 1.4 была справедлива для пространства H_ε. Свойство 1 очевидно следует из (2.2), а свойство 2 устанавливается в следующей лемме.

Лемма 2.6. *Если $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$, $u \in H$, то $u_\varepsilon \to u$, как только для любого $\delta > 0$ найдутся $\tilde u_\varepsilon \in H_\varepsilon$, $\tilde u \in H$ такие, что*

$$\tilde u_\varepsilon \to \tilde u, \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - \tilde u_\varepsilon\|_\varepsilon < \delta, \quad \|u - \tilde u\| < \delta. \tag{2.10}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2, достаточно показать, что для u_ε выполнено соотношение (2.1). В равенстве

$$(v_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon - (v, u) = (v_\varepsilon, u_\varepsilon - \tilde u_\varepsilon)_\varepsilon + (v, \tilde u - u) + (v_\varepsilon, \tilde u_\varepsilon)_\varepsilon - (v, \tilde u)$$

третья разность стремится к нулю в силу $(2.10)_1$, а первые две оцениваются с учетом $(2.10)_2$, $(2.10)_3$ и ограниченности v_ε. В результате $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} |(v_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon - (v, u)| \leqslant C\delta$, где константа C не зависит от δ, откуда следует сходимость (2.1). Лемма доказана. □

Поскольку сильная сходимость в H_ε обладает необходимыми свойствами, то можно сформулировать вариант теоремы 1.4 для переменных гильбертовых пространств. В следующей теореме самосопряженность операторов A_ε, A_0 не обязательна. Достаточно, чтобы так же, как в § 1, операторы A_ε, A_0 были производящими для сильно непрерывных полугрупп сжатий e^{-tA_ε}, e^{-tA_0} в H_ε и H_0 соответственно, $\|(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|$, $\|(A_0 + \lambda)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}$ $\forall \lambda > \lambda_0$.

Теорема 2.7. *Пусть имеет место резольвентная сходимость* (2.3). *Тогда $e^{-tA_\varepsilon} \to e^{-tA_0}$ при любом $t \geqslant 0$.*

3. Определение абстрактной гиперболической полугруппы

Пусть A — неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$.

Определим норму $\| \ \|_W$ соотношением

$$\|u\|_W^2 = ((A+1)u, u), \quad u \in D(A),$$

и пусть W — замыкание $D(A)$ по этой норме. Тогда $W = D(A^{1/2}) \supset D(A)$, и вложение плотно.

Пусть $E = W \times H$, тогда элемент $v \in E$ есть вектор-столбец

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad v_1 \in W, \quad v_2 \in H.$$

Скалярное произведение в E определено равенством

$$(v, \bar v)_E = (v_1, \bar v_1)_W + (v_2, \bar v_2) = ((A+1)v_1, \bar v_1) + (v_2, \bar v_2).$$

Рассмотрим в пространстве H задачу Коши для гиперболического уравнения

$$u''(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = f_1, \quad u'(0) = f_2. \tag{3.1}$$

Положив

$$v = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

представим уравнение (3.1) в виде «матричного» уравнения первого порядка в пространстве E для «вектора» v:

$$v'(t) + \mathbf{A}v(t) = 0, \quad v(0) = f, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ — «матричный» оператор в E с областью определения $D(\mathbf{A}) = D(A) \times D(A^{1/2})$, плотно вложенной в E. Напомним, что тождественный оператор в любом гильбертовом пространстве обозначается через «1».

Для оператора $\mathbf{A}$ выполнена оценка

$$((\mathbf{A}+1)v, v)_E \geqslant 0 \quad \forall v \in D(\mathbf{A}). \tag{3.4}$$

В самом деле,

$$((\mathbf{A}+1)v, v)_E = (Av_1, v_1) + (v_1, v_1) + (v_2, v_2) - (v_1, v_2) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(\mathbf{A}),$$

ввиду того, что A — неотрицательный оператор в H. Поэтому при любом $\lambda > 1$ существует $(\mathbf{A}+\lambda)^{-1}$ и $\|(\mathbf{A}+\lambda)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda-1}$. По теореме Хилле—Иосиды—Филлипса [20, с. 274] $\mathbf{A}$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $e^{-t\mathbf{A}}$ в пространстве E. Заметим, что

$$e^{-t\mathbf{A}} = e^{-t(\mathbf{A}+1)}e^t,$$

где $e^{-t(\mathbf{A}+1)}$ — сжимающая полугруппа в E. Связь между резольвентой и полугруппой устанавливается с помощью преобразования Лапласа

$$(\mathbf{A}+\lambda)^{-1}f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-t\mathbf{A}}f\,dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > 1.$$

Функцию $v(t) = e^{-t\mathbf{A}}f$, $f \in E$, естественно интерпретировать как решение задачи (3.3). При этом известно, что если $f \in D(\mathbf{A})$, то $v(t)$ непрерывно дифференцируема (как функция со значениями в E), $v(t) \in D(\mathbf{A})$, и равенство $v' + \mathbf{A}v = 0$ выполнено при любом $t > 0$. В таком смысле задача Коши (3.3) разрешима. Для уравнения (3.1), в силу замены (3.2), этот факт означает следующее: если $f_1 \in D(A)$, $f_2 \in D(A^{1/2})$, то $u(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция (со значениями в H), причем $u(t) \in D(A)$ и $u'' + Au = 0$ при любом $t > 0$. Таким образом, задача (3.1) разрешима.

4. Переменные гильбертовы пространства, связанные с гиперболической полугруппой

4.1. Пусть пространства H_ε, H, H_0 и операторы P, A_ε, A_0 такие же, как в § 2, причем в H_ε введены слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ и сильная сходимость $u_\varepsilon \to u$. Используя конструкцию из § 3, по оператору A_ε строим гильбертовы пространства $W_\varepsilon = D(A_\varepsilon^{1/2})$, $E_\varepsilon = W_\varepsilon \times H_\varepsilon$ и «матричный» оператор в пространстве E_ε

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A_\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормы $\|\ \|_{W_\varepsilon}$ и $\|\ \|_{E_\varepsilon}$ определены соотношениями

$$\|u_\varepsilon\|^2_{W_\varepsilon} = ((A_\varepsilon+1)u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon, \quad \|v^\varepsilon\|_{E_\varepsilon} = \|v_1^\varepsilon\|^2_{W_\varepsilon} + \|v_2^\varepsilon\|^2_\varepsilon.$$

Аналогично по оператору A_0 строим гильбертовы пространства $W_0 = D(A_0^{1/2})$, $E_0 = W_0 \times H_0$, $E = W_0 \times H$ и «матричный» оператор в пространстве E_0

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{P} : E \to E_0$ — ортопроектор, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

Определим слабую сходимость элементов $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$ к элементу $u \in W_0$.

Определение 4.1. Скажем, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u \in W_0$ в W_ε, если $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ H_ε, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} < \infty$.

Корректность определения 4.1, а именно принадлежность $u \in W_0$, следует из леммы 2.3.

По определению,

$$v^\varepsilon = \begin{pmatrix} v_1^\varepsilon \\ v_2^\varepsilon \end{pmatrix} \rightharpoonup v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in E \quad \text{в} \quad E_\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad v_1^\varepsilon \rightharpoonup v_1 \in W_0 \quad \text{в} \quad W_\varepsilon, \quad v_2^\varepsilon \rightharpoonup v_2 \in H \quad \text{в} \quad H_\varepsilon.$$

Лемма 4.2. *Слабая сходимость в пространстве W_ε имеет следующие свойства:*

принцип компактности (*см. свойство* (i) *из* § 2);

свойство полунепрерывности снизу для нормы, а именно:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} \geqslant \|u\|_{W_0}, \quad \text{если} \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad W_\varepsilon.$$

Аналогичные свойства имеет слабая сходимость в E_ε.

Эта лемма следует из принципа компактности для слабой сходимости в H_ε и леммы 2.3.

4.2. Пусть $L^2(0,T,H)$ — пространство L^2 функций на отрезке $[0,T]$, $T>0$, со значениями в гильбертовом пространстве H. В нем плотно множество

$$\mathcal{L} \quad \text{— линейная оболочка функций вида} \quad u(t) = z\varphi(t), \quad z\in H, \quad \varphi(t)\in C[0,T]. \tag{4.1}$$

Аналогично определяются L^2-пространства функций на отрезке $[0,T]$ со значениями в других гильбертовых пространствах H_ε, W_ε, W_0 и т.д.

Определим слабую сходимость элементов $u_\varepsilon(t)\in L^2(0,T,H_\varepsilon)$ к элементу $u(t)\in L^2(0,T,H)$.

Определение 4.3. Пусть $u_\varepsilon(t)$ ограничена в $L^2(0,T,H_\varepsilon)$, т.е.

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \|u_\varepsilon\|_\varepsilon^2\, dt < \infty. \tag{4.2}$$

Тогда $u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t)\in L^2(0,T,H)$ в $L^2(0,T,H_\varepsilon)$, если $\int_0^T (u_\varepsilon(t), z_\varepsilon)_\varepsilon \varphi(t)\, dt \to \int_0^T (u(t),z)\varphi(t)\, dt$ для любой $z_\varepsilon\to z$ в H_ε и для любой $\varphi(t)\in L^2(0,T)$.

Далее предполагаем H сепарабельным.

Лемма 4.4. *Из всякой ограниченной в* $L^2(0,T,H_\varepsilon)$ *последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Линейная оболочка элементов множества

$$M = \{v(t) = z\varphi(t), \quad z\in M_H, \quad \varphi(t)\in M_T\},$$

где M_H, M_T — некоторые счетные всюду плотные множества в H и в $L^2(0,T)$ соответственно, плотна в $L^2(0,T,H)$. Каждому $v(t) = z\varphi(t)\in M$ сопоставим последовательность $v_\varepsilon(t) = z_\varepsilon\varphi(t)$, $z_\varepsilon\to z$ в H_ε, что возможно по условию (ii) § 2.

Пусть для последовательности $u_\varepsilon(t)$ выполнена оценка (4.2). Тогда по неравенству Коши—Буняковского из ограниченности $u_\varepsilon(t)$, z_ε выводим оценку

$$\left|\int_0^T (u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon\, dt\right|^2 \leqslant \int_0^T \|u_\varepsilon\|_\varepsilon^2\, dt \cdot \int_0^T \|v_\varepsilon\|^2\, dt \leqslant C\int_0^T \varphi^2(t)\|z_\varepsilon\|_\varepsilon^2\, dt < \infty. \tag{4.3}$$

Диагональным способом выделим подпоследовательность $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$ такую, что предел

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0} \int_0^T (u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon\, dt = I(v) \tag{4.4}$$

существует для любого $v\in M$. Можно показать, что значение $I(v)$ на элементе $v = z\varphi$ не зависит от выбора $z_\varepsilon\to z$. Переходя к пределу в (4.3) при $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$ и используя свойство (1.1) сильной сходимости в H_ε, получаем

$$|I(v)|^2 \leqslant C\int_0^T \varphi^2(t)\|z\|^2\, dt = C\int_0^T \|v(t)\|^2\, dt,$$

т.е. функционал $I(v)$, определенный равенством (4.4), ограничен по норме $L^2(0,T,H)$. Тогда по теореме Рисса этот функционал допускает представление $I(v) = \int\limits_0^T (u(t), v(t))\,dt$, и элемент $u(t) \in L^2(0,T,H)$ определен однозначно. Получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0} \int\limits_0^T (u_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon \varphi\,dt = \int\limits_0^T (u, z)\varphi\,dt \tag{4.5}$$

для любой $z_\varepsilon \to z \in M_H$ и $\varphi \in M_T$. Можно показать, что сходимость (4.5) имеет место при любой $z_\varepsilon \to z$ с произвольным $z \in H$ и для любой $\varphi \in L^2(0,T)$, и значит, согласно определению 4.3, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^2(0,T,H_\varepsilon)$, если $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Лемма доказана. $\square$

Для слабой сходимости в $L^2(0,T,H_\varepsilon)$ справедлив аналог леммы 2.3.

Лемма 4.5. *Если $u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t)$ в $L^2(0,T,H_\varepsilon)$, то* $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon\,dt \geqslant \int\limits_0^T (A_0 u, u)\,dt.$

Доказательство. Аналогично, как при доказательстве леммы 2.3 считаем выполненным условие

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon\,dt \leqslant \infty. \tag{4.6}$$

Используя обозначения (2.5), введем в пространствах $L^2(0,T,H_\varepsilon)$, $L^2(0,T,H)$ функционалы

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^T (S_\varepsilon u, u)_\varepsilon\,dt, & u \in L^2(0,T,W_\varepsilon),\\ +\infty, & u \in L^2(0,T,H_\varepsilon)\backslash L^2(0,T,W_\varepsilon), \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^T (S_0 u, u)_\varepsilon\,dt, & u \in L^2(0,T,W_0),\\ +\infty, & u \in L^2(0,T,H)\backslash L^2(0,T,W_0). \end{cases}$$

Найдем их преобразования Юнга—Фенхеля

$$\mathcal{F}_\varepsilon^*(f) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_\varepsilon^{-1} f, f)_\varepsilon\,dt, \qquad \mathcal{F}^*(f) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_0^{-1} P f, f)_\varepsilon\,dt. \tag{4.7}$$

Поскольку $\mathcal{F}(f)$ — замкнутый выпуклый функционал, не принимающий значение $-\infty$, то по теореме Фенхеля—Моро

$$\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}. \tag{4.8}$$

Из условия (4.6) и неравенства Юнга получаем оценку

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon\,dt \geqslant \int\limits_0^T (u_\varepsilon, f_\varepsilon)_\varepsilon\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon, f_\varepsilon)_\varepsilon\,dt, \tag{4.9}$$

в которой перейдем к пределу, полагая $f_\varepsilon = z_\varepsilon\varphi$, $z_\varepsilon \to z \in H$, $\varphi \in C[0,T]$, $f = z\varphi$. По определению 4.3, $\int\limits_0^T (u_\varepsilon, f_\varepsilon)_\varepsilon\,dt \to \int\limits_0^T (u, f)\,dt$. В силу (2.3) и по определению сильной сходимости в H_ε, получаем

$$S_\varepsilon^{-1} z_\varepsilon \to S_0^{-1} P z \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \quad (S_\varepsilon^{-1} z_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon \to (S_0^{-1} z, z).$$

Отсюда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int\limits_0^T (S_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon, f_\varepsilon)_\varepsilon\, dt = \int\limits_0^T (S_\varepsilon^{-1} z_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon \varphi^2\, dt \to \int\limits_0^T (S_0^{-1} P z, z)\varphi^2\, dt = \int\limits_0^T (S_0^{-1} P f, f)\, dt.$$

В результате, переходя к пределу в (4.6), получаем неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon\, dt \geqslant \int\limits_0^T (u, f)\, dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_0^{-1} P f, f)\, dt, \tag{4.10}$$

в котором, по условию (ii) из § 2, можем считать f произвольным элементом $\mathcal{L}$ (см.(4.1)). Поскольку функционал из правой части (4.10) непрерывен в $L^2(0,T,H)$, то его супремум по всему пространству $L^2(0,T,H)$ совпадает с супремумом по плотному множеству $\mathcal{L}$ и, с другой стороны, равен $\mathcal{F}(u)$, в силу (4.7), (4.8). Отсюда, взяв супремум по множеству $\mathcal{L}$ от правой части (4.10), получим

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\int\limits_0^T (S_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon\, dt \geqslant \mathcal{F}(u).$$

Запишем это неравенство через операторы A_ε, A_0 и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$, тогда получим утверждение леммы 4.5. □

Определим слабую сходимость в $L^2(0,T,W_\varepsilon)$.

Определение 4.6. Скажем, что $u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t) \in L^2(0,T,W_0)$ в $L^2(0,T,W_\varepsilon)$, если $u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t)$ в $L^2(0,T,H_\varepsilon)$ и выполнено соотношение (4.6).

Корректность определения 4.6, а именно, принадлежность $u(t) \in L^2(0,T,W_0)$, следует из леммы 4.5.

По определению

$$v^\varepsilon = \begin{pmatrix} v_1^\varepsilon \\ v_2^\varepsilon \end{pmatrix} \rightharpoonup v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L^2(0,T,E) \quad \text{в} \quad L^2(0,T,E_\varepsilon) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow v_1^\varepsilon \rightharpoonup v_1 \in L^2(0,T,W_0) \quad \text{в} \quad L^2(0,T,W_\varepsilon), \quad v_2^\varepsilon \rightharpoonup v_2 \in L^2(0,T,H) \quad \text{в} \quad L^2(0,T,H_\varepsilon).$$

Из последних двух лемм вытекает следующая лемма.

Лемма 4.7. *Для слабой сходимости в пространствах $L^2(0,T,W_\varepsilon)$ и $L^2(0,T,E_\varepsilon)$ справедливы принцип компактности и свойство полунепрерывности снизу нормы.*

5. Слабая сходимость гиперболической полугруппы в среднем по времени

5.1. Пусть A_ε, A_0 — те же операторы, что в § 2. Изучим связь между гиперболическим уравнением в пространстве H_ε

$$u_\varepsilon''(t) + A_\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0, \quad u_\varepsilon(0) = f_1^\varepsilon, \quad u_\varepsilon'(0) = f_2^\varepsilon \tag{5.1}$$

и гиперболическим уравнением в пространстве H_0

$$u''(t) + A_0 u(t) = 0, \quad u(0) = f_1, \quad u'(0) = f_2.$$

В § 3 показано, что замена

$$v^\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ u_\varepsilon' \end{pmatrix}, \quad f^\varepsilon = \begin{pmatrix} f_1^\varepsilon \\ f_2^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

сводит эти уравнения второго порядка к «матричным» уравнениям первого порядка с «матричными» операторами

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A_\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

$$v_\varepsilon(t)' + \mathbf{A}_\varepsilon v^\varepsilon(t) = 0, \quad v^\varepsilon(0) = f^\varepsilon \quad \text{в} \quad E_\varepsilon; \qquad v'(t) + \mathbf{A_0} v(t) = 0, \quad v(0) = f \quad \text{в} \quad E_0.$$

Операторам $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\mathbf{A_0}$ можно сопоставить (см. § 3) сильно непрерывные полугруппы $e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon}$, $e^{-t\mathbf{A_0}}$, и решения приведенных выше уравнений понимаем с точки зрения полугрупп. Кроме того, для $\lambda > 1$ существуют резольвенты $(\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1}$, $(\mathbf{A_0} + \lambda)^{-1}$, при этом

$$\|(\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|, \quad \|(\mathbf{A_0} + \lambda)^{-1}\| < (\lambda - 1)^{-1}. \tag{5.3}$$

Лемма 5.1. *Имеет место резольвентная сходимость следующего вида*:

$$\forall \lambda > 1 \quad (\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1} f^\varepsilon \rightharpoonup (\mathbf{A}_0 + \lambda)^{-1} \mathbf{P} f \quad \textit{в} \quad E_\varepsilon, \quad \textit{как только} \quad f^\varepsilon \rightharpoonup f \quad \textit{в} \quad E_\varepsilon. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть

$$f^\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{в} \quad E_\varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad f_1^\varepsilon \rightharpoonup f_1 \quad \text{в} \quad E_\varepsilon, \quad f_2^\varepsilon \rightharpoonup f_2 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \tag{5.5}$$

откуда, в частности, получаем

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (\|f_1^\varepsilon\|_\varepsilon + \|f_2^\varepsilon\|_\varepsilon) < \infty, \quad f_1 \in W_0 \subset H_0. \tag{5.6}$$

Резольвентное уравнение $(\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda) v^\varepsilon = f^\varepsilon$ эквивалентно двум соотношениям

$$\lambda v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon = f_1^\varepsilon, \qquad A_\varepsilon v_1^\varepsilon + \lambda v_2^\varepsilon = f_2^\varepsilon,$$

из которых вытекают равенства

$$\begin{gathered} (A_\varepsilon + \lambda^2) v_1^\varepsilon = \lambda f_1^\varepsilon + f_2^\varepsilon, \\ v_1^\varepsilon = (A_\varepsilon + \lambda^2)^{-1} (\lambda f_1^\varepsilon + f_2^\varepsilon), \qquad v_2^\varepsilon = \lambda v_1^\varepsilon - f_1^\varepsilon. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Отсюда, благодаря резольвентной сходимости (2.7) и соотношениям (5.5), получаем

$$\begin{aligned} &v_1^\varepsilon \rightharpoonup v_1 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \qquad && v_1 = (A_0 + \lambda^2)^{-1} P(\lambda f_1 + f_2), \\ &v_2^\varepsilon \rightharpoonup v_2 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \qquad && v_2 = \lambda v_1 - f_1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Для доказательства сходимости $v^\varepsilon \rightharpoonup v$ в E_ε остается проверить ограниченность компоненты v_1^ε в W_ε. Для этого из энергетического равенства (см. (5.7))

$$(A_\varepsilon v_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon)_\varepsilon + \lambda^2 (v_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon)_\varepsilon = (\lambda f_1^\varepsilon + f_2^\varepsilon, v_1^\varepsilon)_\varepsilon \tag{5.9}$$

выводим оценку

$$\|v_1^\varepsilon\|_{W_\varepsilon}^2 \leqslant c(\lambda)(\|f_1^\varepsilon\|_\varepsilon^2 + \|f_2^\varepsilon\|_\varepsilon^2) < \infty, \tag{5.10}$$

правая часть которой ограничена, в силу (5.6), что дает искомую ограниченность v_1^ε; поэтому

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad E_\varepsilon. \tag{5.11}$$

Из (5.8), используя равенство $Pf_1 = f_1$ (см. (5.6)), получаем систему предельных уравнений

$$\lambda v_1 - v_2 = f_1, \qquad (A_0 + \lambda^2) v_1 = \lambda_1 f_1 + P f_2,$$

эквивалентную одному «матричному» уравнению

$$(\mathbf{A}_0 + \lambda) v = \begin{pmatrix} f_1 \\ P f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} f. \tag{5.12}$$

Отсюда $v = (\mathbf{A}_0 + \lambda)^{-1} \mathbf{P} f$, что вместе с (5.11) означает сходимость (5.4). Лемма доказана. □

5.2. Для гиперболической полугруппы справедлив следующий вариант теоремы Троттера—Като.

Теорема 5.2. *Если $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ в E_ε, то $e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon} f^\varepsilon \rightharpoonup e^{-t\mathbf{A_0}} \mathbf{P} f$ в $L^2(0, T, E_\varepsilon)$ для любого $T > 0$.*

Доказательство. Для $v^\varepsilon(t) = e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon} f^\varepsilon$, $v(t) = e^{-t\mathbf{A_0}} \mathbf{P} f$ выполнены оценки (см. § 3):

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \|v^\varepsilon(t)\|_{E_\varepsilon} \leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} e^t \|f^\varepsilon\|_{E_\varepsilon}, \qquad \|v(t)\| \leqslant e^t \|f\|_E.$$

Поэтому для любого $T > 0$ $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^T \|v^\varepsilon(t)\|_{E_\varepsilon}^2 dt \leqslant C(T)$. По лемме 4.7 (с точностью до подпоследовательности)

$$v^\varepsilon(t) \rightharpoonup \chi(t) \quad \text{в} \quad L^2(0, T, E_\varepsilon). \tag{5.13}$$

Для преобразования Лапласа (см. § 3) имеем представления

$$\hat{v}^\varepsilon(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon} f^\varepsilon\, dt = (\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1} f^\varepsilon, \qquad \hat{v}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t\mathbf{A_0}} \mathbf{P} f\, dt = (\mathbf{A_0} + \lambda)^{-1} \mathbf{P} f,$$

где $\lambda > 1$. Поэтому, если $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ в E_ε, то по лемме 5.1

$$\hat{v}^\varepsilon(\lambda) \rightharpoonup \hat{v}(\lambda) \quad \text{в} \quad E_\varepsilon. \tag{5.14}$$

Из (5.13), (5.14) следуют соотношения

$$\hat{v}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t\mathbf{A_0}} \mathbf{P} f\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \chi(t)\, dt,$$

из которых, в силу теоремы о единственности преобразования Лапласа, выводим $\chi(t) = e^{-t\mathbf{A_0}}\mathbf{P}f$. Следовательно, (см. (5.13)) искомая сходимость полугрупп получена. Теорема доказана. □

Из теоремы 5.2 следует результат о сходимости решений задачи (5.1).

Теорема 5.3. *Пусть* $u_\varepsilon(t)$ — *решение задачи* (5.1)*, причем начальные данные удовлетворяют соотношениям* $f_1^\varepsilon \rightharpoonup f_1$*,* $f_2^\varepsilon \rightharpoonup f_2$ *в* H_ε*,* $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}(A_\varepsilon f_1^\varepsilon, f_1^\varepsilon)_\varepsilon < \infty$*. Тогда для каждого* $T > 0$ *имеют место сходимости*

$$u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \qquad u'_\varepsilon(t) \rightharpoonup u'(t) \quad \text{в} \quad L^2(0, T, H_\varepsilon),$$

где $u(t)$ — *решение уравнения* $u''(t) + A_0 u(t) = 0$*,* $u(0) = f_1$*,* $u'(0) = P f_2$ *в* H_0*.*

Заметим, что теоремы, аналогичные теоремам 5.2, 5.3, в ситуации, когда $H_\varepsilon = H$ и имеет место сходимость резольвенты $(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}$ к резольвенте в пространстве H (а не к псевдорезольвенте, как в рассматриваемом случае), можно найти в [21, гл. X].

6. Сильная сходимость в переменных пространствах, связанных с гиперболической полугруппой

С введенными в § 4 сходимостями $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в W_ε, $v^\varepsilon \rightharpoonup v$ в E_ε можно обращаться так же, как с исходной «слабой сходимостью» в H_ε. В частности, каждой из них можно сопоставить свою сильную сходимость.

Определение 6.1. Пусть $h_\varepsilon \in W_\varepsilon$. Скажем, что $h_\varepsilon \to h$ в W_ε, если $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ в W_ε и

$$(h_\varepsilon, u_\varepsilon)_{W_\varepsilon} \to (h, u)_{W_0}, \quad \text{как только} \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad W_\varepsilon. \tag{6.1}$$

По определению, $v^\varepsilon = \begin{pmatrix} v_1^\varepsilon \\ v_2^\varepsilon \end{pmatrix} \to v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in E = W_0 \times H$ в $E_\varepsilon = W_\varepsilon \times H_\varepsilon \iff v_1^\varepsilon \to v_1 \in W_0$ в W_ε, $v_2^\varepsilon \to v_2 \in H$ в H_ε.

Далее изучим свойства сильной сходимости в W_ε.

Лемма 6.2. *Если* $h_\varepsilon \to h$ *в* W_ε*, то* $h_\varepsilon \to h$ *в* H_ε*.*

Доказательство. Пусть

$$h_\varepsilon \to h \quad \text{в} \quad W_\varepsilon, \qquad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad H_\varepsilon. \tag{6.2}$$

Заметим, что

$$(h_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon = ((A_\varepsilon + 1)h_\varepsilon, (A_\varepsilon + 1)^{-1} u_\varepsilon)_\varepsilon = ((A_\varepsilon + 1)h_\varepsilon, g_\varepsilon)_\varepsilon = (h_\varepsilon, g_\varepsilon)_{W_\varepsilon}, \tag{6.3}$$

где, в силу (2.7),

$$g_\varepsilon \equiv (A_\varepsilon + 1)^{-1} u_\varepsilon \rightharpoonup (A_0 + 1)^{-1} P u \equiv g \quad \text{в} \quad H_\varepsilon. \tag{6.4}$$

Кроме того, g_ε как решение уравнения $(A_\varepsilon + 1) g_\varepsilon = u_\varepsilon$ удовлетворяет оценке

$$\|g_\varepsilon\|_{W_\varepsilon}^2 = ((A_\varepsilon + 1) g_\varepsilon, g_\varepsilon)_\varepsilon \leqslant \|u_\varepsilon\|_\varepsilon \|g_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \|u_\varepsilon\|_\varepsilon \|g_\varepsilon\|_{W_\varepsilon},$$

где $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$, вследствие $(6.2)_2$. Поэтому $g_\varepsilon \in W_\varepsilon$ и g_ε ограничена в W_ε, что вместе с (6.4) означает: $g_\varepsilon \rightharpoonup g$ в W_ε. Отсюда и из $(6.2)_1$ выводим соотношения

$$(h_\varepsilon, g_\varepsilon)_{W_\varepsilon} \to (h, g)_{W_0} = ((A_0+1)h, (A_0+1)^{-1}Pu) = (h, Pu) = (h, u),$$

при этом учитываются представление g из (6.4) и принадлежность $h \in W_0 \subset H_0$. Принимая во внимание (6.3), видим, что $(h_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon \to (h, u)$ для произвольной $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в H_ε. Этого достаточно, чтобы по лемме 2.2 получить искомую сходимость h_ε. □

Лемма 6.3. *Имеет место критерий сильной сходимости в* W_ε:

$$h_\varepsilon \to h \quad \text{в} \quad W_\varepsilon \Longleftrightarrow h_\varepsilon \rightharpoonup h \quad \text{в} \quad W_\varepsilon, \quad \|h_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} \to \|h\|_{W_0}.$$

Доказательство. В одну сторону критерий очевиден. Остается вывести сильную сходимость из двух других условий. Рассмотрим для произвольной $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в W_ε формы $(h_\varepsilon, u_\varepsilon)_{W_\varepsilon}$, $(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{W_\varepsilon}$, которые, в силу их ограниченности, сходятся, быть может, по некоторой подпоследовательности

$$(h_\varepsilon, u_\varepsilon)_{W_\varepsilon} \to \alpha, \quad (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{W_\varepsilon} \to \beta.$$

Требуется проверить равенство $\alpha = (h, u)_{W_0}$. По лемме 4.2, поскольку $h_\varepsilon + tu_\varepsilon \rightharpoonup h + tu$ в W_ε, где $t \in \mathbb{R}^1$, имеем оценку

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}(h_\varepsilon + tu_\varepsilon, h_\varepsilon + tu_\varepsilon)_{W_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(h_\varepsilon, h_\varepsilon)_{W_\varepsilon} + 2t\alpha + t^2\beta \geqslant$$
$$\geqslant (h+tu, h+tu)_{W_0} = (h,h)_{W_0} + 2t(h,u)_{W_0} + t^2(u,u)_{W_0}.$$

Так как $(h_\varepsilon, h_\varepsilon)_{W_\varepsilon} \to (h,h)_{W_0}$ по предположению, то получаем

$$2t\alpha + t^2\beta \geqslant 2t(h,u)_{W_0} + t^2(u,u)_{W_0} \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Отсюда следует равенство $\alpha = (h,u)_{W_0}$, и сильная сходимость $h_\varepsilon \to h$ в W_ε доказана. □

Лемма 6.4. *Имеет место резольвентная сходимость следующего вида*:

$$\forall \lambda > 1 \quad (\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1} f^\varepsilon \to (\mathbf{A}_0 + \lambda)^{-1}\mathbf{P} f \quad \text{в} \quad E_\varepsilon, \quad \text{как только} \quad f^\varepsilon \to f \quad \text{в} \quad E_\varepsilon. \tag{6.5}$$

Доказательство. Следуем схеме доказательства леммы 5.1, фиксируя моменты, где проявляется сильная сходимость. Пусть $f^\varepsilon \to f$ в E_ε, что эквивалентно двум сходимостям

$$f_1^\varepsilon \to f_1 \in W_0 \quad \text{в} \quad W_\varepsilon, \qquad f_2^\varepsilon \to f_2 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \tag{6.6}$$

и, вследствие леммы 6.2, $f_1^\varepsilon \to f_1$ в H_ε. Отсюда, благодаря резольвентной сходимости (2.3), выводим из соотношений $(5.7)_2$ сходимости для компонент вектора $v^\varepsilon = (\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1} f^\varepsilon$:

$$\begin{aligned} &v_1^\varepsilon \to v_1, \qquad v_1 = (A_0 + \lambda^2)^{-1}(\lambda f_1 + P f_2) \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \\ &v_2^\varepsilon \to v_2, \qquad v_2 = \lambda v_1 - f_1 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \end{aligned} \tag{6.7}$$

из которых следует, что вектор-столбец $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ есть решение матричного уравнения (5.12).

По-прежнему выполнена оценка (5.1), которая вместе со сходимостью $v_1^\varepsilon \rightharpoonup v_1$ в H_ε (что предполагается соотношением $(6.7)_1$) означает

$$v_1^\varepsilon \rightharpoonup v_1 \in W_0 \quad \text{в} \quad W_\varepsilon. \tag{6.8}$$

В энергетическом равенстве (5.9) перейдем к пределу, используя сходимости (6.6)–(6.8),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(A_\varepsilon v_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon)_\varepsilon + \lambda^2(v_1, v_1) = (\lambda f_1 + f_2, v_1). \tag{6.9}$$

Сравним (6.9) с энергетическим равенством для v_1, которое получается из $(6.7)_1$,

$$(A_0 v_1, v_1) + \lambda^2(v_1, v_1) = (\lambda f_1 + P f_2, v_1).$$

Видим, что в энергетических равенствах совпадают правые части, так как $(f_2, v_1) = (P f_2, v_1)$ ввиду того, что $v_1 \in W_0 \subset H_0$ (см. (6.8)). Тогда совпадают и левые части этих равенств; отсюда выводим соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(A_\varepsilon v_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon)_\varepsilon = (A_0 v_1, v_1),$$

которое позволяет установить сходимость норм $\|v_1^\varepsilon\|_{W_\varepsilon} \to \|v_1\|_{W_0}$. Отсюда и из (6.8) по лемме 6.3 следует сильная сходимость $v_1^\varepsilon \to v_1$ в W_ε, а с учетом $(6.7)_2$ также и сходимость $v^\varepsilon \to v$ в E_ε. Условие (7.5) проверено. Лемма доказана. □

Продолжаем изучение свойств сходимости в пространстве W_ε.

Лемма 6.5 (аппроксимационное свойство пространства W_0)**.** *Существует плотное множество S в W_0 такое, что для любого $z \in S$ найдется последовательность $z_\varepsilon \in W_\varepsilon$ такая, что $z_\varepsilon \to z$ в W_ε.*

Доказательство. В качестве S рассмотрим $D(A_0)$. Для произвольного $z \in S$ положим $f = (A_0 + 1)z \in H_0$ и далее найдем сначала $f_\varepsilon \to f$ в H_ε (что возможно, в силу условия (ii) из § 2), а потом $z_\varepsilon = (A_\varepsilon + 1)^{-1} f_\varepsilon$. Докажем, что

$$z_\varepsilon \to z \quad \text{в} \quad W_\varepsilon. \tag{6.10}$$

В силу (2.3), из условия $f_\varepsilon \to f$ в H_ε и по определению 2.1, выводим сходимости

$$z_\varepsilon \to z \quad \text{в} \quad H_\varepsilon; \quad \text{в частности,} \quad z_\varepsilon \rightharpoonup z \quad \text{в} \quad H_\varepsilon \quad \text{и} \quad (f_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon \to (f, z). \tag{6.11}$$

Из энергетического равенства

$$((A_\varepsilon + 1)z_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon = (f_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon \tag{6.12}$$

нетрудно установить ограниченность z_ε в W_ε, что вместе с $(6.11)_2$ дает, по определению 4.1, сходимость

$$z_\varepsilon \rightharpoonup z \quad \text{в} \quad W_\varepsilon. \tag{6.13}$$

После перехода к пределу в (6.12), учитывая сходимость $(6.11)_3$ и энергетическое равенство

$$((A_0 + 1)z, z) = (f, z),$$

получаем сходимость $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}((A_\varepsilon + 1)z_\varepsilon, z_\varepsilon)_\varepsilon = ((A_0 + 1)z, z)$, эквивалентную сходимости норм $\|z_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} \to \|z\|_W$. Отсюда и из (6.13) по лемме 6.3 выводим сходимость (6.10). Аппроксимационное свойство пространства W_0 доказано. □

В леммах 4.2, 6.5 для сходимости в W_ε доказаны свойства, аналогичные свойствам (i), (ii) из § 2 для сходимости в H_ε. Поэтому справедливо утверждение, аналогичное лемме 2.2.

Лемма 6.6. *Если для $h_\varepsilon \in W_\varepsilon$ выполнено условие* (6.1)*, то $h_\varepsilon \to h$ в W_ε.*

7. Поточечная сходимость гиперболических полугрупп в переменном пространстве

7.1. Если заменить тройку пространств H_ε, H, H_0 на тройку пространств E_ε, E, E_0, ортопроектор $P : H \to H_0$ — на ортопроектор $\mathbf{P} : E \to E_0$, а операторы A_ε, A_0 — на операторы $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\mathbf{A}_0$, определенные по формуле (5.2), и ввести аналогично, как в § 2, сильную сходимость ограниченных операторов, действующих в E_ε, то теорему 2.7 можно перенести на случай гиперболических полугрупп $e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon}$, $e^{-t\mathbf{A}_0}$, действующих в пространствах E_ε и E_0 соответственно.

В самом деле, во-первых, сходимость в пространстве E_ε — полный аналог сходимости в пространстве H_ε со всеми присущими последней свойствами (см. §§ 4 и 6). Во-вторых, операторы $\mathbf{A}_\varepsilon$ и $\mathbf{A}_0$ удовлетворяют необходимым требованиям с небольшими поправками, не существенными для основного вывода теоремы 2.7. Действительно, (см. § 3)

$$e^{-t\mathbf{A}_0} = e^{-t(\mathbf{A}_0+1)}e^t, \qquad e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon} = e^{-t(\mathbf{A}_\varepsilon+1)}e^t,$$

и операторные экспоненты в этих представлениях — полугруппы сжатий в E_0, E_ε. Кроме того, по лемме 6.4 имеет место резольвентная сходимость вида (1.2)

$$\forall\lambda > 1 \quad (\mathbf{A}_\varepsilon + \lambda)^{-1} \to (\mathbf{A}_0 + \lambda)^{-1}, \tag{7.1}$$

где задействована сильная сходимость $B_\varepsilon \to B_0$ ограниченных операторов $B_\varepsilon : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$ к ограниченному оператору $B_0 : E_0 \to E_0$. Тогда из теоремы 2.7 и из (7.1) вытекает следующая теорема.

Теорема 7.1. *При любом $t \geqslant 0$*

$$e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon} f^\varepsilon \to e^{-t\mathbf{A}_0} f \quad \textit{в} \quad E_\varepsilon, \quad \textit{как только} \quad f^\varepsilon \to f \in E_0 \quad \textit{в} \quad E_\varepsilon. \tag{7.2}$$

Из теоремы 7.1 можно вывести следующий результат о сходимости решений задачи (5.1).

Теорема 7.2. *Пусть* $u_\varepsilon(t)$ — *решение задачи* (5.1) *с начальными данными такими, что*

$$f_1^\varepsilon \in W_\varepsilon, \quad f_2^\varepsilon \in H_\varepsilon, \quad f_1^\varepsilon \to f_1 \quad \text{в} \quad W_\varepsilon, \quad f_2^\varepsilon \to f_2 \in H_0 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon. \tag{7.3}$$

Тогда для каждого $t \geqslant 0$

$$u_\varepsilon(t) \to u(t) \quad \text{в} \quad W_\varepsilon, \qquad u'_\varepsilon(t) \to u'(t) \quad \text{в} \quad H_\varepsilon,$$

где $u(t)$ — *решение задачи Коши в* H_0

$$u'' + A_0 u = 0, \quad u(0) = f_1, \quad u'(0) = f_2. \tag{7.4}$$

Заметим, что из (7.3) автоматически следует $f_1 \in W_0 \subset H_0$ (см. § 4), поэтому в (7.4) оба начальных данных задачи Коши — из пространства H_0.

7.2. Рассмотрим задачу Коши с неоднородным операторным уравнением

$$u'' + A_\varepsilon u_\varepsilon = g_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = 0, \quad g_\varepsilon \to g \in H_0 \quad \text{в} \quad H_\varepsilon\ \forall t > 0. \tag{7.5}$$

Замена $v^\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ u'_\varepsilon \end{pmatrix}$, $h^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ g_\varepsilon \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ переводит задачу (7.5) в «матричную» задачу

$$(v^\varepsilon)' + \mathbf{A}_\varepsilon v^\varepsilon = h^\varepsilon, \quad v^\varepsilon(0) = 0, \quad h^\varepsilon \to h \in E_0 \quad \text{в} \quad E_\varepsilon,$$

где «матричный» оператор $\mathbf{A}_\varepsilon$ определен в (5.2). Поскольку $v^\varepsilon(t) = \int\limits_0^T e^{-\mathbf{A}_\varepsilon(t-s)} h^\varepsilon(s)\,ds$, то, согласно (7.2),

$$e^{-\mathbf{A}_\varepsilon(t-s)} h^\varepsilon(s) \to e^{-\mathbf{A}_0(t-s)} h(s) \quad \text{в} \quad E_\varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in [0, T].$$

Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$v^\varepsilon(t) \to v(t) \quad \text{в} \quad E_\varepsilon, \quad \text{где} \quad v'(t) + \mathbf{A}_0 v = h, \quad v(0) = 0. \tag{7.6}$$

Огрубляя сходимость из (7.6) по первой компоненте (см. лемму 6.2), получаем следующий результат о переходе к пределу в задаче (7.5).

