

ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики**

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 17

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ



**Тбилиси
2004**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

А. А. Болибрух (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лаши (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 17

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

А. Г. Ченцов

**Конечно-аддитивные меры
и расширения абстрактных задач управления**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2004

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ И РАСШИРЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

© 2004 г. А. Г. ЧЕНЦОВ

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые задачи теории корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер и смежные вопросы самой теории меры

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Двухзначные меры и ультрафильтры измеримых пространств в конструкциях расширений	6
1. Множества притяжения и их обобщенное представление	7
2. Общие определения и обозначения	8
3. Измеримые структуры	11
4. Фильтры измеримых пространств	13
5. Фильтры измеримых пространств (продолжение)	19
6. Об измеримых пространствах, допускающих недираковские счетно-аддитивные $(0, 1)$ -меры	23
7. Недираковские счетно-аддитивные $(0, 1)$ -меры на σ -алгебре множеств	33
8. Непрерывные измеримые пространства	35
9. Вопросы функциональной отделимости и структура обобщенных элементов	40
10. Конструкции расширений в классе $(0, 1)$ -мер	42
11. Одна конкретная схема расширения в классе $(0, 1)$ -мер	44
Глава 2. Непрямые методы построения корректных расширений	48
12. Введение	48
13. Задача управления с фиксированным временем окончания	49
14. Некоторые примеры	54
15. Конечно-аддитивные меры как обобщенные элементы в конструкциях расширений	66
16. Проблема компактификации пучка траекторий линейной управляемой системы с разрывной правой частью	75
17. Топологические конструкции представлений множеств притяжения	80
Глава 3. Конструкции расширений, универсальных в диапазоне ограничений асимптотического характера	83
18. Содержательная постановка задачи	83
19. Общая схема построения расширения	85
20. Конструкции расширений в классе конечно-аддитивных мер	95
21. Абстрактные аналоги импульсных ограничений и процедуры компактификации	104
22. Компактификация пространства решений и свойство окрестностной реализации множеств притяжения	111
23. Неполная модель расширения в классе конечно-аддитивных мер	117
24. Модель расширения с использованием совершенного обобщенного целевого отображения	129
25. Одна задача управления материальной точкой: вопросы асимптотической достижимости	133
26. Свойство асимптотической нечувствительности множества достижимости	138

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 01-01-96450, 03-01-00415) и Министерства образования России (проект E02-1.0-232).

27. Абстрактная версия расширения задачи управления с толчками	144
Заключение	150
Список литературы	151

ВВЕДЕНИЕ

Предметом исследования в настоящей работе являются конструкции расширений задач управления и подобных им задач, имеющих следующий содержательный смысл: мы рассматриваем вопросы достижимости тех или иных элементов на значениях отображений, аргументы которых можно интерпретировать как управления. На выбор последних накладываются ограничения асимптотического характера, что естественным образом приводит к использованию приближенных решений, определяемых в виде направленностей, фильтров (ультрафильтров) и/или конечно-аддитивных $(0,1)$ -мер. В целом ряде случаев для исчерпывающего решения асимптотической версии задачи о достижимости достаточно использовать приближенные решения-последовательности (секвенциальные приближенные решения). В пространстве оценок приближенные решения того или иного типа могут формировать некоторые образы, заменяющие по сути дела образы обычных решений, т.е. точек исходного пространства решений. В дальнейшем нас интересуют только такие приближенные решения. Иными словами, мы занимаемся лишь асимптотикой, при которой реализуется сходимость в должным образом топологизированном пространстве оценок. При этом естественным образом возникает множество притяжения в пространстве оценок. Построение множества притяжения представляет собой достаточно трудную, но весьма актуальную задачу, поскольку именно это множество характеризует возможности достижимости в смысле, отвечающем потребностям практики, т.е. удовлетворяет соображениям, связанным с инженерной реализацией решений в системах управления. С этими конструкциями тесно связаны конструкции релаксаций экстремальных задач и, в частности, задач оптимального управления. В последнем случае речь идет о реализации экстремальных значений критерия в условиях пренебрежимо малого, а потому приемлемого для практики нарушения системы ограничений.

В связи с постановкой упомянутой содержательной задачи можно отметить ряд интересных вопросов теоретического характера. В самом деле, возникает задача асимптотического анализа, связанная с исходной постановкой. Последнюю можно сейчас охарактеризовать следующим образом. Заданы два непустых множества E и H , а также отображение h из множества E в множество H . В дальнейших рассуждениях множество E фиксировано и используется для различных целей, а остальные параметры данной постановки могут меняться. Множество E — множество обычных решений произвольной природы — переводится посредством оператора h в пространство оценок, определяемое посредством H . Кроме того, пусть задано множество E_∂ , $E_\partial \subset E$, определяющее выбор допустимых, в некотором смысле, решений. Разумеется, конкретная природа ограничений, связанных с E_∂ , может быть различной. Рассмотрим только одну весьма распространенную версию. Именно, пусть заданы непустое множество X , оператор s из множества E в множество X , а также множество Y , $Y \subset X$. Ограничение, формирующее E_∂ , определяется условием $s(e) \in Y$, где $e \in E$. Иными словами, E_∂ есть множество всех точек $e \in E$, удовлетворяющих упомянутому ограничению. Образ определенного таким образом множества E_∂ при действии оператора h можно интерпретировать как достижимое (при Y -ограничении) множество, характеризующее наши возможности. Будем исследовать возможности, возникающие при «исчезающе малом» ослаблении Y -ограничения. Как минимум, мы должны попытаться исследовать возможность замены множества Y тем или иным множеством $\tilde{Y}$, для которого $Y \subset \tilde{Y} \subset X$. При этом мы должны по прежнему правилу, но с новым ограничением, построить достижимое множество, которое будет содержать достижимое множество невозмущенной задачи.

Часто бывает трудно выбрать то или иное конкретное множество $\tilde{Y}$. В этой связи уместно обратиться к математической идеализации, при которой какое-либо определенное множество $\tilde{Y}$

не фиксируется, а, напротив, изменяется в пределах некоторого наперед выбранного семейства $\mathcal{U}$. В этом случае в множестве H также реализуется семейство достижимых множеств, отвечающих каждому тому или иному ограничению $s(e) \in \dot{Y}$, где $\dot{Y} \in \mathcal{U}$. Если H топологизировано, то для множеств из этого последнего семейства может быть определен соответствующий предел, который при минимальных условиях на $\mathcal{U}$ является множеством притяжения в пространстве оценок. Относительно $\mathcal{U}$, в нетривиальном случае $Y \neq \emptyset$, принимаем два соглашения:

- 1) $\mathcal{U}$ — базис фильтра множества X ;
- 2) пересечение всех множеств из $\mathcal{U}$ есть Y .

Эти условия означают, что $\mathcal{U}$ вместе с любыми двумя своими множествами содержит некоторое подмножество их пересечения. С практической точки зрения здесь закладывается возможность своеобразного уточнения ограничений. С математической же точки зрения основное свойство базиса фильтра означает построение направленной системы ужесточающихся ограничений, что естественно для таких конструкций асимптотического анализа. Условие 2) означает в содержательном отношении, что точки множества X , не принадлежащие Y , в результате перебора всех ограничений, порождаемых семейством $\mathcal{U}$, будут удалены из рассмотрения. Таким образом, условие 2) «увязывает» в некотором естественном смысле ограничения асимптотического характера и ограничения невозмущенной задачи. Оказывается, что в составе множества притяжения влияние этих точек зачастую сохраняется, т.е. появляются оценки, достижимые в асимптотическом смысле и недостижимые в обычном. Заметим, что в таких случаях возможно и более существенное различие: множество притяжения может не совпадать и с замыканием достижимого множества невозмущенной задачи. Следовательно, в множестве притяжения могут появиться элементы пространства оценок, не аппроксимируемые в классе точных решений. Примеры такого рода будут рассмотрены в начале второй главы настоящей работы. Построение множеств притяжения представляет весьма интересную проблему и с теоретической точки зрения.

К этому можно добавить и следующее соображение: если Y является вполне определенным множеством, хотя и относится, вероятно, к идеализированной ситуации выбора решений, то семейство $\mathcal{U}$ можно, вообще говоря, выбрать по-разному, соблюдая вышеупомянутые условия 1), 2). Множества притяжения, отвечающие различным вариантам $\mathcal{U}$, также могут различаться, как показывают уже простейшие примеры. Имея приблизительное представление о том, как в принципе можно ослаблять Y -ограничение, было бы полезно иметь множество притяжения, универсальное в том или ином диапазоне ограничений асимптотического характера. Эта задача также будет рассматриваться в настоящей работе. Итак, мы стремимся построить множество притяжения в пространстве оценок, универсальное в некоторых пределах.

Хорошо известно, что для достижения упомянутой цели, как минимум, требуется удачно выбирать пространство обобщенных элементов с тем, чтобы ввести более традиционные вспомогательные задачи, в которых возмущение системы ограничений не допускается. Иными словами, для успешного решения задачи в асимптотической постановке важно свести последнюю к постановке стандартной. Это сведение можно трактовать как расширение. При этом обычно происходит определенное усовершенствование пространства решений, зачастую привлекаются процедуры, составляющие тот или иной вариант компактности всему пространству обобщенных элементов или какой-то существенной (для данной задачи) его части.

Заметим, что в одних случаях упомянутые обобщенные элементы оказываются тесно связанными с элементами исходного пространства и, по сути дела, имеют вид приближенных решений. Например, можно от рассмотрения точек пространства обычных решений перейти к рассмотрению последовательностей в нем. Эти последовательности можно объявить обобщенными элементами. Далее рассматриваем такие версии как прямые методы построения расширений. В других случаях обобщенные элементы могут сильно отличаться от приближенных решений, определяемых, в частности, в виде последовательностей обычных решений (точки множества E). Эффект расширения достигается за счет построения разумных идеализаций, имеющих другую функциональную структуру. К числу наиболее изящных конструкций такого рода можно отнести построение расширений в нелинейных задачах оптимального управления с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л. С. Понтрягиным. Упомянутые расширения

использовали в качестве обобщенных элементов мерозначные функции времени, т.е. функции, значениями которых являются (нормированные) меры или, в другой редакции, (стратегические) меры на декартовом произведении борелевских структур, одна из которых соответствует промежутку управления при оснащении его σ -алгеброй борелевских множеств. В этой связи прежде всего отметим исследования Дж. Варги, Р. В. Гамкрелидзе и Л. Янга. Данный подход к построению расширений задач управления в игровых постановках использовался в работах Н. Н. Красовского и его школы.

К упомянутому направлению можно отнести и другие типы расширений, использующие существенные особенности исходного пространства решений, но игнорирующие при этом второстепенные обстоятельства, связанные с описанием этого пространства. Например, оказалось удобным в некоторых задачах управления с импульсными ограничениями использовать в качестве обобщенных элементов конечно-аддитивные меры. В упомянутых случаях можно говорить о непрямых методах построения расширений. Последние могут в некоторых случаях приводить к получению весьма конкретных свойств исходной задачи и ее асимптотической версии.

В настоящей работе мы стремимся охватить широкий круг вышеупомянутых вопросов, рассматривая как прямые, так и не прямые конструкции расширений, хотя указанное различие имеет зачастую весьма относительный характер. Попутно рассматриваются смежные вопросы, связанные прежде всего с построением подходящего математического аппарата. Особенностью данного направления является то, что в качестве обобщенных элементов здесь используются конечно-аддитивные меры. Последнее приводит к необходимости рассмотрения отдельных фрагментов теории меры. К числу других особенностей можно отнести следующие три обстоятельства. Прежде всего, в рассматриваемых далее конструкциях расширений, как правило, используются неметризуемые топологии, включая наиболее традиционный случай компактификаций. Второе обстоятельство можно связать с использованием конструкций расширения пространств, не сводящихся, вообще говоря, к компактификациям. Это касается, в первую очередь, задач, для которых любые компактификации разрушают некоторые существенные связи и поэтому их применение плохо согласуется с содержательной стороной дела. Наконец, мы рассматриваем расширения, универсальные в диапазоне ограничений асимптотического характера. С последним обстоятельством связано получение некоторых условий асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений (имеем здесь определенную аналогию с робастностью). В плане конкретных приложений ориентируемся прежде всего на задачи управления линейными системами с возможными разрывными зависимостями в коэффициентах при управляющих воздействиях. При этом выбор этих воздействий может быть стеснен импульсными ограничениями, краевыми и промежуточными условиями на траектории, а также фазовыми ограничениями. Все рассматриваемые далее примеры являются модельными, имеющими чисто иллюстративный характер.

Автор выражает глубокую благодарность учителю — Н. Н. Красовскому за постоянное внимание и поддержку исследований, ценные советы и обсуждение результатов.

При подготовке рукописи большую помощь оказали С. И. Морина и Л. Н. Коротаева. Автор выражает им глубокую признательность.

ГЛАВА 1

ДВУЗНАЧНЫЕ МЕРЫ И УЛЬТРАФИЛЬТРЫ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ В КОНСТРУКЦИЯХ РАСШИРЕНИЙ

Рассматриваются прямые версии расширений задач о достижимости в функциональных пространствах при наличии ограничений асимптотического характера. В качестве обобщенных элементов используются конечно-аддитивные $(0, 1)$ -меры или, в другой редакции, ультрафильтры измеримых пространств. Выясняется роль счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер и возможности их недираковских реализаций, связанных, в частности, с измеримыми структурами на топологических пространствах,

не обладающих свойством σ -компактности, а также на σ -топологических пространствах с аналогичным свойством.

1. МНОЖЕСТВА ПРИТЯЖЕНИЯ И ИХ ОБОБЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E , элементы которого используются в роли обычных решений. Полагаем, что в ряде рассматриваемых случаев конкретный выбор $x \in E$ приводит к реализации элемента другого множества $\mathbf{H}$ по известному правилу $\mathbf{h} : E \longrightarrow \mathbf{H}$. Традиционные ограничения типа $x \in S$, где S есть подмножество E , часто бывает целесообразно дополнить ограничениями асимптотического характера на выбор приближенного решения, в простейшем случае определяемого в виде последовательности $(x_i)_{i=1}^\infty$ в E . Это может быть связано с возможной неустойчивостью задачи об $\mathbf{h}$ -достижимости в $\mathbf{H}$ при ослаблении S -ограничения. Само S заменяется при этом семейством $\mathcal{S}$ подмножеств E (конкретные способы этой замены сейчас не обсуждаем). В свою очередь $\mathbf{H}$ в этих случаях оснащается топологией ϑ , что позволяет заменить $\mathbf{h}$ -образ S множеством притяжения в топологическом пространстве $(\mathbf{H}, \vartheta)$. Для представления множества притяжения используются конструкции расширений, в которых главную роль играет пространство обобщенных элементов, выбор которых осуществляется с соблюдением некоторых стандартных ограничений. Как правило, обычные решения погружаются в это пространство как правило, в виде всюду плотного подмножества. Отображение $\mathbf{h}$ распространяется на пространство обобщенных элементов, что позволяет говорить о достижимости в обобщенном смысле, т.е. о достижимости в классе обобщенных элементов. Целью введения пространства обобщенных элементов является представление исходной задачи в только что упомянутом смысле множества притяжения. Условно можно разделить конструкции расширения на прямые и не прямые. В конструкциях первого типа обобщенные элементы копируют в существенных чертах приближенные решения в исходном пространстве; так (в простейшем случае) можно назвать обобщенным элементом последовательность $(x_i)_{i=1}^\infty$ в исходном пространстве E . В не прямых конструкциях обобщенный элемент существенно отличается (как объект) от той или иной асимптотики обычных решений и, тем не менее, обеспечивает представление некоторого асимптотического эффекта, возникающего в классе обычных решений. Представляется, что прямые конструкции расширений полезны при исследовании общей структуры множества притяжения и вряд ли могут использоваться для решения конкретных задач. Последнее достигается обычно посредством не прямых методов. К таковым можно отнести весьма совершенные процедуры расширения нелинейных задач управления с применением скользящих режимов (см. [8, 10, 54]). Такого рода процедуры успешно использовались и в игровых задачах динамики (см. [8, 25, 26, 39]). В связи с этим следует напомнить, что в определении важного свойства стабильности множеств, предложенного Н. Н. Красовским в теории дифференциальных игр, существенно использовались элементы расширений в виде скользящих режимов. К числу не прямых методов могут быть отнесены основные конструкции в [57, 58, 64], реализуемые в надлежащих классах конечно-аддитивных мер (см. также [44, 50, 59, 60, 62]).

В первой главе мы ставим своей целью исследование прямых методов расширения, обладающих большой общностью в вопросах, связанных с представлением множества притяжения посредством обобщенных элементов. Упомянутые обобщенные элементы в идейном отношении будут тесно связаны с приближенными решениями, последовательности в E могут рассматриваться в качестве таковых. Однако в целом ряде важных случаев использование только таких секвенциальных приближенных решений будет недостаточным по ряду причин. В связи с условиями, позволяющими ограничиваться использованием секвенциальных приближенных решений без потери качества, отметим построения [58, с. 37-38]. Нам потребуются направленности (см. [23, 53]), а также фильтры и ультрафильтры множества E . Наконец, будет удобно использовать так называемые $(0, 1)$ -меры (вообще говоря, конечно-аддитивные меры). Каждую точку $x \in E$ (т.е. обычное решение) можно представить в виде ультрафильтра (см. [23, 53]) $\mathcal{X}$ множества E , полагая, что $\mathcal{X}$ есть семейство всех подмножеств E , содержащих x . Замыкая в некотором естественном смысле множество всех таких тривиальных ультрафильтров, приходим к компакту обобщенных элементов, формализуемых в виде ультрафильтров (см., в частности, конструкции [53]). Между ультрафильтрами и конечно-аддитивными $(0, 1)$ -мерами существует тесная связь, что позволяет истолковать данный компакт

иначе. Мы используем сведение к $(0, 1)$ -мерам, стремясь при этом, насколько это возможно, ограничиться упомянутыми мерами на измеримой структуре, отличной от семейства всех подмножеств E . Будет сделана попытка использовать измеримые пространства, обедненные множествами. Последнее существенно с точки зрения соображений, связанных с потенциальной реализуемостью расширения. Отметим, что построение ультрафильтра измеримых пространств с «единицей» E в условиях, когда семейство измеримых множеств существенно отличается от семейства всех подмножеств E , в ряде случаев может упрощаться в сравнении со случаем ультрафильтра множества E (оснащаемого σ -алгеброй всех своих подмножеств). Данное обстоятельство оказывается особенно полезным в некоторых версиях измеримых пространств с полуалгебрами и алгебрами множеств (см., например, [58, с. 34]), где удается иногда дать исчерпывающее описание множества всех конечно-аддитивных $(0, 1)$ -мер на данном (нестандартном) измеримом пространстве или, после соответствующего перевода на язык фильтров, — множества всех ультрафильтров соответствующего измеримого пространства. Это мотивирует специальное рассмотрение «нестандартных» измеримых пространств, соответствующих оснащению множества E «всего лишь» полуалгеброй или алгеброй множеств. В этой связи, ориентируясь на применение в конструкциях расширений, будем работать со шкалой измеримых пространств, включающей оснащение в виде σ -алгебр, алгебр, полуалгебр и, по соображениям методического характера, еще более общих мультипликативных семейств с «нулем» $\emptyset$ и «единицей» E .

2. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В дальнейшем нам потребуется использовать конструкции топологии, теории меры, включая конечно-аддитивную теорию меры, некоторые понятия теории булевых алгебр. Такое сочетание потребует достаточно развитой системы обозначений, которые будут выдерживаться строго во избежание двусмысленностей. Ниже используются кванторы, связки и символ $\triangleq$ (равно по определению).

Множество, все элементы которого являются множествами, называем семейством. Мы принимаем аксиому выбора. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств X . Через $\emptyset$ обозначаем пустое множество. Если x — объект, то $\{x\}$ есть, по определению, синглетон, содержащий x . Для любых двух объектов u и v , как обычно, $\{u; v\} \triangleq \{u\} \cup \{v\}$ (неупорядоченная пара). Если A и B — множества, то, следуя [27, с. 77], через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B , т.е. $B^A = \{A \rightarrow B\}$. Если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $Z \in \mathcal{P}(X)$, то $(f|Z) \in Y^Z$ есть, по определению, сужение f на множество Z :

$$f^1(Z) \triangleq \{f(z) : z \in Z\} \in \mathcal{P}(Y)$$

(см. [23, с. 26]). В дальнейшем $\mathbb{R}$ есть вещественная прямая, а $\mathcal{N} \triangleq \{1, 2, \dots\}$ — натуральный ряд, $\mathcal{N} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$. Во избежании двусмысленности в традиционных обозначениях полагаем, что элементы $\mathcal{N}$ не являются множествами. Если $k \in \mathcal{N}$, то

$$\overline{1, k} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq k\}, \quad \overrightarrow{k, \infty} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid k \leq i\};$$

если, к тому же, A — множество, то вместо $A^{\overline{1, k}}$ используем A^k , получая множество всех отображений из $\overline{1, k}$ в A , т.е. множество $A \times \dots \times A$ (k раз) или, в другой интерпретации, множество $\{\overline{1, k} \rightarrow A\}$. В качестве A может, в частности, использоваться семейство. Если X — множество, то через $\text{Fin}(X)$ (через $(\text{count})[X]$) обозначаем семейство всех непустых конечных (не более чем счетных) подмножеств X . Полагаем $(\text{FIN})[X] \triangleq \text{Fin}(X) \cup \{\emptyset\}$ и $\omega[X] \triangleq (\text{count})[X] \cup \{\emptyset\}$. Линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных функций определяем поточечно. Для упомянутого поточечного порядка используем обозначение $\leq$. Если $\mathcal{X}$ — семейство, то

$$\mathbb{Z}[\mathcal{X}] \triangleq \left\{ \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \mid \bigcap_{H \in \mathcal{K}} H \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{H}) \right\}$$

(множество всех центрированных подсемейств $\mathcal{X}$) и

$$\mathbb{Z}_\sigma[\mathcal{X}] \triangleq \left\{ \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \mid \bigcap_{H \in \mathcal{C}} H \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{C} \in (\text{count})[\mathcal{H}] \right\}$$

(множество всех счетно-центрированных подсемейств $\mathcal{X}$). Если (X, τ) — топологическое пространство, то через $\mathcal{F}_\tau$ и $(\tau\text{-comp})[X]$ обозначаем соответственно семейства всех замкнутых и всех компактных в (X, τ) подмножеств X . Если $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathbb{N}_\tau^0[A] \triangleq \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ и

$$\mathbb{N}_\tau[A] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in \mathbb{N}_\tau^0[A] : G \subset A\}$$

(семейство всех окрестностей A в смысле [7]). Условимся о соглашении: если (X, τ) — топологическое пространство и $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \mathbb{N}_\tau^0[\{x\}]$ и $N_\tau(x) \triangleq \mathbb{N}_\tau[\{x\}]$ (семейство всех окрестностей точки x в (X, τ)). Используем далее стандартные понятия замыкания и секвенциального замыкания множеств в топологическом пространстве: если (X, τ) — топологическое пространство и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $\text{cl}(M, \tau)$ и $(\text{seq-cl})[M; \tau]$ обозначаем соответственно замыкание [7, 23, 27, 53] и (первое) секвенциальное замыкание множества M в (X, τ) . Будет использована сходимости по Морю—Смиту [23, гл. 2], т.е. сходимости направленностей в топологическом пространстве. В то же время направленности естественным образом связаны с фильтрами. В этой связи напомним определения, касающиеся фильтров в семействе всех подмножеств того или иного множества (позднее будет отмечена связь с фильтрами измеримых пространств). Введем сначала одно вспомогательное понятие: если X — множество, то через $\beta[X]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ таких, что

$$\forall A \in \mathcal{H}, \forall B \in \mathcal{H} \exists C \in \mathcal{H} : C \subset A \cap B.$$

Тогда

$$\beta_0[X] \triangleq \{\mathcal{S} \in \beta[X] \mid \emptyset \notin \mathcal{S}\}$$

есть множество всех базисов фильтров множества X :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[X] \triangleq \left\{ \mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid (\emptyset \notin \mathcal{M}) \& (A \cap B \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{M} \right. \\ \left. \forall B \in \mathcal{M}) \& (\{G \in \mathcal{P}(X) \mid M \subset G\} \subset \mathcal{M} \quad \forall M \in \mathcal{M}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Элементы (2.1) суть фильтры множества X и только они. В качестве X чаще всего используем зафиксированное в разделе 1 непустое множество E , т.е. пространство обычных решений. Среди фильтров множества X выделяются фильтры максимальные или ультрафильтры. Через $\mathfrak{F}_u[X]$ обозначается множество всех фильтров $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}[X]$ таких, что $\forall \mathcal{G} \in \mathfrak{F}[X]$

$$(\mathcal{H} \subset \mathcal{G}) \implies (\mathcal{H} = \mathcal{G})$$

(т.е. $\mathfrak{F}_u[X]$ — множество всех ультрафильтров множества X). Если X — множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то через $\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ (через $\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}]$) обозначается семейство всех фильтров $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}[X]$ (всех ультрафильтров $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_u[X]$) таких, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$. В частности, при $\mathcal{X} \in \beta_0[X]$ имеем [7, с. 81] $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ в виде семейства всех множеств $V \in \mathcal{P}(X)$ таких, что $\exists U \in \mathcal{X} : U \subset V$. В последнем случае имеем фильтр множества X , порожденный базисом (базой) $\mathcal{X}$. Предыдущие определения касались более общих случаев. Из общих свойств фильтров легко следует положение: если X — множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то

$$\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] \exists \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}] : \mathcal{U} \subset \mathcal{V}.$$

Отметим один известный пример фильтра: если (S, τ) — топологическое пространство и $x \in S$, то $N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[S]$.

Напомним ([23, гл. 2]), что всякая пара $(\mathbf{D}, \preceq)$, где $\mathbf{D}$ — множество и $\preceq, \preceq \subset \mathbf{D} \times \mathbf{D}$, — направление на $\mathbf{D}$ [23], называется направленным множеством. Как обычно, для $d_1 \in \mathbf{D}$ и $d_2 \in \mathbf{D}$

выражение $d_1 \preceq d_2$ заменяет $(d_1, d_2) \in \preceq$ [1, с. 318]. Если $\mathbf{D} \neq \emptyset$, A — множество и $f \in A^{\mathbf{D}}$, то триплет $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ называем направленностью в A , а

$$(A\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f] \triangleq \{B \in \mathcal{P}(A) \mid \exists d \in \mathbf{D} \forall \delta \in \mathbf{D} ((d \preceq \delta) \implies (f(\delta) \in B))\} \in \mathfrak{F}[A] \quad (2.2)$$

есть фильтр, ассоциированный с направленностью $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ [1, с. 102]. Итак, направленности порождают фильтры; верно и обратное суждение (см. [1, 53]): если A — непустое множество и $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[A]$, то

$$\mathcal{F} = (A\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]$$

для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в A .

Предложение 2.1. Если X — непустое множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то эквивалентны утверждения:

- 1) $\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] \neq \emptyset$;
- 2) $\mathcal{X} \subset (X\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]$ для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в множестве X .

В свою очередь, (2.2) используем для представления сходимости по Морю—Смиту [23, гл. 2]: если (X, τ) есть топологическое пространство, $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ — направленность в X и $x \in X$, то, по определению,

$$((\mathbf{D}, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} x) \iff (N_\tau(x) \subset (X\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]). \quad (2.3)$$

В связи с (2.3) (см. также [64, с. 27]) в терминологии [23, гл. 2] (2.3) определяет обычную сходимость по Морю—Смиту. В частности, (2.3) можно применять в случае использования последовательностей, что существенно при построении секвенциальных приближенных решений: речь идет о случае, когда в (2.2), (2.3) множество $\mathbf{D}$ отождествляется с $\mathcal{N}$, а $\preceq$ определяется как обычная упорядоченность $\mathcal{N}$. В этом частном случае вместо (2.3) используем более традиционное обозначение: если (X, τ) есть топологическое пространство, $(x_i)_{i \in \mathcal{N}} \in X^{\mathcal{N}}$ и $x \in X$, то в соответствии с (2.3) полагаем, по определению,

$$((x_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\tau} x) \iff (\forall H \in N_\tau(x) \exists n \in \mathcal{N} : x_k \in H \forall k \in \overline{n, \infty}). \quad (2.4)$$

В терминах (2.4) получаем очевидное представление секвенциального замыкания: для каждого множества A в топологическом пространстве (X, τ) , т.е. в случае $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$(\text{seq-cl})[A; \tau] = \{x \in X \mid \exists (a_i)_{i \in \mathcal{N}} \in A^{\mathcal{N}} : (a_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\tau} x\}. \quad (2.5)$$

Аналогичное представление для $\text{cl}(A, \tau)$ реализуется в теореме Биркгофа [23, с. 97] в терминах (2.3) (см. в этой связи [64, с. 37]). Если (X, τ) есть топологическое пространство и $M \in \mathcal{P}(X)$, то

$$(\tau\text{-dens})[M] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(X) \mid M \subset \text{cl}(S, \tau)\}$$

есть семейство всех τ -плотных в M подмножеств X .

Если (U, τ') , $U \neq \emptyset$, и (V, τ'') , $V \neq \emptyset$, — два топологических пространства, то через $C(U, \tau', V, \tau'')$ обозначаем множество всех непрерывных (см. [23, 53]), в смысле топологических пространств (U, τ') и (V, τ'') , функций $f \in V^U$ и полагаем

$$\begin{aligned} C_{\text{cl}}(U, \tau', V, \tau'') &\triangleq \{f \in C(U, \tau', V, \tau'') \mid f^1(F) \in \mathcal{F}_{\tau''} \forall F \in \mathcal{F}_{\tau'}\} = \\ &= \{f \in V^U \mid f^1(\text{cl}(A, \tau')) = \text{cl}(f^1(A), \tau'') \forall A \in \mathcal{P}(U)\} \end{aligned}$$

(множество всех замкнутых отображений из топологического пространства (U, τ') в топологическое пространство (V, τ'')). Наконец,

$$C_{\text{ap}}(U, \tau', V, \tau'') \triangleq \{f \in C_{\text{cl}}(U, \tau', V, \tau'') \mid f^{-1}(\{y\}) \in (\tau'\text{-comp})[U] \forall y \in V\}$$

есть множество всех почти совершенных, в смысле упомянутых топологических пространств, отображений из множества U в множество V .

Введем сейчас два типа предельных множеств. Если U — непустое множество, $\mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(U))$, (V, τ) есть топологическое пространство и $f \in V^U$, то полагаем, во-первых,

$$(\tau\text{-LIM})[\mathcal{U}|f] \triangleq \bigcap_{H \in \mathcal{U}} \text{cl}(f^1(H), \tau) \quad (2.6)$$

(см. [44, 50, 57–60, 62, 64] в связи с применением (2.6) в конструкциях расширений, а также [40, с. 84] в связи с общими топологическими конструкциями предельного перехода на пространствах множеств). Во-вторых, через $(\text{AS})[U; V; \tau; \mathcal{U}; f]$ обозначаем множество всех $y \in V$ таких, что для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ в множестве U имеют место свойства

$$(\mathcal{U} \subset (U\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]) \& ((\mathbf{D}, \preceq, f \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} y); \quad (2.7)$$

$(\text{AS})[U; V; \tau; \mathcal{U}; f]$ есть множество притяжения в классе приближенных решений-направленностей. Если же при упомянутых в связи с (2.6) условиях на U , (V, τ) и f выполнено $\mathcal{U} \in \beta[U]$, то

$$(\tau\text{-LIM})[\mathcal{U}|f] = (\text{AS})[U; V; \tau; \mathcal{U}; f]. \quad (2.8)$$

Свойство (2.8), упоминаемое в [44, 50, 57–60, 62, 64] и подобное в логическом отношении представлениям [40, с. 84], охватывает практически все существенные, в смысле (2.7) и (2.8), постановки, поскольку в случае $\mathcal{U} \notin \beta[U]$ можно перейти к рассмотрению семейства всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{U}$, не изменяя при этом множества притяжения и, вместе с тем, получая семейство из $\beta[U]$. Во всяком случае, (2.8) оказывается справедливым в более общей ситуации. Однако в этой статье мы ограничимся именно этим случаем.

Полезно ввести следующее определение прообраза семейства (см., например, [29, с. 53]): если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$, то

$$f^{-1}[\mathcal{Y}] \triangleq \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{Y}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)); \quad (2.9)$$

если при этом $\mathcal{Y} \in \beta[Y]$, то $f^{-1}[\mathcal{Y}] \in \beta[X]$. В связи с (2.7), (2.9) отметим следующее очевидное утверждение.

Предложение 2.2. Если $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ — направленность в множестве X , (Y, τ) — топологическое пространство, $g \in Y^X$ и $y \in Y$, то эквивалентны следующие три свойства:

- 1) $(\mathbf{D}, \preceq, g \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} y$;
- 2) $g^{-1}[N_\tau(y)] \subset (X\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]$;
- 3) $g^{-1}[N_\tau^0(y)] \subset (X\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]$.

Доказательство. Если верно 1), то в силу (2.3) $N_\tau(y) \subset (Y\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; g \circ \varphi]$, что (в силу (2.3)) сразу приводит к 2). 2) $\implies$ 3), поскольку $N_\tau^0(y) \subset N_\tau(y)$. Пусть выполняется 3) и $S \in N_\tau(y)$. Подберем $G \in N_\tau^0(y)$ так, что $G \subset S$. При этом $g^{-1}(G) \in (X\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]$ и как следствие $G \in (Y\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; g \circ \varphi]$. В силу (2.1) и (2.2) имеем $S \in (Y\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; g \circ \varphi]$. Поскольку выбор S был произвольным, имеем вложение $N_\tau(y) \subset (Y\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; g \circ \varphi]$. С учетом (2.3) получаем 1). Итак, 3) $\implies$ 1). $\square$

3. ИЗМЕРИМЫЕ СТРУКТУРЫ

Напомним, что предполагается фиксированным непустое множество E , имеющее смысл «единицы» рассматриваемых далее пространств. Последнее связано с тем, что все рассматриваемые далее измеримые структуры будут связаны с теми или иными подсемействами $\mathcal{P}(E)$. Итак, E — «единица» всех используемых ниже измеримых пространств, которые имеют вид $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ — семейство подмножеств E . Рассмотрим множество $\pi[E]$ всех семейств $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ таких, что

$$(\emptyset \in \mathcal{L}) \& (E \in \mathcal{L}) \& (A \cap B \in \mathcal{L} \quad \forall A \in \mathcal{L} \quad \forall B \in \mathcal{L}).$$

Элементы $\pi[E]$ именуется мультипликативными семействами с «нулем» и «единицей»; полуалгебры, алгебры и σ -алгебры подмножества E суть частные случаи таких семейств. Через $\Pi[E]$, $(\text{alg})[E]$ и $(\sigma\text{-alg})[E]$ обозначаем соответственно множества всех полуалгебр, алгебр и σ -алгебр

подмножества E ; в связи с упомянутыми обозначениями см., в частности, [64, гл. 4], [29, гл. I]. Шкала

$$(\sigma\text{-alg})[E] \subset (\text{alg})[E] \subset \Pi[E] \subset \pi[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \quad (3.1)$$

применяется для построения используемых измеримых пространств. Свойства конечной и счетной аддитивности рассматриваемых вещественнозначных функций множеств определяем, как и в [29, § I.6], в терминах разбиений (см. [64, § 4.2]). Сами функции множеств именуем конечно-аддитивными и счетно-аддитивными мерами на измеримых пространствах с «единицей» E . Эти измеримые пространства согласуются со шкалой (3.1) в том смысле, что соответствующее семейство измеримых множеств является полуалгеброй, алгеброй или σ -алгеброй подмножества E . В некоторых случаях удобно полагать, что упомянутые меры определены на том или ином семействе $\mathcal{L} \in \pi[E]$; см., в частности, соображения, отмеченные в разделе 1 в связи с ультрафильтрами и $(0, 1)$ -мерами.

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то через $(\text{add})[\mathcal{L}]$ и $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ обозначаем соответственно множества всех вещественнозначных конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$ (см. [64, с. 144]). Через $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множества всех неотрицательных мер из $(\text{add})[\mathcal{L}]$ и $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ соответственно, получая два конуса в пространстве вещественнозначных функций на $\mathcal{L}$. Напомним, что для обозначения поточечного порядка в пространствах вещественнозначных функций используем $\leq$. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то $\mathbb{O}_{\mathcal{L}}$ есть, по определению, вещественнозначная функция на $\mathcal{L}$, тождественно равная нулю, и через $(\mathbf{p}\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех конечно-аддитивных мер $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ таких, что для всех $\nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ имеем

$$(\nu \leq \mu) \implies (\nu = \mathbb{O}_{\mathcal{L}}).$$

Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то множества $(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ и $(\mathbf{p}\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ порождают разложение Хьюитта—Иосиды в конусе $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ (см. [56, 69, 70]). Данное разложение является особенно простым в классе $(0, 1)$ -мер. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то полагаем $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1\}$ (множество всех конечно-аддитивных вероятностей на $\mathcal{L}$), а через $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ таких, что

$$(\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1) \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Кроме того, полагаем $\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \triangleq \mathbb{T}(\mathcal{L}) \cap (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{L}) \triangleq \mathbb{T}(\mathcal{L}) \cap (\mathbf{p}\text{-add})_+[\mathcal{L}]$. Эти определения содержательны уже при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. В этом случае $\mathbb{T}(\mathcal{L}) = \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \sqcup \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{L})$:

$$(\mathbb{T}(\mathcal{L}) = \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \cup \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{L})) \& (\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{L}) = \emptyset). \quad (3.2)$$

В (3.2) имеем простейший вариант известного разложения Хьюитта—Иосиды (см. [56, 69, 70]); в связи с (3.2) см. [70, с. 294], где рассматривался случай $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$. Если $x \in E$, то $\delta_x \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{P}(E))$ есть, по определению, обычная мера Дирака, соответствующая точке x : для $L \in \mathcal{P}(E)$ полагаем $\delta_x(L) \triangleq 1$ при $x \in L$ и $\delta_x(L) \triangleq 0$ при $x \notin L$; если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то $(\delta_x \mid \mathcal{L}) \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$. В последнем случае рассматривается сужение меры Дирака. При $\mathcal{L} \in \pi[E]$ полагаем также

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) \triangleq \{(\delta_x \mid \mathcal{L}) : x \in E\},$$

получая подмножество $\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$. Вопрос о том, когда $\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ является одним из наиболее тонких в теории меры (см. в этой связи [38, гл. II] и [48, 49]), мы коснемся его в дальнейшем.

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех конечно-аддитивных мер из $(\text{add})[\mathcal{L}]$, имеющих ограниченную полную вариацию. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ есть множество всех ограниченных мер из $(\text{add})[\mathcal{L}]$. Отметим в упомянутом общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$, что $(\text{add})[\mathcal{L}]$, $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ и $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейные пространства. Особо выделим последний случай: если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то $v_{\mu} \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ есть, по определению, вариация μ как функция множеств (см. [58, с. 39]). С другой стороны, при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ отображение

$$\mu \longmapsto v_{\mu}(E) : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[\quad (3.3)$$

есть так называемая сильная норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (см. [58, с. 40]). Если же $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то (3.3) определяет полунорму $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (см. [64, с. 145-146]); при этом

$$(\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}] \subset (\text{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L}).$$

В случае $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ пространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ порождается конусом $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$, что вытекает из разложения Жордана. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то через $B_0(E, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех ступенчатых, в смысле измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, вещественнозначных функций на E ; $B_0(E, \mathcal{L})$ есть линейное многообразие в банаховом пространстве $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$, где $\mathbb{B}(E)$ — множество всех ограниченных вещественнозначных функций на E , а $\|\cdot\|$ — так называемая суп-норма на $\mathbb{B}(E)$ с поточечно исполняемыми линейными операциями, т.е. чебышевская норма $\mathbb{B}(E)$. При $\mathcal{L} \in \pi[E]$ через $B(E, \mathcal{L})$ обозначаем замыкание множества $B_0(E, \mathcal{L})$ в топологии суп-нормы $\|\cdot\|$, получая банахово пространство с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$. Интегрирование функций из $B(E, \mathcal{L})$ относительно мер $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ понимается далее только в простейшем смысле [57, 58, 64] (см., например, [57, с. 66] и [64, с. 152–155]). При этом реализуется изометрическое вложение пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ с нормой-вариацией в топологическое сопряженное к $B(E, \mathcal{L})$ пространство $B^*(E, \mathcal{L})$, нормируемое традиционно. При $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ данное вложение

$$\mu \longmapsto \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in B(E, \mathcal{L})} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(E, \mathcal{L}) \quad (3.4)$$

есть изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме (3.3) на $B^*(E, \mathcal{L})$ при традиционном нормировании последнего. Если $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, то $B(E, \mathcal{L})$ — множество всех $\mathcal{L}$ -измеримых функций из $\mathbb{B}(E)$, т.е. множество всех измеримых в смысле измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$ и ограниченных вещественнозначных функций на множестве E .

4. ФИЛЬТРЫ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этом разделе мы дополняем конструкции на основе (2.1) аналогами, определяемыми в терминах измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (см. шкалу (3.1)). С точки зрения теории расширений мы предпринимаем эти построения в интересах реализуемости основных конструкций, связанных с приближенными решениями (см. предложение 2.1, (2.8)). При определении фильтра измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$, мы следуем [53, гл. 1]. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \& (A \cap B \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{F}) \& \\ \& (\{L \in \mathcal{L} \mid F \subset L\} \subset \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}) \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

есть множество всех фильтров измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$. Шкала (3.1) позволяет применять (4.1) для более совершенных измеримых пространств. Из (2.1), (4.1) для $\mathcal{P}(E) \in (\sigma\text{-alg})[E]$ имеем равенство $\mathfrak{F}[E] = \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$. В общем случае при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ полагаем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть, по определению, множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ таких, что $\forall \mathcal{G} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \implies (\mathcal{F} = \mathcal{G}).$$

Тем самым определено множество всех ультрафильтров измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, разумеется $\mathfrak{F}_u[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(E))$ (см. раздел 2). Отметим весьма общий факт (см. [64, с. 29]): если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{G} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то $\exists \mathcal{H} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$: $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Данное свойство далее используем без дополнительных пояснений.

Отождествление ультрафильтров измеримых пространств и $(0, 1)$ -мер реализуется с помощью индикаторов [29, гл. II]: если U — непустое множество и $V \in \mathcal{P}(U)$, то через $\chi_V[U]$ обозначаем функцию из U в двоеточие $\{0; 1\}$, для которой

$$(\chi_V[U](u) \triangleq 0 \quad \forall u \in U \setminus V) \& (\chi_V[U](v) \triangleq 1 \quad \forall v \in V).$$

В качестве U может использоваться семейство. В частности, имеем [58, с. 303] свойства: если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то $\chi_{\mathcal{H}}[\mathcal{L}] \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ при $\mathcal{H} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$,

$$\mathcal{F} \longmapsto \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}] : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathcal{L}) \quad (4.2)$$

есть биекция (см. [1, 70]) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{L})$; посредством (4.2) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ отождествляются. К этому следует добавить свойство фактической отождествимости фильтров измеримых пространств

и направленностей в E (см. [58, § 7.6]), подобное свойству, определяющему предложение 2.1. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ — направленность в E , то (см. (2.2))

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f] &\triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists d \in \mathbf{D} \forall \delta \in \mathbf{D} ((d \preceq \delta) \implies (f(\delta) \in L))\} = \\ &= (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) называется фильтром измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, ассоциированным с $(\mathbf{D}, \preceq, f)$. В связи с (4.3) отметим следующее свойство [58, с. 302]: если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то существует направленность $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E , для которой

$$\mathcal{F} = (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f]. \quad (4.4)$$

Конкретное представление этой направленности приведено в [58, с. 302] и (ранее) в [42]. На основе (4.3) и (4.4) реализуется принцип отождествления произвольных направленностей в E и фильтров измеримых пространств вида $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$. По поводу связи (2.2) и (4.3) отметим, что для произвольной направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E

$$(E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f] = (\mathcal{P}(E)\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f]; \quad (4.5)$$

доказательство (4.5) следует из (4.3) непосредственно. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то полагаем

$$\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{Z} \subset \mathcal{F}\}, \quad (4.6)$$

$$\mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{Z} \subset \mathcal{F}\}. \quad (4.7)$$

Наконец, при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ полагаем

$$\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \mid \mu(Z) = 1 \quad \forall Z \in \mathcal{Z}\}. \quad (4.8)$$

Предложение 4.1. При $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ эквивалентны следующие свойства:

- 1) $\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset$;
- 2) $\mathcal{Z} \subset (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]$ для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E .

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{L}$ и $\mathcal{Z}$ в соответствии с условиями. Пусть верно 1). Выберем $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$; тогда $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}$. Подберем направленность $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E со свойством (4.4). С учетом (4.3) имеем

$$\mathcal{Z} \subset (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f] \subset (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f],$$

что означает осуществление 2). Итак, 1) $\implies$ 2). Пусть имеет место 2). Зафиксируем направленность $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ в E , для которой $\mathcal{Z} \subset (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]$. В силу (4.3) и вложения $\mathcal{Z} \subset \mathcal{L}$ имеем для $(\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ вложение $\mathcal{Z} \subset (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]$, т.е. реализуется 1). Итак, 2) $\implies$ 1). $\square$

Предложение 4.1 можно рассматривать (см.(4.5)) как некоторый аналог предложения 2.1 для случая, когда семейство $\mathcal{X}$ в последнем предложении составлено только из измеримых множеств. Заметим, что в силу (4.6), (4.7)

$$\forall \mathcal{L} \in \pi[E] \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \forall \mathcal{G} \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \exists \mathcal{H} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{H}.$$

Это означает, в частности, следующее: при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset) \iff (\mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset). \quad (4.9)$$

В свою очередь, при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ биективность (4.2) позволяет перевести (4.9) на язык $(0, 1)$ -мер: в упомянутом случае измеримое пространство с п/а множеств $\forall \mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$

$$(\mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset) \iff (\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset). \quad (4.10)$$

Для доказательства (4.10) достаточно сравнить (4.7), (4.8) и учесть основное свойство оператора (4.2). В (4.9), (4.10) имеем перевод предложения 4.1 на язык ультрафильтров и $(0, 1)$ -мер. Подчеркнем важную особенность: свойство 2) в этом предложении не связано (при заданном семействе $\mathcal{Z}$) с $\mathcal{L}$; оно касается асимптотической реализации множеств из $\mathcal{Z}$ любыми направленностями в E . В то же время 1), (4.9) и (4.10) связаны с конкретным измеримым пространством; следовательно, при $\mathcal{Z} \subset \mathcal{L}$ можно изучать вопросы асимптотической реализации множеств из $\mathcal{Z}$, привлекая обедненные

множествами измеримые пространства. Конкретная природа семейства $\mathcal{Z}$ сейчас несущественна: это может быть заданное априори подсемейство $\mathcal{P}(E)$ либо семейство, получаемое подобно (2.9). В связи с (2.8) наиболее интересной представляется комбинация двух этих возможностей. В этой связи полезно учесть предложение 2.2.

Предложение 4.2. Пусть $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ есть топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$ обладает свойством

$$\mathbf{h}^{-1}(G) \in \mathcal{L} \quad \forall G \in \vartheta. \quad (4.11)$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(z)]) \neq \emptyset\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(z)]) \neq \emptyset\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{L}$, $\mathcal{X}$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ и $\mathbf{h}$ в соответствии с условиями предложения, постулируем справедливость (4.11). Первое, второе и третье множества, участвующие в (4.12), обозначаем соответственно через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Докажем их совпадение. Пусть $u \in \mathbf{A}$. Тогда (см. (2.7)) $u \in \mathbf{H}$ и, для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ в E

$$(\mathcal{X} \subset (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]) \& ((\mathbf{D}, \preceq, \mathbf{h} \circ \varphi) \xrightarrow{\vartheta} u). \quad (4.13)$$

Используя (4.3), получаем

$$(\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi] = (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \quad (4.14)$$

Поскольку $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, то из (4.13), (4.14) имеем вложение

$$\mathcal{X} \subset (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]. \quad (4.15)$$

Рассмотрим второе утверждение в (4.13). В силу предложения 2.2 имеем

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(u)] \subset (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]. \quad (4.16)$$

Из (4.11) следует, что $\mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(u)] \subset \mathcal{L}$. Поэтому (см. (4.14), (4.16))

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(u)] \subset (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi].$$

Учтем (4.15). В итоге имеем вложение

$$\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(u)] \subset (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi].$$

С учетом (4.6) и (4.14) получаем $\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(u)]) \neq \emptyset$, тогда $u \in \mathbf{B}$. Вложение $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ установлено. Из (4.9) следует, что $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Пусть $v \in \mathbf{C}$. Тогда, в частности, $v \in \mathbf{B}$, т.е. $v \in \mathbf{H}$ и $\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(v)]) \neq \emptyset$. Выберем произвольно $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(v)])$. С учетом (4.4) подберем направленность $(\mathcal{D}, \sqsubseteq, f)$ в E такую, что $\mathcal{F} = (\mathcal{L}\text{-ASS})[\mathcal{D}; \sqsubseteq; f]$. В силу (4.3) имеем вложение

$$\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(v)] \subset (E\text{-ass})[\mathcal{D}; \sqsubseteq; f].$$

Из предложения 2.2 следует, что

$$(\mathcal{X} \subset (E\text{-ass})[\mathcal{D}; \sqsubseteq; f]) \& ((\mathcal{D}, \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\vartheta} v).$$

Тогда (см. (2.7)) $v \in \mathbf{A}$. Итак, $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$. □

Следствие 4.1. Пусть выполнены все условия предложения 4.2, кроме того, $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. Тогда

$$(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(z)]) \neq \emptyset\}. \quad (4.17)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{T}$ — второе множество в (4.17) и

$$u \in (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}].$$

С учетом предложения 4.2 выберем (см. (4.12)) $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(u)])$ и рассмотрим (см. (4.7))

$$\mu \triangleq \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}] \in \mathbb{T}(\mathcal{L}). \quad (4.18)$$

Поскольку $\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(u)] \subset \mathcal{F}$, то из (4.8) и (4.18) имеем

$$\mu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(u)]).$$

Тогда $u \in \mathbf{T}$ и вложение $(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \subset \mathbf{T}$ установлено. Выберем произвольно $v \in \mathbf{T}$, после чего подберем $\nu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(v)])$. Тогда $\nu(L) = 1 \ \forall L \in \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(v)]$. С учетом биективности (4.2) подберем $\mathcal{H} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ со свойством $\nu = \chi_{\mathcal{H}}[\mathcal{L}]$. Из определения индикатора множества следует, что $\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(v)] \subset \mathcal{H}$, т.е. $\mathcal{H} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(v)])$. Из предложения 4.2 имеем $v \in (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$. Итак, $\mathbf{T} \subset (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$. $\square$

Заметим, что достигаемое в предложении 4.2 и в следствии 4.1 представление множества притяжения для ограничений асимптотического характера (определяемых непустым семейством $\mathcal{X}$) в терминах измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$ реализуется при двух существенных условиях: $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ и выполняется (4.11). Последнее характеризует измеримость $\mathbf{h}$. Данное свойство естественно при $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$. В этом случае имеем (в (4.11)) обычное требование измеримости по Борелю. Однако в случае стандартного измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$ мы не имеем, как правило, эффективных представлений для множеств $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, элементы которых можно (при двух упомянутых условиях) использовать в качестве приближенных решений наравне с направленностями в E . Отметим, что при произвольном выборе $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$ можно взять в качестве $\mathcal{L}$ алгебру подмножеств E , порожденную семейством $\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[\vartheta]$; известна [29, гл. I] и структура данной алгебры множеств.

Отметим ряд простых следствий предложений 2.2 и 4.2. Из предложения 4.2 имеем свойство: если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ есть топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то

$$\begin{aligned} (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathfrak{F}_0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(z)]] \neq \emptyset\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(z)]] \neq \emptyset\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{T}^0(\mathcal{P}(E) \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}^0(z)]) \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

(мы учли следствие 4.1). Таким образом, (4.19) вытекает из предложения 4.2, если полагать в последнем $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$; тогда условие (4.11) выполняется автоматически. Используя аксиомы фильтра (см. (2.1)), из (4.19) получаем следующее представление: если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то

$$\begin{aligned} (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathfrak{F}_0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)]] \neq \emptyset\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)]] \neq \emptyset\} = \\ &= \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{T}^0(\mathcal{P}(E) \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)]) \neq \emptyset\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

В (4.20) мы учитываем и предложения 2.1, 2.2. В связи с (4.19), (4.20) в задаче об асимптотической достижимости уместно поставить вопрос о представлении множества приближенных решений. Мы ограничимся соответствующими представлениями в классах фильтров и ультрафильтров множества E . Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ есть топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то полагаем

$$(\mathfrak{F}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \triangleq \bigcup_{z \in \mathbf{H}} \mathfrak{F}_0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)]], \quad (4.21)$$

получая подмножество $\mathfrak{F}[E]$. Разумеется, (4.21) есть множество всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$ таких, что

$$\exists z \in \mathbf{H} : \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)] \subset \mathcal{F}. \quad (4.22)$$

Отметим, что (4.22) — весьма важное свойство, связанное с асимптотической реализацией некоторой точки $\mathbf{H}$ при соблюдении ограничений асимптотического характера, задаваемых посредством $\mathcal{X}$. С помощью (2.2) свойство (4.22) может быть переведено на более привычный язык приближенных решений-направленностей. Однако образовать из последних множество, подобное (4.21), в достаточной мере затруднительно, если не ограничивать каким-либо образом выбор соответствующего (той или иной направленности) направленного множества; в этом смысле фильтры более удобны.

Предложение 4.3. Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — хаусдорфово топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то

$$\forall \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \exists! z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)] \subset \mathcal{F}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ и $\mathbf{h}$ удовлетворяют условиям предложения, $\mathcal{F}$ — элемент множества (4.21). Тогда справедливо (4.22). Выберем $z_0 \in \mathbf{H}$ так, что $\mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z_0)] \subset \mathcal{F}$. Покажем, что других точек $\mathbf{H}$, удовлетворяющих вложению подобного типа, не существует. Действительно, пусть $z_* \in \mathbf{H}$ обладает свойством $\mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z_*)] \subset \mathcal{F}$. Допустим, что $z_0 \neq z_*$. Выберем окрестности $H_0 \in N_{\vartheta}(z_0)$ и $H_* \in N_{\vartheta}(z_*)$, для которых $H_0 \cap H_* = \emptyset$. По предположению $\mathbf{h}^{-1}(H_0) \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{h}^{-1}(H_*) \in \mathcal{F}$, а тогда (см. (2.1)) $\mathbf{h}^{-1}(H_0) \cap \mathbf{h}^{-1}(H_*) \neq \emptyset$, что невозможно, ибо

$$\mathbf{h}^{-1}(H_0) \cap \mathbf{h}^{-1}(H_*) = \mathbf{h}^{-1}(H_0 \cap H_*) = \mathbf{h}^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Противоречие доказывает, что $z_0 = z_*$. $\square$

Предложение 4.4. Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то

$$\begin{aligned} (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] &= \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] : \\ &\quad \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)] \subset \mathcal{F}\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ и $\mathbf{h}$ удовлетворяют условиям предложения. Через $\mathbb{S}$ обозначим множество в правой части (4.23). Пусть $u \in (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$. Тогда $u \in \mathbf{H}$ обладает свойством (см. (4.20)) $\mathfrak{F}_0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(u)]] \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(u)]]$. В силу (4.21) $\mathcal{U} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$ и при этом $\mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(u)] \subset \mathcal{U}$ (см. определения в разделе 2). В итоге $u \in \mathbb{S}$. Итак, $(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \subset \mathbb{S}$. Пусть $v \in \mathbb{S}$. Тогда $v \in \mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{V} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$ верно $\mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)] \subset \mathcal{V}$. Из (4.21) имеем, что $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}[E]$ обладает свойством $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$. Следовательно,

$$\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)] \subset \mathcal{V}$$

и $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)]]$, что, в силу (4.20), означает, что $v \in (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$. Вложение $\mathbb{S} \subset (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$ установлено. $\square$

Проведем некоторую коррекцию определений с целью последующего применения в так называемом компактифицируемом случае построения расширений.

Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то полагаем

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \triangleq \bigcup_{z \in \mathbf{H}} \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)]], \quad (4.24)$$

получая подмножество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$; (4.24) есть множество всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ со свойством (4.22), $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \subset (\mathfrak{F}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$.

Предложение 4.5. Пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Тогда

$$(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] : \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(z)] \subset \mathcal{F}\}.$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.4 и использует (4.20) в части представления множества притяжения в классе ультрафильтров E (см. также (4.24)).

Обсудим частный случай. До конца настоящего раздела будем полагать, что топологическое пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$ и отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$ фиксированы и таковы, что для некоторых компактного топологического пространства $(\mathbb{K}, \tau)$, отображения $p \in \mathbb{K}^E$ и непрерывного в смысле топологического пространства $(\mathbb{K}, \tau)$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$ отображения $q \in \mathbf{H}^{\mathbb{K}}$ имеет место $\mathbf{h} = q \circ p$. Кортж $(\mathbb{K}, \tau, p, q)$ с упомянутыми свойствами называем компакфикатором для триплета $(\mathbf{H}, \vartheta, \mathbf{h})$. Итак, в отношении последнего предполагаем (до конца настоящего раздела) компактифицируемость в том смысле, что некоторый компакфикатор $(\mathbb{K}, \tau, p, q)$ для $(\mathbf{H}, \vartheta, \mathbf{h})$ существует. Данный случай именуем компактифицируемым.

Теорема 4.1. В компактифицируемом случае триплета $(\mathbf{H}, \vartheta, \mathbf{h})$ имеет место соотношение

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X}] \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Из (4.24) непосредственно следует вложение

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X}]. \quad (4.25)$$

В связи с обоснованием (4.25) см. определения в разделе 2. Выберем произвольно $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X}]$. Тогда $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}$. В частности, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$. Тогда (см. раздел 2)

$$\mathcal{F} = (E\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; f] \quad (4.26)$$

для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E . Выберем и зафиксируем некоторый компактификатор $(\mathbb{K}, \tau, p, q): (\mathbb{K}, \tau) \rightarrow (\mathbf{H}, \vartheta)$ — компактное топологическое пространство, $p \in \mathbb{K}^E$, а $q \in \mathbf{H}^{\mathbb{K}}$ — непрерывное в смысле топологического пространства $(\mathbb{K}, \tau)$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$ отображение, причем $\mathbf{h} = q \circ p$. В виде $(\mathbf{D}, \preceq, p \circ f)$ имеем направленность в $\mathbb{K}$. С учетом компактности $(\mathbb{K}, \tau)$ имеем для некоторых $u \in \mathbb{K}$, направленного множества $(\Theta, \sqsubseteq)$, $\Theta \neq \emptyset$, и оператора $\lambda \in \mathbf{D}^{\Theta}$ следующие три свойства:

$$\begin{aligned} (\forall d \in \mathbf{D} \exists \theta \in \Theta : d \preceq \lambda(\theta)) &\& (\forall \theta_1 \in \Theta \forall \theta_2 \in \Theta \quad (\theta_1 \sqsubseteq \theta_2) \\ &\implies (\lambda(\theta_1) \preceq (\lambda(\theta_2))) &\& ((\Theta, \sqsubseteq, p \circ f \circ \lambda) \xrightarrow{\tau} u) \end{aligned} \quad (4.27)$$

(см. в этой связи [64, с. 39]). Полагаем $v \triangleq q(u)$, $v \in \mathbf{H}$. В силу непрерывности q из (4.27) имеем сходимость

$$(\Theta, \sqsubseteq, q \circ p \circ f \circ \lambda) \xrightarrow{\vartheta} v.$$

С учетом представления $\mathbf{h}$ в виде суперпозиции имеем сходимость

$$(\Theta, \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ f \circ \lambda) \xrightarrow{\vartheta} v. \quad (4.28)$$

При этом $(\Theta, \sqsubseteq, f \circ \lambda)$ есть направленность в E . С учетом (4.28) и предложения 2.2 имеем

$$\mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)] \subset (E\text{-ass})[\Theta; \sqsubseteq; f \circ \lambda]. \quad (4.29)$$

При этом (см. (2.2)) имеет место соотношение

$$(E\text{-ass})[\Theta; \sqsubseteq; f \circ \lambda] \in \mathfrak{F}[E]. \quad (4.30)$$

По выбору $\mathcal{F}$ имеем из (4.30), что

$$(\mathcal{F} \subset (E\text{-ass})[\Theta; \sqsubseteq; f \circ \lambda]) \implies (\mathcal{F} = (E\text{-ass})[\Theta; \sqsubseteq; f \circ \lambda]). \quad (4.31)$$

Покажем, что посылка импликации (4.31) истинна. В самом деле, пусть $\Phi \in \mathcal{F}$. С учетом (2.2) и (4.26) подберем $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ так, что $\forall \delta \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{d} \preceq \delta) \implies (f(\delta) \in \Phi). \quad (4.32)$$

С учетом (4.27) подберем $\mathbf{t} \in \Theta$ так, что $\mathbf{d} \preceq \lambda(\mathbf{t})$. Тогда, в силу (4.27) и транзитивности $\preceq$, имеем $\forall \theta \in \Theta$

$$(\mathbf{t} \sqsubseteq \theta) \implies (\mathbf{d} \preceq \lambda(\theta)).$$

С учетом (4.32) для любого $\theta \in \Theta$ получаем

$$(\mathbf{t} \sqsubseteq \theta) \implies ((f \circ \lambda)(\theta) \in \Phi).$$

Данное свойство означает, что $\Phi \in (E\text{-ass})[\Theta; \sqsubseteq; f \circ \lambda]$. Поскольку выбор Φ был произвольным, установлена истинность посылки (4.31). В итоге,

$$\mathcal{F} = (E\text{-ass})[\Theta; \sqsubseteq; f \circ \lambda]. \quad (4.33)$$

Из (4.29) и (4.33) имеем вложение $\mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)] \subset \mathcal{F}$, тогда согласно свойствам $\mathcal{F}$ непременно имеет место вложение $\mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)] \subset \mathcal{F}$. Это означает, что $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_{\vartheta}(v)]]$ и, согласно (4.24),

$$\mathcal{F} \in (\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}\text{-sol})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}].$$

Поскольку выбор $\mathcal{F}$ был произвольным, вложение, противоположное (4.25), установлено, чем и завершается доказательство теоремы. $\square$

Содержательный смысл теоремы 4.1 состоит в следующем. Каждое приближенное решение из множества $\mathfrak{F}_u^0[E \mid \mathcal{X}]$, определяемое как ультрафильтр множества E , обеспечивает соблюдение ограничений асимптотического характера, порождаемых семейством $\mathcal{X}$. Однако в ситуации, более общей в сравнении с условиями данной теоремы, оно, вообще говоря, может не порождать какой-либо (предельной) оценки в множестве $\mathbf{H}$. Иными словами, если рассматривать данное приближенное решение как направленность в множестве E (см. раздел 1), то образ упомянутой направленности в множестве $\mathbf{H}$ (при действии $\mathbf{h}$) может не обладать сходимостью как направленность в топологическом пространстве $(\mathbf{H}, \vartheta)$. Напомним, что (см. раздел 2) рассуждения об асимптотической реализации элементов $\mathbf{H}$ в классе направленностей легко переводятся на язык фильтров, а поэтому мы можем обсуждать эффект, установленный в последней теореме, в более понятных терминах (обобщенных) пределов направленностей, интерпретируемых как приближенные решения. Возвращаясь к вышеупомянутому общему свойству приближенных решений (соблюдающих ограничения асимптотического характера, но не формирующих при этом какой-либо точки множества притяжения), отметим, что в [57, § 7.2] приведен соответствующий пример.

Однако в случае, рассматриваемом в теореме 4.1, оказывается верным следующее свойство: если то или иное приближенное решение (здесь ультрафильтр основного пространства) соблюдает ограничения асимптотического характера, порождаемые семейством, то в множестве $\mathbf{H}$ оно непременно оставляет некоторый «след» в виде предельной оценки, являющейся элементом множества притяжения. Следовательно приближенное решение вносит вклад в формирование упомянутого множества притяжения. Итак, в (4.24) мы располагаем удобным с точки зрения общетеоретических конструкций определением класса приближенных решений для наиболее распространенного в практике построения расширений случая компактифицируемых задач.

5. ФИЛЬТРЫ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Продолжая рассмотрение фильтров измеримых пространств, акцентируем основное внимание на вопросах, связанных с получением на основе (4.2) счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер. Коснемся и условий непустоты множеств (4.6), (4.7). Рассмотрим одно обобщение фильтра, используемое в теории булевых алгебр [38, § I.3]. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то называем семейство $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ квазифильтром измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, если

$$(A \cap B \in \mathcal{H} \quad \forall A \in \mathcal{H} \forall B \in \mathcal{H}) \& \\ (\{L \in \mathcal{L} \mid H \subset L\} \subset \mathcal{H} \quad \forall H \in \mathcal{H}).$$

При $\mathcal{L} \in \pi[E]$ полагаем, что $\mathbf{F}^*(\mathcal{L})$ есть, по определению, множество всех квазифильтров измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{F} \in \mathbf{F}^*(\mathcal{L}) \mid \emptyset \notin \mathcal{F}\}$$

характеризует (4.1) как подмножество множества всех квазифильтров $(E, \mathcal{L})$. Легко видеть, что в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ имеет место $\mathbf{F}^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \cup \{\mathcal{L}\}$ (существует ровно один квазифильтр $(E, \mathcal{L})$, не являющийся фильтром).

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то называем семейство $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ σ -мультипликативным квазифильтром измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, если

$$\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i \in \mathcal{H} \quad \forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} \right) \& (\{L \in \mathcal{L} \mid H \subset L\} \subset \mathcal{H} \quad \forall H \in \mathcal{H}). \quad (5.1)$$

При $\mathcal{L} \in \pi[E]$ полагаем, что $(\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}]$ есть, по определению, множество всех σ -мультипликативных квазифильтров измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, т.е. множество всех $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ со свойством (5.1), $(\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}] \subset \mathbf{F}^*(\mathcal{L})$. Тогда

$$(\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathcal{F} \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}] \mid \emptyset \notin \mathcal{F}\}$$

есть множество всех σ -мультипликативных фильтров измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, $(\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}] \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\{E\} \in (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$.

Конструкция на основе квазифильтров позволяет установить, что $\forall \mathcal{L} \in \pi[E] \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{Z} \in \mathbb{Z}[\mathcal{L}]) \iff (\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset). \quad (5.2)$$

Здесь используется [45, с. 611] следующий прием: семейству $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$, сопоставляется квазифильтр, порожденный семейством $\mathcal{Z}$ и совпадающий с пересечением всех квазифильтров $\mathcal{H} \in \mathbf{F}^*(\mathcal{L})$ таких, что $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}$. Данный квазифильтр (порожденный $\mathcal{Z}$) есть семейство всех множеств $L \in \mathcal{L}$, каждое из которых содержит множество $\bigcap_{M \in \mathcal{K}} M$ для некоторого $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Z})$. Следовательно, квазифильтр является фильтром $(E, \mathcal{L})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{Z}$ — центрированное семейство (см. (4.1)). Из (4.6), (4.7) и (5.2) имеем (см. [64, с. 29]) $\forall \mathcal{L} \in \pi[E] \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{Z} \in \mathbb{Z}[\mathcal{L}]) \iff (\mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset). \quad (5.3)$$

Свойства (5.1)–(5.3) полезно рассматривать в сочетании с предложениями 4.1 и 4.2. В этой связи имеем следующее предложение.

Предложение 5.1. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, то при условии (4.11),

$$(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(z)] \in \mathbb{Z}[\mathcal{L}]\}.$$

Для доказательства достаточно полагать в (4.12) $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(z)]$, где $z \in \mathbf{H}$, и использовать (5.2) либо (5.3). Получаем очевидное следствие, касающееся представления множества притяжения без каких-либо предположений об измеримости множеств из $\mathcal{X}$ и отображения $\mathbf{h}$ (см. (4.11)). Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — топологическое пространство и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Тогда

$$(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}] = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathcal{X} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\vartheta^0(z)] \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}(E)]\}.$$

Следствие 5.1. Если $\mathcal{X}$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ и $\mathbf{h}$ удовлетворяют условиям теоремы 5.1, $z \in (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{X}; \mathbf{h}]$, то

$$X \cap \mathbf{h}^{-1}(S) \neq \emptyset \quad \forall X \in \mathcal{X} \quad \forall S \in N_\vartheta(z).$$

В связи с доказательством теоремы отметим, что в предложении 5.1 всегда можно полагать $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$, что гарантирует справедливость вложения $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ и справедливость (4.11). Поэтому устанавливаемое в теореме представление множества притяжения непосредственно следует из предложения 5.1. Аналогичным образом следствие 5.1 можно рассматривать как простое следствие упомянутого предложения. В этой связи полезно отметить конструкцию [57, с. 50-52], которая характеризует в существенной части исследуемое множество притяжения в терминах, подобных теореме 5.1 и ее следствия.

Вернемся к обсуждению σ -мультипликативных квазифильтров измеримого пространства. Отметим, что

$$(\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}] = (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}] \cup \{\mathcal{L}\} \quad \forall \mathcal{L} \in (\sigma - \text{alg})[E]. \quad (5.4)$$

В случае стандартного измеримого пространства это позволяет, использовать естественное понятие σ -мультипликативного квазифильтра, порожденного тем или иным семейством измеримых множеств. Если $\mathcal{L} \in (\sigma - \text{alg})[E]$ и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то σ -мультипликативный квазифильтр, порожденный семейством $\mathcal{H}$ и определяемый в виде пересечения всех семейств $\mathcal{U} \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}]$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$, есть семейство всех множеств $L \in \mathcal{L}$ таких, что

$$\exists \mathcal{C} \in (\text{count})[\mathcal{H}] : \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subset L.$$

Поэтому упомянутый σ -мультипликативный квазифильтр является элементом $(\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$ (т.е. σ -мультипликативным фильтром измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{H} \in \mathbb{Z}_\sigma[\mathcal{L}]$. В этой связи при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ введем множество

$$(\sigma - \text{alg})[E \mid \mathcal{H}] \triangleq \{S \in (\sigma - \text{alg})[E] \mid \mathcal{H} \subset S\}$$

(всех σ -надалгебр $\mathcal{H}$). Из вышеупомянутого рассуждения имеем [45] свойство: если $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то

$$(\mathcal{H} \in \mathbb{Z}_\sigma[\mathcal{L}]) \iff (\exists \mathcal{S} \in (\sigma\text{-alg})[E \mid \mathcal{H}] \exists \mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{S}) : \mu(H) = 1 \quad \forall H \in \mathcal{H}). \quad (5.5)$$

В связи с обоснованием (5.5) и других свойств, касающихся структуры счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер, см. [46, 61, 63]. Напомним, что при $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) &= \{\chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}] : \mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]\} = \\ &= \{\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \mid \forall f \in B(E, \mathcal{L}) \exists x \in E : f(x) = \int_E f d\mu\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Интегрирование функций $f \in B(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, относительно $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ сводится к построению предела f по фильтру, порождающему μ . Именно (см. [61, с. 244]), если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mu = \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$, $f \in B(E, \mathcal{L})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\exists F \in \mathcal{F} : \left| f(x) - \int_E f d\mu \right| < \varepsilon \quad \forall x \in F. \quad (5.7)$$

Свойство (5.7) интерпретируем как существование у функции $f \in B(E, \mathcal{L})$ предела по фильтру (точнее, по ультрафильтру). В связи с (5.7) отметим, наряду с [45, 46, 61, 63], более раннюю работу [4], где подобная конструкция использовалась для исследования условий универсальной интегрируемости ограниченных функций. При $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L})$ свойство (5.4) вырождается (см. [46, 61, 63]): проявляется характерный эффект, связанный со свойством счетной аддитивности (см., например, [61, с. 244]). Именно, имеем положение: если $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$, $\mu = \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$ и $f \in B(E, \mathcal{L})$, то

$$\exists F \in \mathcal{F} : f(x) = \int_E f d\mu \quad \forall x \in F. \quad (5.8)$$

Свойство (5.8) допускает очевидное развитие, связанное со свойством σ -мультипликативности ультрафильтра, реализующего счетно-аддитивную $(0, 1)$ -меру: если $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$, $\mu = \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$ и $\mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$, то

$$\exists F \in \mathcal{F} : f(x) = \int_E f d\mu \quad \forall f \in \mathbb{C} \quad \forall x \in F. \quad (5.9)$$

Свойство (5.9) используется как в конструкциях, связанных с представлением измеримых пространств, допускающих недираковские счетно-аддитивные $(0, 1)$ -меры, так и в конструкциях расширений, более специализированных в сравнении со следствием 4.1. Обсудим первое (из вышеупомянутых) применение (5.9) (см. [48]). Отметим, что в [46, 61, 63] даны подобные условия для измеримых пространств со свойством измеримости всех синглетонов, отвечающих точкам из E .

