ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 18

АЛГЕБРА

Тбилиси
2004

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 18

АЛГЕБРА

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика и ее приложения. Том 18 (2004). С. 3–25

УДК 512.55

ДЕЙСТВИЯ АЛГЕБР ХОПФА НА ОБЩИХ КВАНТОВЫХ МАЛЬЦЕВСКИХ РЯДАХ И КВАНТОВЫХ ПЛОСКОСТЯХ

© 2004 г. **В. А. АРТАМОНОВ**

Аннотация. Описываются автоморфизмы, дифференцирования и действия алгебр Хопфа на квантовой плоскости и ее пополнении.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Пусть k — основное поле и $\mathbf{q} = (q_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, k)$ — фиксированная матрица, элементы $q_{ij} \in k^*$ которой называется *мультипараметрами* и удовлетворяют условиям $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = 1$ для всех i, j. Кроме того, зафиксировано такое целое число r, что $0 \leqslant r \leqslant n$. Через

$$\mathcal{O}_{\mathbf{q}} = k_{\mathbf{q}}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n]$$

обозначается ассоциативная k-алгебра с единицей, порожденная элементами $X_1, \dots, X_n$, $X_1^{-1}, \dots, X_r^{-1}$ с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_iX_j &= q_{ij}X_jX_i, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \\ X_iX_i^{-1} &= X_i^{-1}X_i = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant r. \end{aligned} \tag{1}$$

Алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ называется *алгеброй квантовых многочленов*. При $n = 2$ алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ называется *квантовой плоскостью*. В этом случае матрица $\mathbf{q}$ имеет специальный вид

$$\begin{pmatrix} 1 & q \\ q^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad q = q_{12},$$

и поэтому она часто обозначается $\mathcal{O}_q$.

Алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ при $r = 0$ является координатной алгеброй квантового пространства $\mathbb{A}_Q^n$ [2], а при $r = n$ — квантовым тором $\mathbb{T}_Q^n$ [13]. В настоящей работе мы объединяем оба эти случая и рассматриваем в качестве r произвольное натуральное число с условием $0 \leqslant r \leqslant n$. Тогда алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ является координатной алгеброй прямого произведения $\mathbb{T}_Q^r \times \mathbb{A}_Q^{n-r}$ [13].

Алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ является нетеровой слева и справа областью с правым и левым телом частных F.

Алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ при $r = n$ введена в [15], где изложен алгоритм для вычисления размерности Крулля алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ в терминах мультипараметров. Отметим в связи с этим работу [12], где доказана

Теорема 1. *Пусть d — размерность Крулля алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ с $r = n$. Тогда d равно глобальной размерности алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и равно максимальному числу коммутирующих одночленов в алгебре $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$, у которых мультииндексы независимы в $\mathbb{Z}^n$.*

Всюду в работе мы будем предполагать, что алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ является *общей алгеброй квантовых многочленов*, т. е. все мультипараметры q_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, независимы в мультипликативной группе k^* поля k.

Отметим ряд полученных ранее результатов по изучению кольцевых свойств алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и тела F. В работе [8] описаны все нормирования тела F. Отметим, что эти нормирования связаны с точками квантового пространства $\mathbb{A}^n_Q$ [3, 20]. Как показано в [8], каждое максимальное нормирование имеет следующий вид. В $\mathbb{Z}^n$ рассматривается некоторый линейный порядок. Этот порядок естественным образом индуцирует порядок на множестве одночленов от $X_1, \ldots, X_n$. Тогда для любого ненулевого элемента f из $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ значение нормирования $\nu(f)$ равно $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, если $X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$ является минимальным одночленом, входящим в f. Отображение ν продолжается до нормирования $\nu\colon F^* \to \mathbb{Z}^n$. Таким образом, максимальные нормирования классифицируются линейными порядками в $\mathbb{Z}^n$. Известно [4, глава 6], что каждый линейный порядок в $\mathbb{Z}^n$ индуцирован некоторым вложением $\mathbb{Z}^n$ в лексикографически упорядоченное пространство $\mathbb{R}^n$.

Для лексикографического порядка А. И. Мальцевым и Б. Нейманом построено тело лорановских рядов $\mathcal{F}$ [1]. В работе [8] описаны автоморфизмы тела $\mathcal{F}$ и действия конечномерных точечных алгебр Хопфа на $\mathcal{F}$ в предположении, что $n \geqslant 3$. Целью настоящей работы является рассмотрение случая $n = 2$. Дается описание группы автоморфизмов алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и тела $\mathcal{F}$, исследованы алгебры Ли их дифференцирований, а также дано описание действия точечных конечномерных алгебр Хопфа на теле $\mathcal{F}$. Кроме того, в первом разделе рассмотрен вопрос о сопряженности элементов в $\mathcal{F}$.

Отметим, что автоморфизмы алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и тел F, $\mathcal{F}$ изучались в [1, 6, 7, 10, 11, 18]. В [6] рассматривались группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и алгебры Ли дифференцирований $\operatorname{Der}\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ при $r = n$. Те же вопросы для алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ при $r = n$ изучены в [18, следствие 3.6]. В [11] дано полное описание групп автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ для алгебры общих квантовых многочленов $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ при любых r и в случае, когда вместо k берется произвольное тело коэффициентов. Для точной формулировки результатов нам необходимо ввести ряд определений.

Автоморфизм γ алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ назовем *торическим*, если

$$\gamma(X_j) = \gamma_j X_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\gamma_j \in k^*$. Назовем автоморфизм γ алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ *зеркальным*, если

$$\gamma(X_j) = \gamma_j X_j^{-1}, \quad w = 1, \ldots, n.$$

где $\gamma_j \in k^*$. Заметим, что каждый зеркальный автоморфизм имеет порядок 2. Приведем соответствующий результат для группы автоморфизмов в окончательной форме, изложенной в [11].

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$ и γ — инъективный эндоморфизм алгебры общих квантовых многочленов $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$. Тогда γ либо торический, либо зеркальный автоморфизм. Если $r < n$, то группа автоморфизмов состоит только из торических автоморфизмов.*

Если G — конечная подгруппа в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$, то подалгебра инвариантов $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^G$ является левым и правым нетеровым кольцом, причем $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ является конечно порожденным левым и правым $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^G$-модулем. Пусть I — ненулевой левый идеал в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$. Тогда $I \cap \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^G \neq 0$. В частности, F^G является телом частных для $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^G$.

Отметим работу [19], где показано, что если при $r = n$ алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ (не обязательно общая) проста, то каждый ее эндоморфизм является автоморфизмом. Если же алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ не является простой, то эндоморфизм является автоморфизмом в том и только в том случае, если он отображает центр изоморфно на себя.

Изучение групп автоморфизмов тела F в случае $n = 2$ предпринято в [10], а в случае $n \geqslant 3$ — в [1]. При $n = 2$ в теле F, помимо торических и зеркальных, всегда имеются следующие *элементарные автоморфизмы*. Если h — ненулевая рациональная функция от одной переменной, то отображения $X \mapsto h(Y)X$, $Y \mapsto Y$ и $X \mapsto X$, $Y \mapsto h(X)Y$ задают автоморфизм тела F. Алев высказал гипотезу, что группа автоморфизмов тела F при $n=2$ порождается элементарными, торическими, зеркальными автоморфизмами и сопряжениями с помощью ненулевых элементов из F. Частичное решение этой проблемы получено в [10].

Теорема 3 ([10]). *Пусть $n=2$ и $\psi\colon \mathcal{O}_q \to F$ — гомоморфизм k-алгебр, причем $X, Y \notin \ker\psi$. Тогда существует такая последовательность элементарных, торических, зеркальных автоморфизмов и сопряжений с помощью некоторого ряда z вида*

$$z = 1 + \sum_{j>0} z_j X^j \in k(Y)((X;\alpha)), \quad z_j \in k(Y),$$

что пара $\psi(X)$, $\psi(Y)$ может быть переведена этими преобразованиями в пару X^m, Y^m, где $m=\pm 1$. Здесь $\alpha(X) = YXY^{-1} = q^{-1}X$.

В случае $n \geqslant 3$ можно высказать аналогичную гипотезу о порождении группы $\operatorname{Aut} F$ торическими, зеркальными автоморфизмами и сопряжениями. Доказательство этой гипотезы представляется достаточно трудным. В [8] удается решить эту задачу для тела $\mathcal{F}$ и показать, что каждый автоморфизм тела $\mathcal{F}$ при $n \geqslant 3$ является композицией торического и зеркального автоморфизмов и сопряжения. В настоящей работе в разделе 3 описаны группы автоморфизмов квантовых плоскостей, т. е. алгебры $\mathcal{O}_q$ при $n=2$. Кроме того, в следующей главе описаны группы непрерывных автоморфизмов тела $\mathcal{F}$ при $n=2$.

В [8] найдены автоморфизмы и алгебры Ли непрерывных дифференцирований тела $\mathcal{F}$ при $n \geqslant 3$. В настоящей работе в разделе 6 этот результат распространен на случай $n=2$.

В некоммутативной геометрии [2, 13] алгебра квантовых многочленов $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ рассматривается как алгебра функций на квантовом аффинном пространстве $\mathbb{A}^n_Q$. К ней близка квантовая грассманова алгебра Γ. Алгебра функций на матрицах размера n вводится в [2] как универсальная биалгебра, кодействующая на паре алгебр $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$, Γ. Следуя этому подходу, в настоящей работе мы изучаем действия конечномерных точечных алгебр Хопфа H на теле $\mathcal{F}$ при $n \geqslant 2$. Тем самым объединяются действия автоморфизмов и дифференцирований в $\mathcal{F}$. С геометрической точки зрения в настоящей работе мы изучаем конечные квантовые группы, действующие на квантовой плоскости. Отметим, что действия конечномерных точечных алгебр Хопфа на алгебре $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ при $n \geqslant 3$ описаны в [9].

Приведем основные результаты работы. В разделе 1 в теореме 4 при $n=2$ описаны нормирования тела частных F. В теореме 5 из раздела 2 показано, что в $\mathcal{F}$ каждый ненулевой элемент сопряжен ряду от одного одночлена. В теоремах 6 и 7 из раздела 3 описаны автоморфизмы и строение конечных групп автоморфизмов общих квантовых плоскостей. Тот же результат для тела $\mathcal{F}$ получен в теоремах 8, 7 и 10 в разделе 4. В разделе 6 в теоремах 14, 15 и 16 описаны действия точечных конечномерных алгебр Хопфа на теле $\mathcal{F}$. Наконец, в теореме 17 из раздела 7 найдены все (непрерывные) пуассоновы скобки на алгебре $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и теле $\mathcal{F}$.

Зафиксируем некоторые обозначения, которые будут использоваться в работе. Элементы из $\mathbb{Z}^n$ называются *мультииндексами*. Для любого мультииндекса $u = (u_1, \ldots, u_n)$ полагаем

$$X^u = X_1^{u_1} \ldots X_n^{u_n} \in \mathcal{O}_{\mathbf{q}}. \tag{3}$$

Это произведение называется *одночленом*.

1. Нормирование в квантовых плоскостях

В работе [8] описаны нормирования в теле F в предположении, что число переменных n не меньше трёх. Сейчас мы рассмотрим оставшийся случай $n=2$. Напомним

Определение 1. Пусть Γ — линейно упорядоченная аддитивная (не обязательно коммутативная) группа. Предполагается, что порядок является артиновым. Γ-*нормированием* в F называется сюръективный групповой гомоморфизм ν из мультипликативной группы F^* тела F на группу Γ, для которого выполнены следующие условия:

1) если $a, b, a+b \in F^*$, то $\nu(a+b) \geqslant \min[\nu(a), \nu(b)]$;
2) если $a, b, a+b \in F^*$ и $\nu(a) \neq \nu(b)$, то $\nu(a+b) = \min[\nu(a), \nu(b)]$.

Кроме того, мы предполагаем, что $\nu(k^*) = 0$.

Пусть G — мультипликативная подгруппа в F^*, порожденная k^* и неизвестными X, Y. Из определяющих соотношений (1) видно, что $k^* \lhd G$ и G/k^* — свободная абелева группа с базой Xk^*, Yk^*. Так как $k^* \subseteq \ker \nu$, то гомоморфизм ν индуцирует гомоморфизм групп $\bar{\nu}\colon G/k^* \to \Gamma$. Каждая замена переменных Xk^*, Yk^* поднимается до замены переменных X, Y в $\mathcal{O}_q$. Поэтому, совершая, если необходимо, замену переменных, можно считать, что $\nu(X), \nu(Y) \geqslant 0$. Следующее утверждение при $n \geqslant 3$ доказано в [8, предложение 2.2].

Предложение 1. *Пусть $f \in \mathcal{O}_q$ и $\nu(f) > 0$. Тогда в f входит одночлен с положительным значением ν.*

Доказательство. Пусть
$$f = \sum_{m,d\in\mathbb{Z}} \lambda_{m,d} X^m Y^d, \quad \lambda_{m,d} \in k^*. \tag{4}$$
Тогда
$$XfX^{-1} = \sum_{m,d\in\mathbb{Z}} \lambda_{m,d} q^d X^m Y^d. \tag{5}$$
Выберем один из одночленов $\lambda_{m_0,d_0} X^{m_0} Y^{d_0}$ в f и рассмотрим элемент $g = f - q^{-d_0} XfX^{-1}$. Если $g \neq 0$, то g содержит меньшее число одночленов. Поэтому в этом случае мы можем воспользоваться индукционными соображениями, поскольку
$$\nu(g) \geqslant \min(\nu(f), \nu(-q^{-d_0} XfX^{-1})) = \min[\nu(f), \nu(f)] = \nu(f) > 0.$$
Предположим, что $f = q^{-d_0} XfX^{-1}$. Из (4), (5) вытекает, что
$$f = h(X) Y^{d_0},$$
поскольку q не является корнем из 1. В этом случае перейдем к рассмотрению элемента YfY^{-1}. Снова либо можно уменьшить число одночленов, либо $f = \theta X^m Y^d$. □

Теорема 4. *Группа Γ порождается элементами $\nu(X)$, $\nu(Y)$ и потому является свободной абелевой группой. Пусть, например, $\nu(X) > 0$ и f из* (4). *Тогда* $\nu(f) = \min[m\nu(X) + d\nu(Y)]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma \neq 0$. По предложению 1 либо $\nu(X) > 0$, $\nu(Y) \geqslant 0$, либо наоборот.

Предположим сначала, что $\nu(X)$, $\nu(Y)$ зависимы, т. е. $\nu(X^m Y^n) = 0$ для некоторой ненулевой пары (m, n). Совершая замену переменных, можно предполагать, что $\nu(Y^d) = d\nu(Y) = 0$ для некоторого $d > 0$. Так как в линейно упорядоченной группе нет кручения, то $\nu(Y) = 0$. Таким образом, если $\nu(X), \nu(Y) > 0$, то можно дополнительно предполагать, что $\nu(X)$, $\nu(Y)$ независимы. Тогда в силу условий 1), 2) в определении 1 получаем требуемое утверждение, поскольку Γ — свободная абелева группа с базой $\nu(X)$, $\nu(Y)$.

Предположим, что $\nu(X) > 0$, $\nu(Y) = 0$. Если $f \in \mathcal{O}_q \setminus 0$, то $f = \sum\limits_i X^i h_i(Y)$, где $h_i(Y) \in k[Y^{\pm 1}]$. По условиям 1) и 2) из определения 1 получаем, что $\nu(f) = \min[m\nu(X) + \nu(h_i(Y))]$ и при этом $\nu(h_i(Y)) \geqslant 0$. Если бы выполнялось $\nu(h_i(Y)) > 0$, то $\nu(Y) > 0$ по предложению 1. Таким образом, $\nu(h_i(Y)) = 0$ для всех i. Отсюда вытекает утверждение. □

2. Сопряженность в $\mathcal{F}$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о сопряженности элементов в теле $\mathcal{F}$. Напомним сначала строение тела квантовых лорановских рядов $\mathcal{F} = k_Q((X_1, \ldots, X_n))$, $n \geqslant 2$, в смысле Мальцева—Неймана. Элементами $\mathcal{F}$ являются все такие отображения $f\colon \mathbb{Z}^n \to k$, что
$$\operatorname{supp} f = \{m \in \mathbb{Z}^n \mid f(m) \neq 0\}$$
является артиновым множеством относительно лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^n$. Каждый элемент $f \in \mathcal{F}$, в том числе и нулевой, можно отождествить с рядом $f = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} f(m) X^m$. Скажем, что одночлен X^u из (3) *входит* (*встречается*) в $f \in \mathcal{F}$, если $f(u) \neq 0$. Через $\nu(f)$ обозначается минимальный элемент из $\operatorname{supp} f$. Нам потребуется

Лемма 1 ([1]). *Пусть ξX^t — некоторый одночлен, $\xi \in k^*$. Если существует такое $h \in \mathbb{Z}^n$, что t, h независимы в $\mathbb{Z}^n$, то найдется такой элемент $\omega \in k$, что $[\omega X^{t-h}, X^h] = \omega X^{t-h} X^h - X^h \omega x^{t-h} = \xi X^t$.*

Теорема 5. *Пусть $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел $m_1, \ldots, m_n$. Предположим, что $z = \zeta X^m + u \in \mathcal{F}$, где $\zeta \in k^*$ и $\nu(u) > m = \nu(z)$. Тогда существует такой элемент $w \in \mathcal{F}$, что $\nu(w) > 0$ и $(1-w)z(1-w)^{-1} = \zeta X^m + v$, где $\operatorname{supp} v \subseteq \mathbb{Z}\frac{m}{d}$ и $\nu(v) > m$. Другими словами, $\zeta X^m + v$ является рядом от одной переменной $X^{\frac{m}{d}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $\operatorname{supp} u \nsubseteq \mathbb{Z}\frac{m}{d}$. Пусть ξX^{t_0} — минимальный одночлен из u, не лежащий в $\mathbb{Z}\frac{m}{d}$. Тогда t_0 и $\frac{m}{d}$, а следовательно, и $t_0 - m$, m независимы в $\mathbb{Z}^n$. По лемме 1 найдется такой элемент $\omega_{t_0} X^{t_0-m}$, что $[\omega_{t_0} X^{t_0-m}, \zeta X^m] = \xi X^{t_0}$. В силу выбора t_0 имеем $t_0 \geqslant \nu(u) > m$. Поэтому $t_0 - m > 0$.

Пусть $u = u'_{t_0} + u''_{t_0}$, где

$$\operatorname{supp} u'_{t_0} \subset \mathbb{Z}\frac{m}{d}, \quad \operatorname{supp} u''_{t_0} \cap \mathbb{Z}\frac{m}{d} = \varnothing.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(1 - \omega_{t_0} X^{t_0-m}) z (1 - \omega_{t_0} X^{t_0-m})^{-1} = (1 - \omega_{t_0} X^{t_0-m}) z \sum_{j \geqslant 0} (\omega_{t_0} X^{t_0-m})^j = \\
&= z + z \sum_{j \geqslant 1} (\omega_{t_0} X^{t_0-m})^j - \sum_{j \geqslant 0} \omega_{t_0} X^{t_0-m} z (\omega_{t_0} x^{t_0-m})^j = z - [\omega_{t_0} X^{t_0-m}, z] \sum_{j \geqslant 0} (\omega_{t_0} X^{t_0-m})^j = \\
&= \zeta X^m + u'_{t_0} + u''_{t_0} - \zeta X^{t_0} - [\omega_{t_0} X^{t_0-m}, z] \sum_{j \geqslant 1} (\omega_{t_0} X^{t_0-m})^j = \zeta X^m + u'_{t_1} + u''_{t_1},
\end{aligned} \tag{6}$$

где t_1 — минимальный элемент из носителя элемента (6), не лежащий в $\mathbb{Z}\frac{m}{d}$. При этом $t_1 = \nu(u''_{t_1})$ и

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp} u'_{t_1} \subseteq \{\operatorname{supp} u'_{t_0} \cup [\operatorname{supp} z + (1 + \mathbb{N})(t_0 - m)]\} \cap \mathbb{Z}\frac{m}{d}; \\
&\operatorname{supp} u''_{t_1} \subseteq \{(\operatorname{supp} u''_0 \setminus t_0) \cup [\operatorname{supp} z + (1 + \mathbb{N})(t_0 - m)]\} \cap \left(\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}\frac{m}{d}\right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\nu(u''_{t_1}) \geqslant \min(\operatorname{supp} u''_0 \setminus t, m + 2(t_0 - m)) > t_0 = \nu(u'_{t_0}).$$

Продолжая этот процесс, получаем в $\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}\frac{m}{d}$ такие последовательность элементов $t_0 < t_1 < \ldots$, а в $\mathcal{F}$ последовательность элементов

$$\begin{gathered}
u'_{t_s}, \quad u''_{t_s}, \quad \nu(u''_{t_s}) = t_s, \quad w_{t_s} = \omega_{t_s} X^{t_s - m}, \quad \omega_{t_s} \in k^*, \quad s \geqslant 0, \\
\operatorname{supp}(u'_{t_{s+1}}) \subseteq \{\operatorname{supp} u'_{t_s} \cup [\operatorname{supp} z_{t_s} + (1 + \mathbb{N})(t_s - m)]\} \cap \mathbb{Z}\frac{m}{d}; \\
\operatorname{supp}(u''_{t_{s+1}}) \subseteq \{[\operatorname{supp} u''_{t_s} \setminus t_s)] \cup [\operatorname{supp} z_{t_s} + (1 + \mathbb{N})(t_s - m)]\} \cap \left(\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}\frac{m}{d}\right),
\end{gathered}$$

что если $z_{t_s} = \zeta X^m + u'_{t_s} + u''_{t_s}$, то $z_{t_{s+1}} = (1 - w_{t_s}) z_{t_s} (1 - w_{t_s})^{-1}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}(u'_{t_{s+1}}) \subseteq \{\operatorname{supp} u'_{t_s} \cup [\operatorname{supp} z_{t_s} + (1 + \mathbb{N})(t_s - m)]\} \cap \mathbb{Z}\frac{m}{d}; \\
&\operatorname{supp}(u''_{t_{s+1}}) \subseteq \{[\operatorname{supp} u''_{t_s} - \nu(u''_{t_s})] \cup [\operatorname{supp} z_{t_s} + (1 + \mathbb{N})(t_s - m)]\} \cap \left(\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}\frac{m}{d}\right).
\end{aligned}$$

Остается положить $1 - w = \prod_k (1 - w_{t_k}) \in \mathcal{F}$. □

Следствие 1 ([8, теорема 3.4]). *Пусть $\gamma \in \operatorname{Aut} \mathcal{F}$ и $n \geqslant 3$. Тогда существуют такие элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in k^*$ и $w \in \mathcal{F}$, $\nu(w) > 0$, что*

$$\gamma(X_i) = (1 - w) \gamma_i X_i (1 - w)^{-1} \tag{7}$$

для любого $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. По [1, теорема 2.2] в k существуют такие ненулевые элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, что $\gamma(X_i) = \gamma_i X_i^\varepsilon + u_i$ для любого $i = 1, \dots, n$, причем $\varepsilon = \pm 1$ не зависит от i. Кроме того,

$$\nu(u_l) > \varepsilon \nu(X_l) \tag{8}$$

для всех $l = 1, \dots, n$. Применяя автоморфизм $X_l \mapsto \gamma_l^{-\varepsilon} X_l$, $1 \leqslant l \leqslant n$, можно считать, что $\gamma_i = 1$ для всех i. Зафиксируем произвольный индекс i. По теореме 5, применяя сопряжение, можно считать, что $u_i = u_i(X_i)$. Тогда для любого индекса $j \neq i$ имеем

$$\gamma(X_i X_j) = \gamma(X_i)\gamma(X_j) = [X_i^\varepsilon + u_i(X_i)]\,[X_j^\varepsilon + u_j] = q_{ij}\gamma(X_j)\gamma(X_i) = q_{ij}[X_j^\varepsilon + u_j]\,[X_i^\varepsilon + u_i(X_i)].$$

Отсюда

$$u_i(X_i)X_j^\varepsilon + u_i(X_i)u_j + X_i^\varepsilon u_j = q_{ij}X_j^\varepsilon u_i(X_i) + q_{ij}u_j u_i(X_i) + q_{ij}u_j X_i^\varepsilon, \tag{9}$$

где $\nu(u_i) > \varepsilon\nu(X_i)$, $\nu(u_j) > \varepsilon\nu(X_j)$. Пусть

$$\nu(u_i) + \varepsilon\nu(X_j) = \varepsilon\nu(X_i) + \nu(u_j) \tag{10}$$

и младший член u_i имеет вид θX_i^s, $s > \varepsilon$. Тогда из (10) вытекает, что младший член u_j имеет вид $\tau X_i^{s-\varepsilon} X_j^\varepsilon$. Следовательно, в (9)

$$\theta X_i^s X_j^\varepsilon + X_i^\varepsilon \tau X_i^{s-\varepsilon} X_j^\varepsilon = q_{ij} X_j^\varepsilon \theta X_i^s + q_{ij}\tau X_i^{s-\varepsilon} X_j^\varepsilon X_i^\varepsilon,$$

или $\theta + \tau = q_{ij}^{1-\varepsilon s} + \tau$, т. е. $\theta = q_{ij}^{1-\varepsilon s}$.

Так как $n \geqslant 3$, то существует индекс t, отличный от i, j. По аналогичным соображениям получаем, что $\theta = q_{it}^{1-\varepsilon s}$, что возможно только при $1 - \varepsilon s = 0$, поскольку мы рассматриваем алгебры общих квантовых многочленов. Но $\varepsilon = \pm 1$. Отсюда $s = \varepsilon < s$, что невозможно.

Итак, предположение (10) неверно. Пусть

$$\nu(u_i) + \varepsilon\nu(X_j) > \varepsilon\nu(X_i) + \nu(u_j).$$

Тогда в (9) имеем $X_i^\varepsilon u_j = q_{ij}u_j X_i^\varepsilon$, откуда $\nu(u_j) = \varepsilon\nu(X_j)$, что невозможно в силу (8). Аналогично рассматривается случай

$$\nu(u_i) + \varepsilon\nu(X_j) < \varepsilon\nu(X_i) + \nu(u_j).$$

Итак, $u_i = 0$. Но тогда в (9) получаем $X_i^\varepsilon u_j = q_{ij}u_j X_i^\varepsilon$, т. е. $u_j = \lambda X_j^\varepsilon$, $\lambda \in k$, что противоречит (8), если $\lambda \neq 0$. Поэтому $u_j = 0$ для любого $j = 1, \dots, n$.

Если $\varepsilon = -1$, то имеется автоморфизм $\zeta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, при котором $\zeta(X_i) = X_i^{-1}$. Покажем, что это невозможно. Пусть l — произвольное простое число. Рассмотрим ряд

$$f = \sqrt[l]{1+T} = 1 + \sum_{m \geqslant 1} \omega_m T^m \in \mathbb{Q}[[T]], \quad \omega_m \in \mathbb{Q}.$$

Так как $f^l = 1 + T$, то

$$l\omega_m + \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_q=m\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_q<m}} \omega_{i_1}\ldots\omega_{i_q} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 1,\\ 0, & \text{если } m > 1,\end{cases} \tag{11}$$

где $\omega_0 = 1$. Отсюда $l\omega_1 = 1$. Индукцией по m с помощью (11) получаем, что для каждого $m \geqslant 1$ найдется такая степень $d(m)$ числа l, что $l^{d(m)}\omega_m \in \mathbb{Z}$.

Возьмем теперь простое число l, отличное от характеристики основного поля k. В этом случае найдется такой ряд $f \in k[[X_i]] \subset \mathcal{F}$, что $\nu(f) = 0$ и $f^l = 1 + X_i$. Если автоморфизм τ в $\mathcal{F}$ существует, то $\tau(f) \in \mathcal{F}$, причем $\tau(f)^l = 1 + X_i^{-1}$. Таким образом, $l\nu[\tau(f)] = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, что невозможно, ибо $\nu[\tau(f)] \in \mathbb{Z}^n$. $\square$

3. Автоморфизмы квантовых плоскостей

В этом разделе мы рассмотрим строение группы автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{O}_q$ алгебры $\mathcal{O}_q$ при $n = 2$. В алгебре $\mathcal{O}_q$ при данном предположении имеются две переменные X, Y, причем $XY = qYX$, где $q \in k^*$ не является корнем из 1. Следующая теорема в случае, когда $r = n = 2$ и γ — автоморфизм алгебры $\mathcal{O}_q$, доказана в [18, следствие 3.5].

Теорема 6. *Пусть γ — эндоморфизм алгебры $\mathcal{O}_q$ с $n = 2$. Если $r = n = 2$, то существуют такие целые числа l, s, t, v и ненулевые коэффициенты $\beta, \xi \in k$, что*

$$\gamma(X) = \beta X^l Y^s, \quad \gamma(Y) = \xi X^t Y^v, \tag{12}$$

$$lv - st = 1. \tag{13}$$

В частности, γ является автоморфизмом.

Если $r = 1$ и $\gamma(Y) \neq 0$, то существует такие элемент $h \in k[X^{\pm 1}]$ и коэффициент $\beta \in k^*$, что

$$\gamma(X) = \beta X, \quad \gamma(Y) = h(X)Y. \tag{14}$$

Если $r = 0$, то любой автоморфизм алгебры $\mathcal{O}_q$ является торическим.

Доказательство. Пусть $r = 2$. В этом случае группа обратимых элементов алгебры $\mathcal{O}_q$ состоит из всех одночленов. Поэтому выполнено равенство (12). Как и в [11, с. 225], получаем, что справедливо равенство (13).

Пусть $r = 1$. Тогда группа обратимых элементов алгебры $\mathcal{O}_q$ состоит из всех одночленов относительно X. Поэтому $\gamma(X) = \beta X^l$, где $l \in \mathbb{Z}$. Пусть $\xi X^t Y^v$ — произвольный одночлен из $\gamma(Y)$. Из тождества $XY = qYX$ получаем равенство (13) с $s = 0$, т. е. $lv = 1$. Так как $v \geqslant 0$, то $l = v = 1$. Отсюда вытекает (14).

Пусть, наконец, $r = 0$. Как показано в [13, пример II.1.2, с. 136, 137] главные идеалы $\mathcal{O}_qX$, $\mathcal{O}_qY$ являются единственными собственными первичными идеалами в $\mathcal{O}_q$ бесконечной коразмерности. Поэтому если γ — автоморфизм $\mathcal{O}_q$, то либо $\gamma(\mathcal{O}_qX) = \mathcal{O}_qY$, $\gamma(\mathcal{O}_qY) = \mathcal{O}_qX$, либо $\gamma(\mathcal{O}_qX) = \mathcal{O}_qX$, $\gamma(\mathcal{O}_qY) = \mathcal{O}_qY$. В первом случае $\gamma(X) = uY$, $\gamma(Y) = Xv$, где $u, v \in \mathcal{O}_q$. Тогда $\gamma^{-1}(X) = u_1Y$, $\gamma^{-1}(Y) = Xv_1$, где $u_1, v_1 \in \mathcal{O}_q$. Следовательно, $X = \gamma^{-1}[\gamma(X)] = \gamma^{-1}(u)Xv_1$, откуда $u \in k^*$. Аналогично, $v \in k^*$. Но тогда

$$\gamma(XY) = uvYX = uvq^{-1}XY = \gamma(qYX) = quvXY,$$

что невозможно.

Пусть $\gamma(X) = Xh$, $\gamma(Y) = gY$, где $h, g \in \mathcal{O}_q$. Аналогично, $\gamma^{-1}(X) = Xh_1$, $\gamma^{-1}(Y) = g_1Y$ для некоторых $h_1, g_1 \in \mathcal{O}_q$. Отсюда

$$X = \gamma^{-1}[\gamma(X)] = \gamma^{-1}(Xh) = Xh_1 \cdot \gamma^{-1}(h),$$

т. е. $h_1\gamma(h) = 1$ и $h_1, h \in k^*$. По тем же соображениям $g \in k^*$, т. е. γ является торическим автоморфизмом. □

Как уже отмечалось выше, в работе [19] показано, что если $r = n$ и алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ (не обязательно общая) проста, то в ней любой эндоморфизм является автоморфизмом. Кроме того, заметим, что при $r = 1$ в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ любой эндоморфизм, отображающий Y в нуль, имеет вид $X \mapsto \beta X^m$, $Y \mapsto 0$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $\beta \in k$.

При $r = 2$ сопоставим каждому автоморфизму γ из теоремы 6 матрицу

$$\pi(\gamma) = \begin{pmatrix} l & s \\ t & v \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}). \tag{15}$$

Предложение 2. *Отображение $\pi\colon \operatorname{Aut}\mathcal{O}_q \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ из (15) является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть γ из (12) и $\phi \in \operatorname{Aut}\mathcal{O}_q$, где

$$\phi(X) = \zeta X^u Y^d, \quad \phi(Y) = \omega X^w Y^r, \quad \zeta, \omega \in k^*,$$

причем $ur-dw=1$. Тогда

$$\gamma\phi(X)=\beta(\zeta X^uY^d)^l(\omega X^wY^r)^s=\eta X^{lu+sw}Y^{ld+sr};$$
$$\gamma\phi(Y)=\xi(\zeta X^uY^d)^t(\omega X^wY^r)^v=\omega' X^{tu+vw}Y^{td+vr},$$

где $\eta,\omega'\in k^*$. При этом

$$\pi(\gamma\phi)=\begin{pmatrix}lu+sw & ld+sr\\ tu+vw & td+vr\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l & s\\ t & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & d\\ w & r\end{pmatrix}=\pi(\gamma)\pi(\phi).\quad\square$$

Опишем теперь строение конечных подгрупп G в группе $\operatorname{Aut}\mathcal{O}_q$. Следующее утверждение хорошо известно.

Предложение 3 ([5, § 13]). *Пусть G — конечная подгруппа в группе $\operatorname{Aut}\mathcal{O}_q$ при $r=2$. Тогда $\pi(G)$ — циклическая группа порядка 1, 2, 3, 4, 6.*

Рассмотрим теперь конкретные случаи. Если $r=0$, то в силу теоремы 6 торический автоморфизм γ из (2) с $\gamma_1=\beta$, $\gamma_2=\xi$ имеет конечный порядок d в том и только в том случае, когда $\beta,\xi\in k$ являются корнями степени d из 1.

Пусть $r=1$ и γ из (14). При любом натуральном числе m имеем

$$\gamma^m(X)=\beta^mX,\quad \gamma^m(Y)=h(\beta^{m-1}X)\dots h(\beta X)h(X)Y.$$

Следовательно, если порядок γ равен d, то $h=\xi\in k$ и $\beta^d=\xi^d=1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $r=2$.

Предложение 4. *Пусть матрица $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ имеет порядок 2. Тогда $A=-E$.*

Доказательство. Заметим, что $X^{-1}AX=-E$ для некоторой комплексной матрицы X. Отсюда $A=X(-E)X^{-1}=-E$. $\square$

Следствие 2. *Пусть γ — автоморфизм алгебры $\mathcal{O}_q$, причем $r=2$. Если $\pi(\gamma)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ имеет порядок 2, то γ является зеркальным автоморфизмом порядка 2.*

Предложение 5. *Пусть $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ имеет порядок 4. Существуют такие матрица $C\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ и число $\varepsilon=\pm1$, что*

$$CAC^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ -\varepsilon & 0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Доказательство. По предложению 4 получаем $A^2+E=0$. Следовательно, минимальный многочлен матрицы A равен $T^2+1\in\mathbb{Z}[T]$. Таким образом, $\mathbb{Z}^2$ является модулем над евклидовым кольцом $\mathbb{Z}[i]\simeq\mathbb{Z}[T]/(T^2+1)$. Следовательно, $\mathbb{Z}^2$ является прямой суммой циклических $\mathbb{Z}[i]$-модулей. Ясно, что таких модулей не может быть два, т. е. $\mathbb{Z}^2$ является свободным $\mathbb{Z}[i]$-модулем. Остается в $\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}[i]$ взять базис 1, i свободной абелевой группы. $\square$

Следствие 3. *Пусть γ — автоморфизм алгебры $\mathcal{O}_q$, где $r=2$, причем порядок матрицы $\pi(\gamma)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ равен 4. Тогда в $\mathcal{O}_q$ существует такая замена переменных*

$$X'=X^{m_{11}}Y^{m_{12}},\quad Y'=X^{m_{21}}Y^{m_{22}}, \tag{17}$$

$$C=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

что

$$\gamma(X')=\beta(Y')^{\varepsilon},\quad \gamma(Y')=\xi(X')^{-\varepsilon}, \tag{18}$$

где $\beta,\xi\in k$. При этом автоморфизм γ имеет порядок 4.

Доказательство. Пусть γ имеет вид (12), где по (13)

$$A=\begin{pmatrix}l & s\\ t & v\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}).$$

По предложению 5 существует такая матрица $C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, что CAC^{-1} имеет вид (16). Поэтому, совершив замену переменных с помощью матрицы C, как указано выше, мы получаем, что в новых переменных X', Y' автоморфизм γ имеет требуемый вид (18).

Заметим, что

$$\gamma^2(X') = \beta[\xi(X')^{-\varepsilon}]^{\varepsilon} = \beta\xi^{\varepsilon}(X')^{-1};$$
$$\gamma^2(Y') = \xi[\beta(Y')^{\varepsilon}]^{-\varepsilon} = \xi\beta^{-\varepsilon}(Y')^{-1}.$$

Поэтому при любых ξ, β автоморфизм γ из (18) имеет порядок 4. □

Предложение 6. *Пусть $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ имеет порядок 3 или 6. Существуют такие матрица $C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ и число $\omega = \pm 1$, что*

$$CAC^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -1 \end{pmatrix}, & \text{если порядок } A \text{ равен } 3, \\ \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}, & \text{если порядок } A \text{ равен } 6. \end{cases}$$

Доказательство. Минимальный многочлен матрицы A над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{Z}$ имеет вид $T^2 - \varepsilon T + 1 \in \mathbb{Z}[T]$, где $\varepsilon = \operatorname{tr} A \in \mathbb{Z}$. Но этот многочлен должен делить либо $T^3 - 1$, либо $T^6 - 1$. Поэтому $\varepsilon = \pm 1$. Таким образом, как и в предложении 5, имеется изоморфизм модулей

$$\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}\left[\exp\frac{2\pi}{3}\right] \simeq \mathbb{Z}[T]/(T^2 - \varepsilon T + 1)$$

над кольцом главных идеалов $\mathbb{Z}[\exp\frac{2\pi}{3}]$. Поэтому в $\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}[\exp\frac{2\pi}{3}]$ выбираем базис 1, $\exp\frac{2\pi}{3}$ свободной абелевой группы. □

Следствие 4. *Пусть γ — автоморфизм алгебры $\mathcal{O}_q$, причем порядок матрицы $\pi(\gamma) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ равен либо 3, либо 6. Тогда в $\mathcal{O}_q$ существует такая замена переменных вида* (17)*, что*

$$\gamma(X') = \beta(Y')^{\omega}, \quad \gamma(Y') = \xi(X')^{-\omega}(Y')^{\varepsilon},$$

где $\beta, \xi \in k^*$, $\omega = \pm 1$ и

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{если порядок } \pi(\gamma) \text{ равен } 3, \\ 1, & \text{если порядок } \pi(\gamma) \text{ равен } 6. \end{cases}$$

Во всех случаях порядок γ равен порядку $\pi(\gamma)$.

Доказательство. Нам нужно проверить лишь последнее утверждение. Пусть $\varepsilon = -1$ и порядок $\pi(\gamma)$ равен 3. Тогда

$$\gamma^2(X) = \beta\left[\xi X^{-\omega}Y^{-1}\right]^{\omega} = \begin{cases} \beta\xi X^{-1}Y^{-1} & \text{при } \omega = 1, \\ \beta\xi^{-1}YX^{-1} = \beta\xi^{-1}qX^{-1}Y & \text{при } \omega = -1. \end{cases}$$

Отсюда при $\omega = 1$ получаем

$$\gamma^3(X) = \beta\xi\gamma(X)^{-1} = \beta\xi\beta^{-1}\xi^{-1}Y^{-1}(X^{-1}Y^{-1})^{-1} = X.$$

При $\omega = -1$ получаем

$$\gamma^3(X) = \beta\xi^{-1}q\gamma(X)^{-1}\gamma(Y) = \beta\xi^{-1}q(\beta Y^{-1})^{-1}(\xi XY^{-1}) = \beta\xi^{-1}q\beta^{-1}\xi YXY^{-1} = X.$$

Аналогично

$$\gamma^2(Y) = \xi(\beta Y^{\omega})^{-\omega}(\xi X^{-\omega}Y^{-1})^{-1} = \xi\beta^{-\omega}\xi^{-1}Y^{-1}YX^{-\omega} = \beta^{-\omega}X^{-\omega}X^{-\omega}.$$

Отсюда $\gamma^3(Y) = \beta^{-\omega}(\beta X^{\omega})^{\omega} = X$. Таким образом, при $\varepsilon = -1$ порядки $\pi(\gamma)$ и γ равны 3.

Если порядок $\pi(\gamma)$ равен 6, то по доказанному порядки $\pi(\gamma^2)$ и γ^2 совпадают и равны 3. Следовательно, порядок γ равен 6. □

Подведем итоги. Мы доказали, что справедлива

Теорема 7. *Пусть G — конечная группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{O}_q = k_q[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ (т. е. $r = n = 2$). Тогда $\pi(G) = \langle \tau \rangle$ является циклической группой порядка 1, 2, 3, 4, 6, причем порядок τ совпадает с порядком $\pi(G)$. Если G^+ — подгруппа всех торических автоморфизмов из G, то $G^+ \lhd G$ и группа G является полупрямым произведением $G = G^+ \leftthreetimes \langle \tau \rangle$. В зависимости от порядка τ в $\mathcal{O}_q$ можно выбрать согласованную систему неизвестных X, Y, указанную в следствиях 2, 3, 4.*

4. Автоморфизмы мальцевских рядов

В этом разделе мы рассмотрим непрерывные автоморфизмы тела $\mathcal{F}$ при любом $n \geqslant 2$. Напомним, что автоморфизм γ тела $\mathcal{F}$ *непрерывен*, если он однозначно определяется своими значениями $\gamma(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 8. *Пусть γ — непрерывный эндоморфизм тела $\mathcal{F}$. Тогда существуют такие элементы $w \in \mathcal{F}$ и $\beta, \xi \in k^*$, что $\nu(w) > 0$ и*

$$\gamma(X) = (1-w)\beta X Y^s (1-w)^{-1}, \quad \gamma(Y) = (1-w)\xi Y (1-w)^{-1} \tag{19}$$

для некоторого $s \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Предположим, что $\beta X^l Y^s$, $\xi X^t Y^v$ — младшие члены $\gamma(X)$ и $\gamma(Y)$ соответственно относительно лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^2$. Как и в теореме 6, получаем (13). Из (13) следует, что $(t,v) \notin \mathbb{Z}(l,s)$ в $\mathbb{Z}^2$. Применяя, если необходимо, сопряжение с помощью некоторого элемента из $\mathcal{F}$, в силу теоремы 5 можно считать, что $\operatorname{supp}\gamma(X) \subset \mathbb{Z}(l,s)$. Представим $\gamma(Y)$ в виде $AX^tY^v + B$, где $\operatorname{supp} A \subset \mathbb{Z}(l,s)$ и

$$\operatorname{supp} B \cap [(t,v) + \mathbb{Z}(l,s)] = \varnothing.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 = \gamma(XY - qYX) = \gamma(X)(AX^tY^v + B) - q(AX^tY^v + B)\gamma(X) = \\ = [\gamma(X)AX^tY^v - qAX^tY^v\gamma(X)] + [\gamma(X)B - qB\gamma(X)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как $\operatorname{supp}\gamma(X), \operatorname{supp} A \in \mathbb{Z}(l,s)$, то

$$\operatorname{supp}[\gamma(X)AX^tY^v - qAX^tY^v\gamma(X)] \subset (t,v) + \mathbb{Z}(l,s),$$
$$\operatorname{supp}[\gamma(X)B - qB\gamma(X)] \cap [(t,v) + \mathbb{Z}(l,s)] = \varnothing.$$

Следовательно, (20) влечет

$$\gamma(X)B - qB\gamma(X) = 0. \tag{21}$$

Предположим, что $B \neq 0$ и $\zeta X^a Y^b$ — минимальный одночлен из B. Сравнивая минимальные члены из (21), как и в теореме 6, получаем, что $lb - as = 1$, т. е.

$$(a,b) \in (t,v) + \mathbb{Z}(l,s),$$

что невозможно. Итак, $B = 0$ и $\operatorname{supp}\gamma(Y) \subset (t,v) + \mathbb{Z}(l,s)$. В частности, $\operatorname{supp}\gamma(Y) \cap \mathbb{Z}(t,v) = (t,v)$. Поэтому по теореме 5, применяя, если необходимо, сопряжение, мы можем считать, что $\gamma(Y) = \xi X^t Y^v$. При этом изменится $\gamma(X)$, но минимальный член $\beta X^l Y^s$ в $\gamma(X)$ не изменится.

Из условия

$$0 = \gamma(XY - qYX) = \gamma(X)\xi X^tY^v - q\xi X^tY^v\gamma(X)$$

вытекает, что для любого одночлена $\mu X^a Y^b$ из $\gamma(X)$ имеем

$$(\mu X^aY^b)(\xi X^tY^v) - q(\xi X^tY^v)(\mu X^aY^b) = 0,$$

откуда $av - bt = 1$ и, следовательно, $(a,b) \in (l,s) + \mathbb{Z}(t,v)$. Итак,

$$\operatorname{supp}\gamma(X) \subset (l,s) + \mathbb{Z}(t,v). \tag{22}$$

Заметим, что $(1-Y)^{-1} = \sum_{j \geqslant 0} Y^j$. Поэтому

$$[1 - \gamma(Y)]^{-1} = \sum_{j \geqslant 0} \gamma(Y)^j = \sum_{j \geqslant 0} (\xi X^tY^v)^j \in \mathcal{F}.$$

Из этого следует, что $t \geqslant 0$, причем если $t = 0$, то $v > 0$. Кроме того, для любого целого числа b имеем

$$(1 - XY^b)^{-1} = \sum_{j \geqslant 0} (XY^b)^j.$$

Отсюда

$$\gamma[(1 - XY^b)^{-1}] = \sum_{j \geqslant 0} [\gamma(X)(\xi X^t Y^v)^b]^j \in \mathcal{F}. \tag{23}$$

Рассмотрим

$$\operatorname{supp}[\gamma(X)(\xi X^t Y^v)^b]^j \cap \operatorname{supp}[\gamma(X)(\xi X^t Y^v)^b]^{j'}.$$

Если это пересечение непусто, то по (22) найдутся такие целые числа p, p', что

$$(l, s)j + (t, v)p = (l, s)j' + (t, v)p',$$

откуда

$$(l, s)(j - j') = (t, v)(p' - p).$$

В силу (13) это влечет $j = j'$, $p' = p$. Следовательно, в (23) нет сокращений, и поэтому в $\gamma(X)(\xi X^t Y^v)^b$ показатель при X должен быть неотрицательным при любом целом b. Отсюда следует, что $t = 0$, и тогда, как отмечено выше, $v > 0$. Таким образом, условие (13) имеет вид $1 = lv$, откуда $l = v = 1$.

Итак, $\gamma(X) = Xf(Y)$, $\gamma(Y) = \xi Y$. При этом $f(Y) = Y^s g(Y)$, где

$$g(Y) = \sum_{i \geqslant 0} \beta_i Y^i, \quad \beta_i \in k, \quad \beta_0 \neq 0.$$

Лемма 2. *Существует такой ряд*

$$d(Y) = 1 + \sum_{j \geqslant 1} \delta_j Y^j \in k[[Y]], \quad \delta_i \in k,$$

что $g(Y) = \beta_0 d(q^{-1}Y) d(Y)^{-1}$.

Доказательство. Имеем $g(Y)d(Y) = \beta_0 d(q^{-1}Y)$. Поэтому

$$g(Y)d(Y) = (\beta_i Y^i)\biggl(1 + \sum_{j \geqslant 1} \delta_j Y^j\biggr) = \beta_0 + \sum_{m \geqslant 1} \beta_0(\delta_m + \beta_1 \delta_{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}\delta_1 + \beta_m)Y^m =$$
$$= \beta_0 d(q^{-1}Y) = \beta_0 + \sum_{m \geqslant 1} \beta_0 \delta_m q^{-m} Y^m.$$

Отсюда для любого $m \geqslant 1$ получаем

$$\delta_m = (q^{-m} - 1)^{-1}(\beta_1 \delta_{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}\delta_1 + \beta_m),$$

что позволяет по индукции найти $d(Y)$. $\square$

По доказанной лемме

$$Xf(Y) = XY^s g(Y) = \beta XY^s d(q^{-1}Y) d(Y)^{-1} = d(Y)(\beta XY^s) d(Y)^{-1}.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Следствие 5. *Каждый непрерывный эндоморфизма тела $\mathcal{F}$ является автоморфизмом.*

Если $z \in \mathcal{F}$, то через $\operatorname{Ad} z$ обозначим автоморфизм *сопряжения с помощью элемента z* в $\mathcal{F}$, т. е. $(\operatorname{Ad} z)u = zuz^{-1}$ для всех $u \in \mathcal{F}$.

Далее мы будем предполагать, что $n \geqslant 2$. Рассмотрим непрерывный автоморфизм γ тела $\mathcal{F}$. По следствию 1 при $n \geqslant 3$ автоморфизм γ имеет вид (7), а при $n = 2$ автоморфизм γ имеет вид (19). Тогда $\gamma = \operatorname{Ad}(1 - w) \cdot \psi$, где при $n \geqslant 3$ автоморфизм ψ имеет вид $\psi(X_i) = \gamma_i X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а при $n = 2$ автоморфизм ψ имеет вид $\psi(X) = \beta XY^s$, $\psi(Y) = \xi Y$. Во всех случаях положим $z = 1 - w$.

Лемма 3. *Справедливо равенство* $\psi \operatorname{Ad} z = [\operatorname{Ad} \psi(z)]\psi$.

Доказательство. Для произвольного элемента $a \in \mathcal{F}$ получаем

$$[\psi(\operatorname{Ad} z)]a = \psi(zaz^{-1}) = \psi(z)\psi(a)\psi(z)^{-1} = [\operatorname{Ad}\psi(z)]\psi(a). \quad \square$$

Лемма 4. *Если $d \geqslant 1$, то $\gamma^d = [\operatorname{Ad}[z \cdot \psi(z) \dots \psi^{d-1}(z)]]\psi^d$.*

Доказательство. Достаточно применить индукцию по d и лемму 3. $\square$

Лемма 5. *Если γ имеет конечный порядок d, то $s = 0$ в* (19), *ψ является торическим автоморфизмом, $\psi^d = 1$ и*

$$(1-w)[1-\psi(w)]\dots[1-\psi^{d-1}(w)] = 1.$$

Доказательство. По лемме 4, (19) и (7) для $i \geqslant 2$ имеем

$$X_i = \{\operatorname{Ad}[(1-w)[1-\psi(w)]\dots[1-\psi^{d-1}(w)]]\}\gamma_i^d X_i,$$

где $\gamma_2 = \xi$, если $n = 2$. Из условия $\nu(w) > 0$ вытекает, что $\gamma_i^d = 1$. Кроме того, элемент

$$A = (1-w)[1-\psi(w)]\dots[1-\psi^{d-1}(w)]$$

перестановочен с X_i, т. е. $A \in k[[X_i]]$. Следовательно, если $n \geqslant 3$, то $A \in k[[X_2]] \cap k[[X_3]] = k$. Но $\nu(w) > 0$, и поэтому $A = 1$. Итак, в случае $n \geqslant 3$ утверждение доказано.

Пусть $n = 2$. Тогда $a = A(Y) \in k[[Y]]$ и $A \equiv 1 \bmod Y$. По лемме 4 получаем

$$X = A\psi^d(X)A^{-1} = A\beta^d XY^s(\xi Y)^s \dots (\xi^{d-1}Y)^s A^{-1} = A\beta^d \xi^{s+\dots+s(d-1)} XY^{ds}A^{-1}.$$

Отсюда $s = 0$ и $\beta^d = 1$. Таким образом, ψ — торический автоморфизм, $\psi^d = 1$. $\square$

Предположим, что $\operatorname{char} k = p > 0$ делит порядок d элемента γ из (7). Без ограничения общности можно считать в этом случае, что $d = p$ и $\psi^p = 1$. Так как автоморфизм ψ торический, то $\psi = 1$. Отсюда $\gamma = \operatorname{Ad}(1-w)$, причем $(1-w)^p = 1 - w^p = 1$ по лемме 5. Поэтому $w = 0$ и $\gamma = 1$. Итак, доказана

Лемма 6. *Порядок автоморфизма γ из* (7) *взаимно прост с характеристикой поля k.*

Пусть ωX^u — наименьший член w в (7), где $u \in \mathbb{Z}^n$, $u > 0$ и $\omega \in k^*$.

Лемма 7. *Справедливо неравенство $\psi(\omega X^u) \neq \omega X^u$.*

Доказательство. Если $\psi(\omega X^u) = \omega X^u$, то по лемме 5 получаем

$$1 = (1-w)[1-\psi(w)]\dots[1-\psi^{d-1}(w)] = 1 - d\omega X^u + \dots,$$

где $\dots$ — сумма одночленов, больших чем ωX^u. Таким образом, $d\omega X^u = 0$, что невозможно, ибо $\omega \neq 0$ и d взаимно просто с характеристикой поля k по лемме 6. $\square$

Итак, $\psi(\omega X^u) = \eta\omega X^u$, где $\eta \in k^*$, $\eta \neq 1$. Отсюда $\psi(X^u) = \eta X^u$. Положим $G_u = \frac{\omega}{\eta-1}X^u$. Тогда

$$G_u - \psi(G_u) = \frac{\omega}{\eta-1}(X^u - \eta X^u) = -\omega X^u.$$

Следовательно,

$$(1-G_u)(1-w)[1-\psi(G_u)]^{-1} = 1 - G_u - w + \psi(G_u) + \dots = 1 + \dots,$$

где $\dots$ — сумма одночленов, больших ωX^u. Рассмотрим в $\mathcal{F}$ автоморфизм

$$\begin{gathered}\operatorname{Ad}(1-G_u)\gamma\operatorname{Ad}(1-G_u)^{-1} = \\ = \operatorname{Ad}(1-G_u)\operatorname{Ad}(1-w)\psi\operatorname{Ad}(1-G_u)^{-1} = \\ = \operatorname{Ad}(1-G_u)\operatorname{Ad}(1-w)\operatorname{Ad}[1-\psi(G_u)]^{-1}\psi = \\ = \operatorname{Ad}\{(1-G_u)(1-w)[1-\psi(G_u)]^{-1}\}\psi = \operatorname{Ad}(1-w_1)\psi,\end{gathered}$$

где $\nu(w_1) > \nu(w)$. Он имеет тот же порядок d, что и γ. Поэтому, повторяя эту процедуру, как и в [1], получаем, что доказана следующая

Теорема 9. *Пусть непрерывный автоморфизм γ тела $\mathcal{F}$ имеет конечный порядок. Тогда $\operatorname{Ad}(1-v)\gamma\operatorname{Ad}(1-v)^{-1} = \psi$ для некоторого элемента $v \in \mathcal{F}$, где $\nu(v) > 0$.*

Положим

$$Y_i = \operatorname{Ad}(1-v)^{-1}(X_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{24}$$

Так как $\gamma = \operatorname{Ad}(1-v)^{-1}\psi\operatorname{Ad}(1-v)$ в силу теоремы 9, то

$$\gamma(Y_i) = \operatorname{Ad}(1-v)^{-1}\psi\operatorname{Ad}(1-v)(Y_i) = \operatorname{Ad}(1-v)^{-1}\psi\operatorname{Ad}(1-v)\operatorname{Ad}(1-v)^{-1}(X_i) =$$
$$= \operatorname{Ad}(1-v)^{-1}\psi(X_i) = \operatorname{Ad}(1-v)^{-1}\gamma_i(X_i) = \gamma_i[\operatorname{Ad}(1-v)^{-1}](X_i) = \gamma_i Y_i. \tag{25}$$

Итак, мы выбрали такую новую систему переменных $Y_1, \ldots, Y_n$ в $\mathcal{F}$, что автоморфизм γ конечного порядка из (7) имеет вид (25). Пользуясь теоремой 9 и применяя соображения из [8, теорема 3.10], получаем, что справедлива

Теорема 10. *Пусть G — конечная группа непрерывных автоморфизмов тела $\mathcal{F}$. Тогда $\operatorname{Ad}(1-v)G\operatorname{Ad}(1-v)^{-1}$ для некоторого $v \in \mathcal{F}$, $\nu(v) > 0$, состоит из торических автоморфизмов. Если Y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — новая система неизвестных из* (24), *то выполнены равенства* (25).

5. Специальные элементы в квантовых плоскостях

В этом разделе мы опишем такие линейные операторы d в $\mathcal{F}$, что

$$d(ab) = d(a)b + \gamma(a)d(b) + \sum_s \theta_s\alpha_s(a)\beta_s(b) \tag{26}$$

для всех $a, b \in \mathcal{F}$, где $\theta_s \in k$ и γ, α_s, β_s — элементы конечной группы G автоморфизмов тела $\mathcal{F}$. В этом разделе мы будем предполагать, что $n \geqslant 2$. Если $\theta_s = 0$ для всех s в (26), то оператор d называется *γ-дифференцированием*. Если дополнительно автоморфизм γ тождествен, то оператор d является *дифференцированием* тела $\mathcal{F}$. *Внутреннее γ-дифференцирование* $\operatorname{ad}_\gamma u$ задается по правилу $[\operatorname{ad}_\gamma u](a) = ua - \gamma(a)u$ для всех $a \in \mathcal{O}_{\mathbf{q}}$.

В силу теоремы 10, переходя, если необходимо, к новой системе неизвестных $X_1, \ldots, X_n$, можно считать, что каждый автоморфизм из G является торическим. Положим $u_i = d(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $X_iX_j = q_{ij}X_jX_i$, то (26) влечет

$$u_iX_j + \gamma(X_i)u_j - q_{ij}[u_jX_i + \gamma(X_j)u_i] +$$
$$+ \sum_s \theta_s[\alpha_s(X_i)\beta_s(X_j) - q_{ij}\alpha_s(X_j)\beta_s(X_i)] = d(X_iX_j) - q_{ij}d(X_jX_i) = 0.$$

Отсюда

$$[u_iX_j - q_{ij}\gamma(X_j)u_i] + [\gamma(X_i)u_j - q_{ij}u_jX_i] + \theta_{ij}X_iX_j = 0, \tag{27}$$

где $\theta_{ij} \in k$. Следующее предложение легко проверяется.

Предложение 7. *Если набор элементов u_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяет* (27), *то и набор $u_i - (\operatorname{ad}_\gamma z)X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, также удовлетворяет* (27) *для любого $z \in \mathcal{F}$.*

Следующая лемма обобщает лемму 1.

Лемма 8. *Пусть $\gamma(X_i) = \beta_iX_i$ для некоторого i, где $\beta_i \in k^*$, и задан одночлен $v = \alpha X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$, где $\alpha \in k^*$ и $m_j \in \mathbb{Z}$, причем либо $m_s \neq 0$ для некоторого $s \neq i$, либо $\beta_i \neq 1$. Тогда существует такой одночлен ωvX_i^{-1}, что $[\operatorname{ad}_\gamma(\omega vX_i^{-1})]X_i = v$.*

Доказательство. Заметим, что из условия $X_iX_sX_i^{-1} = q_{is}X_s$ вытекает $X_ivX_i^{-1} = \Big[\prod_s q_{is}^{m_s}\Big]v$. Следовательно,

$$(\operatorname{ad}_\gamma \omega vX_i^{-1})X_i = \omega[v - \gamma(X_i)vX_i^{-1}] = \omega\left(1 - \beta_i\prod_s q_{is}^{m_s}\right)v.$$

Предположим, что

$$1 = \beta_i\prod_s q_{is}^{m_s}. \tag{28}$$

По условию автоморфизм γ имеет конечный порядок d. Поэтому $\beta_i^d = 1$, откуда $1 = \prod\limits_s q_{is}^{dm_s}$. Из независимости мультипараметров q_{is}, $s \neq i$, вытекает, что $m_s = 0$ при всех $s \neq i$. Таким образом, (28) влечет $\beta_i = 1$. Отсюда вытекает утверждение. □

Теорема 11. *Пусть элементы $u_i \in \mathcal{F}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяют равенствам* (27). *Если $\beta_i \neq 1$ для некоторого i, то существует такой элемент $w \in \mathcal{F}$, что*

$$u_i = (\mathrm{ad}_\gamma w)X_i, \quad u_j = \frac{\theta_{ij}}{1-\beta_i}X_j + (\mathrm{ad}_\gamma w)X_j, \quad j \neq i.$$

Если $\beta_i = 1$, для всех $i = 1, \dots, n$, то $\theta_{ij} = 0$ и существуют такие элементы $w \in \mathcal{F}$, $\lambda_i \in k$, что $u_i = \lambda_i X_i + (\mathrm{ad}\, w)X_i$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\beta_i \neq 1$. По лемме 8 найдется такой элемент $w \in \mathcal{F}$, что $u_i = (\mathrm{ad}_\gamma w)X_i$. Поэтому, заменяя каждый элемент u_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, на $u_j - (\mathrm{ad}_\gamma w)X_j$, можно считать, что $u_i = 0$. Тогда (27) имеет вид $\gamma(X_i)u_j - q_{ij}u_jX_i + \theta_{ij}X_iX_j = 0$. Домножая справа на X_i^{-1}, получаем

$$\beta_i X_i u_j X_i^{-1} - q_{ij}u_j + \theta_{ij}q_{ij}X_j = 0. \tag{29}$$

Если $v = \rho X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ — одночлен из u_j, $j \neq i$, то из (29) вытекает, что

$$\rho\biggl[\beta_i \prod_l q_{il}^{m_l} - q_{ij}\biggr]X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } m_s \neq \delta_{js} \text{ для некоторого } s,\\ -\theta_{ij}q_{ij}X_j & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{30}$$

Если $m_s \neq \delta_{js}$ для некоторого s, то

$$\beta_i \prod_l q_{il}^{m_l} = q_{ij}. \tag{31}$$

Но β_i является корнем из 1, поскольку γ имеет конечный порядок d. Поэтому из (31) вытекает, что $\prod\limits_l q_{il}^{dm_l} = q_{ij}^d$. В силу независимости мультипараметров q_{il}, $l \neq i$, получаем, что $m_l = \delta_{jl}$ при $l \neq i$. Но тогда в (31) получаем $\beta_i = 1$, что неверно.

Итак, $u_j = \lambda_j X_j$, $\lambda_j \in k$, и $\lambda_j(\beta_i - 1) = -\theta_{ij}$ по (30) при $j \neq i$. Учитывая условие $u_i = 0$, получаем, что если $\beta_i \neq 1$ для некоторого i, то теорема доказана.

Предположим теперь, что $\beta_i = 1$ для всех i. Тогда (27) имеет вид

$$[u_iX_j - q_{ij}X_ju_i] + [X_iu_j - q_{ij}u_jX_i] + \theta_{ij}X_iX_j = 0. \tag{32}$$

Зафиксируем индекс i. По леммам 8 и 1 можно считать, что $u_i = f_i(X_i)X_i$, где $f_i(X_i) \in k((X_i))$. Из (32) вытекает, что

$$X_iu_jX_i^{-1} - q_{ij}u_j = -u_iX_jX_i^{-1} + q_{ij}X_ju_iX_i^{-1} - \theta_{ij}q_{ij}X_j \in k((X_i))X_j.$$

Если $v = \rho X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ — произвольный одночлен из u_j, $\rho \in k^*$, то

$$X_ivX_i^{-1} - q_{ij}v = \rho\biggl[\prod_s q_{is}^{m_s} - q_{ij}\biggr]v \in k((X_i))X_j.$$

Если

$$\prod_s q_{is}^{m_s} = q_{ij},$$

то $m_s = \delta_{js}$ при $s \neq i$, откуда $v = \rho X_i^{m_i}X_j$ для всех $j \neq i$. Если же

$$\prod_s q_{is}^{m_s} - q_{ij} \neq 0,$$

то снова v имеет такой же вид. Итак, $u_j = f_j(X_i)X_j$ для любого j, где $f_j(X_i) \in k((X_i))$.

Зафиксируем $j \neq i$. По лемме 1 найдется такой элемент

$$w \in k((X_i)) \subset \mathcal{F},$$

что

$$u_j - (\mathrm{ad}\, w)X_j = \lambda_jX_j, \quad \lambda_j \in k.$$

Возьмем $l \neq j$. Тогда (32) имеет вид

$$0 = [f_l(X_i)X_lX_j - q_{lj}X_jf_l(X_i)X_l] + \lambda_j[X_lX_j - q_{lj}X_jX_l] + \theta_{lj}X_lX_j = [f_l(X_i) - f_l(q_{ji}X_i)]X_lX_j + \theta_{lj}X_lX_j,$$

откуда

$$f_l(X_i) - f_l(q_{ji}X_i) + \theta_{ij} = 0,$$

и поэтому $f_l(X_i) = \lambda_l \in k$ и $\theta_{lj} = 0$. Аналогично $\theta_{jl} = 0$. □

Дословно повторяя это доказательство, получаем новое доказательство следующего результата из [18, следствие 2.6].

Теорема 12. *Пусть ∂ — дифференцирование алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$. Тогда существуют такие элемент $w \in \mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и коэффициенты $\lambda_i \in k$, что $\partial(X_i) = \lambda_iX_i + (\operatorname{ad} w)X_i$.*

6. Действия точечных алгебр Хопфа

Применим результаты предыдущего раздела для описания алгебр Ли непрерывных дифференцирований тела $\mathcal{F}$ при $n \geqslant 2$ и действий точечных конечномерных алгебр Хопфа на $\mathcal{F}$. Назовем дифференцирование ∂ тела $\mathcal{F}$ *непрерывным*, если оно однозначно определяется значениями $\partial(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Предложение 8. *Пусть ∂ — непрерывное дифференцирование тела $\mathcal{F}$. Тогда существуют такой элемент $w \in \mathcal{F}$ и такие элементы $\lambda_i \in k$, что $\partial(X_i) = \lambda_iX + (\operatorname{ad} w)X_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Действительно, так как $\gamma = 1$, то $\beta_i = 1$. Поэтому нужно применить теорему 11, где $\theta_{ij} = 0$. □

Рассмотрим непрерывное дифференцирование ∂_i тела $\mathcal{F}$, при котором $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}X_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$.

Предложение 9. *Справедливы равенства $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $[\partial_i, \operatorname{ad} w] = \operatorname{ad}_{\partial_i(w)}$. Если $\operatorname{char} k = p > 0$, то $\partial_i^p = \partial_i$.*

Доказательство. Имеем $[\partial_i, \partial_j](X_s) = \partial_i\partial_j(X_s) - \partial_j\partial_i(X_s) = 0$. Кроме того, ∂_i^p является непрерывном дифференцированием тела $\mathcal{F}$, причем $\partial_i^p = \sum\limits_j \lambda_j\partial_j + \operatorname{ad} w$ для некоторых $\lambda_i \in k$ и $w \in \mathcal{F}$ по предложению 8. Но $\partial_i^p(X_s) = \delta_{is}X_s = \lambda_sX_s + (\operatorname{ad} w)X_s$ для любого индекса s. Поэтому

$$(\operatorname{ad} w)X_s = (\delta_{is} - \lambda_s)X_s. \tag{33}$$

Если $v = \sigma X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$ — одночлен из w, то

$$[(\operatorname{ad} v)X_s]X_s^{-1} = v - X_svX_s^{-1} = \left[1 - \prod_l q_{sl}^{m_l}\right]v.$$

При этом по (33) этот одночлен должен либо иметь вид $\delta_{is} - \lambda_s$, либо равняться нулю. Таким образом, либо $v \in k$, либо $1 = \prod\limits_l q_{sl}^{m_l}$, т. е. $m_l = 0$ для всех $l \neq s$. Итак, либо $\operatorname{ad} w = 0$, либо $w = \sigma X_s^m$. Беря другую переменную X_j, $j \neq s$, получаем, что всегда $\operatorname{ad} w = 0$. □

Следствие 6. *Алгебра Ли $\operatorname{Der}\mathcal{F}$ всех непрерывных дифференцирований тела $\mathcal{F}$ имеет вид*

$$\operatorname{Der}\mathcal{F} = (k\partial_1 \oplus \ldots \oplus k\partial_n) \oplus \operatorname{Derint}\mathcal{F},$$

где $\operatorname{Derint}\mathcal{F}$ — идеал Ли внутренних дифференцирований. При этом $L = k\partial_1 \oplus \ldots \oplus k\partial_n$ является абелевой подалгеброй Ли в $\operatorname{Der}\mathcal{F}$. Более того, если γ — непрерывный торический автоморфизм тела $\mathcal{F}$, то $\gamma\partial_i = \partial_i\gamma$ для любого i.

Доказательство. Нужно проверить лишь последнее утверждение. Если γ из (2), то для любого j имеем $\partial_i\gamma(X_j) = \gamma_j\delta_{ij}X_j = \gamma\partial_i(X_j)$. □

Применим полученные результаты к изучению действий точечных алгебр Хопфа на теле $\mathcal{F}$. Говорят, что алгебра Хопфа H *действует* на ассоциативной алгебре A, если A является левым H-модулем, причем для любого $h \in H$ и любых $a, b \in A$ выполнено равенство $h(ab) = \sum\limits_h h_{(1)}(a)h_{(2)}(b)$, где $\Delta(h) = \sum\limits_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} \in H \otimes H$. В этом случае также говорят, что A является *левой H-модульной алгеброй*. Алгебра Хопфа H действует *непрерывно* на теле $\mathcal{F}$, если действие каждого элемента $h \in H$ на $\mathcal{F}$ однозначно определяется значениями $h(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Алгебра Хопфа H над полем k *точечна*, если в ней все простые коподалгебры одномерны.

Следующая теорема принадлежит Тафту и Вильсону [16, теорема 5.4.1].

Теорема 13. *Пусть H — точечная алгебра Хопфа. Тогда существует такая хопфова фильтрация $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots$ на H, что*

1) *$H_0 = kG$, где G — группа, состоящая из всех групповых элементов в H;*
2) *если $x \in H_m$, $m \geqslant 1$, то $x = \sum\limits_{h,f \in G} x_{h,f}$, причем*

$$\Delta(x_{h,f}) = x_{h,f} \otimes f + h \otimes x_{h,f} + w \in H \otimes H, \tag{34}$$

где $w \in H_{m-1} \otimes H_{m-1}$.

Обозначим через $P_{h,f}^{(m)}$ подпространство всех элементов $x_{h,f} \in H_m$, удовлетворяющих условию (34).

Предложение 10. *Если $x \in P_{h,f}^{(m)}$, то $xf^{-1} \in P_{gf^{-1},1}^{(m)}$.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta(xf^{-1}) = \Delta(x)\Delta f^{-1} = \Delta(x)(f^{-1} \otimes f^{-1}) = \\ = (x \otimes f + h \otimes x + w)(f^{-1} \otimes f^{-1}) = xf^{-1} \otimes 1 + hf^{-1} \otimes xf^{-1} + w(f^{-1} \otimes f^{-1}).\end{aligned} \quad \square$$

Зафиксируем теперь конечномерную точечную алгебру Хопфа H, действующую непрерывно на теле $\mathcal{F}$. Как отмечено выше, $H_0 = kG$, причем группа G имеет конечный порядок M, поскольку различные групповые элементы алгебры Хопфа независимы [16]. Переходя, если необходимо, по теореме 10 к новой системе переменных, можно считать, что

$$g(X_i) = \chi(g, X_i)X_i, \quad i = 1, \ldots n, \tag{35}$$

для любого $g \in G$, где $\chi(g, X_i) \in k^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В частности, каждый одночлен $X_1^{Mr_1} \ldots X_n^{Mr_n}$ инвариантен относительно G для любых целых чисел $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$. Положим

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{char} k = 0, \\ \operatorname{char} k & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Утверждение 1. *Если a — произвольный одночлен из $\mathcal{F}$ и $h \in H_t$, то $ha = \chi(h, a)a$, где $\chi(-, a) \in H^*$. Если*

$$a = X_1^{Mp^t r_1} \ldots X_n^{Mp^t r_n}, \quad r_i \in \mathbb{Z}, \tag{36}$$

то $\chi(-, g) = \varepsilon$ — коединица H.