Теорема 7.3. *Пусть* $u_\varepsilon(t)$ — *решение задачи* (7.5). *Тогда для каждого* $t \geqslant 0$

$$u_\varepsilon(t) \to u(t), \quad u'_\varepsilon(t) \to u'(t) \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \quad \text{где} \quad u'' + A_0 u = g, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

7.3. Рассмотрим ситуацию, когда $H = H_0$. Это означает, что A_ε, A_0 — самосопряженные неотрицательные операторы в H_ε и H соответственно, связанные сильной резольвентной сходимостью

$$\text{при любом} \quad \lambda > 0 \quad (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} f_\varepsilon \to (A_0 + \lambda)^{-1} f, \quad \text{как только} \quad f_\varepsilon \to f. \tag{7.7}$$

Приведем результат о поточечной слабой сходимости гиперболической полугруппы, вытекающий из теоремы 7.1 на основании следующего утверждения.

Лемма 7.4. *Пусть* B_ε, B — *ограниченные операторы в* E_ε *и* E *соответственно,* $B_\varepsilon^\star$, $B^\star$ — *их сопряженные операторы и нормы* $\|B_\varepsilon\|$ *ограничены. Тогда* $B_\varepsilon f_\varepsilon \to Bf$ *в* E_ε, *как только* $f_\varepsilon \to f$ *в* E_ε, *если и только если* $B_\varepsilon^\star f_\varepsilon \rightharpoonup B^\star f$ *в* E_ε, *как только* $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ *в* E_ε.

Это утверждение доказывается так же, как лемма 2.5.

Теорема 7.5. *В предположении* (7.7) *при любом* $t \geqslant 0$

$$e^{-t\mathbf{A}_\varepsilon} f^\varepsilon \rightharpoonup e^{-t\mathbf{A}_0} f \quad \text{в} \quad E_\varepsilon, \quad \text{как только} \quad f^\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{в} \quad E_\varepsilon.$$

Для задачи (5.1) получен следующий результат.

Теорема 7.6. *Пусть выполнено предположение* (7.7), $u_\varepsilon(t)$ — *решение задачи* (5.1) *с начальными данными такими, что* f_1^ε *ограничена в* W_ε, $f_1^\varepsilon \rightharpoonup f_1$, $f_2^\varepsilon \rightharpoonup f_2$ *в* H_ε. *Тогда при любом* $t \geqslant 0$

$$u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad u'_\varepsilon(t) \rightharpoonup u'(t) \quad \text{в} \quad H_\varepsilon, \quad \text{где} \quad u(t) \quad \text{— решение задачи (7.4).}$$

8. О сходимости спектров при резольвентной сходимости

8.1. Пусть пространства H_ε, H, H_0 и операторы A_ε, A_0, P те же, что в § 2. Можно получить информацию о спектре $\operatorname{Sp} A_\varepsilon$, если известен спектр $\operatorname{Sp} A_0$ и установлена некоторая сходимость спектров, например, сходимость по Хаусдорфу. Напомним, что $\operatorname{Sp} A_\varepsilon \to \operatorname{Sp} A_0$ (по Хаусдорфу), если

(H_1) $\quad\forall \mu \in \operatorname{Sp} A_0$ найдется $\mu_\varepsilon \in \operatorname{Sp} A_\varepsilon$, $\mu_\varepsilon \to \mu$;

(H_2) $\quad$если $\mu_\varepsilon \in \operatorname{Sp} A_\varepsilon$ и $\mu_\varepsilon \to \mu$, то $\mu \in \operatorname{Sp} A_0$.

Теорема 8.1. *Свойство (H_1) сходимости спектров $\operatorname{Sp} A_\varepsilon \to \operatorname{Sp} A_0$ выполнено.*

Пусть далее B_ε, B, B_0 — ограниченные самосопряженные операторы в пространствах H_ε, H, H_0 соответственно: $\|B_\varepsilon\|$, $\|B_0\| < \alpha < \infty$.

Для доказательства теоремы 8.1 полезны следующие утверждения, первое из которых вытекает из спектрального представления самосопряженного оператора.

Лемма 8.2. $\operatorname{Sp} B \cap [\mu-\delta, \mu+\delta] \neq \varnothing \iff$ *найдется $u \in H$ такой, что $\|u\| = 1$, $\|(B-\mu)u\| < \delta$.*

Лемма 8.3. *Пусть $B_\varepsilon \to B_0 P$. Тогда выполнено свойство (H_1) сходимости спектров* $\operatorname{Sp} B_\varepsilon \to \operatorname{Sp} B_0$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \operatorname{Sp} B_0$. Покажем, что найдется $\mu_\varepsilon \in \operatorname{Sp} B_\varepsilon$, $\mu_\varepsilon \to \mu$. Фиксируя $\delta \in (0,1)$, в соответствии с леммой 8.2, найдем $u \in H_0$ такой, что $\|u\| = 1$, $\|(B_0 - \mu)u\| < \delta/2$. По условию (ii) § 2, существует $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$ такой, что $u_\varepsilon \to u$. Тогда $B_\varepsilon u_\varepsilon \to B_0 P u = B_0 u$, так как $B_\varepsilon \to B_0 P$ и $u \in H_0$. Отсюда, по свойству (2.2) сильной сходимости, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|(B_\varepsilon - \mu)u_\varepsilon\|_\varepsilon = \|(B-\mu)u\| \leqslant \delta/2$. Следовательно, $\|(B_\varepsilon - \mu)v_\varepsilon\|_\varepsilon < \delta$, $v_\varepsilon = u_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_\varepsilon^{-1}$ для достаточно малых ε. Снова по лемме 8.2 (в другую сторону и применительно к оператору B_ε) найдется $\mu_\varepsilon \in \operatorname{Sp} B_\varepsilon \cap [\mu - \delta, \mu + \delta]$. Поскольку δ можно выбрать как угодно малым, то утверждение леммы доказано. $\square$

Для доказательства теоремы 8.1 положим $B_\varepsilon = (A_\varepsilon + \lambda)^{-1}$, $B_0 = (A_0 + \lambda)^{-1}$, где $\lambda > 0$. Тогда к операторам B_ε, B_0 применима лемма 8.3: сходимость $B_\varepsilon \to B_0 P$ задана условием (2.3). Осталось заметить, что спектры операторов A_ε и B_ε, A_0 и B_0 связаны очевидным преобразованием.

8.2. Пусть $A_\varepsilon = \int\limits_0^\infty \lambda dE_\varepsilon(\lambda)$, $A_0 = \int\limits_0^\infty \lambda dE_0(\lambda)$ — спектральные представления операторов A_ε и A_0.

Теорема 8.4. *Имеет место сходимость спектральных проекторов $E_\varepsilon(\lambda) \to E_0(\lambda)$, если только λ не есть собственное значение оператора A_0.*

Эта теорема выводится из сходимости спектральных проекторов $E_\varepsilon(\lambda, B_\varepsilon)$ для ограниченных самосопряженных операторов B_ε.

Лемма 8.5. *Если $B_\varepsilon \to B_0 P$, то $E_\varepsilon(\lambda, B_\varepsilon) \to E_0(\lambda, B_0)$ в любой точке λ, не являющейся собственным значением оператора B_0.*

Доказательство. Считаем $\lambda = 0$, тогда $\operatorname{Ker} B_0 = 0$. Пусть далее $E_\varepsilon(0, B_\varepsilon) = E_\varepsilon(0)$, $E_0(0, B_0) = E_0(0)$. Рассмотрим непрерывную функцию $q(t) = \begin{cases} t \text{ при } t < 0, \\ 0 \text{ при } t \geqslant 0 \end{cases}$ и аппроксимирующий ее полином $Q_\delta(t)$ такой, что $\sup\limits_{[-\alpha,\alpha]} |q(t) - Q_\delta(t)| < \delta$, где $\delta \in (0,1)$ наперед задано. Тогда

$$E_0(0) B_0 = \int\limits_{-\alpha}^{0} \lambda \, dE_0(\lambda) = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} q(\lambda) \, dE_0(\lambda) = q(B_0),$$

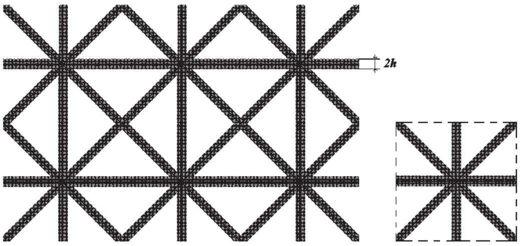

Рис. 1

аналогично $E_\varepsilon(0)B_\varepsilon = q(B_\varepsilon)$, при этом $\|q(B_0) - Q_\delta(B_0)\| < \delta$, $\|q(B_\varepsilon) - Q_\delta(B_\varepsilon)\| < \delta$, так как, например, $q(B_0) - Q_\delta(B_0) = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} (q(\lambda) - Q_\delta(\lambda))dE_0(\lambda)$. Отсюда для $z_\varepsilon \to z \in H_0$ получаем элементы

$$u_\varepsilon = q(B_\varepsilon)z_\varepsilon, \quad \tilde{u}_\varepsilon = Q_\delta(B_\varepsilon)z_\varepsilon, \quad u = q(B_0)z, \quad \tilde{u} = Q_\delta(B_0)z,$$

удовлетворяющие условию (2.10), поскольку $B_\varepsilon \to B_0$ и, значит, $Q_\delta(B_\varepsilon) \to Q_\delta(B_0)$ (см. лемму 1.1). Тогда по лемме 2.6 $u_\varepsilon \to u$, т.е. $E_\varepsilon(0)B_\varepsilon z_\varepsilon \to E_0(0)B_0 z$. Предположение $\operatorname{Ker} B_0 = 0$ влечет плотность множества $\operatorname{Im} B_0$ в H_0, и искомая сходимость следует из леммы 1.3. Лемма доказана. □

Для доказательства теоремы 8.4 осталось заметить, что резольвентная сходимость (2.3) дает сильную сходимость ограниченных операторов $B_\varepsilon \equiv (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} \to (A_0 + \lambda)^{-1} \equiv B_0$, а спектральные проекторы взаимно обратных операторов связаны соотношением $E(\lambda, B_0^{-1}) = 1 - E(\lambda^{-1}, B_0)$, если λ не есть собственное значение оператора B_0.

8.3. Для того, чтобы выполнялось условие (H_2) сходимости спектров $\operatorname{Sp} A_\varepsilon \to \operatorname{Sp} A_0$, достаточно иметь компактное вложение $W_\varepsilon \subset H_\varepsilon$ или некоторое ограниченное свойство компактности оператора A_ε такое, как, например, в [2].

9. Усреднение нестационарной задачи теории упругости на тонких сетках

В качестве тонких структур рассмотрим тонкие сетки на плоскости.

9.1. Постановка задачи. Через F обозначим периодический граф на плоскости, составленный из отрезков и называемый далее сингулярной сеткой или просто сеткой, с ячейкой периодичности — единичным квадратом $Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$. Исключаем случай, когда F состоит из одного семейства параллельных прямых. Наряду с сингулярными сетками F нулевой толщины рассматриваем также аппроксимирующие их тонкие сетки F^h. Например, простейшей сетке, составленной из прямых (по определению), соответствует тонкая сетка, которая получается, если каждую прямую заменить полосой, симметричной относительно этой прямой, при этом ширина каждой полосы равна $2h$. Для сингулярных сеток, не являющихся простейшими, также имеется естественный способ аппроксимировать их тонкими сетками (см. [10]).

На рис. 1 изображена периодическая сетка, составленная из полос толщины $2h > 0$, ячейка периодичности указана пунктиром. Там же изображена и бесконечно тонкая сетка, отвечающая толщине $h = 0$. Данные сетки назовем модельными.

Пусть μ — 1-периодическая мера, сосредоточенная на сетке F и пропорциональная на ней линейной мере Лебега, μ^h — 1-периодическая мера, сосредоточенная на сетке F^h и пропорциональная на ней плоской мере Лебега. Меры μ, μ^h нормированы: $\int\limits_Y d\mu = \int\limits_Y d\mu^h = 1$. Имеется слабая сходимость мер $d\mu^h \rightharpoonup d\mu$ при $h \to 0$.

Гомотетическое сжатие переводит сетку F^h в ε-периодическую сетку F^h_ε. Возникает ε-периодическая мера μ^h_ε, сосредоточенная на сетке F^h_ε, для которой $\mu^h_\varepsilon(B) = \varepsilon^2\mu^h(\varepsilon^{-1}B)$, B — любое борелевское множество на плоскости. Мера μ^h_ε слабо сходится к плоской мере Лебега: $d\mu^h_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее предполагаем, что параметр $h = h(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon)\varepsilon^{-1} = \theta > 0,$$

т.е. F^h_ε — тонкая сетка критической толщины по терминологии [5].

Через $A = \{a_{ijsp}\}$ обозначим тензор упругости, подчиненный обычным условиям симметрии: $a_{ijsp} = a_{spij} = a_{jisp}$. Скалярное произведение симметрических матриц $\xi = \{\xi_{ij}\}$, $\eta = \{\eta_{ij}\}$ определим как $\xi\cdot\eta = \xi_{ij}\eta_{ij}$. Действие тензора A на матрицу ξ есть матрица $A\xi = \{a_{ijsp}\xi_{sp}\}$. Предполагаем, что A положительно определен: $A\xi\cdot\xi \geqslant c_0\xi\cdot\xi$, $c_0 > 0$. Для изотропного тензора имеем

$$A\xi = k\xi + k_1 E \operatorname{tr}\xi, \quad k > 0, \quad k_1 \geqslant 0, \quad \operatorname{tr}\xi = \xi_{11} + \xi_{22}, \tag{9.1}$$

где ξ — симметрическая матрица 2×2, E — единичная матрица 2×2.

С ограниченной липшицевой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ свяжем перфорированную область $\Omega\cap F^h_\varepsilon$ и рассмотрим в ней нестационарную задачу теории упругости

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^{\varepsilon,h} = \operatorname{div} Ae(u^{\varepsilon,h}) + f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega\cap F^h_\varepsilon \quad \text{при} \quad t>0, \\ u^{\varepsilon,h} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\cap F^h_\varepsilon, \quad Ae(u^{\varepsilon,h})n = 0 \quad \text{на} \quad \Omega\cap\partial F^h_\varepsilon \quad \text{при} \quad t>0, \\ u^{\varepsilon,h} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}u^{\varepsilon,h} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \end{gathered} \tag{9.2}$$

где $e(\varphi) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\}$ — тензор деформации, $f(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}\times R^1_t)^2$, n — нормаль к границе ∂F^h_ε.

Задача (9.2) изучается с точки зрения теории полугрупп. Нас интересует, каково поведение решений $u^{\varepsilon,h}$ при $\varepsilon\to 0$. Ответ на этот вопрос дан в теореме 9.3. Усреднение задачи (9.2) получается из сходимости гиперболических полугрупп, которая, в свою очередь, выводится из резольвентной сходимости опеатора стационарной задачи, см. § 7. Далее подробно описываем усреднение для стационарной задачи теории упругости в резольвентной постановке, полученное в [10], вводя заодно необходимые понятия и объекты.

9.2. Принцип усреднения для стационарной задачи теории упругости. Пусть $W_{\varepsilon,h}$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)^2$ по норме

$$\left(\int\limits_{\Omega\cap F^h_\varepsilon} [\varphi\cdot\varphi + e(\varphi)\cdot e(\varphi)]\, d\mu^h_\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим задачу: найти вектор-функцию $u_{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega\cap F^h_\varepsilon} (Ae(u^{\varepsilon,h})\cdot e(\varphi) + \lambda u^{\varepsilon,h}\cdot\varphi)\, dx = \int\limits_{\Omega\cap F^h_\varepsilon} f\cdot\varphi\, dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)^2, \tag{9.3}$$

где $f\in C^\infty(\overline{\Omega})^2$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$.

Это обобщенная или вариационная формулировка краевой задачи для стационарной системы теории упругости в области $\Omega\cap F^h_\varepsilon$, когда на $\partial\Omega\cap F^h_\varepsilon$ задается условие закрепления, т.е. условие Дирихле $u_{\varepsilon,h} = 0$, а на остальной части границы области $\Omega\cap F^h_\varepsilon$ — условие отсутствия напряжений $Ae(u_{\varepsilon,h})n = 0$.

Обычным способом по теореме Рисса доказывается существование и единственность решения задачи (9.3), а также его равномерная по ε и h ограниченность

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}(|u^{\varepsilon,h}|^2+|e(u^{\varepsilon,h})|^2)\,d\mu_\varepsilon^h<\infty. \tag{9.4}$$

В [10] установлена двухмасштабная сходимость решений задачи (9.3) к решению двухмасштабной предельной задачи. Опишем эту задачу, предварительно введя необходимые понятия.

Пространство периодических жестких перемещений. В пространстве $L^2(Y,d\mu)^2$ выделим множество $\mathcal{R}$ периодических жестких перемещений на сингулярной сетке F. По определению, $u\in\mathcal{R}$, если найдутся гладкие векторы $\varphi_n\in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^2$ такие, что $\varphi_n\longrightarrow u$, $e(\varphi_n)\to 0$ в $L^2(Y,d\mu)$.

Всякий вектор $u\in\mathcal{R}$ допускает единственное представление

$$u(y)=c+\chi(y), \tag{9.5}$$

где c — постоянный вектор, а χ — поперечное перемещение, т.е. на каждом звене сетки F вектор χ ортогонален этому звену. Таким образом, справедливо разложение $\mathcal{R}=\mathbb{R}^2+\mathcal{R}_1$, где $\mathcal{R}_1$ — множество периодических поперечных перемещений. Очевидно, что ортогональный проектор $P_1 : L^2(Y,d\mu)^2\to\mathcal{R}_1$ действует поточечно, сопоставляя вектору $v=v(y)$ поперечное перемещение, равное на каждом звене нормальной компоненте вектора $v(y)$. По этой причине пишем $P_1=P_1(y)$. В выражении вида $P_1f(x)=P_1(y)f(x)$ вектор f рассматривается как постоянный, x играет роль параметра.

Для векторов $g\in\mathcal{R}_1$ введем три условия a), b), c).

Договоримся называть звеном сингулярной сетки F отрезок $I\subset F$ между узлами, не содержащий внутри себя другие узлы. Рассматривая звено I в окрестности узла O, выбираем правую двойку взаимно ортогональных ортов (τ,ν), где τ — направляющий вектор для I, выходяший из точки O. Продольную производную функции a, заданной на звене I, обозначаем через $a'=\dfrac{da}{d\tau}$.

a) Скалярное произведение $g\cdot\nu$, а также производные $(g\cdot\nu)'$, $(g\cdot\nu)''$ суммируемы с квадратом на отрезке I, или коротко: $g\cdot\nu\in H^2(I)$.

Для функции $a\in H^2(I)$ определены ее значение, а также значение ее производной a' в любой точке отрезка I. Поэтому, если вектор $g\in\mathcal{R}_1$ удовлетворяет условию a) на всех звеньях, то можно говорить о следующих его свойствах.

b) В узле O, из которого выходят по крайней мере два звена, имеет место закрепление:

$$g|_O=0.$$

c) Для любых двух звеньев I, $\tilde I$, сходящихся в узле O, выполнено равенство:

$$\frac{d}{d\tau}(g|_I\cdot\nu)|_O=\frac{d}{d\tilde\tau}(g|_{\tilde I}\cdot\tilde\nu)|_O.$$

Пусть $\mathcal{R}_1^0\subset\mathcal{R}_1$ — множество всех периодических поперечных перемещений, удовлетворяющих условиям a), b), c) на каждом звене и в каждом узле сетки F. Норму в $\mathcal{R}_1^0$ определим как сумму H^2-норм по всем отрезкам из $F\cap Y$.

Введем кусочно-постоянную функцию $\rho(y)$, значение которой на звене I с направлением $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ определяется по формуле

$$\rho(y)=(A^{-1}\eta\cdot\eta)^{-1},\quad \eta=\{\tau_i\tau_j\}_{i,j=1}^2.$$

В изотропном случае (см. (9.1)) $\rho(y)$ принимает одно и то же значение на всех звеньях

$$\rho(y)=\hat k=\frac{k(k+2k_1)}{(k+k_1)}.$$

Предельная задача. Пусть W — множество вектор-функций вида

$$u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y), \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0);$$

$P : L^2(\Omega \times Y)^2 \to L^2(\Omega, \mathcal{R})$ — ортопроектор; A^{hom} — усредненный тензор,

$$A^{\mathrm{hom}}\xi \cdot \xi = \inf_{w \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^2} \int\limits_Y A(\xi + e(w)) \cdot (\xi + e(w))\, d\mu.$$

Для простоты изложения предположим, что тензор A^{hom} невырожден, т.е. $A^{\mathrm{hom}}\xi \cdot \xi \geqslant c\xi \cdot \xi$, $c > 0$. Например, это имеет место для модельной сетки (вычисления приведены в [5,11]).

Скажем, что $u \in W$ есть решение усредненной задачи, если интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega A^{\mathrm{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0)\, dx + \frac{\theta^2}{3} \int\limits_\Omega \int\limits_Y \rho(y) \chi'' \cdot \psi''\, dx d\mu + \lambda \int\limits_\Omega \int\limits_Y u \cdot \varphi\, dx d\mu = \int\limits_\Omega \int\limits_Y f \cdot \varphi\, dx d\mu \tag{9.6}$$

выполнено для любой вектор-функции $\varphi = \varphi^0 + \psi \in W$. Здесь $f \in L^2(\Omega \times Y)^2$, и вместо f в (9.6) можно рассматривать Pf, так как

$$\int\limits_\Omega \int\limits_Y f \cdot \varphi\, dx d\mu = \int\limits_\Omega \int\limits_Y Pf \cdot \varphi\, dx d\mu, \quad \text{если} \quad \varphi \in W.$$

Задача (9.6) хорошо поставлена. В левой части тождества (9.6) стоит форма, задающая норму в пространстве W, поэтому существование и единственность решения задачи получаем обычным способом по теореме Рисса.

Двухмасштабный принцип усреднения. Определение двухмасштабной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ дано во введении. Общая теория этой сходимости приведена в [5]. В пространстве вектор-функций при дополнительных предположениях проявляются специфические свойства этой сходимости. Выделим следуюший результат: если для последовательности вектор-функций $u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}$ имеет место свойство ограниченности (9.4), то

$$u^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y), \quad \text{где} \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1) \tag{9.7}$$

(см. [5, теорема 12.3]). Для тонких сеток критической толщины свойства предельной функции из (9.7) можно уточнить ([10, теорема 3.1]): предельная функция имеет компоненту $\chi(x,y) \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0)$, т.е. $u(x,y) \in W$.

Этот результат применим к последовательности решений задачи (9.3), и в этом случае можно усилить сходимость (9.7), а саму предельную функцию точно описать, что и составляет принцип усреднения. Сформулируем его для более общего варианта задачи (9.3), когда правая часть зависит от параметров ε, h, т.е. $f = f^{\varepsilon,h} \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$. В этом случае запишем интегральное тождество в терминах меры μ_ε^h:

$$u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}, \quad \int\limits_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} (Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + \lambda u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi)\, d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} f^{\varepsilon,h} \cdot \varphi\, d\mu_\varepsilon^h \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2. \tag{9.8}$$

Теорема 9.1. *Пусть $u^{\varepsilon,h}(x)$ — решение задачи* (9.8) *с правой частью $f^{\varepsilon,h} \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$ такой, что*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega |f^{\varepsilon,h}|^2\, d\mu_\varepsilon^h < \infty, \quad \textit{при этом} \quad f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x,y).$$

Тогда

$$u^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y) \in W,$$

где $u(x,y)$ — решение усредненной задачи (9.6)*. Также сходятся упругие энергии*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h})\, d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega A^{\mathrm{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0)\, dx + \frac{\theta^2}{4} \int\limits_\Omega \int\limits_Y \rho(y) \chi'' \cdot \chi''\, dx d\mu. \tag{9.9}$$

Операторная форма принципа усреднения. Форма, равная сумме двух первых интегралов из тождества (9.6), имеет в качестве области определения множество W, плотно вложенное в $L^2(\Omega,\mathcal{R})$ (в силу представления (9.5)), и задает неотрицательный самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $L^2(\Omega,\mathcal{R})$. Аналогично задаче (9.8) сопоставляется оператор $\mathcal{A}^{\varepsilon,h}$ в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2$. Тогда исходная и предельная задачи (9.8) и (9.6) имееют вид операторных уравнений в гильбертовых пространствах

$$\mathcal{A}^{\varepsilon,h}u^{\varepsilon,h}+\lambda u^{\varepsilon,h}=f^{\varepsilon,h} \quad \text{в} \quad L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2, \qquad \mathcal{A}u+\lambda u=Pf \quad \text{в} \quad L^2(\Omega,\mathcal{R}).$$

Результат теоремы 9.1 означает сильную двухмасштабную резольвентную сходимость

$$\text{для} \quad \lambda>0 \quad (\mathcal{A}^{\varepsilon,h}+\lambda)^{-1}f^{\varepsilon,h}\xrightarrow{2}(\mathcal{A}+\lambda)^{-1}Pf, \quad \text{если} \quad f^{\varepsilon,h}\xrightarrow{2}f(x,y). \tag{9.10}$$

9.3. Принцип усреднения для нестационарной задачи теории упругости на тонких сетках. Стационарной задаче (9.8) соответствует динамическая задача гиперболического типа. Изучим последнюю с точки зрения теории полугрупп в гильбертовом пространстве. В этой связи рассмотрим в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2$ эволюционное операторное уравнение

$$(\partial_t^2+\mathcal{A}^{\varepsilon,h})u^{\varepsilon,h}(t)=f^{h,\varepsilon}(t), \quad u^{\varepsilon,h}(0)=v^{\varepsilon,h}, \quad \partial_t u^{\varepsilon,h}(0)=w^{\varepsilon,h}. \tag{9.11}$$

Предположим, что $v^{\varepsilon,h}$ ограничена в $W_{\varepsilon,h}$, а $w^{\varepsilon,h}$ и $f^{\varepsilon,h}(t)$ для любого $t>0$ ограничены в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2$, а также

$$\begin{aligned} &w^{\varepsilon,h}(x)\xrightarrow{2}w(x,y)\in L^2(\Omega,\mathcal{R}), && f^{\varepsilon,h}(t,x)\xrightarrow{2}f(t,x,y)\in L^2(\Omega,\mathcal{R}),\\ &v^{\varepsilon,h}(x)\xrightarrow{2}v(x,y), && (\mathcal{A}^{\varepsilon,h}v^{\varepsilon,h},v^{\varepsilon,h})_{L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2}\to(\mathcal{A}v,v)_{L^2(\Omega\times Y)^2}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

где последняя сходимость понимается в смысле (9.9). Рассмотрим уравнение в $L^2(\Omega,\mathcal{R})$

$$(\partial_t^2+\mathcal{A})u(t)=f(t), \quad u(0)=v, \quad \partial_t u(0)=w. \tag{9.13}$$

Теорема 9.2. *В предположении* (9.12) *решения задач* (9.11), (9.13) *связаны между собой сходимостью*

$$u^{\varepsilon,h}(x,t)\xrightarrow{2}u(x,y,t), \qquad \partial_t u^{\varepsilon,h}(x,t)\xrightarrow{2}\partial_t u(x,y,t) \quad \text{для любого} \quad t>0. \tag{9.14}$$

Эта теорема следует из общих теорем 7.2 и 7.3 о сходимости решений гиперболических операторных задач в переменном гильбертовом пространстве. Здесь

$$H=L^2(\Omega\times Y)^2, \qquad H_0=L^2(\Omega,\mathcal{R}), \qquad H_\varepsilon=L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2,$$

в качестве (слабой и сильной) сходимости взята (слабая и сильная) двухмасштабная сходимость в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^2$, и для нее условия (i), (ii) из § 2 выполнены. Основное предположение о резольвентной сходимости операторов имеет в данном случае форму (9.10).

Очевидно, что для задачи (9.2) требования (9.12) соблюдаются. Следовательно, ее решения сходятся в смысле (9.14) к решению задачи

$$(\partial_t^2+\mathcal{A})u(t)=f, \quad u(0)=0, \quad \partial_t u(0)=0. \tag{9.15}$$

В следующем пункте будет дано иное представление этой предельной задачи.

9.4. О предельной нестационарной задаче: эффект долговременной памяти. Предельная стационарная задача (9.6) эквивалентна связанной системе уравнений в вариационной форме для п.в. $x\in\Omega$

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega A^{\mathrm{hom}}e(u^0)\cdot e(\varphi)\,dx+\lambda\int\limits_\Omega(u^0+\langle\chi\rangle)\cdot\varphi\,dx=\int\limits_\Omega\langle f\rangle\cdot\varphi\,dx \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)^2,\\ &\int\limits_Y\left(\frac{\theta^2}{3}\rho(y)\chi''\cdot\psi''+\lambda\chi\cdot\psi\right)d\mu=\int\limits_Y(f-\lambda u^0)\cdot\psi\,d\mu \quad \forall\psi\in\mathcal{R}_1^0. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Заметим, что задача (9.6) и эквивалентная ей система (9.16) хорошо поставлены и при $\lambda=0$.

Пусть $\mathcal{A}_0$ — классический усредненный оператор в $L^2(\Omega)^2$, отвечающий квадратичной форме

$$\int\limits_{\Omega} A^{\hom} e(u^0)\cdot e(u^0)\,dx, \quad u^0\in H_0^1(\Omega)^2,$$

а $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{R}_1$, отвечающий квадратичной форме

$$\frac{\theta^2}{3}\int\limits_{Y} \rho(y)\chi''\cdot\chi'' d\mu,$$

заданной на $\mathcal{R}_1^0$.

Для любого $t>0$ решение задачи (9.13) существует и принадлежит пространству W и, значит, допускает разложение

$$u(x,y,t)=u^0(x,t)+\chi(x,y,t), \quad u^0(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)^2, \quad \chi(\cdot,t)\in L^2(\Omega,\mathcal{R}_1^0).$$

Из стационарных уравнений (9.16), полагая в них $\lambda=0$, $f=-\partial_t^2 u$, получаем запись операторной задачи (9.13) в виде связанной системы операторных уравнений

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 u^0 &= -\partial_t^2 u^0-\langle\partial_t^2\chi-f\rangle,\\ \mathcal{A}_1\chi &= -\partial_t^2\chi-P_1(\partial_t^2 u^0-f),\end{aligned} \tag{9.17}$$

которой соответствует связанная система дифференциальных уравнений для компонент u^0 и χ. Однако можно вывести отдельное уравнение для компоненты u^0, а также формулу, выражающую χ через u^0, но полученные соотношения будут интегродифференциальными. Сделаем это в наиболее простом случае, когда в задаче (9.13) $f=f(x,t)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$, где $u,w\in C^\infty(\overline{\Omega})^2$, $f\in C^\infty(\overline{\Omega}\times R_t^1)^2$, и к f по переменной t можно применить преобразование Лапласа.

Пусть $B(y,t)$ — матрица-функция размера 2×2, которая является решением матричной операторной задачи Коши

$$(\partial_t^2+\mathcal{A}_1)B(t)=\mathbf{0}_2, \quad B(0)=\mathbf{0}_2, \quad \partial_t B(0)=P_1\mathbf{1}_2, \tag{9.18}$$

где $\mathbf{0}_2$, $\mathbf{1}_2$ — нулевая и единичная матрицы размера 2×2. Здесь и далее операторы действуют на матрицы по вектор-столбцам. Пусть также $b(y,t)$ — решение векторной задачи Коши

$$(\partial_t^2+\mathcal{A}_1)b(t)=P_1 f, \quad b(0)=\partial_t b(0)=0. \tag{9.19}$$

Положим

$$\bar{B}(t)=\langle B(\cdot,t)\rangle \quad \bar{b}(t)=\partial_t^2\langle b(\cdot,t)\rangle. \tag{9.20}$$

Тогда $u^0(x,t)$ есть решение операторной задачи Коши в $L^2(\Omega)^2$:

$$\mathcal{A}_0 u^0(t)+\partial_t^2 u^0(t)-\partial_t^2\int\limits_0^t \bar{B}(t-s)\partial_s^2 u^0(s)\,ds=f(t)-\bar{b}(t), \quad u^0(0)=v(x), \quad \partial_t u^0(0)=w(x). \tag{9.21}$$

Компоненту $\chi(x,y,t)$ находим по формуле

$$\chi(x,y,t)=-\int\limits_0^t B(y,t-s)\partial_s^2 u^0(x,s)\,ds+b(y,t). \tag{9.22}$$

Интегродифференциальный характер соотношений (9.21), (9.22) свидетельствует о наличии долговременой памяти у решений предельной эволюционной задачи (9.13). Чтобы вывести эти соотношения, надо применить преобразование Лапласа по второму уравнению системы (9.17), обозначая через $\hat{g}(p)$ образ функции $g(t)$ при этом преобразовании. Тогда для $\hat{\chi}(x,y,p)$ получим резольвентное уравнение

$$(\mathcal{A}_1+p^2)\hat{\chi}=-P_1(p^2\hat{u}^0-pv-w)+P_1\hat{f}, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{9.23}$$

Введем матрицу $\hat{B}(y,p)$ и вектор $\hat{b}(y,p)$ как решения следующих уравнений:

$$(\mathcal{A}_1+p^2)\hat{B}=P_1\mathbf{1}_2, \qquad (\mathcal{A}_1+p^2)\hat{b}=P_1 f.$$

Очевидно, что матрица $B(y,t)$ и вектор $b(y,p)$ — это решения задач (9.18) и (9.19) соответственно. Из (9.23) следует формула

$$\hat{\chi}(x,y,p) = -\hat{B}(y,p)(p^2\hat{u}^0(x,p) - pv(x) - w(x)) + \hat{b}(y,p),$$

которой через преобразование Лапласа соответствует представление (9.22). Тогда уравнение $(9.17)_1$ после замены (9.22) переходит в (9.21).

Записав задачу (9.15) в виде системы (9.21), (9.22), получаем следующий результат об усреднении задачи (9.2).

Теорема 9.3. *Для решений задачи* (9.2) *имеет место сходимость* (9.14)*, где* $u(x,y,t) = u^0(x,t) + \chi(x,y,t)$*,* u^0 *— решение эволюционной задачи*

$$\partial_t^2 u^0 - \partial_t^2 \int\limits_0^t \bar{B}(t-s)\partial_s^2 u^0(s)\,ds = \operatorname{div} A^{\mathrm{hom}} e(u^0) + f - \bar{b} \quad \textit{в} \quad \Omega \quad \textit{при} \quad t>0,$$

$$u^0 = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \quad \textit{при} \quad t>0,$$

$$u^0(0) = \partial_t u^0(0) = 0 \quad \textit{при} \quad t=0,$$

χ *находится по формуле* (9.22)*, матрицы* B*,* $\bar{B}$ *и векторы* b*,* $\bar{b}$ *определены в* (9.18)–(9.20).

10. Спектр предельного оператора задачи теории упругости на тонкой сетке

10.1. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор в $L^2(\Omega,\mathcal{R})$, соответствующий предельной стационарной задаче (9.6). Далее будут подробно изложены результаты о его спектре, частично уже опубликованные в [24], из которых следует сходство $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ со спектром предельного оператора в задаче двойной пористости [2], в частности, $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ содержит лакуны. Из описания спектра предельного оператора $\mathcal{A}$ можно извлечь достаточно полную информацию о спектре допредельного оператора $\mathcal{A}^{\varepsilon,h}$, если доказана сходимость по Хаусдорфу $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}^{\varepsilon,h}$ к $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ при $\varepsilon\to 0$, что означает:

(i) для любого $s\in\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ найдется последовательность $s_\varepsilon\in\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}^{\varepsilon,h}$ такая, что $s_\varepsilon\to s$ при $\varepsilon\to 0$;

(ii) все конечные предельные точки последовательности $s_\varepsilon\in\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}^{\varepsilon,h}$ принадлежат $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$.

Резольвентная сходимость (9.10) влечет обязательное выполнение условия (i), но не условия (ii). Для того чтобы выполнялось условие (ii), требуются дополнительные свойства оператора $A^{\varepsilon,h}$, которые пока не найдены.

Далее рассмотрим в качестве F модельную сетку (рис. 1).

Пусть $\mathcal{A}_1$ — оператор в $\mathcal{R}_1$, отвечающий квадратичной форме $\dfrac{\theta^2}{3}\displaystyle\int\limits_Y \rho\chi''\cdot\chi''d\mu$, заданной на множестве $\mathcal{R}_1^0$. Тогда $\mathcal{A}_1$ — положительно определенный оператор в $\mathcal{R}_1$ (обратный к нему компактен). Поэтому спектр $\mathcal{A}_1$ состоит из конечнократных собственных значений, образующих сходящуюся к бесконечности последовательность, которую разобьем на две непересекающиеся серии

$$\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_1 = \{\omega_1,\omega_2,\dots\}\cup\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\},$$

отнеся ко второй серии те собственные значения, у которых все собственные функции имеют нулевое среднее, т.е. если $\mathcal{A}_1\varphi=\alpha\varphi$, то $\langle\varphi\rangle=0$.

Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ — нормированные в $L^2(Y,d\mu)^2$ собственные функции оператора $\mathcal{A}_1$, отвечающие собственным значениям из серии $\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$.

Далее через c обозначим постоянный по y вектор.

Предложение 10.1. *Задача*

$$\mathcal{A}_1\chi - \lambda\chi = P_1 c \tag{10.1}$$

разрешима, если $\lambda\notin\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$*, и решение находится по формуле*

$$\chi(\lambda,y) = B(\lambda,y)c, \tag{10.2}$$

где

$$B(\lambda, y) = \sum_j \frac{\varphi_j \times \langle \varphi_j \rangle}{\omega_j - \lambda}. \tag{10.3}$$

Доказательство. Чтобы доказать разрешимость задачи (10.1) для любого $\lambda \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, достаточно рассмотреть $\lambda \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ и убедиться в том, что условие разрешимости для этого случая

$$\langle P_1 c \cdot \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \quad \text{такого, что} \quad \mathcal{A}_1 \varphi = \lambda \varphi, \quad \langle \varphi \rangle = 0,$$

выполнено. Но это, действительно, так, поскольку, ввиду постоянства вектора c,

$$\langle P_1 c \cdot \varphi \rangle = \langle c \cdot \varphi \rangle = c \cdot \langle \varphi \rangle = 0.$$

Разложим вектор $P_1 c$ по собственным функциям φ_k

$$P_1 c = \sum \langle P_1 c \cdot \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где $\langle P_1 c \cdot \varphi_k \rangle = c \cdot \langle \varphi_k \rangle$, как показано выше. Тогда решение задачи (10.1) можно задать формулой

$$\chi = \sum \frac{c \cdot \langle \varphi_k \rangle}{\omega_k - \lambda} \varphi_k = \left(\sum \frac{\varphi_k \times \langle \varphi_k \rangle}{\omega_k - \lambda} \right) c,$$

и соотношения (10.2), (10.3) получены. Предложение доказано. □

Обратим внимание на свойства симметрии сетки F. Рассмотрим центральный узел в ячейке периодичности — точку O (см. рис. 1). Осевая симметрия сетки F позволяет корректно определить операторы $S_i : \mathcal{R}_1^0 \to \mathcal{R}_1^0$, $i = 1, 2$, такие, что $S_1(\varphi(y_1, y_2)) = \varphi(-y_1, y_2)$, $S_2(\varphi(y_1, y_2)) = \varphi(y_1, -y_2)$. Заметим, что $S_1 S_2(\varphi(y_1, y_2)) = \varphi(-y_1, -y_2)$, и оператор $S_3 = S_1 S_2$ соответствует симметрии относительно точки O.

Предложение 10.2. *Для функции $\varphi \in \mathcal{R}_1^0$ такой, что $\varphi = S_i \varphi$ хотя бы для одного $i = 1, 2, 3$, выполнено условие сопряжения в узле O:*

$$\frac{d}{d\tau_i} (\varphi \cdot \nu_i) \Big|_O = 0 \quad \text{для любого приходящего в узел } O \text{ звена } I_i. \tag{10.4}$$

Доказательство. Из предположений на φ следует, что найдется отрезок, проходящий через точку O, на котором φ — четная функция продольной переменной: $\varphi(t) = \varphi(-t)$. Поэтому $\varphi'(0) = 0$. Значит, все производные, участвующие в условии c) из определения $\mathcal{R}_1^0$ будут нулевые, т.е. имеет место (10.4).

