

ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии  
Институт Кибернетики

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 19**

**ТОПОЛОГИЯ  
И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**



Тбилиси  
2004

## Редакционная коллегия

### Главный редактор:

*Р. В. Гамкрелидзе* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

### Заместитель главного редактора:

*Г. Харатишвили* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

### Члены редколлегии:

*А. А. Аграчев* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

*Г. Гиоргадзе* (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

*Е. С. Голод* (Московский государственный университет)

*А. Лашхи* (Грузинский технический университет)

*Е. Ф. Мищенко* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Овчинников* (Московский государственный университет)

*В. Л. Попов* (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

*А. В. Сарычев* (Университет Флоренции)

*Г. Химшиашвили* (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

# **СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 19**

**ТОПОЛОГИЯ  
И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი  
თბილისი

**2004**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Геометрия некоммутативных алгебраических главных расслоений ( <i>Г. И. Шарыгин</i> ) . . . . . | 3   |
| Об операциях Стиррода в кобордизмах ( <i>Ф. Ю. Попеленский</i> ) . . . . .                     | 72  |
| Обобщения кос и гомологии ( <i>В. В. Вершинин</i> ) . . . . .                                  | 90  |
| Диаграммные инварианты узлов и интеграл Концевича ( <i>С. Д. Тюрина</i> ) . . . . .            | 105 |

## ГЕОМЕТРИЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЙ

© 2004 г. Г. И. ШАРЫГИН

### СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Предисловие . . . . .   | 3  |
| Глава 1. Квантовые группы и главные расслоения . . . . .      | 4  |
| 1. Квантовые группы . . . . .                                 | 5  |
| 2. Определение квантовых расслоений. Примеры . . . . .        | 11 |
| 3. Дифференциальные исчисления . . . . .                      | 15 |
| 4. Связности и гомоморфизм Вейля . . . . .                    | 18 |
| 5. Векторные расслоения и классы Чженя . . . . .              | 24 |
| Глава 2. Локально тривиальная и картановская теория . . . . . | 32 |
| 6. Локально тривиальные квантовые расслоения . . . . .        | 33 |
| 7. Полуклассические дифференциальные исчисления . . . . .     | 41 |
| 8. Связности в полуклассической теории . . . . .              | 49 |
| Глава 3. Связности и препятствия . . . . .                    | 55 |
| 9. Существование регулярных связностей . . . . .              | 56 |
| 10. Случай векторных расслоений . . . . .                     | 63 |
| Список литературы . . . . .                                   | 71 |

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная работа посвящена теории характеристических классов алгебр, на которых кодействует та или иная квантовая группа или, более общо, произвольная алгебра Хопфа.

С формальной точки зрения такие объекты аналогичны (точнее, двойственны) пространствам, на которых действует группа Ли. В самом деле, если рассмотреть алгебры функций на пространстве и на группе, то отображение, двойственное умножению на элементы группы, определит обратный гомоморфизм на указанных алгебрах, удовлетворяющий (при некоторых не слишком ограничительных предположениях) всем условиям, задающим кодействие.

Преимущество такого чисто алгебраического подхода состоит в возможности рассматривать не только коммутативные алгебры, тем самым значительно расширяя область применимости теории. Конечно, полученные при помощи подобного обобщения результаты невозможно интерпретировать геометрически, однако в последнее время, прежде всего, в рамках так называемой некоммутативной геометрии, появились многочисленные примеры некоммутативных алгебр, тесно связанных с геометрическими объектами, изучение которых, таким образом, приносит значительную информацию о самом объекте. Прежде всего речь идет о  $C^*$ -алгебре слоения. Кроме того, можно рассматривать скрещенные произведения алгебр функций на многообразиях и групповых алгебр (дискретных) групп, изучение которых дает много информации о действии группы. Два класса естественно возникающих некоммутативных алгебр предоставляет теория групп и алгебр Ли: универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли и алгебры функций относительно свертки. Многочисленные примеры важных для приложений некоммутативных алгебр происходят из теории деформационного квантования, квантовой механики и квантовой теории поля.

Все перечисленные выше виды некоммутативных алгебр дают широкое поле для применения идей и методов некоммутативной геометрии, одним из разделов которой является теория некоммутативных главных расслоений.

Термин «некоммутативная геометрия» был предложен в начале 1980-х гг. французским математиком А. Конном в связи с его исследованиями по теории слоений [8]. Во многих важных для приложений случаях в силу того, что пространство слоев рассматриваемого слоения нехаусдорфово, алгебра непрерывных функций на нем состоит лишь из постоянных функций. Тем не менее оказалось, что вместо нее можно рассматривать *некоммутативную*  $C^*$ -алгебру. Применяя к этой алгебре соответствующим образом приспособленные классические конструкции, как если бы она на самом деле была алгеброй функций на некотором многообразии, А. Конн получил важные для приложений результаты.

Этот принцип лежит в основании всей некоммутативной геометрии: хотя некоммутативные алгебры не могут быть отождествлены с алгебрами функций ни на каком топологическом пространстве, полезно рассматривать их в таком качестве и по мере возможностей применять к ним те же методы, которые используются в обычной дифференциальной геометрии. На этом пути были получены многочисленные результаты, прежде всего в теории характеристических классов (см. [1, 2, 8, 15]). Оказалось, что конструкция Чженя—Вейля, позволяющая строить характеристические классы векторных расслоений над гладкими многообразиями, почти дословно переносится на случай конечно порожденных проективных модулей над произвольными ассоциативными унитарными алгебрами.

С другой стороны, известно, что в классическом случае характеристические классы векторных расслоений лежат в образе гомоморфизма Вейля ассоциированного главного расслоения. Поэтому естественным желанием исследователей было построить аналогичную конструкцию и в некоммутативном случае.

На этом пути в первую очередь необходимо найти замену структурной группы некоммутативного главного расслоения. Ясно, что «некоммутативными аналогами» групп Ли являются алгебры Хопфа. Однако произвольная алгебра Хопфа — слишком общий объект для этих целей. Достаточно богатый класс алгебр Хопфа, обладающих многими свойствами алгебр функций на группах Ли, был обнаружен в середине 1980-х гг. Речь идет о квантовых группах, появившихся одновременно в работах нескольких математиков (см., например, [4, 23]).

В течение 1990-х гг. было предпринято несколько попыток создать на основе теории квантовых групп разумную теорию некоммутативных (квантовых) главных расслоений и изучить геометрию с «квантовой структурной группой». К числу таких работ относятся, например, [18, 20]. Наиболее последовательная и развитая теория была создана югославским математиком М. Джорджевичем (М. Đurđević). Не вдаваясь в подробности его определений, изложенных в основном тексте (см. гл. 1), отметим, что одной из главных преодоленных им трудностей было отыскание правильной алгебраической интерпретации свободного действия группы на пространстве. Тем интереснее кажется факт, что это условие оказалось слегка ослабленным определением «расширения Галуа—Хопфа», объекта, давно изучавшегося в алгебре (см., например, [16]). Работам Джорджевича посвящена большая часть данного обзора (гл. 1 и часть гл. 2).

## ГЛАВА 1

### КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ И ГЛАВНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

В этой главе приводятся определения и обсуждаются основные свойства квантовых групп и квантовых главных расслоений. В теории квантовых групп нашими основными источниками являются работы С. Вороновича [23–25]. Следует указать, что определения и результаты, которыми мы пользуемся, основаны на интерпретации квантовых групп как некоммутативных алгебр функций на «квантовом пространстве», а не как деформированных универсальных обертывающих алгебр. Такое описание принято в большинстве работ, посвященных вопросу. То, что эти два подхода эквивалентны, следует, например, из результатов основополагающей работы [4]. Теории квантовых

групп посвящен первый из пяти разделов данной главы. Его содержание естественно разбивается на три части. Во-первых, мы даем определение и описываем основные свойства квантовых групп, в частности, вводим понятие классической части квантовой группы. Далее мы описываем свойства «дифференциальных исчислений» на квантовых группах и излагаем основы теории представлений квантовых групп ровно в том объеме, который нам потребуется позднее для работы с главными расслоениями. Далее мы последовательно излагаем теорию квантовых главных расслоений, связностей на них и характеристических классов, при этом мы опираемся на работы М. Джорджевича [9–13]. Некоторые другие подходы к теории квантовых главных расслоений и вообще некоммутативной дифференциальной геометрии с квантовыми структурными группами можно найти также в [18,20]. Из результатов этой главы для дальнейшего особенно важны конструкция гомоморфизма Вейля (раздел 4) и конструкция характеристических классов ассоциированных векторных расслоений (раздел 5).

## 1. КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ

**Определение 1.1** (см. [23]). Компактной матричной псевдогруппой  $G$ , или квантовой группой, называется  $C^*$ -алгебра  $A$ , для которой определен  $*$ -гомоморфизм  $\hat{\phi} : A \rightarrow A \otimes A$  и в которой выделена всюду плотная  $*$ -подалгебра  $\mathcal{A}$ , порожденная элементами  $(u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  так, что выполняются следующие условия.

1) Ограничение отображения  $\hat{\phi}$  на  $\mathcal{A}$  задает отображение  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ , при этом

$$\phi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}. \quad (1.1)$$

2) Задан  $*$ -гомоморфизм  $\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})\phi = \text{id}_{\mathcal{A}} = (\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon)\phi. \quad (1.2)$$

3) Задан антиизоморфизм  $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  такой, что

$$m(\kappa \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})\phi = \varepsilon = m(\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \kappa)\phi, \quad (1.3)$$

$$\phi(\kappa(u)) = (\kappa \otimes \kappa)T(\phi(u)), \quad (1.4)$$

где  $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  — умножение, а  $T : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  — тасующее отображение,

$$T(a \otimes b) = b \otimes a.$$

4) Для всех  $u \in \mathcal{A}$  выполняется равенство

$$\kappa(\kappa(u^*)^*) = u.$$

Равенства (1.1)–(1.4) показывают, что отображения  $\phi$ ,  $\kappa$  и  $\varepsilon$  задают на  $\mathcal{A}$  структуру алгебры Хопфа. В самом деле, из равенства (1.1) и того факта, что  $\mathcal{A}$  порождена элементами  $u_{ij}$ , следует, что выполняется равенство

$$(\phi \otimes \text{id})\phi = (\text{id} \otimes \phi)\phi, \quad (1.5)$$

т.е. коумножение  $\phi$  коассоциативно, и все аксиомы алгебры Хопфа выполняются (при этом отображения  $\kappa$  и  $\varepsilon$  служат соответственно антиподом и коединицей). К сожалению, в общем случае не существует непрерывных отображений, распространяющих  $\kappa$  и  $\varepsilon$  на всю алгебру  $A$ , поэтому мы не можем говорить, что  $C^*$ -алгебра  $A$  является  $C^*$ -алгеброй Хопфа.

В дальнейшем будем работать исключительно с алгеброй  $\mathcal{A}$  — «алгеброй гладких функций на квантовой группе», поэтому мы зачастую будем называть квантовой группой саму алгебру  $\mathcal{A}$  и говорить «квантовая группа  $\mathcal{A}$ », а не «квантовая группа  $G$ ». Приведем примеры квантовых групп.

**Пример 1.1** (Классические матричные группы Ли). Пусть  $G \subseteq \text{GL}_N(\mathbb{C})$  — компактная матричная группа Ли,  $C^*$  — алгебра непрерывных функций на  $G$ ,  $C(G)$  коммутативна. Выберем в  $C(G)$  всюду плотную подалгебру  $\mathcal{A}$ , состоящую из полиномиальных функций от матричных элементов.

Алгебра  $\mathcal{A}$  порождена набором функций  $(w_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  на группе  $G$ ; значение функции  $w_{ij}$  на элементе  $g \in G$  равно элементу, стоящему на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы, задающей  $g$ . Коумножение  $\phi$  в  $\mathcal{A}$  задается по правилу

$$\sum_{(f)} f_{(1)}(g)f_{(2)}(h) = f(gh)$$

для любых  $g, h \in G$ , если  $\sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)} = \phi(f)$ . Из формулы для произведения матриц следует, что коумножение функций  $w_{ij}$  задается формулой

$$\phi(w_{ij}) = \sum_{k=1}^n w_{ik} \otimes w_{kj}.$$

Антипод  $\kappa$  определяется как значение функции на обратном элементе:

$$\kappa(f)(g) = f(g^{-1}),$$

а коединица в  $\mathcal{A}$  — это значение функций из  $\mathcal{A}$  на единице группы  $G$ .

Несложно проверить, что выполняются все условия определения 1.1. Полученная таким образом квантовая группа  $G$  задается коммутативными алгебрами  $A$  и  $\mathcal{A}$ . Верно и обратное: любая квантовая группа  $G$ , у которой алгебра  $\mathcal{A}$  коммутативна, совпадает с некоторой квантовой группой из описанных в этом примере (см. [23]).

В дальнейшем мы будем работать исключительно с «алгебрами гладких функций  $\mathcal{A}$ », поэтому в оставшихся примерах мы ограничимся описаниями алгебр  $\mathcal{A}$ .

**Пример 1.2** (квантовая группа  $SU_\mu(2)$ ). Матрица образующих элементов  $u$  имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где  $\mu \in (-1; 1) \setminus \{0\}$  — параметр. Соотношения, которым удовлетворяют элементы  $\{\alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*\}$ :

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* + \mu^2\gamma\gamma^* &= 1, & \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma &= 1, \\ \alpha\gamma &= \mu\gamma\alpha, & \alpha\gamma^* &= \mu\gamma^*\alpha, & \gamma\gamma^* &= \gamma^*\gamma. \end{aligned}$$

Коединица  $\varepsilon$  задается формулами  $\varepsilon(\alpha) = 1$ ,  $\varepsilon(\gamma) = 0$ . Антипод  $\kappa$  определяется на образующих элементах  $u_{ij}$  формулой

$$\kappa(u_{ij}) = u_{ji}^* \quad (1.7)$$

или, в терминах  $\{\alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*\}$ :

$$\begin{aligned} \kappa(\alpha) &= \alpha^*, & \kappa(-\mu\gamma^*) &= \gamma^*, \\ \kappa(\gamma) &= -\mu\gamma, & \kappa(\alpha^*) &= \alpha. \end{aligned}$$

**Пример 1.3** (квантовые группы  $SU_\mu(n)$ ). Пусть  $\mu \in (-1; 1) \setminus \{0\}$  — произвольное число. Тогда  $SU_\mu(n)$  — это алгебра, порожденная элементами  $(u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_{ij}u_{kj}^* &= \delta_{kj} \cdot 1, & \sum_{j=1}^n u_{ji}^*u_{jk} &= \delta_{ik} \cdot 1, \\ \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_n j_n} E_{j_1 \dots j_n} &= E_{i_1, \dots, i_n} \cdot 1, & i_1, \dots, i_n &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $E_{i_1 \dots i_n} = (-\mu)^{I(i)}$ ,  $I(i)$  — число инверсий в последовательности  $i_1, \dots, i_n$ . Антипод определяется формулой (1.7), а коединица — правилом  $\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$ .



**Пример 1.4** (универсальная квантовая группа  $U_F(n)$ ). Пусть  $F$  — положительно определенная матрица в  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  такая, что  $\text{tr}(F) = \text{tr}(F^{-1})$ . Тогда мы можем рассматривать алгебру  $U_F(n)$ , порожденную элементами матрицы  $u = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  и соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_{ij} u_{kj}^* &= \delta_{ik} \cdot 1, & \sum_{j=1}^n u_{ji}^* u_{jk} &= \delta_{ik} \cdot 1, \\ \sum_{j=1}^n u_{ij}^* u_{kj}^F &= \delta_{ik} \cdot 1, & \sum_{j=1}^n u_{ji}^F u_{jk}^* &= \delta_{ik} \cdot 1, \end{aligned}$$

где  $u^F = FuF^{-1}$ . Антипод задается формулой (1.7), а коединица — правилом  $\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$ .

Пусть теперь  $\mathcal{A}$  — произвольная квантовая группа. Рассмотрим множество  $*$ -характеров алгебры  $\mathcal{A}$  (т.е. множество  $*$ -гомоморфизмов алгебры  $\mathcal{A}$  в  $\mathbb{C}$ ). Формула

$$[\chi_1 \cdot \chi_2](a) = \sum_{(a)} \chi_1(a_{(1)}) \chi_2(a_{(2)}), \quad a \in \mathcal{A}, \quad (1.8)$$

задает умножение в множестве характеров (мы воспользовались записью

$$\phi(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)},$$

предложенной в [21]). Как доказано в [23], эта операция превращает множество характеров на  $\mathcal{A}$  в компактную подгруппу в унитарной группе  $U(n)$ ,  $n$  — размерность матрицы  $u$  из определения 1.1.

**Определение 1.2.** Указанная группа называется *классической частью* квантовой группы  $\mathcal{A}$  и обозначается  $G_{\text{cl}}$  или  $\mathcal{A}_{\text{cl}}$  (второе обозначение мы будем часто использовать при обсуждении полиномиальных функций на  $G_{\text{cl}}$ ).

Во многих случаях можно явно указать, какая группа будет классической частью той или иной квантовой группы. Так, например, в рассмотренных выше примерах классическими частями будут: в случае классических матричных групп Ли (пример 1.1) — сама группа  $G$ , в случае  $SU_\mu(2)$  (пример 1.2) —  $S^1$ , в случае квантовой группы  $SU_\mu(n)$  (пример 1.3) —  $(n-1)$ -мерный тор  $T^{n-1}$ . Классическая часть универсальной квантовой группы  $U_F(n)$  (пример 1.4) зависит от структуры корневых пространств оператора  $F$  (см. [10]). Наконец, укажем, что алгебру Ли  $\text{lie}(\mathcal{A}_{\text{cl}})$  можно рассматривать как множество таких линейных отображений  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , что

$$X(ab) = X(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)X(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Заметим, что формула

$$s(a)(\chi) = \chi(a), \quad a \in \mathcal{A}, \quad \chi \in G_{\text{cl}},$$

задает отображение  $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{cl}}$ . Нетрудно проверить, что это отображение является сюръективным морфизмом алгебры Хопфа  $\mathcal{A}$  на алгебру полиномиальных функций на  $G_{\text{cl}}$  (см. пример 1.1).

Теперь кратко расскажем о том, что мы будем называть дифференциальным исчислением на квантовой группе. Пусть  $A$  — произвольная унитарная алгебра. Будем называть дифференциальным исчислением на алгебре  $A$  такой бимодуль  $\Gamma$  над  $A$ , для которого существует отображение

$$d : A \rightarrow \Gamma, \quad d(ab) = d(a)b + ad(b) \quad \forall a, b \in A.$$

При этом любой элемент  $\eta \in \Gamma$  должен быть представим в виде  $\eta = \sum_k a_k db_k$ .

**Пример 1.5.** Рассмотрим множество

$$A^2 \subseteq A \otimes A, \quad A^2 = \left\{ \sum_k a_k \otimes b_k \mid \sum_k a_k b_k = 0 \right\}.$$

Отображение  $d$  задается формулой  $dx = 1 \otimes x - x \otimes 1$ . Несложно проверить, что все условия выполнены. Это дифференциальное исчисление будем называть тривиальным и обозначать  $\Gamma_{\text{triv}}$  или  $\Omega_{\text{triv}}^0(A)$ .

В случае, когда  $A = \mathcal{A}$  — квантовая группа, будем накладывать на дифференциальное исчисление  $\Gamma$  несколько дополнительных условий. Именно, потребуем, чтобы формулы

$$\phi_\Gamma \left( \sum_k a_k db_k \right) = \sum_{k, (a_k), (b_k)} a_{k,(1)} b_{k,(1)} \otimes a_{k,(2)} db_{k,(2)}, \quad (1.9)$$

$$\Gamma \phi \left( \sum_k a_k db_k \right) = \sum_{k, (a_k), (b_k)} a_{k,(1)} db_{k,(1)} \otimes a_{k,(2)} b_{k,(2)} \quad (1.10)$$

корректно задавали отображения  $\phi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathcal{A} \otimes \Gamma$  и  $\Gamma \phi : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \mathcal{A}$  и чтобы формула

$$(adb)^* = d(b^*)a^* \quad (1.11)$$

корректно определяла  $*$ -структуру на  $\Gamma$ . Дифференциальное исчисление, удовлетворяющее всем этим условиям, будем называть *биковариантным*. Если же выполняется только одно из условий (1.9) или (1.10) (и условие (1.11)), то такое дифференциальное исчисление будем называть *левоковариантным* (соответственно, *правоковариантным*).

**Пример 1.6.** Если  $\mathcal{A}$  — алгебра полиномиальных функций на матричной группе Ли, то в качестве  $\Gamma$  можно взять пространство  $\Omega^1(G_{cl})$  обыкновенных полиномиальных 1-форм на группе. Конечно, такое дифференциальное исчисление будет биковариантным. Тогда для произвольной квантовой группы  $\mathcal{A}$  можно рассмотреть отображение

$$a \mapsto d(s(b)) \in \Omega^1(G_{cl}),$$

превращающее  $\Omega^1(G_{cl}) = \Gamma_{cl}$  в дифференциальное исчисление на  $\mathcal{A}$ . Это дифференциальное исчисление, вообще говоря, не является ни лево-, ни правоковариантным. Однако указанную конструкцию можно исправить. Рассмотрим отображения

$$s_l : a \otimes b \mapsto \sum_{(a), (b)} a_{(1)} b_{(1)} \otimes s(a_{(2)}) d(s(b_{(2)})) \in \mathcal{A} \otimes \Gamma_{cl}, \quad (1.12)$$

$$s_r : a \otimes b \mapsto \sum_{(a), (b)} s(a_{(1)}) d(s(b_{(1)})) \otimes a_{(2)} b_{(2)} \in \Gamma_{cl} \otimes \mathcal{A}, \quad (1.13)$$

$$s_{bi} : a \otimes b \mapsto \sum_{(a), (b)} a_{(1)} b_{(1)} \otimes s(a_{(2)}) d(s(b_{(2)})) \otimes a_{(3)} b_{(3)} \in \mathcal{A} \otimes \Gamma_{cl} \otimes \mathcal{A}. \quad (1.14)$$

Образы этих отображений, очевидно, будут соответственно лево-, право- и биковариантным дифференциальным исчислением на квантовой группе  $\mathcal{A}$ . Можно доказать, что образ отображения (1.12) совпадает с пространством

$$\mathcal{A} \square_{\mathcal{A}_{cl}} \Gamma_{cl} \stackrel{\text{def}}{=} \ker \left( ((\text{id} \otimes s)\phi) \otimes \text{id} - \text{id} \otimes \phi_{\Gamma_{cl}} : \mathcal{A} \otimes \Gamma_{cl} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{cl} \otimes \Gamma_{cl} \right),$$

— тензорным произведением  $\mathcal{A}$  и  $\Gamma_{cl}$  над  $\mathcal{A}_{cl}$ . Аналогично, для (1.13) образом служит пространство  $\Gamma_{cl} \square_{\mathcal{A}_{cl}} \mathcal{A}$ , а для (1.14) —  $\mathcal{A} \square_{\mathcal{A}_{cl}} \Gamma_{cl} \square_{\mathcal{A}_{cl}} \mathcal{A}$ .

**Теорема 1.1** (см. [10, 24]). (i) Пусть  $\Gamma$  — левоковариантное дифференциальное исчисление. Введем обозначение

$$\Gamma_{inv} = \{\omega \in \Gamma \mid \phi_\Gamma(\omega) = 1 \otimes \omega\}.$$

Тогда справедливо разложение  $\Gamma \cong \mathcal{A} \otimes \Gamma_{inv}$ . (Для правоковариантного дифференциального исчисления справедливо аналогичное утверждение, только  $\Gamma_{inv}$  следует заменить на аналогичное пространство  ${}_{inv}\Gamma$ .)

(ii) Рассмотрим отображение

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma, \quad \pi(a) = \kappa(a_1) d(a_2)$$

(опустили очевидный знак суммы). Тогда  $\pi$  — эпиморфное отображение  $\ker(\varepsilon)$  на  $\Gamma_{inv}$ . Ядро  $\mathcal{R}_\Gamma$  отображения  $\pi$  является правым идеалом в  $\ker(\varepsilon)$ . (Например, идеал, соответствующий  $\Gamma_{triv}$ , равен нулю, и отображение  $\pi$  в этом случае принимает вид  $\pi(a) = a - \varepsilon(a)$ .)

Если при этом  $\Gamma$  — биковариантное дифференциальное исчисление, удовлетворяющее условию (1.11), то

$$\text{ad}(\mathcal{R}_\Gamma) \subseteq \mathcal{R}_\Gamma \otimes \mathcal{A}, \quad \kappa(\mathcal{R}_\Gamma^*) = \mathcal{R}_\Gamma.$$

Здесь  $\text{ad} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  — присоединенное кодействие:

$$\text{ad}(a) = \sum_{(a)} a_{(2)} \otimes \kappa(a_{(1)}) a_{(3)}.$$

Пусть  $\Gamma$  — произвольное дифференциальное исчисление на произвольной алгебре  $\mathcal{A}$ . Самый простой способ продолжить его до «исчисления дифференциальных форм высших порядков» таков. Рассмотрим факторалгебру

$$\Gamma^\wedge = \Gamma^{\otimes \mathcal{A}} / S,$$

где  $S$  — идеал в  $\Gamma^{\otimes \mathcal{A}}$ , порожденный пространством

$$S^2 \subseteq \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma, \quad S^2 = \left\{ \sum_k da_k \otimes db_k \mid \sum_k a_k db_k = 0 \right\}.$$

Очевидно, что дифференциал  $d : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$  продолжается до дифференциала  $d : \Gamma^\wedge \rightarrow \Gamma^\wedge$ , обладающего всеми свойствами дифференциала градуированной алгебры. Эту алгебру также будем называть дифференциальным исчислением на квантовой группе. Очевидно, полученное распространение универсально в следующем смысле (см. [10]).

**Предложение 1.2.** Пусть  $\Omega$  — произвольная дифференциальная градуированная алгебра с дифференциалом  $d_\Omega$ . Пусть  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \Omega$  — такой гомоморфизм, что отображение  $\Gamma \rightarrow \Omega$ ,  $\text{ad } b \mapsto \varphi(a)d_\Omega(\varphi(b))$  корректно определено. Тогда существует единственное продолжение  $\varphi^\wedge : \Gamma^\wedge \rightarrow \Omega$  гомоморфизма  $\varphi$  до гомоморфизма дифференциальных градуированных алгебр.

В частности, из теоремы 1.1 и предложения 1.2 следует, что для дифференциального исчисления  $\Gamma_{\text{triv}}^\wedge$ , построенного по  $\Gamma_{\text{triv}}$ , определены эпиморфные отображения на все возможные дифференциальные исчисления на квантовой группе.

Если  $\Gamma$  — биковариантное дифференциальное исчисление, то из предложения 1.2 следует, что отображения  $\phi_\Gamma$  и  $\Gamma\phi$  продолжаются до аналогичных отображений  $\phi_{\Gamma^\wedge}$  и  $\Gamma^\wedge\phi$ . Тогда из теоремы 1.1 следует, что существует разложение

$$\Gamma^\wedge \cong \mathcal{A} \otimes \Gamma_{\text{inv}}^\wedge, \quad \Gamma_{\text{inv}}^\wedge = \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes} / \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes} \cap S,$$

причем идеал  $S_{\text{inv}} = \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes} \cap S$  порожден пространством

$$S_{\text{inv}}^2 = S^2 \cap (\Gamma_{\text{inv}} \otimes \Gamma_{\text{inv}}), \quad S^2 = \left\{ \sum_{(a)} \pi(a_{(1)}) \otimes \pi(a_{(2)}) \mid a \in \mathcal{R}_\Gamma \right\}.$$

Кроме того,  $*$ -структура на  $\Gamma$  продолжается до  $*$ -структуры на дифференциальной градуированной алгебре  $\Gamma^\wedge$ . В терминах отображения  $\pi$  дифференциал и  $*$ -структура на  $\Gamma^\wedge$  задаются формулами

$$da = a_{(1)}\pi(a_{(2)}), \quad d(\pi(a)) = -\pi(a_{(1)}) \wedge \pi(a_{(2)}), \quad \pi(a)^* = -\pi(\kappa(a)^*).$$

Например, отсюда следует, что  $\Gamma_{\text{triv}}^\wedge$  совпадает с кобар-резольвентой алгебры  $\mathcal{A}$ .

Наконец, отметим, что правое кодействие  $\Gamma\phi$  при ограничении на пространство  $\Gamma_{\text{inv}}$  определяет кодействие  $\varpi : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Gamma_{\text{inv}} \otimes \mathcal{A}$ . В терминах кодействия  $\pi$  имеем

$$\varpi\pi = (\pi \otimes \text{id}) \text{ad}.$$

Другие примеры дифференциальных исчислений на квантовых группах можно найти в [24]. Полная классификация дифференциальных исчислений на некоторых классах квантовых групп содержится, например, в [14, 19].

Перейдем к представлениям квантовых групп. Конечномерным представлением  $u$  квантовой группы  $\mathcal{A}$  будем называть пару  $u = (\tilde{u}, H_u)$ , где  $\tilde{u} = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n_u}$  — матрица с элементами из

$\mathcal{A}$ ,  $H_u = \mathbb{C}^{n_u}$  — конечномерное гильбертово пространство, на котором справа кодействует квантовая группа  $\mathcal{A}$ , т.е. определено отображение

$$\begin{aligned} \Delta_u &: H_u \rightarrow H_u \otimes \mathcal{A}, \\ (\Delta_u \otimes \text{id})\Delta_u &= (\text{id} \otimes \phi)\Delta_u, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta_u = \text{id}, \quad (1.16)$$

так что в некотором базисе  $e_1, \dots, e_{n_u}$  действие задается формулой

$$\Delta_u(e_i) = \sum_k e_k \otimes u_{ki}, \quad i = 1, \dots, n_u. \quad (1.17)$$

Элементы  $(u_{ij})_{i,j=1,\dots,n_u}$  будем называть матричными элементами представления  $u$  в базисе  $e_1, \dots, e_{n_u}$ . Из (1.15) и (1.16) следует, что

$$\phi(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}, \quad (1.18)$$

$$\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}. \quad (1.19)$$

Из определения 1.1, в частности, следует, что матрица  $(u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  элементов, порождающих  $\mathcal{A}$ , задает представление квантовой группы  $\mathcal{A}$  на пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Это представление будем называть фундаментальным.

Суммой  $u \oplus v$  представлений  $u$  и  $v$  называется представление на пространстве  $H_u \oplus H_v$ , заданное следующей матрицей размерности  $(n_u + n_v) \times (n_u + n_v)$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} & 0 \\ 0 & \tilde{v} \end{pmatrix}$$

Аналогично, тензорным произведением представлений  $u$  и  $v$ , взятых в указанном порядке, называется представление  $u \times v$  на пространстве  $H_u \otimes H_v$ , определяемое матрицей размерности  $n_u n_v \times n_u n_v$  с элементами  $u_{ij} v_{kl}$ .

Морфизмом представления  $u$  в представление  $v$  называется линейное отображение  $f : H_u \rightarrow H_v$  такое, что

$$(f \otimes \text{id})\Delta_u = \Delta_v f.$$

Множество морфизмов представлений является векторным пространством и обозначается  $\text{Mor}(u, v)$ . Представления  $u$  и  $v$  называются изоморфными, если существует морфизм  $f \in \text{Mor}(u, v)$ , который является изоморфизмом соответствующих векторных пространств. Если представления  $u$  и  $v$  изоморфны, то их матрицы связаны соотношением  $f^{-1} \tilde{v} f = \tilde{u}$ . В отличие от классического случая, представления  $u \times v$  и  $v \times u$ , вообще говоря, не изоморфны, если только квантовая группа не совпадает с одной из групп из примера 1.1.

Представление  $u$  называется приводимым, если в пространстве  $H_u$  существует ненулевое подпространство  $H$ , отличное от  $H_u$ , для которого выполняется вложение  $\Delta_u(H) \subseteq H \otimes \mathcal{A}$ . В противном случае представление  $u$  называется неприводимым. Представление  $u$  вполне приводимо, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых представлений.

Для каждого представления  $u$  квантовой группы  $\mathcal{A}$  определено сопряженное, или контраградиентное представление  $\bar{u}$ , действующее на пространстве  $H_{\bar{u}} = H_u^*$  линейных функционалов на  $H_u$ . Матрица представления в двойственном базисе  $\bar{u}, \tilde{\bar{u}}$  определяется формулой

$$\bar{u}_{ij} = \kappa(u_{ji}).$$

Скалярное произведение на  $H_u$  задает антиизоморфизм векторных пространств  $j_u : H_u \rightarrow H_u^* = H_{\bar{u}}$ . Оператор

$$j_{\bar{u}} \circ j_u = C_u : H_{\bar{u}} = H_u^{**} = H_u \rightarrow H_u$$

является морфизмом представлений; он называется каноническим морфизмом и представляет собой положительно определенное линейное отображение, однозначно определяемое требованием

$\text{tr}(C_u) = \text{tr}(C_u^{-1})$ . Пусть  $(\cdot, \cdot)_u$  — эрмитово скалярное произведение на  $H_u$ . Тогда справедлива следующая формула, связывающая скалярные произведения в сопряженных представлениях:

$$(f, g)_{\bar{u}} = (j_u^{-1}(g), C_u j_u^{-1}(f))_u.$$

Для любой пары сопряженных представлений  $u, \bar{u}$  определены следующие канонические морфизмы представлений:

- 1) спаривание  $\gamma^u : H_u^* \otimes H_u \rightarrow H_{\emptyset} = \mathbb{C}$  (здесь  $\emptyset$  — тривиальное представление квантовой группы  $\mathcal{A}$  на пространстве  $\mathbb{C}$ , матрица которого состоит из единицы группы  $\mathcal{A}$ );
- 2) вложение единичного оператора  $I_u : \mathbb{C} \rightarrow H_u \otimes H_u^*$ .

Аналогично, меняя местами  $u$  и  $\bar{u}$ , получаем морфизмы  $\gamma_u : H_u \otimes H_u^* \rightarrow \mathbb{C}$  и  $I_u : \mathbb{C} \rightarrow H_u^* \otimes H_u$ ; в явном виде:

$$\begin{aligned} \gamma^u(f \otimes x) &= f(x), & \gamma_u(x \otimes f) &= f(C_u(x)), \\ I_u(1) &= \sum_{i=1}^{n_u} e_i \otimes e_i^*, & I^u(1) &= \sum_{i,j=1}^{n_u} [C_u^{-1}]_{ji} e_i^* \otimes e_i; \end{aligned}$$

здесь  $e_1^*, \dots, e_{n_u}^*$  — двойственный базис в пространстве  $H_{\bar{u}} = H_u^*$ .

Представления квантовой группы  $\mathcal{A}$  образуют категорию. Согласно терминологии [25], такая категория называется конкретной моноидальной  $W^*$ -категорией. Эту категорию будем обозначать  $R(G)$  или  $R(\mathcal{A})$ .

**Теорема 1.3** (см. [23, 25]). (i) *Все представления любой квантовой группы  $\mathcal{A}$  вполне приводимы.*

(ii) *Любое неприводимое представление квантовой группы встречается в разложении на неприводимые представления подходящей тензорной степени фундаментального представления или представления, сопряженного фундаментальному.*

(iii) *Любое представление квантовой группы эквивалентно унитарному представлению, т.е. такому представлению, матрица которого является унитарным элементом в тензорном произведении  $B(H_u) \otimes \mathcal{A}$ , где  $B(H_u)$  — алгебра операторов на гильбертовом пространстве  $H_u$ . Для матрицы унитарного представления выполнено условие*

$$u_{ij}^* = \kappa(u_{ji}).$$

(iv) *Пусть  $\mathcal{T}$  — множество неприводимых неэквивалентных представлений квантовой группы  $\mathcal{A}$ . Тогда алгебра  $\mathcal{A}$  как векторное пространство распадается в прямую сумму подпространств  $\tilde{H}_u$ , порожденных матричными элементами  $u_{ij}^\alpha$  представлений  $\alpha \in \mathcal{T}$ . При этом все элементы  $u_{ij}^\alpha$  между собой линейно независимы.*

(v) *Любая квантовая группа  $\mathcal{A}$  однозначно восстанавливается по своей категории представлений  $R(\mathcal{A})$ .*

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ РАССЛОЕНИЙ. ПРИМЕРЫ

**Определение 2.1.** Некоммутативным (или квантовым) главным расслоением  $P$  с базой  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}$  — унитарная, ассоциативная, но не обязательно коммутативная  $*$ -алгебра) и структурной группой  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A}$  — алгебра гладких функций на квантовой группе  $G$ ) называется унитарная ассоциативная (но не коммутативная)  $*$ -алгебра  $\mathcal{B}$ , для которой существует гомоморфизм  $*$ -алгебр  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$  такой, что

$$(\text{id} \otimes \phi)F = (F \otimes \text{id})F, \tag{2.1}$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon)F = \text{id}, \tag{2.2}$$

где  $\phi$  и  $\varepsilon$  — соответственно коумножение и коединица квантовой группы  $\mathcal{A}$ . При этом должны быть выполнены следующие два условия:

**(КГР1)** существует такое вложение  $*$ -алгебр  $i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$ , что

$$i(\mathcal{M}) = \{b \in \mathcal{B} \mid F(b) = b \otimes 1\};$$

**(КГР2)** отображение  $X : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ , заданное формулой

$$X(c \otimes b) = \sum_k cb_k \otimes \tilde{b}_k, \quad (2.3)$$

где  $\sum_k b \otimes \tilde{b}_k = F(b) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ , эпиморфно.

Равенства (2.1) и (2.2) означают, что алгебра Хопфа  $\mathcal{A}$  кодействует на алгебре  $\mathcal{B}$  (или что «квантовая группа  $G$  действует на  $P$ »). Будем иногда опускать приставку «ко-» и говорить, что «алгебра  $\mathcal{A}$  действует на алгебре  $\mathcal{B}$ » или на какой-либо другой алгебре. В дальнейшем будем отождествлять алгебру  $\mathcal{M}$  и образ вложения  $i$ . Поэтому можно считать, по определению, что база расслоения  $P$  состоит из  $\mathcal{A}$ -инвариантных элементов:

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in \mathcal{B} \mid F(m) = m \otimes 1\}.$$

В самом деле, ясно, что  $1 \in \mathcal{M}$  и что если  $m \in \mathcal{M}$ , то  $m^* \in \mathcal{M}$ . Кроме того, так как отображение  $F$  является гомоморфизмом алгебр, то сумма и произведение любых двух элементов из  $\mathcal{M}$  тоже принадлежат  $\mathcal{M}$ , т.е. множество  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$  является  $*$ -подалгеброй в  $\mathcal{B}$ .

Обсудим условие **(КГР2)**. Заметим прежде всего, что та же самая формула (2.3) может быть использована для того, чтобы задать отображение  $\tilde{X} : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ . Иначе говоря, отображение  $X$  пропускается через  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B}$ . Кроме того, оба отображения, и  $X$ , и  $\tilde{X}$ , являются морфизмами левых  $\mathcal{B}$  модулей. Поэтому условие **(КГР2)** эквивалентно следующему условию:

**(КГР2')** для любого  $a \in \mathcal{A}$  существуют такие элементы  $p_k, q_k \in \mathcal{B}$ , что

$$X\left(\sum_k p_k \otimes q_k\right) = 1 \otimes a.$$

Выясним, наконец, геометрический смысл определения 2.1. В классическом случае главное расслоение  $P$  со структурной группой  $G$  — это пространство, на котором свободно действует группа Ли  $G$ . Действие группы  $G$  задается таким отображением  $f : P \times G \rightarrow P$ , что коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} P \times G \times G & \xrightarrow{f \times \text{id}_G} & P \times G & & P & \xrightarrow{i_1} & P \times G \\ \text{id}_P \times \varphi \downarrow & & \downarrow f & , & \parallel & & \downarrow f \\ P \times G & \xrightarrow{f} & P & & P & \xlongequal{\quad} & P \end{array}$$

Здесь  $\varphi$  — умножение в группе Ли  $G$  и  $i_1(p) = p \times \{e\}$ . База расслоения  $P$  тогда отождествляется с факторпространством  $M = P/G$ .

В соответствии с общей идеологией, описанной во введении, мы должны заменить сами пространства на соответствующие алгебры (гладких) функций и при этом обратить все стрелки в диаграммах. Тогда несложно проверить, что отображение пространств  $f$  при этом превращается в отображение  $*$ -алгебр  $F$ , удовлетворяющее уравнениям (2.1) и (2.2) (ср. раздел 1, определение представлений квантовой группы). База расслоения становится множеством  $\mathcal{M}$   $\mathcal{A}$ -инвариантных элементов алгебры  $\mathcal{B}$ .

В классическом случае условие свободности действия  $f$  эквивалентно инъективности следующего отображения:

$$Y : P \times G \rightarrow P \times P, \quad (p, g) \xrightarrow{Y} (p, p \cdot g),$$

где  $p \cdot g = f(p, g)$ . Очевидно, что образ отображения  $Y$  лежит в подпространстве

$$P \times_M P \stackrel{\text{def}}{=} \{(p, q) \in P \times P \mid \pi(p) = \pi(q)\} \subset P \times P,$$

где  $\pi : P \rightarrow M$  — естественная проекция. Но инъективное отображение пространств, очевидно, индуцирует сюръективное отображение алгебр функций. В результате обращения стрелок в определении отображения  $Y$  получается отображение  $X$  (или  $\tilde{X}$ ). Следовательно условие **(КГР2)** является обобщением классического условия свободности действия структурной группы на пространстве расслоения.

**Замечание 2.1.** Несложно проверить, что на самом деле в классическом случае образ отображения  $Y$  совпадает с пространством  $P \times_M P$ . На языке алгебр функций это утверждение эквивалентно следующему условию:

**(РГХ)** Отображение  $\tilde{X} : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$  — изоморфизм.

В квантовом случае, однако, автору не известно доказательство того, что из условия **(КГР2)** следует изоморфность отображения  $\tilde{X}$ .

Если на алгебре  $\mathcal{B}$  действует справа алгебра Хопфа  $\mathcal{A}$ , так что выполняется условие **(РГХ)**, то говорят, что  $\mathcal{B}$  является *расширением Галуа–Хопфа* алгебры  $\mathcal{M}$  при помощи алгебры Хопфа  $\mathcal{A}$ . Эти объекты изучаются, например в [16].

Закончим данный раздел примерами квантовых главных расслоений.

**Пример 2.1** (тривиальные главные квантовые расслоения). Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольная унитарная  $*$ -алгебра,  $\mathcal{A}$  — квантовая группа. Положим  $\mathcal{B} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ . Кодействие  $F$  на  $\mathcal{B}$  задается формулой  $F(m \otimes a) = m \otimes \phi(a)$ , где  $m \in \mathcal{M}$ ,  $a \in \mathcal{A}$  и  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  — коумножение в квантовой группе  $\mathcal{A}$ . Очевидно, что отображение  $F$  является кодействием (т.е. верны формулы (2.1) и (2.2)) и что алгебра  $\mathcal{M}$  совпадает с множеством  $\mathcal{A}$ -инвариантных элементов этого кодействия.

Проверим, что действие группы  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{B}$  свободно, т.е. что выполняется условие **(КГР2')**. Рассмотрим произвольный элемент  $a \in \mathcal{A}$ . Пусть  $\phi(a) = \sum_k b_k \otimes c_k$ . Тогда для  $p_k = 1 \otimes \kappa(b_k)$  и  $q_k = 1 \otimes c_k$ , очевидно,  $X\left(\sum_k p_k \otimes q_k\right) = 1 \otimes a$ . В частности, сама квантовая группа  $\mathcal{A}$  является тривиальным расслоением над точкой:  $C^\infty(\text{pt}) = \mathbb{C}$ .

**Пример 2.2.** Пусть  $\Gamma^\wedge$  — алгебра (некоммутативных) дифференциальных форм на квантовой группе  $\mathcal{A}$ . Алгебра  $\mathcal{A}$  действует на  $\Gamma^\wedge$  справа (напомним, что мы рассматриваем только биковариантные дифференциальные исчисления). Множество неподвижных точек этого действия состоит из правоинвариантных дифференциальных форм на группе,  $\text{inv}\Gamma^\wedge$  (см. раздел 1). Чтобы проверить выполнение условия **(КГР2')**, достаточно вспомнить, что существует разложение

$$\Gamma^\wedge = \text{inv}\Gamma^\wedge \otimes \mathcal{A}.$$

Далее, так же как в примере 2.1, берем  $p_k = 1 \otimes \kappa(b_k)$ ,  $q_k = 1 \otimes c_k$ , где  $\sum_k b_k \otimes c_k = \phi(a)$ .

**Пример 2.3** (скрещенные произведения). Примеры 2.1 и 2.2 — частные случаи следующей общей конструкции. Пусть  $*$ -алгебра Хопфа  $\mathcal{A}$  действует слева (в обычном смысле!) на унитарной  $*$ -алгебре  $\mathcal{M}$ , так что выполняются следующие условия:

$$a(m \cdot n) = \sum_{(a)} a_{(1)}(m) \cdot a_{(2)}(n), \quad a(1) = \varepsilon(a), \quad a^*(n^*) = (\kappa^{-1}(c)(n))^*,$$

для любого  $a \in \mathcal{A}$ ,  $m, n \in \mathcal{M}$ ,  $\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} = \phi(a)$  и  $a(m)$  — результат действия элемента  $a$  на  $m$ .

Тогда можно определить алгебру  $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$  как векторное пространство  $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A} \cong \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ , а умножение и  $*$ -структура на  $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$  задаются при помощи формул

$$(m \otimes b)(n \otimes c) = \sum_{(b)} mb_{(1)}(n) \otimes b_{(2)}c, \tag{2.4}$$

$$(m \otimes b)^* = \sum_{(b)} b_{(1)}^*(m^*) \otimes b_{(2)}^*. \tag{2.5}$$

На  $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$  справа очевидным образом кодействует алгебра Хопфа  $\mathcal{A}$ , так что множество неподвижных точек этого кодействия совпадает с  $\mathcal{M}$ . Если  $\mathcal{A}$  — квантовая группа, то чтобы доказать, что мы получили квантовое главное расслоение, осталось проверить выполнение условия **(КГР2)**, что делается точно так же, как в предыдущих двух примерах.

Чтобы теперь получить из этой общей конструкции тривиальное главное расслоение примера 2.1, надо положить, что  $a \in \mathcal{A}$  действует на  $m \in \mathcal{M}$  по формуле

$$a(m) = \varepsilon(a)m.$$

В примере 2.2  $\mathcal{M} = \text{inv}\Gamma^\wedge$  и действие задается формулой

$$a(\theta) = \sum_{(a)} a_{(1)}\theta\kappa(a_{(2)}), \quad \theta \in \text{inv}\Gamma^\wedge$$

(см. раздел 1).

Совершенно аналогично можно определить скрещенное произведение в случае, когда алгебра Хопфа действует на унитарной алгебре  $\mathcal{N}$  справа; в этом случае пишут  $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{N}$ . Кроме того, скрещенные произведения можно определить когда алгебра Хопфа  $\mathcal{A}$  действует слева (соответственно, справа) на алгебре  $\mathcal{M}$  и кодействует справа (соответственно, слева) на алгебре  $\mathcal{N}$ . Полученная алгебра обозначается  $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$  (соответственно,  $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{M}$ ). Подробности можно найти, например, в [21] (см. также [20]).

**Пример 2.4** (однородные пространства). Пусть задано вложение квантовых групп  $\tilde{\varphi} : G' \rightarrow G$ , т.е. эпиморфное отображение алгебр Хопфа  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ . Тогда можно построить некоммутативное главное расслоение со структурной группой  $G'$ . Алгеброй гладких функций на пространстве этого расслоения служит  $\mathcal{A}$ , действие  $\mathcal{A}'$  на  $\mathcal{A}$  определяется формулой

$$F_{\mathcal{A}'}(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \varphi(a_{(2)}). \quad (2.6)$$

В силу эпиморфности отображения  $\varphi$  условие **(КГР2)** выполняется. Следовательно,  $(\mathcal{A}, F_{\mathcal{A}'})$  — квантовое главное расслоение со структурной группой  $\mathcal{A}$  и базой

$$\mathcal{M}' = \{a \in \mathcal{A} \mid F_{\mathcal{A}'}(a) = a \otimes 1\}.$$

Заметим, кстати, что эта же конструкция позволяет из произвольного главного расслоения со структурной квантовой группой  $\mathcal{A}$  получить главное  $\mathcal{A}'$ -расслоение.

**Пример 2.5** (замена структурной группы). Пусть задано квантовое главное расслоение  $P = (\mathcal{B}, F)$  и пусть  $f : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  — гомоморфизм квантовых групп (т.е. морфизм алгебр Хопфа). Определим квантовое главное расслоение  $P'$  с базой  $\mathcal{M}$ , ассоциированное с  $P$  при помощи гомоморфизма  $f$ . Именно, рассмотрим подпространство  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}'$ :

$$\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' = \ker(F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}'} - \text{id}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{A}} F = \Phi : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'), \quad (2.7)$$

где

$${}_{\mathcal{A}}F(a') = \sum_{(a')} f(a'_{(1)}) \otimes a'_{(2)}.$$

Пространство  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$  называется тензорным произведением  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}'$  над алгеброй Хопфа  $\mathcal{A}$ .

**Предложение 2.1.** *Пространство  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$  является алгеброй гладких функций на квантовом главном расслоении со структурной группой  $\mathcal{A}'$  и базой  $\mathcal{M}$ , т.е. это алгебра, для которой существует правое кодействие  $F : \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \rightarrow (\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \otimes \mathcal{A}'$  такое, что выполняется условие **(КГР2)**, и подалгебра, неподвижная относительно этого кодействия, изоморфна  $\mathcal{M}$ .*

*Доказательство.* Так как отображения  $F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}'}$  и  $\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{A}} F$  являются гомоморфизмами  $*$ -алгебр, то пространство  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$  является  $*$ -подалгеброй в  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}'$  с единицей  $1 \otimes 1' \in \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ .

Действие группы  $G'$  на  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$  задается как ограничение на  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$  отображения

$$\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi' : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}' \rightarrow (\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}') \otimes \mathcal{A}'$$

(здесь  $\phi'$  — коумножение в  $\mathcal{A}'$ ). В самом деле, очевидно, что

$$\begin{aligned} (F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}'}) (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi') &= F \otimes \phi' = (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \phi') (F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}), \\ (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{A}} F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}'}) (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi') &= \text{id}_{\mathcal{B}} \otimes ({}_{\mathcal{A}}F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}'}) \phi' = \\ &= \text{id}_{\mathcal{B}} \otimes (\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \phi') {}_{\mathcal{A}}F = (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \phi') (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{A}} F). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(\Phi \otimes \text{id}_{\mathcal{A}'}) (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi') = (\text{id}_{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}} \otimes \phi') \Phi,$$



$$(\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi')(\ker \Phi) \subseteq \ker(\Phi) \otimes \mathcal{A}'.$$

Пусть  $\tilde{F} : \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \rightarrow (\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \otimes \mathcal{A}'$  — указанное выше кодействие. Найдем его неподвижную подалгебру. Предположим, что

$$\tilde{F}\left(\sum_i b_i \otimes a'_i\right) = \left(\sum_i b_i \otimes a'_i\right) \otimes 1.$$

Это значит, что

$$\left(\sum_i b_i \otimes a'_i\right) \otimes 1 = \sum_{i, (a'_i)} b_i \otimes a'_{i,(1)} \otimes a'_{i,(2)} = \sum_i b_i \otimes \left(\sum_{(a'_i)} a'_{i,(1)} \otimes a'_{i,(2)}\right),$$

где  $\sum_{(a'_i)} a'_{i,(1)} \otimes a'_{i,(2)} = \phi'(a'_i)$ . Без ограничения общности можно считать, что все  $b_i \in \mathcal{B}$  линейно независимы. Поэтому, сравнивая коэффициенты при  $b_i$ , получаем, что  $\phi'(a'_i) = a'_i \otimes 1$ , для всех  $i$  и, следовательно,  $a'_i \in \mathbb{C}$ . Таким образом,

$$\sum_i b_i \otimes a'_i = \tilde{b} \otimes 1.$$

Но тогда  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \ni \tilde{b} \otimes 1$  и поэтому

$$F(\tilde{b}) \otimes 1 = \tilde{b} \otimes_{\mathcal{A}} F(1) = \tilde{b} \otimes 1 \otimes 1,$$

т.е.

$$F(\tilde{b}) = \tilde{b} \otimes 1, \quad \tilde{b} \in \mathcal{M}.$$

Наконец, осталось доказать, что выполняется условие **(КГР2)**. Однако это утверждение требует более основательного знакомства с устройством алгебры  $\mathcal{B}$  и мы отложим его до раздела 5, посвященного описанию структуры ассоциированных векторных расслоений.  $\square$

**Замечание 2.2.** Пусть биалгебра  $\mathcal{A}$  действует справа на векторном пространстве  $R$  и действует слева на пространстве  $L$ . Тогда точно так же, как и выше, можно определить тензорное произведение над  $\mathcal{A}$  правого  $\mathcal{A}$ -комодуля  $R$  и левого  $\mathcal{A}$ -комодуля  $L$ , пространство  $R \square_{\mathcal{A}} L$ . Ясно, что если  $R$  и  $L$  —  $*$ -алгебры и  $\mathcal{A}$  действует на них гомоморфизмами алгебр, то и пространство  $R \square_{\mathcal{A}} L$  будет алгеброй.

### 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Как обычно, под «дифференциальным исчислением» следует понимать алгебру (некоммутативных) дифференциальных форм на расслоении. Ясно, что для успешной работы с главным расслоением следует потребовать, чтобы эта алгебра была согласована с дифференциальным исчислением на квантовой структурной группе  $\mathcal{A}$ . Точный смысл этого требования становится ясен из определения 3.1 ниже.

Именно, пусть  $P = (\mathcal{B}, F)$  — квантовое главное расслоение над базой  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$  со структурной квантовой группой  $\mathcal{A}$ . Фиксируем на квантовой группе  $\mathcal{A}$  биковариантное дифференциальное исчисление  $\Gamma^\wedge$ .

**Определение 3.1** (см. [11]). Дифференциальным исчислением на квантовом главном расслоении  $P$ , согласованным с  $\Gamma^\wedge$ , называется дифференциальная градуированная  $*$ -алгебра  $\Omega(P, \Gamma^\wedge) = \Omega(P)$ , такая, что

- 1)  $\Omega^0(P) = \mathcal{B}$ ;
- 2)  $\Omega(P)$  порождена  $\Omega^0(P)$  как дифференциальная градуированная алгебра;
- 3) существует такое отображение дифференциальных градуированных алгебр

$$\widehat{F} : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P) \otimes \Gamma^\wedge,$$

что  $\widehat{F}|_{\Omega^0(P)} = F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ .

Заметим, что для любого фиксированного биковариантного дифференциального исчисления  $\Gamma^\wedge$  на квантовой группе  $\mathcal{A}$  на любом квантовом главном расслоении  $P$  существует соответствующее  $\Gamma^\wedge$  дифференциальное исчисление  $\Omega(P, \Gamma^\wedge)$ . В самом деле, достаточно взять в качестве  $\Omega(P)$  тривиальное дифференциальное исчисление  $\Omega_{\text{triv}}(\mathcal{B})$ , существующее для любой ассоциативной унитарной алгебры (см. раздел 1). Напомним, что

$$\Omega_{\text{triv}}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^2 = \left\{ \sum_k b_k \otimes c_k \in \mathcal{B}^{\otimes 2} \mid \sum_k b_k c_k = 0 \right\}.$$

Так как  $F$  — гомоморфизм алгебр, то  $F^{\otimes 2}(\mathcal{B}^2) \subseteq (\mathcal{B} \otimes \mathcal{A})^2$  и, следовательно, отображение  $F$  естественным образом распространяется до отображения

$$\widehat{F}_{\text{triv}}^1 : \Omega_{\text{triv}}^1(\mathcal{B}) \rightarrow \Omega_{\text{triv}}^1(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) = \Omega_{\text{triv}}^1(\mathcal{B}) \otimes \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \otimes \Omega_{\text{triv}}^1(\mathcal{A}),$$

а значит, и до отображения

$$\widehat{F}_{\text{triv}} : \Omega_{\text{triv}}(\mathcal{B}) \rightarrow \Omega_{\text{triv}}(\mathcal{B}) \otimes \Omega_{\text{triv}}(\mathcal{A})$$

указанного типа. С другой стороны, как указано в разделе 1, для любого дифференциального исчисления  $\Gamma^\wedge$  на  $\mathcal{A}$  существует единственный эпиморфизм дифференциальных градуированных алгебр  $g : \Omega_{\text{triv}}(\mathcal{A}) = \Gamma_0^\wedge \rightarrow \Gamma^\wedge$ . Поэтому можно положить

$$\widehat{F} = (\text{id} \otimes g) \widehat{F}_{\text{triv}}, \quad \widehat{F} : \Omega_{\text{triv}}(\mathcal{B}) = \Omega_0(P) \rightarrow \Omega_0(P) \otimes \Gamma^\wedge.$$

С любым дифференциальным исчислением  $\Omega(P)$  на  $P$  можно связать несколько важных градуированных алгебр.

**1.** Прежде всего определим алгебру  $\Omega(\mathcal{M})$ , дифференциальное исчисление на базе  $\mathcal{M}$  расслоения  $P$ :

$$\Omega(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes 1). \quad (3.1)$$

Заметим, что ограничение на  $\Omega(\mathcal{M})$  дифференциала  $d$  алгебры  $\Omega(P)$  переводит алгебру  $\Omega(\mathcal{M})$  в себя. Таким образом,  $\Omega(\mathcal{M})$  является дифференциальной градуированной  $*$ -подалгеброй в  $\Omega(P)$ ; через  $d_{\mathcal{M}}$  мы будем обозначать дифференциал в  $\Omega(\mathcal{M})$ .

Конечно, дифференциальная градуированная  $*$ -подалгебра  $\Omega(\tilde{\mathcal{M}})$  в  $\Omega(P)$ , порожденная  $*$ -алгеброй  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ , лежит в  $\Omega(\mathcal{M})$ . Обратное утверждение, однако, вообще говоря, неверно.

**2.** Определим алгебру  $\mathfrak{hor}(P)$  «горизонтальных дифференциальных форм» на расслоении  $P$ :

$$\mathfrak{hor}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes \mathcal{A}). \quad (3.2)$$

Очевидно, что  $\mathfrak{hor}(P)$  является градуированной  $*$ -подалгеброй в  $\Omega(P)$ , причем  $\Omega(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{hor}(P)$ ,  $\mathfrak{hor}^0(P) = \mathcal{B}$ . Однако в отличие от  $\Omega(\mathcal{M})$ ,  $d(\mathfrak{hor}(P)) \not\subseteq \mathfrak{hor}(P)$ , так что  $\mathfrak{hor}(P)$  не является дифференциальной подалгеброй в  $\Omega(P)$ . Наконец, ограничение на подалгебру  $\mathfrak{hor}(P)$  отображения  $\widehat{F}$  индуцирует на ней правое (ко-)действие квантовой группы  $\mathcal{A}$ . Это действие будем обозначать  $F^\wedge$ .

**3.** Рассмотрим алгебру левоинвариантных дифференциальных форм на квантовой группе  $\mathcal{A}$ :

$$\Gamma_{\text{inv}}^\wedge = \{\theta \in \Gamma_{\text{inv}} \mid \phi_\Gamma^\wedge(\theta) = 1 \otimes \theta\}$$

(см. раздел 1). Напомним, что формула

$$\theta \circ a = \sum_{(a)} \kappa(a_{(1)}) \theta a_{(2)}$$

задает на  $\Gamma_{\text{inv}}^\wedge$  правое действие алгебры  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющее условиям из примера 2.3. Поэтому можем построить по  $\Gamma_{\text{inv}}^\wedge$  и  $\mathfrak{hor}(P)$  скрещенное произведение  $\mathfrak{hor}(P) \rtimes \Gamma_{\text{inv}}^\wedge$  (см. раздел 2), которое естественным образом будет наделено структурой  $*$ -алгебры, на которой справа действует алгебра Хопфа  $\mathcal{A}$  (действие задается как тензорное произведение отображений  $\widehat{F} : \mathfrak{hor}(P) \rightarrow \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A}$  и  $\varpi^\wedge : \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \otimes \mathcal{A}$ ; см. раздел 1).

Кроме того, по правому  $\mathcal{A}$ -комодулю  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  и левому  $\mathcal{A}$ -комодулю  $\Gamma^\wedge$  можно построить тензорное произведение над  $\mathcal{A}$ ,  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \square_{\mathcal{A}} \Gamma^\wedge$  (см. пример 2.5). Это пространство тоже будет  $*$ -алгеброй с правым действием квантовой группы.

**Предложение 3.1.** *Имеет место отождествление*

$$\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \times \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \cong \mathfrak{h}\mathfrak{or} \square_{\mathcal{A}} \Gamma^\wedge,$$

причем действия квантовых групп при этом отождествлении совпадают.

*Доказательство.* Справедливо разложение

$$\Gamma^\wedge \cong \mathcal{A} \otimes \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \quad (3.3)$$

(напомним, что  $\Gamma_{\text{inv}}^{\wedge 0} = \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ ). Левое действие  $\mathcal{A}$  на  $\Gamma^\wedge$  при этом совпадает с отображением  $\phi \otimes \text{id}$ . Несложно заметить, что для любой коалгебры  $C$  и любого правого  $C$ -комодуля  $D$  существует изоморфизм  $D \square_C C \cong D$ . В самом деле, очевидно, что следующие два отображения взаимно обратны:

$$g : D \square_C C \rightarrow D, \quad d \otimes c \mapsto d\varepsilon(c),$$

где  $\varepsilon$  — коединица  $C$ , и

$$f : D \rightarrow D \square_C C, \quad d \mapsto \phi_C(d) \in C,$$

где  $\phi_C : D \rightarrow D \otimes C$  — кодействие.

Таким образом, получили изоморфизм векторных пространств

$$\tilde{f} : \mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \times \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \cong \mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \square_{\mathcal{A}} \Gamma^\wedge.$$

Пусть  $m$  — умножение в  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \square_{\mathcal{A}} \Gamma^\wedge$ . Изоморфизм  $\tilde{f}$  переводит его в отображение

$$\tilde{f}^{-1} \circ m \circ (\tilde{f} \otimes \tilde{f}) : (\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \times \Gamma_{\text{inv}}^\wedge)^{\otimes 2} \rightarrow \mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \times \Gamma_{\text{inv}}^\wedge,$$

которое совпадает с умножением в  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \times \Gamma_{\text{inv}}^\wedge$ : достаточно заметить (см. [10, 24]), что умножение в  $\Gamma^\wedge$  задается формулой

$$(a \otimes \theta)(b \otimes \eta) = \sum_{(b)} ab_{(1)} \otimes (\theta \circ b_{(2)})\eta$$

(мы воспользовались разложением (3.3)). Аналогично проверяем, что изоморфизм  $\tilde{f}$  сохраняет  $*$ -структуру и  $\mathcal{A}$ -кодействие.  $\square$

Полученная алгебра называется алгеброй *разложимых дифференциальных форм* на главном расслоении  $P$  и обозначается  $\mathfrak{vh}(P)$ . Правое кодействие квантовой группы  $\mathcal{A}$  на  $\mathfrak{vh}(P)$  будем обозначать  $F_{\text{vh}}^\wedge$ .

**Замечание 3.1.** Вместо алгебры  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  в этой конструкции можно использовать ее  $*$ -подалгебру  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}^0(P) = \mathcal{B}$ . При этом получается градуированная  $*$ -подалгебра в  $\mathfrak{vh}(P)$

$$\mathfrak{ver}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B} \times \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \cong \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \Gamma^\wedge,$$

называемая алгеброй *вертикализованных дифференциальных форм* на расслоении. На ней тоже определено правое кодействие квантовой группы  $\mathcal{A}$ .

**4.** Рассмотрим отображение

$$F^\wedge \stackrel{\text{def}}{=} (\text{id} \otimes \text{pr}_0) \widehat{F} : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P) \otimes \mathcal{A}, \quad (3.4)$$

где  $\text{pr}_0$  — проектирование на формы нулевой степени в  $\Gamma^\wedge$ , т.е.  $\mathcal{A}$ . Очевидно, что  $F^\wedge$  является отображением градуированных  $*$ -алгебр и задает правое кодействие квантовой группы  $\mathcal{A}$  на  $\Omega(P)$ . Очевидно, что на  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  это отображение совпадает с уже построенным в п. 2 кодействием (поэтому мы и не вводим для него отдельного обозначения).

## 4. СВЯЗНОСТИ И ГОМОМОРФИЗМ ВЕЙЛЯ

**Определение 4.1** (см. [11]). Псевдотензориальной формой на квантовом главном расслоении  $P = (\mathcal{B}, F)$  со структурной квантовой группой  $\mathcal{A}$  и дифференциальным исчислением  $\Omega(P) = \Omega(P, \Gamma^\wedge)$  называется такое  $*$ -линейное отображение  $\varphi : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega(P)$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\text{inv}} & \xrightarrow{\varphi} & \Omega(P) \\ \varpi \downarrow & & \downarrow F^\wedge \\ \Gamma_{\text{inv}} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} & \Omega(P) \otimes \mathcal{A} \end{array} \quad (4.1)$$

коммутативна. Пространство  $\psi(P)$  псевдотензориальных форм на  $P$  является градуированным векторным пространством (градуировка индуцируется из  $\Omega(P)$ ).

**Определение 4.2** (см. [11]). Псевдотензориальная форма  $\varphi \in \psi(P)$  называется тензориальной, если  $\varphi(\Gamma_{\text{inv}}) \subseteq \mathfrak{hor}(P)$ . Тензориальные формы на расслоении  $P$  образуют градуированное подпространство  $\tau(P)$  в пространстве всех псевдотензориальных форм.

**Определение 4.3** (см. [11]). Связностью на главном квантовом расслоении  $P$  с дифференциальным исчислением  $\Omega(P)$  называют произвольную псевдотензориальную форму  $\omega$ , для которой выполняются равенства

$$\widehat{F}(\omega(\theta)) = \sum_k \omega(\theta_k) \otimes c_k + 1 \otimes \theta$$

для всех  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}$ , где  $\sum_k \theta_k \otimes c_k = \varpi(\theta)$ .

- Теорема 4.1** (см. [11]). (i) На любом главном квантовом расслоении  $P$  с любым дифференциальным исчислением  $\Omega(P)$  существуют связности.  
(ii) Если  $\omega_1, \omega_2$  — две связности на главном квантовом расслоении  $P$  с дифференциальным исчислением  $\Omega(P)$ , то их разность  $\omega_1 - \omega_2 \in \psi(P)$  является тензориальной 1-формой на расслоении.

В дальнейшем при обсуждении связностей больше не будем указывать дифференциальное исчисление на  $P$ .

Пусть теперь  $\omega$  — некоторая связность на главном квантовом расслоении  $P$ . В [11] показано, что для любого дифференциального исчисления  $\Gamma^\wedge$  на квантовой группе существует такое сечение  $\iota : \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^\otimes$  естественной проекции  $\Gamma_{\text{inv}}^\otimes \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^\wedge$ , что

- 1)  $\varpi^\otimes \iota = (\iota \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}) \varpi^\wedge$ , где  $\varpi^\otimes, \varpi^\wedge$  — распространения правого кодействия  $\varpi : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Gamma_{\text{inv}} \otimes \mathcal{A}$  на  $\Gamma_{\text{inv}}^\otimes$  и  $\Gamma_{\text{inv}}^\wedge$  соответственно;
- 2)  $\iota(\theta^*) = \iota(\theta)^*$  для любого  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}^\wedge$ ;
- 3)  $\iota(\theta \circ a) = (\iota(\theta)) \circ a$  для всех  $a \in \mathcal{A}, \theta \in \Gamma_{\text{inv}}^\wedge$ .

Положим

$$\omega^\wedge \stackrel{\text{def}}{=} \omega^\otimes \iota : \Gamma_{\text{inv}}^\wedge \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^\otimes. \quad (4.2)$$

Это отображение, конечно, в общем случае зависит от выбора сечения  $\iota$ . Связности, для которых отображение  $\omega^\wedge$  определено канонически, т.е. независимо от выбора  $\iota$ , называются *мультипликативными*, так как они, очевидно, задают гомоморфизм  $*$ -алгебр  $\Gamma_{\text{inv}}^\wedge \rightarrow \Omega(P)$ . Напомним, что ядро естественной проекции  $\Gamma_{\text{inv}}^\otimes \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^\wedge$  порождено векторным подпространством

$$\left\langle \sum_{(a)} \pi(a_{(1)}) \otimes \pi(a_{(2)}) \mid a \in \mathcal{R} \right\rangle \subseteq \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes 2},$$

где  $\mathcal{R} \subseteq \ker(\varepsilon)$  — правый идеал, определяющий дифференциальное исчисление  $\Gamma$  на квантовой группе. Поэтому условие мультипликативности связности  $\omega$  имеет вид

$$\left\langle \sum_{(a)} \omega(\pi(a_{(1)})) \omega(\pi(a_{(2)})) \right\rangle = 0. \quad (4.3)$$

В частности, если  $\Gamma = \Gamma_0$  — тривиальное дифференциальное исчисление, то  $\mathcal{R} = 0$ , и поэтому все связности будут мультипликативными. Однако в общем случае условие (4.3) нетривиально.

Определим теперь для произвольной связности  $\omega$  отображение  $m_\omega : \mathfrak{vh}(P) \rightarrow \Omega(P)$  векторных пространств по формуле

$$m_\omega(\varphi \otimes \theta) = \varphi \omega^\wedge(\theta).$$

**Теорема 4.2** (см. [11]). (i) *Отображение  $m_\omega$  биективно.*

(ii) *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{vh}(P) & \xrightarrow{m_\omega} & \Omega(P) \\ \widehat{F}_{\mathfrak{vh}} \downarrow & & \downarrow F^\wedge \\ \mathfrak{vh}(P) \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m_\omega \otimes \text{id}} & \Omega(P) \otimes \mathcal{A} \end{array}$$

*коммутативна.*

Теперь при помощи отображения  $m_\omega$  можно определить горизонтальное проектирование  $h_\omega$  дифференциальных форм на расслоении  $P$ :

$$h_\omega = (\text{id} \otimes \text{pr}_0) m_\omega^{-1} : \Omega(P) \rightarrow \mathfrak{hor}(P). \quad (4.4)$$

Из теоремы 4.2 следует, что отображение  $h_\omega$   $\mathcal{A}$ -ковариантно, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega(P) & \xrightarrow{h_\omega} & \mathfrak{hor}(P) \\ F^\wedge \downarrow & & \downarrow F^\wedge \\ \Omega(P) \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{h_\omega \otimes \text{id}} & \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A} \end{array} \quad (4.5)$$

Кроме того, очевидно, что  $(h_\omega)|_{\mathfrak{hor}(P)} = \text{id}$ .

**Определение 4.4.** Ковариантной производной на квантовом главном расслоении  $P$ , ассоциированной со связностью  $\omega$ , называется отображение

$$D_\omega \stackrel{\text{def}}{=} h_\omega \circ d : \Omega(P) \rightarrow \mathfrak{hor}(P),$$

( $d$  — дифференциал в  $\Omega(P)$ ).

В следующей теореме приведены основные свойства ковариантного дифференцирования.

**Теорема 4.3** (см. [11]). (i)  $D_\omega(\Omega^n(P)) \subseteq \mathfrak{hor}^{n+1}(P)$ .

(ii) *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(P) & \xrightarrow{D_\omega} & \mathfrak{hor}(P) \\ F^\wedge \downarrow & & \downarrow F^\wedge \\ \Omega(P) \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{D_\omega \otimes \text{id}} & \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A} \end{array} \quad (4.6)$$

*коммутативна.*

(iii)  $(D_\omega)|_{\Omega(\mathcal{M})} = d|_{\Omega(\mathcal{M})} = d_{\mathcal{M}}$ .

(iv) *Ограничение отображения  $D_\omega$  на подалгебру  $\mathfrak{hor}(P)$  задается формулой*

$$D_\omega(\varphi) = d\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\pi(c_k)), \quad (4.7)$$

где  $\sum_k \varphi_k \otimes c_k = F^\wedge(\varphi)$  и  $\partial\varphi = \text{deg } \varphi$ .

Пусть  $\alpha \in \psi(P)$  — произвольная псевдотензорная форма. В силу коммутативности диаграмм (4.5) и (4.6) композиции отображения  $\alpha$  с  $h_\omega$  и  $D_\omega$  являются тензорными формами на расслоении  $P$ . Эти тензорные формы будем обозначать  $h_\omega(\alpha)$  и  $D_\omega(\alpha)$ .

**Определение 4.5.** Формой кривизны связности  $\omega$  называется тензорная 2-форма

$$R_\omega \stackrel{\text{def}}{=} D_\omega(\omega).$$

Пусть  $\Omega$  — произвольная ассоциативная алгебра и  $\alpha, \beta : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega$  — произвольные линейные отображения. Тогда можно определить отображения

$$[\alpha, \beta]_q, \langle \alpha, \beta \rangle : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega$$

при помощи формул

$$[\alpha, \beta]_q(\theta) = \sum_l \alpha(\theta_l) \beta(\pi(d_l)), \quad \langle \alpha, \beta \rangle = (m(\alpha \otimes \beta)\iota)(d(\theta)),$$

где  $m$  — умножение в  $\Omega$ , а  $d : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes 2}$  — ограничение на  $\Gamma_{\text{inv}}$  дифференциала на  $\Gamma$ . Заметим, в частности, что отображение  $\langle \alpha, \beta \rangle$  определено не канонически, оно зависит от выбора сечения  $\iota$ .

**Теорема 4.4.** (i) Пусть  $\varphi \in \tau(P)$  — произвольная тензорная форма. Тогда ковариантная производная от  $\varphi$  равна

$$D_\omega(\varphi) = d \circ \varphi - (-1)^{\partial\varphi} [\varphi, \omega]_q.$$

(ii) Форма кривизны связности  $\omega$  равна

$$R_\omega = d \circ \omega - \langle \omega, \omega \rangle.$$

(iii) Справедливо следующее равенство (обобщенное тождество Бьянки):

$$D_\omega(R_\omega) - \{\langle \omega, R_\omega \rangle - \langle R_\omega, \omega \rangle - [R_\omega, \omega]_q\} = \langle \omega, \langle \omega, \omega \rangle \rangle - \langle \langle \omega, \omega \rangle, \omega \rangle. \quad (4.8)$$

Кроме того, правая часть равенства (4.8) равна нулю, если связность  $\omega$  мультипликативна.

Видим, что в общем случае значение формы кривизны зависит от выбора сечения  $\iota$ , если связность не является мультипликативной. Однако это затруднение можно обойти, если рассмотреть отображение  $\tilde{R}_\omega : \ker \varepsilon \rightarrow \mathfrak{hor}(P)$ , «накрывающее» форму кривизны:

$$\tilde{R}_\omega(a) = d\omega(\pi(a)) - \sum_{(a)} \omega(\pi(a_{(1)}))\omega(\pi(a_{(2)})).$$

Ясно, что в случае, когда связность  $\omega$  мультипликативна, имеем  $\tilde{R}_\omega(a) = R_\omega(\pi(a))$ .

**Предложение 4.5.** Для любой горизонтальной дифференциальной формы  $\varphi \in \mathfrak{hor}(P)$  справедливо равенство

$$D_\omega^2(\varphi) = - \sum_k \varphi_k \tilde{R}_\omega(c_k - \varepsilon(c_k)). \quad (4.9)$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулой (4.7):

$$\begin{aligned} D_\omega^2(\varphi) &= D_\omega(d\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\pi(c_k))) = \\ &= -(-1)^{\partial\varphi} \sum_k \left\{ d\varphi_k \omega(\pi(c_k)) + (-1)^{\partial\varphi} \varphi_k d\omega(\pi(c_k)) \right\} - (-1)^{\partial\varphi+1} \sum_k d\varphi_k \omega(\pi(c_k)) - \\ &\quad - (-1)^{\partial\varphi+1} \left\{ -(-1)^{\partial\varphi+1} \sum_{k, (c_k)} \varphi_k \omega(\pi(c_{k,(3)})) \omega(\pi(c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(3)} c_{k,(4)})) \right\} = \\ &= - \sum_k \varphi_k \left\{ \sum_{(c_k)} d\omega(\pi(c_k)) - \omega(\pi(c_{k,(1)})) \omega(\pi(c_{k,(2)})) \right\}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что выражение, стоящее в фигурных скобках в последней сумме, равно  $\tilde{R}_\omega(c_k - \varepsilon(c_k))$ .  $\square$

Отсюда, в частности, следует, что для мультипликативной связности выполняется равенство

$$D_\omega^2(\varphi) = - \sum_k \varphi_k R_\omega(\pi(c_k)). \quad (4.9')$$

Мультипликативность — очень важное свойство связностей на квантовых главных расслоениях, однако его недостаточно, чтобы можно было развивать теорию характеристических классов, аналогичную классической. В следующем определении мы формулируем дополнительные ограничения на  $\omega$ , выделяющие класс связностей, по своим свойствам приближающихся к связностям на обычных главных расслоениях.

**Определение 4.6.** Связность  $\omega$  на главном квантовом расслоении называется *регулярной*, если для любой горизонтальной дифференциальной формы  $\varphi \in \mathfrak{hor}(P)$  и любого элемента  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}$  выполнено равенство

$$\omega(\theta)\varphi = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) \quad (4.10)$$

или, эквивалентно,

$$\varphi\omega(\theta) = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \omega(\theta \circ \kappa^{-1}(c_k))\varphi_k. \quad (4.10')$$

Сформулируем основные свойства регулярных связностей.

**Теорема 4.6** (см. [11]). *Пусть  $\omega$  — регулярная связность.*

(i) *Для любой горизонтальной дифференциальной формы  $\varphi$  на расслоении выполняется равенство*

$$D_\omega(\varphi^*) = D_\omega(\varphi)^*.$$

(ii) *Для любых  $\varphi, \psi \in \mathfrak{hor}(P)$  выполняется равенство*

$$D_\omega(\varphi\psi) = d_\omega(\varphi)\psi + (-1)^{\partial\varphi} D_\omega(\psi).$$

*Таким образом, отображение  $D_\omega|_{\mathfrak{hor}(P)}$  является эрмитовым антидифференцированием алгебры  $\mathfrak{hor}(P)$ .*

(iii) *Для любой горизонтальной дифференциальной формы  $\varphi$  на расслоении  $P$  и любого  $a \in \ker \varepsilon$  выполняется равенство*

$$\tilde{R}_\omega(a)\varphi = \sum_k \varphi_k \tilde{R}_\omega(ac_k) \quad (4.11)$$

*или, эквивалентно,*

$$\varphi \tilde{R}_\omega(a) = \sum_k \tilde{R}_\omega(a\kappa^{-1}(c_k))\varphi_k. \quad (4.11')$$

(iv) *Для любой тензориальной формы  $\lambda$  на  $P$  независимо от выбора сечения  $\iota$  выполняется равенство*

$$[\lambda, \omega]_q = - \left\{ \langle \lambda, \omega \rangle - (-1)^{\partial\lambda} \langle \omega, \lambda \rangle \right\}.$$

*В частности, обобщенное тождество Бьянки (4.8) принимает вид*

$$D_\omega(R_\omega) = \langle \omega, \langle \omega, \omega \rangle \rangle - \langle \langle \omega, \omega \rangle, \omega \rangle,$$

*а композиция  $D_\omega$  с отображением  $\tilde{R}_\omega$  равна нулю.*

*Если, кроме того, связность  $\omega$  мультипликативна, то справедливы следующие утверждения.*

(v) *Отображение  $m_\omega$  является изоморфизмом  $*$ -алгебр.*

(vi) *Горизонтальное проектирование  $h_\omega$  является гомоморфизмом  $*$ -алгебр, а для любых двух дифференциальных форм  $\alpha, \beta \in \Omega(P)$  выполняется равенство*

$$D_\omega(\alpha\beta) = D_\omega(\alpha)h_\omega(\beta) + (-1)^{\partial\alpha} h_\omega(\alpha)D_\omega(\beta).$$

(vii) *Отображения  $h_\omega$  и  $D_\omega$  эрмитовы, т.е. для любой формы  $\alpha \in \Omega(P)$  имеем*

$$h_\omega(\alpha^*) = h_\omega(\alpha)^*, \quad D_\omega(\alpha^*) = D_\omega(\alpha)^*.$$

(viii) Форма кривизны связности  $\omega$  корректно определена, а для любой горизонтальной дифференциальной формы  $\varphi$  на  $P$  и любого  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}$  выполняется равенство

$$R_\omega(\theta)\varphi = \sum_k \varphi_k R_\omega(\theta \circ c_k) \quad (4.12)$$

или, эквивалентно,

$$\varphi R_\omega(\theta) = \sum_k R_\omega(\theta \circ \kappa^{-1}(c_k))\varphi_k. \quad (4.12')$$

(ix) Тожество Бьянки (4.8) принимает классический вид

$$D_\omega(R_\omega) = 0. \quad (4.13)$$

Наконец, если хотя одна регулярная связность на  $P$  мультипликативна, то и все остальные регулярные связности на  $P$  тоже мультипликативны.

Пусть на  $P$  существуют регулярные связности. Фиксируем одну из таких связностей  $\omega$ . Будем временно считать, что она мультипликативна (например, можно предположить, что дифференциальное исчисление на группе тривиально, т.е. что идеал  $\mathcal{R}$  равен нулю). В этом случае можно построить отображение, аналогичное классическому гомоморфизму Вейля.

Именно, пусть  $I_\otimes \subseteq \Gamma_{\text{inv}}^\otimes$  — пространство  $\varpi^\otimes$ -инвариантных элементов в  $\Gamma_{\text{inv}}^\otimes$ . Обозначим через  $R_\omega^\otimes : \Gamma_{\text{inv}}^\otimes \rightarrow \mathfrak{hot}(P)$  отображение, заданное формулой

$$R_\omega^\otimes(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^n) = R_\omega(\theta^1) \dots R_\omega(\theta^n).$$

**Теорема 4.7** (см. [9, 11]). Пусть  $\tilde{\theta} = \sum_i \theta_i^1 \otimes \dots \otimes \theta_i^n \in I_\otimes$  — произвольный элемент. Тогда

- (i)  $R_\omega^\otimes(\tilde{\theta}) \in \Omega(\mathcal{M})$ ;
- (ii)  $d_{\mathcal{M}}(R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})) = 0$ ;
- (iii) класс когомологий  $[R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})] \in H^{2n}(\Omega(\mathcal{M}))$  не зависит от выбора регулярной связности  $\omega$ .

*Доказательство.* Доказательство теоремы 4.7 копирует классические рассуждения теории Чженя—Вейля (см., например, [3]).

Первое утверждение теоремы очевидно, так как форма кривизны связности — эквивариантное отображение. Далее воспользуемся тем фактом, что на  $\Omega(\mathcal{M})$  ковариантное дифференцирование совпадает с дифференциалом  $d_{\mathcal{M}}$ ; тогда

$$d_{\mathcal{M}}(R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})) = D_\omega(R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})) = \sum_i \{D_\omega(R_\omega(\theta_i^1)) \dots R_\omega(\theta_i^n) + \dots + R_\omega(\theta_i^1) \dots D_\omega(R_\omega(\theta_i^n))\} = 0.$$

Мы воспользовались тем обстоятельством, что  $D_\omega$  — антидифференцирование алгебры  $\mathfrak{hot}(P)$ , а также тождеством Бьянки (4.13).

Пусть  $\omega'$  — другая регулярная мультипликативная связность. Положим

$$\omega_t = \omega + t(\omega' - \omega), \quad t \in [0; 1].$$

Для любого  $t \in [0; 1]$  псевдотензорная форма  $\omega_t$  является регулярной мультипликативной связностью на  $P$ , причем  $\omega_0 = \omega$ ,  $\omega_1 = \omega'$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{\omega_t} &= \frac{d}{dt} [d\omega_t - \langle \omega_t, \omega_t \rangle] = d\varphi - \langle \varphi, \omega \rangle - \langle \omega, \varphi \rangle - 2t\langle \varphi, \varphi \rangle = \\ &= d\varphi - \langle \omega + t\varphi, \omega + t\varphi \rangle = D_{\omega_t}(\varphi), \end{aligned}$$

где  $\varphi = \omega' - \omega$  (см. теорему 4.6). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (R_{\omega_t}^\otimes(\tilde{\theta})) &= \sum_i \left\{ (D_{\omega_t}(\varphi))(\theta_i^1) R_{\omega_t}(\theta_i^2) \dots R_{\omega_t}(\theta_i^n) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + R_{\omega_t}(\theta_i^1) \dots R_{\omega_t}(\theta_i^{(n-1)}) (D_{\omega_t}(\varphi))(\theta_i^n) \right\} = \\ &= D_{\omega_t} \left( \sum_i \{ \varphi(\theta_i^1) R_{\omega_t}(\theta_i^2) \dots R_{\omega_t}(\theta_i^n) + \dots + \right. \end{aligned}$$



$$+ R_{\omega_t}(\theta_i^1) \cdots R_{\omega_t}(\theta_i^{(n-1)}) \varphi(\theta_i^n) \} = d_{\mathcal{M}}(\psi_t(\tilde{\theta})),$$

где

$$\psi_t(\tilde{\theta}) = \sum_i \{ \varphi(\theta_i^1) \cdots R_{\omega_t}(\theta_i^n) + \cdots + R_{\omega_t}(\theta_i^1) \cdots \varphi(\theta_i^n) \}.$$

Интегрируя последнее равенство по  $t$  от 0 до 1 получаем

$$R_{\omega'}(\tilde{\theta}) = R_{\omega}(\tilde{\theta}) + d_{\mathcal{M}} \left( \int_0^1 \psi_t(\tilde{\theta}) \right).$$

Теорема доказана.  $\square$

Сделаем несколько замечаний относительно образа и области определения отображения  $R_{\omega}^{\otimes}$ .

Во-первых, в силу коммутационных соотношений (4.12), (4.12') элемент  $R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta})$  для любого  $\tilde{\theta} \in I_{\otimes}$  лежит в градуированном центре  $\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$  алгебры  $\Omega(\mathcal{M})$ , являющемся градуированной дифференциальной  $*$ -подалгеброй в  $\Omega(\mathcal{M})$ . Более того, из рассуждений, использованных при доказательстве утверждения (iii), видно, что класс когомологий  $[R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta})] \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$  корректно определен.

Во-вторых, пусть  $\sigma : \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes 2} \rightarrow \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes 2}$  — оператор «некоммутативной перестановки»:

$$\sigma(\theta \otimes \eta) = \sum_l \eta_l \otimes \theta \circ d_l,$$

где  $\theta, \eta \in \Gamma_{\text{inv}}$ ,  $\sum_l \eta_l \otimes d_l = \varpi(\eta)$ . Из тех же соотношений (4.12), (4.12') следует, что

$$R_{\omega}^{\otimes} \sigma(\theta \otimes \eta) = R_{\omega}^{\otimes}(\theta \otimes \eta),$$

а значит, в качестве области определения отображения  $R_{\omega}^{\otimes}$  можно взять  $I(\Sigma)$  — образ  $I_{\otimes}$  при естественной проекции на  $\Sigma = \Gamma_{\text{inv}}^{\otimes} / (\text{Im}(\text{id} - \sigma))$  — «алгебру полиномиальных функций на алгебре Ли квантовой группы».

Наконец, если регулярная связность  $\omega$  не является мультипликативной (а следовательно, на расслоении  $P$  вообще нет регулярных мультипликативных связностей), то вместо отображения  $R_{\omega}^{\otimes}$  надо рассматривать аналогичное отображение

$$\tilde{R}_{\omega}^{\otimes} : (\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^{\otimes} \rightarrow \mathfrak{hor}(P),$$

где  $(\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^{\otimes}$  — множество  $\text{ad}^{\otimes}$ -инвариантных элементов,

$$\text{ad} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad \text{ad}(a) = \sum_{(a)} a_{(2)} \otimes \kappa(a_{(1)}) a_{(3)}$$

— присоединенное действие квантовой группы на себе. Очевидно, что  $\text{ad}(\ker(\varepsilon)) \subseteq \ker \varepsilon \otimes \mathcal{A}$ .

Следующая теорема является несложной переформулировкой теоремы 4.7.

**Теорема 4.8.** *Образ отображения  $\tilde{R}_{\omega}^{\otimes}$  лежит в пространстве замкнутых форм в  $\Omega(\mathcal{M})$ . Соответствующие классы когомологий не зависят от выбора регулярной связности.*

Кроме того, из коммутационных соотношений (4.11) и (4.11') следует, что на самом деле образ отображения  $\tilde{R}_{\omega}^{\otimes}$  лежит в  $\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$  и что

$$\tilde{R}_{\omega}^{\otimes} \tilde{\sigma}(a \otimes b) = \tilde{R}_{\omega}^{\otimes}(a \otimes b),$$

где

$$\tilde{\sigma}(a \otimes b) = \sum_{(b)} b_{(2)} \otimes a \kappa(b_{(1)}) b_{(3)}.$$

Обозначим факторалгебру, соответствующую перестановке  $\tilde{\sigma}$ , через  $\tilde{\Sigma}$ , а проекцию  $(\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^{\otimes}$  при отображении  $(\ker \varepsilon)^{\otimes} \rightarrow \tilde{\Sigma}$  — через  $I(\tilde{\Sigma})$ .

**Определение 4.7.** Отображение

$$W : I(\Sigma) \rightarrow H^*(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))), \quad W(\text{pr}(\tilde{\theta})) = [R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})],$$

где  $\omega$  — произвольная регулярная мультипликативная связность на  $P$ , а  $\text{pr} : I_\otimes \rightarrow I(\Sigma)$  — естественная проекция, будем называть *гомоморфизмом Вейля*. Очевидно, это отображение является гомоморфизмом градуированных  $*$ -алгебр.

Аналогично, отображение

$$\tilde{W} : I(\tilde{\Sigma}) \rightarrow H^*(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))), \quad \tilde{W}(\text{pr}(\tilde{a})) = [\tilde{R}_\omega^\otimes(\tilde{a})],$$

где  $\omega$  — произвольная регулярная связность на  $P$ , будем называть *обобщенным гомоморфизмом Вейля*.

Ниже будем обычно рассматривать  $W$  и  $\tilde{W}$  как отображения соответствующих подалгебр в  $\Gamma_{\text{inv}}^\otimes$  и  $(\ker \varepsilon)^\otimes$ .

## 5. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И КЛАССЫ ЧЖЕНЯ

Пусть  $P = (\mathcal{B}, F)$  — квантовое главное расслоение с базой  $\mathcal{M}$  и структурной группой  $\mathcal{A}$ . Пусть  $u = (\tilde{u}, H_u)$  — представление квантовой группы  $\mathcal{A}$ .

Дадим определение векторного расслоения, ассоциированного с  $P$  при помощи представления  $u$ .

**Определение 5.1.** Векторным расслоением, ассоциированным с главным квантовым расслоением  $P$  при помощи представления  $u$ , называется пространство морфизмов представлений

$$\text{Mor}(u, F) = \left\{ A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H_u, \mathcal{B}) \mid F \circ A = (A \otimes \text{id})\Delta_u \right\}.$$

Будем обозначать это пространство  $\mathcal{E}_u$ .

Вообще, если  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  — произвольные правые  $\mathcal{A}$ -комодули, то

$$\text{Mor}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \mid \Delta_{\mathcal{N}} \circ A = (A \otimes \text{id})\Delta_{\mathcal{M}} \right\}. \quad (5.1)$$

Заметим, что очевидные формулы

$$(A \cdot m)(e) = A(e)m, \quad (m \cdot A)(e) = mA(e), \quad m \in \mathcal{M}, \quad A \in \mathcal{E}_u, \quad e \in H_u,$$

задают на  $\mathcal{E}_u$  структуру  $\mathcal{M}$ -бимодуля.

Сформулируем основные свойства ассоциированных векторных расслоений.

**Теорема 5.1** (см. [11]). (i) Для любого представления  $u$  пространство  $\mathcal{E}_u$  является ненулевым бимодулем над  $\mathcal{M}$ , причем бимодуль  $\mathcal{E}_u$  проективен и как левый, и как правый модуль над  $\mathcal{M}$ .

(ii)  $\mathcal{E}_\emptyset = \mathcal{M}$ .

(iii) Для любых двух представлений  $u$  и  $v$  имеем

$$\mathcal{E}_{u \oplus v} = \mathcal{E}_u \oplus \mathcal{E}_v, \quad \mathcal{E}_{u \times v} = \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_v;$$

причем второй изоморфизм задается умножением в  $\mathcal{B}$ :

$$(\theta_{uv}(\varphi \otimes \psi))(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где  $x \in H_u$ ,  $y \in H_v$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}_u$ ,  $\psi \in \mathcal{E}_v$ .

(iv) Существует антиизоморфизм  $\mathcal{M}$ -бимодулей  $\natural_u : \mathcal{E}_u \rightarrow \mathcal{E}_{\bar{u}}$ , определяемый при помощи диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_u & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \\ j_u \downarrow & & \downarrow * \\ H_u^* & \xrightarrow{\natural_u \varphi} & \mathcal{B} \end{array}$$

(v) Любой морфизм представлений  $f \in \text{Mor}(u, v)$  индуцирует обратное отображение бимодулей  $f_* : \mathcal{E}_v \rightarrow \mathcal{E}_u$ ; в частности, отображения  $\gamma^u, \gamma_u, I_u, I^u$  индуцируют (в свете отождествлений п. (iii) вложения бимодулей

$$\gamma_*^u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u, \quad \gamma_u^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\bar{u}}$$

и спаривания

$$\langle \rangle_u^+ : \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \langle \rangle_u^- : \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \rightarrow \mathcal{M}.$$

Явные выражения для  $\varphi \in \mathcal{E}_u$  и  $\psi \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$  имеют вид

$$\langle \varphi, \psi \rangle_u^+ = \sum_{i=1}^{n_u} \varphi(e_i) \psi(e_i^*), \quad (5.2)$$

$$\langle \psi, \varphi \rangle_u^- = \sum_{i,j=1}^{n_u} [C_u^{-1}]_{ji} \psi(e_i^*) \varphi(e_j). \quad (5.3)$$

(vi) Алгебра  $\mathcal{B}$  разлагается в прямую сумму  $\mathcal{M}$ -бимодулей

$$\mathcal{B} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{B}^{\alpha},$$

где  $\mathcal{T}$  — множество всех неприводимых представлений квантовой группы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}^{\alpha} \cong \mathcal{E}_{\alpha} \otimes H_{\alpha}$ .

Заметим, что из свойств (iv) и (v) следует, что формулы

$$(x, y)^+ = \langle x, \mathfrak{h}_u(y) \rangle_u^+, \quad (x, y)^- = \langle \mathfrak{h}_u(y), x \rangle_u^-$$

задают на  $\mathcal{E}_u \ni x, y$  невырожденные полуторалинейные спаривания (как левого и правого  $\mathcal{M}$ -модуля соответственно). Кроме того, если элементы  $\mu_k \in \mathcal{E}_{\bar{u}}, \nu_k \in \mathcal{E}_u$  таковы, что

$$\gamma_*^u(1) = \sum_k \mu_k \otimes \nu_k,$$

то выполняется равенство

$$\sum_k \mu_k(e_i^*) \nu_k(e_j) = \delta_{ij} \cdot 1. \quad (5.4)$$

В самом деле, из определений и сделанных отождествлений следует, что

$$\begin{aligned} \sum_k \mu_k(e_i^*) \nu_k(e_j) &= \left( \sum_k \mu_k \otimes \nu_k \right) (e_i^* \otimes e_j) = \\ &= (\gamma_*^u(1)) (e_i^* \otimes e_j) = (\gamma_u(e_i^* \otimes e_j)) \cdot 1 = e_i^*(e_j) \cdot 1 = \delta_{ij} \cdot 1. \end{aligned}$$

Теперь мы можем доказать последнее утверждение предложения 2.1: квантовая группа  $\mathcal{A}'$  свободно действует на пространстве  $\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Как известно (см. раздел 1), любая квантовая группа  $\mathcal{A}'$  как векторное пространство распадается в прямую сумму подпространств  $\tilde{H}_{\alpha'}$ , порожденных матричными элементами  $(u_{i'j'}^{\alpha'})_{i',j'=1,\dots,n_{\alpha'}}$  всевозможных неэквивалентных неприводимых представлений  $\alpha' \in \mathcal{T}'$  группы  $\mathcal{A}'$ . При этом все такие элементы линейно независимы. Заметим, что в силу формулы

$$\phi'(u_{i'j'}^{\alpha'}) = \sum_{k'} u_{i'k'}^{\alpha'} \otimes u_{k'j'}^{\alpha'}$$

пространство  $\tilde{H}_{\alpha'}$  является бикоммодулем над  $\mathcal{A}'$ .

Пусть  $H_{\alpha'}$  — пространство представления  $\alpha'$  и  $e_{i'}$ ,  $i' = 1, \dots, n_{\alpha'}$ , — ортогональный базис в  $H_{\alpha'}$  такой, что

$$\Delta_{\alpha'}(e_{i'}) = \sum_{k'} e_{k'} \otimes u_{k'i'}^{\alpha'}.$$

Очевидно, что формула

$$\alpha' \Delta(e_{i'}) = \sum_{k'} u_{i'k'}^{\alpha'} \otimes e_{k'}$$

задает на пространстве  $H_{\alpha'}$  структуру левого  $\mathcal{A}'$ -комодуля. Этот комодуль будем обозначать  $H_{\alpha'}^\top$ . Следующее утверждение очевидно.

**Лемма 5.2.**  $\tilde{H}_{\alpha'} \cong H_{\alpha'}^\top \otimes H_{\alpha'}$  как бикомодуль над  $\mathcal{A}'$ . Изоморфизм задается формулой

$$e_{i'} \otimes e_{j'} \mapsto u_{i'j'}^{\alpha'}.$$

Пусть  $f : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  — гомоморфизм квантовых групп. Формулы

$$\Delta_{\alpha'}^{\mathcal{A}}(e_{i'}) = \sum_{k'} e_{k'} \otimes f(u_{k'i'}^{\alpha'}), \quad \alpha' \Delta^{\mathcal{A}}(e_{i'}) = \sum_{k'} f(u_{i'k'}^{\alpha'}) \otimes e_{k'}$$

определяют на  $H_{\alpha'}$  структуру левого (соответственно, правого) комодуля над  $\mathcal{A}$ ; иначе говоря, пространство  $H_{\alpha'}$  становится пространством некоторого (возможно, приводимого) представления группы  $\mathcal{A}$ . Ясно, что если

$$H_{\alpha'} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\alpha')}^{\oplus} H_{\sigma}$$

— разложение пространства  $H_{\alpha'}$  в прямую сумму неприводимых представлений  $\mathcal{A}$  относительно кодействия  $\nabla_{\alpha'}^{\mathcal{A}}$ , то

$$H_{\alpha'}^\top = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\alpha')}^{\oplus} H_{\sigma}^\top.$$

Воспользуемся теперь результатами п. (vi) теоремы 5.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' &= \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{E}_{\alpha} \otimes H_{\alpha} \right) \square_{\mathcal{A}} \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}'}^{\oplus} \tilde{H}_{\alpha'} \right) = \\ &= \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{E}_{\alpha} \otimes H_{\alpha} \right) \square_{\mathcal{A}} \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}'}^{\oplus} H_{\alpha'}^\top \otimes H_{\alpha'} \right) = \\ &= \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{E}_{\alpha} \otimes H_{\alpha} \right) \square_{\mathcal{A}} \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}'}^{\oplus} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\alpha')}^{\oplus} H_{\sigma}^\top \right) \otimes H_{\alpha'} \right) = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{T}, \alpha' \in \mathcal{T}'}^{\oplus} \mathcal{E}_{\alpha} \otimes \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\alpha')}^{\oplus} H_{\alpha} \square_{\mathcal{A}} H_{\sigma}^\top \right) \otimes H_{\alpha'}. \end{aligned}$$

**Лемма 5.3.**

$$H_{\alpha} \square_{\mathcal{A}} H_{\beta}^\top = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть  $e_i^\alpha$ ,  $i = 1, \dots, n_\alpha$ ,  $e_j^\beta$ ,  $j = 1, \dots, n_\beta$ , — базисы в пространствах  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ , в которых правое действие квантовой группы задается формулой (1.16). Рассмотрим произвольный элемент

$$\sum_{i,j} C_{ij} e_i^\alpha \otimes e_j^\beta \in H_\alpha \square_{\mathcal{A}} H_\beta^\top \subseteq H_\alpha \otimes H_\beta.$$

Согласно определению тензорного произведения над коалгеброй должно быть выполнено следующее равенство:

$$\sum_{i,j,k} C_{ij} e_k^\alpha \otimes u_{ki}^\alpha \otimes e_i^\beta = \sum_{i,j,l} C_{ij} e_i^\alpha \otimes u_{jl}^\beta \otimes e_l^\beta.$$

Сравнивая коэффициенты при  $e_n^\alpha \otimes e_m^\beta$ , получаем

$$\sum_i C_{im} u_{ni}^\alpha = \sum_j C_{nj} u_{jm}^\beta.$$

Так как все элементы  $u_{ij}^\alpha$  и  $u_{kl}^\beta$  линейно независимы, то  $\alpha = \beta$  и коэффициенты при  $u_{ij}^\alpha$  слева и справа совпадают. Поэтому  $\delta_{ni} C_{jm} = \delta_{mi} C_{nj}$  для любых  $i, j, m, n = 1, \dots, n_\alpha$ , откуда  $C_{ij} = C \delta_{ij}$ ,  $C \in \mathbb{C}$ .  $\square$

Итак,

$$\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' = \sum_{\alpha' \in \mathcal{T}'}^{\oplus} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\alpha')}^{\oplus} \mathcal{E}_{\sigma} \right) \otimes H_{\alpha'} = \sum_{\alpha' \in \mathcal{T}'}^{\oplus} \mathcal{E}_{\alpha'} \otimes H_{\alpha'},$$

где  $\mathcal{E}_{\alpha'} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\alpha')}^{\oplus} \mathcal{E}_{\sigma}$ . Ясно, что если  $u_{\alpha'}$  — представление квантовой группы  $\mathcal{A}$  на пространстве  $H_{\alpha'}$ , описываемое действием  $\Delta_{\alpha'}^{\mathcal{A}}$ , то  $\mathcal{E}_{\alpha'} = \mathcal{E}_{u_{\alpha'}}$ .