Если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ (т.е. если $\mathcal{H}$ есть семейство подмножеств E), то через $\mathbf{C}[\mathcal{H}]$ обозначаем семейство всех множеств $E \setminus H$, $H \in \mathcal{H}$. При $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ через $\mathfrak{N}_\mu$ обозначаем семейство всех множеств $L \in \mathcal{L}$ таких, что $\mu(L) = 0$; кроме того, пусть $\mathfrak{N}_\mu^*$ есть, по определению, семейство всех множеств $U \in \mathcal{P}(E)$ таких, что $\exists V \in \mathfrak{N}_\mu : U \subset V$. Эти определения традиционны для теории меры (см., например, [29, гл. I], [13, гл. III]), хотя и применяются для измеримых пространств с алгебрами и σ -алгебрами множеств. В этой связи отметим, что для $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ всегда $\mathbf{C}[\mathfrak{N}_\mu] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; более того, $\mu = \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$, где $\mathcal{F} = \mathbf{C}[\mathfrak{N}_\mu]$. Если же $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L})$, то $\mathbf{C}[\mathfrak{N}_\mu] \in (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$. С учетом (5.6), (5.9) получаем следующее свойство [48]: если $\mathcal{L} \in (\sigma - \text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L})$ и $\mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$, то

$$\exists N \in \mathfrak{N}_\mu : f(x) = \int_E f d\mu \quad \forall f \in \mathbb{C} \quad \forall x \in E \setminus N. \quad (5.10)$$

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $A \in \mathcal{P}(E)$ и $n \in \mathcal{N}$, то

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \triangleq \left\{ (L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{L}^n \mid \left(A = \bigcup_{i=1}^n L_i \right) \ \& \ \left(\forall p \in \overline{1, n} \ \forall q \in \overline{1, n} \ ((L_p \cap L_q \neq \emptyset) \implies (p = q)) \right) \right\}.$$

Предложение 5.2. Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то $\mathbb{T}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ таких, что $\{x\} \in \mathfrak{N}_\mu^* \ \forall x \in E$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и

$$\Omega \triangleq \left\{ \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \mid \{x\} \in \mathfrak{N}_\mu^* \ \forall x \in E \right\}.$$

Пусть $\eta \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, $u \in E$. Поскольку $\eta \neq (\delta_u \mid \mathcal{L})$, то можно указать $D \in \mathcal{L}$ со свойством $\eta(D) \neq \delta_u(D)$. Имеем импликацию

$$(u \in D) \implies (\{u\} \in \mathfrak{N}_\eta^*). \quad (5.11)$$

В (5.11) учтено свойство: при $u \in D$ имеет место $\delta_u(D) = 1$ и как следствие $\eta(D) = 0$, так как η есть $(0, 1)$ -мера, значение которой в точке D отличается от $\delta_u(D)$. В силу (5.11) осталось рассмотреть случай $u \notin D$. Для этого подберем $n \in \mathcal{N}$ так, что $\Delta_n(E \setminus D, \mathcal{L}) \neq \emptyset$; здесь используется определение полуалгебры множеств. Выберем произвольно $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \Delta_n(E \setminus D, \mathcal{L})$. Тогда для некоторого $r \in \overline{1, n}$ имеем $u \in \Lambda_r$. Так как $u \notin D$, то $\delta_u(D) = 0$ и $\eta(D) = 1$. В силу аддитивности η имеем $\eta(\Lambda_r) = 0$, т.е. $\Lambda_r \in \mathfrak{N}_\eta$. Как следствие $\{u\} \in \mathfrak{N}_\eta^*$ и в этом случае. Поскольку выбор $u \in E$ был произвольным, установлено, что $\{x\} \in \mathfrak{N}_\eta^*$ для любого $x \in E$, следовательно, $\eta \in \Omega$. Вложение

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \subset \Omega$$

установлено. Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда $\omega \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ и при этом

$$\{x\} \in \mathfrak{N}_\omega^* \quad \forall x \in E.$$

Выберем произвольно $v \in E$. Тогда $\{v\} \in \mathfrak{N}_\omega^*$ и для некоторого $V \in \mathfrak{N}_\omega$ имеем $v \in V$, но тогда $\delta_v(V) = 1 \neq \omega(V) = 0$. Следовательно, $\omega \neq (\delta_v \mid \mathcal{L})$, чем и устанавливается свойство $\omega \notin \mathbb{D}(\mathcal{L})$. Вложение $\Omega \subset \mathbb{T}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ установлено. $\square$

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то через $\mathbf{T}_\omega(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ таких, что $(\text{count})[E] \subset \mathfrak{N}_\mu^*$.

Предложение 5.3. Если $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, то $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \subset \mathbf{T}_\omega(\mathcal{L})$.

В связи с доказательством отметим ряд свойств, использующих, в частности, так называемую сильную аддитивность конечно-аддитивных мер [29, § 1.3]. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, то семейство $\mathfrak{N}_\mu$ замкнуто относительно конечных объединений, тогда подобным свойством обладает и $\mathfrak{N}_\mu^*$. Если же $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, $\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ и $(A_i)_{i \in \mathcal{N}}$ есть последовательность в $\mathfrak{N}_\mu^*$, то объединение всех множеств A_i , $i \in \mathcal{N}$, есть элемент $\mathfrak{N}_\mu^*$. Мы используем непрерывность μ на монотонных последовательностях измеримых множеств (см. [29, § 1.3]). Достаточно учесть предложение 5.2. Заметим, что при некотором выборе $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ имеем $\mathbb{T}_\mathbf{p}(\mathcal{L}) \cap \mathbf{T}_\omega(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Поэтому в предложении 5.3 утверждается справедливость вложения, что достаточно для доказательства. Теперь вполне очевидна следующая теорема.

Теорема 5.2. Если $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ и $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, то $\forall \mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})] \ \exists \mathbb{H} \in \mathcal{P}'(E) \setminus (\text{count})[E]: f(x_1) = f(x_2) \ \forall f \in \mathbb{C} \ \forall x_1 \in \mathbb{H} \ \forall x_2 \in \mathbb{H}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ и при этом $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Пусть $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$. Тогда, согласно предложению 5.3, имеем $\mu \in \mathbf{T}_\omega(\mathcal{L})$, что означает вложение $\omega[E] \subset \mathfrak{N}_\mu^*$. Вместе с тем $\mathfrak{N}_\mu \subset \mathfrak{N}_\mu^*$ и при этом $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}[\mathfrak{N}_\mu] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$. Ясно, что $\mu = \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]: \mu(L) = 0$ при $L \in \mathfrak{N}_\mu$ и, в силу аддитивности μ , $\mu(\Lambda) = 1 \ \forall \Lambda \in \mathcal{F}$; по свойству ультрафильтра измеримого пространства [58, с. 300] при $\tilde{L} \in \mathcal{L}$ всегда имеем $(\tilde{L} \in \mathcal{F}) \vee (E \setminus \tilde{L} \in \mathcal{F})$. Фиксируем $\mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$ и с учетом (5.10) подберем $N \in \mathfrak{N}_\mu$ так, что для $F \triangleq E \setminus N \in \mathcal{F}$ имеет место

$$f(x) = \int_E f d\mu \quad \forall f \in \mathbb{C} \ \forall x \in F. \quad (5.12)$$

Разумеется, $\mu(F) = 1$ и, следовательно, $F \neq \emptyset$. Далее, $F \notin (\text{count})[E]$, так как в противном случае $F \in \mathfrak{N}_\mu^*$ (это означает равенство $\mu(F) = 0$), что невозможно. Следовательно, $F \in \mathcal{P}'(E) \setminus (\text{count})[E]$ и при этом

$$f(x_1) = \int_E f d\mu = f(x_2) \quad \forall f \in \mathbb{C} \quad \forall x_1 \in F \quad \forall x_2 \in F.$$

Здесь мы использовали (5.12). □

6. ОБ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ НЕДИРАКОВСКИЕ СЧЕТНО-АДДИТИВНЫЕ $(0, 1)$ -МЕРЫ

В связи с теоремой 5.1 рассмотрим один достаточно обширный класс стандартных измеримых пространств $(E, \mathcal{L})$, для которых $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Для таких измеримых пространств рассмотрим некоторые следствия упомянутой теоремы. В части, касающейся расширений, используем некоторые положения, связанные с упомянутой проблемой. Отметим два обстоятельства. Первое связано с тем, что при $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$ вопрос о непустоте множества $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ непосредственно связан с известной проблемой меры (проблемой существования измеримых кардинальных чисел) [27, с. 314]. Положительное решение этой проблемы теории множеств если и возможно, то лишь для множеств, имеющих очень большие мощности. При $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(E)$ появляются реальные возможности для построения недираковских счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер (см., например, примеры [46, 61]). Отметим и второе обстоятельство: в [38, гл. II] исследуются достаточные условия отсутствия таких мер (см. также библиографию в [38]). Ниже мы используем положения [49], отметив предварительно ряд совсем простых свойств.

Если $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то соответственно $\mathbf{a}_0[\mathcal{L}] \in (\text{alg})[E]$ и $\sigma_0[\mathcal{L}] \in (\sigma\text{-alg})[E]$ есть, по определению, алгебра и σ -алгебра подмножеств E , порожденные [29, гл. I] семейством $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$, то $\lambda^0(\mu) \in (\sigma\text{-add})_+[\sigma_0[\mathcal{L}]]$ есть, по определению, такая (единственная) мера на $\sigma_0[\mathcal{L}]$, для которой $\mu = (\lambda^0(\mu) \upharpoonright \mathcal{L})$. $\lambda^0(\mu)$ определяется стандартной (см. [29, гл. I], [13, гл. III]) процедурой продолжения меры с алгебры на σ -алгебру подмножеств E , порожденную данной алгеброй множеств. Требуемое свойство состоит в следующем [61, с. 239]: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L})$, то

$$\lambda^0(\mu) \in \mathbb{T}_\sigma(\sigma_0[\mathcal{L}]). \quad (6.1)$$

Согласно (6.1), стандартное продолжение счетно-аддитивной $(0, 1)$ -меры двужначо. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то, как легко проверить,

$$\mathbf{a}_0[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \cup \mathbf{C}[\mathcal{F}]; \quad (6.2)$$

если при этом $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_0[\mathcal{F}])$. В (6.2) введена алгебра подмножеств E , порожденная квазифильтром измеримого пространства с алгеброй множеств. Отметим одно свойство, применяя (6.2) к σ -мультипликативным квазифильтрам. Именно, $\forall \mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E] \quad \forall \mathcal{F} \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}]$

$$\mathbf{a}_0[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \cup \mathbf{C}[\mathcal{F}] = \sigma_0[\mathcal{F}] \in (\sigma\text{-alg})[E]. \quad (6.3)$$

В частности, (6.3) можно использовать в случае σ -мультипликативного фильтра стандартного измеримого пространства. Отметим, что в условиях, определяющих (6.3), всегда $\sigma_0[\mathcal{F}] \subset \mathcal{L}$ (см. раздел 5). При этом $\forall \mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E] \quad \forall \mathcal{F} \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{L}]$

$$\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\sigma_0[\mathcal{F}]) \cap (\sigma\text{-}\mathbb{F})[\sigma_0[\mathcal{F}]]. \quad (6.4)$$

В связи с (6.4) следует учесть (5.1) и отмеченную оценку для $\sigma_0[\mathcal{F}]$. На основе (6.4) можно (см. (5.6)) построить счетно-аддитивную $(0, 1)$ -меру в виде индикатора ультрафильтра (6.4).

Если $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $A \in \mathcal{P}(E)$, то полагаем, что

$$\Delta_\infty[A; \mathcal{L}] \triangleq \left\{ (L_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^\mathbb{N} \mid \left(A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i \right) \& (L_p \cap L_q = \emptyset \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N} \setminus \{p\}) \right\},$$

получая множество всех счетных разбиений A множествами из $\mathcal{L}$. Возвращаясь к более общему случаю измеримого пространства с алгеброй множеств, отметим, что (см. [49, § 2]) $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$$

$$(\chi_{\mathcal{F}}[\mathbf{a}_0[\mathcal{F}]] \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_0[\mathcal{F}])) \iff (\Delta_{\infty}[E; \mathbf{C}[\mathcal{F}]] \neq \emptyset); \quad (6.5)$$

в силу (3.2) из (6.5) имеем еще одну исчерпывающую характеристику счетно-аддитивной реализации индикатора фильтра исходного измеримого пространства.

Фиксируем до тех пор, пока не оговорено противное, произвольную топологию τ множества E , получая топологическое пространство (E, τ) . Введем в рассмотрение $\mathbf{K} \triangleq (\tau\text{-comp})[E]$, а также

$$\mathfrak{K} \triangleq \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists K \in \mathbf{K} : H \subset K\},$$

получая семейство всех предкомпактных в (E, τ) подмножеств E . Легко видеть, что $\mathbf{C}[\mathfrak{K}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$,

$$(E \notin \mathbf{K}) \implies (\mathbf{C}[\mathfrak{K}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))).$$

Итак, если топологическое пространство (E, τ) некомпактно, то $\mathbf{C}[\mathfrak{K}] \in \mathfrak{F}[E]$. Отметим, что в общем случае

$$\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}] = \mathbf{a}_0[\mathbf{C}[\mathfrak{K}]] = \mathfrak{K} \cup \mathbf{C}[\mathfrak{K}] \in (\text{alg})[E]$$

(см. (6.2)). Пусть $\mathbf{X}_{\tau}^0 \triangleq \chi_{\mathbf{C}[\mathfrak{K}]}[\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]]$. В случае некомпактного топологического пространства (E, τ) имеем $\mathbf{C}[\mathfrak{K}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$ и $\mathbf{X}_{\tau}^0 \in \mathbb{T}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$. Отметим, что $\mathbf{K} \subset \mathfrak{K}$, кроме того, $\{x\} \in \mathbf{K} \ \forall x \in E$. При этом $\{x\} \in \mathbf{a}_0[\mathfrak{K}] \ \forall x \in E$. Как следствие $\mathbb{D}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{T}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$ таких, что $\exists x \in E : \mu(\{x\}) \neq 0$. В итоге,

$$(E \notin \mathbf{K}) \implies (\mathbf{X}_{\tau}^0 \in \mathbb{T}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]) \setminus \mathbb{D}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])).$$

Напомним [2, с. 11], что топологическое пространство (E, τ) называется σ -компактным, если

$$\exists \mathfrak{Y} \in (\text{count})[\mathbf{K}] : E = \bigcup_{Y \in \mathfrak{Y}} Y.$$

Предложение 6.1. *Если топологическое пространство (E, τ) σ -компактно, но не компактно, то $\mathbf{X}_{\tau}^0 \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$. Если же топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то $\mathbf{X}_{\tau}^0 \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$. Наконец, если (E, τ) — компактное топологическое пространство, то $\mathbf{X}_{\tau}^0$ есть функция на $\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]$, тождественно равная единице, и как следствие $\mathbf{X}_{\tau}^0 \notin (\text{add})[\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]]$.*

Доказательство следует из (6.5). Отметим следствие: если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то

$$\mathbf{X}_{\tau}^0 \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]) \setminus \mathbb{D}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]). \quad (6.6)$$

Из (6.1), (6.6) и предложения 6.1 вытекает (см. [49])

Теорема 6.1. *Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то*

$$\mathbb{T}_{\sigma}(\sigma_0[\mathfrak{K}]) \setminus \mathbb{D}(\sigma_0[\mathfrak{K}]) \neq \emptyset.$$

Конкретную недираковскую счетно-аддитивную $(0, 1)$ -меру на $\sigma_0[\mathfrak{K}]$ можно (в условиях теоремы) получить как $\lambda^0(\mu)$, где $\mu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$ определяется в (6.6).

Следствие 6.1. *Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то*

$$\mathbb{T}_{\sigma}(\sigma_0[\mathbf{K}]) \setminus \mathbb{D}(\sigma_0[\mathbf{K}]) \neq \emptyset.$$

Доказательство получается непосредственным сужением недираковской счетно-аддитивной $(0, 1)$ -меры на σ -алгебре $\sigma_0[\mathfrak{K}]$ на соответствующую ее σ -подалгебру $\sigma_0[\mathbf{K}]$, $\sigma_0[\mathbf{K}] \subset \sigma_0[\mathfrak{K}]$.

Введем в рассмотрение семейство $\mathbf{K}_{\sigma}$ всех объединений не более чем счетных подсемейств $\mathbf{K}$, т.е. семейство всех множеств

$$\bigcup_{K \in \mathcal{C}} K, \ \mathcal{C} \in (\text{count})[\mathbf{K}].$$

Тогда $\mathbf{K}_{\sigma}$ есть семейство всех σ -компактных в (E, τ) подмножеств E . Кроме того, введем семейство $\mathfrak{K}_{\sigma}$ всех множеств

$$\bigcup_{H \in \mathcal{C}} H, \ \mathcal{C} \in (\text{count})[\mathfrak{K}].$$

Как легко видеть, всегда имеет место

$$\mathfrak{K}_\sigma = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \exists S \in \mathbf{K}_\sigma : X \subset S\}.$$

Из определений вытекает свойство: $\mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma] \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{P}(E)]$. Здесь отметим общий факт (см. (6.3)):

$$\sigma_0[\mathfrak{K}_\sigma] = \mathbf{a}_0[\mathfrak{K}_\sigma] = \mathfrak{K}_\sigma \cup \mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma] = \sigma_0[\mathfrak{K}] = \sigma_0[\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}]] \in (\sigma\text{-alg})[E]. \quad (6.7)$$

С другой стороны, имеет место эквивалентность следующих двух утверждений:

- 1') топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным;
- 2') $\mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma] \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{P}(E)]$.

Поэтому (см. (6.7)) справедливо следующее предложение.

Предложение 6.2. *Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то*

$$\mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma] \in \mathbb{F}_0^*(\sigma_0[\mathfrak{K}]) \cap (\sigma - \mathbf{F})[\sigma_0[\mathfrak{K}]].$$

При доказательстве используется комбинация (6.4) и (6.7), а также простейшие свойства σ -алгебры множеств, порожденной семейством (см. [49, с. 246]).

Введем в рассмотрение функцию множеств

$$\mathbf{X}_\tau^{00} \triangleq \chi_{\mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma]}[\sigma_0[\mathfrak{K}]], \quad (6.8)$$

действующую из σ -алгебры (6.7) в двоичное $\{0; 1\}$. Очевидно следующее утверждение.

Предложение 6.3. *Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то*

$$\mathbf{X}_\tau^{00} \in \mathbb{T}_\sigma(\sigma_0[\mathfrak{K}]).$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (6.8) и предложения 6.2. Напомним (6.1), (6.6).

Теорема 6.2. *Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то $\mathbf{X}_\tau^0 \in \mathbb{T}_\sigma(\mathbf{a}_0[\mathfrak{K}])$ и при этом*

$$\mathbf{X}_\tau^{00} = \lambda^0(\mathbf{X}_\tau^0).$$

Подробное доказательство теоремы приведено в [49, с. 247-248].

Следствие 6.2. *Пусть топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным. Тогда*

$$\mathbf{X}_\tau^{00} \in \mathbb{T}_\sigma(\sigma_0[\mathfrak{K}]) \setminus \mathbb{D}(\sigma_0[\mathfrak{K}]).$$

При доказательстве используются соотношения (6.1) и (6.6), а также следующие свойства:

- 1'') $\{x\} \in \mathbf{K} \ \forall x \in E$;
- 2'') $\mathbf{K} \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_\sigma$.

Тогда из 1'') и 2'') при $x \in E$ имеем множество $\{x\}$ таково, что $\{x\} \in \sigma_0[\mathfrak{K}] \setminus \mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma]$ (в условиях следствия), а поэтому $\mathbf{X}_\tau^{00}(\{x\}) = 0$.

Возвращаясь к (5.6), следующее утверждение.

Предложение 6.4. *Пусть топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным. Тогда $\mathbf{X}_\tau^{00} \in \mathbb{T}_\sigma(\sigma_0[\mathfrak{K}])$ и при этом*

$$\forall \mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}])] \ \exists H \in \mathfrak{K}_\sigma : f(x) = \int_E f d\mathbf{X}_\tau^{00} \quad \forall f \in \mathbb{C} \ \forall x \in E \setminus H.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (5.6), (6.7), (6.8) и предложения 6.2. В следующем утверждении раскрывается структура пространства $B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}])$ всех ограниченных измеримых, в смысле измеримого пространства $(E, \sigma_0[\mathfrak{K}])$, вещественнозначных функций на E . Оказывается, что упомянутая измеримость является (в интересном для нас случае) вырожденной, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3. Пусть топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным. Тогда

$$B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]) = \{f \in \mathbb{B}(E) \mid \exists S \in \mathfrak{K}_\sigma : f(x_1) = f(x_2) \forall x_1 \in E \setminus S \forall x_2 \in E \setminus S\}.$$

Доказательство теоремы см. в [49, с. 249-250].

Следствие 6.3. Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным и $\varphi \in B(E, \sigma_0[\mathbf{K}])$, то

$$\exists \mathbf{S} \in \mathbf{K}_\sigma : \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \forall x_1 \in E \setminus \mathbf{S} \forall x_2 \in E \setminus \mathbf{S}.$$

Следствие 6.4. Если топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным, то

$$B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]) = \{f \in \mathbb{B}(E) \mid \exists S \in \mathbf{K}_\sigma : f(x_1) = f(x_2) \forall x_1 \in E \setminus S \forall x_2 \in E \setminus S\}.$$

Замечание 6.1. Отметим связь трех последних утверждений со свойствами меры $\mathbf{X}_\tau^{00}$. Речь пойдет о представлении посредством этой меры одного линейного непрерывного функционала на пространстве ограниченных измеримых функций. Этот функционал, определяемый в условиях теоремы 6.3, сопоставляет каждой такой функции некоторую ее главную константу. Итак, пусть в пределах настоящего замечания топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным. Тогда справедливы теорема 6.3 и два ее следствия. Поэтому

$$\forall f \in B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]) \exists ! t \in \mathbb{R} : \{S \in \mathbf{K}_\sigma \mid f(x) = t \forall x \in E \setminus S\} \neq \emptyset. \quad (6.9)$$

Мы использовали следствие 6.4. С учетом (6.9) введем функционал

$$\mathbf{c}_\tau^* : B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (6.10)$$

такой, что $\forall f \in B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]) \exists S \in \mathbf{K}_\sigma$:

$$f(x) = \mathbf{c}_\tau^*(f) \forall x \in E \setminus S. \quad (6.11)$$

С учетом предложения 6.4 имеем из (6.10), (6.11) свойство

$$\mathbf{c}_\tau^*(f) = \int_E f d\mathbf{X}_\tau^{00} \forall f \in B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]).$$

В силу следствия 6.2 имеем линейный непрерывный функционал

$$\mathbf{c}_\tau^* = \left(\int_E f d\mathbf{X}_\tau^{00} \right)_{f \in B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}])} \in B^*(E, \sigma_0[\mathfrak{K}]) \quad (6.12)$$

со свойством (6.11). Итак, в (6.12) получено правило, определяющее фактически структуру банахова пространства $B(E, \sigma_0[\mathfrak{K}])$. Каждый элемент этого пространства есть функция, обладающая главной константой.

Заметим, что теорема 6.3 и ее следствия, а также представления на основе (6.10)–(6.12) имеют место [2, гл. I] для многих конкретных топологических пространств. Само свойство $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ не является экзотическим, а напротив, определяет весьма представительный класс измеримых пространств (см. также [61, с. 242-243, 249-250]). Однако данное свойство порождает определенную патологию пространства ограниченных измеримых функций (см. теоремы 5.1 и 6.3, следствие 6.4), которая может осложнить использование этого пространства в приложениях. По-видимому, весьма важно с этой точки зрения располагать возможностью проверки упомянутого свойства при построении математических моделей, использующих измеримые пространства. С этим вопросом связаны конструкции следующего раздела.

Продолжим обсуждение конструкций, реализующих недираковские счетно-аддитивные $(0, 1)$ -меры в явном виде. Дело в том, что вышеупомянутая схема обладает аналогом, связанным с изящной конструкцией σ -топологического пространства, принадлежащей А. Д. Александрову [55]. Речь идет об аналоге вышеупомянутого построения функции множеств (6.8), реализуемом в терминах σ -топологических пространств. Мы совсем кратко рассмотрим эту модификацию, полагая, что $(\sigma\text{-ТОР})[E]$ есть, по определению, множество всех семейств $t \in \pi[E]$ таких, что

$$\bigcup_{i \in \mathcal{N}} G_i \in t \quad \forall (G_i)_{i \in \mathcal{N}} \in t^{\mathcal{N}}. \quad (6.13)$$

Здесь предполагается замкнутость семейств t относительно конечных пересечений и счетных объединений, а также свойства каждого из этих семейств содержать множества $\emptyset$ и E . Элементы множества $(\sigma\text{-TOP})[E]$ именуем σ -топологиями множества E . Если $\mathbf{t} \in (\sigma\text{-TOP})[E]$, то пару

$$(E, \mathbf{t}) \quad (6.14)$$

называем σ -топологическим пространством (А. Д. Александров использовал в этой ситуации термин «пространство»). Аксиома (6.13) реализует основное отличие упомянутого пространства (6.14) и топологического пространства. Каждая топология множества E и каждая σ -алгебра подмножеств E являются σ -топологиями E . Множества, принадлежащие σ -топологии $\mathbf{t} \in (\sigma\text{-TOP})[E]$, называются (как и в случае топологических пространств) открытыми, а их дополнения — замкнутыми в смысле (6.14). Очевидно, $\mathbf{C}[\mathbf{t}]$ — семейство всех замкнутых (в пространстве (6.14)) подмножеств E . Термин «компактность», применяемый зачастую к σ -топологическим пространствам, условимся заменять термином «счетная компактность», имея в виду аналогии с топологическими пространствами: называем (6.14) счетно-компактным σ -топологическим пространством, если $\forall (G_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathbf{t}^{\mathcal{N}}$

$$\left(E = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} G_i \right) \implies \left(\exists n \in \mathcal{N} : E = \bigcup_{i=1}^n G_i \right). \quad (6.15)$$

Соответственно, условимся через $(\sigma_{\mathbf{c}}\text{-TOP})[E]$ обозначать множество всех σ -топологий $t \in (\sigma\text{-TOP})[E]$ таких, что истинна импликация (6.15) как только $(G_i)_{i \in \mathcal{N}} \in t^{\mathcal{N}}$. $(\sigma_{\mathbf{c}}\text{-TOP})[E]$ — множество всех $\mathbf{t} \in (\sigma\text{-TOP})[E]$ таких, что $\forall (H_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathbf{C}[\mathbf{t}]^{\mathcal{N}}$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n H_i \neq \emptyset \ \forall n \in \mathcal{N} \right) \implies \left(\bigcap_{i \in \mathcal{N}} H_i \neq \emptyset \right). \quad (6.16)$$

Как и в случае топологического пространства, введем определение подмножеств E , обладающих свойством счетной компактности в смысле соответствующего σ -топологического пространства (6.14). Именно, если (6.14) — заданное σ -топологическое пространство, то $\mathbf{c}_{\sigma}[\mathbf{t}]$ есть, по определению, семейство всех множеств $K \in \mathcal{P}(E)$ таких, что $\forall (G_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathbf{t}^{\mathcal{N}}$

$$\left(K \subset \bigcup_{i \in \mathcal{N}} G_i \right) \implies \left(\exists n \in \mathcal{N} : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_i \right).$$

Множества из семейства $\mathbf{c}_{\sigma}[\mathbf{t}]$ называем счетно-компактными в смысле (6.14). Кроме того, введем семейство

$$\mathbf{c}_{\sigma}^0[\mathbf{t}] \triangleq \{ H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists C \in \mathbf{c}_{\sigma}[\mathbf{t}] : H \subset C \}. \quad (6.17)$$

Элементы семейства (6.17) подобны по смыслу предкомпактным множествам в общей топологии. В развитие упомянутых конструкций введем аналоги множеств $\mathbf{K}_{\sigma}$ и $\mathbf{K}_{\sigma}$. Именно, полагаем при $\mathbf{t} \in (\sigma\text{-TOP})[E]$, что

$$\mathbf{C}_{\sigma}[\mathbf{t}] \triangleq \left\{ \bigcup_{i \in \mathcal{N}} C_i : (C_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathbf{c}_{\sigma}[\mathbf{t}]^{\mathcal{N}} \right\} \quad (6.18)$$

(семейство всех счетных объединений множеств из $\mathbf{c}_{\sigma}[\mathbf{t}]$) и, кроме того,

$$\mathbf{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}] \triangleq \{ H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists S \in \mathbf{C}_{\sigma}[\mathbf{t}] : H \subset S \}. \quad (6.19)$$

“““““В (6.19) действуем по аналогии с (6.17). Элементы семейства (6.18) суть σ -счетно-компактные в смысле (6.14) подмножества E . При этом

$$((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E] \triangleq \left\{ t \in (\sigma\text{-TOP})[E] \mid E \in \mathbf{C}_{\sigma}[t] \right\} = \left\{ t \in (\sigma\text{-TOP})[E] \mid E \in \mathbf{C}_{\sigma}^0[t] \right\}.$$

Для $\mathbf{t} \in ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]$ имеем в виде (6.14) σ -счетно-компактное σ -топологическое пространство (напомним, что в вопросах терминологии, связанной со свойствами (6.15), (6.16), мы пользуемся аналогами для случая «обычных» топологических пространств). Отметим, что

$$(\sigma_{\mathbf{c}}\text{-TOP})[E] \subset ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E].$$

Замечание 6.2. Отметим одно свойство, фактически установленное в [17]. Речь идет о характеристике так называемых компактных классов, играющих важную роль в теории вероятностей. Для этого введем понятие σ -топологии E , порожденной произвольным семейством подмножеств множества E : если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $(\sigma\text{-TOP})_0[E|\mathcal{E}]$ обозначаем (непустое) множество всех $t \in (\sigma\text{-TOP})[E]$ таких, что $\mathcal{E} \subset t$; тогда семейство

$$t_\sigma^h(\mathcal{E}) \triangleq \bigcap_{t \in (\sigma\text{-TOP})_0[E|\mathcal{E}]} t$$

(σ -топология E , порожденная семейством $\mathcal{E}$) допускает простое описание. Для его получения в пределах данного замечания используем следующие соглашения: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то $\mathbf{f}[\mathcal{E}]$ есть, по определению, семейство всех множеств

$$\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U, \quad \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E}),$$

и через $\Omega[\mathcal{E}]$ обозначаем семейство всех множеств

$$\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V, \quad \mathcal{S} \in (\text{count})[\mathcal{E}].$$

Легко видеть, что $t_\sigma^h(\mathcal{E}) = \Omega[\mathbf{f}[\mathcal{E}]] \cup \{\emptyset; E\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$; в этой связи см. [17]. Имеет место следующее свойство: для каждого семейства $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ эквивалентны утверждения:

- 1) для всякой последовательности $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}$ истинна импликация (6.16);
- 2) $t_\sigma^h(\mathbf{C}[\mathcal{H}]) \in (\sigma\text{-c-TOP})[E]$.

Утверждение 1) означает, что $\mathcal{H}$ — компактный класс (см. [29, гл. I]). Утверждение 2) говорит о счетной компактности σ -топологии, порожденной семейством всех дополнений множеств из $\mathcal{H}$. Следовательно, свойство компактности классов (множеств) в теории вероятностей имеет σ -топологическую природу. Отметим результат [17], касающийся необходимых и достаточных условий счетной аддитивности меры в терминах свойства почти-компактности.

В заключение данного замечания отметим пример σ -топологического пространства. Пусть $E = [0, 1]$. Рассмотрим семейство $\mathcal{J}$ всех отрезков $[a, b]$, $a \in E$, $b \in E$. Пустое множество рассматриваем в виде отрезка, интерпретируя его как $\emptyset = [1, 0]$. С этой целью в упомянутом определении семейства $\mathcal{J}$ не ограничиваем себя при перечислении отрезков $[a, b]$ естественным случаем $a \leq b$. В этих условиях $\Omega[\mathcal{J}] \in (\sigma\text{-TOP})[E]$. Это свойство легко проверяется с использованием вышеупомянутого представления σ -топологии, порожденной семейством подмножеств E (в данном случае устанавливается равенство $t_\sigma^h(\mathcal{J}) = \Omega[\mathcal{J}]$).

Вернемся к общему случаю непустого множества E . До конца настоящего раздела фиксируем σ -топологию $\mathbf{t} \in (\sigma\text{-TOP})[E]$ и как следствие σ -топологическое пространство (6.14). Легко видеть, что $\mathbf{C}[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$ и при этом

$$(\mathbf{t} \notin (\sigma\text{-c-TOP})[E]) \iff (\mathbf{C}[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))). \quad (6.20)$$

Из (6.20) имеем (см. раздел 4), что свойство $\mathbf{t} \notin (\sigma\text{-c-TOP})[E]$ эквивалентно свойству $\mathbf{C}[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]] \in \mathfrak{F}[E]$. С учетом (6.2) имеем

$$\mathcal{A} \triangleq \mathbf{a}_0[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]] = \mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}] \cup \mathbf{C}[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]] \in (\text{alg})[E].$$

Для измеримого пространства $(E, \mathcal{A})$ выполним некоторые предварительные построения, ориентируясь на конкретизацию (6.4) и полагая

$$\mathbb{X}_\mathbf{t}^0 \triangleq \chi_{\mathbf{C}[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]]}[\mathcal{A}]. \quad (6.21)$$

На идейном уровне следуем (в (6.21)) схеме, которая была намечена в первой части настоящего раздела для случая топологического пространства (E, τ) . Заметим, что

$$\mathcal{B} \triangleq \sigma_0[\mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]] = \sigma_0[\mathcal{A}] \in (\sigma\text{-alg})[E].$$

Если $\mathbf{t} \in (\sigma_{\mathbf{c}}\text{-TOP})[E]$, т.е. в случае счетно-компактного пространства (6.14), то $\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0 \notin (\text{add})[\mathcal{A}]$ (см. раздел 3). Напротив, при

$$\mathbf{t} \notin (\sigma_{\mathbf{c}}\text{-TOP})[E] \quad (6.22)$$

имеем $\mathbf{C}[\mathbf{c}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и как следствие

$$\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0 \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{A}). \quad (6.23)$$

Пока не оговорено противное будем полагать, что выполняется (6.22), т.е. пространство (6.14) не является счетно-компактным. Свойство (6.23) имеет место и допускает два интересных уточнения:

1) при $\mathbf{t} \in ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E] \setminus (\sigma_{\mathbf{c}}\text{-TOP})[E]$

$$\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0 \in (\mathbf{p}\text{-add})_+[\mathcal{A}] \quad (6.24)$$

и в силу (6.23) имеет место

$$\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0 \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{A});$$

2) в случае $\mathbf{t} \notin ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]$

$$\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0 \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{A}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{A}). \quad (6.25)$$

Более того, в дополнение к (6.25) отметим следующее легко проверяемое свойство:

$$(\mathbf{t} \notin ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]) \iff (\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0 \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{A}]).$$

Для σ -алгебры $\mathcal{B} \in (\sigma\text{-alg})[E]$ по свойству (6.1) при условии $\mathbf{t} \notin ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]$ (в силу (6.25)) имеем корректно определенную меру $\lambda^0(\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0) \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{B})$; более того, в этом случае

$$\lambda^0(\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^0) \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{B}). \quad (6.26)$$

Вернемся к рассмотрению общего случая σ -топологического пространства (6.14), т.е. не будем предполагать выполнение условия (6.22). Как и в случае топологического пространства (E, τ) , рассмотрим естественное уточнение (6.26), опираясь на следующее легко проверяемое свойство

$$\mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]] \in (\sigma - \mathbf{F})[\mathcal{P}(E)].$$

Отметим, что

$$\mathcal{B} = \mathbf{a}_0[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]] = \sigma_0[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]] = \mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}] \cup \mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]]$$

и, кроме того,

$$(\mathbf{t} \notin ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]) \iff (\mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]] \in (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{P}(E)]).$$

Вновь имеем аналогию с рассмотренным ранее случаем топологического пространства (E, τ) . При этом в случае $\mathbf{t} \notin ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]$

$$\mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{B}) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{B}] \quad (6.27)$$

и, кроме того, $\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}] = \mathcal{B} \setminus \mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]]$. Свойство (6.27) является в силу (5.6) ключевым для построения недираковских счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер. В этой связи введем

$$\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^{00} \triangleq \chi_{\mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]]}[\mathcal{B}],$$

получая индикатор множества (точнее, семейства) $\mathbf{C}[\mathcal{C}_{\sigma}^0[\mathbf{t}]]$, имеющий область определения $\mathcal{B}$. Из (5.6), (6.26) и (6.27) вытекает следующая теорема.

Теорема 6.4. Если $\mathbf{t} \notin ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]$, то

$$\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^{00} \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{B}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{B}); \quad (6.28)$$

если же $\mathbf{t} \in ((\sigma; \sigma_{\mathbf{c}})\text{-TOP})[E]$, то $\mathbb{X}_{\mathbf{t}}^{00} \notin (\text{add})[\mathcal{B}]$.

Из теоремы 6.4 видно, что число возможных вариантов реализации $\mathbb{X}_t^0$ и аналогичное число для $\mathbb{X}_t^{00}$ отличаются. В первом случае имеем три возможности: $\mathbb{X}_t^0$ может быть неаддитивной функцией множеств, чисто конечно-аддитивной мерой (см. (6.24)) или счетно-аддитивной мерой. Для $\mathbb{X}_t^{00}$ вторая возможность отсутствует (аналогичное наблюдение можно сделать и в отношении подобной конструкции для случая топологического пространства (E, τ) : функция множеств $\mathbf{X}_\tau^{00}$, построенная в (6.8), может быть конечно-аддитивной, но не счетно-аддитивной мерой). Это обстоятельство полезно связать с известным результатом [66]. Дело в том, что в конструктивных построениях для случая $\mathbb{X}_t^{00}$ мы не использовали фрагментов, связанных с аксиомой выбора, т.е. действовали (фактически) в условиях, предполагаемых в [66].

Пусть до конца настоящего раздела

$$t \notin ((\sigma; \sigma_c)\text{-TOP})[E]. \quad (6.29)$$

Итак, мы получаем (6.28). С учетом ранее упомянутых свойств функции множеств $\mathbb{X}_t^0$ (см. (6.25)) имеем (при условии (6.29)) положение $\mathbb{X}_t^0 \in (\sigma\text{-add})_+[A]$. Легко видеть, что

$$\mathbb{X}_t^{00} = \lambda^0(\mathbb{X}_t^0).$$

С учетом (5.9) и (6.27) имеем, что $\forall \mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{B})] \exists H \in \mathcal{C}_\sigma[t]$:

$$\int_E f d\mathbb{X}_t^{00} = f(y) \quad \forall y \in E \setminus H. \quad (6.30)$$

Отметим ряд достаточно очевидных следствий (6.30).

Теорема 6.5. Для множества $B(E, \mathcal{B})$ всех ограниченных $\mathcal{B}$ -измеримых вещественнозначных функций на E имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned} B(E, \mathcal{B}) &= \left\{ f \in \mathbb{B}(E) \mid \exists S \in \mathcal{C}_\sigma[t] : f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \in E \setminus S \quad \forall x_2 \in E \setminus S \right\} = \\ &= \left\{ f \in \mathbb{B}(E) \mid \exists \mathbf{S} \in \mathcal{C}_\sigma[t] : f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \in E \setminus \mathbf{S} \quad \forall x_2 \in E \setminus \mathbf{S} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство подобно соответствующим обоснованиям [49], реализуемым для случая топологических пространств.

Введем $\mathfrak{C} \triangleq \sigma_0[\mathbf{c}_\sigma[t]] \in (\sigma\text{-alg})[E]$, получая (в виде $\mathfrak{C}$) σ -подалгебру σ -алгебры $\mathcal{B}$, для которой, как легко видеть,

$$(\mathbb{X}_t^{00}|\mathfrak{C}) \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{C}) \setminus \mathbb{D}(\mathfrak{C})$$

и, кроме того, имеет место очевидное следствие теоремы 6.5: $\forall f \in B(E, \mathfrak{C}) \exists S \in \mathcal{C}_\sigma[t]$:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \in E \setminus S \quad \forall x_2 \in E \setminus S.$$

Наконец, для рассматриваемого случая σ -топологического пространства (6.14) имеем аналог конструкции линейного непрерывного функционала в замечании 6.1. Действительно, по аналогии с (6.9) имеем из теоремы 6.5, что в рассматриваемом случае пространства (6.14) (напомним, что мы предполагали выполненным (6.29), т.е. постулировали, что σ -топологическое пространство (6.14) не является σ -счетно-компактным)

$$\forall f \in B(E, \mathcal{B}) \exists! \xi \in \mathbb{R} : \{S \in \mathcal{C}_\sigma[t] \mid f(x) = \xi \quad \forall x \in E \setminus S\} \neq \emptyset.$$

С учетом данного свойства введем функционал

$$\hat{\mathbf{c}}_t^* : B(E, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

такой, что $\forall f \in B(E, \mathcal{B}) \exists S \in \mathcal{C}_\sigma[t]$

$$f(x) = \hat{\mathbf{c}}_t^*(f) \quad \forall x \in E \setminus S.$$

С учетом (6.30) легко проверяется, что

$$\hat{\mathbf{c}}_t^* = \left(\int_E f d\mathbb{X}_t^{00} \right)_{f \in B(E, \mathcal{B})} \in B^*(E, \mathcal{B}).$$

Замечание 6.3. Сравним вышеупомянутые построения для случаев топологического пространства (E, τ) и пространства (6.14), полагая (в интересах данного сравнения), что $\mathbf{t}$ — топология множества E , т.е. что (6.14) является топологическим пространством. Кроме того, предположим, что $\tau = \mathbf{t}$, получая совпадение двух топологических пространств (E, τ) и $(E, \mathbf{t})$. При этом $\mathbf{c}_\sigma[\mathbf{t}]$ — семейство всех счетно-компактных в топологическом пространстве (E, τ) подмножеств E . Имеем

$$\mathbf{K} \subset \mathbf{c}_\sigma[\mathbf{t}]. \quad (6.31)$$

Из (6.31) следует вложение $\mathfrak{K} \subset \mathbf{c}_\sigma^0[\mathbf{t}]$. Следовательно,

$$\sigma_0[\mathfrak{K}] \subset \mathcal{B}.$$

С другой стороны, из (6.18) и (6.31) имеем вложение $\mathbf{K}_\sigma \subset \mathcal{C}_\sigma[\mathbf{t}]$, откуда следует, что (см. (6.19))

$$\mathfrak{K}_\sigma \subset \mathcal{C}_\sigma^0[\mathbf{t}]. \quad (6.32)$$

Из (6.32) следует, в частности, что из условия $\tau \notin ((\sigma; \sigma_\sigma)\text{-ТОР})[E]$ вытекает свойство: (E, τ) не является σ -компактным топологическим пространством. Тогда, при условии (6.29) имеем возможность построения счетно-аддитивных версий $\mathbf{X}_\tau^{00}$ и $\mathbb{X}_\mathbf{t}^{00}$. При этом в силу (6.32)

$$\mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma] \subset \mathbf{C}[\mathcal{C}_\sigma^0[\mathbf{t}]]. \quad (6.33)$$

Пусть выполнено (6.29). Тогда из (6.8), (6.32) и определения $\mathbb{X}_\mathbf{t}^{00}$ вытекает, что (при предположении $\tau = \mathbf{t}$)

$$\mathbf{X}_\tau^{00} = (\mathbb{X}_\mathbf{t}^{00} \mid \sigma_0[\mathfrak{K}]). \quad (6.34)$$

В самом деле, пусть $U \in \sigma_0[\mathfrak{K}]$. Тогда (см. (6.7))

$$(U \in \mathfrak{K}_\sigma) \vee (U \in \mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma]).$$

Пусть $U \in \mathfrak{K}_\sigma$. Тогда $U \notin \mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma]$, поскольку топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным; в итоге, $\mathbf{X}_\tau^{00}(U) = 0$. С другой стороны, в силу (6.32) $U \in \mathcal{C}_\sigma^0[\mathbf{t}]$ и как следствие $U \notin \mathbf{C}[\mathcal{C}_\sigma^0[\mathbf{t}]]$ (следствие предположения (6.29)). В итоге,

$$\mathbb{X}_\mathbf{t}^{00}(U) = 0 = \mathbf{X}_\tau^{00}(U). \quad (6.35)$$

Если же $U \in \mathbf{C}[\mathfrak{K}_\sigma]$, то $U \in \mathbf{C}[\mathcal{C}_\sigma^0[\mathbf{t}]]$ в силу (6.33) и как следствие (см. (6.8))

$$\mathbb{X}_\mathbf{t}^{00}(U) = 1 = \mathbf{X}_\tau^{00}(U). \quad (6.36)$$

Поскольку выбор U был произвольным, установлено (см. (6.35), (6.36)) равенство (6.34). Последнее означает, что привлекая идею, основанную в данном случае на использовании свойства счетной компактности, естественного в теории σ -топологических пространств А. Д. Александрова, удалось построить продолжение недираковской счетно-аддитивной $(0, 1)$ -меры на более обширную (вообще говоря) σ -алгебру множеств, сохраняя основное свойство исходной меры. Допускаем возможность, что топологическое пространство (E, τ) может не быть σ -компактным и, вместе с тем, не удовлетворять условию (6.29). Тогда схема, связанная с (6.8), реализует недираковскую счетно-аддитивную $(0, 1)$ -меру, в то время как $\mathbb{X}_\mathbf{t}^{00}$ оказывается неаддитивной функцией множеств, что видно из теоремы 6.4. Данное обстоятельство интересно и в связи с тем, что компактность и счетная компактность топологического пространства — свойства, существенно различные (в общем случае).

Построенные функционалы $\mathbf{c}_\tau^*$ и $\hat{\mathbf{c}}_\mathbf{t}^*$ определяют (в конструкциях расширения пространств) некоторый характерный тип обобщенных элементов. Во многих случаях действие таких обобщенных элементов оказывается эквивалентным действию точек самого исходного множества E (пространства обычных решений), т.е. оказывается в известной степени «дираковским» с точки зрения достигаемых, в асимптотической постановке задачи о достижимости, результатов. Мы коснемся этого вопроса в разделе 11.

Отметим, что теоремы 6.3 и 6.5 имеют на самом деле общую природу. В той и другой теореме мы оперировали свойством измеримости относительно σ -алгебры, порожденной σ -мультипликативным ультрафильтром множества E . В этой связи отметим следующее (обобщающее) положение.

Предложение 6.5. Если $\mathcal{F} \in (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{P}(E)]$, то $B(E, \sigma_0[\mathcal{F}])$ есть множество всех функций $f \in \mathbb{B}(E)$, для каждой из которых

$$\exists F \in \mathcal{F} : f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \in F \quad \forall x_2 \in F.$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{F} \in (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{P}(E)]$. В силу (5.4) и (6.3) получаем, в частности, что

$$\sigma_0[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \cup \mathbf{C}[\mathcal{F}]. \quad (6.37)$$

Легко видеть, что $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\sigma_0[\mathcal{F}]) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\sigma_0[\mathcal{F}]]$. Здесь мы учли (6.4). Как следствие (см. (5.6)), получаем, что

$$\eta \triangleq \chi_{\mathcal{F}}[\sigma_0[\mathcal{F}]] \in \mathbb{T}_{\sigma}(\sigma_0[\mathcal{F}]),$$

причем, как видно из (5.8),

$$\forall f \in B(E, \sigma_0[\mathcal{F}]) \quad \exists F \in \mathcal{F} : f(x) = \int_E f d\eta \quad \forall x \in F. \quad (6.38)$$

Полагаем для краткости, что Ω есть, по определению, множество всех $f \in \mathbb{B}(E)$ таких, что

$$\exists F \in \mathcal{F} : f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \in F \quad \forall x_2 \in F.$$

Тогда в силу (6.38) получаем очевидное вложение

$$B(E, \sigma_0[\mathcal{F}]) \subset \Omega. \quad (6.39)$$

Выберем произвольно $\varphi \in \Omega$ и подберем $\Phi \in \mathcal{F}$ так, что

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \forall x_1 \in \Phi \quad \forall x_2 \in \Phi. \quad (6.40)$$

Напомним, что (см. (5.1)) семейство

$$\mathcal{Q} \triangleq \{G \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi \subset G\}$$

содержится в $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$. Выберем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество Лебега

$$\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) = \{x \in E \mid \varphi(x) < \alpha\}.$$

Покажем, что это множество содержится в σ -алгебре $\sigma_0[\mathcal{F}]$. Прежде всего отметим, что по аксиомам фильтра имеет место $\Phi \neq \emptyset$. Выберем $u \in \Phi$; пусть $v \triangleq \varphi(u)$. В силу (6.40) имеем свойство: число $v \in \mathbb{R}$ таково, что

$$\varphi(x) = v \quad \forall x \in \Phi. \quad (6.41)$$

При этом $(v < \alpha) \vee (\alpha \leq v)$. Рассмотрим сначала первую возможность: пусть $v < \alpha$, что в силу (6.41) означает справедливость вложения

$$\Phi \subset \varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]),$$

и, по определению $\mathcal{Q}$, получаем свойство

$$\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \mathcal{Q},$$

тогда как следствие $\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \mathcal{F}$. С учетом (6.37) имеем

$$\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \sigma_0[\mathcal{F}].$$

Тем самым установлена следующая импликация:

$$(v < \alpha) \implies (\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \sigma_0[\mathcal{F}]). \quad (6.42)$$

Допустим теперь, что $\alpha \leq v$. С учетом (6.41) получаем вложение

$$\Phi \subset E \setminus \varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]). \quad (6.43)$$

Из определения семейства $\mathcal{Q}$ и из (6.43) вытекает, что

$$E \setminus \varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \mathcal{Q};$$

а это, в свою очередь, реализует свойство

$$E \setminus \varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \mathcal{F}$$

и как очевидное следствие свойство

$$\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \mathbf{C}[\mathcal{F}].$$

С учетом (6.37) и в данном случае получаем свойство измеримости упомянутого множества Лебега относительно σ -алгебры $\sigma_0[\mathcal{F}]$. Итак,

$$(\alpha \leq v) \implies (\varphi^{-1}(] - \infty, \alpha]) \in \sigma_0[\mathcal{F}]).$$

Поскольку выбор α был произвольным, с учетом (6.42) получаем, что

$$\varphi^{-1}(] - \infty, c]) \in \sigma_0[\mathcal{F}] \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, $\varphi \in B(E, \sigma_0[\mathcal{F}])$. Тем самым вложение

$$\Omega \subset B(E, \sigma_0[\mathcal{F}])$$

установлено. С учетом (6.39) получаем требуемое утверждение. $\square$

Заметим, что утверждение теоремы 6.3 извлекается из последнего предложения при условии, что $\mathcal{F} = \mathbf{C}[\mathcal{K}_\sigma]$, а топологическое пространство (E, τ) не является σ -компактным (см. также (6.1)). Аналогичным образом реализуется теорема 6.5 если $\mathcal{F} = \mathbf{C}[\mathcal{C}_\sigma^0[\mathbf{t}]]$, а σ -топологическое пространство (6.14) не является σ -счетно-компактным.

7. НЕДИРАКОВСКИЕ СЧЕТНО-АДДИТИВНЫЕ $(0, 1)$ -МЕРЫ НА σ -АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ

В настоящем разделе исследуется структура множества $\mathcal{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ для стандартного измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$. Предлагаемая характеристика реализуется в терминах нароста, возникающего при замыкании секвенциально замкнутого множества. При этом $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (множество всех ограниченных вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$ — в обсуждаемом случае стандартного измеримого пространства) оснащается нульмерной топологией, в которой множество мер Дирака оказывается секвенциально замкнутым. В связи с построением такого рода топологий введем ряд новых определений для общего случая мультипликативного измеримого пространства.

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $P \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$, то полагаем

$$\tilde{T}_{\mathcal{L}}(\mu, P) \triangleq \left\{ \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \int_E f d\mu = \int_E f d\nu \quad \forall f \in P \right\}, \quad (7.1)$$

получая всякий раз непустое подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. На основе (7.1) конструируются две топологии множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. При этом в (7.1) используются следующие две версии множества P :

- 1) $P \in \text{Fin}(B(E, \mathcal{L}))$;
- 2) $P \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$.

Рассмотрим первую версию: если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то

$$\tilde{\tau}_0(\mathcal{L}) \triangleq \left\{ G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \forall \mu \in G \exists K \in \text{Fin}(B(E, \mathcal{L})) : \tilde{T}_{\mathcal{L}}(\mu, K) \subset G \right\}$$

есть топология множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Тогда для каждой конечно-аддитивной меры $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ семейство всех множеств $\tilde{T}_{\mathcal{L}}(\nu, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \text{Fin}(B(E, \mathcal{L}))$, есть локальный базис топологического пространства

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})) \quad (7.2)$$

в точке ν (фундаментальная система окрестностей).

Замечание 7.1. Пусть $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. Для $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (дискретная топология $\mathbb{R}$) введем естественную топологию $\otimes^{B(E, \mathcal{L})}(\tau_\partial)$ множества $\mathbb{R}^{B(E, \mathcal{L})}$ всех функционалов на $B(E, \mathcal{L})$, соответствующую тихоновскому произведению экземпляров топологического пространства $(\mathbb{R}, \tau_\partial)$ с индексным множеством $B(E, \mathcal{L})$. Рассмотрим $B^*(E, \mathcal{L})$ как подпространство топологического пространства

$$(\mathbb{R}^{B(E, \mathcal{L})}, \otimes^{B(E, \mathcal{L})}(\tau_\partial)), \quad (7.3)$$

получая при этом топологию

$$\tau_\otimes^{(\partial)}[\mathcal{L}] = \otimes^{B(E, \mathcal{L})}(\tau_\partial)|_{B^*(E, \mathcal{L})}$$

множества $B^*(E, \mathcal{L})$, индуцированную из топологического пространства (7.3). Тогда, как легко проверить, отображение (3.4) есть гомеоморфизм топологического пространства $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_0(\mathcal{L}))$ на топологическое пространство $(B^*(E, \mathcal{L}), \tau_{\otimes}^{(\partial)}[\mathcal{L}])$. Итак, $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_0(\mathcal{L}))$ может рассматриваться фактически как подпространство топологического пространства (7.3).

Вернемся к (7.1). Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то

$$\tilde{\tau}^0(\mathcal{L}) \triangleq \left\{ G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \forall \mu \in G \exists C \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})] : \tilde{T}_{\mathcal{L}}(\mu, \mathbb{C}) \subset G \right\}$$

есть топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, причем $\tilde{\tau}_0(\mathcal{L}) \subset \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})$; если $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то семейство всех множеств $\tilde{T}_{\mathcal{L}}(\nu, C)$, $C \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$, есть локальный базис топологического пространства

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})) \quad (7.4)$$

в точке ν . Каждое из топологических пространств (7.2), (7.4) обладает базисом открыто-замкнутых множеств, определяемых посредством (7.1) в соответствующей версии множества P , 1) или 2).

До конца настоящего раздела фиксируем σ -алгебру

$$\mathcal{L} \in (\sigma - \text{alg})[E]; \quad (7.5)$$

получающееся при этом измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ стандартно. Справедливо следующее утверждение (см. [46, 61, 63]).

Предложение 7.1. *Множество $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ всюду плотно в $\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$ в смысле каждого из топологических пространств (7.2) и (7.4):*

$$\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) = \text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})).$$

Доказательство предложения приведено в [61]. Введем в рассмотрение

$$T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K}) \triangleq \left\{ \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \mu(L) = \nu(L) \ \forall L \in \mathcal{K} \right\} \quad \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L}).$$

В терминах этих множеств определяется топология

$$\tau_0(\mathcal{L}) \triangleq \{ G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \forall \mu \in G \exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L}) : T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K}) \subset G \}$$

множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, соответствующая (см. [58, с. 45]) $\tau_0(\mathcal{L}) \subset \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})$.

Предложение 7.2. $\mathbf{T}_{\omega}(\mathcal{L}) \cap (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})] = \emptyset$.

Доказательство. Пусть, от противного,

$$\mu \in \mathbf{T}_{\omega}(\mathcal{L}) \cap (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})].$$

Тогда $(\text{count})[E] \subset \mathfrak{N}_{\mu}^*$. С другой стороны, в силу (2.5) для некоторой последовательности $(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ имеем сходимость

$$(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu$$

(см. (2.4)). Подберем последовательность $(x_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в множестве E так, что

$$\mu_j = (\delta_{x_j} | \mathcal{L}) \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Тогда $X \triangleq \{x_i : i \in \mathcal{N}\} \in (\text{count})[E]$; как следствие $X \in \mathfrak{N}_{\mu}^*$. Пусть $\mathbb{X} \in \mathfrak{N}_{\mu}$ таково, что $X \subset \mathbb{X}$. Рассмотрим окрестность

$$T_{\mathcal{L}}(\mu, \{\mathbb{X}\}) \in N_{\tau_0(\mathcal{L})}(\mu)$$

точки μ в топологическом пространстве $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$. По основному свойству $\mathbb{X}$ имеем $\mu(\mathbb{X}) = 0$. С другой стороны, $x_j \in \mathbb{X}$ и $\mu_j(\mathbb{X}) = 1$ при $j \in \mathcal{N}$. Поэтому

$$\mu_j \notin T_{\mathcal{L}}(\mu, \{\mathbb{X}\}) \quad \forall j \in \mathcal{N}. \quad (7.6)$$

Однако (7.6) противоречит предположению о сходимости $(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}}$. $\square$

Из предложений 5.3 и 7.2 вытекает, в частности, что

$$(\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})) \cap (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})] = \emptyset. \quad (7.7)$$

В (7.7) учли факт сравнимости топологий $\tau_0(\mathcal{L})$ и $\tilde{\tau}_0(\mathcal{L})$. Тогда очевидно следующее положение [48].

Предложение 7.3. *Справедливо следующее равенство:*

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) = \text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})) \setminus (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})].$$

Используя сравнимость топологий $\tilde{\tau}_0(\mathcal{L})$ и $\tilde{\tau}^0(\mathcal{L})$, а также предложения 7.1 и 7.3, получаем следующее утверждение.

Предложение 7.4. *Имеет место равенство*

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) = \text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})) \setminus (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})].$$

В силу предложений 7.1, 7.3 и 7.4 получаем, что

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) = (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})] = (\text{seq-cl})[\mathbb{D}(\mathcal{L}); \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})], \quad (7.8)$$

т.е. $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ секвенциально замкнуто в каждом из нульмерных [53, § 6.2] топологических пространствах (7.2), (7.4). Из предложений 7.3 и 7.4 имеем (см. (7.8)) следующее положение.

Теорема 7.1. *Множество $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ является для каждого из топологических пространств (7.2), (7.4) наростом секвенциально замкнутого множества $\mathbb{D}(\mathcal{L})$, возникающим при построении замыкания этого множества: справедливо (7.8) и при этом*

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) = \text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_0(\mathcal{L})) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) = \text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}).$$

Итак, появление мер $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, приводящее к патологии измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$ (см. разделы 5, 6), связано со следующим свойством: в нульмерных топологических пространствах (7.2), (7.4) секвенциально замкнутое множество $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ оказывается незамкнутым.

8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИЗМЕРИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В настоящем разделе отметим некоторые свойства измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ — семейство подмножеств E , для которого

$$\{x\} \in \mathcal{L} \quad \forall x \in E. \quad (8.1)$$

Свойство (8.1) будем рассматривать как своеобразную непрерывность измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$. В качестве $\mathcal{L}$ можно использовать полуалгебру, алгебру или σ -алгебру подмножеств E .

Пусть $\Pi'_0[E]$ есть, по определению, множество всех полуалгебр $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ таких, что выполняется (8.1). При $\mathcal{L} \in \Pi'_0[E]$ имеем: $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ таких, что $\exists x \in E: \mu(\{x\}) \neq 0$. Кроме того, через $(\text{alg})'_0[E]$ (через $(\sigma\text{-alg})'_0[E]$) обозначаем множество всех $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ (всех $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$) таких, что выполняется (8.1). Имеем

$$(\sigma\text{-alg})'_0[E] \subset (\text{alg})'_0[E] \subset \Pi'_0[E].$$

В связи с измеримыми структурами отметим простейшие представления [61, с. 248]:

$$\begin{aligned} \Pi''_0[E] &\triangleq \left\{ \mathcal{L} \in \Pi'_0[E] \mid \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset \right\} = \\ &= \left\{ \mathcal{L} \in \Pi'_0[E] \mid \exists \mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) : \mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in E \right\}, \\ (\text{alg})''_0[E] &\triangleq \left\{ \mathcal{L} \in (\text{alg})'_0[E] \mid \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset \right\} = \\ &= \left\{ \mathcal{L} \in (\text{alg})'_0[E] \mid \exists \mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) : \mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in E \right\}, \\ (\sigma\text{-alg})''_0[E] &\triangleq \left\{ \mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})'_0[E] \mid \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset \right\} = \\ &= \left\{ \mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})'_0[E] \mid \exists \mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) : \mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in E \right\}, \\ (\sigma\text{-alg})''_0[E] &\subset (\text{alg})''_0[E] \subset \Pi''_0[E]. \end{aligned}$$

Отметим, что $\forall \mathcal{L} \in \Pi'_0[E]$

$$(\mathbf{a}_0[\mathcal{L}] \in (\text{alg})'_0[E]) \ \& \ (\sigma_0[\mathcal{L}] \in (\sigma\text{-alg})'_0[E]).$$

Более того, с учетом (6.1) получаем $\forall \mathcal{L} \in \Pi''_0[E]$

$$(\mathbf{a}_0[\mathcal{L}] \in (\text{alg})''_0[E]) \ \& \ (\sigma_0[\mathcal{L}] \in (\sigma\text{-alg})''_0[E]).$$

В [61, § 9] даны некоторые применения последних соотношений, связанные с исследованием условий, обеспечивающих свойство $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) = \emptyset$.

Несколько отступая от основной цели исследования, связанной с $(0,1)$ -мерами, рассмотрим представление для счетно-аддитивных вещественнозначных мер, определяемых условием (8.1). Отметим, что известная проблема меры традиционно рассматривалась в двух вариантах: проблема существования $(0,1)$ -меры со свойством $\mu(\{x\}) \equiv 0$ и проблема существования счетно-аддитивной вероятности на $\mathcal{P}(E)$ с подобным свойством (см., например, [6, добавление III]). Аналогично, для измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})'_0[E]$, можно было бы рассматривать две версии:

- 1) вопрос, связанный со свойством $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$;
- 2) вопрос о существовании $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ со свойством счетной аддитивности и $\mu(\{x\}) \equiv 0$.

При конкретном выборе $\mathcal{L}$ ответы на вопросы 1), 2) могут быть различными (см. [61, с. 251]). В этой связи представляется полезным одно естественное отступление от основных конструкций, связанное с вещественнозначными мерами, не обязательно являющимися двузначными.

Если $\tilde{\mathcal{L}} \in (\text{alg})'_0[E]$ и $\mu \in (\text{add})_+[\tilde{\mathcal{L}}]$, то

$$(\text{SP})[\mu] \triangleq \{x \in E \mid \mu(\{x\}) \neq 0\} \in \omega[E]. \quad (8.2)$$

Используем известные свойства атомов мер (см., например, [13, с. 335]). До конца настоящего раздела фиксируем σ -алгебру

$$\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})'_0[E]. \quad (8.3)$$

Иными словами, рассматриваем стандартное измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ со свойством (8.1). Множество (8.2) называем спектром конечно-аддитивной меры μ . Из (8.2), (8.3) имеем свойство измеримости спектра $(\text{SP})[\mu] \in \mathcal{L} \ \forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Кроме того, если $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$\bar{\mathbf{d}}[\mu] \triangleq (\mu(L \cap (\text{SP})[\mu]))_{L \in \mathcal{L}} \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad (8.4)$$

и

$$\bar{\mathbf{c}}[\mu] \triangleq \mu - \bar{\mathbf{d}}[\mu] \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]. \quad (8.5)$$

Легко видеть, что конечно-аддитивная мера (8.5) имеет пустой спектр

$$(\text{SP})[\bar{\mathbf{c}}[\mu]] = \emptyset \ \forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}].$$

Свойство пустоты спектра будем именовать непрерывностью соответствующей меры (напомним, что в силу (8.3) $\omega[E] \subset \mathcal{L}$). Это свойство в некоторой степени подобно свойству неатомичности меры (см. [11, часть I]). Во многих случаях оно тождественно неатомичности, например, для борелевских мер на сепарабельном метрическом пространстве. Более того, оно само иногда именуется неатомичностью для измеримых пространств специального вида (см. [31, гл. III], где обсуждается случай борелевского оснащения метрического пространства). В этой связи отметим [31, замечание 26.8] о разложении вероятности на σ -алгебре борелевских множеств в метрическом пространстве. Опуская последнее требование, рассмотрим вопрос о подобном разложении в более общем случае (8.1), используя термин «непрерывность меры», поскольку в общем случае данное свойство отличается от классического определения неатомичности. Итак, для общего случая σ -алгебры (8.3) введем

$$((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \triangleq \left\{ \mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}] \mid (\text{SP})[\mu] = \emptyset \right\} \quad (8.6)$$

(множество всех непрерывных счетно-аддитивных неотрицательных вещественнозначных мер на $\mathcal{L}$) и

$$((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \triangleq \left\{ \mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}] \mid \exists C \in \omega[E] : \mu(L) = \mu(L \cap C) \ \forall L \in \mathcal{L} \right\}. \quad (8.7)$$

В последнем случае имеем множество мер с не более чем счетным носителем. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 8.1. Если $\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$, то $\bar{c}[\mu] \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ и $\bar{d}[\mu] \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$; если же меры $\mu_1 \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mu_2 \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ обладают свойством $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то $\mu_1 = \bar{c}[\mu]$ и $\mu_2 = \bar{d}[\mu]$.

Доказательство. Фиксируем $\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$; требуемые свойства $\bar{c}[\mu]$ и $\bar{d}[\mu]$ фактически следуют из определений. Пусть $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям предложения: μ_1 — непрерывная мера, а μ_2 имеет не более чем счетный носитель. Учтем (8.2). По свойству непрерывности μ_1 :

$$\mu(\{x\}) = \mu_2(\{x\}) \quad \forall x \in E. \quad (8.8)$$

Как следствие получаем

$$\bar{d}[\mu](\{x\}) = \mu_2(\{x\}) \quad \forall x \in E. \quad (8.9)$$

Фиксируем (см. (8.7)) $\Omega \in \omega[E]$ так, что $\mu_2(L) = \mu_2(L \cap \Omega) \quad \forall L \in \mathcal{L}$. С учетом (8.8) имеем вложение

$$(\text{SP})[\mu] \subset \Omega. \quad (8.10)$$

Имеем цепочку вложений $\mathcal{P}(\Omega) \subset \omega[E] \subset \mathcal{L}$. Выберем произвольно $\Lambda \in \mathcal{P}(\Omega)$. Если $\Lambda = \emptyset$, то $\mu_1(\Lambda) = 0$ и $\bar{d}[\mu](\Lambda) = \mu_2(\Lambda)$. Пусть $\Lambda \neq \emptyset$, т.е. $\Lambda \in (\text{count})[E]$. Подберем последовательность $(w_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в E , для которой $\Lambda = \{w_i : i \in \mathcal{N}\}$. Тогда при $i \in \mathcal{N}$ получаем свойства $\mu_1(\{w_i\}) = 0$, $\bar{d}[\mu](\{w_i\}) = \mu_2(\{w_i\})$; здесь используется (8.9). Кроме того (см. (8.1)), при $k \in \mathcal{N}$ полагаем $\Lambda_k \triangleq \{w_i : i \in \overline{1, k}\}$. С учетом вышеупомянутого совпадения $\bar{d}[\mu]$ и μ_2 на синглтонах имеем (см. (8.9)): $\bar{d}[\mu](\Lambda_s) = \mu_2(\Lambda_s) \quad \forall s \in \mathcal{N}$. Последовательность $(\Lambda_k)_{k \in \mathcal{N}}$, не убывая, сходится к Λ , а поэтому (см. [29, гл. I]) $\bar{d}[\mu](\Lambda) = \mu_2(\Lambda)$ и в случае $\Lambda \neq \emptyset$. Итак,

$$\bar{d}[\mu](L) = \mu_2(L) \quad \forall L \in \mathcal{P}(\Omega). \quad (8.11)$$

Выберем произвольно $\Theta \in \mathcal{L}$. Тогда (см. (8.4))

$$\bar{d}[\mu](\Theta) = \bar{d}[\mu](\Theta \cap (\text{SP})[\mu]) = \mu(\Theta \cap (\text{SP})[\mu])$$

и $\mu_2(\Theta) = \mu_2(\Theta \cap \Omega)$. Вместе с тем, из (8.11) имеем равенства

$$\bar{d}[\mu](\Theta \cap \Omega) = \mu_2(\Theta \cap \Omega) = \mu_2(\Theta).$$

С другой стороны, учитывая (8.4) и (8.10), получаем цепочку равенств

$$\bar{d}[\mu](\Theta \cap \Omega) = \mu(\Theta \cap \Omega \cap (\text{SP})[\mu]) = \mu(\Theta \cap (\text{SP})[\mu]) = \bar{d}[\mu](\Theta).$$

Из двух последних соотношений следует, что $\bar{d}[\mu](\Theta) = \mu_2(\Theta)$. Итак, $\bar{d}[\mu] = \mu_2$ и, как следствие, $\bar{c}[\mu] = \mu_1$. $\square$

Заметим, что $\mathbb{O}_{\mathcal{L}} \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \cap ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ и при этом

$$\begin{aligned} & (\alpha\mu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \alpha \in [0, \infty[\quad \forall \mu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]) \\ & \quad \& (\mu + \nu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \mu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \\ & \quad \forall \nu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]) \quad \& (\alpha\mu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \alpha \in [0, \infty[\\ & \quad \forall \mu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}]) \quad \& (\mu + \nu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \\ & \quad \forall \mu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \nu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}])). \end{aligned}$$

Следовательно, (8.6), (8.7) определяют два выпуклых конуса. Напомним хорошо известные свойства знакопеременных вещественнозначных мер на $\mathcal{L}$; последняя является по предположению σ -алгеброй множеств (8.3) (см., например, [29]). Прежде всего отметим, что $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \subset \mathbb{B}(\mathcal{L})$, где $\mathbb{B}(\mathcal{L})$ — множество всех ограниченных вещественнозначных функций на $\mathcal{L}$. Как следствие $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Это означает, в частности, что для $\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ определяется $v_\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Более того, имеем

$$v_\mu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}].$$

Введем следующие два множества:

$$((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})[\mathcal{L}] \triangleq \{\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \mid v_\mu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]\}, \quad (8.12)$$

$$((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})[\mathcal{L}] \triangleq \{\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \mid v_\mu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}]\}. \quad (8.13)$$

В связи с (8.12), (8.13) отметим ряд достаточно простых свойств, предваряющих конструкцию разложения знакопеременных мер, подобную обсуждаемой в предложении 8.1. Эти свойства касаются положительных мер, но предназначены для обслуживания (8.12), (8.13). Легко видеть, что $\forall \mu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\nu \leq \mu) \implies (\nu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]).$$

Точно так же имеем $\forall \mu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\nu \leq \mu) \implies (\nu \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}]).$$

С учетом двух последних свойств получаем, что каждое из множеств (8.12), (8.13) является линейным пространством (подпространством $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$), причем

$$((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] = ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})[\mathcal{L}] \cap (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}],$$

$$((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] = ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})[\mathcal{L}] \cap (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}].$$

Кроме того, как легко проверить, имеет место

$$((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}] \cap ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})_+[\mathcal{L}] = ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})[\mathcal{L}] \cap ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})[\mathcal{L}] = \{\mathbb{O}_{\mathcal{L}}\}.$$

Воспользуемся разложением Жордана. В случае $\mathcal{H} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{H})$ имеем

$$\mu^+ \triangleq \frac{1}{2}(v_\mu + \mu) \in (\text{add})_+[\mathcal{H}], \quad \mu^- \triangleq \frac{1}{2}(v_\mu - \mu) \in (\text{add})_+[\mathcal{H}].$$

При этом $\mu = \mu^+ - \mu^-$ и $v_\mu = \mu^+ + \mu^-$. Используем случай $\mathcal{H} = \mathcal{L}$. С учетом вложения $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$ имеем

$$\mu^+ \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}], \quad \mu^- \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}].$$

Для $\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ получаем свойства

$$\bar{\mathbf{c}}_\mu \triangleq \bar{\mathbf{c}}[\mu^+] - \bar{\mathbf{c}}[\mu^-] \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})[\mathcal{L}], \quad (8.14)$$

$$\bar{\mathbf{d}}_\mu \triangleq \bar{\mathbf{d}}[\mu^+] - \bar{\mathbf{d}}[\mu^-] \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})[\mathcal{L}]. \quad (8.15)$$

Легко видеть, что $\mu = \bar{\mathbf{c}}_\mu + \bar{\mathbf{d}}_\mu$ и, кроме того, $\forall \mu_1 \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})[\mathcal{L}] \quad \forall \mu_2 \in ((\sigma; \mathbf{d})\text{-add})[\mathcal{L}]$

$$(\mu = \mu_1 + \mu_2) \implies ((\mu_1 = \bar{\mathbf{c}}_\mu) \ \& \ (\mu_2 = \bar{\mathbf{d}}_\mu)).$$

Если же рассматривать зависимость мер (8.14), (8.15) при изменении μ в пределах линейного пространства $(\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$, то реализуется пара линейных операторов:

1) при $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ имеем

$$(\bar{\mathbf{c}}_{\alpha\mu} = \alpha\bar{\mathbf{c}}_\mu) \ \& \ (\bar{\mathbf{d}}_{\alpha\mu} = \alpha\bar{\mathbf{d}}_\mu);$$

2) при $\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]$ непременно

$$(\bar{\mathbf{c}}_{\mu+\nu} = \bar{\mathbf{c}}_\mu + \bar{\mathbf{c}}_\nu) \ \& \ (\bar{\mathbf{d}}_{\mu+\nu} = \bar{\mathbf{d}}_\mu + \bar{\mathbf{d}}_\nu).$$

В связи с (8.14), (8.15) полезно отметить аналогию с известным разложением [56, с. 146]. Кроме того, в связи с разложением, определяемым посредством (8.14), (8.15), заметим, что в части, касающейся представления неотрицательных мер, можно истолковать компоненты (8.4), (8.5) в терминах отделимых частей исходной меры, определяемых в [34, с. 122-123], с учетом теоремы 3.4 работы [34]. Напомним в этой связи, что частью меры μ , определенной на $\mathcal{L}$, в работе [34] называется мера μ_1 , определяемая [34, с. 122] на $\mathcal{L}$ по правилу $\mu_1(L) = \mu(L \cap \Lambda)$, $L \in \mathcal{L}$; $\Lambda \in \mathcal{L}$ фиксировано (см. (8.4)).

Отметим, что для $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ множество $(\text{At})[\mu]$ всех атомов конечно-аддитивной меры μ определяется [13, с. 335] как семейство всех множеств $L \in \mathcal{L}$ таких, что $0 < \mu(L)$ и при всяком выборе $L_1 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L) \implies ((\mu(L_1) = 0) \vee (\mu(L_1) = \mu(L))).$$

Мы распространили определение [13] на случай конечно-аддитивных мер по соображениям методического характера. Тогда, как легко проверить, имеет место свойство: если $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$, то $(\text{At})[\mu]$ есть множество всех $L \in \mathcal{L}$ таких, что $\mu(L) \neq 0$. Следовательно, для $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ при $\mu \triangleq \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$ имеем равенство $(\text{At})[\mu] = \mathcal{F}$. Итак, конечно-аддитивные $(0, 1)$ -меры всегда имеют атомы. Отметим очевидное свойство: $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \forall U \in (\text{At})[\mu] \forall V \in (\text{At})[\mu]$

$$(\mu(U \cap V) = 0) \vee (\mu(U \Delta V) = 0).$$

В последнем равенстве рассматривается симметрическая разность двух множеств (см. [29, гл. I]). Традиционным образом [29] вводится псевдометрика множества $\mathcal{L}$, связанная с конечно-аддитивной мерой $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и определяемая как отображение

$$(L_1, L_2) \longmapsto \mu(L_1 \Delta L_2) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow [0, \infty[. \quad (8.16)$$

Псевдометрику множества $\mathcal{L}$, определяемую в (8.16), обозначаем через $\mathbf{r}_\mu$. В терминах данной псевдометрики естественным образом факторизуется σ -алгебра $\mathcal{L}$. Если $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, то полагаем

$$[L]_\mu \triangleq \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \mu(L \Delta \Lambda) = 0\} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \mathbf{r}_\mu(L \Delta \Lambda) = 0\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Множества такого типа (классы эквивалентности) порождают факторпространство

$$\langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle \triangleq \{[L]_\mu : L \in \mathcal{L}\}. \quad (8.17)$$

Семейство (8.17) есть разбиение σ -алгебры $\mathcal{L}$ в сумму непустых подсемейств $\mathcal{L}$. При этом множество (8.17) оснащается метрикой. Здесь используется то (см. [23, 29, 53]) обстоятельство, что при $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle$ непременно

$$\exists! c \in [0, \infty[: \mu(A \Delta B) = c \quad \forall A \in \mathcal{U} \text{ and } \forall B \in \mathcal{V}.$$

С учетом этого свойства определяем (при фиксированном μ) метрику

$$\mathbf{R}_\mu : \langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle \times \langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle \longrightarrow [0, \infty[$$

тем условием, что при $\mathcal{L}_1 \in \langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle$ и $\mathcal{L}_2 \in \langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle$ число $\mathbf{R}_\mu(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \in [0, \infty[$ таково, что

$$\mathbf{R}_\mu(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \mu(L_1 \Delta L_2) = \mathbf{r}_\mu(L_1, L_2) \quad \forall L_1 \in \mathcal{L}_1 \quad \forall L_2 \in \mathcal{L}_2.$$

Кроме того, введем в рассмотрение семейство

$$(\mathbf{AT})[\mu] \triangleq \{[L]_\mu : L \in (\text{At})[\mu]\} \quad \forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}],$$

получая всякий раз подмножество множества (8.17). Отметим, что $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \forall \mathcal{U} \in (\mathbf{AT})[\mu] \forall \mathcal{V} \in (\mathbf{AT})[\mu] \setminus \{\mathcal{U}\} \forall U \in \mathcal{U} \forall V \in \mathcal{V}$

$$[U \cup V]_\mu \notin (\mathbf{AT})[\mu].$$

Доказательство очевидно и в данном изложении опущено. Заметим, что $(\mathbf{AT})[\mu]$ можно, в частности, рассматривать при $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$. В этой связи отметим следующее свойство: если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mu = \chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$, то

$$(\mathbf{AT})[\mu] = \{\mathcal{F}\}, \quad (8.18)$$

а множество (8.17) имеет вид $\langle \mathcal{L}/\mathbf{r}_\mu \rangle = \{\mathcal{F}; \mathcal{L} \setminus \mathcal{F}\}$ (неупорядоченная пара).