Условие b) из определения множества $\mathcal{R}_1^0$ в паре с условием (10.4) договоримся называть условием жесткого закрепления. Операторы симметрии, аналогичные операторам S_1 и S_2, можно ввести и для других узлов сетки F. Для модельной сетки в пределах ячейки периодичности Y, кроме центрального, есть еще один узел, попадающий на границу Y. Тогда 1-периодическая функция, инвариантная относительно симметрий, связанных с центральным узлом, будет инвариантна относительно симметрий, связанных со всеми другими узлами. □

Предложение 10.3. *Матрица $\langle B(\lambda, \cdot) \rangle$ пропорциональна единичной матрице I, т.е. $\langle B(\lambda, \cdot) \rangle = c(\lambda) I$, при этом*

$$\begin{gathered} \lambda \langle I + \lambda B(\lambda, \cdot) \rangle = \beta(\lambda) I, \\ \beta(\lambda) = \lambda + \sum \frac{\lambda^2 \gamma_k}{\omega_k - \lambda}, \quad \gamma_k > 0, \quad \sum \gamma_k < \infty. \end{gathered} \tag{10.5}$$

Доказательство. Пусть b^i — столбец матрицы B, $i = 1, 2$. Тогда $b^i = B e_i$, e_i — базисный вектор и b^i — решение задачи (10.1) с вектором $c = e_i$. Покажем, что

$$\langle b^i(\lambda, \cdot) \rangle = c_i(\lambda) e_i, \quad i = 1, 2. \tag{10.6}$$

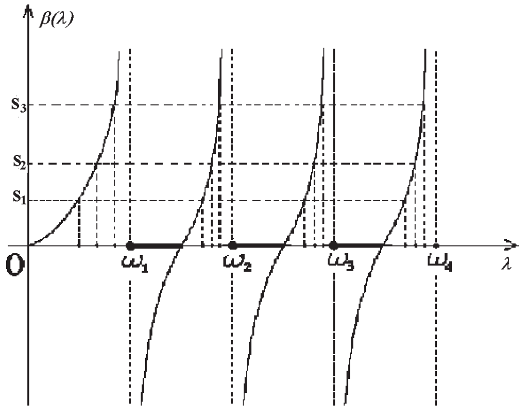

Рис. 2

В силу мероморфности функции $B(\lambda, y)$ (см. (10.3)), это достаточно сделать для $\lambda < 0$, когда задача (10.1) для вектора $\chi = b^i$ — эллиптическая и задается интегральным тождеством

$$\frac{\theta^2}{3}\int\limits_Y \rho\chi'' \cdot g'' d\mu - \lambda \int\limits_Y \chi \cdot g\, d\mu = \int\limits_Y P_1 e_i \cdot g\, d\mu \quad \forall g \in \mathcal{R}_1^0. \tag{10.7}$$

Отсюда, учитывая постоянство вектора e_i, а также единственность решения задачи (10.7), можно доказать четность χ по каждому аргументу $\chi = S_1\chi$, $\chi = S_2\chi$. Тогда (см. предложение 10.2) χ удовлетворяет условию жесткого закрепления в узлах. Поэтому эллиптическая задача (10.7) на ячейке периодичности распадается на шесть отдельных эллиптических задач: четыре задачи на наклонных звеньях I_1, I_2, I_3, I_4 (соединяющих центр квадрата Y с его вершинами $(1/2, 1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(1/2, -1/2)$ соответственно) с условиями жесткого закрепления в концах и две периодические задачи на единичных отрезках $I_5 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \{0\}$, $I_6 = \{0\} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ с условием жесткого закрепления в центре. Правая часть в уравнении (10.7) для вектора b^1 имеет вид

$$P_1 e_1 = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad I_5, \\ e_1 & \text{на} \quad I_6, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) & \text{на} \quad I_1 \cup I_3, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) & \text{на} \quad I_2 \cup I_4. \end{cases} \tag{10.8}$$

Тогда среднее $\langle b^1 \rangle$ представляется как сумма

$$\langle b^1 \rangle = \Bigg(\int\limits_{I_1 \cup I_3} b^1\, d\mu + \int\limits_{I_2 \cup I_4} b^1\, d\mu\Bigg) + \Bigg(\int\limits_{I_6} b^1\, d\mu + \int\limits_{I_5} b^1\, d\mu\Bigg),$$

в которой обе скобки пропорциональны e_1, в силу (10.8). Свойство (10.6) для b^1 доказано, аналогично оно доказывается для b^2, причем $c_1(\lambda) = c_2(\lambda)$ из-за симметрии сетки F. Отсюда следует пропорциональность $\langle B(\lambda, \cdot)\rangle$ единичной матрице.

Формула (10.5) получается непосредственным вычислением, исходя из представления (10.3), причем $\gamma_k = \langle \varphi_k^1 \rangle^2$, где $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2)$. Отсюда очевидны перечисленные в (10.5) свойства γ_k. Предложение 10.3 доказано. $\square$

Схематический график $\beta(\lambda)$ представлен на рис. 2. Функция строго возрастает в промежутках между $0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ и имеет один нуль на каждом из этих промежутков.

10.2. Найдем резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$. Ввиду его неотрицательности, достаточно изучить задачу

$$(\mathcal{A}-\lambda)u = f, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{10.9}$$

Согласно определению оператора $\mathcal{A}$, задача (10.9) эквивалентна двум соотношениям для компонент вектора $u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1\chi &= \lambda(P_1u^0 + \chi) + P_1 f, \\ \mathcal{A}_0 u^0 &= \lambda(u^0 + \langle\chi\rangle) + \langle f\rangle, \end{aligned} \tag{10.10}$$

преобразуя которые можно получить отдельное уравнение для u^0. С этой целью введем $b^i(\lambda, y)$, $i = 0,1,2,$ — решения вспомогательных задач

$$\mathcal{A}_1 b^0 = \lambda b^0 + P_1 f, \quad \mathcal{A}_1 b^1 = \lambda b^1 + P_1 e_1, \quad \mathcal{A}_1 b^2 = \lambda b^2 + P_1 e_2. \tag{10.11}$$

Напомним, что матрица $B(\lambda, y)$ из (10.2) составлена из вектор-столбцов b^1, b^2, т.е. $B = (b^1 b^2)$, $Bc = c_1 b^1 + c_2 b^2$ для любого c.

Из уравнения $(10.10)_1$ находим

$$\chi = \lambda B u^0 + b^0 \tag{10.12}$$

и далее приводим уравнение $(10.10)_2$ к виду

$$\mathcal{A}_0 u^0 = \lambda\langle I + \lambda B\rangle u^0 + \langle \lambda b^0 + f\rangle,$$

или, в силу (10.5),

$$\mathcal{A}_0 u^0 = \beta(\lambda) u^0 + \langle \lambda b^0 + f\rangle. \tag{10.13}$$

Проделанные преобразования возможны при $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_1$. Само уравнение (10.13) разрешимо, если $\beta(\lambda) \notin \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_0$. Решив его, находим сначала компоненту u^0 и далее по формуле (10.12) компоненту χ. Тогда $u = u^0 + \chi$ — решение уравнения (10.9). Итак, получен результат

$$\text{если} \quad \lambda \notin \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_1, \quad \beta(\lambda) \notin \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_0, \quad \text{то} \quad \lambda \notin \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}.$$

10.3. Изучим спектр оператора $\mathcal{A}$ подробнее. Для этого рассмотрим уравнение $\mathcal{A}u = \lambda u$, эквивалентное двум соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1\chi(x,y) &= \lambda(P_1u^0(x) + \chi(x,y)), \\ \mathcal{A}_0 u^0(x) &= \lambda(u^0(x) + \langle\chi(x,\cdot)\rangle). \end{aligned} \tag{10.14}$$

1°. Пусть χ — собственная функция оператора $\mathcal{A}_1$ с собственным значением λ такая, что $\langle\chi\rangle = 0$. Например, λ может быть из серии $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. Тогда соотношениям (10.14) удовлетворяет функция $u = u^0 + \chi = 0 + \chi$, а также любая функция вида $a(x)\chi(y)$, где $a \in L^2(\Omega)$. В частности, получаем: $\lambda \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ — бесконечнократное собственное значение оператора $\mathcal{A}$ с собственной функцией вида $a(x)\chi(y)$, где $\mathcal{A}_1\chi = \lambda\chi$. Эти собственные значения и соответствующие им собственные функции называются блоховскими.

2°. Пусть

$$\lambda \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \quad \text{и} \quad \beta(\lambda) = s \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_0. \tag{10.15}$$

Поскольку спектр $\mathcal{A}_0$ состоит из конечнократных положительных собственных значений, образующих сходящуюся к бесконечности последовательность $s_1, s_2, \dots$, то множество значений λ из (10.15) образует счетное число серий $\lambda_1^{(j)} \leqslant \lambda_2^{(j)} \leqslant \cdots$, каждая из которых располагается на интервале $(\nu_j, \omega_j) \subset (\omega_{j-1}, \omega_j)$, $j = 1, 2, \dots$, $\omega_0 = 0$, и сходится слева к ω_j (см. (10.5) и рис. 2), где $\nu_1 = 0$, $\nu_2, \dots$ — нули функции $\beta(\lambda)$, описание которых будет дано в п. 5°.

Получаем: $(I + \lambda B(\lambda, y))u^0$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, если u^0 — собственная функция оператора $\mathcal{A}_0$ с собственным значением $\beta(\lambda)$. Назовем эти собственные функции оператора $\mathcal{A}$ пространственными.

Собственные значения λ из (10.15) могут быть бесконечнократными в том случае, если λ попадает на множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, и тогда, кроме пространственных собственных функций, этому собственному значению соответствуют также блоховские.

3°. Верно следующее устверждение: *оператор $\mathcal{A}$ не имеет никаких других собственных функций с собственными значениями, не попадающими в $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, кроме пространственных и блоховских.*

Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение (10.9) на спектре, когда

$$\lambda \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \quad \text{либо} \quad \beta(\lambda) \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}_0$$

(и, значит, $\lambda \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$). Проверим его разрешимость, если f ортогональна в $L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)^2$ пространственным и блоховским собственным функциям, т.е.

$$\int\limits_\Omega \int\limits_Y a(x)\varphi(y) \cdot f(x,y)\, dx\, d\mu = 0, \quad \text{как только} \quad \mathcal{A}_1\varphi = \lambda\varphi, \quad \langle\varphi\rangle = 0, \tag{10.16}$$

$$\int\limits_\Omega \int\limits_Y (I + \lambda B)u^0 \cdot f(x,y)\, dx\, d\mu = 0, \quad \text{как только} \quad \mathcal{A}_0 u^0 = \beta(\lambda) u^0. \tag{10.17}$$

Достаточно убедиться в разрешимости задач (10.11), (10.13). Поскольку $\lambda \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, то разрешимы два последних уравнения в (10.11). Разрешимость $(10.11)_1$ и (10.13) вытекает соответственно из (10.16) и условия ортогональности

$$\langle \lambda b_0 + f\rangle \perp u^0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega)^2, \quad \text{как только} \quad \mathcal{A}_0 u^0 = \beta(\lambda) u^0,$$

которое выводится из (10.17), если заметить, что $\langle b_i^0\rangle = \langle f \cdot b^i\rangle$, $i = 1, 2$ (следствие из уравнений (10.11)), и поэтому

$$\int\limits_\Omega \int\limits_Y b^0 \cdot u^0\, dx\, d\mu = \int\limits_\Omega \int\limits_Y \sum_i (f \cdot b^i) u_i^0\, dx\, d\mu = \int\limits_\Omega \int\limits_Y B u^0 \cdot f\, dx\, d\mu.$$

4°. Выясним, когда $\lambda \in \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ может быть собственным значением оператора $\mathcal{A}$, т.е. когда для $\lambda = \omega$ существует ненулевое решение задачи (10.14). Уравнение $(10.14)_1$ разрешимо, если

$$\langle P_1 u^0 \cdot \varphi\rangle = u^0 \cdot \langle\varphi\rangle = 0, \quad \text{как только} \quad \mathcal{A}_1\varphi = \omega\varphi, \quad \langle\varphi\rangle \neq 0, \tag{10.18}$$

что возможно в двух случаях.

Случай 1 ($u^0 \equiv 0$). Тогда соотношение $(10.14)_2$ влечет $\langle\chi\rangle = 0$, и $u = \chi$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением ω блоховского типа. Этот случай реализуется, когда ω — кратное собственное значение оператора $\mathcal{A}_1$ и ему соответствует хотя бы одна собственная функция χ такая, что $\langle\chi\rangle = 0$.

Случай 2 ($u^0 \not\equiv 0$). Тогда вектор $c = u^0(x)$ имеет фиксированное направление для п.в. $x \in \Omega$, ортогональное направлению $\langle\varphi\rangle \neq 0$, φ из (10.18). Легко видеть, что этот случай не возможен.

5°. Для описания нулей $0 = \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ функции $\beta(\lambda)$ изучим аналог электростатической задачи. На множестве $\operatorname{dom} q \equiv \mathbb{R}^2 + \mathcal{R}_1^0 \subset L^2(Y, d\mu)^2$ рассмотрим квадратичную форму

$$q(v,v) = \frac{\theta^2}{3} \int\limits_Y \rho g'' \cdot g'' d\mu, \quad v = c + g, \quad c \in \mathbb{R}^2, \quad g \in \mathcal{R}_1^0.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_Y |c + g|^2 d\mu \geqslant \frac{1}{2}\left(|c|^2 + \int\limits_Y |g|^2 d\mu\right), \quad c \in \mathbb{R}^2, \quad g \in \mathcal{R}^1, \tag{10.19}$$

при выводе которого используются соотношения

$$\left|\int\limits_Y g \cdot c\, d\mu\right|^2 \leqslant \int\limits_Y |g|^2\, d\mu \int\limits_Y |P_1 c|^2\, d\mu, \qquad \int\limits_Y |P_1 c|^2 d\mu = \frac{1}{2}|c|^2, \quad c \in \mathbb{R}^2, \quad g \in \mathcal{R}_1.$$

Вспомним, что любой вектор $v \in \mathcal{R}$ допускает представление в виде $v = c + g$, $c \in \mathbb{R}^2$, $g \in \mathcal{R}_1$. Отсюда и из неравенства (10.19) получаем $\overline{\operatorname{dom} q} = \mathcal{R}$.

Для любой сетки F (не обязательно модельной) выполнено неравенство

$$\int\limits_Y |g'|^2\,d\mu \leqslant C\int\limits_Y (|g''|^2+|g|^2)\,d\mu, \quad g\in\mathcal{R}_1,$$

которое вместе с (10.19) обеспечивает замкнутость формы q.

Изучим спектр соответствующего форме q неотрицательного самосопряженного оператора Q. Его резольвента компактна, поэтому $\operatorname{Sp} Q$ — стремящаяся к ∞ последовательность конечнократных неотрицательных собственных значений.

Равенство

$$Qv=\lambda v, \quad v=c+g \tag{10.20}$$

означает, по определению, выполнение интегрального тождества

$$\frac{\theta}{3}\int\limits_Y \rho g''\cdot\tilde g''\,d\mu=\lambda\int\limits_Y (c+g)\cdot(\tilde c+\tilde g)\,d\mu \quad \forall\tilde c\in\mathbb{R}^2, \quad \forall\tilde g\in\mathcal{R}_1^0. \tag{10.21}$$

Для $\lambda=0$ собственные векторы постоянны: $v\equiv c$.

Для $\lambda\neq 0$, взяв в тождестве (10.21) пробную функцию с $\tilde g=0$, устанавливаем равенство $c=-\langle g\rangle$, а потом приводим (10.21) к виду

$$\frac{\theta}{3}\int\limits_Y \rho g''\cdot\tilde g''d\mu=\lambda\int\limits_Y (g-\langle g\rangle)\cdot\tilde g\,d\mu \quad \forall\tilde g\in\mathcal{R}_1^0. \tag{10.22}$$

Отсюда, если $\langle g\rangle=0$, то λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}_1$. Найдем другие, не принадлежащие $\operatorname{Sp}\mathcal{A}_1$, собственные значения оператора Q.

Сделаем некоторое наблюдение. В случае $\langle g\rangle\neq 0$ имеет место одно из двух:

$$\text{либо} \quad \lambda\notin\{\omega_1,\omega_2,\dots\}, \quad \text{либо} \quad \lambda=\omega_n, \quad \text{и тогда} \langle g\rangle\cdot\langle\varphi_n\rangle=0. \tag{10.23}$$

Действительно, если $\lambda=\omega_n$, то из (10.22) и уравнения $\mathcal{A}_1\varphi_n=\lambda\varphi_n$ выводим

$$q(g,\varphi_n)=\lambda\int\limits_Y (g-\langle g\rangle)\cdot\varphi_n\,d\mu, \qquad q(\varphi_n,g)=\lambda\int\limits_Y \varphi_n\cdot g\,d\mu,$$

откуда $\lambda\langle g\rangle\cdot\langle\varphi_n\rangle=0$. Предположив, что условие ортогональности $(10.23)_2$ не выполнено, приходим к противоречию с тем, что $\lambda=\omega_n\neq 0$. Следовательно, альтернатива (10.23) доказана.

Покажем, что $\lambda\notin\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$ есть нуль функции $\beta(\lambda)$, т.е. $\lambda=\nu_n$, $n>0$. В самом деле, из (10.22) имеем представление (см. предложение 10.1) для собственного вектора g: $g=Bc$, $c=-\lambda\langle g\rangle$. Отсюда следует цепочка равенств, приводящая к искомому результату:

$$\langle g\rangle=-\lambda\langle B\rangle\langle g\rangle, \quad (I+\lambda\langle B\rangle)\langle g\rangle=0, \quad \beta(\lambda)\langle g\rangle=0, \quad \beta(\lambda)=0.$$

Обратно, каждый нуль $\lambda=\nu_n$, $n>0$, функции $\beta(\lambda)$ есть собственное значение оператора Q. Действительно, положим $g=-\lambda Bc$, $c\in\mathbb{R}^2\setminus 0$. Тогда по свойству оператора B

$$\frac{\theta^2}{3}\int\limits_Y \rho g''\cdot\tilde g''d\mu=\int\limits_Y (\lambda g-\lambda c)\cdot\tilde g\,d\mu=\lambda\int\limits_Y (g-c)\cdot\tilde g\,d\mu \quad \forall\tilde g\in\mathcal{R}_1^0.$$

Кроме того, $c=\langle g\rangle$, так как $\langle g\rangle=-\lambda\langle B\rangle c$ и, значит, $c-\langle g\rangle=(I+\lambda\langle B\rangle)c=\beta(\lambda)c=0$. Тогда вектор g удовлетворяет тождеству (10.22), и $-\lambda Bc-c=-(\lambda I+B)c$ есть собственный вектор оператора Q с собственным значением λ. Нетрудно заметить, что каждое $\lambda=\nu_n$, $n=0,1,\dots$, двукратно: $(I+\lambda B)e_1$, $(I+\lambda B)e_2$ линейно не зависимы (e_1, e_2 — базисные орты).

6°. Подведем итог. Оператор $\mathcal{A}$ имеет чисто точечный спектр в том смысле, что его собственные функции образуют полную в $L^2(\Omega,\mathcal{R})$ систему. При этом спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из точек спектра оператора $\mathcal{A}_1$, которые разбиваются на два непересекающихся множества $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\}$, $\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$, и счетного числа бесконечных серий конечнократных собственных значений, каждая из которых располагается на интервале (ν_i,ω_i), $i=1,2,\dots$, $0=\nu_1<\omega_1<\nu_2<\omega_2<\cdots$, и сходится слева к точке ω_i. Точки $\alpha_1,\alpha_2,\dots$ — это такие собственные значения $\mathcal{A}_1$, у которых все соответствующие собственные функции имеют нулевое среднее. Они являются бесконечнократными собственными значениями оператора $\mathcal{A}$. Точка $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ может быть собственным значением оператора $\mathcal{A}_1$, причем бесконечнократным, только в том случае, если ω — кратное собственное значение, имеющее собственную функцию со средним, равным нулю.

Самая примечательная особенность спектра оператора $\mathcal{A}$ — это наличие лакун. На рис. 2 жирно отмечена бесконечная система интервалов, на которых функция $\beta(\lambda)$ отрицательна. Каждый из этих интервалов либо вообще не содержит точек из $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$, либо, включая конечное число точек из множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, разбивается ими на конечное число интервалов, уже не содержащих точек $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02–01–00114 и Мин. образования РФ, проект № Е02–1–57.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 31–72.
3. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 8. — С. 27–58.
4. *Жиков В. В.* К технике усреднения вариационных задач// Функц. анал. и его прил. — 1999. — *33*, № 1. — С. 14–29.
5. *Жиков В. В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 81–148.
6. *Жиков В. В.* Двухмасштабная сходимость и спектральные вопросы усреднения// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2002. — *22*. — С. 105–120.
7. *Жиков В. В.* О двухмасштабной сходимости// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23*.
8. *Жиков В. В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 6. — С. 741–745.
9. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Докл. РАН. — 2002. — *385*, № 5. — С. 590–595.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 5. — С. 61–95.
11. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об усреднении на периодических сетках// Докл. РАН. — 2003. — *391*, № 4. — С. 443–447.
12. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
13. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
15. *Пастухова С. Е.* Усреднение для нелинейных задач теории упругости на сингулярных периодических структурах// Докл. РАН. — 2002. — *382*, № 1. — С. 7–10.
16. *Пастухова С. Е.* Усреднение для нелинейных задач теории упругости на тонких периодических структурах// Докл. РАН. — 2002. — *382*, № 1. — С. 7–10.
17. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных структурах// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 596–600.
18. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических стержневых каркасах критической толщины// Докл. РАН. — 2004. — *394*, № 1. — С. 26–31.
19. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических составных структурах// Докл. РАН. — 2004. — *395*, № 3.— С. 1–6.
20. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978.
21. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
22. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
23. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — *23*. — С. 1482–1518.
24. *Bouchitte G., Fragala I.* Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures// SIAM J. Math. Anal. — 2001. — *32*, № 6. — С. 1198–1226.

25. *Cioranescu D., Donato P.* Introduction to Homogenization// Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, *17*. — Oxford University Press, 1999.
26. *Mosco U.* Composite media and asymptotic Dirichlet forms// J. Funct. Anal. — 1994. — *123*. — С. 368–421.
27. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization// SIAM J. Math. Anal. — 1989. — *20*. — С. 608–623.

С. Е. Пастухова
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет)
E-mail: `leonowmw@cs.msu.su`

Современная математика и ее приложения. Том 16 (2004). С. 98–112

УДК 517.956.223

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2004 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. Рассматривается задача со свободной границей для эллиптического уравнения. Находятся условия устойчивости ее стационарных решений.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В этой статье исследуется задача [1, 2, 5, 6], впервые рассмотренная Н. Н. Данилюком [1] в двумерных областях $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega=S_1$. Требуется найти гладкое многообразие $S_0\subset\Omega$, для которого в области $\Omega(S_1,S_0)$, ограниченной S_1 и S_0, существует решение u_0 следующей задачи:

$$\nabla_x^2 u_0=0 \quad \text{в} \quad \Omega(S_1,S_2); \tag{1}$$

$$u_0=1 \quad \text{на} \quad S_1; \qquad u_0=0 \quad \text{на} \quad S_0. \tag{2}$$

Более того, справедливо дополнительное условие

$$|\nabla_x u_0|=\lambda \quad \text{на} \quad S_0; \quad \lambda=\mathrm{const}>0. \tag{3}$$

У этой задачи долгая история [1, 2, 5, 6] с ошибками в доказательствах и их исправлением для плоских задач ($\Omega\subset\mathbb{R}^2$).

Для случая, когда S_1 — сфера радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, сферически симметричное $u_0(r)$ решение, где r — радиус в сферической системе координат, находится чрезвычайно просто сведением к одномерной задаче:

$$u''(r)+\frac{n-1}{r}u'(r)=0 \quad \text{на отрезке} \quad [\rho,R], \quad 0<\rho<R,$$

$$u(R)=1, \quad u(\rho)=0 \quad \text{и} \quad |u'(\rho)|=1.$$

Очевидно, $u(r)=\ln(r/\rho)(\ln R/\rho)^{-1}$ для $n=2$ и $u(r)=(r^{2-n}-\rho^{2-n})(R^{2-n}-\rho^{2-n})^{-1}$ для $n\geqslant 3$, где $\xi(\ln\xi)^{-1}=\lambda R$ и $\xi^{n-1}(\xi^{n-2}-1)^{-1}=\lambda R(n-2)^{-1}$, $\xi=R/\rho>1$ соответственно.

Целью статьи является доказательство устойчивости этого сферически симметричного решения. Докажем, что в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n_x$, граница которой есть «малая» деформация сферы S_1, существует локально единственное решение задачи (1)–(3), непрерывно зависящее от деформации.

ISSN 1512–1712

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$, $n \geqslant 2$, — ограниченная область с гладкой границей S_1 класса C^{l_0} [3, 4]. Будем предполагать существование решения $u_0(x)$ задачи

$$Lu \equiv \nabla_x A(x) \nabla_x u_0 = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega_{0,0} \subset \Omega; \tag{4}$$

$$u_0 = \varphi_1 \quad \text{на} \quad S_1, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad S_0 \tag{5}$$

и

$$\left(|\nabla_x h_0| \frac{\partial}{\partial \nu_0} u_0 \right)^2 = \Psi(x)^2 \quad \text{на} \quad S_0, \tag{6}$$

где уравнение $h_0(x) = 0$ с $|\nabla_x h_0| \neq 0$ на S_0 определяет многообразие S_0, а $\dfrac{\partial}{\partial \nu_0}$ — производная по внешней конормали для (4) на S_0. Коэффициенты $A_{ij}(x)$ матрицы A удовлетворяют условиям $A_{ij} \in C^{l_0-2}(\mathbb{R}^n)$ ($l_0 > 2$ — не целое) и $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant C_0 |\xi|^2, \quad C_0 = \mathrm{const}\,.$$

В дальнейшем будем считать, что для любой точки $\beta \in S_0$ или S_1 существует окрестность $Q(\beta)$ такая, что

$$\{x \in \mathbb{R}^n, |x - \beta| < r_0\} \subset Q(\beta), \quad r_0 > 0,$$
$$Q(\beta) = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \, |y'| < r_1(\beta)\} \times \{|y_n| < r_1(\beta)\},$$
$$r_1(\beta) > 0,$$

равномерно по β, где y — локальная система координат, т.е. $y = \Lambda(x - \beta)$, Λ — ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$, а ось y_n направлена вдоль внешней для $\Omega_{0,0}$ нормали к S_0 (или внутренней для $\Omega_{0,0}$ на S_1). В $Q(\beta)$ многообразия S_j определяются уравнениями $y_n = F_j(y')$, $j = 0, 1$, т.е.

$$|F_j(y')| \leqslant C_0 |y'|^{1+\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$|\nabla_{y'} F_j(y')| \leqslant C_0 |y'|^{\gamma} \quad \forall y' \in \{y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \ |y'| < r_1\}.$$

В переменных (z', z_n), где $z_n = y_n(x) - F_j(y'(x))$, $z' = y'(x)$, оператор L представим в виде

$$Lu = \nabla_x \left(J \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^* A(x(z)) \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \nabla_z u \right) = Jf,$$

где

$$J = \det \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| \quad \text{и} \quad A'_{ij}(z) = \delta_{ij} + b'_{ij}(z),$$

$$b'_{ij}(0) = 0, \qquad A'(z) = J \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^* A \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right);$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Искомое решение $u_{\rho,\mu}(x)$ аналога задачи (1)–(3) ищется в так называемой области существования фазы $\Omega_{\rho,\mu} \subset \mathbb{R}^n$. Искомая область $\Omega_{\rho,\mu}$ характеризуется некоторыми вводимыми ниже искомыми функциями ρ и μ, а ее граница $\partial\Omega_{\rho,\mu}$ состоит из заданного многообразия S_μ и искомого многообразия $S_\rho \subset \Omega_{0,0}$, $S_\rho \cap S_\mu = \varnothing$.

В достаточно малых непересекающихся окрестностях N_0 и N_1 многообразий S_0 и S_1 соответственно введем локальную систему координат (η_n, ω), где $\eta_n(x)$ в N_0 есть длина вдоль вектора внешней для $\Omega_{0,0}$ нормали к S_0 от x до проекции $P_0(x) \in S_0$ точки x на S_0; $\omega(x)$ — локальные координаты $P_0(x)$ на S_0, а в N_1 $\eta_n(x)$ — длина вдоль вектора внутренней для $\Omega_{0,0}$ нормали к S_1 от x до проекции $P_1(x) \in S_1$ точки x на S_1; $\omega(x)$ — локальные координаты $P_1(x)$ на S_1.

При «достаточно малых» деформациях $\Omega_{\rho,\mu}$ поверхности S_ρ, S_μ описываются уравнениями $\eta_n = \rho(\omega)$ в N_0 и $\eta_n = \mu(\omega)$ в N_1 соответственно. Отклонение свободной поверхности S_ρ от многообразия S_0 характеризуется функцией $h_\rho(x) = \eta_n(x) - \rho(\omega(x))$ (отклонение S_μ от S_1 описывается соответственно функцией $h_\mu(x) = \eta_n(x) - \mu(\omega(x))$). Эта функция вместе с функцией $u_{\rho,\mu}(x)$ составляет искомое решение задачи

$$\nabla_x A(x) \nabla_x u_{\rho,\mu} = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega_{\rho,\mu}; \tag{7}$$

$$u_{\rho,\mu} = \varphi_1 \quad \text{на} \quad S_\mu; \qquad u_{\rho,\mu} = 0 \quad \text{на} \quad S_\rho; \tag{8}$$

$$\left(|\nabla_x h_\rho| \frac{\partial}{\partial \nu_\rho} u_{\rho,\mu} \right)^2 = (\Psi(x))^2 \quad \text{на} \quad S_\rho, \tag{9}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \nu_\rho}$ — производная по конормали для (7) на S_ρ. Здесь под $C^l(G)$ (нецелое $l > 0$), $G \subset \mathbb{R}^k$, $k \geqslant 1$, понимается пространство функций с нормой

$$\|u; C^l(G)\| = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \sup_G |D_x^\alpha u(x)| + [u]_G^l,$$

где

$$[u]_G^l = \sum_{|\alpha|=[l]} \sup_{x,y \in G} |D_x^\alpha u(x) - D_y^\alpha u(y)| \, |x-y|^{-(l-[l])}.$$

2. Нелинейная задача в фиксированной области $\Omega_{0,0}$

В дальнейшем удобно от исследования задачи (7)–(9) в переменной области $\Omega_{\rho,\mu}$ перейти к области $\Omega_{0,0}$, применив для этого преобразование $g_{\rho,\mu}^{-1} : \Omega_{0,0} \to \Omega_{\rho,\mu}$, которое тождественно в области $\Omega_{0,0} \setminus (N_0 \cup N_1)$ и в областях N_0 и N_1 зависит соответственно от функций

$$\rho \in C^l(S_0), \quad \mu \in C^l(S_1), \quad l_0 > l > 2,$$

и определяется по формуле

$$g_{\rho,\mu}^{-1}(x(\eta_n; \omega)) = \begin{cases} x(\chi(\eta_n)\mu; \omega) & \text{в} \quad N_1, \\ x(\chi(\eta_n)\rho; \omega) & \text{в} \quad N_0, \end{cases}$$

где $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi \equiv 0$ вне $N_0 \cup N_1$, $\chi \equiv 1$ в окрестности $N_0' \subset N_0$ для S_0 в $\mathbb{R}^n$ и в окрестности $N_1' \subset N_1$ для S_1. Очевидно, что $g_{\rho,\mu} : \Omega_{\rho,\mu} \to \Omega_{0,0}$, $S_\rho \to S_0$ и $S_\mu \to S_1$.

В дальнейшем положим

$$\lambda_n \equiv \eta_n + \chi(\eta_n)\rho \quad \text{в} \quad N_0; \qquad \lambda_n \equiv \eta_n + \chi(\eta_n)\mu \quad \text{в} \quad N_1;$$

$v_{\rho,\mu} = u_{\rho,\mu} \circ g_{\rho,\mu}^{-1}$. Тогда в новых переменных задача (7)–(9) запишется в виде

$$L_{\rho,\mu} v_{\rho,\mu} \equiv (L(v_{\rho,\mu} \circ g_{\rho,\mu})) \circ g_{\rho,\mu}^{-1} = f_{\rho,\mu} \equiv f \circ g_{\rho,\mu}^{-1} \quad \text{в} \quad \Omega_{0,0}, \tag{10}$$

$$v_{\rho,\mu} = 0 \quad \text{на} \quad S_0; \qquad v_{\rho,\mu} = \varphi_{1\rho\mu} \equiv \varphi_1 \circ g_{\rho,\mu}^{-1} \quad \text{на} \quad S_1, \tag{11}$$

$$|S_\rho D_{\eta_n} v_{\rho,\mu}|^2 = \Psi_{\rho,\mu}^2 \quad \text{на} \quad S_0, \tag{12}$$

где

$$\Psi_{\rho,\mu} = \Psi \circ g_{\rho,\mu}^{-1};$$

$$S_\rho = \langle \nabla_x \eta_n - \nabla_x \omega D_\omega \rho; A[x(\chi(\eta_n)\rho; \omega)] \times (\nabla_x \eta_n - \nabla_x \omega D_\omega \rho) \rangle$$

и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; функции f, φ_1, Ψ — краевые данные задачи.

Далее определим банаховы пространства $V_l(S_0, S_1)$ пар функций (ρ, μ), заданных соответственно на S_0 и S_1 с ограниченной нормой

$$\|(\rho, \mu); V_l(S_0, S_1)\| = \|\rho; C^l(S_0)\| + \|\mu; C^l(S_1)\|.$$

Через $B_2 V_l(S_0, S_1)$ обозначим множество функций из $V_l(S_0, S_1)$ таких, что $\|(\rho, \mu); V_{2+\varepsilon_0}(S_0, S_1)\| \leqslant B_2$, $0 < \varepsilon_0 \leqslant 1$, где B_2 настолько мало, что

$$|D_{\eta_n} \delta_n| \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{в} \quad N_0 \cup N_1 \quad \forall (\rho, \mu) \in B_2 V_l(S_0, S_1). \tag{13}$$

Рассмотрим нелинейный оператор

$$\begin{gathered} A(\rho,\mu) = [S_\rho^2(D_{\eta_n} v_{\rho,\mu})^2 - \Psi^2_{\rho,\mu}]\big|_{S_\rho}, \\ (\rho,\mu) \in B_2V_l(S_0,S_1), \end{gathered} \tag{14}$$

где $v_{\rho,\mu}$ — решение задачи (10)–(11). Для нецелого $l > 2$ из [4, теорема 12.1, с. 260] следует

$$A : B_2V_l(S_0,S_1) \to C^{l-1}(S_0). \tag{15}$$

Ясно, что решение задачи (4)–(6) эквивалентно существованию решения уравнения

$$A(\rho,\mu) = 0, \quad (\rho,\mu) \in B_2V_l(S_0,S_1).$$

3. Исследование оператора $A(\rho,\mu)$

Покажем, что производные по Фреше $D_\rho A(\hat\rho,\hat\mu)$ и $D_\mu A(\hat\rho,\hat\mu)$ можно описать системами уравнений

$$\begin{gathered} L_{\hat\rho,\hat\mu}\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} = \delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} v_{\hat\rho,\hat\mu} + \delta f_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} \quad \text{в} \quad \Omega_{0,0}, \\ \delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} = 0 \quad \text{на} \quad S_0 \quad \text{и} \quad S_1 \end{gathered} \tag{16}$$

и

$$\begin{gathered} L_{\hat\rho,\hat\mu}\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} = \delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} v_{\hat\rho,\hat\mu} + \delta f_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} \quad \text{в} \quad \Omega_{0,0}, \\ \delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} = 0 \quad \text{на} \quad S_0 \quad \text{и} \quad \delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} = \delta\varphi_{1\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} \quad \text{на} \quad S_1. \end{gathered} \tag{17}$$

Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть коэффициенты* $A_{i,j}(x) \in C^l(\mathbb{R}^n_x)$, $\varphi_1 \in C^{l+2}(\mathbb{R}^n_x)$, $f \in C^l(\mathbb{R}^n_x)$, S_0, S_1 *принадлежат классу* C^l, $l > 2$, $l_0 - 2 > l$.

Положим $w_{\delta\rho,\delta\mu} = v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} - v_{\hat\rho,\hat\mu} - \delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} - \delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}$. *Тогда для любых* $(\delta\rho,\delta\mu) \in B_2V_l(S_0,S_1)$, $(\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu) \in B_2V_l(S_0,S_1)$ *справедливо неравенство*

$$\|w_{\delta\rho,\delta\mu}; C^l(\bar\Omega_{0,0})\| \leqslant C_0\|(\delta\rho,\delta\mu); V_l(S_0,S_1)\|^2. \tag{18}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered} -L_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}(v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} - v_{\hat\rho,\hat\mu} - \delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} - \delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}) = \\ = (A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} - A_{\hat\rho,\hat\mu} - \delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} - \delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}) v_{\hat\rho,\hat\mu} + \\ + (A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} - A_{\hat\rho,\hat\mu})\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} + (A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} - A_{\hat\rho,\hat\mu})\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} - \\ - f_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} + f_{\hat\rho,\hat\mu} + \delta f_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} + \delta f_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$L_{\rho,\mu} = \sum_{i,j} D_{x_j} A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu,ij} D_{x_i} + \sum_j A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu,j} D_{x_j}, \tag{20}$$

$$\delta f_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} = \frac{\partial}{\partial\rho} f_{\rho,\mu}\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu} \delta\rho,$$

$$\delta f_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu} f_{\rho,\mu}\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu} \delta\mu.$$

Через $\delta A_{\rho,\mu}$ обозначим

$$\delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\mu} = \sum_{i,j} D_{x_i}\left[\delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\mu,i,j}\right] D_{x_j} + \sum_j \delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu,j} D_{x_j},$$

$$\delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} = \sum_{i,j} D_{x_i}\left[\delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu,i,j}\right] D_{x_j} + \sum_j \delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu,j} D_{x_j}.$$

Здесь

$$\delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu,i,j} = \left[\frac{\partial}{\partial\rho} A_{\rho,\mu,i,j}\right]\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu} \delta\rho + \sum \left[\frac{\partial}{\partial D_\omega\rho} A_{\rho,\mu,i,j}\right]\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu} D_\omega\rho,$$

$$\delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu,i,j}=\left[\frac{\partial}{\partial\mu}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}\delta\mu+\sum\left[\frac{\partial}{\partial D_\omega\mu}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}D_\omega\mu,$$

$$\delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu,j}=\left[\frac{\partial}{\partial\rho}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}\delta\rho+$$

$$+\sum\left[\frac{\partial}{\partial D_\omega\rho}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}D_\omega\rho+\sum\left[\frac{\partial}{\partial D^2_\omega\rho}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}D^2_\omega\rho,$$

$$\delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu,j}=\left[\frac{\partial}{\partial\mu}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}\delta\mu+$$

$$+\sum\left[\frac{\partial}{\partial D_\omega\mu}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}D_\omega\mu+\sum\left[\frac{\partial}{\partial D^2_\omega\mu}A_{\rho,\mu,i,j}\right]\Big|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}D^2_\omega\mu$$

в областях $N_0\cap N_1$ и $\delta A_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}=0$, $\delta A_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}=0$ в $\Omega_{0,0}\setminus(N_0\cap N_1)$. В то же время $w_{\delta\rho,\delta\mu}=0$ на S_0; $w_{\delta\rho,\delta\mu}=\varphi_{1,\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}-\varphi_{1,\hat\rho,\hat\mu}-\delta\varphi_{1,\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}-\delta\varphi_{1,\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}$ на S_1.

Из представлений (3), (20), если $A_{i,j}\in C^{l-1}(\mathbb{R}^n)$, следует, что правые части (3) принадлежат $C^{l-2}(\bar\Omega_{0,0})$, а коэффициенты $L_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}$ принадлежат $C^{l-2}(\Omega_{0,0})$. Применяя [4, теорема 12.1], получаем требуемый результат. □

Далее покажем, что замена

$$w=\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}+\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}+\langle(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu};\delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}+\delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\rangle$$

приводит к решению задачи Дирихле:

$$L_{\hat\rho,\hat\mu}w=0\quad\text{в}\quad\Omega_{0,0},\tag{21}$$

$$w=-D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\delta\rho\quad\text{на}\quad S_0,\tag{22}$$

$$w=-D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\delta\mu+\delta\varphi_{1,\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\quad\text{на}\quad S_1.\tag{23}$$

Здесь

$$\delta g^{-1}_{\hat\rho\delta\rho,\hat\mu}=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\rho}x(\eta_n+\chi(\eta_n)\rho;\omega)|_{\rho=\hat\rho}\delta\rho & \text{в}\quad N_0,\\ 0 & \text{вне}\quad N_0,\end{cases}$$

$$\delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}x(\eta_n+\chi(\eta_n)\mu;\omega)|_{\mu=\hat\mu}\delta\mu & \text{в}\quad N_1,\\ 0 & \text{вне}\quad N_1.\end{cases}$$

Рассмотрим любую область D_1, относительно компактную в $\Omega_{0,0}$. Если ε достаточно мало, то на D_1 определено отображение как $g_{\hat\rho,\hat\mu}$, так и $g_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}$:

$$\forall(\hat\rho,\hat\mu)\in B_2V_l(S_0,S_1),\quad(\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu)\in B_2V_l(S_0,S_1).$$

Тогда на области $G=g_{\hat\rho,\hat\mu}(D_1)\cap g_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}(D_1)$ для $f\in C^l(\mathbb{R}^n)$ справедливо тождество

$$J_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\left[L_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}\left(v_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}\right)-L_{\hat\rho,\hat\mu}v_{\hat\rho,\hat\mu}\right]=$$

$$=L_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}\left(\delta v_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\mu}+\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\Big(L\Big[v_{\hat\rho,\hat\mu}\circ g^{-1}_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}-$$

$$-\quad v_{\hat\rho,\hat\mu}\circ g_{\hat\rho,\hat\mu}\Big]\Big)\circ g^{-1}_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}+\frac{1}{\varepsilon}\Big[L\left(u_{\hat\rho,\hat\mu}\right)\circ g^{-1}_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}-$$

$$-L\left(u_{\hat\rho,\hat\mu}\right)\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}\Big]+\varepsilon L_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}R^\varepsilon(\delta\rho,\delta\mu)=$$

$$=\Big[-L\Big(\langle(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu};\delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}+\delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\rangle\circ g_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}\Big)+$$

$$+L\left(\left(\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}+\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\right)\circ g_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}\right)\circ g^{-1}_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}+$$

$$+\langle\nabla_x L(u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu};\delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\mu}+\delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\rangle\Big]+\varepsilon R'_\varepsilon,$$

где R'_ε — равномерно по ε ограниченный в $C^{l-3}(G)$ оператор, $l > 4$. Устремляя $\varepsilon \to 0$ на $g_{\hat\rho,\hat\mu}(D_1)$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = L_{\hat\rho,\hat\mu}\omega + \langle(\nabla_x f)\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} + \delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\rangle.$$

В то же время очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[L_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\varepsilon\delta\mu}\left(v_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu}\right) - L_{\hat\rho,\hat\mu}v_{\hat\rho,\hat\mu}\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[f_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu+\delta\mu} - f_{\hat\rho,\hat\mu}\right] = \frac{\partial}{\partial\rho}f_{\rho,\mu}\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}\delta\rho + \frac{\partial}{\partial\mu}f_{\rho,\mu}\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}\delta\mu.$$

Отсюда получаем требуемый результат:

$$L_{\hat\rho,\hat\mu}\omega = 0 \quad \text{на} \quad g_{\hat\rho,\hat\mu}(D_1), \tag{24}$$

следовательно, и на любом относительном компакте G_1, $G_1 \Subset \Omega_{0,0}$. Ограничение $f \in C^l(\mathbb{R}^n)$ можно ослабить. Если последовательность функций $f_j \in C^l(\mathbb{R}^n)$ и $f_j \to f$ в $C^{l-2}(\Omega_1)$, где $\Omega_{0,0} \Subset \Omega_1$, то для соответвующих функций w_j справедливо (24). Нетрудно видеть, что в обобщенном смысле функции w_j стремятся при $j\to\infty$ к решению w уравнения (21) и $w_j \to w$ на S_0 и S_1, если $l > 2$.