Теперь можно найти такие элементы  $p_k, q_k \in \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ , что  $X \left( \sum_k p_k \otimes q_k \right) = 1 \otimes a'$  для произвольного  $a' \in \mathcal{A}'$ . В самом деле, можно считать, что  $a' = u_{i'j'}$  для некоторых  $\alpha' \in \mathcal{T}'$ ,  $i', j' = 1, \dots, n_{\alpha'}$ . Пусть элементы  $\mu'_k \in \mathcal{E}_{\bar{u}_{\alpha'}}$  и  $\nu'_k \in \mathcal{E}_{u_{\alpha'}}$  определяются формулой

$$\gamma_*^{u_{\alpha'}}(1) = \sum_k \mu'_k \otimes \nu'_k.$$

Возьмем

$$p_k = \sum_{l'} \mu'_k(e_{l'}^*) \otimes \kappa(u_{i'l'}^{\alpha'}), \quad q_k = \sum_{m'} \nu'_k(e_{m'}) \otimes u_{m'j'}^{\alpha'}.$$

Очевидно,  $p_k, q_k \in \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ . Имеем

$$\begin{aligned} X(p_k \otimes q_k) &= \sum_k \left\{ \left( \sum_{l'} \mu'_k(e_{l'}^*) \otimes \kappa(u_{i'l'}^{\alpha'}) \right) \left( \sum_{m', n'} \nu'_k(e_{m'}) \otimes u_{m'n'}^{\alpha'} \otimes u_{n'j'}^{\alpha'} \right) \right\} = \\ &= \sum_{k, l', m', n'} \mu'_k(e_{l'}^*) \nu'_k(e_{m'}) \otimes \kappa(u_{i'l'}^{\alpha'}) u_{m'n'}^{\alpha'} \otimes u_{n'j'}^{\alpha'} = \\ &= \sum_{m', n'} 1 \otimes \kappa(u_{i'm'}^{\alpha'}) u_{m'n'}^{\alpha'} \otimes u_{n'j'}^{\alpha'} = 1 \otimes 1 \otimes u_{i'j'}^{\alpha'}. \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы (5.4) и

$$\sum_{m'} \kappa(u_{i'm'}^{\alpha'}) u_{m'j'}^{\alpha'} = \delta_{i'j'} \cdot 1.$$

Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, ясно, что структура ассоциированных векторных расслоений тесно связана со структурой главного расслоения. В самом деле, главное расслоение можно восстановить по множеству ассоциированных векторных расслоений. Именно, пусть  $R(G)$  — категория конечномерных представлений квантовой группы  $G$ . Пусть  $\mathcal{M}$  — некоторая ассоциативная унитарная  $*$ -алгебра,  $\Phi(\mathcal{M})$  — категория  $\mathcal{M}$ -бимодулей, конечнопорожденных и проективных и как левые, и как правые  $\mathcal{M}$ -модули. В качестве морфизмов категории  $R(G)$  мы будем рассматривать не только линейные, но и антилинейные морфизмы представлений. Под антилинейным морфизмом понимается такое антилинейное отображение гильбертовых пространств  $f : H_u \rightarrow H_v$ , что  $\Delta_v f = (f \otimes *) \Delta_u$ . Множество антилинейных морфизмов представлений будем обозначать  $\bar{M}(u, v)$ . Тогда

$$\text{Mor}_{R(G)}(u, v) = \text{Mor}(u, v) \oplus \bar{M}(u, v).$$

Аналогично, морфизмами в категории  $\Phi(\mathcal{M})$  будем считать не только гомоморфизмы бимодулей, но и антигомоморфизмы, т.е. такие отображения  $\varphi$ , что  $\varphi(mp) = \varphi(p)m^*$  ( $m \in \mathcal{M}$ ,  $p$  — элемент бимодуля) и наоборот. Таким образом, категории  $R(G)$  и  $\Phi(\mathcal{M})$  становятся  $\mathbb{Z}_2$ -градуированными.

Пусть, как обычно,  $\times$  обозначает тензорное произведение представлений в  $R(G)$ . Будем говорить, что функтор градуированных категорий  $\rho : R(G) \rightarrow \Phi(\mathcal{M})$  мультипликативен, если существует естественная эквивалентность  $\theta$  функторов  $(\cdot \otimes \mathcal{M} \cdot)(\rho, \rho)$  и  $\rho(\cdot \times \cdot)$  такая, что для любых трех представлений  $u, v, w \in R(G)$  выполнено равенство

$$\theta_{u \times v, w}(\theta_{uv} \otimes \text{id}) = \theta_{u, v \times w}(\text{id} \otimes \theta_{vw}).$$

**Теорема 5.4** (см. [12]). Для любого квантового главного расслоения с базой  $\mathcal{M}$  соответствие  $R(G) \ni u \xrightarrow{\rho} \mathcal{E}_u$  определяет мультипликативный функтор градуированных категорий  $\rho : R(G) \rightarrow \Phi(\mathcal{M})$ . Наоборот, для любого мультипликативного функтора  $\rho : R(G) \rightarrow \Phi(\mathcal{M})$  существует единственное главное квантовое расслоение с базой  $\mathcal{M}$  и структурной квантовой группой  $G$  такое, что  $\rho(u) = \mathcal{E}_u$ .

Теорема 5.4 позволяет описывать главные расслоения, если категория  $R(G)$  достаточно простая. Приведем примеры.

**Пример 5.1.**  $G = U(1)$ . Главные  $U(1)$ -расслоения с базой  $\mathcal{M}$  однозначно определяются бимодулем  $\mathcal{E}$  над  $\mathcal{M}$ , конечно порожденным и проективным и как левый, и как правый модуль над  $\mathcal{M}$ . При этом должны быть определены отображения бимодулей

$$\mu : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \bar{\mu} : \bar{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M},$$

для которых

$$\mu \otimes \text{id} = \text{id} \otimes \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} \otimes \text{id} = \text{id} \otimes \mu.$$

Здесь  $\bar{\mathcal{E}}$  — сопряженный бимодуль, т.е.  $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}$  как векторные пространства, а умножение в  $\bar{\mathcal{E}}$  определяется формулами

$$m \circ e = em^*, \quad e \circ m = m^*e.$$

**Пример 5.2.** Другая квантовая группа, категория представлений которой устроена достаточно просто, — универсальная матричная псевдогруппа  $U_F(n)$  (см. раздел 1). Представления этой квантовой группы взаимно однозначно соответствуют словам из  $u, \bar{u}$ , где  $u$  — фундаментальное представление,  $\bar{u}$  — его сопряжение,  $F$  — канонический морфизм  $F : H_u \rightarrow H_u$ . Морфизмы в категории представлений этой квантовой группы порождены сопряжениями  $\{j_u, j_{\bar{u}}\}$ , спариваниями  $\{\gamma_u, \gamma^u\}$  и вложениями единичных операторов  $\{I_u, I^u\}$ , удовлетворяющими соотношениям, описанным в начале раздела.

Главные квантовые расслоения с такой структурной группой однозначно соответствуют парам антиизоморфных  $\mathcal{M}$ -бимодулей  $\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_{\bar{u}}$ , для которых определены спаривания  $\{\langle \rangle_u^+, \langle \rangle_u^-\}$  и вложения  $\{\gamma_u^*, \gamma_u^*\}$ .

В частности, для любого главного квантового расслоения  $P$  любая пара ассоциированных векторных расслоений  $\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_{\bar{u}}$ , соответствующих сопряженным представлениям  $u, \bar{u}$ , удовлетворяет всем описанным требованиям и, следовательно, определяет некоторое главное квантовое расслоение со структурной группой  $U_{C_u}(n_u)$ .

Точно так же, как и ассоциированные векторные расслоения  $\mathcal{E}_u$ , можно определить пространства  $\mathcal{E}_u$ -значных дифференциальных форм на базе. Именно, положим

$$\mathcal{F}_u = \text{Mor}(u, F^\wedge).$$

**Теорема 5.5** (свойства пространств  $\mathcal{F}_u$ ; см. [11, 12]). (i) Для любого  $u$ ,  $\mathcal{F}_u$  — градуированный бимодуль над градуированной алгеброй  $\Omega(\mathcal{M})$ .

(ii)  $\mathcal{F}_\emptyset = \Omega(\mathcal{M})$ .

(iii) Умножение на элементы из  $\Omega(\mathcal{M})$  задает изоморфизмы

$$\mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \cong \mathcal{F}_u \cong \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u.$$

(iv) Пусть  $\sigma_u : \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u$  — сквозной изоморфизм,  $t$  — умножение в  $\mathcal{M}$ . Тогда

$$\sigma_u(\text{id} \otimes t) = (t \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma_u)(\sigma_u \otimes \text{id}).$$

(v) Для любых представлений  $u$  и  $v$  имеем

$$(\text{id} \otimes \theta_{uv})\sigma_{u \times v} = (\sigma_u \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma_v)(\theta_{uv} \otimes \text{id}),$$

где  $\theta_{uv} : \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_v \rightarrow \mathcal{E}_{u \times v}$  — изоморфизм, описанный выше.

(vi) Следующие две диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sigma_u} & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \\ f_* \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes f_* \\ \mathcal{E}_v \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sigma_v} & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_v \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sigma_u} & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \\ [\eta_u, *] \downarrow & & \downarrow [* , \eta_u] \\ \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\bar{u}} & \xrightarrow{\sigma_{\bar{u}}} & \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \end{array},$$

где  $f : H_v \rightarrow H_u$  — морфизм представлений и  $[a, b](x \otimes y) \stackrel{\text{def}}{=} b(y) \otimes a(x)$  (заметим, что тем самым определены морфизм градуированных бимодулей  $\hat{f}_*$  и антиизоморфизм градуированных бимодулей  $\hat{h}_u$ ).

(vii) Алгебра  $\text{hот}(P)$  распадается в прямую сумму

$$\text{hот}(P) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\alpha}, \quad \mathcal{H}_{\alpha} \cong \mathcal{F}_{\alpha} \otimes H_{\alpha},$$

поэтому

$$\Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \cong \text{hот}(P) \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}). \quad (5.5)$$

(viii) Наоборот, если задана система градуированных бимодулей  $\mathcal{F}_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathcal{T}$ , над  $\Omega(\mathcal{M})$ , удовлетворяющая условиям (i)–(vi), то по ним однозначно восстанавливается алгебра  $\text{hот}(P)$ .

Определим теперь «канонический след» произвольного градуированного автоморфизма  $A : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$  градуированного бимодуля  $\mathcal{F}_u$ , для чего рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u & \xrightarrow{\text{id} \otimes A} & \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \\ \gamma_*^u \uparrow & & \downarrow \langle \rangle_{\bar{u}} \otimes \text{id} \\ \mathcal{M} = \mathcal{E}_{\emptyset} & \xrightarrow{\widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(A)} & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M}) \end{array}. \quad (5.6)$$

В этой диаграмме  $\widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(A)$  — морфизм градуированных бимодулей, восстанавливаемый при помощи диаграммы. Ясно, что морфизм  $\widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(A)$  однозначно определяется своим значением на единице

$$\text{tr}_{\mathcal{M}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(A)(1),$$

причем, так как  $\widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(A)$  — морфизм бимодулей, то  $\text{tr}_{\mathcal{M}} \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$ . Очевидно,

$$\text{tr}_{\mathcal{M}}(A \oplus B) = \text{tr}_{\mathcal{M}}(A) + \text{tr}_{\mathcal{M}}(B).$$

Исследуем теперь поведение отображения  $\text{tr}_{\mathcal{M}}$  относительно композиции морфизмов.

**Лемма 5.6.** Спаривания  $\langle \rangle_u^+$  (соответственно,  $\langle \rangle_{\bar{u}}^-$ ) индуцируют изоморфизм пространства  $\mathcal{E}_{\bar{u}}$  как левого (соответственно, правого) модуля над  $\mathcal{M}$  с пространством левых (соответственно, правых) модульных морфизмов  $\mathcal{E}_u \rightarrow \mathcal{M}$ .

*Доказательство.* Докажем первое утверждение; второе доказывается аналогично. То факт, что спаривание  $\langle \rangle_u^+$  индуцирует морфизм указанных градуированных модулей, очевиден. Из равенства

$$\sum_k \mu_k \langle \nu_k, \psi \rangle_u^+ = \psi,$$

где, как обычно  $\sum_k \mu_k \otimes \nu_k = \gamma_*^u$ , следует, что этот морфизм (будем его обозначать  $\chi_u^+$ ) инъективен. Чтобы доказать это равенство, достаточно применить правую и левую часть к вектору  $e_i^*$  и воспользоваться равенствами (5.2) и (5.4). Пусть  $\varphi : \mathcal{E}_u \rightarrow \mathcal{M}$  — произвольное  $\mathcal{M}$ -линейное отображение. Рассмотрим элемент  $\psi = \sum_k \mu_k \varphi(\nu_k) \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$ . Имеем:

$$[\chi_u^+(\psi)](\xi) = \langle \xi, \psi \rangle_u^+ = \sum_k \langle \xi, \mu_k \varphi(\nu_k) \rangle_u^+ = \sum_k \langle \xi, \mu_k \rangle_u^+ \varphi(\nu_k) = \sum_k \varphi[\langle \xi, \mu_k \rangle_u^+ \nu_k] = \varphi(\xi)$$

для любого  $\xi \in \mathcal{E}_u$ , т.е.  $\chi_u^+$  — эпиморфное отображение.  $\square$

Из леммы 5.6 ясно, что для любого градуированного автоморфизма  $A : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$  формулы

$$\langle A_{\perp} \varphi, x \rangle_u^- = \langle \varphi, Ax \rangle_u^-, \quad \langle x, A^{\top} \varphi \rangle_u^+ = \langle Ax, \varphi \rangle_u^+$$

задают градуированные автоморфизмы  $A_{\perp}, A^{\top} : \mathcal{F}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{u}}$  сопряженного бимодуля (здесь  $\langle \rangle_u^-$ ,  $\langle \rangle_u^+$  — спаривания градуированных бимодулей  $\mathcal{F}_u$  и  $\mathcal{F}_{\bar{u}}$ , построенные по морфизмам представлений  $I_u, I^u$ , см. теорему 5.5).

**Определение 5.2.** Автоморфизм  $A$  бимодуля  $\mathcal{F}_u$  называется транспонируемым, если  $A_{\perp} = A^{\top}$ .

Прежде чем мы сформулируем следующее утверждение, заметим, что диаграмма (5.6) позволяет определить канонический след даже в том случае, если отображение  $A$  сохраняет только структуру левого модуля. Конечно, в этом случае след уже не обязан быть элементом центра алгебры  $\Omega(\mathcal{M})$ .

**Предложение 5.7** (см. [9]). *Если автоморфизм  $B$  бимодуля  $\mathcal{F}_u$  — транспонируемый, то для любого морфизма  $A$  левых градуированных модулей имеем*

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(AB) = (-1)^{\partial A \partial B} \mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(BA). \quad (5.7)$$

*Доказательство.* В силу леммы 5.6 можно считать, что  $A = \varphi \otimes x$ , где  $\varphi \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$ ,  $x \in \mathcal{F}_u$ . Тогда  $BA = \varphi \otimes B(x)$ ,  $(-1)^{\partial A \partial B} AB = B^{\top}(\varphi) \otimes x$  и, следовательно,

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(BA - (-1)^{\partial A \partial B} AB) = \langle \varphi, B(x) \rangle_u^- - \langle B^{\top}(\varphi), x \rangle_u^- = 0$$

в силу транспонируемости  $B$ .  $\square$

Пусть  $D : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$  — отображение градуированных пространств степени 1. Будем говорить, что  $D$  — дифференцирование градуированного модуля  $\mathcal{F}_u$ , если для любых  $\psi \in \mathcal{F}_u$ ,  $\alpha \in \Omega(\mathcal{M})$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} D(\psi\alpha) &= D(\psi)\alpha + (-1)^{\partial\psi} \psi d_{\mathcal{M}}(\alpha), \\ D(\alpha\psi) &= d_{\mathcal{M}}(\alpha)\psi + (-1)^{\partial\alpha} \alpha D(\psi). \end{aligned}$$

Для произвольного дифференцирования  $D$  модуля  $\mathcal{F}_u$  формулы

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}\langle \varphi, \psi \rangle_u^- &= \langle D_{\perp}(\varphi), \psi \rangle_u^- + (-1)^{\partial\varphi} \langle \varphi, D(\psi) \rangle_u^-, \\ d_{\mathcal{M}}\langle \psi, \varphi \rangle_u^+ &= \langle D(\psi), \varphi \rangle_u^+ + (-1)^{\partial\psi} \langle \psi, D^{\top}(\varphi) \rangle_u^+ \end{aligned}$$

однозначно определяют дифференцирования  $D_{\perp}, D^{\top}$  сопряженного модуля  $\mathcal{F}_{\bar{u}}$  (опять использована лемма 5.6).

**Определение 5.3.** Дифференцирование  $D$  называется транспонируемым, если  $D_{\perp} = D^{\top}$ .

В качестве примера транспонируемого дифференцирования можно, прежде всего, привести отображение  $D_{\omega, u} : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$ , индуцированное ковариантной производной, ассоциированной с произвольной регулярной связностью  $\omega$  на  $P$ . Это отображение отправляет морфизм  $\varphi \in \mathcal{F}_u = \mathrm{Mor}(u, F^{\wedge})$  в композицию  $D_{\omega} \circ \varphi$ . В силу диаграммы (4.6) эта композиция также принадлежит  $\mathcal{F}_u$ . Очевидно, что оба дифференцирования  $(D_{\omega, u})^{\top}$  и  $(D_{\omega, u})_{\perp}$  равны  $D_{\omega, \bar{u}}$ .

Пусть  $A$  — произвольный автоморфизм бимодуля  $\mathcal{F}_u$ ,  $D$  — произвольное дифференцирование. Заметим, что отображение

$$\nabla(A) = DA - (-1)^{\partial A} AD : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$$

также является морфизмом бимодулей.

**Предложение 5.8.** *Если дифференцирование  $D$  транспонируемо, то для любого  $A$  имеем*

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(\nabla(A)) = d_{\mathcal{M}}(\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(A)). \quad (5.8)$$

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 5.6. Можно считать, что  $A = \varphi \otimes x$ ; тогда

$$DA = D^{\top}(\varphi) \otimes x, \quad (-1)^{\partial A} AD = -(-1)^{\partial\varphi} \varphi \otimes D(x)$$

и поэтому

$$d_{\mathcal{M}}(\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(A)) = d_{\mathcal{M}}\langle \varphi, x \rangle_u^- = \langle D^{\top}(\varphi), x \rangle_u^- + (-1)^{\partial\varphi} \langle \varphi, D(x) \rangle_u^- =$$



$$= \operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(DA - (-1)^{\partial A} AD) = \operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(\nabla(A)).$$

Предложение 5.8 доказано.  $\square$

Фиксируем представление квантовой группы  $u \in R(G)$ . Для произвольного  $z \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$  и транспонированного дифференцирования  $D : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$  положим

$$\Theta_n(z, D) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(zD^{2n}) \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})).$$

**Теорема 5.9.** (i)  $d_{\mathcal{M}}\Theta_n(z, D) = \Theta_n(d_{\mathcal{M}}z, D)$ . В частности, если  $d_{\mathcal{M}}z = 0$ , то имеем также  $d_{\mathcal{M}}\Theta_n(z, D) = 0$ .

(ii) Если  $d_{\mathcal{M}}z = 0$ , то класс когомологий  $[\Theta_n(z, D)] \in H^{2n+\partial z}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$  не зависит от выбора транспонированного дифференцирования  $D$  (и от выбора элемента в классе когомологий  $[z]$ ).

*Доказательство.* Утверждение (i) следует из (5.8). Докажем (ii). Пусть  $d_{\mathcal{M}}z = 0$  и  $D'$  — другое транспонированное дифференцирование. Положим  $D' - D = S : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$  и определим семейство транспонированных дифференцирований  $D_t$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $D_0 = D$ ,  $D_1 = D'$  при помощи формулы

$$D_t = D + tS, \quad t \in [0, 1].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Theta_n(z, D_t) &= \frac{d}{dt}\operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(zD_t^{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(zD_t^{i-1}SD_t^{2n-i}) = \\ &= \operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(D_t X - (-1)^{\partial X} X D_t) = d_{\mathcal{M}}(\operatorname{tr}_{\mathcal{M}}(X)), \end{aligned}$$

где

$$X = \sum_{i=1}^n D_t^{2i-1} S D_t^{2n-2i} z$$

(здесь  $z$  рассматривается как бимодульный морфизм  $z : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{F}_u$ .) Интегрируя по  $t$  от 0 до 1, получаем, что классы когомологий  $[\Theta_n(z, D)]$  и  $[\Theta_n(z, D')]$  совпадают. Тот факт, что выбор элемента в классе  $[z]$  также не влияет на класс  $[\Theta_n(z, D)]$ , следует из (i).  $\square$

**Следствие 5.10.** Для каждого целого  $n \geq 1$  и каждого векторного расслоения  $\mathcal{E}_u$ , ассоциированного с главным квантовым расслоением  $P$  при помощи такого представления  $u$ , что существуют транспонированные дифференцирования  $D$  модуля  $\mathcal{F}_u$ , определены классы  $\theta_n^u \in H^{2n}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$ ,  $\theta_n^u = [\Theta_n(1, D)]$ . В частности, если на  $P$  существуют регулярные связности, то классы  $\theta_n^u$  определены для всех  $u \in R(G)$ .

Напомним, что в случае, когда на  $P$  существуют регулярные связности, в разделе 4 были определены характеристические классы расслоения  $P$  при помощи обобщенного гомоморфизма Вейля  $\tilde{W}$ , принимающего значения также в  $H^{2*}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$ . Связь между этими характеристическими классами и классами  $\theta_n^u$  ассоциированных векторных расслоений устанавливается следующим образом.

Прежде всего, заметим, что на матричном элементе  $u_{ij}$  представления  $u$  присоединенное действие  $\operatorname{ad}$  задается формулой

$$\operatorname{ad}(u_{ij}) = \sum_{k,l=1}^{n_u} u_{kl} \otimes \kappa(u_{ik}) u_{lj}.$$

Следовательно, пространство  $\tilde{H}_u$  инвариантно относительно этого кодействия. Более того, представление  $\operatorname{ad}|_{\tilde{H}_u}$  изоморфно тензорному произведению  $H_{\tilde{u}} \otimes H_u$  (изоморфизм задается соответствием  $e_i^* \otimes e_j \mapsto u_{ij}$ ). Так как  $I^u : \mathbb{C} \rightarrow H_{\tilde{u}} \otimes H_u$  — морфизм представлений, то можно заключить, что образ сквозного отображения  $\mathbb{C} \rightarrow \tilde{H}_u$  — элемент  $a(u) = \operatorname{tr}(C_u^{-1} \tilde{u})$  —  $\operatorname{ad}$ -инвариантен ( $\tilde{u} = (u_{ij})$  — матрица представления  $u$ ).

Для любого  $n \geq 1$  положим

$$\tilde{a}^n(u) = \sum_{(a)} \left( a_{(1)}(u) - \varepsilon(a_{(1)}(u)) \right) \otimes \dots \otimes \left( a_{(n)}(u) - \varepsilon(a_{(n)}(u)) \right),$$

где

$$\sum_{(a)} a_{(1)}(u) \otimes \dots \otimes a_{(n)}(u) = \phi^{n-1}(a(u))$$

и  $\phi^n$  определяется по индукции:

$$\phi^1 = \phi, \quad \phi^n = (\phi \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{n-1 \text{ раз}}) \phi^{n-1}.$$

Очевидно,  $\tilde{a}^n(u) \in (\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^{\otimes n}$ .

**Предложение 5.11.**  $\theta_n^u = \tilde{W}(\tilde{a}^n(u))$ .

*Доказательство.* Это прямое следствие формул (4.9), (5.3) и (5.4).  $\square$

В заключение главы 1 сформулируем еще два принадлежащих М. Джорджевичу утверждения, которые описывают связь между дифференцированиями модулей  $\mathcal{F}_u$  и регулярными связностями на  $P$ .

**Теорема 5.12.** (i) Пусть  $\{D_u\}_{u \in R(G)}$  — такой набор дифференцирований модулей  $\mathcal{F}_u$ , что выполнены следующие условия:

$$D_{u \times v}(\varphi \otimes \psi) = D_u(\varphi)\psi + (-1)^{\partial \varphi} \varphi D_v(\psi), \\ D_{\emptyset} = d_{\mathcal{M}}, \quad D_{\bar{u}} \natural_u = \natural_u D_u, \quad D_u f_* = f_* D_v$$

для любых  $u, v \in R(G)$ ,  $\varphi \in \mathcal{F}_u$ ,  $\psi \in \mathcal{F}_v$ ,  $f \in \text{Mor}(u, v)$  (здесь использован изоморфизм  $\mathcal{F}_u \otimes_{\Omega(\mathcal{M})} \mathcal{F}_v \cong \mathcal{F}_{u \times v}$ ). Тогда существует (единственное) дифференцирование  $D$  алгебры  $\mathfrak{hor}(P)$  такое, что  $(D \otimes \text{id})F^\wedge = F^\wedge D$ , индуцирующее на любом модуле  $\mathcal{F}_u$  дифференцирование  $D_u$ .

(ii) Пусть  $\mathfrak{hor}_P$  — произвольная градуированная  $*$ -алгебра такая, что  $\mathfrak{hor}_P^0 = \mathcal{B}$ . Предположим, что на  $\mathfrak{hor}_P$  задано правое кодействие квантовой группы  $F_P : \mathfrak{hor}_P \rightarrow \mathfrak{hor}_P \otimes \mathcal{A}$ , совпадающее на  $\mathcal{B}$  с  $F$ . Пусть на  $*$ -подалгебре  $\Omega(\mathcal{M}) = F_P^{-1}(\mathfrak{hor}_P \otimes \mathcal{A})$  задан дифференциал  $d_{\mathcal{M}}$ , удовлетворяющий всем свойствам дифференциалов  $*$ -алгебр. Обозначим через  $\text{der}(P)$  аффинное пространство линейных отображений  $D : \mathfrak{hor}_P \rightarrow \mathfrak{hor}_P$  таких, что

$$D(\mathfrak{hor}_P^*) \subseteq \mathfrak{hor}_P^{*+1}, \quad D(\psi^*) = D(\psi)^*, \quad D|_{\Omega(\mathcal{M})} = d_{\mathcal{M}}, \\ F_P D = (D \otimes \text{id})F_P, \quad D(\varphi\psi) = D(\varphi)\psi + (-1)^{\partial \varphi} \varphi D(\psi).$$

Тогда для любого подпространства  $\mathcal{L} \subseteq \text{der}(P)$  существуют такие дифференциальные исчисления  $\Gamma^\wedge$  на  $\mathcal{A}$  и  $\Omega(P) = \Omega(P, \Gamma^\wedge)$  на  $P$ , что  $\mathfrak{hor}_P$  совпадает с алгеброй горизонтальных дифференциальных форм на  $P$  и все  $D \in \mathcal{L}$  задаются как ковариантные дифференцирования, построенные по регулярным связностям на  $P$ .

## ГЛАВА 2

### ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНАЯ И КАРТАНОВСКАЯ ТЕОРИЯ

В этой главе описывается модификация общей теории из главы 1, если в качестве дифференциального исчисления на базе использовать дифференциальную градуированную алгебру, построенную по алгебре Ли дифференцирований алгебры  $\mathcal{M}$ . В разделе 6 разбирается случай «локально тривиального» главного квантового расслоения над гладким многообразием. Доказывается, что в этом случае образ обобщенного гомоморфизма Вейля  $\tilde{W}$  (ср. раздел 4), который в этом случае можно

определить для произвольной, не обязательно регулярной, связности состоит из характеристических классов «классической части» расслоения  $P$ . Далее, в разделах 7 и 8 рассматривается более общий случай, когда базой расслоения служит произвольная унитарная алгебра  $\mathcal{M}$ . Для этого случая построена алгебра полуклассических дифференциальных форм на расслоении  $P$ ,  $\mathfrak{hor}_{sc}^*(P)$ , удовлетворяющая всем условиям п. (ii) теоремы 5.12. Доказывается, что понятие связности в этом случае эквивалентно понятию «лифта дифференцирований», а теория характеристических классов ассоциированных векторных расслоений во многом аналогична теории, развитой в [1, 2].

Основное отличие теории, рассматриваемой в данной работе, от [1, 2] состоит в том, что векторные расслоения, ассоциированные с некоторым главным квантовым расслоением, являются бимодулями над  $\mathcal{M}$  — «алгеброй функций на базе». Поэтому, например, связности на них не всегда существуют (см. гл. 3, а также [7]). Кроме того, канонический след  $\text{tr}_{\mathcal{M}}$  (см. раздел 5) не является следом морфизмов правых или левых модулей в смысле указанных работ, так как условие  $\text{tr}_{\mathcal{M}}(AB) = \text{tr}_{\mathcal{M}}(BA)$  выполняется, только если один из морфизмов является транспонируемым.

Таким образом, возникает много вопросов, прежде всего: как связаны характеристические классы векторных расслоений, построенные в гл. 1, с классами из работ [1, 2]? Конечно, предполагается, что дифференциальное исчисление, которое используется нами, полуклассическое. Оказывается, например, что регулярные связности в «полуклассической теории» являются связностями в смысле указанных работ, а формы кривизны таких связностей в смысле главы 1 и в смысле этих работ совпадают (см. предложение 8.2).

## 6. ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ РАССЛОЕНИЯ

В случае, когда база  $\mathcal{M} = C^\infty(M)$ , где  $M$  — некоторое гладкое ( $C^\infty$ ) компактное многообразие, можно выделить важный класс квантовых главных расслоений, называемых локально тривиальными. Дадим точное определение.

**Определение 6.1** (см. [10]). Локально тривиальным квантовым главным расслоением над многообразием  $M$  с квантовой структурной группой  $\mathcal{A}$  называется унитарная  $*$ -алгебра  $\mathcal{B}$ , удовлетворяющая следующим условиям.

- 1) Существует отображение  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ , являющееся кодействием.
- 2) Существует  $*$ -гомоморфизм  $i : C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{B}$ .
- 3) Для любой точки  $x \in M$  существует окрестность  $U \ni x$ , для которой определен  $*$ -гомоморфизм  $\pi_U : \mathcal{B} \rightarrow C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}$  такой, что  $\pi_U(i(f)) = f|_U \otimes 1$ .
- 4)  $(\text{id} \otimes \phi)\pi_U = (\pi_U \otimes \text{id}) \circ F$ .
- 5) Если  $q = i(\phi)b \in \mathcal{B}$ , где  $\phi \in C_0^\infty(U)$ , то  $\pi_U(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$ .

Заметим, что из определения 6.1, конечно, следует, что  $\mathcal{B}$  является квантовым главным расслоением со структурной группой  $\mathcal{A}$  и базой  $M$  в обычном смысле (для доказательства того, что выполняется условие **(КГР2)**, достаточно рассмотреть разбиение единицы  $(\phi_U)_{u \in U}$  для некоторого конечного покрытия  $U$ ). Обратное утверждение, однако, неверно: существуют квантовые главные расслоения, база  $M$  которых есть  $C^\infty(M)$  для некоторого компактного многообразия  $M$ , но которые при этом не являются локально тривиальными. Рассмотрим пример.

Пусть  $\mathcal{A} = S^1$ . Как указано в разделе 5, задание расслоения со структурной группой  $\mathcal{A}$  эквивалентно заданию двух сопряженных модулей  $\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}}$  над  $\mathcal{M}$  и отображений спаривания

$$\mu : \bar{\mathcal{E}} \otimes_\mu \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \bar{\mu} : \mathcal{E} \otimes_\mu \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{M}.$$

Если  $\mathcal{M} = C^\infty(M)$ , то можно в качестве модуля  $\mathcal{E}$  взять  $\Gamma(\xi)$ , где  $\xi$  — некоторое классическое линейное расслоение,  $\bar{\mathcal{E}} = \Gamma(\bar{\xi})$ . Однако структуру бимодуля в  $\mathcal{E}$  мы введем, немного исказив ее. Пусть  $\varepsilon : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  —  $*$ -автоморфизм алгебры  $\mathcal{M}$  (например, индуцированный некоторым диффеоморфизмом многообразия  $M$ ). Спаривания  $\mu$  и  $\bar{\mu}$  определим при помощи формул

$$\mu(\psi) = U\varepsilon^{-1}(\mu_0(\psi)), \quad \bar{\mu}(\phi) = \varepsilon(U)(\bar{\mu}_0(\phi)),$$

где  $\psi \in \bar{\mathcal{E}} \otimes_\mu \mathcal{E}$ ,  $\phi \in \mathcal{E} \otimes_\mu \bar{\mathcal{E}}$ ,  $\mu_0, \bar{\mu}_0$  — стандартные спаривания сечений линейного расслоения  $\xi$  с сечениями двойственного расслоения  $\bar{\xi}$ , а  $U$  — функция на  $M$  такая, что  $U^* = U$ , т.е.  $U$  — вещественнозначная функция. Ясно, что если  $\varepsilon \neq \text{id}$ , то полученное главное расслоение не будет

локально тривиальным. Однако и база, и даже структурная группа этого расслоения — классические.

Теперь вернемся к локально тривиальным расслоениям.

**Теорема 6.1** (см. [10]). *Любое квантовое главное расслоение со структурной группой  $\mathcal{A}$  получается при помощи следующей конструкции из некоторого (однозначно определенного) главного расслоения со структурной группой  $G_{\text{cl}}$ . Пусть  $P_{\text{cl}} \xrightarrow{G_{\text{cl}}} M$  — некоторое главное расслоение. Группа  $G_{\text{cl}}$  действует на алгебре  $C^\infty(P_{\text{cl}})$  по правилу*

$$(g \cdot \phi)(x) = \phi(g \cdot x);$$

кроме того, она действует на алгебре  $\mathcal{A}$  по правилу

$$\zeta_g(a) = \sum g(S(a_{(1)}))a_{(2)}.$$

Тогда

$$\mathcal{B} = \{w \in C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes \mathcal{A} \mid g(w) = w \ \forall g \in \mathcal{A}\} = C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_U} \mathcal{A}.$$

Итак, после того как построено главное расслоение, нужно заняться построением дифференциального исчисления (т.е. алгебры дифференциальных форм) на квантовых главных расслоениях. Конечно, можно воспользоваться общей конструкцией, описанной в разделе 3. Однако естественно было бы потребовать, чтобы, во-первых, алгебра  $\Omega(\mathcal{M})$ , построенная по  $\Omega(P)$ , совпадала с алгеброй классических дифференциальных форм на многообразии  $M$ , а во-вторых, чтобы  $*$ -алгебра  $\Omega(P)$  была локально тривиальной в естественном смысле, т.е. чтобы тривиализующие отображения  $\pi_U$  распространялись до отображений  $\pi_U^\wedge : \Omega(P) \rightarrow \Omega(\mathcal{M})|_U \otimes \Gamma^\wedge$ , где  $\Omega(\mathcal{M})|_U = \Omega(M)|_U$  — образ алгебры обычных дифференциальных форм на  $M$  при ограничении на  $U$ . Как показано в [10], далеко не всякое дифференциальное исчисление  $\Gamma$  на квантовой группе можно использовать для этих целей: необходимое и достаточное условие, выделяющее те  $\Gamma$ , которые допускают такое пространство для произвольных  $\mathcal{B}$ , а не только тривиальных  $\mathcal{B} \cong C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}$  (мы будем называть такие  $\Gamma$  допустимыми), выражается следующей формулой:

$$(X \otimes \text{id}) \text{ad}(a) = 0 \quad \forall X \in \text{lie}(\mathcal{A}_{\text{cl}}), \quad a \in \mathcal{R},$$

где  $\text{lie}(\mathcal{A}_{\text{cl}})$  — алгебра Ли группы Ли  $\mathcal{A}_{\text{cl}}$ .

Если положить

$$\overline{\mathcal{R}} = \{a \in \ker \varepsilon \mid (X \otimes \text{id}) \text{ad}(a) = 0 \ \forall X \in \text{lie}(\mathcal{A}_{\text{cl}})\},$$

то (см. [10]) множество  $\overline{\mathcal{R}}$  является правым  $\text{ad}$ -инвариантным идеалом в  $\ker \varepsilon$ .

**Определение 6.2.** Минимальным допустимым дифференциальным исчислением на квантовой группе  $\mathcal{A}$  называется дифференциальное исчисление  $\Gamma_1$ , соответствующее идеалу  $\overline{\mathcal{R}}$ .

Прилагательное «минимальный» в данном контексте подразумевает, что для любого другого допустимого модуля  $\Gamma$  выполнено вложение  $\mathcal{R}_\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{R}}$ . К сожалению, даже в случае группы  $SU_\mu(2)$  пространство  $(\Gamma_1)_{\text{inv}}$  является бесконечномерным. Кроме того, с этим дифференциальным исчислением не всегда удобно работать (например, непонятно, какие связности будут в этом случае регулярными или мультипликативными). Поэтому нашим основным примером будет дифференциальное исчисление  $\Gamma = \Gamma_0 \approx \ker \varepsilon$ , соответствующее нулевому идеалу  $\mathcal{R}$ .

**Замечание 6.1.** Минимальное допустимое дифференциальное исчисление, как нетрудно видеть, совпадает с построенным в разделе 1 исчислением  $\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}$  (напомним, что  $\Gamma_{\mathcal{A}, \mathcal{A}} = \mathcal{A} \square_{\mathcal{A}_{\text{cl}}} \Omega(G_{\text{cl}}) \square_{\mathcal{A}_{\text{cl}}} \mathcal{A}$ ).

Кроме того, в дальнейшем мы будем изучать образ гомоморфизма Вейля в этом случае. Теперь он лежит в алгебре обычных когомологий де Рама многообразия  $M$ . Как указано в разделе 3, этот (обобщенный) гомоморфизм отображает пространство  $\text{ad}^\otimes$ -инвариантных элементов из  $(\ker \varepsilon)^\otimes$  в когомологии  $H^{\text{ev}}(M, \mathbb{R})$ . Но, как известно,  $\ker \varepsilon = (\Gamma_0)_{\text{inv}}$ , так что в результате описание образа  $W$ , данное в данном разделе для простейшего дифференциального исчисления  $\Gamma_0$ , годится и для образа обобщенного гомоморфизма Вейля  $\tilde{W}$  (ниже мы подробнее остановимся на этом вопросе).

Будем использовать следующие обозначения:

- 1)  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  — атлас расслоения  $P$  (т.е. набор открытых множеств  $U_\alpha$  таких, что  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ , и для каждого  $\alpha$  определен  $*$ -гомоморфизм  $\pi_{U_\alpha} : P \rightarrow C^\infty(U_\alpha) \otimes \mathcal{A}$ ). Если мы будем работать только с компактными многообразиями  $M$ , то можно считать, что атлас  $\mathcal{U}$  конечен (в противном случае предполагаем, что он локально конечен).
- 2)  $P_{\text{cl}}$  — «классическая часть  $P$ » — главное расслоение со структурной группой  $G_{\text{cl}}$ .
- 3)  $\pi_{U_\alpha}^\wedge$  — отображения, распространяющие на  $\Omega(P)$  отображения  $\pi_{U_\alpha}$ -карты расслоения.
- 4)  $\{g_{UV}\}_{U \cap V \neq \emptyset}$  — коцикл классической части расслоения  $P$ , т.е.  $U, V \in \mathcal{U}$  и отображения  $g_{UV} : U \cap V \rightarrow G_{\text{cl}}$  такие, что

$$g_{UV}g_{VW}g_{WU} = e$$

( $e$  — единица группы  $G_{\text{cl}}$ ).

Заметим, что в рассматриваемом случае алгебра горизонтальных форм может быть описана по-другому. Именно,

$$\text{hor}(P) = \{\theta \in \Omega(P) \mid \pi_U^\wedge(\theta) \in \Omega(U) \otimes \mathcal{A} \ \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

Кроме того, можно дать и описание в локальных терминах тензориальных форм и связностей (определения тензориальных форм и связностей см. в разделе 4).

**Теорема 6.2** (см. [10]). (i) *Любая тензориальная форма  $\varphi$  степени  $n$  однозначно определяется своей локальной записью:*

$$\pi_U^\wedge(\varphi(\theta)) = \sum_k \varphi_U(\theta_k) \otimes c_k,$$

где  $\overline{\omega}(\theta) = \sum_k \theta_k \otimes c_k$  и  $\{\varphi_U : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega^n(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$  — набор  $*$ -линейных отображений. Если  $V \in \mathcal{U}$  — другая карта,  $U \cap V \neq \emptyset$ , то

$$\varphi_V(\theta)|_{U \cap V} = \sum_k \varphi_U(\theta_k)|_{U \cap V} g_{UV}(c_k), \quad (6.1)$$

$g_{UV} : U \cap V \rightarrow G_{\text{cl}}$  — функция перехода для расслоения  $P_{\text{cl}}$ . Наоборот, любой набор  $\{\varphi_U : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega^n(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ , удовлетворяющий (6.1), определяет некоторую тензориальную форму степени  $n$ .

(ii) *Любая связность  $\omega$  однозначно определяется своими локальными калибровочными потенциалами  $\{A_U : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega^1(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ :*

$$\pi_U^\wedge(\omega(\theta)) = \sum_k A_U(\theta_k) \otimes c_k + 1_U \otimes \theta.$$

Если  $V \in \mathcal{U}$  — другая карта,  $U \cap V \neq \emptyset$ , то

$$A_V(\theta)|_{U \cap V} = \sum_k A_U(\theta_k)|_{U \cap V} g_{UV}(c_k) + \partial^{UV}(\theta), \quad (6.2)$$

где  $\partial^{UV}(\pi(a)) = \sum g_{VU}(a_{(1)})d(g_{UV}(a_{(2)}))$ ; в случае, когда  $\Gamma$  — допустимое дифференциальное исчисление, это выражение не зависит от выбора представителя из  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\pi(a) = \theta$ . Наоборот, любой набор локальных калибровочных потенциалов  $\{A_U : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega^1(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ , удовлетворяющий (6.2), определяет некоторую связность на расслоении  $P$ .

(iii) *Форма кривизны связности  $\omega$  определяется набором  $*$ -линейных отображений  $\{F_U : \Gamma_{\text{inv}} \rightarrow \Omega^2(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ , определяемых по формуле*

$$F_U(\theta) = dA_U(\theta) - \langle A_U, A_U \rangle(\theta), \quad (6.3)$$

где последнее слагаемое равно

$$\langle A_U, A_U \rangle(\pi(a)) = \sum A_U(\pi(a_{(1)}))A_U(\pi(a_{(2)}))$$

(ср. раздел 4).

(iv) Условие регулярности связности в терминах калибровочных потенциалов  $\{A_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  имеет вид

$$A_U(\theta \circ a) = \varepsilon(a)A_U(\theta)$$

для любого  $U \in \mathcal{U}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}$ . Все регулярные связности на  $P$  мультипликативны и могут быть интерпретированы как связности на классическом главном расслоении  $P_{\text{cl}}$  — классической части расслоения  $P$ .

Пусть теперь дифференциальное исчисление на группе  $\mathcal{A}$  тривиально. Тогда мы можем описать связности на локально тривиальном главном расслоении более точно.

**Теорема 6.3.** В описанной ситуации задание связности на главном расслоении  $P$  эквивалентно выбору линейной связности для каждого векторного расслоения, ассоциированного с  $P$  при помощи некоторого неприводимого унитарного представления квантовой группы (заметим, что мы не говорим о регулярности связности, получающейся таким образом).

*Доказательство.* Прежде всего, дадим описание векторных расслоений, ассоциированных с локально тривиальным квантовым главным расслоением. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 6.4.** Пусть  $P = (\mathcal{B}, F)$  — произвольное квантовое главное расслоение,  $H_u^\top$  — пространство представления  $u$ , на котором  $\mathcal{A}$  действует слева (см. раздел 5). Тогда

$$\mathcal{E}_u = \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} H_u^\top.$$

*Доказательство.* Достаточно провести доказательство для случая, когда представление  $u = u^\alpha$  неприводимо. Тогда, согласно разложению из п. (vii) теоремы 5.5,

$$\mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top = \left( \sum_{\alpha' \in \mathcal{T}}^\oplus \mathcal{E}_{\alpha'} \otimes H_{\alpha'} \right) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top = \sum_{\alpha' \in \mathcal{T}}^\oplus \mathcal{E}_{\alpha'} \otimes (H_{\alpha'} \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top) = \mathcal{E}_\alpha.$$

Последнее равенство следует из леммы 5.3.  $\square$

В нашем случае, когда расслоение  $P$  локально тривиально, согласно теореме 6.1,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} \mathcal{A} \cong C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus \tilde{H}_\alpha \right) \cong C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus H_\alpha^\top \otimes H_\alpha \right) \cong \\ &\cong \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus (C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} H_\alpha^\top) \otimes H_\alpha. \end{aligned}$$

Все равенства записаны для бимодулей над  $C^\infty(M)$ , на которых кодействует (справа) квантовая группа  $\mathcal{A}$ , при этом мы использовали результаты раздела 5. Тогда

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{B} \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top = \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus (C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} H_\alpha^\top) \otimes H_\alpha \right) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top = C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} H_\alpha^\top.$$

Итак, векторное расслоение  $\mathcal{E}_\alpha$ , ассоциированное с локально тривиальным главным квантовым расслоением при помощи (неприводимого) представления  $u^\alpha$ , равно  $C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} H_\alpha^\top$  (как бимодуль над  $C^\infty(M)$ ). Теперь можно дать описание этих пространств в терминах функций перехода.

Для этого заметим, что выполнено следующее равенство:

$$C^\infty(P_{\text{cl}}) \otimes_{G_{\text{cl}}} H_\alpha^\top \cong C_{\text{inv}}^\infty(P_{\text{cl}}, H_\alpha^\top) = \left\{ \varphi = C^\infty(P_{\text{cl}}, H_\alpha^\top) \mid \varphi(xg) = \rho_\alpha(g)(\varphi(x)) \quad \forall x \in P, g \in G_{\text{cl}} \right\},$$

где

$$\rho_\alpha(g)(e) = (g \otimes \text{id}_{H_\alpha^\top})_\alpha \Delta(e),$$

$\alpha \Delta$  — левое кодействие квантовой группы  $\mathcal{A}$  на  $H_\alpha^\top = H_\alpha$ , а группа  $G_{\text{cl}}$  интерпретируется как множество характеров алгебры  $\mathcal{A}$ . Заметим, что  $\rho_\alpha : G_{\text{cl}} \rightarrow U(n_\alpha)$  — унитарное представление группы  $G_{\text{cl}}$  ( $n_\alpha = \dim H_\alpha$ ). В самом деле,

$$\rho_\alpha(g_1 g_2)(e) = (g_1 g_2 \otimes \text{id})_\alpha \Delta(e) = (g_1 \otimes g_2 \otimes \text{id})(\phi \otimes \text{id})_\alpha \Delta(e) =$$

$$= (g_1 \otimes g_2 \otimes \text{id})(\text{id} \otimes_{\alpha} \Delta)_{\alpha} \Delta(e) = \rho_{\alpha}(g_1) \rho_{\alpha}(g_2)(e).$$

Унитарность  $\rho_{\alpha}$  следует из того, что матрица  $(u_{ij}^{\alpha})$ , определяющая представление  $u$ , — унитарный элемент в  $\mathcal{B}(H_{\alpha}) \otimes \mathcal{A}$ .

С другой стороны, очевидно, что

$$C_{\text{inv}}^{\infty}(P_{\text{cl}}, H_{\alpha}^{\top}) = \Gamma^{\infty}(P_{\text{cl}} \times_{G_{\text{cl}}} H_{\alpha}^{\top}) = \Gamma^{\infty}(P_{\text{cl}} \times_{\rho_{\alpha}} \mathbb{C}^{n_{\alpha}});$$

будем в дальнейшем говорить, что расслоение  $P_{\text{cl}} \times_{\rho_{\alpha}} \mathbb{C}^{n_{\alpha}}$  ассоциировано с квантовым главным расслоением  $P$  при помощи  $u^{\alpha}$ .