Замечание 8.1. Свойство (8.18) справедливо и в условиях, когда $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$. Свойство (8.1) и предположение (8.3) для справедливости (8.18) не требуются. Определения, связанные с атомами меры и факторизацией на основе (8.17), переносятся на упомянутый более общий случай без каких-либо затруднений. Однако случай (8.3) представляет интерес в следующем положении, проверка которого очевидна.

Предложение 8.2. $\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L}) \subset ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$.

Доказательство. В самом деле, если $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, то $\mu(\{x\}) = 0$ при $x \in E$. Тогда $(\text{SP})[\mu] = \emptyset$ в силу (8.2). Из (8.6) следует, что $\mu \in ((\sigma; \mathbf{c})\text{-add})_+[\mathcal{L}]$, что и требовалось доказать. $\square$

В связи с предложением 8.2 отметим, что каждая мера $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ есть $\chi_{\mathcal{F}}[\mathcal{L}]$ для некоторого ультрафильтра $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap (\sigma - \mathbb{F})[\mathcal{L}]$ (см. (5.6)), а поэтому для μ справедливо (8.18), в частности, μ имеет атомы. Используя положения раздела 6 (см. теорему 6.1), получаем обширный класс измеримых пространств, обладающих непрерывными в смысле (8.6) мерами, имеющими атомы (в частности, для $(0, 1)$ -мер упомянутого типа имеем «одноатомное» представление (8.18)). Полезно отметить, что при использовании измеримых пространств, описанных в разделе 6, условие (8.1) всегда выполняется при $\mathcal{L} = \sigma_0[\mathfrak{A}]$, так как $\{x\} \in \mathbf{K}$ при $x \in E$, а $\mathbf{K} \subset \mathfrak{A} \subset \sigma_0[\mathfrak{A}]$. Это положение имеет смысл сравнить с замечанием 26.8 в [31]: в упомянутых положениях раздела 6 атомы не связаны с синглетами. Последние как раз «неатомичны», в то время как меры типа $\mathbf{X}_\tau^{00}$ в следствии 6.2 все же имеют (при условии, оговоренном в этом следствии) атомы, которые после факторизации «объединяются» в единственный класс эквивалентности (см. (8.18)), совпадающий с соответствующим ультрафильтром измеримого пространства.

9. ВОПРОСЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ И СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящем разделе рассматривается вопрос об отделимости недираковских счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер от множества мер Дирака. Это требует, в свою очередь, специального рассмотрения некоторых свойств плотности в смысле топологических пространств (7.2), (7.4). Будет установлена невозможность отделения недираковских счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер от множества мер Дирака секвенциальными средствами. Данное свойство будет использовано при исследовании одной естественной версии множества притяжения.

Если (X, τ) есть топологическое пространство и $M \in \mathcal{P}(X)$, то (см. раздел 2)

$$(\tau\text{-dens})[M] = \{S \in \mathcal{P}(X) \mid M \subset \text{cl}(S, \tau)\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

есть семейство всех τ -плотных в M подмножеств X .

Предложение 9.1. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, то:

1) $(\tilde{\tau}_0(\mathcal{L})\text{-dens})[M]$ есть семейство всех множеств $H \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ таких, что

$$\left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in K} : \mu \in M \right\} \subset \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in K} : \mu \in H \right\} \quad \forall K \in \text{Fin}(B(E, \mathcal{L}));$$

2) $(\tilde{\tau}^0(\mathcal{L})\text{-dens})[M]$ есть семейство всех множеств $S \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ таких, что

$$\left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in C} : \mu \in M \right\} \subset \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in C} : \mu \in S \right\} \quad \forall C \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]. \quad (9.1)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$. Доказательство положений 1) и 2) осуществляется по одной и той же схеме и мы ограничимся обоснованием положения 2). Пусть $\mathbb{S}$ есть, по определению, семейство всех $S \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ таких, что справедливо (9.1). Пусть

$$\tilde{\Omega} \in (\tilde{\tau}^0(\mathcal{L})\text{-dens})[M], \quad Q \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})],$$

$$\Omega_0 \triangleq \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in Q} : \mu \in M \right\}, \quad \tilde{\Omega}^0 \triangleq \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in Q} : \mu \in \tilde{\Omega} \right\}, \quad u \in \Omega_0.$$

Выберем $\eta \in M$ так, что $u = \left(\int_E f d\eta \right)_{f \in Q}$. Поскольку

$$M \subset \text{cl}(\tilde{\Omega}, \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})),$$

то $\eta \in \text{cl}(\tilde{\Omega}, \tilde{\tau}^0(\mathcal{L}))$. В силу свойств топологического пространства (7.4) имеем свойство

$$\tilde{\Omega} \cap \tilde{T}_{\mathcal{L}}(\eta, Q) \neq \emptyset.$$

Выберем $\tilde{\eta} \in \tilde{\Omega} \cap \tilde{T}_{\mathcal{L}}(\eta, Q)$ и введем в рассмотрение

$$\tilde{u} \triangleq \left(\int_E f d\tilde{\eta} \right)_{f \in Q} \in \mathbb{R}^Q.$$

С учетом (7.1) имеем равенство $u = \tilde{u}$. Вместе с тем, согласно выбору $\tilde{\eta}$, имеем $\tilde{u} \in \tilde{\Omega}^0$. В итоге, $u \in \tilde{\Omega}^0$. Так как выбор u был произвольным, получаем вложение $\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}^0$. Но и выбор Q был произвольным, тогда имеем (9.1) при $S = \tilde{\Omega}$, т.е. $\tilde{\Omega} \in \mathbb{S}$. Установлено вложение

$$(\tilde{\tau}^0(\mathcal{L})\text{-dens})[M] \subset \mathbb{S}. \quad (9.2)$$

Пусть $\Lambda \in \mathbb{S}$. Тогда $\Lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ обладает свойством (9.1), где $S = \Lambda$. Требуется установить вложение

$$M \subset \text{cl}(\Lambda, \tilde{\tau}^0(\mathcal{L})). \quad (9.3)$$

Пусть $\eta_* \in M$. Как уже отмечалось в разделе 7, семейство всех множеств $\tilde{T}_{\mathcal{L}}(\eta_*, C)$, $C \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$, есть локальный базис топологического пространства (7.4) в точке η_* . Иными словами, это семейство — фундаментальная система окрестностей η_* в смысле топологического пространства (7.4). Пусть $\Gamma \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$. В силу (9.1)

$$\left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in \Gamma} : \mu \in M \right\} \subset \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in \Gamma} : \mu \in \Lambda \right\}. \quad (9.4)$$

Согласно выбору η_* , имеем для функции

$$v \triangleq \left(\int_E f d\eta_* \right)_{f \in \Gamma} \in \mathbb{R}^{\Gamma}$$

свойство: v есть элемент множества в левой части (9.4). В силу (9.4) для некоторого $\lambda \in \Lambda$ имеем

$$\int_E f d\eta_* = \int_E f d\lambda \quad \forall f \in \Gamma.$$

С учетом (7.1) получаем свойство $\lambda \in \tilde{T}_{\mathcal{L}}(\eta_*, \Gamma)$. Поскольку выбор Γ был произвольным, установлено

$$\tilde{T}_{\mathcal{L}}(\eta_*, C) \cap \Lambda \neq \emptyset \quad \forall C \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]. \quad (9.5)$$

Из (9.5) вытекает (по свойствам топологического пространства (7.4)) свойство $\eta_* \in \text{cl}(\Lambda, \tilde{\tau}^0(\mathcal{L}))$. Итак, (9.3) доказано, тогда $\Lambda \in (\tilde{\tau}^0(\mathcal{L})\text{-dens})[M]$. Поскольку выбор Λ был произвольным, вложение, противоположное (9.2), установлено. $\square$

Из предложения 7.1 вытекает, что справедливо свойство

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) \in (\tilde{\tau}^0(\mathcal{L})\text{-dens})[\mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})] \quad \forall \mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]. \quad (9.6)$$

Свойство (9.6) используем в (9.1) при $M = \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$ и $S = \mathbb{D}(\mathcal{L})$. В свою очередь, из (9.1) вытекает

Теорема 9.1. Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$, то

$$\forall \mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})] \quad \exists x \in E : \int_E f d\mu = f(x) \quad \forall f \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A} \triangleq \mathbf{a}_0[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{B} \triangleq \sigma_0[\mathcal{L}] = \sigma_0[\mathcal{A}]$. При этом [29, § 1.6] существует $\nu \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{A}]$ со свойством $\mu = (\nu \mid \mathcal{L})$. Более того, $\nu = \nu_{\mu}$ определяется единственным образом. В этой связи см. также [64, с. 148]. Более того, для такой меры ν непременно $\nu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{A})$ (см. [64, с. 148, 197]). Данное свойство хорошо известно в теории меры. В этом случае, согласно (6.1), $\lambda^0(\nu) \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{B})$ и при этом

$$(\lambda^0(\nu) \mid \mathcal{L}) = \mu.$$

Кроме того, $B(E, \mathcal{L}) \subset B(E, \mathcal{B})$ и (подобно [13, § III.8])

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\lambda^0(\nu) \quad \forall f \in B(E, \mathcal{L}). \quad (9.7)$$

Пусть $\mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$. Тогда (см. предложение 9.1) из (9.1), (9.6) для некоторой меры $\eta \in \mathbb{D}(\mathcal{B})$, следует равенство

$$\left(\int_E f d\lambda^0(\nu) \right)_{f \in \mathbb{C}} = \left(\int_E f d\eta \right)_{f \in \mathbb{C}} \quad (9.8)$$

поскольку $\mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{B})]$. По определению $\mathbb{D}(\mathcal{B})$ (см. раздел 3) найдется точка $x \in E$ такая, что $\eta = (\delta_x \mid \mathcal{B})$. Тогда правая часть (9.8) есть отображение вычисления

$$f \mapsto f(x) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

В левой части (9.8) имеем (см. (9.7)) отображение

$$f \mapsto \int_E f d\mu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\int_E f d\mu = f(x)$ при $f \in \mathbb{C}$. □

Из теоремы 9.1 получаем следующее положение: при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$ невозможно отделить μ от $\mathbb{D}(\mathcal{L})$, если для этой цели используется не более чем счетное подмножество $B(E, \mathcal{L})$.

Итак, в силу теоремы 9.1 мы получаем, в частности, следующее свойство: если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, то линейный непрерывный функционал

$$\varphi \triangleq \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in B(E, \mathcal{L})} \in B^*(E, \mathcal{L})$$

устроен таким образом, что

$$\forall \mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})] \exists x \in E : \varphi(f) = f(x) \quad \forall f \in \mathbb{C}.$$

Вместе с тем, $\forall y \in E \exists g \in B(E, \mathcal{L}) : \varphi(g) \neq g(y)$. Итак, при упомянутых условиях φ действует на каждую функцию из $B(E, \mathcal{L})$ как функционал вычисления в некоторой точке множества E . Упомянутая точка не остается, однако, одной и той же для всех функций из $B(E, \mathcal{L})$ (она меняется), ибо, в противном случае, функционал сводился бы к дираковскому, т.е. к вычислению. В разделе 6 указаны конкретные возможности в части построения таких функционалов φ .

Из (3.2) и теоремы 9.1 вытекает, в частности, что $\forall \mathcal{L} \in \Pi[E] \forall \mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$

$$\left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in \mathbb{C}} : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \right\} = \{ (f(x))_{f \in \mathbb{C}} : x \in E \} \cup \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in \mathbb{C}} : \mu \in \mathbb{T}_p(\mathcal{L}) \right\}. \quad (9.9)$$

Свойство (9.9) будет использовано в последующих конструкциях расширений. В частном случае оно фактически отмечалось в [41].

10. КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЙ В КЛАССЕ $(0, 1)$ -МЕР

Настоящий раздел является фактически развитием конструкций [57, § 3.5, 3.6], [58, § 7.6] и [64, § 4.10]. К этому направлению примыкают работы [41, 42, 48].

Если M — непустое множество, то через $\otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})$ обозначаем топологию множества $\mathbb{R}^M$, соответствующую тихоновскому произведению экземпляров топологического пространства $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ с индексным множеством M . Иными словами, $\otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})$ — топология поточечной сходимости множества $\mathbb{R}^M$. Всюду в пределах данного раздела фиксируем

$$\mathcal{L} \in \Pi[E], \quad (10.1)$$

получая измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. Итак (см. (10.1)), рассматриваем общий вариант измеримого пространства. Структуры такого рода, однако, достаточно естественны в конструкциях конечно-аддитивной теории меры. Напомним, что при условии (10.1) $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме (3.3) и $B^*(E, \mathcal{L})$ (при традиционном нормировании) изометрически изоморфны (см. раздел 3). С учетом этого оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$ -слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, следуя [57, с. 70], [58, с. 41] и [64, с. 163]. Получаем в итоге локально выпуклый σ -компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})), \quad (10.2)$$

т.е. σ -компактное хаусдорфово локально выпуклое топологическое пространство. Условия компактности в топологическом пространстве (10.2) определяются теоремой Алаоглу (см. [13, гл. V]) (см. также [57, с. 70] и [58, с. 42]). Отметим общее положение.

Предложение 10.1. *Если $M \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$, то*

$$\begin{aligned} \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in M} : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \} &= \text{cl}(\{(f(x))_{f \in M} : x \in E\}, \otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})) \in \\ &\in (\otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})\text{-comp})[\mathbb{R}^M]. \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем $M \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$; отображение Φ вида

$$\mu \mapsto \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in M} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

непрерывно в смысле топологического пространства (10.2) и $(\mathbb{R}^M, \otimes^M(\tau_{\mathbb{R}}))$, а

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \quad (10.3)$$

в силу теоремы Алаоглу. В связи с (10.3) см. [58, с. 303] и [64, с. 198]. Тогда

$$\Phi^1(\mathbb{T}(\mathcal{L})) = \{\Phi(\mu) : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})\} \in (\otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})\text{-comp})[\mathbb{R}^M] \quad (10.4)$$

в силу известного свойства непрерывных отображений сохранять компактность (см. [23], [53], [1]).

Введем $\varphi \triangleq (\Phi | \mathbb{T}(\mathcal{L}))$. Тогда φ есть непрерывное отображение из топологического пространства

$$(\mathbb{T}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbb{T}}^*(\mathcal{L})), \quad (10.5)$$

где $\tau_{\mathbb{T}}^*(\mathcal{L})$ — топология подпространства топологического пространства (10.2), соответствующая $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, в топологическом пространстве $(\mathbb{R}^M, \otimes^M(\tau_{\mathbb{R}}))$. При этом (10.5) — компакт, а

$$\varphi^1(\mathbb{T}(\mathcal{L})) = \Phi^1(\mathbb{T}(\mathcal{L}))$$

удовлетворяет (10.4). Как всякое непрерывное отображение из компактного топологического пространства в хаусдорфово φ замкнуто (см. [23], [53]) и, следовательно, сохраняет операцию замыкания. Поскольку

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) \in (\tau_{\mathbb{T}}^*(\mathcal{L})\text{-dens})[\mathbb{T}(\mathcal{L})]$$

(см. [58, с. 303]), то получаем

$$\varphi^1(\mathbb{T}(\mathcal{L})) = \varphi^1(\text{cl}(\mathbb{D}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbb{T}}^*(\mathcal{L}))) = \text{cl}(\varphi^1(\mathbb{D}(\mathcal{L})), \otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})), \quad (10.6)$$

где, как легко видеть, $\varphi^1(\mathbb{D}(\mathcal{L}))$ есть множество всех вещественнозначных функций

$$(f(x))_{f \in M}, \quad x \in E.$$

Из (10.4), (10.6) и определения Φ имеем требуемое утверждение. $\square$

Следствие 10.1. *Если $\mathbb{C} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$, то*

$$\begin{aligned} \text{cl}(\{(f(x))_{f \in \mathbb{C}} : x \in E\}, \otimes^{\mathbb{C}}(\tau_{\mathbb{R}})) &= \{(f(x))_{f \in \mathbb{C}} : x \in E\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\int_E f d\mu \right)_{f \in \mathbb{C}} : \mu \in \mathbb{T}_{\mathbb{P}}(\mathcal{L}) \right\} &\in (\otimes^M(\tau_{\mathbb{R}})\text{-comp})[\mathbb{R}^M]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (9.9) и предложения 10.1. В (10.7) реализуется следующий эффект.

Если полагать замыкание в (10.7) естественной операцией построения множества обобщенных (по отношению к обычным оценкам

$$(f(x))_{f \in \mathbb{C}}, \quad x \in E,$$

достигаемым прямым перебором точек из множества E) оценок, то, как видно из следствия, в его условиях меры $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, если и существуют, то не вносят никакого собственного вклада в упомянутое построение. Это свойство можно использовать в конструкциях расширения задач многокритериальной оптимизации. В следствии 10.1 фактически реализуется компактификация пространства обычных оценок. При этом допускается возможность использования «счетномерного» критерия качества или, иными словами, возможность использования не только конечного, но и счетного набора вещественнозначных критериев в виде функций $f \in \mathbb{C}$ (см. следствие 10.1). Значит, в исходной постановке рассматривается $\leq$ -минимизация вектора $(f(x))_{f \in \mathbb{C}}$, где $x \in E$. Решение, как и в традиционном для задач многокритериальной оптимизации постановке, понимаем как поиск $\leq$ -минимальных оценок и точек из множества E , их реализующих. Такие решения могут не существовать. Предложение 10.1 и следствие 10.1 реализуют естественную идею расширения: исследуем задачу $\leq$ -минимизации векторов

$$\left(\int_E f d\mu \right)_{f \in \mathbb{C}}, \quad \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}),$$

что равносильно рассмотрению замыкания в $\otimes^{\mathbb{C}}(\tau_{\mathbb{R}})$ множества всех обычных оценок. Упомянутое замыкание — компакт в топологическом пространстве $(\mathbb{R}^{\mathbb{C}}, \otimes^{\mathbb{C}}(\tau_{\mathbb{R}}))$.

11. ОДНА КОНКРЕТНАЯ СХЕМА РАСШИРЕНИЯ В КЛАССЕ $(0, 1)$ -МЕР

Продолжая построения раздела 10, связанные с (9.9), возвращаемся к асимптотическим конструкциям разделов 1–5 для довольно гипотетической ситуации, связанной с вопросами достижимости в условиях ограничений. Эти ограничения будут стандартными и определяемыми заданным набором условий. Однако по смыслу задачи оказывается важным рассмотрение ослабленных версий исходной системы ограничений, что порождает ограничения асимптотического характера и отвечающее им множество притяжения.

Будем рассматривать точки множества E в качестве обычных решений. Пусть в результате выбора каждой такой точки реализуются два бесконечномерных вектора, один из которых должен быть элементом заданного множества (это и есть исходное стандартное ограничение), а другой имеет смысл некоторой оценки. Множество этих оценок характеризует возможности в смысле достижения тех или иных состояний. Имеем определенную аналогию с задачей о построении области достижимости в теории управления (см. [8, 10, 25, 26, 39, 54] и др.): задан набор условий на выбор конкретного управления, требуется установить, в какие точки фазового пространства может быть переведена управляемая система за заданное время. Значит, здесь исследуется абстрактный аналог задачи о достижимости, для которого рассматриваем естественное расширение при ослаблении ограничений.

Уточним постановку задачи, полагая выполненным условие (10.1). Итак, рассматриваем измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ с п/а множеств. Фиксируем два непустых множества P и Q . Элементы этих множеств играют роль индексов. Фиксируем операторы

$$p \mapsto f_p : P \longrightarrow B(E, \mathcal{L}), \quad (11.1)$$

$$q \mapsto g_q : Q \longrightarrow B(E, \mathcal{L}). \quad (11.2)$$

В терминах (11.1), (11.2) введем операторы Φ и G , определяемые (в данном разделе) соответственно следующими правилами:

$$x \mapsto (f_p(x))_{p \in P} : E \longrightarrow \mathbb{R}^P, \quad (11.3)$$

$$x \mapsto (g_q(x))_{q \in Q} : E \longrightarrow \mathbb{R}^Q. \quad (11.4)$$

Итак, Φ есть оператор (11.3), а G — оператор (11.4). Они принимают значения в пространствах вещественнозначных функций на P и Q соответственно. Фиксируем множество $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^Q)$, полагаемое замкнутым в топологическом пространстве

$$(\mathbb{R}^Q, \otimes^Q(\tau_{\mathbb{R}})),$$

$Y \in \mathcal{F}_{\tau}$, где $\tau = \otimes^Q(\tau_{\mathbb{R}})$. Исходное ограничение на выбор $x \in E$ задаем условием

$$G(x) \in Y. \quad (11.5)$$

В силу (11.5) имеем в виде $G^{-1}(Y)$ множество допустимых элементов. Тогда

$$\mathfrak{X} \triangleq \Phi^1(G^{-1}(Y)) \quad (11.6)$$

есть достижимое множество задачи, являющееся аналогом области достижимости в теории управляемых процессов. По целому ряду причин, наряду с (11.6), следует рассматривать аналоги этого множества, соответствующие использованию вместо Y того или иного множества, содержащего Y и близкого к последнему. Действительно, если ослаблять ограничение (11.5), то вместо (11.6) будет получаться другое достижимое множество. Неясно только, каким же множеством следует заменять Y . В этой связи обращаемся к асимптотической версии задачи о достижимости, полагая

$$\mathfrak{Y} \triangleq \mathbb{N}_{\otimes^Q(\tau_{\mathbb{R}})}[Y]. \quad (11.7)$$

Множества из семейства (11.7) будем использовать вместо Y в условии (11.5). По свойствам окрестностей получаем

$$G^{-1}[\mathfrak{Y}] = \{G^{-1}(H) : H \in \mathfrak{Y}\} \in \beta[E].$$

Подобно оснащению $\mathbb{R}^Q$, введем топологию тихоновского произведения и для $\mathbb{R}^P$, т.е. рассмотрим топологическое пространство

$$(\mathbb{R}^P, \otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})).$$

Оператор Φ принимает значения в этом пространстве, причем (см. (2.8)) множество

$$(\otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})\text{-}\text{LIM})[G^{-1}[\mathfrak{Y}] \mid \Phi] = (\text{AS})[E; \mathbb{R}^P; \otimes^P(\tau_{\mathbb{R}}); G^{-1}[\mathfrak{Y}]; \Phi] \quad (11.8)$$

может рассматриваться в качестве асимптотического аналога (11.6). Множество (11.8) можно представить в виде решения некоторой обобщенной задачи о достижимости. Именно, используя соглашение (10.1), подменяем выбор точек множества E , т.е. обычных решений, выбором конечно-аддитивных $(0, 1)$ -мер $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$. В связи с представлением множества притяжения (11.8) воспользуемся конструкцией [50, 62].

Итак, будем использовать топологию $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, индуцированную [23, гл. I] из топологического пространства (10.2), получая непустой компакт (см. (10.2), (10.5)). В [50, 62] для компакта $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ использовалось обозначение $\mathbf{K}$, т.е. $\mathbf{K} = \mathbb{T}(\mathcal{L})$ при условии, что топологии t_1 и $t_{\mathbf{u}}$ работ [62], [50] совпадают с $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L})$. Введем теперь операторы $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{G}$, определяемые соответственно как отображение

$$\mu \longmapsto \left(\int_E f_p d\mu \right)_{p \in P} : \mathbb{T}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^P \quad (11.9)$$

и отображение

$$\mu \longmapsto \left(\int_E g_q d\mu \right)_{q \in Q} : \mathbb{T}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^Q. \quad (11.10)$$

Мы используем (11.9) и (11.10) в качестве операторов ω и g работ [50, 62] соответственно. Кроме того, введем оператор Δ вида

$$x \longmapsto (\delta_x \mid \mathcal{L}) : E \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{L})$$

(см. раздел 3). Используем $\Delta \in \mathbb{T}(\mathcal{L})^E$ в качестве оператора погружения $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^E$ работ [50, 62] (множество $\mathbf{F}$ упомянутых работ [50, 62] здесь совпадает с E). Из (11.3), (11.9) и (11.4), (11.10) имеем $\forall x \in E$

$$\begin{aligned} (\Phi(x) &= \left(\int_E f_p d(\delta_x | \mathcal{L}) \right)_{p \in P} = (\tilde{\Phi} \circ \Delta)(x)) \& (G(x) = \\ &= \left(\int_E g_q d(\delta_x | \mathcal{L}) \right)_{q \in Q} = (\tilde{G} \circ \Delta)(x)). \end{aligned}$$

Иными словами, $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \Delta$ и $G = \tilde{G} \circ \Delta$. Эти равенства находятся в согласии с конструкцией [62], [50] (в [62], [50] надо использовать следующие соглашения в отношении параметров: $\mathbf{F} = E$, $\mathbf{X} = \mathbb{R}^Q$, $\mathbf{H} = \mathbb{R}^P$, $\mathbf{s} = G$, $\mathbf{h} = \Phi$, $\mathbf{Y} = Y$, $\tau_1 = \tau_{\mathbf{u}} = \otimes^Q(\tau_{\mathbb{R}})$, $\vartheta = \otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})$, $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} = \mathfrak{Y}$ (см. (11.7)), $\mathbf{K} = \mathbb{T}(\mathcal{L})$, $t_1 = t_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L})$, $\mathbf{m} = \Delta$, $g = \tilde{G}$, $\omega = \tilde{\Phi}$). Отметим, что

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) = cl(\Delta^1(E), \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}))$$

(см. [58, с. 303]). Отметим, наконец, что $\tilde{\Phi}$ есть оператор, непрерывный в смысле топологического пространства

$$(\mathbb{T}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L})), (\mathbb{R}^P, \otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})),$$

а $\tilde{G}$ — оператор, непрерывный в смысле топологического пространства

$$(\mathbb{T}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L})), (\mathbb{R}^Q, \otimes^Q(\tau_{\mathbb{R}}))$$

(см. в этой связи [58, с. 35]). Напомним, что $(\mathbb{T}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L}))$ — компакт, а топология $\otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})$ является хаусдорфовой. Поэтому $\tilde{\Phi}$ есть совершенное отображение. Таким образом, все требования [62, с. 534] выполнены и как следствие (см. [62, с. 535])

$$\tilde{\Phi}^1(\tilde{G}^{-1}(Y)) = (\otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[G^{-1}[\mathfrak{Y}] | \Phi].$$

В этой связи напомним, что из (2.9), (11.7) вытекает $\mathfrak{Y} \in \beta[\mathbb{R}^Q]$ и как следствие $G^{-1}[\mathfrak{Y}] \in \beta[E]$. Отметим (2.8) и получающееся в итоге равенство

$$\tilde{\Phi}^1(\tilde{G}^{-1}(Y)) = (\text{AS})[E; \mathbb{R}^P; \otimes^P(\tau_{\mathbb{R}}); G^{-1}[\mathfrak{Y}]; \Phi]. \quad (11.11)$$

Для краткости полагаем $\tilde{\mathbb{E}} \triangleq \tilde{G}^{-1}(Y)$ и $\tilde{\mathfrak{X}} \triangleq \tilde{\Phi}^1(\tilde{\mathbb{E}})$, тогда из (11.1) имеем

$$\tilde{\mathfrak{X}} = (\text{AS})[E; \mathbb{R}^P; \otimes^P(\tau_{\mathbb{R}}); G^{-1}[\mathfrak{Y}]; \Phi]. \quad (11.12)$$

Замена $\mathfrak{X} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}$ составляет существо расширения: в (11.12) имеем представление множества притяжения в виде решения некоторой обобщенной задачи. Воспользуемся (3.2) для представления $\tilde{\mathbb{E}}$: для

$$\tilde{\mathbb{E}}_{\sigma} \triangleq \tilde{\mathbb{E}} \cap \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) = \left\{ \mu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \mid \left(\int_E g_q d\mu \right)_{q \in Q} \in Y \right\}, \quad (11.13)$$

$$\tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{p}} \triangleq \tilde{\mathbb{E}} \cap \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{L}) = \left\{ \mu \in \mathbb{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{L}) \mid \left(\int_E g_q d\mu \right)_{q \in Q} \in Y \right\} \quad (11.14)$$

имеем (в силу (3.2)) $\tilde{\mathbb{E}} = \tilde{\mathbb{E}}_{\sigma} \sqcup \tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{p}}$, т.е.

$$\tilde{\mathbb{E}} = \tilde{\mathbb{E}}_{\sigma} \cup \tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{p}}, \quad \tilde{\mathbb{E}}_{\sigma} \cap \tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{p}} = \emptyset. \quad (11.15)$$

В связи с (11.13), (11.14) полагаем $\tilde{\mathfrak{X}}_{\sigma} \triangleq \tilde{\Phi}^1(\tilde{\mathbb{E}}_{\sigma})$ и $\tilde{\mathfrak{X}}_{\mathbf{p}} \triangleq \tilde{\Phi}^1(\tilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{p}})$ (см. обозначения раздела 2). Из (11.12), (11.15) по свойствам операции взятия образа имеем равенство

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \tilde{\mathfrak{X}}_{\sigma} \cup \tilde{\mathfrak{X}}_{\mathbf{p}}. \quad (11.16)$$

Учтем вложение $\mathbb{D}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L})$. Как следствие имеем

Предложение 11.1. *Справедливо вложение $\mathfrak{X} \subset \tilde{\mathfrak{X}}_{\sigma}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathfrak{X}$. С учетом (11.6) подберем $x_0 \in G^{-1}(Y)$ такое, что $\mathbf{x}_0 = \Phi(x_0)$. Из представления Φ в виде суперпозиции $\tilde{\Phi}$ и Δ имеем, что $\mathbf{x}_0 = \tilde{\Phi}(\mu_0)$, где $\mu_0 \triangleq \Delta(x_0) = (\delta_{x_0} | \mathcal{L}) \in \mathbb{D}(\mathcal{L})$. Разумеется, $\mu_0 \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L})$ (см. раздел 3). При этом $G(x_0) = \tilde{G}(\mu_0) \in Y$ по выбору x_0 . Следовательно, $\mu_0 \in \tilde{\mathbb{E}}$. В итоге, $\mu_0 \in \tilde{\mathbb{E}}_\sigma$ (см. (11.13)), тогда $\tilde{\Phi}(\mu_0) \in \tilde{\mathfrak{X}}_\sigma$, т.е. $\mathbf{x}_0 \in \tilde{\mathfrak{X}}_\sigma$. $\square$

Теорема 11.1. Пусть P и Q — не более чем счетные множества: $P \in (\text{count})[P]$ и $Q \in (\text{count})[Q]$. Тогда $\tilde{\mathfrak{X}}_\sigma = \mathfrak{X}$.

Доказательство. В условиях теоремы

$$\mathcal{A} \triangleq \{f_p : p \in P\} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})],$$

$$\mathcal{B} \triangleq \{g_q : q \in Q\} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})].$$

Как следствие $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in (\text{count})[B(E, \mathcal{L})]$. Выберем произвольно $\mathbf{x}^0 \in \tilde{\mathfrak{X}}_\sigma$, пусть $\mu^0 \in \tilde{\mathbb{E}}_\sigma$ обладает свойством $\mathbf{x}^0 = \tilde{\Phi}(\mu^0)$. Тогда в силу (11.9)

$$\mathbf{x}^0 = \left(\int_E f_p d\mu^0 \right)_{p \in P} \in \mathbb{R}^P. \quad (11.17)$$

Далее, из (11.15) имеем свойство $\mu^0 \in \tilde{\mathbb{E}}$, что означает для $\mu^0 \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L})$ выполнение условия $\tilde{G}(\mu^0) \in Y$. С учетом (11.10) имеем

$$\left(\int_E g_q d\mu^0 \right)_{q \in Q} \in Y. \quad (11.18)$$

В силу теоремы 9.1 для некоторого $x^0 \in E$

$$\int_E \varphi d\mu^0 = \varphi(x^0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (11.19)$$

Согласно определению множества $\mathcal{A}$ из (11.3), (11.17) и (11.19), имеем, что

$$\mathbf{x}^0 = \left(\int_E f_p d\mu^0 \right)_{p \in P} = (f_p(x^0))_{p \in P} = \Phi(x^0). \quad (11.20)$$

В силу определения $\mathcal{B}$ из (11.4), (11.19) имеем, что

$$\left(\int_E g_q d\mu^0 \right)_{q \in Q} = (g_q(x^0))_{q \in Q} = G(x^0).$$

Таким образом, из (11.18) имеем $G(x^0) \in Y$. Тогда $x^0 \in G^{-1}(Y)$ и, в силу (11.6), (11.20), $\mathbf{x}^0 \in \mathfrak{X}$. Вложение $\tilde{\mathfrak{X}}_\sigma \subset \mathfrak{X}$ установлено, что с учетом предложения 11.1 означает справедливость теоремы. $\square$

Следствие 11.1. Если $P \in (\text{count})[P]$ и $Q \in (\text{count})[Q]$, то множество притяжения $\tilde{\mathfrak{X}}$ (11.12) обладает следующим представлением:

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \cup \tilde{\mathfrak{X}}_P.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (11.16) и теоремы 11.1. С учетом (11.13)–(11.15) получили важное следствие: недираковские счетно-аддитивные $(0, 1)$ -меры, если и существуют, то при условии конечности или счетности множеств P и Q не вносят никакого вклада в построение корректного расширения задачи о построении $\mathfrak{X}$. Это корректное расширение связано с построением $\tilde{\mathfrak{X}}$ и оно «целиком» реализуется посредством чисто конечно-аддитивных

$(0, 1)$ -мер: посредством перебора точек $x \in E$ достижимое множество в пространстве $\mathbb{R}^P$ дополняется точками этого пространства, реализуемыми на значениях оператора $\tilde{\Phi}$ при переборе чисто конечно-аддитивных $(0, 1)$ -мер, соблюдающих Y -ограничение на значениях оператора $\tilde{G}$.

В разделе 4 было введено понятие компактифицируемого кортежа $(\mathbf{H}, \vartheta, \mathbf{h})$. В рассматриваемой задаче имеем конкретный вариант такого компактифицируемого кортежа. В самом деле, определим $(\mathbf{H}, \vartheta)$ в виде $\mathbb{R}^P$ с топологией $\otimes^P(\tau_{\mathbb{R}})$ тихоновского произведения экземпляров $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Далее полагаем, что $\mathbf{h}$ совпадает с Φ . Тогда компактификатор $(\mathbb{K}, \tau, p, q)$ из раздела 4 определяем следующим образом. В качестве $\mathbb{K}$ используем $\mathbb{T}(\mathcal{L})$. Топологию τ отождествляем с $\tau_{\mathbf{T}}^*(\mathcal{L})$, получая в итоге компакт, использовавшийся выше. В качестве оператора p (см. раздел 4) используем Δ . Наконец, $\tilde{\Phi}$ используем в качестве оператора q (см. раздел 4). Как уже отмечалось, Φ есть суперпозиция $\tilde{\Phi}$ и Δ , а оператор $\tilde{\Phi}$ есть оператор, непрерывный в требуемом (в разделе 4) смысле. Следовательно, справедлива теорема 4.1.

ГЛАВА 2

НЕПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КОРРЕКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ

12. ВВЕДЕНИЕ

В первой главе преимущественным образом рассматривались общие представления и свойства приближенных решений, интерпретируемых в виде направленностей, фильтров (в частности, ультрафильтров) или конечно-аддитивных, вообще говоря, $(0, 1)$ -мер. Кроме того, рассматривались вопросы структуры множеств притяжения и соответствующих множеств приближенных решений. В то же время в разделе 11 было построено расширение в классе конечно-аддитивных $(0, 1)$ -мер; последние использовались в виде обобщенных элементов. Приступая к обсуждению не прямых версий расширения пространства решений, будем заниматься построением конструкций в духе (11.11), (11.12). Однако упомянутая конструкция расширения раздела 11 (весьма общего характера) мало приспособлена для целей исследования конкретных версий расширения неустойчивых задач о достижимости в условиях различных ограничений. Среди таких задач наиболее существенными будут задачи управления. В этой связи, сохраняя на идейном уровне логику процедуры расширения раздела 11, далее будем заниматься построением расширений, реализуемых в других классах конечно-аддитивных мер. Кроме того, нам потребуется рассматривать и некоторые конструкции топологического характера. В этой связи отметим весьма общие построения [44, 50, 58–60, 62, 64]. В частности, один нетрадиционный подход, связанный с применением конечно-аддитивных мер для целей построения расширений, приведен в [58], где, в частности, получены условия асимптотической нечувствительности абстрактных задач управления (и их аналогов) при возмущении части ограничений.

В настоящей работе мы не рассматриваем постановки задач об асимптотической достижимости в той общности, которая принята в [58] (см. также [44, 59]) применительно к одному естественному способу погружения обычных управлений (обычных решений) в пространство обобщенных элементов, формализуемых в виде конечно-аддитивных мер (включая постановки с использованием векторных конечно-аддитивных мер) со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно некоторой фиксированной меры. В настоящей работе (в третьей главе), напротив, допускается использование различных вариантов упомянутого погружения. При этом и сама природа обычных решений может быть различной. Все это будет отражено в рамках аксиоматически определяемой конструкции расширения, универсального в тех или иных пределах возможных версий ограничений асимптотического характера. Во второй главе мы, однако, не будем акцентировать внимание на достижении упомянутой универсальности, а сосредоточимся на рассмотрении весьма конкретных случаев погружения реализуемых решений (или управлений) в надлежащее пространство обобщенных элементов и на исследовании конструкций общего характера, обеспечивающих сведение асимптотической, по существу, постановки задачи о достижимости в некотором целевом топологическом пространстве (пространстве оценок) к аналогичной постановке, связанной с пространством

обобщенных элементов. При этом предполагается, что в упомянутом пространстве удастся прояснить те или иные черты основной задачи. Такие возможности в ряде случаев действительно имеются, что и будет показано в третьей главе.

Итак, последовательно рассматриваем задачи асимптотического анализа, связанные с проблемой достижимости, и их обобщенные версии, которые уже не интерпретируются как асимптотические. Напротив, стремимся свести их к стандартной форме. По сути дела в этих обобщенных задачах речь идет о построении непрерывных образов подмножеств пространства обобщенных элементов. Эти образы интерпретируются как достижимые множества (аналоги областей достижимости).

13. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ: СЛУЧАЙ ИМПУЛЬСНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

Здесь мы рассматриваем достаточно простой вариант задачи о построении области достижимости линейной управляемой системы в фиксированный момент времени, уделяя основное внимание асимптотической версии упомянутой задачи. Фиксируем моменты $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$, а также промежуток $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$; кроме того, пусть $I \triangleq [t_0, \vartheta_0[$. В качестве управлений рассматриваем только вещественнозначные функции на I (случай скалярного управления).

Рассмотрим систему Σ , функционирующую на отрезке I_0 в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ (фазовое пространство системы Σ). Пусть задано начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы Σ , в котором она находится в момент t_0 . Далее эта система находится под воздействием управления

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (13.1)$$

удовлетворяющего некоторой системе ограничений. В пределах этих ограничений выбор f (13.1) может быть произвольным. Соответственно, траектория $x(\cdot) = x_f(\cdot)$, $x(t_0) = x_0$, системы Σ может формироваться по-разному. Однако нас интересуют лишь терминальные состояния $x(\vartheta_0) = x_f(\vartheta_0) \in \mathbb{R}^n$. Множество всех таких состояний, при переборе f (13.1) в пределах упомянутой системы ограничений есть область достижимости (системы Σ) в момент ϑ_0 . Мы рассматриваем управляемую линейную систему. Поскольку нас интересуют только вопросы достижимости в момент ϑ_0 , то можно ограничиться [26, с. 160] рассмотрением векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t) b(t) + c(t), \quad (13.2)$$

где t — время из промежутка I , $b = b(\cdot)$ и $c = c(\cdot)$ — заданные вектор-функции на I , имеющие каждая n компонент: $b_1, \dots, b_n$ и $c_1, \dots, c_n$. Эти компоненты, как и управление f , должны удовлетворять определенным условиям измеримости. Будем постулировать, что все эти функции измеримы по Борелю. Следовательно, можно говорить о траекториях системы (13.2), стартующих из позиции (t_0, x_0) . Более детально оговорим условия, связанные с измеримостью, что обусловлено соображениями прикладного характера. Так, например, в соответствующей конкретной постановке задачи оговорено требование: каждое возможное управление f (13.1) должно быть кусочно-постоянной и непрерывной справа функцией на I . Такое требование может быть обусловлено возможностями инженерной реализации.

Упомянутое условие на выбор f может приводить к определенным затруднениям при анализе вопросов, связанных с построением и свойствами областей достижимости, для «чрезмерно разрывной» вектор-функции b . В этой связи сделаем некоторые дополнительные предположения.

Пусть $\mathcal{I}$ есть, по определению, семейство всех промежутков $[a, b[$, $a \in I_0$, $b \in I_0$; $\mathcal{I} \in \Pi[I]$ — типичная полуалгебра пространства-стрелки $(I, \mathcal{I})$. Кроме того, пусть (здесь и далее) $\mathcal{B}$ есть, по определению, σ -алгебра борелевских подмножеств I , т.е. след на I σ -алгебры борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Пусть, наконец, полуалгебра $\mathcal{L} \in \Pi[I]$ обладает свойством $\mathcal{I} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. Полагаем, что все компоненты вектор-функций b и c являются элементами пространства $B(I, \mathcal{L})$ (см. раздел 3 при условии $E = I$). Относительно f в (13.2) будем полагать, что $f \in B_0(I, \mathcal{L})$. Ступенчатость f предполагается, исходя из соображений более простой реализации. Можно было бы рассматривать случай $f \in B(I, \mathcal{L})$, но мы полагаем, что ступенчатая реализация управления может оказаться более приемлемой с прикладной точки зрения.

Замечание 13.1. Дополнительное соглашение в отношении $c_1, \dots, c_n$ является, по существу, излишним и принимается лишь в целях упрощения некоторых последующих обозначений (достаточно было бы полагать, что компоненты $c = c(\cdot)$ — борелевские функции на I). Отметим, что в случае $\mathcal{L} = \mathcal{I}$ множество $B_0(I, \mathcal{L})$ совпадает с множеством всех кусочно-постоянных и непрерывных справа вещественнозначных функций на I .

При сделанных предположениях вектор-функция в правой части (13.2) всякий раз имеет своими компонентами элементы $B(I, \mathcal{L})$ и, в частности, эти компоненты являются борелевскими функциями на I . Траекторию системы (13.2) можно, конечно, получить прямым интегрированием правой части относительно меры Лебега—Бореля $\mathbf{1}$, определенной на σ -алгебре $\mathcal{B}$. Однако имея в виду последующее использование конечно-аддитивных мер в качестве обобщенных управлений (см. [50, 62]), целесообразно поступить несколько иначе. Именно, в качестве семейства измеримых множеств будем использовать $\mathcal{L}$. Через λ обозначим сужение меры Лебега на полуалгебру $\mathcal{L}$, $\lambda \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$. Триплет $(I, \mathcal{L}, \lambda)$ используем в качестве аналога «обычного» пространства с мерой. Следуя определениям раздела 3, ориентированным на интегрирование по конечно-аддитивной мере, при вышеупомянутых условиях на выбор b , c и f введем функцию

$$\varphi_f : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (13.3)$$

определенную как

$$t \longmapsto x_0 + \int_{[t_0, t[} b f d\lambda + \int_{[t_0, t[} c d\lambda : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (13.4)$$

где интегралы вектор-функций определяются (здесь и далее) покомпонентно. Заметим, что в (13.4) и далее подынтегральная функция обозначается через $b f$ (имеется некоторое отличие по сравнению с (13.2)), что более традиционно для задач управления: $b f$ интерпретируется как n -вектор-функция на I (отображение из I в $\mathbb{R}^n$) с компонентами $b_1 f, \dots, b_n f$. Разумеется, φ_f (13.3), (13.4) можно рассматривать как обычное решение векторного дифференциального уравнения, понимаемое в смысле Каратеодори, и использовать при этом традиционную символику, имея при $t \in I_0$ равенства

$$\begin{aligned} \int_{[t_0, t[} b f d\mathbf{1} &= \int_{[t_0, t[} b(\xi) f(\xi) \mathbf{1}(d\xi) = \int_{[t_0, t[} b f d\lambda, \\ \int_{[t_0, t[} c f d\mathbf{1} &= \int_{[t_0, t[} c(\xi) \mathbf{1}(d\xi) = \int_{[t_0, t[} c d\lambda \end{aligned}$$

(напомним, что $\mathbf{1}$ есть мера Лебега—Бореля на σ -алгебре $\mathcal{B}$) (см. в этой связи [13, с.183]). В качестве f в (13.3), (13.4) будем использовать функции из $B_0(I, \mathcal{L})$, но можно было оперировать и с функциями более общего вида. Подчеркнем, что по смыслу задачи о построении и исследовании свойств областей достижимости нас интересуют только терминальные состояния

$$\varphi_f(\vartheta_0) = x_0 + \int_I b f d\lambda + \int_I c d\lambda, \quad (13.5)$$

реализуемые посредством $f \in B_0(I, \mathcal{L})$. Действие управления f распространяется только на второе слагаемое в (13.5) и можно было бы ограничиться анализом достижимого множества, точки которого реализуются всевозможными векторными интегралами в (13.5), обусловленными действием f . Ограничения на выбор f могут включать различные системы условий. В частности, на практике часто используется условие

$$\int_I |f| d\lambda = \int_I |f(t)| \lambda(dt) \leq \kappa, \quad (13.6)$$

где $|f|$ действует, как обычно, из I в $[0, \infty[$, сопоставляя моменту $t \in I$ число $|f(t)|$, а $\kappa \in [0, \infty[$. (13.6) означает ограничение на энергоресурс системы Σ .

Кроме (13.6), на выбор $f \in B_0(I, \mathcal{L})$ могут накладываться и другие ограничения. Часто эти ограничения удается задать в следующем виде:

$$\left(\int_I u_1 f d\lambda, \dots, \int_I u_m f d\lambda \right) \in Y, \quad (13.7)$$

где $m \in \mathcal{N}$, $(u_i)_{i \in \overline{1, m}}$ — кортеж в $B(I, \mathcal{L})$, а Y — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$. Один из вариантов (13.7) может быть связан с наличием промежуточных условий вида

$$\varphi_f(t_*) \in \tilde{Y}, \quad (13.8)$$

где $t_* \in I_0$, а $\tilde{Y}$ — множество, связанное с Y определенным образом. Условие (13.8) может быть связано с некоторым ограничением по части координат вектора $\varphi_f(t_*)$, где $f \in B_0(I, \mathcal{L})$, что потенциально может быть источником несовпадения m и n . Отметим, что (13.2) возникает часто в результате некоторого неособого линейного преобразования (см., например, [26, с. 160]). Условие вида (13.8) можно легко свести к (13.7) и в этом случае. Отметим, что условие (13.7) может возникать и по другим, непосредственно не связанным с (13.8), причинам (см. в этой связи [57, § 1.3], [58, § 2.5]). Поэтому в последующих построениях мы ориентируемся на условия вида (13.7).

Обозначим через $\mathbb{F}$ множество всех функций $f \in B_0(I, \mathcal{L})$, удовлетворяющих условию (13.6). Пусть $\mathbf{F}$ — заданное непустое подмножество $\mathbb{F}$ (т.е. $\mathbf{F} \subset \mathbb{F}$), рассматриваемое в качестве множества возможных управлений. Существует целый ряд причин, по которым возможно несовпадение $\mathbb{F}$ и $\mathbf{F}$. Многие из этих обстоятельств связаны с конкретными условиями инженерной реализации и ниже мы коснемся некоторых из них в связи с рассмотрением примеров. Тогда

$$\mathbf{F}_\partial \triangleq \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \left(\int_I u_i f d\lambda \right)_{i \in \overline{1, m}} \in Y \right\} \quad (13.9)$$

есть множество всех допустимых управлений, а

$$\mathbf{G}_\partial \triangleq \left\{ \varphi_f(\vartheta_0) : f \in \mathbf{F}_\partial \right\} \quad (13.10)$$

— искомая область достижимости. Условия, используемые в (13.9) (ограничения моментного характера), можно связать с различием $\mathbb{F}$ и $\mathbf{F}$ и обусловить это возможное различие именно таким образом. Однако мы будем выделять упомянутые моментные ограничения по той причине, что именно эта компонента системы ограничений далее будет подвергнута возмущению.

Отметим, что в обозначениях раздела 3 (при $E = I$) имеем $\forall f \in \mathbb{F} \quad \forall j \in \overline{1, m}$

$$\left| \int_I u_j f d\lambda \right| \leq \|u_j\| \int_I |f| d\lambda \leq \|u_j\| \kappa.$$

Тогда множество всех векторов

$$\left(\int_I u_j f d\lambda \right)_{j \in \overline{1, m}}, \quad f \in \mathbb{F},$$

ограничено в $\mathbb{R}^m$, следовательно Y , используемое в (13.7), можно без ограничения общности считать компактным. Последнее удобно предполагать с той точки зрения, что в условиях компактного множества Y при ослаблении Y -ограничения путем замены множества Y окрестностью в традиционной нормируемой топологии покоординатной сходимости можно ограничиться рассмотрением только ε -окрестностей, это следует из леммы Лебега о покрытии [23, с. 208]. С учетом этого обстоятельства ограничимся использованием только таких окрестностей. Пусть

$$\rho_m : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, \infty[$$

есть, по определению, метрика множества $\mathbb{R}^m$ (определяемая нормой) такая, что $\forall (u_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbb{R}^m$
 $\forall (v_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbb{R}^m$

$$\rho_m((u_i)_{i \in \overline{1, m}}, (v_i)_{i \in \overline{1, m}}) \triangleq \sup(\{|u_i - v_i| : i \in \overline{1, m}\}).$$

Здесь мы следуем условиям раздела 2. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через Y^ε будем обозначать множество всех векторов $(z_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbb{R}^m$ таких, что

$$\exists (y_i)_{i \in \overline{1, m}} \in Y : \rho_m((y_i)_{i \in \overline{1, m}}, (z_i)_{i \in \overline{1, m}}) < \varepsilon.$$

Иными словами, Y^ε есть объединение всех открытых шаров (в метрике ρ_m) радиуса ε , центры которых пробегает Y . В пределах второй главы обозначение Y^ε понимается только в упомянутом смысле. Тем самым при $\varepsilon > 0$ определены ε -окрестности множества Y . Каждая такая окрестность открыта в топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$ покоординатной сходимости пространства $\mathbb{R}^m$. Более того, при вышеупомянутом предположении о компактности Y в $(\mathbb{R}^m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)})$, т.е. при

$$Y \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(m)}\text{-comp})[\mathbb{R}^m],$$

упомянутые ε -окрестности Y , $\varepsilon > 0$, образуют фундаментальную систему (базис) окрестностей множества Y .

Итак, через $\mathcal{Y}$ обозначаем семейство всех множеств Y^ε , $\varepsilon \in]0, \infty[$. Для введения ограничений асимптотического характера воспользуемся (2.9). В этой связи отметим, что в нашем случае $\mathcal{Y} \in \beta[\mathbb{R}^m]$ и, при условии $Y \neq \emptyset$, $\mathcal{Y} \in \beta_0[\mathbb{R}^m]$ (см. раздел 2). Конструкция (2.9) позволяет дополнить задачу определения области достижимости (13.10) соответствующей асимптотической версией, для которой имеет место представление множества притяжения, удовлетворяющее (2.8).

Но, прежде чем вводить данную конкретизацию асимптотической версии задачи о достижимости в духе (2.8), обсудим вопрос об исследовании свойств области достижимости на содержательном уровне. Итак, пусть $\varepsilon \in]0, \infty[$. Заменим условие (13.7) следующим:

$$\left(\int_I u_1 f d\lambda, \dots, \int_I u_m f d\lambda \right) \in Y^\varepsilon, \quad (13.11)$$

где $f \in \mathbf{F}$. Иными словами, мы ослабили требования на выбор f . В результате вместо (13.9) мы получим множество

$$\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \left(\int_I u_i f d\lambda \right)_{i \in \overline{1, m}} \in Y^\varepsilon \right\} \quad (13.12)$$

всех возможных управлений, соблюдающих ограничение (13.11). В свою очередь, в терминах (13.12) можно ввести аналог области достижимости (13.10), полагая

$$\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \{ \varphi_f(\vartheta_0) : f \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} \}. \quad (13.13)$$

Из (13.10), (13.13) следует, что $\mathbf{G}_\partial \subset \mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}$. Нередко отличие $\mathbf{G}_\partial$ и $\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}$ оказывается существенным (см. примеры [57, гл. 1] и [58, гл. 1,2]).

По сути дела к этому явлению можно отнести рассуждения [8, гл. III] и [54], касающиеся задач управления с геометрическими ограничениями и задач вариационного исчисления. Можно упомянуть также и разрыв двойственности в задачах выпуклого программирования (в этой связи отметим работы [12, 14, 16]).

Если $\varepsilon_1 \in]0, \infty[$, $\varepsilon_2 \in]0, \infty[$ и $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, то $\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon_1)} \subset \mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon_2)}$. При $\varepsilon \downarrow 0$ параметризованное семейство областей достижимости вида (13.13) стремится к пределу, имеющему вид

$$\text{Att} \triangleq \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{cl} \left(\mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)} \right), \quad (13.14)$$

где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть, как и в упомянутом случае традиционного оснащения $\mathbb{R}^m$, обычная топология покоординатной сходимости пространства $\mathbb{R}^n$. В (13.14) имеем практически полезное множество притяжения, применение которого во многих инженерных задачах осуществляется по сути дела неосознанно, на интуитивном уровне. С другой стороны, версия (13.14) может быть легко сведена к представлению (2.8). В самом деле, рассмотрим множество

$$(\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \mathcal{X}; \mathbf{h}], \quad (13.15)$$

где $\mathbf{h}$ — отображение $f \mapsto \varphi_f(\vartheta_0) : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, а $\mathcal{X}$ определяется в виде семейства всех множеств $\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in]0, \infty[$. Подчеркнем, что $\mathcal{X} \in \beta[\mathbf{F}]$ допускает представление вида (2.9). В самом деле, определим оператор

$$\mathbf{s} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (13.16)$$

по следующему правилу: при $f \in \mathbf{F}$ имеет место

$$\mathbf{s}(f) \triangleq \left(\int_I u_i f d\lambda \right)_{i \in \overline{1, m}}. \quad (13.17)$$

Тогда $\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} = \mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$. В результате получаем (с учетом (2.9)) свойство

$$\mathcal{X} = \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}], \quad (13.18)$$

реализуемое в терминах оператора (13.16), (13.17). Для определения множества притяжения (13.15) можно использовать (2.8) при $U = \mathbf{f}$, $V = \mathbb{R}^n$, $\tau = \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$, $\mathcal{U} = \mathcal{X}$ и $f = \mathbf{h}$. Учтем, что в силу (13.13) $\mathbf{h}^1(\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}) = \mathbf{G}_\partial^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$. В результате из (2.8), (13.14) получаем

$$\text{Att} = \bigcap_{U \in \mathcal{X}} \text{cl} \left(\mathbf{h}^1(U), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)} \right) = (\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\text{-LIM})[\mathcal{X}|\mathbf{h}] = (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \mathcal{X}; \mathbf{h}]. \quad (13.19)$$

Итак, естественный в инженерной практике объект — множество притяжения (13.14) — является вариантом множества притяжения (см. раздел 2).

Переходя к обсуждению важного (в свете построений первой главы) вопроса о выборе класса приближенных решений, отметим, что в упомянутой задаче для исчерпывающей реализации множеств притяжения с принципиальной точки зрения достаточно класса секвенциальных приближенных решений (см. в этой связи [58, предложение 2.2.1]). Учитываем следующие два обстоятельства: семейство $\mathcal{X}$ имеет счетную базу (счетную определяющую систему). Эту систему можно построить в виде последовательности $((\mathbf{F}_\partial^{(1/k)})_{k \in \mathbb{N}})$, а топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ метризуема и удовлетворяет, в частности, первой аксиоме счетности. Однако в нашей достаточно простой задаче построение конкретных секвенциальных приближенных решений, реализующих точки множества притяжения, является в общем случае делом непростым и реализуется в схеме [58, с. 38] на основе «счетной» аксиомы выбора (т.е. произвольного выбора по элементу из последовательности непустых множеств). В то же время, если располагать естественной обобщенной версией исходной задачи о достижимости и, для этой версии, — решением в виде множества допустимых обобщенных элементов, формализуемых как конечно-аддитивные меры со свойством слабой абсолютной λ -непрерывности [56], то по рецепту [58, с. 48, 49, 244, 245] конструктивно определяются направленности, реализующие в качестве приближенных решений все точки искомого множества притяжения. Таким образом, можно использовать конструкции приближенных решений первой главы для целей формализации и исследования асимптотической версии весьма конкретной задачи о достижимости. В этой связи можно предложить следующую конкретизацию основных параметров, упоминаемых в разделе 1: $E = \mathbf{F}$, $(\mathbf{H}, \vartheta) = (\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, $\mathbf{h}$ — вышеупомянутая зависимость терминального состояния управляемой системы Σ от управления-программы на ее входе, $\mathcal{S} = \mathcal{X} = \{\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} : \varepsilon \in]0, \infty[\}$. Для данной конкретизации можно сформировать, в частности, множество (типа (4.24)) приближенных решений, понимаемых как ультрафильтры множества $E = \mathbf{F}$. Более того, наша задача, как легко проверить с учетом результатов [57, 58], является компактифицируемой в смысле раздела 4 и, следовательно, для нее справедлива теорема 4.1 о структуре приближенных решений, формирующих множество притяжения. В этой связи важно установить структуру соответствующего компактификатора. В данном случае следует использовать построения [58, §§ 3.7, 3.9, 3.10]. В дальнейшем коснемся этого вопроса подробнее, имея в виду представление обобщенных элементов в виде конечно-аддитивных мер со свойством слабой абсолютной непрерывности [56] относительно λ .

Возвращаясь к секвенциальной реализации множества притяжения в конкретном случае, приведем соответствующий вариант утверждения [58, с. 38]. Итак, введем в рассмотрение множество

Φ_ω всех последовательностей

$$(f_i)_{i \in \mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{F},$$

обладающих тем свойством, что

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists p \in \mathcal{N} : f_q \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} \quad \forall q \in \overline{p, \infty}. \quad (13.20)$$

Свойство (13.20), определяющее множество Φ_ω , $\Phi_\omega \subset \mathbf{F}^\mathcal{N}$, является условием соблюдения ограничений асимптотического характера в классе секвенциальных приближенных решений. Итак, для множества притяжения Att (13.19) имеем следующее представление:

$$\text{Att} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (f_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \Phi_\omega : (\varphi_{f_i}(\vartheta_0))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\tau_\mathbb{R}^{(n)}} x\}. \quad (13.21)$$

В связи с представлением (13.21) следует иметь в виду (2.4), (2.6). Как и (13.19), представление (13.21) не может (в практически интересных задачах) использоваться для непосредственного построения множества притяжения Att. Однако это построение можно представить в рамках схемы использования обобщенных управлений (т.е. обобщенных элементов для данной конкретной постановки), подобной в значительной мере [8, гл. III, IV]. Это направление исследования используем как основное в своих последующих построениях.

14. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим схему, изложенную в конце раздела 13, для некоторых модельных примеров. Кроме того, обсудим вопрос о возможном несовпадении $\mathbb{F}$ и $\mathbf{F}$. Одна из версий такого несовпадения связана с постулированием для управлений f в системе (13.2) свойства неотрицательности. Можно говорить о «неревверсируемом двигателе», сама ориентация которого изменяется с течением времени. В этом случае, т.е. при условии, что в (13.2) управление неотрицательно на I , имеем в виде ресурсного ограничения требование

$$\int_I f(t) \lambda(dt) \leq \kappa, \quad (14.1)$$

где $\kappa > 0$. В этой редакции дополнительных требований на выбор управляющей программы можно принять следующее условие:

$$\mathbf{F} \triangleq \{f \in \mathbb{F} \mid 0 \leq f(t) \quad \forall t \in I\}. \quad (14.2)$$

Существенную часть ограничений ресурсного характера в этом случае составляет условие (14.1), поскольку (см. (14.2))

$$\mathbf{F} = \left\{ f \in B_0^+(I, \mathcal{L}) \mid \int_I f(t) \lambda(dt) \leq \kappa \right\}, \quad (14.3)$$

где $B_0^+(I, \mathcal{L})$ — множество всех неотрицательных функций из $B_0(I, \mathcal{L})$. Данная реализация $\mathbf{F}$ (см. (14.3)) может быть связана с конкретными инженерными постановками задач управления. В частности, это условие может быть связано со спецификой «двигателя», используемого для целей управления системой Σ . Рассмотрим несколько иллюстративных примеров, отсылая заинтересованного читателя к более содержательным примерам [57, гл. 1], [58, гл. 1, 2] (см. также [64, §§ 1.1–1.3, 4.13], [59], [44]). Цель настоящего изложения состоит в том, чтобы ввести читателя в курс дела на простейших моделях. Всюду в пределах данного раздела для простоты полагаем, что $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 1$, $\kappa = 1$. Вектор-функцию $c = c(\cdot)$ полагаем тождественно равной нулю.

Придерживаясь описания (13.2), ориентированного на задачи терминального управления, рассмотрим (при $f \in \mathbf{F}$) на промежутке $I_0 = [0, 1]$ изменение координаты управляемой материальной точки

$$\dot{x}(t) = (1 - t) f(t). \quad (14.4)$$

Уравнение (14.4) получилось в результате применения неособого линейного преобразования [26, с. 160]. Данное представление ориентировано на задачу управления, в которой существенно по самой ее постановке только терминальное значение координаты, отвечающее моменту $t = 1$. Дополним (14.4) уравнением

$$\dot{v}(t) = f(t) \quad (14.5)$$

для скорости (здесь $f \in \mathbf{F}$), после чего принимаем новые обозначения: $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = v(t)$. Получили систему

$$\dot{x}_1(t) = (1 - t) f(t), \quad \dot{x}_2(t) = f(t), \quad (14.6)$$

для которой, очевидно, $n = 2$. Будем полагать, что $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (см. раздел 13) есть вектор с нулевыми компонентами, т.е. нуль пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$. Последнее означает, что наша «настоящая» материальная точка в момент $t_0 = 0$ покоится в нуле. В данном примере для простоты полагаем $\mathcal{L} = \mathcal{I}$ (см. раздел 13). Тогда (14.2), (14.3) определяют множество $\mathbf{F}$ всех возможных управлений в виде множества всех кусочно-постоянных и непрерывных справа неотрицательных вещественнозначных функций на $I = [0, 1[$, для каждой из которых импульс силы не превосходит $\kappa = 1$.

Рассмотрим парадоксальную задачу: как, удерживая материальную точку в покое, достичь в момент $t = 1$ скорости, равной 1? Решение этой задачи будем извлекать из соответствующего решения задачи раздела 13, для которой полагаем $m = 1$, $Y = \{0\}$ (синглетон, содержащий число 0), а $u_1 \in B(I, \mathcal{I})$ определяем условием $u_1(t) \triangleq 1 - t \quad \forall t \in I$. Ясно, что в этом случае реализуется вариант ограничения (13.8), где $t_* = 1$, а $\tilde{Y}$ соответствует произведению $\{0\} \times \mathbb{R} = Y \times \mathbb{R}$. Иными словами, вариант (13.7) имеет вид условия на первую компоненту $\varphi_{f,1}$ траектории φ_f :

$$\varphi_{f,1}(1) = \int_0^1 (1 - t) f(t) dt = 0. \quad (14.7)$$

При этом ограничении надлежит определить область достижимости и исследовать ее свойства. Заметим, что в силу неотрицательности $f \in \mathbf{F}$ условие (14.7) эквивалентно требованию

$$\varphi_{f,1}(t) = 0 \quad \forall t \in I_0.$$

Легко видеть, что (14.7) эквивалентно условию $f(t) = 0 \quad \forall t \in I$. Последнее приводит к выводу, что в нашем случае $\mathbf{G}_\partial$ содержит единственный (плоский) вектор с нулевыми компонентами, т.е. вектор, равный «нулю» пространства $\mathbb{R}^2$. Решение парадоксальной задачи невозможно.

С другой стороны, для Att (13.19), (13.21) имеем представление: Att есть произведение синглтона $\{0\}$ и отрезка $[0, 1]$. Соответствующее обоснование легко реализуется по аналогии с рассуждением [58, с. 1,2] (см. также [57, с. 2,3]). Отметим только, что для приближенной реализации точки множества притяжения Att, имеющей компоненты 0 и $a \in]0, 1]$, следует использовать при $\delta \in]0, 1[$ управление $f_\delta \in \mathbf{F}$ вида $f_\delta(t) = 0$ при $t \in [0, 1 - \delta[$, $f_\delta(t) = a/\delta$ — при $t \in [1 - \delta, 1]$. Чтобы осуществить условие $f_\delta \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}$ δ следует подбирать по ε , $\varepsilon > 0$, где в согласии с (13.12)

$$\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} = \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \int_0^1 (1 - t) f(t) dt < \varepsilon \right\}. \quad (14.8)$$

В этой связи заметим, что величина

$$\int_0^1 (1 - t) f_\delta(t) dt$$

мала при малых $\delta \in]0, 1[$, в то время как

$$\int_0^1 f_\delta(t) dt = a \quad \forall \delta \in]0, 1[.$$

Если сформировать последовательность $(\delta_k)_{k \in \mathcal{N}}$, полагая $\delta_r \triangleq (2r)^{-1}$ при $r \in \mathcal{N}$, то в виде

$$(f^{(k)})_{k \in \mathcal{N}} = (f_{\delta_k})_{k \in \mathcal{N}}$$

имеем секвенциальное приближенное решение, реализующее требуемую точку Att с компонентами 0, a .

Замечание 14.1. Фактически мы проверили, что любая точка $\mathbb{R}^2$ с компонентами 0 и $a \in [0, 1]$ является элементом Att (см. (13.21)). Напротив, из (14.2), (14.3) и (14.8) видно, что компонентами любого вектора из множества притяжения Att являются соответственно числа 0 и некоторое $\alpha \in [0, 1]$.

Из этих рассуждений, в частности, следует, что точка

$$(x_i^0)_{i \in \overline{1,2}} \in \text{Att}$$

с компонентами $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1$ отвечает решению нашей парадоксальной задачи, которое имеет смысл обобщенного элемента, формализовать который мы не будем, хотя это можно было бы сделать с привлечением простейших конструкций теории обобщенных функций. Заметим, что вектор-функция $b = b(\cdot)$ (см. раздел 13) имеет (см. (14.6)) следующие компоненты: b_1 есть отображение

$$t \longmapsto 1 - t : I \longrightarrow [0, \infty[,$$

а b_2 — функция на I , тождественно равная 1. Итак, в нашем случае $b(\cdot)$ есть равномерно непрерывная вектор-функция на I , что позволяет использовать достаточно простые, в сравнении с общим случаем системы Σ (13.2), представления обобщенных элементов. Этого вопроса мы сейчас не касаемся, откладывая его обсуждение до введения требуемых конструкций компактификации пространства управлений.

Рассмотрим следующую систему управляемых дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = (1 - t)w(t)f(t), \quad \dot{x}_2(t) = w(t)f(t) \quad (14.9)$$

на отрезке $I_0 = [0, 1]$ ($t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 1$) при нулевом векторе $x_0 \in \mathbb{R}^2$ начальных данных. Полагаем, что в (14.9) $f \in B_0(I, \mathcal{I})$, а w есть неотрицательная кусочно-постоянная и непрерывная справа вещественнозначная функция на I . Постулируем, что выбор f стеснен «энергетическими» условиями

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)| dt \leq \frac{1}{2}. \quad (14.10)$$

Кроме того, полагаем, что для двух заданных моментов времени $t_1 \in]0, 1]$ и $t_2 \in]0, 1]$ должно быть выполнено включение

$$\left(\int_0^{t_1} (t_1 - t)w(t)f(t) dt, \int_0^{t_2} w(t)f(t) dt \right) \in Y, \quad (14.11)$$

Y — замкнутое подмножество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Условие (14.11) является фактически ограничением на реализацию пары координата-скорость в условиях, когда координата и скорость определяются в разные, вообще говоря, моменты времени. Здесь следует иметь в виду, что (14.9) отвечает неособому преобразованию типа, используемого в [26, с. 160]. На самом же деле (14.11) — вариант (13.8), если иметь в виду уравнения движения материальной точки в первоначальном виде.

Отметим в качестве следствия тот факт, что

$$\int_0^1 |f(t)| dt \leq 1 \quad (14.12)$$

для тех $f \in B_0(I, \mathcal{I})$, которые допустимы в смысле (14.10). Итак, мы рассматриваем задачу управления в условиях ограниченного энергоресурса (см. (14.12)). Поэтому в нашей задаче можно ввести множество $\mathbb{F}$ (см. раздел 13), полагая, конечно, $I = [0, 1]$, $\mathcal{L} = \mathcal{I}$ и $\kappa = 1$. Что же касается $\mathbf{f}$, то логично считать, что при данной конкретизации множества $\mathbb{F}$ имеет место

$$\mathbf{f} = \left\{ f \in \mathbb{F} \mid \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2}, \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)| dt \leq \frac{1}{2} \right\}. \quad (14.13)$$

Введение $\mathbb{F}$ вызывается не существом дела, а лишь удобством в интерпретации, поскольку для множества (14.13) имеем представление

$$\mathbf{f} = \left\{ f \in B_0(I, \mathcal{I}) \mid \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2}, \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)| dt \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad (14.14)$$

где учтено свойство (14.12). Наконец, в нашем случае

$$\mathbf{f}_\partial = \left\{ f \in \mathbf{f} \mid \left(\int_0^{t_1} (t_1 - t) w(t) f(t) dt, \int_0^{t_2} w(t) f(t) dt \right) \in Y \right\}. \quad (14.15)$$

В терминах (14.15), согласно (13.10), может быть введена область достижимости невозмущенной задачи. С другой стороны, используя редукцию моментного ограничения к виду (13.11), можно ввести конкретные версии множеств $\mathbf{f}_\partial^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$. В данном случае (см. (14.11)) имеем

$$\mathbf{f}_\partial^{(\varepsilon)} = \left\{ f \in \mathbf{f} \mid \left(\int_0^{t_1} (t_1 - t) w(t) f(t) dt, \int_0^{t_2} w(t) f(t) dt \right) \in Y^\varepsilon \right\} \quad (\varepsilon \in]0, \infty[). \quad (14.16)$$

В разделе 13 мы конкретизируем число m , полагая $m = 2$, следовательно, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ оснащается метрикой

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto \sup(\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}) : \\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) &\longrightarrow [0, \infty[. \end{aligned}$$

В терминах этой метрики определяем ε -окрестности Y^ε множества Y при $\varepsilon > 0$, эти окрестности используем в (14.16). Теперь нетрудно конкретизировать область достижимости (13.13), соответствующую ε -возмущению условий основной задачи, а также множеству притяжения (13.14). Построение этого множества может быть реализовано посредством расширения пространства управлений в духе конструкций следующего раздела. Отметим еще одну проблему, связанную с нашей конкретной постановкой. Речь идет о том, что возмущение ограничений (точнее, их ослабление) можно организовать по-разному. Один из этих способов мы уже рассматривали. Он состоит в замене множества Y ε -окрестностями Y^ε , $\varepsilon > 0$. Им соответствуют допустимые множества вида (14.16), определяющие ограничения асимптотического характера (сейчас мы используем только содержательный способ рассуждения). Можно, однако, допустить и такой вариант ослабления исходной системы ограничений: при заданном $\varepsilon > 0$ допускается реализация только таких управлений $f \in \mathbf{f}$, для каждого из которых при некотором $y = (y_1, y_2) \in Y$ имеют место свойства

$$\left| \int_0^{t_1} (t_1 - t) w(t) f(t) dt - y_1 \right| < \varepsilon, \quad \int_0^{t_2} w(t) f(t) dt = y_2. \quad (14.17)$$

Множество всех управлений $f \in \mathbf{f}$, удовлетворяющих (14.17) при некотором $y \in Y$, обозначим через $\mathbf{f}_\partial^0[\varepsilon]$. Такое множество определено при каждом $\varepsilon > 0$. Мы снова получаем ограничения асимптотического характера. Отметим один естественный способ введения ограничений последнего типа. Именно, при $\varepsilon \in]0, \infty[$ определим множество Y_ε^0 всех векторов $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, для каждого из которых при некотором выборе $(u^0, v^0) \in Y$

$$|u - u^0| < \varepsilon, \quad v = v^0.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{f}_\partial^0[\varepsilon] = \left\{ f \in \mathbf{f} \mid \left(\int_0^{t_1} (t_1 - t) w(t) f(t) dt, \int_0^{t_2} w(t) f(t) dt \right) \in Y_\varepsilon^0 \right\}. \quad (14.18)$$

Упомянутые множества Y_ε^0 , $\varepsilon > 0$, могут быть истолкованы как окрестности Y при надлежащем оснащении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для осуществления этого построения, полезного для целей интерпретации результатов третьей главы, введем две топологии $\mathbb{R}$: обычную $|\cdot|$ -топологию $\tau_{\mathbb{R}}$ и дискретную

топологию τ_∂ (семейство всех подмножеств $\mathbb{R}$). В дальнейшем эти топологии обсуждаются более подробно; сейчас ограничимся введением обозначений. Рассмотрим топологию $\tau_{\mathbb{R}} \otimes \tau_\partial$ множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (т.е. топологию плоскости), получаемую в виде топологии стандартного произведения топологических пространств $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ и $(\mathbb{R}, \tau_\partial)$ [23, гл. 3]. Отметим, что семейство всех множеств $G \times \{\xi\}$, $G \in \tau_{\mathbb{R}}$, $\xi \in \mathbb{R}$, является одним из базисов топологического пространства

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}} \otimes \tau_\partial). \quad (14.19)$$

Легко видеть, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$ множество Y_ε^0 есть объединение всех множеств

$$]y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon[\times \{y_2\}, (y_1, y_2) \in Y.$$

Таким образом, Y_ε^0 является множеством, открытым в топологическом пространстве (14.19), т.е.

$$Y_\varepsilon^0 \in \tau_{\mathbb{R}} \otimes \tau_\partial,$$

и содержащим множество Y . Мы установили, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$Y_\varepsilon^0 \in N_{\tau_{\mathbb{R}} \otimes \tau_\partial}^0[Y].$$

Следовательно, при построении асимптотических ограничений на основе (14.16) оказалось возможным в надлежащем топологическом пространстве представить процедуру построения упомянутых (ослабленных) ограничений в виде системы прообразов окрестностей Y . В данном случае таковым является (14.19). Данное топологическое пространство, как легко видеть, метризуемо. В самом деле, наряду с метрикой-модулем, обычным образом введем дискретную метрику

$$\mathbf{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{0; 1\},$$

полагая, что при $u \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{R}$ имеет место $\mathbf{d}(u, v) \triangleq 0$ при $u = v$ и $\mathbf{d}(u, v) \triangleq 1$ — при $u \neq v$. Тогда метрика $\mathbf{r}$ множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, порождающая топологию $\tau_{\mathbb{R}} \otimes \tau_\partial$, может быть определена правилом: если $(u_1, v_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $(u_2, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то

$$\mathbf{r}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \triangleq \sup(\{|u_1 - u_2|; \mathbf{d}(v_1, v_2)\}).$$

Если при этом $\varepsilon \in]0, 1]$, то неравенство

$$\mathbf{r}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) < \varepsilon$$

выполняется тогда и только тогда, когда $|u_1 - u_2| < \varepsilon$ и, кроме того, $v_1 = v_2$. Заметим, наконец, что для таких значений ε , т.е. для $0 < \varepsilon \leq 1$, множество Y_ε^0 является ε -окрестностью множества Y в метрическом пространстве $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbf{r})$: Y_ε^0 есть объединение всех открытых $\mathbf{r}$ -шаров радиуса ε с центрами из множества Y .