Таким образом, нетрудно показать, что функция

$$\omega_1 = \delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} + \langle(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\rangle$$

есть решение задачи Дирихле

$$\begin{gathered} L_{\hat\rho,\hat\mu}\omega_1 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{0,0}, \\ \omega_1 = 0 \quad \text{на} \quad S_1 \quad \text{и} \quad \omega_1 = -D\eta_n v_{\hat\rho,\hat\mu}\delta\mu + \delta\varphi_{1,\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} \quad \text{на} \quad S_1. \end{gathered} \tag{25}$$

Из условия (14), выделяя линейную часть, нетрудно заключить, что

$$DA(\hat\rho,\hat\mu)(\delta\rho,\delta\mu) = 2\Bigg\{S^2_{\hat\rho}D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\left(D_{\eta_n}\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} + D_{\eta_n}\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\right) - \psi_{\hat\rho,\hat\mu}\left(\delta\psi_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} + \delta\psi_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\right) +$$
$$+ \left(D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\right)^2 S_{\hat\rho}\left[\frac{\partial}{\partial D_\omega\rho}S_\rho\bigg|_{\rho=\hat\rho}D_\omega\delta\rho + \frac{\partial}{\partial\rho}S_\rho\bigg|_{\rho=\hat\rho}\delta\rho\right]\Bigg\} = \Phi. \tag{26}$$

Таким образом, производная по Фреше $DA(\hat\rho,\hat\mu)$ описывается системой уравнений (26), (21)–(23). Из условия (22) при

$$|D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}| = |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}| \geqslant a_0 = \text{const} > 0 \quad \text{на} \quad S_0 \tag{27}$$

следует, что $\delta\rho = -\left[D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\right]^{-1}\omega$. Величину $\delta\rho$ можно исключить из задачи (26), т.е. прийти к эквивалентной задаче (21)–(23):

$$\omega = -D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\delta\mu + \delta\varphi_{1,\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} \quad \text{на} \quad S_1, \tag{28}$$

$$S^2_{\hat\rho}D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}D_{\eta_n}(\omega - \langle(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} + \delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}\rangle)\Big|_{\delta\rho=-[D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}]^{-1}\omega} - (D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu})^2 S_{\hat\rho}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial D_\omega\rho}S_\rho\bigg|_{\rho=\hat\rho}D_\omega\left((D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1}w\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}S_\rho\bigg|_{\rho=\hat\rho}(D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1}w\right] -$$
$$-\Psi_{\hat\rho,\hat\mu}\delta\Psi_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} + \Psi_{\hat\rho,\hat\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi_{\rho,\mu}\bigg|_{\rho=\hat\rho,\mu=\hat\mu}(D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1}w = \Phi.$$

Последнее краевое условие можно записать в виде

$$D_{\eta_n}w + \hat\alpha D_\omega w + aw = b\delta\mu + S^{-2}_{\hat\rho}(D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1}\Phi \quad \text{на} \quad S_0, \tag{29}$$

где

$$a(\hat\rho,\hat\mu) = D_{\eta_n}\left[\langle(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}\rangle\right]\bigg|_{\delta\rho=-(D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1}w} -$$

$$- (D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu} S_\rho)^{-1} \frac{\partial}{\partial D_\omega \rho} S_\rho \Big|_{\rho=\hat\rho} D_\omega (D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu}) + \frac{\partial}{\partial \rho} S_\rho \Big|_{\rho=\hat\rho} (S_{\hat\rho} D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-2} - \Psi_{\hat\rho,\hat\mu} \frac{\partial}{\partial \eta_n} \Psi_{\hat\rho,\hat\mu} (D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1}.$$

Условиями однозначной разрешимости задачи (21), (28), (29) будут (27) и $a \geqslant 0$ на S_0, т.е.

$$-D_{\eta_n} \Big[\langle (\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}) \circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} \rangle \Big] \Big|_{\delta\rho = -(D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1} w} +$$
$$+ (D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu} S_\rho)^{-1} \frac{\partial}{\partial D_\omega \rho} S_\rho \Big|_{\rho=\hat\rho} D_\omega (D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu}) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \rho} S_\rho \Big|_{\rho=\hat\rho} (S_{\hat\rho} D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-2} - \Psi_{\hat\rho,\hat\mu} D_{\eta_n} \Psi_{\hat\rho,\hat\mu} (D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad S_0.$$

Пусть выполнены сформулированные выше условия на S_0 и S_1. Тогда, если $D_{\eta_n} A_{ij} = 0$ на S_0, то

$$a(\hat\rho,\hat\mu) \Big|_{\hat\rho=0,\ \hat\mu=0} = (D_{\eta_n} u_0)^{-1} (D^2_{\eta_n}(u_0) - \Psi D_{\eta_n} \Psi) \Big|_{S_0} =$$
$$= -\Big\langle H_0 \nabla_x u_0 - \langle \nabla_x u_0, A \nabla_x u_0 \rangle |\nabla_x u_0|^{-2} \nabla_x \Psi; \frac{\nabla_x u_0}{|\nabla_x u_0|} \Big\rangle \Big|_{S_0}, \tag{30}$$

где H_0 — гессиан функции u_0. Таким образом, при малых деформациях $(\delta\rho, \delta\mu)$, т.е. при достаточно малом B_2, $a(\hat\rho,\hat\mu) = a_0 > 0$ на S_0, если

$$(D^2_{\eta_n}(u_0) - \Psi D_{\eta_n} \Psi)(D_{\eta_n} u_0)^{-1} > 0 \quad \text{на} \quad S_0, \quad a_0 = \text{const}. \tag{31}$$

Следовательно, условиями существования $DA(\hat\rho,\hat\mu)^{-1}$ будут условия (25) и (31). Опять же, используя аналог [4, теорема 12.1],

$$\forall \Phi \in C^{l-1}(S_0), \quad u_{\hat\rho,\hat\mu} \in C^{l+1}(\Omega_{0,0}), \quad \delta\mu \in C^l(S_0),$$

докажем существование единственного решения $w \in C^l(\Omega_{0,0})$ задачи (21), (28), (29), для которого справедлива оценка

$$\big\| w; C^l(\Omega_{0,0}) \big\| \leqslant C(l, a_0) \big[\big\| \delta\mu; C^l(S_1) \big\| + \big\| \Phi; C^{l-1}(S_0) \big\| + C(B_2) \big\| u_{\hat\rho,\hat\mu}; C^{l+1}(\Omega_{0,0}) \big\| \big]. \tag{32}$$

Имеем

$$\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} = w - w_1 - \langle (\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}) \circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} \rangle,$$

$$\delta\rho = -(D_{\eta_n} v_{\hat\rho,\hat\mu})^{-1} w;$$

нетрудно показать, что функция

$$\omega_1 = \delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} + \langle (\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}) \circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}; \delta g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} \rangle$$

есть решение задачи Дирихле

$$L_{\hat\rho,\hat\mu} \omega_1 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{0,0},$$

$$\omega_1 = 0 \quad \text{на} \quad S_1 \quad \text{и} \quad \omega_1 = -D\eta_n v_{\hat\rho,\hat\mu} \delta\mu + \delta\varphi_{1,\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu} \quad \text{на} \quad S_1.$$

Для функции w_1, в силу [4, теорема 12.1], справедлива оценка вида (32). Следовательно, для функций $\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}$, $\delta v_{\hat\rho,\hat\mu+\delta\mu}$ также справедлива оценка вида (32). Тем самым, для $\forall\, \delta$, $\mu \in C^l(S_1)$, $\Phi \in C^{l-1}(S_0)$ существует единственное решение $w \in C^l(\Omega_{0,0})$, $(\delta\rho, \delta\mu) \in C^l(S_0)$ задачи (21)–(23), (26).

4. Обобщенная теорема о неявной функции

Приведем аналог обобщенной теоремы о неявной функции [9].

Теорема 1. *Пусть* $\{E_l, 0 \leqslant l \leqslant s_0\}$, $\{V_l, 0 \leqslant l \leqslant s_0\}$ — *семейства* B*-пространств с нормами* $\|\cdot\|_l$, $\|\cdot\|_n$, $E_l \subset E_n$, $\|\cdot\|_l \leqslant \|\cdot\|_n$ *и* $V_l \subset V_n$, $|\cdot|_l < |\cdot|_n$ *соответственно. Для любого* $\Theta \geqslant 1$ *определен сглаживающий оператор* $S_\Theta : E_0 \to E_{s_0}$, $V_0 \to V_{s_0}$, *такой, что*

$$\|S_\Theta x - x\|_i \leqslant C_0 \Theta^{-(j-i)} \|x\|_j \quad \forall x \in E_j, \quad \forall i, j, \quad 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant s_0,$$

$$\|S_\Theta x\|_i \leqslant C_0 \Theta^{(j-i)} \|x\|_j \quad \forall x \in E_j, \quad \forall i, j, \quad 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant s_0$$

(*соответственно* $\forall x \in V_j$). *Пусть* $B(\rho, \delta)$ — *шар в прямом произведении* $Z_\rho = E_\rho \times V_\rho$, $0 < \rho < s_0$, *с центром в точке* $(0,0)$, *и пусть отображение* $\mathbf{A} : B(\rho, \delta) \to E_0$ *таково, что*

$$\mathbf{A}(0,0) = 0. \tag{33}$$

Более того, справедливы утверждения:

1. *Отображение* $\mathbf{A}$ *непрерывно дифференцируемо в* $B(\rho, \delta)$ *по* α *и* μ *и*
$$|||D_\alpha \mathbf{A}(\alpha, \mu)|||_{\rho,0} \leqslant K_1 \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta),$$
где $\|\cdot\|_{\rho,t}$ — *норма линейного непрерывного отображения*
$$E_\rho \longrightarrow E_t;$$
$$[D_\mu \mathbf{A}(\alpha, \mu)]_{\rho,0} \leqslant K_1 \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta),$$
где $[\cdot]_{\rho,t}$ — *норма линейного непрерывного отображения* $V_\rho \to V_t$. *Более того,*
$$\|\mathbf{A}(\alpha, \mu) - \mathbf{A}(\hat\alpha, \hat\mu) - D_\alpha \mathbf{A}(\hat\alpha, \hat\mu)(\alpha - \hat\alpha) - D_\mu \mathbf{A}(\hat\alpha, \hat\mu)(\mu - \hat\mu)\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \left(\|\alpha - \hat\alpha\|_\rho^2 + \|\mu - \hat\mu\|_\rho^2 \right) \quad \forall \alpha, \mu, \hat\alpha, \hat\mu \in B(\rho, \delta).$$
2. *Отображение* $\mathbf{A}$ *имеет порядок* ρ, *т.е.* $\forall l$, $\rho \leqslant l \leqslant s_0$,
$$\mathbf{A}(B(\rho, \delta) \cap Z_l) \subset E_{l-\rho}, \quad Z_l = E_l \times V_l;$$
$$D_\alpha(\mathbf{A}(\alpha, \mu)) : E_l \to E_{l-\rho} \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta) \cap Z_l,$$
$$D_\mu(\mathbf{A}(\alpha, \mu)) : V_l \to E_{l-\rho} \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta) \cap Z_l.$$
3. *Существует правое обратное к* $D_\alpha \mathbf{A}$ *отображение* J *с показателем потери* d, $0 \leqslant d < \rho$, *т.е. линейное непрерывное отображение*
$$J(\alpha, \mu) : E_0 \to E_{\rho-d} \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta);$$
$$|||J(\alpha, \mu)|||_{0,\rho-d} \leqslant K_3 \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta).$$
Имеем
$$J(\alpha, \mu) : E_{l-\rho} \to E_{l-d} \quad \forall l, \quad \rho \leqslant l \leqslant s_0, \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta) \cap Z_l.$$
Кроме того, $\forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta) \cap Z_l$, $\rho + d \leqslant l \leqslant s_0$,
$$D_\alpha(\mathbf{A}(\alpha, \mu)) J(\alpha, \mu) \xi = \xi \quad \forall \xi \in E_{l-\rho}.$$
4. *Для любого* l, $\rho \leqslant l \leqslant s_0$, *существует постоянная* $D_0 > 0$ *такая, что*
$$\|J(\alpha, \mu) \mathbf{A}(\alpha, \mu)\|_{l-d} \leqslant D_0 (1 + \|\mu\|_l + \|\alpha\|_l) \quad \forall (\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta) \cap Z_l.$$
Тогда для любых $\varkappa$, α, d, ρ, λ, s_0 *таких, что*
$$1 < \alpha < \varkappa < 2, \quad \rho \geqslant d \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda > \max\{(2-\varkappa)^{-1} 2d\alpha\varkappa^2; \ \varkappa^2 d\},$$
$$s_0 > \max\{(\alpha-1)^{-1}\varkappa^{-1}((\varkappa-1)\lambda + \alpha d\varkappa); (\varkappa-1)^{-1}\rho\varkappa;$$
$$(\varkappa-1)^{-1}[2\rho\varkappa - \lambda]; (\varkappa-\lambda)^{-1}[\lambda\varkappa^2 - (\rho-d)\alpha\varkappa - \lambda];$$
$$(\lambda - \varkappa^2 d)^{-1}\lambda(\rho - \varkappa^2 d); (\varkappa-1)^{-1}\lambda\},$$
существует $\delta_1 > 0$ *такое, что в окрестности* $U_\rho = \{\mu \in V_\rho, |\mu|_\rho < \delta_1\}$ *определено отображение* $\alpha(\mu) : U_\rho \to E_\rho$ *такое, что*
$$\mathbf{A}(\alpha(\mu), \mu) = 0 \quad \text{и} \quad \|\alpha(\mu)\|_\rho \leqslant C_1 |\mu|_\rho \quad \forall \mu \in U_\rho.$$

Кроме того, в окрестности $B_1 = \{(\alpha, \mu) \in B(\rho, \delta), \mu \in U_\rho\}$ *любое решение уравнения* $\mathbf{A}(\alpha, \mu) = 0$ *представимо в виде* $\alpha = \alpha(\mu)$, $\mu \in U_\rho$, *и*

$$\|\alpha(\mu_2) - \alpha(\mu_1)\|_\rho \to 0, \quad \text{если} \quad |\mu_2 - \mu_1|_\rho \to 0, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in U_\rho.$$

Более того, если $\lambda > (\rho_1 - \rho + d)\varkappa^2$ *и* $s_0 > (\lambda - (\rho_1 - \rho + d)\varkappa^2)^{-1} \times \lambda[\rho_1 - (\rho_1 - \rho + d)\varkappa^2]$, *то существует* $\delta_2 > 0$ *такое, что в окрестности* $U_{\rho_1} = \{\mu \in V_{\rho_1}, |\mu|_\rho < \delta_2\}$ *имеем отображение*

$$\alpha(\mu) : U_{\rho_1} \to E_{\rho_1} \quad \forall \mu \in U_{\rho_1}.$$

Приведем доказательство этой теоремы, существенно опирающееся на идеи доказательства обобщенной теоремы о неявной функции [9]. Положим

$$\theta_{\tau_j} = \theta^{\varkappa^j}, \quad \theta_{t_j} = \theta^{\alpha\varkappa^j}, \quad \mu_j = S_{\tau_j}(\mu_{j-1}),$$
$$\alpha_j = \alpha_{j-1} - S_{t_j} J(\alpha_{j-1}, \mu_j)\mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j),$$
$$\forall j \geqslant 1; \qquad \mu_1 = S_{\tau_1}(\mu), \quad \alpha_1 = -S_{t_1} J(0, \mu_1)\mathbf{A}(0, \mu_1), \quad \alpha_0 = 0.$$

Докажем по индукции справедливость следующих утверждений:

$$\|\alpha_j\|_\rho + |\mu_j|_\rho < \delta \quad \forall j \geqslant 0; \tag{34}$$

$$\|\mathbf{A}(\alpha_j, \mu_{j+1})\|_0 \leqslant \nu\theta^{-\lambda\varkappa^{j-1}}|\mu|_\rho \quad \forall j \geqslant 1; \tag{35}$$

$$\|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_\rho \leqslant \nu\theta^{-\xi_1\varkappa^{j-2}}|\mu|_\rho \quad \forall j \geqslant 2, \tag{36}$$

где

$$\xi_1 = (s_0(\lambda - (\rho - d)\varkappa^2) - \rho\lambda + (\rho - d)\varkappa^2\lambda)(s_0 - d)^{-1} > 0;$$

$$\|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_{\rho-d} \leqslant \nu C_0 K_3 \theta^{-\lambda\varkappa^{j-2}}|\mu|_\rho \quad \forall j \geqslant 2, \tag{37}$$

$$\|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_{s_0} \leqslant \nu C_0 K_3 \theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^{j+1}}|\mu|_\rho, \tag{38}$$

$$|\mu_j - \mu_{j-1}|_{s_0} \leqslant \nu {C_0}^2 \theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^j}|\mu|_\rho, \tag{39}$$

$$|\mu_j - \mu_{j-1}|_\rho \leqslant \theta^{-\xi_2\varkappa^{j-1}}|\mu|_\rho \quad \forall j \geqslant 2, \tag{40}$$

$$|\mu_j|_{s_0} \leqslant \theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^j}, \quad j \geqslant 2, \tag{41}$$

и $\xi_2 = s_0(\varkappa - 1) - \rho\varkappa + \lambda > 0$. Нетрудно видеть, что, в силу п. 1 теоремы, имеем

$$\|\mathbf{A}(\alpha_j; \mu_{j+1})\|_0 \leqslant \|\mathbf{A}(\alpha_j, \mu_{j+1}) - \mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j) -$$
$$-D_\alpha\mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) - D_\mu\mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j)(\mu_j - \mu_{j-1})\|_0 +$$
$$+\|D_\alpha\mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j)(I - S_{\tau_{j+1}})S_{\tau_j}(\mu)\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant K_2\{\|S_{t_j}J(\alpha_{j-1}, \mu_j)\mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j)\|_\rho^2 + K_1^2 C_0^4 \theta^{-2(s_0-\rho)\varkappa^j}|\mu_{j-1}|_{s_0}^2\} +$$
$$+K_1 C_0 D_0 \theta^{-(s_0-d)\alpha\varkappa^j}(1 + +\|\alpha_{j-1}\|_{s_0} + |\mu_j|s_0) + K_1 C_0^2 \theta^{-(s_0-\rho)\varkappa^j}|\mu_{j-1}|_{s_0}.$$

Далее имеем

$$\|S_{t_j}J(\alpha_{j-1}, \mu_j)\mathbf{A}(\alpha_{j-1}, \mu_j)\|_\rho^2 \leqslant K_3^2 C_0^2 \theta^{2d\alpha\varkappa^j}\|\mathbf{A}(\alpha_{j-1}; \mu_j)\|_0^2.$$

Используя индуктивные предположения о справедливости (38), (39) на предыдущем $(s-1)$-м шаге, получаем

$$\|\alpha_{j-1}\|_{s_0} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1}\|\alpha_k - \alpha_{k-1}\|_{s_0} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} C_0 K_3 \nu\theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^{k+1}}|\mu|_\rho \leqslant$$
$$\leqslant \nu M_{s_0}\theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^j}|\mu|_\rho \sum_{k=1}^{j-1}\theta^{-(s_0-\lambda)\ln\varkappa(j-k-1)} \leqslant$$
$$\leqslant \nu M'_{s_0}|\mu|_\rho\theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^j} \leqslant \theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^j}|\mu|_\rho, \quad \text{если} \quad \nu M'_{s_0} \leqslant 1.$$

При $\theta \gg 1$ имеем

$$|\mu_j|_{s_0} \leqslant \sum_{k=2}^{j} |\mu_k - \mu_{k-1}|_{s_0} + |\mu_1|_{s_0} \leqslant \nu M''_{s_0}; \quad j \geqslant 2.$$

Из этих оценок при условиях

$$2(\alpha d\varkappa^j - \lambda\varkappa^{j-2}) < -\lambda\varkappa^{j-1}, \quad \lambda(\varkappa-1)^{-1} \leqslant s_0;$$

$$2((s_0-\lambda)\varkappa^{j-1} - (s_0-\rho)\varkappa^j) < -\lambda\varkappa^{j-1}, \quad \varkappa > 1,$$

$$-(s_0-d)\alpha\varkappa^j - (s_0-\lambda)\varkappa^j < -\lambda\varkappa^{j-1},$$

$$-(s_0-\rho)\varkappa^j + (s_0-\lambda)\varkappa^{j-1} < -\lambda\varkappa^{j-1},$$

т.е. при $1 < \varkappa < 2$,

$$\lambda > (2-\varkappa)^{-1} 2d\alpha\varkappa^2;$$

$$s_0 > \max\{(\varkappa-1)^{-1}\lambda; (\varkappa-1)^{-1}[2\rho\varkappa - 1]; (\alpha-1)^{-1}\varkappa^{-1}[d\alpha\varkappa + \lambda(\varkappa-1)]; (\varkappa-1)^{-1}\rho\varkappa\}, \quad \alpha > 1.$$

Из индуктивного предположения о справедливости (35), (38), (39) на $(s-1)$-м шаге получаем требуемый результат

$$\|\mathbf{A}(\alpha_j;\mu_{j+1})\|_0 \leqslant \nu\theta^{-\lambda\varkappa^{j-1}}|\mu|_\rho, \quad \theta \gg 1.$$

Теперь проверим условие (37). Имеем

$$\|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_{s_0} = \|S_{t_j} J(\alpha_{j-1};\mu_j)\mathbf{A}(\alpha_{j-1};\mu_j)\|_{s_0} \leqslant$$

$$\leqslant C_0\theta^{\alpha(s_0-\rho+d)\varkappa^j}\|J(\alpha_{j-1};\mu_j)\mathbf{A}(\alpha_{j-1};\mu_j)\|_{\rho-d} C_0 K_3 \nu\theta^{I_0(s_0,\varkappa,\alpha)} \leqslant C_0 K_3 \nu\theta^{(s_0-\lambda)\varkappa^{j+1}},$$

если $(s_0-\lambda)\varkappa^{j-1} \geqslant (s_0-\rho+d)\alpha\varkappa^j - \lambda\varkappa^{j-1} \equiv I_0$, т.е. $S_0 \geqslant (\varkappa-\alpha)^{-1}[\lambda\varkappa^2 - (\rho-d)\alpha\varkappa - \lambda]$ и $\varkappa > \alpha > 1$. Так же проверяется условие (39).

Далее имеем

$$\|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_{\rho-d} \leqslant C_0K_3\|\mathbf{A}(\alpha_{j-1};\mu_j)\|_{s_0} \leqslant \nu C_0 K_3 \theta^{-\lambda\varkappa^{j-2}}|\mu|_\rho.$$

Отсюда, используя свойство выпуклости норм при наличии сглаживающего оператора [9], получаем

$$\|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_\rho \leqslant C(\rho,s_0,d)\|\alpha_j-\alpha_{j-1}\|^{\frac{s_0-\rho}{s_0+d-\rho}} \times$$

$$\times \|\alpha_j - \alpha_{j-1}\|_{s_0}^{\frac{d}{s_0+d-\rho}} \leqslant \nu\theta^{-\xi_1\varkappa^{j-2}}|\mu|_\rho, \quad \theta \gg 1,$$

где

$$\xi_1 = [(s_0-\rho)\lambda - d(s_0-\lambda)\varkappa^2](s_0+d-\rho)^{-1} > 0,$$

если $s_0 > (\lambda - d\varkappa^2)^{-1}\lambda(\rho - \varkappa^2 d)$ и $\lambda > d\varkappa^2$.

Кроме того,

$$|\mu_j - \mu_{j-1}|_\rho \leqslant C_0\theta^{-(s_0-\rho)\varkappa^j}|\mu_{j-1}|_{s_0} \leqslant C_0 M_{s_0}\nu\theta^{\varkappa^{j-1}(s_0-\lambda-\varkappa(s_0-\rho))}|\mu|_\rho \leqslant \theta^{-\xi_2\varkappa^{j-1}}, \quad \nu \leqslant 1,$$

если $\xi_2 = (\varkappa-1)s_0 + \lambda - \varkappa\rho l \geqslant 0$. Осталось проверить только условие (34), которое справедливо, если

$$\|\alpha_j\|_\rho + |\mu_j|_\rho \leqslant \sum_{k=2}^{j}(\|\alpha_k - \alpha_{k-1}\|_\rho + |\mu_k - \mu_{k-1}|_\rho) + \|\alpha_1 - \alpha_0\|_\rho + |\mu_1|_\rho \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{j}[\nu\theta^{-\xi_1\varkappa^{k-2}} + \theta^{-\xi_2\varkappa^{k-1}}]|\mu|_\rho + +\|\alpha_1\|_\rho + C_0|\mu|_\rho \leqslant N_0|\mu|_\rho \leqslant \delta$$

при условии, что $|\mu|_\rho \leqslant N_0^{-l}\delta$. Индуктивные предположения (34)–(41) для $j = 0,1,2,3$ устанавливаются традиционным образом (см. [9]).

Аналогично получим

$$\|\alpha_j\|_{\rho_1} + |\mu_j|\rho_1 \leqslant \mathrm{const}\,|\mu|_{\rho_1},$$

если

$$\rho_1 \geqslant \rho, \quad \lambda > (\rho_1 - \rho + d)\varkappa^2 \quad \text{и} \quad s_0 > \lambda(\lambda - (\rho_1 - \rho + d)\varkappa^2)^{-1}(\rho_1 - (\rho_1 - \rho + d)\varkappa^2).$$

Из приведенных оценок следует существование решения $\alpha(\mu)$ уравнения $\mathbf{A}(\alpha, \mu) = 0$ для любого $\mu \in U_\rho \cap V_{\rho_1}$, где $U_\rho = \{\mu \in U_\rho,\ |\mu|_\rho < N_0^{-1}\delta\}$. Для любых $\mu_1, \mu_2 \in U_\rho$ имеем

$$0 = D_\alpha \mathbf{A}(\alpha(\mu_1), \mu_1)(\alpha(\mu_2) - \alpha(\mu_1)) +$$
$$+ D_\mu \mathbf{A}(\alpha(\mu_1), \mu_1)(\mu_2 - \mu_1) + + O(\|\alpha(\mu_2) - \alpha(\mu_1)\|_\rho^2 + |\mu_2 - \mu_1|_\rho^2).$$

Отсюда

$$\alpha(\mu_2) - \alpha(\mu_1) = J(\alpha(\mu_1), \mu_1)[D_\mu \mathbf{A}(\alpha(\mu_1), \mu_1)(\mu_2 - \mu_1) + O(\|\alpha(\mu_2) - \alpha(\mu_1)\|_\rho^2 + |\mu_2 - \mu_1|_\rho^2)].$$

Из этого равенства вытекает, что $\|\alpha(\mu_2) - \alpha(\mu_1)\|_\rho \to 0$, если $|\mu_2 - \mu_1|_\rho \to 0$. Без труда доказывается и последнее утверждение теоремы о «единственности».

5. Исследование задачи (7)–(9)

Нетрудно видеть, что рассмотренный выше оператор $\mathbf{A}(\rho, \mu)$, в силу леммы 1, удовлетворяет условиям теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\Omega_{0,0} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — ограниченная область с двусвязной границей $\partial\Omega_{0,0} = S_0 \cup S_1$, $S_0 \cap S_1 = \varnothing$, многообразия S_0, S_1 принадлежат классу C^{l_0}, $l_0 > 4$ нецелое. Пусть существует решение $u_0 \in C^{l_0}(\Omega_{0,0})$ задачи* (4)–(6). *Здесь $f \in C^{l_0-2}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \in C^{l_0}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^{l_0}(\mathbb{R}^n)$. Пусть функция ψ и матрица A постоянны в N_0 вдоль нормалей к S_0, т.е. $D_{\eta_n}\psi = 0$ и $D_{\eta_n} A_{i,j} = 0$ на S_0, $|\psi| \geqslant C_0 > 0$ на S_0 и во всех точках $\beta \in S_0$*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[k_j(\beta)\langle \tau_j(\beta); \mathbf{A}(\beta)\tau_j(\beta)\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau_j} A(\beta) n_0(\beta); n_0(\beta) \right\rangle \right] \geqslant C_1 > 0,$$

где $\{\tau_1(\beta), \dots, \tau_{n-1}(\beta)\}$ — базис касательных векторов в точке β на S_0, а $k_j(\beta)$ — главные кривизны в точке β, определенные по полю внутренних нормалей. Тогда существует достаточно малое $\delta_1 > 0$, при котором

$$\forall \mu \in U_{\delta_1} = \{\mu \in C^{2+\varepsilon}(S_1),\ 0 < \varepsilon < 1,\ \|\mu; C^{2+\varepsilon}(S_1)\| \leqslant \delta_1\}$$

найдется решение $u_{\rho(\mu),\mu}$ задачи (4)–(6) *в области $\Omega_{\rho(\mu),\mu}$ такое, что*

$$\|u_{\rho(\mu),\mu} - u_0; C^{2+\varepsilon}(\Omega_{\rho(\mu),\mu})\| \leqslant \mathrm{const}\, \|\mu; C^{2+\varepsilon}(S_1)\|.$$

Кроме того, в окрестности $B_2 V_{2+\varepsilon}(S_0, S_1) \cap U_{\delta_1}$ любое решение уравнения $A(\rho, \mu) = 0$ представимо в виде $\rho = \rho(\mu)$.

Покажем, что справедливы условия теоремы 1. Очевидно, если выполнены условия теоремы 2, то

$$a(0,0) > 0 \quad \text{на} \quad S_0,$$

и, следовательно, для любых $\delta\mu \in C^i(S_1)$, $\Phi \in C^{l-1}(S_0)$, где l нецелое, $l \geqslant 2 + \varepsilon$, $l_0 - 2 > l$, существует единственное решение $w \in C^l(\Omega_{0,0})$ задачи (21), (23), (29), а значит, и единственное

$$\delta\rho = -(D_{\eta_n} v_0)^{-1} w\big|_{S_0} \in C^l(S_0).$$

Это доказывает существование правого обратного

$$J(0,0)(\delta\mu, \Phi) = -(D_{\eta_n} v_0)^{-1} w\big|_{S_0}$$

для производной по Фреше $D_\rho \mathbf{A}(0,0)$.

Теперь докажем существование левого обратного для $D_\rho \mathbf{A}(\hat\rho, \hat\mu)$ $\forall(\hat\rho, \hat\mu) \in B_2 V_l(S_0, S_1)$, если B_2 достаточно мало.

Положим

$$J(\hat\rho, \hat\mu) = J(0,0)\{I + (D_\rho A(\hat\rho, \hat\mu) - D_\rho A(0,0)) J(0,0)\}^{-1}.$$

В силу леммы 1, нетрудно видеть, что если B_2 достаточно мало, то оператор $J(\hat\rho,\hat\mu)$ определен и действует из $C^{2+\varepsilon}(S_1)\times C^{1+\varepsilon}(S_0)$ в $C^{2+\varepsilon}(S_0)$. Кроме того,

$$\|J(\hat\rho,\hat\mu)(\delta\mu,\Phi);C^{2+\varepsilon}(S_0)\|\leqslant C_0(B_2)\{||\delta\mu;C^{2+\varepsilon}(S_1)\|+||\Phi;C^{1+\varepsilon}(S_0)||\}.$$

Далее можно применить простейший вариант теоремы 1 (метод последовательных приближений) для сжимающего оператора. Таким образом, при дополнительном условии гладкости $l_0>l+2$ на решение $\{S_0,u_0\}$ задачи (4)–(6) можно доказать его устойчивость. Если выполнено более жесткое условие $a(0,0)\geqslant\mathrm{const}>0$ на S_0, то нетрудно показать справедливость условий теоремы 1 при более слабых условиях на B_2, но при более сильном условии гладкости $l_0>2+\varepsilon+2s_0$, где s_0 определяется теоремой 1, для

$$\rho=2,\quad d=1,\quad E_j=C^{2+\varepsilon+2(j-1)}(S_0),\quad V_j=C^{2+\varepsilon+2(j-1)}(S_1),$$
$$j\geqslant 1,\quad E_0=C^{1+\varepsilon}(S_0),\quad V_0=C^{1+\varepsilon}(S_0).$$

6. Вариационная интерпретация задачи (7)–(9)

Рассмотрим функционал

$$G_{\rho,\mu}=\int\limits_{\Omega_{\rho,\mu}}(\psi^2+\langle\nabla_x u_{\rho,\mu};A(x)\nabla_x u_{\rho,\mu}\rangle)\,dx,\tag{42}$$

где $u_{\rho,\mu}$ — решение задачи (7), (8), в $\Omega_{\rho,\mu}$. Далее рассмотрим в окрестности N_0 локальные координаты (η_n,ω), где ω — локальные координаты на S_0; η_n определим как длину вдоль траектории векторного поля

$$\frac{\partial}{\partial s}x=\bar a(x(s,\omega)),\quad x(0,\omega)\in S_0;\quad \operatorname{div}\bar a=0\quad\text{в}\quad N_0,\tag{43}$$

т.е. как длину дуги траектории, соединяющей точки $x=x(\eta_n,\omega)$ и $x(0,\omega)\in S_0$. Дальнейшее определение преобразования $g_{\rho,\mu}$ такое же, как в § 2. Если область Ω звездна относительно шара $\{|x|<\delta_0\}\subset\Omega\setminus\Omega_{0,0}$, то $\bar a(x)=x|x|^{-n}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Очевидно, что $\operatorname{div}\bar a=0$. Далее, пусть $S_{\hat\rho}$, $S_{\hat\mu}$ принадлежат классу $C^{l_0}>3$ и $(\delta\rho,\delta\mu)\in B_2V_l(S_0,S_1)$, l нецелое, $l>2$, $l_0>l$. Пусть матрица $A(x)$ и функция ψ постоянны в N_0 вдоль траекторий векторного поля $\bar a$. В дальнейшем будем считать, что $\delta\rho$ продолжено в область N_0 константой вдоль траекторий векторного поля $\bar a$. В этом случае

$$\operatorname{div}(\bar a\delta\rho)=0\quad\text{в}\quad N_0,\tag{44}$$

если $\operatorname{div}\bar a=0$. Предположим, что функция χ в определении преобразования $g_{\rho,\mu}$ равна единице на $S_{\hat\rho}$ $\forall\hat\rho\in B_2V_2$. Используя введенную выше функцию w в случае $\delta\mu=0$, когда

$$w=\delta v_{\hat\rho+\delta\rho,\mu}+\langle(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\circ g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu},\delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\mu}\rangle,$$

нетрудно получить (см. [8])

$$\delta G_{\hat\rho+\delta\rho,\mu}=\frac{d}{d\varepsilon}G\,(\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu)\Big|_{\varepsilon=0}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg[\int\limits_{S_{\hat\mu}}\varphi_1\times\langle n_{\hat\mu};\mathbf{A}\nabla_x\left(v_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu}\circ g_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu}\right)-A_{\nabla_x}\left(v_{\hat\rho,\hat\mu}\circ g_{\hat\rho,\hat\mu}\right)\rangle\,dS_{\hat\mu}\Bigg]+\int\limits_{S_{\hat\rho}}\psi^2\left\langle n_{\hat\rho};\delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}\right\rangle dS_{\hat\rho}=$$
$$=\int\limits_{S_1}\varphi_{1\hat\mu}\,\langle n_1;A_{\hat\rho,\hat\mu}\nabla_x w\rangle\,dS_1+\int\limits_{S_0}\langle n_0;A_{\hat\rho,\hat\mu}\nabla_x v_{\hat\rho,\hat\mu}\rangle\,w\,dS_0+\int\limits_{S_{\hat\rho}}\psi^2\left\langle n_{\hat\rho},\delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}\right\rangle dS_{\hat\rho},$$

где n_0 и n_1 — внешние для $\Omega_{0,0}$ нормали к S_0 и S_1 соответственно. Из условия $w=-D_{\eta_n}v_{\hat\rho,\hat\mu}\delta\rho=|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|\langle n_{\hat\rho},\bar a\rangle\delta\rho$ на S_0 получим

$$\delta G_{\hat\rho+\delta\rho,\mu}=\int\limits_{S_{\hat\rho}}\left(-\langle\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu};A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\rangle+\psi^2\right)\left\langle n_{\hat\rho};g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}\right\rangle dS_{\hat\rho}.\tag{45}$$

Здесь $dS_{\hat\rho}$ — элемент поверхности $S_{\hat\rho}$. Нетрудно видеть (см. [8]), что

$$dS_{\hat\rho} = (\det I(\hat\rho))^{1/2} d\sigma, \quad x = x(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$I(\hat\rho) = \frac{\partial x^*}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x} g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}\right)^* \frac{\partial}{\partial x} g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}\frac{\partial x}{\partial\sigma},$$

где σ — локальная параметризация S_0 в окрестности точки $x_0 \in S_0$.