Наша цель — показать, что утверждение 1 верно для всех элементов $h \in H_t$ для любого t. Отметим, что оно справедливо для $t = 0$. Пусть оно верно для некоторого $t = m - 1 \geqslant 0$ и $u \in P_{\gamma,1}^m$. Тогда

$$\Delta(u) = u \otimes 1 + \gamma \otimes u + \sum_j \phi_j \otimes \psi_j, \tag{37}$$

где $\phi_j, \psi_j \in H_{m-1}$. Без ограничения общности можно предполагать, что $\varepsilon(u) = 0$, т. е. $u \in H^+ = \ker \varepsilon$. Тогда в (37) получаем

$$1 \otimes u = (\varepsilon \otimes 1)\Delta(u) = \varepsilon(\gamma) \otimes u + \sum_{j=1}^t \varepsilon(\phi_j) \otimes \psi_j = 1 \otimes u + \sum_{j=1}^t \varepsilon(\phi_j) \otimes \psi_j.$$

Отсюда $\sum_{j=1}^{t}\varepsilon(\phi_j)\otimes\psi_j=0$. Таким образом,

$$\Delta(u)=u\otimes 1+\gamma\otimes u+\sum_{j=1}^{t}[\phi_j-\varepsilon(\phi_j)]\otimes\psi_j.$$

Рассматривая аналогично $(1\otimes\varepsilon)\Delta(u)$, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{t}[\phi_j-\varepsilon(\phi_j)]\otimes\varepsilon(\psi_j)=0.$$

Следовательно, в (37) можно считать, что $u,\phi_j,\psi_j\in H^+$. По (37) получаем, что

$$u(X_iX_j)=u(X_i)X_j+\xi_iX_iu(X_j)+\theta'X_iX_j,$$

где

$$\theta'=\sum_s\chi(\phi_s,X_i)\chi(\psi_s,X_j)\in k.$$

Но $X_iX_j=q_{ij}X_jX_i$. Поэтому выполняются равенства (27), в которых $u_i=u(X_i)$, $u_j=u(X_j)$. Применив теорему 11, получаем, что

$$u(X_i)=\lambda_iX_i+(\operatorname{ad}_\gamma w)X_i,\quad i=1,\dots,n,$$

где $\lambda_i\in k$ и $w\in\mathcal{F}$. При этом без ограничения общности можно дополнительно предполагать, что $0\notin\operatorname{supp}w$. Предположим, что $w\neq 0$. По условию алгебра Хопфа H конечномерна. Поэтому найдется такой многочлен

$$F(T)=F^d+\alpha_{d-1}T^{d-1}+\ldots+\alpha_1T+\alpha_0\in k[T],\tag{38}$$

что $F(u)g=0$ для всех $g\in\mathcal{F}$.

Предложение 11. *Справедливо неравенство* $\nu(w)>0$.

Доказательство. Выберем такой ненулевой элемент $g\in\mathcal{F}$, чтобы элементы $\nu(g),\nu(w)\in\mathbb{Z}^n$ не были бы пропорциональными. В этом случае младшие члены g и w не коммутируют. Поэтому $\nu[(\operatorname{ad}_\gamma w)g]=\nu(g)+\nu(w)$. Таким образом, элементы $\nu(g)+\nu(w),\nu(w)\in\mathbb{Z}^n$ снова не пропорциональны. Индукцией по $s\geqslant 1$ проверяем, что $\nu[(\operatorname{ad}_\gamma w)^s(g)]=\nu(g)+s\nu(w)$.

Предположим, что $\nu(w)<0$. Тогда $\nu[(\operatorname{ad}_\gamma w)g]=\nu(g)+\nu(w)<\nu(g)$. Отсюда $\nu(u(g))=\nu[(\operatorname{ad}_\gamma w)g]$, и по индукции для любого натурального числа s получаем, что $\nu[u^s(g)]=\nu[(\operatorname{ad}_\gamma)^s(g)]=\nu(g)+s\nu(w)$. Как было отмечено выше $F(u)g=0$, где F из (38). Следовательно, $u^d(g)=-\alpha_{d-1}u^{d-1}(g)-\ldots-\alpha_1u(g)-\alpha_0g$, и поэтому

$$\nu(g)+d\nu(w)\geqslant\nu(g)+\min[0,\nu(w),\dots,(d-1)\nu(w)],$$

что невозможно, поскольку $\nu(w)<0$. Итак, $\nu(w)\geqslant 0$. По предположению $\nu(w)\neq 0$. Отсюда вытекает утверждение. □

Положим $f=u-\operatorname{ad}_\gamma w$. Из (37) вытекает, что

$$\Delta(f)=\Delta(u)-\Delta(\operatorname{ad}_\gamma w)=f\otimes 1+\gamma\otimes f+\sum_{j=1}^{t}\phi_j\otimes\psi_j,\tag{39}$$

причем $f(X_i)=\lambda_iX_i$ для всех i, где $\lambda_i\in k$. Поэтому из индукционного предположения следует

Предложение 12. *Если z — одночлен, то*

$$f(z)=\chi(f,z)z,\quad\chi(f,z)\in k.\tag{40}$$

В частности, $\operatorname{supp}f(z)\subseteq\operatorname{supp}z$ *для любого элемента* $z\in\mathcal{F}$. *Кроме того, если* $\beta\in H_{t-1}$, *то* $[f,\beta]z=0$ *для любого* $z\in\mathcal{F}$.

Предложение 13. *Если* $\beta\in H_j$, $0\leqslant j\leqslant m-1$, *то* $\beta(w)=\varepsilon(\beta)w$.

Доказательство. Предположим сначала, что $j=0$ и $\beta \in G$. В этом случае для любого одночлена $a \in \mathcal{F}$ в силу предложения 12 получаем

$$[u,\beta]a = [\mathrm{ad}_\gamma w + f, \beta]a = [\mathrm{ad}_\gamma w, \beta]a = w\beta(a) - \gamma\beta(a)w - \beta[wa - \gamma(a)w] = \\ = [w - b(w)]\beta(a) - \gamma\beta(a)[w - \beta(w)] = \mathrm{ad}_\gamma\,[w - \beta(w)]\,\beta(a).$$

Таким образом, $[u,\beta] \equiv \mathrm{ad}_\gamma[w-\beta(w)]\beta$ по модулю ядра действия H на $\mathcal{F}$. Следовательно, для любого натурального числа l получаем, что $[u,\beta]^l \equiv \{\mathrm{ad}_\gamma[w-\beta(w)]\beta\}^l$. Предположим, что $w \neq \beta(w)$ и X^s, $s \in \mathbb{Z}^n$, — младший одночлен из $w - \beta(w)$. Выберем одночлен $z = X^{s'}$, где s', s независимы в $\mathbb{Z}^n$. Как и в лемме 1, младший одночлен в

$$\{\mathrm{ad}_\gamma[w-\beta(w)]\beta\}^l \tag{41}$$

равен $X^{ls+s'}$. Поскольку алгебра H конечномерна, то все элементы (41) зависимы. Это невозможно, ибо у них разные младшие одночлены. Следовательно, $w = \beta(w)$, т. е. для $j=0$ утверждение доказано.

Пусть для $0 \leqslant j-1$ утверждение верно и $\beta \in H^+ \cap P^j_{\delta,1}$. Предположим, что

$$\Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + \delta \otimes \beta + \sum_i \phi'_i \otimes \psi'_i,$$

где $\phi'_i, \psi'_i \in H^+ \cap H_{j-1}$. В силу (37), предложения 12 и предположения индукции для любого одночлена a получаем

$$[u,\beta]a = [\mathrm{ad}_\gamma w, \beta]a = w\beta(a) - \gamma\beta(a)w - \beta[wa - \gamma(a)w] = \\ = w\beta(a) - \gamma\beta(a)w - \beta(w)a - \delta(w)\beta(a) - \sum_i \phi'_i(w)\psi'_i(a) + \\ + \beta\gamma(a)w + \delta\gamma(a)\beta(w) + \sum_i \phi'_i\gamma(a)\psi'_i(w) = -\,\mathrm{ad}_{\delta\gamma}[\beta(w)]a.$$

Таким образом, можно считать, что $\mathrm{ad}_{\delta\gamma}[\beta(w)] \in H$. Применяя соображения с младшим одночленом, как и выше, в силу конечномерности H получаем, что $\beta(w) = 0$. □

Предложение 14. *Если z — одночлен, то $\chi(f,z)$ из* (40) *является корнем многочлена $F(T)$ из* (38).

Доказательство. Поскольку $F(u)z = 0$ и $\nu(w) > 0$, то по (40)

$$0 = f^d(z) + \alpha_{d-1}f^{d-1}(z) + \ldots + \alpha_0 z = F[\chi(f,z)]z.$$

Таким образом, число $\chi(f,z)$ является корнем $F(T)$. □

Обозначим через H' подалгебру в H, порожденную H_{m-1}. Тогда H' является подалгеброй Хопфа в H с дуальной алгеброй Хопфа H'^*, в которой имеется конволютивное умножение $\chi * \chi'$. По предположению действие H' в $\mathcal{O}_\mathbf{q}$ полупросто (см. утверждение 1). Поэтому имеется конечная H'^*-градуировка $\mathcal{F} = \bigoplus_{\chi \in H'^*} \mathcal{F}_\chi$, где $\mathcal{F}_\chi$ состоит из всех таких $a \in \mathcal{F}$, что $h(a) = \chi(h)a$ для любого $h \in H'$. В силу утверждения 1 каждое $\mathcal{F}_\chi$ является линейной оболочкой некоторых одночленов.

Предложение 15. *Пусть $\chi, \chi' \in H'^*$. Тогда $\mathcal{F}_\chi\mathcal{F}_{\chi'} \subseteq \mathcal{F}_{\chi*\chi'}$. В частности, $\mathcal{F}_\varepsilon$ является подтелом в $\mathcal{F}$, а каждое $\mathcal{F}_\chi$ является $\mathcal{F}_\varepsilon$-бимодулем. Отображение f является дифференцированием в $\mathcal{F}_\varepsilon$. Кроме того, $w \in \mathcal{F}_\varepsilon$.*

Доказательство. Предположим, что $a \in \mathcal{F}_\chi$, $b \in \mathcal{F}_{\chi'}$ и $\omega \in H'$. Тогда

$$\Delta(\omega) = \sum \omega_{(1)} \otimes \omega_{(2)} \in H' \otimes H',$$

откуда

$$\omega(ab) = \sum \omega_{(1)}(a)\omega_{(2)}(b) = \sum \chi(\omega_{(1)})a\chi'(\omega_{(2)})b = ab\sum \chi(w_{(1)})\chi'(w_{(2)}) = [(\chi * \chi')(\omega)](ab).$$

Следовательно, $\mathcal{F}_\chi \mathcal{F}_{\chi'} \subseteq \mathcal{F}_{\chi * \chi'}$. Если $a \in \mathcal{F}_\varepsilon$ и $a^{-1} = \sum\limits_{\chi \in H'^*} b_\chi$, где $b_\chi \in \mathcal{F}_\chi$, то $1 = \sum\limits_\chi a b_\chi$, причем $ab_\chi \in \mathcal{F}_\varepsilon \mathcal{F}_\chi \subseteq \mathcal{F}_\chi$. Отсюда $ab_\chi = 0$ и $b_\chi = 0$ при $\chi \neq \varepsilon$. Поэтому $a^{-1} \in \mathcal{F}_\varepsilon$, и значит, $\mathcal{F}_\varepsilon$ является подтелом.

Если $a, b \in \mathcal{F}_\varepsilon$, то по (39) получаем

$$f(ab) = f(a)b + \gamma(a)f(b) + \sum \phi_j(a)\psi_j(b) = f(a)b + af(b).$$

Последнее утверждение вытекает из предложения 13. □

Отметим, что в силу утверждениия 1 каждый одночлен вида (36) лежит в $\mathcal{F}_\varepsilon$.

Предложение 16. *Выполняется тождество* $w = 0$.

Доказательство. Пусть a — одночлен из $\mathcal{F}_\varepsilon$. По предложению 14 число значений $\chi(f, -)$ из предложения 12 конечно. С другой стороны, по предложению 15 для любого $l \geqslant 1$ элемент a^l принадлежит $\mathcal{F}_\varepsilon$. Применяя (39) и предложение 15, получаем, что

$$\chi(f, a^l)a^l = f(a^l) = \sum_{s=0}^{l-1} a^s f(a) a^{l-s-1} = l\chi(f, a)a^l.$$

Таким образом, если характеристика поля равна нулю, то $\chi(f, a) = 0$. В частности, $f(w) = 0$. Поэтому если $F(T)$ из (38), то для любого $z \in \mathcal{F}_\varepsilon$ имеем

$$0 = F(u)z = \sum_i \alpha_i (\mathrm{ad}_\gamma w + f)^i z = \sum_i (\mathrm{ad}_\gamma)^i z. \tag{42}$$

Пусть $w \neq 0$ и X^r, $r \in \mathbb{Z}^n$, — младший одночлен в w. Выберем одночлен вида (36), не перестановочный с X^t. Как и выше, получается противоречие с (42).

Пусть теперь $\operatorname{char} k = p > 0$. Предположим, что $w \neq 0$ и w_0 — наименьший ненулевой одночлен из w. По теореме 5 существует такой элемент $v \in \mathcal{F}$, что $\nu(v) > 0$ и в $w' = (1-v)w(1-v)^{-1}$ все одночлены перестановочны с w_0 и между собой. Из доказательства этой теоремы видно, что каждый одночлен из v является произведением одночленов из w и обратных к ним. Поэтому $v, w' \in \mathcal{F}_\varepsilon$ по предложению 15. Следовательно, можно перейти в $\mathcal{F}$ к новым переменным $(1-v)X_i(1-v)^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и считать, что $w = w'$, т. е. все одночлены из w перестановочны между собой. Действительно, для любого $g \in G$ имеем

$$g[(1-v)X_i(1-v)^{-1}] = [(1-g(v)]g(X_i)[1-g(v)]^{-1} = (1-v)\chi(g, X_i)X_i(1-v)^{-1}$$

по (35) с учетом того, что $v \in \mathcal{F}_\varepsilon$ и $\varepsilon(g) = 1$. Но тогда в силу предложения 12 и все элементы $f^i(w)$, $f^j(w)$, где $i, j \geqslant 0$, также перестановочны.

На $\mathcal{F}_\varepsilon$ элемент $\mathrm{ad}_\gamma w$ действует как $\mathrm{ad}\, w$, причем $[f, \mathrm{ad}\, w] = \mathrm{ad}\, f(w)$. Таким образом, по формулам Джекобсона и в силу условия $w \in \mathcal{F}_\varepsilon$ получаем, что

$$u^p = \mathrm{ad}\, w^p + f^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(\mathrm{ad}\, w, f),$$

где $is_i(x, y)$ — коэффициент при ζ^{i-1} в $\mathrm{ad}^{p-1}(\zeta x + y)x$. В силу коммутативности $f^i(w)$, $f^j(w)$ получаем, что $s_i(\mathrm{ad}\, w, f) = 0$ для всех $i = 2, \ldots, p-1$. Таким образом, $u^p = \mathrm{ad}\, w^p + f^p + \mathrm{ad}\, f^{p-1}(w)$.

Лемма 9. *Для любого* $j \geqslant 1$ *имеем* $u^{p_j} = \mathrm{ad}\, w^{p_j} + f^{p_j} + \mathrm{ad}\, f^{p_j - 1}(w)$.

Доказательство. Случай $j = 1$ уже разобран. Пусть утверждение верно для некоторого j. Тогда

$$\begin{aligned}
u^{p^{j+1}} &= [\mathrm{ad}\, w^{p_j} + f^{p^j} + \mathrm{ad}\, f^{p_j - 1}(w)]^p = \{\mathrm{ad}[w^{p_j} + f^{p^j - 1}(w)] + f^{p^j}\}^p = \\
&= \mathrm{ad}[w^{p_j} + f^{p^j - 1}(w)]^p + f^{p^{j+1}} + \mathrm{ad}\, f^{p^j(p-1)}[w^{p^j} + f^{p^j - 1}(w)] = \\
&= \mathrm{ad}[w^{p^{j+1}} + f^{(p^j - 1)p}(w)] + f^{p^{j+1}} + \mathrm{ad}[f^{p^j(p-1)}(w^{p^j}) + f^{p^j(p-1) + p^j - 1}(w)] = \\
&= \mathrm{ad}\, w^{p^{j+1}} + f^{p^{j+1}} + \mathrm{ad}[f^{p^{j+1}}(w)],
\end{aligned}$$

поскольку $f(w^{p_j}) = 0$ по предложению 15. □

Элементы u^{p^j}, $j \geqslant 0$, линейно зависимы, и поэтому существует такой многочлен $F(T) = \sum_j \alpha_j T^{p_j} \in k[T]$, что для любого одночлена $z \in \mathcal{F}_\varepsilon$

$$0 = F(u)z = \sum_{j\geqslant 0} \alpha_j u^{p^j}(z) = \sum_{j\geqslant 1} \alpha_j [\operatorname{ad} w^{p^j} + f^{p^j} + \operatorname{ad} f^{p^j-1}(w)]z + \alpha_0(\operatorname{ad} w + f)z =$$
$$= F(\operatorname{ad} w)z + F(f)z + \Bigg[\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \operatorname{ad} f^{p^j-1}(w)\Bigg]z = F(\operatorname{ad} w)z + F(f)z + \operatorname{ad}\Bigg[\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j f^{p^j-1}(w)\Bigg]z. \quad (43)$$

По предложениям 12 и 14 получаем, что $F(f)z = 0$. Пусть w — сумма одночленов w_s. Тогда

$$\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j f^{p^j-1}(w) = \sum_s \sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \chi(f, w_s)^{p^j-1}(w_s).$$

Если $\chi(f, w_s) = 0$, то

$$\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \chi(f, w_s)^{p^j-1}(w_s) = 0,$$

так как $p \geqslant 2$. Пусть $\chi(f, w_s) \neq 0$. Тогда

$$\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \chi(f, w_s)^{p^j-1}(w_s) = \chi(f, w_s)^{-1}[F(\chi(f, w_s)) - \alpha_0 \chi(f, w_s)] = -\alpha_0.$$

Следовательно, во всех случаях $\operatorname{ad}\Big[\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \chi(f, w_s)^{p^j-1} w_s\Big]z = 0$, и следовательно,

$$\operatorname{ad}\Bigg[\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j f^{p^j-1}(w)\Bigg]z = \sum_s \operatorname{ad}\Bigg[\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \chi(f, w_s)^{p^j-1} w_s\Bigg]z = 0.$$

Поэтому в (43) получаем, что

$$0 = F(\operatorname{ad} w)z = \sum_{j\geqslant 0} \alpha_j (\operatorname{ad} w^{p^j})z = \operatorname{ad}\Bigg[\sum_{j\geqslant 0} \alpha_j w^{p^j}\Bigg]z. \quad (44)$$

Выберем такой одночлен $z \in \mathcal{F}_\varepsilon$ вида (36), чтобы каждый одночлен из w не коммутировал с z. Это возможно по утверждениию 1. Сравнивая младшие одночлены в (44), получаем, что $\alpha_j = 0$ для всех $j \geqslant 0$, т. е. $F(T) = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $w = 0$. □

Итак, $u = f$. Если g из (36) и $t = m$, то $g \in \mathcal{F}_\varepsilon$. Поэтому по предложениям 12, 15 получаем, что

$$u(g) = \sum_{j=1}^{n} X_1^{Mp^m r_1} \ldots X_{i-1}^{Mp^m r_{i-1}} u(X_i^{Mp^m r_i}) X_{i+1}^{Mp^m r_{i+1}} \ldots X_n^{Mp^m r_n},$$

причем

$$u(X_i^{Mp^m r_i}) = Mp^m r_i X_i^{Mp^m r_i} = 0.$$

В силу последнего предложения мы можем совершить индукционный шаг. Таким образом, нами доказана

Теорема 14. *Пусть конечномерная точечная алгебра Хопфа H действует непрерывно на $\mathcal{F}$. Существует такая система неизвестных вида* (24)*, что для любого одночлена $v \in \mathcal{F}$ от новых переменных и любого $h \in H$ имеем $h(v) = \chi(h, v)v$, где $\chi(-, v) \in H^*$.*

Следствие 7. *Пусть* $\operatorname{char} k = p > 0$*. Тогда групповой элемент порядка p действует тождественно в $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Пусть $g \in G(H)$ имеет порядок p и v — произвольный одночлен. Тогда $gv = \chi(g, v)v$, причем $v = g^p v = \chi(g, v)^p v$, откуда $\chi(g, v)^p = 1$, и потому $\chi(g, v) = 1$. □

Рассмотрим множество $\mathcal{F}^H$ всех инвариантов действия конечномерной точечной алгебры Хопфа H на теле $\mathcal{F}$. Напомним, что $\mathcal{F}^H$ состоит из всех таких элементов $f \in \mathcal{F}$, что $h(f) = \varepsilon(h)f$ для любого $h \in H$.

Теорема 15. *$\mathcal{F}^H$ является подтелом в $\mathcal{F}$, причем $\mathcal{F}$ имеет конечную правую и левую размерности над $\mathcal{F}^H$.*

Доказательство. Несложно проверить, что $\mathcal{F}$ является подалгеброй в $\mathcal{F}$. Предположим, что $f \in \mathcal{F}^H$ и $f \neq 0$. Тогда $1 = f \cdot f^{-1}$. Если $h \in H$ и

$$\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} \in H \otimes H,$$

то

$$\varepsilon(h) = h(1) = \sum_h [h_{(1)}(f)][h_{(2)}(f^{-1})] = \sum_h [\varepsilon(h_{(1)})f][h_{(2)}(f^{-1})] = f\left[\sum_h \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\right](f^{-1}) = f \cdot h(f^{-1}).$$

Поэтому $h(f^{-1}) = \varepsilon(h)f^{-1}$, т. е. $f^{-1} \in \mathcal{F}^H$.

Пусть $H = H_m$ в теореме 13. В силу теоремы 14, переходя, если необходимо, к новой системе неизвестных, получаем, что каждый элемент из (36) с $t = m$ лежит в $\mathcal{F}^H$. Следовательно,

$$\mathcal{F} = \sum_{0 \leqslant s_i < Mp^m} \mathcal{F}^H X_1^{s_1} \ldots Y_n^{s_n}. \quad \square$$

Приведем теперь характеризацию действия алгебры Хопфа H на $\mathcal{F}$ в других терминах. Для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ в теореме 14 положим $\chi(-, m) = \chi(-, X^m)$. Заметим, что отображение $h \to \chi(h, m)$ мультипликативно, т. е. каждое $\chi(-, m)$ является характером. В силу конечномерности алгебры Хопфа H имеется конечное число различных, и потому независимых, характеров

$$\chi(-, m_1), \ldots, \chi(-, m_s). \tag{45}$$

Для любых $m, m' \in \mathbb{Z}^n$ справедливы равенства

$$\chi(h, m + m')X^{m+m'} = [\chi(-, m) * \chi(-, m')](h)X^{m+m'}. \tag{46}$$

Таким образом, $\chi(-, m + m') = \chi(-, m) * \chi(-, m')$.

Пусть U — подмножество всех таких $m \in \mathbb{Z}^n$, что $\chi(h, m) = \varepsilon(h)$ для всех $h \in H$. В силу (46) и (45) U является подгруппой конечного индекса в $\mathbb{Z}^n$, причем $\mathbb{Z}^n/U = \{m_1 + U, \ldots, m_s + U\}$.

Обозначим через Γ групповую k-алгебру группы $\mathbb{Z}^n/U$. Зададим действие дуальной алгебры Хопфа Γ^* на $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$, полагая $\chi(X^m) = \chi(m)X^m$ для любого $\chi \in \Gamma^*$ и любого $m \in \mathbb{Z}^m$. Здесь $X_1, \ldots, X_n$ — новая система неизвестных из теоремы 14.

Предложение 17. *Зададим отображение $\pi\colon H \to \Gamma^*$ по правилу: если $h \in H$ и $m \in \mathbb{Z}^n$, то $[\pi(h)](m) = \chi(h, m)$. Это отображение является сюръективным гомоморфизмом алгебр Хопфа.*

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ (см. [16]) имеем

$$[\pi(h_1h_2)](m) = \chi(h_1h_2, m) = \chi(h_1, m)\chi(h_2, m) = [\pi(h_1) * \pi(h_2)](m).$$

Предположим, что $\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} \in H \otimes H$. Тогда для любых $m', m'' \in \mathbb{Z}^n$ по (46) и [16] имеем

$$[\Delta\pi(h)](m', m'') = [\pi(h)](m' + m'') = \chi(h, m' + m'') =$$
$$= (\chi(-, m') * \chi(-, m''))(h) = \sum_h \chi(h_{(1)}, m')\chi(h_{(2)}, m'') = [(\pi \otimes \pi)\Delta(h)](m', m'').$$

Аналогично

$$\varepsilon[\pi(h)] = \chi(h, 0) = \pi[\varepsilon(h)], \quad [S\pi(h)](m) = \chi(h, -m) = \pi(Sh).$$

Сюръективность π вытекает из того, что $\dim \Gamma^* = |\mathbb{Z}^n/U| = s$. $\square$

Заметим, что композиция гомоморфизма π и действия Γ^* на $\mathcal{F}$ совпадает с исходным действием H на $\mathcal{F}$. Итак, справедлива

Теорема 16. *Каждое непрерывное действие конечномерной точечной алгебры Хопфа H на $\mathcal{F}$ является композицией гомоморфизма π и действия Γ^* на $\mathcal{F}$. При этом алгебра Хопфа Γ^* коммутативна, кокоммутативна и точечна.*

7. Пуассоновы скобки

Пуассоновой скобкой на ассоциативной k-алгебре A называется k-билинейное умножение $\{,\}\colon A\otimes A\to A$, причём выполнены следующие условия:

1) A является алгеброй Ли относительно умножения $\{x,y\}$;
2) $\{xy,z\}=\{x,z\}y+x\{y,z\}$ для всех $x,y,z\in A$.

Алгебра A с пуассоновой скобкой называется *пуассоновой алгеброй*.

Пуассоновы алгебры рассматриваются, например, в [14]. В [17] при некоторых предположениях на мультипараметры показано, что для алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ с $r=0,n$ существует такая пуассонова алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}'}$, что топологическое пространство примитивных (первичных) идеалов в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и пространство симплектических (первичных пуассоновых) идеалов в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}'}$ гомеоморфны.

В этом разделе мы опишем все пуассоновы скобки на общей алгебре $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ и на теле $\mathcal{F}$. При этом в случае тела $\mathcal{F}$ мы будет предполагать, что пуассонова скобка *непрерывна*, т. е. она однозначно определяется элементами $\{X_i,X_j\}$ для всех i, j. По свойству 2) отображение $x\mapsto\{y,x\}$ является дифференцированием алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$. Поэтому по теореме 12 и следствию 12 получаем, что

$$\{b,a\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(b)\partial_i(a)+[\operatorname{ad}w(b)]a, \tag{47}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ являются линейными функционалами на $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ (на $\mathcal{F}$). Кроме того, $w(b)\in\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ (соответственно $w(b)\in\mathcal{F}$). Без ограничения общности можно считать, что у $w(y)$ ненулевой постоянный член. Так как пуассонова скобка антикоммутативна, то

$$0=\{a,a\}=\sum_i\alpha_i(x)\partial_i(a)+[\operatorname{ad}w(b)]a.$$

Полагая $a=X_i$, мы получаем

$$\alpha_i(X_i)X_i+[\operatorname{ad}w(X_i)]X_i=0. \tag{48}$$

Пусть

$$w(X_i)=\sum_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}}\eta_{m_1,\ldots,m_n}X_1^{m_1}\ldots X_n^{m_n},$$

где $\eta_{m_1,\ldots,m_n}\in k$. По [9, предложение 1.5] в (48) получаем

$$\begin{aligned}0&=\alpha_i(X_i)X_i+[\operatorname{ad}w(X_i)]X_i=\\&=\alpha_i(X_i)X_i+\sum_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}}\eta_{m_1,\ldots,m_n}\Bigl[\prod_{t>i}q_{ti}^{m_t}-\prod_{i>t}q_{it}^{m_t}\Bigr]X_1^{m_1}\ldots X_{i-1}^{m_{i-1}}X_i^{m_i+1}X_{i+1}^{m_{i+1}}\ldots X_n^{m_n}.\end{aligned} \tag{49}$$

Пусть

$$\prod_{t>i}q_{ti}^{m_t}-\prod_{i>t}q_{it}^{m_t} \tag{50}$$

отлично от нуля. Тогда из (49) получаем, что

$$m_1=\ldots=m_{i-1}=m_{i+1}=\ldots=m_n=0,\quad \alpha_i(X_i)=0. \tag{51}$$

Если же (50) равно нулю, то в силу независимости мультипараметров q_{li}, $l\neq i$, снова получаем условие (51). Итак, во всех случаях $w(x_i)\in k[X_i^{\pm1}]$, $\alpha_i(X_i)=0$ для любого i.

Предположим, что $1\leqslant i<j\leqslant n$ и $w(X_i)=\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}\setminus 0}\xi_{ir}X_i^r$. В силу антикоммутативности пуассоновой скобки из (47) вытекает, что

$$\begin{aligned}0=\{X_i,X_j\}+\{X_j,X_i\}&=\alpha_i(X_j)X_i+\alpha_j(X_i)X_j+[\operatorname{ad}w(X_j)]X_i+[\operatorname{ad}w(X_i)]X_j=\\&=\alpha_i(X_j)X_i+\alpha_j(X_i)X_j+\sum_r\xi_{ir}(q_{ji}^r-1)X_iX_j^r+\sum_r\xi_{jr}(1-q_{ji}^r)X_i^rX_j.\end{aligned}$$

Поэтому $\xi_{is}=\xi_{js}=0$ при $s\neq 1$ и $\alpha_j(X_i)=\alpha_i(X_j)=0$. Более того, $\xi_{i1}=\xi_{j1}=\xi\in k$. Таким образом, $w(X_i)=\xi X_i$, где $\xi\in k$.

Следовательно, для любого одночлена a и любого индекса $1 \leqslant i \leqslant n$ получаем

$$0 = \{X_i, a\} + \{a, X_i\} = \xi(\operatorname{ad} X_i)a + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(a)\partial_j X_i + (\operatorname{ad} w(a))X_i = \alpha_i(a)X_i + [\operatorname{ad}(w(a) - \xi a)]X_i.$$

Поэтому $\alpha_i(a) = 0$ и $w(a) - \xi a \in k[X_i^{\pm 1}]$ для любого i. Следовательно, $w(a) = \xi a$.

Теорема 17. *Пусть на общей алгебре квантовых многочленов $\mathcal{O}_\mathbf{q}$ (на теле $\mathcal{F}$) задана пуассонова скобка $\{x, y\}$. Тогда существует такой элемент $\xi \in k$, что $\{a, b\} = \xi[a, b]$ для всех a, b.*

Доказательство. Мы уже показали, что $\{a, b\} = \xi[\operatorname{ad} w(a)]b = \xi[a, b]$ для любого одночлена a. Это соотношение распространяется на любой элемент из $\mathcal{O}_\mathbf{q}$ (из $\mathcal{F}$). □

Работа частично поддержана грантами РФФИ 03-01-00167, INTAS-00-566, НШ-1910.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артамонов В. А.* Автоморфизмы тел частных квантовых рациональных функций // Мат. сб. — 2000. — *191*, № 12. — С. 3—26.
2. *Демидов Е. Е.* Квантовые группы. — М.: Факториал, 1998. — 127 с.
3. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра. Т. II. — М.: ИЛ, 1963.
4. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1972.
5. *Шафаревич И. Р.* Алгебра. — М.: ВИНИТИ, 1986. — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 11.
6. *Alev J., Chamarie M.* Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques // Comm. Algebra. — 1992. — *20*, N 6. — P. 1787—1802.
7. *Alev J., Dumas F.* Invariants du corps de Weyl sous l'action de groupes finis // Comm. Algebra. — 1997. — *25*, N 5. — P. 1655—1672.
8. *Artamonov V. A.* Valuations on quantum fields // Comm. Algebra. — 2001. — *29*, N 9. — P. 3889—3904.
9. *Artamonov V. A.* Pointed Hopf algebras acting on quantum polynomials // J. Algebra. — 2003. — *259*, N 2. — 323—352.
10. *Artamonov V. A., Cohn P. M.* The skew field of rational functions on the quantum plane // J. Math. Sci. — 1999. — *93*, N 6. — P. 824—829.
11. *Artamonov V. A., Wisbauer R.* Homological properties of quantum polynomials // Algebras and Representation Theory. — 2001. — *4*, N 3. — P. 219—247.
12. *Brookes C. J. B.* Crossed products and finitely presented groups // J. Group Theory. — 2000. — *3*. — P. 433—444.
13. *Brown K. A., Goodearl K. R.* Lecture on Algebraic Quantum Groups. — Basel, Boston: Birkhäuser, 2002.
14. *Korogodski L. I., Soibelman Y. I.* Algebra of Functions on Quantum Groups. Part I. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1998.
15. *McConnell J. C., Pettit J. J.* Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. — 1988. — *38*, N 1. — P. 47—55.
16. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1993. — Regional Conf. Ser. Math. Amer. Math. Soc.
17. *Oh Sei-Qwon, Park Chun-Gil, Shin Youg-Yeon.* Quantum n-space and Poisson n-space // Comm. Algebra. — 2002. — *30*, N 9. — P. 4197—4209.
18. *Osborn J. P., Passman D.* Derivations of skew polynomial rings // J. Algebra. — 1995. — *176*, N 2. — P. 417—448.
19. *Richard L.* Sur les endomorphismes des tores quantiques // Comm. Algebra. — 2002. — *30*, N 11. — P. 5282—5306.
20. *Van Oystaeyen F.* Algebraic Geometry for Associative Algebras. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 302 p.

В. А. Артамонов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: artamon@mech.math.msu.su

Современная математика и ее приложения. Том 18 (2004). С. 26–97

T-ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2004 г. **А. В. ГРИШИН, В. В. ЩИГОЛЕВ**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов, связанных с T-пространствами и их приложениями. Доказана конечная базируемость широкого класса T-пространств над полем нулевой характеристики, откуда следует положительное решение локальной проблемы Шпехта. Показано, что в случае, когда характеристика основного поля больше нуля, аналоги полученных результатов места не имеют. Получено отрицательное решение проблемы Мальцева о конечной базируемости тождеств ассоциативных колец.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Понятие T-пространства появилось сравнительно недавно (около 15 лет назад) у одного из авторов настоящей работы в связи со следующими обстоятельствами. Одним из наиболее значительных событий в теории PI-алгебр в 80-е годы стало положительное решение А. Р. Кемером проблемы Шпехта (см. [15]). Работая над той же проблематикой, этот автор заметил, что при доказательстве конечной базируемости систем обобщенных многочленов определенного типа (см. [7]) по существу использовались только линейные действия и подстановки (умножения оказались не нужны), что

ISSN 1512–1712

привело к понятию T-пространства в алгебре обобщенных многочленов. Представляет интерес изучение аналогичных объектов в свободной (относительно свободной) ассоциативной алгебре. Они, как показано в работе, имеют важные приложения к теории PI-алгебр, в частности к вопросам конечной базируемости T-идеалов. Рост интереса к T-пространствам, как представляется, произошел в связи с тем, что в конце 1997 года одним из авторов настоящей работы было доказано, что над полем характеристики 2 T-пространство, порожденное многочленами $x_1^2 \ldots x_n^2$, не имеет конечного базиса (как T-пространство) даже по модулю очень простого тождества, как бы близкого к коммутативности. В то время весьма серьезные математики занимались доказательством результата в положительном направлении, поэтому первый контрпример был достаточно неожиданным. Появилось даже мнение, что ситуация в характеристике 2 является исключительной. Однако автор первого примера высказал уверенность, что подобные конструкции имеются в любой характеристике $p > 0$. Результаты второго автора это полностью подтвердили. Основываясь на построенных не конечно базируемых T-пространствах, практически одновременно сразу три автора построили не конечно базируемые T-идеалы (см. [1, 9, 10, 22]). Читатель при желании может сам их сравнить и выбрать наиболее подходящий вариант. К понятию T-пространства приводят и некоторые дополнительные соображения (см. ниже), так что, возможно, оно появлялось неявно и у других авторов. Отметим также, что все основные понятия и задачи, связанные с T-пространствами, можно рассматривать и в неассоциативном случае (см. [6, 11]).

Основные цели данной работы следующие.

1. Дать определение T-пространства (абстрактного T-пространства) и некоторых связанных с этим понятием объектов, а также указать некоторые из предполагаемых направлений дальнейших исследований (введение).

2. Доказать конечную базируемость широкого класса T-пространств над полем нулевой характеристики (откуда следует положительное решение локальной проблемы Шпехта), а также рассмотреть $\mathbb{Z}_2$-градуированные T-пространства, которым посвящено дополнение к главе 1. В [24] показано, что с использованием $\mathbb{Z}_2$-градуированных T-пространств можно получить положительное решение проблемы конечной базируемости для T-пространств без каких-либо ограничений на порождающие.

3. Показать, что в случае, когда характеристика p основного поля больше нуля (см. главы 2 и 3), аналоги результатов главы 1 места не имеют. Хотя в некоторых частных случаях, например в коммутативном, любое T-подпространство относительно свободной алгебры конечно базируемо. Заметим, что в главе 2 рассмотрен только случай $p = 2$, в то время как в главе 3 характеристика ограничена лишь условием $p > 0$. Это может быть объяснено, во-первых, тем, что исторически техника главы 2 возникла задолго до доказательства результатов главы 3, и, во-вторых, тем, что в главе 2 используется интересный аналог Φ_2 алгебры Грассмана, который, по-видимому, возможен только в случае характеристики 2. С другой стороны, в главе 3 построено достаточно много не конечно базируемых T-пространств. Например, в разделах 3.2 и 3.3 построены не конечно базируемые T-пространства, порожденные многочленами, зависящими от конечного числа (двух и более) переменных. В силу результатов работы [16] для T-идеалов не существует аналогов таких примеров. В разделе 3.4 построены не конечно базируемые T-пространства, порожденные многочленами ограниченной степени по каждой переменной. Эти T-пространства оказываются очень полезными при построении не конечно базируемых T-идеалов. Все не конечно базируемые T-пространства разделов 3.1—3.4 не конечно базируемы по модулю T-идеала, порожденного многочленом $[x_1, [x_2, x_3]]$, и все вычисления производятся по модулю этого же T-идеала. Оставшиеся разделы главы 3 посвящены построению не конечно базируемых T-идеалов. Например, показано, что мономиальные контрпримеры существуют над всеми полями произвольной положительной характеристики. Так же приведена общая схема, позволяющая строить не конечно базируемые T-идеалы из не конечно базируемых T-пространств, удовлетворяющих некоторым достаточно слабым условиям. Более того, если исходное T-пространство не конечно базируемо по модулю некоторого T-идеала Γ, то получившийся T-идеал будет не конечно базируем по модулю некоторой степени Γ.

Наконец, результаты данного обзора дают отрицательное решение проблемы Мальцева о конечной базируемости тождеств ассоциативных колец (см. [25]).

Итак, пусть $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счетно порожденная ассоциативная алгебра над полем k и T — полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры F.

Эндоморфизм τ алгебры F, определяемый соответствием $x_i \mapsto g_i$, где $g_i \in F$, будем называть *подстановкой типа* $(x_1, \ldots, x_i, \ldots) \mapsto (g_1, \ldots, g_i, \ldots)$. Обозначим через f^τ образ многочлена f из алгебры F относительно подстановки τ.

Подстановка τ называется *регулярной*, если она имеет тип $(x_1, \ldots, x_i, \ldots) \mapsto (x_1h_1, \ldots, x_ih_i, \ldots)$, где h_i — многочлены из алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$. Ясно, что множество T^* регулярных подстановок является подполугруппой полугруппы T.

Следуя [7] и [8], назовем векторное подпространство V алгебры F *T-пространством*, если V замкнуто относительно подстановок (т. е. из $f \in V$ и $\tau \in T$ следует, что $f^\tau \in V$). Обозначим через S^T T-пространство, порожденное подмножеством S некоторого T-пространства. Другими словами, S^T есть минимальное T-пространство, содержащее S.

Аналогично определяются T^*-пространства алгебры F. Через S^{T^*} обозначим T^*-пространство, порожденное множеством S. Назовем T-пространство (T^*-пространство) *конечно порожденным*, если для некоторого его конечного подмножества S оно совпадает с S^T (соответственно с S^{T^*}).

По определению T-идеал (T^*-идеал) алгебры F — это ее идеал, являющийся одновременно и T-пространством (T^*-пространством).

Очевидным образом определяется правое действие полугрупп T и T^* на любой относительно свободной алгебре, на которой, следовательно, также можно ввести понятия T-пространства и T^*-пространства.

Если k — коммутативное кольцо с единицей, то аналогичным образом можно ввести понятие T-модуля (T-группы, если $k = \mathbb{Z}$).

Ясно, что любое T-пространство в относительно свободной алгебре естественным образом наделяется структурой унитарного правого kT-модуля (kT — полугрупповая k-алгебра). Это приводит к следующему определению, существенно обобщающему предыдущее определение T-пространства.

Назовем *T-пространством* (*абстрактным*) над полем k любой унитарный правый kT-модуль. Соответственно, морфизмами T-пространств являются гомоморфизмы их как kT-модулей. Через S^T будем обозначать T-пространство, порожденное подмножеством S в некотором T-пространстве.

Аналогичным образом можно ввести понятие абстрактного T^*-пространства.

Пусть I — произвольный T-идеал алгебры F (возможно, нулевой). Относительно свободная алгебра F/I является, очевидно, циклическим kT-модулем, порожденным любой из своих переменных. Согласно результатам первой главы, если k — поле нулевой характеристики, а идеал I содержит многочлен Капелли, то этот циклический модуль нетеров. В качестве следствия получается конечная базируемость любого T-идеала, содержащего многочлен Капелли. На самом деле, согласно [24], всякие условия на T-идеал I можно отбросить, т. е. $F = x_1^{kT}$ — нетеров kT-модуль. Пусть $\mathfrak{C}$ — класс kT-модулей, порожденный циклическим модулем F и замкнутый относительно взятия подмодулей, фактор-модулей и конечных прямых сумм. Назовем $\mathfrak{C}$ *классом комбинаторных модулей*. Из сказанного выше следует, что в случае поля нулевой характеристики любой комбинаторный модуль нетеров. В характеристике $p > 0$ это не так. Построение общей теории комбинаторных модулей, как представляется, еще впереди. Они определенным образом связаны с некоторыми правыми идеалами алгебры kT. Было бы интересно описать радикал этой алгебры и фактор по нему. Отметим, что все T-пространства, встречающиеся в работе, являются комбинаторными модулями.

Еще один круг вопросов, связанных с T-пространствами, представляет, на наш взгляд, определенный интерес. Пусть A — произвольная k-алгебра и L — линейное подпространство алгебры A.

Подпространство $V(L)$ свободной алгебры F, состоящее из многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполнено условие: для любых $a_1, \ldots, a_n$ из алгебры A элемент $f(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит L, является, очевидно, T-пространством (*ассоциированным* с L). Если L — идеал алгебры A, то $V(L)$ — T-идеал алгебры F, в частности, если L — нулевое подпространство, то $V(L)$ — идеал тождеств алгебры A, если L — центр алгебры A, то $V(L)$ — T-пространство центральных многочленов алгебры A. Возникает вопрос: может ли центр быть ненулевым, а T-пространство, ассоциированное с ним, совпадать с T-идеалом тождеств алгебры A. В связи с этим вопросом можно поставить следующую общую задачу. Скажем, что два подпространства L_1 и L_2 алгебры A являются *T-эквивалентными*, если $V(L_1) = V(L_2)$. Нетрудно заметить, что это действительно отношение эквивалентности, дающее некоторую классификацию подпространств алгебры A. Что из себя представляет множество классов для конкретных алгебр? Например, для алгебры матриц над полем нулевой характеристики, как можно показать, имеется всего четыре класса.

Следующая задача. Пусть теперь A — алгебра $(r\times r)$-матриц над полем нулевой характеристики. Если L — подпространство матриц с нулевым следом, то $\{[x_1, x_2]\}^T \subset V(L)$. Согласно результатам главы 1 это T-пространство конечно порождено. Было бы интересно найти систему его порождающих. Легко видеть, что $\{[x_1, x_2]\}^T + V(0) = V(L)$. Если L — подпространство скалярных матриц (центр алгебры A), то $V(L)$ — T-пространство центральных многочленов алгебры матриц, которое, согласно результатам первой главы, конечно порождено. Было бы весьма интересно найти систему порождающих этого T-пространства для конкретных небольших r (например, $r = 2, 3$). При $r = 2$, согласно результатам Ю. П. Размыслова, T-идеал $V(0)$ порожден стандартным тождеством степени 4 и тождеством Холла. Достаточно правдоподобным кажется предположение о том, что в данном случае T-пространство центральных многочленов порождено квадратом коммутатора и указанными тождествами. И действительно, в работе [37] С. В. Охитин доказал, что в случае $r = 2$ T-пространство центральных многочленов порождено квадратом коммутатора и многочленом $x_1\mathrm{St}_4$, где St_4 — стандартный многочлен степени 4, зависящий от $x_2, \ldots, x_5$ (см. также [28]).

Наконец, сделаем еще несколько замечаний по поводу структуры данного обзора. Результаты двух авторов обзора распределены по тексту следующим образом: главы 1 и 2 написаны А. В. Гришиным; дополнение к главе 1 и глава 3 написаны В. В. Щиголевым. Обозначения этих частей независимы и авторы почти не цитируют друг друга, за исключением нескольких случаев. Это объясняется тем, что каждый из авторов получил свои результаты независимо. Во введении использованы обозначения и терминология А. В. Гришина. Система обозначений второго автора описана в разделе 3.1. Однако разница между обозначениями и терминологией авторов не так велика, чтобы запутать читателя.

Глава 1

КОНЕЧНАЯ БАЗИРУЕМОСТЬ T-ПРОСТРАНСТВ НАД ПОЛЕМ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В настоящей главе для весьма широкого класса T-пространств над полем нулевой характеристики доказывается их конечная порожденность как kT-модулей. Предварительно рассматривается ряд важных примеров.

Теорема 1.1. *Пусть F/I — относительно свободная алгебра, причем T-идеал I содержит некоторый стандартный многочлен* (*или, что равносильно, многочлен Капелли*). *Тогда F/I — нетеров kT-модуль.*

Из этой теоремы следует конечная базируемость T-идеалов, содержащих многочлен Капелли, а также многих других конкретных T-пространств, например T-пространства многочленов из алгебры F, принимающих значения в центре некоторой алгебры, удовлетворяющей тождеству Капелли. Ясно, что утверждение теоремы равносильно утверждению о конечной базируемости любого T-пространства в алгебре F/I.

1.1. Основные определения, предложения и примеры

I. *Матричные T-пространства.* Пусть k_r — алгебра $(r \times r)$-матриц, M_r — T-идеал тождеств алгебры k_r в алгебре F и $\mathrm{GM}(r, X) \cong F/M_r$ — алгебра общих $(r \times r)$-матриц, обычным образом вложенная в алгебру $k[X]_r$, т. е. алгебру $(r \times r)$-матриц над кольцом (с единицей) коммутативных многочленов $k[X]$ от счетного множества переменных $X = \{x_i^{(\alpha,\beta)} \mid 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant r,\ i = 1, 2, \ldots\}$, $\bar{x}_i = \sum x_i^{(\alpha,\beta)} e_{\alpha\beta}$, где $e_{\alpha\beta}$ — матричные единицы алгебры k_r, $\bar{x}_i$ — образ переменной x_i (см. [7]).

Рассмотрим в алгебре $k[X]$ подалгебру $\mathrm{Tr}(r,X)=k[\mathrm{tr}(\mathrm{GM}(r,X))]$, порожденную единицей и следами всех общих матриц, а в алгебре $k[X]_r$ — подалгебру $\mathrm{TrGM}(r,X)$, порожденную алгебрами $\mathrm{GM}(r,X)$, $\mathrm{Tr}(r,X)$ и единичной матрицей. Алгебра $\mathrm{TrGM}(r,X)$ естественным образом наделяется структурой T-пространства. Отметим, что M_1 — это T-идеал, порожденный коммутатором, а M_0 — T-идеал, порожденный одной переменной, т. е. $M_0=F=(x_1,\dots,x_i,\dots)$. Кроме того, при $r=1$ алгебры $\mathrm{TrGM}(1,X)$, $\mathrm{Tr}(1,X)$ и $\mathrm{GM}(1,X)$ совпадают.

Пусть теперь имеется s натуральных чисел $r_1,\dots,r_s$ (не обязательно различных) и s счетных множеств коммутативных переменных $X_1,\dots,X_s$, причем $X_i\cap X_j=\varnothing$, если $i\neq j$. Рассмотрим алгебры $\mathrm{Tr}(r_i,X_i)$ и порожденную ими всеми подалгебру R в алгебре $k[X]$, где $X=\bigcup\limits_{i=1}^{s}X_i$. Алгебры $\mathrm{TrGM}(r_i,X_i)$ можно рассматривать как подалгебры в алгебрах матриц $k[X]_{r_i}$. Пусть $\Phi_i=R\,\mathrm{GM}(r_i,X_i)$ — алгебра, порожденная алгебрами R и $\mathrm{TrGM}(r_i,X_i)$. Ясно, что на алгебре Φ_i корректно вводится T-структура, превращающая алгебры $\mathrm{GM}(r_i,X_i)$ и $\mathrm{TrGM}(r_i,X_i)$ в T-подпространства в алгебре Φ_i.

В дальнейшем будет использоваться следующая R-алгебра, наделенная T-структурой:

$$\Phi(r_1,\dots,r_s)=\Phi_1\oplus\ldots\oplus\Phi_s.$$

II. *Алгебра квазимногочленов.* Пусть $\bar F=F_1^e\oplus\dots\oplus F_s^e$ — прямая сумма алгебр $F_i^e=F_i+ke_i$, где F_i — относительно свободная алгебра, e_i — формально присоединенная к алгебре F_i единица, если F_i не является алгеброй общих матриц, или соответствующая единичная матрица в противном случае, $\bar x_i=x_i^{(1)}+\ldots+x_i^{(s)}$, где $x_i^{(\alpha)}$ — образ переменной x_i в алгебре F_i, $k\langle\theta_1,\dots,\theta_i,\dots\rangle$ — свободная счетно порожденная ассоциативная алгебра.

Назовем *алгеброй $\bar F$-квазимногочленов с коэффициентами в поле k* следующее свободное произведение над k:

$$Q(\bar F)=\bar F*_k k\langle\theta_1,\dots,\theta_i,\dots\rangle.$$

В алгебре $Q(\bar F)$ каждый элемент (квазимногочлен) является линейной комбинацией выражений следующего вида (квазиодночленов):

$$u_0\theta_{i_1}u_1\ldots\theta_{i_n}u_n, \tag{1.1}$$

где u_i — одночлен из одной из алгебр $F_1,\dots,F_s$ или одна из единиц $e_1,\dots,e_s$. Число n назовем θ-степенью квазиодночлена (1.1), а число $n+\sum\limits_{i=0}^{n}\deg u_i$ — степенью этого квазиодночлена. Очевидным образом определяются θ-степень и степень любого квазимногочлена из $Q(\bar F)$.

Скажем, что переменная x_i входит в квазиодночлен (1.1) в степени $m=p+q$, если суммарная степень вхождения образов переменной x_i в одночлены $u_0,\dots,u_n$ равна p, а среди элементов $\theta_{i_1},\dots,\theta_{i_n}$ ровно q совпадают с θ_i. В силу однородности по каждой переменной соотношений в алгебре $Q(\bar F)$ это определение корректно переносится на любые ненулевые квазимногочлены, однородные по x_i.

Обозначим через $\Theta(\bar F)$ идеал алгебры $Q(\bar F)$, порожденный всеми элементами θ_i. Пространство, порожденное всеми одночленами θ-степени n, очевидным образом отождествляется с фактор-алгеброй $Q_n(\bar F)=\Theta(\bar F)^n/\Theta(\bar F)^{n+1}$; при этом $\Theta(\bar F)^0=Q(\bar F)$, $Q_0(\bar F)=\bar F$.

Положим $x_i=\bar x_i+\theta_i$. Ясно, что элементы x_i порождают свободную ассоциативную алгебру, являющуюся подалгеброй алгебры $Q(\bar F)$, и мы имеем вложение алгебры $F=k\langle x_1,\dots,x_i,\dots\rangle$ в алгебру $Q(\bar F)$. Введем действие полугруппы T на алгебре $Q(\bar F)$ таким образом, чтобы оно продолжало уже имеющееся действие этой полугруппы на алгебрах F и $\bar F$. Ясно, что достаточно определить это действие на элементах θ_i. Пусть τ — подстановка типа $x_i\mapsto g_i$. Положим

$$\theta_i^\tau=x_i^\tau-\bar x_i^\tau=g_i(x_1,\dots,x_d)-g_i(\bar x_1,\dots,\bar x_d),$$

т. е. θ_i^τ — это $g_i(x_1,\dots,x_d)$ без компоненты θ-степени нуль. Из этого определения действия полугруппы T следует, что идеал $\Theta(\bar F)$ и все его степени являются T-идеалами алгебры $Q(\bar F)$.

III. *Алгебра матричных квазимногочленов.* Рассмотрим теперь алгебру $\Phi(r_1,\dots,r_s)$-квазимногочленов с коэффициентами в поле k, обозначаемую через $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$, с действием полугруппы T, аналогичным введенному выше: $\theta_i^\tau=x_i^\tau-\bar x_i^\tau$.

Имеется аналогичное разложение квазимногочленов из $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$ на квазиодночлены (1.1) и вводятся понятия степени, θ-степени и степени вхождения переменной x_i в квазиодночлен (1.1), идеалов $(\Theta(\Phi(r_1,\dots,r_s)))^m$ и T-пространств $Q_n(\Phi(r_1,\dots,r_s))$. Ясно, что при $\bar{F} = \mathrm{GM}(r_1,X_1)^e\oplus\ldots\oplus\mathrm{GM}(r_s,X_s)^e$ алгебра квазимногочленов $Q(\bar{F})$ является T-подалгеброй в $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$, причем объекты типа Θ^m, Q_n первой алгебры являются T-подпространствами аналогичных объектов второй алгебры.

Особую роль играет алгебра квазимногочленов $Q(\mathrm{GM}(r,X)^e)$, которая, по сути дела, и рассматривалась в [7] и [8], где доказано следующее утверждение, связанное с включением $\bar{F}\subset Q(\mathrm{GM}(r,X)^e)$.

Предложение 1.1. $F\cap(\Theta(\mathrm{GM}(r,X)^e))^m = M_r^m$.

Доказательство в разделе 1.2.

Следствие 1.1. F/M_r^m — *T-подпространство в* $Q(\mathrm{GM}(r,X)^e)/(\Theta(\mathrm{GM}(r,X)^e))^m$.

Следствие 1.2. M_r^n/M_r^{n+1} — *T-подпространство в* $Q_n(\mathrm{GM}(r,X)^e)$.

IV. *Алгебра матричных квазимногочленов со следом.* Пусть теперь

$$R = k[\mathrm{Tr}(r_1,X_1),\dots,\mathrm{Tr}(r_s,X_s)]—$$

введенная выше алгебра следов. Рассмотрим R-алгебру

$$Q^R(\Phi(r_1,\dots,r_s)) = \Phi(r_1,\dots,r_s) *_R R\langle\theta_1,\dots,\theta_i,\dots\rangle,$$

на которой аналогично предыдущему вводятся понятия степени, θ-степени, действие полугруппы T, T-пространства $\Theta^R(\Phi(r_1,\dots,r_s))^m$, $Q_n^R(\Phi(r_1,\dots,r_s))$. Отличие алгебры $Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))$ от алгебры $Q^R(\Phi(r_1,\dots,r_s))$ состоит в том, что в последней следы коммутируют с элементами θ_i.

Сопоставим каждому квазимногочлену первой алгебры точно такое же полиномиальное выражение от элементов $x_i^{(j)}$, θ_i и следов из алгебры R, но рассматриваемое уже во второй алгебре. Ясно, что такое сопоставление задает сюръективный гомоморфизм

$$\pi\colon Q(\Phi(r_1,\dots,r_s))\to Q^R(\Phi(r_1,\dots,r_s)).$$

V. *Полное пространство квазимногочленов θ-степени n.* Пусть $\bar{F} = F^{(1)}\oplus F^{(2)}$, где $F^{(1)} = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i^e$, $F^{(2)} = \bigoplus_{i=1}^{q} F_{p+i}^e$, а F_i — относительно свободные алгебры. Произвольный элемент из T-пространства $Q_n(F^{(1)})$ является линейной комбинацией выражений (1.1), где u_i — одночлен одной из алгебр $F_1^e,\dots,F_p^e$. Но точно такие же линейные комбинации образуют, очевидно, T-подпространство в пространстве $Q_n(\bar{F})$. Таким образом, можно говорить о вложении в качестве T-подпространств $Q_n(F^{(1)})$ и $Q_n(F^{(2)})$ в T-пространство $Q_n(\bar{F})$. Это позволяет рассмотреть T-пространство $Q_n = \varinjlim Q_n(\bar{F})$, где индуктивный предел берется по всем конечным прямым суммам $\bigoplus_{i=1}^{s} F_i^e$. Все рассматриваемые ниже T-пространства $Q_n(\bar{F})$ удобно считать погруженными в Q_n.

VI. *Элементарные пространства.* Пусть $F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e$ — алгебры из числа прямых слагаемых $F_1^e,\dots,F_s^e$, составляющих алгебру $\bar{F}$ (числа $i_0,\dots,i_n$ не обязательно попарно различны, и не обязательно среди них есть все натуральные числа от 1 до s). Назовем *блочным пространством* следующее T-подпространство пространства $Q_n(\bar{F})$:

$$Q_n\langle F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e\rangle = \bigoplus_{(j_1,\dots,j_n)} F_{i_0}^e\theta_{j_1}F_{i_1}^e\dots\theta_{j_n}F_{i_n}^e.$$

Из определения следует, что $Q_n(\bar{F})$ является конечной прямой суммой блочных пространств, т. е.

$$Q_n(\bar{F}) = \bigoplus_{(i_0,\dots,i_n)} Q_n\langle F_{i_0}^e,\dots,F_{i_n}^e\rangle.$$

Пусть $V_{i_0}, \ldots, V_{i_n}$ — T-идеалы в алгебрах $F_{i_0}^e, \ldots, F_{i_n}^e$ (возможно, совпадающие с F_{i_α} или $F_{i_\alpha}^e$). Ясно, что пространство

$$Q_n\langle V_{i_0}, \ldots, V_{i_n}\rangle = \bigoplus_{(j_1,\ldots,j_n)} V_{i_0}\theta_{j_1}V_{i_1}\ldots\theta_{j_n}V_{i_n},$$

которое мы назовем *элементарным*, является T-подпространством соответствующего блочного пространства. Всякое блочное пространство по определению является элементарным. Обозначим через $Q_n\langle F_{i_0}^e, \ldots, F_{i_n}^e\rangle(d)$ линейное подпространство в $Q_n\langle F_{i_0}^e, \ldots, F_{i_n}^e\rangle$, порожденное квазиодночленами, зависящими только от переменных $x_1, \ldots, x_d$. Аналогичным образом определяются линейные подпространства $Q_n\langle V_{i_0}, \ldots, V_{i_n}\rangle(d)$. Идеалы V_{i_α} будем называть *компонентами элементарного пространства* $Q_n\langle V_{i_0}, \ldots, V_{i_n}\rangle$.

Дословно так же вводятся блочные пространства $Q_n(\Phi_{i_0}, \ldots, \Phi_{i_n})$ и $Q_n^R(\Phi_{i_0}, \ldots, \Phi_{i_n})$ и их подпространства

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle$$

и

$$V^R = Q_n^R\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle,$$

а также их аналоги типа $V(d)$, $V^R(d)$.

Назовем *элементарным матричным пространством* элементарное пространство вида

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e\rangle,$$

где $\mathrm{GM}(r, X)$ при $r \geqslant 2$ — алгебра общих матриц, при $r = 1$ — алгебра коммутативных многочленов, а при $r = 0$ — одна из алгебр с нулевым умножением вида

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots)^m/(x_1, \ldots, x_i, \ldots)^{m+1},$$

вложенная произвольным образом в алгебру F/F^2. Это вложение нужно только для того, чтобы находиться в рамках основного определения: все идеалы V_α лежат в соответствующих относительно свободных алгебрах (согласовывать умножения не нужно: они нулевые).

Отметим, что $\mathrm{GM}(0, X)(d)$ — конечномерная алгебра вида

$$(x_1, \ldots, x_d)^m/(x_1, \ldots, x_d)^{m+1}$$

и фактор-алгебра $k\langle x_1, \ldots, x_d\rangle/(x_1, \ldots, x_d)^l$ фильтруется идеалами

$$(x_1, \ldots, x_d)^m/(x_1, \ldots, x_d)^l,$$

где $0 \leqslant m < l$, причем ассоциированные с этой фильтрацией факторы имеют вид $\mathrm{GM}(0, X)(d)$.

Напомним, что *сложностью* $r(F_{i_\alpha})$ относительно свободной алгебры F_{i_α} называется сложность многообразия $\mathrm{Var}(F_{i_\alpha})$, которая является таким числом r, что $k_r \in \mathrm{Var}(F_{i_\alpha})$, но $k_{r+1} \notin \mathrm{Var}(F_{i_\alpha})$. Сложность нильпотентной алгебры по определению равна нулю. Назовем *сложностью* блочного пространства W максимум $r(W)$ всех сложностей $r(F_{i_\alpha})$ составляющих это пространство компонент.

Назовем *сложностью* элементарного матричного пространства $V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0}), \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})\rangle$ число $r(V)$, равное максимуму всех чисел r_{i_α}.

Назовем T-подпространство в $Q_n(F)$ *ограниченным*, если оно порождено системой квазимногочленов от конечного набора переменных $x_1, \ldots, x_d$ (которые могут реализовываться как $\bar{x}_i$ или как θ_i).

В силу того что T-идеал I, фигурирующий в формулировке основного результата, содержит стандартный многочлен (или многочлен Капелли), он, как хорошо известно, содержит идеал M_r^m для некоторых m и r. По тем же причинам любое T-пространство в алгебре F/I порождается многочленами от конечного множества переменных $x_1, \ldots, x_d$.

Так как T-пространство $Q_n(\mathrm{GM}(r, X))$, содержащее T-подпространство M_r^n/M_r^{n+1} (см. предложение 1.1 и следствие 1.2), является элементарным, то для доказательства основного результата достаточно доказать, что любое ограниченное T-подпространство в элементарном матричном пространстве конечно базируемо.

Предложение 1.2. *Если множества $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ попарно различны, то ограничение отображения π (см. п.* IV) *на T-пространство V является изоморфизмом T-пространств V и V^R.*

Доказательство в разделе 1.2.

Предложение 1.2 позволяет использовать следующую схему для доказательства конечной базируемости T-пространств. Ясно, что достаточно доказать конечную базируемость любого T-пространства в $V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle$, где $X_{i_\alpha} \neq X_{i_\beta}$ при $\alpha \neq \beta$, так как имеется сюръективный морфизм его на аналогичное T-пространство с повторяющимися множествами X_{i_α}. Согласно предложению 1.2 это T-пространство изоморфно соответствующему T-пространству V^R, которое лежит в $Q_n^R\langle \Phi_{i_0}, \ldots, \Phi_{i_n}\rangle$. В последнем уже можно эффективно использовать технику следов.

Предложение 1.3. *Пусть $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}$ — образы переменных $x_1, \ldots, x_{r^2}, y$ алгебры F в алгебре общих матриц* $\mathrm{GM}(r, X)$. *Тогда*

$$\operatorname{tr}\bar{y}\operatorname{tr}\bar{x}_1 \ldots \operatorname{tr}\bar{x}_{r^2} \in \{\operatorname{tr}\bar{x}_1, \operatorname{tr}\bar{x}_1\operatorname{tr}\bar{x}_2, \ldots, \operatorname{tr}\bar{x}_1 \ldots \operatorname{tr}\bar{x}_{r^2}\}^T.$$

Доказательство этого предложения (см. раздел 1.2) основано на одном важном свойстве многочленов Капелли c_n, т. е. многочленов из алгебры F вида

$$c_n(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \ldots x_{\sigma(n)} y_n.$$

Хорошо известно (см. [39, с. 25]) следующее свойство многочленов Капелли: в алгебре $\mathrm{TrGM}(r, X)$ имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{r^2} c_{r^2}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i\bar{z}, \ldots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{r^2}) = r\operatorname{tr}\bar{z}c_{r^2}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{r^2}). \tag{1.2}$$

Следствие 1.3. *T-пространство $k[\operatorname{tr}(\mathrm{GM}(r, X))]$ порождается элементами*

$$\operatorname{tr}\bar{x}_1,\ \operatorname{tr}\bar{x}_1\operatorname{tr}\bar{x}_2, \ldots,\ \operatorname{tr}\bar{x}_1 \ldots \operatorname{tr}\bar{x}_{r^2}.$$

VII. *Пространства Капелли.* Пусть $r \geqslant 2$ и $C(r, X)$ — T-идеал в алгебре $\mathrm{GM}(r, X)$, порожденный многочленом Капелли c_{r^2} (идеал Капелли). Хорошо известно (см. [39]), что этот идеал отличен от нуля и относительно свободная алгебра $\mathrm{GM}(r, X)/C(r, X)$ накрывается (в силу нильпотентности ее радикала, доказанной в [27]) алгеброй F/M_{r-1}^m для некоторого m. Назовем *пространством Капелли* в элементарном пространстве $Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle$ его T-подпространство, имеющее вид $V = Q_n\langle V_0, \ldots, V_n\rangle$, где V_α — это T-идеал $C(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$ алгебры $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$ (в случае $r_{i_\alpha} \geqslant 2$) или алгебра $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})^e$. Заметим, что элементарное пространство является частным случаем пространства Капелли (когда все V_α совпадают с алгебрами $\mathrm{GM}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})^e$).

VIII. *Пространства Размыслова.* В [21] Ю. П. Размыслов построил центральный многочлен λ_r алгебры $\mathrm{GM}(r, X)$, который обладает свойством, аналогичным свойству (1.2):

$$\sum_{i=1}^{r^2} \lambda_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i\bar{z}, \ldots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r^2-1}) = r\operatorname{tr}\bar{z}\lambda_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{r^2}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r^2-1}). \tag{1.3}$$

Пусть $r \geqslant 2$ и $P(r, X)$ — T-идеал алгебры $\mathrm{GM}(r, X)$, порожденный многочленом Размыслова λ_r (*T-идеал Размыслова*). Для дальнейших целей этот T-идеал более удобен, чем T-идеал Капелли, так как в силу (1.3) имеет место включение

$$\mathrm{Tr}(r, X)\lambda_r \subset \mathrm{Tr}(r, T) \cap P(r, X).$$

При $r = 1$ в качестве λ_1 можно взять любую переменную x_i, и тогда $P(1, X)$ — идеал в алгебре коммутативных многочленов, порожденный всеми переменными.

Рассмотрим теперь элементарное пространство

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle,$$

и кольцо R, которое можно считать порожденным только кольцами $\mathrm{Tr}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$, отвечающими компонентам пространства V, где $r_\alpha \geqslant 1$.

Ясно, что при надлежащей перенумерации достаточно рассмотреть элементарное пространство вида

$$V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e\rangle,$$

где $X_i \neq X_j$ при $i \neq j$. Учитывая, что все множества X_i попарно различны, можно считать, что V — T-подпространство в $Q_n^R(\Phi(r_0, \ldots, r_n))$.

Назовем *пространством Размыслова с кратностями* μ_i T-подпространство в V, имеющее вид $P = Q_n(V_0, \ldots, V_n)$, где либо V_i — это T-идеал $P^{\mu_i}(r_i, X_i)$ алгебры $\mathrm{GM}(r_i, X_i)$ (в случае $r_i \geqslant 1$), либо $V_i = \mathrm{GM}(0, X_i)$.

В силу соотношений (1.2) и (1.3) пространства C и P устойчивы относительно умножения на элементы кольца R. Так же, как и в случае идеала Капелли, и по аналогичным причинам идеал Размыслова обладает следующим свойством: для любого натурального μ относительно свободная алгебра $\mathrm{GM}(r, X)/P^\mu(r, X)$ накрывается относительно свободной алгеброй F/M_{r-1}^m для некоторого m.

Пусть $\bar{V}$ — блочное пространство, отличающееся от V тем, что на некоторых выделенных компонентах, для которых r_i — положительные числа, вместо алгебр $\mathrm{GM}(r_i, X_i)$ стоят алгебры $\mathrm{GM}(r_i, X_i)/P^{\mu_i}(r_i, X_i)$. Обозначим через Δ подмножество в $\{0, 1, \ldots, n\}$, состоящее из номеров этих выделенных компонент.

Рассмотрим морфизм T-пространств $\varphi\colon V \to \bar{V}$, индуцированный каноническими гомоморфизмами алгебр

$$\varphi_i\colon \mathrm{GM}(r_i, X_i) \to \mathrm{GM}(r_i, X_i)/P^{\mu_i}(r_i, X_i).$$

Ясно, что

$$\operatorname{Ker}\varphi = \sum Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \ldots, P^{\mu_i}(r_i, X_i), \ldots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e\rangle,$$

где суммирование ведется по всем i из Δ.

С другой стороны, в силу наличия сюръективных гомоморфизмов относительно свободных алгебр

$$\psi_i\colon F^e/M_{s_i}^{m_i} \to \mathrm{GM}(r_i, X_i)^e/P^{\mu^i}(r_i, X_i),$$

где $s_i = r_i - 1$, если $r_i \geqslant 1$, $m_0, \ldots, m_n$ — некоторые натуральные числа, имеется сюръективный морфизм T-пространств

$$\psi\colon V' = Q_n\langle F^e/I_0, \ldots, F^e/I_n\rangle \to \bar{V},$$

где I_α совпадает с $M_{s_\alpha}^{m_\alpha}$, если $\alpha \in \Delta$, и $I_\alpha = M_{s_\alpha}^{m_\alpha}$ в противном случае.

Заметим, что вопросы о конечной базируемости T-пространств в V' очевидным образом с помощью рассмотрения факторов $M_{s_\alpha}^i/M_{s_\alpha}^{i+1}$ сводятся к аналогичным вопросам в конечном наборе элементарных матричных пространств, связанных с V', имеющих на выделенных компонентах сложность, меньшую сложности исходных выделенных компонент. Это обстоятельство является весьма существенным в доказательстве основного результата, где используется, в частности, индукция по так называемому типу $\tau(V)$. Индукция проводится с помощью введенного выше морфизма φ, называемого *понижающим морфизмом по набору выделенных компонент с кратностями* μ_i.

IX. *Лемма Артина—Риса.* Будем отождествлять пространства V и V^R (согласно предложению 1.2) и рассматривать $V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_{i_0}, X_{i_0})^e, \ldots, \mathrm{GM}(r_{i_n}, X_{i_n})^e\rangle$ как T-подпространство T-пространства RV. Зафиксируем некоторое натуральное число d, для которого любое T-пространство, фигурирующее в формулировке основного результата, порождено многочленами от d переменных. Обозначим через $R(d)$ подалгебру алгебры R, порожденную следами, зависящими только от $x_1, \ldots, x_d$. Для любой алгебры $\mathrm{GM}(r_i, X_i)$, где $r_i \geqslant 1$, рассмотрим идеал p_i алгебры $R(d)$ вида $p_i = P(r_i, X_i) \cap R(d)$.

Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — все такие идеалы (здесь $k \leqslant n + 1$). Будем называть их *коммутативными идеалами Размыслова алгебры* $R(d)$, *ассоциированными с пространством* V.

Рассмотрим нетеров $R(d)$-модуль $E = R(d)V(d)$ (его нетеровость следует из стандартных соображений, использующих тождества типа Гамильтона—Кэли и теорему Ширшова о высоте), некоторый его подмодуль M и идеал I алгебры $R(d)$. Согласно лемме Артина—Риса (см. [26]) для всех натуральных чисел m, начиная с некоторого, имеет место равенство

$$I^{m+1}E \cap M = I(I^m E) \cap M).$$

Наименьшее из натуральных чисел, начиная с которого справедливо это равенство, будем называть *показателем Артина—Риса пары* (I, M).

В разделе 1.3 в качестве идеала I рассматривается $p = p_1, \dots, p_k$.