Таким образом, используя принцип подмены множества Y ε -окрестностями данного множества, отвечающими двум различным метрикам множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, необходимо, согласно (13.19), получить два варианта множества притяжения. По аналогии с (13.13), (13.14) можно построить новое семейство областей достижимости, отвечающих ослаблению условия (13.7) в соответствии с (14.18). Оказывается, что эти два множества притяжения будут совпадать. К этому выводу, особенно важному для конструкций третьей главы, можно придти на основе построений, подобных теореме 4.1 работы [50], при использовании той конкретизации общей топологической схемы расширения, которая дана в [50, § 5] (см. также построения [44, 57–59, 62, 64]). Это совпадение множеств притяжения можно интерпретировать как асимптотическую нечувствительность нашей задачи о достижимости при ослаблении ограничений в направлении скоростной координаты фазового вектора. К обсуждению этого полезного свойства вернемся в третьей главе. Сейчас отметим только, что оно в соответствующей форме сохраняется и при отсутствии ограничений на энергоресурс типа (13.6). Последнее утверждение нуждается в некотором уточнении, что и будет, в частности, предметом рассмотрения в упомянутой третьей главе настоящей работы.

Заметим, что отмеченное в первом примере свойство неустойчивости задачи определения области достижимости при ослаблении системы условий возникает не только в условиях импульсных ограничений вида (13.6), но и при других видах ограничений. В частности, явления такого рода возникают при геометрических ограничениях на выбор управления, систематическое изучение которых было начато Л. С. Понтрягиным. Более того, конструкции расширения таких задач

управления реализуются в изящной форме в виде скользящих режимов. Теория скользящих режимов в нелинейных управляемых системах получила мощное развитие в работах Дж. Варги, Р. В. Гамкрелидзе, Л. Янга и многих других математиков. Мы ограничимся только рассмотрением иллюстративного примера.

Пусть на отрезке $[0, 1]$, т.е. при $t_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 1$, рассматривается движение системы

$$\dot{x}_1(t) = |x_2(t)|, \quad \dot{x}_2(t) = u(t). \quad (14.20)$$

Фазовое пространство системы (14.20) является, таким образом, плоскостью $\mathbb{R}^2$. Предполагаем, что вектор $x_0 \in \mathbb{R}^2$, определяющий начальное условие $x(0) = x_0$, имеет нулевые координаты. В (14.20) участвует вещественнозначная кусочно-постоянная и непрерывная справа функция $u(\cdot)$. Мы рассматриваем ее как управление. Учитывая особенность данного примера по отношению к задачам с условиями вида (13.6), условимся обозначать управляющую функцию иначе. Полагаем, что $|u(t)| = 1 \quad \forall t \in I$. Напомним, что в нашем конкретном случае $I = [0, 1[$. Итак, введем в рассмотрение множество $\mathcal{U}$ всех кусочно-постоянных и непрерывных справа функций, действующих из «стрелки» I в двоеточие $\{-1; 1\}$. Управление $u(\cdot) = (u(t), 0 \leq t < 1) \in \mathcal{U}$ можно интерпретировать как воздействие на систему двухпозиционного тумблера с положениями -1 и 1 , которые могут меняться по усмотрению исследователя. Кроме того, полагаем, что имеется промежуточное условие: движение $x(\cdot) = (x(t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 1)$ системы (14.20) должно обладать следующим свойством первой компоненты:

$$x_1\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0. \quad (14.21)$$

Итак, используем управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, для которых получающаяся траектория удовлетворяет условию (14.21). Если $U = u(\cdot) \in \mathcal{U}$, то через

$$\varphi_U = (\varphi_U(t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 1)$$

обозначаем траекторию системы (14.20) (с нулевыми начальными условиями). Данная траектория строится очень просто: вторая компонента $\varphi_{U,2}$ вектор-функции φ_U имеет вид

$$\varphi_{U,2}(t) = \int_0^t U(\xi) d\xi \quad \forall t \in I_0 \quad (14.22)$$

(напомним, что $I_0 = [0, 1]$). Первая компонента $\varphi_{U,1} \in \mathbb{R}^{I_0}$ получается интегрированием модуля непрерывной функции $\varphi_{U,2} \in \mathbb{R}^{I_0}$:

$$\varphi_{U,1}(t) = \int_0^t |\varphi_{U,2}(\xi)| d\xi \quad \forall t \in I_0. \quad (14.23)$$

В соответствии с (14.21) имеем в виде

$$\mathcal{U}_\partial \triangleq \left\{ U \in \mathcal{U} \mid \varphi_{U,1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \right\} \quad (14.24)$$

множество допустимых управлений рассматриваемой задачи, а

$$G_\partial \triangleq \{\varphi_{U,1}(1) : U \in \mathcal{U}_\partial\}$$

есть область достижимости (по первой координате) в момент $\vartheta_0 = 1$.

Заметим, что при всяком выборе $U \in \mathcal{U}$ в силу (14.22) имеет место $\varphi_{U,2}(t) \not\equiv 0$ на промежутке $[0, 1/2]$ (особенность данного типа геометрических ограничений). Это приводит к тому, что (см. (14.23))

$$0 < \varphi_{U,1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \forall U \in \mathcal{U}. \quad (14.25)$$

Из (14.24) и (14.25) следует, что $\mathcal{U}_\partial = \emptyset$ и как следствие

$$G_\partial = \emptyset. \quad (14.26)$$

Итак, мы имеем несовместную задачу. С другой стороны, в практическом отношении можно считать эту задачу совместной. В самом деле,

$$\mathcal{U}_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \left\{ U \in \mathcal{U} \mid \varphi_{U,1} \left(\frac{1}{2} \right) < \varepsilon \right\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.27)$$

Свойство (14.27) реализуется следующим образом. Если задано $\varepsilon > 0$, то можно использовать, например, пилообразное (меняющее значения с -1 на 1) управление, соответствующее разбиению отрезка $[0, 1/2]$ в систему промежутков равной длины. На ячейках данного разбиения управление сохраняется постоянным, чередуя от шага к шагу значения -1 и 1 . Если при данном $\varepsilon \in]0, \infty[$ шаг разбиения достаточно мал, то для построенного управления $U_\varepsilon \in \mathcal{U}$ (мы указали правило построения значений $U_\varepsilon(t)$ на $[0, 1/2[$, допуская возможность различных продолжений на промежуток $[1/2, 1[$),

$$0 < \varphi_{U_\varepsilon,1} \left(\frac{1}{2} \right) < \varepsilon$$

и, следовательно, $U_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial^{(\varepsilon)}$. Как следствие имеем, что

$$G_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \{ \varphi_{U,1}(1) : U \in \mathcal{U}_\partial^{(\varepsilon)} \} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.28)$$

Более того, области достижимости в (14.28) нельзя считать какими-либо «малыми» множествами. Заметим, что при фиксированном $\varepsilon \in]0, \infty[$ можно иметь в виду, например, две версии управления $U_\varepsilon \in \mathcal{U}_\partial^{(\varepsilon)}$, определяя в обоих случаях ($U_\varepsilon \mid [0, 1/2[$) как часто меняющее знак и единичное по модулю управление. Ячейки разбиения можно для простоты считать имеющими равную и «малую» длину, что предполагает использование достаточно мелкого разбиения. При таком построении U_ε число $\varphi_{U_\varepsilon,2} \left(\frac{1}{2} \right)$ будет малым по модулю (порядок малости определяется диаметром разбиения промежутка $[0, 1/2[$). Можно обеспечить даже равенство $\varphi_{U_\varepsilon,2} \left(\frac{1}{2} \right) = 0$, если дробить $[0, 1/2[$ в сумму четного числа промежутков равной длины. Что же касается промежутка $[1/2, 1[$, то можно продолжать скольжение, коммутируя значения 1 и -1 на тактах достаточно мелкого разбиения, а можно включить, например, постоянное управление $u(t) \equiv 1$ (на $[1/2, 1[$). В первом случае первая координата окажется в момент $\vartheta_0 = 1$ возле нуля (при малом $\varepsilon \in]0, \infty[$), во втором — мы получим ее значение, близкое к величине

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \xi d\xi = \frac{\xi^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Чтобы представить множество притяжения, определяемое в виде пересечения всех множеств-замыканий $\overline{G_\partial^{(\varepsilon)}} = \text{cl}(G_\partial^{(\varepsilon)}, \tau_{\mathbb{R}})$, $\varepsilon > 0$, достаточно перейти к рассмотрению обобщенной задачи управления, оперируя системой (14.20) в условиях ограничения $|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in I$. Сами управления полагаем в этом случае борелевскими вещественнозначными функциями на I . Иными словами, используем $\mathcal{B}$ -измеримые (см. раздел 13 при $t_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 1$) функции из I в $[-1, 1]$. Мы возвращаемся к условию (14.21) для решений системы (14.20), понимаемых в смысле Каратеодори. Выделяем два управления на промежутке I : функцию U_0 , тождественно равную нулю, и функцию U_1 из I в двоеточие $\{0; 1\}$, определяемую по правилу

$$\left(U_1(t) \triangleq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right) \& \left(U_1(t) \triangleq 1 \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right).$$

Оба управления порождают траектории, удовлетворяющие промежуточному условию (14.21), а их терминальные состояния по первой координате, т.е. 0 и $1/8$, являются точками новой области достижимости G_∂ . Эту область определяем как множество всех первых координат терминальных состояний на обобщенных траекториях, соблюдающих условие (14.21).

Если $\alpha \in [0, 1]$, то можно ввести управление

$$U_1^{(\alpha)} : I \longrightarrow \{0; \alpha\}$$

посредством соглашения $U_1^{(\alpha)}(t) \triangleq 0$ при $t \in [0, 1/2[$, $U_1^{(\alpha)}(t) \triangleq \alpha$ при $t \in [1/2, 1[$ (заметим, что $U_1^{(0)} = U_0$ и $U_1^{(1)} = U_1$). При этом вторая компонента обобщенной траектории, порождаемой управлением $U_1^{(\alpha)}$, есть функция, равная нулю на $[0, 1/2]$ и принимающая значения

$$\alpha \left(t - \frac{1}{2} \right) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Соответственно, первая компонента упомянутой траектории принимает в момент $t = 1$ значение $\alpha/8 \in \mathbb{G}_\partial$. Из этих рассуждений фактически следует равенство

$$\mathbb{G}_\partial = \left[0, \frac{1}{8} \right]. \quad (14.29)$$

В самом деле, для любых борелевских управляющих функций U , действующих из I в $[-1, 1]$ и соблюдающих ограничение (14.21) на порождаемых этими функциями (обобщенных) траекториях, первая компонента терминального состояния соответствующего U -решения заключена между 0 и $1/8$, поскольку модуль второй компоненты при $t \in [1/2, 1]$ не превосходит значения $t - 1/2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t U(\xi) d\xi \right| &\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} U(\xi) d\xi \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^t U(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} U(\xi) d\xi \right| + \int_{\frac{1}{2}}^t |U(\xi)| d\xi = \int_{\frac{1}{2}}^t |U(\xi)| d\xi \leq t - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (14.30)$$

В (14.30) мы учли очевидное следствие (14.21): при выполнении последнего условия, как видно из (14.23), вторая компонента U -решения обязана зануляться на отрезке $[0, 1/2]$ и, в частности, принимать нулевое значение в точке $t = 1/2$; последнее есть $\int_0^{1/2} U(\xi) d\xi$.

Отметим, наконец, что с учетом хорошо известных свойств расширений нелинейных задач управления с использованием скользящих режимов именно множество (14.29) — область достижимости в классе обобщенных управлений — определяет искомое множество притяжения для нашей первоначальной задачи, связанной с ограничением $|U(t)| \equiv 1$. Следовательно, отрезок (14.29) играет роль некой фактической области достижимости.

В заключение раздела рассмотрим один пример неустойчивой задачи о построении областей достижимости в условиях, когда ограничение (13.6) на выбор управления-программы отсутствует. Кроме того, по постановке здесь отсутствует также и геометрическое ограничение вида $u(t) \in P$, где P — конечномерный компакт. Итак, речь пойдет о задаче, неограниченной в естественном смысле. Пусть рассматривается материальная точка, т.е. дана система

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = f(t) \quad (14.31)$$

на единичном промежутке времени $I_0 = [0, 1]$ (в (14.31) приведено дифференциальное уравнение в нормальной форме). Предположим, что $x_1(0) = x_2(0) = 0$, а $f \in B_0(I, \mathcal{I})$ (см. раздел 13, где $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 1$). На выбор f имеются следующие функциональные ограничения: мы предполагаем, что управление f должно допускать представление

$$f = f_1 + f_2 \quad (14.32)$$

(равенство понимается поточечно), где $f_1 \in B_0^+(I, \mathcal{I})$, а $f_2 \in B_0(I, \mathcal{I})$ таково, что

$$\int_0^1 |f_2(t)| dt \leq 1. \quad (14.33)$$

Рассматриваем (14.32), (14.33) как определение множества возможных управлений: до конца настоящего раздела полагаем, что $\mathbf{f}$ есть множество всех функций (14.32), где f_1 и f_2 оговорены выше (см., в частности, (14.33)). Будем считать, что выбор управления $f \in \mathbf{f}$ стеснен следующим (промежуточным) условием: траектория $x(\cdot) = x_f(\cdot) = (x_f(t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 1)$ системы (14.31), порождаемая f , должна иметь первую компоненту $x_1(\cdot) = (x_1(t), 0 \leq t \leq 1)$, для которой

$$x_1\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}. \quad (14.34)$$

С учетом (14.34) мы можем определить множество допустимых управлений $\mathbf{f}_\partial$ в виде

$$\mathbf{f}_\partial \triangleq \left\{ f \in \mathbf{f} \mid \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) f(\xi) d\xi \leq -\frac{1}{2} \right\}. \quad (14.35)$$

Легко видеть, что $\mathbf{f}_\partial = \emptyset$. В самом деле, пусть $u \in \mathbf{f}$ фиксировано. Тогда для $t \in I_0$, $I_0 = [0, 1]$, с учетом формулы Коши имеем

$$x_{u,1}(t) = \int_0^t (t - \xi) u(\xi) d\xi, \quad (14.36)$$

$$x_{u,2}(t) = \int_0^t u(\xi) d\xi. \quad (14.37)$$

Для нас более существенно (14.36), т.к. рассматриваем координату материальной точки, в то время как (14.37) характеризует ее скорость. Используя определение $\mathbf{f}$, подберем

$$v \in B_0^+(I, \mathcal{I}), \quad w \in B_0(I, \mathcal{I})$$

так, что $u = v + w$ и, кроме того,

$$\int_0^1 |w(\xi)| d\xi \leq 1. \quad (14.38)$$

Тогда $x_{u,1}(1/2) = x_{v,1}(1/2) + x_{w,1}(1/2)$, причем (см. (14.36)) $x_{v,1}(1/2) \in [0, \infty[$, следовательно,

$$x_{w,1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq x_{u,1}\left(\frac{1}{2}\right). \quad (14.39)$$

Вместе с тем имеем оценку левой части (14.39), связанную с системой неравенств

$$\begin{aligned} \left| x_{w,1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) |w(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} |w(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |w(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (14.40)$$

На самом же деле из (14.40) имеем неравенство

$$\left| x_{w,1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{1}{2}. \quad (14.41)$$

Допустим противное тогда в силу (14.40)

$$\left| x_{w,1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{2}. \quad (14.42)$$

Из (14.40), (14.42) имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) |w(\xi)| d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} |w(\xi)| d\xi.$$

Как следствие получаем равенство

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \xi |w(\xi)| d\xi = 0. \quad (14.43)$$

Однако $|w| \in B_0^+(I, \mathcal{I})$, т.е. $|w|$ есть неотрицательная кусочно-постоянная и непрерывная справа функция. В итоге, из (14.43) имеем

$$|w(\xi)| = 0 \quad \forall \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right[.$$

Тогда вопреки (14.42) получаем

$$x_{w,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) w(\xi) d\xi = 0.$$

Противоречие доказывает (14.41). Согласно (14.39) и (14.41), получаем

$$-\frac{1}{2} < x_{w,1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq x_{u,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) u(\xi) d\xi,$$

т.е. $u \notin \mathbf{f}_\partial$ (см. (14.35)). Итак, $\mathbf{f}_\partial = \emptyset$ (поскольку выбор $u \in \mathbf{f}$ был произвольным). Пусть теперь (до конца раздела)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\partial^{(\varepsilon)} &\triangleq \left\{ f \in \mathbf{f} \mid \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) f(\xi) d\xi < \varepsilon - \frac{1}{2} \right\} = \\ &= \left\{ f \in \mathbf{f} \mid x_{f,1}\left(\frac{1}{2}\right) < \varepsilon - \frac{1}{2} \right\} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \end{aligned} \quad (14.44)$$

Легко видеть, что каждое из множеств (14.44) непусто. В самом деле, зафиксируем $\varepsilon \in]0, \infty[$. Рассмотрим управления в виде узких отрицательных импульсов, примыкающих справа к точке $t = 0$. Итак, если $\delta \in]0, 1/2]$, то введем сейчас функцию

$$\mathbf{f}_\delta : \left[0, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \quad (14.45)$$

по следующему правилу:

$$\left(\mathbf{f}_\delta(t) \triangleq -\frac{1}{\delta} \quad \forall t \in [0, \delta[\right) \& \left(\mathbf{f}_\delta(t) \triangleq 0 \quad \forall t \in \left[\delta, \frac{1}{2} \right[\right). \quad (14.46)$$

Разумеется, каждая такая функция $\mathbf{f}_\delta$ (14.45), (14.46) может быть склеена, в частности, с неотрицательным ступенчатым управлением, реализуя функцию из $\mathbf{f}$. Итак, если $f \in B_0^+(I, \mathcal{I})$, то используем (при $\delta \in]0, 1/2]$) склеенную функцию $\mathbf{f}_\delta \square f \in \mathbf{f}$:

$$\left((\mathbf{f}_\delta \square f)(t) \triangleq \mathbf{f}_\delta(t) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\right) \& \left((\mathbf{f}_\delta \square f)(t) \triangleq f(t) \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right[\right). \quad (14.47)$$

В частности, в (14.47) можно выбирать f в виде функции-константы. Тогда при $\delta \in]0, 1/2]$ и $f \in B_0^+(I, \mathcal{I})$ получаем для $\varphi_\delta \triangleq \mathbf{f}_\delta \square f \in \mathbf{f}$

$$x_{\varphi_\delta,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\delta \left(\frac{1}{2} - t \right) \varphi_\delta(t) dt = -\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(\frac{1}{2} - t \right) dt \leq -\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \delta = \delta - \frac{1}{2}. \quad (14.48)$$

В силу (14.48) получаем, что при $0 < \delta \leq \inf(\{\varepsilon/2; 1/2\})$ непременно

$$\varphi_\delta \in \mathbf{f}_\delta^{(\varepsilon)}.$$

Теперь ясно, что

$$\mathbf{f}_\delta^{(\varepsilon)} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.49)$$

Мы показали также, что на основе (14.48) можно построить секвенциальное приближенное решение, осуществляющее последовательный выбор элементов из множеств (14.49) при $\varepsilon = \varepsilon_k = k^{-1}$, $k \in \mathcal{N}$.

Рассмотрим вопрос о нахождении множества достижимых скоростей нашей системы (14.31) в момент $t = 1$. Иными словами, будем рассматривать область достижимости по скорости и естественные регуляризации этой области достижимости. Отметим, что

$$\mathbf{G}_{\partial,2} \triangleq \{x_{f,2}(1) : f \in \mathbf{f}_\partial\} = \emptyset \quad (14.50)$$

(до конца раздела область достижимости $\mathbf{G}_{\partial,2}$ понимается только в смысле (14.50)). В то же время

$$\mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varepsilon)} \triangleq \{x_{f,2}(1) : f \in \mathbf{f}_\partial^{(\varepsilon)}\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

Учитывая (14.49), покажем, что

$$\mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varepsilon)} = [-1, \infty[\quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.51)$$

В самом деле, повторим построение по схеме (14.46), реализуя тем самым при $\delta \in]0, 1/2]$ функцию $\mathbf{f}_\delta$ (14.45), (14.46). Эту функцию продолжим нулем на всю «стрелку» I . Продолженную функцию обозначаем через $\mathbf{f}^{(\delta)}$, тогда

$$\mathbf{f}^{(\delta)} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

есть такая функция, что

$$\left(\mathbf{f}^{(\delta)}(t) \triangleq -\frac{1}{\delta} \quad \forall t \in [0, \delta[\right) \& \left(\mathbf{f}^{(\delta)}(t) \triangleq 0 \quad \forall t \in [\delta, 1] \right).$$

Заметим, что $\mathbf{f}^{(\delta)} \in B_0(I, \mathcal{I})$ и при этом

$$\int_0^1 |\mathbf{f}^{(\delta)}(t)| dt = \int_0^\delta |\mathbf{f}^{(\delta)}(t)| dt = 1.$$

Поэтому $\mathbf{f}^{(\delta)} = \mathbf{f}^{(\delta)} + \mathbf{O}_I \in \mathbf{f}$, где $\mathbf{O}_I \in B_0^+(I, \mathcal{I})$ есть функция со свойством $\mathbf{O}_I(t) \equiv 0$. Повторяя рассуждения, используемые в (14.48), получим

$$x_{\mathbf{f}^{(\delta)},1} \left(\frac{1}{2} \right) \leq \delta - \frac{1}{2}. \quad (14.52)$$

Введем функцию, действующую в множестве $]0, \infty[$ по правилу

$$\left(\alpha(\varepsilon) \triangleq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \varepsilon \in \left] 0, \frac{1}{2} \right] \right) \& \left(\alpha(\varepsilon) \triangleq \frac{1}{4} \quad \forall \varepsilon \in \left] \frac{1}{2}, \infty \right[\right).$$

Из (14.52) имеем, что

$$x_{\mathbf{f}(\alpha(\varepsilon)),1} \left(\frac{1}{2} \right) < \varepsilon - \frac{1}{2} \quad \forall \varepsilon \in \left] 0, \frac{1}{2} \right] \quad (14.53)$$

При этом учитываем, что неравенство (14.52) было установлено для случая $0 < \delta \leq 1/2$. Если же $\varepsilon > 1/2$, то

$$x_{\mathbf{f}(\alpha(\varepsilon)),1} \left(\frac{1}{2} \right) \leq -\frac{1}{4} < \varepsilon - \frac{1}{2}. \quad (14.54)$$

Из (14.44), (14.53) и (14.54) вытекает, что

$$\mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))} \in \mathbf{f}_\partial^{(\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.55)$$

Действуя подобно (14.37), замечаем, что

$$x_{\mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))},2}(1) = \int_0^1 \mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))}(t) dt = \int_0^{\alpha(\varepsilon)} \mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))}(t) dt = -\frac{1}{\alpha(\varepsilon)} \alpha(\varepsilon) = -1 \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

Следовательно,

$$-1 \in \mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.56)$$

Пусть теперь $\gamma \in [0, \infty[$. Построим функцию

$$\bar{f}_\gamma : I \longrightarrow [0, \infty[$$

по следующему правилу:

$$\left(\bar{f}_\gamma(t) \triangleq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right) \& \left(\bar{f}_\gamma(t) \triangleq 2\gamma \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right),$$

$\bar{f}_\gamma \in B_0^+(I, \mathcal{I})$. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то управление

$$p(\varepsilon, \gamma) \triangleq \mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))} + \bar{f}_\gamma \in \mathbf{f}$$

порождает траекторию $x_{p(\varepsilon, \gamma)} = x_{p(\varepsilon, \gamma)}(\cdot)$, у которой, в частности,

$$x_{p(\varepsilon, \gamma),1}(t) = x_{\mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))},1}(t) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

С учетом (14.44), (14.55) имеем свойство $p(\varepsilon, \gamma) \in \mathbf{f}_{\partial}^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon > 0$. Это означает, что

$$x_{p(\varepsilon, \gamma),2}(1) = \int_0^1 p(\varepsilon, \gamma)(t) dt \in \mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varepsilon)}. \quad (14.57)$$

Вместе с тем при $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$\int_0^1 p(\varepsilon, \gamma)(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))}(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \bar{f}_\gamma(t) dt = \int_0^{\alpha(\varepsilon)} \mathbf{f}^{(\alpha(\varepsilon))}(t) dt + \gamma = \gamma - 1,$$

тогда (см. (14.57)) $\gamma - 1 \in \mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Поскольку выбор γ был произвольным, установлены вложения

$$[-1, \infty[\subset \mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (14.58)$$

Пусть $\varsigma \in]0, \infty[$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{G}_{\partial,2}^{(\varsigma)}$. Теперь подберем управление $q \in \mathbf{f}_{\partial}^{(\varsigma)}$ такое, что $\mathbf{z} = x_{q,2}(1)$. Данное управление q можно представить в виде $q = q_1 + q_2$, где $q_1 \in B_0^+(I, \mathcal{I})$, а $q_2 \in B_0(I, \mathcal{I})$ таково, что

$$\int_0^1 |q_2(t)| dt \leq 1.$$

По аналогии с (14.37) имеем

$$\mathbf{z} = x_{q,2}(1) = \int_0^1 q_1(t) dt + \int_0^1 q_2(t) dt \geq \int_0^1 q_2(t) dt \geq -\int_0^1 |q_2(t)| dt \geq -1,$$

т.е. $\mathbf{z} \in [-1, \infty[$. Так как выбор $\mathbf{z}$ был произвольным, то установлено вложение

$$\mathbb{G}_{\partial,2}^{(\varsigma)} \subset [-1, \infty[.$$

Поскольку $\varsigma, \varsigma > 0$, выбиралось произвольно, то имеем с учетом (14.58) представление (14.51). Соответственно имеем множество притяжения (по скорости) в виде

$$\text{Att}_2 \triangleq \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{cl}(\mathbf{G}_{\partial, 2}^{(\varepsilon)}, \tau_{\mathbb{R}}) = [-1, \infty[. \quad (14.59)$$

Если сравнить (14.50) и (14.59), то становится понятным значение асимптотической версии задачи о достижимости: мы имеем существенный скачок достигаемого результата. Само множество притяжения Att_2 можно трактовать как весьма интересную для практики версию области достижимости.

15. Конечно-аддитивные меры как обобщенные элементы в конструкциях расширений

Возвратимся к общим определениям раздела 3, связанным с простейшими конструкциями конечно-аддитивной теории меры. Напомним, что в этих построениях E — непустое множество произвольной природы. Рассмотрим при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ двойственность

$$(B(E, \mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L})), \quad (15.1)$$

имея в виду отождествление пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ вещественнозначных конечно-аддитивных мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; и пространства $B^*(E, \mathcal{L})$, являющегося топологическим сопряженным к банахову пространству $B(E, \mathcal{L})$ и реализуемого в виде замыкания линейного многообразия $B_0(E, \mathcal{L})$ всех ступенчатых, в смысле $(E, \mathcal{L})$, вещественнозначных функций на E . Упомянутое замыкание рассматривается в $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$, где $\mathbb{B}(E)$ — множество всех ограниченных вещественнозначных функций на E , а $\|\cdot\|$ есть $\sup$ -норма линейного пространства, соответствующего множеству $\mathbb{B}(E)$. Напомним, что $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ оснащается сильной нормой (3.3). С учетом свойств упомянутой двойственности (15.1) естественным образом определяется локально выпуклый σ -компакт (10.2), отвечающий при условии (10.1) оснащению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$ -слабой топологией. В силу теоремы Алаоглу [13, гл. V] имеем равенство

$$(\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] = \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})} \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}), \quad (15.2)$$

где (здесь и ниже) $\mathbf{B}_*(\mathcal{L})$ — семейство всех сильно ограниченных (т.е. ограниченных в норме (3.3)) подмножеств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Напомним, что в определении изометрического изоморфизма (3.4) использовалась простейшая схема [57, гл. 3] интегрирования по конечно-аддитивной мере ограниченной вариации, определенной на полуалгебре множеств. Дополним упомянутую конструкцию определенного интеграла соответствующим понятием интеграла как функции множеств, принимая соглашение (10.1), т.е. рассматривая фиксированное измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. Прежде всего учтем, что

$$fg \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall f \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall g \in B(E, \mathcal{L}). \quad (15.3)$$

Для справедливости (15.3) достаточно предполагать только условие $\mathcal{L} \in \pi[E]$. С учетом (15.3) при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $f \in B(E, \mathcal{L})$

$$\left(\int_E uf \, d\mu \right)_{u \in B(E, \mathcal{L})} \in B^*(E, \mathcal{L}). \quad (15.4)$$

Используя свойство изометрической изоморфности $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $B^*(E, \mathcal{L})$, устанавливаемой посредством (3.4), полагаем (следуя [64, с. 158]) при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $f \in B(E, \mathcal{L})$, что конечно-аддитивная мера

$$f * \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \quad (15.5)$$

обладает свойством: $\forall u \in B(E, \mathcal{L})$

$$\int_E uf \, d\mu = \int_E u \, d(f * \mu). \quad (15.6)$$

Фактически в (15.5), (15.6) мы используем неопределенный μ -интеграл функции f . Введем для этой цели традиционное условие: если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, $f \in B(E, \mathcal{L})$ и $L \in \mathcal{L}$, то

$$\int_L f d\mu \triangleq \int_E f \chi_L[E] d\mu,$$

где (см. понятие индикатора в разделе 4) имеет место $f_L \triangleq f \chi_L[E] \in B(E, \mathcal{L})$, согласно (15.3), и при этом $f_L(x) = f(x)$ для $x \in L$, $f_L(\tilde{x}) = 0$ для $\tilde{x} \in E \setminus L$. С учетом (15.6) получаем, что для $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, $f \in B(E, \mathcal{L})$ и $L \in \mathcal{L}$

$$(f * \mu)(L) = \int_L f d\mu. \quad (15.7)$$

В (15.7) имеем представление конечно-аддитивной меры (15.5), согласующееся с обычной конструкцией неопределенного интеграла. Отметим ряд очевидных следствий. Так, для $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, $u \in B(E, \mathcal{L})$ и $v \in B(E, \mathcal{L})$

$$u * (v * \mu) = (uv) * \mu = (vu) * \mu = v * (u * \mu).$$

Далее мы часто используем (15.6) для целей погружения обычных управлений — вещественнозначных функций на E — в пространство к.-а. мер ограниченной вариации. Это погружение потребуется в частном случае $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, что связано с содержательной стороной исследуемых задач управления (см. примеры предыдущего раздела). В связи с этим см. [64, § 4.5]. Условимся только о некоторых обозначениях.

Через $B_0^+(E, \mathcal{L})$ и $B^+(E, \mathcal{L})$ обозначаем конусы всех неотрицательных элементов линейных пространств $B_0(E, \mathcal{L})$ и $B(E, \mathcal{L})$ соответственно, а через $B_+^*(E, \mathcal{L})$ — множество всех $f^* \in B^*(E, \mathcal{L})$ таких, что $0 \leq f^*(f) \quad \forall f \in B^+(E, \mathcal{L})$. Ясно, что

$$\left(\int_E f d\mu \right)_{f \in B(E, \mathcal{L})} \in B_+^*(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]. \quad (15.8)$$

Более того, оператор, сопоставляющий к.-а. мере $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ функционал в левой части (15.8), является биекцией $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ на $B_+^*(E, \mathcal{L})$.

Для дальнейшего потребуются и некоторые иные топологии $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, дополняющие топологическое пространство (10.2). Будем рассматривать $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ как подпространство топологического пространства $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \tau)$, где τ — та или иная топология множества

$$\mathbb{R}^{\mathcal{L}} = \{\mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

всех вещественнозначных функций на $\mathcal{L}$. Напомним, что вещественную прямую $\mathbb{R}$ мы оснащаем обычной $|\cdot|$ -топологией $\tau_{\mathbb{R}}$ и дискретной топологией $\tau_{\partial} \triangleq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. На этой основе реализуются тихоновские произведения

$$(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})), \quad (\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})) \quad (15.9)$$

экземпляров топологических пространств $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ и $(\mathbb{R}, \tau_{\partial})$ (соответственно) с индексным множеством $\mathcal{L}$. На самом же деле топологические пространства в (15.9) можно рассматривать как тихоновские степени $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ и $(\mathbb{R}, \tau_{\partial})$ соответственно. Следуя [57, с. 80], [58, с. 44] и [64, с. 166], введем топологии $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, индуцированные соответственно из первого и второго топологических пространств в (15.9). Итак, $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_{\otimes}(\mathcal{L}))$ есть подпространство тихоновской степени $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}))$, $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$ — подпространство тихоновской степени $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial}))$. Ясно, что

$$\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}) \subset \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})$$

и как следствие $\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L})$. Топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$, вообще говоря, несравнимы (см. [57, гл. 4]), причем

$$(\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_*(\mathcal{L})) \& (\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L})). \quad (15.10)$$

Таким образом, топология $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ поточечной сходимости в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ слабее как топологии $\tau_*(\mathcal{L})$, так и топологии $\tau_0(\mathcal{L})$. Наряду с (15.10) потребуется сравнение тех или иных подпространств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$.

В этой связи условимся о следующем обозначении: если τ — топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ (т.е. H есть подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$), то через $\tau|_H$ обозначаем топологию H , индуцированную [23] из $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau)$. Тогда, как легко проверить, $\forall H \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$

$$\tau_*(\mathcal{L})|_H = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_H \subset \tau_0(\mathcal{L})|_H. \quad (15.11)$$

Кроме того, имеем свойство

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]} = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]} \subset \tau_0(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]}. \quad (15.12)$$

В связи с (15.11) и (15.12) см. [57, гл. 4], [58, гл. 3] и [64, гл. 4]. На самом деле в (15.11) и (15.12) отражено важное для последующих конструкций расширения свойство сравнимости относительных топологий. Это свойство имеет место, как видно из (15.12), не только для компактов. Мы еще вернемся к этому вопросу для более систематического его рассмотрения.

В дальнейшем будут использоваться естественные базисы топологического пространства $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau)$, где $\tau = \tau_*(\mathcal{L})$ или τ соответствует одной из топологий, индуцированных из соответствующей тихоновской степени в (15.9). В случае $\tau = \tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ упомянутые базисы определяются стандартно для конструкций на основе топологии поточечной сходимости (см., например, [23, 53]). В (15.9) совсем кратко коснемся вопроса о структуре одного характерного базиса второго топологического пространства.

Если $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ (т.е. μ — вещественнозначная функция на полуалгебре $\mathcal{L}$) и $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$, то

$$N_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu, \mathcal{K}) \triangleq \{\nu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}} \mid \mu(L) = \nu(L) \quad \forall L \in \mathcal{K}\}. \quad (15.13)$$

На основе множеств (15.13) конструируем локальный базис в каждой точке $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, полагая, что $\mathfrak{N}_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu)$ есть, по определению, семейство всех множеств $N_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu, \mathcal{K})$, $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$. Наконец, семейство $\mathfrak{N}^{(\partial)}[\mathcal{L}]$, получаемое объединением всех семейств $\mathfrak{N}_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, есть базис второго топологического пространства в (15.9). Данное топологическое пространство нульмерно [53, с. 529]. Упомянутые представления на основе (15.13) позволяют исчерпывающим образом охарактеризовать базисы топологий

$$\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})|_M = \tau_0(\mathcal{L})|_M, \quad (15.14)$$

где M — подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. При этом [57, с. 81], если $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, то топология (15.14) множества M есть семейство всех множеств $G \in \mathcal{P}(M)$ таких, что $\forall \mu \in G \exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$:

$$N_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu, \mathcal{K}) \cap M \subset G. \quad (15.15)$$

В частности, при $M = \mathbb{A}(\mathcal{L})$ из (15.15) извлекается представление топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ (см. раздел 7).

Для всех последующих построений наиболее существенны топологические пространства

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})), \quad (\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L})). \quad (15.16)$$

Топологическое пространство $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_{\otimes}(\mathcal{L}))$ играет роль связующего в вопросах, касающихся сравнения подпространств топологических пространств (15.16). Для полноты изложения напомним еще один вариант оснащения $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, связанный с введением ограниченной $*$ -слабой топологии (ограниченная $B(E, \mathcal{L})$ -топология $B^*(E, \mathcal{L})$ в терминологии [13, гл. V]). Напомним, что

$$U_c(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid v_{\mu}(E) \leq c\} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \quad \forall c \in [0, \infty[.$$

Мы ввели систему замкнутых шаров пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме последнего. Тогда

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L}) &\triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid U_c(\mathcal{L}) \cap G \in \tau_*(\mathcal{L})|_{U_c(\mathcal{L})} \quad \forall c \in [0, \infty[\} = \\ &= \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid K \cap G \in \tau_*(\mathcal{L})|_K \quad \forall K \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]\} \end{aligned} \quad (15.17)$$

есть ограниченная $*$ -слабая топология, $\tau_*(\mathcal{L}) \subset \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})$. Отметим хорошо известные [13] свойства топологического пространства

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})) : \quad (15.18)$$

1) Топологические пространства (10.2) и (15.18) обладают одним и тем же запасом компактных подмножеств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, т.е.

$$(\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] = (\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

2) Все «одноименные» компактные подпространства топологических пространств (10.2) и (15.18) совпадают, т.е.

$$\tau_*(\mathcal{L})|_K = \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})|_K \quad \forall K \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbf{A}(\mathcal{L})].$$

Последнее свойство обладает аналогом для локально компактных подпространств топологического пространства (10.2). Ограничимся только свойством

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]} = \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]}$$

(см. [58, с. 55]). В целом, конструкция (15.17) является примером компактно-порожденной топологии, а само топологическое пространство (15.18) есть так называемое k -пространство. Пусть

$$\mathfrak{M}[\mathcal{L}] \triangleq \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L}); \tau_{\otimes}(\mathcal{L}); \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\} \quad (15.19)$$

(множество, элементами которого являются топологии $\tau_*(\mathcal{L})$, $\tau_0(\mathcal{L})$, $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$, $\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})$ и только они). С учетом (15.19) определяем мультитопологическое пространство

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \mathfrak{M}[\mathcal{L}]),$$

относительно которого реализуются важные для теории расширений погружения подмножеств $B(E, \mathcal{L})$ в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ посредством операции построения неопределенного интеграла. Напомним этот способ погружения [57, 58]; предварительно, положим:

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu] \triangleq \{\nu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \quad (15.20)$$

$$((\mu(L) = 0) \implies (\nu(L) = 0))\} \quad \forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}].$$

В (15.20) имеем всякий раз выпуклый конус, с помощью которого конструируем обычным образом линейное пространство, порожденное этим конусом

$$\mathbf{A}_{\mu}[\mathcal{L}] \triangleq \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \nu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu]\} = \quad (15.21)$$

$$= \{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \quad ((\mu(L) = 0) \implies (\nu(L) = 0))\} \quad \forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}].$$

Элементы множеств (15.20), (15.21) называем к-а. мерами, абсолютно непрерывными относительно соответствующей к.-а. меры $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Для последующих целей важны лишь свойства, связанные с плотным погружением множеств в функциональном пространстве $B(E, \mathcal{L})$ в соответствующие подмножества $\mathbf{A}_{\mu}[\mathcal{L}]$ посредством операции построения неопределенного интеграла как функции множеств. Напомним соответствующие положения [57, 58, 64]. Прежде всего рассмотрим достаточно простую конструкцию аппроксимирующей направленности, учитывая, что $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$\mathcal{L} \setminus \mathfrak{N}_{\mu} = \{L \in \mathcal{L} \mid \mu(L) \neq 0\} \quad (15.22)$$

(см. раздел 5). Введем множество

$$\mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \triangleq \left\{ \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L}) \mid \left(E = \bigcup_{L \in \mathcal{K}} L \right) \& \right. \quad (15.23)$$

$$\left. \& (\forall A \in \mathcal{K} \quad \forall B \in \mathcal{K} \quad ((A \cap B \neq \emptyset) \implies (A = B))) \right\}.$$

Элементы (15.23) — неупорядоченные конечные разбиения множества E элементами $\mathcal{L}$. Ранее мы использовали (см. раздел 5) упорядоченные разбиения, т.е. занумерованные наборы множеств. Следуя [57, 58, 64], введем на множестве (15.23) бинарное отношение, соответствующее вписанности одного разбиения в другое. Как обычно, для $\alpha \in \mathcal{P}(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \times \mathbf{D}(E, \mathcal{L}))$, $A \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ и $B \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ вместо $(A, B) \in \alpha$ используем выражение $A \alpha B$. Итак, $\prec_{\mathcal{L}} \in \mathcal{P}(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \times \mathbf{D}(E, \mathcal{L}))$ есть, по определению, такое бинарное отношение, что $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{V} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\mathcal{U} \prec_{\mathcal{L}} \mathcal{V}) \iff (\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} : V \subset U).$$

Легко видеть [58, с. 48], что $\prec_{\mathcal{L}}$ есть направление на $\mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, т.е. пара

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}) \quad (15.24)$$

есть непустое направленное множество. Вернемся к (15.22) с тем, чтобы завершить построение требуемого типа направленности в $B_0(E, \mathcal{L})$. Введем сначала вспомогательную функцию множеств. Для $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ полагаем, что

$$\theta_\mu[\nu] : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (15.25)$$

есть, по определению, такая функция, что

$$\begin{aligned} (\theta_\mu[\nu](L) &\triangleq \frac{\nu(L)}{\mu(L)} \quad \forall L \in \mathcal{L} \setminus \mathfrak{N}_\mu) \& \\ &\& (\theta_\mu[\nu](L) \triangleq 0 \quad \forall L \in \mathfrak{N}_\mu). \end{aligned}$$

Используя разбиения из множества (15.23), превращаем функцию множеств (15.25) в ступенчатые функции точки, т.е. в функции на E . Для этого достаточно заметить, что (см. (15.23))

$$\forall \mathcal{H} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) \quad \forall x \in E \quad \exists! H \in \mathcal{H} : x \in H. \quad (15.26)$$

С учетом (15.26) введем следующее определение. Если $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, то

$$\mathbf{n}_\mathcal{K} : E \longrightarrow \mathcal{K}$$

есть, по определению, такое отображение, что

$$x \in \mathbf{n}_\mathcal{K}(x) \quad \forall x \in E.$$

Данное определение корректно в силу (15.26). Теперь полагаем, что $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$\Theta_\mu[\nu; \mathcal{K}] \triangleq \theta_\mu[\nu] \circ \mathbf{n}_\mathcal{K}. \quad (15.27)$$

Обсудим свойства суперпозиции (15.27). В этой связи условимся о следующем естественном условии: если $\mathcal{K} \in \mathbf{Fin}(\mathcal{L})$ и $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^E$, то

$$\sum_{L \in \mathcal{K}} \alpha(L) \triangleq \left(\sum_{L \in \mathcal{K}} \alpha(L)(x) \right)_{x \in E} \in \mathbb{R}^E.$$

В качестве значений функции α могут, в частности, использоваться произведения скаляров на индикаторы подмножеств E . С учетом данного условия легко проверяется очевидное

Предложение 15.1. Если $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, то

$$\Theta_\mu[\nu; \mathcal{K}] = \sum_{L \in \mathcal{K}} \theta_\mu[\nu](L) \chi_L[E]. \quad (15.28)$$

Доказательство. Обозначим через u и v функции в левой и правой частях (15.28) соответственно. Выберем произвольно $x \in E$. С учетом (15.26) $\exists! H \in \mathcal{K} : x \in H$. При этом множество $\mathbf{n}_\mathcal{K}(x) \in \mathcal{K}$ обладает свойством $x \in \mathbf{n}_\mathcal{K}(x)$. Из (15.27) имеем равенство

$$u(x) = \theta_\mu[\nu](\mathbf{n}_\mathcal{K}(x)). \quad (15.29)$$

С другой стороны, $\forall L \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{n}_\mathcal{K}(x)\}$

$$x \notin L.$$

В итоге получаем $\chi_L[E](x) = 0 \quad \forall L \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{n}_\mathcal{K}(x)\}$. Тогда

$$v(x) = \theta_\mu[\nu](\mathbf{n}_\mathcal{K}(x)) \chi_{\mathbf{n}_\mathcal{K}(x)}[E](x) = \theta_\mu[\nu](\mathbf{n}_\mathcal{K}(x)).$$

С учетом (15.29) имеем равенство $u(x) = v(x)$. Поскольку выбор $x \in E$ был произвольным, то равенство (15.28) установлено. $\square$

Отметим одно совсем простое свойство: в условиях, определяющих (15.28), имеет место следующее представление. Именно, при упомянутых условиях о выборе μ , ν и $\mathcal{K}$ при $L \in \mathcal{K}$ имеем утверждение

$$\Theta_\mu[\nu; \mathcal{K}](x) = \theta_\mu[\nu](L) \quad \forall x \in L.$$

Это утверждение означает ступенчатость функции (15.28) относительно измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$. Для полноты изложения приведем одно рассуждение, фиксируя μ , ν и $\mathcal{K}$ в соответствии с

условиями предложения 15.1. Пусть $\mathbf{k} \triangleq |\mathcal{K}|$ — количество элементов непустого конечного семейства $\mathcal{K}$. Тогда можно указать биекцию

$$(\Lambda_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} : \overline{1, \mathbf{k}} \longrightarrow \mathcal{K}$$

множества $\overline{1, \mathbf{k}}$ на $\mathcal{K}$. Имеем $\mathcal{K} = \{\Lambda_i : i \in \overline{1, \mathbf{k}}\}$ и при этом $\forall p \in \overline{1, \mathbf{k}} \quad \forall q \in \overline{1, \mathbf{k}}$

$$(\Lambda_p = \Lambda_q) \implies (p = q). \quad (15.30)$$

Из (15.23) видно, что E совпадает с объединением всех множеств Λ_i , $i \in \overline{1, \mathbf{k}}$. Далее, из (15.23) и (15.30) получаем $\forall p \in \overline{1, \mathbf{k}} \quad \forall q \in \overline{1, \mathbf{k}}$

$$(\Lambda_p \cap \Lambda_q \neq \emptyset) \implies (p = q).$$

Тогда $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} \in \Delta_{\mathbf{k}}(E, \mathcal{L})$ (см. раздел 5). С другой стороны, из (15.28) имеем, по определению неупорядоченной конечной суммы, что

$$\Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}] = \sum_{i=1}^{\mathbf{k}} \theta_{\mu}[\nu](\Lambda_i) \chi_{\Lambda_i}[E] \in B_0(E, \mathcal{L}).$$

Поскольку выбор μ , ν и $\mathcal{K}$ из соответствующих множеств был произвольным, то мы получили, что в (15.27) всякий раз реализуется функция из множества $B_0(E, \mathcal{L})$. Иными словами, $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$\Theta_{\mu}[\nu; \cdot] \triangleq (\Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}])_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})} \in B_0(E, \mathcal{L})^{\mathbf{D}(E, \mathcal{L})}. \quad (15.31)$$

Таким образом, при $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ построена направленность

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \Theta_{\mu}[\nu; \cdot]) \quad (15.32)$$

в $B_0(E, \mathcal{L})$. Будем рассматривать преобразование этой направленности, полагая

$$\Theta_{\mu}[\nu; \cdot] * \mu \triangleq (\Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}] * \mu)_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})}. \quad (15.33)$$

Можно представить (15.33) как образ направленности (15.31), тогда значениями оператора (15.33) являются к.-а. меры из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. На самом деле, $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall f \in B(E, \mathcal{L})$

$$f * \mu \in \mathbb{A}_{\mu}[\mathcal{L}] \quad (15.34)$$

((15.34) — элементарное следствие определения интеграла по к.-а. мере). С учетом результатов [57, 58, 64] имеем в терминах (2.3) важное положение: $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \nu \in \mathbb{A}_{\mu}[\mathcal{L}] \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \Theta_{\mu}[\nu; \cdot] * \mu) \xrightarrow{\tau} \nu \quad (15.35)$$

(см., например, [58, с. 245]). С учетом (15.35) легко устанавливаются все требуемые для наших конструкций расширения свойства плотности. В этой связи полезно также отметить свойства направленности (15.31), связанные с сильной нормой пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$.

Предложение 15.2. Пусть $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Если $\nu \in \mathbb{A}_{\mu}[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$, то для $\eta \triangleq \Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}] * \mu \in \mathbb{A}_{\mu}[\mathcal{L}]$ имеем оценку

$$v_{\eta}(E) = \int_E \left| \Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}] \right| d\mu \leq v_{\nu}(E).$$

Если же $\nu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu]$, то

$$(\Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}] * \mu)(E) = \int_E \Theta_{\mu}[\nu; \mathcal{K}] d\mu = \nu(E) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}).$$

Доказательство получается комбинацией положений, упоминаемых в [58, с. 50, 245]. Напомним, что (см. [57, 58, 64]) $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$\mathbb{A}_{\mu}[\mathcal{L}] = \text{cl}(\{f * \mu : f \in B_0(E, \mathcal{L})\}, \tau) = \text{cl}(\{f * \mu : f \in B(E, \mathcal{L})\}, \tau). \quad (15.36)$$

Заметим, что (15.36) — простое следствие (15.35) и предложения 15.2. Кроме того, из результатов [57, 58, 64] имеем, что $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall b \in [0, \infty[$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$\begin{aligned} U_b(\mathcal{L}) \cap \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B_0(E, \mathcal{L}), \int_E |f| d\mu \leq b \right\}, \tau \right) = \\ &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B(E, \mathcal{L}), \int_E |f| d\mu \leq b \right\}, \tau \right). \end{aligned} \quad (15.37)$$

Свойство (15.37) означает возможность компактификации интегрально ограниченных подмножеств $B(E, \mathcal{L})$; оно непосредственно применимо в конструкциях расширений, обсуждаемых в разделах 13, 14. В самом деле, если $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $b \in [0, \infty[$, то

$$U_b(\mathcal{L}) \cap \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})], \quad (15.38)$$

причем каждое из множеств

$$\left\{ f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\mu \leq b \right\}, \quad \left\{ f \in B(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\mu \leq b \right\} \quad (15.39)$$

допускает вложение в компакт (15.38) в виде всюду плотного подмножества. С другой стороны, множества (15.39) в конкретизации раздела 13 соответствуют множествам обычных управлений, стесненных импульсным ограничением (13.6) (см. определение $\mathbb{F}$).

Напомним, что через $B_0^+(E, \mathcal{L})$ и $B^+(E, \mathcal{L})$ обозначаются множества всех неотрицательных функций из $B_0(E, \mathcal{L})$ и $B(E, \mathcal{L})$ соответственно. Отметим ряд утверждений [57, 58, 64] о свойствах плотности. В частности, $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu] = \text{cl}(\{f * \mu : f \in B^+(E, \mathcal{L})\}, \tau) = \text{cl}(\{f * \mu : f \in B_0^+(E, \mathcal{L})\}, \tau). \quad (15.40)$$

При обосновании (15.40) используется (15.35) и очевидное свойство замкнутости $(\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu]$ в топологиях из множества $\mathfrak{M}[\mathcal{L}]$. С учетом предложения 15.2 можно получить следующее свойство плотности: $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall c \in [0, \infty[$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$\begin{aligned} \{\nu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu] \mid \nu(E) \leq c\} &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}), \int_E f d\mu \leq c \right\}, \tau \right) = \\ &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B^+(E, \mathcal{L}), \int_E f d\mu \leq c \right\}, \tau \right) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Еще одно положение о плотном погружении в компакт связано с вопросом о сохранении ограничения типа равенства: $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall c \in [0, \infty[$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$\begin{aligned} \{\nu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \mu] \mid \nu(E) = c\} &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}), \int_E f d\mu = c \right\}, \tau \right) \\ &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B^+(E, \mathcal{L}), \int_E f d\mu = c \right\}, \tau \right) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \end{aligned} \quad (15.42)$$

Заметим, что (15.41) можно использовать для целей расширения в тех примерах раздела 14, где рассматриваются асимптотические эффекты, связанные с проблемой соблюдения ограничений в классе неотрицательных управлений. Свойства (15.42) допускают полезную конкретизацию в случае $c = 1$, которая связана с обслуживанием аппроксимационными конструкциями расширений в классе конечно-аддитивных вероятностей. Используемые в (15.42) функции f имеют при этом смысл плотностей вероятности. Если $n \in \mathcal{N}$, то полагаем, что

$$\mathbb{R}_+^n \triangleq \{(x_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_j \ \forall j \in \overline{1, n}\}.$$

Предложение 15.3. Пусть $n \in \mathcal{N}$, $(c_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}_+^n$ и $(L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{L}^n$. Тогда $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$\begin{aligned} & \{\nu \in \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \mid v_\nu(L_k) \leq c_k \ \forall k \in \overline{1, n}\} = \\ & = \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B_0(E, \mathcal{L}), \int_{L_k} |f| d\mu \leq c_k \ \forall k \in \overline{1, n} \right\}, \tau \right) = \\ & = \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B(E, \mathcal{L}), \int_{L_k} |f| d\mu \leq c_k \ \forall k \in \overline{1, n} \right\}, \tau \right). \end{aligned}$$

Доказательство предложения 15.3 см. в [58, с. 56–60]. В частности, теперь мы имеем следствие: $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\forall c \in [0, \infty[$, $\forall L \in \mathcal{L}$, $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$\begin{aligned} \{\nu \in \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \mid v_\nu(L) \leq c\} &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B_0(E, \mathcal{L}), \int_L |f| d\mu \leq c \right\}, \tau \right) = \\ &= \text{cl} \left(\left\{ f * \mu : f \in B(E, \mathcal{L}), \int_L |f| d\mu \leq c \right\}, \tau \right). \end{aligned}$$

В связи с предложением 15.3 полезно заметить и следующее практически очевидное предложение.

Предложение 15.4. Пусть $n \in \mathcal{N}$, $(c_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}_+^n$ и $(L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{L}^n$, причем $E = \bigcup_{i=1}^n L_i$. Тогда $\forall \mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$\{\nu \in \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \mid v_\nu(L_k) \leq c_k \ \forall k \in \overline{1, n}\} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (15.43)$$

Доказательство. Фиксируем $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Множество в левой части (15.43) обозначаем через W , $W \subset \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}]$, причем, как видно из предложения 15.3,

$$W \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})}. \quad (15.44)$$

Вместе с тем W — сильно ограниченное подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. В самом деле, пусть $\mathcal{A} \triangleq \mathbf{a}_0[\mathcal{L}]$ — алгебра подмножеств E , порожденная полуалгеброй $\mathcal{L}$. Если $\nu \in (\text{add})[\mathcal{L}]$, то, по определению, $\alpha[\nu] \in (\text{add})[\mathcal{A}]$ есть такая единственная [29, гл. I] к.-а. мера на $\mathcal{A}$, что $\nu = (\alpha[\nu]|\mathcal{L})$. Иначе говоря, $\alpha[\nu]$ — продолжение ν на алгебру, сохраняющее конечную аддитивность. Хорошо известно, что

$$\alpha[\gamma] \in \mathbb{A}(\mathcal{A}) \quad \forall \gamma \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$$

(см., например, [64, с. 149]). При этом имеет место свойство: если $\gamma \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то $v_{\alpha[\gamma]} \in (\text{add})_+[\mathcal{A}]$ и

$$v_\gamma = (v_{\alpha[\gamma]}|\mathcal{L}). \quad (15.45)$$

Рассмотрим $\mathbf{c} \triangleq \sum_{k=1}^n c_k \in [0, \infty[$. Тогда

$$W \subset U_{\mathbf{c}}(\mathcal{L}). \quad (15.46)$$

В самом деле, пусть $\eta \in W$. Тогда, в частности, $\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $v_\eta(L_k) \leq c_k \quad \forall k \in \overline{1, n}$. При этом $\alpha[\eta] \in \mathbb{A}(\mathcal{A})$ и $v_{\alpha[\eta]} \in (\text{add})_+[\mathcal{A}]$. Тогда $\forall A_1 \in \mathcal{A} \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}$

$$v_{\alpha[\eta]}(A_1 \cup A_2) + v_{\alpha[\eta]}(A_1 \cap A_2) = v_{\alpha[\eta]}(A_1) + v_{\alpha[\eta]}(A_2) \quad (15.47)$$

(свойство сильной аддитивности [29, с. 27]). Рассуждением по индукции из (15.47) получаем (в силу неотрицательности $v_{\alpha[\eta]}$): если $r \in \mathcal{N}$ и $(A_i)_{i \in \overline{1, r}} \in \mathcal{A}^r$, то

$$v_{\alpha[\eta]} \left(\bigcup_{i=1}^r A_i \right) \leq \sum_{i=1}^r v_{\alpha[\eta]}(A_i)$$

(можно было бы использовать конечно-аддитивный аналог леммы I.3.3 монографии [29]). Тогда с учетом (15.45) и определения W получаем, что

$$v_\eta(E) = v_{\alpha[\eta]}(E) \leq \sum_{i=1}^n v_{\alpha[\eta]}(L_i) = \sum_{i=1}^n v_\eta(L_i) \leq \mathbf{c},$$

т.е. $\eta \in U_{\mathbf{c}}(\mathcal{L})$. Поскольку выбор η был произвольным, то вложение (15.46) установлено. Итак, в силу (15.44) и (15.46) имеем $W \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \cap \mathcal{F}_{\tau_*}(\mathcal{L})$, т.е.

$$W \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Предложение 15.4 доказано. $\square$

При условии, что множества $L_1, \dots, L_n$ образуют покрытие E , из предложений 15.3, 15.4 имеем утверждение о плотном погружении в компакт следующих множеств

$$\left\{ f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_{L_k} |f| d\mu \leq c_k \quad \forall k \in \overline{1, n} \right\},$$

$$\left\{ f \in B(E, \mathcal{L}) \mid \int_{L_k} |f| d\mu \leq c_k \quad \forall k \in \overline{1, n} \right\}.$$

Итак, мы располагаем свойствами плотного погружения в компакт для широкого класса подмножеств $B(E, \mathcal{L})$. Всякий раз был установлен вид соответствующего компакта. Заметим, что в [64, § 4.8] построена другая схема компактификаций подобного типа. В рамках этой схемы обычные решения, интерпретируемые как «взвеси» точек исходного пространства, погружаются в соответствующий компакт K , $K \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$ посредством другого отображения, более простого в сравнении с оператором

$$f \longmapsto f * \mu : B(E, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}], \quad (15.48)$$

где $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Наконец, в разделах 10, 11 мы использовали еще один вариант компактификации пространства решений E (см. погружение в компакт (10.5)). Различия упомянутых схем с логической точки зрения минимальны. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим общую схему расширения, определяемую аксиоматически, с тем, чтобы охватить целый ряд конкретных версий, включая конструкции настоящего раздела. Более того, эта общая схема в третьей главе будет построена для реализации расширения, универсального в диапазоне ограничений асимптотического характера. В этой связи будет существенным одновременная работа с обоими топологическими пространствами в (15.16) и построение на их основе битопологических пространств для соответствующих моделей «универсального» расширения.

В заключении раздела отметим очевидное свойство погружений на основе (15.48).

Предложение 15.5. Пусть $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\mathbf{f}$ — подмножество $B(E, \mathcal{L})$ и при этом

$$\exists \alpha \in [0, \infty[: \int_E |f| d\mu \leq \alpha \quad \forall f \in \mathbf{f}. \quad (15.49)$$

Тогда $\text{cl}(\{f * \mu : f \in \mathbf{f}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$.

Доказательство. Фиксируем число $\alpha \in [0, \infty[$ такое, что μ -интеграл функции $|f|$ не превосходит α при $f \in \mathbf{f}$,

$$\Phi \triangleq \{f * \mu : f \in \mathbf{f}\}.$$

Тогда [58, с. 56] имеем вложение $\Phi \subset U_\alpha(\mathcal{L})$, что означает свойство

$$\text{cl}(\{f * \mu : f \in \mathbf{f}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \subset U_\alpha(\mathcal{L}). \quad (15.50)$$

Итак, в левой части (15.50) имеем сильно ограниченное и $*$ -слабо замкнутое подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, откуда по теореме Алаоглу получаем доказываемое утверждение. $\square$

Используем данное положение в построениях следующего раздела, связанных с компактификацией пучка управляемых движений линейной системы с разрывными зависимостями в коэффициентах при управлении.

16. ПРОБЛЕМА КОМПАКТИФИКАЦИИ ПУЧКА ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Конструкции данного раздела ориентированы на задачу о построении и исследовании свойств пучка траекторий линейного управляемого дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)b(t) + c(t) \quad (16.1)$$

в n -мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathcal{N}$. В (16.1) вектор-функции $b = b(\cdot)$ и $c = c(\cdot)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в разделе 13. Рассмотрим f в качестве управления, следуя соглашениям раздела 13 и фиксируя моменты времени $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta_0$. Обозначения I и I_0 будем понимать в том же смысле, что и в разделе 13. В отношении зависимости $A(t)$, $t \in I_0$, полагаем, что данная зависимость характеризует параметризованное семейство $(n \times n)$ -матриц, т.е. $(n \times n)$ -матрицант A , определенный на I_0 . Для простоты будем предполагать, что все компоненты A — непрерывные вещественнозначные функции на I_0 . Напомним, что все компоненты вектор-функций b и c измеримы по Борелю, а $f \in \mathbb{R}^I$ — ступенчатая борелевская функция на I . В данном случае нас интересует траектория в целом, а не только ее конечное состояние (как в разделе 13). В связи с этим используем не уравнение (13.2), а более общее уравнение (16.1). Будем, однако, следовать соглашениям раздела 13 в отношении выбора $\mathcal{L} \in \Pi[I]$ как полуалгебры, адаптированной к вектор-функциям b и c . Как и в упомянутом разделе, фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в качестве вектора начального состояния $x(t_0) = x_0$. Меры $\mathbf{1}$ и λ также соответствуют соглашениям раздела 13. Мы придерживаемся содержательного способа изложения.

Далее через $\Phi(\cdot, \cdot)$ обозначаем фундаментальную матрицу решений (матрицант) [8, 24, 32] однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

$\Phi(\cdot, \cdot)$ есть непрерывная матричнозначная $(n \times n)$ функция, определенная на $I_0 \times I_0$. Ниже используем формулу Коши [8], [24], [32], понимая под интегралами вектор-функций соответствующий вектор интегралов их скалярных компонент (см. также соглашения раздела 13). Следуя [24, с. 39], получаем траектории φ_f , порожденные управлениями $f \in B(I, \mathcal{L})$ (мы не ограничиваемся, как в разделе 13, использованием только ступенчатых функций в качестве обычных управлений), в виде

$$\varphi_f(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} f(\xi)\Phi(t, \xi)b(\xi)\lambda(d\xi) + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)c(\xi)\lambda(d\xi) \quad \forall t \in I_0. \quad (16.2)$$

В (16.2) определена n -вектор-функция на I_0 (т.е. функция из I_0 в $\mathbb{R}^n$), соответствующая традиционному для теории линейных дифференциальных уравнений способу представления. Мы используем пространство $(I, \mathcal{L}, \lambda)$, а не $(I, \mathcal{B}, \mathbf{1})$ по соображениям, упомянутым в разделе 13. Однако рассмотрим расширение [50] представления на основе (16.2), используя в качестве управлений к.-а. меры. Обратимся к построениям предыдущего раздела при условии $E = I$. При $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ введем функцию

$$\tilde{\varphi}_\mu : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (16.3)$$

по следующему правилу: при $t \in I_0$

$$\tilde{\varphi}_\mu(t) \triangleq \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)b(\xi)\mu(d\xi) + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)c(\xi)\lambda(d\xi). \quad (16.4)$$

Вектор-функция (16.3), (16.4) отвечает математической идеализации процесса управления, подобной скользящим режимам в нелинейных управляемых системах с геометрическими ограничениями на выбор управлений. Отметим, что из (16.2), (16.4) и свойств неопределенного интеграла (см. раздел 15) вытекает, что

$$\varphi_f = \tilde{\varphi}_{f*\lambda} \quad \forall f \in B(I, \mathcal{L}). \quad (16.5)$$

Мы имеем погружение обычных траекторий в пространство обобщенных (см. (16.3), (16.4)).

Отметим одно общее положение о плотном погружении пучка обычных траекторий в компакт (компактификация пучка). Условимся обозначать через $\mathfrak{R}_0$ множество всех функций из I_0 в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{R}_0 = \{I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n\}.$$

Оснащаем $\mathfrak{R}_0$ топологией $\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ (см. раздел 13). Итак, топологическое пространство

$$(\mathfrak{R}_0, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) \quad (16.6)$$

есть тихоновская степень $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, т.е. тихоновское произведение экземпляров топологического пространства $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ с индексным множеством I_0 .

Лемма 16.1. Пусть $\mathbf{f}$ — интегрально ограниченное подмножество $B(I, \mathcal{L})$: $\mathbf{f} \subset B(I, \mathcal{L})$ и

$$\exists \alpha \in [0, \infty[: \int_I |f| d\lambda \leq \alpha \quad \forall f \in \mathbf{f}. \quad (16.7)$$

Тогда для множества $\mathbf{K} \triangleq \text{cl}(\{f * \lambda : f \in \mathbf{f}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$ имеет место свойство

$$\{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{K}\} = \text{cl}(\{\varphi_f : f \in \mathbf{f}\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0].$$

Прежде, чем доказывать упомянутую лемму о компактификации пучка обычных траекторий при условии (16.7), т.е. лемму о плотном погружении данного пучка в компакт, соответствующий подпространству топологического пространства (16.6), отметим следствие (16.4). Отображение

$$\mu \longmapsto \tilde{\varphi}_\mu : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathfrak{R}_0 \quad (16.8)$$

есть оператор, непрерывный в смысле топологий $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ (см. вторую часть работы [50]). С учетом непрерывности оператора (16.8) получаем утверждение леммы 16.1 как простое следствие известных теорем о компактности (см. [23, 53]), а также предложения 15.5. Однако в целях полноты изложения приведем

Доказательство леммы 16.1. В силу предложения 15.5 множество $\mathbf{K}$ является *-слабо компактным:

$$\mathbf{K} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Поэтому топология $\tau_{\mathbf{K}}^*(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}$ множества $\mathbf{K}$, индуцированная из топологического пространства (10.2) (при $E = I$), превращает $\mathbf{K}$ в компакт

$$(\mathbf{K}, \tau_{\mathbf{K}}^*(\mathcal{L})). \quad (16.9)$$

В силу (16.5) имеем, что пучок $\mathcal{X} \triangleq \{\varphi_f : f \in \mathbf{f}\}$ есть подмножество пучка

$$\tilde{\mathcal{X}} \triangleq \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{R}_0)$$

обобщенных траекторий. Если $\mathbf{f} = \emptyset$, то и $\mathbf{K} = \emptyset$. В результате при $\mathbf{f} = \emptyset$

$$\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} = \text{cl}(\mathcal{X}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) = \emptyset \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0]. \quad (16.10)$$

При условии $\mathbf{f} \neq \emptyset$ из (16.10) следует доказываемое утверждение. Пусть $\mathbf{f} \neq \emptyset$, т.е. $\mathbf{f} \in \mathcal{P}'(B(I, \mathcal{L}))$. Тогда топологическое пространство (16.9) — непустой компакт, а отображение $\tilde{\Phi}$ вида

$$\mu \longmapsto \tilde{\varphi}_\mu : \mathbf{K} \longrightarrow \mathfrak{R}_0 \quad (16.11)$$

есть непрерывный, в смысле топологических пространств (16.9) и (16.6), оператор. Пространство (16.6) является при этом хаусдорфовым, тогда (16.11) — замкнутое [23, 53] отображение, поэтому

$$\tilde{\Phi}^1(\mathbf{K}) = \text{cl}(\tilde{\Phi}^1(\{f * \lambda : f \in \mathbf{f}\}), \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})). \quad (16.12)$$

Согласно (16.5) и (16.11), получаем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^1(\{f * \lambda : f \in \mathbf{f}\}) &= \{\tilde{\Phi}(f * \lambda) : f \in \mathbf{f}\} = \{\tilde{\varphi}_{f * \lambda} : f \in \mathbf{f}\} = \\ &= \{\varphi_f : f \in \mathbf{f}\} = \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Из (16.12), (16.13) вытекает цепочка равенств

$$\begin{aligned} \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{K}\} &= \tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\Phi}^1(\mathbf{K}) = \text{cl}(\mathcal{X}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) = \\ &= \text{cl}(\{\varphi_f : f \in \mathbf{f}\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})). \end{aligned} \quad (16.14)$$

С другой стороны, в силу компактности топологического пространства (16.9) и непрерывности оператора (16.11) имеем

$$\tilde{\Phi}^1(\mathbf{K}) \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0]. \quad (16.15)$$

Из (16.14) и (16.15) получаем утверждение леммы. $\square$

Ниже мы используем определения раздела 15 при условии, что $E = I$.

Теорема 16.1. Пусть $\kappa \in [0, \infty[$. Тогда справедливы следующие три утверждения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B_0(I, \mathcal{L}), \int_I |f| d\lambda \leq \kappa \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ &= \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B(I, \mathcal{L}), \int_I |f| d\lambda \leq \kappa \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ &= \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in U_\kappa(\mathcal{L}) \cap \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]\} \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0], \\ 2) \quad & \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B_0^+(I, \mathcal{L}), \int_I f d\lambda \leq \kappa \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ &= \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B^+(I, \mathcal{L}), \int_I f d\lambda \leq \kappa \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ &= \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \lambda], \mu(I) \leq \kappa\} \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0], \\ 3) \quad & \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B_0^+(I, \mathcal{L}), \int_I f d\lambda = \kappa \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ &= \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B^+(I, \mathcal{L}), \int_I f d\lambda = \kappa \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ &= \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \lambda], \mu(I) = \kappa\} \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0]. \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношениями (15.37), (15.38), (15.41), (15.42) в условиях, когда в этих утверждениях $E = I$ и $\mu = \lambda$. Кроме того, имеем для каждого из множеств

$$\begin{aligned} U^{(1)} &\triangleq \left\{ f \in B_0(I, \mathcal{L}) \mid \int_I |f| d\lambda \leq \kappa \right\}, \\ U^{(2)} &\triangleq \left\{ f \in B(I, \mathcal{L}) \mid \int_I |f| d\lambda \leq \kappa \right\}, \\ V^{(1)} &\triangleq \left\{ f \in B_0^+(I, \mathcal{L}) \mid \int_I f d\lambda \leq \kappa \right\}, \\ V^{(2)} &\triangleq \left\{ f \in B^+(I, \mathcal{L}) \mid \int_I f d\lambda \leq \kappa \right\}, \\ W^{(1)} &\triangleq \left\{ f \in B_0^+(I, \mathcal{L}) \mid \int_I f d\lambda = \kappa \right\}, \end{aligned}$$

$$W^{(2)} \triangleq \left\{ f \in B^+(I, \mathcal{L}) \mid \int_I f d\lambda = \kappa \right\}$$

справедливость (16.7) в условиях, когда

$$(\mathbf{f} = U^{(1)}) \vee (\mathbf{f} = U^{(2)}) \vee (\mathbf{f} = V^{(1)}) \vee (\mathbf{f} = V^{(2)}) \vee (\mathbf{f} = W^{(1)}) \vee (\mathbf{f} = W^{(2)}).$$

Как следствие получаем серию конкретизаций утверждения леммы 16.1 для следующих версий множества $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \lambda : f \in U^{(1)}\}, \tau_*(\mathcal{L})), \\ \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \lambda : f \in U^{(2)}\}, \tau_*(\mathcal{L})), \\ \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \lambda : f \in V^{(1)}\}, \tau_*(\mathcal{L})), \\ \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \lambda : f \in V^{(2)}\}, \tau_*(\mathcal{L})), \\ \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \lambda : f \in W^{(1)}\}, \tau_*(\mathcal{L})), \\ \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \lambda : f \in W^{(2)}\}, \tau_*(\mathcal{L})). \end{aligned}$$

Для двух первых конкретизаций множества $\mathbf{K}$ используем (15.37), (15.38), получая одну и ту же реализацию

$$\mathbf{K} = U_\kappa(\mathcal{L}) \cap \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}].$$

С учетом леммы 16.1 получаем свойство 1) в формулировке теоремы. Для третьей и четвертой конкретизаций множества $\mathbf{K}$ (связанных с $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$) используем вариант (15.41), что дает представление

$$\mathbf{K} = \{\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \lambda] \mid \mu(I) \leq \kappa\}.$$

Применяя в этом случае лемму 16.1, получаем свойство 2). Наконец, для двух последних конкретизаций $\mathbf{K}$, связанных с множествами $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, применяем (15.42), получая единое (для двух данных версий) представление

$$\mathbf{K} = \{\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \lambda] \mid \mu(I) = \kappa\}.$$

Из леммы 16.1 в последнем случае получаем свойство 3), чем и завершается доказательство. $\square$

Теорема 16.2. Пусть $k \in \mathcal{N}$, $(c_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \mathbb{R}_+^k$ и $(L_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \mathcal{L}^k$. Кроме того, пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^k L_i. \quad (16.16)$$

Тогда имеют место свойства

$$\begin{aligned} & \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B_0(I, \mathcal{L}), \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ & = \text{cl} \left(\left\{ \varphi_f : f \in B(I, \mathcal{L}), \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \right) = \\ & = \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}], v_\mu(L_i) \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k}\} \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{A}_0]. \end{aligned}$$

Доказательство. Напомним, что условие (16.16) обеспечивает справедливость предложения 15.4 при $E = I$ и $\mu = \lambda$. Будем использовать этот вариант, учитывая, конечно, соответствующую версию предложения 15.3:

$$\begin{aligned} & \{\mu \in \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}] \mid v_\mu(L_i) \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k}\} = \\ & = \text{cl} \left(\left\{ f * \lambda : f \in B_0(I, \mathcal{L}), \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \right\}, \tau_*(\mathcal{L}) \right) = \\ & = \text{cl} \left(\left\{ f * \lambda : f \in B(I, \mathcal{L}), \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \right\}, \tau_*(\mathcal{L}) \right) \in \end{aligned} \quad (16.17)$$

$$\in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Через $\mathbf{K}$ обозначим множество (16.17). Оно сильно ограничено, следовательно для некоторого $\alpha \in [0, \infty[$ имеем вложение

$$\mathbf{K} \subset U_\alpha(\mathcal{L}). \quad (16.18)$$

Из (16.17), (16.18) вытекает, что для множества

$$V \triangleq \left\{ f \in B(I, \mathcal{L}) \mid \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \right\} \quad (16.19)$$

имеет место $\tilde{V} \triangleq \{f * \lambda : f \in V\} \subset \mathbf{K}$ и как следствие $\tilde{V} \subset U_\alpha(\mathcal{L})$. Последнее, однако, означает [58, с. 56], что $\forall f \in V$

$$\int_I |f| d\lambda = v_{f*\lambda}(I) \leq \alpha.$$

Мы получили, что множество V интегрально ограничено в смысле (16.7), полагая только $\mathbf{f} = V$. С другой стороны, множество

$$W \triangleq \left\{ f \in B_0(I, \mathcal{L}) \mid \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k} \right\} \quad (16.20)$$

таково, что $W \subset V$, т.е., $W \in \mathcal{P}(B(I, \mathcal{L}))$ также является интегрально ограниченным. Из (16.17) имеем цепочку равенств

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \lambda : f \in V\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\{f * \lambda : f \in W\}, \tau_*(\mathcal{L})).$$

Поэтому из леммы 16.1 имеем

$$\begin{aligned} \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{K}\} &= \text{cl}(\{\varphi_f : f \in V\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) = \\ &= \text{cl}(\{\varphi_f : f \in W\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) \in (\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\text{-comp})[\mathfrak{R}_0]. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Из (16.17) следует, в частности, что

$$\{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{K}\} = \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}], \quad v_\mu(L_i) \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k}\}. \quad (16.22)$$

Далее, из (16.19) получаем

$$\begin{aligned} &\text{cl}(\{\varphi_f : f \in V\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) = \\ &= \text{cl}\left(\left\{\varphi_f : f \in B(I, \mathcal{L}), \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k}\right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\right). \end{aligned} \quad (16.23)$$

Наконец, из (16.20) вытекает (по аналогии с (16.23)), что

$$\begin{aligned} &\text{cl}(\{\varphi_f : f \in W\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})) = \\ &= \text{cl}\left(\left\{\varphi_f : f \in B_0(I, \mathcal{L}), \int_{L_i} |f| d\lambda \leq c_i \quad \forall i \in \overline{1, k}\right\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})\right). \end{aligned} \quad (16.24)$$

Из (16.21)–(16.24) следует утверждение теоремы. $\square$

В теоремах 16.1, 16.2 установлены конкретные версии компактификации пучка обычных траекторий для типичных случаев ограничений ресурсного характера (см. примеры в разделе 14). В связи с утверждением 1) теоремы 16.1 отметим работы [37, 51]. Прочие положения теорем 16.1, 16.2 ранее, по-видимому, не рассматривались. Упомянутые теоремы дают одно из полезных применений конструкций раздела 15. В связи с теоремой 16.2 отметим второй пример раздела 14.

17. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ

В настоящем разделе исследуется асимптотический аналог задачи определения образа заданного подмножества области определения оператора. По сути дела, в общем введении приводится содержательное описание этой задачи, если не учитывать некоторые несущественные детали. Как и в первой главе, фиксируем множество E (см. раздел 1), $E \neq \emptyset$, а также топологическое пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$. Наконец, фиксируем $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. В содержательной части будем следовать разделу 1. Используем непустое семейство $\mathcal{S}$ подмножеств E в качестве ограничений асимптотического характера. Ориентируемся на конструкцию, связанную с множеством притяжения

$$(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}]. \quad (17.1)$$

Предположим, что $\mathcal{S} \in \beta[E]$. Это позволяет использовать (2.6), (2.8) для целей представления множества притяжения в виде некоторого предельного множества. Случай, когда последнее условие на $\mathcal{S}$ не выполняется, легко сводится к построениям посредством замены самого семейства $\mathcal{S}$ семейством $\mathcal{S}_f \in \beta[E]$ всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{S}$, т.е. семейством всех пересечений множеств из семейств $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{S})$. При этом множество (17.1) совпадает с $(\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S}_f | \mathbf{h}]$.

Итак, мы следуем предположению, гарантирующему справедливость равенства типа (2.8). В этих условиях рассматриваются представления основного в данном разделе множества притяжения (17.1) в терминах тех или иных вспомогательных множеств притяжения. Последние конструируем искусственно в некоторых специальным образом подобранных топологических пространствах, точки которых интерпретируем как обобщенные элементы. В качестве примера такого построения отметим схему расширения из раздела 11, где была отмечена и аналогия с задачей о построении области достижимости. Следуем конструкции [47]: будем рассматривать одну весьма традиционную схему расширения, ориентируясь на исследование множества притяжения (17.1). В рамках этой схемы предлагается построить некоторое вспомогательное пространство обобщенных элементов, в терминах которого так или иначе удастся представить множество притяжения (17.1) (в разделе 11 обобщенные элементы определялись в виде конечно-аддитивных $(0, 1)$ -мер).

Фиксируем (наряду с множеством E) топологическое пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$, $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$, а также $\mathcal{S} \in \beta[E]$. Для множества (17.1), согласно (2.6) и (2.8), имеем

$$(\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}] = (\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S} | \mathbf{h}] \in \mathcal{F}_\vartheta. \quad (17.2)$$

Для определения и исследования множества притяжения (17.2) будем привлекать модель, включающую топологическое пространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, $\mathbf{K} \neq \emptyset$, оператор $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^E$ и функцию $\omega \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$. Последнюю будем считать непрерывной, т.е. предполагать, что

$$\omega \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta). \quad (17.3)$$

До конца настоящего раздела предположим, что

$$\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}. \quad (17.4)$$

Кортеж $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$, для которого пара $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ есть топологическое пространство, $\mathbf{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^E$ и выполнены условия (17.3), (17.4). Назовем простой моделью расширения, при этом $\mathbf{K}$ играет роль пространства обобщенных элементов. В этом пространстве будем конструировать аналог множества притяжения (17.2), т.е. вспомогательное множество притяжения. Мы просто дублируем определение основного (искомого) множества притяжения, имея в виду исследование свойств последнего в терминах вспомогательного множества притяжения, а не построение (17.2) каким-либо эффективным способом.

Предложение 17.1. Если $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения, то

$$\omega^1((\mathbf{t}\text{-LIM})[\mathcal{S} | \mathbf{m}]) \subset (\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S} | \mathbf{h}].$$

Доказательство является очевидным следствием известного свойства непрерывных операторов (см., например, [1, 7, 23, 53]): непрерывный образ замыкания подмножества области определения содержится в замыкании образа этого подмножества.

Следствие 17.1. Пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения. Тогда

$$((\mathbf{t}\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{m}] \neq \emptyset) \implies ((\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{h}] \neq \emptyset).$$

Доказательство очевидно. В следствии 17.1 указано достаточное условие существования асимптотически достижимых элементов в топологическом пространстве $(\mathbf{H}, \vartheta)$.

Теорема 17.1. Пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения, причем $\omega \in C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta)$. Тогда

$$(\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{h}] = (\text{AS})[E; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}] = \omega^1((\mathbf{t}\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{m}]). \quad (17.5)$$

Доказательство. Согласно выбору ω (см. раздел 2),

$$\omega \in C_{\text{cl}}(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta). \quad (17.6)$$

Из (17.6) имеем, в частности, свойство непрерывности ω , т.е. $\omega \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta)$. Кроме того, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$

$$\omega^1(\text{cl}(A, \mathbf{t})) = \text{cl}(\omega^1(A), \vartheta). \quad (17.7)$$

Наконец, по определению почти совершенного отображения (см. [53]),

$$\omega^{-1}(\{z\}) \in (\mathbf{t}\text{-comp})[\mathbf{K}] \quad \forall z \in \mathbf{H}. \quad (17.8)$$

Выберем произвольно $w \in (\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{h}]$. Тогда в силу (2.6) получаем, что $w \in \mathbf{H}$ обладает свойством

$$w \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(U), \vartheta) \quad \forall U \in \mathcal{S}. \quad (17.9)$$

Согласно аксиомам простой модели расширения (см. (17.4)),

$$\mathbf{h}^1(U) = \omega^1(\mathbf{m}^1(U)) \quad \forall U \in \mathcal{S}.$$

С учетом (17.7) и (17.9) при $U \in \mathcal{S}$ получаем, что

$$w \in \omega^1(\text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \mathbf{t}))$$

и как следствие имеет место

$$\omega^{-1}(\{w\}) \cap \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \mathbf{t}) \neq \emptyset. \quad (17.10)$$

Поскольку $\mathcal{S} \neq \emptyset$, то из (17.10) имеем неравенство

$$\omega^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset.$$

В силу (17.8)

$$\omega^{-1}(\{w\}) \in (\mathbf{t}\text{-comp})[\mathbf{K}]. \quad (17.11)$$

Введем в рассмотрение топологию $\mathbf{t}_w$ множества $\omega^{-1}(\{w\})$, индуцированную [23] из топологического пространства $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$. Тогда в силу (17.11)

$$(\omega^{-1}(\{w\}), \mathbf{t}_w) \quad (17.12)$$

есть компактное подпространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$. С учетом (17.10) и представления замыкания в топологическом пространстве (17.12) имеем непустое семейство

$$\mathcal{Q} \triangleq \{\omega^{-1}(\{w\}) \cap \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \mathbf{t}) : U \in \mathcal{S}\},$$

которое состоит только из непустых замкнутых в топологическом пространстве (17.12) подмножеств $\omega^{-1}(\{w\})$. Более того, оно центрировано:

$$\mathcal{Q} \in \mathbb{Z}[\mathcal{F}_{\mathbf{t}_w}]. \quad (17.13)$$

В самом деле, поскольку $\mathcal{S} \in \beta[E]$, то (см. раздел 2) рассуждением по индукции легко проверяется, что

$$\forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{S}) \exists S \in \mathcal{S} : S \subset \bigcap_{U \in \mathcal{K}} U. \quad (17.14)$$

С учетом монотонности операций замыкания и взятия образа из (17.14) имеем свойство

$$\forall \mathcal{R} \in \text{Fin}(\mathcal{Q}) \exists Q \in \mathcal{Q} : Q \subset \bigcap_{V \in \mathcal{R}} V. \quad (17.15)$$

Вновь используя (17.10), из (17.15) извлекаем (17.13). С учетом компактности топологического пространства (17.12) получаем, что

$$\bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q \neq \emptyset. \quad (17.16)$$

Из (17.16) и определения семейства $\mathcal{Q}$ вытекает, что

$$\left(\bigcap_{U \in \mathcal{S}} \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \mathbf{t}) \right) \cap \omega^{-1}(\{w\}) = (\mathbf{t}\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{m}] \cap \omega^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset,$$

т.е. $w \in \omega^{-1}((\mathbf{t}\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{m}])$. Поскольку выбор w был произвольным, установлено вложение

$$(\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{h}] \subset \omega^{-1}((\mathbf{t}\text{-LIM})[\mathcal{S} \mid \mathbf{m}]).$$

С учетом (17.2) и предложения 17.1 получаем утверждение теоремы. $\square$

Следствие 17.2. Пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения, причем топологическое пространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ компактно, а топологическое пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$ хаусдорфово. Тогда справедливо (17.5).

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях следствия имеет место свойство $\omega \in C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta)$ (см. (17.3)).

Отметим, что случай, охватываемый следствием, является компактифицируемым в смысле раздела 4 (см. теорему 4.1). Вместе с тем, теорема 17.1 указывает существенно более общие условия, гарантирующие справедливость (17.5) (см. [58, § 4.5]). Из доказательства теоремы видно, что в основе этого более общего положения (17.5) лежит принцип локализации компактификаций (см. (17.11)).

В этой связи коснемся вопросов применения аналогов свойства компактности. Кратко напомним положения [47] (см. также [64, § 3.3]). Наиболее интересным представляется свойство счетной компактности: всякое компактное пространство счетно-компактно; обратное, вообще говоря, неверно [53]. В этой связи условимся о традиционном (в общей топологии) соглашении: если $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ — топологическое пространство и $M \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$, то называем множество M счетно-компактным в топологическом пространстве $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, если топология $\mathbf{t}_M$ множества M , индуцированная из $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, превращает M в счетно-компактное подпространство $(M, \mathbf{t}_M)$ пространства $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$.

Используем понятие T_1 -пространства [53, § 1.5] (каждое хаусдорфово топологическое пространство является T_1 -пространством; обратное, вообще говоря, неверно).

Наконец, введем множество $\beta_{\mathcal{N}}[E]$ всех семейств $\mathcal{H} \in \beta[E]$ таких, что

$$\exists (H_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathcal{H}^{\mathcal{N}} \quad \forall H \in \mathcal{H} \quad \exists k \in \mathcal{N} : H_k \subset H.$$

Семейства из множества $\beta_{\mathcal{N}}[E]$ имеют счетную базу. Обоснование двух последующих положений см. в [64, § 3.3] и [47].

Предложение 17.2. Пусть $\mathcal{S} \in \beta_{\mathcal{N}}[E]$, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ есть T_1 -пространство. Кроме того, пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения, причем топологическое пространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ счетно-компактно и $\omega \in C_{\text{cl}}(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta)$. Тогда справедлива цепочка равенств (17.5).

Теорема 17.2. Пусть $\mathcal{S} \in \beta_{\mathcal{N}}[E]$, $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения, где ω — квазисовершенное отображение:

- 1) $\omega \in C_{\text{cl}}(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta)$;
- 2) при всяком выборе $z \in \mathbf{H}$ множество $\omega^{-1}(\{z\})$ счетно-компактно в топологическом пространстве $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$.

Тогда справедлива цепочка равенств (17.5).

Отметим одно простое свойство, касающееся секвенциально компактных [53] топологических пространств: если (M, τ) есть секвенциально компактное топологическое пространство, то (M, τ) счетно-компактно. Это свойство (см. [64, с. 28]) легко можно извлечь из общих построений [53, § 3.10]. В этой связи отметим, что в предложении 17.2 можно было бы говорить о случае секвенциально компактного топологического пространства $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, а в формулировке теоремы 17.2 в условии

2), накладываемом на функцию ω , можно было бы предполагать секвенциальную компактность множеств $\omega^{-1}(\{z\})$, $z \in \mathbf{H}$. Но все же роль конструкций, использующих секвенциальную компактность (более понятную для специалистов в области технических приложений), в достаточной степени ограничена. Здесь мы не имеем в виду случаи, в которых секвенциальная компактность и компактность отождествимы (см., например, [64, с. 72]).

Отметим, что в предыдущих разделах мы уже сталкивались с положениями, о которых говорилось в связи с (17.5). В частности, можно отметить конструкцию расширения из раздела 11. Положения раздела 16 о компактификации пучков траекторий управляемой линейной системы связаны со следствием 17.2. Однако основные применения конструкций, использующих простую модель расширения, касаются построений третьей главы работы, ориентированных на проблему определения достаточно универсальных множеств притяжения.

ГЛАВА 3

КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЙ, УНИВЕРСАЛЬНЫХ В ДИАПАЗОНЕ ОГРАНИЧЕНИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

18. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возвратимся к проблеме, которая была намечена в общем введении. Сформулируем ее в общематематических терминах, хотя можно было бы обратиться к конкретным постановкам, связанным с построением областей достижимости в задачах управления, и к примерам из раздела 14.

Пусть $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ — три непустых множества,

$$s : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{X}, \quad h : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{H}. \quad (18.1)$$

Множество $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ определяет ограничение $s(f) \in \mathbf{Y}$ на выбор $f \in \mathbf{F}$. Это ограничение назовем (для краткости) $\mathbf{Y}$ -ограничением; $s^{-1}(\mathbf{Y})$ — множество допустимых элементов в задаче о достижимости на значениях оператора h (18.1), а множество

$$h^1(s^{-1}(\mathbf{Y})) \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \quad (18.2)$$

назовем достижимым множеством невозмущенной задачи. Его элементами являются те и только те значения $z \in \mathbf{H}$, для которых удастся подобрать обычное решение $f \in \mathbf{F}$, соблюдающее $\mathbf{Y}$ -ограничение и такое, что $h(f) = z$. Множество (18.2) — аналог областей достижимости из разделов 13, 14. По многим причинам в конкретных постановках приходится рассматривать множества $s^{-1}(\tilde{\mathbf{Y}})$ и $h^1(s^{-1}(\tilde{\mathbf{Y}}))$, где $\tilde{\mathbf{Y}}$ — подмножество $\mathbf{X}$, близкое в некотором смысле к множеству $\mathbf{Y}$. Ограничимся рассмотрением случаев, когда $\mathbf{Y} \subset \tilde{\mathbf{Y}}$, что соответствует ослаблению $\mathbf{Y}$ -ограничения. В разделе 13 в качестве $\tilde{\mathbf{Y}}$ использовали ε -окрестности конечномерного компакта $\mathbf{Y}$, играющего в задаче об исследовании свойств области достижимости системы (13.2) роль нашего множества $\mathbf{Y}$. Однако и в этом случае трудно сделать какой-либо конкретный выбор множества $\tilde{\mathbf{Y}}$. Тогда обращаемся к асимптотической версии задачи о достижимости, в рамках которой вместо одного конкретного множества $\tilde{\mathbf{Y}}$ используется непустое семейство $\mathcal{Y}$ подмножеств $\mathbf{X}$, стягивающееся определенным образом к $\mathbf{Y}$. При этом $\mathbf{H}$ оснащено топологией, что позволяет определить предел семейства множеств $h^1(s^{-1}(\tilde{\mathbf{Y}}))$, $\tilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{Y}$. Мы приходим к модели множества притяжения, реализуемой в (2.8), (2.9).

Итак, как и в разделе 1, полагаем, что множество $\mathbf{H}$ оснащено топологией ϑ . Назовем топологическое пространство

$$(\mathbf{H}, \vartheta) \quad (18.3)$$

целевым, или пространством оценок. Обычное достижимое множество $h^1(s^{-1}(\mathbf{Y}))$ заменяем асимптотическим аналогом в виде множества притяжения: вводим $\mathcal{Y} \in \beta[\mathbf{X}]$ и рассматриваем множество

$$\begin{aligned} (\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}] \mid h] &= (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{H}; \vartheta; s^{-1}[\mathcal{Y}]; h] = \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{Y}} \text{cl}(h^1(s^{-1}(U)), \vartheta) \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \end{aligned} \quad (18.4)$$

в качестве упомянутого множества притяжения в топологическом пространстве (18.3). Данное множество зависит от $\mathcal{Y}$ (некоторые соображения по выбору $\mathcal{Y}$ обсуждались в общем введении). Семейство $\mathcal{Y}$, в отличие от исходного множества $\mathbf{Y}$, заданного по условиям задачи, выбирается исследователем. Желательно, чтобы множество притяжения (18.4) в тех или иных для данной задачи пределах, определяющих конкретный выбор $\mathcal{Y}$, оставалось неизменным.

Во введении были указаны требования 1), 2) на выбор семейства $\mathcal{Y}$. Для случая $\mathbf{Y} \neq \emptyset$ эти требования сводятся к тому, что: 1) $\mathcal{Y} \in \beta_0[\mathbf{X}]$, 2) $\mathbf{Y}$ совпадает с пересечением всех множеств из $\mathcal{Y}$. При двух упомянутых условиях уже в простейших примерах могут получаться существенно различные варианты множеств притяжения (18.4).

Пример. Пусть $\mathbf{f} = \mathbf{X} = \mathbf{H} = \mathbb{R}$ (вещественная прямая), $\vartheta = \tau_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{h}$ в (18.1) совпадают, каждая с тождественным отображением из множества $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\mathbf{s}(f) = \mathbf{h}(f) = f$ при $f \in \mathbb{R}$. Пусть, наконец, $\mathbf{Y} = \{0\}$ (синглетон, соответствующий нулю). Рассмотрим две версии $\mathcal{Y} \in \beta_0[\mathbf{X}]$. Пусть $\mathbb{R}_0 \triangleq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

$$\mathcal{Y}' \triangleq \{\mathbb{R} \setminus K : K \in \text{Fin}(\mathbb{R}_0)\},$$

$\mathcal{Y}' \in \beta_0[\mathbf{X}]$, где $\mathbf{X} = \mathbb{R}$. Требования 1), 2) для $\mathcal{Y}'$ выполнены. При этом

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(U)), \vartheta) = \text{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \quad \forall U \in \mathcal{Y}'.$$

Как следствие $(\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}'] \mid \mathbf{h}] = \mathbb{R}$; здесь мы имеем предельно «широкое» множество притяжения вида (18.4).

Кроме того, $\mathcal{Y}''$ пусть, — семейство всех интервалов $] - \varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$. Семейство $\mathcal{Y}''$ также удовлетворяет условиям 1), 2). Тогда при $\varepsilon \in]0, \infty[$ имеем

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon[)), \vartheta) = \text{cl}(] - \varepsilon, \varepsilon[, \tau_{\mathbb{R}}) =] - \varepsilon, \varepsilon[.$$

В итоге, $(\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}''] \mid \mathbf{h}] = \{0\}$. Получили предельно «узкое» множество притяжения (18.4) для исходной задачи.

Итак, вышеупомянутые условия 1), 2) недостаточны для целей универсализации множества притяжения. Приходится привлекать те или иные дополнительные предположения о возможных версиях ослабления $\mathbf{Y}$ -ограничения.

Заметим, что само семейство $\mathcal{Y}$ часто определяется в виде семейства окрестностей множества $\mathbf{Y}$ при оснащении множества $\mathbf{X}$ той или иной топологией τ . С учетом вышеупомянутого обстоятельства, связанного с проблемой универсальности множеств притяжения в тех или иных пределах, будем рассматривать различные оснащения множества $\mathbf{X}$, причем эти оснащения сравнимы, что будет отражаться в определенной степени и на соотношении различных версий семейства $\mathcal{Y}$. Более того, в пределах того или иного оснащения допускаем возможность выбора в качестве $\mathcal{Y}$ не всего семейства окрестностей $\mathbf{Y}$, а только некоторой части этого семейства.

Такой взгляд на проблему ослабления $\mathbf{Y}$ -ограничения предполагает и определенную редукцию подхода к построению и использованию пространства обобщенных элементов в сторону универсальности, возникающей при этом обобщенной задачи. В этих вопросах следуем [62], [50]. Конструкцию, определяющую упомянутую обобщенную задачу, назовем моделью, в то время как параметры, определяющие диапазон ограничений асимптотического характера, к атрибутам самой задачи (в ее асимптотической версии). Однако необходимость обеспечения взаимосвязей задачи и модели для осуществления универсальности множеств притяжения (18.4) в тех или иных пределах приводит фактически к рассмотрению единого комплекса «задача-модель», включая согласование условий применимости как в плане выбора класса содержательных задач, так и в плане подбора необходимых теоретических конструкций, связанных с пространством обобщенных элементов. Эти вопросы рассматриваем сначала в аксиоматической форме, а затем в более конкретных вариантах привлекаем аппарат конечно-аддитивной теории меры для целей реализации весьма общих топологических конструкций, ориентированных на постановки задач управления второй главы.

19. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ РАСШИРЕНИЯ,
УНИВЕРСАЛЬНОГО В ДИАПАЗОНЕ ОГРАНИЧЕНИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Прежде всего нам потребуются некоторые дополнительные определения (см. также определения и обозначения первой главы, в частности, раздела 2), касающиеся структуры множества притяжения. Далее считаем зафиксированными непустые множества $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{Y}$ (см. раздел 18), а также отображения (18.1). Прочие компоненты асимптотических версий задачи о достижимости будем (в первой части данного раздела) дотраивать, имея своей целью провести определенную подготовительную работу, связанную с множеством притяжения вида (18.4). Следуя обозначениям раздела 2, введем следующее вспомогательное понятие: если $\mathbf{t}$ — топология множества $\mathbf{X}$, то через $\mathfrak{N}_{\mathbf{t}}^{\sharp}[\mathbf{Y}]$ обозначим множество всех $\mathcal{Y} \in \beta[\mathbf{X}]$ таких, что

$$(\mathcal{Y} \subset \mathfrak{N}_{\mathbf{t}}[\mathbf{Y}]) \& (\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \exists U_1 \in \mathcal{Y} \exists U_2 \in \mathfrak{N}_{\mathbf{t}}(x) : U_1 \cap U_2 = \emptyset). \quad (19.1)$$

В силу (19.1) элементами множества $\mathfrak{N}_{\mathbf{t}}^{\sharp}[\mathbf{Y}]$ являются непустые семейства окрестностей (вообще говоря, не всех) множества $\mathbf{Y}$ в топологическом пространстве $(\mathbf{X}, \mathbf{t})$. Но может оказаться, что $\mathfrak{N}_{\mathbf{t}}^{\sharp}[\mathbf{Y}] = \emptyset$. Однако данный случай в силу (18.4) особого интереса представлять не будет. Если при некотором выборе топологии $\mathbf{t}$ множества $\mathbf{X}$ имеет место $\mathfrak{N}_{\mathbf{t}}^{\sharp}[\mathbf{Y}] \neq \emptyset$, то

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{t}}[\mathbf{Y}] \in \mathfrak{N}_{\mathbf{t}}^{\sharp}[\mathbf{Y}],$$

а само множество $\mathbf{Y}$ в этом случае непременно является замкнутым в $(\mathbf{X}, \mathbf{t})$. Назовем множество $\mathbf{Y}$ регулярным в $(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ по аналогии с понятием регулярного топологического пространства [23, с. 154] (мы говорим о локализации важного понятия регулярности, ориентированной на изучение одного лишь множества $\mathbf{Y}$).

Предложение 19.1. Пусть $\mathbf{t}_1$ — топология множества $\mathbf{X}$, $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$ — топологическое пространство, $\mathbf{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$, $\mathcal{Y} \in \mathfrak{N}_{\mathbf{t}_1}^{\sharp}[\mathbf{Y}]$ и при этом

$$\exists g \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{X}, \mathbf{t}_1) : \mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}. \quad (19.2)$$

Тогда имеет место следующее равенство двух множеств притяжения:

$$(\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}] = (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathfrak{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}].$$

Доказательство. Доказательство (в своей идейной основе) соответствует обоснованию предложения 4.1 из работы [50]. Учтываем, что в условиях доказываемого предложения $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \in \beta[\mathbf{F}]$, и используем (2.8). Ограничимся обоснованием вложения

$$(\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}] \subset (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathfrak{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}], \quad (19.3)$$

фиксируя оператор $g \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{X}, \mathbf{t}_1)$ в соответствии с условием (19.2): $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$. Пусть z — точка множества в левой части (19.3). Используя (2.8), подберем для данного элемента $z \in \mathbf{K}$ направленность $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ в $\mathbf{F}$, для которой

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \subset (\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]) \& ((\mathbf{D}, \preceq, \mathbf{m} \circ \varphi) \xrightarrow{\mathbf{t}_2} z). \quad (19.4)$$

В силу выбора g из (19.4) имеем сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, \mathbf{s} \circ \varphi) \xrightarrow{\mathbf{t}_1} g(z). \quad (19.5)$$

Тогда $g(z) \in \mathbf{Y}$. Допустим противное: $g(z) \notin \mathbf{Y}$. Согласно выбору семейства $\mathcal{Y}$, из (19.1) для некоторых $M_1 \in \mathcal{Y}$ и $M_2 \in \mathfrak{N}_{\mathbf{t}_1}(g(z))$ имеем свойство

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset. \quad (19.6)$$

Из (19.6) вытекает, что

$$\mathbf{s}^{-1}(M_1) \cap \mathbf{s}^{-1}(M_2) = \mathbf{s}^{-1}(M_1 \cap M_2) = \emptyset. \quad (19.7)$$

Для множества $\mathbf{s}^{-1}(M_1) \in \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]$ в силу (19.4) имеем, что

$$\mathbf{s}^{-1}(M_1) \in (\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]. \quad (19.8)$$

С другой стороны, из (2.3) и (19.5) для множества M_2 имеем свойство

$$M_2 \in (\mathbf{X}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \mathbf{s} \circ \varphi]$$

и как следствие определения суперпозиции $\mathbf{s} \circ \varphi$

$$\mathbf{s}^{-1}(M_2) \in (\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]. \quad (19.9)$$

С учетом (2.2) из (19.7)–(19.9) получаем противоречие: с одной стороны,

$$\mathbf{s}^{-1}(M_1) \cap \mathbf{s}^{-1}(M_2)$$

есть множество из фильтра $(\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]$ и, следовательно, непусто (см. (2.1)), а с другой, — данное множество-пересечение пусто в силу (19.7). Противоречие доказывает свойство: $g(z) \in \mathbf{Y}$. Как следствие имеем цепочку вложений

$$\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}] \subset N_{\mathbf{t}_1}(g(z)) \subset (\mathbf{X}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \mathbf{s} \circ \varphi] \quad (19.10)$$

(мы учли (2.3) и (19.5)). Выберем произвольное множество

$$A \in \mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]], \quad (19.11)$$

после чего подберем (см. (2.9)) множество $B \in \mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]$ так, что при этом

$$A = \mathbf{s}^{-1}(B).$$

С учетом (19.10) получаем, что

$$B \in (\mathbf{X}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \mathbf{s} \circ \varphi]. \quad (19.12)$$

Из (2.2) и (19.12) сразу следует свойство

$$A \in (\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]. \quad (19.13)$$

Поскольку выбор A в (19.11) был произвольным, из (19.13) имеем вложение

$$\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \subset (\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi].$$

С учетом (19.4) направленность $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ в $\mathbf{F}$ обладает свойствами

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \subset (\mathbf{F}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \varphi]) \& ((\mathbf{D}, \preceq, \mathbf{m} \circ \varphi) \xrightarrow{\mathbf{t}_2} z).$$

Если $z \in \mathbf{K}$, то (см. (2.7))

$$z \in (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{K}; \mathbf{t}_2; \mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]]; \mathbf{m}],$$

откуда с учетом (2.8) получаем включение

$$z \in (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.14)$$

Поскольку выбор z был произвольным, из (19.14) имеем требуемое вложение (19.3). Вложение, противоположное (19.3), является практически очевидным. $\square$

Рассмотрим частный случай конструкции, связанной с предложением 19.1. Для этого понадобятся некоторые новые обозначения. Если

$$\rho : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty[\quad (19.15)$$

есть метрика множества $\mathbf{X}$, то через $\tau_\rho^\sharp(\mathbf{X})$ обозначим топологию множества $\mathbf{X}$, порожденную метрикой ρ . По аналогии с разделом 13 введем понятие ε -окрестности $\mathbf{Y}$ в смысле той или иной метрики (19.15). Итак, если ρ (19.15) — метрика множества $\mathbf{X}$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\mathbf{B}_\rho^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]$ обозначим множество всех $x \in \mathbf{X}$ таких, что

$$\exists y \in \mathbf{Y} : \rho(x, y) < \varepsilon.$$

Таким образом, введено объединение семейства всех открытых шаров радиуса ε с центрами из множества $\mathbf{Y}$. Тем самым введена открытая ε -окрестность $\mathbf{Y}$. Именно, при всяком выборе метрики ρ (19.15) множества $\mathbf{X}$ и числа $\varepsilon \in]0, \infty[$ имеем

$$\mathbf{B}_\rho^0[\mathbf{Y}; \varepsilon] \in \mathbb{N}_{\tau_\rho^\sharp(\mathbf{X})}^0[\mathbf{Y}]. \quad (19.16)$$

Множество (19.16) получено объединением всевозможных открытых шаров радиуса ε с центрами в $\mathbf{Y}$.

Отметим очевидное свойство: если ρ (19.15) — метрика множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_\rho^h(\mathbf{X})}$ (т.е. $\mathbf{Y}$ замкнуто в метризуемом топологическом пространстве $(\mathbf{X}, \tau_\rho^h(\mathbf{X}))$), то

$$\mathfrak{B}_\rho^0 \triangleq \{\mathbf{B}_\rho^0[\mathbf{Y}; \varepsilon] : \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \mathfrak{N}_{\tau_\rho^h(\mathbf{X})}^h[\mathbf{Y}] \quad (19.17)$$

семейство всех открытых ε -окрестностей $\mathbf{Y}$ (см. в этой связи [23], [53], а также [64, с.92]). Теперь уже вполне очевидно следующее

Предложение 19.2. Пусть ρ (19.5) — метрика множества $\mathbf{X}$, $\mathbf{t}_1 \triangleq \tau_\rho^h(\mathbf{X})$, $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$ — топологическое пространство, $\mathbf{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_\rho^h(\mathbf{X})}$ и, кроме того, выполняется (19.2). Тогда

$$(\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathfrak{B}_\rho^0] \mid \mathbf{m}] = (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbf{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}].$$

Доказательство получается комбинацией предложения 19.1 и (19.17). Подчеркнем, что в пространстве $(\mathbf{X}, \tau_\rho^h(\mathbf{X}))$, где ρ — метрика $\mathbf{X}$, для $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_\rho^h(\mathbf{X})}$ семейство (19.17) может не составлять базиса семейства $\mathbf{N}_{\tau_\rho^h(\mathbf{X})}[\mathbf{Y}]$, как показано в [64, с.91].

Предложение 19.2 является подготовительным для построения версии расширения, универсальной в диапазоне ограничений асимптотического характера. Этот диапазон определяется в данном случае в виде множества всех $\tilde{\mathcal{F}} \in \beta[\mathbf{F}]$ таких, что

$$\mathbf{s}^{-1}[\mathfrak{B}_\rho^0] \subset \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathbf{s}^{-1}[\mathbf{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]]. \quad (19.18)$$

На самом же деле, упомянутый диапазон можно определить даже в виде множества всех $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F}))$ со свойством (19.18). Это касается как множеств типа (2.6), в силу их монотонной зависимости от семейства $\mathcal{U}$ (см. (2.6)), так и множества притяжения $(\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{K}; \mathbf{t}_2; \tilde{\mathcal{F}}; \mathbf{m}]$, где $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F}))$ (см. (2.7)). Однако мы ограничимся случаем реализации равенства типа (2.8) для получающихся предельных множеств и потому рассмотрим семейства из $\beta[\mathbf{F}]$.

Рассмотрим вопрос о представлении множества притяжения в топологических пространствах, используемых в предложениях 19.1 и 19.2, в терминах множества $\mathbf{Y}$. Здесь мы ориентируемся на [50, предложение 4.2]. Речь идет о сравнении множества притяжения в утверждении предложения 19.1 и множества, получаемого в виде непрерывного прообраза множества $\mathbf{Y}$. Отметим сначала (в обозначениях раздела 2) одну простую оценку.

Предложение 19.3. Пусть $\mathbf{t}_1$ — топология множества $\mathbf{X}$, $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$ — топологическое пространство, $\mathbf{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$, $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{X}, \mathbf{t}_1)$ и при этом

$$\mathbf{s} = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}. \quad (19.19)$$

Кроме того, пусть $\mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \in (\mathbf{t}_2\text{-dens})[\mathbf{K}]$. Тогда

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbf{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}].$$

Доказательство. Пусть $v \in \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})$, тогда для $v \in \mathbf{K}$ имеем $\mathbf{g}(v) \in \mathbf{Y}$. Выберем произвольно $H_* \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]$, после чего подберем $G_* \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_1}^0[\mathbf{Y}]$ так, что $G_* \subset H_*$. Тогда

$$G_* \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_1}^0(\mathbf{g}(v)) \quad (19.20)$$

и при этом $\mathbf{g}^{-1}(G_*) \in \mathbf{t}_2$. Из (19.20) имеем, в частности, что $v \in \mathbf{g}^{-1}(G_*)$, следовательно

$$\mathbf{g}^{-1}(G_*) \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_2}^0(v).$$

Если при этом $G \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_2}^0(v)$, то

$$\mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap G \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_2}^0(v)$$

и с учетом плотности множества $\mathbf{m}^1(\mathbf{F})$ в $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$, имеем свойство

$$\mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap G \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \neq \emptyset.$$

Поскольку выбор G был произвольным, установлено, что

$$\tilde{G} \cap (\mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F})) \neq \emptyset \quad \forall \tilde{G} \in \mathbf{N}_{\mathbf{t}_2}^0(v).$$

Последнее означает справедливость утверждения

$$v \in \text{cl}(\mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \mathbf{t}_2). \quad (19.21)$$

Пусть $v_* \in \mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F})$, а $x_* \in \mathbf{F}$ удовлетворяет условию $v_* = \mathbf{m}(x_*)$. Согласно выбору v_* , имеем, $x_* \in \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{g}^{-1}(G_*))$, т.е.

$$\mathbf{s}(x_*) = (\mathbf{g} \circ \mathbf{m})(x_*) = \mathbf{g}(\mathbf{m}(x_*)) \in G_*.$$

В итоге, $x_* \in \mathbf{s}^{-1}(G_*)$ и как следствие

$$v_* \in \mathbf{m}^1(\mathbf{s}^{-1}(G_*)).$$

Поскольку выбор v_* был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \subset \mathbf{m}^1(\mathbf{s}^{-1}(G_*)). \quad (19.22)$$

В силу монотонности оператора замыкания из (19.22) имеем вложение

$$\text{cl}(\mathbf{g}^{-1}(G_*) \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \mathbf{t}_2) \subset \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{s}^{-1}(G_*)), \mathbf{t}_2).$$

С учетом (19.21) и монотонности операций взятия образа и прообраза, а также с учетом монотонности оператора замыкания получаем, что

$$v \in \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{s}^{-1}(H_*)), \mathbf{t}_2).$$

Поскольку и выбор H_* был произвольным, установлено, что

$$v \in \bigcap_{H \in \mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]]} \text{cl}(\mathbf{m}^1(H), \mathbf{t}_2).$$

В силу (2.6) получаем утверждение

$$v \in (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}].$$

Так как выбор v был произвольным, предложение доказано. $\square$

Заметим, что кроме (19.19) в предложении 19.3 используется только одно условие: плотность погружения $\mathbf{F}$ в $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$ посредством $\mathbf{m}$. В действительности же данное требование всегда можно осуществить путем несущественного преобразования кортежа $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{m}, \mathbf{g})$.

В самом деле, пусть $\mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \notin (\mathbf{t}_2\text{-dens})[\mathbf{K}]$, где $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$ — топологическое пространство ($\mathbf{K} \neq \emptyset$), $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$. Пусть $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{X}, \mathbf{t}_1)$ и выполнено (19.19). Введем множество $\tilde{\mathbf{K}} \triangleq \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \mathbf{t}_2)$, $\tilde{\mathbf{K}} \subset \mathbf{K}$, а также индуцированную в $\tilde{\mathbf{K}}$ из $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$ топологию $\tilde{\mathbf{t}} \triangleq \mathbf{t}_2|_{\tilde{\mathbf{K}}}$. В виде

$$(\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{t}})$$

имеем подпространство топологического пространства $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$. При этом $\tilde{\mathbf{K}} \neq \emptyset$ и

$$\mathbf{m} : \mathbf{F} \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}. \quad (19.23)$$

Отметим, что $\mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \subset \tilde{\mathbf{K}}$ и

$$\text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tilde{\mathbf{t}}) = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \mathbf{t}_2) \cap \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}.$$

Иными словами,

$$\mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \in (\tilde{\mathbf{t}}\text{-dens})[\tilde{\mathbf{K}}] \quad (19.24)$$

(см. раздел 7), т.е. $\mathbf{F}$ погружается в $\tilde{\mathbf{K}}$ в виде всюду плотного множества. Введем

$$\tilde{\mathbf{g}} \triangleq (\mathbf{g} \mid \tilde{\mathbf{K}}) \in \mathbf{X}^{\tilde{\mathbf{K}}}.$$

В силу непрерывности оператора $\mathbf{g}$ имеем свойство

$$\tilde{\mathbf{g}} \in C(\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{X}, \mathbf{t}_1). \quad (19.25)$$

При этом в силу (19.23) и (19.25) имеем отображение

$$\tilde{\mathbf{g}} \circ \mathbf{m} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{X}.$$

Сравним последнее с оператором s . Если $f \in \mathbf{F}$, то $\mathbf{m}(f) \in \tilde{\mathbf{K}}$ в силу (19.23), а тогда

$$s(f) = (\mathbf{g} \circ \mathbf{m})(f) = \mathbf{g}(\mathbf{m}(f)) = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{m}(f)) = (\tilde{\mathbf{g}} \circ \mathbf{m})(f) \in \mathbf{X}.$$

Следовательно, $s = \tilde{\mathbf{g}} \circ \mathbf{m}$. Итак, мы построили кортеж $(\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{g}})$ со свойствами (19.24), (19.25), который реализует s в виде непрерывной суперпозиции. Таким образом, условие плотного погружения множества $\mathbf{F}$ во вспомогательное топологическое пространство посредством $\mathbf{m}$ не является в действительности каким-либо ограничительным предположением, напротив, данное условие является фактически правилом рационального выбора модели расширения.

Предложение 19.4. Пусть $\mathbf{t}_1$, $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{g}$ соответствуют условиям предложения 19.3, включая условие (19.19) и условие плотности образа: $\mathbf{m}^1(\mathbf{F}) \in (\mathbf{t}_2\text{-dens})[\mathbf{K}]$. Пусть, кроме того, множество $\mathbf{Y}$ регулярно в топологическом пространстве $(\mathbf{X}, \mathbf{t}_1)$:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \exists \mathbf{O}_1 \in N_{\mathbf{t}_1}(\mathbf{x}) \exists \mathbf{O}_2 \in N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}] : \mathbf{O}_1 \cap \mathbf{O}_2 = \emptyset. \quad (19.26)$$

Тогда $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}]$.

Замечание 19.1. Условие (19.26), названное здесь регулярностью множества $\mathbf{Y}$, имеет смысл своеобразной локализации свойства топологического пространства аналогичного типа, т.е. регулярного топологического пространства. Напомним, что в случае, когда выполнено (19.26), множество $\mathbf{Y}$ непременно является замкнутым в топологическом пространстве $(\mathbf{X}, \mathbf{t}_1)$, поскольку при $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$ в этом случае выполняется

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \in N_{\mathbf{t}_1}(\mathbf{x}). \quad (19.27)$$

Напомним, что в качестве окрестностей точек множества $\mathbf{X}$ используются не только открытые множества (см. раздел 2). Из свойства (19.27), выполняемого для любой точки из дополнения множества $\mathbf{Y}$, вытекает, что $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \in \mathbf{t}_1$, тогда $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}_1}$. В этой связи см. [7, § 1].

Доказательство предложения 19.4. Из условий доказываемого предложения вытекает, что

$$\mathbf{m} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{K}, \quad \mathbf{g} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{X}.$$

При этом $s = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}$ и, следовательно,

$$s^{-1}(H) = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{g}^{-1}(H)) \quad \forall H \in \mathcal{P}(\mathbf{X}). \quad (19.28)$$

Итак, если H — произвольное подмножество множества $\mathbf{X}$, то как следствие (19.28) имеем

$$\mathbf{m}^1(s^{-1}(H)) = \mathbf{m}^1(\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{g}^{-1}(H))) \subset \mathbf{g}^{-1}(H). \quad (19.29)$$

С учетом (19.29) получаем цепочку вложений

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] &= \bigcap_{H \in N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]} \text{cl}(\mathbf{m}^1(s^{-1}(H)), \mathbf{t}_2) \subset \\ &\subset \bigcap_{H \in N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]} \text{cl}(\mathbf{g}^{-1}(H), \mathbf{t}_2) \subset \bigcap_{H \in N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]} \mathbf{g}^{-1}(\text{cl}(H, \mathbf{t}_1)). \end{aligned} \quad (19.30)$$

В (19.30) учтено хорошо известное свойство непрерывных операторов: замыкание прообраза произвольного подмножества множества значений содержится в прообразе замыкания этого множества (см. [23], [53], [1]). Выберем произвольно

$$v \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}).$$

Для точки $\mathbf{g}(v) \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$ подберем с учетом (19.26) множества $\mathbf{O}_1 \in N_{\mathbf{t}_1}(\mathbf{g}(v))$ и $\mathbf{O}_2 \in N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]$, для которых $\mathbf{O}_1 \cap \mathbf{O}_2 = \emptyset$. Тогда

$$\mathbf{g}(v) \notin \text{cl}(\mathbf{O}_2, \mathbf{t}_1)$$

по определению замыкания множества $\mathbf{O}_2$, т.е.

$$v \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{g}^{-1}(\text{cl}(\mathbf{O}_2, \mathbf{t}_1)).$$

Из (19.30) имеем по выбору $\mathbf{O}_2$, что

$$v \in \mathbf{K} \setminus (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{\mathbf{t}_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.31)$$

Поскольку выбор v из дополнения множества $g^{-1}(Y)$ был произвольным, из (19.31) следует вложение

$$K \setminus g^{-1}(Y) \subset K \setminus (t_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{t_1}[Y]] \mid m].$$

Таким образом, установлено, что имеет место

$$(t_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{t_1}[Y]] \mid m] \subset g^{-1}(Y)$$

и с учетом предложения 19.3 мы получаем доказываемое равенство. $\square$

Итак, если нам удалось оснастить X такой топологией t_1 , относительно которой множество Y регулярно, и, кроме того, удалось подобрать кортеж (K, t_2, m, g) , где (K, t_2) — топологическое пространство, m — оператор плотного погружения множества F в это топологическое пространство, а g — непрерывный оператор из (K, t_2) в (X, t_1) , то $g^{-1}(Y)$ — множество притяжения, реализуемое на значениях отображения m в топологическом пространстве (K, t_2) .

Предложение 19.5. Пусть t_1 — топология множества X , (K, t_2) — топологическое пространство, $K \neq \emptyset$, $m \in K^F$, $\mathcal{Y} \in \mathfrak{N}_{t_1}^b[Y]$, $g \in C(K, t_2, X, t_1)$. Кроме того, пусть $m^1(F) \in (t_2\text{-dens})[K]$ и выполнено (19.19). Тогда

$$g^{-1}(Y) = (t_2\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}] \mid m] = (t_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{t_1}[Y]] \mid m].$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 19.1, 19.4 и учитывает (19.1). Последнее, в частности, следует свойство: если t — топология X , для которой $\mathfrak{N}_t^b[Y] \neq \emptyset$, то множество Y регулярно в смысле (19.26).

Следствие 19.1. Пусть ρ (19.15) — метрика множества X , $t_1 \triangleq \tau_\rho^b(X)$, (K, t_2) — топологическое пространство, $K \neq \emptyset$, $m \in K^F$, $Y \in \mathcal{F}_{t_1}$, $g \in C(K, t_2, X, t_1)$ и при этом

$$(s = g \circ m) \& (m^1(F) \in (t_2\text{-dens})[K]).$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$g^{-1}(Y) = (t_2\text{-LIM})[s^{-1}[\mathfrak{B}_\rho^0] \mid m] = (t_2\text{-LIM})[s^{-1}[N_{t_1}[Y]] \mid m].$$

Доказательство использует (19.17) и предложение 19.5. Мы получили конкретное представление «универсального» множества притяжения в виде множества $g^{-1}(Y)$.

Предложение 19.6. Пусть t_1 , (K, t_2) , m и g удовлетворяют всем условиям предложения 19.3, $v \in g^{-1}(Y)$ и

$$\mathcal{F} \triangleq \{F \in \mathcal{P}(F) \mid \exists H \in N_{t_2}(v) : m^{-1}(H) \subset F\}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ — приближенное решение в смысле (4.21), реализующее точку v , т.е.

$$\mathcal{F} \in (\mathfrak{F}\text{-sol})[F; K; t_2; s^{-1}[N_{t_1}[Y]]; m] : m^{-1}[N_{t_2}(v)] \subset \mathcal{F}.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{U} \triangleq m^{-1}[N_{t_2}(v)] \in \beta[F]. \quad (19.32)$$

На самом деле семейство $\mathcal{U}$ (19.32) есть базис фильтра. Действительно, множество $m^1(F)$ всюду плотно в (K, t_2) , $v \in K$. Поэтому

$$m^1(F) \cap H \neq \emptyset \quad \forall H \in N_{t_2}(v).$$

Как следствие получаем свойство

$$m^{-1}(H) \neq \emptyset \quad \forall H \in N_{t_2}(v).$$

С учетом (19.32) получаем, что справедливо

$$\mathcal{U} \in \beta_0[F]$$

(см. раздел 2). Итак, $\mathcal{U}$ есть базис фильтра как следствие

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(F) \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset F\} \in \mathfrak{F}_0[F \mid \mathcal{U}] \quad (19.33)$$

(см. построения раздела 2). Из (4.21) и (19.33) следует, что для доказательства предложения осталось установить вложение

$$s^{-1}[N_{t_1}[\mathbf{Y}]] \subset \mathcal{F}. \quad (19.34)$$

Для доказательства (19.34) выберем произвольно

$$W \in N_{t_1}[\mathbf{Y}]$$

и рассмотрим множество $s^{-1}(W)$. Легко видеть, что

$$W \in N_{t_1}(\mathbf{g}(v))$$

и в силу непрерывности оператора $\mathbf{g}$ имеет место свойство

$$\mathbf{g}^{-1}(W) \in N_{t_2}(v). \quad (19.35)$$

Из (19.32) и (19.35) получаем свойство

$$\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{g}^{-1}(W)) \in \mathcal{U}. \quad (19.36)$$

Имеем, однако, равенство (19.19), из которого следует, что

$$s^{-1}(W) = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{g}^{-1}(W)).$$

Из (19.36) получаем $s^{-1}(W) \in \mathcal{U}$, что с учетом (19.33) означает (так как выбор W был произвольным) требуемое вложение (19.34). $\square$

Отметим, что в [64, с. 96, 97] рассматривалось подобное положение, касающееся, однако, построения приближенного решения-направленности. Здесь мы использовали другой вариант: приближенное решение определяется в виде фильтра множества $\mathbf{F}$.

Заметим, что в предложениях 19.1, 19.2, 19.5 и в следствии 19.1 обсуждались вопросы, связанные с универсальностью расширения в некотором диапазоне (т.е. в некоторых пределах). Мы ставим своей целью сделать границы упомянутого диапазона, по возможности, более контрастными. Скажем в этой связи о контрастном диапазоне ограничений асимптотического характера. Для создания упомянутого контраста рассмотрим топологию t_1 (см. предыдущие утверждения настоящего раздела) как инструмент при формировании «асимптотических» ограничений. Ниже будем использовать битопологические пространства, определяемые в виде множества, оснащенного парой сравнимых топологий.

Итак, полагаем, что множество $\mathbf{X}$ оснащено парой (сравнимых) топологий τ_l и τ_u , для которых

$$\tau_l \subset \tau_u. \quad (19.37)$$

Таким образом, триплет $(\mathbf{X}, \tau_l, \tau_u)$ — битопологическое пространство. Полагаем

$$\mathcal{Y}_u \triangleq N_{\tau_u}[\mathbf{Y}], \quad (19.38)$$

ориентируясь (в случае использования сильнейшей в (19.37) топологии) на применение (для целей ослабления $\mathbf{Y}$ -ограничения) семейства всех окрестностей множества $\mathbf{Y}$. Кроме того, фиксируем

$$\mathcal{Y}_l \in \mathfrak{N}_{\tau_l}^{\mathbf{d}}[\mathbf{Y}], \quad (19.39)$$

допуская (при оснащении $\mathbf{X}$ слабейшей в (19.37) топологией) использование (для ослабления $\mathbf{Y}$ -ограничения) не всех окрестностей множества $\mathbf{Y}$. Целесообразность такого допущения в достаточной степени иллюстрируется в предложении 19.2 (см. также пример в [64, с. 91]). В дальнейшем мы рассмотрим другие случаи, когда это ограничение при использовании окрестностей $\mathbf{Y}$ имеет смысл. Отметим, что в силу (19.37) имеет место вложение

$$\mathcal{Y}_l \subset \mathcal{Y}_u. \quad (19.40)$$

Из (19.40) получаем аналогичное вложение для семейств

$$s^{-1}[\mathcal{Y}_l] \in \beta[\mathbf{F}], \quad s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \in \beta[\mathbf{F}]. \quad (19.41)$$

Семейства (19.41) будем использовать для построения контрастного диапазона асимптотических ограничений. С (19.41) связаны две версии множества притяжения:

$$(\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_l] \mid \mathbf{h}] = (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{H}; \vartheta; s^{-1}[\mathcal{Y}_l]; \mathbf{h}] \in \mathcal{F}_{\vartheta}; \quad (19.42)$$

$$(\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{h}] = (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{H}; \vartheta; s^{-1}[\mathcal{Y}_u]; \mathbf{h}] \in \mathcal{F}_\vartheta. \quad (19.43)$$

В (19.42), (19.43) мы наметили два варианта множеств притяжения для целей возмущения $\mathbf{Y}$ -ограничения, в своей асимптотической версии связанного с семействами (19.41). Из (18.4), (19.40) имеем очевидное вложение для множества притяжения (19.42) и (19.43)

$$(\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{h}] \subset (\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{h}]. \quad (19.44)$$

Приступим к систематическому исследованию условий, при которых в (19.44) имеет место равенство, что означает существование множества притяжения, универсального в диапазоне, определяемом в (19.40).

Однако исследованию окончательных, в известной степени, асимптотических аналогов обычных достижимых множеств (см. введение) и, в частности, областей достижимости управляемых систем имеет смысл предпослать изучение некоторых промежуточных объектов, имеющих вид вспомогательных множеств притяжения (см. раздел 17). Последние связаны со сравнением самих семейств (19.41). Напомним, что в (19.41) введены два семейства подмножеств $\mathbf{F}$. Сравним их между собой в смысле асимптотических свойств. Последние, однако, практически невозможно исследовать в пределах самого множества $\mathbf{F}$, не оснащаемого какими-либо структурами. Поэтому, действуя в духе раздела 17, введем некоторую модель расширения, касающуюся не построения множества притяжения в $(\mathbf{H}, \vartheta)$, а всего лишь анализа асимптотического поведения приближенных решений в терминах семейств типа (19.41). Назовем эту модель расширения неполной, имея в виду ее последующее достраивание с применением конструкций типа простой модели расширения из раздела 17. В связи с использованием моделей такого типа отметим, в частности, работы [44, 59, 60].

Итак, неполной моделью расширения условимся называть всякий кортеж

$$(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, \mathbf{g}), \quad (19.45)$$

для которого

$$(\mathbf{K}, t_1, t_u) \quad (19.46)$$

есть битопологическое пространство (t_1 и t_u — топологии $\mathbf{K}$, $t_1 \subset t_u$), $\mathbf{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$,

$$\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{X}, \tau_1) \cap C(\mathbf{K}, t_u, \mathbf{X}, \tau_u) \quad (19.47)$$

и при этом имеют место свойства

$$(\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_u)) \& (s = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}). \quad (19.48)$$

Появление битопологических пространств (19.46) в этой модели вполне естественно, так как последняя обслуживает, как увидим далее, контрастный диапазон ограничений асимптотического характера и должна определенным образом взаимодействовать с битопологическим пространством, используемом при описании исходной задачи (см. (19.37)). Этим же обстоятельством обусловлено требование (19.47) — универсальная непрерывность оператора $\mathbf{g}$; мы имеем здесь условие, представляющееся, на первый взгляд, наиболее ограничительным. Условия (19.48), напротив, естественны в свете предыдущих положений данного раздела. В дальнейшем рассмотрим конкретную версию $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ (19.45), используя в качестве $\mathbf{K}$ некоторое множество в пространстве конечно-аддитивных мер ограниченной вариации, определенных на полуалгебре множеств.

Отметим некоторые совсем простые свойства неполной модели расширения. Если (19.45) — неполная модель расширения, то из свойств (19.46) вытекает вложение $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_u}$, следовательно (см. (19.48))

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_1), \quad (19.49)$$

Из (19.48), (19.49) имеем, в частности, свойство плотного погружения $\mathbf{F}$ в каждое из топологических пространств $(\mathbf{K}, t_1)$ и $(\mathbf{K}, t_u)$. Из (19.39), (19.47)–(19.49) вытекает

Предложение 19.7. Если (19.45) — неполная модель расширения, то

$$(t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] \quad (19.50)$$

и, кроме того, имеет место

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.51)$$

Доказательство. Равенство (19.50) вытекает из (19.39), (19.47), (19.49) и предложения 19.1. Рассмотрим обоснование равенства (19.51). Для этого отметим, что

$$\mathcal{Y}_1 \in \mathfrak{N}_{\tau_u}^1[\mathbf{Y}]. \quad (19.52)$$

Из (19.39) имеем свойство $\mathcal{Y}_1 \in \beta[\mathbf{X}]$. При этом (см. (19.38), (19.40))

$$\mathcal{Y}_1 \subset N_{\tau_u}[\mathbf{Y}]. \quad (19.53)$$

Наконец, из (19.1) и (19.39) имеем свойство

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \exists U_1 \in \mathcal{Y}_1 \exists U_2 \in N_{\tau_1}(x) : U_1 \cap U_2 = \emptyset. \quad (19.54)$$

В силу (19.37)

$$N_{\tau_1}(x) \subset N_{\tau_u}(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Из (19.54) получаем основное свойство отделимости в (19.1) для окрестностей в топологии τ_u , т.е.

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \exists U_1 \in \mathcal{Y}_1 \exists U_2 \in N_{\tau_u}(x) : U_1 \cap U_2 = \emptyset. \quad (19.55)$$

Из (19.1), (19.53) и (19.55) следует (19.52). Теперь используем (19.47), (19.48), (19.52) и предложение 19.1. В итоге получаем равенство

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.56)$$

Здесь учтено (19.38), однако с учетом (19.37)–(19.39) получаем, что

$$\mathcal{Y}_1 \subset N_{\tau_1}[\mathbf{Y}] \subset \mathcal{Y}_u.$$

В результате получаем цепочку вложений

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] \subset (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[N_{\tau_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] \subset (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}],$$

откуда в силу (19.56) получаем (19.51). $\square$

Теорема 19.1. Пусть $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ — неполная модель расширения. Тогда

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.57)$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 19.5. В самом деле, из (19.39), (19.47)–(19.49) вытекает, что выполняются все условия упомянутого предложения для следующей конкретизации параметров последнего:

$$t_1 = \tau_1, \quad t_2 = t_1, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1, \quad g = g.$$

В итоге получаем равенство

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.58)$$

Напомним (19.37). Как следствие $N_{\tau_1}(x) \subset N_{\tau_u}(x)$ при $x \in \mathbf{X}$. С учетом (19.38), (19.40) имеем, как и при доказательстве предложения 19.7, свойство

$$\mathcal{Y}_u \in \mathfrak{N}_{\tau_u}^1[\mathbf{Y}]. \quad (19.59)$$

В самом деле, если $\bar{x} \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$, то с учетом (19.39) подбираем множества $U_1 \in \mathcal{Y}_1$ и $U_2 \in N_{\tau_1}(\bar{x})$, для которых $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. В силу (19.40) имеем $U_1 \in \mathcal{Y}_u$. Кроме того, $U_2 \in N_{\tau_u}(\bar{x})$ (см. (19.37)). Тогда (см. (19.1)) получаем (19.59). В силу (19.47)–(19.49) и (19.59) конкретизируем предложение 19.5 иначе:

$$t_1 = \tau_u, \quad t_2 = t_u, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_u.$$

Как следствие из упомянутого предложения получаем равенство

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.60)$$

Из (19.59), (19.60) вытекает требуемое утверждение (19.57). $\square$

Теорему 19.1 можно рассматривать как развитие предложения 19.5 на случай более контрастного диапазона асимптотических ограничений. В этой связи полезно учесть предложение 19.7: если $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ — неполная модель расширения, то (в дополнение к (19.57))

$$\begin{aligned} (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[N_{\tau_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] &= (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = \\ &= (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[N_{\tau_1}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] = g^{-1}(\mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (19.61)$$

Предложение 19.8. Если $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ — неполная модель расширения, то

$$(t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] = g^{-1}(\mathbf{Y}).$$

Доказательство. В силу (19.46) имеем свойство $\text{cl}(H, t_u) \subset \text{cl}(H, t_1)$ при $H \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$. В результате (см. (2.6))

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] \subset (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}].$$

Из теоремы 19.1 получаем вложение

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (19.62)$$

С другой стороны, согласно (19.40), имеем (см. (2.6))

$$(t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] \subset (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_l] \mid \mathbf{m}],$$

что, в силу теоремы 19.1, означает справедливость вложения

$$(t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] \subset g^{-1}(\mathbf{Y}).$$

С учетом (19.62) получаем требуемое равенство. $\square$

Итак, существование неполной модели расширения означает универсальность вспомогательного множества притяжения в диапазоне асимптотических ограничений. По своему смыслу множество $g^{-1}(\mathbf{Y})$ в теореме 19.1, предложении 19.8 и в (19.61) играет роль множества допустимых обобщенных элементов. В связи с конкретными аналогами упомянутых утверждений абстрактного характера (теорема 19.1, предложение 19.8, (19.61)) отметим, в частности, теорему 3.9.1 монографии [58], а также положения [59], [44], [60] и др. Упомянутые конкретизации связаны с версиями оператора погружения $\mathbf{m}$, подобными используемым в разделе 15 (сопоставление вещественнозначной ярусной функции ее неопределенного интеграла по заданной конечно-аддитивной мере). Другой способ погружения реализован в разделе 11. Отметим, наконец, погружения по схеме [58, § 7.3], [64, § 4.8], применяемые, в частности, для построения расширений в задачах чисто импульсного управления. Речь идет об управлении с толчками [36] в исходной постановке задачи. Обобщенные управления для этой задачи интерпретировались как конечно-аддитивные меры, полная вариация которых ограничена ресурсной константой, используемой в исходной постановке.

Вернемся к проблеме построения множества притяжения в топологическом пространстве $(\mathbf{H}, \vartheta)$, играющем роль пространства оценок. В дальнейшем будем комбинировать неполную модель расширения, рассматриваемую в данном разделе, и простую модель расширения из раздела 17. В результате будет получена конструкция, реализующая (при определенных условиях) множество притяжения в пространстве оценок, универсальное в контрастном диапазоне асимптотических ограничений.

Итак, мы называем кортеж

$$(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega) \quad (19.63)$$

моделью расширения, если $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ — неполная модель расширения, $\omega \in C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$ и $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$.

Легко видеть, что в случае, когда (19.63) — модель расширения, (частичный) кортеж $(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{m}, \omega)$ является простой моделью расширения (см. раздел 17) при условии, что (в соответствующем определении раздела 17) $E = \mathbf{F}$; свойства этой модели усилены в духе теоремы 17.1.

Теорема 19.2. Пусть кортеж (19.63) является моделью расширения. Тогда

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_l] \mid \mathbf{h}] = (\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{h}].$$

Доказательство. Доказательство получается непосредственной комбинацией теорем 17.1 и 19.1, а также предложения 19.8. Ограничимся краткими замечаниями. Равенство

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_l] \mid \mathbf{h}] \quad (19.64)$$

непосредственно следует из теорем 17.1 и 19.1 по определению модели расширения. Далее, рассмотрим комбинацию теоремы 17.1 и предложения 19.8. Так как ω почти совершенно в смысле $(\mathbf{K}, t_1)$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$, то получаем равенство

$$(\vartheta\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{h}] = \omega^1((t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]) = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})), \quad (19.65)$$

где использовано предложение 19.8. Из (19.64) и (19.65) следует требуемое утверждение. $\square$

Сделаем ряд замечаний относительно самого утверждения теоремы. Из (19.42), (19.43) и теоремы 19.2 имеем положение: если (19.63) — модель расширения, то

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1]; \mathbf{h}] = (\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_u]; \mathbf{h}] \in \mathcal{F}_\vartheta. \quad (19.66)$$

Заметим, что теорема 19.2 и (19.66) означают универсальность множества притяжения в диапазоне ограничений асимптотического характера: если (19.63) — модель расширения, то $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F}))$

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1] \subset \mathcal{H} \subset \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_u]) \implies ((\vartheta\text{-LIM})[\mathcal{H} \mid \mathbf{h}] = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))). \quad (19.67)$$

Однако более полезным (в силу (2.8)) представляется свойство: если (19.63) — модель расширения, то $\forall \mathcal{H} \in \beta[\mathbf{F}]$

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1] \subset \mathcal{H} \subset \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_u]) \implies ((\text{AS})[\mathbf{F}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{H}; \mathbf{h}] = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))). \quad (19.68)$$

В (19.67) и (19.68) мы имеем весьма общие положения о построении множеств притяжения, универсальных в контрастном диапазоне асимптотических ограничений. Само доказательство упомянутой универсальности в определяющей степени характеризуется существованием модели расширения, в которой мы использовали только один вариант конструкций из раздела 17 (можно было бы при некоторых дополнительных условиях рассматривать комбинацию неполной модели расширения и теоремы 17.2). Напомним, что каждая модель расширения должна удовлетворять условиям (19.46)–(19.48), среди которых выделяется (19.47) как весьма ограничительное требование. В этой связи важно предложить конкретный вариант модели расширения, ориентированный на достаточно широкий круг задач. Последние будем подбирать в духе второй главы в виде задач управления с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях, хотя возможны и другие конкретизации (см., например, [43]). В качестве обобщенных элементов, т.е. в качестве элементов $\mathbf{K}$, в (19.63) будут использоваться конечно-аддитивные меры. Далее мы не стремимся к полной общности, стремясь, однако, сохранить единый взгляд на различные в содержательном отношении задачи. В (19.63) особое внимание будет обращено на выбор битопологического пространства $(\mathbf{K}, t_1, t_u)$.

20. КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЙ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР

Последующие построения в значительной степени ориентированы на задачи управления второй главы (см. в этой связи мотивирующие примеры в разделе 14). В частности, мы отразим в постановке исходной задачи ряд моментов, типичных для упомянутых задач управления. Например, в качестве $\mathbf{X}$ используем множество вектор-функций, ориентируясь на постановки с использованием ограничений траекторного характера. В то же время конкретизация в виде задач управления оказывается во многих отношениях несущественна. Следует иметь в виду и другие возможные конкретизации общей постановки (см., в частности, [58, гл. 6], [43]). Поэтому мы рассматриваем далее весьма абстрактную постановку, фиксируя непустое множество E и полуалгебру $\mathcal{L}$ подмножеств E . Итак, фиксируем $\mathcal{L}$ (10.1) и получаем измеримое пространство

$$(E, \mathcal{L}) \quad (20.1)$$

с полуалгеброй множеств. В (20.1) допускается, что $\mathcal{L}$ — алгебра или σ -алгебра множеств. Подчеркнем, что точки E не рассматриваются в качестве обычных решений (или управлений); последние будут определяться в виде вещественнозначных (для простоты) функций на множестве E .

В дальнейшем важную роль играет локально выпуклый σ -компакт (10.2). Кроме того, без дополнительных пояснений будем использовать обозначения и определения раздела 15. Напомним, в частности, что топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, вообще говоря, несравнимы (см. в этой связи [57, с. 94]). Введем семейство

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}[\mathcal{L}] &\triangleq \{M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \tau_*(\mathcal{L}) \mid_M \subset \tau_0(\mathcal{L}) \mid_M\} = \\ &= \{M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \tau_*(\mathcal{L}) \mid_M \subset \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial) \mid_M\}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Множества из семейства (20.2) называем множествами сравнимости. Из (20.2) следует, что непустое подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ содержится в $\mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ тогда и только тогда, когда топология этого подмножества, индуцированная из топологического пространства (10.2), слабее топологии, индуцированной из нульмерного пространства $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$. Полагаем

$$\mathbf{B}'_*(\mathcal{L}) \triangleq \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \setminus \{\emptyset\}$$

(семейство всех непустых сильно ограниченных подмножеств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$). Из простейших свойств [58, с. 45] легко следуют соотношения

$$(\mathbf{B}'_*(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}]) \& ((\text{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}]) \& (\mathcal{P}'(M) \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}] \quad \forall M \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]). \quad (20.3)$$

К перечню свойств в (20.3) можно добавить и другие положения, но пока ограничимся упомянутыми в (20.3) соотношениями, заметив только, что (см. (20.3))

$$(\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\} \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \quad (20.4)$$

Свойство (20.4) использовалось фактически в построениях [44, 50, 57–60, 62, 64], связанных с важным для теории и приложений свойством асимптотической нечувствительности абстрактных задач управления с импульсными и иными ограничениями при ослаблении части этих ограничений. Упомянутое свойство (20.4) позволяет, согласно с конструкциям компактификаций, реализовать положение об асимптотической нечувствительности на языке окрестностей, а не только в терминах совпадения множеств притяжения. В настоящем изложении мы не ограничиваемся применением (20.4).

Отметим одно общее следствие: если $M \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$, то

$$(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, \tau_0(\mathcal{L})|_M) \quad (20.5)$$

— битопологическое пространство. Данное битопологическое пространство будем использовать при построении неполной модели расширения. Эта модель, как уже отмечалось, ориентирована на обслуживание линейных задач управления с разрывными зависимостями в коэффициентах при управляющих воздействиях. В этой связи нередко мы сталкиваемся с эффектом, имеющим смысл произведения разрывной функции на обобщенную. На основе (20.5) рассмотрим механизм встраивания упомянутой модели в общую конструкцию расширения абстрактных задач управления.

Далее фиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и пространство $\mathcal{R} \triangleq \mathbb{R}^n$. Напомним, что $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости n -мерного арифметического пространства $\mathcal{R}$. Фиксируем непустое множество Γ , элементы которого играют роль индексов. Полагаем

$$\mathbf{X} = \mathcal{R}^{\Gamma}. \quad (20.6)$$

Итак, в качестве пространства, в котором регистрируется нарушение ограничений, используется пространство n -вектор-функций на Γ , т.е. $\mathbf{X} = \{\Gamma \longrightarrow \mathcal{R}\}$.

Всюду в дальнейшем используем в качестве топологии τ_1 обычную топологию поточечной сходимости в $\mathbf{X}$ с традиционным оснащением множества $\mathcal{R}$. Иными словами, τ_1 есть, по определению, топология тихоновского произведения экземпляров топологического пространства

$$(\mathcal{R}, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \quad (20.7)$$

с индексным множеством Γ (см. в этой связи раздел 10). Можно рассматривать топологическое пространство

$$(\mathbf{X}, \tau_1) \quad (20.8)$$

как тихоновскую степень обычного n -мерного пространства (20.7) с индексным множеством Γ . Полагаем, что

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \quad (20.9)$$

(множество $\mathbf{Y}$ предполагается замкнутым в топологическом пространстве (20.8)). Условие (20.9) существенно для последующих построений. Введем $\mathcal{Y}_1$ в виде семейства всех канонических тихоновских окрестностей множества $\mathbf{Y}$. Для построения $\mathcal{Y}_1$ имеем в виду применение окрестностей,

формируемых на основе множеств из традиционно используемого базиса тихоновского произведения. Если $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K, \varepsilon)$ — множество всех $p \in \mathbf{X}$ таких, что

$$\exists q \in \mathbf{Y} : |p(\gamma)(i) - q(\gamma)(i)| < \varepsilon \quad \forall \gamma \in K \quad \forall i \in \overline{1, n}. \quad (20.10)$$

В силу соглашения раздела 2 в (20.10) интерпретируем элементы $\mathcal{R}$ как функции из $\overline{1, n}$ в $\mathbb{R}$, т.е. воспринимаем $\mathcal{R}$ как $\{\overline{1, n} \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Тогда полагаем

$$\mathcal{Y}_1 \triangleq \{\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) : (K, \varepsilon) \in \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[\in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_n[\mathbf{Y}]). \quad (20.11)$$

Предложение 20.1. Семейство $\mathcal{Y}_1$, определяемое в (20.11), удовлетворяет условию (19.39).

Доказательство. Данное предложение легко следует из определения тихоновского произведения (см. [23], [53]), но в целях полноты изложения приведем соответствующее доказательство. Из (20.11) вытекает, что

$$\mathcal{Y}_1 \in \beta[\mathbf{X}] : \mathcal{Y}_1 \subset \mathbb{N}_n[\mathbf{Y}].$$

В (19.1) осталось проверить основное свойство отделимости, фиксируя $x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$. С учетом (20.9) имеем свойство $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \in \tau_1$. Поэтому x есть точка множества, открытого в топологическом пространстве (20.8). Пусть ρ_n — (нормируемая) метрика, определяемая по аналогии с метрикой ρ_m (см. раздел 13), т.е. метрика, получаемая в виде ρ_m (см. раздел 13) при $m = n$. Топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ порождена метрикой ρ_n , причем, как видно из (20.10), для $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) = \{p \in \mathbf{X} \mid \exists q \in \mathbf{Y} : \rho_n(p(\gamma), q(\gamma)) < \varepsilon \quad \forall \gamma \in K\}. \quad (20.12)$$

С другой стороны, используя естественный базис топологического пространства (20.8), определяемого как тихоновская степень метризуемого топологического пространства (20.7), можно указать $\mathbb{K} \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\alpha \in]0, \infty[$ так, что

$$G_x \triangleq \{u \in \mathbf{X} \mid \rho_n(x(\gamma), u(\gamma)) < \alpha \quad \forall \gamma \in \mathbb{K}\} \subset \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$$

(рассуждения аналогичны [64, с. 59]). Введем

$$\Omega_x \triangleq \{v \in \mathbf{X} \mid \rho_n(x(\gamma), v(\gamma)) < \frac{\alpha}{2} \quad \forall \gamma \in \mathbb{K}\} \in N_n^0(x)$$

и следующую окрестность множества $\mathbf{Y}$:

$$\mathfrak{N}_\Gamma\left(\mathbf{Y}, \mathbb{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \in \mathcal{Y}_1$$

(см. (20.11)). Тогда имеем свойство

$$\mathfrak{N}_\Gamma\left(\mathbf{Y}, \mathbb{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \cap \Omega_x = \emptyset. \quad (20.13)$$

В самом деле, пусть (20.13) неверно. Выберем точку w из пересечения множеств в левой части (20.13). Тогда $w \in \mathbf{X}$ обладает свойством

$$\rho_n(x(\gamma), w(\gamma)) < \frac{\alpha}{2} \quad \forall \gamma \in \mathbb{K}. \quad (20.14)$$

С учетом (20.12) подберем вектор-функцию $y \in \mathbf{Y}$ такую, что

$$\rho_n(w(\gamma), y(\gamma)) < \frac{\alpha}{2} \quad \forall \gamma \in \mathbb{K}. \quad (20.15)$$

Из неравенства треугольника получаем (см. (20.14), (20.15)), что $y \in G_x$, т.е. $G_x \cap \mathbf{Y} \neq \emptyset$. Последнее невозможно, что и доказывает (20.13). Поскольку выбор x был произвольным, второе условие в (19.1) установлено, что и требовалось доказать. $\square$

Итак, мы ввели конкретный вариант топологического пространства (20.8) и семейство окрестностей множества $\mathbf{Y}$, обозначаемое через $\mathcal{Y}_1$ (см. (20.11)). Рассмотрим построение топологии $\tau_{\mathbf{u}}$ с тем, чтобы завершить конкретизацию битопологического пространства с топологиями (19.37). Это построение, однако, имеет смысл увязать с конструированием $\mathbf{g}$ (19.47). Ориентируемся при этом на обслуживание обширного класса задач управления линейными системами типа рассматриваемых в разделе 16.