Пусть dS_0 — элемент поверхности S_0, содержащий точку x_0. Тогда

$$dS_0 = (\det I_0)^{1/2}\, d\sigma, \qquad I_0 = \frac{\partial x^*}{\partial\sigma}\frac{\partial x}{\partial\sigma}.$$

Отсюда

$$dS_{\hat\rho} = j(\hat\rho) dS_0; \qquad j(\hat\rho) = \left(\frac{\det I(\hat\rho)}{\det I_0}\right)^{1/2},$$

где $j(\hat\rho)$ — якобиан замены переменных при отображении $x \to g^{-1}_{\hat\rho,\hat\mu}(x)$ многообразия S_0 в $S_{\hat\rho}$ (см. [8]). Далее имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{S_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho}} \left[\psi^2 - \langle \nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}; A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\rangle\right] \times \left\langle n_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho}; \delta g^{-1}_{(\hat\rho+\varepsilon\delta\rho)+\delta\rho,\hat\mu}\right\rangle dS_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho}\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{\Omega_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu}} \operatorname{div}\left[\left(\psi^2 - \langle \nabla_x u_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu}; A\nabla_x u_{\hat\rho+\varepsilon\delta\rho,\hat\mu}\rangle\right)\delta g^{-1}_{(\hat\rho+\varepsilon\delta\rho)+\delta\rho,\hat\mu}\right] dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{S_{\hat\rho}} \left\{\psi^2 - \langle \nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}; A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\rangle\right\} \operatorname{div}(\bar a\delta\rho) \times \langle n_{\hat\rho}, \bar a\rangle\, \delta\rho\, dS_{\hat\rho} = 0,$$

так как $\operatorname{div}(\bar a\delta\rho) = 0$ в силу (44). Далее

$$I_2 = -2\int\limits_{\Omega_{0,0}} \langle \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}; \nabla_x\rangle(\nabla_x w) A_{\hat\rho,\hat\mu}\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\, dx - 2\int\limits_{\Omega_{0,0}} \nabla_x w A_{\hat\rho,\hat\mu}\langle \delta g^{-1}_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu}; \nabla_x\rangle(\nabla_x v_{\hat\rho,\hat\mu})\, dx =$$

$$= 2\int\limits_{S_0} w\frac{\partial}{\partial\nu_{\hat\rho}} w\, dS_0 = 2\int\limits_{\Omega_{0,0}} \nabla_x w A_{\hat\rho,\hat\mu}\nabla_x w\, dx,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu_{\hat\rho}}$ — производная по внешней к $\Omega_{0,0}$ конормали на S_0 для $L_{\hat\rho,\hat\mu}$;

$$I_3 = -2\int\limits_{S_{\hat\rho}} \left\{\langle \bar a, \nabla_x\rangle\left(\langle \nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}; A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\rangle\right)\right\} \times \langle n_{\hat\rho}, \bar a\rangle\, (\delta\rho)^2\, dS_{\hat\rho}.$$

Имеем

$$\bar F = \langle \bar a, \nabla_x\rangle\left(\langle \nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}; A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\rangle\right) =$$

$$= 2\left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a}\left(A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\right); \nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a} A n_{\hat\rho}, n_{\hat\rho}\right\rangle |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 =$$

$$= 2\langle \bar a, n_{\hat\rho}\rangle\left\langle \frac{\partial}{\partial n_{\hat\rho}}\left(A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\right), n_{\hat\rho}\right\rangle |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}| - \left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a} A n_{\hat\rho}, n_{\hat\rho}\right\rangle |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{n-1}\langle \bar a, \tau_j\rangle\left\langle \frac{\partial}{\partial\tau_j}\left(A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\right); n_{\hat\rho}\right\rangle |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|.$$

В то же время, в силу $\operatorname{div}(A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}) = 0$ на $S_{\hat\rho}$, справедливо равенство

$$\langle \bar a, n_{\hat\rho}\rangle\left\langle \frac{\partial}{\partial n_{\hat\rho}}\left(A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\right); n_{\hat\rho}\right\rangle = -\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle \frac{\partial}{\partial\tau_j}\left(A\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}\right); \tau_j\right\rangle,$$

где $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ — ортонормированный базис касательного пространства в заданной точке $S_{\hat\rho}$ и $\tau_j \perp n_{\hat\rho}$ в этой точке, $j = 1, \dots, n-1$. Следовательно, будем иметь

$$\bar F = -2|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}| \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle A\frac{\partial}{\partial\tau_j}(\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu})\,; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\right\rangle -$$
$$-2|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial\tau_j} An_{\hat\rho}; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a} An_{\hat\rho}; n_{\hat\rho}\right\rangle |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2.$$

Далее на $S_{\hat\rho}$ имеем

$$\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu} = -|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}| n_{\hat\rho} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\tau_j}\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu} = -\frac{\partial}{\partial\tau_j}|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}| n_{\hat\rho} + |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|(k_j\tau_j - \varkappa b_j),$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\tau_j} n_{\hat\rho} = k_j\tau_j - \varkappa b_j$ и k_j — кривизна в рассматриваемой точке, определенная по полю внутренних нормалей по направлению τ_j.

Таким образом,

$$-\bar F = 2|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 \sum_{j=1}^{n-1} k_j \langle\tau_j; A\tau_j\rangle\langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle +$$
$$+|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 \Bigg\{ 2\sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \frac{\partial}{\partial\tau_j} An_{\hat\rho}; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a} An_{\hat\rho}; n_{\hat\rho}\right\rangle -$$
$$-2\sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \frac{\partial}{\partial\tau_j}|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|\, |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^{-1} An_{\hat\rho}; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\right\rangle \Bigg\}.$$

Окончательно получим

$$\delta^2 G_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} = 2\int\limits_{\Omega_{0,0}} \nabla_x w A_{\hat\rho,\hat\mu} \nabla_x w\, dx +$$
$$+2\int\limits_{S_{\hat\rho}} |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle^2 \sum_{j=1}^{n-1} k_j\langle\tau_j; A\tau_j\rangle(\delta\rho)^2\, dS_{\hat\rho} + \int\limits_{S_{\hat\rho}} \bar F_1 |\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 (\delta\rho)^2\, dS_{\hat\rho}, \tag{46}$$

где

$$\bar F_1 = \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle \Bigg\{ -2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial\tau_j} \ln|\nabla_x u_{\hat\rho,\mu}|\, \langle An_{\hat\rho}; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\rangle +$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \frac{\partial}{\partial\tau_j} An_{\hat\rho}; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a} An_{\hat\rho}; n_{\hat\rho}\right\rangle \Bigg\}, \tag{47}$$

что следует из равенства (45), (46). Если $(\hat\rho, \hat\mu)$ — гладкая стационарная точка функционала $G(\hat\rho, \hat\mu)$, то $|\nabla_x u_{\hat\rho,\hat\mu}|^2 = \psi^2$ на $S_{\hat\rho}$. Отсюда

$$\delta^2 G_{\hat\rho+\delta\rho,\hat\mu} = 2\int\limits_{\Omega_{0,0}} \nabla_x w\, dx + 2\int\limits_{S_{\hat\rho}} \psi^2 \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle^2 (\delta\rho)^2 \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n-1} k_j\langle\tau_j; A\tau_j\rangle +$$
$$+\langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle^{-1} \left[2\sum_{j=1}^{n-1} \langle An_{\hat\rho}; \langle\bar a, n_{\hat\rho}\rangle\tau_j - \langle\bar a, \tau_j\rangle n_{\hat\rho}\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial\bar a} An_{\hat\rho}; n_{\hat\rho}\right\rangle \right] \Bigg\}\, dS_{\hat\rho}.$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие A. Матрица $A(x)$ постоянна в окрестности $S_{\hat{\rho}}$, $\operatorname{div} \bar{a} = 0$ в N_0; функция ψ постоянна вдоль траектории векторного поля $\bar{a}$ и

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j \langle \tau_j; A\tau_j \rangle \geqslant \mathrm{const} > 0 \quad \text{на} \quad dS_{\hat{\rho}}.$$

Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 3. *Если пара $(\hat{\rho}, \hat{\mu}) \in B_2V_l(S_0, S_1)$, где l — нецелое, $l > 3$, является стационарной точкой функционала $G(\rho, \mu)$, т.е. $|\nabla_x u_{\hat{\rho},\hat{\mu}}|^2 = \psi^2$ на $S_{\hat{\rho}}$, где $u_{\hat{\rho},\hat{\mu}}$ — решение задачи* (7), (8), *и справедливо условие* **A**, *то пара $(\hat{\rho}, \hat{\mu})$ определяет изолированный локальный минимум $G(\rho, \mu)$. Существует окрестность*

$$U_\varepsilon = \{(\rho, \mu) \in B_2V_l(S_0, S_1);\ \|\rho - \hat{\rho}; C^{2+\varepsilon}(S_0)\| + \|\mu - \hat{\mu}; C^{2+\varepsilon}(S_1)\| < \varepsilon\},$$

в которой функционал $G(\rho, \mu)$ — выпуклый по переменной ρ.

7. Устойчивость сферически симметричного решения задачи (1)–(3)

Нетрудно видеть, что сферически симметричное решение задачи (1)–(3) в шаре $K_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\}$ имеет вид $u(r) = \ln r/\rho(\ln R/\rho)^{-1}$, $n = 2$, или $u(r) = (r^{2-n} - \rho^{2-n})(R^{2-n} - \rho^{2-n})^{-1}$, $n \geqslant 3$, где $\xi = R/\rho$ есть решение уравнения $\xi(\ln \xi)^{-1} = \lambda R$, $\xi = R/\rho > 1$, в первом случае, и $\xi^{n-1}(\xi^{n-2} - 1)^{-1} = R\lambda(n-2)^{-1}$ для $n \geqslant 3$ — во втором. Отсюда следует, что при $n = 2$ и $\lambda = e/R$ существует одно решение и два решения при $\lambda > e/R$. Если $n \geqslant 3$, то стационарные точки функции $g(\xi) = \xi^{n-1} - \dfrac{R\lambda}{n-2}(\xi^{n-2} - 1)$ при $\xi > 1$ определяют сферически симметричные решения (1)–(3). Для $\lambda > (n-1)^{\frac{n-1}{n-2}} R^{-1}$ существуют два сферически симметричных решения (1)–(3). Для $\lambda = (n-1)^{\frac{n-1}{n-2}} R^{-1}$ имеем одно решение. При $\lambda < (n-1)^{\frac{n-1}{n-2}} R^{-1}$ не существует сферически симметричного решения.

Таким образом, из теоремы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Для любого $\lambda \geqslant (n-1)^{\frac{n-1}{n-2}} R^{-1}$ в области, являющейся «малой» $C^{2+\varepsilon}$ деформацией шара K_R, существует по крайней мере одно решение задачи* (1)–(3), *и любое такое решение локально устойчиво.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данилюк И. И.* О многомерной однофазной квазистационарной задаче Стефана// Докл. АН СССР. — 1984. — № 1. — С. 13–17.
2. *Данилюк И. И.* Об одной нелинейной задаче со свободной границей// Докл. АН СССР. — 1968. — № 5. — С. 979–982.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В.А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
5. *Alt H. W.* The fluid flow through porous media. Regularity of the free surface// Manuscr. Math. — 1977. — *21* — С. 107–127.
6. *Danilyuk I. I.* Sur une class de fonctionneles integrales a domain variable d' integration// Actes Congr. Int. Math., Nice. — 1970. — № 2. — С. 703–715.
7. *Friedman A.* Variational Principles and Free Boundary Problems, New York: Wiley, 1982.
8. *Hanzawa Ei-Ichi* Classical solution of the Stefan problem// Tohoku Math. J. — 1981. — *33*, № 2. — С. 297–335.
9. *Nirenberg L.* Topics in Nonlinear Functional Analysis, New York, 1983.

Е. В. Радкевич
Московский государственный университет им. Ломоносова
E-mail: radk@mech.math.msu.su

Современная математика и ее приложения. Том 16 (2004). С. 113–155

УДК 517.956.4

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВЕРИГИНА—МАСКЕТА, ПРОБЛЕМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ВНУТРЕННИЕ СЛОИ

© 2004 г. **Е. В. РАДКЕВИЧ**

Аннотация. Приведена регуляризация известной задачи Маскета [1, 15], основанная на введении параметра порядка, описывающего внутреннии слои между двумя фазами. Построено асимптотическое решение, и получено его обоснование. Исследуется поведение решения при предельном переходе по малому параметру $\varepsilon \to 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

0. Введение

В статье обсуждается регуляризация известной задачи Маскета (со свободной границей) [1, 15], основанную на введении параметра порядка, описывающего внутренний слой между двумя фазами. Этот метод широко использовался в последнии годы (см., например, [10]) при исследовании классической задачи Стефана. Предлагаемая модель при всей формальности введения уравнения для функции порядка обладает замечательным свойством: известное для задачи условие энтропийного типа (см., например, [4, 6]) является условием положительности спектра задачи (6),(7), линеаризованной на асимптотическом решении.

Задачи Маскета активно исследовались в последние годы (подробный обзор работ по этой теме можно найти в [16]).

Перейдем к постановке задачи Маскета. Она состоит в нахождении гладкого решения $U = (U^+(x,t), U^-(x,t))$, $S(x,t)$ следующей задачи со свободной границей:

$$\frac{\partial}{\partial t}U^{\pm} - \nabla_x(\mathbf{K}\nabla_x U^{\pm}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^{\pm} = \{x \in \Omega,\, S(x,t) > 0 \quad \text{или} \quad S(x,t) < 0\}, \tag{1}$$

в подобластях $\Omega_t^{\pm} \in \Omega$, ограниченных гладкими поверхностями Γ_t, $\partial\Omega$ и Γ_t соответственно, для любого $t \in [0,T]$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$, свободная граница определяется соотношением $\Gamma_t = \{x \in \Omega,\, S(x,t) = 0\}$. Здесь $\mathbf{K}(S,x,t) = K^+$, если $S > 0$, $\mathbf{K}(S,x,t) = K^-$, если $S < 0$. Функции $K^{\pm}(x,t)$ — гладкие функции, принадлежащие $C^\infty(Q)$, где $Q = \Omega \times (0,T)$. Вводимые ниже параметры α, β позволяют провести классификацию предельных задач при $\varepsilon \to 0$. Предположим, что краевые условия на свободной границе задаются в одной из рассмотренных ниже форм:

$$[U]_-^+\Big|_{\Gamma_t} = 0, \quad K^+\partial_n U^+\Big|_{\Gamma_t} = K^-\partial_n U^-\Big|_{\Gamma_t} = -V_n\Big|_{\Gamma_t}, \quad t \in (0,T) \tag{2}$$

$(0 < \alpha < 1,\ \alpha = \sigma)$ и

$$[U]_-^+\Big|_{\Gamma_t} = 0, \quad K^+\partial_n U^+\Big|_{\Gamma_t} = K^-\partial_n U^-\Big|_{\Gamma_t} = -\mathcal{H}_t - V_n\Big|_{\Gamma_t}, \quad t \in (0,T) \tag{3}$$

ISSN 1512–1712

($\alpha = \sigma = 1$), где ∂_n — производная по нормали, n — внешняя нормаль для области Ω_t^-, ограниченной поверхностью Γ_t, $\mathcal{H}_t$ — кривизна, и $V_n = -S_t/|\nabla_x S|$ на свободной границе Γ_t, $0 < t < T$, есть нормальная скорость. Случай $\alpha = 1$, $\sigma = 3/4$ отвечает так называемой задаче о «запирающем давлении», определяемой краевыми условиями на свободной границе

$$[U]_-^+\Big|_{\Gamma_t} = 0 \quad \text{и} \quad \partial_n U^+\Big|_{\Gamma_t} = \partial_n U^-\Big|_{\Gamma_t} = 0, \quad t \in (0,T).$$

Дополнительные начальные и краевые условия на фиксированной границе задаются следующим образом:

$$U^+\Big|_\Sigma = U_\Sigma, \quad U^\pm\Big|_{t=0} = U_\pm^0(x) \tag{4}$$

или

$$\partial_n U^+\Big|_\Sigma = U_\Sigma, \quad U^\pm\Big|_{t=0} = U_\pm^0(x), \tag{5}$$

где U_Σ, $U_\pm^0$ — гладкие функции на фиксированной границе $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ и на $\Omega_0^\pm$ соответственно. Отметим, что эта (параболическая) формулировка дана Н. Н. Веригиным [1]. Определим гладкую аппроксимацию задач типа Маскета, рассмотренных выше, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \nabla_x(\mathcal{K}(\varphi, x, t)\nabla_x u) \quad \text{в} \quad Q, \tag{6}$$

где $\mathcal{K} = \dfrac{1}{2}(K^+ + K^- + (K^+ - K^-)\varphi)$, и

$$\varepsilon^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \varepsilon^2\Delta\varphi + \varphi(1-\varphi^2) - \varepsilon^{1+\sigma}\gamma\mathcal{K}(\varphi, x, t)\langle\nabla_x u, \nabla_x\varphi\rangle \quad \text{в} \quad Q \tag{7}$$

соответствуют классической модели Маскета при $0 < \alpha = \sigma < 1$, модели Маскета с аналогом «поверхностного» натяжения $\alpha = \sigma = 1$ и задаче с запирающим давлением при $\alpha = 1$, $0 < \sigma < 1$. Для простоты рассмотрим только случай $\alpha = \sigma$.

Здесь обозначение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ использовано для обозначения скалярного произведения, функции K^+, K^- были введены выше. Начальные и граничные условия задаются соответственно следующим образом:

$$\partial_n u\Big|_\Sigma = u|_\Sigma, \quad u\Big|_{t=0} = U^0(x,\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial n}\varphi\Big|_\Sigma = 0, \qquad \varphi\Big|_{t=0} = \varphi^0(x,\varepsilon), \tag{8}$$

$$u\Big|_\Sigma = u|_\Sigma, \quad u\Big|_{t=0} = U^0(x,\varepsilon), \qquad \varphi\Big|_\Sigma = \varphi_\Sigma(\varepsilon), \quad \varphi\Big|_{t=0} = \varphi^0(x,\varepsilon), \tag{9}$$

где $\varphi\Big|_\Sigma = \operatorname{sign} S\Big|_\Sigma + O(\varepsilon)$,

$$u\Big|_\Sigma = u|_\Sigma, \quad u\Big|_{t=0} = U^0(x,\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial n}\varphi\Big|_\Sigma = 0, \quad \varphi\Big|_{t=0} = \varphi^0(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$\varphi^0(x,\varepsilon) = \chi\frac{S_0(x)}{\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

а начальное условие $U^0(x,\varepsilon)$ является регуляризацией начального условия $U_+^0(x)$, $U_-^0(x)$ задачи Маскета и определяется следующим образом:

$$U^0 = U_0(x) + h_0(x)\chi\frac{S_0(x)}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad U_0 = \frac{1}{2}(\tilde{U}_+^0 + \tilde{U}_-^0),$$

$$h_0 = \frac{1}{2}(\tilde{U}_+^0 - \tilde{U}_-^0).$$

Функции $\tilde{U}_0^\pm$ являются гладкими продолжениями функций $U_\pm^0$ в областях Ω_0^- и Ω_0^+ соответственно. Функция $\chi(\tau)$ определяется как монотонное решение стандартной задачи

$$\chi'' + \chi(1-\chi^2) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^1, \quad \chi \to \pm 1, \quad \tau \to \pm\infty, \tag{11}$$

единственное с точностью до сдвига.

Отметим, что подобные аппроксимации можно привести для эллиптической задачи Маскета. Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 0.1. Функции K^+, K^- таковы, что

$$K^+,\, K^- \in C^\infty(\overline{Q}), \quad K^+,\, K^- \geqslant \mathrm{const} > 0 \quad \text{в} \quad \overline{Q}.$$

Целью статьи является полное качественное и численное описание решений системы параболических уравнений (6)–(8), т.е. построение асимптотических решений, доказательство их устойчивости при L_2-возмущениях и исследование предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. Здесь используются методы и идеи, заимствованные в [2,5,9,12,14,17] для построения формального асимптотического решения и обоснования слабого предела (6)–(7) при $\varepsilon \to 0$.

Функции $u^{\mathrm{as},M}$, $\varphi^{\mathrm{as},M}$ назовем асимптотическим решением задачи (6), (7) порядка M, если

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{\mathrm{as},M} - \nabla_x(\mathcal{K}(\varphi^{\mathrm{as},M})\,\nabla_x u^{\mathrm{as},M}) = \mathcal{F}_u \quad \text{в} \quad Q \tag{12}$$

и

$$\varepsilon^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{\mathrm{as},M} - \varepsilon^2\Delta\varphi^{\mathrm{as},M} - \varphi^{\mathrm{as},M}\Big(1-(\varphi^{\mathrm{as},M})^2\Big) - \\ -\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\mathcal{K}(\varphi^{\mathrm{as},M})\nabla_x\varphi^{\mathrm{as},M}\nabla_x u^{\mathrm{as},M} = \mathcal{F}_\varphi \quad \text{в} \quad Q \tag{13}$$

соответственно.

Предложение 0.1. *Пусть при t, $t \in (0,T)$, существует гладкое решение $U = (U^+, U^-, S)$ классической задачи со свободной границей* (1), (2), (4) (*или* (1), (3), (4)). *Тогда U имеет вид*

$$U = U_0(x,t) + h_0(x,t)H(S(x,t)) \quad \text{в} \quad Q,$$

где U_0, h_0 — гладкие функции в Q, $H(S)=1$, если $S>0$, и $H(S)=-1$, если $S<0$. Пусть справедливо условие 0.1. *Тогда для любого целого $M>0$ существует асимптотическое решение $U_{\mathrm{as},M}(x,t,\varepsilon)$, $\varphi_{\mathrm{as},M}(x,t,\varepsilon)$ для модели* (6)–(8) ($0<\alpha<1$ *или* $\alpha=1$) *порядка $O(\varepsilon^M)$, главный член которого имеет вид*

$$U_{\mathrm{as},M} = \frac{\tilde U^+ + \tilde U^-}{2} + \frac{\tilde U^+ - \tilde U^-}{2}\chi(\tau) + O(\varepsilon) \overset{\mathrm{def}}{=} \\ \overset{\mathrm{def}}{=} U_0(x,t) + h_0(x,t)\chi(\tau) + O(\varepsilon), \quad \tau \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{S(x,t,\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{14}$$

$$\varphi_{\mathrm{as},M} = \chi(\tau) + \varepsilon^\alpha\chi_1(\tau,x) + O(\varepsilon), \tag{15}$$

где функции $\tilde U^\pm$ являются гладкими продолжениями функций $U^\pm$ в области Ω^- и Ω^+ соответственно. Функция $\chi(\tau)$ определяется как решение задачи (11),

$$\tau = \frac{S}{\varepsilon}, \quad S(x,t) = \beta(t + \psi(x) + \varepsilon\psi_1(x)), \quad \beta = \frac{1}{|\nabla_x\psi|},$$

а

$$V_n = \beta = -\left(\mathcal{H}_t + \frac{2\,K^+K^-}{K^+ + K^-}\partial_n U_0\right)\Big|_{t=-\psi} \tag{16}$$

для $\alpha = 1$. Поправка ψ_1 определяется условием ортогональности уравнения в вариациях для (16) (*аналог условия Гиббса—Томсона* [2,4–6,10,11,16]).

Если $0<\alpha<1$, то функция ψ является гладким решением уравнения эйконала

$$V_n = \beta = -\frac{2\,K^+K^-}{K^+ + K^-}\partial_n U_0\Big|_{t=-\psi}. \tag{17}$$

В этом случае поправка ψ_1 определяется уравнением в вариациях для (17). *Более того,*

$$\partial_n h_0 = -\frac{K^+ - K^-}{K^+ + K^-}\,\partial_n U_0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t \tag{18}$$

и

$$\gamma = \left[1 + \frac{1}{6}\frac{(K^+ - K^-)^2}{K^+K^-}\right]^{-1}.$$

Здесь χ_1 является функцией, стабилизирущейся на бесконечности, а именно:

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}\frac{\partial^{k+l}}{\partial\tau^k\partial x^l}\chi_1=0$$

для любых $k,l\geqslant 0$.

Нетрудно видеть, что третье граничное условие задачи Маскета для свободной границы $\Gamma(T)=\{x\in\Gamma_t, t\in(0,T)\}$ является следствием структуры асимптотического решения (14), (15) и соотношений (16)–(18).

Введем следующие параметрические полунормы:

$$J_0(\omega^0,w^0)\overset{\text{def}}{=}\|\omega^0,L_2(\Omega)\|^2+\|w^0,L_2(\Omega)\|^2,$$

$$J_2(\omega^0,w^0)\overset{\text{def}}{=}\Big(\|\varepsilon w^0_x,L_2(\Omega)\|^2+\|\varepsilon\omega^0_x,L_2(\Omega)\|^2+\|w^0,L_2(\Omega)\|^2+\|\omega^0,L_2(\Omega)\|^2\Big)+$$
$$+O_2(T)\bigg[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}^u_1)^2+\frac{\mathcal{F}^2_1}{\varepsilon^{1+\alpha}}\bigg],$$

где

$$(\mathcal{F}^u_1)^2(t)=\int\limits_\Omega\Big((\varepsilon\nabla_x\mathcal{F}_u)^2+\mathcal{F}^2_u\Big)\,dx,$$

$$\mathcal{F}^2_1=\int\limits_\Omega\Big((\varepsilon\nabla_x\mathcal{F}_\varphi)^2+\mathcal{F}^2_\varphi\Big)\,dx,$$

$$\mathcal{F}^2=\max_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega\Big[\varepsilon^\alpha\mathcal{F}^2_u+\varepsilon^{-(1+\alpha)}\mathcal{F}^2_\varphi\Big]\,dx$$

и

$$J_4(\omega^0,w^0)\overset{\text{def}}{=}\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\left(\left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}w^0,L_2(\Omega)\right\|^2+\left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\omega^0,L_2(\Omega)\right\|^2\right)+$$
$$+O_2(T)\bigg[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}^u_3)^2+\frac{\mathcal{F}^2_3}{\varepsilon^{1+\alpha}}\bigg],$$

а

$$(\mathcal{F}^u_3)^2(t)=\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\int\limits_\Omega\left(\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\mathcal{F}_u\right)^2dx,$$

$$\mathcal{F}^2_1=\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\int\limits_\Omega\left(\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\mathcal{F}_\varphi\right)^2dx.$$

Предложение 0.2. *Пусть справедливы условия предложения* 0.1*, более того, потребуем, чтобы*

$$\max_{\Gamma_t}\frac{|K^+-K^-|}{K^++K^-}<\frac{2}{9}(\sqrt{13}-4)$$

и

$$\min_{\Gamma_t}|(K^+-K^-)(U_0)_n|>c_*=$$
$$=\max\left\{c^{(1)}_*\left(\frac{(K^+-K^-|}{K^++K^-}\right),c^{(2)}_*\left(\frac{(K^+-K^-|}{K^++K^-}\right)\max_{\Gamma_t}|K^+-K^-|\right\},$$

где

$$c^{(1)}_*=\left(1-\max_{\Gamma_t}\frac{9}{16}\frac{|b|^2}{a^2\Big(1-\dfrac{|b|}{a}\Big)}\right)^{-1}\frac{54}{535}\frac{\sqrt{2}\gamma|_{\varrho=0}}{\Big(1-\dfrac{|b|}{a}\Big)^2\Big|_{\varrho=0}},$$

$$2b = K^+ - K^-, \quad 2a = K^+ + K^-,$$

и

$$C_*^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \max_{\Gamma_t} \frac{1089}{640}\gamma.$$

Пусть $\alpha = 1$ *или* $1/3 \leqslant \alpha < 1$; $M > 3$, *если* $n = 2, 3$, *и* $M > 2$ *в радиально симметричном случае и в случае* $n = 1$.

Тогда существует гладкое решение

$$u_\varepsilon,\, \varphi_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q), \quad n = 1, \qquad u_\varepsilon,\, \varphi_\varepsilon \in W_2^{4,2}(Q), \quad n = 2, 3,$$

задачи (6)–(8) *со специальными начальными данными*

$$u_\varepsilon\Big|_{t=0} = u_{\mathrm{as},M}\Big|_{t=0} + \omega^0(x,\varepsilon), \qquad \varphi_\varepsilon\Big|_{t=0} = \varphi_{\mathrm{as},M}\Big|_{t=0} + w^0(x,\varepsilon)$$

такое, что

$$\varepsilon^{-3/2} J_0 = \varepsilon^{-3/2}\Big[\|\omega^0, L_2(\Omega)\| + \|w^0, L_2(\Omega)\|\Big] = o(\varepsilon),$$

и дополнительно для $n = 1$ (*и в радиально-симметричном случае*)

$$J_2(\omega^0, w^0) = o(\varepsilon)\varepsilon^{3-\alpha}, \quad o(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

для $n = 2, 3$ *потребуем, чтобы*

$$J_4(\omega^0, w^0) = o(\varepsilon)\varepsilon^{7-\alpha}.$$

Тогда

$$\max_{\Omega}\Big\{|u^\varepsilon - u_{\mathrm{as},M}| = o(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha},\, |\varphi^\varepsilon - \varphi_{\mathrm{as},M}|\Big\} = o(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha} \tag{19}$$

для всех $t \in (0, T)$.

Ниже приводится определение слабого решения регуляризованной задачи (6)–(8), позволяющее получить как предел при $\varepsilon \to 0$ некоторое понятие слабого решения предельных задач, рассмотренных выше. Более того, предъявляемые предложением 0.2 решения задачи (6)–(8) позволяют осуществить этот предельный переход.

Определение 0.1. Две функции $u \in L^2(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $\varphi \in W^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ называются слабым решением допредельной задачи (6)–(8), если для любых гладких функций g, G таких, что

$$g = 0, \quad G = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{и} \quad g = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{20}$$

функции u и φ удовлетворяют интегральным неравенствам

$$\int\limits_Q [u^\varepsilon g_t - \mathcal{K}\nabla_x u^\varepsilon \nabla_x g]\, dx\, dt = \int\limits_\Omega u_0^\varepsilon(x)\, g(x,0)\, dx \tag{21}$$

и

$$\begin{gathered}\varepsilon^\alpha \int\limits_Q [\varphi_t^\varepsilon - \mathcal{K}\langle \nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \varphi^\varepsilon\rangle]\langle G, \nabla_x \varphi^\varepsilon\rangle\, dx\, dt = \\ = \int\limits_Q \operatorname{div} G\, e_t\, dx\, dt - \varepsilon \int\limits_Q \langle G_x \nabla_x \varphi^\varepsilon, \nabla_x \varphi^\varepsilon\rangle\, dx\, dt\end{gathered} \tag{22}$$

для $0 < \alpha < 1$ и $\alpha = 1$ соответственно, где

$$e_t = \varepsilon|\nabla_x \varphi^\varepsilon|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(1 - (\varphi^\varepsilon)^2)^2.$$

Применим это определение слабого решения регуляризованной задачи. Будет доказано, что можно выбрать подпоследовательность из множества решений u^ε, φ^ε, построенных выше, так что при $\varepsilon \to 0$ в качестве предела (21)–(22) получим слабую формулировку предельной задачи (1)–(4).

Определение 0.2. Две меры μ_t, $\overline{\mu^1}_t$ и BV-функция $U(x,t)$ называются слабым решением задачи (1)–(4), если

$$U(x,t) = \mathrm{BV} - \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t)$$

для некоторой подпоследовательности u_ε, где u^ε, φ^ε — решения допредельной задачи (6)–(8), и существуют области $\Omega_t \subset \Omega$, $0 < t < T$, типа Каччополи с редуцированной границей Γ_t, $0 < t < T$, являющейся носителем меры $\mu_t = |D_x H_t|$, где H_t — характеристические функции Ω_t, такие, что

$$\int\limits_A d\mu = w - \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_A \varepsilon |\nabla_x \varphi_\varepsilon|^2 \, dx$$

для любой подобласти $A \in \Omega$. Векторная мера $\overline{\mu^1}_t$

$$\int\limits_A d\overline{\mu^1}_t = w - \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_A \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\varphi_\varepsilon \nabla_x \varphi_\varepsilon \, dx$$

такая, что производная Радона

$$\frac{d\overline{\mu^1}_t}{d\mu_t} = V_n(x,t)\,\overline{n}(x,t)$$

почти всюду для $t \in (0,T)$. Функцию $V_n \in L^\infty(\Omega, d\mu_t)$ можно назвать обобщенной нормальной скоростью. Вектор $\overline{n}(x,t)$ определяет вектор внешней нормали к Ω_t. Семейство μ_t, $\overline{\mu^1}_t$, $U(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \left\{ \int\limits_\Omega \Big[U g_t - K\, \nabla_x U \nabla_x g)\, dx \Big] \right\} dt - \int\limits_\Omega U_0(x)\, g(x,0)\, dx = 0, \tag{23}$$

где

$$K(x,t) = K^-(x,t) \quad \text{на} \quad \Omega_t, \qquad K(x,t) = K^+(x,t) \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \Omega_t,$$

и

$$\int\limits_Q [V_n - K\langle \nabla_x U, \overline{n}\rangle] \langle G, \overline{n}\rangle \, d\mu_t \, dt = 2 \int\limits_Q \operatorname{div} G \, d\mu_t \, dt -$$
$$- \int\limits_Q \langle G_x \overline{n}, \overline{n}\rangle d\mu_t \, dt = 0 \tag{24}$$

для любых g, G, для которых справедливо (20), если $\alpha = 1$, и

$$\int\limits_Q [V_n - K\langle \nabla_x U, \overline{n}\rangle] \langle G, \overline{n}\rangle \, d\mu_t \, dt = 0, \tag{25}$$

если $1/3 < \alpha < 1$.

Нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 0.3. *Пусть выполнены условия предложений* 0.1 *и* 0.2. *Тогда существует подпоследовательность решений задачи* (6)–(8), *построенных в предложении* 0.2, *для которой существуют пределы при* $\varepsilon \to 0$ *в интегральных тождествах* (21), (22) *определения* 0.1, *дающие интегральные тождества* (23), (24) *или* (23), (25) *слабого решения* $U = (U^+(x,t), U^-(x,t))$, $S(x,t)$ *предельной задачи* (1)–(4) *для* $\alpha = 1$ *и* $1/3 < \alpha < 1$ *соответственно, так что области* $\Omega_t \in \Omega$, $0 < t < T$, *типа Качопполи совпадают с областями* $\{x \in \Omega,\, S(x,t) < 0\}$, *рассмотренными в начале статьи, редуцированная граница которых совпадает с* $\Gamma_t = \{x \in \Omega,\, S = 0,\, 0 < t < T\}$.

Результаты проведенного численного эксперимента подтвердили точность выбранной гладкой аппроксимации на тестовой предельной радиально симметричной задаче Маскета на плоскости. Кроме того, они ставят много новых проблем в обосновании решений типа волновых поездов, описания их аннигиляции и выявления различий поведения волновых поездов для случаев $\alpha = 1$ и $0 < \alpha < 1$. Последнее связано с различием предельных задач при $\varepsilon \to 0$ в этих случаях. В последующих работах автор намерен привести результаты численного эксперимента.

1. Задача Маскета. Асимптотическое решение

Приведем схему доказательства предложения 0.1, отсылая за подробностями к [13]. Положим

$$\varphi^{\mathrm{as},1} = \chi\frac{S(x,t)}{\varepsilon} + \varepsilon^{\alpha}\chi_{\alpha}\frac{S(x,t)}{\varepsilon, x}, \tag{1.1}$$

$$u^{\mathrm{as},1} = q\frac{S(x,t)}{\varepsilon, x, t} + \varepsilon q_1\frac{S(x,t)}{\varepsilon, x, t}, \tag{1.2}$$

$$S(x,t) = \beta(x)(t+\psi(x)), \quad \beta = \frac{1}{|\nabla_x\psi|},$$

где функция χ определена выше, и функции χ_j, q_j — стабилизирующиеся функции, т.е.

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}\frac{\partial^{k+l}}{\partial\tau^k\partial x^l}(q_j - q_j^{\pm}) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\pm\infty} q_j = q_j^{\pm} \tag{1.3}$$

для любых $k, l \geqslant 0$. Предположим, что

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}\mathcal{K}\partial_n q = -V_n, \qquad q' = \frac{d}{d\tau}q = 0, \quad \text{если} \quad \tau = 0, \tag{1.4}$$

где $\partial_n = S_x\nabla_x$, $\tau = S/\varepsilon$, V_n — нормальная скорость. Подставляя (φ, u) в уравнения (6), (7), получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\beta q' = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\mathcal{K}q'' + \frac{1}{2}(K^+ - K^-)\chi' q'\right] +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(\partial_n\mathcal{K}q' + 2\partial_n q'\mathcal{K} + \frac{1}{2}(K^+ - K^-)\chi'\partial_n q + q_1''\right) + \mathcal{K}\Delta q + 2\mathcal{K}_x q_x. \tag{1.5}$$

Используем формулу Тейлора; тогда

$$\frac{1}{2\varepsilon^2}(K^+ - K^-)\chi' q' = \frac{1}{2\varepsilon}(K^+ - K^-)\chi'\partial_n q'\tau + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}[(\mathcal{K}\tau\partial_n q')' - \mathcal{K}(\partial_n q' + \partial_n q''\tau)] + O(1),$$

и

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{K}q'' = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{K}\partial_n q''\tau + O(1).$$

Отсюда можно получить основное соотношение для определения q_1:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[q_1'' + \frac{1}{2}(K^+ - K^-)(\chi'\partial_n q + \chi'\partial_n q'\tau)\right] = O(1).$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{2}(K^+ - K^-)\chi'\partial_n q'\tau = \frac{1}{2}(K^+ - K^-)\Big[(\chi\partial_n q'\tau)' - \partial_n q''\tau - \partial_n q'\Big],$$

отсюда

$$\frac{1}{\varepsilon}\{(\mathcal{K}q_1')' + (\mathcal{K}\partial_n q + V_n)'\} = O(1).$$

Пусть

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}(\mathcal{K}\partial_n q\,\big|_{t=-\psi} + V_n) = 0, \tag{1.6}$$

$q = U_0 + h_0\chi$, где $h_0 = 0$ на Γ_t. Отсюда получаем

$$\partial_n(h_0)\,\Big|_{t=-\psi} = -\frac{K^+ - K^-}{K^+ + K^-}\partial_n(U_0)\,\Big|_{t=-\psi} \tag{1.7}$$

и

$$\mathcal{K}\,\Big|_{t=-\psi}\, q_1' + \frac{(K^+ - K^-)^2}{\sqrt{2}(K^+ + K^-)}\,\Big|_{t=-\psi}\, \chi' = O(1).$$

Это позволяет выбрать $q_1 = c_0\chi + A_1$, где

$$c_0 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\mathcal{K}\frac{(K^+ - K^-)^2}{\sqrt{2}(K^+ + K^-)}\right)\Big|_{t=-\psi}\,\chi'\right]d\tau$$

и

$$q_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left[\left(\mathcal{K}\frac{(K^+ - K^-)^2}{\sqrt{2}(K^+ + K^-)}\right)\Big|_{t=-\psi}\,\chi' - c_0\chi'\right]d\tau.$$

Отсюда следует, что так же, как в [13], функции U_0, h_0 для задачи Стефана можно определить следующим образом:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\tilde{U}^0_+ + \tilde{U}^0_-), \qquad h_0 = \frac{1}{2}(\tilde{U}^0_+ - \tilde{U}^0_-),$$

где функции $\tilde{U}_0^{\pm}$ являются гладкими продолжениями функции $U^0_{\pm}$ на областях Ω_0^- и Ω_0^+ соответственно.

Подставляя u, φ в уравнение (7), получим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^\alpha\beta\chi' - \varepsilon\big(\chi_1'' - (1-\chi^2)\chi_1\big) - 2\varepsilon(\chi'\tau)'\nabla_x\beta\nabla_x\psi - \varepsilon\nabla_x(\beta\nabla_x\psi)\chi' = \\
&= \varepsilon^\alpha(\beta + \gamma\,|_{t=-\psi}\,V_n)\chi' + \varepsilon^\alpha\gamma\,|_{t=-\psi}\left(\frac{1}{2}(K^+ - K^-)\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau - \right.\\
&\left. - \frac{(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau\chi - \frac{(U_0)_n(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\chi'(\chi^2 - 1)\right) + \\
&+ \gamma\varepsilon^\alpha\mathcal{K}\Big[\chi' q' + \mathcal{K}\chi'\partial_n q\Big] + O(\varepsilon^{1+\alpha}).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь использовался тот факт, что χ является решением уравнения (11). Положим

$$\begin{aligned}
a_1 = &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}(K^+ - K^-)\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau - \frac{(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}(\chi')^2\tau\chi - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{\partial_n(U_0)(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\chi'(\chi^2 - 1)\right)\Big|_{t=-\psi}\,\chi'\right]d\tau\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\chi')^2\,d\tau\right)^{-1} \overset{\text{def}}{=} \\
&\overset{\text{def}}{=} \gamma\frac{1}{2}(K^+ - K^-)\partial_n(U_0)\,\Big|_{t=-\psi}\, J_1 + \gamma\frac{(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\partial_n(U_0)\,\Big|_{t=-\psi}\, J_2 + \\
&+ \gamma\frac{\partial_n(U_0)(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\,\Big|_{t=-\psi}\, J_3,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}[(\chi')^3\tau\chi]\,d\tau = \frac{1}{6}J_3, \qquad J_3 = \sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(\chi')^3]\,d\tau = \frac{2}{3}.$$

В случае $0 < \alpha < 1$ положим

$$\beta + \gamma\,\Big|_{t=-\psi}\,(V_n + a_1) = 0 \tag{1.10}$$

и определим

$$\gamma = \left[1 + \frac{K^+ + K^-}{2K^+K^-}\left(-\frac{(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}(J_3 - J_2)\right)\right]^{-1} = \left[1 + \frac{5\sqrt{2}}{9}\frac{(K^+ - K^-)^2}{4K^+K^-}\right]^{-1}. \tag{1.11}$$

Затем посредством определения функции γ на фронте Γ_t и соотношения (1.7) получим, что условие (2) введения следует из (1.10). В этом случае уравнение

$$\chi_1'' + (1 - \chi^2)\chi_1 = a_1\chi' - \gamma\,\big|_{t=-\psi}\left[\frac{1}{2}(K^+ - K^-)\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau\chi - \frac{\partial_n(U_0)(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\chi'(1 - \chi^2)\right]$$

имеет единственное решение χ_1 типа солетона такое, что

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}\chi_1 = 0.$$

В случае $\alpha = 1$ положим

$$\beta + \gamma\,\big|_{t=-\psi}(V_n + a_1) = -(\mathcal{H}_t)_{t=-\psi} = -\nabla_x(\beta\nabla_x\psi) \tag{1.12}$$

и определим функцию γ так же, как и в (1.11). Тогда уравнение

$$\chi_1'' - (1 - \chi^2)\chi_1 = 2(\chi'\tau)'\nabla_x\beta\nabla_x\psi + a_1\chi' - \gamma\,\big|_{t=-\psi}\left[\frac{1}{2}(K^+ - K^-)\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\partial_n(U_0)(\chi')^2\tau\chi - \frac{\partial_n(U_0)(K^+ - K^-)^2}{2(K^+ + K^-)}\chi'(1 - \chi^2)\right] \tag{1.13}$$

также имеет единственное решение χ_1 типа солетона, и, таким образом, выполнено условие ортогональности. Подобным образом можно продолжать этот процесс построения асимптотического решения. Отсюда следует желаемый результат.