X. *Унитарный принцип.* В дальнейшем будет использоваться следующий факт, называемый нами *унитарным принципом*.

Пусть S — некоторое множество квазимногочленов, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_d$, и g — квазимногочлен из T^*-пространства S^{T^*}, в который входят еще и дополнительные переменные $x_{d+1}, \dots, x_{d+c}$. Тогда квазимногочлен $g|_{x_{d+1}=\dots=x_{d+c}=1}$ принадлежит T^*-пространству S^T.

Специализация переменной $x_i = \bar{x}_i + \theta_i$ в единицу означает замену $\bar{x}_i$ на e, а θ_i на 0.

1.2. Доказательство предложений 1.1—1.3

I. *Доказательство предложения* 1.1. Ясно, что без ограничений общности можно считать, что k — алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над $\mathbb{Q}$ (например, $k = \mathbb{C}$). Согласно результатам Левина [36] алгебра F/M_r^m представима и многообразие, заданное T-идеалом M_r^m, порождается конечномерной алгеброй A вида

$$A = (k_r \oplus \ldots \oplus k_r) + N,$$

где N — нильпотентный идеал: $N^m = 0$. Пусть $k[\{x_i^{(j)}, y_i^{(j)}\}]$ — алгебра коммутативных многочленов от счетного множества переменных $\{x_i^{(j)}, y_i^{(j)}\}$ и $A^* = k(\{x_i^{(j)}, y_i^{(j)}\}) \otimes_k A$ — конечномерная алгебра над полем $k(\{x_i^{(j)}, y_i^{(j)}\})$, имеющая, очевидно, те же тождества над k, что и алгебра A. Рассмотрим в алгебре A^* подалгебру общих элементов вида

$$x_i^* = \sum x_i^{(j)} \otimes e_j + \sum y_i^{(j)} \otimes \tau_j,$$

где e_j — базис над k пространства $k_r \oplus \ldots \oplus k_r$, τ_j — базис пространства N, $k\langle x_1^*, \dots, x_i^* \dots\rangle = F/M_r^m$.

Пусть $L = k\langle\{\sum x_i^{(j)} \otimes e_j\}, \{\sum y_i^{(j)} \otimes \tau_j\}\rangle$ — подалгебра в A^*, порожденная первым и вторым слагаемыми элементов x_i^*, и

$$\varphi\colon Q(\mathrm{GM}(r, X))/(\Theta(\mathrm{GM}(r, X)))^m \to L\,—$$

сюръективный гомоморфизм алгебр, задаваемый соответствием $\bar{x}_i \to \sum x_i^{(j)} \otimes e_j$, $\theta_i \to \sum y_i^{(j)} \otimes \tau_j$. Пусть $f \in F \cap (\Theta(\mathrm{GM}(r, X)))^m$. Тогда образ f относительно композиции канонического гомоморфизма и гомоморфизма φ равен нулю. Следовательно, $f = 0$ — тождество алгебры A. Но по самому выбору алгебры A в нуль на ней обращаются те и только те многочлены из алгебры F, которые лежат в M_r^m. Следовательно, $F \cap (\Theta(\mathrm{GM}(r, X)))^m \subset M_r^m$. Обратное включение очевидно. Предложение доказано.

II. *Доказательство предложения* 1.2. Обозначим алгебру $\mathrm{TrGM}(r_{i_\alpha}, X_{i_\alpha})$ через $\tilde{\Phi}_{i_\alpha}$ (напомним, что $\Phi_i = R\,\mathrm{GM}(r_i, X_i)$, см. раздел 1.1, п. I). Морфизм π индуцирует морфизмы T-пространств

$$\pi\colon Q_n\langle\Phi_{i_0}, \dots, \Phi_{i_n}\rangle \to Q_n^R\langle\Phi_{i_0}, \dots, \Phi_{i_n}\rangle,$$
$$\tilde{\pi}\colon Q_n\langle\tilde{\Phi}_{i_0}, \dots, \tilde{\Phi}_{i_n}\rangle \to Q_n^R\langle\Phi_{i_0}, \dots, \Phi_{i_n}\rangle.$$

Ясно, что достаточно доказать, что $\tilde{\pi}$ — инъективный морфизм T-пространств, т. е. что $\operatorname{Ker}\tilde{\pi} = \operatorname{Ker}\pi \cap Q_n\langle\tilde{\Phi}_{i_0}, \dots, \tilde{\Phi}_{i_n}\rangle = 0$, а этот вопрос сводится к аналогичному вопросу для подпространств

$\tilde{\Phi}_{i_0}\theta_{j_1}\tilde{\Phi}_{i_1}\ldots\theta_{j_n}\tilde{\Phi}_{i_n}$ в T-пространствах $Q_n\langle\tilde{\Phi}_{i_0},\ldots,\tilde{\Phi}_{i_n}\rangle$ и $Q_n^R\langle\tilde{\Phi}_{i_0},\ldots,\tilde{\Phi}_{i_n}\rangle$ соответственно (не являющихся, очевидно, T-подпространствами). Интерпретируя рассматриваемые подпространства как тензорные произведения, получаем k-линейное отображение

$$\pi\colon \Phi_{i_0}\otimes_k\ldots\otimes_k\Phi_{i_n}\to\Phi_{i_0}\otimes_R\ldots\otimes_R\Phi_{i_n}$$

и его ограничение

$$\tilde{\pi}\colon \tilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\ldots\otimes_k\tilde{\Phi}_{i_n}\to\Phi_{i_0}\otimes_R\ldots\otimes_R\Phi_{i_n}.$$

Нужно доказать, что $\operatorname{Ker}\pi\cap\tilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\ldots\otimes_k\tilde{\Phi}_{i_n}=0$.

Для удобства доказательства введем следующую терминологию. Элемент $f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n$ из пространства $\Phi_{i_0}\otimes_k\Phi_{i_1}\otimes_k\ldots\otimes_k\Phi_{i_n}$ будем называть *правильным по α-й компоненте* тензорного произведения, если при $\beta\neq\alpha$ элемент f_β не зависит от переменных множества X_{i_α}. Линейные комбинации над полем k таких элементов также будем называть *правильными по α-й компоненте*. Правильные по всем компонентам элементы и только они, очевидно, составляют пространство $\tilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\ldots\otimes_k\tilde{\Phi}_{i_n}$.

Подпространство $\operatorname{Ker}\pi$ в пространстве $\Phi_{i_0}\otimes_k\ldots\otimes_k\Phi_{i_n}$, как нетрудно заметить, порождается над полем k элементами следующих $n+1$ типов:

$$b_0=a_{00}f_0\otimes a_{01}f_1\otimes\ldots\otimes a_{0n}f_n-a_{00}a_{01}\ldots a_{0n}f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n,$$

где $a_{00},a_{01},\ldots,a_{0n}$ — однородные элементы из алгебры $\operatorname{Tr}(r_{i_0},X_{i_0})=k[\operatorname{tr}(\mathrm{GM}(r_{i_0},X_{i_0}))]$, $f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n$ — правильный по 0-й компоненте элемент, а первое слагаемое элемента b_0 не является правильным по 0-й компоненте тензорного произведения (хотя бы один из элементов $a_{00},a_{01},\ldots,a_{0n}$ не является константой из поля k);

$$b_1=a_{10}f_0\otimes a_{11}f_1\otimes\ldots\otimes a_{1n}f_n-f_0\otimes a_{10}a_{11}\ldots a_{1n}f_1\otimes\ldots\otimes f_n,$$

где $a_{10},a_{11},\ldots,a_{1n}$ — однородные элементы из алгебры $\operatorname{Tr}(r_{i_1},X_{i_1})$, $f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n$ — правильный по 0-й, 1-й компоненте элемент, b_1 — правильный по 0-й компоненте элемент, а его первое слагаемое не является правильным по 1-й компоненте;

. . .

$$b_\alpha=a_{\alpha0}f_0\otimes a_{\alpha1}f_1\otimes\ldots\otimes a_{\alpha\alpha}f_\alpha\otimes a_{\alpha n}f_n-f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes a_{\alpha1}\ldots a_{\alpha n}f_\alpha\otimes\ldots\otimes f_n,\tag{1.4}$$

где $a_{\alpha0},\ldots,a_{\alpha n}$ — элементы из алгебры $\operatorname{Tr}(r_{i_\alpha},X_{i_\alpha})$, $f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n$ — правильный по 0-й, 1-й,..., α-й компонентам элемент, b_α — правильный по 0-й, 1-й,..., $(\alpha-1)$-й компонентам элемент, а его первое слагаемое не является правильным по α-й компоненте;

. . .

$$b_n=a_{n0}f_0\otimes a_{n1}f_1\otimes\ldots\otimes a_{nn}f_n-f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes a_{n0}\ldots a_{nn}f_n,$$

где $a_{n0},a_{n1},\ldots,a_{nn}$ — элементы из алгебры $\operatorname{Tr}(r_{i_n},X_{i_n})$, $f_0\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n$ — правильный по всем компонентам элемент, b_n — правильный по 0-й, 1-й,..., $(n-1)$-й компонентам элемент, а его первое слагаемое не является правильным по n-й компоненте.

В самом деле, ясно, что элементы типов $b_0,\ldots,b_n$ лежат в пространстве $\operatorname{Ker}\pi$. С другой стороны, очевидно, что любая «переброска следов» через элементы θ_i (а именно такими «перебросками» порождается пространство $\operatorname{Ker}\pi$) может быть получена как сумма «перебросок следов» типов $b_0,\ldots,b_n$ (по модулю этих соотношений любой элемент сравним с правильным по всем компонентам элементом).

Первые слагаемые элементов b_α обозначим через $p(b_\alpha)$, а вторые — через $c(b_\alpha)$. Заметим, что если некоторая линейная комбинация элементов типов $b_0,b_1,\ldots,b_n$ лежит в $\tilde{\Phi}_{i_0}\otimes_k\ldots\otimes_k\tilde{\Phi}_{i_n}$, то ее часть, составленная только из элементов типа b_0, равна нулю. Действительно, пусть $\lambda_1b_0^{(1)}+\ldots+\lambda_sb_0^{(s)}$ — рассматриваемая часть линейной комбинации. Тогда ясно, что $\lambda_1p(b_0^{(1)})+\ldots+\lambda_sp(b_0^{(s)})=0$, так как остальные элементы линейной комбинации являются правильными по 0-й компоненте и, следовательно, не могут «уничтожить» элементы $p(b_0^{(i)})$. Но тогда в силу самой конструкции элементов b_k имеет место равенство $\lambda_1c(b_0^{(1)})+\ldots+\lambda_sc(b_0^{(s)})=0$, т. е. $\lambda_1b_0^{(1)}+\ldots+\lambda_sb_0^{(s)}=0$.

Точно так же последовательно показывается, что элементы типа b_1, типа b_2,..., типа b_n могут давать только нулевой вклад в рассматриваемую линейную комбинацию. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker}\pi \cap \tilde{\Phi}_{i_0} \otimes_k \ldots \otimes_k \tilde{\Phi}_{i_n} = 0$. Предложение доказано.

III. *Доказательство предложения* 1.3. Основным инструментом, используемым в доказательстве, служит соотношение (1.2) из раздела 1.1. Из него очевидным образом следует, что многочлен $\operatorname{tr}\bar{z}_1 \ldots \operatorname{tr}\bar{z}_n \bar{c}_{r^2}$ с точностью до множителя из поля k совпадает с многочленом

$$P_n(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{u \in U} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(r^2)} c_{r^2}(\bar{x}_1 u_{\sigma(1)}, \ldots, \bar{x}_{r^2} u_{\sigma(r^2)}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{r^2}), \tag{1.5}$$

где U — множество наборов $u = (u_1, \ldots, u_{r^2})$, в которых u_i — одночлен от переменных из множества $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n\}$, причем

1) элемент u_i равен произведению $\bar{z}_{i_1} \ldots \bar{z}_{i_m}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m$, или $u_i = 1$;
2) неединичные одночлены из набора зависят от непересекающихся множеств переменных;
3) $\sum\limits_{i=1}^{r^2} \deg u_i = n$.

В левой части равенства (1.5) отмечена зависимость только от переменных $z_1, \ldots, z_n$. Дело в том, что в приводимых ниже рассуждениях существенную роль играют только переменные $\bar{z}$, $\bar{z}_i$, и поэтому на зависимость рассматриваемых многочленов от остальных переменных мы не будем обращать внимания.

Пусть теперь $u = (u_1, \ldots, u_{r^2})$ — произвольный набор одночленов от переменных $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ (некоторые из u_i могут быть равны единице). Положим

$$S(u) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(r^2)} c_{r^2}(\bar{x}_1 u_{\sigma(1)}, \ldots \bar{x}_{r^2} u_{\sigma(r^2)}, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{r^2}).$$

Тогда (1.5) можно переписать в виде

$$P_n(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{u \in U} S(u). \tag{1.6}$$

Обозначим через V_n подпространство в алгебре $\mathrm{GM}(r, X)$, порожденное всевозможными многочленами $S(u)$, в которых набор $u = (u_1, \ldots, u_{r^2})$ удовлетворяет условию: элемент u_i равен произведению $z_{i_1} \ldots z_{i_m}$ (не требуется, чтобы $i_1 < \ldots < i_m$) или единице, а также условиям 2) и 3), приведенным выше.

Рангом набора u назовем количество $\rho(u)$ его неединичных компонент. Ясно, что $1 \leqslant \rho(u) \leqslant r^2$.

Для любого натурального числа l обозначим через $V_{n,l}$ подпространство в V_n, порожденное многочленами $S(u)$, у которых $\rho(u) \leqslant l$. Легко видеть, что если $2 \leqslant l \leqslant r^2$, $\rho(u) = l$ и $u_1, \ldots, u_l$ — неединичные одночлены набора u, то многочлен $S(u) - P_l(u_1, \ldots, u_l)$ лежит в подпространстве $V_{n,l-1}$. Это соображение и будет использовано ниже.

Пусть $P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z)$ — многочлен из алгебры $\mathrm{GM}(r, X)$, задаваемый формулой (1.5) и с точностью до множителя из поля k совпадающий с многочленом $\operatorname{tr}\bar{z}_1 \ldots \operatorname{tr}\bar{z}_{r^2} \operatorname{tr}\bar{z}\bar{c}_{r^2}$. В силу (1.6) его можно представить в виде

$$P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z) = \sum_{\rho(u) = r^2} S(u) + \Delta_1,$$

где Δ_1 — линейная комбинация многочленов $S(u)$, в которых $\rho(u) \leqslant r^2 - 1$. Таким образом, в силу сказанного выше для подходящих одночленов u_{ij} разность $d_1 = P_{r^2+1}(z_1, \ldots, z_{r^2}, z) - \sum\limits_i P_{r^2}(u_{i1}, \ldots, u_{ir^2})$ лежит в пространстве V_{r^2+1, r^2-1}. Многочлен d_1 опять имеет вид

$$d_1 = \sum_{\rho(u) = l} \alpha_u S(u) + \Delta_2,$$

где $\alpha_u \in k$, $l \leqslant r^2 - 1$, а Δ_2 — линейная комбинация многочленов $S(u)$, в которых $\rho(u) \leqslant l - 1$. После этого можно составить аналогичную разность d_2 многочлена d_1 и подходящей линейной комбинации выражений $P_l(u_{i1}, \ldots, u_{il})$, которая уже лежит в V_{r^2+1, r^2-2}.

Продолжая таким образом процесс понижения ранга, в итоге получим, что многочлен $P_{r^2+1}(z_1,\ldots,z_{r^2},z)$ есть линейная комбинация выражений $P_n(u_1,\ldots,u_n)$, где u_i — одночлены от $\bar z_1,\ldots,\bar z_{r^2},\bar z$, $1\leqslant n\leqslant r^2$.

Таким образом, многочлен со следом $\operatorname{tr}\bar z_1\ldots\operatorname{tr}\bar z_{r^2}\operatorname{tr}\bar z\bar c_{r^2}$ получается из многочлена со следом $\operatorname{tr}\bar z_1\ldots\operatorname{tr}\bar z_{r^2}\bar c_{r^2}$ с помощью подстановок вместо переменных $\bar z_i$ единицы или одночленов от переменных $\bar z_1,\ldots,\bar z_{r^2},\bar z$ и линейных действий. Учитывая, что многочлен $\bar c_{r^2}$ в алгебре $\mathrm{TrGM}(r,X)$ не является делителем нуля, после сокращения получаем утверждение предложения 1.3.

Замечание 1.1. В доказательстве предложения 1.3 использовался многочлен Капелли c_{r^2}, не связанный непосредственно с формулировкой предложения. Читатель, возможно, найдет более простое доказательство этого предложения, не использующее свойств многочлена c_{r^2}.

1.3. Доказательство основного результата

I. *Символическая степень.* В [7] и [8] было введено понятие *символической степени* квазимногочлена. Оно без труда переносится и на более общую ситуацию, рассматриваемую в настоящей работе.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_d)$ — произвольный однородный степени не меньше t квазимногочлен, зависящий от переменных $x_1,\ldots,x_d$, т. е. в его квазиодночлены входят элементы $x_i^{(j)}$, θ_i и следы от многочленов, содержащих элементы $x_i^{(j)}$, где $i=1,\ldots,d$. Подстановку $f(g_1,\ldots,g_d)$ будем понимать в смысле уже введенной на алгебре квазимногочленов T-структуры. Пусть $z_1,\ldots,z_t$ — переменные алгебры F, отличные от $x_1,\ldots,x_d$.

Обозначим через $Sf(x_1,\ldots,x_d,z_1,\ldots,z_t)$ квазимногочлен, являющийся $(z_1,\ldots,z_t)$-полилинейной частью квазимногочлена

$$f(x_1(1+z_1+\ldots+z_t),\ldots,x_d(1+z_1+\ldots+z_t))$$

(все z_i входят в Sf в первой степени). Пусть $h_1,\ldots,h_t$ — произвольные многочлены из алгебры F. Положим

$$f^{(h_1,\ldots,h_t)}=Sf(x_1,\ldots,x_d,h_1,\ldots,h_t)$$

и назовем квазимногочлен $f^{(h_1,\ldots,h_t)}$ *символической степенью квазимногочлена* f.

Символическая степень обладает рядом очевидных свойств, отмеченных в [7]. Наиболее важным из них является то, что она, очевидно, не выводит за пределы T^*-пространства.

Символическая степень $f^{(h_1,\ldots,h_t)}$ может быть введена еще и с помощью так называемых *α-вставок*.

Элементы $x_i^{(j)}$ и θ_i назовем *Q-специализациями* переменных x_i в алгебре квазимногочленов. Ясно, что всякий квазиодночлен есть произведение в некотором порядке Q-специализаций переменных x_i и еще, в некоторых местах между ними, следов от произведений элементов $x_i^{(j)}$ (представление в виде суммы таких произведений может быть не единственным).

Пусть u — квазиодночлен степени $s>0$, представленный некоторым фиксированным образом в виде такого произведения, $h_1,\ldots,h_t$ — набор многочленов из алгебры F и $\alpha\colon\{1,\ldots,t\}\to\{1,\ldots,s\}$ — некоторое инъективное отображение ($t\leqslant s$).

Назовем *α-вставкой в квазиодночлен u набора* $(h_1,\ldots,h_t)$ квазимногочлен $u^{(\alpha,h_1,\ldots,h_t)}$, определяемый следующим образом. Пусть в представлении квазиодночлена u на местах с номерами $\alpha(1),\ldots,\alpha(t)$ стоят Q-специализации переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_t}$, возможно под знаком следа. Тогда квазимногочлен $u^{(\alpha,h_1,\ldots,h_t)}$ есть результат замены этих t элементов по следующему правилу: если эта Q-специализация имеет вид $x_{i_k}^{(j)}$, то происходит замена на $x_{i_k}^{(j)}g_k^{(j)}$, если же она имеет вид θ_{i_k}, то происходит замена на $x_{i_k}g_k-\bar x_{i_k}\bar g_k$; остальные $s-t$ элементов этого квазиодночлена остаются без изменения. Ясно, что

$$u^{(h_1,\ldots,h_t)}=\sum_{\alpha}u^{(\alpha,h_1,\ldots,h_t)},$$

где суммирование ведется по всем α-вставкам. По линейности это определение можно распространить на любые квазимногочлены.

Замечания 1.2.

1. Ясно, что α-вставка, вообще говоря, зависит от способа записи квазимногочлена. Однако символическая степень, как это видно из первого определения, является корректно заданной операцией. Для конкретных вычислений второй подход к определению символической степени бывает более удобным.

2. Символическую степень можно рассматривать и относительно части переменных, т. е. рассматривать однородный степени не меньше t по переменным $x_1, \dots, x_d$ квазимногочлен $f(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_s)$, по нему строить квазимногочлен $Sf(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t)$, являющийся $(z_1, \dots, z_t)$-полилинейной частью квазимногочлена

$$f(x_1(1 + z_1 + \dots + z_t), \dots, x_d(1 + z_1 + \dots + z_t), y_1, \dots, y_s)$$

и т. д. В этом случае можно использовать обозначение $f^{(h_1,\dots,h_t)_G}$, где $G = \{x_1, \dots, x_d\}$.

II. *Некоторые технические понятия и конструкции в элементарном матричном пространстве.* Всюду ниже рассматривается символическая степень $f \mapsto f^{(h)}$ длины 1 по множеству переменных $x_1, \dots, x_d$. Скажем, что система однородных квазимногочленов S от переменных $x_1, \dots, x_d$ из $V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \dots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e \rangle$ *регулярно конечно базируема*, если в ней существует такая конечная подсистема, что все элементы из S получаются из этой подсистемы с помощью действий в векторном пространстве V, символических степеней $f \mapsto f^{(h)}$ и подстановок вместо переменных, не входящих в множество $x_1, \dots, x_d$, единицы. Указанные действия будем называть *регулярными*. Обозначим через S_{reg} подпространство, получающееся из S с помощью регулярных действий. Скажем, что T-пространство квазимногочленов *регулярно конечно базируемо*, если оно порождается регулярно базируемой системой квазимногочленов.

Основной результат будет доказываться в следующем существенно обобщенном виде.

Теорема 1.2. *Всякая система S из $V(d)$ (и следовательно, всякое ограниченное T-подпространство элементарного матричного пространства $V = Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \dots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e \rangle$) регулярно конечно базируема.*

Для удобства дальнейших рассуждений и обозначений примем следующее соглашение. Будем считать (если противное не оговорено), что все числа r_i положительны. Как будет видно из дальнейшего, это нисколько не ограничивает общности рассмотрений, так как на компонентах нулевой сложности символическая степень действует тривиально, а сами эти компоненты конечномерны, т. е. не существенны при решении вопроса о конечной базируемости. Другими словами, во всех дальнейших рассуждениях, конструкциях и обозначениях на компоненты сложности 0 мы не будем обращать внимания (исключение составляет тривиальная лемма 1.2).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1.2, рассмотрим следующий модельный пример работы с символическими степенями и главными частями при доказательстве основного результата.

Пусть S — система однородных квазимногочленов из пространства $V(d)$ сложности 1, лежащего в Q_1, и по модулю Θ^2 пространство $V(d)$ является суммой пространств вида

$$k[x_1^{(0)}, \dots, x_d^{(0)}]\theta_i k[x_1^{(1)}, \dots, x_d^{(1)}], \quad i = 1, \dots, d.$$

Покажем, что система S конечно базируема относительно линейных действий, действий $f \mapsto f^{(h)}$, где рассматривается символическая степень длины 1 по множеству переменных $\{x_1, \dots, x_d\}$, и специализаций переменных, отличных от $x_1, \dots, x_d$ в 1. Если f — однородный квазимногочлен из $V(d)$, являющийся линейной комбинацией квазиодночленов и $u\theta_i v$, и y — некоторая переменная из алгебры F, отличная от $x_1, \dots, x_d$ (обозначается для удобства другой буквой), то $f^{(y)}$ — точно такая же линейная комбинация выражений

$$u^{(y)}\theta_i v + u(\theta_i v)^{(y)}.$$

Таким образом, $V(d)^{(y)} \subset V_1 + V_2$, где V_2 порождено одночленами вида $u\theta_i v^*$ и $u\theta v$, где v^* содержит y, $y = \bar{y} + \theta$, а пространство V_1 порождено одночленами вида $u^*\theta_i v$, где u^* содержит y. Заметим, что при подстановке $y \mapsto yg$, где g — многочлен от переменных $x_1, \dots, x_d$, элементы $u^*\theta_i v$

и $u\theta_i v^*$ переходят в $u^* g\theta_i v$ и $u\theta_i v^* g$, а элементы $u\theta v$ переходят в $u\theta g v$ плюс некоторый элемент из V_1.

Покажем теперь, что любая система S_2 из V_2 конечно базируема относительно линейных действий и действий $y \mapsto yg$, $f \mapsto f^{(h)}$ с точностью до элементов из V_1. Для этого заметим, что произвольный элемент f из V_2 можно представить в виде $f = p_2(f) + g$, где $p_2(f)$ состоит из квазиодночленов вида $u\theta_i v^*$ и $u\theta v$, у которых одночлен u имеет наивысшую степень (по совокупности переменных $\{x_1, \ldots, x_d\}$, а $g = 0$ или состоит из одночленов с меньшей степенью u. Эту наивысшую степень назовем *шириной* $b_2(f)$ (по первой компоненте) квазимногочлена f.

Ясно, что если $b_2(f) \geqslant 1$, то $p_2(f^{(h)})$ является линейной комбинацией одночленов вида $u^{(h)}\theta_i v^*$ и $u^{(h)}\theta v$. Если же $b_2(f) = 0$, операцию $f^{(h)}$ рассматривать не имеет смысла: на системе таких квазимногочленов достаточно действия $y \mapsto yg$.

Рассмотрим подпространство I в V, порожденное системой S_2 и замкнутое относительно операций $f \mapsto f^{(h)}$ и $y \mapsto yg$. Ясно, что если $b_2(f) \geqslant 1$, то $p_2(f^{(h)})$ с точностью до константы совпадает с hf, а при подстановке $y \mapsto yg$ элемент f с точностью до пространства V_1 переходит в fg. В силу нетеровости получившегося модуля над алгеброй $k[x_1^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}] \otimes [x_1^{(1)}, \ldots, x_d^{(1)}]$ система главных частей $p_2(S_2)$ конечно базируема относительно рассмотренных действий с точностью до V_1.

Таким образом, в пространстве I есть конечная подсистема B, из которой с помощью указанных действий и с точностью до элементов из V_1 можно получить квазимногочлен, совпадающий на главных частях с любым наперед заданным квазимногочленом из I. Составляя соответствующую разность, получаем элемент меньшей ширины. Применяя к этой разности те же действия, мы за конечное число шагов получим нулевую разность, т. е. подсистема B порождает пространство I (так называемая *процедура уменьшения ширины*) с точностью до элементов из V_1.

Для того чтобы найти конечный базис системы $S^{(y)}$, нужно рассмотреть в ней такую конечную подсистему B_2, что ее проекция на V_2 дает конечный базис системы S_2, являющийся проекцией $S^{(y)}$ на V_2. Затем, составляя соответствующие разности элементов из $S^{(y)}$ и элементов, получающихся из подсистемы B_2, получаем подсистему S_1 в V_1. Применяя к системе S_1 действия, аналогичные вышеизложенным, относительно ширины $b_1(f)$ (по второй компоненте v), найдем конечный базис B_1 системы S_1. Ясно, что $B_1 \cup B_2$ — базис системы $S^{(y)}$, а его специализация при $y \mapsto 1$ является конечным базисом системы S.

Перейдем теперь к общему случаю.

Пусть n — некоторое натуральное число. Назовем *расстановкой* набор попарно различных целых неотрицательных чисел $\sigma = (j_1, \ldots, j_q)$, каждое из которых не превосходит n. Имеет смысл рассматривать также и пустую расстановку ($q = 0$). Числа $j_1, \ldots, j_q$ будем называть *активными позициями* квазимногочлена, состоящего из квазиодночленов

$$u = u_0\theta_{i_1}u_1 \ldots \theta_{i_n}u_n,$$

а числа из множества $\{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_q\}$ — *пассивными позициями* этого квазимногочлена.

Назовем *рангом* расстановки σ число $\rho(\sigma) = n+1-q$ (число *пассивных позиций* расстановки σ). Пустая расстановка имеет ранг $n + 1$. Расстановка, у которой все позиции активны, имеет ранг 0.

Скажем, что расстановка σ_1 *предшествует* расстановке σ_2 (обозначение: $\sigma_1 \prec \sigma_2$), если набор σ_1 является проекцией набора σ_2 на первые l компонент, где l — длина набора σ_1.

Каждый квазиодночлен u можно представить в виде $u = u_0^* u_1^* \ldots u_n^*$, где $u_0^* = u_0$, $u_1^* = \theta_{i_1}u_1, \ldots$, $u_n^* = \theta_{i_n}u_n$. Квазиодночлены $u_{j_1}^*, \ldots, u_{j_q}^*$, отвечающие активным позициям, будем называть *активными сомножителями* относительно расстановки σ. Остальные u_j^* будем называть *пассивными сомножителями* относительно σ.

Пусть $\rho(\sigma) \geqslant 1$. Назовем *шириной* квазиодночлена u относительно расстановки σ сумму степеней всех его пассивных сомножителей u_i^*. В случае пустой расстановки ширина квазиодночлена совпадает со степенью этого одночлена. Для расстановок нулевого ранга ширина не определяется.

Шириной квазимногочлена f назовем число $b_\sigma(f)$, равное максимальной из ширин составляющих его одночленов.

Главной частью квазимногочлена f относительно расстановки σ назовем такой квазимногочлен $p_\sigma(f)$, что

$$f = p_\sigma(f) + f_0,$$

где $p_\sigma(f)$ — сумма квазиодночленов ширины $b_\sigma(f)$, а f_0 — сумма одночленов, имеющих меньшую ширину, или нуль. Если σ — пустая расстановка и f — однородный квазимногочлен, то $p_\sigma(f) = f$. Если же σ — расстановка ранга 0, главная часть не определяется.

Назовем квазимногочлен f *σ-однородным*, если $p_\sigma(f) = f$.

Всюду ниже будут рассматриваться символические степени длины 1 по множеству переменных $x_1, \ldots, x_d$. Соответствующие действия на элементах f из пространства V будут записываться в виде $f \mapsto f^{(h)}$, где h — некоторый элемент из алгебры F. Действие такой символической степени на любой квазимногочлен определяется через его действие на квазиодночлены, на которых оно, очевидно, имеет вид

$$u^{(h)} = \sum_{i=0}^{n} u_0^* \ldots (u_i^*)^{(h)} \ldots u_n^*,$$

где $u_0^{(h)} = 0$, если u_0 — константа.

Определим теперь действие символической степени относительно данной расстановки σ. Пусть A_σ — множество всех активных, а Π_σ — множество всех пассивных позиций относительно расстановки σ. При $b_\sigma(u) \geqslant 1$ положим

$$u^{(h)_\sigma} = \sum_{j \in \Pi_\sigma} u_0^* \ldots u_j^{*(h)_\sigma} \ldots u_n^*, \tag{1.7}$$

где $u_0^{(h)_\sigma} = u_0^{(h)}$, если $0 \in \Pi_\sigma$, $u_j^{*(h)_\sigma} = (\theta_{i_j} u)^{(h)}$, если $j-1, j \in \Pi_\sigma$, и $u_j^{*(h)_\sigma} = \theta_{i_j} h u_j + \theta_{i_j} u_j^{(h)}$, если $j \in \Pi_\sigma$, а $j-1 \in A_\sigma$. Если σ — расстановка ранга 0, то символическая степень не определена. Если $\Pi_\sigma = \{0\}$ и $b_\sigma(u) = 0$, т. е. u_0 — константа, то $u^{(h)_\sigma} = 0$.

Для любого набора $g = (g_0, \ldots, g_n)$, где $g_i(x_1, \ldots, x_d)$ — элемент из центра $Z\,\mathrm{GM}(r_i, X_i)$ алгебры общих матриц $\mathrm{GM}(r_i, X_i)$, положим

$$u^{[g]_\sigma} = u_0^{*[g]_\sigma} \ldots u_j^{*[g]_\sigma} \ldots u_n^{*[g]_\sigma},$$

где $u_j^{*[g]_\sigma} = u_j^*$, если $j \in \Pi_\sigma$, $u_j^{*[g]_\sigma} = u_j^* g_j$, если $j \in A_\sigma$.

По линейности действия $f \mapsto f^{(h)_\sigma}$, $f \mapsto f^{[g]_\sigma}$ распространяются на все σ-однородные квазимногочлены из пространства V.

Пусть σ — непустая расстановка $\rho(\sigma) > 0$. Назовем *σ-регулярными действиями* на пространстве V следующие действия: $f \mapsto f^{(h)_\sigma}$, $f \mapsto f^{[g]_\sigma}$, линейные действия и подстановки вместо переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_d$, единицы.

Если $\rho(\sigma) = 0$, то в определении σ-регулярных действий отсутствует операция $f \mapsto f^{(h)_\sigma}$. Если σ — пустая расстановка, то определения σ-регулярных и регулярных действий совпадают (отсутствует операция $f \mapsto f^{[g]_\sigma}$).

Пусть S^σ_{reg} — подпространство в V, порожденное системой σ-однородных квазимногочленов S из $V(d)$, замкнутое относительно σ-регулярных действий, $W = S^\sigma_{\mathrm{reg}} \cap V(d)$ и W^y — подпространство в S^σ_{reg}, порожденное однородными квазимногочленами вида $f^{(yh)_\sigma}$, где $f \in W$, а $h = 1$ или $h \in F(d) = k\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$. Подпространство W^y, очевидно, замкнуто относительно действия $y \mapsto yh$, где $h \in F(d)$. Согласно формуле (1.7) имеет место вложение

$$W^y \subset V_1 \oplus \ldots \oplus V_l,$$

где $\Pi_\sigma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$, $\gamma_1 < \ldots < \gamma_l$, V_i — подпространство в V, порожденное квазиодночленами, у которых все пассивные сомножители, кроме стоящего на позиции с номером γ_i, содержат только переменные $x_1, \ldots, x_d$ (может быть, и с нулевой кратностью), а пассивный сомножитель с номером γ_i, помимо этих переменных, содержит переменную y в степени 1. Положим

$$U_i = (V_1 \oplus \ldots \oplus V_i) \cap W^y,$$

где $i = 1, \ldots, l$, и рассмотрим проекции $\pi_i \colon U_i \to V_i$. Пусть $W_i = \pi(U_i)$.

Рассмотрим расстановку $\sigma_i = (\sigma, \gamma_i)$, непосредственно следующую за расстановкой σ (т. е. $\sigma \prec \sigma_i$ и $\rho(\sigma) = \rho(\sigma_i) + 1$), подпространство $p_{\sigma_i}(W_i)$ в V_i, порожденное главными частями относительно σ_i однородных элементов из W_i, и W_{σ_i} — подпространство в $V(d)$, получающееся из $p_{\sigma_i}(W_i)$ специализацией $y \mapsto 1$. Назовем $p_{\sigma_i}(W_i)$ и W_{σ_i} *пространствами главных частей*.

Легко видеть, что с точностью до элементов из пространства $V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}$ действие $y \mapsto yh$, где h — прообраз в алгебре F элемента из алгебры $Z\,\mathrm{GM}(r_{\gamma_i}, X_{\gamma_i})$, на главных частях относительно σ_1 элементов f из пространства U_i равносильно умножению на h справа пассивных сомножителей с номером γ_i во всех квазиодночленах, составляющих эти главные части. Другими словами, имеет место соотношение

$$p_{\sigma_i}(f^{[g]_{\sigma_i}}) = p_{\sigma_i}(f^{[g]_\sigma}|_{y=yg_i}) + v, \tag{1.8}$$

где $v \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}$, g_i — прообраз в алгебре F элемента из $Z\,\mathrm{GM}(r_{\gamma_i}, X_{\gamma_i})$. Отсюда следует, что с точностью до этого подпространства действие $f \mapsto f^{[g]_{\sigma_i}}$ можно выразить через действия $f \mapsto f^{[g]_\sigma}$ и $y \mapsto yg_i$. Таким образом, пространство U_i с точностью до $V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}$ замкнуто относительно действия $f \mapsto f^{[g]_{\sigma_i}}$, если g_i зависит только от $x_1, \ldots, x_d$. Следовательно, то же самое можно сказать о пространствах W_i, $p_{\sigma_i}(W_i)$ и W_{σ_i}.

Кроме того, на σ-однородных элементах f из пространства W_i, как нетрудно заметить, имеет место следующее соотношение:

$$p_{\sigma_i}(f^{(h)_\sigma}) = (p_{\sigma_i}(f))^{(h)_{\sigma_i}}, \quad \text{если} \quad (p_{\sigma_i}(f))^{(h)_{\sigma_i}} \neq 0. \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует, что пространства $p_{\sigma_i}(W_i)$ и W_{σ_i} замкнуты относительно операций $f \mapsto f^{(h)_{\sigma_i}}$, если $h \in F(d)$.

Из вышесказанного и соотношений (1.6) и (1.9) следует

Лемма 1.1. *Пространства $p_{\sigma_i}(W_i)$ и W_{σ_i} замкнуты относительно действий $f \mapsto f^{[g]_{\sigma_i}}$ и $f \mapsto f^{(h)_{\sigma_i}}$, где g и h зависят от $x_1, \ldots, x_d$, причем эти действия индуцируются аналогичными действиями относительно расстановки σ на пространстве W_i с помощью формул* (1.6) *и* (1.9) *с точностью до элементов из пространства $V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}$.*

III. *Пространства главных частей.* Построим теперь по произвольной системе S однородных квазимногочленов из $V(d)$ *систему пространств главных частей*, лежащих в $V(d)$.

Если σ — пустая расстановка, т. е. $\rho(\sigma) = n + 1$, то $S^\sigma_{\mathrm{reg}} = S_{\mathrm{reg}}$, $W_\sigma = W = S_{\mathrm{reg}} \cap V(d)$. По пространству W согласно рассмотренной ранее конструкции строятся $n+1$ пространств главных частей $W_{\sigma_0}, \ldots, W_{\sigma_n}$, соответствующих пространствам $W_0, \ldots, W_n$, где $\rho(\sigma_i) = n$.

Пусть W_σ уже построено для всех расстановок σ ранга l (и большего). Для каждой из таких расстановок имеется l непосредственно следующих за ней $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$. Рассмотрим в качестве W пространство $W_\sigma = (W_\sigma)^\sigma_{\mathrm{reg}} \cap V(d)$. По нему согласно рассмотренной ранее конструкции строятся пространства $W_{\sigma_1} = (W_\sigma)_{\sigma_1}, \ldots, W_{\sigma_l} = (W_\sigma)_{\sigma_l}$ главных частей соответствующих пространств $W_1, \ldots, W_l$.

Продолжая этот процесс до расстановок нулевого ранга, получаем $(n+1)!$ подпространств главных частей W_{σ_i} (вообще говоря, различных при разных расстановках).

Таким образом по исходной системе S строится система, состоящая из $1+(n+1)+(n+1)n+\ldots+ (n+1)!$ подпространств, отвечающих всевозможным расстановкам рангов от $n+1$ до 0.

IV. *Леммы о конечной базируемости.* В этом пункте рассматривается общий случай, т. е. предполагается, что хотя бы одна компонента имеет сложность не меньше 1.

Пусть G и H — две системы σ-однородных квазимногочленов из V. Скажем, что *система G порождает систему H относительно расстановки σ*, если $G^\sigma_{\mathrm{reg}} \supset H$. Скажем, что *система G конечно порождает систему H относительно расстановки σ*, если в G найдется такая конечная подсистема B, что $B^\sigma_{\mathrm{reg}} \supset H$. Эти понятия очевидным образом переносятся и на пространства, порожденные системами B, G и H.

Пусть S — произвольная система однородных квазимногочленов из $V(d)$, $W = S_{\mathrm{reg}} \cap V(d)$ и $W_{\sigma_1}, \ldots, W_{\sigma_{(n+1)!}}$ — пространства главных частей пространства W, отвечающие всем расстановкам нулевого ранга.

Пусть $E = R(d)V(d)$ — нетеров $R(d)$-модуль, рассмотренный в конце раздела 1.1, $I = p_1 \dots p_k$ — произведение всех коммутативных идеалов Размыслова по компонентам сложности не меньше 1. Рассмотрим $R(d)$-модули

$$M_1 = R(d)W_{\sigma_1}, \dots, M_{(n+1)!} = R(d)W_{\sigma_{(n+1)!}}$$

и идеал I алгебры $R(d)$. Пусть μ — максимум показателей Артина—Риса пар $(I, M_1); \dots; (I, M_{(n+1)!})$. Тогда (см. раздел 1.1) для любого натурального m пространство $I^m E$ является пересечением пространства Размыслова и $V(d)$ и имеют место равенства

$$I^{\mu+1}E \cap M_i = I((I^{\mu}E) \cap M_i) = I^{\mu+1}E \cap W_{\sigma_i}. \tag{1.10}$$

Следовательно, на пространстве $I^{\mu+1}E \cap W_{\sigma_i}$ умножение на элементы из алгебры $R(d)$ можно осуществить с помощью соответствующих действий $f \mapsto f^{[g]_{\sigma_i}}$ на элементах f из пространства W_{σ_i}.

Следует отметить, что для любой расстановки σ (не обязательно нулевого ранга) пространство $I^{\mu+1}E \cap W_\sigma$ замкнуто относительно σ-регулярных действий, не выводящих за пределы E. Отметим еще, что если σ — некоторая расстановка и σ_i — одна из непосредственно следующих за ней расстановок, то имеет место следующее очевидное включение:

$$(W_\sigma \cap I^{\mu+1}E)_{\sigma_i} \subset W_{\sigma_i} \cap I^{\mu+1}E.$$

Лемма 1.2. *Теорема* 1.2 *верна при* $r(V) = 0$.

Доказательство. В этом случае $V(d)$ — конечномерное векторное пространство. Откуда очевидным образом и следует утверждение леммы.

Лемма 1.3. *Пусть* $\rho(\sigma) = 0$ *и* H *— произвольная система квазимногочленов из* $I^{\mu+1}E \cap W_\sigma$. *Тогда* W_σ *конечно порождает* H *относительно расстановки* σ.

Доказательство прямо следует из нетеровости получившегося модуля и из возможности в силу соотношений (1.10) умножать на следы с помощью σ-регулярных действий.

В дальнейших рассмотрениях, не теряя общности, можно считать, что квазиодночлены, составляющие элементы из пространства W, на всех своих компонентах содержат одночлены u_i степени не меньше 1. В самом деле, если это не так, то для наших целей достаточно заменить W на $IE \cap W$, в котором это условие, очевидно, выполнено.

Лемма 1.4. *Пусть* σ *— некоторая расстановка и* H *— система однородных относительно* σ *квазимногочленов из* $I^{\mu+1}E \cap W_\sigma$. *Тогда* W_σ *конечно порождает* H *относительно расстановки* σ.

Доказательство. Индукция по $\rho(\sigma)$. Основанием индукции служит лемма 1.3 ($\rho(\sigma) = 0$). Рассмотрим теперь пространство W_σ^y (аналогичное рассмотренному ранее пространству W^y), порожденное квазимногочленами вида $f^{(yh)_\sigma}$, где $f \in W_\sigma$, $h \in F(d)$ или $h = 1$. С ним, как и выше, связаны пространства $U_1, \dots, U_l$, отвечающие всем пассивным позициям расстановки σ.

Пусть U — подпространство в V, состоящее из квазимногочленов, обращающихся в нуль при специализации $y \mapsto 1$. Покажем сначала, что по модулю U система W_σ^y конечно порождает систему H^y относительно σ-регулярных действий и подстановок $y \mapsto yh$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что пространство W_σ^y по модулю U конечно порождает пространство $(I^{\mu+1}E \cap W_\sigma)^y$ относительно этих действий, что в свою очередь будет следовать из конечной порожденности всех $I^{\mu+1}V \cap U_i$ по модулю $(V_1 \oplus \dots \oplus V_{i-1}) + U$ (здесь $i = 1, \dots, l$, а пространство V_0 по определению нулевое) пространствами U_i. Ясно, что для этого достаточно доказать аналогичный факт для проекций $W_i = \pi_i(U_i)$ и $\pi_i(I^{\mu+1}V \cap U_i)$, отвечающих всем пассивным позициям расстановки σ.

Рассмотрим пространство главных частей $p_{\sigma_i}(W_i)$. На нем, согласно лемме 1.1, с точностью до $V_1 \oplus \dots \oplus V_{i-1}$ σ_i-регулярные действия можно реализовать с помощью подстановок $y \mapsto yh$ и σ-регулярных действий на пространстве W_i. С другой стороны, по индуктивному предположению пространство W_{σ_i} конечно порождает относительно σ_i пространство $I^{\mu+1}E \cap W_{\sigma_i}$.

Следовательно, с точностью до подпространства $(V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}) + U$ пространство главных частей $p_{\sigma_i}(W_i)$ конечно порождает пространство $(I^{\mu+1}V) \cap p_{\sigma_i}(W_i)$. Рассматривая прообразы главных частей и применяя к ним процедуру уменьшения ширины (см. разобранный в начале пункта II пример), получаем, что пространство W_i конечно порождает $(I^{\mu+1}V) \cap W_i$ по модулю $(V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}) + U$. Из этого и сказанного выше следует, что пространство W_σ^y по модулю пространства U конечно порождает пространство $(I^{\mu+1}E \cap W_\sigma)^y$ и, следовательно, систему H^y.

Так как H состоит из σ-однородных элементов, то после специализации $y \mapsto 1$ все элементы из $H^{(y)} \subset H^y$ умножатся на некоторые натуральные числа. Следовательно, W_σ конечно порождает систему H. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть H — система однородных квазимногочленов из пространства $I^{\mu+1}E \cap W$. Тогда W конечно порождает H.*

Доказательство — применение леммы 1.4 к пустой расстановке.

V. *Доказательство теоремы* 1.2. Для доказательства теоремы введем на элементарных матричных пространствах следующую характеристику.

Пусть r — сложность элементарного пространства V. Рассмотрим набор $\tau(V) = (n_1, \ldots, n_{r+1})$ длины $r+1$, состоящий из целых неотрицательных чисел, у которого на первом месте стоит количество n_1 компонент пространства V максимальной сложности r, на втором месте — количество n_2 компонент сложности $r-1, \ldots$, на последнем — количество n_r компонент сложности 0 (числа $n_2, \ldots, n_{r+1}$ могут быть, вообще говоря, и нулями). Такой набор $\tau(V)$ будем называть *типом пространства* V.

Два типа $\tau(V_1)$ и $\tau(V_2)$ сравниваются следующим образом. Бóльшим считается тип, имеющий бóльшую длину. Если длины типов равны, то они сравниваются *лексикографически*.

Таким образом на множестве типов вводится отношение линейного порядка. Утверждение леммы 1.2 означает, что теорема верна для элементарных матричных пространств, у которых длина типа равна 1.

Проведем теперь индукцию по типу пространства V. Для *любых* пространств, тип которых имеет длину 1, утверждение леммы 1.2 дает основание индукции. Ниже будем предполагать, что $r(V) > 0$ и утверждение теоремы 1.2 справедливо для любых элементарных матричных пространств типа, меньшего чем $\tau(V)$.

Пусть, как и выше, $W = S_{\mathrm{reg}} \cap V(d)$. Согласно лемме 1.5 пространство W конечно порождает $I^{\mu+1}E \cap W$. Покажем, что W конечно порождено по модулю $I^{\mu+1}E \cap W$, что и завершит доказательство теоремы. Для этого рассмотрим цепочку подпространств

$$
\begin{aligned}
&I^{\mu+1}V(d) = \\
&\quad = p_1^{\mu+1} \ldots p_k^{\mu+1} V(d) \subset \ldots \subset p_1^{\mu+1} \ldots p_i^{\mu+1} V(d) \subset p_1^{\mu+1} \ldots p_{i-1}^{\mu+1} V(d) \subset \ldots \subset \ p_1^{\mu+1} V(d) \subset V(d).
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что

$$p_1^{\mu+1} \ldots p_i^{\mu+1} V = (p_1^{\mu+1} \ldots p_{i-1}^{\mu+1} V) \cap p_i^{\mu+1} V$$

и, следовательно, каждое из фактор-пространств

$$p_1^{\mu+1} \ldots p_{i-1}^{\mu+1} V / p_1^{\mu+1} \ldots p_i^{\mu+1} V = p_1^{\mu+1} \ldots p_{i-1}^{\mu+1} V / (p_1^{\mu+1} \ldots p_{i-1}^{\mu+1} V) \cap p_i^{\mu+1} V,$$

ассоциированных с этой цепочкой, является T-подпространством пространства $V/p_i^{\mu+1}V$.

Таким образом, достаточно показать, что любое ограниченное T-пространство в пространстве $V/p_i^{\mu+1}V$ регулярно конечно базируемо. Для этого заметим, что это пространство, с одной стороны, является образом пространства V относительно понижающего морфизма (см. раздел 1.1), а с другой стороны, накрывается блочным пространством вида

$$V' = Q_n \langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \ldots, F/M_s^m, \ldots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e \rangle,$$

совпадающим с V на всех компонентах, кроме i-й, на которой стоит алгебра F/M_s^m, где $s < r_i$.

Рассматривая фильтрации алгебры F/M_s^m степенями идеала M_s/M_s^m, если $s \geqslant 1$, или идеала $(x_1, \ldots, x_i, \ldots)/(x_1, \ldots, x_i, \ldots)^m$, если $s = 0$, получаем на i-й компоненте либо нулевую сложность, либо вложение пространства

$$Q_n\langle \mathrm{GM}(r_0, X_0)^e, \ldots, M_s^{l-1}/M_s^l, \ldots, \mathrm{GM}(r_n, X_n)^e\rangle$$

в элементарное матричное пространство, у которого на месте пространства M_s^{l-1}/M_s^l стоит элементарное матричное пространство сложности $s < r_i$. В любом случае мы приходим к конечному множеству элементарных матричных пространств, тип которых меньше чем $\tau(V)$. Но для таких пространств утверждение верно по индуктивному предположению. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, теорема 1.1 является прямым следствием доказанной выше теоремы 1.2. Из теоремы 1.2 и унитарного принципа получаем

Следствие 1.4. *Любая ограниченная* (*т. е. зависящая от конечного набора переменных*) *система многочленов из F/I порождает конечно базируемое T^*-пространство.*

Учитывая известную связь между блочными пространствами и элементарными матричными пространствами, получаем

Следствие 1.5. *Любая ограниченная система квазимногочленов из блочного пространства, все компоненты которого удовлетворяют некоторому тождеству Капелли, порождает конечно базируемое T^*-пространство.*

Замечания 1.3.

1. Нетеровость kT-модуля F/I позволяет в формулировке теоремы 1.1 заменить основное поле k на произвольную коммутативную k-алгебру конечного типа.

2. Приведенные в этой главе методы и результаты существенно дополняют работу [7], относящуюся к конечной базируемости систем обобщенных многочленов (см. также [12]).

3. Используя методы, аналогичные вышеизложенным, можно доказать нетеровость тензорного произведения над полем k конечного числа алгебр F/I как модуля над kT. Интересным, на наш взгляд, следствием из этого факта и предложения 1.3 является конечная базируемость любого T-пространства в алгебре $\mathrm{TrGM}(r, X)$. В самом деле, как следует из предложения 1.3, эта алгебра как kT-модуль порождается следующим конечным набором своих элементов:

$$\operatorname{tr} x_1, \ldots, \ \operatorname{tr} x_1 \ldots \operatorname{tr} x_{r^2}, \ (\operatorname{tr} x_1)y, \ldots, \ (\operatorname{tr} x_1 \ldots \operatorname{tr} x_{r^2})y, \ y,$$

где x_i, y — образы переменных из алгебры F.

4. Полученные результаты позволяют положительно решить вопрос о представимости алгебры F/I, после чего с помощью результатов из работы [5] может быть вычислен показатель роста многообразия, порожденного этой алгеброй.

5. Отметим, что (как будет видно из содержания следующей главы) в доказанных результатах существенна характеристика 0. Однако если T-идеал I содержит коммутатор, то, как показано в [29], имеется полный аналог доказанной теоремы для случая бесконечного поля произвольной характеристики (см. также следующую главу).

6. Используя технику, изложенную в дополнении к главе 1, можно устранить необходимость рассмотрения T-пространств по модулю тождества Капелли (см. также [24]), т. е. доказать конечную базируемость любого T-пространства в абсолютно свободной счетно порожденной ассоциативной алгебре над полем нулевой характеристики.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ 1

1.4. T-ПРОСТРАНСТВА, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ НЕНУЛЕВЫХ T-ИДЕАЛОВ

Для полилинейного многочлена f любой свободной ассоциативной алгебры через $\mathrm{vr}(f)$ обозначим множество переменных, от которых зависит f. В частности, $\mathrm{vr}(0) = \varnothing$. Заметим следующий факт, полезный для дальнейшего: если $f_1, \ldots, f_k$ — многочлены некоторой свободной ассоциативной алгебры над областью и многочлен $f_1 \ldots f_k$ ненулевой полилинейный, то многочлены $f_1, \ldots, f_k$

полилинейные и $\mathrm{vr}(f_1)\sqcup\ldots\sqcup\mathrm{vr}(f_k)=\mathrm{vr}(f_1\ldots f_k)$. Для любого натурального n через S_n обозначим симметрическую группу степени n.

Пусть K — поле, $X=\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$, $Y=\{y_1,\ldots,y_n,\ldots\}$ и $F=K\langle X\cup Y\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра без единицы. Через P обозначим множество полилинейных многочленов алгебры F, а через L_0 обозначим T-пространство алгебры F, порожденное коммутатором $[x_1,x_2]$. Для любого $n\in\mathbb{N}$ через $P^{(n)}$ обозначим подпространство алгебры F, натянутое на слова $x_\sigma(1)\ldots x_\sigma(n)$, где $\sigma\in S_n$.

Принадлежность многочлена $f\in F$ T-пространству L_0 легко проверить следующим способом. Отношение циклической сопряженности разбивает мономы f на классы эквивалентности. Тогда $f\in L_0$ тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов при мономах из каждого такого класса равна нулю.

Введем следующие обозначения. Пусть $f\in P$ и $g\in P^{(m)}\setminus\{0\}$. Для $k\geqslant 2$ через $C_k(g)$ обозначим полином, полученный из g заменой $x_i\to x_{i+1+m(k-2)}$, $i=1,\ldots,m$. Пусть $A\subset X\cap Y$. Через $C(f,g)$ и $C_A(f,g)$ обозначим полиномы, полученные из f заменами $x_i\to C_i(g)$, $i\in\mathrm{vr}(f)\setminus\{x_1\}$ и $x_i\to C_i(g)$, $i\in\mathrm{vr}(f)\setminus(\{x_1\}\cup A)$ соответственно.

Очевидны следующие утверждения.

Лемма 1.6. *Пусть L — некоторое T-пространство алгебры F и $\sum\limits_{i=1}^{k} g_ifg_i'\in L$, где многочлен f полилинейный и многочлены g_i и g_i' не зависят от переменных из $\mathrm{vr}(f)$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} g_i[f,h]g_i'\in L$ для любого $h\in F$.*

Следствие 1.6. *Пусть L — некоторое T-пространство алгебры F и $\sum\limits_{i=1}^{k} g_ix_lfg_i'\in L$, где многочлен f полилинейный и многочлены g_i и g_i' не зависят от переменных из $\mathrm{vr}(x_lf)$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} g_ix_lfhg_i'\in L$ для любого $h\in F$.*

Лемма 1.7. *Пусть L — некоторое T-пространство алгебры F. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$L\cap P\not\subset L_0$;*
2) *L содержит ненулевой T-идеал.*

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2). Для некоторого $n\in\mathbb{N}$ существует многочлен $f\in L\cap P^{(n)}\setminus L_0$. Многочлен $C(f,f)$ есть линейная комбинация многочленов вида

$$C_{i_1}(f)\ldots C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)\ldots C_{i_n}(f),$$

где $\{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_n,1\}=\{1,\ldots,n\}$. Так как $C_{i_1}(f)\in L$, то по лемме 1.6 имеем $[C_{i_1}(f),h]\in L$ для любого многочлена $h\in F$. Следовательно,

$$C_{i_1}(f)\ldots C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)\ldots C_{i_n}(f')=C_{i_2}(f)\ldots C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)\ldots C_{i_n}(f)C_{i_1}(f)\pmod L.$$

Здесь надо положить $h=C_{i_2}(f)\ldots C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)\ldots C_{i_n}(f)$. Продолжая процесс переброски выражений $C_{i_j}(f)$, стоящих перед x_1, получаем

$$C_{i_1}(f)\ldots C_{i_{k-1}}(f)x_1C_{i_{k+1}}(f)\ldots C_{i_n}(f)=x_1C_{i_{k+1}}(f)\ldots C_{i_n}(f)C_{i_1}(f)\ldots C_{i_{k-1}}(f)\pmod L. \quad (1.11)$$

Пусть $f=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}$, где $\alpha_\sigma\in K$. Положим

$$g=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(\sigma^{-1}(1)+1)}\ldots x_{\sigma(n)}x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(\sigma^{-1}(1)-1)}.$$

Так как $f\notin L_0$, то $g\neq 0$. В силу (1.11) имеем $C(f,f)=x_1C(g,f)\pmod L$. Так как $g\neq 0$, то $C(g,f)\neq 0$. В силу следствия 1.6 имеем $x_1C(g,f)g'\in L$ для любого многочлена g' из F. Поэтому T-идеал, порожденный многочленом $x_1C(g,f)$, ненулевой и содержится в L.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть I — ненулевой T-идеал, содержащийся в L. Предположим, что $L \cap P \subset L_0$. Пусть f — некоторый ненулевой многочлен из $I \cap P$. Выберем $x_k \notin \mathrm{vr}(f)$. Пусть $f = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$, где $u_1, \ldots, u_m$ — попарно различные слова из $\langle X \cup Y \rangle$ и $\alpha_i \in K$. Тогда $x_k f = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_k u_i \in I \cap P \subset L_0$. В этом представлении слова $x_k u_i$ для различных i циклически не сопряжены, и следовательно, все α_i равны 0. Приходим к противоречию. Лемма доказана.

Замечание 1.4. В случае $\operatorname{char} K = 0$ условие 1) эквивалентно условию $L \not\subset L_0$. В случае $\operatorname{char} K > 0$ это не так. Например, если $\operatorname{char} K = 2$ и L есть T-пространство, порожденное многочленом x_1^2, то $L \cap P \subset L_0$, но $L \not\subset L_0$.

Для T-пространства I через $[I, F]$ обозначим подпространство алгебры F, натянутое на коммутаторы $[h, f]$, где $h \in I$ и $f \in F$. Легко проверить, что $[I, F]$ есть T-пространство. Имеет место

Лемма 1.8. *Пусть L — ненулевое T-пространство. Тогда $[I, F] \subset L$ для некоторого ненулевого T-идеала I.*

Доказательство. Если $L \cap P$ не содержится в L_0, то утверждение следует из леммы 1.7. Считаем теперь, что $L \cap P \subset L_0$. Пусть f — ненулевой многочлен из $L \cap P^{(n)}$. Так как многочлены $[g, x_i]$, где $i = 2, \ldots, n$ и $g x_i \in P^{(n)}$, порождают $L_0 \cap P^{(n)}$ как линейное пространство, справедливо представление $f = \sum\limits_{i=2}^{n} [f_i, x_i]$, где $f_i x_i \in P^{(n)}$. Так как f ненулевой, то существует такое $i_0 = 2, \ldots, n$, что f_{i_0} тоже ненулевой. Пусть f' — многочлен, полученный из f заменой $x_{i_0} \to x_l x_{i_0}$ для произвольного числа $l \geqslant n(n-1)+2$. Тогда имеем

$$f' = [f_{i_0}, x_l x_{i_0}] + \sum_{i=2,\ i \neq i_0}^{n} [f_i', x_i] = [f_{i_0} x_l, x_{i_0}] + [x_{i_0} f_{i_0}, x_l] + \sum_{i=2,\ i \neq i_0}^{n} [f_i', x_i],$$

где f_i' получен из f_i заменой $x_{i_0} \to x_l x_{i_0}$. Так как f_{i_0} ненулевой и не зависит от x_{i_0}, то $x_{i_0} f_{i_0} \notin L_0$. По лемме 1.6 имеем $C_{\{x_l\}}(f', f) = [C(x_{i_0} f_{i_0}, f), x_l] \pmod{L}$.

Пусть $x_{i_0} f_{i_0} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$, где $\alpha_\sigma \in K$. Положим

$$g = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(\sigma^{-1}(1)+1)} \ldots x_{\sigma(n)} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(\sigma^{-1}(1)-1)}.$$

Так как $x_{i_0} f_{i_0} \notin L_0$, то $g \neq 0$. В силу леммы 1.6 имеем $[f, x_l] \in L$. Еще раз применяя лемму 1.6, получаем $[[f, h], x_l] \in L$ для любого многочлена $h \in F$. Поэтому, перекидывая выражения $C_i(f)$, стоящие перед x_1, аналогично тому, как мы это делали при доказательстве леммы 1.7, получаем $[C(x_{i_0} f_{i_0}, f), x_l] = [x_1 C(g, f), x_l] \pmod{L}$. Отсюда $[x_1 C(g, f), x_l] \in L$. По следствию 1.6 получаем $[I, F] \subset L$, где I есть T-идеал, порожденный многочленом $x_1 C(g, f)$. Лемма доказана.

Заметим, что справедлив следующий результат, который есть непосредственное следствие теоремы Кемера [15].

Лемма 1.9. *Пусть $\operatorname{char} K = 0$. Тогда любая возрастающая цепочка T-пространств $L_0 \subset \subset L_1 \subset \ldots \subset L_i \subset \ldots$ стабилизируется.*

Доказательство. Если $f \in L_i \cap P^{(n)}$, то $f = x_1 g \pmod{L_0}$ для некоторого $g \in F$. Через L_i' обозначим T-пространство, порожденное всеми такими многочленами $x_1 g$ для всевозможных $f \in L_i \cap P^{(n)}$ и $n \in \mathbb{N}$. Легко заметить, что любое L_i' есть T-идеал и $L_i' \subset L_i$. Тогда цепочка $L_1' \subset \ldots \subset L_i' \subset \ldots$ стабилизируется по теореме Кемера [15], т. е. $L_r' = L_s'$ при $r \geqslant s$ для некоторого фиксированного s. Пусть теперь $f \in L_r \cap P^{(n)}$ и $f = x_1 g \pmod{L_0}$. Тогда $x_1 g \in L_s'$, и так как $L_s' \subset L_s$, имеем $x_1 g \in L_s$. Так как $L_0 \subset L_s$, то $f \in L_s$ и $L_r = L_s$. Лемма доказана.

Займемся теперь изучением T-пространств, содержащихся в L_0. Через KX и KY обозначим подпространства в F, порожденные переменными из X и Y соответственно.

Определение 1.1. Линейное пространство $L \subset F$ называется S-пространством, если $\varphi(L) \subset L$ для любого эндоморфизма φ алгебры F, отображающего $KX + KY$ в себя.

Определение 1.2. Линейное пространство $L \subset F$ называется S'-пространством, если $\varphi(L) \subset L$ для любого эндоморфизма φ алгебры F, отображающего каждое множество KX и $KX + KY$ в себя.

Определение 1.3. Линейное пространство $L \subset F$ называется T'-пространством, если $\varphi(L) \subset L$ для любого эндоморфизма φ алгебры F, отображающего подалгебру $K\langle X\rangle$ в себя.

Понятия порожденности S-пространств, S'-пространств и T'-пространств множеством многочленов A вводятся аналогично понятию порожденности T-пространств.

Определение 1.4. Пусть L — подпространство в L_0. Присоединенное пространство $A(L)$ для L есть множество многочленов $f \in F$, таких что

$$[f, x] + \sum_{i=1}^{n} [f_i, x_i] \in L, \tag{1.12}$$

где $f, f_i \in F$, $x \in \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ и f не зависит от x.

Заметим, что если выполнено (1.12), то для любого $x' \in \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, от которого не зависит f, выполнено $[f, x'] + \sum\limits_{i=1}^{n} [f'_i, x_i] \in L$, где f'_i получен из f_i заменой $x \to x'$.

Лемма 1.10. *Пусть L — некоторое S-пространство, содержащееся в L_0. Тогда присоединенное пространство $A(L)$ есть S'-пространство. Если при этом L является T-пространством, то $A(L)$ есть T'-пространство.*

Доказательство. Пусть $f, g \in A(L)$ и $\alpha, \beta \in K$. В силу определения 1.4 и замечания после него имеем $[f, x] + \sum\limits_{i=1}^{n} [f_i, x_i] \in L$ и $[g, x] + \sum\limits_{i=1}^{n} [g_i, x_i] \in L$, где $f, g, f_i, g_i \in F$, $x \in \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ и f, g не зависят от x. Тогда $[\alpha f + \beta g, x] + \sum\limits_{i=1}^{n} [\alpha f_i + \beta g_i, x_i] \in L$. Этим доказано, что $\alpha f + \beta g \in A(L)$.

Пусть теперь $f \in A(L)$ и φ — эндоморфизм алгебры F, отображающий подалгебру $K\langle X\rangle$ в себя. В силу определения 1.4 имеем

$$[f, x_s] + \sum_{i=1}^{n} [f_i, x_i] \in L, \tag{1.13}$$

где $f, f_i \in F$, $s > n$ и f не зависит от x_s. Можно считать, что s больше любого j, такого что некоторый многочлен $\varphi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, зависит от x_j. Определим эндоморфизм φ' алгебры F по правилам $\varphi'(x_s) = x_s$ и $\varphi'(t) = \varphi(t)$ для любой переменной $t \in X \cup Y \setminus \{x_s\}$.

Предположим сначала, что эндоморфизм φ отображает каждое множество KX и $KX + KY$ в себя. Действуя эндоморфизмом φ' на (1.13), получаем $[\varphi(f), x_s] + \sum\limits_{i=1}^{n} [\varphi'(f_i), \varphi(x_i)] \in L$ и $\varphi(f) \in A(L)$. Отсюда следует, что $A(L)$ есть S'-пространство.

Предположим теперь, что L есть T-пространство, и будем считать, что φ — произвольный эндоморфизм алгебры F, отображающий подалгебру $K\langle X\rangle$ в себя. Действуя эндоморфизмом φ' на (1.13), получаем $[\varphi(f), x_s] + \sum\limits_{i=1}^{n} [\varphi'(f_i), \varphi(x_i)] \in L$. Учитывая формулу

$$[y_1, x_1 \ldots x_k] = [y_1 x_1 \ldots x_{k-1}, x_k] + [x_k y_1 x_1 \ldots x_{k-2}, x_{k-1}] + \ldots + [x_2 \ldots x_k y_1, x_1],$$

представим каждый многочлен $[\varphi'(f_i), \varphi(x_i)]$ в виде суммы многочленов вида $[h, x_j]$, где $j < s$. Отсюда получаем $\varphi(f) \in A(L)$. Лемма доказана.

Теорема 1.3. *Пусть M и L — некоторые S-пространства, порожденные полилинейными многочленами, такие что $M \subset L \subset L_0$ и $A(M) \cap P = A(L) \cap P$. Тогда $M = L$.*

Доказательство. Предположим противное. Так как оба S-пространства L и M порождены полилинейными многочленами, то $M \cap P^{(n)} \subsetneq L \cap P^{(n)}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $m \leqslant n$ — наименьшее число, такое что существуют многочлены $f_1, \ldots, f_m \in P$, такие что $f_i x_i \in P^{(n)}$, $i = 1, \ldots, m$ и

$$\sum_{i=1}^{m} [f_i, x_i] \in L \setminus M. \tag{1.14}$$

Понятно, что хотя бы один такой набор многочленов $f_1, \ldots, f_m$ существует и m определено корректно. Из такого способа выбора m следует, что $f_m \neq 0$.

Пусть φ и ψ — такие эндоморфизмы алгебры F, что $\varphi(x_i) = x_i$ при $i \leqslant m$, $\varphi(x_i) = y_i$ при $i > m$ и $\psi(x_i) = \psi(y_i) = x_i$ для любого i. При этом понятно, что ограничение композиции $\psi\varphi$ на $K\langle X\rangle$ есть тождественное отображение. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{m} [\varphi(f_i), x_i] \in L$. В силу определения 1.3 получаем $\varphi(f_m) \in A(L) \cap P = A(M) \cap P$. Теперь в силу определения 1.4 имеем $[\varphi(f_m), x_s] + \sum\limits_{i=1}^{k} [g_i, x_i] \in M$, где $g_i \in F$, $s > k$ и $\varphi(f_m)$ не зависит от x_s. Многочлен $\varphi(f_m)$ не зависит от переменных x_i, $i \geqslant m$. Следовательно, выполняя замену $x_i \to 0$, $i \geqslant m$, $i \neq s$, $x_s \to x_m$, получаем $[\varphi(f_m), x_m] + \sum\limits_{i=1}^{m-1} [g_i', x_i] \in M$. Применяя ψ к последней формуле, получаем $[f_m, x_m] + \sum\limits_{i=1}^{m-1} [\psi(g_i'), x_i] \in M$. Пусть h_i — многочлен, полученный из $\psi(g_i')$ выкидыванием всех мономов, не имеющих вида $\alpha x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n-1)}$, где $\alpha \in K$ и σ — некоторая биекция из $\{1, \ldots, n-1\}$ в $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$. При этом $h_i x_i \in P^{(n)}$. В силу однородности S-пространства M как S-пространства, порожденного полилинейными многочленами, получаем $[f_m, x_m] + \sum\limits_{i=1}^{m-1} [h_i, x_i] \in M$. Вычитая последний многочлен из (1.14), мы получаем $\sum\limits_{i=1}^{m-1} [f_i - h_i, x_i] \in L \setminus M$ и $(f_i - h_i) x_i \in P^{(n)}$. Это противоречит определению m. Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет следующие следствия, связывающие порождающие L и $A(L)$. Эти следствия не используются в дальнейшем тексте и приведены для иллюстрации излагаемого подхода.

Следствие 1.7. *Пусть $L \subset L_0$ — некоторое S-пространство, порожденное полилинейными многочленами, g_j, $j \in \Lambda$, — такие многочлены, что полилинейная часть S'-пространства, порожденного ими, совпадает с $A(L) \cap P$, и*

$$h_j = [g_j, x(j)] + \sum_{i=1}^{n_j} [g_{j,i}, x_i] \in L \cap P,$$

где $g_j, g_{j,i} \in F$, $x(j) \in \{x_{n_j+1}, x_{n_j+2}, \ldots\}$ и g_j не зависит от $x(j)$. Тогда многочлены h_j, $j \in \Lambda$, порождают L как S-пространство.

Доказательство. Достаточно положить M равным S-пространству, порожденному многочленами h_j, $j \in \Lambda$. Все они принадлежат L, и следовательно, $M \subset L$. Отсюда получаем $A(M) \subset A(L)$. С другой стороны, в силу определения 1.4 имеем $g_j \in A(M)$. Через H обозначим S'-пространство, порожденное многочленами g_j, $j \in \Lambda$. Тогда $H \subset A(M)$. По условию $H \cap P = A(L) \cap P$. Отсюда получаем $A(M) \cap P = A(L) \cap P$. По теореме 1.3 имеем $M = L$. Следствие доказано.

Следствие 1.8. *Пусть $L \subset L_0$ — некоторое T-пространство, порожденное полилинейными многочленами, g_j, $j \in \Lambda$, — такие многочлены, что полилинейная часть T'-пространства, порожденного ими, совпадает с $A(L) \cap P$, и*

$$h_j = [g_j, x(j)] + \sum_{i=1}^{n_j} [g_{j,i}, x_i] \in L \cap P,$$

где $g_j, g_{j,i} \in F$, $x(j) \in \{x_{n_j+1}, x_{n_j+2}, \ldots\}$ и g_j не зависит от $x(j)$. Тогда многочлены h_j, $j \in \Lambda$, порождают L как T-пространство.

Доказательство. Положим M равным T-пространству, порожденному многочленами h_j, $j \in \Lambda$, и H равным T'-пространству, порожденному многочленами g_j, $j \in \Lambda$. Далее равенство $M = L$ устанавливается аналогично следствию 1.7. Следствие доказано.

Преимущество перехода от ненулевого T-пространства, содержащегося в L_0, к его присоединенному T'-пространству состоит в том, что последнее в силу леммы 1.8 содержит ненулевой T-идеал. Теорема 1.3 показывает, что в случае T-пространств, порожденных полилинейными многочленами, этот переход обратим. Для случая $\operatorname{char} K = 0$ мы используем этот подход в следующем разделе.