Далее, как указано в разделе 1 (см. также [23]), в качестве базиса алгебры  $\mathcal{A}$  можно взять следующий набор:

$$\{u_{ij}^{\alpha} \mid i, j = 1, \dots, n_{\alpha}, \alpha \in \mathcal{T}\},$$

где множество  $\mathcal{T}$  — все неэквивалентные унитарные представления квантовой группы  $\mathcal{A}$ ,  $n_{\alpha} = \dim H_{\alpha}$ , и элементы  $u_{ij}^{\alpha}$  — матричные элементы представления  $u$  (см. разделы 1, 5 и [23]).

Напомним условие унитарности представления  $u^{\alpha}$ :

$$\kappa(u_{ij}^{\alpha}) = (u_{ji}^{\alpha})^*. \quad (6.4)$$

При отождествлении  $(\Gamma_0)_{\text{inv}} \cong \ker \varepsilon$  проекция  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow (\Gamma_0)_{\text{inv}}$  принимает вид  $\pi(a) = a - \varepsilon(a) \cdot 1$ . Пусть  $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$  обозначает тривиальное одномерное представление (матрица этого представления состоит из единственного элемента 1). Тогда очевидно, что множество

$$\{\pi(u_{ij}^{\alpha}) = u_{ij}^{\alpha} - \delta_{ij} \cdot 1 \mid i, j = 1, \dots, n_{\alpha}, \alpha \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}\}$$

будет базисом в  $(\Gamma_0)_{\text{inv}}$ .

Итак, фиксируем  $\alpha \in \mathcal{T}$  и выберем какую-нибудь карту  $U \in \mathcal{U}$ . Мы можем рассмотреть матрицу  $A_U^{\alpha} = (U a_{ij}^{\alpha})_{i,j=1}^{n_{\alpha}}$ ,  $U a_{ij}^{\alpha} = A_U(\pi(u_{ij}^{\alpha}))$ ,  $U a_{ij}^{\alpha} \in \Omega^1(U)$ . Напомним, что  $A_U$  — \*-линейное отображение, т.е.  $A_U(\theta^*) = \overline{A_U(\theta)}$ . Но \*-структура на  $\Gamma$  вводится таким образом, что (см. [10])  $\pi(a)^* = -\pi(\kappa(a)^*)$ . Следовательно,

$$\pi(u_{ij}^{\alpha})^* = -\pi(\kappa(u_{ij}^{\alpha})^*) \stackrel{(6.4)}{=} -\pi((u_{ji}^{\alpha})^*) = -\pi(u_{ji}^{\alpha}).$$

Поэтому

$$U \overline{a_{ij}^{\alpha}} = \overline{A_U(\pi(u_{ij}^{\alpha}))} = A_U(\pi(u_{ij}^{\alpha})^*) = -A_U(\pi(u_{ji}^{\alpha})) = -U a_{ji}^{\alpha},$$

т.е. матрица  $A_U^{\alpha}$  косоэрмитова.

Теперь найдем закон преобразования матричных элементов  $U a_{ij}^{\alpha}$  при изменении карты. Для этого напомним, что

$$\omega(\pi(a)) = \sum_{(a)} \pi(a_{(2)}) \otimes \kappa(a_{(1)}) a_{(3)}.$$

Значит,

$$\omega(\pi(u_{ij}^{\alpha})) = \sum_{k,l=1}^{n_{\alpha}} \pi(u_{kl}^{\alpha}) \otimes \kappa(u_{ik}^{\alpha}) u_{lj}^{\alpha}. \quad (6.5)$$

Тогда (см. формулу (6.2))

$$v a_{ij}^{\alpha}|_{U \cap V} = A_V(\pi(u_{ij}^{\alpha}))|_{U \cap V} = \sum_{k,l} A_U(\pi(u_{kl}^{\alpha}))|_{U \cap V} g_{UV}(\kappa(u_{ik}^{\alpha}) u_{lj}^{\alpha}) + \partial^{UV}(\pi(u_{ij}^{\alpha})). \quad (6.6)$$

Но

$$g_{UV}(\kappa(u_{ik}^{\alpha}) u_{lj}^{\alpha}) = g_{UV}^{-1}(u_{ik}^{\alpha}) g_{UV}(u_{lj}^{\alpha}) = ((R_{UV}^{\alpha})^{-1})_{ik} (R_{UV}^{\alpha})_{lj}, \quad (6.7)$$

где матрица  $((R_{UV}^{\alpha})_{ij})_{i,j=1}^{n_{\alpha}} = R_{UV}^{\alpha}(x)$  равна  $\rho_{\alpha}(g_{UV}(x))$ , и аналогично

$$\partial^{UV}(\pi(u_{ij}^{\alpha})) = \sum_k ((R_{UV}^{\alpha})^{-1})_{ik} d(R_{UV}^{\alpha})_{kj}. \quad (6.8)$$

Переписывая теперь (6.6) с учетом (6.7) и (6.8), получаем, что матрицы  $\{A_U^{\alpha}\}_{U \in \mathcal{U}}$  преобразуются по закону

$$(A_V^{\alpha})|_{U \cap V} = (R_{UV}^{\alpha})^{-1} (A_U^{\alpha})|_{U \cap V} (R_{UV}^{\alpha}) + (R_{UV}^{\alpha})^{-1} d R_{UV}^{\alpha}.$$

Видим, что набор  $\{A_U^\alpha\}_{U \in \mathcal{U}}$  задает линейную связность в векторном расслоении, ассоциированном с  $P_{cl}$  при помощи представления  $\rho_\alpha$ .  $\square$

Аналогично, прямым вычислением получаем, что матрицы  $\{F_U^\alpha = (F_U(\pi(u_{ij}^\alpha)))_{i,j=1}^{n_\alpha}\}_{U \in \mathcal{U}}$  равны

$$(F_U^\alpha)_{ij} = d({}_U a_{ij}^\alpha) + \sum_k {}_U a_{ik}^\alpha \wedge {}_U a_{kj}^\alpha$$

( $d$  — внешний дифференциал на  $\Omega(U)$ ), и преобразуются по закону

$$(F_V^\alpha)|_{U \cap V} = (R_{UV}^\alpha)^{-1}(F_U^\alpha)|_{U \cap V}(R_{UV}^\alpha),$$

т.е. этот набор матриц совпадает с формой кривизны указанной линейной связности.

Квантовое тождество Бьянки в локальной записи выглядит следующим образом:

$$DF_U - \{[F_U, A_U]_q - \langle F_U, A_U \rangle + \langle A_U, F_U \rangle\} = \langle A_U, \langle A_U, A_U \rangle \rangle - \langle \langle A_U, A_U \rangle, A_U \rangle. \quad (6.9)$$

В этой формуле левая и правая части — \*-линейные отображения из  $\Gamma_{inv}$  в  $\Omega^3(U)$ , произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  определяется так же, как и выше, а

$$[F_U, A_U]_q(\theta) = \sum_k F_U(\theta_k) \wedge A_U(\pi(c_k)),$$

где  $\varpi(\theta) = \sum_k \theta_k \otimes c_k$  (см. раздел 4). Кроме того, ковариантная производная, стоящая в левой части, равна

$$DF_U = dF_U + [F_U, A_U]_q.$$

Поэтому в случае, когда произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  корректно определено, как у нас, правая часть в (6.9) равна нулю, и, если переписать (6.9) для базисного элемента  $\pi(u_{ij}^\alpha)$ , получим равенство

$$d(F_U^\alpha)_{ij} + \sum_k \{(F_U^\alpha)_{ik} \wedge (A_U^\alpha)_{kj} - (A_U^\alpha)_{ik} \wedge (F_U^\alpha)_{kj}\} = 0$$

или, на матричном языке,

$$dF_U^\alpha + [F_U^\alpha, A_U^\alpha] = 0.$$

Таким образом, тождество (6.9) переходит для конкретного выбора  $\Gamma = \Gamma_0$  в обычное тождество Бьянки для линейных связностей.

**Замечание 6.2.** В случае, когда  $\Gamma$  — произвольное допустимое дифференциальное исчисление, рассмотрим вместо формы связности  $\omega : \Gamma_{inv} \rightarrow \Omega(P)$ , отображение

$$\tilde{\omega} : \ker \varepsilon = \Gamma_0 \rightarrow \Omega(P), \quad \tilde{\omega}(a) = \omega(\pi(a)).$$

Оно корректно определено и однозначно задается локальными калибровочными потенциалами

$$\tilde{A}_U(a) = A_U(\pi(a)),$$

удовлетворяющими условию

$$\tilde{A}_V(a)|_{U \cap V} = \sum_{(a)} \tilde{A}_U(a_{(2)})|_{U \cap V} g_{UV}(\kappa(a_{(1)})a_{(3)}) + \sum_{(a)} g_{UV}(a_{(1)}) dg_{UV}(a_{(2)}).$$

Правда, так как  $\Omega(P)$  в этот раз построен по дифференциальному исчислению  $\Gamma \neq \Gamma_0$ , эти потенциалы нельзя использовать для построения связности на расслоении  $P$  относительно дифференциального исчисления  $\Gamma_0$ .

Совершенно аналогично доказывается, что матрицы  $\{\tilde{A}_U^\alpha \mid U \in \mathcal{U}\}$ ,  $\tilde{A}_U^\alpha = ({}_U \tilde{a}_{ij}^\alpha) = (\tilde{A}_U(u_{ij}^\alpha))$  образуют для каждого  $\alpha$  линейную связность на ассоциированном векторном расслоении. Тогда обобщенная формула кривизны  $\tilde{R}_\omega$  (см. раздел 4) связности  $\omega$  может быть отождествлена в локальных терминах с набором форм кривизны указанных линейных связностей:

$$\pi_U^\wedge(\tilde{R}_\omega(u_{ij}^\alpha)) = d({}_U \tilde{a}_{ij}^\alpha) + \sum_k {}_U \tilde{a}_{ik}^\alpha \wedge {}_U \tilde{a}_{kj}^\alpha.$$



Единственное отличие от описанного выше случая состоит в том, что матрица  $\tilde{A}_U^\alpha$  лежит не просто в пространстве косоэрмитовых матриц, т.е. в  $\mathfrak{u}(n_\alpha)$ , но в некотором векторном подпространстве в  $\sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus \mathfrak{u}(n_\alpha)$ , выделенном в  $\sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus \mathfrak{u}(n_\alpha)$  при помощи соотношений

$$\sum_{\alpha, i_\alpha, j_\alpha} \tilde{a}_{i_\alpha j_\alpha}^\alpha = 0,$$

где  $\sum_{\alpha, i_\alpha, j_\alpha} u_{i_\alpha j_\alpha}^\alpha \in \mathcal{R}$ , где  $\mathcal{R}$  — идеал, определяющий дифференциальное исчисление  $\Gamma$ . (Мы рассматриваем все матрицы  $\tilde{A}_{ij}^\alpha$  одновременно для всех  $\alpha \in \mathcal{T}$ .) Существует некоторая минимальная подалгебра Ли  $\mathfrak{g}$  в  $\sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus \mathfrak{u}(n_\alpha)$ , содержащая указанное подпространство. Конечно, эта подалгебра содержит подалгебру  $\sum_{\alpha \in \mathcal{T}}^\oplus \rho_\alpha(\text{lie}(G_{\text{cl}}))$ . Поэтому можно считать, что на каждом векторном расслоении  $P_{\text{cl}} \times_{\rho_\alpha} \mathbb{C}^{n_\alpha}$  задана линейная связность со значениями в  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n_\alpha)$ ; тогда матрицы  $({}_U \tilde{R}_{ij}^\alpha)$  определяют кривизну этой связности.

Теперь можно сформулировать основную теорему данного раздела. Она касается образа гомоморфизма Вейля. В разделе 4 мы определили гомоморфизм Вейля в случае, когда на расслоении  $P$  задана регулярная связность. Если же квантовое расслоение  $P$  локально тривиально, то все регулярные связности мультипликативны и могут быть интерпретированы как связности на «классической части»  $P_{\text{cl}}$  расслоения  $P$  (см. п. (iv) теоремы 6.2). Очевидно, что образ гомоморфизма Вейля для таких связностей состоит из характеристических классов расслоений  $P_{\text{cl}}$ . Мы докажем, что и для произвольных, не обязательно регулярных, связностей верно аналогичное утверждение. Именно, пусть  $\omega$  — произвольная мультипликативная связность. Тогда точно так же, как и в разделе 4, мы можем определить отображение  $R_\omega^\otimes : \Gamma_{\text{inv}}^\otimes \rightarrow \Omega(\mathcal{M})$  (в случае немультимпликативной связности алгебру  $\Gamma_{\text{inv}}^\otimes$  следует заменить на  $(\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^\otimes$  и рассматривать отображение  $\tilde{R}_\omega^\otimes$ ). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.5.** Пусть элемент  $I_\otimes \ni \tilde{\theta} = \sum_i \theta_i^1 \otimes \dots \otimes \theta_i^n$  (соответственно  $\tilde{a} \in (\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^\otimes$ ) таков, что для любой (не обязательно регулярной) связности  $\omega$  на любом локально тривиальном квантовом расслоении  $P$  имеет место соотношение  $d(R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})) = 0$  (соответственно  $d(\tilde{R}_\omega^\otimes(\tilde{a})) = 0$ ), где  $d$  — дифференциал в  $\Omega(\mathcal{M}) = \Omega^*(M)$ . Тогда образ  $W(\tilde{\theta})$  (соответственно  $\tilde{W}(\tilde{a})$ ) лежит в множестве характеристических классов Чженя классической части  $P_{\text{cl}}$  расслоения  $P$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что образ  $R_\omega^\otimes(I_\otimes)$  (и  $\tilde{R}_\omega^\otimes((\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^\otimes)$ ) для любой связности  $\omega$  лежит в множестве дифференциальных форм, которые на каждой карте  $U$  расслоения представляются в виде полинома от элементов матриц  $F_U^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ . Далее, эти полиномы инвариантны при замене матриц  $F_U^\alpha$  на сопряженные матрицы  $R^{-1} F_U^\alpha R$ ,  $R \in \rho_\alpha(\mathcal{A}_{\text{cl}})$ , хотя, вообще говоря, не инвариантны при такой замене для произвольной унитарной матрицы  $R$ . Что касается значения внешнего дифференциала от этих форм, то он определяется при помощи тождества Бьянки. Поэтому утверждение теоремы 6.5 является прямым следствием следующего утверждения.

**Лемма 6.6.** Если выполняются условия теоремы 6.5, то полиномы, задающие локальную запись формы  $R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})$  (соответственно  $\tilde{R}_\omega^\otimes(\tilde{a})$ ) инвариантны относительно сопряжений произвольными унитарными матрицами (соответственно сопряжений произвольными элементами из компоненты единицы группы Ли  $G_\alpha \subseteq U(n_\alpha)$ , соответствующей подалгебре Ли  $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{u}(n_\alpha)$ ).

*Доказательство.* Докажем только первое утверждение, второе доказывается аналогично.

Так как равенство  $dR_\omega^\otimes(\tilde{\theta}) = 0$  достаточно проверять локально, мы вправе предположить, что расслоение тривиальное, и рассматривать только одну карту  $U$ . Поэтому в дальнейшем не будем указывать, какой карте соответствует матрица, представляющая кривизну. Будем писать просто  $F^\alpha$  вместо  $F_U^\alpha$  (здесь  $\alpha$  — неприводимое представление квантовой группы, отличное от тождественного).

Предположим, что в выражение для  $R_\omega^\otimes(\tilde{\theta})$  входят коэффициенты только одной матрицы  $F^\alpha$  (т.е. фиксируем на время представление). Пусть  $p(t_{ij})$  — многочлен от комплексных переменных  $t_{ij}$  такой, что  $R_\omega^\otimes(\tilde{\theta}) = p(F_{ij}^\alpha)$ . В силу того, что  $\deg F_{ij}^\alpha = 2$  для всех  $i, j$ , получаем

$$dp(F_{ij}^\alpha) = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial F_{ij}^\alpha} dF_{ij}^\alpha = 0. \quad (6.10)$$

Из тождества Бьянки следует

$$dF_{ij}^\alpha = - \sum_k \{F_{ik}^\alpha \wedge A_{kj}^\alpha - A_{ik}^\alpha \wedge F_{kj}^\alpha\}.$$

Подставляя это в выражение (6.10), находим

$$0 = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial F_{ij}^\alpha} dF_{ij}^\alpha = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial F_{ij}^\alpha} \sum_k \{A_{ik}^\alpha \wedge F_{kj}^\alpha - F_{ik}^\alpha \wedge A_{kj}^\alpha\}.$$

Выберем некоторый базис  $\{e_i\}$  в пространстве косоэрмитовых матриц нужного порядка над  $\mathbb{C}$ . Пусть  $f^i, a^i, i = 1, \dots, m$ , — коэффициенты разложения матриц  $F^\alpha, A^\alpha$  по этому базису,  $f^i = f^i(a^1, \dots, a^m) \in \Omega^2(U), a^i \in \Omega^1(U)$ . Тогда мы сможем переписать последнее выражение в терминах  $f^i, a^i$ , работая с ними, как с формальными переменными (поскольку  $f^i$  коммутируют между собой и со всеми  $a^i$  и в каждый моном входит не больше одного  $a^i$ ; см. (6.10)). Получим

$$0 = \sum_i Q_i(f^1, \dots, f^m) a^i. \quad (6.11)$$

Нужно доказать, что из предположения о том, что последнее равенство выполнено для любого набора 1-форм  $a^j$ , следует, что  $Q_i \equiv 0$  для всех  $i$ . Для этого напомним, что

$$A^\alpha = \sum_i e_i \otimes a^i, \\ F^\alpha = dA^\alpha - A^\alpha \wedge A^\alpha = \sum_i e_i \otimes da^i - \sum_{i < j} [e_i, e_j] \otimes a^i \wedge a^j.$$

Предположим, что для некоторого  $k$ , скажем, для  $k = 1, Q_k \neq 0$ . Тогда выберем

$$a^1 = dx^1 + R^1(x^2, \dots, x^n, dx^2, \dots, dx^n), \\ a^j = R^j(x^2, \dots, x^n, dx^2, \dots, dx^n), \quad j = 2, \dots, m,$$

где  $R^l, l = 1, \dots, m$ , — такие 1-формы, что в некоторой точке  $x_0$  справедливо равенство  $R^j(x_0) = 0, dR^j(x_0) = 0$ . Тогда в этой точке

$$F^\alpha(x_0) = \sum_i e_i \otimes f^i(x_0) = \sum_i e_i \otimes dR^i(x_0)$$

и, следовательно, (6.11) превращается в этой точке в равенство

$$0 = Q_1(dR^1(x_0), \dots, dR^m(x_0)) dx^1.$$

Далее, пусть  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}, n = \dim M$ , — базис в  $\Lambda^1(T_{x_0}^* M)$ ,  $\xi_i = dx^i$ . Тогда последнее равенство переписывается в форме

$$Q_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \xi_1 = 0,$$

где  $\eta_i \in \Lambda^2(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , причем в выражения для  $\eta_i$  не входит  $\xi_1$ . Ясно, что подходящим выбором  $\eta_i$  можно добиться того, чтобы  $Q_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \neq 0$ . Тогда  $Q_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \xi_1 \neq 0$ ; противоречие.

Итак, многочлены  $Q_i$ , входящие в (6.11), тождественно равны нулю. Поэтому для любых двух косоэрмитовых матриц  $A$  и  $B$  выполняется равенство

$$\sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial A_{ij}} \sum_k \{B_{ik} A_{kj} - A_{ik} B_{kj}\} = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial A_{ij}} [B, A]_{ij} = 0,$$

где  $p = p(A_{ij}) = p(A)$  — многочлены от матричных элементов. Но, как известно,

$$[B, A] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \hat{B}^{-1}(t) A \hat{B}(t),$$

где  $\hat{B} = e^{tB}$ ,  $\hat{B}^{-1} = e^{-tB}$ . Положим

$$q(t) = p(\hat{B}^{-1}(t) A \hat{B}(t)) = p(\hat{A}(t)).$$

Найдем производную  $q(t)$ . Заметим, что при всех  $t$  матрица  $\hat{B}^{-1}(t) A \hat{B}(t) = \hat{A}(t)$  косоэрмитова, поэтому

$$q'(t_0) = \frac{dp(\hat{A}(t))}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial \hat{A}_{ij}} \Big|_{t=t_0} \frac{d\hat{A}_{ij}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}.$$

Но

$$\frac{d\hat{A}_{ij}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \left( \frac{d\hat{A}}{dt} \Big|_{t=t_0} \right)_{ij},$$

$$\frac{d\hat{A}}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} e^{-tB} A e^{tB} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^{-(t_0+t)B} A e^{(t_0+t)B} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^{-tB} C e^{tB} = [B, C],$$

где  $C = e^{-t_0B} A e^{t_0B} = \hat{A}(t_0)$ , так что

$$q'(t_0) = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial C_{ij}} [B, C]_{ij} = 0.$$

Итак,  $q(t) = \text{const} = q(0) = p(A)$ . Поскольку множество унитарных матриц вида  $e^B$  порождает всю группу  $U(n_\alpha)$ , мы доказали утверждение в данном случае.

В случае, когда мы не фиксируем  $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ , и в случае, когда вместо алгебры Ли косоэрмитовых матриц рассматривается другая матричная алгебра Ли, рассуждения полностью аналогичны (таким образом, утверждение леммы верно и для  $\tilde{R}_\omega^\otimes(\tilde{a})$ ).  $\square$

Утверждение теоремы 6.5 теперь следует из определения гомоморфизма Вейля классического главного расслоения.  $\square$

В заключение этого раздела отметим, что может случиться, что в образе  $R_\omega^\otimes(I_\otimes)$  (или  $\tilde{R}_\omega^\otimes((\ker \varepsilon)_{\text{inv}}^\otimes)$ ) вообще не содержится замкнутых форм.

## 7. ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольная унитарная (не обязательно коммутативная) алгебра. В [1,2] построена дифференциальная градуированная алгебра  $\Omega_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ , которую будем использовать в дальнейшем. Опишем поэтому конструкции, предложенные в [1,2].

Пусть  $\mathcal{M}$  — ассоциативная алгебра с единицей (не обязательно коммутативная). Пусть  $\mathcal{Z}$  — коммутативная подалгебра в  $\mathcal{M}$ , лежащая в центре  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  алгебры  $\mathcal{M}$ ,  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$  — дифференцирования алгебры  $\mathcal{M}$ , т.е.

$$\mathfrak{der}(\mathcal{M}) = \{X \in \text{Hom}_K(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \mid X(ab) = X(a)b + aX(b)\},$$

где  $K$  — основное поле ( $\mathbb{C}$  в нашем случае).

Очевидно, что правила

$$(zX)(m) = zX(m), \quad (Xz)(m) = X(m)z \quad \forall X \in \mathfrak{der}(\mathcal{M}), \quad z \in \mathcal{Z}, \quad m \in \mathcal{M},$$

для любых  $X \in \mathfrak{der}(\mathcal{M})$ ,  $z \in \mathcal{Z}$ ,  $m \in \mathcal{M}$  задают над  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$  структуру коммутативного бимодуля над  $\mathcal{Z}$ , т.е.

$$zX = Xz \quad \forall X \in \mathfrak{der}(\mathcal{M}), \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Кроме того, пусть  $X, Y \in \mathfrak{der}(\mathcal{M})$  — произвольные дифференцирования алгебры  $\mathcal{M}$ . Положим

$$[X, Y](m) = X(Y(m)) - Y(X(m)).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[X, Y](m_1 m_2) &= X(Y(m_1)m_2 + m_1 Y(m_2)) - Y(X(m_1)m_2 + m_1 X(m_2)) = \\
&= X(Y(m_1))m_2 + Y(m_1)X(m_2) + X(m_1)Y(m_2) + m_1 X(Y(m_2)) - \\
&\quad - Y(X(m_1))m_2 - X(m_1)Y(m_2) - Y(m_1)X(m_2) - m_1 Y(X(m_2)) = \\
&= [X(Y(m_1)) - Y(X(m_1))]m_2 + m_1[X(Y(m_2)) - Y(X(m_2))] = \\
&= [X, Y](m_1)m_2 + m_1[X, Y](m_2),
\end{aligned}$$

т.е.  $[X, Y] \in \mathfrak{der}(\mathcal{M})$ . Очевидно, что операция  $[ , ]$  задает на  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$  структуру алгебры Ли над  $K$ .  
Рассмотрим внешнюю алгебру

$$\Lambda_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M}),$$

где  $\Lambda_{\mathcal{Z}}^0(\mathcal{M}) = K$ ,  $\Lambda_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M}) = \Lambda^n(\mathfrak{der}(\mathcal{M})) / \sim$ , где  $\Lambda^n(\mathfrak{der}(\mathcal{M}))$  — обычная внешняя степень векторного пространства  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$ , рассматриваемая естественным образом как бимодуль над  $\mathcal{Z}$ , а отношение эквивалентности определяется равенствами

$$\begin{aligned}
z(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) &= zX_1 \wedge \cdots \wedge X_n = X_1 \wedge zX_2 \wedge \cdots \wedge X_n = \cdots = \\
&= X_1 \wedge \cdots \wedge zX_r \wedge \cdots \wedge X_n = \cdots = X_1 \wedge \cdots \wedge zX_n = (X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)z
\end{aligned}$$

для любых  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{der}(\mathcal{M})$ ,  $z \in \mathcal{Z}$ .

Рассмотрим градуированное пространство

$$\Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M}),$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathcal{Z}}^0(\mathcal{M}) &= \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathcal{M}) = \mathcal{M}, \\
\Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M}) &= \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M}), \mathcal{M}), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Пусть  $\omega_1 \in \Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M})$ ,  $\omega_2 \in \Omega_{\mathcal{Z}}^m(\mathcal{M})$  — произвольные элементы. Определим элемент  $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_{\mathcal{Z}}^{n+m}(\mathcal{M})$  формулой

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \dots, X_{m+n}) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_n \\ j_1 < \cdots < j_m}} (-1)^{\varepsilon(\pi)} \omega_1(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \omega_2(X_{j_1}, \dots, X_{j_m}), \quad (7.1)$$

где  $\varepsilon(\pi)$  — знак перестановки  $\pi \in \Sigma_{n+m}$ ,  $\pi(k) = i_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\pi(n+k) = j_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , если  $n, m \geq 1$ ; если  $\omega_1 = a \in \mathcal{M}$ , то

$$(a\omega_2(X_1, \dots, X_m)) = a \cdot \omega_2(X_1, \dots, X_m);$$

аналогично, если  $\omega_2 = b \in \mathcal{M}$ , то

$$(\omega_1 b(X_1, \dots, X_n)) = \omega_1(X_1, \dots, X_n) \cdot b.$$

Определим для произвольного элемента  $\omega \in \Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M})$ ,  $n \geq 1$ , элемент  $d\omega \in \text{Hom}(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{n+1}(\mathcal{M}), \mathcal{M})$  формулой

$$\begin{aligned}
(d\omega)(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) + \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}),
\end{aligned}$$

где  $\widehat{\phantom{x}}$  означает пропуск элемента.

**Теорема 7.1** (см. [1]). (i) *Отображение*

$$\wedge : \Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M}) \otimes \Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M}), \quad \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2,$$

превращает пространство  $\Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M})$  в градуированную (но, вообще говоря, не коммутативную) алгебру.

- (ii) Для любого  $\omega \in \Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M})$ ,  $n \geq 1$ , имеем  $d\omega \in \Omega_{\mathcal{Z}}^{n+1}(\mathcal{M})$ .  
 (iii) Если положить  $(da)(X) = X(a)$ , для любого  $a \in \mathcal{M} = \Omega_{\mathcal{Z}}^0(\mathcal{M})$ , то для любого  $\omega \in \Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M})$  имеет место равенство  $d^2\omega = 0$ .  
 (iv) Для любых  $\omega_1 \in \Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M})$  и  $\omega_2 \in \Omega_{\mathcal{Z}}^m(\mathcal{M})$  выполняется равенство

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^n \omega_1 \wedge d(\omega_2).$$

Таким образом, пространство  $\Omega_{\mathcal{Z}}^*(\mathcal{M})$  превращается в дифференциальную градуированную алгебру.

В случае, если  $\mathcal{M}$  — унитарная  $*$ -алгебра, следует потребовать, чтобы подалгебра  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$  состояла из  $*$ -инвариантных (эрмитовых) элементов. Вместо алгебры Ли всех дифференцирований будем рассматривать эрмитовы дифференцирования, т.е.

$$\mathfrak{der}_h(\mathcal{M}) = \{X \in \mathfrak{der}(\mathcal{M}) \mid X(a^*) = X(a)^* \forall a \in \mathcal{M}\}.$$

Ясно, что  $\mathfrak{der}_h(\mathcal{M})$  является подалгеброй Ли в  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$  и одновременно  $\mathcal{Z}$ -подмодулем в  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$ .

Можно построить дифференциальную градуированную алгебру

$$\Omega_{\mathcal{Z},h}^*(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}),$$

где

$$\Omega_{\mathcal{Z},h}^0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \quad \Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z}}^n(\mathfrak{der}_h(\mathcal{M})), \mathcal{M}), \quad n \geq 1.$$

Умножение и дифференциал в алгебре  $\Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M})$  задаются теми же самыми формулами, что и умножение и дифференциал в  $\Omega_{\mathcal{Z}}^n(\mathcal{M})$ .

**Предложение 7.2.** *Формула*

$$\begin{aligned} (\omega^*)(X_1, \dots, X_n) &= (\omega(X_1, \dots, X_n))^*, \quad \omega \in \Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \quad n \geq 1, \\ (a)^* &= a^*, \quad a \in \Omega_{\mathcal{Z},h}^0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

задает на  $\Omega_{\mathcal{Z},h}^*(\mathcal{M})$  структуру градуированной  $*$ -алгебры, совпадающую на  $\Omega_{\mathcal{Z},h}^0(\mathcal{M})$  с  $*$ -структурой на  $\mathcal{M}$ .

*Доказательство.* Второе утверждение предложения 7.2 очевидно. Докажем первое.

Прежде всего, если  $n \geq 1$ , то, очевидно,

$$\begin{aligned} \omega^*(zX_1, \dots, X_n) &= (\omega(zX_1, \dots, X_n))^* = (zw(X_1, \dots, X_n))^* = \\ &= (\omega(X_1, \dots, X_n))^* z^* = z(\omega(X_1, \dots, X_n))^* = z\omega^*(X_1, \dots, X_n), \end{aligned}$$

т.е.  $\omega^* \in \Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M})$ . Далее, если  $\omega_1 \in \Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M})$ ,  $\omega_2 \in \Omega_{\mathcal{Z},h}^m(\mathcal{M})$ ,  $n, m \geq 1$ , — произвольные элементы, то

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)^*(X_1, \dots, X_{m+n}) &= ((\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \dots, X_{m+n}))^* + \\ &+ \left( \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_n \\ j_1 < \dots < j_m}} (-1)^{\varepsilon(\pi)} \omega_1(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \omega_2(X_{j_1}, \dots, X_{j_m}) \right)^* = \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_n \\ j_1 < \dots < j_m}} (-1)^{\varepsilon(\pi)} \omega_2^*(X_{j_1}, \dots, X_{j_m}) \omega_1^*(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) = (-1)^{\varepsilon(\tau)} (\omega_2^* \wedge \omega_1^*)(X_1, \dots, X_{m+n}), \end{aligned}$$

где  $\tau$  — перестановка,  $\tau \in \Sigma_{m+n}$ ,  $\tau$  меняет местами блок, состоящий из первых  $n$  элементов, с блоком, состоящим из последних  $m$  элементов (элементы внутри блоков не перемещаются). Несложно видеть, что  $\varepsilon(\tau) = (-1)^{mn}$ , т.е. выполняется равенство

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)^* = (-1)^{\deg \omega_1 \cdot \deg \omega_2} \omega_2^* \wedge \omega_1^*. \tag{7.3}$$

Наконец, покажем, что  $d(\omega^*) = (d\omega)^*$  для любого  $\omega \in \Omega_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M})$ ,  $n \geq 1$ . В самом деле,

$$(d\omega)^*(X_1, \dots, X_{n+1}) = (d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}))^* +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) \right)^* + \\
& + \left( \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) \right)^* = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \left( X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) \right)^* + \\
& \quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \left( \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) \right)^* = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i \left( (\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}))^* \right) + \\
& \quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega^*([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega^*(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) + \\
& \quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega^*([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) = \\
& = d(\omega^*)(X_1, \dots, X_{n+1}).
\end{aligned}$$

Это равенство верно для любых  $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ , следовательно,  $d(\omega^*) = (d\omega)^*$ .

До сих пор все рассматриваемые дифференциальные формы были положительной степени, поэтому для окончания доказательства осталось заметить, что если степень одной из двух форм  $\omega_1, \omega_2$  равна нулю, то равенство (7.3) выполняется автоматически.  $\square$

Вернемся к квантовым главным расслоениям. Пусть  $P = (\mathcal{B}, F)$  — квантовое главное расслоение со структурной группой  $\mathcal{A}$  и базой  $\mathcal{M}$ . Выберем в коммутативной алгебре  $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{M}$  подалгебру  $\mathcal{Z}$ , состоящую из эрмитовых (т.е.  $z^* = z$ ) элементов. Пусть  $\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M})$  — внешняя алгебра, построенная по  $\mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  и  $\mathcal{Z}$ .

Рассмотрим градуированное пространство  $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B})$ . Так как  $\Lambda_{\mathcal{Z},h}^0(\mathcal{M}) = \mathbb{C}$ , то при  $n = 0$  имеем

$$\text{Hom}_{\mathcal{Z}} \Lambda_{\mathcal{Z},h}^0(\mathcal{M}), \mathcal{B}) = \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}.$$

Отображение  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$  индуцирует отображение градуированных пространств

$$F_* : \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}).$$

Заметим, что существует очевидное вложение для любого  $n \geq 1$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \otimes \mathcal{A} \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}).$$

**Теорема 7.3.** *Пространство  $\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{hot}_{\text{sc}}^n(P)$ , где*

$$\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^n(P) = F_*^{-1}(\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \otimes \mathcal{A}),$$

*является градуированной \*-алгеброй, на которой справа кодействует квантовая группа  $\mathcal{A}$ .*

*Доказательство.* Заметим, что формулы, аналогичные (7.1) и (7.2), превращают пространство  $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B})$  в градуированную \*-алгебру. Докажем, что  $\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P)$  является \*-подалгеброй в  $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B})$  относительно введенного умножения и \*-структуры.

В самом деле, в пространстве  $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$  точно таким же способом можно ввести структуру градуированной  $*$ -алгебры. Так как отображение  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$  является гомоморфизмом  $*$ -алгебр, то и отображение  $F_*$ , рассмотренное выше, будет гомоморфизмом  $*$ -алгебр. С другой стороны, очевидно, что  $(\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B})) \otimes \mathcal{A}$  —  $*$ -подалгебра в  $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$ . Поэтому прообраз этой подалгебры относительно гомоморфизма  $F_*$  будет  $*$ -подалгеброй в  $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B})$ .

Докажем теперь, что на  $\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P)$  справа кодействует квантовая группа  $\mathcal{A}$ . В самом деле, ограничение гомоморфизма  $F_*$  на  $\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P)$  задает отображение

$$F_{\wedge} : \mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \otimes \mathcal{A}.$$

Покажем, что

$$F_{\wedge}(\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P)) \subseteq \mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P) \otimes \mathcal{A}.$$

Для этого рассмотрим отображение

$$(F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})_* : \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{\otimes 2}).$$

На подалгебре

$$\left( \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \right) \otimes \mathcal{A} \subseteq \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$$

это отображение, очевидно, совпадает с

$$F_* \otimes \text{id}_{\mathcal{A}} : \left( \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \right) \otimes \mathcal{A} \rightarrow \left( \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) \right) \otimes \mathcal{A}.$$

Таким образом, чтобы доказать последнее утверждение, достаточно показать, что

$$(F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})_*(F_{\wedge}(\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P))) \subseteq \left( \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \right) \otimes \mathcal{A}^{\otimes 2}.$$

Но  $F_{\wedge} = F_*|_{\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P)}$ ; с другой стороны,

$$(F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})_* F_* = ((F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})F)_* = ((\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi)F)_* = (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi)_* F_*.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (F \otimes \text{id}_{\mathcal{A}})_*(F_{\wedge}(\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P))) &= (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi)_*(F_{\wedge}(\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P))) \subseteq \\ &\subseteq (\text{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi)_* \left[ \left( \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \right) \otimes \mathcal{A} \right] = \\ &= ((\text{id}_{\mathcal{B}})_* \otimes \phi) \left[ \left( \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \right) \otimes \mathcal{A} \right] \subseteq \\ &\subseteq \left[ \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \right] \otimes \mathcal{A}^{\otimes 2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$F_{\wedge}(\mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P)) \subseteq \mathfrak{hot}_{\text{sc}}^*(P) \otimes \mathcal{A}.$$

Тот факт, что  $F_\wedge$  является гомоморфизмом градуированных  $*$ -алгебр, следует из аналогичных свойств отображения  $F_{**}$ , равно как и выполнение свойств

$$(F_\wedge \otimes \text{id})F_\wedge = (\text{id} \otimes \phi)F_\wedge, \quad (\text{id} \otimes \varepsilon)F_\wedge = \text{id}.$$

Теорема 7.3 доказана.  $\square$

**Определение 7.1.** Алгебру  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  будем называть алгеброй полуклассических дифференциальных форм на расслоении  $P$ . Аналогично, дифференциальную градуированную  $*$ -алгебру  $\Omega_{\mathcal{Z},h}^*(\mathcal{M})$ , построенную по  $\text{det}_h(\mathcal{M})$  и  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{M}$ , где  $\mathcal{Z}$  состоит из эрмитовых элементов, будем называть алгеброй полуклассических дифференциальных форм на  $\mathcal{M}$  (приставка «полу-» указывает на то, что  $\mathcal{M}$  — некоммутативная алгебра) и обозначать  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ .

Следующая теорема описывает важнейшие свойства алгебры  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ .

**Теорема 7.4.** (i) Алгебра  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  представляется в виде прямой суммы правых  $\mathcal{A}$ -комодулей, являющихся градуированными  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -бимодулями:

$$\text{hor}_{\text{sc}}^*(P) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{T}} \mathcal{H}^\alpha,$$

где

$$\mathcal{H}^\alpha \simeq (\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha) \otimes H_\alpha$$

как левый  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -модуль и

$$\mathcal{H}^\alpha \simeq (\mathcal{E}^\alpha \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})) \otimes H_\alpha$$

как правый  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -модуль. Здесь  $\alpha \in \mathcal{T}$  — набор неэквивалентных неприводимых представлений квантовой группы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{E}^\alpha$  — векторное расслоение, ассоциированное с  $P$  при помощи представления  $\alpha$ ,  $H_\alpha = \mathbb{C}^{n_\alpha}$  — векторное пространство, на котором действует представление  $\alpha$ . В частности,  $*$ -алгебра  $\mathcal{A}$ -инвариантных элементов в  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ ,  $\mathcal{H}^\emptyset$  совпадает с  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ .

(ii) Справедливы следующие разложения  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  в тензорные произведения:

$$\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \cong \text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \simeq \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}), \quad (7.4)$$

причем левый изоморфизм является изоморфизмом левых градуированных  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -модулей, а правый изоморфизм — изоморфизм правых градуированных  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -модулей.

*Доказательство.* (i) Воспользуемся изоморфизмом  $D \square_C C \cong D$ , справедливым для любого правого комодуля  $D$  над коалгеброй  $C$ . Тогда

$$\text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \cong \text{hor}_{\text{sc}}^* \square_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \cong \text{hor}_{\text{sc}}^* \square_{\mathcal{A}} \left( \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{T}} \tilde{H}^\alpha \right) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{T}} \left( \text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \square_{\mathcal{A}} \tilde{H}^\alpha \right),$$

где  $\tilde{H}^\alpha$  — подпространство в  $\mathcal{A}$ , порожденное элементами  $u_{ij}^\alpha$ ,  $i, j = 1, \dots, n_\alpha$ , матрицы  $u^\alpha$ , задающей представление  $\alpha$ . Как указано в разделе 5,  $\tilde{H}^\alpha \cong H_\alpha^\top \otimes H_\alpha$  как бикомодуль над  $\mathcal{A}$ , поэтому

$$\text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \square_{\mathcal{A}} \tilde{H}^\alpha \cong \left( \text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top \right) \otimes H_\alpha$$

как правый  $\mathcal{A}$ -комодуль. Очевидно, что умножение на элементы  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}) \subseteq \text{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ , задает на пространстве  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top$  структуру градуированного бимодуля над  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ . Мы покажем, что  $\text{hor}_{\text{sc}}^*(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top$  изоморфен  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha$  как левый  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -модуль и изоморфен  $\mathcal{E}^\alpha \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$  как правый  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ -модуль.

В самом деле, пусть

$$\sum_{k=1}^{n_\alpha} \omega_k \otimes e_k \in \text{hor}_{\text{sc}}^n(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top,$$



где  $\omega_k \in \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P)$ ,  $e_k$  — базис в  $H_\alpha^\top$ . Это значит, что

$$\sum_{k=1}^{n_\alpha} F_\wedge(\omega_k) \otimes e_k = \sum_{j,k=1}^{n_\alpha} \omega_k \otimes u_{kj}^\alpha \otimes e_j.$$

Сравнивая коэффициенты при  $e_k$ , получаем, что

$$F_\wedge(\omega_k) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \omega_j \otimes u_{jk}^\alpha.$$

Отсюда следует, в частности, что если форма  $\omega \in \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P)$  входит в разложение ненулевого элемента из  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top$ , то

$$F_\wedge(\omega) \in \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P) \otimes \tilde{H}_\alpha. \quad (7.5)$$

С другой стороны, пусть  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  — произвольные элементы. Из вложения (7.5) следует, что

$$F(\omega(X_1, \dots, X_n)) \in \mathcal{B} \otimes \tilde{H}_\alpha,$$

где  $F$  — кодействие  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{B}$ .

Отсюда вытекает, что

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{B}^\alpha \quad \text{для любых } X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}),$$

где  $\mathcal{B}^\alpha \subseteq \mathcal{B}$  — такое подпространство, что  $F(\mathcal{B}^\alpha) \subseteq \mathcal{B} \otimes \tilde{H}_\alpha$ . Из результатов гл. 1 следует, что  $\mathcal{B} \cong \mathcal{E}^\alpha \otimes H_\alpha$ . Поэтому для  $\omega$  указанного типа

$$\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}^\alpha) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}),$$

где

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{B}^\alpha) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha \otimes H_\alpha) \cong \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \otimes H_\alpha \subseteq \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top \subseteq \left( \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \otimes H_\alpha \right) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top \cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha),$$

поскольку  $H_\alpha \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top = \mathbb{C}$ .

С другой стороны, в силу вложения (7.6)

$$\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \subseteq \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^n(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P) \square_{\mathcal{A}} H_\alpha^\top \cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^*(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha).$$

Осталось доказать, что

$$\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha \cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^*(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \cong \mathcal{E}^\alpha \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}).$$

Достаточно показать, что для любого  $n \geq 1$

$$\Omega_{\text{sc}}^n(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha \cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha \cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}^n(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha)$$

и аналогично для правого разложения (для  $n = 0$  утверждение очевидно). Для этого напомним, что  $\mathcal{E}^\alpha$  — проективный конечно порожденный левый модуль над  $\mathcal{M}$  и одновременно правый конечно порожденный проективный модуль над  $\mathcal{M}$ , и воспользуемся следующим хорошо известным утверждением.

**Лемма 7.5.** Пусть  $E$  — конечно порожденной проективный правый модуль над произвольной унитарной алгеброй  $\mathcal{M}$  и  $H$  — произвольный бимодуль над коммутативной алгеброй  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ . Тогда справедливо разложение

$$\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E) \cong E \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}).$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $E$  — произвольный правый  $\mathcal{M}$ -модуль. Рассмотрим очевидное отображение

$$\begin{aligned} \varphi_E : E \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E), \\ (\varphi_E(e \otimes f))(h) &= ef(h), \quad e \in E, \quad f \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}), \quad h \in H \end{aligned}$$

(корректность этого определения проверяется элементарным образом). Очевидно также, что  $\varphi_E$  является морфизмом правых  $\mathcal{M}$ -модулей.

Пусть  $\psi : E \rightarrow E'$  — произвольный морфизм правых модулей над  $\mathcal{M}$ . Формула

$$(\psi_*(f))(h) = \psi(f(h))$$

задает морфизм  $\psi_* : \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E')$  правых  $\mathcal{M}$ -модулей. Очевидно, что отображение  $\varphi_E$  естественно относительно  $\psi$  и  $\psi_*$ , т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\varphi_E} & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E) \\ \psi \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \psi_* \\ E' \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\varphi_{E'}} & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E') \end{array} .$$

Наконец, ясно, что для любого свободного конечно порожденного модуля  $\mathcal{M}^n$  отображение  $\varphi_{\mathcal{M}^n}$  — изоморфизм.

Пусть теперь  $E$  — проективный конечно порожденный модуль, т.е. существует свободный конечно порожденный модуль  $\mathcal{M}^n$  и отображения модулей

$$i : E \rightarrow \mathcal{M}^n, \quad p : \mathcal{M}^n \rightarrow E$$

такие, что  $p \circ i = \text{id}$ .

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} E \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) & \xrightarrow{i \otimes \text{id}} & \mathcal{M}^n \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) & \xrightarrow{p \otimes \text{id}} & E \otimes_{\mathcal{M}} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) \\ \varphi_E \downarrow & & \varphi_{\mathcal{M}^n} \downarrow & & \downarrow \varphi_E \\ \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E) & \xrightarrow{i_*} & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}^n) & \xrightarrow{p_*} & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E) \end{array} .$$

Тогда для любого  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E)$  имеем

$$f = \text{id}_*(f) = (p \circ i)_*(f) = p_* i_*(f) = \varphi_E(p \otimes \text{id}) \varphi_{\mathcal{M}^n}^{-1} i_*(f)$$

и, следовательно, отображение  $\varphi_E$  сюръективно (заметим, что эта часть выполняется для произвольного конечно порожденного модуля  $E$ ). С другой стороны, отображение  $\varphi_E$  инъективно, так как

$$i_* \circ \varphi_E = (i \otimes \text{id}) \circ \varphi_{\mathcal{M}^n},$$

причем  $\varphi_{\mathcal{M}^n}$  — изоморфизм, а  $i \otimes \text{id}$  — инъективное отображение, так как

$$(p \otimes \text{id})(i \otimes \text{id}) = \text{id} \otimes \text{id}.$$

Лемма 7.5 доказана. □

Таким образом, п. (i) доказан.

Пункт (ii) — непосредственное следствие п. (i) и разложения алгебры  $\mathcal{B}$  в прямую сумму  $\mathcal{M}$ -бимодулей:  $\mathcal{B} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}}^{\oplus} \mathcal{B}^{\alpha}$ .

Теорема 7.4 доказана. □

## 8. СВЯЗНОСТИ В ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Как следует из теорем 7.3 и 7.4, алгебра  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  удовлетворяет всем условиям, накладываемым на алгебру горизонтальных дифференциальных форм на квантовом главном расслоении (см. теоремы 5.5 и 5.12).

Пусть  $\Omega(P)$  — такое дифференциальное исчисление на квантовом главном расслоении  $P$ , что алгебра горизонтальных дифференциальных форм этого дифференциального исчисления совпадает с  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ . Тогда, как показано в разделе 4, ковариантные дифференцирования  $D_\omega$ , построенные по регулярным связностям  $\omega$  на  $P$ , являются градуированными антидифференцированиями степени 1 на  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  такими, что

$$D_\omega(\varphi^*) = D_\omega(\varphi)^*, \quad (8.1)$$

$$F_\wedge D_\omega(\varphi) = (D_\omega \otimes \text{id})F_\wedge(\varphi), \quad (8.2)$$

и  $D_\omega|_{\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})} = d_{\mathcal{M}}$ , где  $d_{\mathcal{M}}$  — дифференциал на  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})$ , индуцированный из  $\Omega(P)$ .

Будем считать, что  $d_{\mathcal{M}} = d_{\text{sc}}$ , где

$$d_{\text{sc}} : \Omega_{\text{sc}}^n(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_{\text{sc}}^{n+1}(\mathcal{M})$$

— дифференциал на  $\Omega_{\text{sc}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z},h}^*(\mathcal{M}), \mathcal{M})$ , описанный в разделе 7.

В силу теоремы 5.12 верно и обратное утверждение: для любого подпространства  $\mathcal{L}$  в аффинном пространстве  $\mathfrak{det}_{\text{sc}}(P)$ , состоящем из таких градуированных антидифференцирований  $D$  на  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ , что выполнены условия (8.1), (8.2) и  $D|_{\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})} = d_{\text{sc}}$ , существует такое дифференциальное исчисление  $\Omega(P) = \Omega(P, \mathcal{L})$  на квантовом главном расслоении  $P$ , что любое дифференцирование  $D$  из  $\mathcal{L}$  является ковариантным дифференцированием для некоторой регулярной связности на  $P$  в дифференциальном исчислении  $\Omega(P)$  (конечно, подалгебра горизонтальных дифференциальных форм в  $\Omega(P)$  совпадает с  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ ).

Итак, изучим антидифференцирование порядка 1 алгебры  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ , удовлетворяющие уравнениям (8.1) и (8.2) и условию  $D|_{\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})} = d_{\text{sc}}$ .

**Предложение 8.1.** *Любое дифференцирование  $D$ , удовлетворяющее указанным условиям, определяет «лифт дифференцирований», т.е. отображение  $\mathcal{Z}$ -бимодулей*

$$l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B})$$

такое, что

$$l(X)(m) = X(m) \quad \forall m \in \mathcal{M}, \quad (8.3)$$

$$F(l(X)(b)) = (l(X) \otimes \text{id})F(b) \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (8.4)$$

Наоборот, любое отображение  $l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B})$ , удовлетворяющее (8.3) и (8.4), однозначно определяет некоторое антидифференцирование  $D$  степени 1 градуированной  $*$ -алгебры  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ , удовлетворяющее указанным условиям.