2. Задача Маскета. Априорная оценка

Предложение 0.2 доказываем методом Галеркина. Решение задачи ищем в виде

$$u = u_{\mathrm{as},M} + w, \qquad \varphi = \varphi_{\mathrm{as},M} + \omega,$$

так что

$$\varepsilon^{1+\alpha}\omega_t = \varepsilon^2\Delta\omega - 2\omega + 3(1 - \varphi_{\mathrm{as},M}^2)\omega - 3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega^2 - \omega^3 +$$
$$+ \mathcal{F}_\varphi - \varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big(\mathcal{K}w_x\omega_x + (\varphi_{\mathrm{as},M})_x[\mathcal{K}w_x + (u_{\mathrm{as},M})_x b\omega]\Big) \quad \text{в} \quad Q \tag{2.1}$$

и

$$\varepsilon^{1+\alpha}w_t = \varepsilon^{1+\alpha}\nabla_x(\mathcal{K}\nabla_x w) + \varepsilon^{1+\alpha}\nabla_x(b\omega\nabla_x u_{\mathrm{as},M}) + \mathcal{F}_u \quad \text{в} \quad Q, \tag{2.2}$$

где, в силу свойств асимптотического решения,

$$\mathcal{F}_\varphi = O(\varepsilon^M), \qquad \mathcal{F}_u = O(\varepsilon^{M-1+\alpha}) \quad \text{в} \quad Q.$$

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением условия Дирихле (9):

$$\omega\,\big|_\Sigma = w\,\big|_\Sigma = 0, \qquad \omega\,\big|_{t=0} = w\,\big|_{t=0} = 0.$$

Проводимые ниже построения без труда переносятся на случай начально-краевых условий (8) и (10):

$$\partial_n\omega\,\big|_\Sigma = \partial_n w\,\big|_\Sigma = 0, \qquad \omega\,\big|_{t=0} = w\,\big|_{t=0} = 0$$

или соответственно

$$\partial_n\omega\,\big|_\Sigma = w\,\big|_\Sigma = 0, \qquad \omega\,\big|_{t=0} = w\,\big|_{t=0} = 0.$$

Обозначим через $y_j = y_j(x)$ собственные функции оператора Лапласа в Ω

$$\Delta y_j\Big|_{\partial\Omega} = -\lambda_j\, y_j\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для фиксированного $m \geqslant 1$ рассмотрим приближенное решение задачи в форме

$$\omega_m = \sum_{j=1}^{m} \omega_{j,m}(\tau)\, y_j, \qquad w_m = \sum_{j=1}^{m} w_{j,m}(\tau)\, y_j,$$

где $\omega_{j,m}$, $w_{j,m}$ определяются условиями

$$\varepsilon^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(w_m, y_j) - \varepsilon^{1+\alpha}\big(\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)\, w_{mx}, y_{jx}\big) - \varepsilon^{1+\alpha}(b\omega_m(u_{\mathrm{as},M})_x, y_{jx}) = (\mathcal{F}_u, y_j) \tag{2.3}$$

и

$$\begin{gathered}\varepsilon^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\omega_m, y_j) = \varepsilon^2(\omega_{mx}, y_{jx}) - 2(\omega_m, y_j) + 3\Big((1-\varphi^2_{\mathrm{as},M})\omega_m - \\ -3(\varphi_{\mathrm{as},M}\omega_m^2 - \omega_m^3), y_j\Big) + (\mathcal{F}_\varphi, y_j) + \varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big(\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)u_{mx}\omega_{mx} + \\ +(\varphi_{\mathrm{as},M})_x[\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)w_{mx} + u_{\mathrm{as},M}b\omega_m], y_j\Big), \quad j=1,\ldots,m;\end{gathered} \tag{2.4}$$

здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Дополним систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) следующими начальными условиями:

$$\omega_m\,\big|_{\tau=0} = \omega_m^0, \quad \omega_m^0 = \sum_{j=1}^{m}\omega_{j,m}(0)\, y_j \to \omega^0 \quad \text{при} \quad m\to\infty \quad \text{в} \quad L_2(\Omega),$$

$$w_m\,\big|_{\tau=0} = w_m^0, \quad w_m^0 = \sum_{j=1}^{m}w_{j,m}(0)\, y_j \to w^0 \quad \text{при} \quad m\to\infty \quad \text{в} \quad L_2(\Omega).$$

Теорема Пикара—Линделёфа утверждает, что существует классическое решение задачи (2.3), (2.4) на определенном интервале $[0,\tau_m]$, $\tau_m \leqslant T$. Здесь T — время существования построенного выше асимптотического решения, т.е. время существования классического решения задачи Маскета со свободной границей (1)–(4). Для доказательства разрешимости задачи на конечном интервале времени, не зависящем от ε, получим априорные оценки. Умножая уравнение (2.3) на $w_{j,m}$, уравнение (2.4) на $\omega_{j,m}$ и суммируя по j, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\varepsilon^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\|w_m, L_2\|^2 + \varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_\Omega \mathcal{K}w_{mx}^2\,dx = \\ = \varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_\Omega b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\, w_{mx}\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{F}_u\, w_m\,dx\end{gathered} \tag{2.5}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\varepsilon^{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\|\omega_m, L_2\|^2 + \varepsilon^2\int\limits_\Omega \omega_{mx}^2\,dx + 2\|\omega_m, L_2\|^2 + \int\limits_\Omega \omega_m^4\,dx = \\ = 3\int\limits_\Omega (1-(\varphi_{\mathrm{as},M})^2)\omega_m^2\,dx - 3\int\limits_\Omega \varphi_{\mathrm{as},M}\omega_m^3\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{F}_\varphi\omega_m\,dx + \\ +\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_\Omega \gamma\Big(\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)w_{mx}((\varphi_{\mathrm{as},M})_x + \omega_{mx})\omega_m + \\ +(u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)\omega_m\omega_{mx} + b\omega_m^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\Big)\,dx;\end{gathered} \tag{2.6}$$

здесь и ниже $\|\cdot, L_2\|$ обозначает норму в $L_2(\Omega)$.

2.1. Априорные оценки типа Фридрихса. Определим условия на функции

$$\mathcal{F}_u,\ \mathcal{F}_\varphi,\ \omega_0,\ w_0,$$

при которых решение задачи (2.3), (2.4) остается малым в течение конечного (не зависящего от ε) времени T. Подчеркнем, что, в отличие от работы Х. Чена [11], здесь исследуется полная (нелинейная) проблема устойчивости. Кроме того, в отличие от анализа спектра линеаризованной задачи, проведенного в [11], развивается подход, основанный на энергетических неравенствах.

В ситуации, когда возмущение ω обращается в нуль на фиксированной границе, энергетический метод получения априорной оценки был развит Бергером и Френкелем [8]. Однако метод этой работы в данной ситуации непосредственно не применим, так как функция ω_m в системе (2.6) не обращается, вообще говоря, в нуль на фронте. Более того, из [8] следует, что линейная часть уравнения (2.4) ($\alpha = 1$), отвечающая уравнению Семенова, имеет в спектре минимальное собственное число $\sim O(\varepsilon^2)$, знак которого, вообще говоря, априори не известен. Влияние на спектр членов

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\big[\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega)u_x\omega_x + (\varphi_{\mathrm{as},M})_x(\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega)w_x + u_{\mathrm{as},M}b\omega)\big]$$

линеаризованного уравнения для фазовой функции также априори не известно. С другой стороны, наличие множителя $\varepsilon^{1+\alpha}$ при производной по t приводит к тому, что при конечном времени (не зависящем от ε) вклад собственной функции, отвечающей первому собственному значению $\sim O(\varepsilon^2)$, в решение оказывается существенным. Эта собственная функция — четная относительно свободной границы «в главном», и поэтому метод работы [8] в данном случае не применим.

Для того чтобы получить обобщение метода Бергера—Френкеля, естественно представить функцию ω в некоторой симметричной относительно Γ_t окрестности Q_* для Γ_t в виде суммы четной и нечетной функций.

Для нечетной части используем идеи работы Бергера—Френкеля, обобщая их на нелинейную задачу.

Для учета вклада четной части и корреляции четной и нечетной частей, возникающей за счет нелинейности, разбиваем симметричную окрестность Γ_t на симметричные полоски ширины $\sigma\varepsilon$ (σ — достаточно малое число), в каждой из которых представляем решение в виде

$$\omega = c_\omega\chi'\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)(\sqrt{\varepsilon})^{-1} + y_\omega, \qquad w = c_w\chi'\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)(\sqrt{\varepsilon})^{-1} + y_w,$$

где функции c_ω-переменных, c_w-касательных к Γ_t, и функции y_ω, y_w ортогональны в $L_2(Q_*)$ к функции $\chi'(S/\varepsilon)$ в полоске. Это представление соответствует выделению из ω и w частей, ортогональных «в главном» собственной функции, отвечающей минимальному собственному числу. По построению (так как $\chi' > 0$) функции y_ω, y_w обращаются в нуль внутри каждой полоски, что позволяет применить метод, использованный при оценке вклада нечетной функции.

Считаем, что фаза $S(x,t)$ гладко продолжена в некоторую симметричную относительно фронта Γ_t окрестность $Q_t^0 \subset \Omega$, $Q_{\delta_0} = \{x \in \Omega; |\varrho| \leqslant \delta_0\}$, в которой существует система координат $\varrho = S(x,t)$, μ, где μ — некоторая система координат на Γ_t, $dx = F(\varrho,\mu)d\varrho d\mu$. Достаточно малая постоянная δ_0, не зависящая от ε, такая, что

$$W''(\chi) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus Q_t^0,$$

будет определена ниже. Положим в этой окрестности

$$\nabla_\Gamma = \nabla_x - \frac{\nabla_x\varrho}{|\nabla_x\varrho|}\left\langle\frac{\nabla_x\varrho}{|\nabla_x\varrho|}, \nabla_x\right\rangle, \qquad \nabla_n = \frac{\nabla_x\varrho}{|\nabla_x\varrho|}\left\langle\frac{\nabla_x\varrho}{|\nabla_x\varrho|}, \nabla_x\right\rangle.$$

Очевидно, оператор ∇_Γ является градиентом по касательным переменным на Γ_t, и

$$\langle\nabla_\Gamma f, \nabla_n f\rangle = 0, \qquad |\nabla_x f|^2 = |\nabla^\Gamma f|^2 + |\nabla^n f|^2,$$

$$\nabla_n f = |\nabla_x\varrho|\frac{\partial}{\partial\varrho}f, \qquad |\nabla_x\varrho| = \left|\nabla_x\left(\frac{t+\psi}{|\nabla_x\psi|}\right)\right| = 1 + O(t+\psi)$$

для любой гладкой функции f.

Справедлива следующая априорная оценка.

Предложение 2.1. *Для любой функции*

$$\omega \in C((0,T), W_2^1(\Omega) \cap L_4(\omega))$$

имеем

$$\int\limits_{\Omega} \Big[(\varepsilon\nabla_x\omega)^2 + W''(\varphi_{\mathrm{as},M})\omega^2 + 3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega^3 + \omega^4 -$$
$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big((u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega)\omega\omega_x + b\omega^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\Big)\Big]\,dx \geqslant$$
$$\geqslant c_0 \int\limits_{\Omega\setminus Q_t^0} \omega^2\,dx + \int\limits_{Q_t^0} \Big(c_1\varepsilon^\alpha\chi'\omega_e^2 + c_1\omega_o^2 - O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega^2\Big)\,dx -$$
$$-C_0\Big[\varepsilon^{-2n/(4-n)}\Big(\|\omega_o, L_2(Q_{\delta_0})\|^2 + \|y_\omega, L_2(Q_t^0)\|^2\Big)^{(6-n)/(4-n)} -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^3}\|\omega_o, L_2(Q_t^0)\|^4 - \varepsilon^{-2n/(4-n)}\|\omega, L_2(\Omega\setminus Q_t^0)\|^{2(6-n)/(4-n)}\Big], \tag{2.7}$$

где ω_e и ω_o — соответственно четная и нечетная относительно фронта Γ_t части функции ω.

Прежде, чем переходить к доказательству этого утверждения, сделаем ряд упрощений. Во-первых, покажем достаточность исследования этой оценки для гладких функций с носителем в области Q_t^0. Для этого введем срезающую функцию $\alpha_0 \in C_0^\infty(Q_t^0)$, где

$$\alpha_0(x) = \alpha\Big(\frac{S}{\delta_0}\Big), \qquad \alpha \in C_0^\infty(-1,1), \quad \alpha(s) \equiv 1 \quad \forall s \in \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big),$$

и разбиение единицы $\alpha_1 = \alpha_0^2$, $\alpha_2 = (1-\alpha_0^2)$ в области Ω. Положим $\omega_1 = \alpha_1\omega$, $\omega_2 = \alpha_2\omega$. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Omega} \big(\varepsilon\nabla_x\omega\big)^2\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \Big[\big(\varepsilon\nabla_x\omega_1\big)^2 + \big(\varepsilon\nabla_x\omega_2\big)^2\Big]\,dx - \varepsilon^2\int\limits_{\Omega}\Big(\big(\nabla_x\alpha_1\big)^2 + \big(\nabla_x\alpha_1\big)^2\Big)\omega^2\,dx.$$

Также получим

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega} \gamma\mathcal{K}(u_{\mathrm{as},M})_x(\omega_1)_x\omega_1 dx \geqslant -O(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}\Big[(\varepsilon(\omega_1)_x)^2 + \omega_1^2\Big]\,dx -$$
$$-\int\limits_{\Omega}\Big\{\delta_2\omega_1^4 + C_{\delta_2}\chi'\varepsilon^{2\alpha}\omega_1^2 + C_1\varepsilon^\alpha\Big((\varepsilon(\omega_2)_x)^2 + \omega_2^2\Big) + O(\varepsilon^{1+\alpha})\Big((\varepsilon(\omega_1)_x)^2 + \omega_1^2\Big)\Big\}\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}(\gamma F)|_{\varrho=0}(a|_{\varrho=0} + b|_{\varrho=0}\chi)\Big((U_0)_n|_{\varrho=0} + (h_0)_n|_{\varrho=0}(\chi+\chi'\tau)\Big)(\omega_1^2)_\varrho\,d\mu\,d\varrho.$$

Здесь использовано то, что

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega} \gamma\, b\omega(u_{\mathrm{as},M})_x(\omega_1)_x\omega_1\,dx \geqslant$$
$$\geqslant -\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}\gamma\, b\omega_2(u_{\mathrm{as},M})_x(\omega_1)_x\omega_1\,dx - \frac{1}{3}\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}\gamma\, b(u_{\mathrm{as},M})_x(\omega_1^3)_x\,dx \geqslant$$
$$\geqslant -C_1\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}\big[(\varepsilon(\omega_2)_x)^2 + \omega_2^2 + \omega_1^4 + O(\varepsilon^{1+\alpha})\big((\varepsilon(\omega_1)_x)^2 + \omega_1^2\big)\big]\,dx -$$
$$-\frac{1}{3}\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}\big[(\gamma F b)|_{\varrho=0}(U_0)_n|_{\varrho=0} + (h_0)_n|_\varrho(\chi+\chi'\tau)(\omega_1^3)_\varrho\big]d\mu d\varrho.$$

Далее,

$$-\frac{1}{3}\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}\left[(\gamma Fb)|_{\varrho=0}(U_0)_n|_{\varrho=0}+(h_0)_n|_{\varrho}(\chi+\chi'\tau)(\omega_1^3)_{\varrho}\right]d\mu\,d\varrho\geqslant$$
$$\geqslant-\int\limits_{\Omega}\left[\delta_2\omega_1^4+C_{\delta_2}\chi'\varepsilon^{2\alpha}\omega_1^2\right]d\mu\,d\varrho.$$

Рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}(\gamma F)|_{\varrho=0}(a|_{\varrho=0}+b|_{\varrho=0}\chi)\big((U_0)_n|_{\varrho=0}+(h_0)_n|_{\varrho=0}(\chi+\chi'\tau)\big)(\omega_1^2)_{\varrho}\,d\mu\,d\varrho\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Omega}(\gamma F)|_{\varrho=0}\big(a|_{\varrho=0}(h_0)_n|_{\varrho=0}(\chi'+(\chi'\tau)')\big)+b|_{\varrho=0}\chi'\big((U_0)_n|_{\varrho=0}+$$
$$+(h_0)_n|_{\varrho=0}(\chi+\chi'\tau)\big)(\omega_1^2)\,d\mu\,d\varrho-O(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}\omega_1^2\,dx.$$

Из свойств асимптотического решения следует

$$a|_{\varrho=0}(h_0)_n|_{\varrho=0}(\chi'+(\chi'\tau)')+b|_{\varrho=0}\chi'\big((U_0)_n|_{\varrho=0}+(h_0)_n|_{\varrho=0}(\chi+\chi'\tau)\big)=$$
$$=-(b(U_0)_n)|_{\varrho=0}\left[\chi'(1-\sqrt{2}\tau\chi)+\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)\right].$$

Таким образом, имеем

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}\gamma(u_{\mathrm{as},M})_x\left[\mathcal{K}(\omega_1)_x\omega_1+b(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\omega^2\right]dx\geqslant$$
$$\geqslant-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\left[\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)+\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)\right]\omega_1^2\,d\mu\,d\varrho-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\left[\delta_2\omega_1^4+C_{\delta_2}\chi'\varepsilon^{2\alpha}\omega_1^2+C_1\varepsilon^{\alpha}\Big((\varepsilon(\omega_2)_x)^2+\omega_2^2\Big)+O(\varepsilon^{1+\alpha})\Big((\varepsilon(\omega_1)_x)^2+\omega_1^2\Big)\right]dx.$$

Также получим

$$3\int\limits_{\Omega}\varphi_{\mathrm{as},M}\omega^3\,dx\geqslant-\int\limits_{\Omega}\left[\delta_1(\omega_1^4+\omega_2^4)+O(\varepsilon^2)\omega^2\right]dx+$$
$$+3\int\limits_{\Omega}\chi(\alpha_1\omega_1^3+\alpha_2\omega_2^3)\,dx+3\int\limits_{\Omega}(\alpha_2\omega_2\omega_1^2+\alpha_1\omega_1\omega_2^2)\,dx.$$

Окончательно

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(\varepsilon\nabla_x\omega)^2+W''(\varphi_{\mathrm{as},M})\omega^2+3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega^3+\omega^4-$$
$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\big((u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega)\omega\omega_x+b\omega^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\big)\Big]dx\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Omega}\left[(1-O(\varepsilon^{1+\alpha}))(\varepsilon\nabla_x\omega_1)^2+\big(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1\big)\omega_1^2+3\chi\alpha_1\omega_1^3+(1-\delta_2)\omega_1^4-C_{\delta_2}\chi'\varepsilon^{2\alpha}\omega_1^2\right]dx-$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\left[\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)+\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)\right]\omega_1^2\,d\mu\,d\varrho+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\big((1-O(\varepsilon\alpha))(\varepsilon\nabla_x\omega_2)^2+(c_0-\delta_2)\omega_2^2+(1-\delta_2)\omega_2^4\big)\,dx-O(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}\omega^2\,dx+$$

$$+3\int\limits_{\Omega}\chi\big(\alpha_2\omega_2^3+\alpha_2\omega_2\omega_1^2+\alpha_1\omega_1\omega_2^2\big)\,dx. \tag{2.8}$$

Теперь представим функцию в виде $\omega_1=(\omega_1)_o+(\omega_1)_e$, где $(\omega_1)_o$ и $(\omega_1)_e$ — соответственно нечетная и четная относительно фронта Γ_t части функции ω_1 с носителем в области Q_t^0. Тогда

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\bigg[\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)+\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)\omega_1^2\bigg]\,d\mu\,d\varrho=$$

$$=-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)\big[(\omega_1)_o^2+(\omega_1)_e^2\big]\,d\mu\,d\varrho-$$

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)(\omega_1)_o(\omega_1)_e\,d\mu\,d\varrho.$$

Очевидно, что

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\bigg[\frac{1}{2}\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)(\omega_1)_o^2\bigg]\mu d\varrho\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)(\omega_1)_o(\omega_1)_e\,d\mu\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant-\delta_2\int\limits_{\Omega}(\omega_1)_o^2\,dx-C_{\delta_2}\varepsilon^{2\alpha}\int\limits_{\Omega}\chi'(\omega_1)_e^2\,dx$$

и

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(1-O(\varepsilon^{1+\alpha}))(\varepsilon\nabla_x\omega_1)^2+\big(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1\big)\omega_1^2+3\chi\alpha_1\omega_1^3+(1-\delta_1)\omega_1^4-C_{\delta_2}\chi'\varepsilon^{2\alpha}\omega_1^2\Big]\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\bigg[\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)+\frac{b}{a}\chi'(\chi+\chi'\tau)\omega_1^2\bigg]\,d\mu\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Omega}(\varepsilon\nabla_{\Gamma_t}\omega_1)^2\,dx+\int\limits_{\Omega}\bigg[(1-\delta_3)\bigg(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1)_o\bigg)^2+\big(W''(\chi)-\delta_3\big)(\omega_1)_o^2+3\chi\alpha_1(\omega_1)_o^3+$$

$$+(1-\delta_1)(\omega_1)_o^4-O_{\delta_3}(\varrho^2)(\omega_1)_o^2-\bigg]F\,\bigg|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho+\int\limits_{\Omega}\Big[\varrho_x^2(1-O(\varepsilon^2))\big[\varepsilon((\omega_1)_e)_\varrho)\big]^2+$$

$$+(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1)(\omega_1)_e^2+(1-\delta_1)(\omega_1)_e^4-O_{\delta_3}(\varrho^2)(\omega_1)_e^2-C_{\delta_2}\varepsilon^{2\alpha}\chi'(\omega_1)_e^2\Big]\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}\big(\gamma bF(U_0)_n\big)|_{\varrho=0}\,\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)(\omega_1)_e^2\,d\mu\,d\varrho-$$

$$-O_{\delta_2}(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}\omega_1^2\,dx+9\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1(\omega_1)_e^2(\omega_1)_o\,dx.$$

Здесь использованы неравенства

$$2\int\limits_{\Omega}\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1)_o\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1)_e\,dx\geqslant-\delta_3\int\limits_{\Omega}\bigg(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1)_o\bigg)^2F\bigg|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho-O_{\delta_3}(\varepsilon^2)\int\limits_{\Omega}\bigg(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1)_e\bigg)^2F\,d\mu\,d\varrho,$$

$$6\varepsilon\int\limits_{\Omega}\chi\chi_1\Big((\omega_1)_o^2+(\omega_1)_e^2\Big)\,dx=6\int\limits_{Q_t^0}\chi\chi_1(F-F\,|_{\varrho=0})\Big((\omega_1)_o^2+$$

$$+(\omega_1)_e^2\Big)\,d\mu\,d\varrho\leqslant\int\limits_{Q_t^0}\varepsilon\,O(\varrho)\Big((\omega_1)_0^2+(\omega_1)_e^2\Big)\,dx$$

и

$$12\varepsilon\int\limits_{\Omega}\chi\chi_1(\omega_1)_o(\omega_1)_e\,dx\leqslant\delta_3\int\limits_{\Omega}(\omega_1)_o^2\,dx+O_{\delta_3}(\varepsilon^2)\int\limits_{\Omega}(\omega_1)_e^2\,dx,$$

которые справедливы, в силу нечетности функции $\chi\chi_1$. Далее,

$$3\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1(\omega_1)_o^3\,dx\geqslant\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1(\omega_1)_o^3F|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho-\int\limits_{\Omega}\Big[\delta_1(\omega_1)_o^4+\mathcal{G}_o(\omega_1)_o^2\Big]F\,\Big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho,$$

а также

$$3\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1\Big[(\omega_1)_e^3+3(\omega_1)_e(\omega_1)_o^2\Big]\,dx=\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1(F-F\,\big|_{\varrho=0})\Big[(\omega_1)_e^3+$$

$$+3(\omega_1)_e(\omega_1)_o^2\Big]\,d\mu\,d\varrho\leqslant\delta_3\int\limits_{\Omega}\Big[(\omega_1)_e^4+(\omega_1)_o^4\Big]\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}_e(\omega_1)_e^2\,dx,$$

где

$$\mathcal{G}_e=\frac{1}{\delta_3}F^{-1}(\chi\alpha_1(F-F\,\big|_{\varrho=0}))^2=O_{\delta_3}(\varrho^2).$$

Суммируя эти оценки, получим

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(\varepsilon\nabla_x\omega_1)^2+W''(\varphi_{\mathrm{as},M})\omega_1^2+3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega_1^3+\omega_1^4-$$

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big((u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega)\omega_1(\omega_1)_x+b\omega_1^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\Big)\Big]\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Omega}(\varepsilon\nabla_{\Gamma_t}\omega_1)^2\,dx+\int\limits_{\Omega}\Big[(1-\delta_1)(\varepsilon((\omega_1)_o)_\varrho)^2+\Big(W''(\chi)-\delta_1-\delta_3-$$

$$-O_{\delta_3}(\varrho^2)-O(\varepsilon)\Big)(\omega_1)_o^2+3\chi\alpha_1(\omega_1)_o^3+(1-\delta_1-\delta_3)(\omega_1)_o^4\Big]F\,\Big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big[(1-O(\varepsilon^{1+\alpha}))\varrho_x^2(\varepsilon((\omega_1)_e)_\varrho)^2+\big(W''(\chi)-O_{\delta_3}(\varrho^2)-\varepsilon O_{\delta_3}(\varrho)\big)(\omega_1)_e^2+$$

$$+(1-\delta_1-\delta_3)(\omega_1)_e^4-C_{\delta_2}\varepsilon^{2\alpha}\chi'(\omega_1)_e^2\Big]\,dx-O_{\delta_1,\delta_3}(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}(\omega_1)^2\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)\,\big|_{\varrho=0}\,\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)(\omega_1)_e^2\,d\mu\,d\varrho+9\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1(\omega_1)_e^2(\omega_1)_o\,dx. \tag{2.9}$$

Далее оценку правой части неравенства (2.9) разобьем на несколько утверждений.

Предложение 2.2. *Для любой финитной нечетной функции*

$$(\omega_1)_o\in C((0,T),W_2^1(Q_t^0)\cap L_4(Q_t^0))$$

справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_t^0}\Big[(\varepsilon((\omega_1)_o)_\varrho)^2+\Big(W''(\chi)-\delta_1-O_{\delta_3}(\varrho^2)-\varepsilon O(\varrho)\Big)(\omega_1)_o^2+3\chi(\omega_1)_o^3+(1-\delta_3)(\omega_1)_o^4\Big]F\,\Big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant c_1\int\limits_{Q_t^0}\Big[(\varepsilon((\omega_1)_o)_\varrho)^2+(\omega_1)_o^2+(\omega_1)_o^4\Big]\,dx-C_0\varepsilon^{-2n/(4-n)}\|(\omega_1)_o,L_2(Q_t^0)\|^{2(6-n)/(4-n)} \tag{2.10}$$

для некоторых c_1, $C_0>0$, не зависящих от ε.

Предложение 2.3. *Пусть*

$$\min_{\Gamma_t}\Big(1-\frac{|a|}{b}\max_{\tau\in\mathbb{R}^1}(\chi+\chi'\tau)\Big)>0\quad \forall t\in(0,T)$$

и

$$\min_{\Gamma_t}\bigg(-\gamma bU_n\Big(1-\frac{|a|}{b}\min_{\tau\in\mathbb{R}^1}(\chi+\chi'\tau)\Big)\bigg)\geqslant c_1>0\quad \forall\, t\in(0,T).$$

Тогда для любой финитной четной относительно фронта Γ_t *функции*

$$(\omega_1)_e\in W_2^1(Q_t^0)\cap L_4(Q_t^0),\quad t\in(0,T),$$

имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_{\delta_0}}\Big[(1-O(\varepsilon^{1+\alpha}))(\varepsilon\nabla_x(\omega_1)_e)^2+\big(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e\big)(\omega_1)_e^2+\\ +(1-\delta_1-\delta_3)(\omega_1)_e^4-C_{\delta_2}\varepsilon^{2\alpha}\chi'(\omega_1)_e^2\Big]\,dx-\\ -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)\,\big|_{\varrho=0}\,\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)(\omega_1)_e^2\,d\mu\,d\varrho\geqslant\\ \geqslant\frac{64}{45}(1-O(\varepsilon^{\alpha}))\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{Q_t^0}(b(U_0)_n)\,\big|_{\varrho=0}\,(\omega_1)_e^2\,d\mu\,d\varrho\end{gathered}\tag{2.11}$$

для достаточно малого $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$*, где*

$$\mathcal{G}_e\overset{\text{def}}{=}O_{\delta_3}(\varrho^2)-\varepsilon O_{\delta_3}(\varrho).$$

2.2. Априорная оценка нечетных функций. Докажем оценку (2.10) для нечетных финитных функций ω_1^o, $\operatorname{supp}\omega_1^o\subset Q_t^0$. Положим $Q_*=\{x\in\Omega,\,|\varrho|<\delta\varepsilon\}$ и оценим интеграл

$$\int\limits_{Q_*}(\omega_1^o)^2F\,\big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho.$$

Имеем

$$\omega_1^o=\int\limits_0^{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\omega_1^o\,ds,$$

откуда получим

$$(\omega_1^o)^2\leqslant\varrho\int\limits_0^{\varrho}\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1^o)\Big)^2ds.\tag{2.12}$$

Интегрируя по ϱ, получим неравенство

$$\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}(\omega_1^o)^2\,d\varrho\leqslant\frac{\varepsilon^2\delta^2}{2}\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho}(\omega_1^o)\Big)^2d\varrho.$$

Это позволяет показать, что

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\int\limits_{Q_*}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho}\omega_1^o\Big)^2+W''(\chi)(\omega_1^o)^2\Big]F\,\big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho\geqslant\delta_1\int\limits_{Q_*}\Big|\frac{\partial}{\partial\varrho}\,\omega_1^o\Big|^2dx+\\ +\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_t}\Big((1-\delta_1)\frac{2}{\delta^2}+W''(\chi)\Big)(\omega_1^o)^2\,F\,d\varrho\,d\mu.\end{gathered}\tag{2.13}$$

Очевидно, для любого $1 < \delta < \sqrt{2}$
$$(1-\delta_1)\frac{2}{\delta^2} + W''(\chi) \geqslant c_0 > 0 \quad \forall\, \varrho \in (-\delta\varepsilon, \delta\varepsilon),$$
если достаточно мало δ_1. В то же время нетрудно видеть, что
$$e > \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2}) \implies W''(\chi(\sqrt{2})) = 3\chi^2(\sqrt{2}) - 1 > 0,$$
следовательно, существует $1 < \delta < \sqrt{2}$ такое, что
$$W''(\chi) \geqslant c_1 > 0 \quad \forall \varrho, \quad |\varrho| > \delta\varepsilon,$$
т.е. вне области Q_*.

Отсюда получаем
$$\int\limits_{\Omega} \Big[(\varepsilon(\omega_1^o)_\varrho)^2 + W''(\chi)(\omega_1^o)^2 - \mathcal{G}_o(\omega_1)_o^2\Big] F \,\Big|_{\varrho=0} \, d\mu\, d\varrho \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \Big[\delta_1(\varepsilon(\omega_1^o)_\varrho)^2 + \frac{1}{2}\min(c_0, c_1)(\omega_1^o)^2\Big]\, dx. \tag{2.14}$$
Здесь использовано то, что для достаточно малого δ_0
$$\min(c_0, c_1) - \max_{Q_t^)} \mathcal{G}_o \geqslant \min(c_0, c_1) - C_1\delta_0^2 \geqslant \frac{1}{2}\min(c_0, c_1).$$

Теперь оценим для нечетных финитных функций интеграл
$$\int\limits_{\Omega} \chi(\omega_1^o)^3\, dx.$$
Применяя теорему вложения, получим
$$3\int\limits_{\Omega} \chi(\omega_1^o)^3\, dx \leqslant \delta_2\varepsilon^2 \|\nabla_x(\omega_1^o), L_2(\Omega)\|^2 +$$
$$+ C(\delta_0, n)\Big(\varepsilon^{-2n/(6-n)}\|\omega_1^o, L_2(\Omega)\|^2\Big)^{(6-n)/(4-n)}, \tag{2.15}$$
где постоянная $C(\delta_0, n)$ не зависит от ε. Отсюда следует справедливость предложения 0.2.

2.3. Априорная оценка для четных функций. Теперь докажем априорную оценку (2.11) для четных финитных функций ω_1^e. Рассмотрим δ_0-окрестность фронта $Q_t^0 = Q_0^+ \cup Q_0^-$, где
$$Q_0^+(t) = \{x \in \Omega, \delta_0 > \varrho > 0\} \subset \Omega, \qquad Q_0^-(t) = \{x \in \Omega, -\delta_0 < \varrho < 0\} \subset \Omega.$$
Чтобы получить оценку в Q_t^0, разобьем эту область на подобласти
$$Q_*(\varepsilon, t) = \{x \in \Omega, -\varepsilon\delta \leqslant \varrho \leqslant \varepsilon\delta\}$$
и $Q_t^0 \setminus Q_*$. Постоянные δ_0, $\delta > 0$ определим ниже так же, как в нечетном случае. Напомним, что
$$\begin{aligned} &\chi'' - W'(\chi) = 0, \qquad \chi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\chi^2), \\ &W(\chi) = \frac{1}{4}(\chi^2-1)^2, \qquad \chi = \operatorname{tgh}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

В области Q_t^0 положим
$$\omega_1^e = Y\, c_\omega + y_\omega, \qquad Y = \frac{\chi'}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{2.17}$$

где

$$c_\omega = \frac{\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} Y\,\omega_1^e F\,d\varrho}{\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} Y^2 F\,d\varrho}.$$

Прежде докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *В области Q_t^0 справедливо априорное тождество*

$$\int\limits_{Q_t^0}\Big[\varepsilon^2(1-O(\varepsilon^2))|\nabla_x\omega|^2 + (W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)\omega^2\Big]\,dx =$$

$$= 2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \int_{Q(\lambda_1,\lambda_2)}\Big\{(1-O(\varepsilon^2))|\varepsilon\nabla^\Gamma\omega|^2 +$$

$$+(1-O(\varepsilon^2))\Big(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y_\omega\Big)^2 + (W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)y_\omega^2\Big\}F\,d\mu\,d\varrho,$$

где

$$\mathcal{I}_2 \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\Big\{(1-O(\varepsilon^2))\varepsilon\frac{\chi''}{\chi'}|\nabla_x\varrho|^2 Y c_\omega\frac{\partial}{\partial\varrho}y_\omega + (W''(\chi)+6\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)\,Y c_\omega y_\omega F\,d\mu\Big\}\,d\varrho,$$

$$\mathcal{I}_3 \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\Big[(1-O(\varepsilon^2))\Big(\frac{\chi''}{\chi'}\Big)^2|\nabla_x\varrho|^2 + W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e\Big]Y^2\,c_\omega^2 F\,d\mu\,d\varrho.$$

Более того, справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_t^0}\Big[\varepsilon^2(1-O(\varepsilon^2))|\nabla_x\omega|^2 + (W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)(\omega_1^e)^2 -$$

$$-\varepsilon^\alpha\Big(\gamma b U_n(1-\frac{a}{b}(\chi+\chi'\tau))\Big)\Big|_{\varrho=0}\chi'((\omega_1)_e)^2\Big]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Gamma_t} d\mu \int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\Big\{(1-O(\varepsilon^2))\Big(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y\Big)^2 + (W''(\chi)-2\delta_1-\mathcal{G}_e)\,y^2\Big\}F\,d\mu\,d\varrho -$$

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Gamma_t}\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\Big(\gamma b U_n\Big(1-\frac{a}{b}(\chi+\chi'\tau)F\Big)\Big)\Big|_{\varrho=0}\chi'\Big(1-\frac{\varepsilon}{\delta_1}\Big)c_\omega^2 Y^2\,d\mu\,d\varrho +$$

$$+\int\limits_{Q_t^0}(1-O(\varepsilon^2))|\varepsilon\nabla^\Gamma\omega_1^e|^2 dx - O_{\delta_1}(\varepsilon^2)\int\limits_{Q_t^0}(\omega_1^e)^2\,dx.$$

Доказательство. Используя тот факт, что

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} Y\,y\,F d\varrho = 0 \quad \forall\mu, \tag{2.18}$$

получим

$$\int_{Q_t^0} \omega^2\, dx = \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \Big[c^2 Y^2 + y^2\Big] F\, d\varrho\, d\mu.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \varepsilon^2 |\nabla_x \varrho|^2 c \frac{\partial}{\partial \varrho} Y \frac{\partial}{\partial \varrho} y F\, d\varrho\, d\mu =$$

$$= -\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \varepsilon^2 |\nabla_x \varrho|^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} Y c y F\, d\varrho\, d\mu - \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \varepsilon^2 c\, y \frac{\partial}{\partial \varrho} Y F^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) F\, d\varrho\, d\mu.$$

В то же время

$$-\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \varepsilon^2 |\nabla_x \varrho|^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} Y c y F\, d\varrho\, d\mu = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \chi''' |\nabla_x \varrho|^2 c y F\, d\varrho\, d\mu =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} W''(\chi) \chi' |\nabla_x \varrho|^2 c y F\, d\varrho\, d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{I}_2 = \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left(6\varepsilon \chi \chi_1 - W''(\chi) \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} |\nabla_x \varrho|^2 \Big|_{\varrho=0} - \varepsilon F^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) \Big|_{\varrho=0}\right) c Y y F\, d\varrho\, d\mu -$$

$$- \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left[\mathcal{G}_e - W''(\chi) \left(|\nabla_x \varrho|^2 - 1 - \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} |\nabla_x \varrho|^2 \Big|_{\varrho=0}\right) -\right.$$

$$\left. -\varepsilon \frac{\chi''}{\chi'} \left(F^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) - F^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) \Big|_{\varrho=0}\right) - O(\varepsilon^2)\right] c Y y F\, d\varrho\, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left(6\varepsilon \chi \chi_1 - W''(\chi) \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} |\nabla_x \varrho|^2 \Big|_{\varrho=0} - \varepsilon F^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) \Big|_{\varrho=0}\right) c Y y F\, d\varrho\, d\mu - O(\varepsilon^2) \int_{Q_t^0} c Y y\, dx.$$

Также получим

$$\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \varepsilon^2 |\nabla_x \varrho|^2 c^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} Y \frac{\partial}{\partial \varrho} Y F\, d\varrho\, d\mu =$$

$$= \varepsilon \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} c^2 W''(\chi) Y^2 |\nabla_x \varrho|^2 F\, d\varrho\, d\mu - \varepsilon \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} c^2 \frac{\chi''}{\chi'} Y^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F)\, d\varrho\, d\mu,$$

откуда

$$\mathcal{I}_3 = \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \int_{\Gamma_t} \left(6\varepsilon \chi \chi_1 - W''(\chi) \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} |\nabla_x \varrho|^2 \Big|_{\varrho=0} - \varepsilon F^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} (|\nabla_x \varrho|^2 F) \Big|_{\varrho=0}\right) c^2 Y^2 F\, d\varrho\, d\mu -$$

$$
-\int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\Bigg[\mathcal{G}_e - W''(\chi)\bigg(|\nabla_x\varrho|^2 - 1 - \varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}|\nabla_x\varrho|^2\Big|_{\varrho=0}\bigg) -
$$

$$
-\varepsilon\frac{\chi''}{\chi'}\bigg(F^{-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F) - F^{-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F)\Big|_{\varrho=0}\bigg) - O(\varepsilon^2)\Bigg]c^2Y^2F\,d\varrho\,d\mu \geqslant
$$

$$
\geqslant \int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\bigg(6\varepsilon\chi\chi_1 - W''(\chi)\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}|\nabla_x\varrho|^2\Big|_{\varrho=0} - \varepsilon F^{-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F)\Big|_{\varrho=0}\bigg)c^2Y^2F\,d\varrho\,d\mu -
$$

$$
-O(\varepsilon^2)\int\limits_{Q_t^0}c^2Y^2\,dx.
$$

Суммируя эти оценки, учитывая, что $(\omega_1^e)^2 - y^2 = 2cyY + c^2Y^2$, окончательно получим

$$
2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \geqslant \int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\bigg(6\varepsilon\chi\chi_1 - W''(\chi)\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}|\nabla_x\varrho|^2\Big|_{\varrho=0} -
$$

$$
-\varepsilon F^{-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F)\Big|_{\varrho=0}\bigg)(\omega_1^e)^2\,d\varrho\,d\mu -
$$

$$
-\int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\bigg(6\varepsilon\chi\chi_1 - W''(\chi)\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}|\nabla_x\varrho|^2\Big|_{\varrho=0} -
$$

$$
-\varepsilon F^{-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F)\Big|_{\varrho=0}\bigg)\,y_\omega^2\,d\varrho\,d\mu - O(\varepsilon^2)\int\limits_{Q_t^0}(\omega_1^e)^2\,dx. \tag{2.19}
$$

Здесь использовано то, что

$$
\int\limits_{Q_t^0}c^2Y^2\,dx \leqslant C_1\int\limits_{Q_t^0}(\omega_1^e)^2\,dx,
$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от ε. Отсюда

$$
\int\limits_{Q_t^0}y^2\,dx \leqslant 2(1 + C_1)\int\limits_{Q_t^0}(\omega_1^e)^2\,dx.
$$

Из построения асимптотического решения (см. [11]) следует четность функции χ_1. Используя этот факт для четной функции ω_1^e, получим

$$
\int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\bigg(6\varepsilon\chi\chi_1 - W''(\chi)\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}|\nabla_x\varrho|^2\Big|_{\varrho=0} - \varepsilon F^{-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F)\Big|_{\varrho=0}\bigg)(\omega_1^e)^2\,d\varrho\,d\mu = 0.
$$

В то же время

$$
-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha(1 - O(\varepsilon^\alpha))\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\chi'(3 - \sqrt{2}\tau\chi)(\omega_1)_e^2\,d\mu\,d\varrho =
$$

$$
= -\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\chi'(3 - \sqrt{2}\tau\chi)(c_\omega^2Y + y_\omega)^2\,d\mu\,d\varrho \geqslant
$$

$$
\geqslant -\delta_3\int\limits_{\Omega}y_\omega^2\,d\mu\,d\varrho - \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Omega}(bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\chi'(3 - \sqrt{2}\tau\chi)\bigg(1 - \frac{1}{\delta_3}\varepsilon^\alpha\bigg)c_\omega^2Y^2\,d\mu\,d\varrho.
$$

Теперь оценим последний интеграл

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Omega}(bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)\left(1-\frac{1}{\delta_3}\varepsilon^{\alpha}\right)c_{\omega}^2Y^2\,d\mu\,d\varrho=$$
$$=-A_*\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Gamma_t}(bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}c_{\omega}^2\,d\mu,$$

где

$$A_*=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\delta_3}\varepsilon^{\alpha}\right)\int\limits_{\delta_0/\varepsilon}^{\delta_0/\varepsilon}(\chi'(\tau))^3(3-\sqrt{2}\tau\chi(\tau))\,d\tau=\frac{64}{45}(1-O(\varepsilon^{\alpha}))>1.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{Q_t^0}\Big[\varepsilon^2(1-O(\varepsilon^2))|\nabla_x(\omega_1)_e|^2+(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)(\omega_1^e)^2\Big]\,dx-$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}\Big(1-O(\varepsilon^{\alpha})\Big)\int\limits_{\Omega}(\gamma bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}\chi'(3-\sqrt{2}\tau\chi)(\omega_1)_e^2\,d\mu\,d\varrho\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{Q_t^0}\Big\{|\varepsilon\nabla^{\Gamma}\omega_1^e|^2+(1-O(\varepsilon^2))(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y)^2+(W''(\chi)-\delta_1-\mathcal{G}_e-\delta_2)y^2\Big\}F\,d\mu\,d\varrho-$$
$$-\frac{64}{45}(1-O_{\delta_2}(\varepsilon^{\alpha}))\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{\Gamma_t}(bF(U_0)_n)|_{\varrho=0}c_{\omega}^2\,d\mu-O(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}(\omega_1)_e^2\,dx-O(\varepsilon^2)\int\limits_{Q_t^0}(\omega_1^e)^2\,dx. \tag{2.20}$$

Таким образом, осталось исследовать интеграл

$$\mathcal{J}(\mu,t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\left\{(1-O(\varepsilon^2))\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y\right)^2+(W''(\chi)-\delta_1-\mathcal{G}_e)y^2\right\}F\,d\varrho$$

для любых $t\in(0,T)$, $\mu\in\Gamma_t$. □

Ниже приведем новое доказательство известной леммы Чена [11].