1.5. Супероризация для T-пространств

В этом разделе мы считаем, что $\operatorname{char} K = 0$. Будем также сокращать выражение $\otimes_K$ до $\otimes$. Набор неотрицательных целых чисел $(l_1, \ldots, l_s)$ называется *разбиением числа* l, если $l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_s$ и $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i = l$. Пусть D — диаграмма, соответствующая разбиению $(l_1, \ldots, l_s)$ в том смысле, что l_i — длина i-й сверху строки D. Любому заполнению клеток этой диаграммы неповторяющимися числами от 1 до l соответствует таблица C. В данном случае пишем $D = \operatorname{dia}(C)$. Обозначим через $|D|$ и $|C|$ количество клеток в диаграмме D и в таблице C. В наших обозначения это число равно l. Пусть P_C и Q_C — группы всех подстановок из S_l, стабилизирующих все строки и столбцы таблицы C соответственно. Положим

$$e_C = \sum_{p \in P_C,\ q \in Q_C} (\operatorname{sign} q) pq.$$

Этот элемент групповой алгебры KS_l называется симметризатором Юнга. Левый идеал алгебры KS_l, порожденный элементом e_C, обозначим через J_C, т. е. $J_C = KS_l e_C$. Определим блок U_D, равный сумме всех левых идеалов кольца KS_l, изоморфных J_C как левые KS_l-модули.

Это определение корректно, так как для любой таблицы C', такой что $D = \operatorname{dia}(C')$, левые KS_l-модули J_C и $J_{C'}$ изоморфны. Основной результат теории представлений симметрической группы над полем нулевой характеристики заключается в том, что левые идеалы J_C минимальны, кольцо KS_l есть прямая сумма блоков U_D по всем диаграммам D, состоящим из l клеток. Каждый такой блок U_D есть неразложимый двусторонний идеал кольца KS_l, порожденный элементом e_C, где $D = \operatorname{dia}(C)$.

Достаточно элементарное изложение теории представлений симметрической группы содержится в [33].

Положим $J_{C_1,C_2} = J_{C_1} \otimes J_{C_2}$. Этот левый идеал алгебры $KS_{|C_1|} \otimes KS_{|C_2|}$ порожден элементом $e_{C_1} \otimes e_{C_2}$. Справедлива

Лемма 1.11 (о представлениях). *Левые идеалы J_{C_1,C_2} являются минимальными.*

Доказательство. Так как $e_{C_1} \otimes e_{C_2} \neq 0$, то идеал J_{C_1,C_2} ненулевой. Пусть f — ненулевой элемент из J_{C_1,C_2}. Имеет место представление $f = a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_s \otimes b_s$, где $s \geqslant 1$, элементы $b_1, \ldots, b_s \in J_{C_2}$ линейно независимы над K и элементы $a_1, \ldots, a_s \in J_{C_1}$ не равны нулю. Так как J_{C_2} неприводимый $KS_{|C_2|}$-модуль и любой его эндоморфизм есть просто умножение на элемент поля K, то по теореме плотности существует такой $r \in KS_{|C_2|}$, что $rb_1 = e_{C_1}$, $rb_i = 0$, $i = 2, \ldots, s$. Тогда $(1 \otimes r) f = a_1 \otimes e_{C_2} \neq 0$. В силу минимальности идеалов J_{C_1} и J_{C_2} элемент $a_1 \otimes e_{C_2}$ порождает весь идеал J_{C_1,C_2}. Лемма доказана.

Для диаграмм D_1 и D_2 положим $U_{D_1,D_2} = U_{D_1} \otimes U_{D_2}$. Очевидно, что кольцо $KS_n \otimes KS_m$ есть прямая сумма произведений блоков U_{D_1,D_2} по всем диаграммам D_1 и D_2, состоящим соответственно из n и m клеток. Заметим, что U_{D_1,D_2} — двусторонние идеал.

Для натуральных n и m, не равных одновременно нулю, через $P(n,m)$ обозначим подпространство алгебры F, натянутое на такие полилинейные слова $u \in \langle X \cup Y \rangle$, что $\operatorname{vr}(u) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$.

Мы будем рассматривать пространство $P(n,m)$ как $KS_n \otimes KS_m$-модуль со следующим действием. Пусть $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_m$ и $f \in P(n,m)$. Тогда $(\sigma_1 \otimes \sigma_2) f$ есть результат подстановки $x_i \to x_{\sigma_1(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, $y_j \to y_{\sigma_2(j)}$, $j = 1, \ldots, m$, в многочлене f.

Введем на множестве переменных $X \cup Y$ порядок следующим образом: $x_i < x_j$ при $i < j$, $y_i < y_j$ при $i < j$ и $x_i < y_j$ для любых i, j.

Пусть $A = \{t_1, \ldots, t_k\}$, где $t_1 < \ldots < t_k$, — непустое подмножество множества $X \cup Y$. Для $\sigma \in S_k$ определим эндоморфизм $p_A(\sigma)\colon F \to F$ по формулам $p_A(\sigma)(t) = t$, если $t \in (X \cup Y) \setminus A$, и $p_A(\sigma)(t_i) = t_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, k$. Для $f \in F$ положим

$$S_A f = \sum_{\sigma \in S_k} p_A(\sigma) f, \quad \Lambda_A f = \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sign} \sigma) p_A(\sigma) f.$$

Дополнительно считаем, что $S_\varnothing f = \Lambda_\varnothing f = f$.

Для любого S-пространства $L \subset L_0$ и натуральных чисел r и t через $a^{(r,t)}(L)$ обозначим S-пространство, порожденное такими многочленами $f \in L_0 \cap P$, что для любого разбиения $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_t = \operatorname{vr}(f)$ выполняется $S_{A_1} \ldots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \ldots \Lambda_{B_t} f \in L$. Очевидно, что для любого многочлена $f \in a^{(r,t)}(L) \cap P$ и любого разбиения $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_t = \operatorname{vr}(f)$ выполняется $S_{A_1} \ldots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \ldots \Lambda_{B_t} f \in L$. Используя технику работы [13], докажем следующую лемму.

Лемма 1.12. *Пусть L — ненулевое T-пространство, содержащееся в L_0. Тогда существуют натуральные числа r и t, такие что для любого S-пространства Γ, для которого $L \subset \Gamma \subset L_0$, выполнено $a^{(r,t)}(\Gamma) = \Gamma$.*

Доказательство. По лемме 1.8 T'-пространство $A(L)$ содержит ненулевой T-идеал. Из теоремы Регева [38] тогда следует, что существует такое натуральное d, что $\dim(P(n,m)|A(L) \cap P(n,m)) \leqslant d^{n+m}$ для любых n и m, таких что $n + m \geqslant 1$. Пусть Γ — некоторое S-пространство, удовлетворяющее условию леммы.

Для натуральных чисел p и q через $D(p,q)$ обозначим диаграмму, состоящую из p столбцов длины q. Положим $b_{p,q} = \dim J_{C(p,q)}$, где $D(p,q) = \operatorname{dia}(C(p,q))$. Из формулы крюков для размерности неприводимых модулей следует, что

$$b_{p,q} = \frac{(pq)!}{(q!)^p r_p(q)},$$

где $r_p(q)$ — многочлен с рациональными коэффициентами от q, степень и коэффициенты которого зависят только от p. Отсюда нетрудно получить, что

$$\lim_{q \to \infty} \frac{b_{p,q}}{(p-1)^{pq}} = \infty. \tag{1.15}$$

Положим $t_0 = d^2$, а число r_0 возьмем таким, чтобы выполнялось неравенство

$$b_{t_0+1, r_0+1} > d^{2(t_0+1)(r_0+1)+1},$$

что возможно в силу формулы (1.15). Положим $m_0 = (t_0+1)(r_0+1)$, $r = 2r_0 + 1$ и $t = 2t_0$. Выбор этих чисел r и t зависит только от числа d, которое определяется по T-пространству L. Докажем теперь, что r и t являются такими числами, существование которых утверждается доказываемой леммой.

Для краткости положим $\Gamma' = a^{(r,t)}(\Gamma)$. Пусть $f \in A(\Gamma') \cap P(n,m)$. Для того чтобы доказать, что $f \in A(\Gamma)$, достаточно доказать, что для любых двух диаграмм D_1 и D_2, состоящих соответственно из n и m клеток, выполнено $U_{D_1,D_2} f \subset A(\Gamma)$.

Для дальнейшего заметим, что если D_1' и D_2' — две диаграммы и в одну из них вкладывается диаграмма D_{t_0+1,r_0+1}, то размерность любого модуля $J_{C_1',C_2'}$, где $D_1' = \operatorname{dia}(C_1')$ и $D_2' = \operatorname{dia}(C_2')$, больше чем d^{2m_0+1}. Это означает, что при $|D_1'| + |D_2'| \leqslant 2m_0 + 1$ мы имеем $U_{D_1',D_2'} P(|D_1'|, |D_2'|) \subset A(L)$. Следуя схеме доказательства работы [13], рассмотрим следующие случаи.

Случай 1a). D_{t_0+1,r_0+1} вкладывается в D_1. Рассмотрим произвольный элемент $\sum\limits_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_\sigma \sigma \in U_{D_{t_0+1,r_0+1}}$, где $\alpha_\sigma \in K$. Тогда понятно, что

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \ldots y_{m_0} x_{\sigma(m_0)} y_{m_0+1} \in (U_{D_{t_0+1,r_0+1}} \otimes K S_{m_0+1}) P(m_0, m_0+1).$$

Разлагая KS_{m_0+1} на блоки U_D и пользуясь замечанием перед рассмотрением случаев, получаем $(U_{D_{t_0+1,r_0+1}} \otimes KS_{m_0+1})P(m_0, m_0+1) \subset A(L)$ и

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{m_0} x_{\sigma(m_0)} y_{m_0+1} \in A(L). \tag{1.16}$$

Случай 1б). D_{t_0+1,r_0+1} вкладывается в D_2. Рассмотрим произвольный элемент $\sum\limits_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_\sigma \sigma \in$ $\in U_{D_{t_0+1,r_0+1}}$, где $\alpha_\sigma \in K$. Тогда по теореме ветвления имеем

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_\sigma y_{m_0+1} y_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{m_0} y_{\sigma(m_0)} y_{2m_0+1} \in \bigoplus_{D_{t_0+1,r_0+1} \subset D,\ |D| = 2m_0+1} (KS_0 \otimes U_D)P(0, 2m_0+1).$$

Пользуясь тем же замечанием, что и в случае 1а), получаем $(KS_0 \otimes U_D)P(0, 2m_0+1) \subset A(L)$. Следовательно, мы имеем

$$\sum_{\sigma \in S_{m_0}} \alpha_\sigma y_{m_0+1} y_{\sigma(1)} y_2 \dots y_{2m_0} y_{\sigma(m_0)} y_{2m_0+1} \in A(L). \tag{1.17}$$

По лемме 1.10 $A(L)$ есть T'-пространство и поэтому инвариантно относительно замен переменных из Y на любые многочлены из F. Отсюда в силу формул (1.16) и (1.17) получаем, что $U_{D_1,D_2} f \subset A(L)$ в случае, когда в одну из диаграмм вкладывается D_{t_0+1,r_0+1}. Отсюда, в частности, получаем $U_{D_1,D_2} f \subset A(L) \subset A(\Gamma)$. Аналогичные рассуждения применялись при доказательстве предложения 1 работы [13].

Случай 2. Ни в одну из диаграмм D_1 и D_2 не вкладывается D_{t_0+1,r_0+1}. Аналогично тому, как это сделано в [13], легко показать, что в этом случае любой элемент из $U_{D_1,D_2} f$ представляется в виде линейной комбинации многочленов вида

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(S_{A_1} \dots S_{A_{2r_0}} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t} f), \tag{1.18}$$

где $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_m$, $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_{r_0} \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_{t_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $A_{r_0+1} \sqcup \ldots \sqcup A_{2r_0} \sqcup B_{t_0+1} \sqcup \ldots \sqcup B_t =$ $= \{y_1, \dots, y_m\}$.

В силу определения 1.4 и однородности T-пространства Γ' имеет место формула

$$h = [f, x_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n} [f_i, x_i] \in \Gamma',$$

где $f_i x_i \in P(n+1, m)$. Положим $A_r = \{x_{n+1}\}$. Тогда по определению Γ' для любых разбиений $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_{r_0} \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_{t_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $A_{r_0+1} \sqcup \ldots \sqcup A_{2r_0} \sqcup B_{t_0+1} \sqcup \ldots \sqcup B_t = \{y_1, \dots, y_m\}$ получаем

$$S_{A_1} \dots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t} h = [S_{A_1} \dots S_{A_{2r_0}} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t} f, x_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n} [f'_i, x_i] \in \Gamma,$$

где $f'_i x_i \in P(n+1, m)$. Отсюда по определению 1.4 получаем $S_{A_1} \dots S_{A_{2r_0}} \Lambda_{B_1} \dots \Lambda_{B_t} f \in A(\Gamma)$. В силу формулы (1.18) получаем $U_{D_1,D_2} f \subset A(\Gamma)$.

Таким образом, после рассмотрения всех случаев мы доказали, что $f \in A(\Gamma)$. В силу произвольности выбора n и m имеем $A(\Gamma') \cap P = A(\Gamma) \cap P$. По теореме 1.3 получаем $\Gamma' = \Gamma$. Лемма доказана.

Замечание 1.5. Предложение 1 работы [13] фактически означает справедливость аналога доказанной леммы для T-пространств, не содержащихся в L_0. Это следует из того, что такие T-пространства содержат ненулевые T-идеалы.

1.6. Локализация

В этом разделе мы опять предполагаем, что $\operatorname{char} K = 0$. Для двух подпространств L_1 и L_2 алгебры F эквивалентность $L_1 \simeq_T L_2$ считаем выполненной, если наибольшие T-пространства, содержащиеся в L_1 и L_2 соответственно, совпадают.

Предположим, что заданы два натуральных числа r и t. Пусть $Y = \bigsqcup_{i=1}^{t} Y_i$, где Y_i — счетные бесконечные множества. Обозначим через I_r идеал алгебры F, порожденный переменными $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots\}$, а через J_i — идеал алгебры F, порожденный многочленами $a_1ua_2 + a_2ua_1$, где $a_1, a_2 \in Y_i$ и $u \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$. Через J обозначим идеал алгебры F, порожденный переменными из Y. Имеем $J_i \subset J$ для любого $i = 1, \ldots, t$.

Лемма 1.13. *Пусть $r \geqslant 3$. Тогда $L_0 + I_r + J \simeq_T L_0$.*

Доказательство. Пусть V — наибольшее T-пространство, содержащееся в $L_0 + I_r + J$. Тогда $L_0 \subset V$. Пусть f — полилинейный многочлен из V, зависящий от переменной x_1. Представим f в виде $f = x_1 g + f_1$, где $f_1 \in L_0$ и $x_1 \notin \mathrm{vr}(g)$. Пусть $\varphi\colon F \to K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(x_1) = x_1$ и $\varphi(x_i) \in K\langle x_2, x_3\rangle$ при $i \geqslant 2$. Тогда $\varphi(f) = x_1\varphi(g) + \varphi(f_1) \in V \subset L_0 + I_r + J$. Применим к последней формуле замену $x_i \to 0$, $i \geqslant 4$, $y_j \to 0$, $j \in \mathbb{N}$. Такая замена тождественно действует на $\varphi(f)$ и переводит в нуль идеалы I_r и J. Отсюда получаем $\varphi(f) \in L_0$. Из того, что $\varphi(f_1) \in L_0$, тогда следует $x_1\varphi(g) \in L_0$. Так как $\varphi(g)$ не зависит от x_1, то $\varphi(g) = 0$. Вследствие произвольности φ, удовлетворяющего перечисленным выше условиям, и того, что свободная двупорожденная алгебра не является PI-алгеброй, получаем $g = 0$. Отсюда $f = f_1 \in L_0$. Этим доказано, что $V \cap P \subset L_0$. Учитывая, что $\operatorname{char} K = 0$, получаем $V = L_0$. Лемма доказана.

Лемма 1.14. *Для любого ненулевого T-пространства $L \subset L_0$ числа r и t можно выбрать таким образом, что для любого T-пространства Γ, для которого $L \subset \Gamma \subset L_0$, выполнена эквивалентность $\Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t \simeq_T \Gamma$.*

Доказательство. Выберем числа r и t в соответствии с леммой 1.12 так, чтобы $r \geqslant 3$. Пусть V — наибольшее T-пространство, содержащееся в $\Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t$. Имеем $V \subset L_0 + I_r + J$. Отсюда по лемме 1.13 получаем $V \subset L_0$. Пусть f — ненулевой полилинейный многочлен из V и $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_t = \mathrm{vr}(f)$ — некоторое разбиение. Пусть φ — такой эндоморфизм алгебры F, что $\varphi(x) = x_i$ для $x \in A_i$, $i = 1, \ldots, r$, и φ переводит каждое множество переменных B_i, $i = 1, \ldots, t$, в множество переменных $B_i' \subset Y_i$ той же мощности. Имеем $\varphi(f) \in V \subset \Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t$. Поэтому имеет место представление $\varphi(f) = g + h + g_1 + \ldots + g_t$, где $g \in \Gamma$, $h \in I_r$ и $g_i \in J_i$. Применим к последнему равенству замену $x_i \to 0$, $i \geqslant r+1$, $y \to 0$, $y \in Y \setminus (B_1' \cup \ldots \cup B_t')$. Такая замена тождественно действует на $\varphi(f)$ и переводит в нуль идеал I_r. Отсюда получаем $\varphi(f) = g' + g_1' + \ldots + g_t'$, где многочлены g' и g_i' есть результат действия вышеописанной замены на многочлены g и g_i соответственно. При этом $g' \in \Gamma$ и g_i' принадлежит идеалу алгебры F, порожденному многочленами $a_1ua_2 + a_2ua_1$, где $a_1, a_2 \in B_i'$ и $u \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$. Из этого следует, что $\Lambda_{B_i'} g_i' = 0$. Отсюда $\Lambda_{B_1'} \ldots \Lambda_{B_t'} \varphi(f) = \Lambda_{B_1'} \ldots \Lambda_{B_t'} g' \in \Gamma$. Производя линеаризацию по $x_1, \ldots, x_r$ в многочлене $\Lambda_{B_1'} \ldots \Lambda_{B_t'} \varphi(f)$ и переименовывая некоторые переменные, получаем $S_{A_1} \ldots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \ldots \Lambda_{B_t} f \in \Gamma$. Так как эта формула выполняется для любого разбиения, то по лемме 1.12 имеем $f \in \Gamma$. Отсюда $V \cap P \subset \Gamma$. Учитывая, что $\operatorname{char} K = 0$, получаем $V = \Gamma$. Лемма доказана.

Обозначим через F_0 подпространство алгебры F, натянутое на слова $u \in \langle X \cup Y\rangle$, такие что $\deg_Y u$ четная, и через F_1 — подпространство алгебры F, натянутое на слова $u \in \langle X \cup Y\rangle$, такие что $\deg_Y u$ нечетная. Тогда $F = F_0 \oplus F_1$ есть Z_2-градуировка алгебры F. Через S_2 обозначим полугруппу таких эндоморфизмов φ алгебры F, что $\varphi(KX) \subset KX$ и $\varphi(KY) \subset KY$ и через T_2 полугруппу таких эндоморфизмов φ алгебры F, что $\varphi(F_0) \subset F_0$ и $\varphi(F_1) \subset F_1$. При этом $S_2 \subset T_2$. Следуя работе [14], введем следующие определения.

Определение 1.5. Подпространство L алгебры F называется S_2-пространством, если L замкнуто относительно всех эндоморфизмов из S_2.

Определение 1.6. Подпространство L алгебры F называется T_2-пространством, если L замкнуто относительно всех эндоморфизмов из T_2.

Определим отображение sign множества полилинейных слов из $\langle X \cup Y\rangle$ в $\{-1, 1\}$ следующим образом. Пусть $u = u_0 y_{i_{\sigma(1)}} u_1 \ldots u_{n-1} y_{i_{\sigma(n)}} u_n$ — полилинейное слово из $\langle X \cup Y\rangle$, где $u_0, \ldots, u_n$ — слова из $\langle X\rangle \cup \{1\}$, $i_1 < \ldots < i_n$ и $\sigma \in S_n$. Тогда положим $\mathrm{sign}(u) = \mathrm{sign}(\sigma)$. Определим линейное отображение из P в себя, действие которого на элемент f мы будем обозначать через f^*, следующим образом. Пусть $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ — элемент из P, где $\alpha_i \in K$ и u_i — такие полилинейные слова, что $\mathrm{vr}(u_i) = \mathrm{vr}(u_j)$ для любых $i, j = 1, \ldots, m$. Тогда положим $f^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \operatorname{sign}(u_i) u_i$. Очевидно, что $f^{**} = f$.

Если L есть S_2-пространство, то через L^* обозначим S_2-пространство, порожденное множеством $(L \cap P)^*$. Аналогично [14] можно показать, что для любого S_2-пространства L выполнено $L^{**} = L$.

Лемма 1.15. *Если L есть T_2-пространство, то L^* также T_2-пространство.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любого $\varphi \in T_2$ и любого $f \in L^*$ выполнено $\varphi(f) \in L^*$. Достаточно считать, что $f = \psi(g)$, где $\psi \in S_2$ и $g \in (L \cap P)^*$. Поэтому мы сразу считаем, что f — ненулевой многочлен из $(L \cap P)^*$. В силу этого можно еще предположить, что $\varphi(t) \in \langle X \cup Y \rangle$ для любой переменной $t \in X \cup Y$. Наконец, при выполнении последнего предположения имеет место представление $\varphi = \varphi_2 \varphi_1$, где $\varphi_1 \in T_2$, $\varphi_1(t)$ — полилинейное слово из $\langle X \cup Y \rangle$ для любой переменной $t \in X \cup Y$, для различных $t_1, t_2 \in X \cup Y$ слова $\varphi_1(t_1)$ и $\varphi_1(t_2)$ не зависят от общих переменных и $\varphi_2 \in S_2$. Поэтому достаточно считать, что уже φ удовлетворяет тем условиям, которые налагались на φ_1. Имеем $f = h^*$, где $h \in L \cap P$. Пусть v — слово, равное произведению всех переменных множества $\mathrm{vr}(h)$ в порядке возрастания. Пусть u — моном многочлена h и имеет место представление $u = u_0 y_{i_{\sigma(1)}} u_1 \ldots u_{n-1} y_{i_{\sigma(n)}} u_n$, где $u_0, \ldots, u_n$ — слова из $\langle X \rangle \cup \{1\}$, $i_1 < \ldots < i_n$ и $\sigma \in S_n$. Тогда имеем

$$\operatorname{sign}(\varphi(u)) = \operatorname{sign}(\varphi(u_0 \ldots u_n y_{i_{\sigma(1)}} \ldots y_{i_{\sigma(n)}})) = \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\varphi(v)) = \operatorname{sign}(u) \operatorname{sign}(\varphi(v)).$$

Домножая это равенство на $\varphi(u)$, получаем

$$\varphi(u)^* = \operatorname{sign}(\varphi(v)) \operatorname{sign}(u) \varphi(u) = \operatorname{sign}(\varphi(v)) \varphi(u^*).$$

Следовательно, $\varphi(f) = \operatorname{sign}(\varphi(v)) \varphi(h)^* \in (L \cap P)^*$. Лемма доказана.

Если в предыдущей лемме заменить выражение «T_2-пространство» на выражение «T_2-идеал», то получится лемма 5 работы [14]. T_2-пространство L назовем *T^*-пространством*, если $L = M^*$ для некоторого T-пространства M. Для двух подпространств L_1 и L_2 алгебры F эквивалентность $L_1 \simeq_{T^*} L_2$ считаем выполненной, если наибольшие T^*-пространства, содержащиеся в L_1 и L_2 соответственно, совпадают. Существование максимального T^*-пространства, содержащегося в некотором множестве, можно доказать методами работы [14].

Пусть $I_{r,t}$ — идеал алгебры F, порожденный переменными x_i, $i \geqslant r+1$, и y_j, $j \geqslant t+1$.

Лемма 1.16. *Для любого ненулевого T-пространства $L \subset L_0$ числа r и t можно выбрать таким образом, что для любого T-пространства Γ, для которого $L \subset \Gamma \subset L_0$, выполнена эквивалентность $\Gamma^* + I_{r,t} \simeq_{T^*} \Gamma^*$.*

Доказательство. Выберем числа r и t в соответствии с леммой 1.14. Пусть V — максимальное T^*-пространство, содержащееся в $\Gamma^* + I_{r,t}$. Докажем, что $V^* \subset \Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t$. Заметим, что V^* есть T-пространство. Для этого достаточно показать, что $\varphi(g^*) \in \Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t$ для любых $g \in (V \cap P) \setminus \{0\}$ и эндоморфизма φ, отображающего каждое множество X и Y в себя. Достаточно считать, что для любого $x \in \mathrm{vr}(g) \cap X$ мы имеем $\varphi(x) \in \{x_1, \ldots, x_r\}$, так как иначе мы бы получили $\varphi(g^*) \in I_r$.

Пусть φ' и φ'' — такие эндоморфизмы алгебры F, что $\varphi'(x) = \varphi(x)$ для $x \in X$, $\varphi'(y) = y$ для $y \in Y$ и $\varphi''(x) = x$ для $x \in X$, $\varphi''(y) = \varphi(y)$ для $y \in Y$. Так как $g \in V \cap P$ и $V \cap K\langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_t \rangle \subset \Gamma^*$, то для любых разбиений $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r = \mathrm{vr}(g) \cap X$ и $B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_t = \mathrm{vr}(g) \cap Y$ выполнено $S_{A_1} \ldots S_{A_r} S_{B_1} \ldots S_{B_t} g \in \Gamma^*$. Из последней формулы получаем $S_{A_1} \ldots S_{A_r} \Lambda_{B_1} \ldots \Lambda_{B_t} g^* \in \Gamma$. Отсюда в силу $\operatorname{char} K = 0$ и того, что $\varphi'(x) \in \{x_1, \ldots, x_r\}$ для любого $x \in \mathrm{vr}(g) \cap X$, имеем

$$\Lambda_{B_1} \ldots \Lambda_{B_t} \varphi'(g^*) \in \Gamma. \tag{1.19}$$

Положим $B = \mathrm{vr}(g) \cap Y$ и $m = |B|$. Определим действие группы S_m на подпространстве U алгебры F, натянутом на однородные многочлены h, такие что $\deg_y h = 1$ для любого $y \in B$, по формуле

$\sigma h = p_B(\sigma)h$, $h \in U$. Как было замечено в разделе 1.5, имеет место разложение $KS_m = \bigoplus\limits_{|D|=m} U_D$. В силу формулы (1.19) имеем $U_D\varphi'(g^*) \in \Gamma$, и следовательно, $\varphi''(U_D\varphi'(g^*)) \in \Gamma$ для диаграмм D, у которых первая строка не длиннее чем t. С другой стороны, если первая строка диаграммы D длиннее чем t, то любой многочлен из $U_D\varphi'(g^*)$ есть линейная комбинация многочленов вида $S_{B'}h$, где $B' \subset B$, $|B'| > t$ и $h \in U$. Легко проверить, что тогда $\varphi''(S_{B'}h) \in J_1 + \ldots + J_t$. Из доказанных фактов и представления $\varphi(g^*) = \varphi''\varphi'(g^*)$ получаем $\varphi(g^*) \in \Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t$, и следовательно, $V^* \subset \Gamma + I_r + J_1 + \ldots + J_t$. По лемме 1.14 имеем $V^* = \Gamma$ и $V = \Gamma^*$. Лемма доказана.

Пусть u и v — слова из $\langle X \cup Y\rangle$. Через $[u, v]_2$ обозначим многочлен $[u, v]$, если $\deg_Y u \cdot \deg_Y v$ — четное число, или $uv + vu$, если $\deg_Y u \cdot \deg_Y v$ — нечетное число. Для произвольных многочленов f и g выражение $[f, g]_2$ определим по линейности. Имеет место следующее соотношение: $[f, g]^* = c[f^*, g^*]_2$ для любых $f, g \in P$, таких что $\mathrm{vr}(f) \cap \mathrm{vr}(g) = \varnothing$, где $c = \pm 1$ — константа, зависящая только от $\mathrm{vr}(f)$ и $\mathrm{vr}(g)$.

Для любого T_2-пространства Γ алгебры F через $[\Gamma, F]_2$ обозначим подпространство алгебры F, порожденное как линейное пространство элементами вида $[g, f]_2$, где $g \in \Gamma$ и $f \in F$.

Лемма 1.17. *Для любого T_2-пространства Γ выполнено $[\Gamma, F]_2 = [\Gamma^*, F]^*$. В частности, $[\Gamma, F]_2$ есть T_2-пространство.*

Доказательство. Как S_2-пространство $[\Gamma^*, F]^*$ порождено многочленами вида $[g, f]^*$, где $g \in \Gamma^*$, $f \in F$ и $gf \in P$. Так как $[g, f]^* = \pm[g^*, f^*]_2$, то для любого $\varphi \in S_2$ выполнено $\varphi([g, f]^*) = \pm [\varphi(g^*), \varphi(f^*)]_2 \in [\Gamma, F]_2$. Поэтому $[\Gamma^*, F]^* \subset [\Gamma, F]_2$.

Наоборот, пусть $h \in \Gamma$ и $f \in F$ — однородные многочлены. Так как $\operatorname{char} K = 0$, то существуют такие полилинейные многочлены $h' \in \Gamma$ и $f' \in F$ и эндоморфизм $\varphi \in S_2$, что $h'f' \in P$, $\varphi(f') = f$ и $\varphi(h') = h$. Так как $[f', h']_2 = \pm[(f')^*, (h')^*]^*$, то $[f', h']_2 \in [\Gamma^*, F]^*$ и, следовательно, $[f, h]_2 = \varphi([f', h']_2) \in [\Gamma^*, F]^*$. Учитывая однородность пространства Γ, получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Через M_n обозначим T-идеал алгебры F, состоящий из тождеств алгебры матриц размера $n \times n$ над полем K.

Пусть $L_1 \subset \ldots \subset L_i \subset \ldots$ — счетная бесконечная цепочка T-пространств. Естественным аналогом проблемы Шпехта для T-пространств является проблема стабилизации каждой такой цепочки. Положительное решение этой проблемы было получено в [24].

Если L_i не содержится в L_0 для некоторого i, то по лемме 1.7 получаем, что L_i содержит ненулевой T-идеал. Возможен также случай, когда все L_i содержатся в L_0. В работе [24] рассматривается только второй случай. Это происходит потому, что рассмотрение первого случая можно произвести некоторым упрощением полученных конструкций второго случая. С другой стороны, первый случай можно свести ко второму, если профильтровать по L_0 и воспользоваться леммой 1.9.

Проблему стабилизации цепочек T-пространств, каждое из которых содержится в L_0, для нулевой характеристики основного поля (т. е. второй случай) назовем *ограниченной проблемой Шпехта*. Следуя работе [14], докажем следующий вариант редукции этой проблемы.

Теорема 1.4. *Предположим, что для любых натуральных n, r и t и для любой возрастающей цепочки T_2-пространств $[M_n, F]_2 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_i \subset \ldots$ цепочка пространств $V_1 \cap A \subset \ldots \subset V_i \cap A \subset \ldots$, где $A = K\langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_t\rangle$, стабилизируется. Тогда ограниченная проблема Шпехта решается положительно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $L_1 \subset \ldots \subset L_i \subset \ldots$ — бесконечная строго возрастающая цепочка ненулевых T-пространств, содержащихся в L_0. Так как L_1 ненулевое, то по лемме 1.8 существует ненулевой T-идеал I, такой что $[I, F] \subset L_1$. По лемме 1.17 имеем $[I^*, F]_2 \subset L_1^*$. По лемме 1.16 существуют натуральные числа r и t, такие что для любого $i \geqslant 1$ выполнено $L_i^* + I_{r,t} \simeq_{T^*} L_i^*$.

Пусть $A = K\langle x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_t\rangle$ — подалгебра алгебры F. Тогда $L_i^* + I_{t,r} = L_i^* \cap A + I_{r,t}$ в силу того, что L_i^* есть T_2-пространство. Отсюда следует, что $(L_i^* + I_{t,r}) \cap A = L_i^* \cap A$. Докажем, что цепочка пространств $L_1^* \cap A \subset \ldots \subset L_i^* \cap A \subset \ldots$ строго возрастает. Действительно, если

$L_i^* \cap A = L_{i+1}^* \cap A$, то $L_i^* + I_{r,t} = L_{i+1}^* + I_{r,t}$. Отсюда $L_{i+1}^* \subset L_i^* + I_{r,t}$. Так как L_{i+1}^* есть T^*-пространство, то по лемме 1.16 получаем $L_{i+1}^* = L_i^*$. Поэтому $L_{i+1} = L_i$, что противоречит условию. Пусть V_i — наибольшее T_2-пространство, содержащееся в $(L_i^* + I_{r,t}) \cap L_0^*$. По лемме 1.15 получаем $L_i^* \subset V_i$, и следовательно, $L_i^* \cap A \subset V_i \cap A$. С другой стороны, $V_i \cap A \subset (L_i^* + I_{r,t}) \cap A \cap L_0^* \subset L_i^* \cap A$. Отсюда $V_i \cap A = L_i^* \cap A$, и цепочка $V_1 \cap A \subset \ldots \subset V_i \cap A \subset \ldots$ строго возрастает.

По лемме 6 работы [14] алгебра $F/I^* + I_{r,t}$ есть конечно порожденная PI-алгебра. Поэтому для некоторого n эта алгебра удовлетворяет всем тождествам алгебры матриц размера $n \times n$ над полем K. Отсюда $M_n \subset I^* + I_{r,t}$. Для того чтобы прийти к противоречию, надо показать, что $[M_n, F]_2 \subset V_1$.

Так как $[M_n, F]_2$ есть T_2-пространство и $[M_n, F]_2 \subset L_0^*$, достаточно показать, что $[M_n, F]_2 \subset \subset L_1^* + I_{r,t}$. Пусть $g \in M_n \cap A$, а $f \in A$. Так как $M_n \cap A \subset I^*$, то $g \in I^*$ и $[g, f]_2 \in [I^*, F]_2$. Вспоминая, что $[I^*, F]_2 \subset L_1^*$, получаем $[M_n, F]_2 \subset L_1^* + I_{r,t}$. Теорема доказана.

Глава 2

ПРИМЕРЫ НЕ КОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ T-ПРОСТРАНСТВ И T-ИДЕАЛОВ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Цель настоящей главы — показать, что в случае, когда основное поле имеет характеристику $p > 0$, аналоги результатов предыдущей главы места не имеют. Соответствующие результаты приведены в разделах 2.2 и 2.3. Более точно, приводятся конкретные примеры не конечно базируемого T-пространства и T-идеала над полем характеристики 2 и рассматриваются следствия из этого результата. В разделах 2.4 и 2.5 рассматриваются так называемые *экстремальные свойства* приведенного ранее контрпримера (относительно коразмерности и относительно подмногообразий). При доказательстве используется алгебра Φ_2, являющаяся в характеристике 2 некоторым аналогом алгебры Грассмана. Отметим, что основная трудность при отрицательном решении проблемы конечной базируемости состоит в построении T-пространства, не имеющего конечного базиса. Построение соответствующего T-идеала — некоторое техническое (правда, нетривиальное) следствие. Это и показано в разделе 2.3.

В коммутативном случае имеется полный аналог результатов предыдущей главы. Этому посвящен раздел 2.6 (см. также [29]).

2.1. Определения, обозначения, предварительные результаты

Для удобства читателя напомним некоторые определения из работы [9].

Пусть $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счетно порожденная ассоциативная алгебра над полем k характеристики 2 и $A = k[\ldots \alpha_{ij} \ldots]$ — коммутативная k-алгебра, порожденная элементами α_{ij}, где $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $(1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{il}) = 0$, $(1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{mn}) = (1 + \alpha_{im})(1 + \alpha_{jn})$.

Обозначим через A_n подалгебру алгебры A, порожденную элементами α_{ij}, для которых $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Рассмотрим алгебру $\Phi_2 = A\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle/I$, где I — идеал свободной A-алгебры $A\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, порожденный элементами $x_i x_j + \alpha_{ij} x_j x_i$. Алгебра F естественным образом вложена в алгебру $A\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, а алгебра $\bar{F} = F/F \cap I$ — в алгебру Φ_2.

Образы многочленов f из алгебры F в алгебре $\bar{F}$ будем обозначать через $\bar{f}$ и также называть *многочленами*.

Положим $\theta_{ij} = 1 + \alpha_{ij}$. Тогда указанные выше соотношения на элементы α_{ij}, очевидно, эквивалентны следующим соотношениям на элементы θ_{ij}: $\theta_{ij}\theta_{il} = 0$, $\theta_{ij}\theta_{mn} = \theta_{im}\theta_{jn}$.

В силу того, что в алгебре A имеет место равенство

$$1 + ab = (1 + a)(1 + b) + 1 + a + 1 + b,$$

где a и b — одночлены от элементов α_{ij}, любой элемент из радикала алгебры A является суммой произведений элементов θ_{ij}, и этот радикал можно рассматривать как идеал алгебры многочленов

$k[\{t_{ij}\}]$, порожденный элементами t_{ij}, профакторизованный по идеалу, порожденному многочленами $t_{ij}t_{il}, t_{ij}t_{lk}+t_{il}t_{jk}$, причем элемент θ_{ij} является образом элемента t_{ij} при этой факторизации.

Всюду ниже произведения элементов вида α_{ij} (соответственно θ_{ij}) будем называть *α-одночленами* (соответственно *θ-одночленами*), а их суммы — *α-многочленами* (соответственно *θ-многочленами*). Легко видеть, что всякий элемент из алгебры A можно представить в виде линейной комбинации одночленов от элементов θ_{ij} (*θ-многочленов*).

Представление через элементы θ_{ij} несколько более удобно, так как соотношения на эти элементы однородны. Кроме того, идеал I в таком случае порождается элементами $\theta_{ij}x_ix_j+[x_i,x_j]$, которые более «симметричны». Ясно, что он состоит из линейных комбинаций элементов вида

$$au(\theta_{ij}x_ix_j+[x_i,x_j])v, \tag{2.1}$$

где u и v — некоторые одночлены от переменных x_i, $a=1$ или $a=\theta_{i_1j_1}\dots\theta_{i_rj_r}$, причем элементы набора $i_1,j_1,\dots,i_r,j_r$ попарно различны.

Пусть $\bar u$ и $\bar v$ — одночлены из алгебры $\bar F$. Тогда, очевидно, $[\bar u,\bar v]=(1+a)\bar u\bar v$, где a — некоторое произведение элементов α_{ij}. Выясним, при каких условиях произведение a содержит данный элемент α_{ij}. Для этого удобна следующая конструкция. Поставим в соответствие индексу i набор $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, где ε_i равен 0, если u имеет четную степень по переменной x_i, и 1, если нечетную, а ε_2 определяется аналогично по отношению к одночлену v. Такой набор будем называть *схемой вхождения индекса i в коммутатор* $[\bar u,\bar v]$.

Если $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ — схема вхождения индекса i, а (δ_1,δ_2) — схема вхождения индекса j в коммутатор $[\bar u,\bar v]$, то, как нетрудно заметить, элемент α_{ij} содержится в a тогда и только тогда, когда матрица $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2\\ \delta_1&\delta_2\end{smallmatrix}\right)$, называемая *схемой вхождения пары индексов* (i,j) в коммутатор $[\bar u,\bar v]$, имеет один из следующих шести видов:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ясно, что если uv имеет нечетную степень по x_i, то схема вхождения индекса i в коммутатор $[\bar u,\bar v]$ имеет вид $(1,0)$ или $(0,1)$.

Можно показать, что на алгебре Φ_2 выполнено тождество $[x_1,[x_2,x_3]]=0$ (см. замечания работ [9], [1], [22]). Это означает, по сути дела, что $I\cap F\supset([x_1,[x_2,x_3]])^T$. На самом деле, как это будет показано ниже, верно и обратное включение. Имеет место

Теорема 2.1. $F\cap I=([x_1,[x_2,x_3]])^T$.

Доказательству этой теоремы предпошлем ряд лемм.

Первая лемма доказывает включение $I\cap F\supset([x_1,[x_2,x_3]])^T$.

Лемма 2.1. *На алгебре Φ_2 выполнено тождество* $[x_1,[x_2,x_3]]=0$.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать, что для любых трех одночленов $\bar u$, $\bar v$, $\bar w$ из алгебры $\bar F$ имеет место равенство $[\bar u,[\bar v,\bar w]]=0$. Для этого достаточно доказать, что через коммутатор можно «перебрасывать» одну переменную, т. е. доказать, что для любого l имеет место равенство

$$[\bar x_l,[\bar u,\bar v]]=0. \tag{2.2}$$

Пусть $[\bar u,\bar v]=(1+a)\bar u\bar v$ и α_{ij} входит в произведение a. Это означает, что схема вхождения пары индексов (i,j) в коммутатор $[u,v]$ имеет один из указанных выше шести видов. Выражение (2.1) можно представить в виде

$$(1+a)(1+b)\bar x_l\bar u\bar v, \tag{2.3}$$

где $b=\alpha_{lm_1}\dots\alpha_{lm_3}$.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно рассмотреть следующие два случая (остальные разбираются аналогично).

I. Схема вхождения пары индексов (i,j) имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. В этом случае α_{il} и α_{jl} входят в произведение b.

Рассматривая выражение $(1+a)(1+b)$ как θ-многочлен, можно заметить, что для того чтобы элемент θ_{ij} давал ненулевой вклад в это выражение, т. е. входил в один из ненулевых θ-одночленов, необходимо, чтобы число l отличалось от i и j и для элемента θ_{ij} из θ-одночлена из первой скобки нашелся такой элемент θ_{lm} из θ-одночлена из второй скобки, что индексы i, j, l и m попарно различны. Ясно, что uv имеет нечетную степень по x_m, и следовательно, схема вхождения индекса m имеет вид $(1,0)$ или $(0,1)$. Пусть для определенность она имеет вид $(1,0)$. Тогда пара индексов (j,m) имеет схему вхождения $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, и следовательно, элемент α_{jm} входит в a. С другой стороны, элемент α_{im} не может входить в a, так как соответствующая схема вхождения имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$.

Таким образом, часть θ-многочлена $(1+a)(1+b)$, содержащая индексы i, j, l, m, имеет вид $(\theta_{ij}\theta_{lm}+\theta_{il}\theta_{jm})\tau$, что равно нулю в силу соотношений на θ-многочленах.

Рассматривая аналогично остальные сомножители произведения a, получаем, что и все выражение (2.3) равно нулю.

II. Схема вхождения пары индексов (i,j) имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. В этом случае в произведение b входит только α_{il} (α_{jl} не входит по причине четности вхождения переменной x_j в одночлен $\bar{u}\bar{v}$).

Аналогично случаю I возникают попарно различные индексы i, j, l, m, причем одночлен uv имеет нечетную степень по x_m. Пусть схема вхождения индекса m имеет, для определенности, вид $(0,1)$. Тогда схема вхождения пары (i,m) имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, а пары (j,m) — $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, т. е. элементы α_{jm} и α_{im} входят в произведение a.

Таким образом, как и в случае I, часть θ-многочлена $(1+a)(1+b)$, содержащая индексы i, j, l, m, имеет вид $(\theta_{ij}\theta_{lm}+\theta_{il}\theta_{jm})\tau=0$. Таким образом, (2.2) и лемма доказаны.

Следующие леммы посвящены исследованию T-идеала $([x_1,[x_2,x_3]])^T$ и идеала I.

Лемма 2.2.
а) $[x_1^2,x_2]\in([x_1,[x_2,x_3]])^T$;
б) $[x_1,x_2][x_1,x_3]\in([x_1,[x_2,x_3]])^T$.

Доказательство.
а) $[x_1^2,x_2]=x_1x_1x_2+x_2x_1x_1=x_1x_1x_2+x_1x_2x_1+x_1x_2x_1+x_2x_1x_1=[x_1,[x_1,x_2]]\in([x_1,[x_2,x_3]])^T$.
б) Нетрудно заметить, что имеют место следующие два соотношения:

$$[x_1,x_2[x_1,x_3]]\equiv[x_1,[x_2x_1,x_3]]+[x_1,[x_2,x_3]x_1]\equiv[x_1,[x_2,x_3]x_1]\pmod{([x_1,[x_2,x_3]])^T},$$
$$[x_1,x_2x_1]=x_1x_2x_1+x_2x_1x_1=[x_1,x_2]x_1.$$

Из них непосредственно следует, что

$$[x_1,x_2[x_1,x_3]]\equiv[x_1,[x_2,x_3]x_1]\equiv[x_1,[x_2,x_3]]x_1\equiv0\pmod{([x_1,[x_2,x_3]])^T}.$$

Следовательно,

$$[x_1,x_2][x_1,x_3]\equiv x_1x_2[x_1,x_3]+x_2[x_1,x_3]x_1\equiv[x_1,x_2[x_1,x_3]]\equiv0\pmod{([x_1,[x_2,x_3]])^T}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. $[x_1,x_2][x_3,x_4]\equiv[x_1,x_3][x_2,x_4]\pmod{([x_1,[x_2,x_3]])^T}$.

Доказательство. Линеаризуя многочлен $[x_1,x_2][x_2,x_4]$ по переменной x_2 и применяя лемму 2.2, получаем утверждение леммы 2.3.

Лемма 2.4. *Если* $\{i_1,j_1,\ldots,i_r,j_r\}=\{m_1,n_1,\ldots,m_r,n_r\}$, *то*

$$[x_{i_1},x_{j_2}]\ldots[x_{i_r},x_{j_r}]\equiv[x_{m_1},x_{n_2}]\ldots[x_{m_r},x_{n_r}]\pmod{([x_1,[x_2,x_3]])^T}.$$

Доказательство. Левая часть доказываемого сравнения по лемме 2.3 сравнима с произведением, в котором переставлены местами переменные из соседних коммутаторов. Остается заметить, что любая перестановка элементов $i_1,j_1,\ldots i_r,j_r$ может быть получена последовательным применением таких транспозиций. Лемма доказана.

Лемма 2.5. $\theta_{il}u[x_i,x_j]v\in I$.

Доказательство. Произведение $\theta_{il}(\theta_{ij}ux_ix_jv+u[x_i,x_j]v)$, очевидно, лежит в I. Из равенства $\theta_{il}\theta_{ij}=0$ получаем утверждение леммы.

Лемма 2.6. $\theta_{il}ux_ix_jx_lv + ux_j[x_i, x_l]v \in I$; $\theta_{il}ux_lx_jx_iv + u[x_l, x_i]x_jv \in I$.

Доказательство. По лемме 2.5 $\theta_{il}u[x_i, x_j]x_lv = \theta_{il}ux_ix_jx_lv + ux_j[x_i, x_l]v + \theta_{il}ux_jx_ix_lv + ux_j[x_i, x_l]v$ лежит в I. Так как вторая половина этой суммы лежит в I, то и первая лежит в I. Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Назовем *простой редукцией элемента* $\theta_{ij}ux_ix_jv$ (соответственно $\theta_{il}ux_ix_jx_lv$ или $\theta_{il}ux_lx_ix_jv$) по подслову x_ix_j (соответственно $x_ix_jx_l$ или $x_lx_jx_i$) элемент $u[x_i, x_j]v$ (соответственно $ux_j[x_i, x_l]v$ или $u[x_i, x_l]x_jv$). Назовем *простой редукцией элемента* $\theta_{lm}u[x_i, x_j]vx_lx_mw$ элемент вида $u[x_i, x_j]v[x_l, x_m]w$, если i, j, l, m — попарно различные числа, и 0, если $\{i, j\} \cap \{l, m\}$ не пусто.

Операцию перехода от элемента к его редукции также будем называть *простой редукцией*.

Элемент вида
$$\theta_{i_1j_1} \dots \theta_{i_rj_r}u, \tag{2.4}$$
где u — некоторый одночлен из алгебры F, назовем *редуцируемым*, если он за r простых редукций приводится к некоторому элементу из алгебры F (может быть, нулевому), который будем называть *редукцией* элемента (2.4).

В силу доказанных выше лемм редукция определена корректно, т. е. по модулю T-идеала $([x_1, [x_2, x_3]])^T$ не зависит от выбора подслов x_ix_j. Кроме того, редукции на одночленах и на элементах, содержащих коммутаторы, очевидно, согласованы.

Доказательство теоремы 2.1. В силу леммы 2.1 достаточно доказать включение $I \cap F \subset$ $\subset ([x_1, [x_2, x_3]])^T$. Легко видеть, что

1) линейная оболочка редуцируемых элементов имеет нулевое пересечение с линейной оболочкой нередуцируемых элементов;
2) если у элемента (2.1) $a = \theta_{i_1j_1} \dots \theta_{i_rj_r}$, где $r \geqslant 1$, то все составляющие его одночленные слагаемые редуцируемы или нередуцируемы одновременно;
3) всякий элемент из $F \cap I$ является линейной комбинацией элементов вида
$$au + u' = \theta_{i_1j_1} \dots \theta_{i_rj_r}u + u', \tag{2.5}$$
где $\theta_{i_1j_1} \dots \theta_{i_rj_r}u$ — редуцируемый элемент, а u' — его редукция.

Ясно, что элементы вида (2.5), которые отличаются на элементах a или u, линейно независимы. Следовательно, взаимно уничтожиться могут только элементы вида $au+u'$ и $au+u''$, где u' и u'' — две редукции элемента au. В силу корректности редукции элемент $u' + u''$ лежит в T-идеале $([x_1, [x_2, x_3]])^T$. Следовательно, в пересечении $F \cap I$ могут находиться *только* элементы из этого T-идеала. Теорема доказана.

2.2. Бесконечно базируемое T-пространство над полем характеристики 2

Пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ — свободная счетно порожденная алгебра над полем k характеристики 2. Рассмотрим подмножество S в алгебре F, состоящее из многочленов вида $f_n = x_1^2 \dots x_n^2$. В этом разделе будет показано, что T-пространство S^T не является конечно порожденным. На самом деле будет доказана теорема, из которой следует, что S^T не является конечно порожденным T-пространством даже по модулю T-идеала, порожденного «тройным коммутатором» $[x_1, [x_2, x_3]]$. Это будет использовано в разделе 2.3 при решении аналога проблемы Шпехта в характеристике 2.

Рассмотрим сначала T-пространство S^T в свободной алгебре F. В этом случае достаточно показать, что для любого $n > 1$ многочлен f_n не принадлежит T-пространству $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}^T$. Допустим, что многочлен f_n является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых получается из одного из многочленов $f_1, \dots, f_{n-1}$ с помощью некоторых подстановок вместо переменных некоторых многочленов из алгебры F. Ясно, что можно считать, что многочлен f_n является линейной комбинацией многочленов вида $g = h_1 \dots h_s$, где $1 \leqslant s \leqslant n-1$, а многочлен h_i либо равен квадрату полилинейного одночлена, либо имеет вид $uv + vu$, причем степени одночленов u и v по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$ не превосходят 2, а $\deg_{x_i} g = 2$ при $i = 1, \dots, n$.

Скажем, что g — *квадратичный* одночлен, если все h_i — квадраты полилинейных одночленов, причем хотя бы один из этих одночленов имеет степень не меньше 2.

Скажем, что g — *коммутаторный* многочлен, если среди сомножителей h_i присутствуют многочлены вида $uv + vu$. В этом случае число входящих в многочлен g коммутаторов назовем *кратностью* многочлена g. Коммутаторный многочлен кратности m будем записывать в виде $g = b_1c_1 \dots b_mc_mb_{m+1}$, где $c_i = u_iv_i + v_iu_i$, а b_i — произведение квадратов полилинейных одночленов или 1.

Так как все рассматриваемые ниже многочлены определены над простым подполем k, то, не теряя общности, можно, очевидно, считать, что k — поле из двух элементов.

Таким образом, предположение о том, что $f_n \in \{f_1, \dots, f_{n-1}\}^T$, равносильно тому, что одночлен f_n, который всюду ниже будет обозначаться буквой e, является суммой квадратичных и коммутаторных многочленов.

Пусть W_n — множество всех одночленов, имеющих по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$ степени 2 (2-слова в терминах Ю. П. Размыслова). Каждый из многочленов g состоит из одночленов, принадлежащих множеству W_n, т. е. принадлежит конечномерному векторному пространству $k(W_n)$, порожденному множеством W_n.

Скажем, что одночлен u является *полным* подсловом, если он является подсловом некоторого 2-слова из W_n, причем имеет степень 2 по всем входящим в него переменным (т. е. является 2-словом от, возможно, меньшего числа переменных). Из определения коммутаторного многочлена кратности m следует, что $u_1v_1 \dots u_mv_m$ — полное подслово.

Многочлен из векторного пространства $k(W_n)$, имеющий вид $w_1[u_1, [u_2, u_3]]w_2$ (здесь $u_1u_2u_3$ не обязательно полное подслово), назовем *бикоммутаторным*.

Основным результатом настоящего раздела является

Теорема 2.2. *Одночлен $e = x_1^2 \dots x_n^2$ нельзя представить в виде суммы квадратичных, коммутаторных и бикоммутаторных многочленов.*

Из этой теоремы непосредственно получается

Следствие 2.1. *Пусть Ω — T-идеал алгебры F, порожденный многочленом $[x_1, [x_2, x_3]]$. Тогда T-пространство, порожденное множеством $S = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ в относительно свободной алгебре F/Ω, не является конечно базируемым.*

Доказательство теоремы 2.2. Начнем с одного простого, но полезного в дальнейшем утверждения.

Лемма 2.7. *Если e является суммой квадратичных, коммутаторных и бикоммутаторных многочленов, то число квадратичных одночленов в этой сумме нечетно.*

Доказательство. Достаточно положить все x_i равными единице. Тогда предположение о четности числа квадратичных одночленов приведет к равенству $1 = 0$, что и доказывает лемму.

Для дальнейшего нам понадобится алгебра Φ_2, рассмотренная в разделе 2.1.

Рассмотрим свободную счетно порожденную A-алгебру $\Phi = A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, содержащую k-подалгебру F. Пусть $A(W_n)$ — левый A-модуль, порожденный множеством W_n, $\overline{A(W_n)}$, $\overline{k(W_n)}$, $\overline{W_n}$ — образы множеств $A(W_n)$, $k(W_n)$ и W_n при каноническом гомоморфизме $\Phi \to \Phi_2 = \Phi/I$.

Легко видеть, что $\overline{A(W_n)}$ — циклический A-модуль, порожденный любым из элементов множества $\overline{W_n}$. При этом ни один из элементов множества $\overline{W_n}$ не аннулируется ни каким из ненулевых элементов алгебры A. В самом деле, любое 2-слово, очевидно, может быть получено из одночлена e цепочкой перестановок соседних переменных, что в модуле $\overline{A(W_n)}$ равносильно умножениям на обратимые элементы α_{ij}. Кроме того, нетрудно проверить, и это будет сделано ниже, что в $I \cap A(W_n)$ нет элементов вида φe, где φ — ненулевой элемент алгебры A.

Для исследования строения элементов из W_n введем следующее определение. Скажем, что неупорядоченная пара индексов $\{i, j\}$ *связана* в 2-слове w, если при специализации всех переменных, кроме i и j, в единицу получается одночлен $x_ix_jx_ix_j$ или $x_jx_ix_jx_i$. Множество всех неупорядоченных пар $\{i, j\}$, связанных в 2-слове w, обозначим через $C(w)$. Непосредственное вычисление показывает, что по модулю идеала I любое 2-слово w можно представить в виде $w \equiv \alpha(w)e$, где $\alpha(w)$ — произведение всех таких α_{ij}, что $\{i, j\} \in C(w)$.

Покажем теперь, что $(I \cap A(W_n)) \cap Ae = 0$. Модуль $I \cap A(W_n)$ порождается по определению элементами вида $w+\alpha_{ij}w'$, где 2-слово w' отличается от 2-слова w на перестановку соседних переменных. С другой стороны, $w \equiv \alpha(w)e\ (I)$ и $w' \equiv \alpha(w')e\ (I)$, причем $\alpha(w) = \alpha_{ij}\alpha(w)$. Следовательно, любой элемент $w+\alpha_{ij}w'$ из модуля $I \cap A(W_n)$ имеет вид $w+\alpha_{ij}w' = w+\alpha(w)e+\alpha(w)e+\alpha_{ij}w' = w+\alpha(w)e+\alpha_{ij}(w'+\alpha_{ij}(w)e) = w+\alpha(w)e+\alpha_{ij}(w'+\alpha(w')e)$. Таким образом, этот модуль порождается элементами $e+\alpha(w)w$ (или, что то же самое, элементами $\alpha(w)e+w$).

Пусть $\sum\limits_i \sum\limits_w \varphi_{i,w}(e+\alpha(w)w)$ — элемент вида φe. Ясно, что разные 2-слова не могут «взаимодействовать». Следовательно, $\sum\limits_i \varphi_{i,w}(e+\alpha(w)w) \in Ae$, т. е. $\sum\limits_i \varphi_{i,w}\alpha(w) = 0$, и в силу обратимости элемента $\alpha(w)$ $\sum\limits_i \varphi_{i,w} = 0$, т. е. $\varphi = 0$.

Ясно, что $w_1+\ldots+w_r \equiv (\alpha(w_1)+\ldots+\alpha(w_r))e\ (I)$, причем $w_1+\ldots+w_r \equiv w_1'+\ldots+w_s'\ (I)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(w_1)+\ldots+\alpha(w_r) = \alpha(w_1')+\ldots+\alpha(w_s')$.

Таким образом, имеется естественное вложение α векторного пространства $\overline{k(W_n)}$ в алгебру A, при котором элемент $\bar{e}$ отождествляется, очевидно, с единицей алгебры A. Образы элементов из векторного пространства $k(W_n)$ относительно композиции канонического гомоморфизма $k(W_n)$ на $\overline{k(W_n)}$ и отображения α будем в дальнейшем называть *α-образами* этих элементов.

Для исследования α-образов коммутаторных и бикоммутаторных многочленов введем следующие определения. Пусть uv — подслово некоторого 2-слова из W_n. Скажем, что *индекс i однократно входит в коммутатор* $[u,v]$, если переменная x_i входит в одночлен uv в степени 1. Скажем, что *индекс i двукратно входит в коммутатор* $[u,v]$, если переменная x_i входит в каждый из одночленов u и v. В остальных случаях будем считать, что *индекс i не входит в коммутатор* $[u,v]$ (даже если переменная x_i дважды входит в одночлен u или в v).

Прямая проверка показывает, что $[u,v] \equiv (1+a)uv\ (I)$, где a — произведение таких элементов α_{ij}, что хотя бы один из этих индексов входит в коммутатор $[u,v]$ однократно, а другой — однократно или двукратно.

Имеют место следующие соотношения в пространстве $\overline{k(W_n)}$, дающие, в частности, ответ на поставленный выше вопрос об α-образах коммутаторных и бикоммутаторных многочленов (ниже w_1 и w_2 — некоторые одночлены или 1).

1. $\overline{w_1[u,v]w_2} = 0$, где u, v или uv — полное подслово, в частности, когда $u = u_1^2$.
2. $\overline{w_1[u,v]^2w_2} = 0$.
3. $\overline{w_1[x_i,x_ix_j][x_l,x_lx_j]w_2} = 0$.
4. $\overline{w_1[x_ix_j,x_ix_k][x_lx_j,x_lx_k]w_2} = 0$.
5. $\overline{w_1[u_1,v_1]\ldots[u_m,v_m]w_2} = 0$, где $u_1v_1\ldots u_mv_m$ — полное подслово (при $m=1$ получаем соотношение 1).
6. $\overline{w_1[[u_1,[u_2,u_3]]w_2} = 0$.
7. Если w — квадратичный одночлен из W_n, то $\overline{e+w}$ — сумма нечетного числа попарно различных ненулевых θ-одночленов.

Перейдем теперь к доказательству этих соотношений.

1. Соотношение следует из того, что в полном подслове не может быть однократных индексов.
2. Соотношение следует из равенства $(1+a)^2 = 0$ в алгебре A, если a — произведение элементов α_{ij}.
3. Соотношение следует из равенства $(1+\alpha_{ij})(1+\alpha_{lj}) = 0$.
4. Соотношение следует из того, что

$$[x_ix_j,x_ix_k] \equiv (1+\alpha_{ik}\alpha_{ij}\alpha_{jk})x_ix_jx_ix_k \quad (I),$$
$$[x_lx_j,x_lx_k] \equiv (1+\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{lk})x_lx_jx_lx_k \quad (I),$$
$$(1+\alpha_{ik}\alpha_{ij}\alpha_{jk})(1+\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{lk}) = (1+\alpha_{ik})(1+\alpha_{lj})+(1+\alpha_{ij})(1+\alpha_{lk}) = 0.$$

Замечание 2.1. Свойства 1—4 проясняют причину того, что в алгебре A на α-одночлены накладываются именно такие соотношения: они необходимы для того, чтобы «исчезали» α-образы простейших коммутаторных многочленов. Ниже будет показано, что при этом в алгебре A «исчезают» и любые коммутаторные и бикоммутаторные многочлены.

5. Ясно, что α-образ коммутаторного многочлена является суммой θ-одночленов вида $\theta_{i_1j_1}\dots\theta_{i_mj_m}\tau$, где $\theta_{i_1j_1}$ берется из первого коммутатора,..., $\theta_{i_mj_m}$ — из m-го коммутатора, причем i_1 входит в u_1, j_1 входит в v_1,..., i_m входит в u_m, j_m входит в v_m, τ — дополнительный множитель, который может быть единицей или некоторым θ-одночленом. Покажем, используя полноту подслова $u_1v_1\dots u_mv_m$, что θ-одночленов такого вида с фиксированным τ, равных между собой и входящих в этот α-образ, четное число. Для этого сделаем следующие предварительные комбинаторные рассмотрения.

Пусть $S=\{a_1,b_1,\dots,a_n,b_n\}$ — некоторое $2n$-элементное множество и $S_1,\dots,S_n$ — такие непустые попарно непересекающиеся его подмножества, что $S=S_1\cup\ldots\cup S_n$. Подмножество R множества S, состоящее из n элементов, назовем *правильным*, если $R\cap S_i$ — одноэлементное множество и для любого $i=1,\dots,n$ в множество R входит либо a_i, либо b_i (или, что равносильно, все индексы, нумерующие элементы множества R, попарно различны).

Лемма 2.8. *Допустим, что все множества S_i состоят из двух элементов. Тогда количество правильных подмножеств множества S четно.*

Доказательство. Пусть R^* обозначает подмножество множества S, получающееся из правильного подмножества R следующим образом: если элемент a_i лежит в R, то b_i лежит в R^*; если b_i лежит в R, то a_i лежит в R^*. Подмножество R^*, очевидно, тоже правильное. Следовательно, все правильные подмножества S разбиваются на пары типа R и R^*. Значит, их четное число, и лемма доказана.

Рассмотрим теперь общий случай

Лемма 2.9. *Для любого разбиения множества S на непустые подмножества $S_1,\dots,S_n$ количество его правильных подмножеств относительно этого разбиения четно* (*отсутствию таковых отвечает нуль*).

Доказательство. Индукция по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $n>1$ и утверждение верно для $n-1$ множеств. Если все S_i состоят из двух элементов, то мы находимся в ситуации леммы 2.8. Если же нет, то хотя бы одно из множеств S_i (например, S_n) содержит один элемент (например, a_n). Если b_n находится в каком-либо из одноэлементных подмножеств S_i, то правильных подмножеств, очевидно, нет. Если же нет, то рассмотрим систему множеств $S'_1,\dots,S'_{n-1}$, где S'_i совпадает с S_i, если в S_i нет элемента b_n, и $S'_i=S_i\setminus\{b_n\}$, если $b_n\in S_i$. Остается применить индуктивное предположение. Лемма доказана.

Для завершения доказательства свойства 5 рассмотрим теперь следующую конструкцию. Пусть $\{i_1,j_1,\dots,i_m,j_m\}$ — множество попарно различных индексов из приведенного выше θ-одночлена. Поставим в соответствие индексу i_1 пару символов a_1, b_1, индексу j_1 — a_2, b_2,..., индексу i_m — a_{2m-1}, b_{2m-1}, индексу j_m — a_{2m}, b_{2m} и рассмотрим множество $S=\{a_1,b_1,\dots,a_{2m},b_{2m}\}$.

Пусть L_i — множество символов из S, отвечающих индексам, входящим в u_i, а R_i — аналогичное множество для v_i (в каждом из этих множеств может присутствовать только один из элементов a_j или b_j). Тогда мы имеем разбиение $S=L_1\cup R_1\cup\ldots\cup L_m\cup R_m$, и между правильными подмножествами в S относительно этого разбиения и рассмотренными выше θ-одночленами имеется взаимооднозначное соответствие. Остается применить лемму 2.9.

6. Соотношение непосредственно следует из теоремы 2.1.

Замечание 2.2. Свойство 5 может быть доказано другим (может быть, более простым) способом, если применить результаты раздела 2.1, т. е. использовать тождество $[x_1,[x_2,x_3]]=0$ (см. также [23]). Однако мы хотели здесь продемонстрировать некоторые вычисления непосредственно в алгебре Φ_2. На самом деле, можно показать, что все соотношения 1—6 являются следствиями указанного тождества. Так что, по существу, вычисления в алгебре Φ_2 необходимы только для доказательства свойства 7. Все остальное имеет, так сказать, иллюстративный характер.

7. Для доказательства этого свойства нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения и вспомогательные факты.

Пусть S — произвольное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, содержащее более одного элемента. Обозначим через $\beta(S)$ произведение всевозможных элементов α_{ij}, для которых $i, j \in S$ (всего $|S|(|S|-1)/2$ сомножителей), например, $\beta(\{1,2,3\}) = \alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}$.

Рассмотрим квадратичный одночлен $w = w_1^2 \ldots w_q^2 w'$, где w_i — полилинейные одночлены степени $i \geqslant 2$, а w' — произведение квадратов переменных или 1 (в силу свойства 1 достаточно рассмотреть квадратичные одночлены только такого вида). Пусть S_l — множество индексов переменных, содержащихся в одночлене w_l. Ясно, что $S_k \cap S_l = \varnothing$ при $k \neq l$ и $\alpha(w) = \beta(S_1) \ldots \beta(S_q)$. Следовательно, $1 + \alpha(w)$ как элемент из радикала алгебры A является некоторой суммой θ-одночленов. Эта сумма, очевидно, состоит из всевозможных произведений вида $\tau = \tau_1 \ldots \tau_q$, где τ_l — выражение вида $\theta_{i_1 j_1} \ldots \theta_{i_r j_r}$, где $\{i_1, j_1, \ldots, i_r, j_r\}$ — некоторое четноэлементное подмножество множества S_l.

Таким образом, по любому непустому подмножеству D множества $S_1 \cup \ldots \cup S_q$, содержащему четное число элементов в каждом блоке $D \cap S_l$ (такое подмножество D называется в дальнейшем *допустимым*), и по любой фиксации пар $\{i_1, j_1, \ldots, i_r, j_r\}$ в каждом блоке, т. е. по разбиению множества $D \cap S_l$ на двухэлементные подмножества, можно однозначно восстановить один из одночленов τ, составляющих θ-многочлен $1 + \alpha(w)$, и обратно (при этом, разумеется, не принимается во внимание тот факт, что некоторые θ-одночлены, будучи графически различными, могут совпадать в силу соотношений в алгебре A).

Лемма 2.10. *Количество допустимых подмножеств, связанных указанным выше образом с данным квадратичным одночленом w, равно $2^{|S_l| + \ldots + |S_q| - q} - 1$, т. е. нечетно.*

Доказательство. Количество подмножеств с четным числом элементов в каждом из множеств S_l равно, как известно, $2^{|S_l|-1}$. Следовательно, количество допустимых подмножеств равно $2^{|S_l| + \ldots + |S_q| - q} - 1$ (пустое множество отбрасывается). Лемма доказана.

Лемма 2.11. *Для любого допустимого подмножества D множества $S_1 \cup \ldots \cup S_q$ число фиксаций пар по всем блокам множества D нечетно.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать нечетность числа фиксаций пар для одного блока $B = \{i_1, j_1, \ldots, i_r, j_r\}$. Проведем индукцию по r. При $r = 1$ число фиксаций, очевидно, равно 1. Пусть число фиксаций пар в множестве $B' = \{i_1, j_1, \ldots, i_{r-1}, j_{r-1}\}$ нечетно. Обозначим через $B_{i_r,k}$ множество, получающееся заменой одного из элементов k множества B' на i_r. В каждом из таких множеств по индуктивному предположению нечетное число фиксаций пар. Аналогично рассматриваются множества $B_{j_r,k}$. Всего множеств $B_{i_r,k}$ и $B_{j_r,k}$ четное число, причем в каждом из них нечетное число фиксаций пар. Следовательно, во всех множествах B', $B_{i_r,k}$ и $B_{j_r,k}$ нечетное число фиксаций пар. Что и доказывает лемму.

Из того, что θ-одночлены, соответствующие одному и тому же допустимому множеству D, но разным фиксациям пар, равны (что очевидным образом следует из соотношений в алгебре A), и леммы 2.11 получаем

Следствие 2.2. *Между допустимыми подмножествами в $S_1 \cup \ldots \cup S_q$ и ненулевыми попарно различными θ-одночленами, составляющими α-образ элемента $e + w$, имеется взаимно однозначное соответствие.*

Из этого следствия и леммы 2.10 получается свойство 7.

Для завершения доказательства теоремы 2.1 заметим, что если бы имело место равенство $e = w_1 + \ldots + w_r + \Delta$, где w_i — квадратичные одночлены, r — нечетное число (в силу леммы 2.7), а D — сумма коммутаторных и бикоммутаторных многочленов, то имело бы место равенство $e + w_1 + \ldots + e + w_r + \Delta = 0$.

Переходя к α-образам, получаем $1 + \bar{w}_1 + \ldots + 1 + \bar{w}_r + \bar{\Delta} = 0$. В силу соотношений 5 и 6 $\bar{\Delta} = 0$, а в силу свойства 7 каждый из θ-многочленов $1 + \bar{w}_i$ состоит из нечетного числа попарно различных θ-одночленов. Следовательно, сумма нечетного числа попарно различных θ-одночленов равна нулю, чего не может быть в силу вида соотношений в алгебре A. Полученное противоречие и доказывает теорему 2.2.

2.3. Об аналоге проблемы Шпехта для полей характеристики $p > 0$

В работе [15] А. Р. Кемером впервые было дано положительное решение хорошо известной проблемы Шпехта о конечной базируемости T-идеалов в свободной счетно порожденной ассоциативной алгебре над полем характеристики нуль (см. [40]). Представляет интерес аналог этой проблемы для случая поля характеристики $p > 0$. Из результатов А. Р. Кемера [16] следует положительный ответ для бесконечного поля в так называемом локальном случае, т. е. когда система многочленов, порождающих T-идеал, зависит от конечного множества переменных. Другим способом можно получить положительный ответ даже для односторонних T^*-идеалов, если использовать технику предыдущей главы.

Однако для произвольных T-идеалов ответ отрицательный (см. также [1, 9, 10, 22]). Здесь будет рассмотрен случай $p = 2$. Имеет место следующая

Теорема 2.3. *Пусть k — поле характеристики 2. Тогда T-идеал, порожденный в свободной алгебре $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots, y_1, y_2, z_1, z_2\rangle$ множеством многочленов вида*

$$g_0 = y_1^4 z_1^4 z_2^4 y_2^4 y_1^4 z_1^4 z_2^4 y_2^4,$$
$$g_n = y_1^4 z_1^4 x_1^2 \ldots x_n^2 z_2^4 y_2^4 y_1^4 z_1^4 x_{n+1}^2 \ldots x_{2n}^2 z_2^4 y_2^4,$$

где $n \in \mathbb{N}$, не является конечно порожденным.

Доказательство. Ясно, что (как и в доказательстве теоремы 2.2) достаточно доказать, что для любого $n \geqslant 1$ многочлен g_n не лежит в T-идеале, порожденном многочленами $g_0, \ldots, g_{n-1}$. Допустим противное. Обозначим через W_n^* множество всех одночленов от переменных x_i, y_i, z_i, имеющих степень 2 по x_i и степень 8 по y_1, y_2, z_1 и z_2, $i = 1, \ldots, 2n$ (*расширенные* 2-*слова*). Через $k(W_n^*)$ обозначим линейную оболочку множества W_n^*.

Проекцией многочлена f из алгебры F назовем его однородную по каждой переменной составляющую $\pi(f)$, принадлежащую пространству $k(W_n^*)$.