**Замечание 8.1.** В классическом случае, когда  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{B}$  — алгебры гладких ( $\mathbb{C}$ -значных) функций на многообразиях  $M$  и  $P$ , дифференцирования этих алгебр соответствуют  $\mathbb{C}$ -значным гладким векторным полям на многообразиях. В этом случае все алгебры, входящие в определения, коммутативны, и можно выбрать в качестве  $\mathcal{Z}$  алгебру вещественнозначных функций на  $M$ ; эрмитовы дифференцирования в алгебрах  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{B}$  — это гладкие вещественнозначные векторные поля. В этом случае понятие «лифта дифференцирования» превращается в известное из классической дифференциальной геометрии понятие «лифта векторных полей» (см., например, [3]): для каждого векторного поля  $X$  на  $M$  связность  $\tau$  на главном расслоении  $P$  над  $M$  позволяет построить единственным образом определенное векторное поле  $\tilde{X}$  на  $P$  такое, что (см. [3]) выполнены следующие условия.

- 1) для любого  $g \in G$  имеем  $dR_g(\tilde{X}) = \tilde{X}$  ( $R_g : P \rightarrow P$  — отображение, задаваемое как правое действие  $G$  на  $P$  при помощи элемента  $g$ ,  $dR_g$  — дифференциал этого действия).

2) Пусть  $\pi : P \rightarrow M$  — проекция. Из 1) следует, что  $\pi_*(\widetilde{X}(p))$  не зависит от выбора  $p \in \pi^{-1}(x)$  для любого  $x \in M$ ; более того, должно быть выполнено следующее условие:

$$\pi_*(\widetilde{X}(p)) = X(\pi(p)).$$

3)  $(f\widetilde{X}) = \pi_*(f)\widetilde{X}$  для любой (вещественнозначной) функции  $f$  на  $M$  и  $\widetilde{X + Y} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$ .

Для того чтобы по классической связности  $\tau$  на главном расслоении  $P$  построить такое отображение, достаточно вспомнить, что связность в классическом случае есть  $G$ -инвариантное распределение горизонтальных подпространств в касательном расслоении к  $P$ . Очевидно, что и наоборот, любое отображение  $X \mapsto \widetilde{X}$  векторных полей на  $M$  в векторные поля на  $P$ , удовлетворяющее условиям 1)–3), задает связность на главном расслоении  $P$  (горизонтальное подпространство в точке  $p \in P$  состоит из векторов  $\widetilde{X}(p)$  для всевозможных векторных полей  $X$  на  $M$ ).

*Доказательство.* Пусть  $D : \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P) \rightarrow \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  — дифференцирование, удовлетворяющее условиям (8.1), (8.2) и  $d|_{\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M})} = d_{\text{sc}}$ . Рассмотрим ограничение  $D_0$  отображения  $D$  на  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^0(P) = \mathcal{B}$ . Тогда

$$D_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^1(P) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z}, h}^1(\mathcal{M}), \mathcal{B}) = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), \mathcal{B}).$$

Пусть  $X \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  — произвольное дифференцирование. Определим отображение  $\widetilde{X} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  по правилу

$$\widetilde{X}(b) = (D_0(b))(X)$$

для любого  $X \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ ,  $b \in \mathcal{B}$ .

Докажем, что соответствие  $X \mapsto \widetilde{X}$  определяет лифт дифференцирований.

В самом деле, для любых  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ ,  $X \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(b_1 b_2) &= (D_0(b_1 b_2))(X) = (D_0(b_1)b_2 + b_1 D_0(b_2))(X) = \\ &= (D_0(b_1))(X) \cdot b_2 + b_1 \cdot (D_0(b_2))(X) = \widetilde{X}(b_1)b_2 + b_1 \widetilde{X}(b_2) \end{aligned}$$

и, следовательно,  $\widetilde{X}$  — дифференцирование алгебры  $\mathcal{B}$ . Кроме того,

$$\widetilde{X}(b^*) = (D_0(b^*))(X) = (D_0(b)^*)(X) = [(D_0(b))(X)]^* = \widetilde{X}(b)^*$$

для любого  $b \in \mathcal{B}$ , и поэтому  $\widetilde{X} \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ .

Далее,

$$(z\widetilde{X})(b) = (D_0(b))(zX) = z(D_0(b))(X) = z\widetilde{X}(b)$$

для любого  $X \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ ,  $z \in \mathcal{Z}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ , и поэтому отображение  $l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B})$ ,  $X \mapsto \widetilde{X}$ , является морфизмом  $\mathcal{Z}$ -(би)модулей.

Проверим, что отображение  $X \xrightarrow{l} \widetilde{X}$  удовлетворяет условию (8.4). Имеем

$$\begin{aligned} F(\widetilde{X}(b)) &= F((D_0(b))(X)) = (F \wedge D_0(b))(X) = \sum_{(b)} (D_0(b_{(1)}) \otimes b_{(2)})(X) = \\ &= \sum_{(b)} D_0(b_{(1)})(X) \otimes b_{(2)} = (\widetilde{X} \otimes \text{id})F(b), \end{aligned}$$

т.е. выполнено условие (8.3). Если  $m \in \mathcal{M}$ , то

$$\widetilde{X}(m) = D_0(m)(X) = d_{\text{sc}}(m)(X) = X(m)$$

(последнее равенство вытекает из определения дифференциала  $d_{\text{sc}}$ ).

Итак, любое дифференцирование алгебры  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  определяет «лифт»  $l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B})$ . Пусть, наоборот, задан некоторый «лифт»  $l$ , т.е. задано отображение  $\mathcal{Z}$ -(би)модулей

$$l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B}),$$

удовлетворяющее условиям (8.3), (8.4). Построим дифференцирование степени 1 алгебры  $\mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$ , продолжающее  $d_{\text{sc}}$  на  $\Omega_{\text{sc}}(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^*(P)$  и удовлетворяющее условиям (8.1), (8.2).

Именно, положим

$$D_l(\omega)(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} l(X_i)(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) + \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}),$$

где  $\omega \in \mathfrak{hot}_{\text{sc}}^n(P)$  — произвольный элемент,  $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  — дифференцирования. Тогда  $D_l(\omega) \in \text{Hom}(\Lambda_{\mathcal{Z}, h}^{n+1}, \mathcal{B})$ , так как, очевидно,

$$D_l(\omega)(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_{n+1}) = -D_l(\omega)(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_{n+1})$$

для любых  $i, j$ .

Покажем, что на самом деле

$$D_l(\omega) \in \mathfrak{hot}_{\text{sc}}^{n+1}(P) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z}, h}^{n+1}(\mathcal{M}), \mathcal{B}).$$

Имеем

$$D_l(\omega)(zX_1, \dots, X_{n+1}) = l(zX_1)\omega(X_2, \dots, X_{n+1}) + \\ + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} l(X_i)\omega(zX_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \\ + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} \omega([zX_1, X_i], X_2, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \\ + \sum_{1 < i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], zX_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}).$$

Воспользуемся тем фактом, что  $\omega$  и  $l$  —  $\mathcal{Z}$ -линейные отображения, и формулой

$$[zX, Y] = z[X, Y] - Y(z)X.$$

Таким образом,

$$D_l(\omega)(zX_1, \dots, X_{n+1}) = zl(X_1)\omega(X_2, \dots, X_{n+1}) + \\ + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} \left\{ l(X_i)(z)\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \right. \\ \left. + zl(X_i)\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \right\} + \\ + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} \left\{ -X_i(z)\omega(X_1, X_2, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \right. \\ \left. + z\omega([X_1, X_i], X_2, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \right\} + \\ + \sum_{1 < i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} z\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1})$$

(мы используем тот факт, что  $X(z) \in \mathcal{Z}$  для любого  $z \in \mathcal{Z}$  и  $X \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ ; напомним, что алгебра  $\mathcal{Z}$  состоит из эрмитовых элементов центра  $*$ -алгебры  $\mathcal{M}$ ). С другой стороны,  $l(X_i)(z) = X_i(z)$ , так как  $z \in \mathcal{M}$ . Значит,

$$D_l(\omega)(zX_1, \dots, X_{n+1}) = zl(X_1)\omega(X_2, \dots, X_{n+1}) + \\ + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i(z)\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + z \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1} l(X_i) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \\
& + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+2} X_i(z) (X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \\
& + z \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) = \\
& = z D_l(\omega)(X_1, \dots, X_{n+1}).
\end{aligned}$$

Итак,  $D_l(\omega) \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z}, h}^{n+1}(\mathcal{M}), \mathcal{B})$ .

Покажем, что  $D_l(\omega) \in \mathfrak{hor}_{\text{sc}}^{n+1}(P)$ . Для этого достаточно доказать, что для любых  $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  имеем

$$\{F_*(D_l(\omega))\}(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{(\omega)} D_l(\omega_{(1)})(X_1, \dots, X_{n+1}) \otimes \tilde{\omega}_{(2)},$$

где  $\sum_{(\omega)} \omega_{(1)} \otimes \tilde{\omega}_{(2)} = F_{\wedge}(\omega)$ . Тогда сразу докажем, что  $D_l$  удовлетворяет условию (8.2). В самом деле,

$$\begin{aligned}
\{F_*(D_l(\omega))\}(X_1, \dots, X_{n+1}) & = F(D_l(\omega)(X_1, \dots, X_{n+1})) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} F(l(X_i)(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}))) + \\
& + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} F(\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1})) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} (l(X_i) \otimes \text{id}) F(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) + \\
& + \sum_{i < j} \sum_{(\omega)} (-1)^{i+j} \omega_{(1)}([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) \otimes \tilde{\omega}_{(2)} = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{(\omega)} (-1)^{i+1} l(X_i) \omega_{(1)}(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) \otimes \tilde{\omega}_{(2)} + \\
& + \sum_{(\omega)} \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega_{(1)}([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) \otimes \tilde{\omega}_{(2)} = \\
& = \sum_{(\omega)} D_l(\omega_{(1)})(X_1, \dots, X_{n+1}) \otimes \tilde{\omega}_{(2)} = \\
& = \{(D_l \otimes \text{id}) F_{\wedge}(\omega)\}(X_1, \dots, X_{n+1}).
\end{aligned}$$

Наконец, условие (8.1) проверяется прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
D_l(\omega^*)(X_1, \dots, X_{n+1}) & = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} l(X_i) (\omega^*)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \\
& + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega^*([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} l(X_i) \left( (\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1}))^* \right) + \\
& + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \left( \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}) \right)^* =
\end{aligned}$$

$$= (D_l(\omega)(X_1, \dots, X_{n+1}))^*$$

для любых  $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ .

Итак,  $D_l : \mathfrak{hor}_{sc}^*(P) \rightarrow \mathfrak{hor}_{sc}^*(P)$  — эрмитово  $\mathcal{A}$ -эквивариантное отображение. Тот факт, что  $D_l$  — градуированное дифференцирование, доказывается точно так же, как и аналогичное утверждение о свойствах дифференциала  $d_{sc}$ . А поскольку  $l(X)(m) = X(m)$ , ограничение  $D_l$  на  $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$  совпадает с  $d_{sc}$ .

Наконец, из разложения п. (ii) теоремы 7.4 следует, что любое градуированное антидифференцирование на  $\mathfrak{hor}_{sc}^*(P)$  однозначно восстанавливается по своему ограничению на  $\mathfrak{hor}_{sc}^0(P) = \mathcal{B}$  и на  $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$ .  $\square$

**Замечание 8.2.** Из доказанного следует, что по аналогии с классическим случаем (см. замечание 8.1), мы могли бы сразу определить связность на главном квантовом расслоении  $P$  как лифт дифференцирований  $l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B})$ , для которого выполнены все вышеперечисленные условия. В этом случае предложение 8.1 устанавливает связь между таким определением связности и данным в гл. 1 определением.

Будучи частным случаем регулярной связности, лифт дифференцирований на главном квантовом расслоении может не существовать (подробнее мы на этом остановимся в гл. 3). Чтобы лучше понять, почему так может происходить, изучим отображение, индуцируемое  $D_l$  на ассоциированных векторных расслоениях.

Напомним, что ассоциированные векторные расслоения  $\mathcal{E}_u$  — это пространства морфизмов  $\text{Mor}(u, F)$ . Если  $f : H_u \rightarrow \mathcal{B}$  — морфизм из  $\mathcal{E}_u$ , то  $D_l \circ f : H_u \rightarrow \mathfrak{hor}_{sc}^1(P)$  также является морфизмом  $\mathcal{A}$ -комодулей, т.е.

$$F_\wedge \circ D_l \circ f = (D_l \circ f \otimes \text{id})\Delta_u.$$

Но

$$\mathfrak{hor}_{sc}^1(P) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), \mathcal{B});$$

поэтому, вычисляя значение  $(D_l \circ f)(e)$  на дифференцировании  $X$ , где  $e \in H_u$ , получаем, что соответствие

$$((D_l \circ f)(\cdot))(X) : H_u \rightarrow \mathcal{B}$$

является  $\mathcal{A}$ -эквивариантным и, следовательно, принадлежит  $\mathcal{E}_u$ . Таким образом, отображение  $D_l$  можно интерпретировать как отображение из  $\mathcal{E}_u \ni f$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u)$ :

$$\tilde{\nabla}_X f = ((D_l \circ f)(\cdot))(X) : H_u \rightarrow \mathcal{B};$$

вместо точки следует подставлять элементы из пространства  $H_u$ . Это отображение из  $H_u$  в  $\mathcal{B}$  будет морфизмом представлений и, следовательно, элементом из  $\mathcal{E}_u$ . Отображение

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{E}_u \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u)$$

удовлетворяет следующим соотношениям: для любого  $m \in \mathcal{M}$

$$\tilde{\nabla}_X(f \cdot m) = (\tilde{\nabla}_X f) \cdot m + f \cdot X(m), \quad (8.5)$$

$$\tilde{\nabla}_X(m \cdot f) = X(m) \cdot f + m \tilde{\nabla}_X f. \quad (8.6)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(fm)(e) &= ((D_l \circ fm)(e))(X) = (D_l(f(e)m))(X) = \\ &= ((D_l(f(e)))m)(X) + (f(e)d_{sc}(m))(X) = \\ &= (D_l(f(e))(X))m + f(e)(d_{sc}(m)(X)) = \\ &= (\tilde{\nabla}_X f)(e) \cdot m + f(e)X(m) \end{aligned}$$

для любых  $m \in \mathcal{M}$ ,  $e \in H_u$ . Аналогично доказывается соотношение (8.6).

В [1, 2] (см. также [8]) определяются связности на проективных правых модулях над произвольной унитарной алгеброй  $\mathcal{M}$ . Связностью на модуле  $E$  называется такое отображение  $\nabla : E \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}(\mathcal{M}), E)$ , что

$$\nabla_X(e \cdot m) = \nabla_X(e) \cdot m + e \cdot X(m),$$

где  $\mathcal{Z}$  — центр  $\mathcal{M}$ . В [1, 2] показано, что такого рода связности существуют на всех проективных конечно прожженных модулях  $E$  над  $\mathcal{M}$ . В нашем случае бимодуль  $\mathcal{E}_u$  проективен и конечно порожден как левый и как правый модуль над  $\mathcal{M}$ . Отсюда следует, что всегда существуют отображения  $\nabla : \mathcal{E}_u \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u)$ , удовлетворяющие отдельно или соотношению (8.5), или (8.6). Однако, как будет показано в гл. 3 (см. также [7]), в общем случае может не существовать отображений, удовлетворяющих и (8.5), и (8.6).

В заключение скажем несколько слов о кривизне связности на ассоциированном векторном расслоении и о характеристических классах.

Именно, в [1] кривизна связности определяется как автоморфизм модуля  $E$ :  $\Theta(X, Y) : E \rightarrow E$ , зависящий от пары дифференцирований  $X, Y \in \mathfrak{der}(\mathcal{M})$ ,

$$\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}. \quad (8.7)$$

Очевидно, что  $\Theta(X, Y) = -\Theta(Y, X)$ . Далее, формула

$$\begin{aligned} & (\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta)(X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}, X_{2n}) = \\ & = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \in \Sigma_{2n}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \Theta(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \cdots \Theta(X_{\sigma(2n-1)}, X_{\sigma(2n)}) \end{aligned} \quad (8.8)$$

определяет автоморфизм  $(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta)(X_1, X_2, \dots, X_{2n}) : E \rightarrow E$ , кососимметрическим образом зависящий от дифференцирований  $X_1, \dots, X_{2n}$ . В [1, 2] также доказывается, что след автоморфизмов  $(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta)(X_1, \dots, X_{2n})$ , построенный по произвольному следу  $\text{tr} : \mathcal{M} \rightarrow V$ , где  $V$  — произвольный  $\mathfrak{der}(\mathcal{M})$ -модуль и  $\mathcal{Z}$ -бимодуль, для которого выполняется равенство

$$X(zv) = X(z)v + zX(v), \quad X \in \mathfrak{der}(\mathcal{M}), \quad z \in \mathcal{Z}, \quad v \in V,$$

удовлетворяет соотношению

$$d(\text{tr}(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta))(X_1, \dots, X_{2n+1}) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} d(\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \end{aligned}$$

для произвольного  $\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z}}^p(\mathcal{M}), V)$  — обобщение дифференциала  $d_{\text{sc}}$ . Кроме того, оказывается, что класс

$$[d(\text{tr}(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta))] \in H^{2n}(\mathcal{M}, V),$$

где  $H^*(\mathcal{M}, V)$  — когомологии дифференциального комплекса

$$V \xrightarrow{d} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z}}^1(\mathcal{M}), V) \xrightarrow{d} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z}}^2(\mathcal{M}), V) \longrightarrow \dots,$$

не зависит от выбора связности  $\nabla$ .

С другой стороны, в разделе 5 приведена конструкция характеристических классов ассоциированных векторных расслоений, основанная на ковариантной производной произвольной регулярной связности. Именно, показано, что классы  $[\text{tr}_{\mathcal{M}}(D_{\omega}^{2n})] \in H^{2n}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$  не зависят от выбора регулярной связности  $\omega$ .

В нашем случае ковариантное дифференцирование, построенное по регулярной связности, — это то же, что дифференцирование  $D_l$ , построенное по лифту  $l : \mathfrak{der}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{der}_h(\mathcal{B})$ . С другой стороны, как показано выше,  $D_l$  определяет отображения

$$\widetilde{\nabla} : \mathcal{E}_u \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u),$$

по которым при помощи формулы (8.7) можно построить отображение  $\widetilde{\Theta}(X, Y) : \mathcal{E}_u \rightarrow \mathcal{E}_u$ .



**Предложение 8.2.**

$$\left(\tilde{\Theta}(X, Y)(f)\right)(e) = (D_l^2(f(e)))(X, Y), \quad (8.9)$$

где  $e \in H_u$ ,  $f \in \mathcal{E}_u = \text{Mor}(u, F)$ . Аналогично,

$$\left[\left(\tilde{\Theta} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Theta}\right)(X_1, \dots, X_{2n})(f)\right](e) = D_l^{2n}(f(e))(X_1, \dots, X_{2n}). \quad (8.10)$$

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\Theta}(X, Y)(f)\right)(e) &= \left[\left(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\right)(f)\right](e) = \\ &= \tilde{\nabla}_X(D_l(f(e))(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(D_l(f(e))(X)) - D_l(f(e))([X, Y]). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$D_l(b)(X) = l(X)(b) \quad \text{для любого } b \in \mathcal{B}, X \in \text{der}_h(\mathcal{M}).$$

Таким образом,

$$\tilde{\nabla}_X(D_l(f(e))(Y)) = \tilde{\nabla}_X(l(Y)(f(e))) = D_l(l(Y)(f(e)))(X) = l(X)(l(Y)(f(e))).$$

Аналогично,

$$\tilde{\nabla}_Y(D_l(f(e))(X)) = l(Y)l(X)(f(e)).$$

Окончательно получаем

$$\left(\tilde{\Theta}(X, Y)(f)\right)(e) = \{l(X)l(Y) - l(Y)l(X) - l([X, Y])\} f(e). \quad (8.11)$$

С другой стороны, по определению  $D_l$  (см. предложение 8.1),

$$\begin{aligned} [D_l^2(b)](X, Y) &= l(X)(D_l(b)(Y)) - l(Y)(D_l(b)(X)) - D_l(b)([X, Y]) = \\ &= \{l(X)l(Y) - l(Y)l(X) - l([X, Y])\}(b), \end{aligned}$$

и это верно для любого  $b \in \mathcal{B}$ .

Таким образом, (8.9) доказано. Чтобы получить (8.10), достаточно сравнить формулу (8.8) с тем, что получается по индукции из (8.11) при помощи формулы для дифференциала  $D_l$ .  $\square$

Итак, на уровне форм кривизны оба подхода дают одно и то же. Однако в общем случае отображение  $\text{tr}_{\mathcal{M}}$  не будет следом градуированных морфизмов (см. раздел 5), так как для него в общем случае не выполняется равенство  $\text{tr}_{\mathcal{M}}(AB) = (-1)^{\partial A \partial B} \text{tr}_{\mathcal{M}}(BA)$ , и поэтому его нельзя применить к произвольной связности  $\nabla : \mathcal{E}_u \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\text{der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u)$ , в смысле [1, 2, 8]. В следующей главе мы установим связь между произвольными (нерегулярными) связностями на  $P$  и связностями в смысле [1, 2, 8].

### ГЛАВА 3

## СВЯЗНОСТИ И ПРЕПЯТСТВИЯ

В этой главе обсуждается вопрос о существовании регулярных связностей на квантовых главных расслоениях. Как показано в главе 1, для тех квантовых расслоений, на которых определены регулярные связности, существует достаточно богатая теория характеристических классов, полностью аналогичная теории Чженя—Вейля в случае классических главных расслоений. Кроме того, в разделе 5 приведена конструкция характеристических классов векторных расслоений, ассоциированных с данным главным расслоением; она более универсальна, чем конструкция Чженя—Вейля, но равно требует, чтобы на ассоциированных векторных расслоениях существовали транспонируемые дифференцирования.

Прежде всего мы отвечаем на вопрос о существовании регулярных связностей. Оказывается, что, основываясь на произвольной связности на расслоении, можно построить когомологическое

препятствие, равенство которого нулю означает положительный ответ на этот вопрос. Это препятствие — класс когомологий специально построенного по алгебре  $\mathfrak{hor}(P)$  и пространству  $\Gamma_{\text{inv}}$  коцепного комплекса. Более того, при помощи этого препятствия мы построим аналог гомоморфизма Вейля, принимающий значение в когомологиях Хохшильда алгебры  $\mathcal{M}$  со значениями в  $\Omega(\mathcal{M})$  или, более общо, в когомологиях Хохшильда градуированной алгебры  $\Omega(\mathcal{M})$ . При этом естественное отображение  $HH(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M})) \rightarrow HH(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$  переводит образ второго из построенных отображений в образ первого.

Однако в общем случае вычислить подобное препятствие не представляется возможным. Поэтому далее мы переходим к рассмотрению аналогичных препятствий для существования дифференцирований на присоединенных векторных расслоениях, прежде всего, в случае полуклассического дифференциального исчисления (см. гл. 2). В этом случае тоже удастся построить аналогичные препятствия. Приводятся примеры, в которых вычисляется значение построенного препятствия. Кроме того, в последнем разделе описана связь между препятствиями к существованию дифференцирований присоединенных векторных расслоений и описанными выше классами в когомологиях Хохшильда алгебры  $\mathcal{M}$  (или  $\Omega(\mathcal{M})$ ).

## 9. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Пусть  $\omega$  — некоторая связность на расслоении  $P$  с дифференциальным исчислением  $\Omega(P)$ . Пусть  $\Gamma$  — соответствующий модуль дифференциальных форм на квантовой структурной группе  $\mathcal{A}$ . Напомним, что связность  $\omega$  называется регулярной, если для любой горизонтальной дифференциальной формы  $\varphi \in \mathfrak{hor}(P) = \widehat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes 1) \subseteq \Omega(P)$  и любого  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}$  выполняется соотношение

$$\omega(\theta)\varphi = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k),$$

где  $\sum_k \varphi_k \otimes c_k = \widehat{F}(\varphi)$  и

$$\theta \circ a = \sum_{(a)} \kappa(a_{(1)})\theta a_{(2)} \in \Gamma_{\text{inv}}, \quad \theta \in \Gamma_{\text{inv}}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Рассмотрим для произвольной связности  $\omega$  отображение  $l_\omega : \Gamma_{\text{inv}} \otimes \mathfrak{hor}(P) \rightarrow \Omega(P)$ , определенное формулой

$$l_\omega(\theta \otimes \varphi) = \omega(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k). \quad (9.1)$$

**Предложение 9.1** (см. [11]).

$$\widehat{F}l_\omega(\theta \otimes \varphi) = \sum_{k,l} l_\omega(\theta_l \otimes \varphi_k) \otimes d_l c_k,$$

где  $\sum_l \theta_l \otimes d_l = \varpi(\theta)$ . В частности,  $l_\omega(\Gamma_{\text{inv}} \otimes \mathfrak{hor}(P)) \subseteq \mathfrak{hor}(P)$ .

*Доказательство.* Это утверждение приведено в [11]. Поскольку оно важно для нас в дальнейшем, приведем полное доказательство:

$$\begin{aligned} \widehat{F}l_\omega(\theta \otimes \varphi) &= \widehat{F}\left(\omega(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k)\right) = \\ &= \widehat{F}(\omega(\theta))\widehat{F}(\varphi) - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \widehat{F}(\varphi_k)\widehat{F}(\omega(\theta \circ c_k)) = \\ &= \left(\sum_l \omega(\theta_l) \otimes d_l + 1 \otimes \theta\right) \left(\sum_k \varphi_k \otimes c_k\right) - \\ &\quad - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \left(\sum_{(c_k)} \varphi_k \otimes c_{k,(1)}\right) \left(\sum_{l,(c_k)} \omega(\theta_l \circ c_{k,(3)}) \otimes \kappa(c_{k,(2)})d_l c_{k,(4)}\right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \sum_{(c_k)} ((\varphi_k \otimes c_{k,(1)})(1 \otimes \theta \circ c_{k,(2)})) = \\
 = & \sum_{k,l} \omega(\theta_l) \varphi_k \otimes d_l c_k + (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \otimes \theta c_k - \\
 & - (-1)^{\partial\varphi} \sum_{k,l,(c_k)} \varphi_k \omega(\theta_l \circ c_{k,(3)}) \otimes c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(2)}) d_l c_{k,(4)} - \\
 & - (-1)^{\partial\varphi} \sum_{k,(c_k)} \varphi_k \otimes c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(2)}) \theta c_{k,(3)} = \\
 = & \sum_{k,l} l_\omega(\theta_l \otimes \varphi_k) \otimes d_l c_k.
 \end{aligned}$$

Предложение 9.1 доказано.  $\square$

Построим обещанный коцепной комплекс. В дальнейшем не раз будем использовать похожие конструкции, поэтому проведем рассуждения подробно. Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathcal{N} = \mathfrak{h}\mathfrak{or}(P) \otimes \Gamma_{\text{inv}}. \quad (9.2)$$

Умножение на элементы алгебры  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  задает на  $\mathcal{N}$  структуру градуированного левого модуля над  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$ . Зададим на  $\mathcal{N}$  структуру правого градуированного модуля над  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  по формуле

$$(\psi \otimes \theta) \cdot \varphi = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \psi \varphi_k \otimes \theta \circ c_k. \quad (9.3)$$

Очевидно, для всех  $n \in \mathcal{N}$  и  $\varphi, \chi \in \mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  выполняются равенства

$$n \cdot 1 = n, \quad n \cdot (\varphi\chi) = (n \cdot \varphi) \cdot \chi, \quad (\varphi \cdot n) \cdot \chi = \varphi \cdot (n \cdot \chi),$$

т.е.  $\mathcal{N}$  становится градуированным бимодулем над градуированной алгеброй  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$ . Заметим, что на  $\mathcal{N}$  справа действует квантовая группа  $\mathcal{A}$  при помощи отображения

$$F_{\mathcal{N}} \stackrel{\text{def}}{=} F^\wedge \otimes \varpi : \varphi \otimes \theta \mapsto \sum_{k,l} (\varphi_k \otimes \theta) \otimes c_k d_l.$$

**Предложение 9.2.** Умножение на элементы  $\mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$  в  $\mathcal{N}$  является  $\mathcal{A}$ -эквивариантным отображением, т.е.

$$\begin{aligned}
 F_{\mathcal{N}}(\varphi \cdot n) &= (\cdot \otimes \cdot)(F^\wedge \otimes F_{\mathcal{N}})(\varphi \otimes n), \\
 F_{\mathcal{N}}(n \cdot \varphi) &= (\cdot \otimes \cdot)(F_{\mathcal{N}} \otimes F^\wedge)(n \otimes \varphi)
 \end{aligned}$$

для любых  $n \in \mathcal{N}$  и  $\varphi \in \mathfrak{h}\mathfrak{or}(P)$ .

*Доказательство.* Первая формула очевидна. Докажем вторую. Это делается прямым вычислением: пусть  $\psi \otimes \theta = n \in \mathcal{N}$ ; тогда

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\partial\varphi} F_{\mathcal{N}}(n \cdot \varphi) &= F_{\mathcal{N}}\left(\sum_k \psi \varphi_k \otimes \theta \circ c_k\right) = \\
 &= \sum_{k,l,m,(c_k)} (\psi_m \varphi_k \otimes \theta_l \circ c_{k,(3)}) \otimes b_m c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(2)}) d_l c_{k,(4)} = \\
 &= \sum_{k,l,m,(c_k)} (\psi_m \varphi_k \otimes \theta_l \circ c_{k,(1)}) \otimes b_m d_l c_{k,(2)} = \\
 &= (-1)^{\partial\varphi} (\cdot \otimes \cdot)(F_{\mathcal{N}} \otimes F^\wedge)(n \otimes \varphi),
 \end{aligned}$$

где  $\sum_m \psi_m \otimes b_m = F^\wedge(\psi)$ .  $\square$

В дальнейшем для краткости будем обозначать градуированную алгебру  $\text{hor}(P)$  буквой  $\mathcal{K}$ . Для любого  $n \geq 0$  рассмотрим пространства

$$C_{\text{eq}}^n(\mathcal{N}, \mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{K}}^{\text{eq}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \mathcal{K}), \quad (9.4)$$

где  $\text{Hom}_{\mathcal{K}}^{\text{eq}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \mathcal{K})$  — множество всех  $\mathcal{A}$ -эквивариантных морфизмов левых  $\mathcal{K}$ -модулей. Положим для произвольного  $\mu \in C_{\text{eq}}^n(\mathcal{N}, \mathcal{K})$

$$\begin{aligned} \delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) &= \mu(nk_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_n) k_{n+1}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

**Предложение 9.3.** (i)  $\delta\mu \in C_{\text{eq}}^{n+1}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ ;  
(ii)  $\delta(\delta\mu) = 0$ .

*Доказательство.* Первое утверждение является очевидным следствием предложения 9.2. Докажем второе соотношение. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta(\delta\mu)(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) &= \delta\mu(nk_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ (-1)^{n+2} \delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2}. \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое. Согласно (9.5) находим

$$\begin{aligned} \delta\mu(nk_1 \otimes k_2 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) &= \mu(nk_1 k_2 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i-1} \mu(nk_1 \otimes k_2 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \mu(nk_1 \otimes k_2 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2}. \end{aligned}$$

Далее, при  $2 \leq i \leq n$  получаем

$$\begin{aligned} \delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) &= \mu(nk_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_j k_{j+1} \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ (-1)^{i-1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{i-1} k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ (-1)^i \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} k_{i+2} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j-1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_j k_{j+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2}. \end{aligned}$$

Наконец, при  $i = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \delta\mu(n \otimes k_1 k_2 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) &= \mu(nk_1 k_2 \otimes k_3 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) - \mu(n \otimes k_1 k_2 k_3 \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ \sum_{i=3}^{n+1} (-1)^{i-1} \mu(n \otimes k_1 k_2 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+2}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \mu(n \otimes k_1 k_2 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2}. \end{aligned}$$

При  $i = n + 1$  имеем

$$\delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1} k_{n+2}) = \mu(nk_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1} k_{n+2}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+1} k_{n+2}) + \\
 & \quad + (-1)^n \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_n k_{n+1} k_{n+2}) + \\
 & \quad + (-1)^{n+1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_n) k_{n+1} k_{n+2}.
 \end{aligned}$$

При  $i = n + 2$  имеем

$$\begin{aligned}
 \delta \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2} & = \mu(n k_1 \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2} + \\
 & + \sum_{i=1}^n (-1)^i \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \cdots \otimes k_{n+1}) k_{n+2} + \\
 & \quad + (-1)^{n+1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \cdots \otimes k_n) k_{n+1} k_{n+2}.
 \end{aligned}$$

Складывая все эти равенства с соответствующими знаками, получаем нуль.  $\square$

**Следствие 9.4.** *Градуированное пространство*

$$C_{\text{eq}}^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} C^n(\mathcal{N}, \mathcal{K})$$

является коцепным комплексом с дифференциалом  $\delta$ .

Рассмотрим отображение  $\mu_\omega : \mathcal{N} \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ , заданное формулой

$$\mu_\omega((\psi \otimes \theta) \otimes \varphi) = \psi l_\omega(\theta \otimes \varphi).$$

**Теорема 9.5.**  $\mu_\omega \in C_{\text{eq}}^1(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  и  $\delta \mu_\omega = 0$ . Кроме того, класс когомологий  $[\mu_\omega] \in H^1(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  не зависит от выбора связности  $\omega$ .

*Доказательство.* Первое утверждение — очевидное следствие предложения 9.1. Докажем второе. Пусть  $n = \psi \otimes \theta$ . Имеем

$$\delta \mu_\omega(n \otimes \varphi \otimes \chi) = \mu_\omega(n \varphi \otimes \chi) - \mu_\omega(n \otimes \varphi \chi) + \mu_\omega(n \otimes \varphi) \chi.$$

Пусть  $F^\wedge(\chi) = \sum_n \chi_n \otimes f_n$ , тогда

$$\begin{aligned}
 \mu_\omega(n \varphi \otimes \chi) & = (-1)^{\partial \varphi} \mu_\omega\left(\left(\sum_k \psi \varphi_k \otimes \theta \circ c_k\right) \otimes \chi\right) = (-1)^{\partial \varphi} \sum_k \psi \varphi_k l_\omega(\theta \circ c_k \otimes \chi) = \\
 & = (-1)^{\partial \varphi} \sum_k \psi \varphi_k \left\{ \omega(\theta \circ c_k) \chi - (-1)^{\partial \chi} \sum_n \chi_n \omega((\theta \circ c_k) \circ f_n) \right\} = \\
 & = (-1)^{\partial \varphi} \psi \left\{ \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) \right\} \chi - (-1)^{\partial \varphi + \partial \chi} \psi \sum_{n,k} \varphi_k \chi_n \omega(\theta \circ c_k f_n), \\
 -\mu_\omega(n \otimes \varphi \chi) & = -\psi l_\omega(\theta \otimes \varphi \chi) = -\psi \omega(\theta) \varphi \chi + (-1)^{\partial \varphi + \partial \chi} \psi \sum_{n,k} \varphi_k \chi_n \omega(\theta \circ c_k f_n), \\
 \mu_\omega(n \otimes \varphi) \chi & = \psi l_\omega(\theta \otimes \varphi) \chi = \psi \left\{ \omega(\theta) \varphi - (-1)^{\partial \varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) \right\} \chi = \\
 & = \psi \omega(\theta) \varphi \chi - (-1)^{\partial \varphi} \psi \left\{ \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) \right\} \chi.
 \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем нуль.

Пусть теперь  $\omega'$  — другая связность. Найдем разность  $\mu_{\omega'} - \mu_\omega$ . Положим  $\lambda = \omega' - \omega$ ,  $\lambda \in \tau(P)$  (напомним, что  $\tau(P)$  — пространство тензориальных форм расслоения  $P$ ). Тогда

$$\begin{aligned}
 \{\mu_{\omega'} - \mu_\omega\}(n \otimes \varphi) & = \psi l_{\omega'}(\theta \otimes \varphi) - \psi l_\omega(\theta \otimes \varphi) = \\
 & = \psi \omega'(\theta) \varphi - (-1)^{\partial \varphi} \psi \sum_k \varphi_k \omega'(\theta \circ c_k) - \psi \omega(\theta) \varphi - (-1)^{\partial \varphi} \psi \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) = \\
 & = \psi \lambda(\theta) \varphi - (-1)^{\partial \varphi} \psi \sum_k \varphi_k \lambda(\theta \circ c_k) = \delta \tilde{\lambda}(n \otimes \varphi),
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

где  $\tilde{\lambda}(\psi \otimes \theta) = \psi \lambda(\theta) \in C^0(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ .  $\square$

**Следствие 9.6.** *Регулярные связности на главном квантовом расслоении  $P$  существуют тогда и только тогда, когда класс когомологий  $[\mu_\omega] \in H_{eq}^1(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  равен нулю.*

*Доказательство.* Прямое утверждение — тривиальное следствие теоремы 9.5 и того факта, что, согласно определению,  $\omega$  — регулярная связность тогда и только тогда, когда  $l_\omega = 0$ .

Чтобы доказать обратное, заметим, что пространство  $C_{eq}^1(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  можно отождествить с пространством тензориальных форм  $\tau(P)$  на расслоении  $P$ . Тогда из (9.6) следует, что  $\mu_\omega + \delta \tilde{\lambda} = \mu_{\omega+\lambda}$  для любой тензориальной формы  $\lambda$  (здесь  $\tilde{\lambda}$  — элемент из  $C_{eq}^1(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ , отождествляемый с  $\lambda$ ).  $\square$

**Замечание 9.1.** Отображение градуированных пространств  $\mu_\omega : \mathcal{N} \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  имеет степень 1, так как  $\omega \in \psi^1(P)$  — псевдотензориальная 1-форма. Поэтому, если рассматривать на  $C_{eq}^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  градуировку, равную сумме введенной градуировки и степени отображения, то класс  $[\mu_\omega]$  будет лежать в  $H_{eq}^2(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ .

**Замечание 9.2.** Коцепной комплекс  $C_{eq}^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  является подкомплексом в

$$C^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K}) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \mathcal{K})$$

(дифференциал в  $C^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K})$  задается той же формулой, что и дифференциал в  $C_{eq}^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ ).

**Замечание 9.3.** Пусть  $I_\otimes^1$  — пространство  $\varpi$ -инвариантных элементов в  $\Gamma_{\text{inv}}$ ,  $\theta \in I_\otimes^1$  — произвольный элемент. Рассмотрим отображение

$$i^\theta : \Omega(\mathcal{M})^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n},$$

$$i^\theta(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = (1 \otimes \theta) \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n.$$

Так как любое отображение  $\mu \in C_{eq}^n(\mathcal{N}, \mathcal{K})$   $\mathcal{A}$ -эквивариантно, то, в частности,  $\mu$  отображает подпространство  $i^\theta((\Omega(\mathcal{M}))^{\otimes n})$  в  $\Omega(\mathcal{M})$ . В частности, коцикл  $\mu_\omega$  индуцирует отображение

$$\theta_\omega = i_*^\theta(\mu_\omega) : \Omega(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega(\mathcal{M}),$$

$$\theta_\omega(m) = \omega(\theta)m - (-1)^{\partial m} m \omega(\theta). \quad (9.7)$$

**Предложение 9.7.**  $\theta_\omega$  — дифференцирование градуированной алгебры  $\Omega(\mathcal{M})$ . Если  $\omega'$  — другая связность, то разность  $\theta_{\omega'} - \theta_\omega$  — внутреннее дифференцирование алгебры  $\Omega(\mathcal{M})$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} \theta_\omega(m_1 m_2) &= \omega(\theta) m_1 m_2 - (-1)^{\partial m_1 + \partial m_2} m_1 m_2 \omega(\theta) = \\ &= \omega(\theta) m_1 m_2 - (-1)^{\partial m_1} m_1 \omega(\theta) m_2 + (-1)^{\partial m_1} m_1 \omega(\theta) m_2 - (-1)^{\partial m_1 + \partial m_2} m_1 m_2 \omega(\theta) = \\ &= \theta_\omega(m_1) m_2 + (-1)^{\partial m_1} m_1 \theta_\omega(m_2). \end{aligned}$$

Аналогично при помощи (9.6) проверяем, что разность  $\theta_{\omega'} - \theta_\omega$  равна внутреннему дифференцированию, порожденному элементом  $\lambda(\theta)$ .  $\square$

Конечно, само дифференцирование  $\theta_\omega$  отнюдь не обязано быть внутренним. Ограничение  $\theta_\omega$  на  $\mathcal{M}$  задает дифференцирование на  $\mathcal{M}$  со значением в  $\Omega^1(\mathcal{M})$ , определенное с точностью до внутреннего дифференцирования.

Как известно (см. [17]), факторпространство пространства дифференцирований некоторой ассоциативной алгебры  $A$  со значениями в  $A$ -бимодуле  $M$  по подпространству внутренних дифференцирований есть в точности  $HH^1(A, M)$ , где  $HH^*(A, M)$  — когомологии Хохшильда алгебры  $A$  со значениями в  $M$ . В нашем случае  $A = \mathcal{M}$ ,  $M = \Omega^1(\mathcal{M})$ . Напомним общее определение когомологий Хохшильда унитарных алгебр.

Пусть  $A$  — унитарная алгебра,  $M$  —  $A$ -бимодуль. Рассмотрим коцепной комплекс

$$CH^\bullet(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} \delta f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Точно так же, как и выше, проверяется, что  $\delta^2 = 0$ . Когомологии этого коцепного комплекса называются когомологиями Хохшильда алгебры  $A$  со значениями в  $M$ . Несложно проверить (см. [17]), что

$$HH^0(A, M) = \{m \in M \mid ma = am \ \forall a \in A\},$$

т.е.  $HH^1(A, M)$  совпадает с пространством

$$\{X : A \rightarrow M \mid X(aa') = X(a)a' + aX(a') \ \forall a, a' \in A\}$$

дифференцирований алгебры  $A$  со значениями в  $M$ , факторизованным по подпространству внутренних дифференцирований

$$\text{ad}(M) = \{[m, \cdot] : A \rightarrow M \mid [m, a] = ma - am, \ m \in M\}.$$

Иначе говоря,  $HH^1(A, M)$  — пространство «внешних дифференцирований» алгебры  $A$  со значениями в  $M$ .

Таким образом, дифференцирование  $\theta_\omega$ ,  $\theta \in I_\otimes^1$ , можно интерпретировать как элемент пространства  $HH^1(\mathcal{M}, \Omega^1(\mathcal{M})) \subseteq HH^1(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$ . На самом деле для произвольных  $\theta \in \Gamma_{\text{inv}}$  при помощи той же формулы (9.7) можно определить отображения  $\theta_\omega : \Omega(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{hor}(P)$ , которые тоже будут дифференцированиями, и при замене связности к дифференцированию  $\theta_\omega$  будет прибавляться внутреннее дифференцирование  $[\lambda(\theta), \cdot]$  где  $\lambda = \omega' - \omega$ . Пусть

$$\tilde{\theta} = \sum_i \theta_i^1 \otimes \cdots \otimes \theta_i^n \in I_\otimes^n.$$

Положим

$$\tilde{\theta}_\omega = \sum_i \theta_{i\omega}^1 \otimes \cdots \otimes \theta_{i\omega}^n : (\Omega(\mathcal{M}))^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{hor}(P).$$

**Теорема 9.8.** (i)  $\tilde{\theta}_\omega(\Omega(\mathcal{M})^{\otimes n}) \subseteq \Omega(\mathcal{M})$ . В частности,  $\tilde{\theta}_\omega(\mathcal{M}^{\otimes n}) \subseteq \Omega(\mathcal{M})$ .

(ii) Отображение  $\tilde{\theta}_\omega$ , рассматриваемое как элемент  $CH^n(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$ , является коциклом.

(iii) Класс  $[\tilde{\theta}_\omega] \in HH^n(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$  не зависит от выбора связности  $\omega$ .

*Доказательство.* Утверждение (i) очевидно. Докажем (ii):

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\theta}_\omega)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) &= \\ &= m_1 \tilde{\theta}_\omega(m_2 \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) + \sum_{j=1}^n (-1)^j \tilde{\theta}_\omega(m_1 \otimes \cdots \otimes m_j m_{j+1} \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \tilde{\theta}_\omega(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) m_{n+1}. \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\tilde{\theta}_\omega(m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_n) = \sum_i \theta_{i\omega}^1(m'_1) \cdots \theta_{i\omega}^n(m'_n).$$

Тогда для фиксированного  $i$  имеем

$$\begin{aligned} &m_1 \theta_{i\omega}^1(m_2) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) = \\ &= \theta_{i\omega}^1(m_1 m_2) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) - \theta_{i\omega}^1(m_1) m_2 \theta_{i\omega}^2(m_3) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) = \\ &= \theta_{i\omega}^1(m_1 m_2) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) - \theta_{i\omega}^1(m_1) \theta_{i\omega}^2(m_2 m_3) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) + \\ &\quad + \theta_{i\omega}^1(m_1) \theta_{i\omega}^2(m_2) m_3 \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) = \cdots = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1} \theta_{i\omega}^1(m_1) \cdots \theta_{i\omega}^j(m_2 m_3) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_{n+1}) + \end{aligned}$$

$$+(-1)^n \theta_{i\omega}^1(m_2) \cdots \theta_{i\omega}^n(m_n) m_{n+1}.$$

Складывая эти равенства для всех  $i$ , получаем  $\delta(\tilde{\theta}_\omega) = 0$ .

Докажем утверждение (iii). Для этого рассмотрим другую связность  $\omega'$ . Пусть

$$\omega_t = \omega + t\lambda, \quad \lambda = \omega' - \omega, \quad t \in [0; 1].$$

Тогда  $\omega_t$  — семейство связностей на главном расслоении  $P$  такое, что  $\omega_0 = \omega$  и  $\omega_1 = \omega'$ . Находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\theta}_{\omega_t}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= \sum_i \{ [\lambda(\theta_i^1), m_1] \theta_{i\omega_t}^2(m_2) \cdots \theta_{i\omega_t}^n(m_n) + \cdots + \\ &+ \theta_{i\omega_t}^1(m_1) \cdots \theta_{i\omega_t}^{n-1}(m_{n-1}) [\lambda(\theta_i^n), m_n] \} = \delta \chi_t(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n), \end{aligned}$$

где

$$\chi_t(m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_{n-1}) = \sum_i \{ \lambda(\theta_i^1) \theta_{i\omega_t}^2(m'_1) \cdots \theta_{i\omega_t}^n(m'_{n-1}) + \cdots + \theta_{i\omega_t}^1(m'_1) \cdots \theta_{i\omega_t}^{n-1}(m'_{n-1}) \lambda(\theta_i^n) \}.$$

Интегрируя это равенство по  $t$  от 0 до 1 получаем

$$\tilde{\theta}_{\omega'} = \tilde{\theta}_\omega + \delta \left( \int_0^1 \chi_t dt \right).$$

Теорема 9.8 доказана. □

**Замечание 9.4.** Конструкцию когомологий Хохшильда можно распространить на случай, когда  $A$  — градуированная алгебра, а  $M$  — градуированный  $A$ -бимодуль. В этом случае полагают

$$CH^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, M) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} CH^{n,j}(A^{\otimes n+1}, M),$$

где

$$CH^{n,j}(A^{\otimes n+1}, M) = \text{Hom}^j(A^{\otimes n+1}, M),$$

$$\text{Hom}^j(A^{\otimes n+1}, M) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, M) \mid f \text{ меняет градуировку на } j \}.$$

Дифференциал в этом случае задается следующей формулой, полностью аналогичной той, которой пользуются в неградуированном случае:

$$\begin{aligned} \delta \varphi(a_1, \dots, a_{n+1}) &= (-1)^{\partial \varphi \partial a_1} a_1 \varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

(мы полагаем  $\partial \varphi = j$ , если  $\varphi \in CH^{n,j}(A, M)$ ).

В градуированном случае пространство  $HH^1(A, M)$  тоже совпадает с пространством «внешних» (градуированных) дифференцирований алгебры  $A$ .

В свете вышеизложенного можно рассмотреть комплекс  $CH^\bullet(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M}))$  и для произвольного  $\theta = \sum_i \theta_i^1 \otimes \cdots \otimes \theta_i^{n+1} \in I_{\otimes}^{n+1}$  определить элемент  $\tilde{\theta}_\omega \in CH^{n,n}(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M}))$  при помощи формулы

$$\tilde{\theta}_\omega(a_1, \dots, a_{n+1}) = (-1)^\varepsilon \sum_i \theta_{i,\omega}^1(a_1) \cdots \theta_{i,\omega}^{n+1}(a_{n+1}),$$

где  $\varepsilon = n \partial a_1 + (n-1) \partial a_2 + \cdots + \partial a_n$ .

**Теорема 9.9.** (i)  $\delta \tilde{\theta}_\omega = 0$ .

(ii) Класс когомологий  $[\tilde{\theta}]$  не зависит от выбора связности  $\omega$ .

(iii) Отображение  $HH(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M})) \rightarrow HH(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$  переводит класс  $[\tilde{\theta}_\omega]$  в класс  $[\tilde{\theta}_\omega]$ .

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 9.8.



## 10. СЛУЧАЙ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Препятствие, введенное в разделе 9, вычислять чрезвычайно сложно. Поэтому мы попытаемся здесь разобраться с несколько более простой задачей: ковариантное дифференцирование, заданное произвольной регулярной связностью, задает на каждом градуированном модуле  $\mathcal{F}_u$  дифференциальных форм на расслоении  $P$  антидифференцирование  $D_{\omega,u} = D_u$  степени 1, причем все дифференцирования из набора  $\{D_u\}_{u \in R(G)}$  согласованы между собой (см. теорему 5.5). Фиксируем теперь представление квантовой группы  $u \in R(G)$  и попробуем ответить на вопрос: существует ли для модуля  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_u$  такое отображение  $D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , что

$$\begin{aligned} D(\varphi\alpha) &= D(\varphi)\alpha + (-1)^{\partial\varphi}\varphi d_{\mathcal{M}}(\alpha), \\ D(\alpha\varphi) &= d_{\mathcal{M}}(\alpha)\varphi + (-1)^{\partial\alpha}\alpha D(\varphi) \end{aligned}$$

для любых  $\varphi \in \mathcal{F}$ ,  $\alpha \in \Omega(\mathcal{M})$ . Даже в таком виде задача достаточно сложна. Чтобы еще более упростить ее, рассмотрим ограничение  $D$  на  $\mathcal{E} = \mathcal{F}^0 \subseteq \mathcal{F}$ . Дифференцирование  $D$  задает тогда такое отображение  $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}^1$ , что

$$\nabla(em) = \nabla(e)m + ed_{\mathcal{M}}(m), \quad \nabla(me) = d_{\mathcal{M}}(m)e + m\nabla(e) \quad (10.1)$$

для любых  $e \in \mathcal{E}$ ,  $m \in \mathcal{M}$ . В частности, в случае полуклассического дифференциального исчисления на базе, когда алгебра горизонтальных дифференциальных форм на расслоении равна  $\mathfrak{hor}_{sc}^*(P)$ , имеем  $\mathcal{F}^1 = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E})$  и, как показано в гл. 2, условия (10.1) эквивалентны следующим:

$$\nabla_X(em) = \nabla_X(e)m + eX(m), \quad \nabla_X(me) = X(m)e + m\nabla_X(e) \quad (10.2)$$

для любых  $m \in \mathcal{M}$ ,  $e \in \mathcal{E}$ ,  $X \in \mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$ .