Лемма 2.2. *Для любой четной по ϱ функции $y\in\mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ состоит из функций*

$$y\in W_2^1((-\delta_0,\delta_0))$$

таких, что

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}yY\,d\varrho=0, \tag{2.21}$$

справедливо неравенство

$$\min_{y\in\mathcal{W}}\mathcal{J}(\mu,t)\geqslant c_3\int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0}\left[\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y\right)^2+y^2\right]F\,d\varrho, \tag{2.22}$$

где постоянная $c_3>0$ не зависит от μ, ε, t.

Эта лемма позволяет завершить доказательство предложения 2.2. Действительно, из оценок (2.20) и (2.22) получаем

$$\int\limits_{Q_t^0}\Big[\varepsilon^2(1-O(\varepsilon^2))|\nabla_x(\omega_1)_e|^2+(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)(\omega_1^e)^2\Big]\,dx-$$

$$
-\int\limits_{Q_t^0} \varepsilon^\alpha\left(\gamma b U_n\left(1-\frac{a}{b}(\chi+\chi'\tau)\right)\right)\Big|_{\varrho=0}\chi'((\omega_1)_e)^2\,dx \geqslant
$$

$$
\geqslant \int\limits_{\Omega}(\omega_1)_e^2\left[\varepsilon^\alpha\frac{A_0}{2B_0}\delta_2|\nabla_x(\omega_1)_e|^2+(1-\delta_2)\min(c_3,c_0)(\omega_1)_e^2\right]dx \tag{2.23}
$$

для некоторого достаточно малого $\delta_2>0$, не зависящего от ε, t.

Теперь оценим интеграл

$$
\int\limits_{\Omega}\Big[3\chi(\omega_1)_e^3+(\omega_1)_e^4\Big]\,dx.
$$

В силу четности функции $(\omega_1)_e$, имеем

$$
\int\limits_{\Omega}\Big[3\chi(\omega_1)_e^3+(\omega_1)_e^4\Big]\,dx=\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\Big[3(F-F|_{\varrho=0})\chi(\omega_1)_e^3+(\omega_1)_e^4F\Big]\,d\mu\,d\varrho\geqslant
$$

$$
\geqslant\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\Big[3(F-F\,\big|_{\varrho=0})\chi-C_{\delta_2}\varrho^2|c_\omega|^3Y^3+(c_\omega^4+(1-\delta_2)(\omega_1)_e^4-\delta_2y_\omega^2)F\Big]\,d\mu\,d\varrho.
$$

Нетрудно видеть, что

$$
-C_{\delta_2}\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\varrho^2|c_\omega|^3Y^3F\,d\mu\,d\varrho\geqslant-\varepsilon^{3/2}C_{\delta_2}\frac{A_0}{B_0^{3/2}}\int\limits_{\Gamma_t}\|(\omega_1)_e,L_2\big((-\delta_0\varepsilon,\delta_0\varepsilon)\big)\|^3\,d\mu\geqslant
$$

$$
\geqslant-C_{1,\delta_2}\varepsilon^{(2-\alpha)/2}\int\limits_{\Omega}\Big[(\omega_1)_e^4+\varepsilon^{1+\alpha}(\omega_1)_e^2\Big]\,dx.
$$

Суммируя все сказанное, получаем требуемый результат.

Предложение 2.4. *Для любой финитной четной функции*

$$
(\omega_1)_e\in C((0,T),W_2^1(Q_{\delta_0})\cap L_4(\omega))
$$

имеем

$$
\int\limits_{Q_{\delta_0}}\Big[(1-O(\varepsilon^2))(\varepsilon\nabla_x(\omega_1)_e)^2+(W''(\chi)+6\varepsilon\chi\chi_1-\mathcal{G}_e)\omega^2+3\chi\omega^3+\omega^4\Big]\,dx-
$$

$$
-\int\limits_{Q_{\delta_0}}\varepsilon^\alpha\left(\gamma bU_n\left(1-\frac{a}{b}(\chi+\chi'\tau)\right)\right)\Big|_{\varrho=0}\chi'((\omega_1)_e)^2\,dx\geqslant
$$

$$
\geqslant c_0\int\limits_{Q_{\delta_0}}\Big[(\varepsilon\nabla^{\Gamma_t}(\omega_1)_e)^2+y_\omega^2+\varepsilon^\alpha(\omega_1)_e^2+(\omega_1)_e^4\Big]\,dx. \tag{2.24}
$$

Теперь оценим оставшиеся интегралы

$$
3\int\limits_{\Omega}\chi\alpha_1(\omega_1)_e^2(\omega_1)_o\,dx
$$

и

$$
3\int\limits_{\Omega}\chi\big(\alpha_2\omega_2^3+2\alpha_1\omega_1\omega_2^2\big)\,dx. \tag{2.25}
$$

2.4. Априорная оценка корреляции. Рассмотрим корреляцию четной и нечетной частей функции ω:

$$\int\limits_{\Omega} \chi\alpha_1(\omega_1)_e^2(\omega_1)_o\,dx \geqslant -\int\limits_{Q_t^0} \chi F^{-1}\Big|\Big(F - F\,\big|_{\varrho=0}\Big)\Big|\Big((\omega_1)_o^2 + (\omega_1^e)^4\Big)\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_t^0} \chi\omega_1^o(c\omega^2Y^2 + c_\omega Y y_\omega)F\,\big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho - C_1\int\limits_{Q_t^0}(|y_\omega|^3 + |\omega_0|^3)\,dx.$$

Из условия $\displaystyle\int_{-\delta_0}^{\delta_0} y_\omega Y F d\varrho = 0$ следует, что для любого $\mu \in \Gamma_t$ поверхность

$$\Gamma_0 = \{(\varrho,\mu) \in Q_t^0, \varrho = g(\mu),\, g(\mu) = \max(\varrho, y_\omega(\varrho,\mu)) = 0\}$$

разделяет область Q_t^0 на две подобласти; в каждой из них применима теорема вложения. По этой теореме

$$\int\limits_{Q_t^0} |y_\omega|^3\,dx \leqslant \delta_2\|\varepsilon(y_\omega)_\varrho, L_2(Q_t^0)\|^2 + C_{\delta_2,n}\varepsilon^{-2n/(n-4)}\|y_\omega, L_2(Q_t^0)\|^{2(6-n)/(4-n)}.$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{Q_t^0} \chi(\omega_1)_o\,c\omega^2Y^2F\,\big|_{\varrho=0}\,d\mu\,d\varrho \geqslant -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}D_0\int\limits_{\Gamma_t^0} c_\omega^2\|(\omega_1)_o, L_2(-\delta_0,\delta_0)\|\,d\mu,$$

где

$$D_0 = \max_{\Gamma_t}\int\limits_{-\delta_0/\varepsilon}^{\delta_0/\varepsilon}(\chi'(s))^4F\,ds.$$

В случае $n = 1$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{\Gamma_t^0} c_\omega^2\|(\omega_1)_o, L_2(-\delta_0,\delta_0)\|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}B_0}\|(\omega_1)_e, L_2(-\delta_0,\delta_0)\|^2\|(\omega_1)_o, L_2(-\delta_0,\delta_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\delta_2}\varepsilon^{1+\alpha}\|(\omega_1)_e, L_2(-\delta_0,\delta_0)\|^2 + \delta_2\Big[\|(\omega_1)_e, L_4(-\delta_0,\delta_0)\|^4 + \varepsilon^{-3}\|(\omega_1)_o, L_2(-\delta_0,\delta_0)\|^4\Big].$$

В случае $n = 2, 3$ рассмотрим разбиение единицы $\alpha_j(\mu)$, $j = 1,\ldots,N$, на фронте Γ_t. Положим

$$c_\omega^2 = \sum_{j=1}^N(\alpha_jc_\omega)^2, \qquad g(\mu) = \|(\omega_1)_o, L_2(-\delta_0,\delta_0)\|.$$

Нетрудно видеть, что $\forall p > 4$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{\Gamma_t^0} c_\omega^2\,g\,d\mu \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}C_1\sum_{j=1}^N\|\alpha_jc_\omega, L_p(\Gamma_t)\|^{1/p}\|\alpha_jc_\omega, L_q(\Gamma_t)\|^{1/q}\|(\omega_1)_o, L_2(\Gamma_t)\|,$$

где $q = 2p/(p-2)$. Из теоремы вложения следует, что

$$\|\alpha_jc_\omega, L_p(\Gamma_t)\|^{1/p} \leqslant D_p\|\alpha_jc_\omega, W_2^1(\Gamma_t)\|.$$

Так как $q < 4$, то

$$\|\alpha_jc_\omega, L_q(\Gamma_t)\|^{1/q} \leqslant C_2\|c_\omega, L_4(\Gamma_t)\|^{1/4},$$

если $p > 4$. Отсюда следует

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{\Gamma_t^0} c_\omega^2\, g\, d\mu \leqslant \delta_2\varepsilon^2\int\limits_{\Omega}\Big[(\nabla_{\Gamma_t}((\omega_1)_e)^2+(\omega_1)_e^2\Big]\,dx+$$

$$+\delta_2\int\limits_{\Omega}(\omega_1)_e^4\,dx+C_{\delta_2}\frac{1}{\varepsilon^3}\|(\omega_1)_o, L_2(\Gamma_t)\|^4.$$

Теперь оценим оставшиеся интегралы

$$3\int\limits_{\Omega}\chi\big(\alpha_2\omega_2^3+2\alpha_1\omega_1\omega_2^2\big)\,dx.$$

Используя теорему вложения в этой области, получим

$$\int\limits_{\Omega\setminus Q_t^0}\omega_2^3\,dx\leqslant C(n)\|\omega_2, L_2(\Omega\setminus Q_t^0)\|^{(6-n)/2}\|\nabla_x\omega_2, L_2(\Omega\setminus Q_t^0)\|^{n/2}\leqslant$$

$$\leqslant\delta_1\|\varepsilon\nabla_x\omega_2, L_2(\Omega\setminus Q_t^0)\|^2+C(n)C_{\delta_1}\Big(\varepsilon^{-2n/(4-n)}\|\omega_2, L_2(\Omega\setminus Q_t^0)\|^2\Big)^{(6-n)/(4-n)}.$$

Последний интеграл

$$3\int\limits_{\Omega\setminus Q_t^0}\alpha_1\omega_1\omega_2^2\,dx$$

оценивается так же, как выше.

Из полученных выше оценок следует требуемый результат:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(\varepsilon\nabla_x\omega_1)^2+W''(\varphi_{\mathrm{as},M})\omega_1^2+3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega_1^3+\omega_1^4-$$

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big((u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_1)\omega_1(\omega_1)_x+b\omega_1^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\Big)\Big]\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Omega}(1-\delta_2)(\varepsilon\nabla_{\Gamma_t}\omega_1)^2\,dx+c_2\int\limits_{Q_t^0}\Big[(\varepsilon((\omega_1)_o)_\varrho)^2+(\omega_1)_o^2+(\omega_1)_o^4\Big]\,dx-$$

$$-C_0\bigg(\varepsilon^{-2n/(4-n)}\Big[\|(\omega_1)_o, L_2(Q_t^0)\|^2+\|y_\omega, L_2(Q_t^0)\|^2\Big]^{(6-n)/(4-n)}+\varepsilon^{-3}\|(\omega_1)_o, L_2(Q_t^0)\|^4\bigg)+$$

$$+c_2\int\limits_{Q_t^0}\Big[\varepsilon^\alpha(\omega_1)_e^2+y_\omega^2+(y_\omega)_\varrho^2\Big]\,dx-O_{\delta_1}(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_{\Omega}(\omega_1)^2\,dx. \tag{2.26}$$

3. Теорема существования

В силу априорной оценки, полученной в предыдущем параграфе, для приближенного решения ω_m, w_m справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(\varepsilon\nabla_x\omega_m)^2+W''(\varphi_{\mathrm{as},M})\omega^2+3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega_m^3+\omega_m^4-$$

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big((u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)\omega_m(\omega_m)_x+b\omega_m^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\Big)\Big]\,dx-$$

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_{\Omega}\gamma\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)w_{mx}((\varphi_{\mathrm{as},M})_x+\omega_{mx})\omega_m\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}_\varphi\omega_m\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{Q_t^0}\Big[(\gamma bFU_0)_n\,\Big|_{\varrho=0}\,\varepsilon^\alpha\chi'(c_\omega)_e^2+c_0y_\omega^2\Big]\,d\mu\,d\varrho+$$

$$+\int\limits_{Q_t^0}\Big(c_1((\omega_m)_1)_o^2+(\omega_m)_2^2+((\omega_m)_1^4+(\omega_m)_2^4)-O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2\Big)\,dx-$$
$$-C_0\Big[\varepsilon^{-2n/(4-n)}\Big(\|(\omega_m)_2,L_2(\Omega)\|^2+\|((\omega_m)_1)_o,L_2(\Omega)\|^2+$$
$$+\|y_\omega,L_2(Q_t^0)\|^2\Big)^{(6-n)/(4-n)}-\frac{1}{\varepsilon^3}\|((\omega_m)_1)_o,L_2(\Omega)\|^4\Big]-$$
$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega\gamma\mathcal{K}\Big[\varepsilon\nabla_{\Gamma_t}w_m\nabla_{\Gamma_t}\omega_m+\varrho_x^2w_{m\varrho}(\chi'+\varepsilon\omega_{m\varrho})\omega_m\Big]\,dx-\int\limits_\Omega\varepsilon^{-(1+\alpha)}\mathcal{F}_\varphi^2\,dx-\varepsilon^{2\alpha}\int\limits_\Omega\mathcal{K}(w_m)_x^2\,dx,\quad(3.1)$$

где $((\omega_m)_1)_e=c_\omega Y+y_\omega$ в области Q_t^0. Здесь используется основное априорное предположение

$$\max_\Omega|\omega_m|\leqslant o_\omega(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha},\qquad\max_\Omega|w_m|\leqslant o_w(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha}\quad\forall t\in(0,T),\quad(3.2)$$

которое, очевидно, выполнено для решения системы обыкновенных уравнений (2.3)–(2.4) на достаточно малом интервале времени $T=T(\varepsilon)$. Здесь $1\geqslant\alpha>1/2$ и o_ω, $o_w\to0$, при $\varepsilon\to0$. Используя теорему вложения, в силу полученных далее оценок в $W_2^{4,2}(Q_T)$, докажем, что T не зависит от ε. Как следствие этого предположения получим

$$a\Big(1+\frac{|b|}{a}\,o(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha}\Big)\geqslant a(1+q(\varepsilon))\geqslant$$
$$\geqslant\mathcal{K}=a+b\omega_m\geqslant a\Big(1-\frac{|b|}{a}\,o(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha}\Big)\geqslant a(1-q(\varepsilon)),\quad(3.3)$$

где q достаточно мало равномерно по m. Здесь

$$a=\frac12(K^++K^-),\qquad b=\frac12(K^+-K^-).$$

3.1. Оценка потока. Нетрудно видеть, что

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_\Omega\gamma\mathcal{K}\varepsilon\nabla_{\Gamma_t}w_m\nabla_{\Gamma_t}\omega_m\,dx\geqslant-\int\limits_\Omega\Big[C_{\delta_2}\varepsilon^{2\alpha}\mathcal{K}(\nabla_{\Gamma_t}w_m)^2+\delta_2\varepsilon^2(\nabla_{\Gamma_t}\omega_m)^2\Big]\,dx.\quad(3.4)$$

В то же время

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega\gamma\mathcal{K}\varrho_x^2w_{m\varrho}(\chi'+\varepsilon\omega_{m\varrho})\omega_m\,dx\geqslant$$
$$\geqslant-\int\limits_\Omega\Big[C_{\delta_2}\varepsilon^{2\alpha}\mathcal{K}w_{m\varrho}^2+\delta_2((\omega_m)_1)_o^2+\delta_2\varepsilon^2(((\omega_m)_1)_o)_\varrho^2+$$
$$+\delta_2((\omega_m)_2)^2+\delta_2\varepsilon^2((\omega_m)_2)_\varrho^2\omega_m^2-O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2\Big]\,dx-$$
$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega\gamma\mathcal{K}\varrho_x^2w_{m,\varrho}(\chi'+\varepsilon(((\omega_m)_1)_e)_\varrho)((\omega_m)_1)_e\,dx.$$

Аналогично

$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_\Omega\gamma\mathcal{K}\varrho_x^2w_{m,\varrho}(((\omega_m)_1)_e)_\varrho((\omega_m)_1)_e\,dx\geqslant$$
$$\geqslant-\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}\gamma\mathcal{K}\varrho_x^2w_{m,\varrho}(\chi'+c_\omega Y'((\omega_m)_1)_e)\,dx-\int\limits_{Q_t^0}\Big[O_{\delta_3}(\varepsilon^{2\alpha})\mathcal{K}w_{m,\varrho}^2+\delta_3(\varepsilon(y_\omega)_\varrho)^2\Big]\,dx.$$

Далее имеем

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}\gamma\mathcal{K}\varrho_x^2w_{m,\varrho}(\chi'+c_\omega Y')(\omega_1)_e\,dx\geqslant$$

$$\geqslant -\varepsilon^\alpha \int\limits_{Q_t^0} \Big(\gamma(a+b\chi)F\Big)\Big|_{\varrho=0} w_{m,\varrho}\chi' c_\omega Y\,dx-$$
$$-o_\omega(\varepsilon)C_1\varepsilon^\alpha \int\limits_{Q_t^0}\Big[w_{m,\varrho}^2+c_\omega^2Y^2\Big]\,dx-\delta_3\int\limits_{Q_t^0} y_\omega^2\,dx-O_{\delta_3}(\varepsilon^{2\alpha})\int\limits_{Q_t^0} w_{m,\varrho}^2\,dx.$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}(\gamma\, b\chi F)\big|_{\varrho=0} w_{m,\varrho}\chi' c_\omega Y\,dx \geqslant -\sigma\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Gamma_t}\frac{64}{45}\big(\gamma|b(U_0)_n|F\big)\Big|_{\varrho=0} c_\omega^2\,d\mu-$$
$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}\frac{1089}{2560}\frac{(F\gamma)\big|_{\varrho=0}}{\sigma\,|(U_0)_n|\big|_{\varrho=0}} w_{m,\varrho}^2\,d\mu\,d\varrho,$$

где постоянная $1>\sigma>0$ будет определена ниже.

Отсюда следует, что

$$\int\limits_\Omega\Big[(\varepsilon\nabla_x\omega_m)^2+W''(\varphi_{\mathrm{as},M})\omega^2+3\varphi_{\mathrm{as},M}\omega_m^3+\omega_m^4-$$
$$-\varepsilon^{1+\alpha}\gamma\Big((u_{\mathrm{as},M})_x\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)\omega_m(\omega_m)_x+b\omega_m^2(u_{\mathrm{as},M})_x(\varphi_{\mathrm{as},M})_x\Big)\Big]\,dx-$$
$$-\varepsilon^{1+\alpha}\int\limits_\Omega\gamma\mathcal{K}(\varphi_{\mathrm{as},M}+\omega_m)w_{mx}((\varphi_{\mathrm{as},M})_x+\omega_{mx})\omega_m\,dx+\int\limits_\Omega\mathcal{F}_\varphi\omega_m\,dx\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{Q_t^0}\Big[c_1\varepsilon^\alpha\chi'((\omega_m)_1)_e^2+c_1\big(((\omega_m)_1)_o^2+((\omega_m)_2)^2+((\omega_m)_1)^4+((\omega_m)_2)^4\big)-O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2\Big]\,dx-$$
$$-C_0\Big[\varepsilon^{-2n/(4-n)}\Big(\|(\omega_m)_2,L_2(\Omega)\|^2+\|y_\omega,L_2(Q_t^0)\|^2+$$
$$+\|((\omega_m)_1)_o,L_2(\Omega)\|^2\Big)^{(6-n)/(4-n)}-\frac{1}{\varepsilon^3}\|((\omega_m)_1)_o,L_2(\Omega)\|^4\Big]-$$
$$-(1-\sigma-o_\omega(\varepsilon)C_1)\varepsilon^\alpha\int_{\Gamma_t}\frac{64}{54}(\gamma bU_nF)|_{\varrho=0}c_\omega^2\,d\mu-$$
$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}(\gamma\,aF)\Big|_{\varrho=0} w_{m,\varrho}\chi'c_\omega Y\,dx-\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}\frac{1089}{2560}\frac{\gamma\,F}{\sigma(|(U_0)_n|)\big|_{\varrho=0}}w_{m,\varrho}^2\,d\mu\,d\varrho-$$
$$-o_\omega(\varepsilon)C_1\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0}\Big[w_{m,\varrho}^2+c_\omega^2Y^2\Big]\,dx-\delta_3\int\limits_{Q_t^0}y_\omega^2\,dx-O_{\delta_3}(\varepsilon^{2\alpha})\int\limits_{Q_t^0}w_{m,\varrho}^2\,dx-$$
$$-\int\limits_{Q_t^0}\Big[O_{\delta_2}(\varepsilon^{2\alpha})\mathcal{K}w_{m,x}^2+\delta_2(\varepsilon(y_\omega)_\varrho)^2\Big]\,dx-\int\limits_\Omega\Big[\delta_2((\omega_m)_1)_o^2+$$
$$+\delta_2\varepsilon^2(((\omega_m)_1)_o)_\varrho^2+\delta_2(\omega_m)_2^2+\delta_2\varepsilon^2((\omega_m)_2)_\varrho^2-O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2+$$
$$+\delta_2\varepsilon^2(\nabla_{\Gamma_t}\omega_m)^2\Big]\,dx+\int\limits_\Omega\varepsilon^{-(1+\alpha)}\mathcal{F}_\varphi^2\,dx. \tag{3.5}$$

Положим

$$\mathcal{A}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{(a\gamma)\big|_{\varrho=0}}{\sqrt{2}|b\,(U_0)_n|\big|_{\varrho=0}}. \tag{3.6}$$

Теперь рассмотрим второе уравнение

$$\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_\Omega \mathcal{A}w_m^2\,dx - \varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \frac{1}{2}\mathcal{A}_t w_m^2\,dx +$$
$$+\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}\mathcal{K}w_{mx}^2\,dx - \varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}_x\mathcal{K}w_{mx}\,dx + \varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\,w_{mx}\,dx -$$
$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}_x b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\,w_m\,dx = \int\limits_\Omega \mathcal{A}\mathcal{F}_u\,w_m\,dx. \tag{3.7}$$

Очевидно,что

$$-\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \left[\mathcal{A}_x b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\,w_m + \mathcal{A}_x\mathcal{K}w_{mx} + \frac{1}{2}\mathcal{A}_t w_m^2\right]dx \geqslant$$
$$\geqslant -O_{\delta_4}(\varepsilon^\alpha)\int\limits_\Omega w_m^2\,dx - \delta_4\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \left[\omega_m^2 + \mathcal{K}w_{mx}^2\right]dx;$$

в то же время

$$\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\,w_{mx}\,dx \geqslant -\int\limits_\Omega \left[O_{\delta_3}(\varepsilon^{2\alpha})w_{m,x}^2 + O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2 + \delta_3\,y_\omega^2\right]dx +$$
$$+\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}\left(Fb(U_0)_n\left(1 - \frac{b}{a}(\chi + \chi'\tau)\right)\right)\Big|_{\varrho=0} c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho.$$

Далее,

$$\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}\left(Fb(U_0)_n\left(1 - \frac{b}{a}(\chi + \chi'\tau)\right)\right)\Big|_{\varrho=0} c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho \geqslant$$
$$\geqslant -\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}(F\mid b(U_0)_n|)\,\Big|_{\varrho=0} c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho -$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}\mathcal{K}w_{m,\varrho}^2\,d\mu\,d\varrho - \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\int_\Omega \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{K}}\left(F\left(b(U_0)_n\frac{|b|}{a}\right)^2\right)\,\Big|_{\varrho=0} c_\omega^2\,Y^2\,d\mu\,d\varrho.$$

Пусть

$$J_1 \overset{\mathrm{def}}{=} -\varepsilon^\alpha\int\limits_{Q_t^0} (\gamma\,aF)\,\big|_{\varrho=0}\,w_{m,\varrho}\chi' c_\omega Y\,dx \tag{3.8}$$

и

$$J_2 \overset{\mathrm{def}}{=} -\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \mathcal{A}(F\mid b(U_0)_n|)\,\big|_{\varrho=0} c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega (\gamma F\,a)\,\big|_{\varrho=0} c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho = -\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega \chi'(F\,a)\,\big|_{\varrho=0} c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega (\gamma F\,a)\,\big|_{\varrho=0} \chi^2 c_\omega\,Y\,w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho.$$

Имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha\int\limits_\Omega (\gamma F\,a)\,\big|_{\varrho=0} \chi^2 c_\omega Y w_{m,\varrho}\,d\mu\,d\varrho \geqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_\Omega \mathcal{K}w_{m,x}^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{(\gamma F\, a)^2 \,\big|_{\varrho=0}}{F\mathcal{K}^2}\chi^4 c_\omega^2 Y^2\, d\mu\, d\varrho.$$

Суммируя эти оценки, получим

$$\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_\Omega \mathcal{A}w_m^2\, dx - \varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\mathcal{A}_t w_m^2\, dx +$$
$$+\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \mathcal{A}\mathcal{K}w_{mx}^2\, dx - \varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \mathcal{A}_x\mathcal{K}w_{mx}\, dx + \varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \mathcal{A}b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\, w_{mx}\, dx -$$
$$-\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \mathcal{A}_x b(u_{\mathrm{as},M})_x\omega_m\, w_m\, dx \geqslant -\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \chi'(F\, a)\,\big|_{\varrho=0}\, c_\omega\, Y\, w_{m,\varrho}\, d\mu\, d\varrho -$$
$$-O_{\delta_4}(\varepsilon^\alpha)\int\limits_\Omega w_m^2\, dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \delta_4\right)\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \mathcal{K}w_{mx}^2\, dx - \delta_4\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \omega_m^2\, dx -$$
$$-\int\limits_\Omega \Big[O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2 + \delta_3\, y_\omega^2\Big]\, dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{(\gamma F\, a)^2\,\big|_{\varrho=0}}{F\mathcal{K}^2}\chi^4 c_\omega^2 Y^2\, d\mu\, d\varrho -$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{K}}\left(F\left(b(U_0)_n\frac{|b|}{a}\right)^2\right)\Big|_{\varrho=0} c_\omega^2\, Y^2\, d\mu\, d\varrho - \int\limits_\Omega \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\mathcal{F}_u^2\, dx. \tag{3.9}$$

В то же время

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{(\gamma Fa)^2\,\big|_{\varrho=0}}{F\mathcal{K}^2}\chi^4 c_\omega^2 Y^2\, d\mu\, d\varrho \geqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{\gamma^2\,\big|_{\varrho=0}}{\left(1-\dfrac{|b|}{a}\right)^2\Big|_{\varrho=0}}\chi^4 c_\omega^2 Y^2\, d\mu\, d\varrho -$$
$$-O(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_\Omega (\omega_1)_e^2\, dx \geqslant -B_*\int\limits_{\Gamma_t}\frac{64}{54}\big(F\gamma|b(U_0)_n|\big)\,\big|_{\varrho=0}\, c_\omega^2\, d\mu - O(\varepsilon^{1+\alpha})\int\limits_\Omega (\omega_1)_e^2\, dx,$$

где

$$B_* = \max_{\Gamma_t}\frac{27}{64}\frac{\gamma\,\big|_{\varrho=0}}{\sqrt{2}|b(U_0)_n|\left(1-\dfrac{|b|}{a}\right)^2\Big|_{\varrho=0}}\int\limits_{-\delta_0/\varepsilon}^{\delta_0/\varepsilon}\chi^4(\chi')^2\, d\tau \leqslant \frac{27}{1070}\frac{\sqrt{2}\gamma\,\big|_{\varrho=0}}{|b(U_0)_n|\left(1-\dfrac{|b|}{a}\right)^2\Big|_{\varrho=0}}.$$

Также получим

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{K}}\left(F\left(b(U_0)_n\frac{|b|}{a}\right)^2\right)\Big|_{\varrho=0} c_\omega^2\, Y^2\, d\mu\, d\varrho \geqslant -B_*^{(1)}\varepsilon^\alpha \int\limits_{\Gamma_t}\frac{64}{54}(F\gamma|b(U_0)_n|)\,\big|_{\varrho=0}\, c_\omega^2\, d\mu,$$

где

$$B_*^{(1)} = \max_{\Gamma_t}\frac{9}{32}\frac{|b|^2}{a^2\left(1-\dfrac{|b|}{a} - o_\omega(\varepsilon)\right)}.$$

Отсюда, положив $\sigma = 1/2$, получаем последнее условие на решение предельной задачи

$$-\left(\frac{1}{2} - B_*^{(1)} - B_* - o_\omega(\varepsilon)C_1\right)\varepsilon^\alpha \int\limits_{\Gamma_t}\frac{64}{54}(\gamma bU_nF)\,\big|_{\varrho=0}\, c_\omega^2\, d\mu -$$
$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \max_{\Gamma_t}\frac{1089}{1280}\frac{\gamma}{|(U_0)_n|} - \delta_4\right)\varepsilon^\alpha \int\limits_\Omega \mathcal{K}w_{mx}^2\, dx \geqslant c_*\varepsilon^\alpha\left[\int\limits_{\Gamma_t} c_\omega^2 d\mu + \int\limits_\Omega \mathcal{K}w_{mx}^2\, dx\right]$$

для некоторого $c_* > 0$, не зависящего от ε. Это неравенство выполнено, если

$$\min_{\Gamma_t} |(U_0)_n| > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{-1} \max_{\Gamma_t} \frac{1089}{1280}\gamma,$$

$$\min_{\Gamma_t} |b(U_0)_n| > \left(\frac{1}{2} - \max_{\Gamma_t} \frac{9}{32} \frac{|b|^2}{a^2\left(1 - \dfrac{|b|}{a} - o_\omega(\varepsilon)\right)}\right)^{-1} \frac{27}{1070} \frac{\sqrt{2}\gamma\,\big|_{\varrho=0}}{\left(1 - \dfrac{|b|}{a}\right)^2\Big|_{\varrho=0}}$$

и

$$\min_{\Gamma_t} \left(1 - \max_{\Gamma_t} \frac{9}{16} \frac{|b|^2}{a^2\left(1 - \dfrac{|b|}{a}\right)}\right) > 0, \quad 1 - \max_{\Gamma_t} \frac{|b|}{a} > 0.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\max_{\Gamma_t} \frac{|K^+ - K^-|}{K^+ + K^-} < \frac{2}{9}(\sqrt{13} - 4) \tag{3.10}$$

и

$$\min_{\Gamma_t} |(K^+ - K^-)(U_0)_n| > c_* =$$
$$= \max\left\{c_*^{(1)}\left(\frac{|K^+ - K^-|}{K^+ + K^-}\right),\, c_*^{(2)}\left(\frac{|K^+ - K^-|}{K^+ + K^-}\right) \max_{\Gamma_t} |K^+ - K^-|\right\},$$

где

$$c_*^{(1)} = \left(1 - \max_{\Gamma_t} \frac{9}{16} \frac{|b|^2}{a^2\left(1 - \dfrac{|b|}{a}\right)}\right)^{-1} \frac{54}{535} \frac{\sqrt{2}\gamma\,\big|_{\varrho=0}}{\left(1 - \dfrac{|b|}{a}\right)^2\Big|_{\varrho=0}},$$
$$b = K^+ - K^-, \quad a = K^+ + K^-,$$

и

$$C_*^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \max_{\Gamma_t} \frac{1089}{640}\gamma.$$

Суммируя оценки (3.4) и (3.9), получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\mathcal{A}w_m^2 + (\omega_m)_2^2 + (\omega_m)_1^2\right) dx + c_1 \int_\Omega \Big(\varepsilon^\alpha((\omega_m)_1)_e^2 +$$
$$+ (\omega_m)_2^2 + ((\omega_m)_1)_o^2\Big)\, dx \leqslant \int_\Omega \left(O(\varepsilon^\alpha)w_m^2 + O(\varepsilon^{1+\alpha})\omega_m^2\right) dx +$$
$$+ C_0\Big[\varepsilon^{-2n/(4-n)}\Big(\|((\omega_m)_1)_o, L_2(\Omega)\|^{2(6-n)/(4-n)} +$$
$$+ \|(\omega_m)_2, L_2(\Omega)\|^{2(6-n)/(4-n)}\Big) + \frac{1}{\varepsilon^3}\|((\omega_m)_1)_o, L_2(\Omega)\|^4\Big] +$$
$$+ \int_\Omega \varepsilon^{-\alpha}\mathcal{F}_u^2\, dx + \int_\Omega \varepsilon^{-(1+\alpha)}\mathcal{F}_\varphi^2\, dx. \tag{3.11}$$

3.2. Существование решения (продолжение). Введем следующие обозначения

$$U = \max_{0<t<t_m} \int\limits_{\Omega} \Big\{ (\omega_m)_2^2 + \mathcal{A} w_m^2 + ((\omega_m)_1)_o^2 + ((\omega_m)_1)_e^2 \Big\}\, dx,$$

$$\mathcal{F}^2 = \max_{0<t<t_m} \int\limits_{\Omega} \Big[\varepsilon^{\alpha} \mathcal{F}_u^2 + \varepsilon^{-(1+\alpha)} \mathcal{F}_{\varphi}^2 \Big]\, dx.$$

В неравенстве (3.11) положим $n=3$. В соответствии с леммой Гронуолла, получаем из (3.11)

$$U \leqslant \int\limits_{\Omega} \Big\{ \omega_2^2(0) + \mathcal{A} w(0)^2 + (\omega_1)_o^2(0) + (\omega_1)_e^2(0) \Big\}\, dx +$$

$$+ \frac{t_m}{\varepsilon^{1+\alpha}} \mathcal{F}^2 + \frac{t_m}{\varepsilon^{1+\alpha}} C_3 \big[(\varepsilon^{-3} U)^2 + \varepsilon^{-3} U \big] U.$$

Для анализа последнего соотношения необходимо следующее хорошо известное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть положительные числа $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ удовлетворяют оценке*

$$\mathcal{Q} < \frac{7}{18} \mathcal{P}^{-1}. \tag{3.12}$$

Тогда решения неравенства

$$0 \leqslant U \leqslant \mathcal{Q} + \frac{4}{9} \mathcal{P}^2 U^3 + \frac{2}{3} \mathcal{P} U^2$$

принадлежат множеству $[0, Z_-] \cup [Z_+, \infty)$*, где числа* Z_+*,* Z_- *таковы, что* $0 < Z_- < 2\mathcal{Q} < Z_+$.

Очевидно, последнее неравенство для U при достаточно малом t_m удовлетворяет условиям леммы. Отсюда получим

$$\big(\|\omega_m, L_2\|^2 + \|w_m, L_2\|^2 \big)(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \Big[\big(\|\omega_m, L_2\|^2 + \|w_m, L_2\|^2 \big)(0) + \frac{t_m}{\varepsilon^{1+\alpha}} \mathcal{F}^2 \Big] \stackrel{\text{def}}{=} J_0 \quad \forall t \in (0, t_m)$$

и

$$-C_0 \Big(\varepsilon^{-6)} \Big[\|(\omega_1)_o, L_2(Q_t^0)\|^2 + \|y_\omega, L_2(Q_t^0)\|^2 + \|\omega_2, L_2(\Omega \setminus Q_t^0)\|^2 \Big]^3 + \varepsilon^{-3} \|(\omega_1)_o, L_2(Q_t^0)\|^4 \Big) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \Big[\varepsilon^{-3} J_0 + \varepsilon^{-6} J_0^2 \Big] \|\omega_m, L_2\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_0^2(\varepsilon) \|\omega_m, L_2\|^2.$$

Предположим, что

$$\varrho_1^2 = \varepsilon^{-3} \bigg(\big(\|\omega_m, L_2\|^2 + \|w_m, L_2\|^2 \big)(0) + T\, \frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha}} \mathcal{F} \bigg) = o(\varepsilon), \tag{3.13}$$

где $o(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$.