Сделанное выше допущение означает, что многочлен g_n является линейной комбинацией проекций выражений вида

$$K_1 A^4 B^4 h_1 \ldots h_r C^4 D^4 A^4 B^4 h_{r+1} \ldots h_{2r} C^4 D^4 K_2, \tag{2.6}$$

где A, B, C и D — некоторые многочлены, K_1, K_2 — некоторые одночлены и либо h_i — квадрат полилинейного по x_α одночлена, либо $h_i = [u_i, v_i]$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Положим $H_1 = h_1 \ldots h_r$, $H_2 = h_{r+1} \ldots h_{2r}$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая вспомогательная конструкция, так называемая *алгебра квазимногочленов* (ср. [7, 8]). Пусть $\Omega = k\langle \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \theta, \tau\rangle$ — свободная 6-порожденная алгебра и $Q = \Omega * \Phi_2$ — свободное произведение над полем k алгебры Ω и алгебры Φ_2 из раздела 2.1. Элементы этой алгебры назовем ***квазимногочленами***, а произведения элементов $\bar{x}_i$, θ, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, τ, $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ — ***квазиодночленами***, из которых состоит данный квазимногочлен.

Пусть h — некоторый многочлен из алгебры F и $\bar{h}$ — квазимногочлен, получающийся из h заменой x_i на $\bar{x}_i$, y_i на $\bar{y}_i$ и z_i на $\bar{z}_i$. Назовем *редукцией* квазимногочлена $\bar{h}$ элемент из алгебры F_2, получающийся при специализации $\bar{y}_i, \bar{z}_i \mapsto 1$.

Квазиодночлен, имеющий степень 2 по x_i, где $i = 1, \ldots, 2n$, назовем *правильным*, если он имеет вид

$$\theta\bar{a}\tau\bar{t}_1\tau\bar{b}\theta\theta\bar{c}\tau\bar{t}_2\tau\bar{d}\theta,$$

где $\bar{t}_i$ — одночлены от $\bar{x}_i$ положительной степени, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ — одночлены от $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$, причем $\bar{a}$ и $\bar{c}$ имеют степень 3 по $\bar{y}_1$ и $\bar{z}_1$ и не зависят от $\bar{y}_2$ и $\bar{z}_2$, а $\bar{b}$ и $\bar{d}$ имеют степень 3 по $\bar{y}_2$ и $\bar{z}_2$ и не зависят от $\bar{y}_1$ и $\bar{z}_1$. Назовем *центром* такого квазиодночлена подслово $\theta\theta$. Линейную комбинацию правильных квазиодночленов назовем *правильным* квазимногочленом.

Каждый квазимногочлен q из алгебры Q может быть очевидным образом представлен в виде суммы правильного квазимногочлена $\rho(q)$ и линейной комбинации остальных, неправильных квазиодночленов. *Правильная компонента* $\rho(q)$, разумеется, может быть и нулевой.

Обозначим через V подпространство правильных квазимногочленов, исчезающих при специализации $\bar{y}_i, \bar{z}_i, \theta, \tau \mapsto 1$.

Пусть гомоморфизм $\varphi\colon F \to Q$ определяется соответствием $x_i \mapsto \bar{x}_i$, $y_i \mapsto \bar{y}_i+\theta$, $z_i \mapsto \bar{z}_i+\tau$. Назовем *$\varphi$-проекцией* многочлена f из алгебры F элемент из алгебры Q вида $\rho(\varphi(\pi(f)))$. Неформально говоря, φ-проекция расширенного 2-слова получается следующим образом: выбираются элементы y_k и y_l, стоящие по краям одночлена, и элемент $y_m y_n$ внутри, «равноудаленный» по степени y_i от краев одночлена; вместо этих элементов ставятся элементы θ и $\theta\theta$; затем между первыми двумя θ и соответственно между вторыми двумя θ выбираются такие элементы z_l и z_m, что между ними стоят только x_i, а левее и правее их степени вхождения элементов y_i и z_i соответствуют определению правильного квазимногочлена; затем эти z_l и z_m заменяются на τ, а остальные x_i, y_i и z_i заменяются на $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ и $\bar{z}_i$ соответственно. Если такой выбор сделать нельзя, то φ-проекция расширенного 2-слова равна нулю. Например, φ-проекция многочлена g_n равна

$$\theta\bar{y}_1^3\bar{z}_1^3\tau\bar{x}_1^2\ldots\bar{x}_n^2\tau\bar{z}_2^3\bar{y}_2^3\theta\theta\bar{y}_1^3\bar{z}_1^3\tau\bar{x}_{n+1}^2\ldots\bar{x}_{2n}^2\tau\bar{z}_2^3\bar{y}_2^3\theta.$$

Выясним теперь, что из себя представляет φ-проекция выражения (2.6). Для этого посмотрим сначала, какова часть многочлена A^4, которая содержит переменные x_i в степени не выше 2. Пусть $A = Y + \sum a_i$, где многочлен Y состоит из одночленов, содержащих только переменные y_i, z_i, а a_i — одночлены, содержащие переменные x_α. Заметим, что

$$A^2 = Y^2 + \sum[Y, a_i] + \sum[a_i, a_j] + \sum a_i^2.$$

Следовательно, искомая часть многочлена B^4 является линейной комбинацией выражений вида

$$Y^4, \quad [Y^2, a], \quad [a,b]^2, \quad [a^2, b], \quad [c_1, c_2], \tag{2.7}$$

где a, b — некоторые одночлены, c_1, c_2 — некоторые коммутаторы.

Заметим, что все выражения из списка (2.7), кроме Y^4, исчезают при специализации $y_i, z_i \mapsto 1$ и применении гомоморфизма φ (как следует из свойств алгебры Φ_2).

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — набор не обязательно попарно различных одночленов от x_i, y_i, z_i, причем x_i входит в произведение этих одночленов в степени не выше 2. Обозначим через $\sum(a_1, \ldots, a_m)$ сумму одночлена $a_1 \ldots a_m$ и остальных (если таковые существуют) одночленов, получающихся из этого всевозможными перестановками попарно различных a_i. Аналогично определяется квазимногочлен $\sum(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$.

Из рассмотрения списка (2.7) и сделанного после этого замечания непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.12. *Если не все элементы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ равны между собой, то редукция квазимногочлена $\sum(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$ равна нулю.*

Пусть $L(A)$ — линейно независимая система одночленов, составляющих многочлен A, $L(B)$, $L(C)$ и $L(D)$ — аналогичные системы для многочленов B, C и D. Ясно, что для получения φ-проекции многочлена (2.6) нужно рассмотреть сумму φ-проекций выражений вида

$$f = K_1 A^{(1)} B^{(1)} H_1 C^{(1)} D^{(1)} A^{(2)} B^{(2)} H_2 C^{(2)} D^{(2)} K_2,$$

в которых $A^{(i)} = \sum(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, a_4^{(i)})$, где $a_j^{(i)}$ — одночлены из системы $L(A)$ (не обязательно попарно различные), $B^{(i)}$, $C^{(i)}$, $D^{(i)}$ — аналогичные многочлены, связанные с системами $L(B)$, $L(C)$ и $L(D)$. Многочлены $a_j^{(i)}$, $b_j^{(i)}$, $c_j^{(i)}$, $d_j^{(i)}$, h_i и K_i, очевидно, можно считать такими, что получившийся в результате многочлен f лежит в пространстве, порожденном расширенными 2-словами: $k(W_n^*)$.

Лемма 2.13. *Если правильная составляющая квазимногочлена $\varphi(f)$ не лежит в пространстве V, то все квазиодночлены, составляющие квазимногочлен $\rho(\varphi(f))$ по модулю V на позициях для $\varphi(A^{(i)})$ и $\varphi(D^{(i)})$ содержат элемент θ, а на позициях для $\varphi(B^{(i)})$ и $\varphi(C^{(i)})$ содержат элемент τ.*

Доказательство. Заметим сначала, что ни на одной из этих позиций не может стоять квазимногочлен, не содержащий в своих квазиодночленах элементов θ или τ. В самом деле, тогда он, очевидно, имел бы вид $\sum(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4)$, где q_i — одночлены из одной из систем $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ или $L(D)$. Так как ни один из элементов $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$ не может входить в этот квазимногочлен с кратностью больше 3, то по лемме 2.12 редукция такого квазимногочлена равна нулю, и следовательно,

$\rho(\varphi(f))$ лежит в V. То, что элементы θ и τ распределяются по соответствующим позициям именно указанным образом, прямо следует из определения правильности. Лемма доказана.

Из леммы 2.13 очевидным образом следует

Лемма 2.14. *Для того чтобы φ-проекция многочлена f не лежала в пространстве V, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:*

одночлены K_1 и K_2 являются константами, т. е. вклад в φ-проекцию многочлена f по модулю V дают компоненты квазимногочленов $\varphi(A^{(1)})$ и $\varphi(D^{(2)})$, имеющие вид θX и $X\theta$;

центр правильной составляющей квазимногочлена $\varphi(f)$ (точнее, центр всех его квазиодночленов) находится между позициями для $\varphi(D^{(1)})$ и $\varphi(A^{(2)})$, т. е. вклад в φ-проекцию многочлена f по модулю V дают компоненты квазимногочленов $\varphi(D^{(1)})$ и $\varphi(A^{(2)})$, имеющие вид $X\theta$ и θX;

квазимногочлены $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ зависят только от $\bar{x}_i$.

Из леммы 2.14 следует, что φ-проекция многочлена (2.6) является суммой элемента из пространства V и выражений вида

$$\theta a\bar{H}_1 b\theta\theta c\bar{H}_2 d\theta, \tag{2.8}$$

где a и c — квазиодночлены от $\bar{x}_i$, $\bar{y}_1$, $\bar{z}_1$ и τ, имеющие степень 3 по $\bar{y}_1$ и $\bar{z}_1$, а b и d — квазиодночлены от $\bar{x}_i$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$ и τ, имеющие степень 3 по $\bar{y}_2$ и $\bar{z}_2$, причем $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ зависят только от $\bar{x}_i$. Кроме того, как легко видеть, если $(a,b)\neq(c,d)$, то в эту сумму вместе с (2.8) войдет и выражение

$$\theta c\bar{H}_1 d\theta\theta a\bar{H}_2 b\theta.$$

Поэтому φ-проекция выражения (2.6) является суммой, состоящей из правильного квазимногочлена из пространства V и из квазимногочленов следующих двух видов:

$$\theta a\bar{H}_1 b\theta\theta c\bar{H}_2 d\theta + \theta c\bar{H}_1 d\theta\theta a\bar{H}_2 b\theta, \quad \theta a\bar{H}_1 b\theta\theta a\bar{H}_2 b\theta.$$

После специализации $\bar{y}_i, \bar{z}_i, \theta, \tau \mapsto 1$ получаем один из следующих многочленов: $[a^*b^*, c^*d^*]\bar{H}_1\bar{H}_2$, $(a^*b^*)^2\bar{H}_1\bar{H}_2$, где h^* — образ квазимногочлена $\bar{h}$ при этой специализации.

Итак, φ-проекция многочлена (2.6) после специализации $\bar{y}_i, \bar{z}_i, \theta, \tau \mapsto 1$ является суммой образов относительно гомоморфизма φ квадратичных и коммутаторных многочленов от переменных x_i (так как $2r+1<2n$). Применяя аналогичную операцию к g_n, получаем $\bar{x}_1^2\ldots\bar{x}_{2n}^2$. Отсюда следует, что $\bar{x}_1^2\ldots\bar{x}_{2n}^2$ — сумма квадратичных одночленов, что противоречит теореме 2.1 предыдущего раздела. Теорема доказана.

Из теорем 2.2 и 2.3 непосредственно получаются следующие следствия.

Следствие 2.3. *Пусть A — коммутативное кольцо, имеющее сюръективный гомоморфизм на $\mathbb{Z}_2$-алгебру с единицей* (*например, $A=\mathbb{Z}$*). *Тогда указанные в теоремах* 2.1 *и* 2.2 *многочлены порождают в алгебре $A\langle x_1,\ldots,x_i,\ldots,y_1,y_2,z_1,z_2\rangle$ не конечно порожденный T-идеал* (*T-модуль, T-группу*).

Следствие 2.4. *Многообразие ассоциативных колец не шпехтово. Более того, многообразие ассоциативных ниль-колец индекса* 32 *не шпехтово.*

Замечания 2.3.

1. Ясно, что T-идеал, порожденный одночленами g_n, не является унитарно замкнутым, т. е. устойчивым относительно подстановок вместо некоторых из переменных единицы. Интересно было бы построить унитарно замкнутый T-идеал, не являющийся конечно базируемым. Соответствующие конструкции приведены в главе 3.

2. Настоящая глава по сути дела посвящен рассмотрению с тех или иных сторон только одного примера в характеристике 2, с которого и началась серия результатов на эту тему. С более широким спектром конструкций для характеристики $p>0$ читатель может познакомиться в [23].

3. Как будет показано ниже (см. также [29]), в коммутативном случае имеется полный аналог результатов главы 1 (конечная базируемость T-пространств) для произвольного бесконечного поля.

4. Пример T-пространства, приведенного в разделе 2.2, является в каком-то смысле «исключительным». Как показано В. В. Щиголевым, попытки его прямого переноса или «наивного» обобщения с помощью многочленов $x_1^p \dots x_n^p$ на другую характеристику не достигают цели: получаются конечно порожденные T-пространства.

5. В работе А. Р. Кемера [34] показано, что в случае поля характеристики $p > 0$ из любого тождества следует стандартное тождество St_m некоторой степени. Из конструкции алгебры Φ_2 в разделе 2.1 видно, что в случае поля характеристики 2, например, из тождеств $[x_1, [x_2, x_3]] = 0$ и $\mathrm{St}_m = 0$ не следует тождество $[x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n] = 0$ ни для какого n. Следовательно, и в алгебре $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ из этих тождеств не следует тождество $[x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n] = 0$ ни для какого n. С другой стороны, в алгебре $\mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$, как хорошо известно, из этих тождеств следует для некоторого n тождество $[x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n] = 0$ (по теореме Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной PI-алгебры). Таким образом, в аддитивной группе соответствующей относительно свободной алгебры имеется кручение, описание которого представляется, на наш взгляд, весьма интересным вопросом.

6. Из работы А. Р. Кемера [35] следует, что в характеристике $p > 0$ любое тождество влечет за собой все полилинейные тождества алгебры матриц некоторого порядка r. Отсюда и из теорем 2.1 и 2.2 следует, что в относительно свободной $\mathbb{Z}$-алгебре, заданной T-идеалом алгебры $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$, порожденным полилинейными тождествами алгебры матриц некоторого порядка, существует бесконечная возрастающая цепочка T-групп (T-идеалов), что опять приводит к кручению в аддитивной группе этой алгебры.

7. Представляет, на наш взгляд, интерес и следующий вопрос. Пусть T-идеал (или T-группа) алгебры $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ конечно порожден при рассмотрении его по любому модулю m. Следует ли отсюда, что он конечно порожден в алгебре $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$?

8. С вопросами 5—7 тесно связан следующий общий вопрос. Пусть I — некоторый T-идеал в алгебре $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ и $A(I)$ — аддитивная группа фактор-алгебры $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle / I$. Что из себя представляет периодическая часть абелевой группы $A(I)$? В частности, когда периодическая часть группы $A(I)$ тривиальна? Например, это так, если I — T-идеал, порожденный коммутатором, а для тройного коммутатора плюс стандартный многочлен (или многочлен Капелли) это уже не так: периодическая часть весьма велика и мало изучена.

9. Используя методы доказательства теоремы 2.3, в любой характеристике $p > 0$ можно строить по T-пространствам, удовлетворяющим некоторой достаточно общей системе условий, T-идеалы, не имеющие конечного базиса.

10. Следствие 2.4 из теоремы 2.3 дает отрицательный ответ на известную проблему А. И. Мальцева [25] о конечности базиса тождеств ассоциативного кольца. Более того, это следствие дает в некотором смысле максимальный контрпример к аналогу теоремы Нагаты—Хигмана для колец (см. также [10, 30, 31]).

11. В работе [32] построено нешпехтово многообразие ниль-алгебр индекса 6. Однако возникающий там T-идеал не порожден одночленами.

12. Читатель, заинтересовавшийся следствием 2.4, может попытаться заменить в нем 32 на 16.

2.4. Вычисление коразмерностей в пространствах 2-слов. Первое свойство экстремальности

Цель следующих двух разделов — показать экстремальность приведенного в разделе 2.2 примера. Точный смысл термина «экстремальность» будет ясен из формулировок приводимых ниже результатов (см. также [3]).

Пусть W_n — множество 2-*слов* от переменных $x_1, \dots, x_n$ в алгебре F, т. е. одночленов от переменных $x_1, \dots, x_n$, имеющих степень 2 по каждой из них, $\overline{W_n}$ — его образ в алгебре $\bar{F}$, $L(\overline{W_n})$ — линейная оболочка множества $\overline{W_n}$, S^T — T-пространство в алгебре $\bar{F}$, порожденное множеством S из $\bar{F}$, т. е. наименьшее линейное подпространство, содержащее S и замкнутое относительно подстановок вместо переменных $\bar{x}_i$ элементов из алгебры $\bar{F}$, $f_n = x_1^2 \dots x_n^2$.

В разделе 2.2 строится естественное вложение α линейного пространства $L(\overline{W_n})$ в алгебру A по следующему правилу. Любое 2-слово $\bar{w}$ из $\overline{W_n}$ можно однозначно представить в виде $\bar{w} = a\bar{f}_n$, где a — произведение некоторых α_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Таким образом, каждому 2-слову $\bar{w}$ можно поставить в соответствие элемент $\alpha(w) = a$. Отображение α осуществляет изоморфизм линейных пространств $L(\overline{W_n})$ и A_n (определение см. в разделе 2.1). В самом деле, любой элемент из алгебры A_n — линейная комбинация единицы и θ-одночленов $\theta_{i_1j_1}\dots\theta_{i_rj_r}$, где числа $i_1, j_1, \dots, i_r, j_r$ попарно различны и не превосходят n. Следовательно, достаточно показать, что у соответствующего элемента $\alpha_{i_1j_1}\dots\alpha_{i_rj_r}$ есть прообраз в $\overline{W_n}$. Но таковым, очевидно, является элемент вида

$$(\bar{x}_{i_1}\bar{x}_{j_1})^2\dots(\bar{x}_{i_r}\bar{x}_{j_r})^2\bar{v}, \tag{2.9}$$

где v — произведение квадратов оставшихся переменных.

Напомним, что *квадратичным одночленом* называется элемент $\bar{w}$ из $\overline{W_n}$ вида $\bar{w} = h_1^2\dots h_s^2$, где $1 \leqslant s \leqslant n-1$, а h_i — полилинейные одночлены, хотя бы один из которых имеет степень не меньше 2.

Из вышесказанного следует

Лемма 2.15. *Всякий элемент из $L(\overline{W_n})$ является линейной комбинацией квадратичных одночленов вида* (2.9) *и элемента $\bar{f}_n$.*

В разделе 2.2 показано, что элемент лежит в $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T \cap L(\overline{W_n})$ тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией квадратичных одночленов (которые, на самом деле, можно считать имеющими вид (2.9)). Там же с помощью вычислений в алгебре Φ_2 доказано, что $\bar{f}_n \notin \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T$, т. е. $\bar{f}_n \in L(\overline{W_n}) \setminus (\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T \cap L(\overline{W_n}))$. Это дает пример T-пространства в алгебре $\bar{F}$, не имеющего конечного базиса, что играет центральную роль в настоящей главе. Возникает вопрос: как велика рассматриваемая разность?

Как будет показано ниже, в ней, кроме $\bar{f}_n$, по существу, ничего нет. Это и есть первое свойство экстремальности приведенного примера не конечно базируемого T-пространства: к многочлену $\bar{f}_n$ нечего добавить, «по модулю» этого многочлена все остальные 2-слова лежат в T-пространстве $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T$. Более точно, имеет место

Теорема 2.4. $\dim L(\overline{W_n})/(\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T \cap L(\overline{W_n})) = 1$.

Доказательство. Согласно лемме 2.15 рассматриваемая размерность не больше 1. Равенство следует из того, что $\bar{f}_n \notin \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T$.

Следствие 2.5. $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_i, \dots\}^T = \overline{W_1}^{\,T} + \dots + \overline{W_n}^{\,T} + \dots$.

2.5. Экстремальность по отношению к подмногообразиям конечной кратности

В заключение рассмотрим следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{R}$ — некоторое подмногообразие многообразия, заданного тождеством $[x_1, [x_2, x_3]] = 0$. Верно ли, что в относительно свободной алгебре $\tilde{F}$ многообразия $\mathfrak{R}$ образ системы $\{f_n\}$ порождает конечно базируемое T-пространство?

В такой формулировке ответ на поставленный вопрос отрицательный. В самом деле, добавим к нашему тождеству еще тождество $x^4 = 0$. Нетрудно проверить, что на множестве 2-слов это тождество никак не проявляется, т. е. $L(\overline{W_n}) \cap (\bar{x}^4)^T = 0$. Следовательно, T-пространство алгебры $\tilde{F}$, порожденное многочленами $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_i, \dots$ ($\tilde{f}_i$ — образ многочлена f_i в алгебре $\tilde{F}$) не конечно базируемо.

Однако если добавить к исходному тождеству условие нильпотентности радикала алгебры $\tilde{F}$, т. е. выполнение тождества (*конечная кратность*)

$$[x_1, x_2]\dots[x_{2m-1}, x_{2m}] = 0 \tag{2.10}$$

для некоторого m, то получается конечная базируемость. Это — второе свойство экстремальности рассматриваемого примера.

Теорема 2.5. *Пусть $\tilde{F}$ — фактор-алгебра алгебры $\bar{F}$ по некоторому T-идеалу, причем радикал алгебры $\tilde{F}$ нильпотентен. Тогда T-пространство в алгебре $\tilde{F}$, порожденное образами системы $\{f_n\}$, конечно порождено. Количество порождающих зависит от индекса нильпотентности радикала.*

Доказательство. Пусть Δ — T-идеал, порожденный левой частью тождества (2.7). Покажем, что для любого $n \geqslant m$ имеет место соотношение

$$\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T \cap L(\overline{W_n}) + \Delta = L(\overline{W_n}) + \Delta,$$

что в силу сказанного в разделе 2.2 равносильно принадлежности элемента $\bar{f}_n$ T-пространству $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T + \Delta$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим в пространстве $L(\overline{W_n})$ элемент вида

$$\bar{x}_1[\bar{x}_1, \bar{x}_2]\bar{x}_2 \dots \bar{x}_{2m-1}[\bar{x}_{2m-1}, \bar{x}_{2m}]x_{2m}x_{2m+1}^2 \dots x_n^2,$$

который, в силу соотношений в алгебре Φ_2, можно переписать в виде

$$(1 + \alpha_{12}) \dots (1 + \alpha_{2m-1\,2m})\bar{x}_1^2 \dots \bar{x}_n^2.$$

Это означает, что по модулю Δ элемент $\bar{f}_n$ является суммой квадратичных одночленов типа $\alpha_{i_1j_1} \dots \alpha_{i_rj_r}\bar{f}_n$, где $i_1, j_1, \dots, i_r, j_r$ — попарно различные индексы. Следовательно, $\bar{f}_n \in \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1}\}^T + \Delta$ и T-пространство $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_i, \dots\}^T$ по модулю Δ порождается первыми m своими элементами. Теорема доказана.

Замечания 2.4.

1. Тождество тройного коммутатора вместе с тождеством (2.10), вообще говоря, не обеспечивают конечную базируемость любого T-пространства в алгебре $\tilde{F}$. Один из примеров, приведенных в [23], показывает, что существуют T-пространства, не имеющие конечного базиса даже по модулю T-идеала, порожденного тройным коммутатором и многочленом $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

2. Используя алгебру Φ_2 и технику θ-многочленов, по-видимому, можно доказать конечную базируемость по модулю тождества (2.10) достаточно широкого класса T-пространств в алгебре $\bar{F}$. Однако более подробному изучению этого вопроса предполагается посвятить отдельную работу.

2.6. Коммутативный случай

Пусть $F = k[x_1, \dots, x_i, \dots]$ — алгебра коммутативных многочленов (относительно свободная алгебра многообразия всех коммутативных k-алгебр). Имеет место следующая

Теорема 2.6. *Пусть k — бесконечное поле характеристики $p > 0$. Тогда*

1) *любое T^*-пространство алгебры $k[x_1, \dots, x_i, \dots]$, порожденное многочленами из алгебры $k[x_1, \dots, x_d]$, конечно порождено;*

2) *любое T-пространство алгебры $k[x_1, \dots, x_i, \dots]$ конечно порождено.*

Доказательство. В силу бесконечности поля k утверждение 1) достаточно доказать для T^*-пространств, порожденных одночленами

$$f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}.$$

Рассмотрим следующее действие на одночленах f (некоторая модификация символической степени, введенной в работах [7] и [8]).

Пусть $1 \leqslant n_i \leqslant m_i$, $t_1 = x_{d+1}, \dots, t_d = x_{2d}$. Обозначим через $f^{(n_1,\dots,n_d)}$ однородную компоненту типа $(n_1, \dots, n_d)$ по переменным $(t_1, \dots, t_d)$ многочлена

$$(x_1(1 + t_1))^{m_1} \dots (x_d(1 + t_d))^{m_d}.$$

Ясно, что $f^{(n_1,\dots,n_d)} \in \{f\}^{T^*}$ и

$$f^{(n_1,\dots,n_d)} = \binom{m_i}{n_i} \dots \binom{m_d}{n_d} t_1^{n_1} \dots t_d^{n_d} f.$$

Пусть $m_i = p^{s_i} l_i$, где $(l_i, p) = 1$. Легко проверить, что $\binom{m_i}{p^{s_i}}$ не делится на p. В самом деле,

$$\binom{m_i}{p^{s_i}} = \frac{p^{s_i} l_i (p^{s_i} l_i - 1) \dots (p^{s_i} l_i - p^{s_i} + 1)}{p^{s_i}(p^{s_i} - 1) \dots (p^{s_i} - p^{s_i} + 1)},$$

причем дробь

$$\frac{p^{s_i} l_i - p^n a}{p^{s_i} - p^n a},$$

где $p^{s_i} > p^n a$, $(a,p) = 1$, содержит в числителе и знаменателе одну и ту же степень числа p, равную p^n. Следовательно, $f^* = t_1^{p^{s_i}} \dots t_d^{p^{s_d}} f \in \{f\}^{T^*}$. Ясно, что каждый одночлен вида

$$(t_1 x_1^{n_1})^{p^{r_1}} \dots (t_d x_d^{n_d})^{p^{r_d}},$$

где $l_i \leqslant n_i$ и $s_i \leqslant r_i$ для всех $i = 1, \dots, d$, может быть получен из одночлена f^* с помощью регулярной подстановки $t_i \mapsto t_i^{p^{r_i - s_i}} x_i^{n_i p^{r_i - s_i}}$, $x_i \mapsto x_i$. С другой стороны, хорошо известно, что любое множество векторов вида $(n_1, r_1, \dots, n_d, r_d)$, где n_i, r_i — целые неотрицательные числа, содержит конечное число минимальных элементов (в смысле отношения частичного порядка $(n_1, r_1, \dots, n_d, r_d) \prec (n_1', r_1', \dots, n_d', r_d') \iff n_i \leqslant n_i',\ r_i \leqslant r_i',\ i = 1, \dots, d$). Следовательно, любое множество одночленов типа f^* порождает конечно порожденное T^*-пространство.

Остается заметить, что если одночлены $f_1, \dots, f_d$ не содержат элементов $t_1, \dots, t_d$ и $f^* \in \in \{f_1, \dots, f_d\}^{T^*}$, то $f = f^*|_{t_i = 1} \in \{f_1, \dots, f_d\}^{T^*}$.

Пусть теперь множество порождающих одночленов зависит от бесконечного множества переменных $\{x_1, \dots, x_i, \dots\}$. Перенумеровывая эти переменные подходящим образом (нерегулярная подстановка), можно считать, очевидно, что все одночлены порождающего множества имеют вид

$$f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}, \quad m_i \geqslant 1.$$

Пусть $m_i = l_i p^{s_i}$, $(l_i, p) = 1$. Заменим, как и в первом случае, одночлены f на одночлены

$$f^* = (t_1 x_1^{l_1})^{p^{s_1}} \dots (t_d x_d^{l_d})^{p^{s_d}}$$

и рассмотрим множество наборов Σ (длина которых не фиксирована) вида

$$v = (\sigma_1, \dots, \sigma_d),$$

где $\sigma_i = (l_i, s_i)$, l_i — натуральные, а s_i — целые неотрицательные числа. Положим $(l, s) \prec (n, r)$ в том и только том случае, когда $l \leqslant n$, $s \leqslant r$. Для любых двух наборов $v = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ и $v' = (\sigma_1', \dots, \sigma_c')$ положим $v \prec v'$ в том и только том случае, когда $c \geqslant d$ и в v' найдется такой поднабор $v = (\sigma_{i_1}', \dots, \sigma_{i_d}')$, что $\sigma_1 \prec \sigma_{i_1}', \dots,\ \sigma_d \prec \sigma_{i_d}'$, а для остальных компонент набора v' выполнено следующее условие: любая из оставшихся компонент σ_j' больше хотя бы одной из компонент набора v.

Как следует из работы А. Н. Красильникова [19, лемма 3.3], любое бесконечное подмножество множества Σ имеет конечное число минимальных элементов. По этому конечному множеству очевидным образом строится конечное множество одночленов, из которых по аналогии с 1) получаются с помощью подстановок все остальные одночлены f^*. Остается только положить все t_i равными единице. Теорема доказана.

Замечания 2.5.

1. В работе Е. А. Киреевой [18] дано обобщение теоремы 2.6 на случай, когда k — произвольное коммутативное нетерово кольцо.

2. Еще один интересный результат о конечной базируемости T-пространств над произвольным нетеровым кольцом можно найти в работе того же автора [17]. Там доказывается, что любое T-пространство конечно базируемо по модулю T-идеала, порожденного степенью переменной и произведением коммутаторов.

Глава 3

БЕСКОНЕЧНО БАЗИРУЕМЫЕ T-ПРОСТРАНСТВА

3.1. Определения и терминология

Пусть Φ — коммутативное кольцо с единицей, X — некоторое счетное (бесконечное) множество и F — одна из алгебр $\Phi\langle X\rangle$ или $\Phi\langle X\rangle + \Phi$.

Определение 3.1. Φ-подмодуль L алгебры F называется T-пространством, если L замкнут относительно всех эндоморфизмов алгебры F. T-пространство, являющееся двусторонним идеалом, называется T-идеалом.

Любой вышеупомянутый эндоморфизм можно понимать как замену $x \to f_x$, $x \in X$, где $f_x \in F$, в многочленах из F.

Определение 3.2. Пусть I — некоторый Φ-подмодуль алгебры F. T-пространство L порождено (как T-пространство) множеством многочленов $A \subset L + I$ по модулю I, если для любого $f \in L$ имеет место представление $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(a_i) + g$, где $\alpha_i \in \Phi$, $a_i \in A$, φ_i — эндоморфизмы алгебры F и $g \in I$.

Если существует конечное $A \subset L + I$, порождающее T-пространство L по модулю I, то L называется *конечно базируемым по модулю* I. Если такого конечного A не существует, то L называется *бесконечно базируемым по модулю* I.

Если в этом определении заменить выражение «T-пространство» на выражение «T-идеал» и вместо представления $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(a_i) + g$ рассмотреть представление $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \varphi_i(a_i) g_i + g$, где $a_i \in A$, $f_i, g_i \in F$, φ_i — эндоморфизмы алгебры F и $g \in I$, то получим аналог определения 3.2 для T-идеалов. Одно и то же множество многочленов может порождать различные подмодули в зависимости от того, какую из алгебр, $\Phi\langle X \rangle$ или $\Phi\langle X \rangle + \Phi$, считать за F и как рассматривать порождение, в смысле T-пространств или T-идеалов. Однако обычно такие вопросы не вызывают затруднений.

Легко видеть, что если I и J есть Φ-подмодули алгебры F и $I \subset J$, то любое множество $A \subset L + I$, порождающее T-пространство (T-идеал) L по модулю I, порождает L по модулю J. В случае $I = 0$ мы опускаем выражение по модулю I в определении 3.2 и его версии для T-идеалов.

В этой главе мы будем строить бесконечно базируемые T-пространства и T-идеалы по некоторому модулю. В силу сказанного выше отсюда будет следовать их простая бесконечная базируемость (по модулю 0). Однако в некоторых случаях можно добиться и эквивалентной переформулировки. Имеет место

Предложение 3.1. *Пусть I и L — некоторые T-пространства, причем I конечно базируемое. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *L бесконечно базируемое по модулю I;*
2) *$L + I$ бесконечно базируемое.*

Аналогичное утверждение справедливо для T-идеалов. Например, в теореме 3.1 этой главы мы присоединяем к исходному T-пространству T-пространство, порожденное многочленом $x_1[x_2, x_3][x_4, x_5]x_6$ и T-идеалом $T^{(3)}$, потому что нам известно, что оно конечно базируемо (см. замечание 3.1). Однако мы не делаем того же в теореме 3.4, чтобы ее не ослабить, так как мы не знаем, верно ли, что I конечно базируемо.

Напомним, что мы понимаем под однородными многочленами. Назовем многочлен $f \in \Phi\langle X \rangle + \Phi$ *однородным*, если имеет место представление $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, где $\alpha_i \in \Phi$, $u_i \in \langle X \rangle \cup \{1\}$ и для любых $x \in X$ и $i, j = 1, \ldots, n$ выполнено $\deg_x u_i = \deg_x u_j$. Если $f \neq 0$, то для $x \in X$ положим $\deg_x f = \deg_x u_1$. Легко проверить, что таким образом определенная $\deg_x f$ не зависит от выбора представления многочлена f. Дополнительно считаем, что $\deg_x 0 = 0$ для любой $x \in X$. Пусть теперь f и g — многочлены из $\Phi\langle X \rangle + \Phi$. Считаем, что многочлен g является некоторой *однородной компонентой многочлена* f, если многочлен g либо нулевой, либо однородный ненулевой и у многочлена $f - g$ отсутствуют мономы u, такие что для любого буквы $x \in X$ выполнено $\deg_x g = \deg_x u$.

Φ-подмодуль L алгебры $\Phi\langle X \rangle + \Phi$ назовем *однородным*, если любая однородная компонента любого многочлена из L принадлежит L. Легко проверить, что любое T-пространство и T-идеал, порожденные полилинейными многочленами, однородны. В случае, когда Φ — бесконечное поле, все T-пространства и T-идеалы однородные.

Рассмотрим один способ получения многочленов алгебры F друг из друга. Пусть имеются подмножества $Y \subset X' \subset X$ и некоторое отображение $\varphi\colon X' \to \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} F^i$. Определим линейное отображение $\mathrm{sim}_Y(\varphi)\colon F \to F$ следующим образом. Пусть u — слово из $\langle X\rangle \cup \{1\}$, непустое в случае $F = \Phi\langle X\rangle$. Если для любой переменной $x \in Y$ степень $\deg_x u$ равна 0 или $|\varphi(x)|$, то положим $\mathrm{sim}_Y(\varphi)(u)$ равным сумме всех многочленов, полученных из u расстановкой многочленов из набора $\varphi(x)$ на места в u, занимаемые переменной x, для всех $x \in Y$, таких что $\deg_x u > 0$. Иначе положим $\mathrm{sim}_Y(\varphi)(u) = 0$. На всю F продолжим $\mathrm{sim}_Y(\varphi)$ по линейности. В случае $Y = X$ вместо $\mathrm{sim}_X(\varphi)$ пишем $\mathrm{sim}(\varphi)$, а в случае $Y = \{y\}$ вместо $\mathrm{sim}_{\{y\}}(\varphi)$ пишем $\mathrm{sim}_y(\varphi)$.

Приведем пример такого действия. Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$, $f_1, f_2 \in F$ и $\varphi(x) = (f_1, f_2)$. Тогда $\mathrm{sim}_x(\varphi)(xyx + x^2y)$ равно $f_1yf_2 + f_2yf_1 + f_1f_2y + f_2f_1y$, если $f_1 \neq f_2$, и равно $f_1yf_1 + f_1f_1y$, если $f_1 = f_2$.

Если T-пространство L однородное, то для любого такого отображения φ выполнено $\mathrm{sim}_Y(\varphi)L \subset L$. В случае произвольного T-пространства L, порожденного (как T-пространство) множеством A, любой многочлен из L есть линейная комбинация над Φ многочленов вида $\mathrm{sim}(\varphi)(f)$, где f — однородная компонента некоторого многочлена из A и в каждый набор $\varphi(x)$, $x \in X$, входят только слова. В случае, когда L есть T-идеал, порожденный (как T-идеал) множеством A, любой многочлен из L есть линейная комбинация над Φ многочленов вида $u\mathrm{sim}(\varphi)(f)v$, где f — однородная компонента некоторого многочлена из A, u, v — слова и в каждый набор $\varphi(x)$, $x \in X$, входят только слова.

В разделах 3.3 и 3.5 мы работаем только над бесконечным полем. То же самое можно сделать и над конечным полем той же характеристики, например, следующим способом. Вместо T-пространств и T-идеалов рассмотрим их однородные аналоги.

Определение 3.3. Однородное T-пространство назовем *HT-пространством*, а однородный T-идеал *HT-идеалом*.

Определение 3.4. Пусть I — некоторый однородный Φ-подмодуль алгебры F. HT-пространство L порождено (как HT-пространство) множеством однородных многочленов $A \subset L+I$ по модулю I, если любой $f \in L$ есть некоторая однородная компонента многочлена вида $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i(a_i) + g$, где $\alpha_i \in \Phi$, $a_i \in A$, φ_i — эндоморфизмы алгебры F и $g \in I$.

Остальные определения переносятся на случай HT-пространств и HT-идеалов таким же способом. Эти объекты, в отличие от T-пространств и T-идеалов, всегда замкнуты относительно операций $\mathrm{sim}_Y(\varphi)$. Всю развиваемую в этой главе теорию можно переписать, просто заменяя выражения «T-пространство» и «T-идеал» на выражения «HT-пространство» и «HT-идеал» соответственно.

При этом бесконечно базируемое HT-пространство (HT-идеал) бесконечно базируемо как T-пространство (как T-идеал). Это позволяет избавиться от предположения бесконечности поля там, где оно сделано. Однако чтобы работать с более распространенными объектами, мы сохраняем это предположение.

Сделаем еще замечание по поводу формулировок всех примеров бесконечно базируемых T-пространств и T-идеалов. Перед каждой теоремой, описывающей способ построения такого объекта, доказывается утверждение о том, как устроено следствие из некоторых многочленов. Такими утверждениями являются леммы 3.4, 3.5, 3.6, 3.11, 3.12, 3.13, 3.23 и следствие 3.2. Перечисленные утверждения, по сути дела, и есть основные результаты главы 3. Сами теоремы формулируются для того, чтобы описать какой-нибудь, по возможности наиболее общий, способ построения бесконечно базируемых T-пространств и T-идеалов. При этом в формулировках возникают различные параметры (например, I в теореме 3.4), возможные значения которых обсуждаются после доказательства соответствующей теоремы. Возможно, такие теоремы можно сформулировать и другим образом при возникновении каких-либо специальных требований на результирующие T-пространства и T-идеалы.

3.2. Локальный случай

Пусть $X = \{x, y, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$ и $M = \mathbb{Z}\langle X\rangle + \mathbb{Z}$. Через $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ обозначим T-идеал алгебры M, порожденный многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$. Пусть q_1, q_2 — натуральные числа и $f_{q_1,q_2} = x^{q_1-1}[x, y]y^{q_2-1}$ — многочлен алгебры M.

Выполним замены $x \to x_1+\ldots+x_k$ и $y \to y_1+\ldots+y_l$ в многочлене f_{q_1,q_2}. Через f_{q_1,q_2}^{σ} обозначим однородное слагаемое получившегося многочлена, такое что $\deg_{x_i} f_{q_1,q_2}^{\sigma} = n_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$, и $\deg_{y_j} f_{q_1,q_2}^{\sigma} = m_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, l$, где $\sigma = (n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_l)$. Из соображений степени ясно, что необходимо требовать выполнения соотношений

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = q_1, \quad \sum_{j=1}^{l} m_j = q_2,$$

иначе мы получим $f_{q_1,q_2}^{\sigma} = 0$.

Положим далее $M_0 = \mathbb{Z}\langle x, y\rangle+\mathbb{Z}$ и $M_{k,l} = \mathbb{Z}\langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l\rangle+\mathbb{Z}$. Справедливы соотношения $M_0, M_{k,l} \subset M$. Выполним замену $x_i \to u_i$ и $y_j \to v_j$, где $u_i, v_j \in \langle x, y\rangle \cup \{1\}$ и $\deg_x u_i = a_i$, $\deg_y u_i = b_i$, $\deg_x v_j = c_j$, $\deg_y v_j = d_j$. Гомоморфизм алгебры $M_{k,l}$ в алгебру M, определяемый этой заменой, обозначим через η.

Рассмотрим однородный многочлен $\eta(f_{q_1,q_2}^{\sigma})$. $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный всеми такими многочленами для различных σ и η, совпадает с пересечением T-пространства алгебры M, порожденного многочленом f_{q_1,q_2}, с M_0. Приведем $\eta(f_{q_1,q_2}^{\sigma})$ по модулю $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ к виду $\gamma[x, y]x^{r_1-1}y^{r_2-1}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, и вычислим γ.

Лемма 3.1. *Пусть $h_1, \ldots, h_7 \in M_0$. Тогда*

$$h_1[h_2[h_3, h_4]h_5, h_6]h_7 = 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}.$$

Доказательство. Заметим, что $[x, x_1][x, x_2] \in T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$. Отсюда следует $[f_1, f_2][f_3, f_4] \in T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ для любых $f_1, \ldots, f_4 \in M_0$. Имеем

$$h_1[h_2[h_3, h_4]h_5, h_6]h_7 = h_1[[h_3, h_4]h_5h_2, h_6]h_7 = h_1[h_3, h_4][h_5h_2, h_6]h_7 = 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}.$$

Лемма доказана.

Отсюда получаем соотношения

$$\begin{aligned}[u_i, v_j] = [x^{a_i}y^{b_i}, x^{c_j}y^{d_j}] &= [x^{a_i}y^{d_j}]x^{c_j}y^{b_i} + [y^{b_i}x^{c_j}]x^{a_i}y^{d_j} = \\ &= a_id_j[x, y]x^{c_j+a_i-1}y^{b_i+d_j-1} + b_ic_j[y, x]x^{a_i+c_j-1}y^{d_j+b_i-1} = \\ &= (a_id_j - b_ic_j)[x, y]x^{a_i+c_j-1}y^{b_i+d_j-1} \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}.\end{aligned}$$

Теперь посмотрим, сколько раз выражения $w_i'[x_i, y_j]w_j''$, где w_i' и w_j'' — слова, встречаются в f_{q_1,q_2}^{σ}. Для расстановки переменных $x_1, \ldots, x_k$ на те места, где в f_{q_1,q_2}^{σ} стоит x^{q_1-1}, имеется $q_1 - 1$ мест. При этом x_i должно входить $n_i - 1$ раз, а $x_{i'}$ должно входить $n_{i'}$ раз при $i' \neq i$. Всего получаем $\frac{(q_1-1)!}{(n_1!\ldots n_{i-1}!(n_i-1)!n_{i+1}!\ldots n_k!)} = n_i\frac{(q_1-1)!}{(n_1!\ldots n_k!)}$ вариантов. Аналогично, для расстановки переменных $y_1, \ldots, y_l$ имеется $m_j\frac{(q_2-1)!}{(m_1!\ldots m_l!)}$ вариантов. Общее количество членов получается равным n_im_jE, где $E = \frac{(q_1-1)!(q_2-1)!}{n_1!\ldots n_k!m_1!\ldots m_l!}$. Заметим, что E может быть нецелым.

Таким образом, многочлен $(a_id_j - b_ic_j)[x, y]x^{r_1-1}y^{r_2-1}$ надо взять n_im_jE раз. Отсюда

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(a_id_j - b_ic_j)n_im_jE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}((n_ia_i)(m_jd_j) - (n_ib_i)(m_jc_j))E = (AD - BC)E,$$

где $A = \sum\limits_{i=1}^{k} n_ia_i$, $B = \sum\limits_{i=1}^{k} n_ib_i$, $C = \sum\limits_{j=1}^{l} m_jc_j$ и $D = \sum\limits_{j=1}^{l} m_jd_j$.

Вычислим теперь степени r_1 и r_2. Так как переменная x_i входит в f_{q_1,q_2}^{σ} в степени n_i и вместо нее подставляется слово u_i степени a_i по x и b_i по y, то это дает степень n_ia_i по x и n_ib_i

по y. Аналогично, переменная y_j дает вклад m_jc_j по x и m_jd_j по y. Суммируя по $i=1,\dots,k$ и $j=1,\dots,l$, получаем

$$r_1=\sum_{i=1}^{k}(n_ia_i)+\sum_{j=1}^{l}(m_jc_j)=A+C,\quad r_2=\sum_{i=1}^{k}(n_ib_i)+\sum_{j=1}^{l}(m_jd_j)=B+D.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\gamma=(AD-BC)E=((r_1-C)(r_2-B)-BC)E=(r_1r_2-r_1B-r_2C)E. \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Пусть* $q_1=q_2=q$ *и* $r_1=r_2=r=q_0q\geqslant 1$. *Тогда* γ *делится на* q_0.

Доказательство. Формула (3.1) теперь переписывается в виде $\gamma=(r^2-r(B+C))E$. Имеем

$$Er^2=q_0^2\frac{q!}{n_1!\dots n_k!}\,\frac{q!}{m_1!\dots m_l!}.$$

Далее получаем

$$rBE=q_0\sum_{i=1}^{k}b_in_i\frac{(q-1)!}{n_1!\dots n_k!}\,\frac{q!}{m_1!\dots m_l!}=q_0\sum_{i=1}^{k}b_i\frac{(q-1)!}{n_1!\dots n_{i-1}!(n_i-1)!n_{i+1}!\dots n_k!}\,\frac{q!}{m_1!\dots m_l!}.$$

Аналогично,

$$rCE=q_0\sum_{j=1}^{l}c_j\frac{q!}{n_1!\dots n_k!}\,\frac{(q-1)!}{m_1!\dots m_{j-1}!(m_j-1)!m_{j+1}!\dots m_l!}.$$

Из приведенных выше формул видно, что γ делится на q_0. Лемма доказана.

Приведем теперь еще один факт о многочленах $x^{q_1-1}[x,y]y^{q_2-1}$. Пусть Φ — коммутативное кольцо с единицей и $\pi\colon\mathbb{Z}\to\Phi$ — естественный гомоморфизм колец с единицей. Пусть $V^{(q_1,q_2)}$ есть Φ-подмодуль алгебры $\Phi\langle X\rangle$, порожденный всеми словами из $\langle X\rangle$ степени q_1 по x, q_2 по y и не зависящими от других переменных. Определим гомоморфизм Φ-модулей $\varphi\colon V^{(q_1,q_2)}\to\Phi$ на словах следующим образом:

$$\varphi(x^{a_1}y^{b_1}\dots x^{a_n}y^{b_n})=\sum_{i<j}\pi(b_i)\pi(a_j). \tag{3.2}$$

То есть $\varphi(u)$, где u — слово, есть результат действия π на число перестановок $yx\to xy$, необходимых для приведения u к виду $x^{q_1}y^{q_2}$.

Лемма 3.3. *Пусть* $h_1,\dots,h_5\in\Phi\langle X\rangle+\Phi$ *и* $g=h_1[[h_2,h_3],h_4]h_5\in V^{(q_1,q_2)}$. *Тогда* $\varphi(g)=0$. *При этом* $\varphi(x^{q_1-1}[x,y]y^{q_2-1})=-\pi(1)\neq 0$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $h_1,\dots,h_5$ — слова. Пусть $r_i=\varphi(h_i)$, $a_i=\deg_x h_i$ и $b_i=\deg_y h_i$, $i=1,\dots,5$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(h_1h_{\sigma(2)}h_{\sigma(3)}h_{\sigma(4)}h_5)&=\pi(a_5(b_2+b_3+b_4)+b_1(a_2+a_3+a_4)+a_5b_1)+\\&\quad+r_1+\dots+r_5+\varphi(x^{a_1+a_5}x^{a_{\sigma(2)}}y^{b_{\sigma(2)}}x^{a_{\sigma(3)}}y^{b_{\sigma(3)}}x^{a_{\sigma(4)}}y^{b_{\sigma(4)}}y^{b_1+b_5}),\end{aligned}$$

где σ — взаимно однозначное отображение множества $\{2,3,4\}$ в себя. Поэтому

$$\varphi(g)=\varphi(x^{a_1+a_5}[[x^{a_2}y^{b_2},x^{a_3}y^{b_3}],x^{a_4}y^{b_4}]y^{b_1+b_5}).$$

В соответствии с формулой (3.2) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x^{a_1+a_5}x^{a_2}y^{b_2}x^{a_3}y^{b_3}x^{a_4}y^{b_4}y^{b_1+b_5})&=\pi(b_3a_4+b_2(a_3+a_4)),\\ \varphi(x^{a_1+a_5}x^{a_3}y^{b_3}x^{a_2}y^{b_2}x^{a_4}y^{b_4}y^{b_1+b_5})&=\pi(b_2a_4+b_3(a_2+a_4)),\\ \varphi(x^{a_1+a_5}x^{a_4}y^{b_4}x^{a_2}y^{b_2}x^{a_3}y^{b_3}y^{b_1+b_5})&=\pi(b_2a_3+b_4(a_2+a_3)),\\ \varphi(x^{a_1+a_5}x^{a_4}y^{b_4}x^{a_3}y^{b_3}x^{a_2}y^{b_2}y^{b_1+b_5})&=\pi(b_3a_2+b_4(a_3+a_2)).\end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что $\varphi(g)=0$.

Заметим теперь, что

$$\varphi(x^{q_1-1}[x,y]y^{q_2-1}) = \varphi(x^{q_1-1}[x,y]y^{q_2-1}) = \varphi(x^{q_1}y^{q_2}) - \varphi(x^{q_1-1}yxy^{q_2-1}) = -\pi(1) \neq 0.$$

Лемма доказана.

Теперь построим бесконечно базируемые T-пространства. Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Мы считаем, что $\mathbb{Z}_p \subset K$, где $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пусть $F = K\langle X\rangle + K$ и ψ_p — гомоморфизм из M в F, индуцированный эпиморфизмом $z \to z + p\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$. Через $T^{(3)}$ обозначим T-идеал алгебры F, порожденный многочленом $[[x_1,x_2],x_3]$. Через $L^{(q_1,q_2)}$ обозначим T-пространство алгебры F, порожденное многочленами $x^{q_1-1}[x,y]y^{q_2-1}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и T-идеалом $T^{(3)}$.

Определим линейное отображение (проекцию) $\mu^{(q_1,q_2)}\colon F \to F$ следующим образом. Для слова $u \in \langle X\rangle \cup \{1\}$ положим

1) $\mu(u) = u$, если u зависит только от x и y и $\deg_x u = q_1$, $\deg_y u = q_2$;
2) $\mu(u) = 0$ иначе.

На всю F продолжим $\mu^{(q_1,q_2)}$ по линейности.

Лемма 3.4. *Пусть $t > s$. Тогда $\mu^{(p^t,p^t)}L^{(p^s,p^s)} \subset T^{(3)}$.*

Доказательство. Любой элемент из $\mu^{(p^t,p^t)}L^{(p^s,p^s)}$ является линейной комбинацией над K многочленов из $T^{(3)}$ и многочленов $\psi_p\eta(f^\sigma_{p^s,p^s})$ для различных допустимых σ и η, т. е. таких σ и η, что степени многочлена $\eta(f^\sigma_{p^s,p^s})$ по x и y равны p^t, а по остальным переменным нулю. Если в лемме 3.2 положить $r = p^t$, $q = p^s$ и $q_0 = p^{t-s}$, то получим $\psi_p\eta(f^\sigma_{p^s,p^s}) \in T^{(3)}$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *T-пространство L алгебры F, порожденное многочленами $x^{p^s-1}[x,y]y^{p^s-1}$, $s \in \mathbb{N}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и T-идеалом $T^{(3)}$, бесконечно базируемо.*

Доказательство. Имеем $L = \sum\limits_{s=1}^{\infty} L^{(p^s,p^s)}$. Предположим, что $x^{p^t-1}[x,y]y^{p^t-1} \in \sum\limits_{s=1}^{t-1} L^{(p^s,p^s)}$. Применяя $\mu^{(p^t,p^t)}$, получаем $x^{p^t-1}[x,y]y^{p^t-1} \in \sum\limits_{s=1}^{t-1}\mu^{(p^t,p^t)}L^{(p^s,p^s)}$. По лемме 3.4 тогда $x^{p^t-1}[x,y]y^{p^t-1} \in T^{(3)}$. Применяя лемму 3.3 к случаю $\Phi = K$, получаем противоречие. Теорема доказана.

Приведенные выше конструкции позволяют построить некоторый примеры для случая, когда Φ не поле. Пусть $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — кольцо вычетов по модулю n и $\mathbb{Q}_{p_1,\dots,p_k} = \{n/m\colon n,m \in \mathbb{Z},\ p_1 \nmid m, \dots, p_k \nmid m\}$ — локализация кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по идеалу, порожденному простыми числами $p_1,\dots,p_k$. Положим

$$M(n) = \mathbb{Z}_n\langle X\rangle + \mathbb{Z}_n, \quad H(p_1,\dots,p_k) = \mathbb{Q}_{p_1,\dots,p_k}\langle X\rangle + \mathbb{Q}_{p_1,\dots,p_k}.$$

Мы считаем, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_{p_1,\dots,p_k}$ и $M \subset H(p_1,\dots,p_k)$. Гомоморфизм из M в $M(n)$, индуцированный эпиморфизмом $z \to z + n\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$, обозначим через ψ_n и гомоморфизм из $H(p)$ в $M(p^k)$, индуцированный эпиморфизмом $n/m \to (n + p^k\mathbb{Z})(m + p^k\mathbb{Z})^{-1}$, $n/m \in \mathbb{Q}(p)$, $p \nmid m$, обозначим через ξ_k.

Через $L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Z}}$ обозначим T-пространство алгебры M, порожденное многочленами f_{q_1,q_2}, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и T-идеалом $T^{(3)}_{\mathbb{Z}}$. Положим $T^{(3)}_{\mathbb{Z}_n} = \psi_n T^{(3)}_{\mathbb{Z}}$ и $L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Z}_n} = \psi_n L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Z}}$. В алгебре $M(n)$ T-пространство $L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Z}_n}$ порождено многочленами $x^{q_1}[x,y]y^{q_2}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и $x_1[[x_2,x_3],x_4]x_5$, а T-идеал $T^{(3)}_{\mathbb{Z}_n}$ многочленом $[[x_1,x_2],x_3]$. Пусть $T^{(3)}_{\mathbb{Q}(p)}$ есть T-идеал алгебры $H(p)$, порожденный многочленами из $T^{(3)}_{\mathbb{Z}}$, и $L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Q}(p)}$ есть T-пространство алгебры $H(p)$, порожденное многочленами из $L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Z}}$. В алгебре $H(p)$ T-пространство $L^{(q_1,q_2)}_{\mathbb{Q}(p)}$ порождено многочленами $x^{q_1}[x,y]y^{q_2}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и $x_1[[x_2,x_3],x_4]x_5$, а T-идеал $T^{(3)}_{\mathbb{Q}(p)}$ многочленом $[[x_1,x_2],x_3]$.

Пусть $\mu^{(q_1,q_2)}_n$ — линейное отображение из $M(n)$ в $M(n)$, заданное на словах так же, как $\mu^{(q_1,q_2)}$. Положим теперь $m(s) = p(1)\dots p(s)$, где $p(i)$ есть i-е простое число.

Лемма 3.5. *Пусть $t > s$. Тогда $\mu_{p(t)}^{(m(t),m(t))} L_{\mathbb{Z}_{p(t)}}^{(m(s),m(s))} \subset T_{\mathbb{Z}_{p(t)}}^{(3)}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.4 и получается применением леммы 3.2 к случаю $r = m(t)$, $q = m(s)$ и $q_0 = p(s+1)\dots p(t)$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *T-пространство L_1 алгебры M, порожденное многочленами $x^{m(s)-1}[x,y]y^{m(s)-1}$, $s \in \mathbb{N}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и T-идеалом $T_{\mathbb{Z}}^{(3)}$, бесконечно базируемо. При этом T-пространство алгебры $H(p_1,\dots,p_k)$, порожденное многочленами из L_1, конечно базируемо для любых простых чисел $p_1,\dots,p_k$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ образ L_1 при проекции ψ_n есть конечно базируемое T-пространство алгебры $M(n)$.*

Доказательство. Имеем $L_1 = \sum\limits_{s=1}^{\infty} L_{\mathbb{Z}}^{(m(s),m(s))}$. Предположим, что $f_{m(t),m(t)} \in \sum\limits_{s=1}^{t-1} L_{\mathbb{Z}}^{(m(s),m(s))}$. Применяя сначала $\psi_{p(t)}$, а затем $\mu^{(m(t),m(t))}$, получаем $x^{m(t)-1}[x,y]y^{m(t)-1} \in \sum\limits_{s=1}^{t-1} \mu^{(m(t),m(t))} L_{\mathbb{Z}_{p(t)}}^{(m(s),m(s))}$. По лемме 3.5 тогда $x^{m(t)-1}[x,y]y^{m(t)-1} \in T_{\mathbb{Z}_{p(t)}}^{(3)}$. Из леммы 3.3 при $\Phi = \mathbb{Z}_{p(t)}$ получаем противоречие. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

При $t > s$ имеем

$$(x^{p(s+1)\dots p(t)})^{m(s)-1}[x^{p(s+1)\dots p(t)}, y^{p(s+1)\dots p(t)}](y^{p(s+1)\dots p(t)})^{m(s)-1} = \\ = (p(s+1)\dots p(t))^2 x^{m(t)-1}[x,y]y^{m(t)-1} \pmod{T_{\mathbb{Z}}^{(3)}}.$$

Пусть теперь $p_1 < \dots < p_k = p(s)$ — простые числа. Тогда числа $(p(s+1)\dots p(t))^2$, $t > s$, не делятся ни на одно из чисел $p_1,\dots,p_k$, и многочлены $f_{m(1),m(1)},\dots,f_{m(s),m(s)}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и $x_1[[x_2,x_3],x_4]x_5$ порождают T-пространство алгебры $H(p_1,\dots,p_k)$, порожденное многочленами из L_1. Теорема доказана.

Лемма 3.6. *Пусть $t > s$. Тогда $\mu_{p^{t+1}}^{(p^{t^2},p^{t^2})} L_{\mathbb{Z}_{p^{t+1}}}^{(p^{s^2},p^{s^2})} \subset T_{\mathbb{Z}_{p^{t+1}}}^{(3)}$.*

Доказательство. Из $t > s$ с учетом $t,s \in \mathbb{N}$ следует $t^2 - s^2 \geqslant t+1$. Тогда доказательство получается применением леммы 3.2 к случаю $r = p^{t^2}$, $q = p^{s^2}$ и $q_0 = p^{t^2-s^2}$. Лемма доказана.

Теорема 3.3. *T-пространство L_2 алгебры $H(p)$, порожденное многочленами $p^s x^{p^{s^2}-1}[x,y] \times \times y^{p^{s^2}-1}$, $s \in \mathbb{N}$, $x_1[x_2,x_3][x_4,x_5]x_6$ и T-идеалом $T_{\mathbb{Q}(p)}^{(3)}$, бесконечно базируемо. При этом для любого $k \in \mathbb{N}$ образ L_2 при проекции ξ_k есть конечно базируемое T-пространство алгебры $M(p^k)$.*

Доказательство. Предположим, что многочлен $p^t x^{p^{t^2}-1}[x,y]y^{p^{t^2}-1}$ принадлежит T-пространству алгебры $H(p)$, порожденному многочленами $p^s x^{p^{s^2}-1}[x,y]y^{p^{s^2}-1}$, $s < t$, и T-идеалом $T_{\mathbb{Q}(p)}^{(3)}$. Применяя сначала $\psi_{p^{t+1}}$, а затем $\mu_{p^{t+1}}^{(p^{t^2},p^{t^2})}$, получаем $(p^t + p^{t+1}\mathbb{Z})x^{p^{t^2}-1}[x,y]y^{p^{t^2}-1} \in \sum\limits_{s=1}^{t-1} \mu_{p^{t+1}}^{(p^{t^2},p^{t^2})} L_{\mathbb{Z}_{p^{t+1}}}^{(p^{s^2},p^{s^2})}$. По лемме 3.6 тогда $(p^t + p^{t+1}\mathbb{Z})x^{p^{t^2}-1}[x,y]y^{p^{t^2}-1} \in T_{\mathbb{Z}_{p^{t+1}}}^{(3)}$. Из леммы 3.3 при $\Phi = \mathbb{Z}_{p^{t+1}}$ получаем противоречие.

Однако T-пространство $\xi_k(L_2)$ конечно базируемо при любом k, так как лишь конечное число многочленов $\xi_k(p^s x^{p^{s^2}-1}[x,y]y^{p^{s^2}-1})$, $s \in \mathbb{N}$, отличны от нуля. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Легко видеть, что T-пространство алгебры F, порожденное многочленами $x^{p^s-1}[x,y]y^{p^s-1}$, $s \in \mathbb{N}$, бесконечно базируемо по модулю T-идеала, порожденного многочленами $[[x_1,x_2]x_3]$ и $[x_1x_2][x_1x_2]$. Аналогичные переформулировки возможны для теорем 3.2 и 3.3.

3.3. Общий случай

Пусть K — бесконечное поле характеристики $p > 0$, $X = \{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$ и $F = K\langle X\rangle + K$ — свободная ассоциативная алгебра с единицей. По поводу случая конечного поля см. замечания в конце раздела 3.1 и определения 3.3 и 3.4.

Через $T^{(3)}$ обозначим T-идеал алгебры F, порожденный многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$. Для натурального числа n через $\operatorname{ind}_p n$ мы обозначаем максимальное число $i \in \mathbb{N}$, такое что n делится на p^i. Положим также $\operatorname{ind}_p 0 = \infty$. Следующие соотношения будут часто использоваться в этом разделе:

$$\begin{gathered}
[x_2, x_3] \in T^{(3)}, \quad [x_1, x_2][x_3, x_4] = -[x_1, x_3][x_2, x_4] \pmod{T^{(3)}},\\
(x_1 + \ldots + x_s)^{p^l} = x_1^{p^l} + \ldots + x_s^{p^l} \pmod{T^{(3)}},\\
(x_1 \ldots x_s)^a = x_1^a \ldots x_s^a \pmod{T^{(3)}},
\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $l \geqslant \delta_p^2 + 1$, $\operatorname{ind}_p a \geqslant \delta_p^2 + 1$. Здесь и далее $\delta_j^i = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_i^i = 1$.

В этом разделе под выражением «набор» мы понимаем упорядоченный набор. Через $|a|$ мы обозначаем длину набора a. Для наборов $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ мы определяем их произведение следующим образом: $ab = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$. Набор, не представимый в виде a^i, $i \geqslant 2$, назовем *простым*. Если набор a есть некоторая перестановка набора b, то пишем $a \sim b$. Очевидно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Если $(f_1, \ldots, f_n) \in F^n$, то положим $\prod(f_1, \ldots, f_n) = f_1 \ldots f_n$. Для набора целых чисел $a = (a_1, \ldots, a_n)$ положим $\sum a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Имеет место следующее

Предложение 3.2. *Любой набор $a \in A^n$ представим в виде $a = b^k$, где b — простой набор. Любой набор, циклически сопряженный с a, имеет вид $b''b^{k-1}b'$, где $b = b'b''$. Мощность множества наборов, циклически сопряженных с a, равна $|b| = n/k$.*

Число k из этого определения обозначим через $\log a$, а набор b через $\sqrt{a}$.

Пусть $N = (f_1, \ldots, f_s)$ и $M = (g_1, \ldots, g_t)$ — наборы многочленов из F. Через $B(N, M)$ обозначим сумму многочленов $f_1' \ldots f_{s-1}'[f_s', g_t']g_{t-1}' \ldots g_1'$, где $(f_1', \ldots, f_s')$ — некоторая перестановка набора N и $(g_1', \ldots, g_t')$ — некоторая перестановка набора M. Например, многочлен $B((f_1, f_2), (g, g))$ равен $f_1[f_2, g]g + f_2[f_1, g]g$, если $f_1 \neq f_2$, и $f_1[f_2, g]g$, если $f_1 = f_2$. По модулю $T^{(3)}$ многочлен $B(N, M)$ равен многочлену $\operatorname{sim}(\varphi)(x^{s-1}[x, y]y^{t-1})$, где $\varphi(x) = N$ и $\varphi(y) = M$.

Из формул (3.3) следует

$$\begin{gathered}
B(N, M) = -B(M, N) \pmod{T^{(3)}},\\
B(N, M)B(N', M') = -B(N, N')B(M, M') \pmod{T^{(3)}}.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Определим также следующие многочлены. Пусть $N = (f_1, \ldots, f_s)$ — набор многочленов из F и g — многочлен из F. Положим $D(N, g) = B(N, (g)^p)$. Положим также

$$C^k(N, g) = \sum_{i=1}^{s} f_1 \ldots f_{i-1}[f_i, g]g^{p-1}f_{i+1} \ldots f_s(f_1 \ldots f_s)^{k-1}. \tag{3.5}$$

В этом разделе мы говорим, что многочлен $f \in F$ централен по модулю некоторого идеала I алгебры F, если для любого $g \in F$ выполнено $[f, g] \in I$. Для $f \in F$ и $A \subset X$ через $\mathrm{e}(f, A)$ обозначим многочлен, полученный из f подстановкой единицы вместо каждой буквы из A.

Лемма 3.7. *Многочлены $B(N, M)$, $D(N, g)$ и $C^k(N, g)$ центральны по модулю $T^{(3)}$.*

Доказательство. Центральность многочлена $B(N, M)$ по модулю $T^{(3)}$ следует из центральности многочлена $x_1^{|N|-1}[x_1, y_1]y_1^{|M|-1}$ по модулю $T^{(3)}$. Как частный случай этого утверждения получаем центральность многочлена $D(N,g)$ по модулю $T^{(3)}$. Пусть $N=(x_1,\dots,x_s)$, $g=y_1$ и $z\in X$. Имеем

$$[C^k(N,g),z]=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{s}k[x_i,y_1]y_1^{p-1}[x_j,z]x_i^{k-1}x_j^{k-1}\mathrm{e}((x_1\dots x_s)^k,\{x_i,x_j\})=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{1\leqslant j<i\leqslant s}k([x_i,y_1][x_j,z]+[x_i,z][x_j,y_1])y_1^{p-1}x_i^{k-1}x_j^{k-1}\mathrm{e}((x_1\dots x_s)^k,\{x_i,x_j\})\in T^{(3)}.$$

Общий случай получается подстановкой с учетом того факта, что $T^{(3)}$ есть T-идеал. Лемма доказана.

Многочлен $f\in F$ назовем *n-полным*, если он однородный и для любой переменной $z\in X$ степень $\deg_z f$ делится на n. Для однородного $h\in F$ и переменной $x\in X$ справедлива формула

$$[x,h]=\sum_{z\in X,\ \deg_z h>0}(\deg_z h)[x,z]z^{(\deg_z h)-1}\mathrm{e}(h,\{z\})\pmod{T^{(3)}}.\tag{3.6}$$

Отсюда следует, что любой p-полный многочлен централен по модулю $T^{(3)}$.

Лемма 3.8. *Пусть $f_1,\dots,f_n,g\in F$ такие, что g централен по модулю $T^{(3)}$ и многочлен $f_1\dots f_n g$ p-полный. Тогда*

$$f_1\dots f_n g=f_{i+1}\dots f_n f_1\dots f_i g\pmod{T^{(3)}},\quad i=1,\dots,n-1.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для случая, когда все многочлены $f_1,\dots,f_n$ есть переменные из X и $i=1$. По формуле (3.6) имеем $[f_1,f_2\dots f_n g]\in T^{(3)}$. Отсюда

$$f_1f_2\dots f_n g=f_2\dots f_n g f_1=f_2\dots f_n f_1 g\pmod{T^{(3)}}.$$

Лемма доказана.

Пусть m — четное число и $a=(a_1,\dots,a_m)$ — набор натуральных чисел (возможно, пустой). Положим

$$\varphi(a)=x_1^{a_1-1}[x_1,x_2]x_2^{a_2-1}\dots x_{m-1}^{a_{m-1}-1}[x_{m-1},x_m]x_m^{a_m-1}.$$

Если a — пустой набор, то $\varphi(a)=1$ и T-пространство алгебры F, порожденное этим многочленом, есть K (с учетом стандартного вложения). В случае $m>0$ T-пространство алгебры F, порожденное многочленом $\varphi(a)$ и T-идеалом $T^{(3)}$, есть линейное пространство над K, натянутое на $T^{(3)}$ и многочлены

$$B(N_1,N_2)\dots B(N_{m-1},N_m),\tag{3.7}$$

где $|N_i|=a_i$ и в наборы N_i входят только слова из $\langle X\rangle\cup\{1\}$. Изучать многочлен (3.7) не очень удобно с технической точки зрения. Поэтому мы умножим его на $y_1^{p-1}[y_1,y_2]y_2^{p-1}\dots y_{m-1}^{p-1}[y_{m-1},y_m]y_m^{p-1}$. По формулам (3.4) полученное произведение равно $(-1)^{m/2}D(N_1,y_1)\dots D(N_m,y_m)$ по модулю $T^{(3)}$. Если все многочлены, входящие в наборы $N_1,\dots,N_m$, зависят только от переменных x_i, $i\in\mathbb{N}$, то, выполнив такое умножение, мы совершим эквивалентный переход по модулю $T^{(3)}$, что следует из следующих утверждений.

Предложение 3.3. *Пусть на X введен некоторый линейный порядок $<$. Многочлены вида*

$$[z_1',z_2']\dots[z_{s-1}',z_s']z_1^{b_1}\dots z_t^{b_t},\tag{3.8}$$

где $z_i',z_j\in X$, $z_1'<\dots<z_s'$ и $z_1<\dots<z_t$, образуют базис F по модулю $T^{(3)}$.

Следствие 3.1. *Если многочлен $f\in F$ зависит только от переменных x_i, $i\in\mathbb{N}$, и $fy_1^{p-1}[y_1,y_2]y_2^{p-1}\dots y_{m-1}^{p-1}[y_{m-1},y_m]y_m^{p-1}\in T^{(3)}$, то $f\in T^{(3)}$.*

Интересующий нас многочлен $D(N_1,y_1)\dots D(N_m,y_m)$, при некоторых ограничениях на наборы $N_1,\dots,N_m$, можно представить по модулю $T^{(3)}$ в виде суммы более удобных для работы многочленов.

Лемма 3.9. *Пусть $N_1, \dots, N_m$ — наборы, состоящие из однородных многочленов алгебры F. Пусть при этом многочлен $\prod N_1 \dots \prod N_m$ p-полный. Тогда многочлен $D(N_1, y_1) \dots D(N_m, y_m)$ представляется по модулю $T^{(3)}$ как сумма многочленов $C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_m}(N_m', y_m)$, где наборы N_i' простые и $(N_i')^{k_i} \sim N_i$.*

Доказательство. Докажем индукцией по r, что исходный многочлен представляется по модулю $T^{(3)}$ как сумма многочленов вида

$$C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_r}(N_r', y_r) D(N_{r+1}, y_{r+1}) \dots D(N_m, y_m),$$

где $(N_i')^{k_i} \sim N_i$ для $i = 1, \dots, r$. Для $r = 0$ это выполнено. Пусть $N_{r+1} = (f_1, \dots, f_s)$. Для набора $(f_1', \dots, f_s')$, являющегося некоторой перестановкой набора $(f_1, \dots, f_s)$, положим $D(f_1', \dots, f_s')$ равным сумме многочленов вида $f_1'' \dots f_{s-1}''[f_s'', y_{r+1}]y_{r+1}^{p-1}$, где набор $(f_1'', \dots, f_s'')$ циклически сопряжен набору $(f_1', \dots, f_s')$. Очевидно, что многочлен $D(N_{r+1}, y_{r+1})$ есть сумма многочленов $D(f_1', \dots, f_s')$ по попарно циклически несопряженным наборам $(f_1', \dots, f_s')$. По утверждению 3.2 можно считать, что в данной сумме $(f_1', \dots, f_s') = (h_1, \dots, h_{s/k})^k$, где набор $(h_1, \dots, h_{s/k})$ простой. Используя описание всех циклически сопряженных наборов, приведенных в утверждении 3.2, получаем

$$D(f_1', \dots, f_s') = \sum_{i=1}^{s/k} h_{i+1} \dots h_{s/k} (h_1 \dots h_{s/k})^{k-1} h_1 \dots h_{i-1} [h_i, y_{r+1}] y_{r+1}^{p-1}.$$

Производя циклические сдвиги по лемме 3.8, получаем

$$\begin{aligned} C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_r}(N_r', y_r) D(f_1', \dots, f_s') D(N_{r+2}, y_{r+2}) \dots D(N_m, y_m) = \\ = C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_r}(N_r', y_r) C^k((h_1, \dots, h_{s/k}), y_{r+1}) D(N_{r+2}, y_{r+2}) \dots D(N_m, y_m). \end{aligned}$$

В соответствии с последней формулой надо положить $k_{r+1} = k$ и $N_{r+1}' = (h_1, \dots, h_{s/k})$. Лемма доказана.