Точно так же, как по лифту дифференцирований  $l : \mathfrak{det}_h(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{det}_h(\mathcal{B})$  можно восстановить дифференцирование алгебры  $\mathfrak{hor}_{sc}^*(P)$  (см. гл. 2), можно показать, что по отображению  $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E})$ , удовлетворяющему условиям (10.2), можно восстановить дифференцирование  $D$  градуированного модуля  $\mathcal{F} = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E})$ . Автору не известно, верно ли подобное утверждение в случае произвольного дифференциального исчисления. Очевидно, необходимым и достаточным условием продолжимости отображения  $\nabla$  до дифференцирования градуированного модуля  $\mathcal{F}$  является коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \\ d_{\mathcal{M}} \otimes 1 + (-1)^{\partial} \otimes \nabla \downarrow & & \downarrow \nabla \otimes 1 + 1 \otimes d_{\mathcal{M}} \\ \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \end{array} \quad (10.3)$$

где  $\sigma : \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M})$  — канонический изоморфизм, причем мы отождествляем

$$\Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{F}^1 = \mathcal{F} = \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}$$

(см. раздел 5). С другой стороны, из изоморфизмов

$$\mathcal{F} \cong \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}, \quad \mathcal{F} \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M})$$

следует, что если такое продолжение существует, то оно единственно.

**Замечание 10.1.** Вообще говоря, для того, чтобы справиться с указанными затруднениями, следует рассматривать дифференцирование  $D$  как отображение  $\mathcal{F} \xrightarrow{D} \mathcal{F}$  степени 1 и работать в дальнейшем в градуированной категории. Иными словами, везде, где далее речь идет об алгебре, последнюю следует рассматривать как градуированную алгебру; соответственно, модуль должен быть градуированным и т. п. (см. замечание 9.4 в конце предыдущего раздела). Все результаты данного раздела можно перенести на градуированный случай, при этом во всех формулах надо будет правильно расставить знаки. Это сильно загромождает текст, тогда как все основные идеи вполне проявляются уже в случае обычных ассоциативных алгебр. Поэтому мы ограничимся указанным выше упрощенным случаем.

Ниже мы будем исследовать вопрос существования для произвольного бимодуля  $\mathcal{E}$  отображений  $\nabla$ , удовлетворяющих условиям (10.1). Прежде всего разберем более простой случай. Пусть  $E$  — произвольный *правый* модуль над унитарной алгеброй  $\mathcal{M}$ . По аналогии с (10.1) будем называть связностью на  $E$  со значениями в дифференциальном исчислении  $\Omega(\mathcal{M})$  на базе  $\mathcal{M}$  отображение  $\nabla : E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M})$ , для которого выполняется условие

$$\nabla(em) = \nabla(e)m + ed_{\mathcal{M}}(m). \quad (10.4)$$

В частности, если дифференциальное исчисление на базе  $\mathcal{M}$  — полуклассическое, т.е.  $\Omega(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\bigwedge_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{M})$ , то отображение

$$\nabla : E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{M}} \Omega^1(\mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}_h(\mathcal{M}), E)$$

становится связностью на  $E$  в смысле [1, 2]. (Вместо алгебры Ли  $\mathfrak{det}_h(\mathcal{M})$  эрмитовых дифференцирований можно в этом случае использовать алгебру Ли всех дифференцирований алгебры  $\mathcal{M}$ , а в качестве  $\mathcal{Z}$  можно взять весь центр алгебры  $\mathcal{M}$ .)

Из результатов [1, 2] следует, что если модуль  $E$  проективный и конечно порожденный, то на нем всегда существуют связности, если дифференциальное исчисление полуклассическое. Аналогичным путем можно показать (см. [15]), что на таком модуле  $E$  будут существовать связности со значениями в произвольном дифференциальном исчислении на базе. Мы же предъядвим необходимое и достаточное условие существования связности на произвольном правом модуле  $E$  и покажем, что в случае, когда  $E$  проективен и конечно порожден, это условие автоматически выполнено.

Положим  $\mathcal{N} = E \otimes_{\mathcal{M}} \Omega^1(\mathcal{M})$  (в полуклассическом случае  $\mathcal{N} = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{det}(\mathcal{M}), E)$ ). Тогда  $\mathcal{N}$  — правый модуль над  $\mathcal{M}$ . Рассмотрим цепной комплекс

$$\begin{aligned} C^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &= \bigoplus_{n \geq 0} C^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \\ C^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{N}) \end{aligned} \quad (10.5)$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} \delta\varphi(e \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) &= \varphi(em_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi(e \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \varphi(e \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) m_{n+1}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Точно так же, как и выше, доказывается, что  $\delta^2 = 0$ . Рассмотрим коцепь  $1 \otimes d_{\mathcal{M}} \in C^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ ,  $[1 \otimes d_{\mathcal{M}}](e \otimes m) = ed_{\mathcal{M}}m$  (или  $(1 \otimes d_{\mathcal{M}})_X(e \otimes m) = eX(m)$  для любого  $X \in \mathfrak{det}(\mathcal{M})$ ).

**Предложение 10.1.**  $\delta(1 \otimes d_{\mathcal{M}}) = 0$ . Класс  $[1 \otimes d_{\mathcal{M}}] \in H^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  равен нулю тогда и только тогда, когда на модуле  $E$  существует связность  $\nabla$  со значениями в  $\Omega(\mathcal{M})$ .

*Доказательство.* Прямое вычисление показывает, что для любых  $e \in E$ ,  $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$

$$\delta(1 \otimes d_{\mathcal{M}})(e \otimes m_1 \otimes m_2) = em_1 d_{\mathcal{M}}(m_2) - ed_{\mathcal{M}}(m_1 m_2) + ed_{\mathcal{M}}(m_1) m_2 = 0,$$

так как

$$d_{\mathcal{M}}(m_1 m_2) = d_{\mathcal{M}}m_1 m_2 + m_1 d_{\mathcal{M}}(m_2),$$

или

$$\delta(1 \otimes d_{\mathcal{M}})_X(e \otimes m_1 \otimes m_2) = em_1 X(m_2) - eX(m_1 m_2) + eX(m_1) m_2 = 0$$

так как  $X(m_1 m_2) = X(m_1) m_2 + m_1 X(m_2)$ . Значит,  $\delta(1 \otimes d_{\mathcal{M}}) = 0$ . С другой стороны, если на  $E$  существует связность  $\nabla \in \text{Hom}(E, \mathcal{N}) = C^0(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  то из (10.4) следует, что  $\delta\nabla = 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$ . Наоборот, если класс когомологий  $[1 \otimes d_{\mathcal{M}}]$  равен нулю, т.е. коцикл  $1 \otimes d_{\mathcal{M}}$  является кограницей, то в качестве связности на  $E$  можно взять любую 0-коцепь, кограница которой равна  $1 \otimes d_{\mathcal{M}}$ .  $\square$

Пусть  $\mathcal{M}$ -модуль  $E$  проективен и конечно порожден. Покажем, что построенное препятствие равно нулю. На самом деле, мы докажем более сильное утверждение.

**Предложение 10.2.** *Если модуль  $E$  проективный и конечно порожденный, то для любого правого  $\mathcal{M}$ -модуля  $\mathcal{N}$*

$$H^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{M}}(E, \mathcal{N}), & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Во-первых, из формулы (10.6) очевидно, что для любого модуля  $E$  имеем  $H^0(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(E, \mathcal{N})$ . Докажем, что при указанных условиях  $H^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = 0$ ,  $n > 0$ . Пусть для начала  $E = \mathcal{M}$  — свободный модуль с одной образующей. Рассмотрим отображение

$$s : C^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \rightarrow C^{n-1}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \quad n \geq 1, \\ s(\varphi)(m_0 \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_{n-1}) = \varphi(1 \otimes m_0 \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_{n-1}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta s(\varphi)(m_0 \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s(\varphi)(m_0 \otimes \cdots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) + (-1)^n s(\varphi)(m_0 \otimes \cdots \otimes m_{n-1}) m_n = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(1 \otimes m_0 \otimes \cdots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) + (-1)^n \varphi(1 \otimes m_0 \otimes \cdots \otimes m_{n-1}) m_n. \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} s\delta(\varphi)(m_0 \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= \varphi(m_0 \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \varphi(1 \otimes m_0 \otimes \cdots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) + (-1)^{n+1} \varphi(1 \otimes m_0 \otimes \cdots \otimes m_{n-1}) m_n. \end{aligned}$$

Складывая эти два равенства, получаем, что  $\delta s + s\delta = \text{id}$ , т.е.  $s$  — стягивающая цепная гомотопия. Таким образом,  $H^n(\mathcal{M}, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Заметим теперь, что если модуль  $E$  распадается в прямую сумму модулей,  $E = E_1 \oplus E_2$ , то соответствующий коцепной комплекс также распадается в прямую сумму

$$C^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = C^\bullet(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \oplus C^\bullet(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N})$$

и, следовательно, аналогичное разложение справедливо и для пространств когомологий:

$$H^*(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = H^*(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \oplus H^*(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}).$$

Таким образом, доказываемое утверждение справедливо для произвольных свободных конечно порожденных модулей  $\mathcal{M}^n$ .

Наконец, заметим, что любой морфизм модулей  $f : E_1 \rightarrow E_2$  индуцирует отображение коцепных комплексов

$$f^\bullet : C^\bullet(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \rightarrow C^\bullet(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

причем  $(fg)^\bullet = g^\bullet f^\bullet$  для любых  $E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3$ . Следовательно, любой морфизм модулей  $f$  задает отображение пространств когомологий  $f^* : H^*(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \rightarrow H^*(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ , причем  $(fg)^* = g^* f^*$ .

Пусть теперь  $E$  — проективный конечно порожденный модуль над  $\mathcal{M}$ . Это значит, что существует свободный конечно порожденный модуль  $\mathcal{M}^n$  и пара морфизмов модулей

$$i : E \rightarrow \mathcal{M}^n, \quad p : \mathcal{M}^n \rightarrow E$$

таких, что

$$p \circ i = \text{id}_E.$$

Тогда для произвольного элемента  $h \in H^k(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  при  $k \geq 1$  имеем

$$h = \text{id}_E^*(h) = (p \circ i)^*(h) = i^* p^*(h) = 0,$$

так как  $p^*(h) \in H^k(\mathcal{M}^n, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = 0$  при  $k \geq 1$ . □

Займемся теперь бимодулями. Будем рассматривать следующие случаи:

- 1)  $E = \mathcal{E}_u$  — ассоциированное векторное расслоение для некоторого квантового главного расслоения  $P$ , и тогда будем искать связность  $\nabla$  как отображение из  $E$  в  $\mathcal{F}_u^1 = \mathcal{N}$ , удовлетворяющее условиям (10.1);
- 2) для произвольного бимодуля  $E$  будем искать «полуклассические связности», т.е. отображения  $\nabla : E \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\text{det}(\mathcal{M}), E) = \mathcal{N}$ , удовлетворяющие уравнениям (10.2).

Тогда описанная конструкция может быть обобщена на бимодули двумя способами. Во-первых, можно рассмотреть коцепной комплекс

$$C_{\text{bi}}^{\bullet}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \bigoplus_{n \geq 0} C_{\text{bi}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

$$C_{\text{bi}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\sum_{i+j=n}^{\oplus} \mathcal{M}^{\otimes i} \otimes E \otimes \mathcal{M}^{\otimes j}, \mathcal{N}\right) \quad (10.7)$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} \delta_{\text{bi}}\varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_1 \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j) &= m_1\varphi(m_2 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j) + \\ &+ \sum_{l=1}^{i-1} (-1)^l \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_l m_{l+1} \otimes \cdots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j) + \\ &+ (-1)^i \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j) + (-1)^{i+1} \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes e m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j) + \\ &+ \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{i+k+1} \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_k m'_{k+1} \otimes \cdots \otimes m'_j) + \\ &+ (-1)^{n+2} \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_{j-1}) m'_j, \end{aligned} \quad (10.8)$$

где  $i + j = n + 1$ . Точно так же, как и раньше, проверяем, что  $\delta_{\text{bi}}^2 = 0$ . Вместо коцепи  $1 \otimes d_{\mathcal{M}}$  рассмотрим коцепь

$$1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1 \in C_{\text{bi}}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

$$(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1)(m_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes m_2) = d_{\mathcal{M}}(m_1)e_1 - e_2 d_{\mathcal{M}}(m_2) \quad (10.9)$$

(соответственно,

$$(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1)_X(m_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes m_2) = X(m_1)e_1 - e_2 X(m_2),$$

если  $\mathcal{N} = \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\text{det}(\mathcal{M}), E)$ ).

Так же, как и раньше, доказываем, что

$$\delta_{\text{bi}}(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1) = 0$$

и что

$$0 = [1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1] \in H_{\text{bi}}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$$

тогда и только тогда, когда на бимодуле  $E$  существует связность  $\nabla$  со значениями в  $\mathcal{N}$ .

**Предложение 10.3.** *Если для бимодуля  $E$  существует такой свободный конечно порожденный бимодуль  $\mathcal{M}^n$ , что определены такие морфизмы бимодулей  $i : E \rightarrow \mathcal{M}^n$ ,  $p : \mathcal{M}^n \rightarrow E$ , что  $p \circ i = \text{id}_E$ , то для любого бимодуля  $\mathcal{N}$  имеем*

$$H_{\text{bi}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}(E, \mathcal{N}), & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

где  $\text{Hom}_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}$  — пространство морфизмов бимодулей.

*Доказательство.* Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 10.2, только вместо гомотопии  $s$  следует рассмотреть отображение

$$s_{\text{bi}} : C_{\text{bi}}^n(\mathcal{M}, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \rightarrow C_{\text{bi}}^{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

определенное формулой

$$s_{\text{bi}}(\varphi)(m_{-i} \otimes \cdots \otimes m_0 \otimes \cdots \otimes m_j) = \sum_{k=-i}^{j+1} (-1)^{k+i} \varphi(m_{-i} \otimes \cdots \otimes m_{k-1} \otimes 1 \otimes m_k \otimes \cdots \otimes m_j),$$

если  $i + j = n - 1$ . □

Мы видим, что для существования связности на бимодуле  $E$ , вообще говоря, недостаточно, чтобы он был проективным и конечно порожденным как левый (или правый) модуль над  $\mathcal{M}$ .

Описанный критерий существования связностей на бимодулях не очень удобен: комплекс  $C_{\text{bi}}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  очень громоздкий и вычислять его когомологии достаточно сложно. Однако нетрудно заметить, что он на самом деле равен тотальному комплексу  $\text{Tot}(C^{p,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}))$ , где

$$C^{p,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}^{\otimes p} \otimes E \otimes \mathcal{M}^{\otimes q}, \mathcal{N}), \quad (10.10)$$

с дифференциалами

$$\begin{aligned} \delta' : C^{p,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &\rightarrow C^{p+1,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \\ \delta'' : C^{p,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &\rightarrow C^{p,q+1}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \end{aligned}$$

задаваемыми формулами

$$\begin{aligned} \delta' \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes m_{p+1} \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q) &= \\ &= m_1 \varphi(m_2 \otimes \cdots \otimes m_{p+1} \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q) + \\ &+ \sum_{i=1}^p (-1)^i \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+1} \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q) + \\ &+ (-1)^{p+1} \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes m_{p+1} e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (-1)^{p+1} \delta'' \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q \otimes m'_{q+1}) &= \\ &= \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes e m'_1 \otimes m'_2 \otimes \cdots \otimes m'_{q+1}) + \\ &+ \sum_{j=1}^q (-1)^j \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j m'_{j+1} \otimes \cdots \otimes m'_{q+1}) + \\ &+ (-1)^{q+1} \varphi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes e \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_q) m'_{q+1}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что  $\delta'^2 = \delta''^2 = \delta' \delta'' + \delta'' \delta' = 0$ . Рассмотрим фильтрацию  $F_r$  тотального комплекса  $C_{\text{bi}}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  бикомплекса  $C^{p,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ :

$$F_r(C_{\text{bi}}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})) = \text{Tot}(C^{p,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), p \geq r).$$

Заметим, что первый член спектральной последовательности, ассоциированной с этой фильтрацией, равен

$$E_1^{p,q} = H^p(C^{\cdot,q}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \delta').$$

В частности, если модуль  $E$  конечно порожден и проективен как левый  $\mathcal{M}$ -модуль, то рассуждения, аналогичные доказательству предложения 10.2, показывают, что

$$E_1^{0,q} = \text{Hom}_{\mathcal{M},\cdot}(E \otimes \mathcal{M}^{\otimes q}, \mathcal{N}), \quad E_1^{p,q} = 0, \quad p \neq 0,$$

где  $\text{Hom}_{\mathcal{M},\cdot}$  — пространство морфизмов левых  $\mathcal{M}$ -модулей. Рассмотрим коцепной комплекс

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &= \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{C}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \\ \tilde{C}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &= \text{Hom}_{\mathcal{M},\cdot}(E \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{N}) \end{aligned} \quad (10.11)$$

с дифференциалом, задаваемым формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\varphi(e \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) &= \varphi(em_1 \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi(e \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \varphi(e \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) m_{n+1}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Тогда, очевидно,

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} \tilde{H}^q(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

Рассматриваемая спектральная последовательность вырождается на втором члене, и когомологии  $H_{bi}^*(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  равны  $\tilde{H}^*(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ . Найдем, во что переходит при этом изоморфизме класс  $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1$ .

Как следует из предложения 10.2, если бимодуль  $E$  конечно порожден и проективен как левый модуль, то на нем существуют «левые связности», т.е. существуют отображения  $\nabla : E \rightarrow \mathcal{N}$ , удовлетворяющие второму из соотношений (10.1) (или (10.2)). Тогда, очевидно, коцикл  $d_{\mathcal{M}} \otimes 1 \in C^{1,0}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  переходит в

$$\tilde{\nabla} \in \tilde{C}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \quad \tilde{\nabla}(e \otimes m) = \nabla(em) - \nabla(e)m. \quad (10.13)$$

Поэтому, так как коцикл  $1 \otimes d_{\mathcal{M}} \in C^{0,1}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \cap \tilde{C}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  остается без изменений в члене  $E^1$  спектральной последовательности, получаем, что класс  $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1$  превращается в

$$[1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}] \in \tilde{H}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}). \quad (10.14)$$

**Замечание 10.2.** На самом деле полученный критерий равенства нулю класса  $[1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}]$  работает в более общем случае: достаточно, чтобы на модуле  $E$  существовала «односторонняя связность», т.е. отображение  $\nabla : E \rightarrow \mathcal{N}$ , удовлетворяющее одному из условий (10.1) (или (10.2)). В самом деле, для любого бимодуля  $E$ , у которого существует «левая связность», т.е. отображение  $\nabla$ , удовлетворяющее второму из уравнений (10.1) (или (10.2)), можно рассмотреть комплекс  $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  и прямым вычислением проверить, что  $\tilde{\delta}(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}) = 0$  и что класс  $[1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}] \in \tilde{H}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  не зависит от выбора односторонней связности  $\nabla$ . С другой стороны, если связность  $\nabla$  удовлетворяет обоим условиям (10.1) (или (10.2)), то  $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla} = 0$ . В случае, когда существует «правая связность», т.е. отображение  $\nabla$ , для которого выполняется первое из равенств (10.1) (или (10.2)), вместо комплекса  $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  следует рассмотреть

$$\tilde{\tilde{C}}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{\tilde{C}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

$$\tilde{\tilde{C}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes E, \mathcal{N})$$

с соответствующим дифференциалом  $\tilde{\tilde{\delta}}$ . При этом роль коцепи  $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}$  из (10.13) будет играть  $\tilde{\tilde{\nabla}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1$ , где

$$\tilde{\tilde{\nabla}} : \mathcal{M} \otimes E \rightarrow \mathcal{N}, \quad \tilde{\tilde{\nabla}}(m \otimes e) = m\nabla(e) - \nabla(me).$$

Так же, как и прежде, эта конструкция получается в случае, если  $E$  проективен и конечно порожден как правый модуль, из анализа бикомплекса (10.10).

**Пример 10.1.** Пусть  $\mathcal{M} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ; тогда  $\text{det}(\mathcal{M}) = \text{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}$ , все дифференцирования — внутренние, а центр алгебры  $\mathcal{M}$  изоморфен  $\mathbb{C}$  (он состоит из скалярных матриц). Пусть  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  — произвольная невырожденная матрица. Рассмотрим такой бимодуль  $E$  над  $\mathcal{M}$ , что  $E$  как векторное пространство над  $\mathbb{C}$  совпадает с  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , причем структура левого модуля над  $\mathcal{M}$  задается стандартным умножением матриц, а структура правого модуля определена как  $A \cdot B = ARBR^{-1}$ . Будем искать связности в смысле (10.2). Поэтому положим

$$\mathcal{N} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{det}(\mathcal{M}), E) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \text{Mat}_n(\mathbb{C})) \cong$$

$$\cong \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \text{Mat}_n(\text{Mat}_n(\mathbb{C})).$$

Так как модуль  $E$  — свободный модуль с одной образующей как левый (и как правый) модуль над  $\mathcal{M}$ , то для него, конечно, существуют односторонние (левые) связности. Например, такой связностью будет тривиальное отображение  $\nabla : E \rightarrow \mathcal{N}$ ,  $\nabla_X(A) = [A, X]$  (здесь  $[ , ]$  — обычный коммутатор матриц). С другой стороны, прямое вычисление показывает, что отображение

$$\begin{aligned} T : \tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &\rightarrow CH^\bullet(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N}), \\ T\varphi(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) &= \varphi(1 \otimes R^{-1}A_1R \otimes \cdots \otimes R^{-1}A_nR) \end{aligned}$$

задает изоморфизм между комплексом  $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  и комплексом для вычисления когомологий Хохшильда  $CH^\bullet(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N})$ . При этом коцепь  $\tilde{\nabla} - 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$  переходит в

$$\Phi : \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{N}, \quad \Phi_X(A) = [R^{-1}AR, X] - R^{-1}[A, X]R.$$

Однако из теоремы Мориты об эквивалентности следует, что

$$\begin{aligned} HH^n(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N}) &= HH^n(\text{Mat}_n(\mathbb{C}), \text{Mat}_n(\text{Mat}_n(\mathbb{C}))) \cong \\ &\cong HH^n(\mathbb{C}, \text{Mat}_n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \text{Mat}_n(\mathbb{C}), & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, препятствие равно нулю, и связность на  $E$  существует.

**Пример 10.2.** Пусть  $\mathcal{M} = \text{Mat}_n(C^\infty(M))$ , где  $M$  — некоторое гладкое многообразие,  $E = \text{Mat}_n(C^\infty(M))$ , причем структура левого модуля на  $E$  задано обычным умножением матриц, а структура правого модуля — формулой  $A(x) \cdot B(x) = A(x)R(x)B(x)R^{-1}(x)$ , где  $R(x)$  — семейство невырожденных матриц на многообразии. Пусть

$$\mathcal{N} = \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\text{Vect}(M), \text{Mat}_n(C^\infty(M))) \cong \text{Mat}_n(\Omega^1(M)),$$

где  $\text{Vect}(M)$  — пространство гладких векторных полей на  $M$ , а  $\Omega^1(M)$  — пространство гладких дифференциальных 1-форм на  $M$ .

Так как модуль  $E$  — свободный модуль с одной образующей как левый (и правый) модуль над  $\mathcal{M}$ , то на нем существуют односторонние связности. Например, такой связностью будет отображение

$$\nabla : E \rightarrow \mathcal{N}, \quad \nabla_\xi(A(x)) = \xi(A(x))$$

для любого гладкого поля  $\xi$  на  $M$ .

С другой стороны, точно так же, как и выше, отображение

$$\begin{aligned} T : \tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &\rightarrow CH^\bullet(\text{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N}), \\ T\varphi(A_1(x) \otimes \cdots \otimes A_n(x)) &= \varphi(1 \otimes R^{-1}(x)A_1(x)R(x) \otimes \cdots \otimes R^{-1}(x)A_n(x)R(x)) \end{aligned}$$

задает изоморфизм между  $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$  и  $CH^\bullet(\text{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N})$ , причем коцепь  $\tilde{\nabla} - 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$  переходит в

$$\begin{aligned} \Phi &\in CH^1(\text{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N}), \\ \Phi_\xi(A(x)) &= \xi(R(x))R^{-1}(x)A(x) - A(x)\xi(R(x))R^{-1}(x). \end{aligned}$$

Далее, согласно теореме Мориты об эквивалентности

$$\begin{aligned} HH^*(\text{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N}) &= HH^*(\text{Mat}_n(C^\infty(M)), \text{Mat}_n(\Omega^1(M))) \cong \\ &\cong HH^*(C^\infty(M), \Omega^1(M)). \end{aligned}$$

Эта эквивалентность задается отображением (см. [17])

$$\begin{aligned} \text{inc}^* : CH^n(\text{Mat}_n(C^\infty(M)), \text{Mat}_n(\Omega^1(M))) &\rightarrow CH^n(C^\infty(M), \Omega^1(M)), \\ \text{inc}^* F(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) &= F(E_{11}^{f_1} \otimes \cdots \otimes E_{11}^{f_n})_{11}, \end{aligned}$$

где  $E_{11}^f$  — матрица, в которой все элементы, кроме элемента  $(1, 1)$ , равны нулю, а этот элемент равен  $f$ , и  $F(\cdot)_{11}$  —  $(1, 1)$ -элемент матрицы  $F(\cdot)$ . Нетрудно проверить, что  $\text{inc}^* \Phi = 0$ . Следовательно, на  $E$  существуют связности. Например, связностью будет отображение

$$\nabla'_\xi(A(x)) = \xi(A(x)) + A(x)\xi(R(x))R^{-1}(x).$$

Пример бимодуля, для которого найденное нами препятствие (в случае полуклассического дифференциального исчисления) отлично от нуля, можно найти в [7]. В заключение опишем связь между препятствиями, построенными в этом разделе, и дифференцированиями  $\theta_\omega$  из предыдущего раздела. Для этого потребуется следующее простое предложение.

**Предложение 10.4.** *Ограничение оператора ковариантного дифференцирования  $D_\omega$ , построенного по произвольной связности  $\omega$  на главном расслоении  $P$ , на произвольное векторное расслоение  $\mathcal{E}$ , ассоциированное с  $P$ , будет левой связностью (т.е. для него будет выполняться второе из равенств (10.1)).*

*Доказательство.* Напомним, что, поскольку  $D_\omega$  —  $\mathcal{A}$ -эквивариантное отображение, его композиция с произвольным морфизмом  $f : H_u \rightarrow \mathcal{B}$  будет морфизмом  $D_\omega f : H_u \rightarrow \mathfrak{hor}(P)$ . Именно эту композицию мы и называем ограничением ковариантной производной на  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_u$ . Поэтому достаточно проверить аналогичное свойство  $D_\omega$  как отображения из  $\mathfrak{hor}(P)$  в  $\mathfrak{hor}(P)$ . Пусть  $\psi \in \mathfrak{hor}(P)$  — произвольный элемент и  $\varphi \in \Omega(\mathcal{M})$ . Имеем:

$$D_\omega(\varphi\psi) = d(\varphi\psi) - (-1)^{\partial\varphi+\partial\psi} \sum_l \varphi\psi_l \omega(\pi(d_l)) = d_{\mathcal{M}}(\varphi)\psi + (-1)^{\partial\varphi} \varphi D_\omega(\psi). \quad (10.15)$$

В частности, для любого  $m \in \mathcal{M}$ ,  $\psi \in \mathcal{E}_u$  имеем  $D_\omega(m\psi) = d_{\mathcal{M}}(m)\psi + mD_\omega(\psi)$ .  $\square$

Аналогично равенству (10.15) получаем

$$D_\omega(\psi\varphi) = D_\omega(\psi)\varphi + (-1)^{\partial\psi} \psi d_{\mathcal{M}}(\varphi) + (-1)^{\partial\psi} \sum_l \psi_l \omega(\pi(d_l)) \otimes \varphi$$

для любых  $\psi \in \mathfrak{hor}(P)$ ,  $\varphi \in \Omega(\mathcal{M})$ . В частности, отсюда следует, что ковариантное дифференцирование  $D_\omega$  можно использовать для построения препятствия  $\tilde{\nabla} - 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$  для модуля  $\mathcal{E}_u$  и это препятствие оказывается равным отображению

$$\begin{aligned} a_\omega : \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{F}_u^1, \\ \text{Mor}(u, F) \otimes \mathcal{M} = \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{M} \ni f \otimes m &\mapsto a_\omega(f \otimes m) \in \mathcal{F}_u^1 = \text{Mor}(u, \mathfrak{hor}^1(P)), \\ (a_\omega(f \otimes m))(e_i) &= \sum_{k=1}^{n_u} f(e_k) \omega(\pi(u_{ki} \otimes m)), \end{aligned} \quad (10.16)$$

где  $e_i$  — базис в  $H_u$ , а  $u_{ij}$  — матричные элементы представления  $u$ .

Рассмотрим диаграмму, определяющую «канонический след» отображения  $a_\omega$  (ср. раздел 5):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\tilde{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{id} \otimes a_\omega} & \mathcal{E}_{\tilde{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \\ \gamma_{\tilde{u}}^* \otimes \text{id} \uparrow & & \downarrow \langle \cdot \rangle_{\tilde{u}} \\ \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(a_\omega)} & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M}) \end{array}.$$

**Предложение 10.5.**

$$\widetilde{\text{tr}}_{\mathcal{M}}(a_\omega)(1 \otimes m) = (\text{tr}(C_u^{-1} \tilde{u}))_\omega(m),$$

где  $C_u$  — канонический морфизм и  $\tilde{u}$  — матрица представления  $u$ .

*Доказательство.* Это — прямое следствие формул (10.16), (5.4) и (5.3).  $\square$



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жураев Ю. Й. Характеристические классы модулей над некоммутативными алгебрами/ Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1988.
2. Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П. О характеристических классах в алгебраической  $K$ -теории// Вестн. МГУ, сер. 1, мат., мех. — 1986. — 1. — С. 75–76.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.
4. Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли// Алгебра анализ. — 1989. — 1, № 1. — С. 178–206.
5. Шарыгин Г. И. Квантовые главные расслоения, связности и характеристические классы/ Междунар. конф. посв. 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева/ Тез. докл. — М.: МГУ, 1999. — С. 58.
6. Шарыгин Г. И. Образ гомоморфизма Вейля в случае квантового главного расслоения// Вестн. МГУ, сер. 1, мат., мех. — 2000. — 4. — С. 21–27.
7. Шарыгин Г. И. Препятствие для существования связности на бимодуле// Вестн. МГУ, сер. 1, мат., мех. — 2000. — 6. — С. 63–65.
8. Connes A. Géométrie non-commutative// Publ. Math. IHES. — 1986. — 62. — С. 41.
9. Đurđević M. Characteristic classes of quantum principal bundles/ Preprint. — Mexico: Institute of Mathematics, UNAM, 1995.
10. Đurđević M. Geometry of quantum principal bundles, I// Commun. Math. Phys. — 1996. — 175. — С. 457–520.
11. Đurđević M. Geometry of quantum principal bundles, II// Rev. Math. Phys. — 1997. — 9, № 5. — С. 531–603.
12. Đurđević M. Quantum principal bundles and Tanaka–Krein duality theory// Rep. Math. Phys. — 1996. — 38, № 3. — С. 313–324.
13. Đurđević M. Differential structures on quantum principal bundles// Rep. Math. Phys. — 1998. — 41, № 1. — С. 91–115.
14. Garow-Watamura U., Schlieker M., Watamura S., Weich W. Bicovariant differential calculi on quantum groups  $SU_q(n)$  and  $SO_q(n)$ // Commun. Math. Phys. — 1991. — 142. — С. 605–641.
15. Karoubi M. Homologie cyclique et  $K$ -théorie// Astérisque. — 1987. — 149.
16. Kreimer H. F., Takeuchi M. Hopf algebras and Galois extension of an algebra// Indiana Univ. Math. J. — 1981. — 30, № 5. — С. 675–692.
17. Loday J.-L. Cyclic homology/ Compr. Stud. Math. — Springer-Verlag, 1992. — 301.
18. Majid S., Brzezinski T. Quantum group gauge theory on quantum spaces// Commun. Math. Phys. — 1993. — 157. — С. 591–638.
19. Schmüdgen K., Schüler A. Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups of types A, B, C, and D// Commun. Math. Phys. — 1995. — 167, № 2. — С. 635–670.
20. Schupp P. Quantum groups, noncommutative differential geometry, and applications/ Thesis. — Berkeley: Univ. of California, 1993.
21. Sweedler M. E. Hopf algebras. — New York: W. A. Benjamin, 1969.
22. Woronowicz S. L. Twisted  $SU(2)$  group. An example of noncommutative differential calculus// RIMS. — Kyoto University, 1987. — 23. — С. 117–181.
23. Woronowicz S. L. Compact matrix pseudogroups// Commun. Math. Phys. — 1987. — 111. — С. 613–665.
24. Woronowicz S. L. Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)// Commun. Math. Phys. — 1989. — 122. — С. 125–170.
25. Woronowicz S. L. Tanaka–Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted  $SU(n)$  groups// Invent. Math. — 1988. — 93. — С. 35–76.

Г. И. Шарыгин

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

E-mail: sharygin@itep.ru

## ОБ ОПЕРАЦИЯХ СТИНРОДА В КОБОРДИЗМАХ

© 2004 г. **Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ**

Аннотация. Построены алгебры операций Стинрода в ориентированных и специальных унитарных кобордизмах. Изучены представляющие спектры  $SO$ - и  $SU$ -кобордизмов. Показано, что на соответствующих спектрах имеется структура мультипликативного семейства над подходящей биоперადой. Установлена связь с операциями Стинрода, предложенными Т. том Диком.

### СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| 1. Биоперады и мультипликативные семейства . . . . .            | 73 |
| 2. Биоперада $EG$ и $EG$ -мультипликативные семейства . . . . . | 78 |
| 3. Основная конструкция . . . . .                               | 84 |
| Список литературы . . . . .                                     | 88 |

Задача построения операций Стинрода в обобщенных теориях когомологий исследуется с тех пор, как Н. Стинрод построил стабильные когомологические операции в когомологиях с коэффициентами в  $\mathbb{Z}/2$ . Как известно, операции Стинрода в когомологиях с коэффициентами в поле  $\mathbb{Z}/2$  могут быть построены двумя способами. Исторически первый способ, предложенный Н. Стинродом, основан на построении эквивариантного цепного комплекса специального вида. Другой подход, развитый А. Картаном, использует вычисление когомологий спектра Эйленберга—Маклейна, представляющего теорию когомологий с коэффициентами в поле  $\mathbb{Z}/2$ . Когомологические операции в теории кобордизмов были построены С. П. Новиковым и П. С. Ландвебером на основе вычисления кобордизмов представляющего спектра пространств Тома. Несколько позже Т. том Дик построил аналог эквивариантного комплекса Стинрода для кобордизмов. Как оказалось, операции Стинрода, построенные том Диком, существенно отличаются от операции Ландвебера—Новикова. Иными словами, два способа (основанный на эквивариантном комплексе и основанный на представляющем спектре) приводят к одному результату в случае когомологий с коэффициентами в поле  $\mathbb{Z}/p$ . В [10, 12] был предложен способ построения операций типа Стинрода (основанных на эквивариантном цепном комплексе) с помощью введения на представляющем спектре дополнительной структуры — так называемых  $H_\infty$  и  $E_\infty$  кольцевых спектров.

Относительно недавно В. А. Смирнов [3, 4] предложил новый способ построения операций Стинрода в обобщенных теориях когомологий. Его подход также позволяет построить операции типа Дайера—Лашофа в гомологиях.

Интересным также является установление связей между различными операциями — различными версиями операций Стинрода и стабильными когомологическими операциями.

Метод В. А. Смиронова [3, 4] основан на понятиях биоперады и мультипликативного семейства над биоперადой. Несмотря на кажущееся сходство операды и биоперады, это два существенно различных объекта. Ни операда, ни биоперада не могут быть получены одна из другой «забыванием» части структуры. Конструкция операций Стинрода, предложенная в [3, 4], опирается на структуру мультипликативного семейства над подходящей биоперადой на представляющем спектре теории когомологий.

Тем самым, задача построения операций Стинрода в некоторой теории когомологий сводится к построению такой структуры на представляющем спектре теории. В. А. Смирнов построил эту структуру для  $O$ -,  $U$ - и  $Sp$ -кобордизмов.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01227).

В настоящей работе изучаются представляющие спектры  $SO$ - и  $SU$ -кобордизмов. Показано, что на соответствующих спектрах имеется структура мультипликативного семейства над подходящей биооперацией. Установлена связь с операциями Стинрода, предложенными Т. том Диком.

1. БИОПЕРАДЫ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Набор топологических пространств  $\{E(j) : j \geq 1\}$  называется *симметрическим семейством*, если для каждого  $j > 0$  на пространстве  $E(j)$  задано действие симметрической группы  $\Sigma_j$ .

Условимся для краткости через  $E(k) * E(n)$  обозначать произведение

$$E(k) \times \underbrace{E(n) \times \dots \times E(n)}_{k \text{ экземпляров}}.$$

Симметрическое семейство  $\{E(j) : j \geq 1\}$  называется *биооперацией*, если заданы отображения

$$\begin{aligned} \pi : E(m) \times E(n) &\longrightarrow E(m+n), \\ \gamma : E(k) * E(n) &\longrightarrow E(kn), \end{aligned}$$

которые удовлетворяют следующим условиям В1–В5.

В1. Отображения  $\pi$  и  $\gamma$  согласованы с действием симметрических групп, т.е. для них выполняются следующие два свойства.

(а) Если  $x \in E(m)$ ,  $y \in E(n)$ ,  $\sigma \in \Sigma_m$ ,  $\tau \in \Sigma_n$ , то

$$\pi(x\sigma \times y\tau) = \pi(x \times y) \pi(\sigma \times \tau).$$

Здесь через  $\pi(\sigma \times \tau)$  обозначена перестановка из  $\Sigma_{m+n}$ , которая первые  $m$  элементов переставляет с помощью  $\sigma$ , а последние  $n$  элементов — с помощью  $\tau$ .

(б) Пусть  $x \in E(k)$ ,  $y_1, \dots, y_k \in E(n)$ ,  $\sigma \in \Sigma_k$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Sigma_n$ . Обозначим через  $\sigma_0$  перестановку  $\gamma(\sigma \times \tau_1 \times \dots \times \tau_k)$ , которая действует следующим образом. Элементы в количестве  $j_1 + j_2 + \dots + j_k$  разбиваются на  $k$  подряд идущих блоков длины  $n$ . Элементы  $i$ -го блока переставляются с помощью перестановки  $\tau_i$ , а затем эти  $k$  блоков переставляются с помощью перестановки  $\sigma$ . Тогда должно выполняться равенство

$$\gamma(x\sigma \times y_1\tau_1 \times \dots \times y_k\tau_k) = \gamma(x \times y_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times y_{\sigma^{-1}(k)})\sigma_0.$$

В2. Диаграммы, означающие ассоциативность  $\pi$  и  $\gamma$ , коммутативны:

(а)

$$\begin{array}{ccc} E(k) \times E(n) \times E(m) & \xrightarrow{\pi \times 1} & E(k+n) \times E(m) \\ \downarrow 1 \times \pi & & \downarrow \pi \\ E(k) \times E(n+m) & \xrightarrow{\pi} & E(k+n+m) \end{array} ;$$

(б)

$$\begin{array}{ccc} (E(k) * E(n)) \times \underbrace{E(m) \times \dots \times E(m)}_{kn} & \xrightarrow{T} & E(k) * (E(n) * E(m)) \\ \downarrow \gamma \times 1 \times \dots \times 1 & & \downarrow 1 * \gamma \\ E(kn) * E(m) & & E(k) * E(nm) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ E(knm) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & E(knm) \end{array} .$$

В3. Существует такой элемент  $1 \in E(1)$ , что для всех  $x \in E(n)$  выполняется равенство

$$\gamma(1 * x) = \gamma(x * 1) = x.$$

## В4. Коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
(E(k') \times E(k'')) \times (E(n)^{\times(k'+k'')}) & \xrightarrow{\pi \times 1^{k'+k''}} & E(k'+k'') * E(n) \\
\downarrow T & & \downarrow f \\
(E(k') * E(n)) \times (E(k'') * E(n)) & & E((k'+k'')n) \\
\downarrow \gamma \times \gamma & & \parallel \\
E(k'n) \times E(k''n) & \xrightarrow{\pi} & E(k'n + k''n)
\end{array}
,$$

означающая правую дистрибутивность  $\gamma$  относительно  $\pi$ . Здесь и далее через  $T$  обозначается очевидный тасующий гомеоморфизм.

В5. Существует гомеоморфизм  $\xi : E(k(n+m)) \rightarrow E(k(n+m))$  такой, что  $\xi(x\sigma) = \xi(x)\xi(\sigma)$  для всех  $x \in E(k(n+m))$  и  $\sigma \in \Sigma_{k(n+m)}$  и что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
E(k) * (E(n) \times E(m)) & \xrightarrow{1 * \pi} & E(k) * E(n+m) \\
\downarrow \nabla * 1 & & \downarrow \gamma \\
(E(k) \times E(k)) * (E(n) \times E(m)) & & E(k(n+m)) \\
\downarrow T & & \uparrow \xi \\
(E(k) * E(n)) \times (E(k) * E(m)) & & E(kn + km) \\
\searrow \gamma \times \gamma & & \nearrow \pi \\
& E(kn) \times E(km) &
\end{array}
.$$

Гомеоморфизм  $\xi$ , вообще говоря, зависит от  $n, k$  и  $m$ .

Модельным примером служит симметрическое семейство топологических пространств  $E\Sigma = \{E\Sigma(j) : j \geq 1\}$ . Пространство  $E\Sigma(j)$  — это геометрическая реализация симплициальной резольвенты симметрической группы  $\Sigma_j$ , т.е.

$$E\Sigma(j) = |B_*(\Sigma_j, \Sigma_j)|.$$

Как известно, имеются два отображения

$$\begin{aligned}
\pi &: E\Sigma(n) \times E\Sigma(m) \longrightarrow E\Sigma(m+n), \\
\gamma &: E\Sigma(k) \times E\Sigma(j_1) \times \dots \times E\Sigma(j_k) \longrightarrow E\Sigma(j_1 + \dots + j_k).
\end{aligned}$$

Они строятся как геометрические реализации морфизмов соответствующих симплициальных множеств. Отображение  $\pi$  строится по морфизму

$$\pi_* : B_*(\Sigma_n, \Sigma_n) \times B_*(\Sigma_m, \Sigma_m) \longrightarrow B_*(\Sigma_{m+n}, \Sigma_{m+n}),$$

индуцированному отображением

$$\pi : \Sigma_n \times \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{m+n},$$

которое паре перестановок  $(\sigma, \tau)$  ставит в соответствие перестановку  $\pi(\sigma, \tau)$ , действующую на первых  $n$  элементах посредством  $\sigma$ , а на последних  $m$  элементах — посредством  $\tau$ .

Отображение  $\gamma$  строится по морфизму

$$\gamma_* : B_*(\Sigma_k, \Sigma_k) \times B_*(\Sigma_{j_1}, \Sigma_{j_1}) \times \dots \times B_*(\Sigma_{j_k}, \Sigma_{j_k}) \longrightarrow B_*(\Sigma_{j_1 + \dots + j_k}, \Sigma_{j_1 + \dots + j_k}),$$

индуцированному отображением

$$\gamma : \Sigma_k \times \Sigma_{j_1} \times \dots \times \Sigma_{j_k} \longrightarrow \Sigma_{j_1+\dots+j_k}.$$

Это отображение переводит набор перестановок  $(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_k)$  в перестановку  $\gamma(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_k)$ , которая действует следующим образом. Элементы в количестве  $j_1 + \dots + j_k$  разбиваются на  $k$  подряд идущих блоков длин соответственно  $j_1, j_2, \dots, j_k$ . Элементы  $i$ -го блока переставляются с помощью  $\tau_i$ , а затем эти  $k$  блоков переставляются с помощью  $\sigma$ . В частности, перестановка  $\sigma_0$  из пункта В1 определения биоперады равна  $\gamma(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_k)$ .

Легко проверить, что свойства В1–В4 для отображений  $\pi$  и  $\gamma$  выполняются.

Покажем, что гомеоморфизм  $\xi$  из пункта В5 возникает естественным образом. Пусть  $\nabla : E\Sigma(n) \rightarrow E\Sigma(n) \times E\Sigma(n)$  — диагональное отображение; тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E\Sigma(n) * (E\Sigma(k_1) \times E\Sigma(k_2)) & \xrightarrow{1*\pi} & E\Sigma(n) * (E\Sigma(k_1 + k_2)) \\ \nabla * 1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (E\Sigma(n) \times E\Sigma(n)) * (E\Sigma(k_1) \times E\Sigma(k_2)) & & E\Sigma(nk_1 + nk_2) \\ T \downarrow & & \uparrow \pi \\ (E\Sigma(n) * E\Sigma(k_1)) \times (E\Sigma(n) * E\Sigma(k_2)) & \xrightarrow{\gamma \times \gamma} & E\Sigma(nk_1) \times E\Sigma(nk_2) \end{array}, \quad (1)$$

выражающая левую дистрибутивность  $\gamma$  относительно  $\pi$ , не коммутативна.

В самом деле, все отображения, участвующие в этой диаграмме, индуцированы отображениями, определенными уже на уровне симметрических групп. Эти отображения включаются в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_n * (\Sigma_{k_1} \times \Sigma_{k_2}) & \xrightarrow{1*\pi} & \Sigma_n * (\Sigma_{k_1+k_2}) \\ \nabla * 1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (\Sigma_n \times \Sigma_n) * (\Sigma_{k_1} \times \Sigma_{k_2}) & & \Sigma_{nk_1+nk_2} \\ T \downarrow & & \uparrow \pi \\ (\Sigma_n * \Sigma_{k_1}) \times (\Sigma_n * \Sigma_{k_2}) & \xrightarrow{\gamma \times \gamma} & \Sigma_{nk_1} \times \Sigma_{nk_2} \end{array}, \quad (2)$$

которая, как легко убедиться, не коммутативна.

Обозначим через  $g = g_{n,k_1,k_2}$  перестановку из группы  $\Sigma_{nk_1+nk_2}$ , которая действует следующим образом. Разобьем элементы в количестве  $nk_1 + nk_2$  на идущие подряд блоки длин

$$k_1, k_2, k_1, k_2, \dots, k_1, k_2.$$

Перенумеруем их слева направо целыми числами от 1 до  $2n$ . Эти блоки перестановка  $g$  располагает в следующем порядке:  $1, 3, \dots, 2n - 1, 2, 4, \dots, 2n$ . Зададим внутренний автоморфизм

$$\xi : \Sigma_{nk_1+nk_2} \longrightarrow \Sigma_{nk_1+nk_2}$$

формулой  $\xi(\sigma) = g^{-1}\sigma g$ . Индуцированный гомеоморфизм пространства  $E\Sigma(nk_1 + nk_2)$  также будем обозначать  $\xi$ .

Если в диаграмму (2) вставить после отображения  $\pi : \Sigma_{nk_1} \times \Sigma_{nk_2} \rightarrow \Sigma_{nk_1+nk_2}$  отображение  $\xi : \Sigma_{nk_1+nk_2} \rightarrow \Sigma_{nk_1+nk_2}$ , то она становится коммутативной. Отсюда следует, что если в диаграмму (1) вставить после отображения  $\pi : E\Sigma(nk_1) \times E\Sigma(nk_2) \rightarrow E\Sigma(nk_1 + nk_2)$  гомеоморфизм  $\xi : E\Sigma(nk_1 + nk_2) \rightarrow E\Sigma(nk_1 + nk_2)$ , то она также станет коммутативной.

Заметим, что в действительности коммутативна диаграмма, выражающая более сильное свойство умножения  $\gamma$ , чем свойство В2:

$$\begin{array}{ccc} E\Sigma \times (E\Sigma \times E\Sigma) & \xrightarrow{\gamma} & E\Sigma \times E\Sigma \\ \downarrow T & & \downarrow \gamma \\ (E\Sigma \times E\Sigma) \times E\Sigma & & E\Sigma \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ E\Sigma \times E\Sigma & \xrightarrow{\gamma} & E\Sigma \end{array} ;$$

здесь через  $E\Sigma \times E\Sigma$  обозначно так называемое операдное произведение симметрических семейств (см. [11]).

Семейство  $F$  называется *E-мультипликативным*, если заданы отображения

$$\begin{aligned} \pi &: F(n) \times F(m) \longrightarrow F(m+n), \\ \mu &: E(k) * F(n) \longrightarrow F(kn), \end{aligned}$$

удовлетворяющие некоторым условиям ассоциативности и дистрибутивности. Для полноты изложения приведем точные формулировки — это условия М1–М5.