Зададим следующее отображение (обобщенный матрицант):

$$(i, \gamma) \mapsto S_{i,\gamma} : \overline{1, n} \times \Gamma \longrightarrow B(E, \mathcal{L}). \quad (20.16)$$

Иными словами, имеет место

$$S_{i,\gamma} \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall i \in \overline{1, n} \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

С «матрицантом» (20.16) связываем его множество ступенчатозначности

$$\Gamma_0 \triangleq \{\gamma \in \Gamma \mid S_{i,\gamma} \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall i \in \overline{1, n}\}, \quad (20.17)$$

не исключая случай $\Gamma_0 = \emptyset$. Если $u \in \mathbf{X}$, $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то полагаем

$$N_{\Gamma}^0(u, K, \varepsilon) \triangleq \{v \in \mathbf{X} \mid (u(\gamma) = v(\gamma) \quad \forall \gamma \in K \cap \Gamma_0) \& \\ \& (|u(\gamma)(i) - v(\gamma)(i)| < \varepsilon \quad \forall \gamma \in K \setminus \Gamma_0 \quad \forall i \in \overline{1, n})\}. \quad (20.18)$$

В терминах множеств (20.18) определяем топологию $\tau_{\mathbf{u}}$ множества $\mathbf{X}$ следующим выражением:

$$\tau_{\mathbf{u}} \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbf{X}) \mid \forall u \in G \exists K \in \text{Fin}(\Gamma) \exists \varepsilon \in]0, \infty[: N_{\Gamma}^0(u, K, \varepsilon) \subset G\}. \quad (20.19)$$

Аксиомы топологии проверяются для семейства (20.19) непосредственно. Более того, $\tau_1 \subset \tau_{\mathbf{u}}$. В самом деле, если $u \in \mathbf{X}$, $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то, согласно, (20.18)

$$N_{\Gamma}^0(u, K, \varepsilon) \subset \{v \in \mathbf{X} \mid |u(\gamma)(i) - v(\gamma)(i)| < \varepsilon \quad \forall \gamma \in K \quad \forall i \in \overline{1, n}\}.$$

Множества последнего типа образуют стандартный базис топологического пространства (20.8). Итак, основное битопологическое пространство

$$(\mathbf{X}, \tau_1, \tau_{\mathbf{u}}) \quad (20.20)$$

построено. Представляет некоторый интерес структура топологического пространства

$$(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}). \quad (20.21)$$

В этой связи уместно выделить три возможных случая, характеризующих топологическое пространство (20.21):

- 1) $\Gamma_0 = \emptyset$;
- 2) $\Gamma_0 = \Gamma$;
- 3) $(\Gamma_0 \neq \emptyset) \& (\Gamma \setminus \Gamma_0 \neq \emptyset)$.

Ниже используем метрику ρ_n , определяемую соотношениями из раздела 13 при условии $m = n$. Тогда в случае 1) имеем из (20.18), что $\forall u \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \text{Fin}(\Gamma) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$N_{\Gamma}^0(u, K, \varepsilon) = \{v \in \mathbf{X} \mid \rho_n(u(\gamma), v(\gamma)) < \varepsilon \quad \forall \gamma \in K\}.$$

В итоге (см. (20.19) и определение топологического пространства (20.8)) имеем для данного случая равенство $\tau_1 = \tau_{\mathbf{u}}$. Итак, у нас

$$(\Gamma_0 = \emptyset) \implies (\tau_1 = \tau_{\mathbf{u}}). \quad (20.22)$$

С учетом (20.22) случай 1) можно интерпретировать как случай «неконтрастного» диапазона ограничений асимптотического характера.

Рассмотрим случай 2). Из (20.17) следует, что «матрицант» (20.16) имеет своими компонентами только ступенчатые функции. В рассматриваемом случае 2) из (20.18) $\forall u \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \text{Fin}(\Gamma) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$N_{\Gamma}^0(u, K, \varepsilon) = \{v \in \mathbf{X} \mid u(\gamma) = v(\gamma) \quad \forall \gamma \in K\}.$$

Из (20.19) в этом частном случае имеем свойство: $\tau_{\mathbf{u}}$ есть семейство всех множеств $G \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ таких, что

$$\forall u \in G \exists K \in \text{Fin}(\Gamma) : \{v \in \mathbf{X} \mid u(\gamma) = v(\gamma) \quad \forall \gamma \in K\} \subset G.$$

При условии $\tau_{\partial}^{(n)} \triangleq \mathcal{P}(\mathcal{R})$ это означает, что в рассматриваемом случае 2) $\tau_{\mathbf{u}}$ есть тихоновское произведение экземпляров топологического пространства

$$(\mathcal{R}, \tau_{\partial}^{(n)}) \quad (20.23)$$

с индексным множеством Γ , т.е. (20.21) — тихоновская степень пространства $\mathcal{R}$ с дискретной топологией $\tau_{\partial}^{(n)}$. Это утверждение дополняет (20.22). Итак, в случае

$$(\Gamma_0 = \emptyset) \vee (\Gamma_0 = \Gamma)$$

имеем в виде $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$ тихоновскую степень n -мерного пространства $\mathcal{R}$ с оснащением в виде $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ или $\tau_{\partial}^{(n)}$. В обоих случаях индексное множество отождествляется с Γ .

Рассмотрим отдельно случай 3), полагая $\Gamma_1 \triangleq \Gamma \setminus \Gamma_0$. В рассматриваемом третьем случае

$$(\Gamma_0 \neq \emptyset) \& (\Gamma_1 \neq \emptyset). \quad (20.24)$$

Используя (20.24), введем в рассмотрение топологию $\mathcal{T}_0$ множества

$$\mathcal{R}^{\Gamma_0} = \{\Gamma_0 \longrightarrow \mathcal{R}\},$$

соответствующую тихоновскому произведению экземпляров топологического пространства (20.23) с индексным множеством Γ_0 . Топологическое пространство

$$(\mathcal{R}^{\Gamma_0}, \mathcal{T}_0) \quad (20.25)$$

есть тихоновская степень топологического пространства (20.23), отвечающая использованию Γ_0 в качестве множества индексов (т.е. в качестве показателя степени). Далее, введем топологию $\mathcal{T}_1$ множества

$$\mathcal{R}^{\Gamma_1} = \{\Gamma_1 \longrightarrow \mathcal{R}\},$$

соответствующую тихоновскому произведению экземпляров топологического пространства (20.7) с индексным множеством Γ_1 . Следовательно, топологическое пространство

$$(\mathcal{R}^{\Gamma_1}, \mathcal{T}_1) \quad (20.26)$$

является тихоновской степенью топологического пространства (20.7) при использовании индексного множества Γ_1 . Введем, наконец, топологию

$$\mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1$$

непустого множества $\mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}$, соответствующую стандартному произведению [23, гл.3] двух топологических пространств: (20.25) и (20.26). Иными словами, топологическое пространство

$$(\mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}, \mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1) \quad (20.27)$$

есть произведение топологических пространств (20.25) и (20.26), понимаемое традиционно. Более того, топологическое пространство (20.27) отождествимо (при нашем условии (20.24)) с топологическим пространством (20.21). В рассматриваемом случае 3) справедливо

Предложение 20.2. *Пространства (20.21) и (20.27) гомеоморфны. Конкретный гомеоморфизм топологического пространства (20.21) на топологическое пространство (20.27) имеет вид*

$$u \longmapsto ((u|_{\Gamma_0}), (u|_{\Gamma_1})) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}. \quad (20.28)$$

Доказательство. Обозначим через φ биективное (как легко проверить) отображение (20.28), а через ψ — отображение, обратное по отношению к φ , т.е.

$$\psi : \mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1} \longrightarrow \mathbf{X}$$

обладает следующими свойствами:

$$((\psi \circ \varphi)(x) = x \quad \forall x \in \mathbf{X}) \& ((\varphi \circ \psi)(z) = z \quad \forall z \in \mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}). \quad (20.29)$$

С учетом (20.29) нетрудно установить структуру оператора ψ . Пусть $z \in \mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}$. Кроме того, пусть $z_0 \in \mathcal{R}^{\Gamma_0}$ и $z_1 \in \mathcal{R}^{\Gamma_1}$ таковы, что $z = (z_0, z_1)$. Введем $u_z \in \mathbf{X}$ по следующему правилу:

$$(u_z(\gamma) \triangleq z_0(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0) \& (u_z(\gamma) \triangleq z_1(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma_1).$$

Тогда $(u_z|_{\Gamma_0}) = z_0$ и $(u_z|_{\Gamma_1}) = z_1$. В силу (20.28) имеем равенство $\varphi(u_z) = (z_0, z_1) = z$. Последнее означает, что $u_z = \psi(z)$. Так как выбор z был произвольным, структура ψ является следующей: если

$$\zeta \in \mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}$$

имеет своими компонентами $\zeta_0 \in \mathcal{R}^{\Gamma_0}$ и $\zeta_1 \in \mathcal{R}^{\Gamma_1}$, т.е. $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1)$, то $\psi(\zeta) \in \mathbf{X}$ имеет вид

$$(\psi(\zeta)(\gamma) = \zeta_0(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0) \& (\psi(\zeta)(\gamma) = \zeta_1(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma_1).$$

Таким образом, $\psi(\zeta)$ есть склейка ζ_0 и ζ_1 .

Проверим свойство непрерывности оператора φ . Для этого выберем произвольное множество

$$\mathbb{G}_* \in \mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1.$$

Рассмотрим множество $\varphi^{-1}(\mathbb{G}_*)$. Пусть $x_* \in \varphi^{-1}(\mathbb{G}_*)$, т.е. $x_* \in \mathbf{X}$ и при этом $\varphi(x_*) \in \mathbb{G}_*$. Согласно (20.28),

$$\varphi(x_*) = (x'_*, x''_*),$$

где $x'_* \triangleq (x_*|_{\Gamma_0})$ и $x''_* \triangleq (x_*|_{\Gamma_1})$. Тогда можно указать множества $\mathbb{G}'_* \in \mathcal{T}_0$ и $\mathbb{G}''_* \in \mathcal{T}_1$ такие, что

$$(x'_* \in \mathbb{G}'_*) \& (x''_* \in \mathbb{G}''_*) \& (\mathbb{G}'_* \times \mathbb{G}''_* \subset \mathbb{G}_*). \quad (20.30)$$

Возможность выбора множеств со свойствами (20.30) следует из определения канонического базиса произведения двух топологических пространств. По определению топологии $\mathcal{T}_0$ можно указать такое множество $K_0 \in \text{Fin}(\Gamma_0)$, что

$$G'_0 \triangleq \{v \in \mathcal{R}^{\Gamma_0} \mid x'_*(\gamma) = v(\gamma) \quad \forall \gamma \in K_0\} \subset \mathbb{G}'_*. \quad (20.31)$$

Здесь мы использовали первое условие в (20.30). Из второго условия в (20.30) и определения топологии $\mathcal{T}_1$ вытекает, что для некоторых $K_1 \in \text{Fin}(\Gamma_1)$ и $\varepsilon_1 \in]0, \infty[$

$$G''_0 \triangleq \{v \in \mathcal{R}^{\Gamma_1} \mid \rho_n(x''_*(\gamma), v(\gamma)) < \varepsilon_1 \quad \forall \gamma \in K_1\} \subset \mathbb{G}''_*. \quad (20.32)$$

На основе множеств G'_0 и G''_0 (см. (20.31), (20.32)) конструируем некоторое новое множество G_0 , $G_0 \subset \mathbf{X}$. Заметим, что $K_0 \cup K_1 \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon_1 \in]0, \infty[$ определяют это множество в следующем виде:

$$G_0 \triangleq N_{\Gamma}^0(x_*, K_0 \cup K_1, \varepsilon_1) = \{v \in \mathbf{X} \mid (x_*(\gamma) = v(\gamma) \quad \forall \gamma \in K_0) \& \\ \& (|x_*(\gamma)(i) - v(\gamma)(i)| < \varepsilon_1 \quad \forall \gamma \in K_1 \quad \forall i \in \overline{1, n})\}. \quad (20.33)$$

Здесь мы учли (20.18) и свойства K_0 , K_1 . Выберем произвольно $w \in G_0$, получая, в частности, точку $w \in \mathbf{X}$. Тогда, согласно (20.28), для

$$(w' \triangleq (w|_{\Gamma_0}) \in \mathcal{R}^{\Gamma_0}) \& (w'' \triangleq (w|_{\Gamma_1}) \in \mathcal{R}^{\Gamma_1})$$

получаем равенство $\varphi(w) = (w', w'')$. Из (20.33) имеем

$$(x'_*(\gamma) = w'(\gamma) \quad \forall \gamma \in K_0) \& (|x''_*(\gamma)(i) - w''(\gamma)(i)| < \varepsilon_1 \quad \forall \gamma \in K_1 \quad \forall i \in \overline{1, n}). \quad (20.34)$$

Тогда из (20.31) и (20.34)

$$w' \in G'_0. \quad (20.35)$$

Далее, из (20.34) и определения ρ_n :

$$\rho_n(x''_*(\gamma), w''(\gamma)) < \varepsilon_1 \quad \forall \gamma \in K_1.$$

С учетом (20.32) имеем свойство

$$w'' \in G''_0,$$

а тогда (см. (20.35))

$$\varphi(w) = (w', w'') \in G'_0 \times G''_0.$$

С учетом (20.30)–(20.32) получаем, что $\varphi(w) \in \mathbb{G}_*$, т.е.

$$w \in \varphi^{-1}(\mathbb{G}_*). \quad (20.36)$$

Поскольку выбор w был произвольным, из (20.36) следует, что

$$G_0 \subset \varphi^{-1}(\mathbb{G}_*).$$

С учетом (20.33) имеем следующее важное положение:

$$\forall x \in \varphi^{-1}(\mathbb{G}_*) \exists K \in \text{Fin}(\mathbf{\Gamma}) \exists \varepsilon \in]0, \infty[: N_{\mathbf{\Gamma}}^0(x, K, \varepsilon) \subset \varphi^{-1}(\mathbb{G}_*). \quad (20.37)$$

В силу (20.19), (20.37) справедливо положение: $\varphi^{-1}(\mathbb{G}_*) \in \tau_{\mathbf{u}}$. Поскольку и выбор $\mathbb{G}_*$ был произвольным, то имеем требуемое свойство непрерывности φ :

$$\varphi \in C(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}, \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_0} \times \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_1}, T_0 \otimes T_1). \quad (20.38)$$

Покажем, что отображение ψ непрерывно. Пусть $\Omega \in \tau_{\mathbf{u}}$. Рассмотрим множество

$$\psi^{-1}(\Omega) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_0} \times \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_1}).$$

Выберем произвольно точку $p \in \psi^{-1}(\Omega)$. Тогда, в частности,

$$p \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_0} \times \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_1}.$$

Кроме того, имеет место свойство

$$\psi(p) \in \Omega. \quad (20.39)$$

По выбору Ω из (20.19) и (20.39) следует, что для некоторых $\mathbb{K} \in \text{Fin}(\mathbf{\Gamma})$ и $\alpha \in]0, \infty[$

$$N_{\mathbf{\Gamma}}^0(\psi(p), \mathbb{K}, \alpha) \subset \Omega. \quad (20.40)$$

С учетом (20.31) выберем произвольно $\gamma_0 \in \mathbf{\Gamma}_0$ и $\gamma_1 \in \mathbf{\Gamma}_1$, после чего рассмотрим множество

$$\tilde{\mathbb{K}} \triangleq \mathbb{K} \cup \{\gamma_0; \gamma_1\} \in \text{Fin}(\mathbf{\Gamma}),$$

$\mathbb{K} \subset \tilde{\mathbb{K}}$, тогда (см. (20.18), (20.40))

$$N_{\mathbf{\Gamma}}^0(\psi(p), \tilde{\mathbb{K}}, \alpha) \subset N_{\mathbf{\Gamma}}^0(\psi(p), \mathbb{K}, \alpha) \subset \Omega, \quad (20.41)$$

причем $\tilde{\mathbb{K}}_0 \triangleq \tilde{\mathbb{K}} \cap \mathbf{\Gamma}_0 \in \text{Fin}(\mathbf{\Gamma}_0)$ и $\tilde{\mathbb{K}}_1 \triangleq \tilde{\mathbb{K}} \cap \mathbf{\Gamma}_1 \in \text{Fin}(\mathbf{\Gamma}_1)$. Введем теперь $p_0 \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_0}$ и $p_1 \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_1}$ такие, что $p = (p_0, p_1)$. Мы знаем, что $\psi(p)$ реализуется посредством склеивания p_0 и p_1 . Именно, $\psi(p) \in \mathbf{X}$ определяется условиями

$$(\psi(p)(\gamma) = p_0(\gamma) \quad \forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}_0) \& (\psi(p)(\gamma) = p_1(\gamma) \quad \forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}_1). \quad (20.42)$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &\triangleq \{v \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_0} \mid p_0(\gamma) = v(\gamma) \quad \forall \gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_0\}, \\ \Lambda_1 &\triangleq \{v \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_1} \mid \rho_n(p_1(\gamma), v(\gamma)) < \alpha \quad \forall \gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_1\}. \end{aligned}$$

Используя стандартное представление канонического базиса тихоновского произведения, получаем, что

$$\Lambda_0 \in N_{T_0}^0(p_0). \quad (20.43)$$

С другой стороны, из аналогичного представления базиса топологии поточечной сходимости имеем свойство

$$\Lambda_1 \in N_{T_1}^0(p_1). \quad (20.44)$$

В случае (20.44), учитываем тот факт, что топологическое пространство (20.7) метризуемо посредством ρ_n . Из (20.43), (20.44) получаем свойство

$$\Lambda_0 \times \Lambda_1 \in N_{T_0 \otimes T_1}^0(p). \quad (20.45)$$

Покажем, что справедливо вложение

$$\Lambda_0 \times \Lambda_1 \subset \psi^{-1}(\Omega). \quad (20.46)$$

Пусть выбрано произвольно $q \in \Lambda_0 \times \Lambda_1$. Подберем $q_0 \in \Lambda_0$ и $q_1 \in \Lambda_1$ так, что $q = (q_0, q_1)$. Тогда, в частности, $q_0 \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_0}$ и $q_1 \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}_1}$. При этом, как уже отмечалось в представлении для оператора ψ , вектор-функция $\psi(q) \in \mathbf{X}$ имеет следующий вид:

$$(\psi(q)(\gamma) = q_0(\gamma) \quad \forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}_0) \& (\psi(q)(\gamma) = q_1(\gamma) \quad \forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}_1). \quad (20.47)$$

Из определения множества (20.43) имеем, что $p_0(\gamma) = q_0(\gamma)$ при $\gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_0$. Поскольку $\tilde{\mathbb{K}}_0 \subset \Gamma_0$, то (см. (20.42), (20.47))

$$\psi(p)(\gamma) = \psi(q)(\gamma) \quad \forall \gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_0. \quad (20.48)$$

Из определения Λ_1 (20.44) получаем, что $\rho_n(p_1(\gamma), q_1(\gamma)) < \alpha$ при $\gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_1$. Из (20.42), (20.47) следует, что

$$\rho_n(\psi(p)(\gamma), \psi(q)(\gamma)) < \alpha \quad \forall \gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_1.$$

Иными словами, имеет место

$$|\psi(p)(\gamma)(i) - \psi(q)(\gamma)(i)| < \alpha \quad \forall \gamma \in \tilde{\mathbb{K}}_1 \quad \forall i \in \overline{1, n}. \quad (20.49)$$

Из (20.18), (20.48), (20.49) следует, что

$$\psi(q) \in N_{\Gamma}^0(\psi(p), \tilde{\mathbb{K}}, \alpha).$$

С учетом (20.41) получаем, что $\psi(q) \in \Omega$, т.е. $q \in \psi^{-1}(\Omega)$. Поскольку q выбиралось произвольно, то вложение (20.46) установлено, тогда в силу (20.45)

$$\psi^{-1}(\Omega) \in N_{\mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1}(p).$$

Поскольку выбор p был произвольным, то установлено, что

$$\psi^{-1}(\Omega) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}) : \psi^{-1}(\Omega) \in N_{\mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1}(r) \quad \forall r \in \psi^{-1}(\Omega).$$

Это означает (см. [7, гл. I, § 2]) справедливость свойства

$$\psi^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1. \quad (20.50)$$

Поскольку и выбор Ω был произвольным, то из (20.50) имеем требуемое свойство непрерывности

$$\psi \in C(\mathcal{R}^{\Gamma_0} \times \mathcal{R}^{\Gamma_1}, \mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{T}_1, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}). \quad (20.51)$$

Из (20.38) и (20.51) получаем искомое утверждение. $\square$

Мы рассмотрели все возможные варианты реализации топологии $\tau_{\mathbf{u}}$, определяемой в (20.19) в терминах множества (20.17).

Если не оговорено противное, то в дальнейшем (20.8), (20.20) и (20.21) понимаются только в смысле определений настоящего раздела, учитывая (20.11) и (19.38), в которых $\tau_{\mathbf{u}}$ конкретизируется формулой (20.19).

В отношении $(\mathbf{H}, \vartheta)$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{h}$ мы не делаем каких-либо дополнительных предположений, стремясь при этом сохранить возможность различных конкретизаций. Последующее достаточно общее построение можно реализовать, конкретизируя неполную модель расширения. В этой связи полагаем, что фиксировано множество

$$\mathbf{K} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \quad (20.52)$$

Конкретный выбор множества (20.52) не является существенным, но будем следовать (20.52), после чего битопологическое пространство (19.46) конкретизируется следующим выражением

$$(t_1 \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}) \& (t_{\mathbf{u}} \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}). \quad (20.53)$$

В силу (20.53) битопологическое пространство (19.46) является произвольным, но фиксированным (в дальнейших рассуждениях) вариантом триплета (20.5). Пусть

$$g : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{X} \quad (20.54)$$

определяется условиями: если $\mu \in \mathbf{K}$, то вектор-функция $g(\mu) \in \mathbf{X}$ есть, по определению, отображение

$$\gamma \longmapsto \left(\int_E S_{i,\gamma} d\mu \right)_{i \in \overline{1, n}} : \Gamma \longrightarrow \mathcal{R}. \quad (20.55)$$

Разумеется, (20.54), (20.55) — весьма конкретное правило. Оно ориентировано на задачи, подобные задачам управления второй главы работы.

Предложение 20.3. *Оператор g (20.54), (20.55) является универсально непрерывным в смысле (19.47): для конкретной пары битопологических пространств, определяемой в (20.8), (20.19), (20.20), (20.52) и (20.53), имеет место свойство*

$$g \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{X}, \tau_1) \cap C(\mathbf{K}, t_u, \mathbf{X}, \tau_u).$$

Доказательство. Доказательство приведено в [62, с. 538]. Ограничимся обсуждением краткой схемы. Из (20.53) и определения τ_1 вытекает, что

$$g \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{X}, \tau_1). \quad (20.56)$$

Фактически (20.56) следует из (20.16) и определения $*$ -слабой топологии (см. (10.2)). Для обоснования включения

$$g \in C(\mathbf{K}, t_u, \mathbf{X}, \tau_u) \quad (20.57)$$

следует прежде всего учесть свойства (19.46). Допустим, что выбрана произвольная направленность $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ в $\mathbf{K}$: $(\mathbf{D}, \preceq)$ — непустое направленное множество и $\varphi \in \mathbf{K}^{\mathbf{D}}$. Кроме того, пусть $\eta \in \mathbf{K}$. Предположим, что (см. (2.3))

$$(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{t_u} \eta. \quad (20.58)$$

С учетом основного свойства (19.46) и (20.58) получаем сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{t_1} \eta. \quad (20.59)$$

Из (20.53) и (20.58) вытекает сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \eta. \quad (20.60)$$

Далее, из (20.59) следует сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \eta. \quad (20.61)$$

(В связи с (20.60), (20.61) см. общие положения [23, гл. 2]; см. также [64, с. 36].) Из (20.17) и (20.60) имеем, что $\forall \gamma \in \Gamma_0 \forall i \in \overline{1, n} \exists d_1 \in \mathbf{D} \forall d_2 \in \mathbf{D}$

$$(d_1 \preceq d_2) \implies \left(\int_E S_{i,\gamma} d\varphi(d_2) = \int_E S_{i,\gamma} d\eta \right). \quad (20.62)$$

Здесь мы использовали простейшие свойства нульмерной топологии $\tau_0(\mathcal{L})$, а также определение элементарного интеграла [57, с.68]. Из (20.16) и (20.61) вытекает, что $\forall \gamma \in \Gamma \forall i \in \overline{1, n}$

$$\left(\mathbf{D}, \preceq, \left(\int_E S_{i,\gamma} d\varphi(\delta) \right)_{\delta \in \mathbf{D}} \right) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \int S_{i,\gamma} d\eta.$$

В силу (20.55) получаем $\forall \gamma \in \Gamma$

$$(\mathbf{D}, \preceq, ((g \circ \varphi)(\delta)(\gamma))_{\delta \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}} g(\eta)(\gamma). \quad (20.63)$$

Из (20.18), (20.62) и (20.63) получаем, что $\forall K \in \text{Fin}(\Gamma) \forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists \delta_1 \in \mathbf{D} \forall \delta_2 \in \mathbf{D}$

$$(\delta_1 \preceq \delta_2) \implies ((g \circ \varphi)(\delta_2) \in N_{\Gamma}^0(g(\eta), K, \varepsilon)).$$

С учетом (20.19) (имеем в виде следствия) сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, g \circ \varphi) \xrightarrow{\tau_u} g(\eta). \quad (20.64)$$

Итак, (20.58) $\implies$ (20.64). Поскольку выбор направленности $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ и меры η был произвольным, установлено (20.57); см. в этой связи [23, 53], а также [64, с. 47]. Из (20.56), (20.57) получаем требуемое утверждение. $\square$

Для кортежа $(\mathbf{K}, t_1, t_u, g)$, определяемого в (20.52), (20.53)–(20.55), мы проверили часть свойств, которые постулировались в (19.46)–(19.48) для неполной модели расширения. Однако, у нас не введено правило погружения $\mathbf{m}$. Таким образом, неполная модель расширения пока не построена.

Напомним, однако, что (см. раздел 19) множества $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и отображение s предполагались заданными. При этом множество $\mathbf{X}$ мы конкретизировали и ввели пару сравнимых топологий, получая битопологическое пространство $(\mathbf{X}, \tau_1, \tau_u)$ (20.20). Наконец, мы построили в этих терминах конкретные семейства $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_u$, согласующиеся с требованиями (19.38)–(19.40) и формирующие контрастный диапазон асимптотических ограничений. Эти семейства (окрестностей) связаны с замкнутым в смысле τ_1 множеством $\mathbf{Y}$ (см. (20.9)) в пространстве n -вектор-функций. Но множество $\mathbf{F}$ и оператор s мы не конкретизировали (в разделе 21, мы увидим, что в этом есть определенный смысл, т.к. предлагаемая схема имеет весьма различные модификации). Поэтому само конструирование неполной модели расширения является условным, что, по-видимому, неизбежно, если мы стремимся охватить единой схемой достаточно широкий круг различных содержательных задач. В то же время предложение 20.3 показывает, что в плане построения неполной модели расширения достигнуто существенное продвижение. Для сохранения достаточной степени общности потребуем, чтобы для построенного кортежа $(\mathbf{K}, t_1, t_u, g)$ существовал (при заданных $\mathbf{F}$ и s) оператор погружения

$$\mathbf{m} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{K}, \quad (20.65)$$

для которого условия (19.48) выполнены при $\mathbf{g} = g$, а затем (в следующем разделе) рассмотрим два естественных класса задач, идейно связанных с задачами импульсного управления линейными системами с разрывной правой частью соответствующего дифференциального уравнения. В этих двух классах задач все перечисленные выше условия выполняются.

Итак, на данном этапе общих построений мы не конкретизируем непустое множество $\mathbf{F}$ и оператор s . Вместо этого полагаем, что $\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \neq \emptyset$, и $s \in \mathbf{X}^{\mathbf{F}}$ таковы, что при некотором выборе отображения $\mathbf{m}$ (20.65) выполняются условия (19.48) при $\mathbf{g} = g$. Упомянутый оператор $\mathbf{m}$ (см. (20.65)) со свойствами (19.48) фиксируем, получая в итоге кортеж

$$(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g). \quad (20.66)$$

Из (20.52), (20.53) и предложения 20.3 вытекает

Предложение 20.4. *Кортеж (20.66) есть неполная модель расширения в смысле (19.46)–(19.48).*

Как следствие из теоремы 19.1 вытекает с учетом (20.55) представление

$$\begin{aligned} (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] &= (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] = \\ &= g^{-1}(\mathbf{Y}) = \{\mu \in \mathbf{K} \mid \left(\left(\int_E S_{i,\gamma} d\mu \right)_{i \in \overline{1,n}} \right)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbf{Y}\}, \end{aligned} \quad (20.67)$$

где параметры (19.57) конкретизированы в соответствии с параметрами неполной модели расширения (20.66). В (20.67) имеем (вспомогательное по смыслу нашей задачи) множество притяжения, универсальное в достаточно контрастном диапазоне асимптотических ограничений, определяемых посредством (20.11) и (19.38) в конкретизации (20.19). Далее будет рассмотрено построение модели расширения на основе (20.66). В следующем разделе обсудим некоторые естественные версии оператора погружения $\mathbf{m}$.

21. АБСТРАКТНЫЕ АНАЛОГИ ИМПУЛЬСНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ И ПРОЦЕДУРЫ КОМПАКТИФИКАЦИИ

В предложении 20.4 и в (20.67) мы пользовались допущением о существовании оператора погружения пространства обычных решений в пространство обобщенных элементов. Для этого оператора предполагались выполненными некоторые специальные свойства. Последние были связаны, в частности, с множеством $\mathbf{F}$ и оператором s исходной задачи. Рассмотрим два варианта погружения $\mathbf{F}$ в $\mathbf{K}$ (20.52), отвечающие идее расширения импульсных ограничений в задаче управления. Следуя конструкциям разделов 19, 20, рассмотрим случай, когда задано непустое множество E произвольной природы. Иными словами, E не отождествляется, вообще говоря, с каким-либо

промежутком в $\mathbb{R}$. В конце настоящего раздела обсудим следствие, непосредственно связанное с управлением при импульсных ограничениях.

При первой конкретизации неполной модели расширения из раздела 20 ориентируемся на предложение 15.5. Итак, пусть выполнено (10.1), а $\mathbf{F}$ есть непустое подмножество $B(E, \mathcal{L})$, т.е.

$$\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L})). \quad (21.1)$$

Условие (21.1) будет соблюдаться до тех пор, пока не будет оговорено противное. Кроме того, пусть $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Триплет

$$(E, \mathcal{L}, \eta) \quad (21.2)$$

является аналогом пространства с мерой. Именуем (21.2) конечно-аддитивным пространством с мерой.

В отношении множества $\mathbf{F}$ (аналог множества возможных управлений) полагаем, что

$$\exists \alpha \in [0, \infty[: \int_E |f| d\eta \leq \alpha \quad \forall f \in \mathbf{F}. \quad (21.3)$$

Свойство (21.3) подобно (15.49). Из (21.1), (21.3) и предложения 15.5 имеем, что

$$\mathbf{K} \triangleq \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\}. \quad (21.4)$$

Из (20.4) и (21.4) следует (20.52), и мы получаем версию битопологического пространства (19.46), где оснащения множества $\mathbf{K}$ соответствуют (20.53). Заметим, что в (15.39), (15.40), (15.43), (15.44) и в предложении 15.4 даны конкретные версии конструкции (21.1), (21.3), (21.4). Возвращаясь к последним трем соотношениям, введем требуемый вариант оператора $\mathbf{s}$, соответствующий (20.6), полагая, что $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^{\mathbf{F}}$ действует по правилу: если $f \in \mathbf{F}$, то (см. (21.1)) $\mathbf{s}(f) \in \mathbf{X}$ есть, по определению, отображение

$$\gamma \longmapsto \left(\int_E S_{i,\gamma} f d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathcal{R}. \quad (21.5)$$

Из (21.5) видно, что в нашем случае оператор $\mathbf{s}$ в существенной ее части реализует некий абстрактный аналог формулы Коши (см. раздел 13). Возможные сдвиги, обусловленные в данной конкретизации ненулевыми начальными условиями системы и постоянно действующими возмущениями, могут быть учтены при выборе множества (20.9).

Из (15.6), (20.55) и (21.5) вытекает очевидное определение оператора $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$. В данном случае полагаем, что $\mathbf{m}$ есть отображение

$$f \longmapsto f * \eta : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{K} \quad (21.6)$$

(см. (21.4)). Тогда, по определению множества $\mathbf{K}$ в (21.4), в (21.6) имеем оператор плотного погружения множества $\mathbf{F}$ в топологическое пространство $(\mathbf{K}, t_1)$, поскольку (см. (20.53))

$$\text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_1) = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}.$$

Это свойство было бы вполне достаточным для использования в простой модели расширения из раздела 17. В (19.48) постулируется, однако, свойство плотности множества $\mathbf{m}^1(\mathbf{F})$ в топологическом пространстве $(\mathbf{K}, t_u)$. При этом (см. (19.46))

$$\text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_u) \subset \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_1) = \mathbf{K}. \quad (21.7)$$

Не вдаваясь в подробности, ограничимся частными случаями реализации множества $\mathbf{F}$, согласно (21.1), (21.3). Опираясь на утверждения раздела 15, положим, что $\mathbf{F}$ определяется одним из следующих способов:

1) $\mathbf{F}$ есть множество (21.1), для которого при некотором $b \in [0, \infty[$ имеет место

$$\{f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leq b\} \subset \mathbf{F} \subset \{f \in B(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leq b\};$$

2) множество $\mathbf{F}$ (21.1) удовлетворяет при некотором $b \in [0, \infty[$ условиям

$$\{f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta \leq b\} \subset \mathbf{F} \subset \{f \in B^+(E, \mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta \leq b\};$$

3) множество $\mathbf{F}$ (21.1) таково, что при некотором $b \in [0, \infty[$ имеет место

$$\{f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta = b\} \subset \mathbf{F} \subset \{f \in B^+(E, \mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta = b\};$$

4) для некоторых $r \in \mathcal{N}$, $(c_i)_{i \in \overline{1, r}} \in \mathbb{R}_+^r$, и кортежа $(L_i)_{i \in \overline{1, r}} \in \mathcal{L}^r$ такого, что

$$E = \bigcup_{i=1}^r L_i,$$

множество $\mathbf{F}$ (21.1) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \{f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_{L_k} |f| d\eta \leq c_k \quad \forall k \in \overline{1, r}\} \subset \mathbf{F} \subset \\ \subset \{f \in B(E, \mathcal{L}) \mid \int_{L_k} |f| d\eta \leq c_k \quad \forall k \in \overline{1, r}\}. \end{aligned}$$

При упомянутых условиях на множество $\mathbf{F}$ (см. 1)-4) при произвольном выборе соответствующих параметров) имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{u}}) &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}\}, t_{\mathbf{u}}) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}\}, \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (21.8)$$

В (21.8) учтены свойства «универсальной» (в пределах $\mathfrak{M}[\mathcal{L}]$) плотности, упомянутые в (15.39), (15.43), (15.44) и в предложениях 15.3, 15.4. На самом деле, класс множеств $\mathbf{F}$ (21.1), удовлетворяющих первому условию в (19.48) и одновременно согласующихся с (20.52), существенно шире. Можно, в частности, отметить $B_0^+(E, \mathcal{L})$, $B^+(E, \mathcal{L})$ и иметь при этом в виду (15.42). Мы ограничились случаями 1) -4), так как наряду с реализацией (21.8) здесь достигается компактификация $\mathbf{F}$ при погружении в пространство обобщенных элементов (см. (21.4)). Отметим, что для множества $\mathbf{F}$, удовлетворяющего (21.3), равенство замыканий в (21.7) может не достигаться. В самом деле, рассмотрим следующий очень простой

Пример. Пусть $\eta(E) \in]0, \infty[$, а $\mathbf{F}$ есть множество всех функций-констант

$$\varphi_c \triangleq c\chi_E[E], \quad c \in [0, 1[.$$

Тогда условия (21.1) и (21.3) выполнены (в (21.3) в качестве α можно выбрать число $\eta(F)$). Мера η является элементом *-слабого (и даже сильного) замыкания множества $\mathbf{m}^1(\mathbf{F})$, где $\mathbf{m}$ действует по правилу (21.6); итак,

$$\eta \in \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}\}, t_1).$$

Напомним, что $\mathbf{K}$ определено (по $\mathbf{F}$) посредством (21.4), а t_1 соответствует (при этом варианте множества $\mathbf{K}$) соотношению (20.53). Однако

$$\eta \notin \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{u}}). \quad (21.9)$$

Действительно, рассмотрим множество

$$\mathbf{N} \triangleq \{\mu \in \mathbf{K} \mid \mu(E) = \eta(E)\},$$

являющееся окрестностью $\eta \in \mathbf{K}$ в смысле топологии $t_{\mathbf{u}}$ (20.53) (в этой связи см. [57, с. 81]). Тогда при $c \in [0, 1[$ имеем $(\varphi_c * \eta)(E) = c\eta(E) < \eta(E)$. В итоге, $\varphi_c * \eta \notin \mathbf{N}$. Нами установлено, что

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{m}^1(\mathbf{F}) = \emptyset,$$

следовательно (21.9) действительно имеет место. Установлено также, что

$$\text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_1) \setminus \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{u}}) \neq \emptyset.$$

Требуемое свойство установлено, замыкания в (21.7) могут (при условии (21.3)) не совпадать.

После сделанных относительно $\mathbf{F}$ предположений о выполнении одного из условий 1) -4) (в последующих разделах будут рассматриваться и другие версии множества (21.1)) для оператора $\mathbf{s}$, соответствующего (21.5), в (19.48) получаем справедливость второго условия. Действительно, из (15.6), (20.55), (21.5) и (21.6) следует $\forall f \in \mathbf{F} \forall \gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(f)(\gamma) &= \left(\int_E S_{i,\gamma} f d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} = \left(\int_E S_{i,\gamma} d(f * \eta) \right)_{i \in \overline{1,n}} = \left(\int_E S_{i,\gamma} d\mathbf{m}(f) \right)_{i \in \overline{1,n}} = \\ &= g(\mathbf{m}(f))(\gamma) = (g \circ \mathbf{m})(f)(\gamma). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$. С учетом (21.8) получаем (для множества $\mathbf{F}$ одного из упомянутых типов; см. 1)-4)) справедливость (19.48) при $\mathbf{g} = g$. Итак, получен (см. предложение 20.3) конкретный вариант неполной модели расширения, ориентированной на случай, когда оператор $\mathbf{s}$ определяется посредством (21.5). Упомянутый вариант $\mathbf{s}$ является весьма актуальным в связи с задачами управления, обсуждаемыми во второй главе.

Совсем кратко рассмотрим другой вариант погружения некоторого естественным образом определяемого множества $\mathbf{F}$ в соответствующее пространство обобщенных элементов. При этом сама природа $\mathbf{F}$ будет иной. Мы ориентируемся на конструкции [58, §§ 7.2, 7.3]. Обсудим возникающую конкретную ситуацию на содержательном уровне. Речь идет об использовании в качестве обычных решений (т.е. элементов $\mathbf{F}$) конечных взвесей точек множества E , действие которых на каждую функцию $f \in \mathbb{B}(E)$ можно интерпретировать как

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) \in \mathbb{R}, \quad (21.10)$$

где $k \in \mathcal{N}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_1 \in E, \dots, x_k \in E$. Кортеж

$$(k, \alpha_1, \dots, \alpha_k, x_1, \dots, x_k)$$

подлежит выбору с соблюдением некоторых ограничений. Этот кортеж и можно было бы рассматривать в качестве обычного решения. Заметим, что такая версия оказывается удобной при конкретизации (21.2) в духе разделов 13, 14, 16, когда в качестве E использовался тот или иной промежуток управления (см. в этой связи [58, § 7.1]). Этот частный случай можно отнести к задачам чисто импульсного управления [28], [5] или управления с толчками [36]. Детализацию мы обсудим ниже, а сейчас в достаточно общей постановке, соответствующей предположению (10.1), рассмотрим произвольное измеримое пространство с полуалгеброй множеств.

Если ограничиваться воздействиями типа используемых в (21.10), то их можно сразу интерпретировать как простейшие меры — линейные комбинации мер Дирака. Они были названы конечными взвесями точек множества E . Для этих мер будем рассматривать сужения на $\mathcal{L}$, имея в виду реализацию эффектов типа (21.10) только для функций из $B(E, \mathcal{L})$. Условимся, что действие упомянутых взвесей рассматривается только для таких функций. Напомним, что (см. раздел 3) $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ есть множество всех сужений мер Дирака, отвечающих точкам множества E , на полуалгебру $\mathcal{L}$. Обозначим через $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ линейную оболочку множества $\mathbb{D}(\mathcal{L})$: $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ есть, по определению, множество всех мер

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i \in \mathbb{A}(\mathcal{L}), \quad k \in \mathcal{N}, \quad (\alpha_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbb{R}^k, \quad (\mu_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbb{D}(\mathcal{L})^k.$$

Легко видеть, что имеет место вложение

$$\mathbb{M}(\mathcal{L}) \subset (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}]. \quad (21.11)$$

В качестве множества решений $\mathbf{F}$ обычных будем использовать то или иное непустое подмножество $\mathbb{M}(\mathcal{L})$, ориентируясь, однако, на случай, при котором реализуется эффект (*-слабой) компактификации множества $\mathbf{F}$. Ограничимся рассмотрением случая, подобного обсуждаемому в [58, § 7.2]. Фиксируем $\kappa \in [0, \infty[$ в качестве ресурсной константы.

Если $k \in \mathcal{N}$, то через Ξ_k обозначаем множество всех $(\xi_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$\sum_{i=1}^k |\xi_i| \leq \kappa. \quad (21.12)$$

Рассматриваем (21.12) в виде аналога ресурсного ограничения (13.6). При этом модули компонент k -мерного вектора в (21.12) играют роль амплитуд импульсов, формируемых в различных точках множества E посредством сужений мер Дирака. Итак, мы используем следующий вариант пространства обычных решений:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \exists k \in \mathcal{N} \exists (\alpha_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \Xi_k \exists (x_i)_{i \in \overline{1, k}} \in E^k : \\ \mu &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (\delta_{x_i} \mid \mathcal{L})\} = \{\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \mid \exists k \in \mathcal{N} \exists (\alpha_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \Xi_k \\ &\quad \exists (x_i)_{i \in \overline{1, k}} \in E^k : \mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (\delta_{x_i} \mid \mathcal{L})\} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (21.13)$$

Действие каждого элемента $\mathbf{F}$, т.е. каждого обычного решения (управления), будет характеризоваться комбинациями выражений типа (21.10). Напомним, что (см. раздел 15) $U_\kappa(\mathcal{L})$,

$$U_\kappa(\mathcal{L}) \subset \mathbb{A}(\mathcal{L}),$$

есть шар в сильной норме $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ с центром в нуле и радиусом κ . Для последующих целей достаточно свойства

$$U_\kappa(\mathcal{L}) = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})), \quad (21.14)$$

являющегося следствием утверждения (7.2.2) монографии [58] (см. также [64, с.181]). Следует отметить, что в силу $*$ -слабой компактности $U_\kappa(\mathcal{L})$ имеет место

$$U_\kappa(\mathcal{L}) \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$$

(см. (20.4)). С учетом этого обстоятельства до конца настоящего раздела полагаем

$$\mathbf{K} \triangleq U_\kappa(\mathcal{L}). \quad (21.15)$$

Отметим, что в случае (21.15) реализуется аналог свойств (21.4), (21.8). В версии (21.15) следуем (20.53) и получаем из (21.14) следующие две цепочки равенств:

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{F}, t_1), \quad (21.16)$$

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{F}, t_u). \quad (21.17)$$

Свойство (21.16) можно рассматривать как версию компактификации множества $\mathbf{F}$, в то время как (21.17) играет роль первого условия в (19.48). В самом деле, с учетом (21.14) определяем $\mathbf{m}$ как тождественное вложение $\mathbf{F}$ в $\mathbf{K}$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$ — условием

$$\mathbf{m}(\mu) \triangleq \mu \quad \forall \mu \in \mathbf{F}. \quad (21.18)$$

Мы построили конкретный вариант битопологического пространства $(\mathbf{K}, t_1, t_u)$, для которого требуемое в (19.48) свойство плотности выполнено.

Для данного случая определяем оператор $\mathbf{s}$ в виде сужения оператора g (последний определен в (20.54), (20.55))

$$\mathbf{s} \triangleq (g \mid \mathbf{F}), \quad (21.19)$$

где следует использовать (20.16), (20.54), (20.55). Здесь мы вновь извлекаем оператор $\mathbf{s}$ содержательной задачи из модели. Однако тем же способом (т.е. типичным для модели) достигается представление импульсных воздействий типа (21.10). В самом деле, если $k \in \mathcal{N}$, $(\alpha_j)_{j \in \overline{1, k}} \in \Xi_k$ и $(x_j)_{j \in \overline{1, k}} \in E^k$, то

$$\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (\delta_{x_j} \mid \mathcal{L}) \in \mathbf{F} \quad (21.20)$$

реализует значение оператора по следующему правилу: $\mathbf{s}(\mu) = g(\mu) \in \mathbf{X}$ есть отображение

$$\gamma \longmapsto \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j S_{i,\gamma}(x_j) \right)_{i \in \overline{1,n}} : \Gamma \longrightarrow \mathcal{R} \quad (21.21)$$

абстрактный аналог траектории, порожденной чисто импульсным управлением, т.е. системой толчков. В (21.21) мы определили «реализуемое» воздействие обычного решения (управления), определяемого в (21.20). Это воздействие является аргументом оператора $\mathbf{s}$. Подчеркнем, что в силу (21.13) действие на систему каждого элемента множества $\mathbf{F}$ реализуется в виде (21.21). Последнее особенно естественно в задаче управления линейной системой (см. [58, с. 283-285]). Отметим, имея в виду общий случай $\mathbf{F}$ (21.13), что $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$ в силу (21.18) и (21.19). Итак, с учетом (21.17) имеем (19.48), чем и завершается построение неполной модели расширения в ее второй версии.

В заключение раздела отметим, что обе версии неполной модели расширения могут быть использованы в задачах управления с импульсными ограничениями. В [5] проведено сравнение двух вышеупомянутых вариантов для задачи управления линейной системой с импульсными ограничениями на выбор управляющих воздействий. Ограничимся краткой детализацией второй версии, полагая до конца раздела, что при $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$ имеет место

$$E = I = [t_0, \vartheta_0[$$

(см. раздел 13); полуалгебру $\mathcal{L}$ (10.1) подмножеств $E = I$ полагаем удовлетворяющей условиям

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{B}, \quad (21.22)$$

где $\mathcal{I}$ и $\mathcal{B}$ определены в разделе 13: $\mathcal{I}$ — полуалгебра пространства-стрелки, определяемого множеством I , а $\mathcal{B} \in (\sigma\text{-alg})[I]$ есть σ -алгебра борелевских подмножеств I .

На содержательном уровне обратимся к системе (16.1) при условиях на $A(\cdot), b(\cdot)$ и $c(\cdot)$, сформулированных в разделах 13, 16 и согласующихся с (21.22). Однако система (16.1) допускает, строго говоря, использование обычных управлений — функций времени, определенных на I . В случае (см. (21.13), (21.15)) обычные управления, определяемые как взвеси мер Дирака, т.е. конечные системы толчков, такими функциями не являются. Поэтому сама система (16.1) может использоваться лишь для некоторых наводящих соображений. Что же касается использования $\mu \in \mathbf{F}$ вида (21.20) в качестве управлений, то в данном случае можно использовать возможности, связанные с обобщенными траекториями (16.3), (16.4). Разумеется, эти два соотношения применяем в соответствии с (16.1), имея целью построение для системы (16.1) режима управления с толчками, т.е. чисто импульсного управления. Получаемые таким образом траектории будут использоваться в качестве «обычных» (мы рассматриваем их как потенциально реализуемые).

Итак, μ (21.20) предлагается просто подставить в обобщенную формулу Коши (16.4). При этом следует иметь в виду, что вектор $(x_j)_{j \in \overline{1,k}}$ в (21.20) является в нашем случае набором моментов времени: $x_j = t_j \in I$ при $j \in \overline{1,k}$. Фиксируем $k \in \mathcal{N}$, $(\alpha_j)_{j \in \overline{1,k}} \in \Xi_k$ и $(t_j)_{j \in \overline{1,k}} \in I^k$. Рассмотрим управление $\mu \in \mathbf{F}$, определяемое как мера

$$\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (\delta_{t_j} \mid \mathcal{L}), \quad (21.23)$$

и действие μ на нашу управляемую систему. Напомним, что μ (21.23) — система толчков — рассматривается как обычное управление. Для построения траектории можно воспользоваться выражением (16.4). Пусть $t_* \triangleq \inf(\{t_j : j \in \overline{1,k}\}) \in I$, после чего для каждого момента $t \in]t_*, \vartheta_0]$ введем

$$J_t \triangleq \{j \in \overline{1,k} \mid t_j < t\}.$$

Ясно, что $J_t \neq \emptyset$ для таких значений t . Теперь обычная (по смыслу) траектория (16.4), соответствующая μ (21.23), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_\mu(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)c(\xi)\lambda(d\xi) \quad \forall t \in [t_0, t_*]) \& \\ \& (\tilde{\varphi}_\mu(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \sum_{j \in J_t} \alpha_j \cdot \Phi(t, t_j)b(t_j) + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)c(\xi)\lambda(d\xi) \quad (21.24) \\ \forall t \in]t_*, \vartheta_0]). \end{aligned}$$

Обобщенные траектории можно интерпретировать как функции (16.3), (16.4), реализуемые в более общих условиях $\mu \in \mathbf{K}$ (см. (21.15)). Константа κ определяет энергоресурс управляемой системы.

Заметим, что в терминах (21.24) может, в частности, задаваться $\mathbf{Y}$ -ограничение. В этой связи полезно отметить аналогию с (13.8). Так например, если отождествить $\mathbf{\Gamma}$ с промежутком $I_0 = [t_0, \vartheta_0]$, каждой точке которого сопоставлено подмножество $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ (напомним, что $n \in \mathcal{N}$ есть размерность фазового пространства системы (16.1)), в пределах которого только и допускается реализация траекторий, то $\mathbf{Y}$ -ограничение может быть введено как эквивалент системы фазовых ограничений. В самом деле, пусть до конца настоящего раздела $\mathbf{\Gamma} = I_0$ и

$$(N[t])_{t \in \mathbf{\Gamma}} : \mathbf{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{F}_{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}} \setminus \{\emptyset\}.$$

Тем самым задана система замкнутых множеств в n -мерном арифметическом пространстве. Тогда, полагая

$$\mathbf{Z} \triangleq \prod_{t \in \mathbf{\Gamma}} N[t],$$

получаем множество, удовлетворяющее свойству замкнутости, подобному (20.9). Требование $\tilde{\varphi}_\mu \in \mathbf{Z}$, где $\mu \in \mathbf{F}$, эквивалентно условию

$$\tilde{\varphi}_\mu(t) \in N[t] \quad \forall t \in I_0. \quad (21.25)$$

Здесь $\tilde{\varphi}_\mu$ соответствует (21.24). Релаксация упомянутых фазовых ограничений может быть связана с заменой $\mathbf{Z}$ множеством семейства, подобного (20.11), или (на языке условия (21.25)) с использованием требования о ε -соблюдении ограничений, задаваемых (по аналогии с (21.25)) множествами $N[t]$, в конечном числе сечений, т.е. для $t \in K$, где $K \in \text{Fin}(I_0)$ (в этой связи см. (20.10)). Для точного перевода (21.25) на используемый в общих конструкциях язык, связанный с $\mathbf{Y}$ -ограничением, следует конкретизировать (21.21) и реализовать несущественную (с принципиальной точки зрения) операцию сдвига множества $\mathbf{Z}$ или сдвига самих множеств $N[t]$, задающих фазовые ограничения. В этой связи сделаем краткие замечания.

При условии полагаем, $\mathbf{\Gamma} = I_0$, что

$$S_{i,t}(\xi) = (\Phi(t, \xi)b(\xi))_i \chi_{[t_0, t[}[I](\xi)$$

при $i \in \overline{1, n}$, $t \in \mathbf{\Gamma}$ и $\xi \in I$. Индекс i в правой части последнего равенства указывает номер компоненты соответствующего вектора. В этой редакции функция $g(\mu)$ (20.55), где $\mu \in \mathbf{K}$, есть зависимость

$$t \longmapsto \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)b(\xi)\mu(d\xi) : I_0 \longrightarrow \mathcal{R},$$

т.е. существенная (для наших целей) часть обобщенной траектории $\tilde{\varphi}_\mu$ (см. (16.4)). Тогда заменяем при $t \in I_0$ множество $N[t]$ его сдвигом, а именно, множеством

$$N_\Phi[t] \triangleq \{x - (\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \xi)c(\xi)\lambda(d\xi)) : x \in N[t]\}.$$

Приходим к следующему представлению фазовых ограничений (21.25) в виде $\mathbf{Y}$ -ограничения $\mathbf{s}(f) \in \mathbf{Y}$, где $f = \mu \in \mathbf{F}$. По аналогии с $\mathbf{Z}$ определяем множество $\mathbf{Y}$ в виде

$$\mathbf{Y} \triangleq \prod_{t \in I_0} N_\Phi[t]. \quad (21.26)$$

Теперь множество $\mathbf{Y}$ (21.26) выбрано так, что $\mathbf{Y}$ -ограничение на выбор μ эквивалентно (21.25). Разумеется, $\mathbf{Y}$ -ограничение эквивалентно и требованию $\tilde{\varphi}_\mu \in \mathbf{Z}$. Несущественные преобразования типа замен

$$N[t] \longrightarrow N_\Phi[t] \quad (t \in I_0), \quad \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Y}$$

в дальнейшем не оговариваются. Заметим только, что в конкретной ситуации

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = \{\mu \in \mathbf{K} \mid \tilde{\varphi}_\mu \in \mathbf{Z}\} = \{\mu \in \mathbf{K} \mid \tilde{\varphi}_\mu(t) \in N[t] \quad \forall t \in I_0\}. \quad (21.27)$$

Из (21.27) вытекает, что множество всех допустимых обобщенных элементов есть множество всех (обобщенных) конечно-аддитивных управлений-мер, точно соблюдающих фазовые ограничения. Здесь мы имеем аналогию с конструкциями [8, гл. III, IV].

22. КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ И СВОЙСТВО ОКРЕСТНОСТНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ

В предыдущем разделе мы рассматривали конкретные варианты построения неполной модели расширения, для которых было реализовано одно важное дополнительное свойство — плотное погружение множества $\mathbf{f}$ в компакт, реализуемый в виде подпространства топологического пространства (10.2). Упомянутое положение существенно с точки зрения работоспособности простой модели расширения из раздела 17. На самом же деле оно реализует и целый ряд других полезных свойств (см. [64, § 3.6], [47] и др.). В этой связи представляется естественным начать обсуждение общих конструкций модели расширения вида (19.63) со случая, когда удастся (подобно случаям, обсуждаемым в разделе 21) осуществить упомянутую компактификацию пространства обычных решений $\mathbf{f}$. Напомним ряд общих положений [64, гл. 3] и [47], необходимых в дальнейших построениях, а затем сосредоточимся на выяснении некоторых возможностей, связанных с представлением самого свойства универсальности расширения (в диапазоне асимптотических ограничений) на языке окрестностей множеств.

Итак, пока не будет оговорено противное, мы рассматриваем непустые множества $\mathbf{f}$ и $\mathbf{H}$ произвольной природы, а также отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{f}}$, не стесняемое какими-либо специальными предположениями. Полагаем, что множество $\mathbf{H}$ оснащено топологией ϑ , топологическое пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$ играет, как и ранее, роль пространства оценок. Наконец, пусть $\mathcal{S} \in \beta[\mathbf{f}]$; $\mathcal{S}$ определяет (см. (2.6)–(2.8)) ограничения асимптотического характера в достаточно общем виде. Следующее предложение легко следует из хорошо известных свойств топологических пространств, связанных с компактностью; см., например, [53, § 3.1] (в частности, см. [53, следствие 3.1.5]).

Предложение 22.1. Пусть $\exists S \in \mathcal{S} : \text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta) \in (\vartheta\text{-comp})[\mathbf{H}]$. Тогда имеют место следующие свойства:

- 1) $\mathbb{N}_\vartheta^0[(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}]] \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \mathbb{N}_\vartheta^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta)]$;
- 2) $\mathbb{N}_\vartheta[(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}]] \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \mathbb{N}_\vartheta[\text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta)]$.

В случае, когда среди множеств $\text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta)$, $S \in \mathcal{S}$, формирующих множество притяжения, имеется хотя бы одно компактное, то это множество притяжения реализуется аппроксимативно: каждая окрестность

$$\Omega \in \mathbb{N}_\vartheta^0[(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}]] \quad (22.1)$$

(этого множества притяжения) является для некоторого $S \in \mathcal{S}$ окрестностью множества $\text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta)$, откуда, в частности, следует, что

$$(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathcal{S}; \mathbf{h}] \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta) \subset \Omega. \quad (22.2)$$

Свойство (22.2) можно интерпретировать как своеобразную возможность окрестностной реализации множества притяжения (а это — объект, реализуемый в конструкциях асимптотического анализа, связанных с проблемой достижимости) в виде «обычного» достижимого множества $\text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta)$ в (22.2). Это дает целый ряд полезных следствий, приведенных в [64, гл. 3] и в [47]. Остановимся на одном следствии, связанном с простой моделью расширения из раздела 17.

Предложение 22.2. Пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \omega)$ — простая модель расширения из раздела 17 при условии $E = \mathbf{f}$, причем топологическое пространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ компактно. Пусть, кроме того, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — хаусдорфово топологическое пространство. Тогда $\forall \Omega \in \mathbb{N}_\vartheta[(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{S}; \mathbf{h}]]$
 $\exists P \in \mathcal{S} \quad \forall Q \in \mathcal{S}$

$$(Q \subset P) \implies (\Omega \in \mathbb{N}_\vartheta[\text{cl}(\mathbf{h}^1(Q), \vartheta)]). \quad (22.3)$$

Замечание 22.1. Отметим, что в (22.3) в качестве Ω может использоваться открытая окрестность множества притяжения, т.е. окрестность, удовлетворяющая (22.1). В этом случае будем иметь «с некоторого момента» свойство (22.2); иными словами, для некоторого $P \in \mathcal{S}$ имеем (22.2) как только $S \in \mathcal{S}$ удовлетворяет вложению $S \subset P$.

Доказательство предложения 22.2. Напомним, что $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$, где

$$\mathbf{m} : \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{K}, \quad \omega \in C_{\text{cl}}(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \vartheta).$$

Второе свойство вытекает из предположений относительно топологических пространств $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$. Пусть $S \in \mathcal{S}$. Тогда (см. раздел 2)

$$\begin{aligned} \text{cl}(\mathbf{h}^1(S), \vartheta) &= \text{cl}((\omega \circ \mathbf{m})^1(S), \vartheta) = \text{cl}(\omega^1(\mathbf{m}^1(S)), \vartheta) = \\ &= \omega^1(\text{cl}(\mathbf{m}^1(S), \mathbf{t})) \in (\vartheta\text{-comp})[\mathbf{H}], \end{aligned}$$

так как $\text{cl}(\mathbf{m}^1(S), \mathbf{t}) \in (\mathbf{t}\text{-comp})[\mathbf{K}]$. Далее, используем предложение 22.1. $\square$

В [64, § 3.6], [47] приведены аналоги предложений 22.1 и 22.2, использующие свойство счетной компактности. Мы не будем рассматривать эти положения, а обратимся к более конкретным построениям, фиксируя непустое топологическое пространство $(\mathbf{X}, \mathbf{t}_1)$, оператор $s \in \mathbf{X}^{\mathbf{f}}$, множество $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$, а также семейство $\mathcal{Y} \in \mathfrak{N}_{\mathbf{t}_1}^{\mathbf{f}}[\mathbf{Y}]$ (см. раздел 19). Рассмотрим случай $\mathcal{S} = \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]$.

Предложение 22.3. Пусть $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — хаусдорфово топологическое пространство. Кроме того, пусть существуют компактное топологическое пространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$, непрерывные отображения

$$(g \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{X}, \mathbf{t}_1)) \& (\omega \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{H}, \vartheta)), \quad (22.4)$$

а также оператор $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{f}}$, для которых

$$(\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}) \& (\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}) \& (\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{f}), \mathbf{t}_2)). \quad (22.5)$$

Тогда

$$(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]; \mathbf{h}] = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$$

и при этом $\forall \Omega \in \mathbb{N}_\vartheta[\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))] \exists P \in \mathcal{Y} \quad \forall Q \in \mathcal{Y}$

$$(Q \subset P) \implies (\Omega \in \mathbb{N}_\vartheta[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Q)), \vartheta)]). \quad (22.6)$$

Доказательство. Доказательство представляет собой комбинацию положений раздела 19 и предложения 22.2. Однако соответствующие условия в предложении 22.3 сформулированы в более целостном виде с тем, чтобы облегчить восприятие приводимого здесь весьма общего утверждения о возможности окрестностной реализации множества притяжения. Рассмотрим схему доказательства, фиксируя компактное топологическое пространство $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2)$, непрерывные операторы (22.4), а также оператор погружения $\mathbf{m}$ со свойствами (22.5). Из предложения 19.5 для семейства $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \in \beta[\mathbf{f}]$ получаем равенство

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}].$$

Используя конструкции из раздела 17 (простая модель расширения), получаем равенство

$$(\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{h}] = \omega^1((\mathbf{t}_2\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}]),$$

что означает (см. (2.8)) равенство

$$(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]; \mathbf{h}] = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})). \quad (22.7)$$

Заметим, что в силу (22.4), (22.5) $(\mathbf{K}, \mathbf{t}_2, \mathbf{m}, \omega)$ есть простая модель расширения из раздела 17 при условии, что $E = \mathbf{f}$. Поэтому из (22.7) и предложения 22.2 имеем требуемое утверждение (22.6). $\square$

На этом мы завершаем краткую сводку общих положений об окрестностной реализации множества притяжения, отсылая читателя за более подробными сведениями к [64, гл. 3] и [47]. Ориентируясь на конструкции, обеспечивающие универсальность расширения в диапазоне ограничений асимптотического характера, рассмотрим версию свойства асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. Возьмем более конкретный случай исходной задачи.

Пусть множество $\mathbf{X}$ определяется посредством (20.6), т.е. как множество n -вектор-функций на непустом индексном множестве Γ ;

мы следуем (20.7) в части традиционного оснащения множества значений функций из $\mathbf{X}$. Далее, мы следуем соглашению (20.9), предполагая, конечно, оснащение (20.8) исходного множества $\mathbf{X}$ и используя семейство (20.11) окрестностей $\mathbf{Y}$ в данном оснащении.

Напомним, что в разделе 20 построение топологии $\tau_{\mathbf{u}}$ для целей достаточно конкретного характера было связано с введением обобщенного матрицанта (20.16), посредством которого было введено множество Γ_0 (20.17). Сейчас, однако, нет смысла (в свете весьма общих предложений 22.1–22.4) использовать именно такой вариант. Достаточно выделить некоторые «особые» индексы из множества Γ , которые можно использовать при построении соответствующего аналога $\tau_{\mathbf{u}}$. Схема раздела 20 может при этом рассматриваться как пример весьма общей конструкции.

Итак, до конца настоящего раздела полагаем, что Γ_0 — произвольное, но фиксированное (в данном разделе) подмножество Γ , т.е. $\Gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$. В терминах этого множества Γ_0 вводим по правилу (20.18) окрестности функций из $\mathbf{X}$ и, согласно с (20.19), определяем топологию $\tau_{\mathbf{u}}$. В итоге получаем битопологическое пространство $(\mathbf{X}, \tau_1, \tau_{\mathbf{u}})$ (20.20), отвечающее принципу построения раздела 20, но без использования малосущественных деталей. В связи с топологическим пространством (20.21) мы так же, как и в случае (20.11), введем семейство «канонических» окрестностей $\mathbf{Y}$. Для этого в случае $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ введем в рассмотрение множество $\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, K, \varepsilon)$ всех функций $p \in \mathbf{X}$ таких, что $\exists q \in \mathbf{Y}$:

$$(p(\gamma) = q(\gamma) \quad \forall \gamma \in K \cap \Gamma_0) \& \quad (22.8)$$

$$\& (|p(\gamma)(i) - q(\gamma)(i)| < \varepsilon \quad \forall \gamma \in K \setminus \Gamma_0 \quad \forall i \in \overline{1, n}).$$

Здесь действуем по аналогии с (20.10). Иными словами, при $K \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ множество $\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, K, \varepsilon)$ есть объединение всех множеств

$$N_{\Gamma}^0(q, K, \varepsilon), \quad q \in \mathbf{Y}.$$

При этом, конечно, имеет место

$$\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) \in \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}^0[\mathbf{Y}] \quad (22.9)$$

(см. раздел 2). Из (22.9) следует, что семейство $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}$ всех множеств

$$\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, K, \varepsilon), \quad (K, \varepsilon) \in \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[,$$

обладает свойствами

$$(\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{X}]) \& (\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}). \quad (22.10)$$

Соответствующие рассуждения подобны [62]. К (22.10) следует добавить, что (см. (20.10), (22.8)) $\forall K \in \text{Fin}(\Gamma) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) \subset \mathfrak{N}_{\Gamma}(\mathbf{Y}, K, \varepsilon). \quad (22.11)$$

Из (20.11), (22.11) следует, что $\forall A \in \mathcal{Y}_1 \quad \exists B \in \tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} : B \subset A$. Напомним, что $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^f$. Из (2.6) получаем вложение

$$(\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}] \subset (\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{h}].$$

С другой стороны, из (22.10) вытекает вложение

$$(\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}] \subset (\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}].$$

С учетом (2.8) и двух последних оценок имеем, в частности, что

$$\begin{aligned} (\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]; \mathbf{h}] &\subset (\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}]; \mathbf{h}] \subset \\ &\subset (\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1]; \mathbf{h}]. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Сейчас мы не будем исследовать общие свойства множеств притяжения, используемых в (22.12). В оставшейся части данного раздела рассмотрим некоторые следствия предложений 22.2 и 22.3 для более конкретного случая; эти следствия рассмотрим в форме, несколько более общей в сравнении с [62].

До конца настоящего раздела полагаем, что $(\mathbf{H}, \vartheta)$, $\mathbf{H} \neq \emptyset$, — метризуемое топологическое пространство. Через ρ условимся обозначать метрику $\mathbf{H}$, порождающую топологию ϑ ; как и ранее, оператор $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^f$ фиксирован.

Условие 22.1. Существует модель расширения $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega)$ (19.63), для которой топологическое пространство $(\mathbf{K}, t_1)$ компактно.

Замечание 22.2. Условие 22.1 эквивалентно следующему: существуют неполная модель расширения $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$, для которой топологическое пространство $(\mathbf{K}, t_1)$ компактно, а также оператор $\omega \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$ со свойством $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$. В самом деле, $(\mathbf{H}, \vartheta)$ есть хаусдорфово топологическое пространство, тогда при выполнении последнего условия имеем (для реализующего это условие кортежа $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega)$) свойство $\omega \in C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$.

В метрическом пространстве $(\mathbf{H}, \rho)$ введем ε -окрестности множеств, $\varepsilon > 0$. Итак, если $A \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\mathbf{U}_\rho^0(A, \varepsilon) \triangleq \{z \in \mathbf{H} \mid \exists a \in A : \rho(z, a) < \varepsilon\} \in \mathbb{N}_\vartheta^0[A]. \quad (22.13)$$

Кроме того, если $P \in \text{Fin}(\Gamma)$, то через $(\text{Fin})[\Gamma \mid P]$ обозначаем семейство всех множеств $Q \in \text{Fin}(\Gamma)$ таких, что $P \subset Q$.

Теорема 22.1. Если выполнено условие 22.1, то

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists P \in \text{Fin}(\Gamma) \quad \exists \delta_1 \in]0, \infty[: \\ & \mathbf{h}^1(s^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, Q, \delta_2))) \subset \mathbf{h}^1(s^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, Q, \delta_2))) \subset \\ & \subset \mathbf{U}_\rho^0(\mathbf{h}^1(s^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, Q, \delta_2))), \varepsilon) \quad \forall Q \in (\text{Fin})[\Gamma \mid P] \quad \forall \delta_2 \in]0, \delta_1]. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Доказательство. Согласно условию 22.1, существует кортеж $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega)$ со следующими свойствами: $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ — неполная модель расширения с компактным топологическим пространством $(\mathbf{K}, t_1)$, а $\omega \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$ обладает свойством: $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$. Учитываем замечание 22.2. Из определения (см. раздел 19) имеем положения, перечисленные в (19.46)–(19.49). Напомним предложение 20.1, относящееся к семейству (20.11):

$$\mathcal{Y}_1 = \{\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) : (K, \varepsilon) \in \text{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[\} \in \mathfrak{N}_\Gamma^1[\mathbf{Y}]. \quad (22.15)$$

Напомним также, что условие, подобное (22.15), используется в предложении 22.3 (см. предположения относительно свойств $\mathcal{Y}$). Заметим, что $(\mathbf{H}, \vartheta)$ является, в частности, хаусдорфовым топологическим пространством, $(\mathbf{K}, t_1)$ — компактное топологическое пространство, $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{X}, \tau_1)$, $\omega \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^f$ и при этом выполнены условия $\mathbf{s} = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}$, $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$ и $\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{f}), t_1)$. Согласно предложению 22.3, получаем равенство

$$(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{H}; \vartheta; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1]; \mathbf{h}] = (\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{h}] = \omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})) \quad (22.16)$$

и, кроме того, при $\Omega \in \mathbb{N}_\vartheta[\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}))]$ для некоторого множества $P \in \mathcal{Y}_1$ имеем для всякого $Q \in \mathcal{Y}_1$ импликацию (22.6).

С другой стороны, $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega)$ есть модель расширения и в силу теоремы 19.2 имеем, в частности, равенство

$$\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})) = (\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{h}]. \quad (22.17)$$

Из (22.12), (22.16) и (22.17) получаем (см. (2.8)) совпадение

$$(\vartheta\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\tilde{\mathcal{Y}}_u] \mid \mathbf{h}] = \omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})). \quad (22.18)$$

Фиксируем $\varepsilon \in]0, \infty[$ и рассмотрим множество

$$\mathbf{U}_\rho^0\left(\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})), \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}_\vartheta^0[\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}))]. \quad (22.19)$$

Используя уже установленное свойство, связанное с (22.6), мы подберем $\mathbf{P} \in \mathcal{Y}_1$ такое, что $\forall Q \in \mathcal{Y}_1$

$$(Q \subset \mathbf{P}) \implies \left(U_\rho^0 \left(\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})), \frac{\varepsilon}{2} \right) \in \mathbb{N}_\vartheta[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Q))), \vartheta] \right). \quad (22.20)$$

С учетом (20.11) подберем множество $K_* \in \text{Fin}(\Gamma)$ и $\delta_* \in]0, \infty[$ такие, что

$$\mathbf{P} = \mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K_*, \delta_*). \quad (22.21)$$

Пусть теперь выбраны и зафиксированы

$$(K^* \in (\text{Fin})[\Gamma \mid K_*]) \ \& \ (\delta^* \in]0, \delta_*]). \quad (22.22)$$

Из (22.21), (22.22) имеем (см. (20.10)) вложение

$$\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*) \subset \mathbf{P},$$

тогда в силу (20.11) и (22.20) получаем свойство

$$U_\rho^0 \left(\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})), \frac{\varepsilon}{2} \right) \in \mathbb{N}_\vartheta[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*)))), \vartheta].$$

На самом деле, в силу (22.19) и последнего соотношения

$$U_\rho^0 \left(\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})), \frac{\varepsilon}{2} \right) \in \mathbb{N}_\vartheta^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*)))), \vartheta]. \quad (22.23)$$

С другой стороны, в силу (22.11) имеем вложение

$$\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*) \subset \mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*), \quad (22.24)$$

причем, в силу (2.6), (22.18) имеем также оценку

$$\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*)))), \vartheta). \quad (22.25)$$

Возвращаясь к (22.23), отметим, что

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*))) \subset U_\rho^0 \left(\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y})), \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (22.26)$$

Выберем произвольную точку

$$z^* \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*))).$$

Используя (22.13) и (22.26), получаем для некоторой точки $z_* \in \omega^1(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}))$ оценку

$$\rho(z_*, z^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу (22.25) имеем, однако, свойство

$$z_* \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*)))), \vartheta). \quad (22.27)$$

Поскольку топология ϑ порождена метрикой ρ , то из (22.27) получаем, что для некоторой точки

$$z_*^0 \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*))) \quad (22.28)$$

имеет место следующее неравенство:

$$\rho(z_*^0, z_*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда из неравенства треугольника получаем

$$\rho(z_*^0, z^*) \leq \rho(z_*^0, z_*) + \rho(z_*, z^*) < \varepsilon.$$

В силу (22.13), (22.28) имеем свойство

$$z^* \in U_\rho^0(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*)))), \varepsilon).$$

Так как точка z^* была выбрана произвольно, установлена цепочка вложений (см. также (22.24)):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*))) &\subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*))) \subset \\ &\subset U_\rho^0(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\Gamma^0(\mathbf{Y}, K^*, \delta^*)))), \varepsilon). \end{aligned} \quad (22.29)$$

Поскольку выбор (22.22) был произвольным, то из (22.29) следует требуемое утверждение. $\square$

Теорема 22.1 определяет в достаточно общем виде свойство асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. Более частные версии этого свойства см., например, в [58, с. 83] и [62, с. 541]. Утверждается существование «вилки» со сколь угодно малым зазором для достижимых множеств, отвечающих конструкции (20.10) и реализующих идею ослабления условий для всех сечений, определяемых индексами из Γ . При этом приходится мириться с неизбежностью применения элементов, использующие построения, традиционные для тихоновских произведений (использование невязок, определяемых на конечных подмножествах Γ). Если же само Γ — конечное множество, то утверждение теоремы становится более прозрачным в смысле суждений об асимптотической нечувствительности при ослаблении ограничений в направлениях, определяемых индексами из Γ_0 (см. (22.8)). Этот вывод полезно сопоставить с обсуждением второго примера в разделе 14.