Замечание 3.2. Из доказательства непосредственно видно, по каким наборам $N_1', \dots, N_m'$ и числам $k_1, \dots, k_m$ надо суммировать. Сформулируем этот факт для того, чтобы использовать в следующем разделе. Пусть $N_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, s_i$, — представители классов эквивалентности относительно циклической сопряженности, на которые делится множество $\{L \colon L \sim N_i\}$. Тогда

$$D(N_1, y_1) \dots D(N_m, y_m) = \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_i} C^{\log N_i^{(j)}} \left(\sqrt{N_i^{(j)}}, y_i \right) \pmod{T^{(3)}}. \tag{3.9}$$

Для набора $a = (a_1, \dots, a_m)$ натуральных чисел через $\operatorname{ind}_p a$ обозначаем $\min\limits_{i=1,\dots,m} \operatorname{ind}_p a_i$. Если a — пустой набор, то положим $\operatorname{ind}_p a = \infty$. Если умножение наборов натуральных чисел на натуральные числа понимать покомпонентно, то $\operatorname{ind}_p a$ есть максимум таких $i \in \mathbb{N}$, что a делится на p^i.

Следующая лемма содержит условия, при которых многочлен $C^{k_1}(N_1, y_1) \dots C^{k_m}(N_m, y_m)$ принадлежит T-идеалу $T^{(3)}$.

Лемма 3.10. *Пусть $N_1, \dots, N_m$ — наборы, состоящие из однородных многочленов алгебры F. Пусть при этом многочлен $\prod N_1^{k_1} \dots \prod N_m^{k_m}$ p^l-полный и $\min\limits_{i=1,\dots,m} \operatorname{ind}_p k_i < l$. Тогда $C^{k_1}(N_1, y_1) \dots C^{k_m}(N_m, y_m) \in T^{(3)}$.*

Доказательство. Можно считать, что все многочлены из наборов $N_1, \dots, N_m$ ненулевые. Пусть $d = \min\limits_{i=1,\dots,m} \operatorname{ind}_p k_i$ и $A = \{i = 1, \dots, m \colon \operatorname{ind}_p k_i = d\}$. Произведение (в любом порядке) многочленов $\prod N_i^{k_i}$ по $i \in \{1, \dots, m\} \setminus A$ есть p^{d+1}-полный многочлен. Так как $d + 1 \leqslant l$, то произведение многочленов $\prod N_i^{k_i}$ по $i \in A$ тоже есть p^{d+1}-полный многочлен.

Пусть $A = \{t_1, \dots, t_c\}$, где $t_1 < \dots < t_c$. Тогда числа k_{t_i}/p^d целые, не делящиеся на p. Положим $g = \prod N_{t_1}^{k_{t_1}} \dots \prod N_{t_c}^{k_{t_c}}$. Пользуясь формулами (3.5) и (3.6), получаем

$$C^{k_{t_1}}(N_{t_1}, y_{t_1}) \dots C^{k_{t_c}}(N_{t_c}, y_{t_c}) = \sum_{z_1,\dots,z_c \in X} \Bigl(\deg_{z_1} \prod N_{t_1} \dots \deg_{z_c} \prod N_{t_c}\Bigr)[z_1, y_{t_1}] \dots [z_c, y_{t_c}] \times \\ \times z_1^{\deg_{z_1} g - 1} \dots z_c^{\deg_{z_c} g-1} y_{t_1}^{p-1} \dots y_{t_c}^{p-1} \mathrm{e}(g, \{z_1, \dots, z_c\}) \pmod{T^{(3)}}.$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, антисимметрично относительно переменных $z_1, \dots, z_c$ по модулю $T^{(3)}$, и если среди этих переменных есть совпадающие, то оно принадлежит $T^{(3)}$. Поэтому можно ввести какой-нибудь линейный порядок на X и суммировать только по строго возрастающим последовательностям переменных $z_1, \dots, z_c$. При этом выражение под знаком суммы должно быть заменено на

$$\Bigl(\sum_{\sigma \in S_c} \operatorname{sign} \sigma \deg_{z_{\sigma(1)}} \prod N_{t_1} \dots \deg_{z_{\sigma(c)}} \prod N_{t_c}\Bigr)[z_1, y_{t_1}] \dots [z_c, y_{t_c}] \times \\ \times z_1^{\deg_{z_1} g - 1} \dots z_c^{\deg_{z_c} g-1} y_{t_1}^{p-1} \dots y_{t_c}^{p-1} \mathrm{e}(g, \{z_1, \dots, z_c\}), \quad (3.10)$$

где S_c — симметрическая группа степени c.

Сумма, стоящая в скобках, равна определителю матрицы над $\mathbb{Z}$ размера $c \times c$, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $\deg_{z_j} \prod N_{t_i}$. Степень $\deg_{z_j} g$, равная $p^d \sum_{i=1}^{c} (k_{t_i}/p^d) \deg_{z_j} \prod N_{t_i}$, делится на p^{d+1}. Поэтому сумма $\sum_{i=1}^{c} (k_{t_i}/p^d) \deg_{z_j} \prod N_{t_i}$ делится на p. Так как все числа k_{t_i}/p^d не делятся на p, то определитель вышеописанной матрицы делится на p. Следовательно, многочлен (3.10) равен нулю в алгебре F и $C^{k_{t_1}}(N_{t_1}, y_{t_1}) \dots C^{k_{t_c}}(N_{t_c}, y_{t_c}) \in T^{(3)}$. Учитывая лемму 3.7, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Изучим теперь, что можно получить подстановками из многочленов $\varphi(a)$ по модулю $T^{(3)}$.

Лемма 3.11. *Пусть f — некоторый p^l-полный многочлена из T-пространства, порожденного многочленом $\varphi(a)$ и T-идеалом $T^{(3)}$. Если $\operatorname{ind}_p a < l$, то $f \in T^{(3)}$. Если $\delta_p^2 + 1 \leqslant l$, то по модулю $T^{(3)}$ многочлен f есть линейная комбинация базисных многочленов* (3.8) *для* $s = |a|$.

Доказательство. Пусть $m = |a|$. Можно считать, что $m > 0$. Достаточно доказать теорему для случая $f = B(N_1, N_2) \dots B(N_{m-1}, N_m)$, где $N_1, \dots, N_m$ — наборы однородных многочленов из F, $|N_i| = a_i$ и многочлен $\prod N_1 \dots \prod N_m$ p^l-полный. Без ограничения общности можно считать, что все многочлены, входящие в наборы N_i, зависят только от переменных x_i, $i \in \mathbb{N}$. По формулам (3.4) и лемме 3.7 имеем

$$f y_1^{p-1}[y_1, y_2] y_2^{p-1} \dots y_{m-1}^{p-1}[y_{m-1}, y_m] y_m^{p-1} = (-1)^{m/2} D(N_1, y_1) \dots D(N_m, y_m) \pmod{T^{(3)}}. \quad (3.11)$$

Пользуясь леммой 3.9, представим многочлен $D(N_1, y_1) \dots D(N_m, y_m)$ как сумму многочленов вида $C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_m}(N_m', y_m)$, где наборы N_i' простые и $(N_i')^{k_i} \sim N_i$. Имеем $k_i \mid a_i$, откуда $\operatorname{ind}_p k_i \leqslant \operatorname{ind}_p a_i$.

Рассмотрим сначала случай $\operatorname{ind}_p a < l$. Тогда $\min\limits_{i=1,\dots,m} \operatorname{ind}_p k_i < l$, и по лемме 3.10 имеем $f y_1^{p-1}[y_1, y_2] y_2^{p-1} \dots y_{m-1}^{p-1}[y_{m-1}, y_m] y_m^{p-1} \in T^{(3)}$. По следствию 3.1 получаем $f \in T^{(3)}$.

Рассмотрим теперь случай $\delta_p^2 + 1 \leqslant l$. Если существует некоторое $i = 1, \dots, m$, такое что $\operatorname{ind}_p k_i < l$, то по лемме 3.10 получаем $C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_m}(N_m', y_m) \in T^{(3)}$. Предположим теперь, что $\operatorname{ind}_p k_i \geqslant l$ для $i = 1, \dots, m$. Пользуясь формулами (3.5) и (3.6), получаем

$$C^{k_i}(N_i', y_i) = \sum_{z \in X,\ \deg_z \prod N_i' > 0} \Bigl(\deg_z \prod N_i'\Bigr)[z, y_i] z^{\deg_z \prod (N_i')^{k_i} - 1} y_i^{p-1} \mathrm{e}\Bigl(\prod N_i', \{z\}\Bigr)^{k_i} \pmod{T^{(3)}}. \quad (3.12)$$

Формулы (3.3) позволяют представить многочлен $\mathrm{e}\big(\prod N_i', \{z\}\big)^{k_i}$ по модулю $T^{(3)}$ в виде произведения p^l-х степеней переменных. Так как многочлены z^{p^l}, где $z \in X$, центральны по модулю $T^{(3)}$, то многочлен $D(N_1, y_1)\dots D(N_m, y_m)$ по модулю $T^{(3)}$ есть линейная комбинация базисных многочленов, данных в утверждении 3.3, где $s = 2m$ и $z'_{2i} = y_i$, $i = 1, \dots, m$. По следствию 3.1 и формулам (3.4) многочлен $B(N_1, N_2)\dots = B(N_{m-1}, N_m)$ по модулю $T^{(3)}$ есть линейная комбинация базисных многочленов (3.8) для $s = m$. Лемма доказана.

Введем следующее обозначение. Пусть $a = (a_1, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — два набора натуральных чисел и число m четное. Тогда положим

$$\psi(a,b) = x_1^{a_1-1}[x_1,x_2]x_2^{a_2-1}\dots x_{m-1}^{a_{m-1}-1}[x_{m-1},x_m]x_m^{a_m-1}x_{m+1}^{b_1}\dots x_{m+n}^{b_n}.$$

Заметим, что если b — пустой набор, то $\psi(a,b) = \varphi(a)$. Каждый многочлен (3.8) получается из некоторого многочлена $\psi(a,b)$ переименованием переменных и добавлением многочленов из $T^{(3)}$.

Лемма 3.12. *Пусть f — некоторый p^l-полный многочлен из T-пространства, порожденного многочленом $\psi(a,b)$ и T-идеалом $T^{(3)}$. Если $\operatorname{ind}_p a < l$, $\operatorname{ind}_p a < \operatorname{ind}_p b$, то $f \in T^{(3)}$. Если $\delta_p^2 + 1 \leqslant l$, $\delta_p^2 + 1 \leqslant \operatorname{ind}_p b$, то по модулю $T^{(3)}$ многочлен f есть линейная комбинация базисных многочленов* (3.8) *для $s = |a|$.*

Доказательство. В случае, когда один из наборов a или b пуст, эта лемма следует из формул (3.3) и леммы 3.11. Поэтому считаем, что наборы a и b непусты и $l \geqslant 1$. Положим $m = |a|$. По формулам (3.3) в случае $\operatorname{ind}_p b \geqslant \delta_p^2 + 1$ многочлен f по модулю $T^{(3)}$ есть линейная комбинация многочленов вида

$$B(N_1,N_2)\dots B(N_{m-1},N_m)f_1^{p^{\operatorname{ind}_p b}}\dots f_k^{p^{\operatorname{ind}_p b}}, \tag{3.13}$$

где $m = |a|$, $k = |b|$, $f_1, \dots, f_k$ — однородные ненулевые многочлены, в наборы $N_1, \dots, N_m$ входят только однородные многочлены и многочлен $\prod N_1 \dots \prod N_m f_1^{p^{\operatorname{ind}_p b}} \dots f_k^{p^{\operatorname{ind}_p b}}$ p^l-полный.

В случае $p = 2$, $\operatorname{ind}_p a = 0$, $\operatorname{ind}_p b = 1$ к многочленам (3.13) надо еще добавить p^l-полные многочлены вида

$$B(N_1,N_2)\dots B(N_{m-1},N_m)f_1^2\dots f_l^2[g_1,h_1]\dots[g_{k-t},h_{k-t}], \tag{3.14}$$

где $t < k$. Однако, выполняя циклический сдвиг в члене $[g_{k-t}, h_{k-t}]$ по лемме 3.8, получаем, что многочлены (3.14) принадлежат T-идеалу $T^{(3)}$. Поэтому и в этом случае можно ограничится рассмотрением многочленов (3.13)

В случае $\operatorname{ind}_p a < l$, $\operatorname{ind}_p a < \operatorname{ind}_p b$ отсюда следует, что многочлен $\prod N_1 \dots \prod N_m$ $p^{\operatorname{ind}_p a+1}$-полный, и по первой части леммы 3.11 многочлен (3.13) принадлежит $T^{(3)}$. В случае $\delta_p^2 + 1 \leqslant l$, $\delta_p^2 + 1 \leqslant \operatorname{ind}_p b$ получаем, что многочлен $\prod N_1 \dots \prod N_m$ $p^{\delta_p^2+1}$-полный. Требуемое утверждение теперь следует из второй части леммы 3.11 и формул (3.3). Лемма доказана.

Для пары наборов натуральных чисел (a,b), где $a = (a_1, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$, определим линейное отображение $\mu^{(a,b)}\colon F \to F$ следующим образом. Для слова $u \in \langle X \rangle \cup \{1\}$ положим

1) $\mu^{(a,b)}(u) = u$, если $\deg_{x_i} u = a_i$, $i = 1, \dots, m$, $\deg_{x_{m+j}} u = b_j$, $j = 1, \dots, n$ и слово u не зависит от остальных переменных;
2) $\mu^{(a,b)}(u) = 0$ иначе.

На всю F продолжим $\mu^{(a,b)}$ по линейности.

Теорема 3.4. *Пусть A — некоторое множество, элементами которого являются пары наборов натуральных чисел (a,b), где a — набор четной длины, I — некоторое T-пространство и выполняется одно из следующих условий:*

1) *для любой пары $(a,b) \in A$ выполнено $\operatorname{ind}_p a < \operatorname{ind}_p b$. Существует последовательность (a_i, b_i), $i \in \mathbb{N}$, пар из A, такая что $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{ind}_p a_i = \infty$ и для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено $\mu^{(a_i,b_i)} I \subset T^{(3)}$;*

2) *для любой пары* $(a,b) \in A$ *выполнено* $1+\delta_p^2 \leqslant \operatorname{ind}_p b$. *Существует последовательность* (a_i,b_i), $i \in \mathbb{N}$, *пар из* A, *такая что для любого* $i \in \mathbb{N}$ *выполнено* $1+\delta_p^2 \leqslant \operatorname{ind}_p a_i$, $1+\delta_p^2 \leqslant \operatorname{ind}_p b_i$, $\lim\limits_{i\to\infty} |a_i| = \infty$ *и* $\mu^{(a_i,b_i)} I \subset T^{(3)}$.

Тогда T-пространство, порожденное многочленами $\psi(a,b)$, $(a,b) \in A$, *бесконечно базируемо по модулю* I.

Доказательство следует непосредственно из леммы 3.12.

Пока не ясно, как описать все такие T-пространства I, что для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено $\mu^{(a_i,b_i)} I \subset T^{(3)}$. Однако ясно, что можно взять I равным $T^{(3)}$. Имея более точную информацию о последовательности (a_i,b_i), можно еще расширить I. Например, если в случае 1) $|a_i| \leqslant m$, $i \in \mathbb{N}$, то можно считать, что I есть T-идеал, порожденный многочленами $[[x_1,x_2],x_3]$ и $[x_1,x_2]\dots[x_{m+1},x_{m+2}]$.

Лемма 3.12 имеет еще одно приложение, которое нам понадобится в разделе 3.5, где мы построим бесконечно базируемые T-идеалы, порожденные мономами. Для любых $f,g \in F$ и $n \in \mathbb{N}$ положим $Q_n(f,g) = f^{n-1}gfg^{n-1}$.

Теорема 3.5. *Пусть* a — *натуральные число и* $b=(b_1,\dots,b_k)$ — *набор натуральных чисел, такие что* $\delta_p^2+1 \leqslant \operatorname{ind}_p a$, $\delta_p^2+1 \leqslant \operatorname{ind}_p b$. *Тогда T-пространство, порожденное мономами* $\varphi'_m(a,b) = Q_a(x_1,x_2)\dots Q_a(x_{m-1},x_m) = x_{m+1}^{b_1}\dots x_{m+k}^{b_k}$, *где* m *четное, и T-идеалом* $T^{(3)}$, *бесконечно базируемо.*

Доказательство. Имеем $Q(x_i,x_j) = x_i^a x_j^a - x_i^{a-1}[x_i,x_j]x_j^{a-1}$. Поэтому моном $\varphi'_m(a,b)$ по модулю $T^{(3)}$ равен сумме многочлена $(-1)^{m/2}\psi((a)^m,b)$ и линейной комбинации многочленов вида $\pi\psi((a)^i,(a)^j b)$, где π — автоморфизм алгебры F, индуцированный некоторой биекцией множества X, $i+j=m$ и $i<m$. Отсюда по лемме 3.12 получаем, что моном $\varphi'_{m+2}(a,b)$ не принадлежит T-пространству, порожденному мономами $\varphi'_2(a,b),\dots,\varphi'_m(a,b)$ и T-идеалом $T^{(3)}$. Теорема доказана.

В работе [9] А. В. Гришин доказал, что в случае $p=2$ T-пространство, порожденное многочленами $x_1^2\dots x_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, и T-идеалом $T^{(3)}$, бесконечно базируемо. Мы докажем следующее обобщение этого результата. Предположим, что $p=2$. Для набора натуральных чисел $a=(a_1,\dots,a_m)$ положим $\varphi''(a) = x_1^{a_1}\dots x_m^{a_m}$.

Лемма 3.13. *Пусть* $p=2$, f — *некоторый* 2*-полный многочлен из T-пространства, порожденного многочленом* $\varphi''(a)$ *и T-идеалом* $T^{(3)}$, *и* $\operatorname{ind}_2 a \geqslant 1$. *Тогда многочлен* f *по модулю* $T^{(3)}$ *есть линейная комбинация произведений квадратов слов.*

Доказательство. Для набора многочленов $N=(f_1,\dots,f_s)$ положим $S(N)$ равным сумме всех произведений $\prod N'$, где $N' \sim N$, и $C(N) = \sum\limits_{i=1}^{s} f_{i+1}\dots f_s f_1 \dots f_i$. Многочлен $S(N)$ централен по модулю $T^{(3)}$ и есть сумма многочленов $C(M)$ по некоторым попарно циклически несопряженным наборам M, таким что $M \sim N$. Пусть $a=(a_1,\dots,a_m)$. Случай $m=0$ тривиален. Поэтому предположим, что $m>0$. Достаточно рассмотреть случай, когда $f = S(N_1)\dots S(N_m)$, где $|N_i| = a_i$, в наборы N_i входят только слова из $\langle X\rangle \cup \{1\}$ и многочлен $\prod N_1 \dots \prod N_m$ 2-полный. Теперь можно провести индукцию аналогично лемме 3.9. Действительно, пусть имеется многочлен $g = u_1^2\dots u_i^2 S(N_{i+1})\dots S(N_m)$, где $u_1,\dots,u_i$ — слова. Многочлен g есть сумма многочленов вида $u_1^2\dots u_i^2 C(N) S(N_{i+2})\dots S(N_m)$, где $N \sim N_{i+1}$. В соответствии с утверждением 3.2 имеет место представление $N = (N')^k$, где набор N' простой. При этом $k|N'| = a_{i+1}$. По лемме 3.8 имеем

$$u_1^2\dots u_i^2 C(N) S(N_{i+2})\dots S(N_m) = |N'| u_1^2 \dots u_i^2 \Big(\prod N\Big) S(N_{i+2})\dots S(N_m).$$

Если $|N'|$ четное, то последний многочлен равен нулю. Если же $|N'|$ нечетное, то k четное и $\prod N = u_{i+1}^2$, где $u_{i+1} = (\prod N')^{k/2}$. Продолжая этот процесс, получим требуемое представление. Лемма доказана.

Для набора натуральных чисел a, где $a = (a_1, \ldots, a_m)$, определим линейное отображение $\mu^{(a)} \colon F \to F$ следующим образом. Для слова $u \in \langle X \rangle \cup \{1\}$ положим

1) $\mu^{(a)}(u) = u$, если $\deg_{x_i} u = a_i$, $i = 1, \ldots, m$ и слово u не зависит от остальных переменных;
2) $\mu^{(a)}(u) = 0$ иначе.

На всю F продолжим $\mu^{(a)}$ по линейности.

Теорема 3.6. *Пусть $p = 2$, A — некоторое множество, элементами которого являются наборы натуральных чисел, и I — некоторое T-пространство. Пусть для любого набора $a \in A$ выполнено $\operatorname{ind}_2 a \geqslant 1$ и существует последовательность a_i, $i \in \mathbb{N}$, наборов из A, такая что $\lim\limits_{i \to \infty} k_i = \infty$, где k_i — количество элементов t набора a_i, для которых $\operatorname{ind}_2 t = 1$, и для любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено $\mu^{((2)^{k_i})} I \subset T^{(3)}$.*

Тогда T-пространство, порожденное многочленами $\varphi''(a)$, $a \in A$, бесконечно базируемо по модулю I.

Доказательство. Так как для четного n, не делящегося на 4, число C_n^2 нечетное, то многочлен $x_1^2 \ldots x_{k_j}^2$ принадлежит T-пространству, порожденному многочленом $\varphi''(a_j)$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 3.13 и вышеупомянутого результата А. В. Гришина. Теорема доказана.

Как и в случае теоремы 3.4, можно положить $I = T^{(3)}$.

Наконец, изучим еще многочлены f из леммы 3.11 для случая $\delta_p^2 + 1 \leqslant l$ более подробно. В этой лемме утверждается, что такие многочлены по модулю $T^{(3)}$ представляются как линейные комбинации базисных многочленов (3.8) для $s = |a|$, и ничего не говорится, какие именно. Оказывается, что может получиться далеко не всякая линейная комбинация таких базисных многочленов.

Для изучения этого вопроса введем следующие обозначения. Пусть a — некоторый набор и $a^{(1)}, \ldots, a^{(s)}$ — представители классов эквивалентности относительно циклической сопряженности, на которые делится множество наборов, получаемых из набора a перестановками. Тогда положим $\lambda_p(a)$ равным сумме рациональных чисел $1/\log a^{(i)}$ по тем $i = 1, \ldots, s$, для которых $a^{(i)}$ делится на $p^{1+\delta_p^2}$.

Для набора натуральных чисел $a = (a_1, \ldots, a_m)$ через $U(a)$ обозначим подпространство алгебры F, натянутое на слова $u \in \langle X \rangle \cup \{1\}$, зависящие только от переменных x_i, $i \leqslant m$, такие что $\deg_{x_i} u = a_i$ при $i \leqslant m$. Обозначим через $A_m(s)$ множество, состоящее из наборов натуральных чисел вида $(j_1, \ldots, j_s)$, где $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_s \leqslant m$. Положим $A_m = \bigcup\limits_{i=0}^{[m/2]} A_m(2i)$. Для $j = (j_1, \ldots, j_s) \in A_m(s)$, где s четное, положим

$$g_a(j) = x_{j_1}^{a_{j_1}-1}[x_{j_1}, x_{j_2}]x_{j_2}^{a_{j_2}-1} \ldots x_{j_{s-1}}^{a_{j_{s-1}}-1}[x_{j_{s-1}}, x_{j_s}]x_{j_s}^{a_{j_s}-1}x_{i_1}^{a_{i_1}} \ldots x_{i_{m-s}}^{a_{i_{m-s}}},$$
$$g'_a(j) = x_{j_1}^{a_{j_1}-1}[x_{j_1}, y_1]y_1^{p-1} \ldots x_{j_s}^{a_{j_s}-1}[x_{j_s}, y_s]y_s^{p-1}x_{i_1}^{a_{i_1}} \ldots x_{i_{m-s}}^{a_{i_{m-s}}},$$

где $i_1 < \ldots < i_{m-s}$ и $\{i_1, \ldots, i_{m-s}\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_s\}$. Из утверждения 3.2 следует, что многочлены $g_a(j)$, $j \in A_m$, образуют базис пространства $U(a)$ по модулю его подпространства $U(a) \cap T^{(3)}$. Через $U_s(a)$ обозначим подпространство в $U(a)$, натянутое на многочлены $g_a(j)$, где $j \in A_m(s)$, и T-идеал $T^{(3)}$.

Введенные многочлены связаны соотношением

$$g'_a(j) = (-1)^{s/2} g_a(j) y_1^{p-1}[y_1, y_2]y_2^{p-1} \ldots y_{s-1}^{p-1}[y_{s-1}, y_s]y_s^{p-1} \pmod{T^{(3)}}. \tag{3.15}$$

Пусть $N_1, \ldots, N_m$ — наборы однородных многочленов из F. Через $M(N_1, \ldots, N_m)$ обозначим целочисленную матрицу размера $m \times n$, у которой на пересечении строки s и столбца t стоит $\lambda_p(N_s) \deg_{x_t} \prod N_s$. Для $j = (j_1, \ldots, j_m) \in A_n(m)$ через $M(N_1, \ldots, N_m)(j)$ обозначим минор матрицы $M(N_1, \ldots, N_m)$, соответствующий столбцам $j_1, \ldots, j_m$.

Пусть $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — такой набор натуральных чисел, что $1 + \delta_p^2 \leqslant \operatorname{ind}_p c$. Положим $l = \operatorname{ind}_p c$.

Лемма 3.14. *Пусть m ненулевое четное и $N_1, \dots, N_m$ — наборы слов из $\langle X\rangle \cup \{1\}$, такие что $\prod N_1 \dots \prod N_m \in U(c)$. Тогда*

$$B(N_1, N_2) \dots B(N_{m-1}, N_m) = \sum_{j \in A_n(m)} M(N_1, \dots, N_m)(j) g_c(j) \pmod{T^{(3)}}.$$

Доказательство. Пусть $N_1', \dots, N_m'$ — простые наборы, такие что $(N_i')^{k_i} \sim N_i$ и $\operatorname{ind}_p k_i \geqslant 1 + \delta_p^2$. Так как $\deg_{x_j} \prod N_i' = (\deg_{x_j} \prod N_i)/k_i$, то по формуле (3.12) получаем

$$C^{k_1}(N_1', y_1) \dots C^{k_m}(N_m', y_m) = \sum_{j \in A_n(m)} \frac{M(j)}{k_1 \dots k_m} g_c'(j) \pmod{T^{(3)}}, \tag{3.16}$$

где $M(j)$ есть минор, соответствующий столбцам с номерами $j_1, \dots, j_m$, где $j = (j_1, \dots, j_m)$, матрицы, у которой на пересечении строки s и столбца t стоит $\deg_{x_t} \prod N_s$. Если числа $k_1, \dots, k_m$ такие, что $\operatorname{ind}_p k_i < 1 + \delta_p^2$ для некоторого $i = 1, \dots, m$, то по лемме 3.10 левая часть формулы (3.16) принадлежит $T^{(3)}$. Пользуясь формулой (3.9) и определением $\lambda_p(N_s)$, получаем

$$D(N_1, y_1) \dots D(N_m, y_m) = \sum_{j \in A_n(m)} M(N_1, \dots, N_m)(j) g_c'(j) \pmod{T^{(3)}}.$$

По формулам (3.15), (3.11) и следствию 3.1 получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Теорема 3.7. *Пусть k равно числу элементов c_i, таких что $\operatorname{ind}_p c_i = l$, $1 \leqslant n - m \leqslant k$ и L есть T-пространство, порожденное всеми многочленами $\varphi(a)$, где $|a| = m$, и T-идеалом $T^{(3)}$. Тогда $\operatorname{codim}(U_m(c) | U_m(c) \cap L) \geqslant C_{k-1}^{k-n+m}$.*

Доказательство. Можно считать, что $m > 0$. Пусть B — некоторая матрица размера $(n-m) \times n$, у которой для любого $i = 1, \dots, n$ в i-м столбце стоит $n-m-1$ нуль и одно число c_i/p^l. Эта матрица целочисленная, и сумма ее строк равна $p^{-l}c = (p^{-l}c_1, \dots, p^{-l}c_n)$. Для набора $j = (j_1, \dots, j_{n-m})$ из $A_n(n-m)$ через $B(j)$ обозначим минор матрицы B, соответствующий столбцам с номерами $j_1, \dots, j_{n-m}$.

Предположим, как и в предыдущей лемме, что $N_1, \dots, N_m$ — наборы слов из $\langle X \rangle \cup \{1\}$, такие что $\prod N_1 \dots \prod N_m \in U(c)$. Обозначим через $M_B(N_1, \dots, N_m)$ матрицу, полученную приписыванием сверху к матрице $M(N_1, \dots, N_m)$ матрицы B. Рассмотрим представление $\lambda_p(N_i) = p^{t_i}(p_i/q_i)$, где $t_i \in \mathbb{Z}$ и p_i и q_i — целые числа, не делящиеся на p. Пусть $t = \max(\{t_i : i = 1, \dots, m\} \cup \{-l\})$. Тогда $p^{t-t_i}(q_i/p_i)\lambda_p(N_i) = p^t$.

Если i-ю строку матрицы $M(N_1, \dots, N_m)$ умножить на $p^{t-t_i}(q_i/p_i)$ для каждого $i = 1, \dots, m$, а затем все получившиеся строки сложить, то получим строку $p^t c$. Если каждую строку матрицы B умножить на $-p^{t+l}$, а затем все получившиеся строки сложить, то получим строку $-p^t c$. Это означает, что строки матрицы $M_B(N_1, \dots, N_m)$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}_p$ (см. раздел 3.2). При стандартной проекции $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}_p$ хотя бы один из коэффициентов этой линейной комбинации перейдет в элемент, отличный от нуля, в силу нашего выбора t. Отсюда следует, что $\det(M_B(N_1, \dots, N_m))$ делится на p. Применяя к этому определителю стандартную формулу разложения по системе строк, получаем

$$(-1)^{(2nm - m^2 + m)/2 + \sum j} B(j') M_B(N_1, \dots, N_m)(j) = 0 \pmod{p}, \tag{3.17}$$

где $j' \in A_n(n-m)$ — дополнение набора j в множестве $\{1, \dots, n\}$.

Пусть $s_1, \dots, s_k$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех тех номеров $i = 1, \dots, n$, для которых $\operatorname{ind}_p c_i = l$. Для любой ее подпоследовательности $j = (j_1, \dots, j_s)$ через $r(j_1, \dots, j_s)$ обозначим последовательность, полученную из j добавлением чисел из множества $\{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$ и упорядочиванием по возрастанию получившейся последовательности.

Считаем, что на $A_n(m)$ введен лексикографический порядок, и будем задавать матрицы B следующим образом. Выберем возрастающую подпоследовательность $s_1', \dots, s_{k-n+m}'$ в последовательности $s_2, \dots, s_k$, и пусть $s_1'', \dots, s_{n-m}''$ — числа последовательности $s_1, \dots, s_k$, не вошедшие в подпоследовательность $s_1', \dots, s_{k-n+m}'$. Пусть при этом $s_1 = s_1'' < s_2'' < \dots < s_{n-m}''$. Для $i = 1, \dots, n-m$

в i-й строке столбца s''_i поставим число $c_{s''_i}/p^l$. В каждом i-м нерассмотренном столбце поставим число c_i/p^l в первой строке. Остальные элементы матрицы B положим равными нулю.

Миноры $B(j')$ таким образом заданной матрицы B не делятся на p только при $j' = (s''_1, \ldots, s''_{n-m})$ и j', полученном упорядочиванием по возрастанию набора вида $(s''_2, \ldots, s''_{n-m}, s'_i)$, $i = 1, \ldots, k-n+m$. Дополнения $j \in A_n(m)$ к вышеперечисленным наборам j' в множестве $\{1, \ldots, n\}$ есть наборы $r(s'_1, \ldots, s'_{k-n+m})$ и $r(s_1, s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s'_{i+1}, \ldots, s'_{k-n+m})$, $i = 1, \ldots, k-n+m$. Старшим из них является $r(s'_1, \ldots, s'_{k-n+m})$. Поэтому все соотношения (3.17), где B построена вышеописанным способом, линейно независимы, если переменными считать образы миноров матрицы $M(N_1, \ldots, N_m)$ при естественной проекции $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$.

Всего существует C_{k-1}^{k-n+m} способов корректного выбора последовательности $s'_1, \ldots, s'_{k-n+m}$. Из этого факта получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Возьмем некоторое натуральное число a, такое что $\operatorname{ind}_p a \geqslant 1 + \delta_p^2$. Для четного s через L_s обозначим T-пространство, порожденное многочленами $\varphi((a)^{2i})$, $i \leqslant s/2$. Из теоремы 3.7 следует, что $\operatorname{codim}(U((a)^n) | L_{n-2} \cap U((a)^n)) \geqslant 2^{n-2}$, где n четное. При $a = p$ мы получаем оценку снизу коразмерности для примера из [23]. Однако для примера А. В. Гришина [9] аналогичная коразмерность равна 1. Этого несложно добиться и для любой характеристики, используя развитую в этом разделе технику.

Теорема 3.8. *Пусть a — натуральное число, делящееся на p. Для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ через M_n обозначим T-пространство, порожденное всеми многочленами из $U((a)^n)$ и T-идеалом $T^{(3)}$. Тогда $\operatorname{codim}(U((a)^n) | M_{n-1} \cap U((a)^n)) = 1$ для любого $n \geqslant 1$. В частности, T-пространство $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ бесконечно базируемо.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\operatorname{ind}_p a \geqslant 1 + \delta_p^2$. Предположим сначала, что n четное. По лемме 3.12 имеем $\varphi((a)^n) \notin M_{n-1}$. С другой стороны, в силу формул (3.3) любой многочлен $g_{(a)^n}(j)$, где $j \in A_n(s)$, s четное и $s \leqslant n-2$, принадлежит T-пространству, порожденному многочленом $\psi((a)^s, (a)^{n-s-1})$ и T-идеалом $T^{(3)}$, а следовательно, принадлежит и $M_{n-1} \cap U((a)^n)$. Пусть теперь n нечетное. Если предположить, что $\psi((a)^{n-1}, (a)) \in M_{n-1}$, то получим $U_{n-1}((a)^n) \subset M_{n-1}$, что противоречит теореме 3.7. Учитывая формулу

$$g_{(a)^n}((1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)) = (-1)^i(-\psi((a)^{n-1}, (a)) + \pi_{i,n}\varphi((a)^{n-1})) \pmod{T^{(3)}},$$

где $i < n$, $\pi_{i,n}(x_i) = x_i x_n$ и на все остальные переменные этот эндоморфизм действует тождественно, мы получаем $\operatorname{codim}(U((a)^n)_{n-1} | M_{n-1} \cap U((a)^n)_{n-1}) = 1$. С другой стороны, в силу формул (3.3) любой многочлен $g_{(a)^n}(j)$, где $j \in A_n(s)$, s четное и $s \leqslant n-3$, принадлежит T-пространству, порожденному многочленом $\psi((a)^s, (a)^{n-s-1})$ и T-идеалом $T^{(3)}$, а следовательно, принадлежит и $M_{n-1} \cap U((a)^n)$.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$, $\operatorname{ind}_p a = 1$. По лемме 3.13 и результату [9] имеем $\varphi''((a)^n) \notin M_{n-1}$. Учитывая формулу $x_1^{a-1}[x_1, x_2]x_2^{a-1} = (C_a^2)^{-1}(x_1^a x_2^a - (x_1 x_2)^a) \pmod{T^{(3)}}$, получаем требуемое утверждение.

3.4. Некоторые примеры

Пусть $X = \{x_1, z_1, \ \ldots, \ x_k, z_k, \ \ldots\}$, Φ — коммутативное кольцо с единицей и $F = \Phi\langle X \rangle$ — свободная ассоциативная алгебра без единицы. Всюду в этом разделе через S_n обозначаем симметрическую группу степени n.

Для $f_1, \ldots, f_m \in F$ положим $R(f_1, \ldots, f_m)$ равным $\sum\limits_{\sigma \in S_m} f_{\sigma(1)} \ldots f_{\sigma(m)}$ и $R'(f_1, \ldots, f_m)$ равным сумме слов $f_{\sigma(1)} \ldots f_{\sigma(m)}$ по таким $\sigma \in S_n$, что $\sigma(m) < m$. Легко проверить следующие соотношения:

$$R'(f_1, \ldots, f_m, g) = \sum_{i=1}^{m} R(f_1, \ldots, g f_i, \ldots, f_m) = \sum_{i=1}^{m} R(f_1, \ldots, f_{i-1}, g, f_{i+1}, \ldots, f_m) f_i. \qquad (3.18)$$

Через L_n обозначим T-пространство алгебры F, порожденное многочленами

$$R(x_1,\ldots,x_m)\ldots R(x_{(i-1)m+1},\ldots,x_{im}),\quad i=1,\ldots,n.$$

Пусть $u_2,\ldots,u_m\in L_1$ — полилинейные многочлены, не зависящие от переменных $x_1,\ldots,x_m$. Легко проверить, что для любого многочлена $g\in F$ выполнено $[u_2,g],\ldots,[u_m,g]\in L_1$.

Построим последовательность многочленов $h_1,\ldots,h_m$ по следующим правилам:

$$h_1=R'(x_1,\ldots,x_{m+1}),\quad h_{k+1}=u_{k+1}h_k-\pi_{k+1}h_k,\quad k<d, \tag{3.19}$$

где π_{k+1} — гомоморфизм алгебры F, определенный формулами $\pi_{k+1}(x_i)=x_i$, $i\neq k+1$, и $\pi_{k+1}(x_{k+1})=x_{k+1}u_{k+1}$.

Лемма 3.15. *Для любого $k=1,\ldots,m$ выполнено*

$$\begin{aligned}h_k=\sum_{j_2,\ldots,j_k\in\{0,1\}}&(-1)^{j_2+\ldots+j_k}u_k^{1-j_k}\ldots u_2^{1-j_2}\times\\&\times R(x_2u_2^{j_2},\ldots,x_ku_k^{j_k},x_{k+1},\ldots,x_{m+1})x_1+\sum_{i=k+1}^{m}g_ix_i\pmod{L_1},\end{aligned}\tag{3.20}$$

где каждый многочлен g_i не зависит от переменной x_i.

Доказательство. Проведем индукцию по k. Для $k=1$ утверждение справедливо по формуле (3.19). Пусть $k<d$ и для k формула (3.20) выполнена. В силу (3.19) имеем

$$\begin{aligned}h_{k+1}=&\sum_{j_2,\ldots,j_k\in\{0,1\}}(-1)^{j_2+\ldots+j_k}u_{k+1}u_k^{1-j_k}\ldots u_2^{1-j_2}R(x_2u_2^{j_2},\ldots,x_ku_k^{j_k},x_{k+1},\ldots,x_{m+1})x_1+\\&+\sum_{j_2,\ldots,j_k\in\{0,1\}}(-1)^{j_2+\ldots+j_k+1}u_k^{1-j_k}\ldots u_2^{1-j_2}R(x_2u_2^{j_2},\ldots,x_ku_k^{j_k},x_{k+1}u_{k+1},\ldots,x_{d+1})x_1+\\&+[u_{k+1},g_{k+1}x_{k+1}]+\sum_{i=k+2}^{m}(u_{k+1}g_i-\pi_{k+1}g_i)x_i\pmod{L_1}.\end{aligned}$$

Теперь требуемая формула следует из того, что $[u_{k+1},g_{k+1}x_{k+1}]\in L_1$ и что каждый многочлен $u_{k+1}g_i-\pi_{k+1}g_i$ не зависит от x_i. Лемма доказана.

Лемма 3.16. $L_m=L_{m+1}$.

Доказательство. Индукцией по k, используя формулы (3.18) и (3.19), легко показать, что $h_k\in L_k$. Рассмотрим случай $k=m$ и подставим вместо x_1 произвольный многочлен $u_{m+1}\in L_1$.

Тогда из леммы 3.15 получаем

$$\sum_{j_2,\ldots,j_m\in\{0,1\}}(-1)^{j_2+\ldots+j_m}u_m^{1-j_m}\ldots u_2^{1-j_2}R(x_2u_2^{j_2},\ldots,x_mu_m^{j_m},x_{m+1})u_{m+1}\in L_m.$$

При $j_2=\ldots=j_m=0$ многочлен под знаком суммы равен

$$(-1)^{m-1}u_m\ldots u_2R(x_2,\ldots,x_{m+1})u_{m+1}. \tag{3.21}$$

При остальных значениях параметров $j_2,\ldots,j_m$ многочлен под знаком суммы принадлежит L_m. Поэтому многочлен (3.21) тоже принадлежит L_m. Очевидно, что при подходящем выборе многочленов $u_2,\ldots,u_{m+1}$ многочлен (3.21) вместе с многочленами из L_m порождает T-пространство L_{m+1}. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда Φ — бесконечное поле характеристики $p>2$. Через M_n обозначим T-пространство, порожденное многочленами $x_1^p\ldots x_i^p$, $i=1,\ldots,n$. Тогда $L_n\subset M_n$.

Теорема 3.9. $M_p=M_{p+1}$.

Доказательство. Пусть $c = (p+1)/2$. Докажем индукцией по $k = 0, \dots, c$ формулу

$$R(x_1, \dots, x_p) \dots R(x_{(2(c-k)-1)p+1}, \dots, x_{2(c-k)p}) z_1^p \dots z_{2k}^p \in M_p. \tag{3.22}$$

При $k = 0$ эта формула следует из леммы 3.16. Предположим, что $k < c$ и что для k формула (3.22) выполнена. Для краткости положим

$$f = R(x_1, \dots, x_p) \dots R(x_{(2(c-k)-3)p+1}, \dots, x_{(2(c-k)-2)p}).$$

Пусть h — однородная компонента многочлена $f(z_1 + z_2)^{2p} z_3^p \dots z_{2k+2}^p$ степени p по каждой переменной z_1 и z_2. Оба эти многочлена принадлежат M_p. С другой стороны,

$$h = f(z_1^p z_2^p + z_2^p z_1^p) z_3^p \dots z_{2k+2}^p + \\ + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{(i!(p-i)!)^2} f R(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{i \text{ раз}}, \underbrace{z_2, \dots, z_2}_{p-i \text{ раз}}) R(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{p-i \text{ раз}}, \underbrace{z_2, \dots, z_2}_{i \text{ раз}}) z_3^p \dots z_{2k+2}^p.$$

Сумма, стоящая в правой части последней формулы, принадлежит M_p по индуктивной гипотезе. Поэтому $f(z_1^p z_2^p + z_1^p z_2^p) z_3^p \dots z_{2k}^p \in M_p$. Легко проверить, что $f[z_1^p, z_2^p] z_3^p \dots z_{2k}^p \in M_p$. Следовательно, имеем $2 f z_1^p z_2^p z_3^p \dots z_{2k}^p \in M_p$. Так как $p > 2$, то $f z_1^p z_2^p z_3^p \dots z_{2k}^p \in M_p$. При $k = c$ формула (3.22) принимает вид $z_1^p \dots z_{p+1}^p \in M_p$. Теорема доказана.

Интересно было бы получить ответ на следующий вопрос: верно ли, что любое бесконечное подмножество множества $\{x_1^p \dots x_i^p,\ i \in \mathbb{N}\}$ порождает конечно базируемое T-пространство алгебры F.

3.5. Мономиальные примеры бесконечно базируемых T-идеалов

Пусть K — бесконечное поле характеристики $p > 0$, $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $Y = \{y, z\}$ и $F = K\langle X \cup Y \rangle + K$ — свободная ассоциативная алгебра с единицей. По поводу случая конечного поля см. замечания в конце раздела 3.1 и определения 3.3 и 3.4.

Через $T^{(3)}$ обозначим T-идеал алгебры F, порожденный многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$. Для любых $f, g \in F$ и $n \in \mathbb{N}$ положим $Q_n(f, g) = f^{n-1} g f g^{n-1}$ (см. раздел 3.3).

Пусть a — натуральное число, делящееся на p. В случае, когда $p > 2$ или $p = 2$ и a делится на 4, положим $Q_{m,i} = Q_a(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots Q_a(x_{i+m-1}, x_{i+m})$ для четного m. В случае $p = 2$ и $\operatorname{ind}_2 a = 1$ положим $Q_{m,i} = x_{i+1}^a \dots x_{i+m}^a$. Фиксируем некоторые натуральные числа b, c, d, k и l, такие что $\operatorname{ind}_p a \leqslant \operatorname{ind}_p b$, $\operatorname{ind}_p c \geqslant 1 + \delta_p^2$, $\operatorname{ind}_p d \geqslant 1 + \delta_p^2$, $a < p^{\operatorname{ind}_p c}$, $b < p^{\operatorname{ind}_p c}$, $a < p^{\operatorname{ind}_p d}$, $b < p^{\operatorname{ind}_p d}$ и $k \geqslant b(c+d-2)$, $l \geqslant b(c+d-2)$.

Для натурального числа n, делящегося на $2 - \delta_p^2 \delta_{\operatorname{ind}_p a}^1$, положим

$$f_n = y^c x_1 \dots x_k Q_{n,k+l} x_{k+1} \dots x_{k+l} z^d (y^c x_1 \dots x_{k+l} z^d)^{b-1}.$$

Для набора M слов из $\langle X \cup Y \rangle$ через $S(M)$ обозначим сумму всех произведений $\prod M'$, где $M' \sim M$. Такое обозначение уже использовалось в разделе 3.3. В этом разделе для любого набора e длины n и $i = 1, \dots, n$ через $e(i)$ мы обозначаем элемент, стоящий на i-м слева месте в наборе e.

Через A обозначим множество отображений φ из $X \cup Y$ в $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \langle X \cup Y \rangle^i$, таких что $|\varphi(y)| = bc$ и $|\varphi(z)| = bd$. Для двух отображений $\varphi, \psi \in A$ считаем, что $\varphi \sim_1 \psi$, если $\varphi(t) \sim \psi(t)$ для любого $t \in X \cup Y$.

В этом разделе для отображения $\varphi \in A$ и $i = 1, \dots, b$ положим $\varphi_i(y) = M_i$, $\varphi_i(z) = N_i$, где $\varphi(y) = M_1 \dots M_b$, $\varphi(z) = N_1 \dots N_b$ и $|M_j| = c$, $|N_j| = d$ для $j = 1, \dots, b$, и все $\varphi_i(x)$, $x \in X$, равными пустому набору. Для двух отображений $\varphi, \psi \in A$ считаем, что $\varphi \sim_2 \psi$, если для любого $i = 1, \dots, b$ выполнено $\varphi_i(y) \sim \psi_i(y)$ и $\varphi_i(z) \sim \psi_i(z)$, для $i = 1, \dots, k+l$ выполнено $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$ и для любого $i > k+l$ выполнено $\varphi(x_i) \sim \psi(x_i)$. Легко проверить, что отношения $\sim_1$ и $\sim_2$ есть отношения эквивалентности на A и что из $\varphi \sim_2 \psi$ следует $\varphi \sim_1 \psi$.

Через $A(n)$ обозначим подмножество множества A, состоящее из таких отображений φ, что $|\varphi(x_i)| = b$ для $i = 1, \ldots, k+l$, $|\varphi(x_i)| = a$ для $i = k+l+1, \ldots, k+l+n$ и $\varphi(x_i)$ — пустой набор для $i > k+l+n$. Для $\varphi \in A(n)$ положим $R_n(\varphi) = \mathrm{sim}(\varphi)(f_n)$ и

$$T_n(\varphi) = S(\varphi_1(y))\varphi(x_1)(1)\ldots\varphi(x_k)(1)\mathrm{sim}(\varphi)(Q_{n,k+l})\varphi(x_{k+1})(1)\ldots\varphi(x_{k+l})(1)S(\varphi_1(z)) \times \\ \times \prod_{i=2}^{b} S(\varphi_i(y))\varphi(x_1)(i)\ldots\varphi(x_{k+l})(i)S(\varphi_i(z)).$$

Пусть даны два отображения $\varphi, \psi \in A(n)$. Тогда если $\varphi \sim_1 \psi$, то $R_n(\varphi) = R_n(\psi)$, а если $\varphi \sim_2 \psi$, то $T_n(\varphi) = T_n(\psi)$.

Лемма 3.17. *Любой многочлен T-идеала алгебры $K\langle X \cup Y\rangle$, порожденного многочленом f_n, есть линейная комбинация многочленов вида $uR_n(\varphi)v$, где $\varphi \in A(n)$ и $u, v \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$.*

Многочлен $R_n(\varphi)$, где $\varphi \in A(n)$, в свою очередь есть сумма многочленов $T_n(\psi)$, взятая по представителям классов эквивалентности относительно $\sim_2$, на которые делится множество отображений $\{\psi \in A(n) \colon \psi \sim_1 \varphi\}$.

Пусть $u \in \langle X \cup Y\rangle$ и $u = v_1u_1v_2\ldots u_nv_{n+1}$, где $u_1, \ldots, u_n$ — непустые слова, зависящие только от y или z, $v_1, \ldots, v_{n+1}$ — слова, зависящие только от переменных из X, и слова $v_2, \ldots, v_n$ непустые. Тогда число n назовем *сложностью* слова u.

Слово $u \in \langle X \cup Y\rangle$ назовем *правильным*, если оно начинается и кончается на y или z, его сложность не превосходит $b+1$, $\deg_Y u \leqslant b(c+d)$ и для любого $x \in X$ выполнено $\deg_x u < p^{\mathrm{ind}_p c}$, $\deg_x u < p^{\mathrm{ind}_p d}$. Заметим, что многочлен f_n есть правильное слово.

Определим линейное отображение $\mu \colon F \to F$ следующим образом. Пусть $u \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$. Если u правильное, то $\mu(u)$ есть результат подстановки $y, z \to 1$ в слове u. Иначе положим $\mu(u) = 0$. На всю F отображение μ продолжим по линейности.

Мы хотим вычислить многочлен $\mu(uT_n(\varphi)v)$ по модулю $T^{(3)}$. Для того чтобы этот многочлен не принадлежал T-идеалу $T^{(3)}$, отображение φ и слова u, v должны иметь весьма специальный вид.

Лемма 3.18. *Пусть $\varphi \in A(n)$, $u, v \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$ и $\mu(uT_n(\varphi)v) \notin T^{(3)}$. Тогда выполнены следующие условия:*

1) *каждое слово $\prod \varphi_i(y)$ и $\prod \varphi_i(z)$, $i = 1, \ldots, b$, зависит от y или z;*
2) *суммарная степень по множеству Y слов u, v и слов из наборов $\varphi(y)$, $\varphi(z)$, $\varphi(x_i)$, $i = 1, \ldots, k+l+n$, не превышает $b(c+d)$;*
3) *для любого $i = k+l+1, \ldots, k+l+n$ все слова из набора $\varphi(x_i)$ зависят только от переменных из X;*
4) *слова u и v зависят только от переменных y и z.*

Доказательство.

1) Предположим, что все слова из набора $\varphi_i(y)$ зависят только от переменных из X. Имеет место представление

$$uT_n(\varphi)v = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j u_j S(\varphi_i(y))v_j,$$

где $\alpha_j \in K$ и $u_j, v_j \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$. Если слово $u_j(\prod \varphi_i(y))v_j$ правильное, то для любой перестановки M набора $\varphi_i(y)$ слово $u_j(\prod M)v_j$ тоже правильное, и следовательно, $\mu(u_jS(\varphi_i(y))v_j) = u'_jS(\varphi_i(y))v'_j$, где u'_j и v'_j — слова, полученные заменой $y, z \to 1$ из слов u_j и v_j соответственно. Так как в этом случае для любого $x \in X$ выполнено $\deg_x \prod \varphi_i(y) < p^{\mathrm{ind}_p c}$ и $\mathrm{ind}_p c \geqslant 1 + \delta_p^2$, то $S(\varphi_i(y)) \in T^{(3)}$ (см. формулы (3.3)). Если слово $u_j(\prod \varphi_i(y))v_j$ не является правильным, то для любой перестановки M набора $\varphi_i(y)$ слово $u_j(\prod M)v_j$ тоже не является правильным, и следовательно, $\mu(u_jS(\varphi_i(y))v_j) = 0$. Приходим к противоречию. Доказательство того, что все слова $\prod \varphi_i(z)$, $i = 1, \ldots, b$, зависят от y или z, проводится аналогично.

2) Предположим противное. Тогда никакой моном w многочлена $uT_n(\varphi)v$ не может быть правильным, так как $\deg_Y w > b(c+d)$. Приходим к противоречию.

3) По условию 1) каждое слово $\prod \varphi_i(y)$ и $\prod \varphi_i(z)$, $i = 1, \dots, b$, зависит от y или z. Из этого факта, условия 3), неравенства $k, l \geqslant b(c + d - 2)$ и условия 2) следует, что для любого $i = 1, \dots, b$ хотя бы одно слово из списка $\varphi(x_1)(i), \dots, \varphi(x_k)(i)$ и хотя бы одно слово из списка $\varphi(x_{k+1})(i), \dots, \varphi(x_{k+l})(i)$ не зависят от переменных y и z. Заметим, что слова, не зависящие от y и z, о которых идет речь, непустые и, следовательно, каждое из них зависит от некоторой переменной из X. Теперь легко видеть, что любой моном многочлена $uT_n(\varphi)v$ имеет сложность более $b + 1$, и следовательно, $\mu(uT_n(\varphi)v) = 0$.

4) Для каждого $i = 1, \dots, b$ хотя бы одно слово из списка $\varphi(x_1)(i), \dots, \varphi(x_{k+l})(i)$ не зависят от переменных y и z. Отсюда следует, что сложность любого монома w многочлена $T_n(\varphi)$ не менее $b + 1$.

Предположим, что слово u зависит от некоторой переменной из X. Тогда слово uwv, где w — моном многочлена $T_n(\varphi)$, либо начинается с некоторой переменной из X, либо имеет сложность более $b{+}1$. В любом случае оно неправильное. Поэтому $\mu(uT_n(\varphi)v) = 0$. Приходим к противоречию. Аналогично доказывается, что слово v зависит только от y или z. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о выборе представителей в лемме 3.17. Введем на множестве A еще одно отношение эквивалентности. Для $\theta \in A$ через $a(\theta)$ обозначим набор длины b, у которого на i-м месте стоит набор $\big(S(\theta_i(y)), \theta(x_1)(i), \dots, \theta(x_{k+l})(i), S(\theta_i(z))\big)$. Пусть $\varphi, \psi \in A$. Мы считаем, что $\varphi \sim_3 \psi$, если $a(\varphi) \sim a(\psi)$ и для $i > k + l$ выполнено $\varphi(x_i) \sim \psi(x_i)$. Если $\varphi \sim_2 \psi$, то $a(\varphi) = a(\psi)$, и следовательно, $\varphi \sim_3 \psi$. Также из $\varphi \sim_3 \psi$ следует $\varphi \sim_1 \psi$.

Для $\varphi \in A(n)$ через $P(\varphi)$ обозначим множество отображений $\psi \in A(n)$, таких что

$$\psi_i(y) = \varphi_{\sigma(i)}(y), \quad \psi_i(z) = \varphi_{\sigma(i)}(z),$$
$$\psi(x_1)(i) = \varphi(x_1)(\sigma(i)), \dots, \quad \psi(x_{k+l})(i) = \varphi(x_{k+l})(\sigma(i)),$$

где σ — некоторая биекция множества $\{1, \dots, b\}$ и $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$ при $i > k + l$. Очевидно, что из $\psi \in P(\varphi)$ следует $\psi \sim_3 \varphi$.

Пусть задано некоторое отображение $\varphi \in A(n)$. Выберем представители классов эквивалентности множества $\{\psi \in A(n) \colon \psi \sim_1 \varphi\}$ относительно $\sim_2$ следующим способом. Сначала выберем представители $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(q)}$ классов эквивалентности этого множества относительно $\sim_3$. Затем для каждого такого представителя $\psi^{(s)}$ рассмотрим множество $P(\psi^{(s)})$. Объединение всех этих множеств и будет искомой системой представителей. Теперь получаем

$$uR_n(\varphi)v = \sum_{s=1}^{q} \sum_{\psi \in P(\psi^{(s)})} \mu(uT_n(\psi)v).$$

Слово w назовем *левонормированным* (*правонормированным*), если $w = w'w''$ ($w = w''w'$), где w' — слово, зависящее только от y или z, и w'' — слово, зависящее только от переменных из X.

Лемма 3.19. *Многочлен* $\sum\limits_{\psi \in P(\psi^{(s)})} \mu(uT_n(\psi)v)$ *принадлежит T-пространству, порожденному многочленом $x_1^b Q_{n,1}$ и T-идеалом $T^{(3)}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что тройка u, v, $\psi^{(s)}$ не удовлетворяет одному из условий леммы 3.18. Тогда тройка u, v, ψ для любого $\psi \in P(\psi^{(s)})$ не удовлетворяет тому же условию леммы 3.18. Следовательно, рассматриваемая сумма принадлежит $T^{(3)}$.

Предположим теперь, что тройка u, v, $\psi^{(s)}$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.18. Тогда тройка u, v, ψ для любого $\psi \in P(\psi^{(s)})$ тоже удовлетворяет всем условиям леммы 3.18.

Для $i = 1, \dots, b$ через g_i обозначим многочлен, полученный из многочлена

$$S(\psi_i^{(s)}(y))\psi^{(s)}(x_1)(i) \dots \psi^{(s)}(x_k)(i)$$

выкидыванием всех нелевонормированных мономов, а через h_i многочлен, полученный из многочлена $\psi^{(s)}(x_{k+1})(i) \dots \psi^{(s)}(x_{k+l})(i) S(\psi_i^{(s)}(z))$ выкидыванием всех неправонормированных мономов. Пусть g_i' и h_i' — результат подстановки $y, z \to 1$ в многочленах g_i и h_i соответственно. Из выполнения условий 1)—3) леммы 3.18 и неравенств $k \geqslant b(c + d - 2)$, $l \geqslant b(c + d - 2)$ следует, что не существует таких двух чисел $i, j = 1, \ldots, b$, что у многочлена g_i есть моном, кончающийся на y или z, а у многочлена h_j есть моном, начинающийся с y или z.

Из этого факта и центральности многочлена $\mathrm{sim}(\psi^{(s)})(Q_{n,k+l})$ по модулю $T^{(3)}$ следует, что

$$\sum_{\psi \in P(\psi^{(s)})} \mu(uT_n(\psi)v) = \alpha S((g_1'h_1', \ldots, g_b'h_b'))\mathrm{sim}(\psi^{(s)})(Q_{n,k+l}) \pmod{T^{(3)}},$$

где $\alpha \in K$. Последний многочлен принадлежит T-пространству, порожденному многочленом $x_1^b Q_{n,1}$. Лемма доказана.

Следствие 3.2. *Пусть f — многочлен из T-идеала алгебры $K\langle X \cup Y\rangle$, порожденного многочленом f_n. Тогда $\mu(f)$ принадлежит T-пространству, порожденному многочленом $x_1^b Q_{n,1}$ и T-идеалом $T^{(3)}$.*

Теперь мы можем построить бесконечно базируемые T-идеалы алгебры $K\langle X \cup Y\rangle$.

Теорема 3.10. *Пусть I — некоторый T-идеал алгебры $K\langle X \cup Y\rangle$, удовлетворяющий следующему условию: для любого однородного многочлена $f \in I$, такого что $\deg_y f = bc$, $\deg_z f = bd$, $\deg_{x_i} f = b$ для $i = 1, \ldots, k+l$ и $\deg_{x_i} f = a$ или $\deg_{x_i} f = 0$ для $i > k+l$, выполнено $\mu(f) \in T^{(3)}$. Тогда T-идеал алгебры $K\langle X \cup Y\rangle$, порожденный многочленами f_n, где $n \in \mathbb{N}$ и n делится на $2 - \delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1$, бесконечно базируем по модулю I.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$, делящегося на $2 - \delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1$, многочлен f_n принадлежит T-идеалу, порожденному многочленами f_i, $i < n$, $(2 - \delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1) \mid i$ и T-идеалом I. Тогда справедливо представление $f_n = \sum\limits_{1 \leqslant i < n,\ (2-\delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1) \mid i} f_i' + f$, где для $1 \leqslant i < n$ f_i' — однородный многочлен, принадлежащий T-идеалу, порожденному многочленом f_i, f — однородный многочлен из I и все многочлены f_i' и f ненулевые, имеющие по каждой переменной ту же степень, что и многочлен f_n. Применяя к этому представлению проекцию μ, получим $(x_1 \ldots x_{k+l})^b Q_{n,k+l} = \sum\limits_{1 \leqslant i < n,\ (2-\delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1) \mid i} \mu(f_i') \pmod{T^{(3)}}$. По следствию 3.2 сумма из правой части последнего равенства принадлежит T-пространству L, порожденному многочленами $x_1^b Q_{i,1}$, $i < n$, $(2 - \delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1) \mid i$, и T-идеалом $T^{(3)}$. Выполняя подстановку $x_2, \ldots, x_{k+l} \to 1$ и переименовывая переменные, получаем, что $x_1^b Q_{n,1} \in L$. Это противоречит теоремам 3.5 и 3.6 главы 3. Теорема доказана.

Возможна также следующая модификация полученного примера. Для n, делящегося на $2 - \delta_p^2\delta_{\mathrm{ind}_p a}^1$, положим $f_n' = y^c x_1 \ldots x_k Q_{n,k+l} x_{k+1} \ldots x_{k+l} y^d (y^c x_1 \ldots x_{k+l} y^d)^{b-1}$. В теореме 3.10 условия $\deg_y f = bc$, $\deg_z f = bd$ можно заменить на $\deg_y f = b(c+d)$ и вместо многочленов f_n взять многочлены f_n'. Для доказательства достаточно заметить, что многочлен f_n' принадлежит T-идеалу алгебры $K\langle X \cup Y\rangle$, порожденному многочленом f_n.

В качестве I в обоих случаях можно взять сумму T-идеала, порожденного многочленом $x^{h+b(c+d)+1}$, где $\mathrm{ind}_p h \geqslant 1 + \delta_p^2$ и $p^{\mathrm{ind}_p h} > a$, $p^{\mathrm{ind}_p h} > b$, и T-идеала $(T^{(3)})^{b(c+d)+1}$. Объясним, например, почему в I можно включить многочлен $x^{h+b(c+d)+1}$. Пусть $f = uS(M)v$, где M — набор слов из $\langle X \cup Y\rangle$, имеющий длину $h + b(c+d) + 1$, и $u, v \in \langle X \cup Y\rangle \cup \{1\}$, — многочлен, удовлетворяющий условиям теоремы 3.10. Тогда набор M содержит не более $b(c+d)$ слов, содержащих буквы y или z. Поэтому многочлен $\mu(f)$ представляется как линейная комбинация многочленов вида $\mathrm{sim}_y(\varphi)(v_1 y^{n_1} v_2 \ldots v_k y^{n_k} v_{k+1})$, где v_i — слова, не зависящие от y и z, $n_1 + \ldots + n_k = h+1$ и $\varphi(y)$ — поднабор в M длины $h+1$, состоящий из слов, не зависящих от y и z. Многочлен $v_1 y^{n_1} v_2 \ldots v_k y^{n_k} v_{k+1}$ по модулю $T^{(3)}$ равен линейной комбинации многочлена $v_1 \ldots v_{k+1} y^{h+1}$ и многочленов вида $wy^h[y, x_i]$, где w — слово, не зависящее от y и z. Для любого $x \in X$ суммарная степень по переменной x всех слов набора $\varphi(y)$ не превышает $\max\{a, b\}$. Учитывая формулы (3.3), получаем, что $\mu(f) \in T^{(3)}$.

Минимальными допустимыми значениями параметров являются следующие: $a = b = p$, $c = d = p^2$, $k = l = 2p^3 - 2p$ и $h = p^2$. При этих значениях в T-идеал I можно включить многочлен $y^{2p^3+p^2+1}$ и T-идеал $(T^{(3)})^{2p^3+1}$.

3.6. Общая схема построения бесконечно базируемых T-идеалов

Пусть Φ — коммутативное кольцо с единицей. Введем множества переменных $X = \{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$, $C = \{c_1, d_1, \ldots, c_m, d_m\}$ и переменную e. Пусть $F = \Phi\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle + \Phi$ — свободная ассоциативная алгебра с единицей. Для любых многочленов $f_1, \ldots, f_n$ алгебры F через $\mathrm{cf}(f_1, \ldots, f_n)$ обозначим идеал кольца Φ, порожденный произведениями $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, где α_i — некоторый коэффициент многочлена f_i.

Пусть $g \in F$ — некоторый полилинейный многочлен, зависящий только от переменных $x_1, \ldots, x_{m-1}$, такой что многочлен $g - x_1 \ldots x_{m-1}$ есть сумма одночленов, отличных от $\alpha x_1 \ldots x_{m-1}$, $\alpha \in \Phi$. Предположим также, что многочлен g переходит в нуль при любой подстановке $x_i \to 1$, $i = 1, \ldots, m-1$. Очевидно, что при этом $m \geqslant 2$. Очевидно также, что такие многочлены содержится в любом T-идеале алгебры F, содержащем собственный многочлен, т. е. многочлен, некоторая линейная комбинация над Φ коэффициентов которого равна 1. Действительно, в любом T-идеале, содержащем собственный многочлен, содержится ненулевой полилинейный многочлен с коэффициентами ± 1, зависящий только от переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$ (см. [20]). Выполняя в этом многочлене подстановку $x_i \to [x_{2i-1}, x_{2i}]$, $i = 1, \ldots, n$, переименовывая переменные и, возможно, умножая результат на -1, получаем требуемый многочлен g. При этом $m = 2n + 1$. Через Γ_0 обозначим T-идеал алгебры F, порожденный многочленом g.

Определим идеал I алгебры F как идеал, порожденный многочленами

$$\begin{array}{llll}
ez, & \text{где } z \neq e \text{ и } z \neq c_m; & ze, & \text{где } z \neq e \text{ и } z \neq d_m; \\
zc_m, & \text{где } z \neq e; & d_m z, & \text{где } z \neq e; \\
zc_j, & \text{где } j < m \text{ и } z \neq c_{j+1}; & d_j z, & \text{где } j < m \text{ и } z \neq d_{j+1}; \\
c_j z, & \text{где } j > 1 \text{ и } z \neq c_{j-1}; & zd_j, & \text{где } j > 1 \text{ и } z \neq d_{j-1}.
\end{array}$$

В этих соотношениях z — некоторая буква из $X \cup C \cup \{e\}$.

Слово вида $d_1 \ldots d_m e^s c_m \ldots c_1$, где $s \geqslant 1$, назовем *замкнутым*. Слово вида $e^s c_m \ldots c_1 u$, где $s \geqslant 1$ и $u \in \langle X\rangle \cup \{1\}$, назовем *левонормированным*, а слово вида $ud_1 \ldots d_m e^s$, где $s \geqslant 1$ и $u \in \langle X\rangle \cup \{1\}$, назовем *правонормированным* (ср. с разделом 3.5).

Лемма 3.20. *Пусть u — слово из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle \cup \{1\}$, не принадлежащее I. Тогда $u = w' u_0 v_1 u_1 \ldots v_r u_r w''$, где $u_i \in \langle X\rangle \cup \{1\}$, v_i — замкнутые слова, w' — конечный отрезок замкнутого слова и w'' — начальный отрезок замкнутого слова.*

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Следствие 3.3. *Пусть u — слово из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle \cup \{1\}$, не принадлежащее I. Тогда*

1) *если $u = xvy$, где x и y — переменные, не равные e, и v — слово, зависящее от e, то u зависит от c_m и d_m;*
2) *если $u = d_m vx$, где x — переменная, не равная e, то vx зависит от c_m;*
3) *если $u = xvc_m$, где x — переменная, не равная e, то xv зависит от d_m;*
4) *если $u = v_1 v_2$, где $|v_1| \geqslant m-1$ и v_2 зависит от c_i, то u зависит от c_m;*
5) *если $u = v_2 v_1$, где $|v_1| \geqslant m-1$ и v_2 зависит от d_i, то u зависит от d_m;*
6) *если $u = v_1 x$, где x — переменная, не равная e, и v_1 — слово, зависящее от e, то u зависит от c_m;*
7) *если $u = v_1 x$ и $eu \notin I$, где x — переменная, не равная e, то u зависит от c_m;*
8) *если $u = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$, слова v_1 и v_5 не есть степени e, $|v_1| \geqslant m$, $|v_5| \geqslant m$, $|v_2| \geqslant m-1$, $|v_4| \geqslant m-1$, слово v_2 зависит от некоторой переменной c_i, слово v_4 зависит от некоторой переменной d_j и $\deg_{c_m} u = 1$, $\deg_{d_m} u = 1$, то v_1 зависит от c_m и начинается на e, v_5 зависит от d_m и кончается на e и v_3 зависит только от переменных из X;*

9) *если* $u = u_1 c_m u_1' v_1' d_m v_1 \dots u_N c_m u_N' v_N' d_m v_N$, *где слова* u_i, v_i, u_i' *и* v_i' *не зависят от* c_m *и* d_m *и* $|u_i'| \geqslant m-1$, $|v_i'| \geqslant m-1$, *то слова* $u_i c_m u_i'$ *левонормированные, а слова* $v_i' d_m v_i$ *правонормированные.*

Фиксируем некоторое натуральное число N. Слово $u \in \langle X \cup C \cup \{e\} \rangle$ назовем *правильным*, если оно не принадлежит I, начинается и кончается на e и $\deg_{c_m} u \leqslant N$, $\deg_{d_m} u \leqslant N$ (ср. с разделом 3.5). Заметим, что если слово u правильное, то слово eue тоже правильное. Определим Φ-линейное отображение $\mu\colon F \to F$ следующим образом. Пусть $u \in \langle X \cup C \cup \{e\} \rangle \cup \{1\}$. Если u правильное, то $\mu(u)$ есть результат подстановки в слове u пустого слова вместо всех переменных из C и переменной e. Если u неправильное, то положим $\mu(u) = 0$. На всю F отображение μ продолжим по линейности.

Определим по индукции кратные коммутаторы $l(a)$ и $r(a)$, где a — набор многочленов алгебры F. Положим $l((h)) = r((h)) = h$ и $l(a(h)) = [l(a), h]$, $r((h)a) = [h, r(a)]$, где $h \in F$ и a — набор многочленов из F.

Лемма 3.21. *Пусть* a *и* b — *наборы длины* m *слов из* $\langle X \cup C \cup \{e\} \rangle$, φ *и* ψ — *эндоморфизмы алгебры* F, *отображающие переменные* $x_1, \dots, x_{m-1}$ *в слова из* $\langle X \cup C \cup \{e\} \rangle$, *и* $u \in \langle X \cup C \cup \{e\} \rangle \cup \{1\}$. *Пусть при этом каждое слово* $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})$ *и* $\psi(x_1 \dots x_{m-1})$ *зависит от некоторой переменной из* $C \cup \{e\}$. *Тогда*

1) *если* $r(a)\varphi(g)u\psi(g)l(b) \notin I$, *то слово* $(\prod a)\varphi(x_1 \dots x_{m-1})u\psi(x_1 \dots x_{m-1})(\prod b)$ *зависит от* c_m *и* d_m;
2) *если* $er(a)\varphi(g)u\psi(g)l(b) \notin I$ *и степень слова* $(\prod a)\varphi(x_1 \dots x_{m-1})u\psi(x_1 \dots x_{m-1})(\prod b)$ *по* c_m *и по* d_m *равна* 1, *то любой моном многочлена* $r(a)\varphi(g)u\psi(g)l(b)$, *не принадлежащий* I, *начинается и кончается на* e, *слово* $\prod a$ *зависит от* c_m, *слово* $\prod b$ *зависит от* d_m *и слово* u *зависит только от переменных из* X.