М1. Отображение  $\mu$  согласовано с действием симметрических групп, т.е. если  $x \in E(k)$ ,  $y_1, \dots, y_k \in F(n)$ ,  $\sigma \in \Sigma_k$ , то

$$\mu(x\sigma \times y_1 \times \dots \times y_k) = \mu(x \times y_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times y_{\sigma^{-1}(k)}).$$

М2. Диаграммы, выражающие ассоциативность  $\pi$  и  $\mu$ , коммутативны:

(а)

$$\begin{array}{ccc} F(k) \times F(n) \times F(m) & \xrightarrow{\pi \times 1} & F(k+n) \times F(m) \\ \downarrow 1 \times \pi & & \downarrow \pi \\ F(k) \times F(n+m) & \xrightarrow{\pi} & F(k+n+m) \end{array} ;$$

(б)

$$\begin{array}{ccc} (E(k) * E(n)) \times \underbrace{F(m) \times \dots \times F(m)}_{kn} & \xrightarrow{T} & E(k) * (E(n) * F(m)) \\ \downarrow \gamma \times 1 \times \dots \times 1 & & \downarrow 1 * \mu \\ E(kn) * F(m) & & E(k) * F(nm) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ F(knm) & \xlongequal{\quad} & F(knm) \end{array} .$$

М3. Для всех  $x \in F(n)$  имеем

$$\mu(1 * x) = x,$$

где  $1 \in E(1)$  — единица биоперации.

М4. Коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 (E(k') \times E(k'')) \times (F(n)^{\times(k'+k'')}) & \xrightarrow{\pi \times 1^{k'+k''}} & E(k'+k'') * F(n) \\
 \downarrow T & & \downarrow \mu \\
 (E(k') * F(n)) \times (E(k'') * F(n)) & & F((k'+k'')n) \\
 \downarrow \mu \times \mu & & \parallel \\
 F(k'n) \times F(k''n) & \xrightarrow{\pi} & F(k'n + k''n)
 \end{array} ,$$

означающая правую дистрибутивность  $\mu$  относительно  $\pi$ .

М5. Существует гомеоморфизм

$$\xi : F(k(n+m)) \longrightarrow F(k(n+m))$$

такой, что равенство  $\xi(x\sigma) = \xi(x)\xi(\sigma)$  выполняется для всех  $x \in F(k(n+m))$  и  $\sigma \in \Sigma_{k(n+m)}$  и что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 E(k) * (F(n) \times F(m)) & \xrightarrow{1 * \pi} & E(k) * F(n+m) \\
 \downarrow \nabla * 1 & & \downarrow \mu \\
 (E(k) \times F(k)) * (E(n) \times F(m)) & & F(k(n+m)) \\
 \downarrow T & & \uparrow \xi \\
 (E(k) * F(n)) \times (E(k) * F(m)) & & F(k(n+m)) \\
 \searrow \mu \times \mu & & \nearrow \pi \\
 & F(kn) \times F(km) &
 \end{array} .$$

Таким образом, биоперада  $E$  — это четверка  $(\{E(n)\}, \pi, \gamma, \xi)$ , а  $E$ -мультипликативное семейство  $F$  — это четверка  $(\{F(n)\}, \pi, \mu, \xi)$ , удовлетворяющие перечисленным выше требованиям.

Легко видеть, что если симметрическое семейство  $E$  является биоперадой, то оно является  $E$ -мультипликативным семейством. Можно рассматривать биопераду как алгебру с умножением  $\gamma$  и сложением  $\pi$ . В таком случае  $E$ -мультипликативное семейство  $F$  можно рассматривать как модуль над алгеброй  $E$ . Некоторые другие примеры биоперад и соответствующих мультипликативных семейств будут построены ниже. Будет показано, что семейство пространств Тома образуют мультипликативное семейство над подходящей биоперадой. На семействе пространств Тома задать структуру алгебры над какой-либо  $E_\infty$ -операдой до сих пор не удавалось. Попытки преодолеть эту трудность привели к созданию теории  $H_\infty$ -кольцевых спектров и т. п. (см. [10,12]). Как оказалось, за операции Стинрода отвечает не структура алгебры над какой-либо  $E_\infty$ -операдой, а структура мультипликативного семейства над подходящей биоперадой.

Заметим, что определения операды и биоперады, хотя и похожи, в действительности задают существенно различные объекты. Операдное умножение  $\gamma$  определено на всевозможных произведениях

$$E(k) \times E(j_1) \times \dots \times E(j_k),$$

в то время как биоперадное — только на части этих произведений, а именно, только на тех, которые имеют вид

$$E(k) \times \underbrace{E(n) \times \dots \times E(n)}_k.$$

Кроме того, биоперада обладает «сложением»  $\pi$ , наличие которого у операды не требуется. Иными словами, неверно, что забыванием части структуры можно получить из операды биопераду или наоборот.

## 2. БИОПЕРАДА $EG$ И $EG$ -МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Биопераду  $E$  будем называть  $E_\infty$ -биоперадой, если для всех  $n$  действие группы  $\Sigma_n$  на  $E(n)$  свободно и пространство  $E(n)$  стягиваемо, так что  $E(n)/\Sigma_n = B\Sigma_n$ .

Пусть  $G(n)$  — одна из групп  $O(n)$ ,  $U(n)$  или  $Sp(n)$ , а  $d$  равно соответственно 1, 2 или 4. Напомним конструкцию биоперады  $EG$  (см. [3, 4]).

Пусть  $EG(n) = |B_*(*, G(n), G(n))|$ . Отображение

$$\pi : G(m) \times G(n) \longrightarrow G(m+n),$$

которое пару матриц  $(A_1, A_2)$ ,  $A_1 \in G(m)$ ,  $A_2 \in G(n)$ , переводит в блочно-диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

индуцирует морфизм симплицальных пространств

$$\pi_* : B_*(*, G(m), G(m)) \times B_*(*, G(n), G(n)) \longrightarrow B_*(*, G(m+n), G(m+n)).$$

Его геометрическую реализацию также будем обозначать

$$\pi : EG(m) \times EG(n) \longrightarrow EG(m+n).$$

Далее, пусть

$$\gamma : G(k) \times \underbrace{G(j) \times \dots \times G(j)}_k \longrightarrow G(kj)$$

— отображение, при котором набор  $(A, B_1, B_2, \dots, B_k)$  переходит в произведение матриц  $A \otimes E_j$  и  $\text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ . Здесь через  $A \otimes E_j$  обозначено кронекерово произведение матрицы  $A$  и единичной матрицы  $j$ -го порядка, а через  $\text{diag}(B_1, \dots, B_k)$  — блочно-диагональная матрица, у которой на диагонали стоят блоки  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Кронекерово (тензорное) произведение матрицы  $A \otimes E_j$  — это блочная матрица, у которой  $(ij)$ -блок равен  $\text{diag}(a_{ij}, \dots, a_{ij})$ , где  $a_{ij}$  — элемент матрицы  $A$ , стоящий на  $(ij)$ -м месте. Отображение  $\gamma$  определяет морфизм симплицальных пространств

$$\gamma_* : B_*(*, G(k), G(k)) * B_*(*, G(j), G(j)) \longrightarrow B_*(*, G(kj), G(kj)).$$

Геометрическую реализацию морфизма  $\gamma_*$  будем обозначать

$$\gamma : EG(k) * EG(j) \longrightarrow EG(kj).$$

Чтобы определить правое действие группы  $\Sigma_n$  на пространстве  $EG(n)$ , достаточно задать его на  $B_*(*, G(n), G(n))$ . Пусть  $\sigma \in \Sigma_n$ . Обозначим через  $A_\sigma \in G(n)$  матрицу, у которой для всех  $i$  на пересечении  $i$ -го столбца и  $\sigma(i)$ -й строки стоит единица, а остальные элементы равны 0. Легко проверить, что  $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}$ . Пусть  $(B_1, \dots, B_{n+1}) \in B_n(*, G(n), G(n))$ . Положим по определению

$$(B_1, \dots, B_{n+1}) \sigma = (B_1, \dots, B_{n+1} A_\sigma).$$

Определим гомеоморфизм  $\xi$  пространства  $EG(k(n+m))$  следующим образом. Сначала определим обратимый морфизм

$$B_*(*, G(n), G(n)) \longrightarrow B_*(*, G(n), G(n))$$

формулой

$$(B_1, \dots, B_{n+1}) \mapsto (A_g^{-1} B_1 A_g, \dots, A_g^{-1} B_{n+1} A_g),$$

где перестановка  $g = g_{k,n,m}$  была определена на с. 75. Ясно, что этот морфизм обратим, поэтому его геометрическая реализация

$$\xi : EG(k(n+m)) \longrightarrow EG(k(n+m))$$

является гомеоморфизмом.

**Предложение 1.** Четверка  $(\{EG(n)\}, \pi, \gamma, \xi)$  является  $E_\infty$ -биоперадой.



Пусть  $BG(n) = |B_*(*, G(n), *)|$ . Отображения  $\pi, \gamma$  и  $\xi$  из предложения 1 индуцируют отображения

$$\begin{aligned}\pi &: BG(m) \times BG(n) \longrightarrow BG(m+n), \\ \mu &: EG(k) * BG(n) \longrightarrow BG(kn), \\ \xi &: BG(k(m+n)) \longrightarrow BG(k(m+n)).\end{aligned}$$

**Предложение 2.** Четверка  $(\{BG(n)\}, \pi, \mu, \xi)$  является  $EG$ -мультипликативным семейством.

Доказательства предложений 1 и 2 являются громоздкими, но несложными упражнениями.

Перейдем к введению на семействе пространств Тома  $MG$  структуры  $EG$ -мультипликативного семейства.

Пусть  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ , если  $G = O, U$  или  $Sp$  соответственно. Будем рассматривать сферу  $S^{dn}$  как одноточечную компактификацию пространства  $K^n$ , т.е. будем считать, что  $S^{dn} = K^n \cup \{\text{pt}\}$ . Точка  $\text{pt} \in S^n$  — отмеченная. Определим действие группы  $G(n)$  на  $S^{dn}$ . Пусть  $B \in G(n)$ . Если  $x \in S^{dn}$  совпадает с отмеченной точкой  $\text{pt}$ , то  $Bx = \text{pt}$ . Если же  $x \neq \text{pt}$ , то  $x \in K^n$ , и положим  $Bx$  равным обычному произведению матрицы  $B$  на вектор  $x$ .

Рассмотрим симплициальное пространство  $MG_*(n)$ :

$$MG_j(n) = \underbrace{(G(n) \times \dots \times G(n))}_j \wr S^{dn}.$$

Здесь через  $\wr$  обозначено так называемое полу-смеш произведение. Если в пространстве  $Y$  есть отмеченная точка  $\text{pt}$ , то по определению

$$X \wr Y = X \times Y / X \times \{\text{pt}\}.$$

Полу-смеш произведение выражается через смеш произведение:

$$X \wr Y = X^+ \wedge Y.$$

Зададим операторы граней и вырождения пространства  $MG_*(n)$  следующими формулами:

$$\begin{aligned}\partial_0(B_1, \dots, B_j, x) &= (B_2, \dots, B_j, x), \\ \partial_i(B_1, \dots, B_j, x) &= (B_1, \dots, B_i B_{i+1}, \dots, x), \quad i = 1, \dots, j-1, \\ \partial_j(B_1, \dots, B_j, x) &= (B_1, \dots, B_j x), \\ s_i(B_1, \dots, B_j, x) &= (B_1, \dots, B_i, E, B_{i+1}, \dots, x), \quad i = 0, \dots, j.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь в определении оператора  $\partial_j$  используется действие группы  $G(n)$  на  $S^{dn}$ .

**Предложение 3.** Геометрическая реализация  $|MG_*(n)|$  является пространством Тома  $MG(n)$  универсального векторного расслоения над  $BG(n)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим симплициальное пространство  $B_*(*, G(n), S^{dn})$ . Его геометрическая реализация  $|B_*(*, G(n), S^{dn})|$  — это пространство, полученное послойной одноточечной компактификацией пространства универсального векторного расслоения над  $BG(n)$ . Добавленным точкам в точности соответствует подпространство  $|B_*(*, G(n), \text{pt})|$ . Результатом стягивания этого подпространства в точку является пространство Тома  $MG(n)$ , т.е.

$$MG(n) = |B_*(*, G(n), S^{dn})| / |B_*(*, G(n), \text{pt})|.$$

Это означает, что геометрическая реализация симплициального пространства

$$MG_*(n) = B_*(*, G(n), S^{dn}) / B_*(*, G(n), \text{pt})$$

совпадает с пространством Тома  $MG_*(n)$ . □

Структурные отображения

$$\begin{aligned}\pi &: MG(m) \times MG(n) \longrightarrow MG(m+n), \\ \mu &: EG(k) * MG(n) \longrightarrow MG(kn)\end{aligned}$$

и действия симметрических групп опеределаются как геометрические реализации отображений соответствующих симплициальных пространств:

$$\begin{aligned}\pi_* &: MG_*(m) \times MG_*(n) \longrightarrow MG_*(m+n), \\ \mu_* &: EG_*(k) * MG_*(n) \longrightarrow MG_*(kn).\end{aligned}$$

Отображение

$$\mu_j : G(k)^{\times j} G(k) * (G(n)^{\times j} \wr S^{dn}) \longrightarrow G(kn)^{\times j} \wr S^{dkn}$$

очевидным образом строится по отображениям  $G(k) * G(n) \rightarrow G(kn)$  и  $G(k) * S^{dn} \rightarrow S^{dkn}$ . Первое было определено выше, а второе задается следующим образом.

Пусть  $B \in G(n)$ , а  $x_i \in S^{kn} = K^n \cup \{\text{pt}\}$ , где  $i = 1, \dots, k$ . Тогда

$$(B, x_1, \dots, x_k) \mapsto \text{pt},$$

если  $x_i = \text{pt}$  хотя бы для одного  $i = 1, \dots, k$ , и

$$(B, x_1, \dots, x_k) \mapsto (B \otimes E_n)(x_1 \oplus \dots \oplus x_k)$$

в противном случае. Здесь через  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k$  обозначен вектор, принадлежащий пространству  $K^n \oplus \dots \oplus K^n$ , у которого  $i$ -я компонента совпадает с  $x_i$  для всех  $i$ , а через  $B \otimes E_n$  обозначено кронекерово произведение матрицы  $B$  и единичной матрицы  $n$ -го порядка.

Отображение  $\pi_*$  определяется аналогичным образом, оно индуцировано очевидными отображениями  $G(m) \times G(n) \rightarrow G(m+n)$  и  $S^{dm} \times S^{dn} \rightarrow S^{d(m+n)}$ .

Гомеоморфизм  $\xi : MG(k(n+m)) \rightarrow MG(k(n+m))$  определяется как геометрическая реализация морфизма  $\xi_* : MG_*(k(n+m)) \rightarrow MG_*(k(n+m))$ , определенного формулой

$$\xi_* : (B_1, \dots, B_j, x) \mapsto (A_g^{-1} B_1 A_g, \dots, A_g^{-1} x),$$

где  $g$  — перестановка  $g_{k,n,m}$ .

**Теорема 1.** Семейство  $MG = (\{MG(n)\}, \pi, \mu, \xi)$  является  $EG$ -мультипликативным семейством.

Доказательство состоит в прямой проверке требуемых свойств.

Перейдем к построению  $E_\infty$ -биооператы  $ESO$  и соответствующих  $ESO$ -мультипликативных семейств  $BSO$  и  $MSO$ .

Идея использовать в качестве  $E_\infty$ -биооператы  $ESO$  семейство пространств

$$ESO(n) = |B(*, SO(n), SO(n))|$$

упирается в существенную трудность, а именно, не удастся определить правое действие группы  $\Sigma_n$ . В самом деле, если  $A \in SO(n)$ , а  $\sigma$  — нечетная перестановка, то  $AA_\sigma \notin SO(n)$ , так как  $\det AA_\sigma = -1$ . Возможно, удастся определить подходящее действие симметрической группы на пространстве  $|B(*, SO(n), SO(n))|$  иным способом, но мы используем другую идею: в качестве семейства  $ESO$  рассмотрим семейство других пространств.

В качестве  $E_\infty$ -биооператы  $ESO$  будем рассматривать уже известную нам  $E_\infty$ -биооперату  $EO$ , а в качестве  $E_\infty$ -биооператы  $ESU$  —  $E_\infty$ -биооперату  $EU$ .

Рассмотрим симплициальное пространство  $MSO_*(n)$ :

$$MSO_j(n) = \underbrace{(O(n) \times \dots \times O(n))}_j \wr (S_+^n \vee S_-^n).$$

Букет  $S_+^n \vee S_-^n$  — это обычный букет двух сфер, в котором одна отмечена как положительная, а вторая — как отрицательная. Будем представлять  $(S_+^n \vee S_-^n)$  в виде объединения отмеченной точки  $\text{pt}$  и  $\{\pm 1\} \times \mathbb{R}^n$  — двух экземпляров пространства  $\mathbb{R}^n$ , положительного и отрицательного.

Операторы граней и вырождения в  $MSO_*(n)$  задаются теми же формулами (3), что и для  $MO_*(n)$ , за исключением оператора

$$\partial_j : MSO_j(n) \longrightarrow MSO_{j-1}(n).$$

Он задается следующим образом:

$$\partial_j(B_1, \dots, B_j, x) = (B_1, \dots, B_{j-1}, B_j x),$$

где  $B_j x = \text{pt}$ , если  $x = \text{pt}$ , и  $B_j x = (\varepsilon \det B_j, \det B_j \cdot B_j X)$ , если  $x = (\varepsilon, X)$ , где  $\varepsilon = \pm 1, X \in \mathbb{R}^n$ .

Чтобы определить отображение

$$\pi : MSO(m) \times MSO(n) \longrightarrow MSO(m+n),$$

достаточно задать отображение

$$(\{\pm 1\} \times \mathbb{R}^m) \times (\{\pm 1\} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow (\{\pm 1\} \times \mathbb{R}^{m+n}).$$

Положим

$$((\varepsilon_1, X_1), (\varepsilon_2, X_2)) \mapsto (\varepsilon_1 \varepsilon_2, X_1 \oplus X_2);$$

здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1, X_1 \in \mathbb{R}^m, X_2 \in \mathbb{R}^n$ , а  $X_1 \oplus X_2$  — это вектор пространства  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ , у которого первая компонента равна  $X_1$ , а вторая —  $X_2$ .

Чтобы определить отображение

$$\mu : ESO(k) * MSO(n) \longrightarrow MSO(kn),$$

достаточно задать отображение

$$O(k) * (S_+^n \vee S_-^n) \longrightarrow (S_+^{kn} \vee S_-^{kn}).$$

Положим  $(B, x_1, \dots, x_k) \mapsto \text{pt}$ , если  $x_i = \text{pt}$  хотя бы для одного  $i = 1, \dots, k$ , и

$$(B, x_1, \dots, x_k) \mapsto (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \det(B \otimes E_n), \det(B \otimes E_n)(B \otimes E_n)(X_1 \oplus \dots \oplus X_k))$$

в противном случае. Здесь  $x_i = (\varepsilon_i, X_i), \varepsilon_i = \pm 1, X_i \in \mathbb{R}^n, B \in O(k)$ .

Гомеоморфизм  $\xi : MSO(k(m+n)) \rightarrow MSO(k(m+n))$  определяется как геометрическая реализация отображения

$$\xi_* : MSO_*(k(m+n)) \longrightarrow MSO_*(k(m+n)),$$

заданного формулой

$$\xi_* : (B_1, \dots, B_j, (\varepsilon, X)) \mapsto (A_g^{-1} B_1 A_g, \dots, A_g^{-1} B_j A_g, A_g^{-1} X),$$

где  $g$  — перестановка  $g_{k,m,n}$ , определенная на с. 75.

**Предложение 4.** Геометрическая реализация  $|MSO_*(n)|$  является пространством Тома  $MSO(n)$  универсального векторного расслоения над  $BSO(n)$ .

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.

Еще одним примером  $ESO$ -мультипликативного семейства является семейство пространств

$$BSO(n) = |ESO_*(n)/SO(n)| = |B_*(*, O(n), \{\pm 1\})|.$$

Соответствующие структурные отображения индуцированы структурными отображениями биоперации  $ESO$ .

**Предложение 5.** Семейство пространств  $BSO = \{BSO(n)\}$  является  $ESO$ -мультипликативным.

Доказательство состоит в прямой проверке всех необходимых свойств.

**Теорема 2.** Семейство  $MSO = \{MSO(n)\}$  является  $ESO$ -мультипликативным семейством.

Доказательство состоит в непосредственной проверке требуемых свойств.

Опишем теперь  $ESU$ -мультипликативное семейство  $MSU$ . Как было сказано выше, в качестве  $E_\infty$ -биооперации  $ESU$  будем рассматривать  $E_\infty$ -биооперацию  $EU$ .

Рассмотрим симплициальное пространство  $MSU(n)$ , определенное следующим образом. Пусть

$$MSU_j(n) = \underbrace{(U(n) \times \dots \times U(n))}_j \rtimes (S^1 \rtimes S^{2n}).$$

Здесь  $S^1$  рассматривается как группа комплексных чисел, по модулю равных 1, а  $S^{2n}$  — как  $\{\text{pt}\} \cup \mathbb{C}^n$ . Нам будет удобно считать, что  $S^1 \rtimes S^{2n} = \{\text{pt}\} \cup S^1 \times \mathbb{C}^n$ . Операторы граней и вырождения, за исключением оператора

$$\partial_j : MSU_j(n) \longrightarrow MSU_{j-1}(n),$$

задаются теми же формулами (3), что и для  $MU_*(n)$ . Для оператора  $\partial_j$  положим по определению

$$\partial_j(B_1, \dots, B_j, x) = (B_1, \dots, B_{j-1}, B_j x),$$

где  $B_j x = \text{pt}$ , если  $x = \text{pt}$ , и  $B_j x = (z \det B_j, \overline{\det B_j} \cdot B_j X)$ , если  $x = (z, X)$ ,  $z \in S^1$ ,  $X \in \mathbb{C}^n$ . Для определения отображения

$$\pi : MSU(m) \times MSU(n) \longrightarrow MSO(m+n)$$

остается задать отображения

$$(S^1 \rtimes S^{2m}) \times (S^1 \rtimes S^{2n}) \longrightarrow S^1 \rtimes S^{2(m+n)}.$$

Положим  $(x_1, x_2) \mapsto \text{pt}$ , если  $x_1 = \text{pt}$  или  $x_2 = \text{pt}$ , и  $(x_1, x_2) \mapsto (z_1 z_2, X_1 \oplus X_2)$ , если  $x_i = (z_i, X_i)$ ,  $z_i \in S^1$ ,  $X_1 \in \mathbb{C}^m$ ,  $X_2 \in \mathbb{C}^n$ ,  $X_1 \oplus X_2 \in \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{m+n}$ .

Для определения отображения

$$\mu : ESU(k) * MSU(n) \longrightarrow MSU(kn)$$

остается задать отображения

$$U(k) * (S^1 \rtimes S^{2n}) \longrightarrow S^1 \rtimes S^{2kn}.$$

Положим  $(B, x_1, \dots, x_k) \mapsto \text{pt}$ , если  $x_i = \text{pt}$  для некоторого  $i = 1, \dots, k$ , и

$$(B, x_1, \dots, x_k) = (B, (z_1, X_1), \dots, (z_k, X_k)) \mapsto (z_1 \dots z_k \det(B \otimes E_n), \overline{\det(B \otimes E_n)} \cdot (B \otimes E_n)(X_1 \oplus \dots \oplus X_k)).$$

Здесь  $z_i \in S^1$ ,  $X_i \in \mathbb{C}^n$ ,  $x_i = (z_i, X_i)$ .

Гомеоморфизм  $\xi : MSU(k(n+m)) \rightarrow MSU(k(n+m))$  определим как геометрическую реализацию морфизма  $\xi_* : MSU_*(k(n+m)) \rightarrow MSU_*(k(n+m))$ , заданного формулой

$$\xi : (B_1, \dots, B_j, (z, X)) \mapsto (A_g^{-1} B_1 A_g, \dots, A_g^{-1} B_j A_g, (z, A_g^{-1} X)),$$

где  $g$  — перестановка  $g_{k,n,m}$ .

**Предложение 6.** *Геометрическая реализация  $|MSU_*(n)|$  является пространством Тома универсального векторного расслоения над  $BSU(n)$ .*

Доказательство является дословным повторением доказательства предложения 3.

**Теорема 3.** *Семейство  $MSU = \{MSU(n)\}$  является  $ESU$ -мультипликативным семейством.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Еще одним  $ESU$ -мультипликативным семейством является семейство пространств

$$BSU(n) = |ESU_*(n)/SU(n)| = |B_*(*, U(n), S^1)|.$$

Структурные отображения  $\pi, \mu$  и  $\xi$  индуцированы соответствующими отображениями биооперации  $ESU$ .

**Предложение 7.** *Семейство пространств  $BSU = \{BSU(n)\}$  является  $ESU$ -мультипликативным семейством.*

Доказательство является дословным повторением доказательства предложения 5.

До конца настоящего раздела будем пользоваться гомологиями и когомологиями с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} EG^*(n) &= H^*(EG(n)/\Sigma_n), \\ EG_*(n) &= H_*(EG(n)/\Sigma_n), \\ BG^*(n) &= H^*(BG(n)), \\ BG_*(n) &= H_*(BG(n)). \end{aligned}$$

Группы  $EG^*(n)$  и  $EG_*(n)$  являются группами когомологий и гомологий соответственно симметрической группы  $\Sigma_n$ . Подходящее нам описание структуры, имеющейся на этих группах, см. в [5]. В частности, в  $EG^*(2)$  имеются элементы  $\bar{e}_i$ ,  $|\bar{e}_i| = i$ , двойственные образующим в гомологиях операды  $E\Sigma$ . Отображение  $\mu$  индуцирует морфизмы

$$\begin{aligned} \mu_* : EG_*(k) * BG_*(n) &\longrightarrow BG(kn), \\ \mu^* : BG^*(kn) &\longrightarrow EG^*(k) * BG^*(n). \end{aligned}$$

В [4] эти действия вычислены для  $G = O, U$ . Как известно,

$$H^*(BSO(n)) = \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_n], \quad H^*(BSU(n)) = \mathbb{Z}_2[c_2, \dots, c_n],$$

где через  $c_i$  обозначен приведенный по модулю 2 класс Чжэня размерности  $2i$ .

**Предложение 8.** (а) Для кодействия

$$\mu^* : BSO^*(2n) \longrightarrow ESO^*(2) * BSO^*(n)$$

имеет место формула

$$\mu^*(w_m) = \sum_{k>1} \frac{n!}{k!(m-2k)!(n-m+k)!} \bar{e}_{m-2k} * w_k.$$

(б) Для кодействия

$$\mu^* : BSU^*(2n) \longrightarrow ESU^*(2) * BSU^*(n)$$

имеет место формула

$$\mu^*(c_m) = \sum_{k>1} \frac{n!}{k!(m-2k)!(n-m+k)!} \bar{e}_{2m-4k} * c_k.$$

В обоих случаях кодействие на остальных элементах  $BSO^*(n)$  и  $BSO_*(n)$  может быть определено с помощью алгебраической структуры, существующей на этих когомологиях.

*Доказательство.* Докажем пункт (а). Воспользуемся тем, что каноническое отображение  $i : BSO(n) \rightarrow BO(n)$  является отображением  $ESO$ -мультипликативных семейств (напомним, что биоперады  $ESO$  и  $EO$  совпадают). Поэтому всевозможные отображения в гомологиях и когомологиях, индуцированные структурными отображениями мультипликативных семейств, перестановочны с отображениями  $i_* : BSO_*(n) \rightarrow BO_*(n)$  и  $i^* : BO^*(n) \rightarrow BSO^*(n)$ . Кроме того,  $i^*(w_1) = 0$  и  $i^*(w_n) = w_n$ ,  $n > 1$ . Остается воспользоваться теоремой 6 из [4]:

$$\mu^*(w_m) = \sum_k \frac{n!}{k!(m-2k)!(n-m+k)!} \bar{e}_{m-2k} * w_k.$$

Пункт (б) доказывается аналогично. □

Обозначим через  $x_i \in H_*(BSO(n))$  класс, двойственный  $w_i$ , а через  $y_i \in H_*(BSU(n))$  — класс, двойственный  $c_i$ . Из предложения 8 немедленно вытекает следующее утверждение.

**Предложение 9.** (а) Для действия

$$\mu_* : ESO_*(2) * BSO_*(n) \longrightarrow BSO_*(2n)$$

имеет место формула

$$\mu_*(e_i * x_k) = \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} x_{i+2k} + \text{непримитивные элементы.}$$

(б) Для кодействия

$$\mu_* : ESU_*(2) * BSU_*(n) \longrightarrow BSU_*(2n)$$

имеют место формулы  $\mu_*(e_{2i+1} * y_k) = 0$  и

$$\mu_*(e_{2i} * y_k) = \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} y_{i+2k} + \text{непримитивные элементы.}$$

### 3. ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Общая конструкция операций Стиррода в теории когомологий, представляющий спектр которого образует мультипликативное семейство над некоторой  $E_\infty$ -биоперацией, приведена в [3, 4]. В этом разделе эта конструкция излагается непосредственно для кобордизмов.

Пусть  $G = O, SO, U, SU$  или  $Sp$ , а  $d = 1, 1, 2, 2$  или  $4$  соответственно. Пусть  $X$  — некоторое пунктированное топологическое пространство. Тогда

$$MG^{dj}(X) = \varinjlim[S^{md}X, MG(m+j)].$$

Через  $EG(k, X)$  обозначим пространство

$$(EG(k)^+ \wedge \underbrace{X \wedge \dots \wedge X}_k) / \Sigma_k,$$

где действие  $\Sigma_k$  на  $EG(k)$  — из структуры биоперации, а на  $\underbrace{X \wedge \dots \wedge X}_k$  группа  $\Sigma_k$  действует перестановками сомножителей.

Заметим, что отображение  $\mu : EG(k) * MG(n) \rightarrow MG(kn)$  определяет отображение  $EG(k, MG(n)) \rightarrow MG(kn)$ , которое мы будем обозначать той же буквой  $\mu$ .

Рассмотрим направленную систему групп

$$MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dm}))$$

и их гомоморфизмов

$$\varphi_{m,l} : MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dm})) \longrightarrow MG_{i+kdl}(EG(k, S^{dl})), \quad l < m.$$

Гомоморфизм  $\varphi_{m,l}$  определяется как композиция

$$\begin{aligned} MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dm})) &\longrightarrow MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dm-dl} \wedge S^{dl})) \xrightarrow{D_*} \\ &\longrightarrow MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dl}) \wedge EG(k, S^{dm-dl})) \xrightarrow{MG_*(1 \wedge \nu)} \\ &\longrightarrow MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dl}) \wedge EG(k, MG(m-l))) \xrightarrow{MG_*(1 \wedge \mu)} \\ &\longrightarrow MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dl}) \wedge MG(k(m-l))) \longrightarrow MG_{i+kdl}(EG(k, S^{dl})). \end{aligned}$$

Здесь  $D$  — это диагональное отображение

$$D : EG(k, S^{dm-dl} \wedge S^{dl}) \longrightarrow EG(k, S^{dm-dl}) \wedge EG(k, S^{dl}),$$

а отображение  $\nu : S^{dm-dl} \rightarrow MG(m-l)$  — единица спектра.

**Предложение 10.** Для всех  $m > n > l$  имеем

$$\varphi_{m,n} \varphi_{n,l} = \varphi_{m,l}.$$

*Доказательство.* Легко видеть, что для доказательства этого предложения достаточно показать, что отображения

$$\begin{aligned} EG(k, S^{d(m-l)}) &\xrightarrow{D} EG(k, S^{d(m-n)}) \wedge EG(k, S^{d(n-l)}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow EG(k, MG(m-n)) \wedge EG(k, MG(n-l)) \xrightarrow{\mu \wedge \mu} \\ &\longrightarrow MG(k(m-n)) \wedge MG(k(n-l)) \xrightarrow{\pi} MG(k(m-l)) \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$EG(k, S^{d(m-l)}) \longrightarrow EG(k, MG(m-l)) \xrightarrow{\mu} MG(k(m-l)) \quad (5)$$

представляют один и тот же элемент в  $MG^{kd(m-l)}(EG(k, S^{d(m-l)}))$ .

Напомним некоторые факты из [13] (см. также [1]). Пусть  $\xi \rightarrow B$  — некоторое  $K$ -расслоение размерности  $n$  ( $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$  в зависимости от  $G$ ). Тогда

$$EG(k) \times \xi^{\times k} / \Sigma_k \longrightarrow EG(k) \times B^{\times k} / \Sigma_k$$

—  $K$ -расслоение размерности  $kn$ . Имеет место гомеоморфизм

$$M(EG(k) \times \xi^{\times k} / \Sigma_k) \cong EG(k, M(\xi))$$

(см. [13, лемма 3.5]).

Обозначим через  $\Phi_m$  класс Тома расслоения  $EG(k) \times 1_m^{\times k} / \Sigma_k$ , где  $1_m$  — тривиальное  $m$ -мерное расслоение над точкой. Покажем, что отображение (5) представляет класс  $\Phi_{m-l}$ . Расслоение  $EG(k) \times 1_{m-l}^{\times k}$  индуцировано некоторым отображением базы  $EG(k) \times \text{pt}^{\times k} \rightarrow BG(k(m-l))$ . Так как пространство  $EG(k)$  стягиваемо, то в качестве этого классифицирующего отображения можно взять

$$\kappa : EG(k) \times \text{pt}^{\times k} \xrightarrow{1 \times i^{\times k}} EG(k) \times BG(m-l)^{\times k} \xrightarrow{\mu} BG(k(m-l)),$$

где  $i : \text{pt} \rightarrow BG(m-l)$  — некоторое фиксированное отображение. Так как отображение  $\mu$  согласовано с действием симметрической группы  $\Sigma_k$ , то отображение  $\kappa$  определяет отображение

$$\bar{\kappa} : EG(k) \times \text{pt}^{\times k} / \Sigma_k \longrightarrow BG(k(m-l)).$$

Ясно, что  $\bar{\kappa}$  классифицирует расслоение  $EG(k) \times 1_{m-l}^{\times k} / \Sigma_k$ . Следовательно,  $\Phi_{m-l}$  совпадает с классом, представленным отображением (5).

Отображение (4) представляет класс  $D^* \circ (\Phi_{m-n} \Phi_{n-l})$ , где  $D$  — диагональное отображение

$$D : EG(k, S^{d(m-l)}) \longrightarrow EG(k, S^{d(m-n)}) \wedge EG(k, S^{d(n-l)}).$$

Согласно [13, п. 10.3, теорема 3.4]  $D^* \circ (\Phi_{m-n} \Phi_{n-l}) = \Phi_{m-l}$ , что и требовалось.  $\square$

Таким образом, имеет смысл говорить об обратном пределе системы групп  $MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dm}))$  и гомоморфизмов  $\varphi_{m,l}$ . Этот предел обозначим через  $AMG_i(k)$ .

Зафиксируем некоторое топологическое пространство  $X$ . Зафиксируем некоторый элемент  $x \in AMG_{di}(k)$ . Построим отображение

$$P_x : MG^{dj}(X) \longrightarrow MG^{dkj-di}(X),$$

которое мы будем называть операцией Стинрода.

Пусть  $y \in MG^{dj}(X)$ . Выберем для него произвольный представитель  $f : S^{dm}X \rightarrow MG(j+m)$ . Для элемента  $x$  рассмотрим произвольный его представитель  $\bar{x} \in MG_{di+kdm}(EG(k, S^{dm}))$ . Рассмотрим соответствующее этому представителю отображение

$$g : S^{di+kdm+dl} \longrightarrow EG(k, S^{dm}) \wedge MG(l).$$

Пусть

$$\Delta : EG(k, S^{dm}) \wedge X \longrightarrow EG(k, S^{dm}X)$$

— отображение, индуцированное диагональю  $X \rightarrow X^{\times k}$ . Композицию

$$S^{di+kdm+dl} \wedge X \xrightarrow{g \wedge 1_X} EG(k, S^{dm}) \wedge MG(l) \wedge X \xrightarrow{\Delta \wedge 1_{MG(l)}} EG(k, S^{dm}X) \wedge MG(l)$$

обозначим через  $r_1$ , а композицию

$$\begin{aligned} EG(k, S^{dm} X) \wedge MG(l) &\xrightarrow{EG(k,f) \wedge 1_{MG(l)}} EG(k, MG(m+j)) \wedge MG(l) \xrightarrow{\mu \wedge 1_{MG(l)}} \\ &\longrightarrow MG(km+kj) \wedge MG(l) \xrightarrow{\pi} MG(k(m+j)+l) \end{aligned}$$

обозначим через  $r_2$ .

Гомотопический класс композиции

$$r_2 \circ r_1 : S^{di+kdm+dl} X \longrightarrow MG(km+kj+l)$$

задает некоторый элемент в  $MG^{dkj-di}(X)$ . Положим по определению  $P_x(y)$  равным этому элементу.

**Предложение 11.** *Класс  $P_x(y)$  определен корректно, т.е. не зависит от произвола в выборе отображений  $f$  и  $g$ .*

*Доказательство.* Легко видеть, что класс  $P_x(y)$  не зависит от выбора отображения  $g$  как представителя  $\bar{x} \in h_{di+kdm}(E(k, S^{dm}))$ .

Покажем, что класс  $P_x(y)$  не зависит от выбора  $f$ . Точнее, если помимо  $f$  задано отображение  $f_1 : S^{md+d} \rightarrow H(m+j+1)$ , связанное с  $f$  формулой  $f_1 = \varepsilon \circ Sf$ , где  $\varepsilon : S^d H(j) \rightarrow H(j+1)$  — структурное отображение спектра, то класс  $P_x(y)$ , построенный по  $f$ , совпадает с классом  $P_x(y)$ , построенным по  $f_1$ .

Чтобы в этом убедиться, зафиксируем отображение

$$g : S^{di+kdm+dl+kd} \longrightarrow EG(k, S^{dm+d}) \wedge MG(l),$$

представляющее  $\bar{x} \in MG_{di+kdm+kd}(EG(k, S^{dm+d}))$ . В качестве представителя элемента

$$\varphi_{m+1,m} \bar{x} \in MG_{di+kdm}(EG(k, S^{dm}))$$

рассмотрим отображение  $(1 \wedge \pi) \circ g'$ , где  $g'$  — это композиция

$$\begin{aligned} S^{di+kdm+dl+kd} &\xrightarrow{g} EG(k, S^{dm+d}) \wedge MG(l) \longrightarrow \\ &\longrightarrow EG(k, S^{dm} \wedge S^d) \wedge MG(l) \xrightarrow{\Delta} \\ &\longrightarrow EG(k, S^{dm}) \wedge EG(k, S^d) \wedge MG(l) \xrightarrow{1 \wedge \mu \circ E(k,\nu) \wedge 1} \\ &\longrightarrow EG(k, S^{dm}) \wedge MG(k) \wedge MG(l). \end{aligned}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & EG(k, S^{dm+d}) \wedge MG(l) \wedge X \xrightarrow{\Delta \wedge 1} \\ & \nearrow^{g \wedge 1} & \downarrow D \wedge 1 \wedge 1 \\ S^{d(i+km+k+l)} \wedge X & & EG(k, S^{dm}) \wedge EG(k, S^d) \wedge MG(l) \wedge X \xrightarrow{\Delta \wedge 1 \wedge 1} \\ & \searrow_{g' \wedge 1} & \downarrow 1 \wedge (\mu \circ EG(\nu)) \wedge 1 \wedge 1 \\ & & EG(k, S^{dm}) \wedge MG(k) \wedge MG(l) \wedge X \xrightarrow{\Delta \wedge 1 \wedge 1} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 \longrightarrow & EG(k, S^{dm+d}X) \wedge MG(l) & \xrightarrow{EG(S^d f) \wedge 1} \\
 & \downarrow \Delta \wedge 1 \wedge 1 & \\
 \longrightarrow & EG(k, S^{dm}X) \wedge EG(k, S^d) \wedge MG(l) & \xrightarrow{EG(f) \wedge 1 \wedge 1} \\
 & \downarrow 1 \wedge (\mu \circ E(\nu)) \wedge 1 & \\
 \longrightarrow & EG(k, S^{dm}X) \wedge MG(k) \wedge MG(l) & \xrightarrow{EG(f) \wedge 1 \wedge 1} \\
 \\ 
 \longrightarrow & EG(k, S^d \wedge MG(m+j)) \wedge MG(l) & \xrightarrow{EG(\varepsilon) \wedge 1} \\
 & \downarrow D \wedge 1 & \\
 \longrightarrow & EG(k, MG(m+j)) \wedge EG(k, S^d) \wedge MG(l) & (*) \\
 & \downarrow 1 \wedge (\mu \circ EG(\nu)) \wedge 1 & \\
 \longrightarrow & EG(k, MG(m+j)) \wedge MG(k) \wedge MG(l) & \xrightarrow{\mu \wedge 1 \wedge 1} \\
 \\ 
 \longrightarrow & EG(k, EG(m+j+1)) \wedge MG(l) & \\
 & \downarrow \pi \circ (\mu \wedge 1) & \\
 (*) & MG(k(m+j+1)+l) & \\
 & \uparrow \pi \circ (1 \wedge \pi) & \\
 \longrightarrow & MG(k(m+j)) \wedge MG(k) \wedge MG(l) & 
 \end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна. В самом деле, коммутативность фрагмента, помеченного (\*), следует из свойств класса тома  $\Phi_n$  (см. доказательство предложения 3.8), а коммутативность остальных квадратов очевидна.  $\square$

Как показано в работе [3,4], структурные отображения биоператоры  $EG$  индуцируют на  $AMG_* = \bigoplus AMG_*(k)$  структуру  $MG_*(S^0)$ -билгебры Хопфа. Грубо говоря, эта структура описывает взаимодействие построенных операций Стиррода; в частности, отображение, индуцированное  $\gamma$ , описывает композицию операций Стиррода.

Пользуясь построенной структурой  $ESO$ -мультипликативного семейства на  $\{MSO(n)\}$  и структурой  $ESU$ -мультипликативного семейства на  $\{MSU(n)\}$ , получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть  $G = SO$  или  $SU$ .

- Тогда на  $MG^*(X)$  имеется естественная структура  $MG_*(S^0)$ -алгебры над биалгеброй Хопфа  $AMG_*$ .
- Если  $X$  —  $EG$ -мультипликативное пространство, то на  $MG_*(X)$  имеется естественная структура  $MG_*(S^0)$ -алгебры над биалгеброй Хопфа  $AMG_*$ .

Кратко говоря, эта теорема говорит о том, что имеется естественное действие алгебры, которую естественно называть алгеброй Стинрода, на теориях  $SO$ - и  $SU$ -кобордизмов, а также естественное действие алгебры, которую естественно называть алгеброй Дайера—Лашофа, на  $SO$ - и  $SU$ -бордизмах. Доказательство этой теоремы, равно как и недостающие определения, можно найти в [3, 4].

Напомним, как строятся операции Стинрода в [13]. Операцией Стинрода том Дик назвал набор естественных преобразований

$$P^{dj} : MG^{dj}(X) \longrightarrow MG^{kdj}(EG(k, X)),$$

удовлетворяющий ряду требований. Пусть класс  $y \in MG^{dj}(X)$  представлен отображением

$$f : S^{dm} X \longrightarrow MG(m+j).$$

Пусть  $u_n \rightarrow BG(n)$  — универсальное векторное расслоение. Класс Тома расслоения

$$EG(k) \times u_n^{\times k} / \Sigma_k \longrightarrow EG(k) \times BG(n)^k / \Sigma_k$$

обозначим  $v_n$ . Класс  $v_n$  представлен отображением

$$\mu : EG(k, MG(n)) \longrightarrow MG(kn).$$

Обозначим через  $\Phi_m$  изоморфизм Тома

$$MG^{kj}d(EG(k, X)) \longrightarrow MG^{k(m+j)d}(EG(k, S^m X)),$$

определенный умножением на класс Тома расслоения

$$EG(k) \times 1_m^{\times k} / \Sigma_k \longrightarrow EG(k) \times \text{pt}^{\times k} / \Sigma_k$$

(см. [13, пп. (3.2)–(3.5)]). По определению

$$P^{dj}(y) = \Phi_k^{-1} EG(k, f)^*(v_{n+k}).$$

Обозначим через  $\Delta$  диагональное отображение  $X \wedge BG(k)^+ \rightarrow EG(k, X)$ . Композицию  $\Delta^* \circ P^{dj}$  обозначим через

$$Q^{dj} : MG^{dj}(X) \longrightarrow MG^{kdj}(X \wedge BG(k)^+).$$

Напомним (см. [2]), что в  $MG^*(-)$  существует  $/$ -умножение

$$/ : MG^p(X \wedge Y) \otimes MG_q(Y) \longrightarrow MG^{p-q}(X).$$

Из его согласованности с  $\cup$ -умножением следует, что имеется умножение

$$/ : MG^p(X \wedge BG(k)^+) \otimes AMG_q(k) \longrightarrow MG^{p-q}(X).$$

**Теорема 5.** Пусть  $x \in AMG_{di}(k)$ ,  $y \in MG^{dj}(X)$ . Тогда

$$Q^{dj}(y) / x = P_x(y).$$

*Доказательство.* Отметим, что  $BG(k)^+ = EG(k, S^0)$  и что отображения

$$\varphi_{m,n} : MG_{i+kdm}(EG(k, S^{dm})) \longrightarrow MG_{i+kdn}(EG(k, S^{dn}))$$

индуцированы умножением на  $\Phi_{m-n}$ . Остается воспользоваться свойствами умножения  $/$ .  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштабер В. М. Новые методы в теории кобордизмов// Приложение к книге Р. Стонга «Заметки по теории кобордизмов». — М.: Мир, 1973.
2. Свитцер Р. М. Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
3. Смирнов В. А. Биоперации и биалгебры Хопфа в теории кобордизмов// Мат. заметки. — 1999. — 65, № 2. — С. 270–279.
4. Смирнов В. А. Алгебры Стинрода и Дайера—Лашофа в обобщенных теориях гомологий и когомологий// Мат. сб. — 1999. — 190, № 12. — С. 93–128.
5. Смирнов В. А. Вторичные операции в гомологиях операды  $E$ // Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — 56, № 2. — С. 449–468.
6. Стинрод Н., Эпштейн Д. Когомологические операции. — М.: Наука, 1983.

7. *Стонг Р.* Заметки по теории кобордизмов. — М.: Мир, 1973.
8. *Bisson T., Joyal A.* The Dyer–Lashof algebra in bordism// C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, в печати.
9. *Bisson T., Joyal A.* Nishida relations in bordism and homology// C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, в печати.
10. *Bruner R., May J. P., McCluer J. E., Steinberger M.*  $H_\infty$  ring spectra and their applications/ Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1986. — 1176.
11. *May J. P.* Geometry of iterated loop spaces/ Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972. — 271.
12. *May J. P., Quinn F., Ray N., Tornehaive J.*  $E_\infty$  ring space and  $E_\infty$  ring spectra/ Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977. — 577.
13. *tom Dieck T.* Steenrod Operationen in Kobordismen Theorien// Math. Z. — 1968. — 107. — С. 380–401.

Ф. Ю. Попеленский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: [popelens@mech.math.msu.su](mailto:popelens@mech.math.msu.su)

## ОБОБЩЕНИЯ КОС И ГОМОЛОГИИ

© 2004 г. **В. В. ВЕРШИНИН**

Аннотация. Настоящий небольшой обзор является дополнением к обзору *Вершинин В. В.* Группы кос и пространства петель// Усп. мат. наук. — 1999. 54, № 2. — С. 3–84. Рассматриваются гомологические свойства виртуальных кос и обобщенные гомологии артиновых групп.

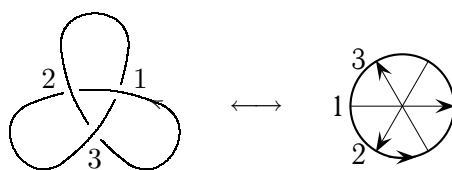
### СОДЕРЖАНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| 0. Введение . . . . .                                | 90  |
| 1. Группа виртуальных кос . . . . .                  | 91  |
| 2. Представление Бурау . . . . .                     | 96  |
| 3. Гомологические свойства виртуальных кос . . . . . | 97  |
| 4. Обобщенные гомологии артиновых групп . . . . .    | 100 |
| Список литературы . . . . .                          | 103 |

### 0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящий небольшой обзор может рассматриваться как дополнение к обзору автора [7]. Здесь мы касаемся новых результатов, появившихся после выхода обзора [7]: гомологических свойств виртуальных кос [35], а также обобщенных гомологий артиновых групп [4], изучавшихся К. Брото и автором. За более пространным введением мы отсылаем читателя к [7].

Виртуальные узлы были введены Л. Кауфманом [24] и изучались также М. Гусаровым, М. Поляком и О. Виро [22]. Основная мотивировка лежит в теории гауссовых диаграмм и гауссовых кодов узлов [24, 27]. А именно, для всякой диаграммы узла возможно построить ее гауссову диаграмму и образовать ее гауссов код. Пример гауссовой диаграммы узла:



Гауссовым кодом этой гауссовой диаграммы является последовательность  $O1U2O3U1O2U3$ , где цифры обозначают точки пересечения, символ  $O$  означает переход, а символ  $U$  — проход в этой точке. Проблема состоит в том, что не каждая гауссова диаграмма (или гауссов код) соответствует некоторому узлу. Для преодоления этой трудности и были введены виртуальные узлы. Собственно виртуальными узлами являются те из них, у которых гауссова диаграмма не есть гауссова диаграмма классического узла. Л. Кауфман перенес много понятий из классической теории узлов на случай виртуальных узлов, таких как фундаментальная группа, рэк, квандл, многочлены Кауфмана и Джонса. М. Гусаров, М. Поляк и О. Виро [22] доказали, что аналоги верхнего и нижнего копределений классической фундаментальной группы узла дают две различных группы для виртуальных узлов. Они также исследовали виртуальные узлы с точки зрения инвариантов Васильева.

Виртуальные косы естественным образом соответствуют виртуальным узлам. Другие обобщения классических кос были введены в течение последних нескольких лет. Это группа кос-перестановок

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 99-01-00574).

$BP_n$  Р. Фенна, Р. Римањи и К. Рурка [21] и моноид Баеса—Бирман  $SB_n$  [14, 16], который вкладывается в группу кос с особенностями  $SG_n$  [20] (см. также описание этих объектов в [7, § 5]). Виртуальные косы тесно связаны с группой кос-перестановок, а также с моноидом Баеса—Бирман. Группа кос-перестановок имеет образующие тех же типов, что и группа виртуальных кос и моноид Баеса—Бирман. Группа  $BP_n$  имеет соотношения тех же типов, что и группа виртуальных кос, кроме одного типа, которого в виртуальных косах нет, но он имеется для моноида Баеса—Бирман.