Заметим, что теорема 22.1 доказана при условии 22.1. Однако, опираясь на положения раздела 21, можно указать целый ряд конкретных и эффективно проверяемых условий такого рода. Упомянутые классы содержательных задач, рассматриваемые в разделе 21, можно объединить посредством применения конструкции из раздела 20 при одном дополнительном предположении.

Пусть до конца настоящего раздела фиксирована полуалгебра $\mathcal{L}$ подмножеств непустого множества E : имеет место (10.1). Итак, фиксировано измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. Фиксируем также

$$\mathbf{K} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\}, \quad (22.30)$$

получая (см. (20.4)) множество сравнимости. Таким образом, (20.52) в нашем случае также имеет место. При построении битопологического пространства (19.46) следуем правилу (20.53). Множество $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \neq \emptyset$, имеет произвольную природу, но мы полагаем, что оно допускает возможность погружения в $\mathbf{K}$ (22.30) в виде всюду плотного (в сильнейшей из топологий (20.53)) множества. Это погружение должно удовлетворять еще и условиям (19.48). Итак, при условии (22.30) нам надлежит повторить построения из разделе 20, обеспечивающие предложение 20.4. В части, касающейся определения битопологического пространства $(\mathbf{X}, \tau_1, \tau_u)$, действуем, как уже отмечалось, в соответствии с (20.6) и прочими определениями раздела 20. В частности, для $\mathbf{X}$ (20.6) используем оснащение (20.8) с последующим выбором $\mathbf{Y}$ в виде (20.9), а также семейства $\mathcal{Y}_1$ в виде (20.11). Далее, полагаем заданным обобщенный матрицант (20.16), в терминах которого (в последующих построениях раздела) введено множество Γ_0 (20.17) и конструируется топология (20.19). Здесь построение более конкретно в сравнении с условиями, обеспечивающими теорему 22.1, где $\Gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$ выбиралось произвольно. Тем самым реализуется более конкретная версия битопологического пространства (20.20). Далее, используя (22.30) в (20.53), определяем битопологическое пространство $(\mathbf{K}, t_1, t_u)$, а также оператор g (20.54), (20.55), конструируемый на основе (20.16). Предложение 20.3 определяет фактически основное свойство неполной модели расширения. В отношении конкретных версий множества $\mathbf{f}$ и оператора $\mathbf{s}$ мы, как и в разделе 20, допускаем существование оператора $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{f}}$, удовлетворяющего условиям (19.48) для случая конкретного оператора g (20.55), т.е. при $\mathbf{g} = g$: $\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{f}), t_u)$ и $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$ (примеры задач, допускающих подобные представления, даны в разделе 21). В результате получаем кортеж (20.66), являющийся неполной моделью расширения с дополнительным условием:

$$(\mathbf{K}, t_1) \quad (22.31)$$

есть компактное топологическое пространство (см. (20.53), (22.30)); более того, (22.31) — компакт [53]. Сохраняя предположение о метризуемости топологического пространства $(\mathbf{H}, \vartheta)$ метрикой ρ и фиксируя $\omega \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$ так, что при этом $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$, получаем требуемую в условии 22.1 модель расширения. Конструируя $\tilde{\mathcal{Y}}_u$ (22.10) в конкретном множестве Γ_0 , приходим к утверждению: (22.14) выполняется в рассматриваемом случае задачи, допускающей компактификацию в надлежащем классе конечно-аддитивных мер на полуалгебре множеств. Если ввести, следуя построениям раздела 21, две версии $(\mathbf{f}, \mathbf{s}, \mathbf{m})$ (см. (21.1), (21.3), (21.5), (21.6) и (21.13), (21.19), (21.18) соответственно), то будут получены два вполне конкретных варианта теоремы 22.1, каждый из которых характеризуется на идейном уровне одним и тем же свойством грубости достижимого (на

значениях $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$) множества при ослаблении условий в направлениях, определяемых индексами из Γ_0 . С первой из обсуждаемых в разделе 21 конкретизацией естественно связать второй пример из раздела 14, для которого (см. (22.14)) можно дать исчерпывающее объяснение упоминаемому (в разделе 14) эффекту асимптотической нечувствительности, т.е. грубости задачи, при ослаблении ограничений по скоростной координате (обсуждение в более строгой форме отложим до случая некомпактифицируемой, согласно (22.30), (22.9), задачи управления).

23. НЕПОЛНАЯ МОДЕЛЬ РАСШИРЕНИЯ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР: НЕКОМПАКТИФИЦИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ

В разделе 20 была построена неполная модель расширения в классе конечно-аддитивных мер (см. (20.66), предложение 20.4), ориентированная, как видно из положений разделов 21, 22, на достаточно широкий круг содержательных задач о достижимости. Привлекая конструкции раздела 17, нетрудно построить «всю» модель расширения, для которой пространство обобщенных элементов реализуется в классе множеств сравнимости (см. (20.52)). Эти множества могут не обладать свойством $*$ -слабой компактности. Последнее, однако, не является препятствием для построения «универсальных» множеств притяжения. В этом случае, как видно из построений раздела 17, требуется выполнение некоторых дополнительных условий. Кроме того, сами утверждения об универсальности расширения в диапазоне асимптотических ограничений в упомянутом случае реализуются в терминах совпадения множеств притяжения, отвечающих различным версиям ограничений асимптотического характера, в то время как в компактифицируемом случае (см. разделы 21, 22) удастся получить и более информативные утверждения на языке окрестностей.

Тем не менее, обращаясь к упомянутым более общим конструкциям расширений в классе множеств сравнимости, которые могут быть и некомпактными в естественном $*$ -слабом смысле, мы предпринимаем сначала специальное исследование семейства таких множеств. Именно, будут рассматриваться свойства, достаточные для того, чтобы множество в пространстве конечно-аддитивных мер ограниченной вариации было множеством сравнимости. Тем самым, будут проясняться возможности построения вышеупомянутых расширений для конкретных классов измеримых пространств.

Далее в этом разделе фиксируем полуалгебру $\mathcal{L}$ (10.1) подмножеств непустого множества E , получая, в частности, стандартный σ -компакт (10.2), соответствующий оснащению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$ -слабой топологией.

Используем также мультитопологическое пространство (см. раздел 15, посредством (15.19)). Для наших последующих целей наиболее существенно пространство (10.2). Однако в качестве вспомогательного для нас окажется весьма полезным и первое в (15.9) топологическое пространство — тихоновская степень $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. С ее использования и начнем исследование $\mathfrak{K}[\mathcal{L}]$. Полезность такого рассмотрения обусловлена сравнимостью топологических пространств, участвующих в (15.9).

Предложение 23.1. Пусть $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ и для топологии

$$\tau \triangleq \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\Omega} = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\Omega} \quad (23.1)$$

имеет место свойство

$$N_{\tau}(\mu) \cap \mathbf{B}_{*}(\mathcal{L}) \neq \emptyset \quad \forall \mu \in \Omega. \quad (23.2)$$

Тогда $\tau_{*}(\mathcal{L})|_{\Omega} = \tau$, т.е. (Ω, τ) есть подпространство топологического пространства (10.2).

Доказательство. С учетом (23.1) имеем оценку

$$\tau \subset \tau_{*}(\mathcal{L})|_{\Omega}. \quad (23.3)$$

Справедливость доказываемого положения очевидна при $\Omega = \emptyset$. Пусть $\Omega \neq \emptyset$. С учетом известного представления оператора замыкания в терминах сходимости по Морю—Смиту легко проверяется свойство: если для направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в Ω и меры $\mu \in \Omega$ истинна импликация

$$((\mathbf{D}, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} \mu) \implies ((\mathbf{D}, \preceq, f) \xrightarrow{\tau_{*}(\mathcal{L})|_{\Omega}} \mu), \quad (23.4)$$

то имеет место

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\Omega} \subset \tau. \quad (23.5)$$

Фиксируем произвольные направленность $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в Ω и меру $\mu \in \Omega$. Для меры μ используем (23.2), подбирая

$$\Gamma \in N_{\tau}(\mu) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}). \quad (23.6)$$

Из (23.6) вытекает [58, с. 45] цепочка равенств

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\Gamma} = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\Gamma} = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\Gamma}. \quad (23.7)$$

Пусть истинна посылка в (23.4) для выбранных ранее и зафиксированных направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ и меры μ . Выберем произвольную окрестность

$$\Lambda \in N_{\tau_*(\mathcal{L})|_{\Omega}}(\mu). \quad (23.8)$$

Тогда, поскольку τ — топология Ω и в силу (23.6), $\Gamma \in \mathcal{P}(\Omega)$, то получаем, что

$$\Gamma \cap \Lambda \in N_{\tau_*(\mathcal{L})|_{\Gamma}}(\mu) \quad (23.9)$$

(см. [64, с. 36]). Разумеется, в (23.9) мы учли, что

$$(\Gamma, \tau_*(\mathcal{L})|_{\Gamma})$$

есть подпространство топологического пространства $(\Omega, \tau_*(\mathcal{L})|_{\Omega})$, а также (23.8). Из (23.7), (23.9) имеем

$$\Gamma \cap \Lambda \in N_{\tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\Gamma}}(\mu). \quad (23.10)$$

С другой стороны, имеем, что

$$(\Gamma, \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\Gamma}) \quad (23.11)$$

есть подпространство топологического пространства (Ω, τ) (см. (23.1)). Поэтому (см. [64, с. 36]) для некоторой окрестности $\Theta \in N_{\tau}(\mu)$ имеет место

$$\Gamma \cap \Lambda = \Gamma \cap \Theta. \quad (23.12)$$

Упомянутое свойство (23.11) означает в совокупности с (23.10), что

$$\Gamma \cap \Lambda \in N_{\tau|_{\Gamma}}(\mu).$$

В силу свойства (2.3.8) монографии [64] можно выбрать окрестности Θ со свойством (23.12). При этом

$$(\Gamma \in N_{\tau}(\mu)) \& (\Theta \in N_{\tau}(\mu)).$$

В итоге, $\Gamma \cap \Theta \in N_{\tau}(\mu)$. В силу сходимости $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ к μ имеем для некоторого $d_1 \in \mathbf{D}$ свойство: $\forall d_2 \in \mathbf{D}$

$$(d_1 \preceq d_2) \implies (f(d_2) \in \Gamma \cap \Theta).$$

С учетом (23.12) получаем, что $f(d) \in \Lambda$ для $d \in \mathbf{D}$ со свойством $d_1 \preceq d$. Поскольку выбор Λ (23.8) был произвольным, то тем самым установлена сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, f) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})|_{\Omega}} \mu.$$

Итак, импликация (23.4) установлена. Поскольку выбор $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ и μ был произвольным, то (23.5) установлено (см. (23.3)), следовательно, $\tau_*(\mathcal{L})|_{\Omega} = \tau$. $\square$

Для последующего использования предложения 23.1 введем следующее обозначение: если $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, то

$$\tau_M^{\otimes}(\mathcal{L}) \triangleq \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_M = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_M.$$

Пусть теперь $\mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$ есть, по определению, семейство всех множеств $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ таких, что

$$N_{\tau_M^{\otimes}(\mathcal{L})}(\mu) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \neq \emptyset \quad \forall \mu \in M.$$

Кроме того, пусть

$$\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}] \triangleq \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}] \setminus \{\emptyset\}. \quad (23.13)$$

С учетом предложения 23.1 имеем

$$\tau_*(\mathcal{L})|_M = \tau_M^\otimes(\mathcal{L}) \quad \forall M \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]. \quad (23.14)$$

Отметим несколько простых свойств, связанных с промежуточным (по смыслу) определением (23.13) и положением (23.14), которое будет важно с точки зрения представления множеств сравнимости. Отметим совсем простое свойство [50]

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \cup B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}] \quad \forall B \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L}).$$

Более интересным является аналог этого свойства, связанный с алгебраическими суммами.

Если X — непустое множество, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^X)$ и $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^X)$, то определяем алгебраическую сумму $A \oplus B$ множеств A и B , полагая, что $A \oplus B$ есть, по определению, множество всех функций

$$\alpha + \beta, \quad \alpha \in A, \quad \beta \in B.$$

В качестве X обычно будем использовать одно из двух множеств: E или $\mathcal{L}$.

Предложение 23.2. $(\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}] \quad \forall B \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$,

Доказательство. Пусть $\mathbb{B} \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$ и число $a_0 \in [0, \infty[$ таково, что

$$v_\mu(E) \leq a_0 \quad \forall \mu \in \mathbb{B}. \quad (23.15)$$

Пусть $\Omega \triangleq (\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus \mathbb{B}$. Покажем, что

$$\Omega \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]. \quad (23.16)$$

Выберем произвольно $\eta \in \Omega$. Тогда, в частности, $\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Введем

$$a^0 \triangleq |\eta(E)| + 2a_0 + 1 \in]0, \infty[. \quad (23.17)$$

Отметим, что (ак легко проверить)

$$\mathbb{G}_\eta \triangleq \{\nu \in \mathbb{R}^\mathcal{L} \mid |\eta(E) - \nu(E)| < 1\} \in N_{\otimes^\mathcal{L}(\tau_\mathbb{R})}(\eta). \quad (23.18)$$

Напомним (см. (23.18)), что

$$\tau_\Omega^\otimes(\mathcal{L}) = \tau_\otimes(\mathcal{L})|_\Omega = \otimes^\mathcal{L}(\tau_\mathbb{R})|_\Omega. \quad (23.19)$$

Из (23.18), (23.19) вытекает, что (см. [64, с. 36]) имеет место

$$\Omega \cap \mathbb{G}_\eta \in N_{\tau_\Omega^\otimes(\mathcal{L})}(\eta). \quad (23.20)$$

Установим свойство сильной ограниченности множества (23.20). Пусть выбрано произвольно

$$\omega \in \Omega \cap \mathbb{G}_\eta. \quad (23.21)$$

Тогда $\omega \in \mathbb{G}_\eta$. Поэтому $\omega \in \mathbb{R}^\mathcal{L}$ и при этом (см. (23.18))

$$|\eta(E) - \omega(E)| < 1.$$

Как следствие имеем неравенство

$$|\omega(E)| \leq |\eta(E)| + 1. \quad (23.22)$$

С другой стороны, из (23.21) следует, что $\omega \in \Omega$, тогда для некоторых $\omega_1 \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\omega_2 \in \mathbb{B}$ имеем

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (23.23)$$

Следовательно, в силу неравенства треугольника

$$v_\omega(E) \leq v_{\omega_1}(E) + v_{\omega_2}(E) \leq \omega_1(E) + a_0. \quad (23.24)$$

Отметим очевидную оценку (см. (23.23))

$$\begin{aligned} \omega_1(E) &= |\omega_1(E)| = |(\omega_1(E) + \omega_2(E)) - \omega_2(E)| = |\omega(E) - \omega_2(E)| \leq \\ &\leq |\omega(E)| + |\omega_2(E)| \leq |\omega(E)| + v_{\omega_2}(E). \end{aligned}$$

С учетом (23.15), (23.17) и (23.22) получаем, что

$$\omega_1(E) \leq (|\eta(E)| + 1) + a_0 = a^0 - 2a_0 + a_0 = a^0 - a_0.$$

Из (23.24) имеем оценку

$$v_\omega(E) \leq a^0.$$

Поскольку выбор ω (23.15) был произвольным, то установлено, что

$$v_\mu(E) \leq a^0 \quad \forall \mu \in \Omega \cap \mathbb{G}_\eta.$$

В силу (23.20) получаем, что

$$\Omega \cap \mathbb{G}_\eta \in N_{\tau_\Omega^\otimes(\mathcal{L})}(\eta) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}).$$

Поскольку выбор η был произвольным, то установлено свойство

$$N_{\tau_\Omega^\otimes(\mathcal{L})}(\mu) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \neq \emptyset \quad \forall \mu \in \Omega;$$

как следствие имеем свойство

$$\Omega \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}].$$

□

Предложение 23.3. $\mathcal{P}(M) \subset \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}] \quad \forall M \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}].$

Доказательство. Пусть $\Omega \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$. Выберем произвольно $U \in \mathcal{P}(\Omega)$. Тогда, в частности, $U \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$. Пусть $\eta \in U$. Тогда, в частности, $\eta \in \Omega$. Поэтому

$$N_{\tau_\Omega^\otimes(\mathcal{L})}(\eta) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \neq \emptyset. \quad (23.25)$$

Пусть (см. (23.25)) теперь

$$\Lambda \in N_{\tau_\Omega^\otimes(\mathcal{L})}(\eta) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}). \quad (23.26)$$

С учетом известного представления [64, с. 36] и (23.26) имеем для некоторой окрестности

$$\Theta \in N_{\otimes \mathcal{L}(\tau_\mathbb{R})}(\eta) \quad (23.27)$$

справедливость следующего свойства

$$\Lambda = \Omega \cap \Theta. \quad (23.28)$$

Из (23.26) получаем, что для некоторого числа $a_0 \in [0, \infty[$ имеет место утверждение

$$v_\mu(E) \leq a_0 \quad \forall \mu \in \Lambda. \quad (23.29)$$

С другой стороны, из (23.27) имеем [64, с. 36] свойство

$$U \cap \Theta \in N_{\tau_U^\otimes(\mathcal{L})}(\eta). \quad (23.30)$$

Поскольку $U \subset \Omega$, то из (23.28) получаем вложение

$$U \cap \Theta \subset \Lambda.$$

С учетом (23.26), (23.29) получаем, что $U \cap \Theta \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$. Но тогда из (23.30) имеем, что

$$U \cap \Theta \in N_{\tau_U^\otimes(\mathcal{L})}(\eta) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}).$$

Поскольку выбор $\eta \in U$ был произвольным, то установлено

$$N_{\tau_U^\otimes(\mathcal{L})}(\mu) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \neq \emptyset \quad \forall \mu \in U.$$

Это означает, что $U \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$. Поскольку и выбор U был произвольным, то установлено вложение

$$\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}].$$

□

Предложение 23.4. $\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}] \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}].$

Доказательство. Напомним, что $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}) \subset \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})$. Пусть

$$\Omega \in \mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}]. \quad (23.31)$$

Тогда $\Omega \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$ и при этом $\Omega \neq \emptyset$. С учетом (23.14) имеем, что

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\Omega} = \tau_{\Omega}^{\otimes}(\mathcal{L}) = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\Omega} \subset \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})|_{\Omega}. \quad (23.32)$$

Из (20.2), (23.32) вытекает, что $\Omega \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$. Поскольку выбор (23.31) был произвольным, требуемое вложение $\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}] \subset \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ то установлено. $\square$

Отметим, что из предложений 23.2 и 23.4 вытекает, что

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus \mathbf{C} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}] \quad \forall \mathbf{C} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (23.33)$$

Предложение 23.5. Если $M \in \mathcal{P}((\text{add})_+[\mathcal{L}])$ и $B \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$, то

$$M \oplus B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}].$$

Доказательство. Фиксируем M и B в соответствии с условиями. Тогда

$$M \oplus B \in \mathcal{P}((\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus B), \quad (23.34)$$

где $(\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$ в силу предложения 23.2. С учетом предложения 23.3 и (23.34) имеем, что

$$M \oplus B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}].$$

Предложение 23.5 доказано. $\square$

Из (23.13) и предложения 23.5 вытекает, что $\forall M \in \mathcal{P}'((\text{add})_+[\mathcal{L}]) \quad \forall B \in \mathbf{B}'_*(\mathcal{L})$

$$M \oplus B \in \mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}]. \quad (23.35)$$

Наконец, из (15.2), (23.33), (23.35) следует, что (см. предложение 23.4) $\forall M \in \mathcal{P}'((\text{add})_+[\mathcal{L}]) \quad \forall \mathbf{C} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\}$

$$M \oplus \mathbf{C} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \quad (23.36)$$

В (23.35) и (23.36) имеем некоторые итоговые утверждения, которые непосредственно будут использоваться в дальнейшем. Из этих свойств следует, в частности, что $\mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ — достаточно обширное семейство подмножеств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Иными словами, при построении расширений на основе использования множеств сравнимости в качестве пространства обобщенных элементов мы охватываем целый ряд типичных случаев. По этой причине даже для некомпактифицируемых задач наш подход во многом оправдан (см. разделы 17, 20).

Рассмотрим некоторые конкретные типы множеств сравнимости, не обладающих свойством ограниченности в сильном смысле. Для этих типов удастся реализовать схему плотного погружения для некоторых естественным образом определяемых вариантов пространства обычных решений. Рассмотрение начнем со случая, который был проиллюстрирован в последнем примере раздела 14. Отметим, что конструкции расширений в [44, 57–60, 62, 64], реализуемые в классе конечно-аддитивных мер, допускали наиболее плодотворные применения в следующих двух случаях: 1) в условиях компактифицируемых задач, подобных тем, которые рассматривались в разделе 21 (см. также раздел 16); 2) в случае использования неотрицательных в естественном смысле обычных решений и обобщенных элементов. Опираясь на конструкцию типа (23.36), постараемся в некотором смысле соединить 1), 2) в рамках гибридной схемы.

Напомним, что для каждой функции $f \in \mathbb{R}^E$ естественно определяется модуль $|f|$ в виде правила

$$x \longrightarrow |f(x)| : E \longmapsto [0, \infty[.$$

При этом $|f| \in B_0^+(E, \mathcal{L})$ для $f \in B_0(E, \mathcal{L})$ и $|f| \in B^+(E, \mathcal{L})$ для $f \in B(E, \mathcal{L})$.

Пусть

$$(\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]) \ \& \ (\kappa \in [0, \infty[). \quad (23.37)$$

Используем конечно-аддитивное пространство с мерой (21.2), тогда число κ является аналогом ресурсной константы (см. раздел 21). Однако действие этой константы будет распространяться

лишь на некоторую «часть» управления, понимаемого здесь и ниже в расширенном толковании. В этой связи введем множества

$$U \triangleq \left\{ f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leq \kappa \right\}, \quad (23.38)$$

$$V \triangleq \left\{ f \in B(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leq \kappa \right\}, \quad (23.39)$$

$$W \triangleq \{ \mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \mid v_\mu(E) \leq \kappa \}. \quad (23.40)$$

До конца данного раздела U , V и W понимаются только в смысле (23.38)–(23.40). В (23.38)–(23.40) мы действуем по аналогии с разделом 15, выделяем множество ступенчатых (простейших) обычных управлений, множеств более сложных, вообще говоря, вещественнозначных функций, а также множество обобщенных элементов, формализуемых в виде конечно-аддитивных мер. Множества

$$B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U, \quad B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V \quad (23.41)$$

формируют в дальнейшем «вилку» для выбора $\mathbf{f}$: будем ориентироваться на случай

$$B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U \subset \mathbf{f} \subset B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V. \quad (23.42)$$

Заметим, что каждое из множеств (23.41) содержится в $B(E, \mathcal{L})$ (см. раздел 3). В связи с построением нужной версии пространства обобщенных элементов напомним свойства плотности (см. раздел 15). При этом, в частности,

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})}, \quad (23.43)$$

$$W \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\}. \quad (23.44)$$

В отношении (23.43) заметим, что данное множество есть непустое подмножество $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Множество (23.40), (23.44) совпадает с компактом (15.38) при $\mu = \eta$ и $b = \kappa$. В последующих построениях, связанных с расширением, будем использовать следствие (23.36)

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \oplus W \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \quad (23.45)$$

С учетом данного свойства (23.45) полагаем до конца настоящего раздела, что

$$\mathbf{K} \triangleq (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \oplus W. \quad (23.46)$$

Отметим, что в силу предложения 23.5 имеем для множества $\mathbf{K}$ (23.46) свойство

$$\mathbf{K} \in \mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}]. \quad (23.47)$$

Выделяем (23.47) для отдельного рассмотрения в связи с приводимыми ниже свойствами плотности относительно мультитопологической структуры $\mathfrak{M}[\mathcal{L}]$ (см. раздел 15). Рассматриваем эти свойства здесь более подробно, хотя с точки зрения построения модели расширения, ориентированной на $\mathbf{f}$ (23.42) и $\mathbf{K}$ (23.46), требуется меньше. Тем не менее упомянутые свойства плотности представляют самостоятельный интерес и мы их рассмотрим, используя положения раздела 15 и известные факты теории топологических векторных пространств (см., например, [13, 35]). Используя положения теории топологических групп [13, гл. VI], мы получаем из (23.43) и (23.44), что

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})}. \quad (23.48)$$

Дополняя утверждения раздела 15, отметим легко проверяемое свойство

$$\begin{aligned} (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L})\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L})\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})}. \end{aligned} \quad (23.49)$$

При доказательстве (23.49) наряду с (15.12) следует учесть положение: если $H \in \mathcal{P}((\text{add})_+[\mathcal{L}])$, то $\text{cl}(H, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(H, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}))$. Версия этого свойства использована в (23.49). С учетом (15.11) имеем вложение

$$(\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \subset (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-comp})[\mathbb{R}^{\mathcal{L}}]. \quad (23.50)$$

Из (23.44) и (23.50) вытекает, в частности, что

$$W \in (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-comp})[\mathbb{R}^{\mathcal{L}}]. \quad (23.51)$$

Из (23.49), (23.51) с учетом вышеупомянутого свойства топологических групп следует (см. (23.46)), что

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})}. \quad (23.52)$$

В данном случае мы используем (23.46), (23.51) и свойства топологических векторных пространств $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}))$. Из (23.52) и определений из раздела 15 следует, что

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau_{\otimes}(\mathcal{L})}. \quad (23.53)$$

Из (23.48) вытекает (см. раздел 15) свойство

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})}. \quad (23.54)$$

Аналогичным образом, из (23.52) имеем свойство (см. конструкции раздела 15)

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})}. \quad (23.55)$$

В свою очередь, из (23.55) получаем, что

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau_0(\mathcal{L})}. \quad (23.56)$$

Из (23.48), (23.53), (23.54) и (23.56) имеем (см. (15.19))

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau} \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]. \quad (23.57)$$

В (23.57) мы получили свойство универсальной замкнутости множества (23.46).

Напомним, что (см. (23.40), (23.46))

$$\mathbf{K} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}]).$$

Из сравнения (23.38), (23.39) имеем вложение

$$B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U \subset B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V. \quad (23.58)$$

Полезно сравнить (23.42) и (23.58). Кроме того, из свойств, установленных в разделе 15, следует вложение

$$\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\} \subset \mathbf{K}. \quad (23.59)$$

Предложение 23.6. *Справедлива цепочка равенств*

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_0(\mathcal{L})) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_0(\mathcal{L})). \end{aligned}$$

Доказательство. Из (23.56), (23.58) и (23.59) получаем цепочку вложений

$$\begin{aligned} \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_0(\mathcal{L})) &\subset \\ \subset \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_0(\mathcal{L})) &\subset \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (23.60)$$

Выберем произвольно $\lambda \in \mathbf{K}$. Пусть (см. (23.46))

$$\lambda_1 \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta], \quad \lambda_2 \in W$$

реализуют представление в виде суммы

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (23.61)$$

С учетом положений раздела 15 имеем (см. (23.38), (23.40))

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\in \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L})), \\ \lambda_2 &\in \text{cl}(\{f * \eta : f \in U\}, \tau_0(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (23.62)$$

Далее используем базис топологии $\tau_0(\mathcal{L})$, введенный в разделе 7 для случая $\mathcal{L} \in (\sigma\text{-alg})[E]$, сохраняя прежние обозначения: при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$ через $T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K})$ обозначаем множество всех $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ таких, что $\mu(L) = \nu(L) \quad \forall L \in \mathcal{K}$. Тогда по свойствам базиса (см. также (15.14), (15.15)) имеем $\forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$

$$(T_{\mathcal{L}}(\lambda_1, \mathcal{K}) \cap \{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L})\}) \neq \emptyset \text{ \&}$$

$$\& (T_{\mathcal{L}}(\lambda_2, \mathcal{K}) \cap \{f * \eta : f \in U\} \neq \emptyset).$$

Поэтому, как легко проверить, с учетом (23.61) имеем $\forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$

$$T_{\mathcal{L}}(\lambda, \mathcal{K}) \cap \{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\} \neq \emptyset \quad (23.63)$$

(см. [50, § 10]). Вновь используя свойства базиса, получаем из (23.63) свойство

$$\lambda \in \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_0(\mathcal{L})).$$

Поскольку выбор конечно-аддитивной меры λ был произвольным, то установлено вложение

$$\mathbf{K} \subset \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_0(\mathcal{L})),$$

и с учетом (23.60) предложение 23.6 доказано. $\square$

Напомним, что из (23.45), (23.46) мы имеем вариант свойства (20.52). С учетом этого следуем соглашениям (20.53) для топологий t_1 и $t_{\mathbf{u}}$, понимая при этом $\mathbf{K}$ в смысле (23.46).

Следствие 23.1. Если $\mathbf{f}$ удовлетворяет (23.42), то

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, t_{\mathbf{u}}).$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что для множества $\mathbf{f}$, удовлетворяющего (23.42), непременно (см. предложение 23.6) имеет место

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, \tau_0(\mathcal{L})). \quad (23.64)$$

Тогда в соответствии с (20.53) и (23.64)

$$\text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, t_{\mathbf{u}}) = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}.$$

Следствие 23.1 доказано. $\square$

Фактически мы располагаем неполной моделью расширения. Рассмотрим некоторые дополнительные свойства плотности в более общей форме. С учетом (23.48), предложения 23.6 и сравнимости топологий t_1 и $t_{\mathbf{u}}$ имеем (см. (19.49))

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, t_1) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, t_1) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_*(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_*(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (23.65)$$

Далее, из (15.10), (23.53) и (23.65) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_{\otimes}(\mathcal{L})) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_{\otimes}(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (23.66)$$

Отметим, наконец, что (см. [50, § 10]) имеет место

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (23.67)$$

В связи с обоснованием последнего утверждения напомним свойства 1), 2) топологического пространства (15.18). Подробное доказательство (23.67) приведено в [50]. Из предложения 23.6, (15.19), (23.65)–(23.67) вытекает следующая теорема.

Теорема 23.1. Пусть множество $\mathbf{f}$ (21.1) удовлетворяет условию (23.42). Тогда

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, \tau) \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}].$$

Следствие 23.2. Если множество $\mathbf{f}$ (21.1) удовлетворяет условию (23.42), то

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \text{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{f}\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})).$$

Доказательство получается комбинацией (23.52), (23.55) и теоремы 23.1. Заметим, что в силу (23.51) имеем свойства замкнутости W в каждом из топологических пространств (15.9), откуда с учетом положений раздела 15 получаем

$$\begin{aligned} W &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in U\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \text{cl}(\{f * \eta : f \in V\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \\ &= \text{cl}(\{f * \eta : f \in U\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})) = \text{cl}(\{f * \eta : f \in V\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})). \end{aligned}$$

Вышеперечисленные свойства плотности, связанные с теоремой 23.1 и следствием 23.2, существенно дополняют положения раздела 15 в части аппроксимативной реализации конечно-аддитивных мер в классе неопределенных интегралов по заданной мере. Из этих положений извлекается и конструкция неполной модели расширения: в терминах (23.45), (23.46) (20.53) введено битопологическое пространство $(\mathbf{K}, t_1, t_u)$, отображение g определяется (см. предложение 20.3) в (20.54), (20.55), а отображение $\mathbf{m}$ определяется в виде (21.6). Первое положение в (19.48) реализуется следствием 23.1, а второе положение мы «навязываем», определяя $\mathbf{s}$ в виде суперпозиции $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$ (впрочем, здесь можно было бы использовать (21.5)).

С учетом сказанного выше можно утверждать, что в терминах (23.46), (21.6), (20.53)–(20.55) построен кортеж $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$, удовлетворяющий (19.47), (19.48), где $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^f$ задается (при условии (23.45)) посредством (21.5).

В отношении $(\mathbf{X}, \tau_1, \tau_u)$, $\mathbf{Y}$, $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_u$ следуем соглашениям раздела 20, так как при построении неполной модели расширения ориентировались на использование конструкции на основе множества сравнимости, применяемого в качестве пространства обобщенных элементов. Напомним, что эти предположения находятся в соответствии с определениями раздела 19 (см., например, (19.39) и предложение 20.1). С учетом теоремы 19.1 получаем, что $g^{-1}(\mathbf{Y}) \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ определяет множество притяжения в пространстве обобщенных элементов, универсальное в достаточно контрастном диапазоне ограничений асимптотического характера. Именно, справедливо (19.57) в конкретной версии, отвечающей (23.42), (23.45), (23.46). Следовательно, достигнуты все цели, реализация которых предполагалась в разделе 19 посредством неполной модели расширения. Можно, однако, несколько расширить их, не переходя пока к вариантам применения теоремы 19.2, поскольку это требует некоторых дополнительных предположений. В силу теоремы 23.1 имеет смысл реализовать, несколько отступая от основной схемы изложения, положения об универсальности множества притяжения $g^{-1}(\mathbf{Y})$ в более широкой трактовке, аналогично [59].

В самом деле, мы можем рассматривать $\mathbf{m}$ (21.6) как погружение $\mathbf{f}$ в мультитопологическое пространство $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \mathfrak{M}[\mathcal{L}])$. Последнее, разумеется, является объемлющим по отношению к пространству обобщенных элементов, определяемому в (23.45). Однако оснащения $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, введенные в разделе 15, позволяют полнее проанализировать универсальность множества притяжения $g^{-1}(\mathbf{Y})$ (заметим в этой связи, что и теорему 19.1 мы дополнили предложением 19.8). Итак, $\mathbf{m} \in \mathbb{A}(\mathcal{L})^f$, тогда, согласно (2.6), (2.8), при любом выборе топологии τ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ имеем следующие множества притяжения:

$$(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbb{A}(\mathcal{L}); \tau; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]; \mathbf{m}] = (\tau\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}] \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})),$$

где $(\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1) \vee (\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_u)$. Отметим одно общее положение.

Предложение 23.7. Если $\mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{f}))$, а τ — топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, для которой $\mathbf{K}$ (23.46) удовлетворяет условию $\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau}$ (замкнутости в топологическом пространстве $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau)$), то

$$(\tau\text{-LIM})[\mathcal{U} \mid \mathbf{m}] = (\tau|_{\mathbf{K}}\text{-LIM})[\mathcal{U} \mid \mathbf{m}]. \quad (23.68)$$

Доказательство. Пусть топологическое пространство $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau)$ удовлетворяет условиям предложения. Используем (2.6). При этом, для $U \in \mathcal{U}$ имеем $\mathbf{m}^1(U) \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ и как следствие

$$\text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau|_{\mathbf{K}}) = \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau) \cap \mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau),$$

поскольку $\text{cl}(\mathbf{m}^1(U), \tau) \subset \text{cl}(\mathbf{K}, \tau) = \mathbf{K}$. С учетом (2.6) получаем требуемое равенство (23.68), что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 23.3. Если $\mathcal{U} \in \beta[\mathbf{f}]$, а τ — топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ со свойством $\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau}$, то

$$(\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbb{A}(\mathcal{L}); \tau; \mathcal{U}; \mathbf{m}] = (\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbf{K}; \tau|_{\mathbf{K}}; \mathcal{U}; \mathbf{m}].$$

Доказательство получается комбинацией (2.8) и предложения 23.7.

Теорема 23.2. $\forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (\tau\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}].$$

Доказательство. Из (23.57) и предложения 23.7 имеем для всех $\tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$

$$(\tau\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (\tau|_{\mathbf{K}}\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}], \quad (23.69)$$

$$(\tau\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] = (\tau|_{\mathbf{K}}\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.70)$$

Из (19.57), (20.53), (23.69) и (23.70) имеем

$$\begin{aligned} (\tau_*(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] &= (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = \\ &= g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] = (\tau_0(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \end{aligned} \quad (23.71)$$

Так как $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ есть неполная модель расширения, то из предложения 19.8, (20.53) и (23.70) получаем, что

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] = (\tau_*(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.72)$$

Из (23.71), (23.72) имеем цепочку равенств

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau_*(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (\tau_*(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.73)$$

Построим аналоги (23.73) для трех оставшихся топологий из множества $\mathfrak{M}[\mathcal{L}]$. Для этого напомним о сравнимости топологии t_1 и t_u . Тогда, согласно (2.6) и (19.46),

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] \subset (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.74)$$

С другой стороны, из (2.6) и (19.40) вытекает, что

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] \subset (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.75)$$

Из (23.71), (23.74) следует, что

$$(t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] \subset g^{-1}(\mathbf{Y}).$$

С другой стороны, из (23.71), (23.75) получаем вложение

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}].$$

Из двух последних соотношений имеем с учетом (20.53) и (23.69) цепочку равенств

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_u\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (\tau_0(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}].$$

С учетом (23.71) имеем теперь нульмерный аналог (23.73):

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau_0(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = (\tau_0(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.76)$$

Напомним, что топология $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ слабее, чем каждая из топологий $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$. Поэтому из (2.6) и (23.73) следует, что

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbf{Y}) &\subset (\tau_{\otimes}(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}], \\ g^{-1}(\mathbf{Y}) &\subset (\tau_{\otimes}(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \end{aligned} \quad (23.77)$$

С другой стороны, в силу (19.54) и (23.47) имеет место равенство

$$t_1 = \tau_{\mathbf{K}}^{\otimes}(\mathcal{L}) = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}.$$

Как следствие из (23.69)–(23.72) получаем уточнение (23.77)

$$\begin{aligned} (\tau_{\otimes}(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] &= (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] = \\ &= g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_1\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}] = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_u] \mid \mathbf{m}]. \end{aligned} \quad (23.78)$$

Из (23.78) извлекается аналог (23.73), (23.76). Осталось исследовать структуры множества притяжения, отвечающего оснащению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ топологией $\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})$, $\tau_*(\mathcal{L}) \subset \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})$. Из (2.6), (23.73) имеем вложение

$$(\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[s^{-1}[\mathcal{Y}_1] \mid \mathbf{m}] \subset g^{-1}(\mathbf{Y}), \quad (23.79)$$

$$(\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}] \subset g^{-1}(\mathbf{Y}). \quad (23.80)$$

Выберем произвольную конечно-аддитивную меру $\nu \in g^{-1}(\mathbf{Y})$. Тогда, в частности, $\nu \in \mathbf{K}$. С учетом (23.46) подберем

$$(\nu_1 \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]) \& (\nu_2 \in W) \quad (23.81)$$

так, что при этом $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Для конечно-аддитивных мер ν_1 и ν_2 построим аппроксимирующие направленности, используя схему раздела 15. Итак, фиксируем направленное множество (15.24) и рассматриваем операторы $\Theta_\eta[\nu_1; \cdot]$ и $\Theta_\eta[\nu_2; \cdot]$, действующие каждый из $\mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ в $B_0(E, \mathcal{L})$. При этом (см. (23.81))

$$\Theta_\eta[\nu_1; \mathcal{K}] \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}).$$

С учетом предложения 15.2 имеем

$$(\Theta_\eta[\nu_1; \mathcal{K}] * \eta)(E) = \int_E \Theta_\eta[\nu_1; \mathcal{K}] d\eta = \nu_1(E) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}). \quad (23.82)$$

Следовательно, $\Theta_\eta[\nu_1; \cdot]$ действует из $\mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ в множество

$$\left\{ f \in B_0^+(E, \mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta = \nu_1(E) \right\}.$$

Далее, из (23.40), (23.81) и предложения 15.2 вытекает неравенство

$$\int_E \left| \Theta_\eta[\nu_2; \mathcal{K}] \right| d\eta \leq \kappa \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}). \quad (23.83)$$

Заметим, что по построению функции (15.25) имеем равенство

$$\theta_\eta[\nu] = \theta_\eta[\nu_1] + \theta_\eta[\nu_2].$$

Как следствие получаем, что

$$\Theta_\eta[\nu; \mathcal{K}] = \Theta_\eta[\nu_1; \mathcal{K}] + \Theta_\eta[\nu_2; \mathcal{K}] \in B_0(E, \mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}). \quad (23.84)$$

Из (23.38), (23.83) следует, однако, что $\Theta_\eta[\nu_2; \mathcal{K}] \in U \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$. В результате, из (23.42) и (23.84) получаем в виде

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \Theta_\eta[\nu; \cdot])$$

направленность в $\mathbf{f}$. Как следствие

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \Theta_\eta[\nu; \cdot] * \eta) \quad (23.85)$$

(см. раздел 15) есть направленность в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. В силу (23.82), (23.83) и свойств нормы: при $b \triangleq \nu_1(E) + \kappa \in [0, \infty[$

$$\Theta_\eta[\nu; \mathcal{K}] * \eta = \Theta_\eta[\nu_1; \mathcal{K}] * \eta + \Theta_\eta[\nu_2; \mathcal{K}] * \eta \in U_b(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}).$$

По построению $\mathbf{K}$ имеем свойство $\nu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, тогда (см. раздел 15) направленность (23.85) сходится к ν в топологическом пространстве (15.18). Ранее уже установлено, что данная направленность сильно ограничена. На самом же деле, сходимост направленности (23.85) к ν имеет место в каждой из топологий $\tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]$. С учетом определения $\mathbf{m}$ (21.6) установили, что (см. (23.85))

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \mathbf{m} \circ \Theta_\eta[\nu; \cdot]) \xrightarrow{\tau} \nu \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}[\mathcal{L}]. \quad (23.86)$$

Пусть $\mathcal{F} \triangleq (\mathbf{f}\text{-ass})[\mathbf{D}; \preceq; \Theta_\eta[\nu; \cdot]]$ (см. (2.2)). Выберем произвольно $Y_* \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$. С учетом (19.38) и свойства $g(\nu) \in \mathbf{Y}$ имеем, в частности, что

$$Y_* \in N_{\tau_{\mathbf{u}}}(g(\nu)). \quad (23.87)$$

Далее, $\mathbf{m} \circ \Theta_\eta[\nu; \cdot] \in \mathbf{K}^{\mathbf{D}(E, \mathcal{L})}$ и $\nu \in \mathbf{K}$. Используя (20.53) и (23.86) в конкретизации $\tau = \tau_0(\mathcal{L})$ (см. (15.19)), получаем сходимость

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \mathbf{m} \circ \Theta_\eta[\nu; \cdot]) \xrightarrow{t_{\mathbf{u}}} \nu,$$

из которой по предложению 20.3 вытекает сходимость

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, g \circ \mathbf{m} \circ \Theta_{\eta}[\nu; \cdot]) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} g(\nu).$$

Так как $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$, то получили сходимость

$$(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}), \prec_{\mathcal{L}}, \mathbf{s} \circ \Theta_{\eta}[\nu; \cdot]) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} g(\nu).$$

С учетом (23.87) имеем теперь (см. (2.3))

$$Y_* \in (\mathbf{X}\text{-ass})[\mathbf{D}(E, \mathcal{L}); \prec_{\mathcal{L}}; \mathbf{s} \circ \Theta_{\eta}[\nu; \cdot]]$$

и как следствие (см. (2.2)) $\mathbf{s}^{-1}(Y_*) \in \mathcal{F}$. Поскольку выбор Y_* был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \subset \mathcal{F}. \quad (23.88)$$

Соединяя (23.86) в конкретизации $\tau = \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})$ и (23.88), получаем, что существует направленность $(D, \sqsubseteq, \varphi)$ в $\mathbf{f}$, для которой

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{f}\text{-ass})[D; \sqsubseteq; \varphi]) \& ((D, \sqsubseteq, \mathbf{m} \circ \varphi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})} \nu).$$

С учетом определения раздела 2 (см. (2.7)) это означает, что

$$\nu \in (\text{AS})[\mathbf{f}; \mathbb{A}(\mathcal{L}); \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L}); \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]; \mathbf{m}].$$

В силу (2.8) это означает свойство

$$\nu \in (\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}].$$

Поскольку выбор ν был произвольным, вложение

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}]$$

установлено тогда в силу (23.80)

$$(\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}] = g^{-1}(\mathbf{Y}). \quad (23.89)$$

С учетом (2.6) и (19.40) имеем также утверждение

$$(\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}] \subset (\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{I}}] \mid \mathbf{m}],$$

следовательно, из (23.89) следует вложение

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{I}}] \mid \mathbf{m}].$$

С учетом (23.79) мы получаем равенство

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{I}}] \mid \mathbf{m}]. \quad (23.90)$$

Из (23.73), (23.76), (23.78), (23.89) и (23.90) получаем (см. (15.19)) утверждение теоремы. $\square$

Заметим теперь, что $\mathbf{m}$ (21.6) является также отображением из $\mathbf{f}$ в $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, следовательно, можно ввести множество притяжения

$$\begin{aligned} & ((\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}] \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})}) \& \\ & \& ((\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}] \mid \mathbf{m}] \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\mathbf{I}}$ или $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$. С учетом (2.6), (23.52) и (23.55) устанавливается следующая теорема.

Теорема 23.3. *Имеет место цепочка равенств*

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbf{Y}) &= (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{I}}] \mid \mathbf{m}] = \\ &= (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}] = \\ &= (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}] = \\ &= (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}]. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу (23.52) (см. определение в разделе 15) имеем для $M \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$

$$\text{cl}(M, \tau_{\otimes}(\mathcal{L})) = \text{cl}(M, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) \cap \mathbb{A}(\mathcal{L}) = \text{cl}(M, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})),$$

поскольку $\text{cl}(M, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Из (2.6) получаем

$$(\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[\mathcal{U}|\mathbf{m}] = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathcal{U}|\mathbf{m}] \quad \forall \mathcal{U} \in \beta[\mathbf{f}] \quad (23.91)$$

(здесь мы учли представление $\mathbf{m}$ в виде (21.6)). В качестве $\mathcal{U}$ можем использовать $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1]$ или $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]$. Поэтому в силу теоремы 23.2 (в конкретизации $\tau = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})$) имеем

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1] | \mathbf{m}] = (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] | \mathbf{m}]. \quad (23.92)$$

С другой стороны, с учетом (23.55) для $M \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ имеем цепочку равенств

$$\text{cl}(M, \tau_0(\mathcal{L})) = \text{cl}(M, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})) \cap \mathbb{A}(\mathcal{L}) = \text{cl}(M, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})),$$

поскольку $\text{cl}(M, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})) \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$. В силу (2.6) это означает, что

$$(\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})\text{-LIM})[\mathcal{U}|\mathbf{m}] = (\tau_0(\mathcal{L})\text{-LIM})[\mathcal{U}|\mathbf{m}] \quad \forall \mathcal{U} \in \beta[\mathbf{f}].$$

Из теоремы 23.2 (в конкретизации $\tau = \tau_0(\mathcal{L})$) имеем

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1] | \mathbf{m}] = (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})\text{-LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] | \mathbf{m}].$$

С учетом (23.92) получаем требуемое утверждение. $\square$

Теоремы 19.1, 23.2 и 23.3 характеризуют $g^{-1}(\mathbf{Y})$ как весьма универсальное множество притяжения, являющееся инструментом исследования асимптотического поведения управлений в абстрактной задаче о достижимости с весьма контрастным диапазоном ограничений асимптотического характера. Важно и то, что построения касались «неограниченной» в сильном смысле задачи (см. (23.42)). Отметим, что полученное множество притяжения может быть полезным и в задаче об асимптотической достижимости (на значениях $\mathbf{h}$), как показывает предложение 17.1. В упомянутых теоремах 19.1, 23.2 и 23.3 следует учитывать равенство (2.8).

24. МОДЕЛЬ РАСШИРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВЕРШЕННОГО ОБОБЩЕННОГО ЦЕЛЕВОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В данном разделе мы продолжаем рассмотрение конструкции расширения на основе (23.45), (23.46). В предыдущем разделе была построена неполная модель расширения. Пространство обобщенных элементов, определяемое в (23.46), не является, однако, компактным в смысле топологического пространства (10.2), поэтому (см. раздел 17) завершение построения модели расширения требует некоторых дополнительных условий на обобщенное целевое отображение, обозначаемое в разделе 17 через ω . Одно только условие непрерывности, реализуемое в практически интересных случаях (см., например, [58, с. 187], а также примеры в [57, гл. 1] и [58, гл. 1, 2]), в столь общей ситуации доставляет, вообще говоря, лишь утверждения оценочного характера (см. предложение 17.1). В этой связи рассмотрим один вариант модели расширения (см. раздел 19), использующий конструкцию обобщенного целевого отображения и схему на основе теоремы 17.1. Предварительно рассмотрим конкретную версию целевого отображения $\mathbf{h}$ (см. введение), ориентируясь на случай, когда $\mathbf{F}$ — пространство обычных решений — удовлетворяет (23.42). Именно, при данной полуалгебре (10.1) подмножеств непустого множества E и конечно-аддитивной мере $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ (т.е. в условиях (21.2)) полагаем, что множество $\mathbf{F}$ (21.1) обычных решений удовлетворяет (23.42), а непустое множество $\mathbf{K}, \mathbf{K} \subset \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}]$, определяется (23.46) и, следовательно, является множеством сравнимости (см. (23.45)). Пусть $p \in \mathcal{N}$ и

$$(M_i)_{i \in \overline{1, p}} : \overline{1, p} \rightarrow B(E, \mathcal{L}) \quad (24.1)$$

обладает следующим свойством:

$$\exists \alpha \in]0, \infty[\exists j \in \overline{1, p} : \alpha \leq M_j(x) \quad \forall x \in E. \quad (24.2)$$

Иными словами, в (24.2) утверждается, что одна из компонент кортежа (24.1) строго положительна и, более того, отделена от нуля. В пределах данного раздела полагаем, если не оговорено противное, что

$$\mathbf{H} = \mathbb{R}^p, \quad (24.3)$$

а $\vartheta = \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости p -мерного арифметического пространства. Равенство (24.3) естественно, в частности, в задачах о достижимости (см. раздел 13). Фиксируем $\omega^0 \in \mathbf{H}$. Пусть теперь целевое отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ определяется условием

$$\mathbf{h}(f) \triangleq \omega^0 + \left(\int_E M_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1,p}} \quad \forall f \in \mathbf{F}. \quad (24.4)$$

В (24.4) имеем аналог формулы Коши, используемой в разделе 16. Кроме того, введем обобщенное целевое отображение $\omega \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$ посредством правила

$$\omega(\mu) \triangleq \omega^0 + \left(\int_E M_i d\mu \right)_{i \in \overline{1,p}} \quad \forall \mu \in \mathbf{K}. \quad (24.5)$$

Из (24.4) и (24.5) имеем для оператора погружения $\mathbf{m}$ (21.6) свойство

$$\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}. \quad (24.6)$$

Напомним, что (24.6) использовалось при определении модели расширения в разделе 19. Представление (24.5) подобно конструкции, используемой в разделе 16 при определении обобщенных программных движений. Из (20.53) и (24.5) следует, что ω есть оператор, непрерывный в смысле топологического пространства $(\mathbf{K}, t_1)$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$. Отметим, что (см. (20.53)) в рассматриваемом случае $C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$ есть множество всех совершенных, в смысле $(\mathbf{K}, t_1)$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$, операторов (см. [53, § 3.7]). Имеем (при условии (24.2)) следующее

Предложение 24.1. *Оператор ω является совершенным: $\omega \in C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$.*

Доказательство. Будем следовать схеме, допускающей идейные аналогии с построениями (см. [58, § 4.5]). Для определенности оснащаем $\mathbf{H}$ (24.3) нормой $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ вида

$$(z_i)_{i \in \overline{1,p}} \mapsto \sup(\{|z_i| : i \in \overline{1,p}\}) : \mathbf{H} \rightarrow [0, \infty[. \quad (24.7)$$

Ясно, что топология ϑ порождена нормой (24.7). Покажем, что $\forall a \in]0, \infty[\exists b \in]0, \infty[\forall \mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}, \eta]$

$$(b \leq \mu(E)) \Rightarrow (a \leq \|\omega(\mu + \nu)\|_{\text{sup}} \quad \forall \nu \in W). \quad (24.8)$$

Назовем (24.8) свойством оценки снизу. Для доказательства (24.8) заметим прежде всего, что для $i \in \overline{1,p}$ функционал

$$\mu \mapsto |\omega^0(i) + \int_E M_i d\mu| : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mapsto [0, \infty[\quad (24.9)$$

непрерывен в смысле топологического пространства (10.2). Тогда каждый функционал (24.9) ограничен на W (см. (23.44)). Заметим, что $W \subset \mathbf{K}$ (см. (23.46)) и, в силу упомянутой ограниченности на W функционалов (24.9), получаем свойство: ω ограничено на W в пространстве $(\mathbf{H}, \|\cdot\|_{\text{sup}})$. Пусть $\bar{a} \in]0, \infty[$ таково, что

$$\|\omega(\tilde{\mu})\|_{\text{sup}} \leq \bar{a} \quad \forall \tilde{\mu} \in W. \quad (24.10)$$

Пусть далее $\alpha \in]0, \infty[$ и $j \in \overline{1,p}$ таковы (см. (24.2)), что $\alpha \leq M_j(x) \quad \forall x \in E$. Вернемся к обоснованию свойства оценки снизу, фиксируя $a \in]0, \infty[$ и полагая

$$b \triangleq \frac{a + \bar{a}}{\alpha},$$

$b \in]0, \infty[$. Фиксируем $\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ со свойством $b \leq \mu(E)$. Используя линейность интеграла, получаем, что (см. (24.5))

$$\omega(\mu + \nu) = \omega(\nu) + \left(\int_E M_i d\mu \right)_{i \in \overline{1,p}} \quad \forall \nu \in W.$$

В итоге (см. (24.10)), при $\nu \in W$ имеем, что

$$\begin{aligned} \|\omega(\mu + \nu)\|_{\sup} &\geq \|(\int_E M_i d\mu)_{i \in \overline{1, p}}\|_{\sup} - \|\omega(\nu)\|_{\sup} \geq \\ &\geq \sup(\{|\int_E M_i d\mu| : i \in \overline{1, p}\}) - \bar{a} \geq \int_E M_j d\mu - \bar{a} \geq \\ &\geq \alpha\mu(E) - \bar{a} \geq \alpha b - \bar{a} = a. \end{aligned}$$

Итак, свойство оценки снизу (см. (24.8)) установлено.

Покажем, что $\omega \in C_{\text{cl}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$. Пусть $F \in \mathcal{F}_{t_1}$. Рассмотрим множество $\omega^1(F) \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$. При этом

$$\text{cl}(\omega^1(F), \vartheta) = (\text{seq-cl})[\omega^1(F); \vartheta] \quad (24.11)$$

в силу метризуемости $(\mathbf{H}, \vartheta)$. Выберем произвольно $z \in \text{cl}(\omega^1(F), \vartheta)$. С учетом (2.5) и (24.11) подберем последовательность $(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в F , для которой (см. (2.4))

$$(\omega(\mu_i))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\vartheta} z. \quad (24.12)$$

Полагаем $a_* \triangleq \|z\|_{\sup} + 1$, тогда $a_* > 0$. С учетом (24.8) подбираем $b_* \in]0, \infty[$ такое, что $\forall \mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$

$$(b_* \leq \mu(E)) \implies (a_* \leq \|\omega(\mu + \nu)\|_{\sup} \quad \forall \nu \in W). \quad (24.13)$$

С учетом (24.12) и нормируемости ϑ имеем для некоторого $N \in \mathcal{N}$ свойство

$$\|\omega(\mu_i) - z\|_{\sup} < 1 \quad \forall i \in \overline{N, \infty}.$$

Тогда, в частности, выполняется

$$\|\omega(\mu_i)\|_{\sup} < a_* \quad \forall i \in \overline{N, \infty}. \quad (24.14)$$

Подберем теперь последовательности

$$(\lambda'_i)_{i \in \mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta], \quad (24.15)$$

$$(\lambda''_i)_{i \in \mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow W \quad (24.16)$$

так, что $\mu_k = \lambda'_k + \lambda''_k \quad \forall k \in \mathcal{N}$. С учетом (24.14) получаем

$$\|\omega(\lambda'_i + \lambda''_i)\|_{\sup} < a_* \quad \forall i \in \overline{N, \infty}.$$

В силу (24.13), (24.15) и (24.16) это означает, что

$$\lambda'_i(E) < b_* \quad \forall i \in \overline{N, \infty}. \quad (24.17)$$

Введем $b^* \triangleq \sup(\{\lambda'_i(E) : i \in \overline{1, N}\}) \in [0, \infty[$. Тогда

$$\bar{b} \triangleq \sup(\{b_*; b^*\}) \in]0, \infty[$$

и, в силу (24.19), $\lambda'_i(E) \leq \bar{b} \quad \forall i \in \mathcal{N}$. Ясно, что (см. раздел 15)

$$\Gamma \triangleq \{\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \mid \mu(E) \leq \bar{b}\} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Как следствие $\Gamma \oplus W \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$ (см. [35, § III.4]). Из (24.15) в виде $(\lambda'_i)_{i \in \mathcal{N}}$ имеем последовательность в Γ . Тогда с учетом (24.16) получаем, что

$$(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \Gamma \oplus W. \quad (24.18)$$

Используя компактность $\Gamma \oplus W$, последовательность (24.18) «прореживаем» до сходящейся поднаправленности (см. [64, с. 39]): для некоторых направленного множества $(\mathbf{D}, \preceq)$, $\mathbf{D} \neq \emptyset$, отображения $l \in \mathcal{N}^{\mathbf{D}}$ и конечно-аддитивной меры $\mu^* \in \Gamma \oplus W$ имеем

$$\begin{aligned} ((\mathbf{D}, \preceq, (\mu_{l(d)})_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \mu^*) \& (\forall d_1 \in \mathbf{D} \forall d_2 \in \mathbf{D} \\ ((d_1 \preceq d_2) \implies (l(d_1) \leq l(d_2)))) \& (\forall k \in \mathcal{N} \exists d \in \mathbf{D} : k \preceq l(d)). \end{aligned} \quad (24.19)$$

Отметим, что $(\mu_{l(d)} \in \mathbf{K} \quad \forall d \in \mathbf{D}) \& (\mu^* \in \mathbf{K})$. Из (20.53) и (24.19) следует [64, с. 36] сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, (\mu_{l(d)})_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{t_1} \mu^*. \quad (24.20)$$

Заметим, что (см. (24.5))

$$\omega \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta).$$

Поэтому из (24.20) вытекает сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, (\omega(\mu_{l(d)}))_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\vartheta} \omega(\mu^*). \quad (24.21)$$

В свою очередь, из (24.12) и (24.19) вытекает сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, (\omega(\mu_{l(d)}))_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\vartheta} z \quad (24.22)$$

(мы имеем поднаправленность сходящейся последовательности). Поскольку $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — хаусдорфово топологическое пространство, то из (24.21) и (24.22) получаем, что $z = \omega(\mu^*)$. Напомним, что $\mu_{l(d)} \in F \quad \forall d \in \mathbf{D}$. В силу замкнутости F в $(\mathbf{K}, t_1)$ из (24.20) получаем свойство $\mu^* \in F$. Поэтому $z \in \omega^1(F)$. Поскольку и выбор z был произвольным, вложение

$$\text{cl}(\omega^1(F), \vartheta) \subset \omega^1(F)$$

установлено. Как следствие

$$\omega^1(F) = \text{cl}(\omega^1(F), \vartheta) \in \mathcal{F}_{\vartheta}.$$

Поскольку выбор F также был произвольным, установлено, что ω есть замкнутое отображение из $(\mathbf{K}, t_1)$ в $(\mathbf{H}, \vartheta)$: ω — непрерывное отображение, сохраняющее замкнутость множеств в сторону образа.

Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{H}$. Рассмотрим множество $\omega^{-1}(\{z_*\}) \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$. В силу непрерывности ω имеем, что

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \in \mathcal{F}_{t_1}. \quad (24.23)$$

Для числа $\alpha_* \triangleq \|z_*\|_{\text{sup}} + 1 \in]0, \infty[$ подберем (см. (24.8)) $\beta_* \in]0, \infty[$ так, что $\forall \mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$

$$(\beta_* \leq \mu(E)) \implies (\alpha_* \leq \|\omega(\mu + \nu)\|_{\text{sup}} \quad \forall \nu \in W). \quad (24.24)$$

Полагаем, что

$$\Gamma_* \triangleq \{\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \mid \mu(E) \leq \beta_*\}.$$

Пусть $\mu_* \in \omega^{-1}(\{z_*\})$, $\mu'_* \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ и $\mu''_* \in W$ реализуют представление $\mu_* = \mu'_* + \mu''_*$ (учитывая, что $\mu_* \in \mathbf{K}$, и используем (23.46)). Тогда

$$\|\omega(\mu'_* + \mu''_*)\|_{\text{sup}} = \|\omega(\mu_*)\|_{\text{sup}} = \|z_*\|_{\text{sup}} < \alpha_*,$$

значит (см. (24.24)), имеет место $\mu'_*(E) < \beta_*$. Это означает, в частности, что $\mu'_* \in \Gamma_*$, тогда

$$\mu_* = \mu'_* + \mu''_* \in \Gamma_* \oplus W.$$

Поскольку выбор μ_* был произвольным, установлено, что

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \subset \Gamma_* \oplus W. \quad (24.25)$$

При этом $\Gamma_* \oplus W \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbf{A}(\mathcal{L})]$. Далее, из (20.53), (23.48) и (24.23) имеем (см. [64, с. 35–37]), что

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})}.$$

В итоге, из (24.25) вытекает, что $\omega^{-1}(\{z_*\})$ есть замкнутое, в компактном топологическом пространстве

$$(\Gamma_* \oplus W, \tau_*(\mathcal{L})|_{\Gamma_* \oplus W}) \quad (24.26)$$

множество, значит, оно компактно в топологическом пространстве (24.26). Последнее означает, что топология

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\omega^{-1}(\{z_*\})}, \quad (24.27)$$

совпадающая с топологией множества $\omega^{-1}(\{z_*\})$, индуцированной из (компактного) топологического пространства (24.26), превращает это множество в компактное топологическое пространство, т.е. сама топология (24.27) компактна. Это означает, что

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbf{A}(\mathcal{L})].$$

Используя (23.46) и очевидные вложения

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{A}(\mathcal{L}),$$

получаем, что (см. (20.53)) компактна топология, индуцированная в $\omega^{-1}(\{z_*\})$ из $(\mathbf{K}, t_1)$ и совпадающая с топологией (24.27), т.е.

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \in (t_1\text{-comp})[\mathbf{K}].$$

Поскольку выбор z_* был произвольным, установлено, что

$$\omega \in C_{\text{cl}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta) : \omega^{-1}(\{\tilde{z}\}) \in (t_1\text{-comp})[\mathbf{K}] \quad \forall \tilde{z} \in \mathbf{H},$$

где $(\mathbf{K}, t_1)$ — хаусдорфово топологическое пространство. Итак, ω совершенно, как отображение из $(\mathbf{K}, t_1)$ в $(\mathbf{H}, \vartheta)$. $\square$

Прежде чем рассматривать конструкцию модели расширения, напомним вариант задачи об асимптотической достижимости, обслуживаемый моделью с участием оператора ω (24.5). Следующим определениям и построениям раздела 20.

Итак, определяем пространство (21.2) в соответствии с (10.1), получая конечно-аддитивное пространство с мерой; множество $\mathbf{F}$ (21.1) полагаем соответствующим вилке раздела 23 (см. (23.42)). Множество $\mathbf{X}$ полагаем соответствующим (20.6), где $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathcal{R}$ определены в разделе 20. Топологию t_1 определяем посредством тихоновского произведения экземпляров топологического пространства (20.7) с индексным множеством $\mathbf{\Gamma}$. В топологическом пространстве (20.8) фиксируем множество $\mathbf{Y}$ (20.9), для которого (20.11) определяет семейство $\mathcal{U}_1$ окрестностей в смысле топологического пространства (20.8). Предложение 20.1 делает данное определение весьма актуальным в свете построения контрастного диапазона асимптотических ограничений. В терминах $\mathbf{\Gamma}_0$ (20.17) определяем топологию $t_{\mathbf{u}}$ (20.19), завершая построение конкретного битопологического пространства (20.20). В терминах используемого для построения $t_{\mathbf{u}}$ «матрицанта» (20.16) конструируем оператор $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^{\mathbf{F}}$, согласно (21.5), что (как будет видно из дальнейшего) вполне согласуется со схемой раздела 20. Наконец, пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$ задаем в соответствии с (24.3) при упомянутом (в связи с (24.3)) традиционном оснащении, а оператор $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ определяем посредством (24.4). Тем самым мы определили вариант задачи об асимптотической достижимости с контрастным диапазоном ограничений (см. (19.37), (19.40)). Для решения этой задачи строим кортеж (19.63) следующим образом. Именно, $\mathbf{K}$ определяем посредством (23.46), получая множество сравнимости, на котором затем, согласно (20.53), вводим две топологии: t_1 и $t_{\mathbf{u}}$, получаем битопологическое пространство. Следуя (21.6), вводим оператор $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$. Далее конструируем универсально непрерывный (в смысле (19.47)) оператор g (20.54), (20.55). При этом $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$ (см. (15.6), (20.55), (21.5)). Кроме того, $\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{u}})$ (см. раздел 23). Эти два свойства означают, что $(\mathbf{K}, t_1, t_{\mathbf{u}}, \mathbf{m}, g)$ есть неполная модель расширения, откуда получаем (в виде конкретизированного кортежа (19.63)) модель расширения в смысле раздела 19. Как следствие получаем универсальное (в контрастном диапазоне ограничений асимптотического характера) множество притяжения (19.66).

Итак, в конкретном некомпактифицируемом случае нам в полной мере удалось реализовать цель, связанную с построением универсального множества притяжения посредством модели расширения.

25. Одна задача управления материальной точкой: вопросы асимптотической достижимости

Рассмотрим конкретный вариант применения модели расширения предыдущего раздела для построения множества притяжения, универсального в диапазоне асимптотических ограничений. Речь пойдет о простом примере управляемой механической системы — материальной точке на плоскости:

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_3(t) = M'(t)f(t), \quad \dot{x}_4(t) = M''(t)f(t) \quad (25.1)$$

(уравнения в нормальной форме), где $t \in [0, 1]$, $M' = M'(\cdot)$ и $M'' = M''(\cdot)$ — заданные функции времени, f — управляющая вещественнозначная функция (программное управление) на «стрелке» $[0, 1]$, выбор f должен осуществляться с соблюдением некоторых ограничений.

Считаем заданным вектор $x_0 \in \mathbb{R}^4$ начальных условий: $x(0) = x_0$. Функции M' , M'' задают (на промежутке $[0, 1]$) вектор-функцию, определяющую ориентацию «двигателя», работа которого

в каждый момент времени t характеризуется знакопеременной силой $f(t)$, что соответствует (на идейном уровне) реверсируемому двигателю.

Полагаем, что ограничения траекторного характера определяются следующими (промежуточными по смыслу) условиями. Пусть $t_1 \in]0, 1]$ и $t_2 \in]0, 1]$,

$$Y \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Если $u[t_1] \in \mathbb{R}^2$ — вектор с компонентами $x_1(t_1)$ и $x_2(t_1)$, а $v[t_2] \in \mathbb{R}^2$ — вектор с компонентами $x_3(t_2)$ и $x_4(t_2)$, то упомянутые ограничения имеют вид

$$(u[t_1], v[t_2]) \in Y. \quad (25.2)$$

В (25.2) имеем совокупное ограничение на координаты и скорости материальной точки. Полагаем множество Y замкнутым. Относительно M' и M'' допускаем возможность использования разрывных функций. Мы рассматриваем область достижимости в момент $t = 1$ и асимптотические аналоги этой области достижимости, а точнее, регуляризации последней (см. в этой связи последний пример раздела 14). Уточним математическую модель, используя конструкцию предыдущего раздела (см. также разделы 13, 16).

Полагаем $E = [0, 1[$ (пространство-стрелка). С учетом этой конкретизации используем ниже букву E в построениях, подобных разделу 24. В отношении $\mathcal{L}$ (10.1) используем соглашения раздела 13: 1) $[a, b[\in \mathcal{L} \quad \forall a \in [0, 1] \quad \forall b \in [0, 1]$; 2) семейство $\mathcal{L}$ состоит только из борелевских подмножеств E . Полагаем, что $M' \in B_0(E, \mathcal{L})$ и $M'' \in B_0(E, \mathcal{L})$. Кроме того, пусть

$$(\exists \alpha \in]0, \infty[: \alpha \leq M'(t) \quad \forall t \in E) \vee (\exists \beta \in]0, \infty[: \beta \leq M''(t) \quad \forall t \in E). \quad (25.3)$$

В (25.3) мы имеем вариант условия (24.2). Напомним, что все множества из $\mathcal{L}$ борелевские, тогда для $L \in \mathcal{L}$ определены значения меры Лебега—Бореля. С учетом этого условимся полагать в пределах данного раздела, что η есть след меры Лебега—Бореля на $\mathcal{L}$; грубо говоря, η — «длина». Итак, мы конкретизировали пространство (21.2); разумеется, $\eta \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$.

Замечание 25.1. В разделах 13, 16 для обозначения подобной меры использовался символ λ . Однако мы стремимся в большей степени к конкретизации положений раздела 24. Поэтому символика здесь изменена в сравнении с разделами 13, 14, 16. Мере Лебега—Бореля рассматриваем, как и во второй главе, только на σ -алгебре (борелевских) подмножеств конечного промежутка $E = [0, 1[$ (в разделе 14 этот промежуток был обозначен через I).

Определяем множество $\mathbf{f}$ (21.1) в соответствии с (23.42), где используется неотрицательная константа κ , введенная в разделе 23. Функции $f \in \mathbf{f}$ используем в качестве управлений системой (25.1). Траектория φ_f системы (25.1), порожденная управлением $f \in \mathbf{f}$, определяется «обычной» формулой Коши (см. раздел 16); φ_f действует из отрезка $[0, 1]$ в пространство $\mathbb{R}^4$. Удобно, однако, выделить геометрическую часть траектории и ее скоростные координаты. Если $f \in \mathbf{f}$ и $t \in [0, 1]$, то определяем: 1) вектор $u_f[t] \in \mathbb{R}^2$, имеющий своими компонентами

$$\varphi_{f,1}(t) = x_{01} + tx_{03} + \int_{[0,t[} (t - \xi) M'(\xi) f(\xi) \eta(d\xi), \quad (25.4)$$

$$\varphi_{f,2}(t) = x_{02} + tx_{04} + \int_{[0,t[} (t - \xi) M''(\xi) f(\xi) \eta(d\xi);$$

2) вектор $v_f[t] \in \mathbb{R}^2$, имеющий своими координатами

$$\varphi_{f,3}(t) = x_{03} + \int_{[0,t[} M'(\xi) f(\xi) \eta(d\xi), \quad (25.5)$$

$$\varphi_{f,4}(t) = x_{04} + \int_{[0,t[} M''(\xi) f(\xi) \eta(d\xi).$$

Напомним, что x_{01} , x_{02} , x_{03} , x_{04} — компоненты вектора x_0 , определяющие начальные условия управляемого процесса. Реализуемая в (25.4) вектор-функция $u_f[\cdot] = (u_f[t], 0 \leq t \leq 1)$ определяет

вышеупомянутую геометрическую часть траектории (движение в пространстве геометрических координат), а вектор-функция $v_f[\cdot] = (v_f[t], 0 \leq t \leq 1)$ характеризует изменение скоростных координат системы (25.1). Тогда (25.2) реализуется в виде условия

$$(u_f[t_1], v_f[t_2]) \in Y \quad (25.6)$$

на выбор $f \in \mathbf{f}$. Как и в разделе 13, вводим множество $\mathbf{f}_\partial$ всех $f \in \mathbf{f}$, удовлетворяющих (25.6), после чего конструируем область достижимости

$$\mathbf{G}_\partial = \{\varphi_f(1) : f \in \mathbf{f}_\partial\}. \quad (25.7)$$

В разделе 14 был приведен пример, показывающий, что при ослаблении ограничения (25.6) множество (25.7) изменяется, вообще говоря, скачком, причем возникающее в результате упомянутого ослабления достижимое множество может быть неограниченным. В этой связи мы ставим своей целью изучение реализующегося (при последовательном ослаблении (25.6)) множества притяжения, а не самой области достижимости (25.7). Построение упомянутого множества притяжения является важным с точки зрения исследования потенциальных возможностей управляющей стороны (см. раздел 13).

Формализация упомянутой задачи может быть проведена в соответствии с общей конструкцией разделов 23, 24. Нам предстоит несложная конкретизация основных параметров постановки.