Доказательство. Можно считать, что слова $\prod a$ и $\prod b$ не есть степени e, так как иначе мы получим $r(a) = l(b) = 0$. Возможны следующие случаи:

а) слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})u\psi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от e;
б) слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})u\psi(x_1 \dots x_{m-1})$ не зависит от e.

1) В случае а) требуемое утверждение получаем в силу сделанного предположения о наборах a и b и части 1) следствия 3.3. Рассмотрим теперь случай б). Если слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от некоторого d_i, то по лемме 3.20 получаем $i = 1$, $u = 1$ и $\psi(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m-1)}) = d_2 \dots d_m$, где σ — некоторая биекция множества $\{1, \dots, m-1\}$. Теперь в силу части 2) следствия 3.3 получаем, что слово $\prod b$ зависит от c_m. Случай, когда слово $\psi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от некоторого c_i, рассматривается аналогично с помощью части 3) следствия 3.3. Поэтому можно считать, что слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от некоторого c_i, а слово $\psi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от некоторого d_j. Тогда доказываемое утверждение следует из частей 4) и 5) следствия 3.3.

2) В силу части 7) следствия 3.3 получаем, что слово $\prod a$ зависит от c_m. В случае а) в силу части 6) следствия 3.3 получаем, что слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})u\psi(x_1 \dots x_{m-1})(\prod b)$ зависит от c_m. Поэтому этот случай невозможен. В случае б), когда слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от некоторого d_i, в силу части 2) следствия 3.3 слово $\prod b$ зависит от c_m. Поэтому этот случай невозможен. В случае б), когда слово $\psi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от некоторого c_i, слово $\varphi(x_1 \dots x_{m-1})$ зависит от c_m. Поэтому этот случай тоже невозможен. В оставшемся случае, пользуясь частью 8) следствия 3.3, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Пусть $u_1, \dots, u_N$ — слова из $\langle X \cup C \cup \{e\} \rangle \cup \{1\}$, $a_1, \dots, a_{2N}$ — наборы длины m слов из $\langle X \cup C \cup \{e\} \rangle$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_{2N}$ — эндоморфизмы алгебры F, отображающие переменные $x_1, \dots, x_{m-1}$ в слова из $\langle X \cup C \cup \{e\} \rangle$. Положим

$$T(u_1, \dots, u_N, a_1, \dots, a_{2N}, \varphi_1, \dots, \varphi_{2N}) = \\ = r(a_1)\varphi_1(g)u_1\varphi_2(g)l(a_2) \dots r(a_{2N-1})\varphi_{2N-1}(g)u_N\varphi_{2N}(g)l(a_{2N}).$$

Имеет место следующая лемма, аналогичная лемме 3.18.

Лемма 3.22. *Пусть $u, v \in \langle X \cup C \cup \{e\}\rangle \cup \{1\}$ и $\mu(uT(u_1, \ldots, u_N, a_1, \ldots, a_{2N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2N})v) \notin \Gamma_0$. Тогда выполнены следующие условия:*

1) *каждое слово $\varphi_i(x_1 \ldots x_{m-1})$, $i = 1, \ldots, 2N$, зависит от некоторой переменной из $C \cup \{e\}$;*
2) *суммарная степень по каждой переменной c_m и d_m слов $u_1, \ldots, u_N$, $\varphi_1(x_1 \ldots x_{m-1}), \ldots, \varphi_{2N}(x_1 \ldots x_{m-1})$ и слов из наборов $a_1, \ldots, a_{2N}$ не превышает N;*
3) *для любого $i = 1, \ldots, N$ слово u_i зависит только от переменных из X и выполнено $\deg_{c_m} \prod a_{2i-1} = 1$, $\deg_{d_m} \prod a_{2i} = 1$; слова $\varphi_i(x_1 \ldots x_{m-1})$, $i = 1, \ldots, 2N$, не зависят от переменных c_m и d_m;*
4) *слова u и v есть степени e и любой моном многочлена $T(u_1, \ldots, u_N, a_1, \ldots, a_{2N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2N})$, не принадлежащий I, начинается и кончается на e.*

Доказательство. Свойства 1) и 2) доказываются аналогично свойствам 1) и 2) леммы 3.18.

3), 4) По условию леммы хотя бы один моном многочлена

$$uT(u_1, \ldots, u_N, a_1, \ldots, a_{2N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2N})v \tag{3.23}$$

правильный. По части 1) леммы 3.21 для любого $i = 1, \ldots, N$ слово

$$\Bigl(\prod a_{2i-1}\Bigr)\varphi_{2i-1}(x_1 \ldots x_{m-1})u_i\varphi_{2i}(x_1 \ldots x_{m-1})\Bigl(\prod a_{2i}\Bigr)$$

имеет по c_m и d_m степень 1. Если слово u непусто, то оно начинается на e и не зависит от c_m, так как иначе все мономы многочлена (3.23) будут неправильными. Поэтому u — степень e. Аналогично показывается, что v — степень e.

Покажем индукцией по i, что $er(a_{2i-1})\varphi_{2i-1}(g)u_i\varphi_{2i}(g)l(a_{2i}) \notin I$. Для $i = 1$ это следует из того, что u — степень e и хотя бы один моном многочлена, полученного умножением слева многочлена (3.23) на e, тоже правильный. Если $i \geqslant 2$ и $er(a_{2i-3})\varphi_{2i-3}(g)u_{i-1}\varphi_{2i-2}(g)l(a_{2i-2}) \notin I$, то так как в силу части 2) леммы 3.21 все мономы многочлена $r(a_{2i-3})\varphi_{2i-3}(g)u_{i-1}\varphi_{2i-2}(g)l(a_{2i-2})$, не принадлежащие I, заканчиваются на e, то $er(a_{2i-1})\varphi_{2i-1}(g)u_i\varphi_{2i}(g)l(a_{2i}) \notin I$. Отсюда по части 2) леммы 3.21 получаем утверждения 3) и 4). Лемма доказана.

Следствие 3.4. *Пусть u, v, u', v' — степени e. Тогда*

$$\mu(uT(u_1, \ldots, u_N, a_1, \ldots, a_{2N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2N})v) = \\ = \mu(u'T(u_1, \ldots, u_N, a_1, \ldots, a_{2N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2N})v') \pmod{\Gamma_0}. \tag{3.24}$$

Доказательство. Достаточно предположить, что правая или левая часть формулы (3.24) не принадлежит Γ_0. Рассмотрим, например, случай, когда такая часть левая. Теперь требуемое утверждение следует из части 4) леммы 3.22 и того, что μ переводит все неправильные мономы в нуль. Следствие доказано.

Через g' обозначим многочлен, полученный из многочлена g заменой $x_j \to c_{m-j}$, $j = 1, \ldots, m-1$, и через g'' многочлен, полученный из g заменой $x_j \to d_j$, $j = 1, \ldots, m-1$. Положим $h' = r((e)^m(c_m))g'$ и $h'' = g''l((d_m)(e)^m)$. Имеем

$$h' = e^m c_m \ldots c_1 \pmod{I}, \quad h'' = d_1 \ldots d_m e^m \pmod{I}.$$

Для любого $h \in F$ рассмотрим Φ-линейное отображение T_h из $\Phi\langle y_1, \ldots, y_n, \ldots\rangle$ в F, определенное на словах следующим образом: $T_h(y_i u) = h'hy_ih''u'$, где u' — многочлен, полученный из слова u заменой $y_j \to h'y_jh''$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть $f', f \in F$ — некоторые многочлены, такие что $f' = \sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i y_{s_{i,1}} \ldots y_{s_{i,N}}$, где $\alpha_i \in \Phi$ и $f \in \Phi\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots\rangle + \Phi$. Через $\Gamma(f)$ обозначим T-идеал алгебры F, порожденный многочленом $[y_1, f]$. Очевидно, что $\Gamma(f) \cap \Phi = 0$ с учетом стандартного вложения.

Лемма 3.23. *Пусть q — многочлен из T-идеала алгебры F, порожденного многочленом $T_f(f')$. Тогда $\mu(q)$ принадлежит T-пространству алгебры F, порожденному многочленом $f'f$ и многочленами из $\Gamma(f) + \mathrm{cf}(f'f)\Gamma_0$.*

Доказательство. Достаточно считать, что $q = u\varphi(T_f(f'))v$, где φ — некоторый эндоморфизм алгебры F и u, v — слова из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle$. Имеем следующие представления:

$$\begin{gathered}\varphi(r((e)^m(c_m))) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{(1)} r(a_i), \quad \varphi(l((d_m)(e)^m)) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{(2)} l(b_i),\\ \varphi(g') = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{(3)} \varphi_i(g), \quad \varphi(g'') = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{(4)} \psi_i(g),\end{gathered} \tag{3.25}$$

где φ_i и ψ_i — эндоморфизмы алгебры F, отображающие переменные $x_1, \dots, x_{m-1}$ в слова из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle$, a_i и b_i — наборы длины m слов из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle$, $\alpha_i^{(j)} \in \Phi$ и M — некоторое число. Здесь мы используем свойство многочлена g переходить в нуль при любой подстановке $x_i \to 1$, $i = 1, \dots, m-1$. Из формул (3.25) и части 4) леммы 3.22 сразу следует, что если хотя бы одно слово u или v не есть степень e, то $\mu(q) \in \mathrm{cf}(f'f)\Gamma_0$. Поэтому можно предположить, что u и v есть степени e. В силу следствия 3.4 в этом случае $\mu(q) = \mu(\varphi(T_f(f'))) \pmod{\mathrm{cf}(f'f)\Gamma_0}$.

Пусть H' — многочлен, полученный суммированием многочленов $\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(3)} r(a_i)\varphi_j(g)$ по тем $i, j = 1, \dots, M$, для которых $\deg_{c_m} \prod a_i = 1$ и $\deg_{c_m} \varphi_j(x_1 \dots x_{m-1}) = 0$, и H'' — многочлен, полученный суммированием многочленов $\alpha_i^{(2)}\alpha_j^{(4)} \psi_j(g) l(b_i)$ по тем $i, j = 1, \dots, M$, для которых $\deg_{d_m} \prod b_i = 1$ и $\deg_{d_m} \psi_j(x_1 \dots x_{m-1}) = 0$. Пусть также φ' — такой эндоморфизм алгебры F, что $\varphi'(x)$, где $x \in X$, получается из $\varphi(x)$ выкидыванием всех мономов, содержащих некоторую букву из $C \cup \{e\}$. В силу леммы 3.22 получаем

$$\mu(q) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \mu\biggl(H'\varphi'(f)\varphi'(y_{s_{i,1}})H''\biggl(\prod_{j=2}^{N} H'\varphi'(y_{s_{i,j}})H''\biggr)\biggr) \pmod{\mathrm{cf}(f'f)\Gamma_0}.$$

В этой формуле при произведении многочленов из F сомножители, отвечающие меньшим i, стоят левее. Это правило считаем выполненным и для остальных произведений многочленов из F в формулах этого доказательства.

Пусть L — многочлен, полученный из H' выкидыванием всех нелевонормированных мономов, R — многочлен, полученный из H'' выкидыванием всех неправонормированных мономов и L' и R' — многочлены, полученные из L и R соответственно заменой всех переменных из множества $C \cup \{e\}$ на 1.

Тогда в силу части 9) следствия 3.20 получаем

$$\mu(q) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \mu\biggl(L\varphi'(f)\varphi'(y_{s_{i,1}})R\biggl(\prod_{j=2}^{N} L\varphi'(y_{s_{i,j}})R\biggr)\biggr) \pmod{\mathrm{cf}(f'f)\Gamma_0}.$$

Все мономы каждого многочлена, на который действует μ в последней формуле, правильные. Поэтому

$$\mu(q) = \biggl(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \prod_{j=1}^{N} L'\varphi'(y_{s_{i,j}})R'\biggr)\varphi'(f) \pmod{\Gamma(f) + \mathrm{cf}(f'f)\Gamma_0}.$$

Многочлен, стоящий в правой части последней формулы, получается из многочлена $f'f$ заменой $x_i \to \varphi'(x_i)$, $y_i \to L'\varphi'(y_i)R'$, $i \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Замечание 3.3. Пусть $N' > N$, $u_1, \dots, u_{N'}$ — слова из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle \cup \{1\}$, $a_1, \dots, a_{2N'}$ — наборы длины m слов из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_{2N'}$ — эндоморфизмы алгебры F, отображающие переменные $x_1, \dots, x_{m-1}$ в слова из $\langle X \cup C \cup \{e\}\rangle$. Положим

$$\begin{aligned}&T(u_1, \dots, u_{N'}, a_1, \dots, a_{2N'}, \varphi_1, \dots, \varphi_{2N'}) =\\ &\qquad = r(a_1)\varphi_1(g)u_1\varphi_2(g)l(a_2) \dots r(a_{2N'-1})\varphi_{2N'-1}(g)u_{N'}\varphi_{2N'}(g)l(a_{2N'}).\end{aligned}$$

Пусть $u, v \in \langle X \cup C \cup \{e\}\rangle \cup \{1\}$. Тогда

$$\mu(uT(u_1, \dots, u_{N'}, a_1, \dots, a_{2N'}, \varphi_1, \dots, \varphi_{2N'})v) \in \Gamma_0.$$

Действительно, предположим противное. Тогда аналогично лемме 3.22 получаем, что каждое слово $(\prod a_{2i-1})\varphi_{2i-1}(x_1\dots x_{m-1})u_i\varphi_{2i}(x_1\dots x_{m-1})(\prod a_{2i})$, $i=1,\dots,N'$, зависит от c_m и d_m. Следовательно, все мономы многочлена $uT(u_1,\dots,u_{N'},a_1,\dots,a_{2N'},\varphi_1,\dots,\varphi_{2N'})v$ неправильные, и мы приходим к противоречию.

Пусть f'' — линейная комбинация над Φ слов из $\langle X\rangle$ длины более N и q' — многочлен из T-идеала алгебры F, порожденного многочленом $T_{f''}(f)$. Многочлен q' есть линейная комбинация многочленов вида $uT(u_1,\dots,u_{N'},a_1,\dots,a_{2N'},\varphi_1,\dots,\varphi_{2N'})v$, и поэтому $\mu(q')\in \mathrm{cf}(f'',f)\Gamma_0$.

Теорема 3.11. *Пусть A — некоторое множество, элементами которого являются пары многочленов (f',f), где f' — линейная комбинация над Φ слов из $\langle y_1,\dots,y_n,\dots\rangle$ длины N и $f\in\Phi\langle x_1,\dots,x_n,\dots\rangle+\Phi$. Пусть J — идеал кольца Φ, порожденный всеми коэффициентами многочленов $f'f$, $(f',f)\in A$, и L — некоторое T-пространство, содержащее T-идеал $J\Gamma_0$ и каждый T-идеал $\Gamma(f)$, $(f',f)\in A$. Предположим, что T-пространство, порожденное многочленами $f'f$, $(f',f)\in A$, бесконечно базируемо по модулю L. Тогда T-идеал алгебры F, порожденный многочленами $T_{f'}(f)$, $(f',f)\in A$, бесконечно базируем по модулю любого T-идеала Γ, такого что $\mu(\Gamma)\subset L$.*

Доказательство следует из леммы 3.23 и того, что $\mu(T_{f'}(f))=f'f$ для $(f',f)\in A$. Теорема доказана.

Интересно сравнить доказанную теорему с теоремой 3.10, где μ применялось не ко всему идеалу, а только к его однородной компоненте. Имея бóльшую информацию о Φ и A (бесконечность, однородность), можно такую же переформулировку сделать и здесь.

Теперь посмотрим, как можно выбрать T-идеал Γ. Предположим, что L содержит некоторый T-идеал Γ_1. Пусть $f_1,\dots,f_{2mN+1}$ — некоторые многочлены из Γ_1. Рассмотрим представление $f_i=g_i+g_i'+h_i+h_i'$, где $g_i\in\Phi\langle X\rangle+\Phi$, g_i' — линейная комбинация степеней e, каждый моном многочлена h_i зависит от некоторой переменной из C и $h_i'\in I$. При этом очевидно, что $g_i,g_i'\in\Gamma_1$ и многочлен g_i' не имеет свободного члена, так как иначе мы бы получили $\Gamma_1=L=F$. Последнее, очевидно, не так. Так как степень по множеству переменных C любого правильного слова не превосходит $2mN$, то многочлен $\mu(f_1\dots f_{2mN+1})$ есть сумма многочленов вида $\mu(f'g_if'')$ и $\mu(f'g_i'f'')$, где $f',f''\in F$. Отсюда получаем, что $\mu(\Gamma_1^{2mN+1})\subset\Gamma_1\subset L$ и можно положить $\Gamma=\Gamma_1^{2mN+1}$.

T-идеал Γ можно еще расширить следующим образом. Пусть B — множество, элементами которого являются пары многочленов (f',f), где $f\in\Phi\langle x_1,\dots,x_n,\dots\rangle+\Phi$, и выполнено одно из следующих условий:

1) f' есть линейная комбинация над Φ слов из $\langle y_1,\dots,y_n,\dots\rangle$ длины N и $f'f\in L$;
2) f' есть линейная комбинация над Φ слов из $\langle X\rangle$ длины более N.

В силу замечания 3.3 и леммы 3.23 можно положить Γ равным сумме T-идеала Γ_1^{2mN+1} и T-идеала, порожденного многочленами $T_{f'}(f)$, $(f',f)\in B$.

Теоремы 3.4—3.6 дают достаточно примеров бесконечно базируемых T-пространств вида, требуемого в теореме 3.11. Как и следовало ожидать (см. [2]), все такие T-пространства не могут быть порождены многочленами, зависящими от конечного числа переменных. Используя результат [2] и теорему 3.11, получаем следующей результат.

Следствие 3.5. *Пусть Φ — коммутативное нетерово кольцо и A — некоторое множество, элементами которого являются пары многочленов (f',f), где f' — линейная комбинация над Φ слов из $\langle y_1,\dots,y_m\rangle$ длины N и $f\in\Phi\langle x_1,\dots,x_n\rangle+\Phi$. Пусть M — T-пространство алгебры F, порожденное многочленами $f'f$, $(f',f)\in A$. Тогда T-пространство M конечно базируемо по модулю T-идеала, порожденного многочленами $[y_1,f]$, $(f',f)\in A$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение следствия не выполнено. Пусть J — идеал кольца Φ, порожденный всеми коэффициентами многочленов $f'f$, $(f',f)\in A$. Теперь применим теорему 3.11 для получения противоречия следующим образом. В качестве T-пространства L выберем T-идеал, порожденный многочленами $[y_1,f]$, $(f',f)\in A$, а в качестве g ненулевой полилинейный многочлен алгебры F, такой что $Jg\subset L$, переходящий в нуль при любой подстановке $x_i\to 1$, где g зависит от x_i.

Так как кольцо Φ нетерово, то существует конечное множество $A' \subset A$, такое что идеал J порожден коэффициентами многочленов $f'f$, $(f', f) \in A'$. Из этого факта методами [20] легко показать существование ненулевого полилинейного многочлена $g' \in F$ с коэффициентами ± 1, такого что $Jg' \in L$. Выполняя в g' подстановку $x_i \to [x_{2i-1}, x_{2i}]$, $i \in \mathbb{N}$, переименовывая переменные и, возможно, умножая результат на -1, получаем требуемый многочлен g. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундам. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 47—66.
2. Белов А. Я. Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы: Дис.. . . д-ра физ.-мат. наук. — М., 2002.
3. Гришин А. В., Урбаханов С. В. О свойствах экстремальности примера не конечно базируемого T-пространства над полем характеристики 2 // IV междунар. конф. «Современные проблемы теории чисел и ее приложения», тезисы докл. — Тула, 2001. — С. 50—51.
4. Гришин А. В., Урбаханов С. В. О коразмерностях в пространствах 2-слов над полем характеристики 2 и свойствах экстремальности // Чебышевский сборник. Т. 3, вып. 2 (4). — М.: Изд-во гос. пед. унив. им. Л. Н. Толстого, 2002. — С. 34—42.
5. Гришин А. В. Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 28, № 5. — С. 536—557.
6. Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщенных многочленов, близких к ассоциативным // Междунар. конф. по алгебре. Сборник тезисов. — Барнаул, 1991. — С. 37.
7. Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщенных многочленов // Известия АН СССР. Сер. матем. — 2001. — Т. 54, No. 5. — С. 899—927.
8. Гришин А. В. О конечной базируемости абстрактных T-пространств // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 3. — С. 669—700.
9. Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундам. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 101—118.
10. Гришин А. В. Многообразие ассоциативных колец не шпехтово // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, № 5. — С. 193—194.
11. Гришин А. В. О конечной базируемости и представимости в многообразиях альтернативных алгебр // IV междунар. алгебр. конф. Тезисы докладов. — Новосибирск, 2000. — С. 65—67.
12. Гришин А. В. О конечной базируемости T-пространств обобщенных многочленов и представимости // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 54, № 4. — С. 133—134.
13. Кемер А. Р. О нематричных многообразиях // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 3. — С. 255—283.
14. Кемер А. Р. Многообразия и Z_2-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 1042—1059.
15. Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 597—641.
16. Кемер А. Р. Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 4. — С. 726—753.
17. Киреева Е. А. О конечной порожденности вполне инвариантных подмодулей в некоторых относительно свободных ассоциативных алгебрах // Научные труды математического факультета МГПУ. — М.: Прометей, 2000. — С. 296—276.
18. Киреева Е. А. О конечной порожденности вполне инвариантных подмодулей в алгебрах многочленов // Чебышевский сборник. Т. 2. — М.: Изд-во гос. пед. унив. им. Л. Н. Толстого, 2001. — С. 54—60.
19. Красильников А. Н. О тождествах триангулируемых матричных представлений групп // Труды ММО. — 1989. — Т. 52. — С. 229—245.
20. Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порожденной PI-алгебры. — Новосибирск: Инст. матем. СО АН СССР, 1984.
21. Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37, № 3. — С. 483—501.
22. Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фундам. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 307—312.
23. Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 3. — С. 143—160.
24. Щиголев В. В. Конечная базируемость T-пространств над полями нулевой характеристики // Изв. РАН. Сер. матем. — 2001. — Т. 65, № 5. — С. 191—224.

25. Коуровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории групп. — Новосибирск: Инст. матем. СО АН СССР, 1967.
26. Bourbaki N. Elements of mathematics. Commutative algebra. — Paris, Hermann; Addison-Wesley Publishing Co., 1972.
27. Braun A. The radical in a finitely generated P.I. algebra // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 7, no. 2. — P. 385—386.
28. Drenski V. S. Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras // Mat. Sb. — 1981. — Vol. 115, no. 1. — P. 98–115.
29. Grishin A. V. On the finite basis property of T-spaces over a field of finite characteristic // Proc. of the Moscow–Tainan algebraic workshop. — 1994. — P. 225—227.
30. Grishin A. V. On non-spechtianness of the variety of associative rings which satisfy the identity $x^{32} = 0$ // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 6. — P. 50–51.
31. Grishin A. V. The variety of associative rings which satisfy the identity $x^{32} = 0$ is not Specht // 12th International Conference, FPSAC'00. Proceedings. — Moscow, 2000. — P. 686—691.
32. Gupta C. K., Krasilnikov A. N. A non-finitely based system of polynomial identities which contains the identity $x^6 = 0$ // Quart. J. Math. — 2002. — Vol. 53. — P. 173—183.
33. James G. D. The representation theory of the symmetric groups. — Berlin: Springer, 1978. — Lecture Notes in Mathematics. Vol. 682.
34. Kemer A. R. The standard identity in characteristic p: A conjecture of I. B. Volichenko // Isr. J. Math. — 1993. — Vol. 81, no. 3. — P. 343—355.
35. Kemer A. R. Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p // Internat. J. Algebra Comput. — 1995. — Vol. 5, no. 2. — P. 189—197.
36. Lewin J. A matrix representation for associative algebras. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 188, no. 2. — P. 293—317.
37. Okhitin S. V. Central polynomials of an algebra of second-order matrices // Moscow Univ. Math. Bull. — 1988. — Vol. 43, no. 4. — P. 49—51.
38. Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Isr. J. Math. — 1972. — Vol. 11, no. 2. — P. 131—152.
39. Rowen L. H. Polinomial identities in ring theory. — New York, London: Academic Press, 1980. — Pure and Applied Mathematics. Vol. 84.
40. Specht W. Gezetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — Vol. 52, no. 5. — P. 557—589.

А. В. Гришин
Московский педагогический государственный университет
E-mail: alex@grishin.mccme.ru

В. В. Щиголев
E-mail: vkshch@vens.ru

Современная математика и ее приложения. Том 18 (2004). С. 98–127

КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ КВАНТОВЫХ АЛГЕБР

© 2004 г. **С. А. ЗЕЛЕНОВА**

Аннотация. В работе изучается строение коммутативных подалгебр квантовых алгебр (в частности, алгебр квантовых многочленов, квантовых матриц, квантовых алгебр Вейля). Обсуждаются понятия степени трансцендентности и размерности Крулля.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Квантовые алгебры — это неформальное название различных алгебр, возникающих в теории квантовых групп.

Понятие квантовой группы появилось в конце 1980-х годов в связи с решением квантового уравнения Янга—Бакстера, являющегося ключевым моментом в «квантовом методе обратной задачи», развитом Л. Д. Фаддеевым и ленинградской школой математической физики с целью решения «интегрируемых квантовых систем» (см. [34]).

Отправной точкой развития теории квантовых групп, объединившей первые разрозненные результаты и примеры, стала работа В. Г. Дринфельда [9], содержащая мотивировки основных понятий.

Хотя теория квантовых групп не позволила полностью решить уравнение Янга—Бакстера, многие интересные и полезные решения этого уравнения удалось построить именно с ее помощью. «Машиной» для производства таких решений стала теория представлений некоторых специфических алгебр, сходных с деформациями обертывающих алгебр полупростых алгебр Ли. Вот эти специфические алгебры и получили название «квантовых групп».

Первый пример — деформация $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ — возник в статье П. П. Кулиша и Н. Ю. Решетихина в 1981 году (см. [15]).

Самый первый пример алгебры квантовых многочленов (см. определение 1.1.1) — квантовая плоскость $k_q[X,Y]$ — был введен Ю. И. Маниным в [39]. В дальнейшем многие авторы рассматривали

ISSN 1512–1712

обобщения этой алгебры (см., например, [1, 19, 43]). Среди таких обобщений можно назвать однопараметрические и многопараметрические квантовые аффинные пространства и квантовые торы, иначе называемые алгебрами квантовых лорановских многочленов, общие квантовые многочлены и т. д. Определение 1.1.1 является наиболее общим из всех указанных определений.

В работах [39–41] Ю. И. Маниным был предложен способ построения квантовых групп на основе понятия универсальной кодействующей на некоторое семейство алгебр алгебры. Частным случаем универсальной кодействующей являются алгебры квантовых матриц (определение 1.2.1). Построением многопараметрических алгебр квантовых матриц $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$ занимались также М. Артин, В. Шельтер, Дж. Тэйт (см. [29]) и А. Сэдбэри (см. [50]).

В начале 1990-х годов появились первые результаты, касающиеся теории некоммутативных дифференциальных исчислений на квантовых группах. В связи с этой теорией в работах Г. Мальциниотиса [38] и Е. Е. Демидова [6] возникли алгебры $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$, являющиеся квантовым аналогом алгебр Вейля (определение 1.4.1).

В работе [22] Л. Д. Фаддеевым, Н. Ю. Решетихиным и Л. А. Тахтаджяном были сконструированы квантовые координатные кольца для классических простых групп Ли (т. е. для $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$). Квантовое координатное кольцо $\mathcal{O}_q(G)_k$ в случае произвольной связной комплексной полупростой алгебраической группы G было построено А. Жозефом в середине 1990-х годов в работах [36, 37]. Метод построения был навеян работами С. Л. Вороновича, Л. Л. Ваксмана и Я. С. Сойбельмана [4, 51–53].

Несмотря на то, что общего понятия квантовой группы (или квантовой алгебры) не существует, а существуют лишь разнородные примеры, эти примеры имеют немало общих свойств. Так, например, все вышеупомянутые алгебры нетеровы и обладают телами частных (см. [30]). Кроме того, все они являются градуированными по $\mathbb{N}_0$.

В теории квантовых групп большой интерес представляет изучение тел частных квантовых алгебр.

В связи с тем, что квантовые алгебры во многом аналогичны алгебрам функций над группами, при изучении их тел частных возникают различные варианты гипотезы Гельфанда—Кириллова (см. [5]).

А. Н. Панов в работе [19] сформулировал и доказал аналог гипотезы Гельфанда—Кириллова для однопараметрических алгебр квантовых многочленов и для однопараметрических матричных квантовых алгебр $\mathcal{O}_q(GL_n(k))$. В той же работе доказано, что центр тела частных однопараметрической алгебры квантовых многочленов является чисто трансцендентным расширением основного поля, и вычислены размерность Гельфанда—Кириллова этого тела частных и степени трансцендентности его центра.

Ж. Алев и Ф. Дюма доказали, что тело частных однопараметрической квантовой алгебры Вейля $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$ изоморфно телу частных алгебры квантовых многочленов для некоторой матрицы мультипараметров (см. [25]). Они же, объединив свой результат с результатом А. Н. Панова, сформулировали классификационную теорему о телах частных смешанных квантовых алгебр Вейля (см. [24]), а также результаты, касающиеся степени трансцендентности указанных тел частных, их центров и максимальных подполей.

В работе В. А. Артамонова и П. Кона [26] для случая $n = 2$ показано, что в теле частных $k_q(X, Y)$ алгебры квантовых многочленов $k_q[X, Y]$ централизатор любого элемента, отличного от константы, коммутативен и потому является максимальным подполем в $k_q(X, Y)$. Идея доказательства восходит к работе П. Кона [33]. В. А. Артамоновым в статье [2] получено обобщение этого результата для случая алгебры квантовых многочленов $k_Q[X_1, \ldots, X_n]$ при $n \geqslant 3$ в предположении, что поле k имеет нулевую характеристику.

В связи с появлением квантовых аналогов гипотезы Гельфанда—Кириллова представляют интерес вопросы, связанные с вычислением различных размерностей, таких как размерность Крулля, размерность Гельфанда—Кириллова, глобальная размерность.

Дж. МакКоннел и Ж. Петит в работе [43] построили алгоритм вычисления размерности Крулля и глобальной размерности алгебры квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$. Описанный ими алгоритм основан на построении ряда локализаций кольца $\mathcal{L}$ по подмножествам множества порождающих $X_1, \dots, X_n$ и нахождении «минимальной» локализации, для которой существует ненулевой конечномерный модуль над подтелом этой локализации, порожденным соответствующим подмножеством порождающих. Данный алгоритм верен и для размерности Крулля, и для глобальной размерности, что позволяет авторам сделать заключение о равенстве этих двух размерностей в случае алгебры квантовых лорановских многочленов.

К. Брукс в работе [31] вычислил размерность Крулля и глобальную размерность алгебры квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n}$, пользуясь результатами Дж. МакКоннела и Ж. Петита и своими соображениями по поводу размерности Гельфанда—Кириллова модулей над скрученными произведениями тел и свободных абелевых групп (см. [32]).

Как известно (см., например, [8]), вычисление размерности Крулля некоторой алгебры связано со строением первичного спектра этой алгебры. Строению первичного и примитивного спектра некоторых квантовых алгебр посвящена работа К. Гудерла [35]. В этой работе первичный спектр описывается с помощью действующей на алгебре подгруппы группы автоморфизмов. Общие результаты применяются к квантовым торам, квантовым аффинным пространствам и к матричным алгебрам.

Группы автоморфизмов алгебры общих квантовых многочленов систематически изучаются в работе В. А. Артамонова и Р. Висбауэра [27]. Дано весьма полное описание групп автоморфизмов таких алгебр. Дальнейшее исследование группы автоморфизмов ведется в работе [28], посвященной изучению действия точечных алгебр Хопфа на алгебре общих квантовых многочленов и его инвариантов. Обзор результатов, касающихся строения группы автоморфизмов алгебр квантовых многочленов, действия алгебр Хопфа на этих алгебрах, а также проективных модулей и Морита-эквивалентности приведен в работе В. А. Артамонова [3].

Классы алгебр, изучаемых в настоящей работе, близки к классу разрешимых квантовых алгебр, рассматриваемых А. Н. Пановым в [46–48].

Определение разрешимой квантовой алгебры следующее.

Рассмотрим коммутативную нетерову область C со свойством $1 + 1 + \ldots + 1 \neq 0$ для любой суммы единиц.

Пусть R — кольцо и C содержится в центре R.

Пусть также $Q = (q_{ij})$ — мультипликативно антисимметричная матрица над C размера $(n+m) \times (n+m)$.

Пусть кольцо R порождено элементами

$$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}$$

с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} &x_i x_j = q_{ij} x_j x_i && \text{для всех } \ n+1 \leqslant j \leqslant n+m, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+m, \\ &x_i x_j = q_{ij} x_j x_i + r_{ij} && \text{для всех } \ 1 \leqslant i < j \leqslant n, \end{aligned}$$

где r_{ij} лежит в подалгебре, порожденной элементами

$$x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}.$$

Кольцо R называется *разрешимой квантовой алгеброй* над C, если оно является итеративным косым расширением области C.

В [47], в частности, показано, что квантовые алгебры Вейля и квантовые матричные алгебры являются разрешимыми квантовыми алгебрами.

Другого рода обобщение было рассмотрено А. В. Одесским в [18]. Именно, рассматривается класс ассоциативных алгебр, градуированных по полугруппе $\mathbb{N}_0$, определяемых n образующими, $\frac{n(n-1)}{2}$ однородными квадратичными соотношениями и удовлетворяющих так называемому условию Пуанкаре—Биркгофа—Витта, т. е. имеющих такие же размерности градуировочных компонент, как и кольцо многочленов от n переменных. Частным случаем таких алгебр являются алгебры квантовых многочленов, координатные кольца полупростых алгебраических групп (см. [30]), эллиптические алгебры Склянина (см. [17, 18, 20, 21]) и др.

Автор пользуется случаем выразить глубокую искреннюю благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. профессору В. А. Артамонову за постановку задач, руководство работой и полезные советы.

1. Предварительные сведения

В этом разделе вводятся некоторые классы алгебр, возникающих в некоммутативной алгебраической геометрии. В работе изучается строение коммутативных подалгебр этих алгебр.

Далее везде k означает основное поле, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел, k^* — множество обратимых элементов поля k.

Кроме того, $M_n(k)$ обозначает множество матриц размера $n \times n$ с элементами, лежащими в поле k, а $M_n(k^*)$ — множество матриц размера $n \times n$, состоящих из обратимых элементов основного поля k.

Матрицу $Q = (q_{ij}) \in M_n(k^*)$ будем называть *мультипликативно антисимметричной*, если $q_{ii} = 1$ и $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$ для всех индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

1.1. Алгебры квантовых многочленов.

Пусть $n \geqslant 2$ и задана мультипликативно антисимметричная матрица $Q = (q_{ij}) \in M_n(k^*)$.

Определение 1.1.1. *Алгеброй квантовых многочленов* над полем k будем называть ассоциативную алгебру

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Q,n,r} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \ldots, X_n]$$

над k, порожденную $n + r$ элементами

$$X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \ldots, X_n$$

и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} &X_i X_i^{-1} = X_i^{-1} X_i = 1, \quad && 1 \leqslant i \leqslant r, \\ &X_i X_j = q_{ij} X_j X_i, && 1 \leqslant i, j \leqslant n. \end{aligned}$$

Частными случаями алгебры квантовых многочленов являются однопараметрические и многопараметрические *квантовые аффинные пространства* (см. [30])

$$\mathcal{L}_{Q,n,0} = k_Q[X_1, \ldots, X_n]$$

и однопараметрические и многопараметрические *квантовые торы* ранга n, которые иногда называют *квантовыми лорановскими многочленами* или *мультипликативным аналогом алгебр Вейля* (см. [44]),

$$\mathcal{L}_{Q,n,n} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}].$$

Под однопараметрическим случаем в литературе (см. [30, 42]) часто понимают случай, когда $q_{ij} = q \in k^*$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Более общее определение однопараметрического случая см. в разделе 3.1.3.

1.2. Матричные алгебры.

Определение 1.2.1. Пусть q — обратимый элемент основного поля k. *Однопараметрической алгеброй квантовых матриц* $n \times n$ (см. [30]) называется алгебра, порожденная элементами X_{ij} для $i, j = 1, \ldots, n$ и определяющими соотношениями

$$X_{ij} X_{lm} = \begin{cases} q X_{lm} X_{ij}, & i < l,\ j = m, \\ q X_{lm} X_{ij}, & i = l,\ j < m, \\ X_{lm} X_{ij}, & i < l,\ j > m, \\ X_{lm} X_{ij} + (q - q^{-1}) X_{im} X_{lj}, & i < l,\ j < m, \end{cases}$$

которая обозначается $\mathcal{O}_q(M_n(k))$.

Обобщением матричной алгебры $\mathcal{O}_q(M_n(k))$ является *многопараметрическая алгебра квантовых матриц* $n \times n$ (см. [7,30]), обозначаемая $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$, где $\lambda \in k^*$ и матрица $P = (p_{ij}) \in M_n(k^*)$

мультипликативно антисимметрична. Эта алгебра задается порождающими X_{ij} для $i, j = 1, \dots, n$ и определяющими соотношениями

$$X_{lm}X_{ij} = \begin{cases} p_{li}p_{jm}X_{ij}X_{lm} + (\lambda - 1)p_{li}X_{im}X_{lj}, & l > i, \ m > j, \\ \lambda p_{li}p_{jm}X_{ij}X_{lm}, & l > i, \ m \leqslant j, \\ p_{jm}X_{ij}X_{lm}, & l = i, \ m > j. \end{cases}$$

Однопараметрический случай получается, когда $\lambda = q^{-2}$ и $p_{ij} = q$ для всех $i > j$.

Алгебра квантовых матриц возникла в теории квантовых групп как частный случай алгебры, являющейся универсальной кодействующей на некоторое семейство алгебр $\mathcal{S}$ (см. [7]).

В случае $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$ семейство $\mathcal{S}$ состоит из двух алгебр

$$A_Q = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/(x_ix_j - q_{ij}^{-1}x_jx_i),$$
$$B_P = k\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle/(\xi_i\xi_j + p_{ij}\xi_j\xi_i, \xi_i^2),$$

где $Q = (q_{ij})$, $P = (p_{ij})$ — матрицы параметров, удовлетворяющие соотношениям

$$p_{ij}p_{ji} = q_{ij}q_{ji} = p_{ii} = q_{ii} = 1, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$
$$p_{ij}q_{ij} = \lambda^{\operatorname{sgn}(j-i)}, \quad \lambda \in k^*, \quad \lambda \neq -1.$$

Метод конструирования квантовых групп с помощью универсальных кодействующих алгебр был описан Ю. И. Маниным в конце 1980-х годов (см. [7, 42]).

1.3. Квантовые координатные кольца для полупростых алгебраических групп. Пусть G — некоторая связная комплексная полупростая алгебраическая группа. Если k — поле характеристики, не равной двум или трем, и $q \in k^*$, то определена (см., например, [30, глава I.7]) k-алгебра $\mathcal{O}_q(G)_k$ — *однопараметрическое квантовое координатное кольцо группы* G (его k-форма).

Теорема 1.3.1.

1. *Кольцо $\mathcal{O}_q(G)_k$ как k-алгебра порождается элементами $u_1, \dots, u_m$ и определяющими соотношениями*

$$u_iu_j = q_{ij}u_ju_i + \sum_{s=1}^{j-1}\sum_{t=1}^{m}(\alpha_{ij}^{st}u_su_t + \beta_{ij}^{st}u_tu_s)$$

для всех $1 \leqslant j < i \leqslant m$ при некоторых коэффициентах $\alpha_{ij}^{st}, \beta_{ij}^{st} \in k$ и $q_{ij} \in k^*$.

2. *Коэффициенты q_{ij} являются целыми степенями элемента $q \in k^*$.*

Доказательство. См. [30, теорема I.8.16, теорема I.8.18]. □

1.4. Квантовые алгебры Вейля. Квантовые алгебры Вейля естественным образом возникают в теории некоммутативных дифференциальных исчислений на квантовых группах (см. [6, 7]).

Определение 1.4.1. Пусть $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — кортеж ненулевых элементов поля k и $\Lambda = (\lambda_{ij})$ — мультипликативно антисимметричная матрица. Пусть $\mu_{ij} = \lambda_{ij}q_i$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$. *Квантовой алгеброй Вейля* $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$ называется ассоциативная алгебра над полем k, задаваемая $2n$ порождающими

$$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$$

с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_iX_j &= \mu_{ij}X_jX_i, \\ Y_iY_j &= \lambda_{ij}Y_jY_i, \\ X_iY_j &= \lambda_{ji}Y_jX_i, \\ X_jY_i &= \mu_{ij}Y_iX_j, \end{aligned} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

$$X_jY_j = 1 + q_jY_jX_j + \sum_{1\leqslant l<j}(q_l - 1)Y_lX_l, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Некоторые свойства тел частных квантовых алгебр Вейля изучены Ж. Алевым и Ф. Дюма в [23–25].

2. Теорема об алгебраической зависимости

2.1. Вспомогательные определения и утверждения. Вначале дадим несколько вспомогательных определений.

Через $\sigma(\mathbf{v})$ будем обозначать сумму элементов целочисленного кортежа $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$:

$$\sigma(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Определение 2.1.1. Определим отношение порядка $\succ_{l.}$ на множестве $\mathbb{Z}^n$. Положим $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \succ_{l.} (v_1, \ldots, v_n) = \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$, если выполнено одно из условий

1) $\sigma(\mathbf{u}) > \sigma(\mathbf{v})$,
2) $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{v})$ и существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $u_i = v_i$ для всех $i = 1, \ldots, j-1$ и $u_j > v_j$.

Кроме того, определим на множестве $\mathbb{Z}^n$ порядок $\succ_{i.l.}$, полагая $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \succ_{i.l.} (v_1, \ldots, v_n) = \mathbf{v}$ для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$, если выполнено одно из условий

1) $\sigma(\mathbf{u}) > \sigma(\mathbf{v})$,
2) $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{v})$ и существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $u_i = v_i$ для всех $i = 1, \ldots, j-1$ и $u_j < v_j$.

Иными словами, мы сравниваем кортежи из $\mathbb{Z}^n$ по сумме их координат, а в случае равенства этих сумм порядок $\prec_{l.}$ совпадает с лексикографическим, а порядок $\prec_{i.l.}$ обратен лексикографическому порядку.

Все дальнейшие рассуждения применимы как к порядку $\prec_{l.}$, так и к порядку $\prec_{i.l.}$, поэтому мы не будем рассматривать каждый из случаев отдельным образом и будем употреблять для этих двух порядков общее обозначение $\prec$.

Лемма 2.1.2. *Упорядочение $\prec$ обладает следующими свойствами:*

1) $\mathbf{u} + \mathbf{t} \succ \mathbf{u}$, *если* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbf{t} \neq 0$;
2) $\mathbf{u} + \mathbf{t} \succ \mathbf{v} + \mathbf{t}$, *если* $\mathbf{u} \succ \mathbf{v}$, *для всех* $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$;
3) *в* $\mathbb{N}_0^n$ *не существует бесконечной убывающей относительно* $\prec$ *цепочки;*
4) *зафиксируем элемент* $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$. *Пусть подмножество* $M \subset \mathbb{N}_0^n$ *таково, что* $\mathbf{v} \preceq \mathbf{d}$ *для всех* $\mathbf{v} \in M$. *Тогда* M *конечно.*

Доказательство.

1) Равенство $\sigma(\mathbf{u} + \mathbf{t}) = \sigma(\mathbf{u}) + \sigma(\mathbf{t})$ выполнено для всех кортежей $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}$. Если же $\mathbf{t}$ — ненулевой элемент $\mathbb{N}_0^n$, то $\sigma(\mathbf{t}) > 0$, т. е. $\sigma(\mathbf{u} + \mathbf{t}) = \sigma(\mathbf{u}) + \sigma(\mathbf{t}) > \sigma(\mathbf{u})$.

2) Если $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{v})$, то существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $u_i = v_i$ для всех $i = 1, \ldots, j-1$ и $u_j \neq v_j$. В случае порядка $\prec_{l.}$ $u_j > v_j$, а в случае порядка $\prec_{i.l.}$ $u_j < v_j$. В силу равенств $\sigma(\mathbf{u}+\mathbf{t}) = \sigma(\mathbf{u})+\sigma(\mathbf{t})$ и $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{v})$ выполнено равенство $\sigma(\mathbf{u}+\mathbf{t}) = \sigma(\mathbf{v}+\mathbf{t})$, причем i-е элементы кортежей $\mathbf{u}+\mathbf{t}$, $\mathbf{v}+\mathbf{t}$ совпадают для всех $i = 1, \ldots, j-1$, а между j-ми элементами этих кортежей выполнено такое же неравенство, как и между j-ми элементами кортежей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

В случае $\sigma(\mathbf{u}) > \sigma(\mathbf{v})$ верно соотношение $\sigma(\mathbf{u} + \mathbf{t}) = \sigma(\mathbf{u}) + \sigma(\mathbf{t})\ \sigma(\mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{t}) = \sigma(\mathbf{v} + \mathbf{t})$, откуда следует требуемое неравенство.

3) Элементов $\mathbb{N}_0^n$ с одинаковой фиксированной суммой координат конечное число, поэтому любой элемент $\mathbb{N}_0^n$ имеет конечное число меньших.

4) Будем доказывать искомое утверждение индукцией по n. При $n = 1$ оно очевидно.

Пусть наше утверждение доказано для всех натуральных чисел, меньших n. Фиксируем первую координату v_1 кортежа $\mathbf{v}$. Поскольку $\mathbf{v} \preceq \mathbf{d}$, то $\sigma(\mathbf{v}) \leqslant \sigma(\mathbf{d})$. Поэтому $\sigma((v_2, \ldots, v_n)) \leqslant \sigma(\mathbf{v}) \leqslant \sigma(\mathbf{d}) < \sigma((d_1 + d_2 + 1, d_3, \ldots, d_n))$, т. е. $(v_2, \ldots, v_n) \prec (d_1 + d_2 + 1, d_3, \ldots, d_n)$. По предположению индукции таких кортежей $(v_2, \ldots, v_n)$ конечное число. По условию все координаты кортежа $\mathbf{v}$ неотрицательны, откуда $v_1 \leqslant \sigma(\mathbf{v})$. Таким образом, на первую координату кортежа $\mathbf{v}$ накладывается условие $0 \leqslant v_1 \leqslant \sigma(\mathbf{v}) \leqslant \sigma(\mathbf{d})$, т. е. вариантов для v_1 также конечное число.

Лемма полностью доказана. □

Определение 2.1.3. *Абсолютным значением* целочисленного кортежа $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ назовем кортеж из абсолютных значений элементов $\mathbf{z}$:

$$|(z_1, \ldots, z_n)| = (|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

Утверждение 2.1.4. *Для произвольных кортежей* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *выполняется неравенство* $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \preceq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Доказательство. Для произвольных вещественных чисел x, y имеем $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Поэтому

$$\sigma(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|) = \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i| + |v_i| = \sigma(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|).$$

Равенство выполняется, только когда для всех $i = 1, \ldots, n$ выполнены равенства $|u_i + v_i| = |u_i| + |v_i|$, т. е. когда кортежи $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ и $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ равны.

Теперь утверждение очевидно. □

Лемма 2.1.5. *Зафиксируем элемент* $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$. *Пусть подмножество* $M \subset \mathbb{Z}^n$ *таково, что* $|\mathbf{v}| \preceq \mathbf{d}$ *для всех* $\mathbf{v} \in M$. *Тогда* M *конечно.*

Доказательство. Утверждение следует из пункта 4 леммы 2.1.2 и того, что для заданного $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$ количество таких элементов $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$, что $|\mathbf{v}| = \mathbf{t}$, конечно.

Лемма доказана. □

Пусть k — основное поле, и пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра без делителей нуля над этим полем.

Следующее определение восходит к книге [45].

Определение 2.1.6. Предположим, что существует отображение η алгебры $\mathcal{A}$ в множество $\mathbb{Z}^n$, удовлетворяющее следующим соотношениям для всех ненулевых $f, g \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in k^*$:

N1) $\eta(\alpha f) = \eta(f)$;
N2) $\eta(f + g) \preceq \max\{\eta(f), \eta(g)\}$, где максимум берется относительно порядка $\prec$;
N3) $\eta(fg) = \eta(f) + \eta(g)$.

Далее, предположим, что существует базис $\mathfrak{B} = \{b_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ алгебры $\mathcal{A}$ как векторного пространства, такой что

N4) $\eta(b_i) \neq \eta(b_j)$ для любых $b_i \neq b_j$, $b_i, b_j \in \mathfrak{B}$;
N5) если $f = \sum\limits_{s=1}^{r_f} \alpha_s b_s$ — разложение произвольного элемента $f \in \mathcal{A}$ по базису $\mathfrak{B}$, то $\eta(f) = \max\limits_{s=1,\ldots,r_f} \eta(b_s)$, здесь максимум также берется относительно порядка $\prec$.

Будем называть $\eta(f)$ *нормой* элемента f.

Из свойств N1—N5 нормы сразу вытекает следующее простое утверждение:

Лемма 2.1.7. *Если* $\eta(f) = \eta(g) = \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$, *то существуют такие ненулевые* $\alpha, \beta \in k$, *что* $\eta(\alpha f + \beta g) \prec \mathbf{t}$.

Доказательство. В силу свойства N4 разложение произвольного элемента h алгебры $\mathcal{A}$ по базису $\mathfrak{B}$ содержит единственный элемент базиса, норма которого совпадает с нормой самого h. Поскольку нормы f и g равны, то такой элемент базиса у них общий. Обозначим его через b. Тогда $f = \beta b + f'$, $g = \alpha b + g'$, где $\eta(f') \prec \eta(f) = \mathbf{t}$, $\eta(g') \prec \eta(g) = \mathbf{t}$, а α, β — ненулевые элементы поля k. По свойству N2

$$\eta(f' - g') \preceq \max\{\eta(f'), \eta(g')\} \prec \mathbf{t},$$

т. е. для линейной комбинации $\alpha f - \beta g$ имеем

$$\eta(\alpha f - \beta g) = \eta(\alpha\beta b + f' - \beta\alpha b + g') = \eta(f' - g') \prec \mathbf{t}.$$

Лемма доказана. □

Пусть f — произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A}$, и пусть $f = \sum\limits_{s=1}^{r_f} \alpha_s b_s$ — его разложение в базисе $\mathfrak{B}$. Определим отображение ρ алгебры $\mathcal{A}$ в множество $\mathbb{N}_0^n$, связанное с нормой η:

$$\rho(f) = \max_{s=1,\dots,r_f} |\eta(b_s)|.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства этого отображения.

Лемма 2.1.8. *Отображение ρ обладает следующими свойствами:*

1) *$\rho(\alpha f) = \rho(f)$ для всех ненулевых $f \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in k^*$;*
2) *для всех ненулевых элементов $f, g \in \mathcal{A}$ выполнено неравенство $\rho(f+g) \preceq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$, где максимум берется относительно порядка $\prec$, причем строгое неравенство возможно только при $\rho(f) = \rho(g)$;*
3) *если $f = \sum\limits_{s=1}^{r_f} \alpha_s b_s$ в базисе $\mathfrak{B}$, то*
$$\rho(f) = \max_{s=1,\dots,r_f} \rho(b_s),$$
где максимум берется относительно порядка $\prec$;
4) *$|\eta(f)| \preceq \rho(f)$ для любого ненулевого $f \in \mathcal{A}$;*
5) *пусть фиксирован кортеж $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$ и M — такое подмножество алгебры $\mathcal{A}$, что для всех $f \in M$ верно неравенство $\rho(f) \preceq \mathbf{d}$. Тогда множество норм элементов M конечно;*
6) *множество элементов базиса $\mathfrak{B}$ с фиксированной полунормой конечно.*

Доказательство.

Свойства 1), 2) непосредственно следуют из определения.

3) Из определения отображения ρ следует, что $\rho(b) = |\eta(b)|$ для любого $b \in \mathfrak{B}$. Отсюда $\rho(f) = \max\limits_{s=1,\dots,r_f} |\eta(b_s)| = \max\limits_{s=1,\dots,r_f} \rho(b_s)$.

4) $|\eta(f)| = |\max\limits_{s=1,\dots,r_f} \eta(b_s)| \preceq \max\limits_{s=1,\dots,r_f} |\eta(b_s)| = \rho(f)$.

5) Из 4) получаем $|\eta(f)| \preceq \rho(f) \preceq \mathbf{d}$ для всех $f \in M$. Для доказательства утверждения теперь достаточно использовать лемму 2.1.5.

6) Утверждение следует из 5) и свойства N4 нормы.

Лемма полностью доказана. □

Определение 2.1.9. Будем называть отображение ρ *полунормой*, согласованной с нормой η, если оно удовлетворяет следующему свойству: $\rho(fg) \preceq \rho(f) + \rho(g)$ для всех ненулевых $f, g \in \mathcal{A}$.

2.2. Примеры. В этом разделе приводятся наиболее важные для нас примеры алгебр, обладающих нормой и согласованной с ней полунормой.

Как и ранее, обозначение $\prec$ является общим для порядка $\prec_{l.}$ и порядка $\prec_{i.l.}$. Все утверждения настоящего раздела верны в обоих случаях.

2.2.1. Алгебры квантовых многочленов. Пусть k — основное поле, и пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Q,n,r} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n] —$$

некоторая алгебра квантовых многочленов.

Утверждение 2.2.1. *Множество*

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{L}} = \{X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n} \mid (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{N}_0^{n-r}\}$$

является базисом алгебры $\mathcal{L}$ как линейного пространства.

Доказательство. Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{L}$ видно, что всякий элемент $X_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots X_{i_s}^{\varepsilon_s}$, где все ε_i равны ± 1, однозначно представим в виде $\alpha X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$ при некоторых целых $t_1, \dots, t_n$ и $\alpha \in k^*$. Поэтому всякий элемент f алгебры $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации элементов вида $X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$, т. е. $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$ является базисом алгебры $\mathcal{L}$ как линейного пространства над k.

Утверждение доказано. □

В дальнейшем элементы базиса $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$ будем называть *мономами* и для краткости писать $X^{\mathbf{t}}$ вместо $X_1^{t_1}\dots X_n^{t_n}$, где $\mathbf{t}$, как обычно, обозначает $(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{Z}^n$. Кортеж $\mathbf{t}$ будем называть *степенью* монома $X^{\mathbf{t}}$.

Введем нормирование на $\mathcal{L}$, связанное с порядком $\succ$.

Определение 2.2.2. *Нормой* $\eta_{\mathcal{L}}(f)$ *произвольного ненулевого многочлена* f *из* $\mathcal{L}$ *будем называть кортеж из* $\mathbb{Z}^n$, *являющийся максимальным (относительно* $\prec$*) в множестве степеней мономов, входящих в* f.

Иными словами, если $f=\sum\limits_{s=1}^{r_f}\alpha_s b_s$, $\alpha_s\in k^*$, $b_s\in\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$, — разложение элемента f по базису $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$, то

$$\eta_{\mathcal{L}}(f)=\max_{s=1,\dots,r_f}\eta_{\mathcal{L}}(b_s),$$

где максимум берется относительно порядка $\prec$.

Утверждение 2.2.3. *Норма* $\eta_{\mathcal{L}}$ *удовлетворяет свойствам* N1—N5*, если в качестве соответствующего базиса* $\mathfrak{B}$ *взять мономиальный базис* $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Свойства N1, N4, N5 следуют непосредственно из определения.

Свойство N2 следует из определения нормы $\eta_{\mathcal{L}}$ и того, что мономы, входящие в разложение суммы $f+g$ по базису $\mathfrak{B}_{\mathcal{L}}$, — это либо мономы, входящие в разложение элемента f, либо мономы, входящие в разложение элемента g.

Для проверки свойства N3, во-первых, заметим, что если f и g пропорциональны некоторым мономам, то для них указанное свойство выполнено, так как степень произведения мономов равна сумме их степеней. Далее, любой моном из fg является произведением монома m_1 из f и монома m_2 из g. Поэтому степень монома из fg — это сумма кортежей $\mathbf{t}_1=\eta(m_1)$ и $\mathbf{t}_2=\eta(m_2)$. В силу свойств 1), 2) порядка $\succ$ моном максимальной степени из fg — это произведение монома максимальной степени из f и монома максимальной степени из g. Отсюда норма произведения fg есть сумма норм f и g.

Утверждение полностью доказано. □

Итак, отображение $\eta_{\mathcal{L}}$ действительно является нормой в смысле определения 2.1.6.

Поэтому мы можем определить соответствующее отображение $\rho_{\mathcal{L}}$. Для ненулевого многочлена f значение отображения $\rho_{\mathcal{L}}$ — это кортеж из $\mathbb{N}_0^n$, являющийся максимальным (относительно порядка $\succ$) в множестве абсолютных значений степеней мономов, входящих в f.

Утверждение 2.2.4. *Отображение* $\rho_{\mathcal{L}}$ *удовлетворяет свойству*

$$\rho_{\mathcal{L}}(fg)\preceq\rho_{\mathcal{L}}(f)+\rho_{\mathcal{L}}(g),$$

т. е. является полунормой, согласованной с нормой $\eta_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Любой моном из fg является произведением монома m_1 из f и монома m_2 из g. Поэтому степень монома из fg это сумма степени $\mathbf{t}_1$ некоторого монома из f и степени $\mathbf{t}_2$ некоторого монома из g. По утверждению 2.1.4 $|\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2|\preceq|\mathbf{t}_1|+|\mathbf{t}_2|$. Поэтому

$$\max_{\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2}(|\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2|)\preceq\max_{\mathbf{t}_1}\{|\mathbf{t}_1|\}+\max_{\mathbf{t}_2}\{|\mathbf{t}_2|\}.$$

Утверждение доказано. □

Итак, мы доказали

Утверждение 2.2.5. *Алгебра* $\mathcal{L}$ *обладает нормой и согласованной с ней полунормой в смысле определений* 2.1.6, 2.1.9.

2.2.2. Алгебры, фильтрованные по полугруппе $\mathbb{N}_0^n$. Напомним некоторые определения.

Пусть S — полугруппа, линейно упорядоченная относительно некоторого порядка $\prec$.

Определение 2.2.6. *Фильтрованной по полугруппе S алгеброй* называется алгебра $\mathcal{A}$, в которой выделены подпространства $\mathcal{A}_\mu$, индексированные элементами полугруппы S таким образом, что $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_\lambda$ при $\mu \prec \lambda$ и $\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{A}_{\mu+\lambda}$ для всех $\mu, \lambda \in S$.

Определение 2.2.7. Алгеброй, *ассоциированной* с фильтрованной по полугруппе S алгеброй $\mathcal{A}$, называется градуированная по полугруппе S алгебра

$$\operatorname{gr} \mathcal{A} = \bigoplus_{\mu \in S} \bar{\mathcal{A}}_\mu,$$

где $\bar{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{A}_\mu / \sum\limits_{\lambda \prec \mu} \mathcal{A}_\lambda$, а произведение элементов $\bar{x} \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ и $\bar{y} \in \bar{\mathcal{A}}_\lambda$ определяется по формуле $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$, где x, y — представители смежных классов $\bar{x}$, $\bar{y}$, а $\overline{xy}$ — смежный класс по подпространству $\sum\limits_{\nu \prec \mu+\lambda} \mathcal{A}_\nu$, порожденный элементом $xy \in \mathcal{A}_{\mu+\lambda}$.

Рассмотрим в качестве полугруппы S полугруппу $S_n = \mathbb{N}_0^n$ с одним из введенных в 2.1.1 порядков. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{Q,n}$ — алгебра, фильтрованная по S_n, для которой

$$\operatorname{gr} \mathcal{A}_{Q,n} = \mathcal{L}_{Q,n,0} = \bigoplus_{\mathbf{t} \in S_n} \mathcal{L}_{\mathbf{t}},$$

где $\mathcal{L}_{\mathbf{t}}$ — подпространство, порожденное мономом $X^{\mathbf{t}}$. До конца этого пункта $\mathcal{A}$ всегда обозначает алгебру $\mathcal{A}_{Q,n}$.

В силу свойства 4) порядка $\prec$ множество подпространств $\mathcal{A}_{\mathbf{d}}$, для которых $\mathbf{d} \prec \mathbf{t}$, конечно. То есть в нем существует максимальный элемент, и следовательно, существует такой кортеж $\mathbf{t}'$, что $\mathcal{A}_{\mathbf{t}'} = \sum\limits_{\mathbf{d} \prec \mathbf{t}} \mathcal{A}_{\mathbf{d}}$. Отсюда

$$\operatorname{gr} \mathcal{A} = \bigoplus_{\mathbf{t} \in S_n} \mathcal{A}_{\mathbf{t}} / \mathcal{A}_{\mathbf{t}'} = \bigoplus_{\mathbf{t} \in S_n} \mathcal{L}_{\mathbf{t}}.$$

Таким образом, $\mathcal{A}_{\mathbf{t}} / \mathcal{A}_{\mathbf{t}'} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}}$.

Для произвольного ненулевого элемента $f \in \mathcal{A}$ можно единственным образом определить такой кортеж $\mathbf{t}_f$, что $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}_f}$ и $f \notin \mathcal{A}_{\mathbf{t}'_f}$.

Определение 2.2.8. Кортеж $\mathbf{t}_f$ будем называть *нормой* элемента f.

Для каждого фактор-пространства $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}$ фиксируем такой элемент $b_{\mathbf{t}}$, что $b_{\mathbf{t}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}}$, $b_{\mathbf{t}} \notin \mathcal{A}_{\mathbf{t}'}$. Поскольку $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}}$ одномерно, то $\bar{b}_{\mathbf{t}}$ порождает $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}$.

Утверждение 2.2.9. *Множество $\mathfrak{B} = \{b_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in S_n}$ является базисом алгебры $\mathcal{A}$ как линейного пространства.*

Доказательство. Пусть f — произвольный ненулевой элемент алгебры $\mathcal{A}$ с нормой $\mathbf{t}_f = \mathbf{t}$. В силу того, что элемент $\bar{b}_{\mathbf{t}}$ является базисом фактор-пространства $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}$, существует единственный коэффициент $\alpha \in k^*$, такой что $f - \alpha b_{\mathbf{t}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}'}$. Продолжая процесс, получим разложение по базису $\mathfrak{B}$. Процесс закончится, так как норма остатка строго уменьшается, а по лемме 2.1.2 в $\mathbb{N}_0^n$ не существует бесконечной убывающей относительно $\prec$ цепочки элементов. Разложение единственно по построению.

Утверждение доказано. □

Утверждение 2.2.10. *Отображение $f \mapsto \mathbf{t}_f$ является нормой в смысле определения* 2.1.6.

Доказательство. Докажем, что свойства N1—N5 нормы выполнены.

Свойство N1 следует из определения.

N2. Пусть $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}_f}$, $f \notin \mathcal{A}_{\mathbf{t}'_f}$ и $g \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}_g}$, $g \notin \mathcal{A}_{\mathbf{t}'_g}$, и пусть для определенности $\mathbf{t}_f \preceq \mathbf{t}_g$. Из определения фильтрации следует, что $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}_f} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{t}_g}$, отсюда, поскольку $\mathcal{A}_{\mathbf{t}}$ — линейное пространство для любого $\mathbf{t}$, сумма $f + g$ лежит в $\mathcal{A}_{\mathbf{t}_g} = \mathcal{A}_{\max\{\mathbf{t}_f, \mathbf{t}_g\}}$.

N3. Пусть f и g — элементы, определенные в предыдущем пункте. Очевидно, $\eta_{\mathcal{L}}(\bar{f}) = \mathbf{t}_f$ и $\eta_{\mathcal{L}}(\bar{g}) = \mathbf{t}_g$. По определению ассоциированной градуированной алгебры $\bar{f}\bar{g} = \overline{fg}$. Отсюда $\mathbf{t}_{fg} = \eta_{\mathcal{L}}(\overline{fg}) = \eta_{\mathcal{L}}(\bar{f}) + \eta_{\mathcal{L}}(\bar{g}) = \mathbf{t}_f + \mathbf{t}_g$.

Для доказательства свойств N4, N5 в качестве подходящего базиса алгебры $\mathcal{A}$ возьмем базис $\mathfrak{B}$.

Свойство N4 следует из определения базиса $\mathfrak{B}$.

N5. Пусть $f = \sum\limits_{s=1}^{N_f} \alpha_s b_s$, где $\alpha_s \in k$, $b_s \in \mathfrak{B}$, — разложение элемента f по базису $\mathfrak{B}$. По уже доказанным свойствам N1, N2 выполнено неравенство $\mathbf{t}_f \preceq \max\limits_{s=1,\ldots,N_f} \mathbf{t}_{b_s}$. Пусть для определенности $\max\limits_{s=1,\ldots,N_f} \mathbf{t}_{b_s} = \mathbf{t}_{b_1}$. По свойству N4 нормы различных элементов базиса различны, т. е. $\mathbf{t}_{b_s} \prec \mathbf{t}_{b_1}$ для $s \neq 1$. Отсюда $b_s \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}'_{b_1}} \subset \mathcal{A}_{\mathbf{t}_{b_1}}$ при $s \neq 1$ и $b_1 \notin \mathcal{A}_{\mathbf{t}'_{b_1}}$, $b_1 \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}_{b_1}}$, поэтому $f = \sum\limits_{s=1}^{N_f} \alpha_s b_s \notin \mathcal{A}_{\mathbf{t}'_{b_1}}$, но $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}_{b_1}}$, т. е. $\mathbf{t}_f = \mathbf{t}_{b_1}$.

Утверждение полностью доказано. □

Итак, отображение $\eta(f) = \mathbf{t}_f$ является нормой в смысле определения 2.1.6 и, следовательно, мы можем определить соответствующее отображение ρ. Легко заметить, что в данном случае $\rho(f) = \eta(f)$, т. е.

$$\rho(fg) = \eta(fg) = \eta(f) + \eta(g) = \rho(f) + \rho(g),$$

а значит, верно

Утверждение 2.2.11. *Алгебра $\mathcal{A}$, фильтрованная по полугруппе $\mathbb{N}_0^n$, для которой $\operatorname{gr}\mathcal{A} = \mathcal{L}_{Q,n} = k_Q[X_1, \ldots, X_n]$, обладает нормой и согласованной с ней полунормой в смысле определений* 2.1.6, 2.1.9.

2.3. Теорема об алгебраической зависимости. В дальнейшем будем предполагать, что $\mathcal{A}$ — некоторая ассоциативная алгебра без делителей нуля, обладающая нормой η и согласованной с ней полунормой ρ.

Рассмотрим произвольную подалгебру $\mathcal{P}$ алгебры $\mathcal{A}$. Разобьем $\mathcal{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества следующим образом. Пусть $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$. Через $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$ обозначим множество всех тех элементов $\mathcal{P}$, полунорма которых равна $\mathbf{t}$.

Обозначим через $\nu_{\mathbf{t}}(p)$ проекцию элемента $p \in \mathcal{A}$ на конечномерное векторное пространство, порожденное элементами $\{b \in \mathfrak{B} \mid \rho(b) = \mathbf{t}\}$. Поскольку образ проекции $\nu_{\mathbf{t}}(\mathcal{P})$ является конечномерным векторным пространством, в нем можно выбрать конечный базис.

Определение 2.3.1. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^r$ — произвольный базис векторного пространства $\nu_{\mathbf{t}}(\mathcal{P})$. Всякую систему $\{h_i\}_{i=1}^r$, где $h_i \in \nu_{\mathbf{t}}^{-1}(e_i)$, будем называть *базой* подмножества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$.

Рассмотрим некоторую базу $\{h_i\}_{i=1}^r$ множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$. В силу пункта 5 леммы 2.1.8 множество норм элементов $\nu_{\mathbf{t}}^{-1}(\nu_{\mathbf{t}}(h_i))$ конечно, т. е. мы можем выбрать из множества $\nu_{\mathbf{t}}^{-1}(\nu_{\mathbf{t}}(h_i))$ элемент с минимальной нормой. Обозначим такой элемент h'_i. Очевидно, что система $\{h'_i\}_{i=1}^r$ снова является базой $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$.

Определение 2.3.2. Преобразование $\{h_i\}_{i=1}^r \to \{h'_i\}_{i=1}^r$ будем называть *преобразованием* базы *первого рода*.

Пусть снова $\{h_i\}_{i=1}^r$ — база множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$. И пусть $\eta(h_j) = \eta(h_l)$ для некоторых $1 \leqslant j < l \leqslant r$. Тогда согласно лемме 2.1.7 найдутся такие ненулевые коэффициенты $\beta_1, \beta_2 \in k$, что $\eta(\beta_1 h_j + \beta_2 h_l) \prec \eta(h_j)$. Поскольку система

$$\{e_1, \ldots, e_{j-1}, \beta_1 e_j + \beta_2 e_l, \ldots, e_r\}$$

является базисом пространства $\nu_{\mathbf{t}}(\mathcal{P})$, то система

$$\{h_1, \ldots, h_{j-1}, \beta_1 h_j + \beta_2 h_l, \ldots, h_r\}$$

является базой множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$.

Определение 2.3.3. Преобразование

$$\{h_i\}_{i=1}^r \to \{h_1, \ldots, h_{j-1}, \beta_1 h_j + \beta_2 h_l, \ldots, h_r\}$$

будем называть *преобразованием* базы *второго рода*.

Утверждение 2.3.4. *Существует база $\{h_i\}_{i=1}^r$ множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$, обладающая следующими свойствами:*

$(*)$ *нормы h_i различны;*

$(**)$ $\eta(h_i) \preceq \eta(h)$ *для всякого* $h \in \nu_{\mathbf{t}}^{-1}(\nu_{\mathbf{t}}(h_i))$.

Доказательство. Пусть $\{h_i\}_{i=1}^r$ — произвольная база множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$. Применяя к ней преобразование первого рода, получим базу $\{h_i^0\}_{i=1}^r$, удовлетворяющую свойству $(**)$.

Пусть элементы базы $\{h_i^0\}_{i=1}^r$ упорядочены по возрастанию норм, т. е. $\eta(h_i^0) \preceq \eta(h_{i+1}^0)$ для всех $i = 1, \ldots, r-1$. Если все неравенства между нормами строгие, то $\{h_i^0\}_{i=1}^r$ — искомая база. Иначе существует такое $2 \leqslant j \leqslant r$, что $\eta(h_i^0) \prec \eta(h_{i+1}^0)$ для $i = j, \ldots, r-1$ и $\eta(h_{j-1}^0) = \eta(h_j^0)$, поэтому к базе $\{h_i^0\}_{i=1}^r$ можно применить преобразование второго рода, т. е. элемент h_{j-1}^0 заменить на элемент $\beta_1 h_{j-1}^0 + \beta_2 h_j^0$. Далее, снова применяя к построенной базе преобразование первого рода, получим базу $\{h_i^1\}_{i=1}^r$. Очевидно, что при переходе от базы $\{h_i^0\}_{i=1}^r$ к базе $\{h_i^1\}_{i=1}^r$ изменился лишь элемент с номером $j-1$, причем норма его уменьшилась, т. е. $\eta(h_i^1) \prec \eta(h_{i+1}^1)$ для $i = j-1, \ldots, r-1$ и $\eta(h_i^1) \prec \eta(h_j^1)$ для $i = 1, \ldots, j-1$. Таким образом, если переупорядочить элементы базы $\{h_i^1\}_{i=1}^r$ по возрастанию норм, то индекс j', такой что $\eta(h_i^1) \prec \eta(h_{i+1}^1)$ для $i = j', \ldots, r-1$ и $\eta(h_{j'-1}^1) = \eta(h_{j'}^1)$, если он существует, строго меньше индекса j. Кроме того, база $\{h_i^1\}_{i=1}^r$ по построению удовлетворяет свойству $(**)$.

Аналогичным образом, применяя преобразования второго и первого рода, получим базу $\{h_i^2\}_{i=1}^r$, удовлетворяющую свойству $(**)$, для которой индекс j'' будет строго меньше индекса j'. Далее, строя таким же образом базы $\{h_i^3\}_{i=1}^r, \ldots$, получим базу $\{h_i^s\}_{i=1}^r$, удовлетворяющую свойству $(**)$, для которой все неравенства между нормами элементов будут строгими, т. е. удовлетворяющую еще и свойству $(*)$.

Утверждение доказано. ☐

Для каждого $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$ зафиксируем базу $\{h_i^{\mathbf{t}}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}}$ множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$, удовлетворяющую свойствам $(*)$ и $(**)$ из условия утверждения 2.3.4. Пусть $\{h_i^{\mathbf{t}_1}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}_1}}$, $\{h_i^{\mathbf{t}_2}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}_2}}$ — две такие базы, причем $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$.