Последнее справедливо при

$$M > 2 \quad \text{и} \quad (\|\omega_m, L_2\|^2 + \|w_m, L_2\|^2)(0) \leqslant \varrho_1(\varepsilon)\, \varepsilon^3. \tag{3.14}$$

Тогда нeравество (3.11) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} \Big(\omega_m^2 + \mathcal{A} w_m^2 \Big)\, dx + C_1 \varepsilon^{-1} \int\limits_{\Omega} \Big(w_{mx}^2 + \omega_m^2 \Big)\, dx \leqslant \varepsilon^{-(1+\alpha)} \mathcal{F}, \tag{3.15}$$

а первое уравнение в (2.5) — в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} \mathcal{A} w_m^2\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}_u^2\, dx + C_2 (\|\omega_m, L_2\|^2 + \|w_m, L_2(\Omega)\|^2), \tag{3.16}$$

где константы $C_j > 0$ не зависят от ε, а ε достаточно мало, если

$$|\omega_m| \leqslant o(\varepsilon), \quad |w_m| = o(\varepsilon), \quad o(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

В силу неравенства Фридрихса,

$$C_3 C_2 C_\Omega \int\limits_\Omega \mathcal{A} w_m^2\, dx \leqslant C_2 \int\limits_\Omega w_{mx}^2\, dx,$$

где $C_3 = (\max\limits_\Omega \mathcal{A})^{-1}$. Это позволяет переписать систему (2.18), (2.19) в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega \Big(\omega_m^2 + \mathcal{A} w_m^2\Big)\, dx + C_1\varepsilon^{-1}\int\limits_\Omega \Big(C_2 C_3 C_\Omega \mathcal{A} w_m^2 + \omega_m^2\Big)\, dx \leqslant \varepsilon^{-(1+\alpha)}\int\limits_\Omega \mathcal{F}^2\, dx,\\ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega \mathcal{A} w_m^2\, dx + C_3 C_\Omega \int\limits_\Omega \mathcal{A} w_m^2\, dx \leqslant \int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\, dx + C_4\|\omega_m, L_2\|^2.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Отсюда для мажорирующих функций

$$\mathcal{U} \geqslant \|\omega_m, L_2\|^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{W} \geqslant \int\limits_\Omega \mathcal{A} w_m^2\, dx$$

получаем систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W} + C_3 C_\Omega \mathcal{W} = \max_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2 + C_4\mathcal{U},\\ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{U} + \mathcal{W}\Big) + C_1\varepsilon^{-1}\Big(C_2 C_3 C_\Omega \mathcal{W} + \mathcal{U}\Big) \leqslant \varepsilon^{-(1+\alpha)}\mathcal{F}^2.\end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что эту систему можно привести к нормальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\omega\\ w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_3 C_\Omega & -C_4\\ -C_3 C_\Omega - \dfrac{C_1 C_2 C_3 C_\Omega}{\varepsilon} & -\dfrac{C_1}{\varepsilon} + C_4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \max\limits_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\, dx\\ -\max\limits_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\, dx + \dfrac{\mathcal{F}^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\end{pmatrix},$$

собственные значения которой $\lambda_1 = \Lambda/\varepsilon > 0$ и $\lambda_2 = O(1)$, а собственные векторы соответственно равны

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0_1(\varepsilon)\\ 1 + O_2(\varepsilon)\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 + 0_3(\varepsilon)\\ -\dfrac{1}{C_2 C_3 C_\Omega} + O_4(\varepsilon)\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем однородные по отношению к $t \in [0, t_m]$ оценки

$$\begin{gathered} W(t) \leqslant \exp(\lambda_2 t) W(0) + O(\varepsilon)\Big(W(0) + U(0)\Big) + O(T)\Big[\max_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\, dx + \frac{\mathcal{F}^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\Big],\\ U(t) \leqslant \Big(1 + \frac{1}{C_2 C_3 C_\Omega}\Big)\exp\Big(-\Lambda\frac{t}{\varepsilon}\Big) U(0) - \frac{1}{C_2 C_3 C_\Omega}\exp(\lambda_2 t) W(0) +\\ + O(\varepsilon)\Big(W(0) + U(0)\Big) + O(T)\Big[\max_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\, dx + \frac{\mathcal{F}^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\Big].\end{gathered} \tag{3.18}$$

Это доказывает, что $t_m = T/\varepsilon^{1+\alpha}$, и неравенство (3.18) влечет за собой однородные по m оценки

$$\int\limits_0^t dt \int\limits_\Omega w_{mx}^2\,dx \leqslant B_1(\|w_m, L_2\|^2(0) + \|\omega_m, L_2\|^2(0)) + O_1(T)\left[\max_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\,dx + \frac{\mathcal{F}^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right]$$

и

$$\int\limits_0^t \left\{\varepsilon^{1-\alpha}\|\omega_{mx}, L_2\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\omega_m, L_2\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha}}\|\omega_m, L_4\|^4\right\}dt \leqslant$$
$$\leqslant B_2(\|\omega_m, L_2\|^2(0) + \|w_m, L_2\|^2(0)) + O_1(T)\left[\max_{0<t<t_m}\int\limits_\Omega \mathcal{F}_u^2\,dx + \frac{\mathcal{F}^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right], \tag{3.19}$$

где константы $B_j > 0$, $O(T)$ не зависит от ε для всех $t \in (0,T)$.

С помощью этих оценок для $\alpha > 1/2$ традиционными методами (см. [3]) получим оценку в $W_2^{2,1}(Q)$ вида

$$\|\varepsilon w_{m,x}, L_2(\Omega)\|^2(t) + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Big(\|\varepsilon w_{m,t}, L_2(\Omega)\|^2 + \|\varepsilon w_{m,xx}, L_2(\Omega)\|^2\Big)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant B_1\Big(\|\varepsilon w_{m,x}, L_2\|^2(0) + \|\varepsilon\omega_{m,x}, L_2\|^2(0) + \|w_m, L_2\|^2(0) + \|\omega_m, L_2\|^2(0)\Big) +$$
$$+ O_2(T)\left[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}_1^u)^2 + \frac{\mathcal{F}_1^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right],$$

где

$$(\mathcal{F}_1^u)^2(t) = \int\limits_\Omega \Big((\varepsilon\nabla_x\mathcal{F}_u)^2 + \mathcal{F}_u^2\Big)\,dx,$$
$$\mathcal{F}_1^2 = \int\limits_\Omega \Big((\varepsilon\nabla_x\mathcal{F}_\varphi)^2 + \mathcal{F}_\varphi^2\Big)\,dx$$

и

$$\int\limits_\Omega (\varepsilon\omega_{m,x})^2\,dx + \int\limits_0^t \Big\{\|\varepsilon\omega_{m,t}, L_2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{1-\alpha}\|\varepsilon\omega_{mxx}, L_2\|^2 + \|\varepsilon\omega_{m,x}, L_2\|^2\Big\}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant B_2\Big(\|\varepsilon\omega_{m,x}, L_2\|^2(0) + \|\varepsilon w_{m,x}, L_2\|^2(0) + \|\omega_m, L_2\|^2(0) + \|w_m, L_2\|^2(0)\Big) +$$
$$+ O_1(T)\left[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}_1^u)^2 + \frac{\mathcal{F}_1^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right]. \tag{3.20}$$

Из этой оценки в радиально-симметричном случае и в случае $n = 1$, применяя теорему вложения, получим

$$\max_Q\Big(|w_m|^2 + |\omega_m|^2\Big) \leqslant \max_{0<t<t_m}\Big(\|\nabla_x w_m, L_2(\Omega)\|^2 + \|\nabla_x\omega_m, L_2(\Omega)\|^2\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}J_2,$$

где

$$J_2 = B_3\Big(\|\varepsilon\omega_{m,x}, L_2\|^2(0) + \|\varepsilon w_{m,x}, L_2\|^2(0) + \|\omega_m, L_2\|^2(0) + \|w_m, L_2\|^2(0)\Big) +$$
$$+ O_1(T)\left[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}_1^u)^2 + \frac{\mathcal{F}_1^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right].$$

В этом случае справедливо априорное предположение

$$\max(|\omega_m| + |w_m|) \leqslant o(\varepsilon)\varepsilon^{1+\alpha}, \tag{3.21}$$

если
$$J_2 \leqslant o(\varepsilon)\varepsilon^{1+\alpha}.$$

Так же получается оценка в $W_2^{4,2}(Q)$ вида
$$\|\varepsilon^3 w_{m,xxx}, L_2(\Omega)\|^2(t) + \|\varepsilon^3 w_{m,tx}, L_2(\Omega)\|^2(t) + \int\limits_0^t dt \int\limits_\Omega (\varepsilon^3 w_{mxxxx})^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant B_1\Bigg[\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\left(\left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}w_m, L_2\right\|^2(0) + \left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\omega_m, L_2\right\|^2(0)\right)+$$
$$+\|\varepsilon w_{m,tx}, L_2\|^2(0) + \|\varepsilon \omega_{m,tx}, L_2\|^2(0)\Bigg] + O_2(T)\left[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}_3^u)^2 + \frac{\mathcal{F}_3^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right], \tag{3.22}$$

где
$$(\mathcal{F}_3^u)^2(t) = \sum_{|\sigma|\leqslant 3}\int\limits_\Omega \left(\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\mathcal{F}_u\right)^2 dx,$$
$$\mathcal{F}_1^2 = \sum_{|\sigma|\leqslant 3}\int\limits_\Omega \left(\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\mathcal{F}_\varphi\right)^2 dx$$

и
$$\int\limits_\Omega \left((\varepsilon^3\omega_{m,xxx})^2 + (\varepsilon^3\omega_{m,tx})^2\right)dx + \int\limits_0^t \Big\{\varepsilon^{1-\alpha}\left[\|\varepsilon^3\omega_{mxxxx}, L_2\|^2 + \|\varepsilon^3\omega_{m,tt}, L_2\|^2\right]+$$
$$+\|\varepsilon^2\omega_{m,xxx}, L_2\|^2 + \|\varepsilon^2\omega_{m,tx}, L_2\|^2\Big\}\,dt \leqslant B_2\Bigg[\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\left(\left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\omega_m, L_2\right\|^2(0)+\right.$$
$$\left.+\left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}w_m, L_2\right\|^2(0)\right) + \|\varepsilon^3\omega_{m,tx}, L_2\|^2(0) + \|\varepsilon^3 w_{m,tx}, L_2\|^2(0)\Bigg]+$$
$$+O_1(T)\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\left[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}_\sigma^u)^2 + \frac{\mathcal{F}_\sigma^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right].$$

Из этой оценки, применяя теорему вложения, получим
$$\max_Q\left(|w_m|^2 + |\omega_m|^2\right) \leqslant \max_{0<t<t_m}\left(\|w_m, W_2^2(\Omega)\|^2 + \|\omega_m, W_2^2(\Omega)\|^2\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^6}J_4,$$

где
$$J_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^6}B_4\Bigg[\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\left(\left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}\omega_m, L_2\right\|^2(0) + \left\|\varepsilon^{|\sigma|}\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}w_m, L_2\right\|^2(0)\right)+$$
$$+\|\varepsilon^3\omega_{m,tx}, L_2\|^2(0) + \|\varepsilon^3 w_{m,tx}, L_2\|^2(0)\Bigg] + O_1(T)\sum_{|\sigma|\leqslant 3}\left[\max_{0<t<t_m}(\mathcal{F}_\sigma^u)^2 + \frac{\mathcal{F}_\sigma^2}{\varepsilon^{1+\alpha}}\right].$$

Таким образом, в этом случае также справедливо априорное предположение
$$\max(|\omega_m| + |w_m|) \leqslant o(\varepsilon)\varepsilon^{1+\alpha},$$

если
$$J_4 \leqslant o(\varepsilon)\varepsilon^{1+\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что оно выполнено и при $M > 3$. Таким образом, справедливо основное предположение (3.21), а также равномерные оценки для приближений ω_m, w_m в $W_2^{4,2}(Q)$.

4. Лемма Чена

Для завершения доказательства предложения 0.2 приведем новое доказательство леммы Чена [11], которое без труда переносится на широкий класс нелинейных эволюционных уравнений (например, уравнение Зельдовича и КПП уравнение (Колмогорова—Петровского—Пискунова)).

Лемма 4.1. *Для любой четной по* ϱ *функции* $y \in \mathcal{W}$, *где* $\mathcal{W}$ *состоит из функций*

$$y \in W_2^1((-\delta_0, \delta_0))$$

таких, что

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} yY\,d\varrho = 0, \tag{4.1}$$

справедливо неравенство

$$\min_{y \in \mathcal{W}} \mathcal{J}(\mu, t) \geqslant c_3 \int\limits_{\varrho=-\delta_0}^{\varrho=\delta_0} y^2 F\,d\varrho, \tag{4.2}$$

где постоянная $c_3 > 0$ *не зависит от* μ, ε, t.

Рассмотрим подобласть

$$Q_1 = \{x \in Q_t^0,\ |\varrho| \leqslant R_0\varepsilon\}$$

для достаточно большого $R_0 > \delta$. Пусть $\alpha_1^{(1)} = \alpha(\varrho/R_0\varepsilon)$, $\alpha_2^{(1)}$ — разбиение единицы на интервале $(-\delta_0, \delta_0)$ такое, что $(\alpha_1^{(1)})^2 + (\alpha_2^{(1)})^2 \equiv 1$. Положим

$$y_1 = \alpha_1^{(1)} y, \qquad y_2 = \alpha_2^{(1)} y.$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + W''(\chi)\, y^2 \right\} F\,d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_1 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y_1^2 \right\} F\,d\varrho +$$

$$+ \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}|\nabla_x \varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y^2 \right\} F\,d\varrho. \tag{4.3}$$

Если R_0 достаточно мало, то

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}|\nabla_x \varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2) \right) y^2 \right\} F\,d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y_2 \right)^2 + \frac{1}{2} c_0 y^2 \right\} F\,d\varrho. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что для достаточно большого R_0

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} y \right)^2 + W''(\chi)\, y^2 \right\} F\,d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y_1\right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}|\nabla_x\varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\right)y_1^2\right\}F\,d\varrho +$$
$$+ \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y_2\right)^2 + \frac{1}{2}c_0y^2\right\}F\,d\varrho,$$

где $W''(\chi) \geqslant c_0$ на дополнении области Q_*.

Теперь положим

$$y_1 = c_1^y Y + z_y,$$

где

$$c_1^y = \frac{\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_1 Y\,d\varrho}{\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} Y^2\,d\varrho}.$$

Тогда, в силу условия (2.20), имеем

$$(c_1^y)^2 = \left(\int\limits_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon} yY\,d\varrho + \int\limits_{R_0\varepsilon}^{\delta_0} yY\,d\varrho + \int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_2Y\,d\varrho\right)^2 (B_*)^{-2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_*}{B_*^2}\left(\int\limits_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon} y^2\,d\varrho + \int\limits_{R_0\varepsilon}^{\delta_0\varepsilon} y^2\,d\varrho + \int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} y_2^2\,d\varrho\right), \tag{4.5}$$

где

$$B_* = \int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} Y^2\,d\varrho = \int\limits_{-R_0}^{R_0} (\chi'(s))^2\,ds,$$

$$A_* = \int\limits_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon} Y^2\,d\varrho + \int\limits_{R_0\varepsilon}^{\delta_0} Y^2\,d\varrho = \int\limits_{-\delta_0/\varepsilon}^{-R_0} (\chi'(s))^2\,ds + \int\limits_{R_0}^{\delta_0/\varepsilon} (\chi'(s))^2\,ds.$$

Очевидно, что $A_*/B_* \to 0$, если $R_0 \to \infty$. Далее имеем

$$\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon} \left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y_1\right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}|\nabla_x\varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\right)y_1^2\right\}F\,d\varrho =$$
$$= \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2 + \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}|\nabla_x\varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\right)z_y^2\right\}F\,d\varrho +$$
$$+ \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0} \Big\{|\nabla_x\varrho|^2\varepsilon^2((c_1^y)^2Y_\varrho^2 + 2c_1^yY_\varrho(z_y)_\varrho) +$$
$$+ \left(W''(\chi) - \frac{1}{R_0^2}|\nabla_x\varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2 + (\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\right)((c_1^y)^2Y^2 + 2c_1^yYz_y)\Big\}F\,d\varrho.$$

Так же, как при доказательстве предложения 2.1, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\Big\{|\nabla_x\varrho|^2\varepsilon^2((c_1^y)^2Y_\varrho^2+2c_1^yY_\varrho(z_y)_\varrho)+$$

$$+\Big(W''(\chi)-\frac{1}{R_0^2}|\nabla_x\varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\Big)((c_1^y)^2Y^2+2c_1^yYz_y)\Big\}F\,d\varrho=$$

$$=\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}|\nabla_x\varrho|^2((c_1^y)^2Y^2+2c_1^yY\,z_y)\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)F\,d\varrho+$$

$$+\varepsilon\Big[\frac{\chi''}{\chi'}F\big((c_1^y)^2Y^2+2c_1^yYz_y\big)\Big|_{\varrho=R_0\varepsilon}-\frac{\chi''}{\chi'}F\big((c_1^y)^2Y^2+2c_1^yYz_y\big)\Big|_{\varrho=-R_0\varepsilon}\Big]-O(\varepsilon^2)\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}y_1^2F\,d\varrho.$$

Здесь использовано свойство

$$-\varepsilon\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\Big[\frac{\partial}{\partial\varrho}(|\nabla_x\varrho|^2F)(c_1^y)^2Y^2+2c_1^yY\,z_y\Big]\,d\varrho\geqslant-O(\varepsilon^2)\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}y_1^2F\,d\varrho.$$

Полагая $(c_1^y)^2Y^2+2c_1^yY\,z_y=y_1^2-z_y^2$ и учитывая, что $y_1|_{\varrho=-R_0\varepsilon}=y_1|_{\varrho=-R_0\varepsilon}=0$, получим

$$\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\Big\{|\nabla_x\varrho|^2\varepsilon^2((c_1^y)^2Y_\varrho^2+2c_1^yY_\varrho(z_y)_\varrho)+$$

$$+\Big(W''(\chi)-\frac{1}{R_0^2}|\nabla_x\varrho|^2((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\Big)((c_1^y)^2Y^2+2c_1^yYz_y)\Big\}F\,d\varrho=$$

$$=-\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}|\nabla_x\varrho|^2((y_1)^2-z_y^2)\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)F\,d\varrho-$$

$$-\varepsilon\Big[\frac{\chi''}{\chi'}F\,z_y^2\Big|_{\varrho=R_0\varepsilon}-\frac{\chi''}{\chi'}F\,z_y^2\Big|_{\varrho=-R_0\varepsilon}\Big]-O(\varepsilon^2)\int_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}y_1^2Fd\varrho.$$

В то же время

$$\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\big|(y_1)^2-z_y^2\big|\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant-2B_*D_*(c_1^y)^2-\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)z_y^2\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant-\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)z_y^2\,d\varrho-\frac{2A_*}{B_*}\Bigg(\int\limits_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon}y^2\,d\varrho+\int\limits_{R_0\varepsilon}^{\delta_0\varepsilon}y^2\,d\varrho+\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}y_2^2\,d\varrho\Bigg),$$

где

$$D_*(\mu,t)=\frac{1}{R_0^2}\max_{-R_0\varepsilon<\varrho<R_0\varepsilon}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2).$$

Отсюда следует, что если R_0 достаточно велико, то

$$\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\Big\{\Big(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y\Big)^2+W''(\chi)\,y^2\Big\}F\,d\mu\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2+\left(W''(\chi)-2\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\right)z_y^2\right\}F\,d\mu\,d\varrho+$$

$$+\sqrt{2}\varepsilon\int\limits_{\Gamma_t}\left[\chi F\,z_y^2\Big|_{\varrho=R_0\varepsilon}-\chi F\,z_y^2\Big|_{\varrho=-R_0\varepsilon}\right]d\mu+$$

$$+\frac{1}{4}c_0\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_t}(c_1^y)Y^2F\,d\mu\,d\varrho-O(\varepsilon^2)\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}\int\limits_{\Gamma_t}y_1^2F\,d\mu\,d\varrho+$$

$$+\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}\int\limits_{\Gamma_t}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}y_2\right)^2+\frac{1}{4}c_0y^2\right\}F\,d\mu\,d\varrho. \tag{4.6}$$

Здесь использовано то, что

$$\int\limits_{-\delta_0}^{-R_0\varepsilon}y^2\,d\varrho+\int\limits_{R_0\varepsilon}^{\delta_0\varepsilon}y^2\,d\varrho+\int\limits_{-R_0\varepsilon}^{R_0\varepsilon}y_2^2\,d\varrho\leqslant C_1\int\limits_{-\delta_0}^{\delta_0}y_2^2F\,d\varrho.$$

Таким образом, исследование неравенства (2.22) сводится к изучению функции z_y с носителем в ε окрестности Q_1 фронта Γ_t.

Далее разобьем область Q_1 на подобласти

$$Q_j^*=\{x\in Q_1,\ -(R_0-j\sigma_0)\varepsilon<\varrho<(R_0-j\sigma_0)\varepsilon\},$$

где $j=1,\ldots,N$, $N=[R_0/\sigma_0]$, $Q_N^*=Q_*$, постоянные δ, σ_0 выберем ниже. Через Σ_j^* обозначим интервалы $\Sigma_j^*=\{(R_0-j\sigma_0)\varepsilon<\varrho<(R_0-j\sigma_0)\varepsilon\}\in\mathbb{R}_\varrho^1$ для $j=0,1,\ldots,N_1$, $\delta=R_0-N\sigma_0$.

На первом шаге положим

$$z_y=c_1^zY+x_1^z,$$

где

$$c_1^z=\frac{\int\limits_{\Sigma_1}z_yY\,d\varrho}{\int\limits_{\Sigma_1}Y^2\,d\varrho}.$$

Тогда, в силу условия

$$\int\limits_{\Sigma_0}z_yYF\,d\varrho=0,$$

так же, как выше, имеем

$$(c_1^z)^2=\left[\int\limits_{\Sigma_0\setminus\Sigma_1}z_yY\,d\varrho\right]^2B_1^{-2}\leqslant\frac{A_1}{B_1^2}\int\limits_{\Sigma_0\setminus\Sigma_1}z_y^2F\,d\varrho, \tag{4.7}$$

где

$$B_1=\int\limits_{\Sigma_1}Y^2F\,d\varrho=\int\limits_{-(R_0-\sigma_0)}^{(R_0-\sigma_0)}(\chi'(s))^2F\,ds,$$

$$A_1=\int\limits_{Q_0\setminus\Sigma_1}Y^2F\,d\varrho=\int\limits_{-R_0}^{-(R_0-\sigma_0)}(\chi'(s))^2F\,ds+\int\limits_{(R_0-\sigma_0)}^{R_0}(\chi'(s))^2F\,ds.$$

Отсюда следует возможность повторения предыдущих рассуждений, в силу которых как результат редукции получим

$$\int\limits_{\Sigma_1}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2+W''(\chi)z_y^2\right\}F\,d\varrho=\int\limits_{\Sigma_1}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x_1^z\right)^2+W''(\chi)(x_1^z)^2\right\}F\,d\varrho+$$
$$+\int\limits_{\Sigma_1}\left\{|\nabla_x\varrho|^2\varepsilon^2\Big((c_1^z)^2Y_\varrho^2+2c_1^zY_\varrho(x_1^z)_\varrho\Big)+W''(\chi)\Big((c_1^z)^2Y^2+2c_1^zY\,x_1^z\Big)\right\}F\,d\varrho.$$

Интегрируя по частям, в силу равенства $(c_1^z)^2Y^2+2c_1^zY\,x_1^z=z_y^2-(x_1^z)^2$, получим

$$\int\limits_{\Sigma_1}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2+\left(W''(\chi)-2\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2)\right)z_y^2\right\}F\,d\varrho\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Sigma_1}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x_1^z\right)^2+(W''(\chi)-2D_1^*)(x_1^z)^2\right\}F\,d\varrho-$$
$$-\sqrt{2}\varepsilon\Big[\chi F(z_y^2-(x_1^z)^2)\Big|_{\varrho=(R_0-\sigma_0)\varepsilon}-\chi F(z_y^2-(x_1^z)^2)\Big|_{\varrho=-(R_0-\sigma_0)\varepsilon}\Big]-$$
$$-2D_1^*(c_1^z)^2B_1-O(\varepsilon^2)\int\limits_{\Sigma_1}z_y^2F\,d\varrho,\tag{4.8}$$

где

$$D_1^*(\mu,t)=\max_{\Sigma_1}((\alpha_1^{(1)})_\varrho^2+(\alpha_1^{(1)})_\varrho^2).$$

В то же время

$$\varepsilon(z_y^2-(x_1^z)^2)\Big|_{\varrho=\pm(R_0-\sigma_0)\varepsilon}\leqslant\delta_1\frac{B_1^2}{4A_1^2}(c_1^z)^2+\varepsilon^2\frac{4A_1^2}{\delta_1B_1^2}(x_1^z)^2\Big|_{\varrho=\pm(R_0-\sigma_0)\varepsilon}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon\int\limits_{\Sigma_0\setminus\Sigma_1}z_y^2F\,d\varrho+\varepsilon\frac{4A_1^2}{B_1^2}(x_1^z)^2\Big|_{\varrho=\pm(R_0-\sigma_0)\varepsilon}.$$

Очевидно, что

$$\frac{4A_1^2}{\delta_1B_1^2}=O(\sigma_0^2).$$

Нетрудно видеть, что из условия

$$\int\limits_{\Sigma_1}x_1^zYF\,d\varrho=0$$

и четности функции x_1^z следует, что расстояние от любой точки интервала $(-(R_0-\sigma_0)\varepsilon,(R_0-\sigma_0)\varepsilon)$ до ее нулей не превосходит $(R_0-\sigma_0)\varepsilon$. Отсюда следует

$$\varepsilon(x_1^z)^2F\Big|_{\varrho=\pm\delta\varepsilon}\leqslant(R_0-\sigma_0)\varepsilon^2\int\limits_{\Sigma_1}(x_1^z\sqrt{F})_\varrho^2\,d\varrho\leqslant2C_1\varepsilon^2R_0\int\limits_{\Sigma_1}\Big((x_1^z)^2+(x_1^z)_\varrho^2\Big)F\,d\varrho,$$

где $C_1=\max\limits_{Q_1}F^{-1}F_\varrho$. Тогда

$$-\sqrt{2}\varepsilon\Big[\chi F(z_y^2-(x_1^z)^2)\Big|_{\varrho=(R_0-\sigma_0)\varepsilon}-\chi F(z_y^2-(x_1^z)^2)\Big|_{\varrho=-(R_0-\sigma_0)\varepsilon}\Big]\geqslant$$
$$\geqslant-\max_{Q_1}F\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon\int\limits_{\Sigma_0\setminus\Sigma_1}z_y^2F\,d\varrho+R_0\frac{16A_1^2}{B_1^2}C_1\varepsilon^2\int\limits_{\Sigma_1}\Big((x_1^z)^2+(x_1^z)_\varrho^2\Big)F\,d\varrho.$$

Эти оценки позволяют на первом шаге получить следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Sigma_0} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2}((\alpha_1^{(1)})^2_\varrho + (\alpha_1^{(1)})^2_\varrho) \right) z_y^2 \right\} F\, d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} z_y \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_* - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_1}{B_1} \right) z_y^2 \right\} F\, d\varrho +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_1} \left\{ \left(1 - \frac{16 A_1^2}{\delta_1 B_1^2} C_1 \right) \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_1^z \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_1^* \right) (x_1^z)^2 \right\} F\, d\varrho - O(\varepsilon^2) \int\limits_{\Sigma_1} z_y^2 F\, d\varrho. \quad (4.9)$$

Положим

$$\mathcal{N}_1 = W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_* - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_1}{B_1}$$

и

$$\mathcal{H}_1^{(1)} = W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_1^*,$$

$$\mathcal{H}_1^{(2)} = 1 - R_0 \frac{16 A_1^2}{\delta_1 B_1^2} C_1.$$

Постоянные R_0, σ_0 выберем из условия

$$\min_{Q_1 \setminus Q_*} \mathcal{N} \geqslant a_0, \qquad \min_{Q_1} \mathcal{H}_1^{(1)} \geqslant a_0, \qquad \min_{Q_1^*} \mathcal{N} \geqslant a_0$$

для некоторой постоянной $a_0 > 0$, не зависящей от ε, R_0, σ_0, t.

Очевидно, этот процесс можно продолжить. Нетрудно видеть, что на N-м шаге получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_{N-1}^z)^2 \right\} F\, d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \left[\int\limits_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int\limits_{\delta\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon} \right] \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_{N-1}^z \right)^2 + \left(\mathcal{H}_{N-1}^{(1)} - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_N}{B_N} \right) (x_{N-1}^z)^2 \right\} F\, d\varrho +$$

$$+ \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(\mathcal{H}_{N-1}^{(2)} - \frac{16 A_1^2}{\delta_1 B_1^2} C_1 \right) \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_1^z)^2 \right\} F\, d\varrho - O(\varepsilon^2) \int\limits_{-(R_0-\sigma_0)\varepsilon}^{(R_0-\sigma_0)\varepsilon} z_y^2 F\, d\varrho, \quad (4.10)$$

где

$$(c_j^z)^2 = \left(\int\limits_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} z_y Y\, F d\varrho \right)^2 B_j^{-2} \leqslant \frac{A_j}{B_j^2} \int\limits_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} z_y^2 F\, d\varrho, \quad (4.11)$$

$$B_j = \int\limits_{\Sigma_j} Y^2 F\, d\varrho = \int\limits_{-(R_0 - j\sigma_0)}^{(R_0 - j\sigma_0)} (\chi'(s))^2 F\, ds,$$

$$A_j = \int\limits_{\Sigma_{j-1} \setminus \Sigma_j} Y^2 F\, d\varrho = \left(\int\limits_{-(R_0 - j\sigma_0)}^{-(R_0-(j-1)\sigma_0)} + \int\limits_{R_0 - j\sigma_0}^{R_0-(j-1)\sigma_0} \right) (\chi'(s))^2 F\, ds.$$

Легко видеть, что равномерно по j

$$\frac{A_j}{B_j} \leqslant C_0 \sigma_0,$$

где постоянная C_0 не зависит от σ_0, ε, t при фиксированном R_0. Таким образом, для $j \geqslant 2$ имеем

$$\mathcal{N}_j = \mathcal{H}^{(1)}_{j-1} - \varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} - D_1^* \frac{A_j}{B_j} = W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_1^* - D_1^* \frac{A_j}{B_j}$$

и

$$\mathcal{H}^{(1)}_j = \mathcal{H}^{(1)}_{j-1} = W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_1^*,$$

$$\mathcal{H}^{(2)}_j = \mathcal{H}^{(2)}_{j-1} - R_0 \frac{16A_j^2}{B_j^2} C_1.$$

Значит, постоянную R_0 можно выбрать из условия

$$\min_{Q_1} \left(W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_1^* \right) \geqslant 2a_0 > 0.$$

Зафиксировав R_0, выберем σ_0 из условий

$$\max_{j=1,\ldots,N} D_1^* \frac{A_j}{B_j} < \frac{1}{2} a_0,$$

$$\sum_1^N R_0 \frac{16A_j^2}{B_j^2} C_1 \leqslant 16 C_1 R_0 C_0^2 N \sigma_0^2 < a_0,$$

а $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ — из условия

$$\varepsilon \max_{Q_1} F \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2} a_0.$$

Теперь рассмотрим область Q_* и положим

$$x^z_{N-1} = c^z_N\, Y + x^z_N,$$

где

$$c^z_N = \frac{\displaystyle\int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} x^z_{N-1}\, Y\, d\varrho}{\displaystyle\int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} Y^2\, d\varrho}.$$

Тогда, в силу условия

$$\int_{\Sigma_{N-1}} x^z_{N-1} Y F\, d\varrho = 0,$$

имеем

$$(c^z_N)^2 = \left(\int_{\Sigma_{N-1} \setminus \Sigma_N} x^z_{N-1}\, Y F\, d\varrho \right)^2 B_N^{-2} \leqslant \frac{A_N}{B_N^2} \left(\int_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon} \right) (x^z_{N-1})^2\, d\varrho, \tag{4.12}$$

где

$$B_N = \int_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} Y^2 F\, d\varrho,$$

$$A_N = \left(\int_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon} + \int_{\delta\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon} \right) Y^2\, F d\varrho.$$

Повторяя предыдущие раасуждения, как результат редукции, получим

$$\int_{\Sigma_N} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x^z_{N-1} \right)^2 + \left(W''(\chi) - 2\frac{1}{R_0^2} D_* \right) (x^z_{N-1})^2 \right\} F\, d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left\{ \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + (W''(\chi) - D_1^*)(x_N^z)^2 \right\} F \, d\varrho -$$

$$-\sqrt{2}\varepsilon \Big[\chi F((x_{N-1}^z)^2 - (x_N^z)^2) \Big|_{\varrho=\delta\varepsilon} - \chi F((x_{N-1}^z)^2 - (x_N^z)^2) \Big|_{\varrho=-\delta\varepsilon} \Big] -$$

$$-D_1^*(c_N^z)^2 B_N - O(\varepsilon^2) \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} (x_{N-1}^z)^2 F \, d\varrho.$$

Теперь оценим последний интеграл

$$\int\limits_{\varrho=-\delta\varepsilon}^{\varrho=\delta\varepsilon} \left\{ \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} \left(|\nabla_x \varrho| \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 + \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_N^z)^2 \right\} F \, d\varrho.$$

В силу условия

$$\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} x_N^z Y F \, d\varrho = 0$$

и четности функции x_N^z, расстояние от любой точки интервала $(-\delta\varepsilon, \delta\varepsilon)$ до ближайшей точки $(\varrho = \varrho_*)$ нулевой линии уровня функции x_N^z не больше, чем δ. Тогда

$$x_N^z \sqrt{F} = \int\limits_{\varrho_*}^{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (x_N^z \sqrt{F}) \, ds,$$

откуда

$$(x_N^z)^2 F \leqslant (\varrho - \varrho_*) \int\limits_{\varrho_*}^{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} (x_N^z \sqrt{F}) \right)^2 ds.$$

Интегрируя по ϱ, получим неравенство

$$(1 - \delta_1) \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} (x_N^z)^2 F \, d\varrho \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \delta_1) \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{2} \left[(1 + \delta_2) \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 F \, d\varrho + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\delta_2} \right) \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left(\frac{F_\varrho}{F} \right)^2 (x_N^z)^2 F \, d\varrho \right]$$

с произвольной постоянной $\delta_2 > 0$. Пусть

$$\Lambda = \frac{1}{1 + \delta_2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \delta^2 (1 + \delta_2)}{8 \delta_2} \max_{Q_*, 0 < t < T} \left(\frac{F_\varrho}{F} \right)^2 \right) = \frac{1 - O_{\delta_2}(\varepsilon)}{1 + \delta_2};$$

тогда

$$(1 - \delta_1) \Lambda \frac{2}{\delta^2} \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} (x_N^z)^2 F \, d\varrho \leqslant \varepsilon^2 (1 - \delta_1) \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right)^2 F \, d\varrho.$$

Отсюда

$$\big(\min_{Q_*} \mathcal{H}_{N-1}^{(2)} - \delta_1 - \check{O}(\varepsilon) \big) \varepsilon^2 \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \varrho} x_N^z \right|^2 F \, d\varrho + \int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon} \mathcal{H}_{N-1}^{(1)} (x_N^z)^2 F \, d\varrho \geqslant$$

$$\geqslant \big(\min_{Q_*}\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}\delta_1 - \check{O}(\varepsilon)\big)\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\left|\frac{\partial}{\partial\varrho}\,x^z_N\right|^2 dx+$$

$$+\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\bigg((1-\delta_1)\Lambda\min_{Q_*}\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}\frac{2}{\delta^2}+\mathcal{H}^{(1)}_{N-1}-\check{O}(\varepsilon)\bigg)(x^z_N)^2F\,d\varrho;$$

как было показано при оценке нечетной функции,

$$(1-\delta_1)\Lambda\frac{2}{\delta^2}+W''(\chi)-\check{O}(\varepsilon)\geqslant c_0>0$$

на интервале $-\delta\varepsilon<\varrho<\delta\varepsilon$ для некоторой постоянной c_0 и некоторого $1<\delta<\sqrt{2}$, не зависящих от ε, μ, t. Отсюда следует, что для достаточно большого R_0 и достаточно малого $\sigma_0\leqslant\sigma_0^*$ существует

$$\delta=\delta(R_0,\sigma_0)\in(1,\sqrt{2})$$

такое, что

$$\left[(1-\delta_1)\Lambda\frac{2}{\delta^2}\min_{Q_*}\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}+\mathcal{H}^{(1)}_{N-1}-\check{O}(\varepsilon)\right]\bigg|_{\varepsilon=0}\geqslant a_0>0$$

для некоторого $a_0>0$. Так же, как при исследовании нечетных функций, отметим, что в этом случае $\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}\geqslant c_1>0$ вне интервала $-\delta\varepsilon<\varrho<\delta\varepsilon$ для некоторой постоянной c_1, не зависящей от ε, μ, t. Следовательно, в этом случае

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_N\right)^2+W''(\chi)(x^z_N)^2\right\}F\,d\varrho\geqslant a_0\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left(\delta_1\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_N\right)^2+(x^z_N)^2\right)F\,d\varrho. \tag{4.13}$$

Суммируя оценки (4.13) и (4.12), получим

$$\int\limits_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon}\left\{\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_{N-1}\right)^2+\mathcal{H}^{(1)}_{N-1}(x^z_{N-1})^2\right\}F\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant\Bigg[\int\limits_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon}+\int\limits_{\delta\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon}\Bigg]\left\{\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_{N-1}\right)^2+\left(\mathcal{H}^{(1)}_{N-1}-\varepsilon\max_{Q_1}F\frac{1}{\sqrt{2}}-D_1^*\frac{A_N}{B_N}\right)(x^z_{N-1})^2\right\}F\,d\varrho+$$

$$+\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\left\{\left(\mathcal{H}^{(2)}_{N-1}-\frac{16A_N^2}{B_N^2}C_1\right)\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_N\right)^2+\mathcal{H}^{(1)}_{N-1}(x^z_N)^2\right\}F\,d\varrho-O(\varepsilon^2)\int\limits_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon}(x^z_N)^2F\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant a_0\Bigg[\Bigg[\int\limits_{-(\sigma_0+\delta)\varepsilon}^{-\delta\varepsilon}+\int\limits_{\delta\varepsilon}^{(\sigma_0+\delta)\varepsilon}\Bigg]\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_{N-1}\right)^2+(x^z_{N-1})^2\right\}F\,d\varrho+$$

$$+\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_N\right)^2+(x^z_N)^2\right\}F\,d\varrho-O(\varepsilon^2)\int\limits_{-(\delta+\sigma_0)\varepsilon}^{(\delta+\sigma_0)\varepsilon}(x^z_N)^2F\,d\varrho\Bigg]. \tag{4.14}$$

Суммируя эти оценки по j, получим

$$\int\limits_{\Sigma_0}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2+\left(W''(\chi)-2\frac{1}{R_0^2}D_*\right)z_y^2\right\}F\,d\varrho\geqslant$$

$$\geqslant a_0\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\int\limits_{\Sigma_{j-1}\setminus\Sigma_j}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x^z_{N-1}\right)^2+(x^z_{N-1})^2\right\}F\,d\varrho+$$

$$+\int\limits_{-\delta\varepsilon}^{\delta\varepsilon}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}x_N^z\right)^2+(x_N^z)^2\right\}F\,d\varrho\Bigg]-O(\varepsilon^2)\int\limits_{\Sigma_0}z_y^2F\,d\varrho. \tag{4.15}$$

Из оценок (4.12), (4.11) следует

$$\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Sigma_j}(c_j^z)^2Y^2F\,d\varrho\leqslant\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Sigma_{j-1}\setminus\Sigma_j}(x_{j-1}^z)^2F\,d\varrho. \tag{4.16}$$

Как следствие оценок (4.15), (4.16), получаем требуемый результат

$$\int\limits_{\Sigma_0}\left\{\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2+\left(W''(\chi)-2\frac{1}{R_0^2}D_*\right)z_y^2\right\}F\,d\varrho\geqslant a_1\int\limits_{\Sigma_0}\left[\left(|\nabla_x\varrho|\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varrho}z_y\right)^2+z_y^2\right]F\,d\varrho$$

для некоторой постоянной $a_1>0$, не зависящей от R_0, σ_0, ε, μ, t. Отсюда следует справедливость неравенства (4.2) леммы Чена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веригин Н. Н.* Неустойчивое течение грунтовых вод вблизи резервуара// Докл. АН СССР. — 1949. — *6*, № 6. — С. 1067–1070.
2. *Данилов В. Г., Омельянов Г. А., Радкевич Е. В.* Асимптотическое решение системы фазового поля и модифицированная задача Стефана// Дифференц. уравнения. — 1995. — *31*, № 3. — С. 483–491
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
4. *Радкевич Е.* Об условиях существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса—Томсона)// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 2.
5. *Радкевич Е. В.* Асимптотические решения системы фазового поля// Дифференц. уравнения. — 1993. — *29*, № 3. — С. 487–500.
6. *Bailly J.* Local existence of classical solutions to first order parabolic equations describing free boundaries. — University de PARIS-SUD MATHEMATIQUES Batiment 425 91405 ORSAY, France, 1996.
7. *Bear J.* Dynamics of Fluids in Porous Media. — New York: American Elsevier, 1972.
8. *Berger M. S., Fraenkel L. E.* On the asymptotic solution of a nonlinear Dirichlet problem// J. Math. and Mech. — 1970. — *19*. — С. 553–585.
9. *Bonami A., Hilhorst D., Logak E., Mimura M.* A free boundary problem arising in a chemotaxis model// In: Free boundary problem, theory and applications. Eds. M. Niezgodka and P. Sitzlecki. — Longman, 1996.
10. *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary// Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1986. — *92*. — С. 205–245.
11. *Chen X.* Spectrum for the Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, and Phase-field equations for general interfaces// Commun. Part. Differ. Equat. — 1994. — *19*, № 7–8. — С. 1371–1395.
12. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// J.E.P.M. (in press)
13. *Elliot C. M., Ockendon J. R.* Weak and Variational methods for Moving Boundary Problems. — London: Pitman, 1982.
14. *Hilhorst D., Logak E., Nishiura Y.* Singular limit for an Allen-Cahn equation with a nonlocal term// SIAM J. Math. Anal. — 1993. — *24*, № 2. — С. 299–316.
15. *Muskat M.* Two fluid systems in porous media. The encroachment of water into an oil sand// Physics. — 1934. — *5*. — С. 250–264.
16. *Oleinik O., Primicerio M., Radkevich E.* Stefan-like problems// Meccanica. — 1993. — *28*. — С. 129–143.
17. *Soner H. M.* Convergence of the Phase field equations to the Ullins-Sekerka problem with kinetic undercooling// Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1995. — *131*. — С. 139–197.

Е. В. Радкевич
Московский государственный университет им. Ломоносова
E-mail: radk@mech.math.msu.su