Полагаем $n = 2$ (см. раздел 20) и получаем $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$. Пусть в данном разделе $\mathbf{\Gamma} = \overline{1, 2} = \{1; 2\}$. Тогда $\mathbf{X} = \mathcal{R}^\mathbf{\Gamma}$ (20.6) фактически отождествляется с $\mathbb{R}^4$. Однако будем следовать обозначениям предыдущего раздела. Тогда (20.6) означает, что $\mathbf{X}$ есть множество всех отображений неупорядоченной пары $\mathbf{\Gamma} = \{1; 2\}$ в плоскость $\mathcal{R}$. При упомянутых предположениях конструируем топологическое пространство $(\mathbf{X}, \tau_1)$ (см. раздел 20), получая фактически стандартное оснащение $\mathbb{R}^4$. Однако τ_1 определяем по-прежнему (см. раздел 20), стремясь при этом к сохранению единства в обозначениях. В нашем случае (20.8) есть метризуемое топологическое пространство. Введем множество $\mathbf{Y}$ (20.9). Для этого сначала определяем отображение $(w_\gamma)_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}}$ из $\mathbf{\Gamma}$ в $\mathbb{R}^2$. Итак, $w_1 \in \mathcal{R}$ определяем как вектор с компонентами

$$x_{01} + t_1 x_{03}, \quad x_{02} + t_1 x_{04};$$

$w_2 \in \mathcal{R}$ есть по определению вектор с компонентами x_{03}, x_{04} . Эти построения вполне естественны, согласно с (25.4), (25.5). Теперь определяем $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ в виде множества всех отображений

$$(y_\gamma - w_\gamma)_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}}, \quad (y_1, y_2) \in Y.$$

Итак, $\mathbf{Y}$ получается несущественным преобразованием Y (напомним, что $\mathbf{\Gamma} = \{1; 2\}$). Фактически речь идет о сдвиге Y посредством $(w_1, w_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Поскольку Y было замкнутым множеством в естественной топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(2)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(2)}$ стандартного произведения двух экземпляров топологического пространства $(\mathcal{R}, \tau_{\mathbb{R}}^{(2)})$, то условие (20.9) выполнено, т.е. $\mathbf{Y}$ замкнуто в топологическом пространстве (20.8). Фактически речь идет о множестве в $\mathbb{R}^4$, замкнутом в обычной топологии по координатной сходимости. Ясно, что в построении (20.10) можно ограничиться случаем $K = \mathbf{\Gamma} = \overline{1, 2}$, при котором (20.10) определяет ε -окрестность $\mathbf{Y}$. Это обстоятельство позволяет выделить естественное подсемейство $\mathcal{Y}_1$, являющееся базисом последнего и соответствующее (как в разделе 13) использованию только упомянутых ε -окрестностей $\mathbf{Y}$. Последние, с учетом соотношений, связывающих $\mathbf{Y}$ и Y , соответствуют, как легко видеть, ε -соблюдению Y -ограничения на траекториях системы (25.1). Мы опускаем очевидную детализацию данной конструкции. Обратимся к уточнению матрицанта (20.16), имея в виду детализацию (21.5). Именно, для версии $\mathbf{\Gamma}$ надлежит ввести четыре функции из множества $B(E, \mathcal{L})$. В данном разделе будем использовать условие: если $t \in [0, 1]$, то

$$\chi_{[0, t[} \triangleq \chi_{[0, t[}[E].$$

В этих терминах конкретизируем (20.16), ориентируясь на проблему соблюдения условия (25.2). Итак, будут определены функции $S_{i, \gamma} \in B(E, \mathcal{L}) \quad \forall i \in \overline{1, 2} \quad \forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}$. При этом $\mathbf{\Gamma}$ является неупорядоченной парой. Полагаем при $t \in E$ (т.е. при $t \in [0, 1]$)

$$S_{1,1}(t) \triangleq (t_1 - t)M'(t)\chi_{[0, t_1[}(t), \quad (25.8)$$

$$S_{2,1}(t) \triangleq (t_1 - t)M''(t)\chi_{[0,t_1[}(t),$$

$$S_{1,2}(t) \triangleq M'(t)\chi_{[0,t_2[}(t),$$

$$S_{2,2}(t) \triangleq M''(t)\chi_{[0,t_2[}(t).$$

Из (20.17), (25.8) легко следует, что $\Gamma_0 = \{2\}$ (синглетон). При построении (20.18) существенным является случай $K = \Gamma$. При этом для $u \in \mathbf{X}$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ имеем совпадение $N_{\Gamma}^0(u, K, \varepsilon)$ с множеством

$$\{v \in \mathbf{X} \mid (|u(1)(1) - v(1)(1)| < \varepsilon) \& (|u(1)(2) - v(1)(2)| < \varepsilon) \& (u(2) = v(2))\}.$$

Используя семейство всех таких множеств (при переборе $u \in \mathbf{X}$ и $\varepsilon > 0$), в качестве базиса конструируем топологию $\tau_{\mathbf{u}}$ (20.19) и используем соглашение (19.38) при определении $\mathcal{Y}_1$. Тем самым в терминах битопологического пространства (20.20) реализуется контрастный (в данном случае) диапазон асимптотических ограничений. Оператор $\mathbf{s}$ определяем правилом (21.5). Легко видеть (см. (25.4), (25.5), (25.8)), что при $f \in \mathbf{f}$ вектор

$$\mathbf{s}(f)(1) = \left(\int_E S_{i,1} f \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,2}} \in \mathcal{R}$$

совпадает с вектором $u_f[t_1] - w_1 \in \mathcal{R}$, а вектор

$$\mathbf{s}(f)(2) = \left(\int_E S_{i,2} f \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,2}} \in \mathcal{R}$$

есть вектор $v_f[t_2] - w_2$. Поэтому $\mathbf{Y}$ -ограничение на выбор f эквивалентно исходному Y -ограничению. Аналогичная связь существует для релаксаций ограничений, задаваемых множествами $\mathbf{Y}$ и Y . Эти обстоятельства позволяют связывать «асимптотические ограничения», отвечающие замене множества $\mathbf{Y}$ той или иной окрестностью, с релаксацией Y -ограничения, т.е. с асимптотической версией исходной задачи (см. разделы 13, 14, 16).

Конкретизируем $(\mathbf{H}, \vartheta)$ естественным образом: $\mathbf{H} = \mathbb{R}^4$, $\vartheta = \tau_{\mathbb{R}}^{(4)}$. Тогда, в обозначениях раздела 24 имеем $p = 4$. Введем кортеж (24.1), полагая при $t \in E$:

$$M_1(t) \triangleq (1 - t)M'(t), \quad M_2(t) \triangleq (1 - t)M''(t), \\ M_3(t) = M'(t), \quad M_4(t) = M''(t).$$

Из (25.3) вытекает условие (24.2). Введем оператор $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{f}}$ посредством следующего соглашения:

$$\mathbf{h}(f) \triangleq \varphi_f(1) \quad \forall f \in \mathbf{f}.$$

Тогда при $f \in \mathbf{f}$, вектор $\mathbf{h}(f) \in \mathbb{R}^4$ имеет следующие компоненты:

$$\varphi_{f,1}(1) = x_{01} + x_{03} + \int_E M_1(t) f(t) \eta(dt), \\ \varphi_{f,2}(1) = x_{02} + x_{04} + \int_E M_2(t) f(t) \eta(dt), \\ \varphi_{f,3}(1) = x_{03} + \int_E M_3(t) f(t) \eta(dt), \\ \varphi_{f,4}(1) = x_{04} + \int_E M_4(t) f(t) \eta(dt).$$

Мы получили конкретный вариант (24.4), где $\omega^0 \in \mathbb{R}^4$ есть вектор с компонентами

$$x_{01} + x_{03}, \quad x_{02} + x_{04}, \quad x_{03}, \quad x_{04}.$$

Введем в рассмотрение модель расширения предыдущего раздела. Посредством (23.46) определяем множество сравнимости $\mathbf{K}$, затем по правилу (20.53) оснащаем это множество парой сравнимых топологий t_1 и t_u . Далее вводим оператор $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^f$ по правилу (21.6). Конструируем оператор g (20.54), (20.55), используя (25.8). Тогда g (20.54) удовлетворяет условиям: если $\mu \in \mathbf{K}$, то $g(\mu)(1) \in \mathcal{R}$ есть вектор с компонентами

$$\int_{[0, t_1[} (t_1 - t) M'(t) \mu(dt), \quad \int_{[0, t_1[} (t_1 - t) M''(t) \mu(dt), \quad (25.9)$$

а $g(\mu)(2) \in \mathcal{R}$ — вектор с компонентами

$$\int_{[0, t_2[} M'(t) \mu(dt), \quad \int_{[0, t_2[} M''(t) \mu(dt). \quad (25.10)$$

Два упомянутых плоских вектора (см. (25.9), (25.10)) допускают исчерпывающее истолкование в терминах обобщенных программных движений, но мы опускаем эту интерпретацию. Достаточно, что (см. (25.8)–(25.10)) $s = g \circ \mathbf{m}$. Свойство плотности $\mathbf{m}^1(\mathbb{F})$ в $(\mathbf{K}, t_u)$ установлено в разделе 23. Наконец, определяем оператор $\omega \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$ посредством (24.5) при $p = 4$. Итак (см. заключительную часть раздела 24), построена конкретная модель расширения (19.63). Из теоремы 19.2 получаем цепочку равенств (19.66), которая утверждает, что $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ есть множество притяжения, универсальное в контрастном диапазоне ограничений асимптотического характера. Этот диапазон определяется посылкой импликации (19.67). Так как мы построили конкретную версию модели расширения (19.63), то для нее при всяком выборе $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{f}))$ имеем импликацию (19.67).

Теперь осталось дать естественную интерпретацию множества притяжения $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ в терминах обобщенных конечно-аддитивных управляемых процессов. Для этого введем обобщенные программные движения системы (25.1) в духе конструкций раздела 16. Тогда, в частности, для $\mu \in \mathbf{K}$ определено обобщенное движение

$$\tilde{\varphi}_\mu : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (25.11)$$

компоненты которого (см. раздел 16) имеют следующий вид: при $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\mu,1}(t) &= x_{01} + tx_{03} + \int_{[0, t[} (t - \xi) M'(\xi) \mu(d\xi), \\ \tilde{\varphi}_{\mu,2}(t) &= x_{02} + tx_{04} + \int_{[0, t[} (t - \xi) M''(\xi) \mu(d\xi), \\ \tilde{\varphi}_{\mu,3}(t) &= x_{03} + \int_{[0, t[} M'(\xi) \mu(d\xi), \quad \tilde{\varphi}_{\mu,4}(t) = x_{04} + \int_{[0, t[} M''(\xi) \mu(d\xi). \end{aligned} \quad (25.12)$$

Вектор-функция (25.11), (25.12) является частным случаем обобщенных траекторий второй главы. Согласно (25.11), (25.12) естественно построить расширение определений (25.4), (25.5). При $\mu \in \mathbf{K}$ и $t \in [0, 1]$ введем вектор $\tilde{u}_\mu[t] \in \mathcal{R}$, имеющий своими компонентами $\tilde{\varphi}_{\mu,1}(t)$ и $\tilde{\varphi}_{\mu,2}(t)$, а также вектор $\tilde{v}_\mu[t] \in \mathcal{R}$ с компонентами $\tilde{\varphi}_{\mu,3}(t)$, $\tilde{\varphi}_{\mu,4}(t)$. Из (25.9), (25.12) имеем, в частности, при $\mu \in \mathbf{K}$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\mu[t_1](1) &= x_{01} + t_1 x_{03} + g(\mu)(1)(1), \\ \tilde{u}_\mu[t_1](2) &= x_{02} + t_1 x_{04} + g(\mu)(1)(2). \end{aligned}$$

Далее, из (25.10), (25.12) следует, что для $\mu \in \mathbf{K}$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\mu[t_2](1) &= x_{03} + g(\mu)(2)(1), \\ \tilde{v}_\mu[t_2](2) &= x_{04} + g(\mu)(2)(2). \end{aligned}$$

Здесь мы рассматриваем каждый плоский вектор ортодоксально, отождествляя его с отображением из $\overline{1, 2}$ в $\mathbb{R}$ (строго говоря, элементы $\mathcal{R}$ в разделе 20 понимаются именно в таком смысле). Теперь для $\mu \in \mathbf{K}$ получаем, что

$$\tilde{u}_\mu[t_1] = w_1 + g(\mu)(1), \quad (25.13)$$

$$\tilde{v}_\mu[t_2] = w_2 + g(\mu)(2). \quad (25.14)$$

С учетом соотношений, связывающих Y и $\mathbf{Y}$, из (25.13), (25.14) получаем свойство: при $\mu \in \mathbf{K}$

$$(g(\mu) \in \mathbf{Y}) \iff ((\tilde{u}_\mu[t_1], \tilde{v}_\mu[t_2]) \in Y).$$

Тогда, множество допустимых обобщенных элементов имеет вид

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = \{\mu \in \mathbf{K} \mid (\tilde{u}_\mu[t_1], \tilde{v}_\mu[t_2]) \in Y\}. \quad (25.15)$$

Возвращаясь к определению ω , т.е. к (24.5) в условиях $p = 4$ и вышеупомянутой конкретизации $M_1, M_2, M_3, M_4, \omega^0$, замечаем, что при $\mu \in \mathbf{K}$

$$\omega(\mu) = \omega^0 + \left(\int_E M_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, 4}} = \tilde{\varphi}_\mu(1).$$

Как следствие получаем, что универсальное множество притяжения $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ есть область достижимости материальной точки в классе конечно-аддитивных обобщенных управлений-мер

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = \{\tilde{\varphi}_\mu(1) : \mu \in g^{-1}(\mathbf{Y})\}, \quad (25.16)$$

где множество допустимых обобщенных управлений определено в (25.15). Представления (25.15), (25.16) допускают естественную аналогию с построениями [8, гл. III, IV]. В (25.15), (25.16) для интересного (хотя и гипотетического) случая задачи управления реализовали эффект применения непрямой процедуры расширения в классе конечно-аддитивных мер. При этом (25.16) определяет множество притяжения, обладающее достаточной универсальностью в смысле применения возможных версий ослабления Y -ограничения (см. (19.66), (19.67)). Эта универсальность имеет в данном случае полезную механическую интерпретацию. Речь идет об определенной асимптотической нечувствительности множества притяжения (25.16), заменяющего область достижимости в невозмущенной задаче, к ослаблению упомянутого ограничения «в направлении», определяемом скоростными координатами фазового вектора. В следующем разделе мы продолжим изучение упомянутой асимптотической нечувствительности для более естественного на практике случая ресурсно ограниченной задачи управления.

26. Свойство асимптотической нечувствительности множества достижимости при ослаблении части ограничений: задача управления материальной точкой

В настоящем разделе мы продолжаем исследовать задачу управления системой (25.1). Однако будем рассматривать тот случай, когда (в условиях на выбор $(E, \mathcal{L}, \eta)$, оговоренных в разделе 25) множество $\mathbf{f}$ (21.1) обычных управлений удовлетворяет условию (21.3). Речь идет о задаче управления с ограниченным энергоресурсом: все возможные управления имеют импульс силы, ограниченный одним и тем же числом. По смыслу задачи мы говорим об ограничении на запас топлива, которое может дополняться и другими условиями (см., например, (14.10)). Ограничения траекторного характера полагаем прежними (см. (25.2)). Основная цель в этом исследовании будет сводиться к конкретизации положений раздела 22, связанных с характеристикой свойства асимптотической нечувствительности на языке окрестностей. В данном разделе не предполагаем выполненным условие (25.3).

Итак, конечно-аддитивное пространство с мерой (21.2) полагаем удовлетворяющим всем условиям раздела 25: $E = [0, 1[$; полуалгебра $\mathcal{L}$ (10.1) состоит только из борелевских подмножеств E и содержит все промежутки $[a, b[$, $a \in [0, 1]$, $b \in [0, 1]$; $\eta \in (\sigma\text{-add})_+[\mathcal{L}]$ есть след меры Лебега—Бореля на $\mathcal{L}$. Отличие $(E, \mathcal{L}, \eta)$ от обычного пространства с мерой состоит, следовательно, лишь в том, что семейство $\mathcal{L}$ может не быть σ -алгеброй множеств (в этой связи см. обсуждение в разделах 13, 16).

Фиксируем множество $\mathbf{f}$ (21.1), удовлетворяющее условию (21.3), в качестве множества возможных управлений и придерживаемся обозначений раздела 25 в части описания траекторий, фиксируя замкнутое множество Y , определяющее ограничение (25.2), где $u[t_1] = u_f[t_1]$ и $v[t_2] = v_f[t_2]$. Итак, рассматриваем условие (25.6); начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^4$ также предполагается фиксированным.

Рассматриваем регуляризации задачи о построении области достижимости (25.7), реализуемые в виде соответствующих множеств притяжения. Однако в отличие от раздела 25 больше внимания уделяем конкретным (а не асимптотическим) версиям ослабления основного условия. При этом несущественные преобразования, связанные с подменой (25.6) эквивалентным $\mathbf{Y}$ -ограничением, подробно обсуждать не будем, отсылая читателя к замечаниям предыдущего раздела. Снова рассматриваем контрастный диапазон асимптотических ограничений и в целях сохранения единой символики будем выдерживать обозначения, принятые в разделах 19–22.

Итак, как и в разделе 25, $n = 2$, $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{\Gamma} = \{1; 2\} = \overline{1, 2}$; $\mathbf{X} = \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}}$ есть, строго говоря, множество всех отображений неупорядоченной пары $\mathbf{\Gamma}$ в плоскость $\mathcal{R}$. В соответствии с разделом 25 введем $(w_\gamma)_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}} \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}}$, т.е. введем два плоских вектора $w_1 \in \mathcal{R}$ и $w_2 \in \mathcal{R}$, соответствующих реализации w_γ при $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$. В этих терминах было введено множество

$$\mathbf{Y} = \{(y_\gamma - w_\gamma)_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}} : (y_1, y_2) \in Y\}. \quad (26.1)$$

Напомним, что

$$Y \in \mathcal{F}_{\tau_{\mathbb{R}}^{(2)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(2)}} \quad (26.2)$$

(см. раздел 25), т.е. $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{R} \times \mathcal{R})$ есть множество, замкнутое в стандартном произведении двух экземпляров топологического пространства $(\mathcal{R}, \tau_{\mathbb{R}}^{(2)})$.

Определим τ_1 в соответствии с разделом 20. Однако, в данном случае (как и в построениях раздела 25) упомянутое топологическое пространство (20.8) является метризуемым (более того, нормируемым). Используем, как и в разделе 20, метрику ρ_n , полагая $n = 2$, т.е. оснащаем $\mathcal{R}$ метрикой ρ_2 (см. также раздел 13), порождающей топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(2)}$. Напомним, что $\mathbf{\Gamma} \in \text{Fin}(\mathbf{\Gamma})$, поэтому семейство $\mathfrak{Y}_1$ всех множеств

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \varepsilon) = \{p \in \mathbf{X} \mid \exists q \in \mathbf{Y} : (\rho_2(p(1), q(1)) < \varepsilon) \& \\ \& (\rho_2(p(2), q(2)) < \varepsilon)\}, \quad \varepsilon \in]0, \infty[, \quad (26.3)$$

есть базис семейства $\mathfrak{Y}_1$. Каждое множество (26.3) является ε -окрестностью $\mathbf{Y}$ в смысле метрики, сводящейся по существу к ρ_4 (см. раздел 13). Однако в целях единства символики эту метрику определим несколько иначе по форме, что было сделано в разделе 14. Итак, определяем метрику

$$\mathbf{r} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty[$$

следующим условием: если $p \in \mathbf{X}$ и $q \in \mathbf{X}$, то

$$\mathbf{r}(p, q) \triangleq \sup(\{\rho_2(p(1), q(1)); \rho_2(p(2), q(2))\}).$$

Пусть теперь $\mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0(u, \varepsilon) \triangleq \{v \in \mathbf{X} \mid \mathbf{r}(u, v) < \varepsilon\} \quad \forall u \in \mathbf{X} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$ (см. [64, с. 64]). Тем самым введены открытые шары в метрическом пространстве $(\mathbf{X}, \mathbf{r})$. Тогда (см. раздел 19) из (26.3) имеем: при $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon] = \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0(y, \varepsilon) = \mathfrak{N}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \varepsilon). \quad (26.4)$$

С другой стороны, в нашем конкретном случае τ_1 есть топология $\mathbf{X}$, порожденная метрикой $\mathbf{r}$. Поэтому каждое множество (26.4) есть открытая ε -окрестность множества $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon] = \mathfrak{N}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \varepsilon) \in \mathbb{N}_{\tau_1}^0[\mathbf{Y}] \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (26.5)$$

Во всех последующих рассуждениях семейство $\mathfrak{Y}_1$ (20.11) можно заменить семейством множеств (26.4) при переборе всех $\varepsilon \in]0, \infty[$. Данный подход сводится к представлению окрестностей $\mathbf{Y}$

в терминах, типичных для метрического пространства $(\mathbb{R}^4, \rho_4)$. Мы следуем соглашению (25.8), в наиболее естественном с практической точки зрения случае

$$(M'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, t_1[) \vee (M''(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, t_1[) \quad (26.6)$$

получая для Γ_0 (см. раздел 20) равенство $\Gamma_0 = \{2\}$. Учítываем, что $M' \in B_0(E, \mathcal{L})$ и $M'' \in B_0(E, \mathcal{L})$. Ипользуем соглашение (26.6) в интересах сокращения последующих выкладок. В виде (20.19) получаем топологию $\mathbf{X}$, которая также оказывается метризуемой.

В связи с последним обстоятельством заметим, что базис $\tau_{\mathbf{u}}$ составляют здесь всевозможные множества (20.18), у которых $K = \Gamma$, т.е. множества

$$N_{\Gamma}^0(u, \Gamma, \varepsilon) = \{v \in \mathbf{X} \mid (\rho_2(u(1), v(1)) < \varepsilon) \& \\ \& (u(2) = v(2))\}, \quad u \in \mathbf{X}, \quad \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (26.7)$$

Однако мы знаем (см. раздел 14) как представить множества последнего типа в виде открытых шаров при $\varepsilon \leq 1$. С этой целью предварительно оснащаем $\mathcal{R}$ дискретной метрикой

$$d_2 : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \{0; 1\},$$

для которой при $x_1 \in \mathcal{R}$ и $x_2 \in \mathcal{R}$ выполняется $d_2(x_1, x_2) = 0$ в случае $x_1 = x_2$ и $d_2(x_1, x_2) = 1$ — в противном случае. Затем определяем следующую полудискретную метрику

$$\mathbf{d} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty[$$

условием: при $p \in \mathbf{X}$ и $q \in \mathbf{X}$

$$\mathbf{d}(p, q) \triangleq \sup(\{\rho_2(p(1), q(1)); d_2(p(2), q(2))\}).$$

Введем открытые шары в $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0(u, \varepsilon) \triangleq \{v \in \mathbf{X} \mid \mathbf{d}(u, v) < \varepsilon\} \quad \forall u \in \mathbf{X} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

При этом (см. (26.7)), как легко проверить, $\forall u \in \mathbf{X} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1]$

$$N_{\Gamma}^0(u, \Gamma, \varepsilon) = \mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0(u, \varepsilon). \quad (26.8)$$

С учетом (20.19) и (26.8) получаем, что топология $\tau_{\mathbf{u}}$ порождена метрикой $\mathbf{d}$ множества $\mathbf{X}$. При построении $\tau_{\mathbf{u}}$ (20.19) можно обойтись использованием множеств (20.18) при $K = \Gamma = \{1; 2\}$ и $\varepsilon \leq 1$. Итак, битопологическое пространство (20.20) оказывается «биметризуемым»: каждое из топологических пространств (20.8) и (20.21) метризуемо.

По ряду причин, упомянутых в разделе 22, будем в виде альтернативы окрестностям (26.5), образующим базис $\mathcal{U}$, рассматривать не $\mathcal{U}_{\mathbf{u}}$, а семейство $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}$.

В случае (конечного) множества Γ базис $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}$ можно получить, рассматривая семейство всех множеств

$$\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon) = \{p \in \mathbf{X} \mid \exists q \in \mathbf{Y} : (\rho_2(p(1), q(1)) < \varepsilon) \& \\ \& (p(2) = q(2))\}, \quad \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (26.9)$$

Можно ограничиться и перебором $\varepsilon \in]0, 1]$. Отметим, однако, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$ в силу (26.7)

$$\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon) = \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} N_{\Gamma}^0(y, \Gamma, \varepsilon).$$

Если же $\varepsilon \in]0, 1]$, то в соответствии с (26.8) имеем (см. раздел 19)

$$\mathfrak{N}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon) = \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0(y, \varepsilon) = \mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]. \quad (26.10)$$

Из (26.10) имеем свойство: базис $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}$ составляет семейство всех достаточно «малых» ε -окрестностей множества $\mathbf{Y}$. Итак, используя специфику Γ , мы свели представление битопологического пространства (20.20) к форме, для которой

$$\tau_1 = \tau_{\mathbf{r}}^{\mathbf{h}}(\mathbf{X}), \quad \tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{d}}^{\mathbf{h}}(\mathbf{X}),$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{d}$ — метрики $\mathbf{X}$. Контрастный диапазон асимптотических ограничений реализуется, на основе биметризации $\mathbf{X}$.

Определяем $\mathbf{s}$ так же, как и в разделе 25. Тогда $\forall f \in \mathbf{f}$

$$\mathbf{s}(f)(1) = u_f[t_1] - w_1, \quad \mathbf{s}(f)(2) = v_f[t_2] - w_2.$$

При определении $(\mathbf{H}, \vartheta, \mathbf{h})$ также следуем соглашениям раздела 25, т.е. $(\mathbf{H}, \vartheta) = (\mathbb{R}^4, \tau_{\mathbb{R}}^{(4)})$, а $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{f}}$ имеет здесь следующий, типичный для задачи терминального управления, вид

$$\mathbf{h}(f) = \varphi_f(1) \quad \forall f \in \mathbf{f}. \quad (26.11)$$

С учетом сделанных ранее замечаний основная задача в дальнейшем будет состоять в сравнении множеств

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{M}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon))), \quad \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{M}_{\Gamma}(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon))) \quad (26.12)$$

при малых $\varepsilon \in]0, \infty[$. Мы знаем уже, что данная задача сводится к сравнению множеств

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon])), \quad \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]))$$

при малых ε , $\varepsilon > 0$. Из сопоставления (26.3) и (26.9) видно, что исследование вопросов, связанных с близостью множеств (26.12), ориентировано на выяснение эффекта, имеющего механический характер. Речь идет о практически интересной окрестностной (см. раздел 22) форме свойства асимптотической нечувствительности задачи о построении области достижимости при ослаблении ограничений по скоростным координатам фазового вектора. Иными словами, речь идет о своеобразной робастности задачи определения области достижимости в направлении ослабления условий на реализацию вектора скорости материальной точки. Напомним, что каждое из множеств (26.12) является подмножеством $\mathbb{R}^4$. Для сокращения обозначений условимся полагать (до конца настоящего раздела), что

$$\rho \triangleq \rho_4.$$

В этой связи полезно отметить, что в соответствии с разделом 22, имеем для $A \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$\mathbf{U}_{\rho}^0(A, \varepsilon) = \mathbf{B}_{\rho}^0[A; \varepsilon]. \quad (26.13)$$

Обозначение в левой части (26.13) согласуется с [62] и с конструкциями раздела 22, связанными с исследованием асимптотической нечувствительности, а обозначение в правой части (26.13) использовалось главным образом для целей сравнения различных версий ослабления $\mathbf{Y}$ -ограничения. Напомним, что (см. (26.3)), (26.9)

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{M}_{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{M}_{\Gamma}(\mathbf{Y}, \Gamma, \varepsilon))) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \quad (26.14)$$

Чтобы дополнить (26.14) оценкой близости множеств (26.12), полезно напомнить модель расширения, используемую в разделах 21, 22. Прежде всего, следуя конструкции раздела 21, введем множество обобщенных элементов $\mathbf{K}$, определяемое посредством (21.4). Из положений раздела 15 известно, что так определенное множество $\mathbf{K}$ в целом ряде интересных случаев допускает достаточно простое и понятное описание.

Более того, как и в разделе 21, будем полагать (в настоящем разделе), что множество $\mathbf{f}$ (21.1), (21.3), формирующее $\mathbf{K}$ посредством (21.4), непременно допускает одно из представлений 1) – 4) (см. раздел 21), предшествующих (21.8). Это предположение существенно с точки зрения свойства асимптотической нечувствительности, исследование которого составляет основную цель. Итак, при предположениях относительно множества $\mathbf{f}$ имеет место свойство плотного погружения, сформулированное в (21.8). Отметим, что множество $\mathbf{K}$ (множество обобщенных элементов) обладает одним из следующих четырех представлений (см. раздел 15), соответствующих вариантам 1) – 4) в разделе 21:

1) $\mathbf{K} = U_b(\mathcal{L}) \cap \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}]$, где $b \in [0, \infty[$;

2) $\mathbf{K} = \{\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \mid \mu(E) \leq b\}$, где $b \in [0, \infty[$;

3) $\mathbf{K} = \{\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \mid \mu(E) = b\}$, где $b \in [0, \infty[$;

4) $\mathbf{K} = \{\mu \in \mathbb{A}_{\eta}[\mathcal{L}] \mid v_{\mu}(L_k) \leq c_k \quad \forall k \in \overline{1, r}\}$, где $r \in \mathcal{N}$, $(c_i)_{i \in \overline{1, r}} \in \mathbb{R}_+^r$ и $(L_i)_{i \in \overline{1, r}} \in \mathcal{L}^r$, причем E совпадает с объединением всех множеств L_i , $i \in \overline{1, r}$.

Итак, мы допускаем к рассмотрению четыре версии множества $\mathbf{f}$ (см. раздел 21), которым соответствуют четыре вышеупомянутых версии компакта $\mathbf{K}$ (21.4). Формируем битопологическое пространство (19.46), используя топологии τ_1 и τ_u , определяемые в (20.53). Это построение учитывает конкретизацию (25.8), определяющую, в частности, конкретную версию $\mathbf{s}$ (21.5), согласующуюся в смысле своей структуры с определением раздела 25 (отличие касается лишь конкретного выбора множества $\mathbf{f}$).

Оператор g (20.54), (20.55) определяем в соответствии с конструкцией раздела 25 (см. (25.9), (25.10)), изменяя только область определения, т.е. множество $\mathbf{K}$; при этом, $\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m}$.

В итоге, кортеж $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g)$ есть неполная модель расширения со следующим дополнительным свойством: $(\mathbf{K}, t_1)$ — компакт (см. (20.53), (21.4)). Наконец, определим $\omega \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$ посредством соглашения: $\omega(\mu) = \tilde{\varphi}_\mu(1) \quad \forall \mu \in \mathbf{K}$. Для дальнейшего важно, что $\omega \in C(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta)$. С учетом компактности $(\mathbf{K}, t_1)$ получаем модель расширения раздела 19 в виде $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega)$, причем модель компактифицируемую, что важно с точки зрения применения конструкций раздела 22. Поскольку все требования, обеспечивающие эти конструкции, выполнены, мы получаем две конкретизации положений этого раздела. Первая касается вопросов окрестностной реализации множества притяжения $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$. Заметим, что это множество можно конкретизировать, подобно (25.15), (25.16). Упомянутое множество притяжения универсально в контрастном диапазоне асимптотических ограничений. При этом с учетом теоремы 19.2 и предложения 22.2 имеем, что $\forall \mathbf{O} \in \mathbb{N}_\vartheta[\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))] \exists \delta \in]0, \infty[$:

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}^0(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \alpha))), \vartheta) \subset \quad (26.15)$$

$$\subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \alpha))), \vartheta) \subset \mathbf{O} \quad \forall \alpha \in]0, \delta].$$

Свойство (26.15) может, в частности, применяться для случая, когда окрестность $\mathbf{O}$ множества $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ есть ε -окрестность (26.13), где $A = \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$.

Вторая (логически связанная с первой) конкретизация положений раздела 22 не использует в своих формулировках элементы конструкции расширения и имеет смысл своеобразного «продукта», пригодного для качественных выводов конкретного характера.

Используя специфику $\mathbf{\Gamma}$, получаем следующее суждение (см. (26.14)): $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists \delta \in]0, \infty[\forall \alpha \in]0, \delta]$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}^0(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \alpha))) &\subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \alpha))) \subset \\ &\subset \mathbf{U}_\rho^0(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}^0(\mathbf{Y}, \mathbf{\Gamma}, \alpha))), \varepsilon). \end{aligned} \quad (26.16)$$

Содержательный смысл (26.16) состоит в следующем. Утверждается, что при условии ослабления ограничения на реализацию $u_f[t_1]$ (вектор координат материальной точки в момент t_1) «на α », где число α , $\alpha > 0$, мало, не играет роли, ослаблено ли аналогичным образом ограничение на реализацию $v_f[t_2]$ (вектор скоростей в момент t_2) или нет. Иными словами, имеет место определенная робастность асимптотической версии задачи о достижимости в направлении ослабления требований к реализации скоростей материальной точки. В то же время на примерах в [57, гл. 1] и [58, гл. 1,2] ранее было показано, что в направлении ослабления ограничений на вектор координат (материальной точки) подобной робастности нет. Напротив, данное направление прецизионно.

Свойство (26.16) полезно обсудить в связи с (26.5), (26.10). С учетом двух этих соотношений имеем положение: если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\exists \delta \in]0, 1[: \forall \alpha \in]0, \delta]$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_d^0(\mathbf{Y}; \alpha))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_r^0(\mathbf{Y}; \alpha))) \subset \mathbf{U}_\rho^0(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_d^0(\mathbf{Y}; \alpha))), \varepsilon). \quad (26.17)$$

Таким образом, свойство механического характера (см. (26.16)) допускает истолкование в терминах своеобразной эквивалентности метрик $\mathbf{r}$ и $\mathbf{d}$ в вопросах построения окрестностей $\mathbf{Y}$, обеспечивающих близость области достижимости при ослаблении $\mathbf{Y}$ -ограничения тем или иным способом.

Содержательный смысл (26.16) в достаточной степени был прояснен во втором примере раздела 14. Мы ограничимся кратким обсуждением, используя (26.2). Аналогом метрики $\mathbf{r}$ множества $\mathbf{X}$ будет аналогичная ей метрика $\mathbf{r}'$ множества $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, для которой

$$\mathbf{r}'((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sup(\{\rho_2(u_1, u_2); \rho_2(v_1, v_2)\})$$

$$\forall u_1 \in \mathcal{R} \quad \forall v_1 \in \mathcal{R} \quad \forall u_2 \in \mathcal{R} \quad \forall v_2 \in \mathcal{R}$$

. Метрика $\mathbf{r}'$ порождает топологию $\tau_{\mathbb{R}}^{(2)} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(2)}$. Пространства $(\mathbf{X}, \mathbf{r})$ и $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}, \mathbf{r}')$ можно не различать. Кроме того, используя дискретную метрику d_2 , мы оснащаем $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ полудискретной метрикой $\mathbf{d}'$, полагая

$$\mathbf{d}'((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sup(\{\rho_2(u_1, u_2), d_2(v_1, v_2)\}) \\ \forall u_1 \in \mathcal{R} \forall v_1 \in \mathcal{R} \forall u_2 \in \mathcal{R} \forall v_2 \in \mathcal{R},$$

пространства $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ и $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}, \mathbf{d}')$ можно не различать. При $\varepsilon \in]0, 1]$ мы рассматриваем ε -окрестности

$$\mathbf{B}_{\mathbf{r}'}^0[Y; \varepsilon], \quad \mathbf{B}_{\mathbf{d}'}^0[Y; \varepsilon]$$

множества Y (26.2). При этом для $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$\begin{aligned} & \{f \in \mathbf{f} \mid (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{r}'}^0[Y; \varepsilon]\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : \mathbf{r}'((u_f[t_1], v_f[t_2]), (y_1, y_2)) < \varepsilon\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(u_f[t_1], y_1) < \varepsilon) \& \\ & \quad \& (\rho_2(v_f[t_2], y_2) < \varepsilon)\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(\mathbf{s}(f)(1) + w_1, y_1) < \varepsilon) \& \\ & \quad \& (\rho_2(\mathbf{s}(f)(2) + w_2, y_2) < \varepsilon)\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : (\rho_2(\mathbf{s}(f)(1), \mathbf{y}(1)) < \varepsilon) \& (\rho_2(\mathbf{s}(f)(2), \mathbf{y}(2)) < \varepsilon)\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : \mathbf{r}(\mathbf{s}(f), \mathbf{y}) < \varepsilon\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \mathbf{s}(f) \in \mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]\} = \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]), \end{aligned}$$

тогда в качестве следствия имеем равенство

$$\{\mathbf{h}(f) : f \in \mathbf{f}, (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{r}'}^0[Y; \varepsilon]\} = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{r}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon])). \quad (26.18)$$

Аналогичным образом для $\varepsilon \in]0, \infty[$ имеем

$$\begin{aligned} & \{f \in \mathbf{f} \mid (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{d}'}^0[Y; \varepsilon]\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : \mathbf{d}'((u_f[t_1], v_f[t_2]), (y_1, y_2)) < \varepsilon\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(u_f[t_1], y_1) < \varepsilon) \& \\ & \quad \& (d_2(v_f[t_2], y_2) < \varepsilon)\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(\mathbf{s}(f)(1) + w_1, y_1) < \varepsilon) \& \\ & \quad \& (d_2(\mathbf{s}(f)(2) + w_2, y_2) < \varepsilon)\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : (\rho_2(\mathbf{s}(f)(1), \mathbf{y}(1)) < \varepsilon) \& (d_2(\mathbf{s}(f)(2), \mathbf{y}(2)) < \varepsilon)\} = \\ & = \{f \in \mathbf{f} \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : \mathbf{d}(\mathbf{s}(f), \mathbf{y}) < \varepsilon\} = \{f \in \mathbf{f} \mid \mathbf{s}(f) \in \mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]\} = \\ & = \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon]). \end{aligned}$$

Как следствие имеем равенство

$$\{\mathbf{h}(f) : f \in \mathbf{f}, (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{d}'}^0[Y; \varepsilon]\} = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbf{d}}^0[\mathbf{Y}; \varepsilon])). \quad (26.19)$$

Теперь получаем естественную комбинацию (26.17)–(26.19), полагая, что в (26.18) и (26.19) ε заменяется параметром $\alpha \in]0, \delta]$, где δ выбирается в соответствии с (26.17). Именно, если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\exists \delta \in]0, 1] : \forall \alpha \in]0, \delta]$

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{h}(f) : f \in \mathbf{f}, (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{d}'}^0[Y; \alpha]\} \subset \\ & \subset \{\mathbf{h}(f) : f \in \mathbf{f}, (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{r}'}^0[Y; \alpha]\} \subset \\ & \subset \mathbf{U}_{\rho}^0(\{\mathbf{h}(f) : f \in \mathbf{f}, (u_f[t_1], v_f[t_2]) \in \mathbf{B}_{\mathbf{d}'}^0[Y; \alpha]\}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (26.20)$$

В (26.20) имеем прагматическую форму суждения об асимптотической нечувствительности (робастности). При этом полезно иметь в виду, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbf{r}'}^0[Y; \alpha] &= \{(z_1, z_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(y_1, z_1) < \alpha) \& \\ & \quad \& (\rho_2(y_2, z_2) < \alpha)\} \quad \forall \alpha \in]0, \infty[, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{d}'}^0[Y; \alpha] &= \{(z_1, z_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(y_1, z_1) < \alpha) \& \\ & \quad \& (d_2(y_2, z_2) < \alpha)\} = \end{aligned}$$

$$= \{(z_1, z_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \exists (y_1, y_2) \in Y : (\rho_2(y_1, z_1) < \alpha) \& (y_2 = z_2)\} \forall \alpha \in]0, 1].$$

В последнем представлении, весьма важном для интерпретации (26.20) как некой робастности относительно скоростных координат материальной точки, имеем эффект, характерный для полудискретной метрики $\mathbf{d}'$. Упомянутая робастность исчерпывающим образом определяется в метрических терминах.

27. АБСТРАКТНАЯ ВЕРСИЯ РАСШИРЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ТОЛЧКАМИ: НЕКОМПАКТИФИЦИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ

Рассматривается неограниченный (в сильном смысле) вариант абстрактной задачи управления с толчками. Предлагается вариант множества сравнимости (20.52) и устанавливаются свойства плотности, подобные в логическом отношении свойствам, описанным в разделе 23.

Фиксируем непустое множество E и полуалгебру $\mathcal{L}$ (10.1) подмножеств E , получая измеримое пространство (20.1). Пусть $\kappa \in [0, \infty[$; роль κ будет такой же, как и в разделе 23. В конкретном варианте задачи чисто импульсного управления (см. вторую часть раздела 21) используем κ в качестве ресурсной константы, определяющей ограничение на запас топлива.

Из общих построений раздела 23 вытекает, что для множества

$$\mathbf{W} \triangleq U_\kappa(\mathcal{L}) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\} \quad (27.1)$$

(см. раздел 15) имеет место свойство

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus \mathbf{W} \in \mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}]. \quad (27.2)$$

В (27.2) реализована идея гибридной схемы, в рамках которой комбинируются неотрицательная «часть» множества управлений-мер и часть, представляющая собой компакт в топологическом пространстве (10.2). Будем использовать (27.2) в качестве пространства обобщенных элементов, учитывая то обстоятельство, что из (27.2) следует, в частности, свойство

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus \mathbf{W} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \quad (27.3)$$

С учетом (27.2), (27.3) полагаем в данном разделе, что

$$\mathbf{K} \triangleq (\text{add})_+[\mathcal{L}] \oplus \mathbf{W}. \quad (27.4)$$

Компакт (27.1) рассматриваем в качестве аналога ресурсно ограниченной компоненты пространства обобщенных элементов. Из (27.3), (27.4) имеем в виде $\mathbf{K}$ вариант множества сравнимости. Кроме того отметим, что (см. (27.2), (27.4))

$$\mathbf{K} \in \mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}].$$

В качестве обычных решений (аналоги обычных управлений), как и в разделе 21, используем конечные взвеси мер Дирака (см. (21.20)). Условимся о некоторых обозначениях.

Если $k \in \mathcal{N}$, то множество Ξ_k соответствует разделу 21 (см. (21.12)) и через $\mathbb{R}_+^k$ обозначаем далее множество всех векторов $x \in \mathbb{R}^k$, все компоненты которых неотрицательны. Пусть

$$\begin{aligned} (\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}] &\triangleq \{\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \mid \\ &\exists k \in \mathcal{N} \exists (\alpha_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \mathbb{R}_+^k \exists (x_i)_{i \in \overline{1, k}} \in E^k : \mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (\delta_{x_i} | \mathcal{L})\}, \end{aligned} \quad (27.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\triangleq \{\mu \in (\sigma\text{-add})[\mathcal{L}] \mid \exists k \in \mathcal{N} \exists (\alpha_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \Xi_k \\ &\exists (x_i)_{i \in \overline{1, k}} \in E^k : \mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot (\delta_{x_i} | \mathcal{L})\}. \end{aligned} \quad (27.6)$$

В (27.5), (27.6) имеем непустые подмножества $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ (см. (21.11)). В качестве пространства обычных решений

рассмотрим

$$\mathbf{F} \triangleq (\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}] \oplus \mathbf{U} \in \mathbf{P}'(\mathbb{M}(\mathcal{L})). \quad (27.7)$$

Замечание 27.1. Напомним, что (см. раздел 21) $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ есть линейная оболочка множества $\mathbb{D}(\mathcal{L})$ всех сужений мер Дирака на полуалгебру $\mathcal{L}$. Точки $\mathbb{M}(\mathcal{L})$ и, следовательно, точки $\mathbf{F}$ (27.7) являются простыми счетно-аддитивными мерами на $\mathcal{L}$. Все они имеют вид (21.20) и производят действие типа (21.21) на линейные комбинации функций из $B(E, \mathcal{L})$. Как и в разделе 21, рассматриваем их в качестве реализуемых, т.е. обычных решений.

Напомним, что (см. (21.13), (21.14), (27.1), (27.6))

$$\mathbf{W} = \text{cl}(\mathbf{U}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbf{U}, \tau_0(\mathcal{L})). \quad (27.8)$$

Предложение 27.1.

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] = \text{cl}((\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}], \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}((\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}], \tau_0(\mathcal{L})).$$

Доказательство. Отметим, что из определений легко следует, что

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \in \mathcal{F}_\tau \quad \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}. \quad (27.9)$$

Далее, с учетом (15.12) и (27.9) имеем вложения

$$\text{cl}(H, \tau_0(\mathcal{L})) \subset \text{cl}(H, \tau_*(\mathcal{L})) \quad \forall H \in \mathcal{P}((\text{add})_+[\mathcal{L}]). \quad (27.10)$$

Поскольку $(\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}] \subset (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ (см. (27.5)), то с учетом (27.9), (27.10) имеем цепочку вложений

$$\text{cl}((\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}], \tau_0(\mathcal{L})) \subset \text{cl}((\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}], \tau_*(\mathcal{L})) \subset (\text{add})_+[\mathcal{L}]. \quad (27.11)$$

Пусть выбрана произвольно конечно-аддитивная мера $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. С учетом определений раздела 15 имеем по аналогии с разделом 7, обозначения которого сохранены для измеримого пространства (20.1) (т.е. для случая (10.1)), что семейство всех множеств $T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K})$, $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$, есть локальный базис топологического пространства

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$$

в точке μ . Фиксируем $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$. Так как $\mathcal{L}$ (10.1) есть полуалгебра подмножеств E , то (см. [29, § 1.6])

$$\forall L \in \mathcal{K} \exists \mathcal{K}_L \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}) : L \in \mathcal{K}_L.$$

С учетом конечности семейства $\mathcal{K}$ получаем свойство: для некоторого $\mathbb{K} \in \text{Fin}(\mathbf{D}(E, \mathcal{L}))$ имеет место

$$\forall L \in \mathcal{K} \exists \mathcal{Q} \in \mathbb{K} : L \in \mathcal{Q}. \quad (27.12)$$

Используя определение направленного множества (см. [23, гл. 2]) и (15.24), подберем $\mathcal{W} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ так, что

$$\mathcal{Q} \prec_{\mathcal{L}} \mathcal{W} \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathbb{K}. \quad (27.13)$$

Действуя по аналогии с (15.23), полагаем $\forall H_* \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(H_*, \mathcal{L}) \triangleq & \left\{ \mathcal{K}_* \in \text{Fin}(\mathcal{L}) \mid \left(H_* = \bigcup_{L \in \mathcal{K}_*} L \right) \& \right. \\ & \left. \left(\forall A \in \mathcal{K}_* \forall B \in \mathcal{K}_* ((A \cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (A = B)) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь определено семейство всех неупорядоченных конечных разбиений подмножеств E множествами из $\mathcal{L}$. Напомним одно простое свойство направления, используемого в (15.24) (см. [57, § 4.3]): для $\mathcal{A} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L})$

$$(\mathcal{A} \prec_{\mathcal{L}} \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\} \exists \mathcal{C} \in \mathbf{D}(A, \mathcal{L}) : \mathcal{C} \subset \mathcal{B}). \quad (27.14)$$

Из (27.12)–(27.14) вытекает, что

$$\forall L \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\} \exists \mathcal{C} \in \mathbf{D}(L, \mathcal{L}) : \mathcal{C} \subset \mathcal{W}. \quad (27.15)$$

Напомним, что $\mathcal{W} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$ (см. (15.23)). Более того, $\mathcal{W}$ есть разбиение E , $E \neq \emptyset$. Среди множеств из $\mathcal{W}$ есть непустые. Легко видеть (см. (15.23)), что

$$\mathcal{W}_0 \triangleq \mathcal{W} \setminus \{\emptyset\} \in \mathbf{D}(E, \mathcal{L}).$$

Из (27.13) легко следует, что (см. раздел 15)

$$\mathcal{Q} \prec_{\mathcal{L}} \mathcal{W}_0 \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathbb{K}. \quad (27.16)$$

Из (27.12), (27.14) и (27.16) получаем следующий (более удобный) аналог (27.15):

$$\forall L \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\} \exists \mathcal{C} \in \mathbf{D}(L, \mathcal{L}) : \mathcal{C} \subset \mathcal{W}_0. \quad (27.17)$$

При этом $\mathcal{W}_0 \in \text{Fin}(\mathcal{L})$ и, кроме того, $W \in \mathcal{P}'(E) \quad \forall W \in \mathcal{W}_0$. Пусть

$$\zeta \in \prod_{W \in \mathcal{W}_0} W \quad (27.18)$$

(обоснование самого факта существования ζ не требует, в силу конечности $\mathcal{W}_0$, применения аксиомы выбора). Из (27.18) следует, в частности, что $\zeta \in E^{\mathcal{W}_0}$. Введем в рассмотрение

$$\nu \triangleq \sum_{L \in \mathcal{W}_0} \mu(L) \cdot (\delta_{\zeta(L)}|_{\mathcal{L}}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}. \quad (27.19)$$

При этом $\mu(L) \in [0, \infty[\quad \forall L \in \mathcal{W}_0$. Из (27.5), (27.19) вытекает, что

$$\nu \in (\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}]. \quad (27.20)$$

Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{K}$ фиксировано. Если $\mathbb{L} = \emptyset$, то $\mu(\mathbb{L}) = \nu(\mathbb{L}) = 0$. Рассмотрим случай $\mathbb{L} \neq \emptyset$. Тогда $\mathbb{L} \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$. С учетом (27.17) имеем для некоторого разбиения $\mathfrak{C} \in \mathbf{D}(\mathbb{L}, \mathcal{L})$ вложение $\mathfrak{C} \subset \mathcal{W}_0$. При этом

$$\left(\mathbb{L} = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C \right) \& \left(\forall C_1 \in \mathfrak{C} \forall C_2 \in \mathfrak{C} ((C_1 \cap C_2 \neq \emptyset) \Rightarrow (C_1 = C_2)) \right). \quad (27.21)$$

Заметим (см. (15.23)), что в силу аналогичных свойств разбиения $\mathcal{W}_0$ имеет место

$$W \cap C = \emptyset \quad \forall C \in \mathfrak{C} \forall W \in \mathcal{W}_0 \setminus \mathfrak{C}.$$

Как следствие (см. (27.21)) имеем $W \cap \mathbb{L} = \emptyset$ при $W \in \mathcal{W}_0 \setminus \mathfrak{C}$. В итоге, из (27.19) получаем цепочку равенств

$$\nu(\mathbb{L}) = \sum_{C \in \mathfrak{C}} \mu(C) \cdot (\delta_{\zeta(C)}|_{\mathcal{L}})(\mathbb{L}) = \sum_{C \in \mathfrak{C}} \mu(C) = \mu(\mathbb{L})$$

(мы учли свойство конечной аддитивности μ). Итак, $\mu(\mathbb{L}) = \nu(\mathbb{L})$ во всех возможных случаях. Поскольку выбор $\mathbb{L}$ был произвольным, установлено, что

$$\mu(L) = \nu(L) \quad \forall L \in \mathcal{K}.$$

Иными словами, $\nu \in T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K})$. С учетом (27.20) установлено, что

$$(\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}] \cap T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K}) \neq \emptyset. \quad (27.22)$$

Поскольку выбор $\mathcal{K}$ был произвольным, из (27.22) вытекает, что справедливо

$$(\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}] \cap H \neq \emptyset \quad \forall H \in N_{\tau_0(\mathcal{L})}(\mu).$$

Иными словами, $\mu \in \text{cl}((\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}], \tau_0(\mathcal{L}))$. Вложение

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \subset \text{cl}((\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}], \tau_0(\mathcal{L}))$$

установлено. Согласно (27.11), получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание 27.2. В этой части ограничимся построением неполной модели расширения; для этого достаточно использовать топологическое пространство (15.16). Для получения более общих утверждений в духе раздела 23 следует использовать конструкции [58, гл. 7], [64, § 4.8].

Из (27.8) и предложения 27.1 вытекает следующее

Предложение 27.2. Множество $\mathbf{F}$ (27.7) всюду плотно в $\mathbf{K}$ (27.4) в смысле топологического пространства $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L})) : \mathbf{F} \in (\tau_0(\mathcal{L})\text{-dens})[\mathbf{K}]$.

Доказательство. Пусть выбрана произвольная конечно-аддитивная мера $\mu \in \mathbf{K}$. С учетом (27.4) подберем $\mu_1 \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mu_2 \in \mathbf{W}$ так, что

$$\mu = \mu_1 + \mu_2. \quad (27.23)$$

В более общем, случае (10.1) будем использовать обозначения раздела 7, связанные с $\tau_0(\mathcal{L})$. Выберем произвольно $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$. В силу (27.8) имеем (см. раздел 7) свойство $\mathbf{U} \cap T_{\mathcal{L}}(\mu_2, \mathcal{K}) \neq \emptyset$. Выберем $\nu_2 \in \mathbf{U} \cap T_{\mathcal{L}}(\mu_2, \mathcal{K})$. С другой стороны, в силу предложения 27.1

$$(\sigma\text{-add})_0^+[\mathcal{L}] \cap T_{\mathcal{L}}(\mu_1, \mathcal{K}) \neq \emptyset. \quad (27.24)$$

Выберем и зафиксируем элемент ν_1 из множества в левой части (27.24). Тогда

$$\nu \triangleq \nu_1 + \nu_2 \in \mathbf{F} \quad (27.25)$$

в силу (27.7). При $L \in \mathcal{K}$ имеем равенства $\mu_1(L) = \nu_1(L)$ и $\mu_2(L) = \nu_2(L)$. Согласно (27.23) и (27.25),

$$\mu(L) = \nu(L) \quad \forall L \in \mathcal{K}.$$

Это означает, что $\nu \in T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K})$. Поэтому

$$\mathbf{F} \cap T_{\mathcal{L}}(\mu, \mathcal{K}) \neq \emptyset.$$

Поскольку выбор $\mathcal{K}$ был произвольным, установлено, что $\mu \in \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L}))$; определение $\tau_0(\mathcal{L})$ см. в раздел 7 (оно сохраняет силу в случае (10.1)). Однако и выбор μ был произвольным, тогда $\mathbf{K} \subset \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L}))$, что и означает требуемое утверждение. $\square$

Отметим следующее свойство:

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})}. \quad (27.26)$$

С учетом (27.1), (27.4) и (27.26) получаем, что

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})}. \quad (27.27)$$

В (27.27) мы использовали хорошо известные свойства алгебраической суммы замкнутого и компактного множеств (см., например, [35, гл. III]) в топологическом векторном пространстве $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}))$. Из (27.1) следует, в частности, что

$$\mathbf{W} \in (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})\text{-comp})[\mathbb{R}^{\mathcal{L}}]$$

(учитываем (15.10)). В силу сравнимости топологий $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})$ и $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})$ из (27.27) вытекает свойство

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})}$$

и как следствие справедливо

$$\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau_0(\mathcal{L})}.$$

Так как (см. (27.1), (27.6)) $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}$ и, как следствие,

$$\mathbf{F} \subset \mathbf{K},$$

то с учетом предложения 27.2 имеем следующее равенство:

$$\mathbf{K} = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})). \quad (27.28)$$

Учитывая (27.3) и (27.4), в соответствии с (20.53) вводим (сравнимые) топологии t_1 и $t_{\mathbf{u}}$, получая новую конкретную версию битопологического пространства (19.4). Согласно (27.28),

$$\text{cl}(\mathbf{F}, t_{\mathbf{u}}) = \text{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}. \quad (27.29)$$

Определяем погружение $\mathbf{m}$ множества $\mathbf{F}$ в $\mathbf{K}$ как вложение: $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$ действует по правилу $\mathbf{m}(\mu) \triangleq \mu \quad \forall \mu \in \mathbf{F}$. Следовательно, (27.29) есть на самом деле утверждение о плотном погружении $\mathbf{F}$ (27.7) в множество сравнимости $\mathbf{K}$ (27.4).

Дальнейшее построение неполной модели расширения раздела 19 осуществляется по хорошо отработанной схеме раздела 20. В условиях, когда $\mathbf{X}$ реализуется в виде (20.6) и оснащается соответственно (20.8), фиксируем, как и прежде, $\mathbf{Y}$ (20.9) и семейство окрестностей $\mathcal{Y}_1$ (20.11).

Считаем заданным «матрицант» (20.16) и в терминах Γ_0 (20.17) реализуем оснащение $\mathbf{X}$ топологией $\tau_{\mathbf{u}}$ (20.19). Оператор $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^{\mathbf{F}}$ полагаем заданным (как и в разделе 21) посредством соотношений, подобных (21.20), (21.21). Тем самым обычные управления из $\mathbf{F}$ реализуют взвеси мер Дирака. Для точного определения $\mathbf{s}$ в данном случае надлежит сначала определить $g \in \mathbf{X}^{\mathbf{K}}$ посредством (20.54), (20.55), после чего следует полагать выполненным (21.19). В результате построения (см. следствие (27.3) и (27.29)) «складывается» неполная модель расширения $(\mathbf{K}, t_1, t_{\mathbf{u}}, \mathbf{m}, g)$, причем пространство обобщенных элементов $\mathbf{K}$ компактным не является. Теорема 19.1 характеризует возможности модели для целей построения вспомогательного множества притяжения. Вопрос о построении на основе $(\mathbf{K}, t_1, t_{\mathbf{u}}, \mathbf{m}, g)$ модели расширения в условиях, когда заданы топологическое пространство $(\mathbf{H}, \vartheta)$ и оператор $h \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$, требует дополнительного исследования, подобного тому, которое было проведено (для частного случая) в разделе 24. Приведем в краткой форме требуемую модификацию упомянутой конструкции раздела 24.

В отношении пространства оценок (18.3) сохраняем предположения $\mathbf{H} = \mathbb{R}^p$ и $\vartheta = \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}$, где $p \in \mathcal{N}$. Полагаем заданным кортеж (24.1), удовлетворяющий условию (24.2). Итак, $M_1 \in B(E, \mathcal{L}), \dots, M_p \in B(E, \mathcal{L})$. При условии (27.4) определяем оператор

$$\omega : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{H}$$

посредством (24.5). Далее полагаем, что $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ имеет вид

$$\mathbf{h} \triangleq (\omega|\mathbf{F}) = \omega \circ \mathbf{m}.$$

В этих терминах реализуется аналог предложения 24.1:

$$\omega \in C_{\text{ap}}(\mathbf{K}, t_1, \mathbf{H}, \vartheta). \quad (27.30)$$

Обоснование (27.30) подобно доказательству предложения 24.1 и мы ограничимся изложением схемы рассуждений, используя норму $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ (24.7), порождающую топологию ϑ . Будем рассматривать непрерывные в смысле топологического пространства (10.2) функционалы (24.9). В силу (27.1) и учитывая, что (см. (27.4)) $\mathbf{W} \subset \mathbf{K}$, получаем, что каждый функционал (24.9) ограничен на $\mathbf{W}$ и как следствие (см. (24.5)) $(\omega|\mathbf{W})$ есть ограниченный оператор из $\mathbf{W}$ в $(\mathbf{H}, \|\cdot\|_{\text{sup}})$. Введем число $\bar{a} \in]0, \infty[$ такое, что

$$\|\omega(\nu)\|_{\text{sup}} \leq \bar{a} \quad \forall \nu \in \mathbf{W}. \quad (27.31)$$

Зафиксируем, используя условие (24.2), числа

$$(\alpha \in]0, \infty[) \& (j \in \overline{1, p})$$

такие, что $\alpha \leq M_j(x) \quad \forall x \in E$. Если $a \in]0, \infty[$, то, как и в доказательстве предложения 24.1, вводим

$$b \triangleq (a + \bar{a})\alpha^{-1} \in]0, \infty[; \quad b = b_a.$$

Если $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ обладает свойством $b \leq \mu(E)$, то при $\nu \in W$

$$\begin{aligned} \|\omega(\mu + \nu)\|_{\text{sup}} &= \left\| \left(\int_E M_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, p}} + \omega(\nu) \right\|_{\text{sup}} \geq \\ &\left\| \left(\int_E M_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, p}} \right\|_{\text{sup}} - \|\omega(\nu)\|_{\text{sup}} \geq \int_E M_j d\mu - \bar{a} \geq \alpha b - \bar{a} = a. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место аналог свойства оценки снизу (см. (24.8)). Именно, $\forall a' \in]0, \infty[\quad \exists b' \in]0, \infty[\quad \forall \mu' \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(b' \leq \mu'(E)) \Rightarrow (a' \leq \|\omega(\mu' + \nu)\|_{\text{sup}} \quad \forall \nu \in W). \quad (27.32)$$

По аналогии с разделом 24 проверяется замкнутость отображения ω . При этом можно иметь в виду, что в $(\mathbf{H}, \vartheta)$ замыкание и секвенциальное замыкание множеств совпадают. Ограничимся

кратким обсуждением, фиксируя $F \in \mathcal{F}_{t_1}$. Выберем произвольно $z \in \text{cl}(\omega^1(F), \vartheta)$. Подберем последовательность $(z_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\omega^1(F)$,

$$(z_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\vartheta} z, \quad (27.33)$$

для которой затем подберем последовательность $(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в F такую, что $z_k = \omega(\mu_k) \ \forall k \in \mathcal{N}$. Как и при доказательстве предложения 24.1, выбираем последовательность $(\lambda'_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и последовательность $(\lambda''_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в $\mathbf{W}$, для которых

$$\mu_k = \lambda'_k + \lambda''_k \ \forall k \in \mathcal{N}.$$

Для $a_z \triangleq \|z\|_{\text{sup}} + 1 \in]0, \infty[$ подбираем (по ранее доказанному свойству оценки снизу (27.32)) число $b_z \in]0, \infty[$ так, что $\forall \mu' \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(b_z \leq \mu'(E)) \Rightarrow (a_z \leq \|\omega(\mu' + \nu)\|_{\text{sup}} \ \forall \nu \in \mathbf{W}). \quad (27.34)$$

С учетом (27.33) имеем с некоторого момента

$$\|\omega(\lambda'_k + \lambda''_k)\|_{\text{sup}} < a_z$$

и как следствие получаем с учетом (27.34), что для некоторого числа $c_z \in [b_z, \infty[$ имеет место

$$\lambda'_k(E) \leq c_z \ \forall k \in \mathcal{N}.$$

Пусть Γ_z — множество всех $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ таких, что $\mu(E) \leq c_z$:

$$\Gamma_z = U_{c_z}(\mathcal{L}) \cap (\text{add})_+[\mathcal{L}] \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (27.35)$$

При этом $(\lambda'_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — последовательность в Γ_z . Как следствие получаем

$$\mu_k = \lambda'_k + \lambda''_k \in \Gamma_z \oplus \mathbf{W}. \quad (27.36)$$

Из (27.1), (27.35) имеем [35, § III.4], что

$$\Gamma_z \oplus \mathbf{W} \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Поэтому последовательность, определяемая в (27.36), допускает «прореживание» до сходящейся поднаправленности: для некоторых направленности $(\mathbf{D}, \preceq, l)$ в $\mathcal{N}$ и конечно-аддитивной меры $\mu^* \in \Gamma_z \oplus \mathbf{W}$ имеет место (24.19). При этом $\mu_i \in \mathbf{K} \ \forall i \in \mathcal{N}$. Поэтому (см. (20.53)) имеет место сходимость (24.20). Напомним, что выражение (24.5) определяет непрерывный оператор из $(\mathbf{K}, t_1)$ в $(\mathbf{H}, \vartheta)$. В самом деле,

$$\mu \mapsto \omega^0 + \left(\int_E M_i d\mu \right)_{i \in \overline{1, p}} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{H} \quad (27.37)$$

есть оператор из $C(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \vartheta)$, а рассматриваемый вариант ω есть сужение (27.37) на $\mathbf{K}$ (27.4). С учетом (20.53) получаем требуемое свойство непрерывности ω . Как следствие реализуется сходимость (24.21) и, в силу (27.33), сходимость (24.22). В силу отделимости топологического пространства $(\mathbf{H}, \vartheta)$ имеем $z = \omega(\mu^*)$. Поскольку $(\mu_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — последовательность в замкнутом множестве F , то $\mu^* \in F$ и $z \in \omega^1(F)$. Так как $(z_i)_{i \in \mathcal{N}}$ и z выбирались произвольно, то вложение

$$\text{cl}(\omega^1(F), \vartheta) \subset \omega^1(F)$$

установлено, т.е. $\omega^1(F) \in \mathcal{F}_\vartheta$. Тем самым установлено, что ω есть отображение, замкнутое в смысле топологического пространства $(\mathbf{K}, t_1)$ и $(\mathbf{H}, \vartheta)$.

Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{H}$. С учетом непрерывности ω имеем (24.23). Согласно (27.32) подберем по $\alpha_* \triangleq \|z_*\|_{\text{sup}} + 1$, $\alpha_* > 0$, число $\beta_* \in]0, \infty[$ такое, что $\forall \mu' \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\beta_* \leq \mu'(E)) \Rightarrow (\alpha_* \leq \|\omega(\mu' + \nu)\|_{\text{sup}} \ \forall \nu \in \mathbf{W}). \quad (27.38)$$

Рассмотрим компакт

$$\Gamma_* \triangleq \{\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) \leq \beta_*\} = U_{\beta_*}(\mathcal{L}) \cap (\text{add})_+[\mathcal{L}] \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (27.39)$$

Пусть $\mu_* \in \omega^{-1}(\{z_*\})$. Подберем $\mu'_* \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mu''_* \in \mathbf{W}$, для которых $\mu_* = \mu'_* + \mu''_*$. Мы использовали (27.1), при этом

$$\|\omega(\mu'_* + \mu''_*)\|_{\text{sup}} = \|z_*\|_{\text{sup}} < \alpha_*.$$

С учетом (27.38) имеем: $\mu'_*(E) < \beta_*$. Тогда $\mu'_* \in \Gamma_*$ и $\mu_* \in \Gamma_* \oplus \mathbf{W}$. Итак,

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \subset \Gamma_* \oplus \mathbf{W}$$

. В силу (27.1) и (27.39) имеем [35, § III.4] свойство

$$\Gamma_* \oplus W \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})].$$

Так как (см. (27.1), (27.4), (27.27)) $\mathbf{K} \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})}$,

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})}$$

и $\omega^{-1}(\{z_*\})$ замкнуто в $\Gamma_* \oplus W$ с топологией, индуцированной из топологического пространства (10.2). Эта последняя топология компактна и $\omega^{-1}(\{z_*\})$ — компактное множество в упомянутой топологии подпространства топологического пространства (10.2). С учетом транзитивности операции перехода к подпространству получаем, что

$$\omega^{-1}(\{z_*\}) \in (\tau_*(\mathcal{L})\text{-comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})],$$

следовательно топология $\omega^{-1}(\{z_*\})$, индуцированная из $(\mathbf{K}, t_1)$ (20.53), превращает $\omega^{-1}(\{z_*\})$ в компактное топологическое пространство, т.е. множество $\omega^{-1}(\{z_*\})$ компактно в $(\mathbf{K}, t_1)$. Мы установили компактность всех множеств $\omega^{-1}(\{z\})$, $z \in \mathbf{H}$. Следует иметь в виду, что $\emptyset$ компактно в смысле t_1 . Итак, ω — замкнутое отображение, для которого прообразы всех синглетонов компактны. Это и означает справедливость (27.30). $\square$

При условии (27.4) мы в виде $(\mathbf{K}, t_1, t_u, \mathbf{m}, g, \omega)$ получили модель расширения раздела 19. Дальнейшее ее использование очевидно и не отличается от построений раздела 24.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривались некоторые вопросы теории корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер и связанные с ними конструкции самой теории меры, находящиеся, как правило, на стыке меры и топологии. Полученные результаты имеют качественный характер. Их можно отнести и к общим утверждениям, характеризующим расширения как средство исследования задач асимптотического анализа, и к весьма конкретным положениям, некоторые из которых (в применении к задачам управления) имеют смысл своеобразных механических свойств. Существенную роль в их обосновании играют конструкции расширения в классе конечно-аддитивных мер. В основе этих конструкций лежит принцип двойственности: упомянутые меры отождествляются с линейными непрерывными функционалами на подходящем банаховом пространстве разрывных функций. Для целей построения компактификаций пространства обычных решений используется теорема Алаоглу и другие положения функционального анализа. Кроме того, мы использовали и факты более специального характера, относящиеся к конструкциям конечно-аддитивной теории меры. В этой связи отметим ряд положений упомянутой теории. Прежде всего следует упомянуть о разложении Хьюитта—Иосиды [56, 69, 70]: пространство ограниченных конечно-аддитивных мер на алгебре множеств представимо в виде упорядоченной прямой суммы двух компонент, одна из которых соответствует классическим счетно-аддитивным (знакопеременным) мерам, а другая — чисто конечно-аддитивным мерам. Неотрицательные чисто конечно-аддитивные меры не имеют ненулевых счетно-аддитивных минорант и образуют конус, порождающий компоненту всевозможных чисто конечно-аддитивных мер. Отметим аппроксимативный аналог теоремы Радона—Никодима в классе конечно-аддитивных мер, установленный Бохнером (см. [13, § 4.9]). Наконец, как важное направление следует отметить саму теорию интегрирования по конечно-аддитивной мере (см. [13, 56, 70] и др.). В связи с расширениями в классе конечно-аддитивных мер следует упомянуть работы [18, 19]. Применения конечно-аддитивной теории меры в задачах теории игр и теории полезности см., в частности, в [3, 67].

Кратко коснемся некоторых направлений, связанных с расширениями экстремальных задач и, в частности, задач теории управления. В связи с использованием обобщенных элементов в импульсных управляемых системах прежде всего отметим подход [24, §§ 6, 14], который послужил основой для разработки конструкций решения с применением аппарата обобщенных функций

(см. [15, 20, 21, 28, 36]). Особо отметим изящную теорию расширения задач управления с геометрическими ограничениями на основе использования скользящих режимов; см. [8, 10, 54] и целый ряд других исследований. Следует подчеркнуть естественное сочетание упомянутых конструкций расширения и теории принципа максимума Л. С. Понтрягина [33]. С использованием скользящих режимов была решена проблема существования оптимального управления, для определения которого можно уже применять необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума (см. [10]). Другой важный аспект применения расширений с использованием скользящих режимов затрагивался в [8, гл. III, IV], [54] и в целом ряде других работ. Речь идет о вопросах, связанных с корректностью; отметим разграничение точных, приближенных и обобщенных решений в [8, гл. III]; в этой связи отметим третий пример в разделе 14 настоящей работы.

Заметим, что для рассматриваемых задач управления с геометрическими ограничениями был установлен [30, 65] другой вариант свойства асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений (имеются в виду условия на выбор начальной позиции). Это свойство своеобразной робастности не сводится к устойчивости, оно также может интерпретироваться в терминах расширения, универсального в контрастном диапазоне ограничений асимптотического характера. Следовательно, направление, развиваемое в настоящей работе (см. раздел 19), допускает применение в классических задачах теории управления и вариационного исчисления.

Отметим общие положения [22, 52], касающиеся релаксации экстремальных задач и, в частности, задач оптимального управления (в этой связи см. [52, гл. IX]), а также исследования [9, 68, 71–73].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979.
2. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: МГУ, 1989.
3. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. — М.: Мир, 1977.
4. Белов Е. Г., Ченцов А. Г. Некоторые свойства двузначных мер и условия универсальной интегрируемости// Мат. заметки. — 1987. — 42, № 2. — С. 288–297.
5. Бердышев Ю. И., Ченцов А. Г. Об эквивалентности регуляризаций в абстрактных задачах с различными классами допустимых управлений// Кибернет. и систем. анал. — 1998. — 3. — С. 71–80.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
7. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.
8. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
9. Гамкрелидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах// Докл. АН СССР. — 1962. — 143, № 6. — С. 1243–1245.
10. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во. Тбилисск. ун-та, 1975.
11. Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике. — М.: Наука, 1986.
12. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
14. Даффин Р. Дж. Бесконечные программы// Линейные неравенства и смежные вопросы. — М., 1959. — С. 263–267.
15. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. — М.: Физматлит, 2003.
16. Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1983.
17. Ерохин В. Д. Заметка к теории меры// Успехи мат. наук. — 1961. — 16, № 3. — С. 175–180.
18. Жданок А. И. Эргодические теоремы для негладких марковских процессов// Топол. пространства и их отображения. — Рига, 1981.
19. Жданок А. И. Гамма-компактификация измеримых пространств// Сиб. мат. ж. — 2003. — 44, № 3. — С. 587–605.
20. Завалищин Д. С., Завалищин С. Т. Динамическая оптимизация обтекания. — М.: Физматлит, 2002.
21. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
22. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
23. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981.

24. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
25. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985.
26. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
27. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
28. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с обобщенным управлением// Автомат. и телемех. — 1989. — 6. — С. 23–34.
29. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969.
30. Пак В. Е., Ченцов А. Г. К вопросу о регуляризации функции асимптотического значения задачи управления при возмущении множества начальных позиций// Дифференц. уравнения. — 1994. — 30, № 11. — С. 1939–1949.
31. Парасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. — М.: Мир, 1983.
32. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965.
33. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983.
34. Пхакадзе Ш. С. Разложения меры// Тр. Тбилисс. мат. ин-та им. А. М. Размадзе. — Тбилиси, 1964. — 29. — С. 121–145.
35. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
36. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987.
37. Серов В. П., Ченцов А. Г. Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями// Дифференц. уравнения. — 1990. — 26, № 4. — С. 607–617.
38. Сикорский Р. Булевы алгебры. — М.: Мир, 1969.
39. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.
40. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988.
41. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и задачи на минимум// Кибернетика. — 1988. — 3. — С. 67–70.
42. Ченцов А. Г. Двухзначные меры на полуалгебре множеств и некоторые их приложения к бесконечно-мерным задачам математического программирования// Кибернетика. — 1988. — 6. — С. 72–76.
43. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий// Успехи мат. наук. — 1995. — 50, № 5 (305). — С. 223–242.
44. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями// Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — 63, № 3. — С. 185–223.
45. Ченцов А. Г. Двухзначные меры как обобщенные элементы: проблема расширения системы условий// Докл. РАН. — 2000. — 374, № 5. — С. 611–614.
46. Ченцов А. Г. Некоторые свойства двухзначных мер и представления пределов по фильтру// Докл. РАН — 2000. — 370, № 5. — С. 595–598.
47. Ченцов А. Г. Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения// Тр. Мат. ин-та РАН. — 2000. — С. 35–60.
48. Ченцов А. Г. Об измеримых пространствах, допускающих недираковские счетно-аддитивные $(0,1)$ -меры// Докл. РАН. — 2002. — 384, № 5. — С. 607–610.
49. Ченцов А. Г. Об одном классе недираковских счетно-аддитивных $(0,1)$ -мер// Функционально-дифференциальные уравнения (специальный выпуск). — Пермь, 2002. — С. 238–252.
50. Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер// Изв. вузов. Сер. мат. — 2002. — 2. — С. 58–80.
51. Ченцов А. Г., Каширцева Т. Ю. Обобщенные траектории линейных управляемых систем с разрывными коэффициентами при управлении// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех. — 1999. — 2. — С. 137–146.
52. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
53. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
54. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1970.
55. Alexandroff A. D. Additive set-functions in abstract spaces// Мат. сб. — 1940. — 8 (50), № 2. — С. 307–348.
56. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M. Theory of charges. A study of finitely additive measures. — N.Y.: Acad. Press, 1983.
57. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — N.Y.: Plenum Publishing Corporation, 1996.
58. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publs., 1997.

59. *Chentsov A. G.* Universal properties of generalized integral constraints in the class of finitely additive measures// *Funct. Differ. Equat.* — 1998. — 5, № 1-2. — С. 69–105.
60. *Chentsov A. G.* On approximation of asymptotic attainability domains// *Nonsmooth and discontinuous problems of Control and optimization// Proc. IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998, Pergamon.* — С. 1–12.
61. *Chentsov A. G.* Two-valued measures: finite additivity and countable additivity// *Funct. Differ. Equat.* — 2000. — 7, № 3-4. — С. 231–257.
62. *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and extension constructions// *Atti Semin: mate. fis. Univ. Modena* — 2001. — 49, № 2. — С. 531–545.
63. *Chentsov A. G.* Two-valued measures and zero-dimensional topologies// *Funct. Differ. Equat.* — 2002. — 9, № 1-2. — С. 71–89.
64. *Chentsov A. G., Morina S. I.* Extensions and Relaxations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
65. *Chentsov A. G., Pak V. E.* On the extension of the nonlinear problem of optimal control with nonstationary phase restrictions// *Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl.* — 1996. — 26, № 2. — С. 383–394.
66. *Christensen J. P. R.* A finitely additive measure defined on sigma-field is automatically countably additive// *Atti Semin. mat. fis. Univ. Modena*, 2001. — 49, № 2. — С. 509–511.
67. *Dubbins L. E., Savage L. J.* Inequalities for stochastic processes. How to gamble if you must. — N.Y.: Dovers, 1976.
68. *Gamkrelidze R. V.* On some extremal problem in the theory of differential equations. With applications to the theory of optimal control// *J. SIAM.* — 1965. — A3, № 1. — С. 106–128.
69. *Hewitt E., Yosida K.* Finitely additive measures// *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1952. — 72, № 1. — С. 46–66.
70. *Semadeni Z.* Spaces of Continuons Functions. — Warszawa: PWN, 1971.
71. *Warga J.* Relaxed variational problems// *J. Math. Anal. and Appl.* — 1962. — 4, № 1. — С. 112–128.
72. *Young L. C.* Generalized surfaces in the calculus of variations, I// *Ann. Math.* — 1942. — 43. — С. 84–103.
73. *Young L. C.* Generalized surfaces in the calculus of variations, II// *Ann. Math.* — 1942. — 43. — С. 530–544.

А. Г. Ченцов

Институт математики и механики, Уральское отделение РАН

E-mail: chentsov@imm.uran.ru