Лемма 2.3.5. *При любых $i = 1, \ldots, r_{\mathbf{t}_1}$ и $j = 1, \ldots, r_{\mathbf{t}_2}$ нормы элементов $h_i^{\mathbf{t}_1}$ и $h_j^{\mathbf{t}_2}$ различны.*

Доказательство. Предположим, что для некоторых индексов i, j нормы элементов $h_i^{\mathbf{t}_1}$, $h_j^{\mathbf{t}_2}$ равны. Пусть для определенности $\mathbf{t}_1 \prec \mathbf{t}_2$. Тогда по лемме 2.1.7 существует такое ненулевое $\beta \in k$, что $\eta(\beta h_i^{\mathbf{t}_1} + h_j^{\mathbf{t}_2}) \prec \eta(h_j^{\mathbf{t}_2})$.

Элемент $h = \beta h_i^{\mathbf{t}_1} + h_j^{\mathbf{t}_2}$ лежит в $\mathcal{P}_{\mathbf{t}_2}$. В самом деле, в силу утверждения 2 леммы 2.1.8 $\rho(h) = \rho(\beta h_i^{\mathbf{t}_1} + h_j^{\mathbf{t}_2}) = \rho(h_j^{\mathbf{t}_2}) = \mathbf{t}_2$, поскольку $\rho(h_i^{\mathbf{t}_1}) = \mathbf{t}_1 \prec \mathbf{t}_2 = \rho(h_j^{\mathbf{t}_2})$.

Кроме того, $\nu_{\mathbf{t}_2}(h) = \nu_{\mathbf{t}_2}(h_j^{\mathbf{t}_2})$, т. е. база $\{h_i^{\mathbf{t}_2}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}_2}}$ не удовлетворяет свойству $(**)$, что противоречит выбору этой базы.

Лемма доказана. ☐

Совокупность элементов баз $\{h_i^{\mathbf{t}}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}}$ для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$ назовем базой множества $\mathcal{P}$. Будем обозначать эту совокупность $\mathcal{B}$. Предыдущая лемма, таким образом, утверждает, что все элементы базы $\mathcal{B}$ имеют различные нормы.

Утверждение 2.3.6. *Всякий элемент из $\mathcal{P}$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов базы $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент p подалгебры $\mathcal{P}$. Будем вести доказательство индукцией по полунорме p.

Пусть $\rho(p) = \mathbf{t}$. По предположению индукции все элементы $\mathcal{P}$ с полунормой, меньшей $\mathbf{t}$, представимы в виде линейной комбинации элементов базы $\mathcal{B}$.

Поскольку система $\{h_i^{\mathbf{t}}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}}$ является базой для $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$, то

$$\nu_{\mathbf{t}}(p) = \sum_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}} \alpha_i \nu_{\mathbf{t}}(h_i^{\mathbf{t}}) = \nu_{\mathbf{t}}\biggl(\sum_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}} \alpha_i h_i^{\mathbf{t}}\biggr).$$

Поэтому $\rho\Bigl(p - \sum\limits_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}} \alpha_i h_i^{\mathbf{t}}\Bigr) \prec \rho(p)$. Далее, используя индуктивное предположение, получаем искомый результат.

Утверждение доказано. □

Утверждение 2.3.6 и то свойство, что нормы различных элементов базы $\mathcal{B}$ различны, дают такое простое следствие.

Следствие 2.3.7. *Норма любого элемента подалгебры $\mathcal{P}$ совпадает с нормой некоторого элемента базы $\mathcal{B}$.*

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех норм элементов $\mathcal{P}$. В силу следствия 2.3.7 и того, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, множество $\mathcal{N}$ совпадает с множеством всех норм элементов базы $\mathcal{B}$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ подмодуль $\mathbb{Z}^n$, порожденный множеством $\mathcal{N}$. Пусть ранг модуля $\mathcal{M}$ равен m.

Теорема 2.3.8. *Всякая система из $m+1$ элемента подалгебры $\mathcal{P}$ алгебраически зависима. Именно, для любых $p_1, \dots, p_{m+1} \in \mathcal{P}$ существует такой многочлен*

$$F(x_1, \dots, x_{m+1}) \in k[x_1, \dots, x_{m+1}],$$

что

$$F(p_1, \dots, p_{m+1}) = 0.$$

Доказательство. Для произвольного $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$ рассмотрим множество $\psi_{\mathbf{d}}$ всевозможных произведений $\pi = p_1^{l_1} \dots p_{m+1}^{l_{m+1}}$ с неотрицательными степенями l_i, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m+1} l_i \rho(p_i) \preceq \mathbf{d}.$$

Множество $\psi_{\mathbf{d}}$ лежит в $\mathcal{P}$, поэтому всякий его элемент может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации элементов базы $\mathcal{B}$:

$$\pi = \sum_{\substack{|\eta(h)| \preceq \rho(\pi),\\ h \in \mathcal{B}}} \beta_h h, \quad \beta_h \in k.$$

Рассмотрим множество $\phi_{\mathbf{d}}$ всех элементов $h \in \mathcal{B}$, входящих в линейное разложение какого-либо элемента $\pi \in \psi_{\mathbf{d}}$.

Для любого $h \in \phi_{\mathbf{d}}$ выполнено неравенство

$$|\eta(h)| \preceq \rho(\pi) \preceq \sum_{i=1}^{m+1} l_i \rho(p_i) \preceq \mathbf{d}.$$

Заметим, что поскольку модуль $\mathcal{M}$ имеет ранг m, то существует такой многочлен $P_m \in \mathbb{R}[x]$ m-й степени от x с действительными коэффициентами, что мощность пересечения $\mathcal{M}$ с множеством элементов $\mathbb{Z}^n$, абсолютные значения которых ограничены сверху элементом $\mathbf{d}$, ограничивается сверху значением многочлена P_m от $\sigma(\mathbf{d})$. Поскольку $\eta(\phi_{\mathbf{d}})$ является подмножеством этого пересечения и нормы всех элементов $\phi_{\mathbf{d}}$ различны, то

$$\operatorname{card} \phi_{\mathbf{d}} = \operatorname{card} \eta(\phi_{\mathbf{d}}) \leqslant P_m(\sigma(\mathbf{d})).$$

Теперь оценим снизу мощность $\psi_{\mathbf{d}_s}$, где $\mathbf{d}_s = s \sum\limits_{i=1}^{m+1} \rho(p_i)$. Все кортежи $(l_1, \dots, l_{m+1}) \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, у которых $l_i \leqslant s$ для любого $i = 1, \dots, m+1$, удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m+1} l_i \rho(p_i) \preceq \mathbf{d}_s.$$

Количество таких кортежей равно

$$s^{m+1} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{d}_s)}{\sum\limits_{i=1}^{m+1} \sigma(\rho(p_i))} \right)^{m+1} = P_{m+1}(\sigma(\mathbf{d}_s)),$$

то есть мощность множества $\psi_{\mathbf{d}_s}$ ограничена снизу значениями многочлена $(m+1)$-й степени от $\sigma(\mathbf{d}_s)$:

$$\operatorname{card} \psi_{\mathbf{d}_s} \geqslant P_{m+1}(\sigma(\mathbf{d}_s)),$$

где $P_{m+1}(x)$ — многочлен $(m+1)$-й степени от x с действительными коэффициентами.

Поэтому для некоторого $\mathbf{d}_s$

$$\operatorname{card} \phi_{\mathbf{d}_s} \leqslant P_m(\sigma(\mathbf{d}_s)) < P_{m+1}(\sigma(\mathbf{d}_s)) \leqslant \operatorname{card} \psi_{\mathbf{d}_s}.$$

Это означает, что элементы множества $\psi_{\mathbf{d}_s}$ линейно зависимы, поскольку являются линейными комбинациями символов $h \in \phi_{\mathbf{d}_s}$ в количестве, меньшем мощности $\psi_{\mathbf{d}_s}$.

Итак, мы нашли равную нулю линейную комбинацию произведений элементов $p_1, \ldots, p_{m+1}$ вида $p_1^{l_1} \ldots p_{m+1}^{l_{m+1}}$, где степени l_i неотрицательны.

Теорема доказана. □

2.4. Основные следствия. Пусть заданы попарно коммутирующие, алгебраически независимые элементы $g_1, \ldots, g_m$ алгебры $\mathcal{A}$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{P} = \{p(g_1, g_2, \ldots, g_m) \mid p \in k[x_1, x_2, \ldots, x_m],\ m \in \mathbb{N}_0\}$$

полиномов от этих элементов.

Это множество, очевидно, является подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому к нему применима теорема 2.3.8.

Утверждение 2.4.1. *Существует система $p_1, \ldots, p_m$ многочленов от g_i, $i = 1, \ldots, m$, нормы которых образуют линейно независимую систему.*

Доказательство. Из теоремы 2.3.8 и алгебраической независимости элементов $g_1, \ldots, g_m$ следует, что ранг модуля $\mathcal{M}$, порожденного нормами элементов $\mathcal{P}$, не может быть меньше m. Осталось заметить, что если ранг модуля $\mathcal{M}$ равен l, то существует система многочленов $p_1, \ldots, p_l$, нормы которых образуют линейно независимую систему.

Утверждение доказано. □

Определение 2.4.2. Элементы b_1, b_2 базиса $\mathfrak{B}$, удовлетворяющие неравенству $\eta([b_1, b_2]) \prec \eta(b_1) + \eta(b_2)$, будем называть *псевдокоммутирующими.*

Лемма 2.4.3. *Пусть два элемента $f, g \in \mathcal{A}$ с нормами $\eta(f) = \mathbf{t}_1$ и $\eta(g) = \mathbf{t}_2$ коммутируют между собой. Тогда базисные элементы b_1, b_2, для которых $\eta(b_1) = \mathbf{t}_1$ и $\eta(b_2) = \mathbf{t}_2$, являются псевдокоммутирующими.*

Доказательство. Пусть $f = f' + \alpha b_1$, $g = g' + \beta b_2$, где $\eta(f') \prec \eta(f)$ и $\eta(g') \prec \eta(g)$. Из коммутативности f и g следует, что

$$0 = [f, g] = [f', g'] + [\alpha b_1, g'] + [f', \beta b_2] + \alpha\beta[b_1, b_2],$$

т. е.

$$\alpha\beta[b_1, b_2] = [g', f'] + [g', \alpha b_1] + [\beta b_2, f'].$$

Далее из свойств N1—N3 нормы получаем

$$\eta([b_1, b_2]) = \eta([g', f'] + [g', \alpha b_1] + [\beta b_2, f']) \prec \eta(f) + \eta(g).$$

Откуда

$$\eta([b_1, b_2]) \prec \eta(f) + \eta(g) = \eta(b_1) + \eta(b_2).$$

Лемма доказана. □

Определение 2.4.4. Элементы базиса $\mathfrak{B}$, имеющие линейно независимые нормы, будем называть *независимыми*.

Теорема 2.4.5. *Максимальное количество N алгебраически независимых коммутирующих друг с другом элементов алгебры $\mathcal{A}$ не превышает максимального количества M независимых псевдокоммутирующих друг с другом элементов базиса $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $g_1, \ldots, g_N$ — максимальная система алгебраически независимых, попарно коммутирующих элементов алгебры $\mathcal{A}$.

По утверждению 2.4.1 существует такая система $p_1, \ldots, p_N$ многочленов от элементов $g_1, \ldots, g_N$, что нормы $p_1, \ldots, p_N$ линейно независимы.

Так как $g_1, \ldots, g_N$ — система коммутирующих элементов, то многочлены $p_1, \ldots, p_N$ попарно коммутируют. Следовательно, по лемме 2.4.3 базисные элементы $b_1, \ldots, b_N$, где $\eta(b_1) = \eta(p_1), \ldots, \eta(b_N) = \eta(p_N)$, являются попарно псевдокоммутирующими и имеют линейно независимые нормы.

Теорема доказана. □

Пусть A — k-алгебра. Обозначим через $\mathfrak{C}(A)$ множество подалгебр алгебры A, являющихся коммутативными областями целостности.

Следующее определение было введено Реско в [49, 3.1].

Определение 2.4.6. *Степень трансцендентности* алгебры A над k, обозначаемая $\mathrm{tr.\ deg.}(A/k)$, определяется следующим образом:

$$\mathrm{tr.\ deg.}(A/k) = \sup\{\mathrm{tr.\ deg.}(C/k) \mid C \supset k,\ C \in \mathfrak{C}(A)\}.$$

Здесь $\mathrm{tr.\ deg.}(C/k)$ означает степень трансцендентности поля частных подалгебры C над k.

В терминах данного определения теорема 2.4.5 формулируется следующим образом.

Теорема 2.4.7. *Степень трансцендентности N алгебры $\mathcal{A}$ не превышает максимального количества M независимых псевдокоммутирующих друг с другом элементов базиса $\mathfrak{B}$.*

3. Следствия и примеры

3.1. Коммутативные подалгебры алгебры квантовых многочленов.

3.1.1. Степень трансцендентности алгебры квантовых многочленов. Как было доказано в утверждении 2.2.5, алгебра $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ обладает нормой и согласованной с ней полунормой в смысле определений 2.1.6, 2.1.9. Следовательно, для $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ выполнена теорема 2.3.8.

Лемма 3.1.1. *В алгебре $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ псевдокоммутирующие мономы $X^{\mathbf{t}_1}$, $X^{\mathbf{t}_2}$ коммутируют друг с другом.*

Доказательство. По условию $\eta_{\mathcal{L}}([X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}]) \prec \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$.

Поскольку $X^{\mathbf{t}_1}X^{\mathbf{t}_2} = \alpha X^{\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2}$ и $X^{\mathbf{t}_2}X^{\mathbf{t}_1} = \beta X^{\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2}$, то для коммутанта получаем соотношение $[X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}] = (\alpha - \beta)X^{\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2}$, откуда $\alpha - \beta = 0$, т. е. $[X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}] = 0$.

Лемма доказана. □

Лемма 3.1.2. *В алгебре $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ попарно коммутирующие мономы, имеющие линейно независимые нормы, алгебраически независимы.*

Доказательство. Пусть мономы $X^{\mathbf{d}_1}, \ldots, X^{\mathbf{d}_s} \in \mathcal{L}_{Q,n,r}$ удовлетворяют условию леммы.

Если бы существовал такой многочлен $F(x_1, \ldots, x_s)$ от коммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_s$, что $F(X^{\mathbf{d}_1}, \ldots, X^{\mathbf{d}_s}) = 0$, то произведения вида $(X^{\mathbf{d}_1})^{i_1} \ldots (X^{\mathbf{d}_s})^{i_s}$, входящие в выражение $F(X^{\mathbf{d}_1}, \ldots, X^{\mathbf{d}_s})$, должны были бы сокращаться друг с другом. Но равенство $(X^{\mathbf{d}_1})^{i_1} \ldots (X^{\mathbf{d}_s})^{i_s} = (X^{\mathbf{d}_1})^{j_1} \ldots (X^{\mathbf{d}_s})^{j_s}$ в силу линейной независимости $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_s$ равносильно равенству $(i_1, \ldots, i_s) = (j_1, \ldots, j_s)$, поэтому многочлен F должен быть тождественным нулем.

Лемма доказана. □

В случае алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ теорема 2.4.5 может быть усилена следующим образом.

Теорема 3.1.3. *Максимальное количество N алгебраически независимых коммутирующих друг с другом элементов алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ совпадает с максимальным количеством M независимых коммутирующих друг с другом мономов из $\mathcal{L}_{Q,n,r}$.*

Доказательство. В силу леммы 3.1.2 $N \geqslant M$.

С другой стороны, поскольку по лемме 3.1.1 всякая система псевдокоммутирующих мономов является системой коммутирующих мономов, то по теореме 2.4.5 $N \leqslant M$.

Теорема доказана. □

Наконец, в терминах определения 2.4.6 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1.4. *Степень трансцендентности алгебры квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ совпадает с максимальным количеством алгебраически независимых коммутирующих друг с другом элементов мономиального базиса $\mathcal{L}_{Q,n,r}$.*

3.1.2. Мономиальные подалгебры и центр. Пусть G — некоторая подгруппа группы $\mathbb{Z}^n$. Рассмотрим ее подполугруппу $S = G \cap (\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{N}_0^{n-r})$.

Лемма 3.1.5. *Полугруппа S конечно порождена.*

Доказательство. Пусть r фиксировано. Доказательство будем вести индукцией по n.

Если n равно r, то полугруппа S совпадает с группой G, т. е. конечно порождена.

Пусть $n > r$, и предположим, что для всех $n' < n$ утверждение леммы верно.

Пусть S_0 обозначает полугруппу всех кортежей из S, последний элемент у которых равен 0. Из предположения индукции следует, что S_0 конечно порождена. Если S_0 совпадает с S, то все доказано.

Пусть S_0 является собственным подмножеством S. Рассмотрим такое минимальное неотрицательное a, что в S существует элемент $\mathbf{s}_1 = (\ldots, a)$, не принадлежащий S_0. Обозначим через S_1 полугруппу, порожденную S_0 и элементом $\mathbf{s}_1$. Аналогичным образом построим полугруппы S_m и соответствующие элементы $\mathbf{s}_m$.

Докажем, что когда-нибудь процесс построения цепочки полугрупп S_m оборвется.

Предположим, что этого не случилось. Тогда мы имеем бесконечную последовательность полугрупп S_m и соответствующих им элементов $\mathbf{s}_m$. Выберем из последовательности $\{\mathbf{s}_m\}$ подпоследовательность элементов $\{\mathbf{s}'_m\}$, у которых $(r+1)$-е координаты образуют неубывающую последовательность. Из последовательности $\{\mathbf{s}'_m\}$ выберем подпоследовательность элементов $\{\mathbf{s}''_m\}$, у которых $(r+2)$-е координаты образуют неубывающую последовательность, и т. д. Действуя таким образом, мы сможем выбрать такие два элемента $\mathbf{s}_{m_1}$ и $\mathbf{s}_{m_2}$, что $(r+i)$-я координата $\mathbf{s}_{m_2}$ не меньше $(r+i)$-й координаты $\mathbf{s}_{m_1}$ для всякого $i = 1, \ldots, n-r$. Отсюда следует, что кортеж $\mathbf{t} = \mathbf{s}_{m_2} - \mathbf{s}_{m_1}$ лежит в S. Поскольку $\mathbf{s}_{m_1}$ не лежит в S_0, последняя координата $\mathbf{t}$ строго меньше последней координаты $\mathbf{s}_{m_2}$, поэтому $\mathbf{t}$ и $\mathbf{s}_{m_1}$ лежат в S_{m_2-1}. Следовательно, $\mathbf{s}_{m_2} = \mathbf{s}_{m_1} + \mathbf{t}$ также лежит в S_{m_2-1}, что противоречит выбору $\mathbf{s}_{m_2}$.

Итак, последовательность $\{S_m\}$ конечна, т. е. для некоторого i полугруппа S_i совпадает с S. Таким образом, поскольку по построению всякая полугруппа S_m конечно порождена, то и S конечно порождена.

Лемма доказана. □

Рассмотрим алгебру квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,r}$.

Определение 3.1.6. Подалгебру алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, порожденную некоторым подмножеством мономиального базиса алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, будем называть *мономиальной*.

Пусть M_U — максимальное множество взаимно коммутирующих мономов из $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, коммутирующих с каждым многочленом из данного множества $U \subset \mathcal{L}_{Q,n,r}$.

Лемма 3.1.7. *Множество M_U конечно порождено как мультипликативная полугруппа.*

Доказательство. Рассмотрим естественное вложение алгебры

$$\mathcal{L}_{Q,n,r} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \ldots, X_n]$$

в алгебру квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$.

Обозначим через M'_U максимальное множество, содержащее M_U, состоящее из взаимно коммутирующих мономов из $\mathcal{L}_{Q,n,n}$, каждый из которых коммутирует со всеми многочленами из U. В силу своей максимальности множество M'_U является мультипликативной группой, поэтому множество норм элементов M'_U является подгруппой G группы $\mathbb{Z}^n$, а множество норм M_U является подполугруппой $S = G \cap (\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{N}_0^{n-r})$ группы G.

Требуемое утверждение следует из изоморфизма $S \cong M_U$ и леммы 3.1.5.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1.8. *Максимальная коммутативная подалгебра A алгебры квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, порожденная некоторым подмножеством мономиального базиса алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, конечно порождена.*

Доказательство. В силу своей максимальности, алгебра A содержит множество M_A — максимальное множество взаимно коммутирующих мономов из $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, коммутирующих со всеми многочленами из A, содержащее все мономы, лежащие в A. Поскольку A порождается множеством мономов, то A порождается M_A, откуда в силу предыдущей леммы следует искомое.

Теорема доказана. □

Лемма 3.1.9. *Пусть $f = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i m_i$ — разложение многочлена f по мономиальному базису алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, здесь $\alpha_i \in k$, m_i — некоторые мономы. Если f коммутирует с мономом m, то $[m_i, m] = 0$ для любого $i = 1, \ldots, s$.*

Доказательство. Выпишем коммутатор f и m:

$$[f, m] = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i [m_i, m].$$

Коммутаторы $[m_i, m]$ пропорциональны мономам с попарно различающимися степенями, так как степени мономов m_i попарно различны. Но мономы с различными степенями линейно независимы в $\mathcal{L}_{Q,n,r}$, поэтому все коммутаторы в указанной сумме равны нулю.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1.10. *Центр алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ является мономиальной подалгеброй. Более того, он порождается конечным числом мономов.*

Доказательство. Рассмотрим элемент центра алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ $f = \sum \alpha_i m_i$, где $\alpha_i \in k$, m_i — мономы. Так как f лежит в центре, то f коммутирует с любым мономом m, т. е. в силу леммы 3.1.9 $[m_i, m] = 0$ для всех i и для всех m. Но это означает, что все m_i лежат в центре, т. е. центр алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,r}$ порождается мономами. Множество мономов, лежащих в центре, совпадает с множеством $M_{\mathcal{L}_{Q,n,r}}$. Отсюда и из леммы 3.1.7 вытекает искомое утверждение.

Теорема доказана. □

3.1.3. Однопараметрический случай. Напомним некоторые сведения из теории знакопеременных билинейных форм. Пусть f — билинейная форма, определенная на $\mathbb{Z}^n$.

Определение 3.1.11. Билинейная форма f называется *знакопеременной*, если $f(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ для любого $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$.

Из определения знакопеременной формы сразу следует равенство

$$f(\mathbf{t}, \mathbf{d}) = -f(\mathbf{d}, \mathbf{t})$$

для всех $\mathbf{t}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$.

Определение 3.1.12. Подмодуль M модуля $\mathbb{Z}^n$ называется *вполне изотропным* относительно формы f, если $f(\mathbf{t}, \mathbf{d}) = 0$ для всех пар $\mathbf{t}, \mathbf{d} \in M$.

Определение 3.1.13. Подмодуль $M \subset \mathbb{Z}^n$ называется *ядром* формы f, если

$$M = \{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n \mid f(\mathbf{d}, \mathbf{t}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Ядро обозначается $(\mathbb{Z}^n)^{\perp}$.

Теорема 3.1.14. *Пусть $V = \mathbb{Z}^n$ для некоторого n, f — знакопеременная билинейная форма на V. Тогда существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$ модуля V и целое неотрицательное число $m \leqslant n/2$, что*

$$0 \neq f(e_i, e_{i+m}) = \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

причем α_i делит α_{i+1} при $i = 1, \ldots, m-1$, а в остальных случаях $f(e_i, e_j) = 0$. При этом ядро формы f — модуль $V^{\perp}$ — порождается элементами $e_{2m+1}, \ldots, e_n$. Кроме того, если $W \subset V$ — максимальный вполне изотропный подмодуль модуля V, то ранг W совпадает с $n - m$. Число $n - m$ является инвариантом знакопеременной формы f.

Доказательство. Теорема следует из известных теорем о приведении к каноническому виду знакопеременных форм, заданных на модуле над кольцом главных идеалов и знакопеременных форм, заданных на векторном пространстве над полем, а также из теоремы Витта (см., например, [16, гл. XIV, § 5, 9]). □

Определение 3.1.15. Ранг $n - m$ максимального вполне изотропного подмодуля модуля $\mathbb{Z}^n$ называется *индексом Витта* знакопеременной формы f.

Определение 3.1.16. Назовем алгебру квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ *однопараметрической*, если существует такое $q \in k^*$, что $q_{ij} = q^{a_{ij}}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и некоторых $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Свойства тел частных однопараметрических алгебр квантовых многочленов были изучены А. Н. Пановым в работе [19].

Отметим, что в литературе под однопараметрическим случаем часто понимается случай, когда $a_{ij} = 1$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (см., например, определения однопараметрических квантовых аффинных пространств и торов в [30]).

Далее будем предполагать, что q не является корнем из единицы.

Утверждение 3.1.17. *Матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ задает на $\mathbb{Z}^n$ знакопеременную билинейную форму*

$$\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{d}) = (t_1, \ldots, t_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Эта форма связана с законом коммутирования в $\mathcal{L}$ следующим образом: равенство $[X^{\mathbf{t}}, X^{\mathbf{d}}] = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{d}) = 0$.

Доказательство. Из свойств матрицы Q следует, что ее «логарифм» $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ является кососимметрической матрицей: $A^t + A = 0$. Поэтому билинейная форма $\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{d})$, задаваемая матрицей A на $\mathbb{Z}^n$, является знакопеременной.

Кроме того, $X^{\mathbf{t}} X^{\mathbf{d}} = \prod\limits_{i,j} q_{ij}^{t_i d_j} X^{\mathbf{d}} X^{\mathbf{t}}$, и так как

$$\prod_{i,j} q_{ij}^{t_i d_j} = \prod_{i,j} q^{a_{ij} t_i d_j} = q^{\sum\limits_{i,j} a_{ij} t_i d_j},$$

то $X^{\mathbf{t}} X^{\mathbf{d}} = q^{\sum\limits_{i,j} a_{ij} t_i d_j} X^{\mathbf{d}} X^{\mathbf{t}} = q^{\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{d})} X^{\mathbf{d}} X^{\mathbf{t}}$. Таким образом, $[X^{\mathbf{t}}, X^{\mathbf{d}}] = 0$ тогда и только тогда, когда $q^{\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{d})} = 1$. Это возможно лишь в случае $\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{d}) = 0$, поскольку, по нашему предположению, q не является корнем из единицы.

Утверждение доказано. □

Утверждение 3.1.18. *Каждой максимальной системе M независимых попарно коммутирующих мономов из алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,n}$ можно поставить в соответствие некоторый максимальный вполне изотропный относительно знакопеременной формы φ подмодуль модуля $\mathbb{Z}^n$, ранг которого будет равен мощности соответствующей системы мономов.*

Доказательство. Пусть система $M = \{X^{\mathbf{t}_1}, \dots, X^{\mathbf{t}_s}\}$ является максимальной системой независимых попарно коммутирующих мономов. Тогда в силу предыдущего утверждения подмодуль $W_M \subset \mathbb{Z}^n$, порожденный кортежами $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_s$ является вполне изотропным относительно формы φ подмодулем модуля $\mathbb{Z}^n$.

Обратно, если $W \subset \mathbb{Z}^n$ — вполне изотропный подмодуль модуля $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l$ — его базис, то система $\{X^{\mathbf{e}_1}, \dots, X^{\mathbf{e}_l}\}$ состоит из независимых попарно коммутирующих мономов. Поэтому если W_M не является максимальным, то содержащий его максимальный вполне изотропный подмодуль $\tilde{W}_M$ обладает базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l$, где $\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{e}_s = \mathbf{t}_s$, т. е. система $\{X^{\mathbf{e}_1}, \dots, X^{\mathbf{e}_l}\}$ является системой независимых попарно коммутирующих мономов и содержит в качестве собственного подмножества систему $M = \{X^{\mathbf{t}_1}, \dots, X^{\mathbf{t}_s}\}$, чего не может быть в силу максимальности M.

Утверждение доказано. □

Теорема 3.1.19. *Степень трансцендентности однопараметрической алгебры квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n}$ равна индексу Витта знакопеременной формы φ.*

Доказательство. Из теоремы 3.1.14 следует, что все максимальные вполне изотропные относительно формы φ подмодули модуля $\mathbb{Z}^n$ имеют одинаковые ранги, равные индексу Витта этой формы. Отсюда в силу утверждения 3.1.18 все максимальные системы независимых попарно коммутирующих мономов имеют одинаковые мощности, равные индексу Витта формы φ. Искомый результат следует теперь из теоремы 3.1.4.

Теорема доказана. □

Теорема 3.1.14 дает еще одно полезное следствие — классификацию однопараметрических алгебр квантовых многочленов.

Через q^A, где $A = (a_{ij})$, будем обозначать матрицу мультипараметров $Q = (q_{ij})$, где $q_{ij}q^{a_{ij}}$.

Теорема 3.1.20. *Для любых Q, n однопараметрическая алгебра квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ изоморфна алгебре*

$$\mathcal{L}_{Q',n,n} = k_{Q'}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1}],$$

где матрица $Q' = q^{A'}$ и матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_m \end{pmatrix}.$$

Центр алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,n}$ при этом изоморфизме переходит в центр алгебры $\mathcal{L}_{Q',n,n}$, который является подалгеброй $\mathcal{L}_{Q',n,n}$, порожденной элементами $Y_{2m+1}, \dots, Y_n$.

Доказательство. Всякая матрица P перехода от одного базиса модуля $\mathbb{Z}^n$ к другому задает изоморфизм алгебр квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n}$ и $\mathcal{L}_{Q',n,n}$, где $Q = q^A$, а $Q' = q^{P^tAP}$.

В силу теоремы 3.1.14 существует такая матрица перехода P, что матрица $A' = P^tAP$ имеет указанный в условии вид.

Заметим, что если $Y^{\mathbf{t}}$ — центральный моном в $\mathcal{L}_{Q',n,n}$, то по лемме 3.1.17 для всех $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$ выполнено равенство $\varphi'(\mathbf{t}, \mathbf{d}) = 0$. Отсюда множество норм центральных мономов является ядром формы φ'. Но по теореме 3.1.14 ядро формы φ' порождается нормами элементов $Y_{2m+1}, \dots, Y_n$, а значит, согласно теореме 3.1.10 центр алгебры $\mathcal{L}_{Q',n,n}$ порождается элементами $Y_{2m+1}, \dots, Y_n$ (так как они порождают множество центральных мономов). Осталось заметить, что при изоморфизме центр переходит в центр.

Теорема доказана. □

Вариант теоремы 3.1.20 для тел частных однопараметрических алгебр квантовых многочленов был доказан А. Н. Пановым в [19] (теорема 2.19).

3.2. Оценки степени трансцендентности других квантовых алгебр. В данном разделе обозначение $\prec$ является общим для порядков $\prec_{l.}$ и $\prec_{i.l.}$.

Пусть $X_{i_1}\dots X_{i_r}$ — последовательность символов $X_1,\dots,X_n$. Если переставить символы в этой последовательности так, чтобы индексы не убывали, мы получим некоторый моном $X_1^{t_1}\dots X_n^{t_n}=X^{\mathbf{t}}$.

Определение 3.2.1. Кортеж $\mathbf{t}\in\mathbb{N}_0^n$ будем называть *степенью* произведения $X_{i_1}\dots X_{i_r}$.

Определение 3.2.2. Через δ будем обозначать отображение, сопоставляющее произведению $X_{i_1}\dots X_{i_r}$ его степень. Так, например, $\delta(X^{\mathbf{t}})=\mathbf{t}$.

Пусть $Q=(q_{ij})\in M_n(k^*)$ — мультипликативно антисимметричная матрица.

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ над полем k с порождающими $X_1,\dots,X_n$ и со следующими определяющими соотношениями:

$$X_iX_j=q_{ij}X_jX_i+\sum_{\substack{\mathbf{t}\prec\delta(X_iX_j),\\ \mathbf{t}\in\mathbb{N}_0^n}}\alpha_{\mathbf{t}}^{ij}X^{\mathbf{t}},\quad 1\leqslant i<j\leqslant n. \tag{1}$$

Лемма 3.2.3.

1. *Всякое произведение $X_{i_1}\dots X_{i_r}$ порождающих элементов алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ представимо в виде*

$$X_{i_1}\dots X_{i_r}=\gamma X^{\mathbf{t}}+\sum_{\mathbf{d}\prec\mathbf{t}}\beta_{\mathbf{d}}X^{\mathbf{d}},\quad \gamma\in k^*,\quad \beta_{\mathbf{d}}\in k, \tag{2}$$

где $X^{\mathbf{t}}$ — моном, получающийся из произведения $X_{i_1}\dots X_{i_r}$ перестановкой порождающих X_i в порядке неубывания индексов.

2. *Коэффициент γ в соотношении* (2) *может быть получен применением к произведению $X_{i_1}\dots X_{i_r}$ правил вида $X_iX_j=q_{ij}X_jX_i$.*

Доказательство.

1. Каждому произведению $X_{i_1}\dots X_{i_r}$ мы можем поставить в соответствие его степень $\mathbf{t}$ указанным выше способом. Кроме того, мы можем поставить в соответствие этому произведению количество «беспорядков», т. е. пар индексов (i_{j_1},i_{j_2}), $1\leqslant j_1,j_2\leqslant r$, для которых $i_{j_1}>i_{j_2}$, но $j_1<j_2$.

Для произведений, где $r=2$ требуемые соотношения — это просто определяющие соотношения алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$.

Пусть $\chi=X_{i_1}\dots X_{i_r}$ — произвольное произведение порождающих. Предположим, что утверждение леммы доказано для произведений порождающих, у которых степень меньше (относительно порядка $\prec$) степени χ, и для произведений порождающих, у которых степень равна степени χ, но количество беспорядков меньше, чем у χ.

Пусть i_j,i_{j+1} — соседние индексы, образующие беспорядок в χ. Тогда

$$\begin{aligned}X_{i_1}\dots X_{i_r}&=X_{i_1}\dots X_{i_{j-1}}\Bigg(q^{-1}_{i_{j+1}i_j}X_{i_{j+1}}X_{i_j}+\sum_{\mathbf{t}\prec\eta(X_{i_{j+1}}X_{i_j})}\alpha_{\mathbf{t}}^{ij}X^{\mathbf{t}}\Bigg)X_{i_{j+2}}\dots X_{i_r}=\\&=q^{-1}_{i_{j+1}i_j}X_{i_1}\dots X_{i_{j+1}}X_{i_j}\dots X_{i_r}+\sum_{\mathbf{t}\prec\eta(X_{i_{j+1}}X_{i_j})}\alpha_{\mathbf{t}}^{ij}X_{i_1}\dots X_{i_{j-1}}X^{\mathbf{t}}X_{i_{j+2}}\dots X_{i_r}.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что у произведений вида $X_{i_1}\dots X_{i_{j-1}}X^{\mathbf{t}}X_{i_{j+2}}\dots X_{i_r}$ степень меньше степени χ, а у произведения $X_{i_1}\dots X_{i_{j+1}}X_{i_j}\dots X_{i_r}$ количество беспорядков меньше, чем у χ, т. е. для них утверждение леммы верно. Записывая для этих произведений соответствующие соотношения, получаем искомый результат.

2. Из предыдущих рассуждений ясно, что при перестановке порождающих старший (по степени) моном в получающейся сумме всегда один и меняется в соответствии с правилами $X_iX_j=q_{ij}X_jX_i$.

Лемма доказана полностью. □

Заметим, что мономы $\{X^{\mathbf{t}} \mid \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$ порождают алгебру $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ как линейное пространство (это вытекает из леммы 3.2.3). Следующая лемма показывает, что в действительности это множество мономов является базисом $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$.

Лемма 3.2.4. *Мономы $\{X^{\mathbf{t}} \mid \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$ образуют линейно независимую систему в алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$.*

Доказательство. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i X^{\mathbf{t}_i} = 0$ для некоторых $\beta_i \in k$, $\beta_i \neq 0$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\mathbf{t}_1 \prec \ldots \prec \mathbf{t}_r$.

Из леммы 3.2.3 следует, что всякое представление монома $X^{\mathbf{t}}$ в алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ обязательно содержит произведение порождающих $X_{i_1} \ldots X_{i_s}$, степень которого равна $\mathbf{t}$, т. е. всякое представление суммы $\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i X^{\mathbf{t}_i}$ содержит некоторое произведение $X_{i_1} \ldots X_{i_s}$ степени $\mathbf{t}_r$ с ненулевым коэффициентом, так как другие мономы не могут дать слагаемое степени, бóльшей их собственной степени. Следовательно, указанное равенство возможно лишь тогда, когда все β_i равны нулю.

Лемма доказана. □

Из лемм 3.2.3, 3.2.4, в частности, следует, что множество мономов $\{X^{\mathbf{t}} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n\}$ образует базис алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ как векторного пространства над k.

Утверждение 3.2.5. *Алгебра $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ является фильтрованной по полугруппе $\mathbb{N}_0^n$. Соответствующая ассоциированная градуированная алгебра изоморфна некоторой алгебре квантовых многочленов, а именно*

$$\operatorname{gr}(\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}) \cong k_Q[X_1, \ldots, X_n].$$

Доказательство. Для произвольного $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$ в качестве линейного подпространства $\mathfrak{A}_{\mathbf{t}}$ возьмем подпространство, порожденное конечным множеством $\{X^{\mathbf{d}} \mid \mathbf{d} \preceq \mathbf{t},\ \mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n\}$. В силу леммы 3.2.4 все подпространства $\mathfrak{A}_{\mathbf{t}}$ различны. Вложение $\mathfrak{A}_{\mathbf{d}} \subset \mathfrak{A}_{\mathbf{t}}$ при любых $\mathbf{d} \prec \mathbf{t}$ очевидно. Вложение $\mathfrak{A}_{\mathbf{d}}\mathfrak{A}_{\mathbf{t}} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathbf{d}+\mathbf{t}}$ получается многократным применением пункта 1 леммы 3.2.3 к произведению произвольных элементов $f \in \mathfrak{A}_{\mathbf{d}}$ и $g \in \mathfrak{A}_{\mathbf{t}}$.

То, что ассоциированная градуированная алгебра, соответствующая полученной фильтрации $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$, изоморфна алгебре квантовых многочленов $k_Q[X_1, \ldots, X_n]$, следует из пункта 2 леммы 3.2.3.

Утверждение доказано. □

В силу только что доказанного утверждения для $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ выполнено условие леммы 2.2.11, а значит, для этой алгебры верны все результаты раздела 2.3.

Теорема 3.2.6. *Степень трансцендентности алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ не превышает максимального количества независимых коммутирующих друг с другом элементов мономиального базиса ее ассоциированной градуированной алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,0}$.*

Доказательство. Доказательство следует из того, что всякой системе независимых попарно псевдокоммутирующих элементов мономиального базиса алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ соответствует система независимых попарно коммутирующих мономов из алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,0}$. □

3.2.1. Матричные алгебры. Рассмотрим некоторую многопараметрическую алгебру квантовых матриц $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$ (см. определение 1.2.1).

Перепишем определяющие соотношения этой алгебры в виде

$$\begin{aligned} X_{ij}X_{im} &= p_{mj}X_{im}X_{ij}, \\ X_{ij}X_{lj} &= \lambda^{-1}p_{il}X_{lj}X_{ij}, \\ X_{im}X_{lj} &= \lambda^{-1}p_{il}p_{jm}X_{lj}X_{im}, \\ X_{ij}X_{lm} &= p_{il}p_{mj}X_{lm}X_{ij} + (1-\lambda)p_{mj}X_{im}X_{lj} \end{aligned}$$

для всех $1 \leqslant i < l \leqslant n$, $1 \leqslant j < m \leqslant n$.

Пусть $\prec$ обозначает порядок $\prec_{l.}$, т. е. сравниваются суммы координат кортежей и при равенстве сумм координат сравнение производится лексикографически.

Утверждение 3.2.7. *Алгебра $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ при некоторых значениях параметров Q, α.*

Доказательство. Достаточно показать соответствие определяющих соотношений соотношениям алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$.

Для этого положим $X_{ij} = X_{(i-1)n+j}$. Нетрудно видеть, что для любой пары X_s, X_r, $1 \leqslant s, r \leqslant n^2$, среди определяющих соотношений найдется соответствующее коммутационное соотношение. Остается проверить, что последнее соотношение является соотношением вида (1).

Действительно, пусть $1 \leqslant i < l \leqslant n$ и $1 \leqslant j < m \leqslant n$. Тогда

$$(i-1)n + j < (i-1)n + m,$$

т. е.

$$\delta(X_{(i-1)n+j}X_{(l-1)n+m}) \succ \delta(X_{(i-1)n+m}X_{(l-1)n+j}).$$

Поскольку $X_{(i-1)n+j}X_{(l-1)n+m} = X_{ij}X_{lm}$ и $X_{(i-1)n+m}X_{(l-1)n+j} = X_{im}X_{lj}$, то $\delta(X_{ij}X_{lm}) \succ \delta(X_{im}X_{lj})$.

Утверждение доказано. □

Итак, для алгебры $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$ выполнены все результаты раздела 2.3. В частности, в силу теоремы 3.2.6 верна

Теорема 3.2.8. *Степень трансцендентности алгебры квантовых матриц $\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))$ не превышает максимального количества независимых попарно коммутирующих элементов мономиального базиса ассоциированной градуированной алгебры $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\lambda,P}(M_n(k))) \cong$ $\cong k_Q[X_1, \ldots, X_{n^2}]$.*

3.2.2. Квантовые алгебры Вейля. Пусть снова $\prec$ обозначает порядок $\prec_{l.}$.

Рассмотрим квантовую алгебру Вейля $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$ (см. определение 1.4.1).

Утверждение 3.2.9. *Для любых параметров Λ, $\bar{q}$ алгебра $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ при некоторых значениях параметров Q, α.*

Доказательство. Достаточно показать, что соотношение

$$X_jY_j = 1 + q_jY_jX_j + \sum_{1\leqslant l<j} (q_l - 1)Y_lX_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

имеет вид (1), так как все остальные определяющие соотношения уже имеют указанный вид.

Будем вести доказательство индукцией по j. Для $j = 1$ получаем $X_1Y_1 = 1 + q_1Y_1X_1$. Далее, если

$$Y_jX_j = \beta_{j0} + \sum_{1\leqslant l\leqslant j} \beta_{jl}X_lY_l$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant s-1$ при некоторых $\beta_{jl} \in k$, то

$$X_sY_s = 1 + q_sY_sX_s + \sum_{1\leqslant j<s} (q_j - 1)Y_jX_j =$$

$$= 1 + q_sY_sX_s + \sum_{1\leqslant j<s} (q_j - 1)\Bigl(\beta_{j0} + \sum_{1\leqslant l\leqslant j} \beta_{jl}X_lY_l\Bigr) = 1 + q_sY_sX_s + \sum_{1\leqslant j<s} \gamma_{sl}X_lY_l.$$

Последнее равенство имеет требуемый вид. Кроме того, из этого равенства следует равенство

$$Y_sX_s = -q_s^{-1} + q_s^{-1}X_sY_s - \sum_{1\leqslant j<s} \gamma_{sl}X_lY_l,$$

необходимое для продолжения индукции.

Утверждение доказано. □

Таким образом, к алгебре $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$ применимы результаты раздела 2.3. В частности, теорема 2.4.7 получает следующую формулировку.

Теорема 3.2.10. *Степень трансцендентности квантовой алгебры Вейля $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$ не превышает максимального количества независимых попарно коммутирующих элементов мономиального базиса градуированной алгебры, ассоциированной с $A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)$:*

$$\text{tr. deg.}(A_n^{\bar{q},\Lambda}(k)/k) \leqslant \text{tr. deg.}(k_Q[X_1, \dots, X_{2n}]/k),$$

где матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} M & C \\ C' & \Lambda \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \mu_{12} & q_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{1n} & \mu_{2n} & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

где $C' = (c_{ij}^{-1})$, $\Lambda = (\lambda_{ij})$ — мультипликативно антисимметричная матрица из определения 1.4.1 *квантовой алгебры Вейля, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — кортеж параметров из того же определения, а $M = (\mu_{ij}) = (q_i\lambda_{ij})$.*

Доказательство. Утверждение следует из теорем 3.2.6 и 3.1.4. □

3.2.3. Квантовые координатные кольца полупростых алгебраических групп. Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ над полем k, порожденную элементами $X_1, \dots, X_n$ с определяющими соотношениями

$$X_jX_i = q_{ji}X_iX_j + \sum_{s=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{n}(\beta_{ijst}X_sX_t + \beta'_{ijst}X_tX_s) \tag{3}$$

для всех индексов $1 \leqslant i < j \leqslant m$ и некоторых коэффициентов $\beta_{ijst}, \beta'_{ijst} \in k$ и $q_{ji} \in k^*$.

Утверждение 3.2.11. *Пусть $Q = (q_{ij})$, тогда существуют такие значения параметра α, что алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$.*

Доказательство. Пусть $\prec$ означает $\prec_{i.l.}$, как это отношение определено в 2.1.1, т. е. упорядочение кортежей из $\mathbb{Z}_0^n$ производится сначала по сумме координат, а в случае равенства этих сумм в обратном лексикографическому порядке.

Если $i < j$, $l < m$, то неравенство $X_lX_m \prec X_iX_j$ выполнено тогда и только тогда, когда $l < i$ или $l = i$, $m < j$. Отсюда соотношение (3) можно переписать в виде

$$X_jX_i = q_{ji}X_iX_j + \sum_{\delta(X_lX_m)\prec\delta(X_iX_j)} \gamma_{ijlm}X_lX_m,$$

так как в определяющем соотношении (3) всегда $s < i$.

Остается привести все определяющие соотношения к виду (1). Для произведения X_1X_2 имеем $X_1X_2 = q_{21}^{-1}X_2X_1$. Далее по индукции

$$\begin{aligned} X_iX_j &= q_{ij}X_jX_i + \sum_{\delta(X_lX_m)\prec\delta(X_iX_j)} \gamma_{ijlm}X_lX_m = \\ &= q_{ij}X_jX_i + \sum_{\substack{\delta(X_lX_m)\prec\delta(X_iX_j),\\ l\leqslant m}} \gamma_{ijlm}X_lX_m + \sum_{\substack{\delta(X_lX_m)\prec\delta(X_iX_j),\\ l>m}} \gamma_{ijlm}X_lX_m = \\ &= q_{ij}X_jX_i + \sum_{\substack{\delta(X_lX_m)\prec\delta(X_iX_j),\\ l\leqslant m}} \gamma_{ijlm}X_lX_m + \sum_{\substack{\delta(X_lX_m)\prec\delta(X_iX_j),\\ l>m}} \gamma_{ijlm}\Bigl(q_{ml}X_mX_l + \sum_{\mathbf{t}<\delta(X_mX_l)} \alpha_{ml}^{\mathbf{t}}X^{\mathbf{t}}\Bigr) = \\ &= q_{ij}X_jX_i + \sum_{\mathbf{t}<\delta(X_iX_j)} \alpha_{ij}^{\mathbf{t}}X^{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

В силу полученного результата и теоремы 1.3.1 квантовое координатное кольцо $\mathcal{O}_q(G)_k$ связной комплексной полупростой алгебраической группы G изоморфно $\mathfrak{A}_n^{Q,\alpha}$ для некоторых Q, α, n. Поэтому для алгебры $\mathcal{O}_q(G)_k$ верны все результаты раздела 2.3. В частности, верна следующая оценка.

Теорема 3.2.12. *Степень трансцендентности квантового координатного кольца $\mathcal{O}_q(G)_k$ связной комплексной полупростой алгебраической группы G не превышает максимального количества независимых коммутирующих друг с другом элементов мономиального базиса ассоциированной градуированной алгебры $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_q(G)_k) \cong k_Q[X_1, \ldots, X_n]$.*

3.3. Связь с размерностью Крулля. В данном разделе мы рассмотрим некоторые результаты, касающиеся алгебры квантовых лорановских многочленов

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Q,n,n} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}].$$

Пусть E — частично упорядоченное множество. Если a, b — элементы множества E, то под $[a, b]$ будем понимать множество всех таких элементов $x \in E$, что $a \leqslant x \leqslant b$.

Определение 3.3.1. Множество E называется *дискретным*, если всякий его элемент сравним только с собой, т. е. из $a \leqslant b$, $a, b \in E$ следует равенство $a = b$. Множество E называется *артиновым*, если оно не содержит бесконечных строго убывающих цепочек элементов. *Девиация* множества E обозначается $\operatorname{dev} E$ и определяется по индукции следующим образом:

- $\operatorname{dev} E = -\infty$, если множество E дискретно;
- $\operatorname{dev} E = 0$, если E артиново и не дискретно;
- пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $\operatorname{dev} E \leqslant n$ в том и только том случае, когда для любой бесконечной строго убывающей последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ элементов множества E при достаточно большом i справедливо неравенство
$$\operatorname{dev}[a_{i+1}, a_i] < n;$$
- если неравенство $\operatorname{dev} E \leqslant n$ не выполнено ни для какого $n \in \mathbb{N}$, полагаем $\operatorname{dev} E = +\infty$.

Напомним определение размерности Крулля.

Определение 3.3.2. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра и E — множество ее левых идеалов, упорядоченное по включению. *Размерностью Крулля* алгебры $\mathcal{A}$ (обозначается $\operatorname{Kdim} \mathcal{A}$) называется девиация множества E:

$$\operatorname{Kdim} \mathcal{A} = \operatorname{dev}\{L \subseteq \mathcal{A} \mid L \text{ — левый идеал } \mathcal{A}\}.$$

К. Дж. Б. Брукс в работе [31] вычислил значение размерности Крулля для алгебры $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Q,n,n} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$.

Теорема 3.3.3 (К. Дж. Б. Брукс)**.** *Размерность Крулля алгебры квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L}$ совпадает с максимальным количеством M независимых коммутирующих друг с другом элементов мономиального базиса $\mathcal{L}$.*

Из указанного результата Брукса и теоремы 3.1.4 следует

Теорема 3.3.4. *Степень трансцендентности алгебры квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L}$ совпадает с ее размерностью Крулля:*

$$\text{tr. deg.}(\mathcal{L}/k) = \operatorname{Kdim} \mathcal{L}.$$

Следующий результат, касающийся размерности Крулля, принадлежит Р. Реско (см. [49, теорема 3.16, замечание 3.17]).

Теорема 3.3.5 (Р. Реско)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — простая артинова алгебра над полем k, и пусть $\text{tr. deg.}(\mathcal{A}/k) \geqslant t$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\operatorname{Kdim}(\mathcal{A} \otimes_k k(x_1, \ldots, x_t)) = t.$$

Известно, что алгебра $\mathcal{L}$ нетерова (см., например, [30]). Кроме того, алгебра $\mathcal{L}$ не содержит делителей нуля, т. е. у нее существует тело частных (см. [8, теорема 3.6.12]). Обозначим это тело частных через $D_{\mathcal{L}}$.

Доказательство следующей теоремы принадлежит К. Гудерлу.

Теорема 3.3.6 (К. Гудерл). *Степень трансцендентности тела частных алгебры квантовых лорановских многочленов совпадает с размерностью Крулля алгебры $\mathcal{L}$:*

$$\text{tr. deg.}(D_{\mathcal{L}}/k) = \operatorname{Kdim} \mathcal{L}.$$

Доказательство. В силу результата Брукса 3.3.3 размерность Крулля алгебры $\mathcal{L}$ равна максимальному числу независимых коммутирующих друг с другом мономов из $\mathcal{L}$. Так как при расширении основного поля k коммутационные соотношения между мономами не меняются, то

$$\operatorname{Kdim}(\mathcal{L} \otimes_k K) = \operatorname{Kdim} \mathcal{L},$$

где $K \supseteq k$ — произвольное расширение поля k. Далее, локализуя, получаем

$$\operatorname{Kdim}(D_{\mathcal{L}} \otimes_k K) \leqslant \operatorname{Kdim}(\mathcal{L} \otimes_k K).$$

Пусть степень трансцендентности тела $D_{\mathcal{L}}$ равна t. Тогда согласно теореме Реско 3.3.5

$$\operatorname{Kdim}(D_{\mathcal{L}} \otimes_k k(x_1, \dots, x_t)) = t,$$

если взять поле рациональных функций $k(x_1, \dots, x_t)$ в качестве расширения K. Отсюда

$$\operatorname{Kdim} \mathcal{L} = \operatorname{Kdim}(\mathcal{L} \otimes_k k(x_1, \dots, x_t)) \geqslant t = \text{tr. deg.}(D_{\mathcal{L}}/k).$$

Обратное неравенство следует из того, что d независимых взаимно коммутирующих мономов порождают в $D_{\mathcal{L}}$ подполе степени трансцендентности d. При $d = \operatorname{Kdim} \mathcal{L}$ получаем искомое.

Теорема доказана. □

Объединяя только что доказанный результат Гудерла с теоремой 3.3.4, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3.7. *Степень трансцендентности алгебры квантовых лорановских многочленов $\mathcal{L}$ совпадает со степенью трансцендентности ее тела частных:*

$$\text{tr. deg.}(D_{\mathcal{L}}/k) = \text{tr. deg.}(\mathcal{L}/k).$$

3.4. Пример коммутативной подалгебры. Из теоремы 3.1.8 следует, что максимальная мономиальная коммутативная подалгебра алгебры квантовых многочленов $\mathcal{L}_{Q,n,n}$ является чисто трансцендентным расширением основного поля k. Пример, конструируемый в данном разделе, показывает, что для произвольной максимальной коммутативной подалгебры алгебры $\mathcal{L}_{Q,n,n}$ указанное свойство не выполняется.

Рассмотрим алгебру $\Lambda = \mathcal{L}_{Q,2,2} = k_q[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$. Это алгебра с двумя порождающими X, Y и определяющим соотношением $YX = qXY$. Далее будем предполагать, что q не является корнем из единицы.

Пусть f, g — коммутирующие элементы Λ.

Утверждение 3.4.1. *Элементы f, g алгебраически зависимы.*

Доказательство. Пусть $\eta_{\mathcal{L}}(f) = (a, b)$, $\eta_{\mathcal{L}}(g) = (c, d)$. Легко заметить, что старшие мономы f и g обязаны коммутировать (так как произведения остальных мономов имеют норму, которая меньше нормы произведения старших, а значит, не могут сократиться с произведением старших). Отсюда

$$[X^a Y^b, X^c Y^d] = X^a Y^b X^c Y^d - X^c Y^d X^a Y^b = q^{bc}(1 - q^{ad-bc}) X^{a+c} Y^{b+d},$$

т. е. $a/c = b/d$ и $(a, b) = \mu(c, d)$, так как q не корень из единицы. Таким образом, нормы f, g линейно зависимы, следовательно, по теореме 2.3.8 сами элементы алгебраически зависимы.

Утверждение доказано. □

Утверждение 3.4.2. *Если $h \in \Lambda$ содержит мономы с отрицательными степенями, то для любого $P_s(x) = a_s x^s + \ldots + a_1 x + a_0 \in k[x]$ многочлен $P_s(h) \in \Lambda$ также содержит мономы с отрицательными степенями.*

Доказательство. Пусть h содержит мономы с отрицательной степенью X. Выделим среди этих мономов множество M мономов с максимальной по модулю степенью X, а в множестве M найдем моном m_0 с максимальной степенью Y. Такой моном единствен. Если для некоторого $P_s(x) \in k[x]$ многочлен $P_s(h)$ содержит мономы только с неотрицательными степенями, то произведение m_0^s, входящее в $P_s(h)$, должно сокращаться с произведением каких-либо других мономов. По построению сразу видно, что такое произведение должно состоять из элементов множества M, но все они имеют степени по Y, меньшие чем у m_0, поэтому любая сумма s этих степеней будет меньше, чем степень Y в m_0.

Если множество M пусто, то h содержит мономы с отрицательной степенью Y, и можно повторить все предыдущие рассуждения с заменой X на Y и Y на X.

Утверждение доказано. □

Пусть заданы два элемента f, g алгебры Λ, не содержащие мономов с отрицательными степенями, т. е. $f, g \in k_q[X, Y]$.

Предположим, что элементы f, g содержатся в некоторой максимальной коммутативной подалгебре алгебры Λ, являющейся чисто трансцендентным расширением k. Тогда в силу 3.1.4 элементы f и g должны равняться многочленам от некоторого элемента $h \in \Lambda$. В силу утверждения 3.4.2 многочлен h обязан лежать в $k_q[X, Y]$.

Далее мы укажем два элемента $f, g \in \Lambda$ и покажем, что для этих элементов не существует $h \in k_q[X, Y]$, для которого существовали бы такие многочлены $P_{s_1}, P_{s_2} \in k[x]$, что $f = P_{s_1}(h)$ и $g = P_{s_2}(h)$.

Обозначим $u = q^2$. Рассмотрим многочлены

$$f = X^2Y^2(Y^4 + \alpha_1 Y^2 + \alpha_2),$$
$$g = X^3Y^3(Y^6 + \beta_1 Y^4 + \beta_2 Y^2 + \beta_3),$$

где коэффициенты имеют вид

$$\alpha_1 = (u+1)L, \quad \alpha_2 = \frac{u^3L^2}{(u^2-u+1)^2},$$
$$\beta_1 = \frac{(u^2+u+1)L}{u}, \quad \beta_2 = \frac{(u^2+u+1)L^2}{(u^2-u+1)}, \quad \beta_3 = \frac{u^3L^3}{(u^2-u+1)^3},$$

а L — произвольный ненулевой элемент k.

Утверждение 3.4.3. *Многочлены f и g коммутируют.*

Доказательство. Подсчитаем коммутатор:

$$\begin{aligned}[f,g] = fg - gf = X^2Y^2(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2)X^3Y^3(Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3) - \\ - X^3Y^3(Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3)X^2Y^2(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2) = u^3X^5Y^5p(Y).\end{aligned}$$

Выпишем многочлен $p(Y)$:

$$\begin{aligned}p(Y) &= (u^6Y^4 + \alpha_1u^3Y^2 + \alpha_2) - (Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3) - \\ &\quad - (u^6Y^6 + \beta_1u^4Y^4 + \beta_2u^2Y^2 + \beta_3)(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2) = \\ &= (u^6Y^{10} + (\alpha_1u^3 + \beta_1u^6)Y^8 + (\beta_2u^6 + \alpha_1\beta_1u^3 + \alpha_2)Y^6 + \\ &\quad + (\beta_3u^6 + \alpha_1\beta_2u^3 + \alpha_2\beta_1)Y^4 + (\alpha_1\beta_3u^3 + \alpha_2\beta_2)Y^2 + \alpha_2\beta_3) - \\ &\quad - (u^6Y^{10} + (\alpha_1u^6 + \beta_1u^4)Y^8 + (\beta_2u^2 + \alpha_1\beta_1u^4 + \alpha_2u^6)Y^6 + \\ &\quad + (\beta_3 + \alpha_1\beta_2u^2 + \alpha_2\beta_1u^4)Y^4 + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2u^2)Y^2 + \alpha_2\beta_3) = \\ &= (\alpha_1(u^3 - u^6) + \beta_1(u^6 - u^4))Y^8 + (\beta_2(u^6 - u^2) + \alpha_1\beta_1(u^3 - u^4) + \alpha_2(1 - u^6))Y^6 + \\ &\quad + (\beta_3(u^6 - 1) + \alpha_1\beta_2(u^3 - u^2) + \alpha_2\beta_1(1 - u^4))Y^4 + (\alpha_1\beta_3(u^3 - 1) + \alpha_2\beta_2(1 - u^2))Y^2.\end{aligned}$$

Подсчитаем коэффициенты при степенях Y.

При Y^8:

$$\alpha_1(u^3-u^6)+\beta_1(u^6-u^4)=(u+1)L(u^3-u^6)+\frac{(u^2+u+1)(u^6-u^4)L}{u}=$$
$$=-u^3(u+1)(u^3-1)L+u^3(u+1)(u-1)(u^2+u+1)L=0.$$

При Y^6:

$$\beta_2(u^6-u^2)+\alpha_1\beta_1(u^3-u^4)+\alpha_2(1-u^6)=$$
$$=\frac{(u^2+u+1)(u^6-u^2)L^2}{(u^2-u+1)}+\frac{(u+1)(u^3-u^4)(u^2+u+1)L^2}{u}+\frac{u^3(1-u^6)L^2}{(u^2-u+1)^2}=$$
$$=L^2\left(\frac{u^2(u^2+u+1)(u^4-1-u(u^2-1))}{(u^2-u+1)}-u^2(u+1)(u-1)(u^2+u+1)\right)=$$
$$=L^2\left(\frac{u^2(u^2+u+1)(u^2-u+1)(u^2-1)}{(u^2-u+1)}-u^2(u^2-1)(u^2+u+1)\right)=0.$$

При Y^4:

$$\beta_3(u^6-1)+\alpha_1\beta_2(u^3-u^2)+\alpha_2\beta_1(1-u^4)=$$
$$=\frac{u^3(u^6-1)L^3}{(u^2-u+1)^3}+\frac{(u^2+u+1)(u+1)(u^3-u^2)L^3}{u^2-u+1}+\frac{u^3(u^2+u+1)(1-u^4)L^3}{u(u^2-u+1)^2}=$$
$$=\frac{u^2(u^2+u+1)(u^2-1)L^3}{u^2-u+1}\left(\frac{u}{u^2-u+1}+1-\frac{u^2+1}{u^2-u+1}\right)=0.$$

При Y^2:

$$\alpha_1\beta_3(u^3-1)+\alpha_2\beta_2(1-u^2)=\frac{u^3(u+1)(u^3-1)L^4}{(u^2-u+1)^3}+\frac{u^3(1-u^2)(u^2+u+1)L^4}{(u^2-u+1)^3}=0.$$

Итак, данные многочлены коммутируют.
Утверждение доказано. □

Утверждение 3.4.4. *Не существует такого многочлена $h\in\Lambda$, что f и g являются многочленами от h.*

Доказательство. Пусть такой h существует, и пусть $X^{l_1}Y^{l_2}$ — его старший моном. Если $f=P_n(h)$ и $g=P_m(h)$, то, рассматривая степени старших мономов, заключаем, что $(2,6)=n(l_1,l_2)$ и $(3,9)=m(l_1,l_2)$. Поэтому $n=2$ и $m=3$, а старший моном h равен XY^3.

Покажем, что можно считать f пропорциональным h^2.

Второй по старшинству моном h равен XY, так как произведение его со старшим мономом равно X^2Y^4 (бóльшим оно быть не может, потому что ни с чем не сокращается).

Итак, $h=\gamma_3XY^3+\gamma_1XY+\ldots$. Если, кроме $(\gamma_1XY)^2$, никакие мономы из h не дают в произведении X^2Y^2, то можно рассмотреть $h'=\gamma_3XY^3+\gamma_1XY$. Квадрат этого многочлена будет пропорционален f.

Если же какие-то мономы, кроме $(\gamma_1XY)^2$, дают в произведении X^2Y^2, то, очевидно, это старший моном и моном X^iY^j, меньший XY. Уравнение $\|X^iY^j\cdot XY^3\|=\|X^2Y^2\|$ дает $i=1$ и $j=-1$, что невозможно в силу утверждения 3.4.2.

Итак, можно считать, что $f=Ch^2, C=\mathrm{const}\in k$, причем мы мимоходом выяснили, что h имеет вид $h=\gamma_3XY^3+\gamma_1XY=\gamma XY(Y^2+\mu)$.

Подсчитаем квадрат многочлена h:

$$h^2=\gamma XY(Y^2+\mu)\gamma XY(Y^2+\mu)=\gamma^2qX^2Y^2(uY^2+\mu)(Y^2+\mu)=$$
$$=\gamma^2qX^2Y^2(uY^4+\mu(u+1)Y^2+\mu^2)=\gamma^2q^3X^2Y^2\left(Y^4+\frac{\mu(u+1)}{u}Y^2+\frac{\mu^2}{u}\right).$$

Теперь приравняем f к Ch^2:

$$f = X^2Y^2\left(Y^4 + (u+1)LY^2 + \frac{u^3L^2}{(u^2-u+1)^2}\right) = C\gamma^2q^3X^2Y^2\left(Y^4 + \frac{\mu(u+1)}{u}Y^2 + \frac{\mu^2}{u}\right).$$

Отсюда

$$C\gamma^2q^3 = 1$$

и

$$L = \frac{\mu}{u}, \quad \frac{u^3L^2}{(u^2-u+1)^2} = \frac{\mu^2}{u}.$$

Из последнего уравнения получаем $u^2 = (u^2-u+1)^2$, откуда $u^2 = -1$ или $u = 1$, чего не может быть, так как $u = q^2$ и по нашему предположению q не является корнем из единицы в k^*.

Утверждение доказано. $\square$

Таким образом, максимальная коммутативная подалгебра алгебры $\Lambda = \mathcal{L}_{q,2,2}$, содержащая указанные элементы f и g, не является чисто трансцендентным расширением основного поля k.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артамонов В. А.* Общие квантовые многочлены: неприводимые модули и Морита-эквивалентность // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — *63*, № 5. — С. 3—36.
2. *Артамонов В. А.* Тело квантовых рациональных функций // УМН. — 1999. — *54*, № 4. — С. 151—152.
3. *Артамонов В. А.* Действия квантовых групп на квантовых пространствах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 3. — С. 13—17.
4. *Ваксман Л. Л., Сойбельман Я. С.* Алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$ // Функцион. анализ и его прил. — 1988. — *22*. — С. 170—181.
5. *Гельфанд И. М., Кириллов А. А.* О телах, связанных с обертывающими алгебрами алгебр Ли // ДАН СССР. — 1966. — *167*, № 3. — С. 503—505.
6. *Демидов Е. Е.* Модули над квантовой алгеброй Вейля // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1993. — №. 1. — С. 53—56.
7. *Демидов Е. Е.* О некоторых аспектах теории квантовых групп // УМН. — 1993. — *48*, № 6. — С. 39—74.
8. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.-— М.: Мир, 1978.
9. *Дринфельд В. Г.* Квантовые группы // Зап. науч. сем. Ленингр. отд. МИАН. — 1986. — *155*. — С. 19—49.
10. *Зеленова С. А.* Коммутативные подалгебры кольца квантовых многочленов и тела квантовых лорановских рядов // Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре. Тезисы докладов. — М., 2000. — С. 23—24.
11. *Зеленова С. А.* Коммутативные подалгебры кольца квантовых многочленов и тела квантовых лорановских рядов // Мат. сб. — 2001. — *192*, №3. — С. 55—64.
12. *Зеленова С. А.* Степень трансцендентности коммутативных подалгебр квантовых алгебр // Тезисы докладов V Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2003. — С. 116—117.
13. *Зеленова С. А.* О конечной порожденности некоторых коммутативных подалгебр алгебры квантовых многочленов // УМН. — 2003. — *58*, № 3. — С. 183—184.
14. *Зеленова С. А.* Коммутативные подалгебры квантовых алгебр // Мат. заметки. — 2004. — *75*, № 2. — С. 208—221.
15. *Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю.* Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордона и высшие представления // Зап. науч. сем. Ленингр. отд. МИАН. — 1981. — *101*. — С. 101—110.
16. *Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1968.
17. *Одесский А. В., Фейгин Б. Л.* Эллиптические алгебры Склянина // Функцион. анализ и его прил. — 1989. — *23*. — С. 45—54.
18. *Одесский А. В.* Эллиптические алгебры // УМН. — 2002. — *57*, № 6. — С. 87—122.
19. *Панов А. Н.* Тела скрученных рациональных функций и тело рациональных функций на $GL_q(n, K)$ // Алгебра и анализ. — 1995. — *7*, № 1. — С. 153—169.
20. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга—Бакстера // Функцион. анализ и его прил. — 1982. — *16*, № 4. — С. 22—34.
21. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга—Бакстера. II // Функцион. анализ и его прил. — 1983. — *17*, № 4. — С. 34—48.

22. *Фаддеев Л. Д., Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А.* Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ. — 1989. — *1*, № 1. — С. 178—206.
23. *Alev J., Dumas F.* Automorphismes de certaines complétés de corps de Weyl quantiques // Collect. Math. — 1995. — *46*, No. 1—2. — P. 1—9.
24. *Alev J., Dumas F.* Corps de Weyl mixtes // Bol. Acad. Nac. Cien. — *65*. — P. 29—43.
25. *Alev J., Dumas F.* Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques // J. Algebra. — *170*, No. 1. — P. 229—265.
26. *Artamonov V. A., Cohn P. M.* The skew field of rational functions on the quantum plane // J. Math. Sci. — 1999. — *93*, No. 6 — P. 824—829.
27. *Artamonov V. A., Wisbauer R.* Homological properties of quantum polynomials // Algebras Represent. Theory. — 2001. — *4*, No. 3. — P. 219—247.
28. *Artamonov V. A.* Pointed Hopf algebras acting on quantum polynomials // J. Algebra. — 2003. — *259*. — P. 323—352.
29. *Artin M., Schelter W., Tate J.* Quantum deformations of GL_n // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — *44*. — P. 879—895.
30. *Brown K. A., Goodearl K. R.* Lectures on Algebraic Quantum Groups. — Barcelona: Birkhäuser, 2002. — Adv. Cour. Math.
31. *Brookes C. J. B.* Crossed products and finitely presented groups // J. Group Theory. — 2000. — *3*. — P. 433—444.
32. *Brookes C. J. B., Groves J. R. J.* Modules over crossed products of a division ring by a free Abelian group, I // J. Algebra. — 2000. — *229*. — P. 24—54.
33. *Cohn P. M.* Centralisateur dans les corps libres // Séries formelles en variables non commutatives et applications / ed. J. Berstel. — Vieux-Boucau les Bains (Landes): Ecole de Printemps d'Informatique Théorique, 1978. — P. 45—54.
34. *Faddeev L. D., Takhtajan L. A.* A Liouville model on the lattice. — Lect. Notes Math. Phys. Vol. 24. — 1986. — P. 166—179.
35. *Goodearl K. R.* Quantized coordinate rings and related noetherian algebras. — Expository paper for Proc. 35th Symp. Ring Theory and Representation Theory (Okayama, October 2002).
36. *Joseph A.* On the prime and primitive spectra of the algebra of functions on a quantum group // J. Algebra. — 1994. — *169*. — P. 441—511.
37. *Joseph A.* Quantum Groups and Their Primitive Ideals. — Berlin: Springer-Verlag, 1995. — Erg. Math. (3). Vol. 29.
38. *Maltsiniotis G.* Calcul différenciel quantique. — Group de travail, Univ. Paris VII, 1992.
39. *Manin Yu. I.* Some remarks on Koszul complex and quantum groups // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1987. — *37*. — P. 191—205.
40. *Manin Yu. I.* Quantum groups and non-commutative geometry. — Publ. Centre de Recherches Math., Univ. de Montreal, 1988.
41. *Manin Yu. I.* Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // Comm. Math. Phis. — 1989. — *123*. — P. 163—175.
42. *Manin Yu. I.* Topics in Non-Commutative Geometry. — Princeton Univ. Press, 1991.
43. *McConnel J. C., Pettit J. J.* Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. — 1988. — *38*, No. 2. — P. 47—55.
44. *McConnel J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian Rings. — Wiley Interscience Publ., 1987.
45. *Van Oystaeyen F.* Algebraic Geometry for Associative Algebras. — New York: Marcel Dekker, 2000.
46. *Panov A. N.* Skew fields of fractions of quantum solvable algebras // J. Algebra. — 2001. — *236*. — P. 110—121.
47. *Panov A. N.* Stratification of prime spectrum of quantum solvable algebras // Comm. Algebra. — 2001. — *29*, No. 9. — P. 3809—3827.
48. *Panov A. N.* Quantum solvable algebras, ideals and representations at root of 1 // Transformation groups. — 2002. — *7*, No. 4. — P. 379—402.
49. *Resco R.* Transcendental division algebras and simple noetherian rings // Isr. J. of Math. — 1979. — *32*, No. 2—3. — P. 236—256.
50. *Sadbery A.* Consistent multiparameter quantization of $GL(n)$ // J. Phys. — 1990. — *23*. — P. 697—704.
51. *Soibelman Ya. S.* Irreducible representations of the function algebra on the quantum group $SU(n)$ // Soviet Math. Dokl. — 1990. — *40*. — P. 34—38.
52. *Soibelman Ya. S.* The algebra of functions on a compact quantum group and its representations // Leningrad Math. J. — 1991. — *2*. — P. 161—178.

53. *Woronovicz S. L.* Compact matrix pseudogroups // Comm. Math. Phis. — 1987. — *111*. — P. 613—665.

С. А. Зеленова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sophia_zelenova@pochta.ru