Представление Бурау определяется естественным образом для виртуальных кос и группы кос-перестановок, обобщая классическое представление Бурау [15, 18]. Это классическое представление Бурау рассматривалось с гомотопической точки зрения Ф. Коэном [19]. Когомологии группы кос с особенностями  $SG_n$  и группы кос-перестановок изучались автором [5, 33]. Методы работ [5, 33] были применены в [35] к исследованию гомологических свойств группы виртуальных кос и ее представления Бурау.

В разделе 1 мы вводим группу виртуальных кос. Представление Бурау продолжается на группу виртуальных кос и группу кос-перестановок в разделе 2. В разделе 3 мы изучаем гомологические свойства группы виртуальных кос и ее представления Бурау. Целью раздела 4 является суммирование информации об обобщенных гомологиях групп, рассматриваемых как обобщения классических групп кос. Под такими обобщениями мы понимаем так называемые Артиновы группы и группы кос в телах с ручками.

### 1. ГРУППА ВИРТУАЛЬНЫХ КОС

Для виртуальных узлов имеют место следующие аналоги преобразований Рейдемейстера [22, 24]:

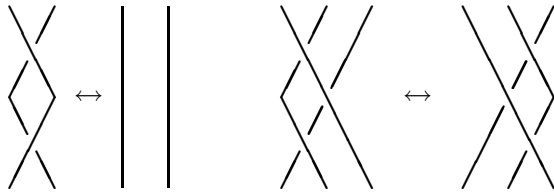


Рис. 1.1

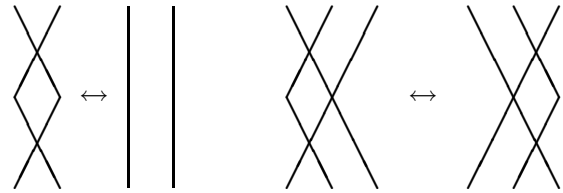


Рис. 1.2

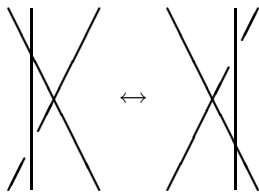


Рис. 1.3

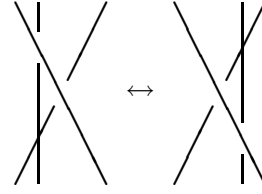


Рис. 1.4. Запрещенное преобразование

Как подчеркивалось в [22], соотношение, изображенное на рис. 1.4, не выполняется для виртуальных узлов.

Мы можем ввести *группу виртуальных кос* по аналогии с классической группой кос. Отличие состоит в том, что разрешены два типа пересечений:

- 1) как для обычных кос, что показано на рис. 1.5, или
- 2) как пересечение линий на плоскости, что показано на рис. 1.6.



Рис. 1.5



Рис. 1.6

Эта группа задается набором образующих  $\{\zeta_i, \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n-1\}$  и соотношений

$$\begin{cases} \zeta_i^2 = 1, \\ \zeta_i \zeta_j = \zeta_j \zeta_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i = \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}; \end{cases} \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \end{cases} \quad (1.1b)$$

$$\begin{cases} \sigma_i \zeta_j = \zeta_j \sigma_i, \quad \text{если } |i-j| > 1, \\ \zeta_i \zeta_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}. \end{cases} \quad (1.1c)$$

Соотношения (1.1a) представляют собой соотношения симметрической группы, (1.1b) — соотношения группы кос и (1.1c) — смешанные соотношения.

Образующая  $\sigma_i$  соответствует канонической образующей группы кос  $Br_n$  и изображена на рис. 1.7.

Образующая  $\zeta_i$  соответствует пересечению линий и изображена на рис. 1.8.

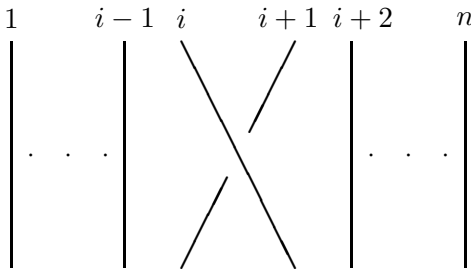


Рис. 1.7

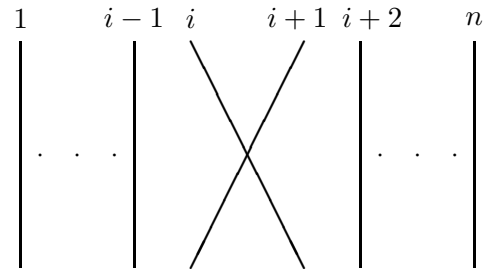


Рис. 1.8

Гомоморфизм  $j_n$  из классической группы кос  $Br_n$

$$j_n : Br_n \rightarrow VB_n$$

очевидным образом определяется по формуле

$$j_n(\sigma_i) = \sigma_i.$$

Определим категорию  $\mathcal{VB}$  по аналогии со случаем классических групп кос. Ее объекты  $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots\}$  соответствуют целым числам от 0 до бесконечности, а морфизмы определяются по формуле:

$$\text{hom}(\bar{k}, \bar{l}) = \begin{cases} VB_k, & \text{если } k = l, \\ \emptyset, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Спаривания

$$\mu_{m,n} : VB_m \times VB_n \rightarrow VB_{m+n}$$

определяются обычным образом по формулам

$$\begin{aligned} \mu_{m,n}(\sigma'_i) &= \sigma_i, & \mu_{m,n}(\zeta'_i) &= \zeta_i, & \sigma'_i, \zeta'_i &\in VB_m, & \sigma_i, \zeta_i &\in VB_{m+n}, \\ \mu_{m,n}(\sigma''_j) &= \sigma_{j+m}, & \mu_{m,n}(\zeta''_j) &= \zeta_{j+m}, & \sigma''_i, \zeta''_i &\in VB_n, & \sigma_{j+m}, \zeta_{j+m} &\in VB_{m+n}. \end{aligned}$$

Геометрически это спаривание определяется так же, как и для классических групп кос: мы добавляем (например, справа) косу из  $n$  нитей к косе из  $m$  нитей. Очевидно, что спаривание для виртуальных кос согласуется с соответствующим спариванием для классических групп кос. Виртуальные косы определяют строгую моноидальную категорию  $\mathcal{VB}$ , а гомоморфизмы  $j_n$  определяют функтор из строгой моноидальной категории  $\mathcal{B}$ , порожденной классическими группами кос:

$$\mathcal{J} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{VB},$$

который является морфизмом моноидальных категорий.

Напомним, что категория  $\mathcal{B}$  является *категорией с заплетением* (braided category) по определению А. Жуаяля и Р. Стрита [23]. Это означает, что задана система изоморфизмов объектов, называемая *заплетением* (braiding)

$$\sigma_{\bar{m}, \bar{n}} : \overline{m+n} \rightarrow \overline{n+m},$$

естественная по отношению к морфизмам из  $\bar{m}$  в себя и из  $\bar{n}$  в себя, а также удовлетворяющая свойствам когерентности В1 и В2 из [23]. Категория с заплетением становится *симметрической моноидальной категорией*, если ее заплетение удовлетворяет дополнительному условию

$$\sigma_{\bar{m}, \bar{n}} \sigma_{\bar{n}, \bar{m}} = 1_{\overline{m+n}}.$$

Такое заплетение называется *симметрией*. *Пермутативная категория* есть строгая симметрическая моноидальная категория.

Рассмотрим следующую систему элементов в качестве заплетения  $s$  в  $\mathcal{B}$ :

$$\sigma_m \dots \sigma_1 \sigma_{m+1} \dots \sigma_2 \dots \sigma_{n+m-1} \dots \sigma_n \in Br_{m+n}.$$

Графически это изображено на рис. 1.9.

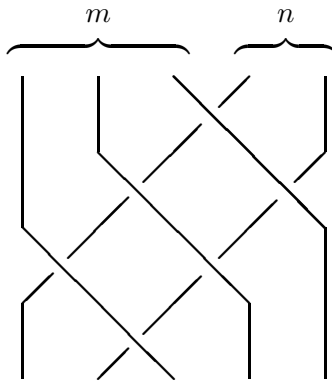


Рис. 1.9

Вследствие запрещенного преобразования (рис. 1.4) образ заплетения  $s$  в категории  $\mathcal{B}$  под действием функтора  $\mathcal{J}$  не продолжается до заплетения в категории  $\mathcal{VB}$ . Существует, однако, другое заплетение, которое превращает  $\mathcal{VB}$  в симметрическую моноидальную категорию.

**Предложение 1.1.** *Категория  $\mathcal{VB}$  становится пермутативной категорией с симметрией, определенной элементами*

$$\zeta_{\bar{m}, \bar{n}} = \zeta_m \dots \zeta_1 \zeta_{m+1} \dots \zeta_2 \dots \zeta_{n+m-1} \dots \zeta_n \in VB_{m+n}.$$

*Доказательство.* Проведем вычисления, аналогичные тем, что приведены в [35]. Очевидно, что

$$\zeta^2 = 1.$$

По определению естественность симметрии  $\zeta$  означает, что выполняется следующее равенство:

$$\zeta_{\bar{m}, \bar{n}} \cdot \mu(b'_m, b''_n) = \mu(b''_n, b'_m) \cdot \zeta_{\bar{m}, \bar{n}}, \quad b'_m \in VB_m, \quad b''_n \in VB_n.$$

Это эквивалентно выражению

$$\zeta_{\bar{m}, \bar{n}} \cdot \mu(b'_m, b''_n) \cdot \zeta_{\bar{m}, \bar{n}} = \mu(b''_n, b'_m),$$

которое означает, что сопряжение элементом  $\zeta_{\bar{m}, \bar{n}}$  преобразует элемент из  $VB_m \times VB_n$ , канонически лежащий в  $VB_{m+n}$ , в соответствующий элемент из  $VB_n \times VB_m$ . Элементы  $\zeta_{\bar{m}, \bar{n}}$  определяют симметрию для категории, образованной симметрическими группами, так что для проверки естественности  $\zeta$  в  $\mathcal{VB}$  остается ее проверить на образующих  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $m \leq i \leq m+n$ . Рассмотрим следующее сопряжение:

$$\zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_n \sigma_i \zeta_n \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_2 \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m.$$

Если  $i > n$ , то мы используем соотношение

$$\zeta_{i-1} \sigma_i \zeta_{i-1} = \zeta_i \sigma_{i-1} \zeta_i.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_n \sigma_i \zeta_n \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_2 \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m = \\ & = \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_{i-1} \sigma_i \zeta_{i-1} \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_2 \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m = \\ & = \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_{i+1} \sigma_{i-1} \zeta_i \zeta_{i-1} \zeta_{i-1} \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_2 \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m = \cdots = \sigma_{i-n}. \end{aligned}$$

Если  $i < n$ , то мы используем соотношение

$$\zeta_i \sigma_{i+1} \zeta_i = \zeta_{i+1} \sigma_i \zeta_{i+1}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_n \sigma_i \zeta_n \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m = \\ & = \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_i \zeta_{i+m} \cdots \zeta_{i+2} \zeta_{i+1} \sigma_i \zeta_{i+1} \cdots \zeta_{i+m} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m = \\ & = \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_i \zeta_{i+m} \cdots \zeta_{i+2} \zeta_i \sigma_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+2} \cdots \zeta_{i+m} \cdots \zeta_1 \cdots \zeta_m = \\ & = \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{i+1} \zeta_{i+m} \cdots \zeta_{i+2} \sigma_{i+1} \zeta_{i+2} \cdots \zeta_{i+m} \zeta_{i+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{m+1} \zeta_1 \cdots \zeta_m = \cdots = \sigma_{i+m}. \end{aligned}$$

Условия когерентности выполнены тривиальным образом. Для условия В1 из [23] имеем тождественно:

$$\begin{aligned} & \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m-1} \cdots \zeta_n \cdot \zeta_{m+n} \cdots \zeta_{n+1} \zeta_{m+n+1} \cdots \zeta_{n+2} \cdots \zeta_{n+m+q-1} \cdots \zeta_{n+q} = \\ & = \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{n+m+q-1} \cdots \zeta_{n+q}. \end{aligned}$$

Для В2 это также очевидно:

$$\begin{aligned} & \zeta_{m+n} \cdots \zeta_{m+1} \zeta_{m+n+1} \cdots \zeta_{m+2} \cdots \zeta_{n+m+q-1} \cdots \zeta_{m+q} \cdot \zeta_m \cdots \zeta_1 \zeta_{m+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{m+q-1} \cdots \zeta_q = \\ & = \zeta_{m+n} \cdots \zeta_1 \zeta_{m+n+1} \cdots \zeta_2 \cdots \zeta_{m+n+q-1} \cdots \zeta_q. \end{aligned}$$

Предложение доказано.  $\square$

Напомним, что группа *кос-перестановок*, введенная Р. Фенном, Р. Риманьи и К. Рурком [21], задается набором образующих  $\{\xi_i, \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n-1\}$  и следующими соотношениями: соотношения группы кос для образующих  $\sigma_i$  такие же, как в (1.1), а также соотношения

$$\begin{cases} \xi_i^2 = 1, \\ \xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i, & \text{если } |i-j| > 1, \\ \xi_i \xi_{i+1} \xi_i = \xi_{i+1} \xi_i \xi_{i+1}. \end{cases} \quad (1.2a)$$

$$\begin{cases} \sigma_i \xi_j = \xi_j \sigma_i, & \text{если } |i-j| > 1, \\ \xi_i \xi_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \xi_i \xi_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \xi_i = \xi_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \end{cases} \quad (1.2b)$$

Соотношения (1.2a) представляют собой соотношения симметрической группы, а (1.2b) — смешанные соотношения.



Моноид Баеса—Бирман  $SB_n$ , или моноид обобщенных кос, или моноид кос с особенностями [14, 16] определяется как моноид с образующими  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, a_i, i = 1, \dots, n - 1$ , и соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & \text{если } |i - j| > 1, \\ a_i a_j &= a_j a_i, & \text{если } |i - j| > 1, \\ a_i \sigma_j &= \sigma_j a_i, & \text{если } |i - j| \neq 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} a_i &= a_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_{i+1} \sigma_i a_{i+1} &= a_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \\ \sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1. \end{aligned}$$

На рисунках  $\sigma_i$  соответствует канонической образующей группы кос (правосторонний переход), а  $a_i$  представляется пересечением  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й нитей, как показано на рис. 1.7 и 1.10. Более детальную геометрическую интерпретацию моноида Баеса—Бирман можно найти в работе Дж. Бирман [16].

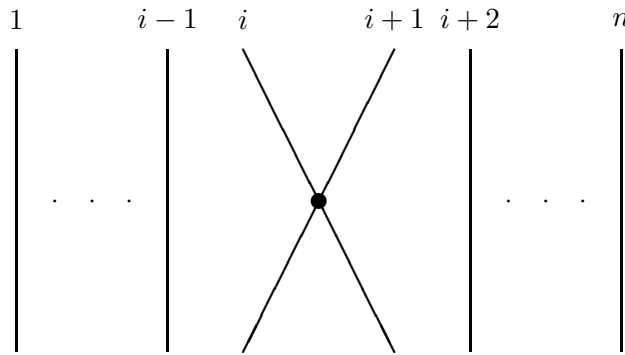


Рис. 1.10

Гомоморфизм  $k_n$  из группы кос  $Br_n$  определяется очевидным образом:

$$k_n : Br_n \rightarrow SB_n.$$

Р. Фенн, Э. Кейман и К. Рурк доказали в [20], что моноид Баеса—Бирман вкладывается в группу, которую они назвали группой кос с особенностями:

$$SB_n \rightarrow SG_n.$$

Это означает, что в  $SG_n$  элементы  $a_i$  становятся обратимыми и все соотношения из  $SB_n$  остаются справедливыми.

Мы видим, что в двух типах смешанных соотношений группы кос-перестановок один появляется из группы виртуальных кос, а другой — из моноида Баеса—Бирман. Сравнивая копредставления группы виртуальных кос и группы кос-перестановок, очевидный гомоморфизм можно определить по формулам

$$p(\zeta_i) = \xi_i, \quad p(\sigma_i) = \sigma_i.$$

Рассматривая группу кос-перестановок как подгруппу группы автоморфизмов свободной группы  $\text{Aut } F_n$ , видим, что гомоморфизм  $p$  определяет представление группы виртуальных кос в  $\text{Aut } F_n$ .

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ

Отобразим образующие группы кос-перестановок  $BP_n$  в следующие элементы группы  $GL_n\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ :

$$\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} E_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\xi_i \mapsto \begin{pmatrix} E_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $E_i$  — единичная  $(i \times i)$ -матрица.

**Предложение 2.1.** *Формулы (2.1) и (2.2) корректно определяют представление группы кос-перестановок в  $GL_n\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ :*

$$r : BP_n \rightarrow GL_n\mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

*Доказательство.* Утверждение предложения следует из свободного дифференциального исчисления Фокса или из непосредственной проверки.  $\square$

Обозначим через  $BuP_n$  образ в  $GL_n\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  группы кос-перестановок, который является также образом группы виртуальных кос. Таким образом, имеем гомоморфизмы

$$VB_n \xrightarrow{p} BP_n \xrightarrow{r} BuP_n.$$

Нам понадобится следующий простой факт о группе  $VB_n$ .

**Предложение 2.2.** *Абелианизации  $VP_n$  и  $BuP_n$ ,  $2 \leq n \leq \infty$ , для обеих групп равны  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$ :*

$$\begin{aligned} BV_n/[VB_n, VB_n] &\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}, \\ BuP_n/[BuP_n, BuP_n] &\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

*Гомоморфизмы  $p$  и  $r$  становятся изоморфизмами после абелианизации.*

*Доказательство.* Добавляя новые соотношения к соотношениям группы виртуальных кос  $VB_n$ :

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \zeta_j \text{ для всех } i \text{ и } j, \\ \sigma_i &= \sigma_j \text{ для всех } i \text{ и } j, \end{aligned}$$

получим эпиморфизм

$$\text{ab}_{VB} : VB_n \rightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}.$$

С другой стороны, рассмотрим свободное произведение симметрической группы и группы кос  $\Sigma_n * Br_n$ , из универсальности получаем, что гомоморфизм абелианизации для группы  $\Sigma_n * Br_n$  может быть определен как композиция

$$\text{ab}_{\Sigma_n * Br_n} : \Sigma_n * Br_n \xrightarrow{\text{ab}_{\Sigma} * \text{ab}_{Br}} \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z},$$

где второе отображение является каноническим эпиморфизмом. Рассмотрим гомоморфизм  $\text{ab}_{\Sigma * Br_n}$  как композицию

$$\Sigma_n * Br_n \longrightarrow VB_n \xrightarrow{\text{ab}_{VB}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z},$$

где первое отображение есть канонический эпиморфизм. Снова используя универсальность, видим, что  $\text{ab}_{VB}$  есть абелианизация  $VB_n$ . Для группы  $VB_n$  утверждение предложения доказано. Определитель матрицы из (2.1) равен  $-t$ , а матрицы из (2.2) равен  $-1$ . Следовательно, имеем эпиморфизм на  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$ . Остаток доказательства получается из первой части.  $\square$

3. ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВИРТУАЛЬНЫХ КОС

Имеется эпиморфизм

$$\alpha_n : VB_n \rightarrow \mathbb{Z},$$

заданный по формулам

$$\xi_i \mapsto 0 \quad \text{для всех } i, \quad \sigma_i \mapsto 1 \quad \text{для всех } i.$$

Из соотношений следует, что имеется эпиморфизм

$$\phi_n : BP_n \rightarrow \Sigma_n,$$

определенный по формулам

$$\phi_n(\zeta_i) = \zeta_i, \quad \phi_n(\sigma_i) = \zeta_i.$$

Его композиция с каноническим вложением  $\nu_n$  группы  $\Sigma_n$  в  $VB_n$  равна тождественному гомоморфизму группы  $\Sigma_n$ . Эти гомоморфизмы порождают отображения классифицирующих пространств  $B\nu_n$  и  $B\phi_n$  такие, что их композиция

$$B\Sigma_n \rightarrow BVB_n \rightarrow B\Sigma_n$$

равна тождественному отображению. Вложение  $j_n$  группы кос в  $VB_n$  порождает отображение классифицирующих пространств

$$BBr_n \rightarrow BVB_n.$$

Композиция  $j_n$  и  $\phi_n$  дает канонический эпиморфизм

$$\tau_n : Br_n \rightarrow \Sigma_n.$$

Обозначим через  $\mathcal{Z}$  строгую моноидальную (тензорную) категорию, объекты которой  $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots\}$  соответствуют целым числам от 0 до бесконечности, а морфизмы определены по формуле

$$\text{hom}(\bar{k}, \bar{l}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = l, \\ \emptyset, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Произведение в  $\mathcal{Z}$  определено на объектах как сумма неотрицательных чисел, а на морфизмах — как сумма целых чисел. Эта категория обладает симметрией, которая равна нулевому элементу для всех  $\bar{m}$  и  $\bar{n}$ . Гомоморфизмы  $\alpha_n$  индуцируют морфизм пермутативных категорий

$$A : \mathcal{BP} \rightarrow \mathcal{Z}$$

и отображения классифицирующих пространств

$$B\alpha_n : BVB_n \rightarrow S^1.$$

Обозначим через  $\gamma$  вложение

$$\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow Br_n$$

группы  $\mathbb{Z}$  в  $Br_n$ , отображающее образующую циклической группы на одну из образующих группы кос  $\sigma_i$ , скажем,  $\sigma_1$ :  $\gamma(1) = \sigma_1$ .

Нам потребуются некоторые определения из теории гомотопий (см., например, [7, 11, 13]). Для пространства  $X$ , имеющего гомотопический тип  $CW$ -комплекса, мы используем символ  $X^+$  в следующем смысле: пространство  $X^+$  есть гомотопически простой  $CW$ -комплекс и существует отображение

$$q : X \rightarrow X^+,$$

индуцирующее изоморфизм в гомологиях. По теореме Уайтхеда  $X^+$ , если существует, то единствен с точностью до гомотопической эквивалентности. Оригинальная плюс-конструкция Д. Квиллена для пространств, у которых коммутант фундаментальной группы есть совершенная подгруппа, является конструктивным способом построить  $X^+$  в этом случае. *Спектр*  $E$  есть последовательность пространств  $E_i$ , гомеоморфных пространству петель  $\Omega E_{i+1}$ . Отображениями спектров являются последовательности  $f_i : D_i \rightarrow E_i$  такие, что  $f_i$  согласуется с  $\Omega f_{i+1}$  при помощи указанного семейства гомеоморфизмов. Пространства, имеющие гомотопический тип пространства  $E_0$  для некоторого спектра  $E$  и отображения из гомотопического класса некоторого  $f_0$  называются *бесконечнократными пространствами петель* и *бесконечнократными петлевыми отображениями*.

Будем опускать индекс  $n$  в обозначениях для групп и гомоморфизмов, когда  $n = \infty$ .

**Теорема 3.1.** *Существуют отображения*

$$\begin{aligned} \psi_V &: B\Sigma \times BBr \rightarrow BVV^+, \\ \beta_V &: \Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty \times S^1 \end{aligned}$$

такие, что отображение  $\psi_V$  становится петлевым отображением после группового пополнения, а отображение  $\beta_V$  есть бесконечнократное петлевое отображение, и оно расщепляется отображением

$$\mathbb{Z} \times B\Sigma^+ \times S^1 \xrightarrow{\text{Id} \times (B\gamma)^+} \mathbb{Z} \times B\Sigma^+ \times BBr^+ \xrightarrow{\text{Id} \times \psi_V^+} \mathbb{Z} \times BVV^+.$$

Слой  $Y$  (бесконечнократное пространство петель) отображения  $\beta_V$  участвует в расщеплении бесконечнократных пространств петель:

$$\Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \simeq \Omega^\infty S^\infty \times S^1 \times Y.$$

То же самое верно и для групп  $BuP_n$ : существуют отображения  $\psi_P$  и  $\beta_P$  с аналогичными свойствами. Эти отображения коммутируют с отображениями  $\psi_V$  и  $\beta_V$ , а также с соответствующими отображениями для группы кос-перестановок с помощью отображений, индуцированными морфизмами  $p$  и  $r$ .

*Доказательство.* Морфизм  $A$  порождает бесконечнократное петлевое отображение [25]

$$\Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \rightarrow S^1.$$

Аналогично, гомоморфизмы  $\phi_n$  порождают морфизм пермутативных категорий

$$\mathcal{VB} \rightarrow \Sigma$$

и соответствующее бесконечнократное петлевое отображение

$$\Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty.$$

Обозначим через  $\beta_V$  следующую композицию:

$$\Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \xrightarrow{\text{diag}} \Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \times \Omega B \left( \prod_{n \geq 0} BVV_n \right) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty \times S^1.$$

Гомоморфизмы  $\nu$  и  $j$  порождают отображение произведений классифицирующих пространств:

$$B\Sigma \times BBr \rightarrow BVV \times BVV.$$

Пространство  $BVV^+$  является  $H$ -пространством, следовательно, существует отображение

$$\mu : BVV^+ \times BVV^+ \rightarrow BVV^+.$$

Рассмотрим теперь композицию  $f$ :

$$B\Sigma \times BBr \xrightarrow{B\nu \times Bj} BVV \times BVV \xrightarrow{q \times q} BVV^+ \times BVV^+ \xrightarrow{\mu} BVV^+,$$

где  $q$  — каноническое отображение в плюс-конструкцию:

$$q : BVV \rightarrow BVV^+.$$

Из конструкции видим, что отображение

$$B\Sigma \xrightarrow{\text{equiv}} B\Sigma \times * \xrightarrow{\text{id} \times \text{incl}} B\Sigma \times BBr \xrightarrow{f} BV B^+$$

гомотопно  $qB\nu$ , а отображение

$$BBr \xrightarrow{\text{equiv}} * \times BBr \xrightarrow{\text{incl} \times \text{id}} B\Sigma \times BBr \xrightarrow{f} BV B^+$$

гомотопно  $qBj$ . Используя тот факт, что  $\mathbb{Z} \times BV B^+$  — пространство петель, немного изменим отображение

$$qBj : BBr \rightarrow BV B^+$$

и определим отображение

$$g : BBr \rightarrow BV B^+$$

по формуле

$$g(b) = (qB\tau(b))^{-1} \cdot qBj(b), \quad b \in BBr.$$

В этом случае композиция

$$B^+ \phi \cdot g : BBr \rightarrow B\Sigma^+$$

гомотопна нулю. Обозначим через  $\psi$  композицию

$$B\Sigma \times BBr \xrightarrow{B\nu \times g} BV B \times BV B \xrightarrow{q \times q} BV B^+ \times BV B^+ \xrightarrow{\mu} BV B^+,$$

а через  $\chi$  — композицию

$$B\Sigma \times S^1 \xrightarrow{\text{id} \times B\gamma} B\Sigma \times BBr \xrightarrow{\psi} BV B^+.$$

Таким образом, композиция

$$B\Sigma \times BBr \xrightarrow{\psi} BV B^+ \xrightarrow{B^+ \phi \times B^+ \alpha} B\Sigma^+ \times S^1$$

гомотопна произведению  $q \times B\alpha$ , а композиция

$$B\Sigma \times S^1 \xrightarrow{\chi} BV B^+ \xrightarrow{B^+ \phi \times B^+ \alpha} B\Sigma^+ \times S^1$$

является каноническим отображением из пространства в его плюс-конструкцию. Это дает следующее расщепление:

$$B\Sigma^+ \times S^1 \xrightarrow{\chi^+} BV B^+ \xrightarrow{B^+ \phi \times B^+ \alpha} B\Sigma^+ \times S^1.$$

Доказательство для групп  $BuP_n$  то же самое. Заметим только, что  $K_1\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  изоморфно группе единиц кольца  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , которое изоморфно  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$ :

$$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]^* \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z},$$

и отображение задается определителем

$$GL(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]^*.$$

Теорема доказана. □

Как следует из предложения 2.1, представление Бурау определяет отображение

$$BV B^+ \rightarrow BGL(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^+.$$

Рассмотрим индуцированный гомоморфизм гомотопических групп

$$\pi_*(BV B^+) \rightarrow \pi_*(BGL(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])^+). \quad (3.1)$$

В левой части (3.1) имеем

$$\pi_*(\Omega^\infty S^\infty \times S^1 \times Y) \cong \pi_*^S \oplus \pi_*(S^1) \oplus \pi_*(Y),$$

где  $\pi_*^S$  — стабильные гомотопические группы сфер, а в правой части

$$K_*\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \cong K_*\mathbb{Z} \oplus K_{*-1}\mathbb{Z}.$$

**Предложение 3.1.** *Отображение (3.1) на уровне  $\pi_1$  порождает эпиморфизм, являющийся изоморфизмом на прямое слагаемое:*

$$\pi_1(\Omega^\infty S^\infty \times S^1) \xrightarrow{\cong} K_1\mathbb{Z} \oplus K_0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Для слагаемого  $\pi_*(\Omega^\infty S^\infty)$  отображение (3.1) пропускается через канонический гомоморфизм

$$\pi_*^S \rightarrow K_*\mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Доказательство непосредственно следует из конструкций.

Отображение (3.2), так же как группы  $K_*\mathbb{Z}$ , изучались в алгебраической  $K$ -теории (см., например, [28, 37]). Ранги групп  $K_*\mathbb{Z}$  были вычислены А. Борелем [17]. Результаты В. Воеводского [36] позволили К. Вайбелю [37] (с некоторыми уточнениями Дж. Рогнеса и К. Вайбеля [30]) закончить определение 2-кручения в группах  $K_*\mathbb{Z}$ .

Д. Квиллен [28] рассматривал коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B\Sigma^+ & \longrightarrow & BO \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL(\mathbb{Z})^+ & \longrightarrow & BGL(\mathbb{R}) \end{array}$$

и использовал результаты Дж. Ф. Адамса о  $J$ -гоморфизме [13]. Если  $i = 8k + 1$  или  $8k + 2$ , то 2-кручение группы  $K_i\mathbb{Z}$  равно  $\mathbb{Z}/2$  и порождено образами элементов Адамса  $\mu_i \in \pi_*^S$ . Если  $i = 8k + 3$ , то 2-подгруппа образа  $J$ -гоморфизма равна  $\mathbb{Z}/8$  и содержится в 2-подгруппе группы  $K_i\mathbb{Z}$ , равной  $\mathbb{Z}/16$ . Если  $i = 8k + 7$ , то 2-подгруппа образа  $J$ -гоморфизма равна  $\mathbb{Z}/w_j$  и изоморфна 2-подгруппе группы  $K_i\mathbb{Z}$ , где  $j = 4(k + 1)$  и  $w_j$  есть наибольшая степень 2, делящая  $4j$ .

#### 4. ОБОБЩЕННЫЕ ГОМОЛОГИИ АРТИНОВЫХ ГРУПП

Напомним, что Г. Сегал установил следующую интересную связь между группой кос из бесконечного числа нитей и итерированными пространствами петель [31]. Пусть  $\Omega_0^2 S^2$  — связная компонента тривиальной петли в двукратном пространстве петель  $\Omega^2 S^2$  и пусть  $K(Br_m, 1)$  обозначает классифицирующее пространство группы кос  $Br_m$ .

**Теорема 4.1.** *Существует отображение  $K(Br_\infty, 1) \rightarrow \Omega_0^2 S^2$ , которое индуцирует изоморфизм в гомологиях для любой группы коэффициентов  $G$  (с тривиальным действием  $Br_\infty$  на  $G$ ):*

$$H_*(Br_\infty, G) \cong H_*(\Omega_0^2 S^2, G).$$

В терминах аппроксимации Мэя  $C_2 S^0$  [10] это может быть выражено в следующем виде.

**Теорема 4.2.** (i)  $C_2 S^0 = \coprod_{i \geq 0} K(Br_i, 1)$ .

(ii) *Естественное отображение  $C_2 S^0 \rightarrow \Omega^2 S^2$  является групповым пополнением.*

Когомологии групп кос  $Br(C_m)$  и  $Br(D_m)$  типов  $C$  и  $D$  были вычислены В. В. Горюновым [8, 9]. Д. Б. Фукс нашел в [12] аналоги теоремы Г. Сегала для групп кос типов  $C$  и  $D$ : плюс-конструкция Квиллена пространства  $K(Br(C_\infty), 1)$  эквивалентна  $\Omega^2 S^3 \times \Omega S^2$ , а плюс-конструкция пространства  $K(Br(D_\infty), 1)$  эквивалентна  $\Omega^2 S^3 \times S^3\{2\}$ , где  $S^3\{2\}$  — гомотопический слой отображения степени 2 из  $S^3$  в  $S^3$ .

Группа кос типа  $C$  может рассматриваться как группа кос в полнотории. Более общие объекты — группы кос в телах с ручками — изучались А. Б. Сосинским [32] и В. В. Вершининым [5–7], который доказал, в частности, аналог теоремы Г. Сегала для таких групп. А именно, плюс-конструкция Квиллена классифицирующего пространства группы кос из бесконечного числа нитей в теле с ручками рода  $g$  эквивалентна следующему произведению пространств петель над сферами:

$$BBr_\infty^g \simeq \Omega^2 S^3 \times \Omega S^2 \times \cdots \times \Omega S^2,$$

где число множителей в произведении равно роду  $g$ . Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BBr_{\infty}^{+} & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2 S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ BBr_{\infty}^{g+} & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2 S^3 \times \Omega S^2 \times \dots \times \Omega S^2 \end{array},$$

в которой левая стрелка индуцирована каноническим вложением классической группы кос в группу кос в теле с ручками, а правая стрелка является вложением множителя, коммутативна.

Пусть  $K(n)_*(\cdot)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — периодические  $K$ -теории Моравы. А. Ямагучи [38] изучал эти теории для пространств  $\Omega^2 S^{2r+1}$  при  $p \neq 2$  (если  $p = 2$ , то  $K$ -теории Моравы не коммутативны). Пусть  $E(a, b, \dots)$  — внешняя алгебра над  $\mathbb{F}_p$  от образующих  $a, b, \dots$  и  $T_m(x, y, \dots)$  — срезанная алгебра многочленов высоты  $p^m$  над  $\mathbb{F}_p$  от образующих  $x, y, \dots$ . Тогда результаты А. Ямагучи для  $K(n)_*(\cdot)$  пространств  $\Omega^2 S^3$  и  $C_2 S^0$  можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 4.3.** Для простых  $p > 2$  имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} K(n)_*(\Omega^2 S^3) &\cong K(n)_* \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots), \\ K(n)_*(C_2 S^0) &\cong K(n)_* \otimes \mathbb{F}_p[u] \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots) \end{aligned} \quad (4.1)$$

как изоморфизмы  $K(n)_*$ -алгебр, где  $\deg x_i = 2p^i - 1$ ,  $\deg y_i = 2p^i - 2$ ,  $\deg u = 0$ .

Д. Равенел [29] описал аналогичным образом (с некоторой небольшой неопределенностью) гомологии Брауна—Петерсона пространств  $\Omega^2 S^{2r+1}$ . В случае пространства  $\Omega^2 S^3$  это описание имеет следующий вид.

**Теорема 4.4.** Для всех простых  $p$  имеют место изоморфизмы

$$BP_*(\Omega^2 S^3) \cong BP_* \otimes E(x_{(0)}) \otimes \mathbb{F}_p[y_{(1)}, y_{(2)}, \dots] / (\varrho_1, \varrho_2, \dots)$$

как изоморфизмы  $BP_*$ -алгебр, где  $\deg x_{(0)} = 1$ ,  $\deg y_{(i)} = 2p^i - 2$  и

$$\varrho_i \equiv \sum_{0 \leq j \leq i} v_j y_{(i-j)}^{p^j} \pmod{I^2},$$

где  $v_j$  — стандартные образующие кольца  $BP_*$ ,  $v_0 = p$  и  $I = (p, v_1, v_2, \dots)$ .

Ниже приводятся аналогичные факты для обобщений групп кос.

**Теорема 4.5.**  $K$ -теория Моравы обобщенной группы кос  $Br(D_{\infty})$  изоморфна  $K$ -теории Моравы классической группы кос из бесконечного числа нитей и, таким образом, задается формулой (4.1).  $K$ -теория Моравы группы кос из бесконечного числа нитей в полнотории рода  $g$  задается формулой

$$K(n)_*(Br_{\infty}^g) \cong K(n)_* \otimes \mathbb{F}_p[z_1, \dots, z_g] \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots)$$

как  $K(n)_*$ -алгебра, где  $\deg x_i = 2p^i - 1$ ,  $\deg y_i = 2p^i - 2$ ,  $\deg z_i = 1$ . Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(n)_*(Br_{\infty}) & \xrightarrow{\sim} & K(n)_* \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(n)_*(Br_{\infty}^g) & \xrightarrow{\sim} & K(n)_* \otimes \mathbb{F}_p[z_1, \dots, z_g] \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots) \end{array}, \quad (4.2)$$

в которой левая стрелка индуцирована каноническим вложением классической группы кос в группу кос в теле с ручками, а правая стрелка является очевидным алгебраическим вложением, коммутативна.

*Доказательство.* Утверждение легко следует из формулы Кюннета для  $K$ -теории Моравы и того факта, что  $\widetilde{K}(n)_*(S^3\{2\}) = 0$  при  $p > 2$ .  $\square$

Перейдем теперь к гомологиям Брауна—Петерсона.

**Теорема 4.6.** Теория гомологий Брауна—Петерсона обобщенной группы кос  $Br(D_\infty)$  при  $p > 2$  изоморфна теории гомологий Брауна—Петерсона классической групп кос из бесконечного числа нитей  $u$ , таким образом, задается формулой из теоремы 4.4. Теория гомологий Брауна—Петерсона группы кос из бесконечного числа нитей в полнотории рода  $g$  задается изоморфизмом

$$BP * (Br_\infty^g) \cong BP_* \otimes \mathbb{F}_p[z_1, \dots, z_g] \otimes E(x_{(0)}) \otimes \mathbb{F}_p[y_{(1)}, y_{(2)}, \dots] / (\varrho_1, \varrho_2, \dots)$$

$BP_*$ -алгебр, где  $\deg x_{(0)} = 1$ ,  $\deg y_{(i)} = 2p^i - 2$ , а  $\varrho_i$  такие же, как в теореме 4.4. Справедлив также аналог диаграммы (4.2).

*Доказательство.* Мы следуем идеям доказательства Д. Равенела [29]. Рассмотрим классическую спектральную последовательность Адамса, сходящуюся к

$$\pi_*(BP \wedge ((\Omega S^2)^{\times g} \times \Omega^2 S^3)).$$

Ее член  $E_2$  изоморфен

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}(H^*(BP \wedge ((\Omega S^2)^{\times g} \times \Omega^2 S^3)), \mathbb{F}_p),$$

где  $\mathcal{A}$  — алгебра Стиррода  $\text{mod } p$ , а гомологии рассматриваются с коэффициентами в  $\mathbb{F}_p$ . Рассмотрим гомотопическое разложение в прямое произведение

$$\Omega S^2 \simeq S^1 \times \Omega S^3,$$

а также стабильное расщепление

$$\Omega S^3 \simeq \bigvee_{j=1}^{\infty} S^{2j}.$$

Эти расщепления ведут к утверждению, что рассматриваемая спектральная последовательность Адамса, начиная с члена  $E_2$ , расщепляется в букет спектральных последовательностей Адамса (с соответствующими надстройками), сходящихся к

$$\pi_*(BP \wedge (\Omega^2 S^3)).$$

Эта последняя спектральная последовательность была исследована Д. Равенелом [29], который доказал, используя расщепление Снэйта пространства  $\Omega^2 S^3$ , что ее дифференциалы тривиальны, и получил структуру  $BP_*$ -модуля  $BP_*(\Omega^2 S^3)$ , описанную в теореме 4.4. Наш результат теперь следует из этих рассуждений.  $\square$

Определим весовую функцию  $w$  на модуле  $K(n)_*(C_2 S^0)$ , описанном в теореме 4.3. Поставим в соответствие мономам от  $u$ ,  $x_i$  и  $y_j$  веса по формулам  $w(u) = 1$ ,  $w(x_i) = 2p^i$ ,  $w(y_j) = 2p^j$  и  $w(v_n^k ab) = w(a) + w(b)$ .

**Теорема 4.7.** Приведенная  $K$ -теория Моравы  $\widetilde{K}(n)_*(Br(C_m))$  обобщенной группы кос типа  $C_m$  изоморфна  $K(n)_*$ -подмодулю модуля  $K(n)_*(C_2 S^0)$ , порожденному мономерами от  $u$ ,  $x_i$  и  $y_j$  веса, меньшего или равного  $t$ .

*Доказательство.* Результат немедленно следует из аналогичного факта для классических кос [38] и конструкции классифицирующего пространства для группы кос типа  $C$ , данной в [8, 9].  $\square$



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамс Дж.* Бесконечнократные пространства петель. — М.: Мир, 1982.
2. *Арнольд В. И.* О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1970. — 21. — С. 27–46.
3. *Арнольд В. И.* Топологические инварианты алгебраических функций, II// Функци. анал. прилож. — 1970. — 4, № 2. — С. 1–9.
4. *Брото К., Вершинин В. В.* Об обобщенных гомологиях артиновых групп/ «Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы, V»// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2000. — 266. — С. 7–12.
5. *Вершинин В. В.* Обобщения кос с гомологической точки зрения// Алгебра, геометрия, анализ и мат. физика/ 10 Сиб. мат. школа. — Новосибирск. — С. 40–62.
6. *Вершинин В. В.* О группах кос в телах с ручками// Сиб. мат. ж. — 1998. — 39, № 4. — С. 755–764.
7. *Вершинин В. В.* Группы кос и пространства петель// Усп. мат. наук. — 1999. — 54, № 2. — С. 3–84.
8. *Горюнов В. В.* Когомологии групп кос серий  $C$  и  $D$  и некоторые стратификации// Функци. анал. прилож. — 1978. — 12, № 2. — С. 76–77.
9. *Горюнов В. В.* Когомологии групп кос серий  $C$  и  $D$ // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1981. — 42. — С. 234–242.
10. *Мэй Дж. П.* Геометрия итерированных пространств петель/ Дополнение к книге: *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. — М.: Мир, 1977.
11. *Мэй Дж. П.* Теория бесконечнократных пространств петель// Усп. мат. наук. — 1981. — 36, № 6. — С. 137–195.
12. *Фукс Д. Б.* Квиленизация и бордизмы// Функци. анал. прилож. — 1974. — 8, № 1. — С. 36–42.
13. *Adams J. F.* On the groups  $J(X)$ , IV// Topology. — 5. — С. 21–71.
14. *Baez J. C.* Link invariants of finite type and perturbation theory// Lett. Math. Phys. — 1992. — 26. — С. 43–51.
15. *Birman J. S.* Braids, links, and mapping class groups// Ann. Math. Stud. — Princeton, 1975. — 82.
16. *Birman J. S.* New points of view in knot theory// Bull. Amer. Math. Soc. — 1993. — 28, № 2. — С. 253–387.
17. *Borel A.* Cohomologie réelle stable de groupes  $S$ -arithmétiques classiques// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B. — 1972. — 274. — С. A1700–A1702.
18. *Burau W.* Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen// Abh. Math. Semin. Hanischen Univ. — 1936. — 11. — С. 171–178.
19. *Cohen F.* Artin's braid groups, classical homotopy theory, and other curiosities// Braids. Contemp. Math. — 1988. — 78. — С. 167–206.
20. *Fenn R., Keyman E., Rourke C.* The singular braid monoid embeds in a group/ Preprint. — 1996.
21. *Fenn R., Rimányi R., Rourke C.* The braid-permutation group// Topology. — 1997. — 36, № 1. — С. 123–135.
22. *Goussarov M., Polyak M., Viro O.* Finite-type invariants of classical and virtual knots/ Preprint. — 1998. <http://xxx.lanl.gov/math.GT/9810073>
23. *Joyal A., Street R.* Braided tensor categories// Adv. Math. — 1993. — 102. — С. 20–78.
24. *Kauffman L.* Virtual knot theory// Eur. J. Comb. — 1999. — 20, № 7. — С. 663–690.
25. *May J. P.*  $E_\infty$  spaces, group completions, and permutative categories/ London Math. Soc. Lecture Notes Ser.// New developments in topology. — Cambridge, 1974. — 11. — С. 61–93.
26. *Ossa E, Vershinin V. V.* Coxeter operads and splitting of monads// Proc. conference on low-dimensional topology and combinatorial group theory. — Chelyabinsk, 1999.
27. *Polyak M., Viro O.* Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants// Int. Math. Res. Not. — 1994. — 11. — С. 445–453.
28. *Quillen D.* Letter from Quillen to Milnor on  $\text{Im}(\pi_i^s \rightarrow K_i Z)$ // Lect. Notes Math. — 1976. — 551. — С. 182–188.
29. *Ravenel D.* The homology and Morava  $K$ -theory of  $\Omega^2 SU(n)$ // Forum Math. — 1993. — 5, № 1. — С. 1–21.
30. *Rognes J., Weibel C.* Two-primary algebraic  $K$ -theory of rings of integers in number fields (with an appendix by M. Kolster)// J. Amer. Math. Soc. — 2000. — 13, № 1. — С. 1–54.
31. *Segal G. B.* Configuration spaces and iterated loop spaces// Invent. Math. — 1973. — 21. — С. 213–221.
32. *Sossinsky A. B.* Preparation theorems for isotopy invariants of links in 3-manifolds// Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — 1510. — С. 354–362.
33. *Vershinin V. V.* On homological properties of singular braids// Trans. Amer. Math. Soc. — 1998. — 350, № 6. — С. 2431–2455.

34. *Vershinin V. V.* Thom spectra of generalized braid groups// J. London Math. Soc. — 2000. — 61, № 1. — С. 245–258.
35. *Vershinin V. V.* On homology of virtual braids and Burau representation// J. Knot Theory Ramifications (to appear). <http://xxx.lanl.gov/abs/math.GT/9904089>.
36. *Voevodsky V.* The Milnor conjecture/ Preprint МРІМ. — 1996.
37. *Weibel C.* The 2-torsion in the  $K$ -theory of the Integers// C. R. Acad. Sci. Sér. I. — 1997. — 324. — С. 615–620.
38. *Yamaguchi A.* Morava  $K$ -theory of double loop spaces of spheres// Math. Z. — 1988. — 199, № 4. — С. 511–523.

В. В. Вершинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

E-mail: [vershmath.nsk.su](mailto:vershmath.nsk.su)

## ДИАГРАММНЫЕ ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ И ИНТЕГРАЛ КОНЦЕВИЧА

© 2004 г. С. Д. ТЮРИНА

Аннотация. Работа посвящена решению проблемы интегрирования старших производных инвариантов конечного типа (весовых систем) до настоящих инвариантов, определенных на пространстве узлов.

### СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Глава 1. Топологические инварианты узлов . . . . .                                    | 108 |
| 1. Краткая история вопроса и обсуждение результатов . . . . .                         | 108 |
| 2. Узлы, сингулярные узлы и диаграммы . . . . .                                       | 109 |
| 2.1. Изотопическая эквивалентность узлов . . . . .                                    | 109 |
| 2.2. Диаграммы узлов . . . . .  | 110 |
| 2.3. Типы узлов . . . . .   | 111 |
| 2.4. Диаграммы Гаусса . . . . .   | 112 |
| 2.5. Диаграммы Гаусса зеркального и инверсного отображений узла . . . . .             | 113 |
| 2.6. Движения Рейдемейстера на языке диаграмм Гаусса . . . . .                        | 114 |
| 2.7. Хордовые диаграммы . . . . .   | 115 |
| 3. Инварианты узлов . . . . .   | 118 |
| 3.1. Инварианты узлов конечного типа . . . . .  | 118 |
| 3.2. Инварианты Васильева . . . . .   | 120 |
| 3.3. Весовые системы . . . . .  | 120 |
| 4. Примеры вычисления инвариантов . . . . .   | 122 |
| 4.1. Инварианты нулевого и первого порядков . . . . .                                 | 122 |
| 4.2. Инварианты второго порядка . . . . .   | 122 |
| 4.3. Инварианты третьего порядка . . . . .  | 123 |
| 5. Модуль Васильева . . . . .   | 124 |
| 5.1. Двойственность пространств инвариантов и сингулярных узлов . . . . .             | 124 |
| 5.2. Разложения инвариантов в модулях Васильева . . . . .                             | 125 |
| 5.3. Теорема разложения . . . . .   | 129 |
| Глава 2. Формулы типа Ланна и Виро—Поляка для инвариантов конечного порядка . . . . . | 132 |
| 6. Инварианты Васильева как производные . . . . .                                     | 132 |
| 6.1. Аналог теоремы Лейбница для инвариантов конечного типа . . . . .                 | 132 |
| 6.2. Аналог формулы Лагранжа . . . . .  | 133 |
| 6.3. Интегрирование . . . . .   | 133 |
| 6.4. Координаты на узле . . . . .   | 134 |
| 6.5. Разложение инварианта в ряд Тейлора . . . . .                                    | 134 |
| 7. Формулы Ланна . . . . .  | 136 |
| 7.1. Формулы Ланна для инвариантов нулевого и первого порядков . . . . .              | 136 |
| 7.2. Формулы Ланна для инвариантов второго и третьего порядков . . . . .              | 136 |
| 8. Формулы Виро—Поляка . . . . .  | 137 |
| 8.1. Формулы Виро—Поляка для инварианта Васильева второго порядка . . . . .           | 137 |
| 8.2. Формулы Виро—Поляка для инварианта Васильева третьего порядка . . . . .          | 137 |
| 8.3. Новая формула инварианта Васильева третьего порядка . . . . .                    | 138 |
| 9. Диаграммные формулы для инвариантов 4 порядка . . . . .                            | 139 |
| 9.1. Формула Виро—Поляка для инварианта Васильева четвертого порядка . . . . .        | 139 |
| 9.2. Анализ формулы Виро—Поляка для инварианта Васильева четвертого порядка . . . . . | 140 |
| 9.3. Новая формула для инвариантов Васильева четвертого порядка . . . . .             | 140 |

|  |     |
|--|-----|
| 10. Инварианты Васильева для торических узлов . . . . .                    | 142 |
| Глава 3. Интеграл Концевича и вычисление инвариантов . . . . .             | 144 |
| 11. Интеграл Концевича . . . . .   | 144 |
| 11.1. Определение интеграла Концевича . . . . .                            | 144 |
| 11.2. Сходимость интеграла . . . . .                                       | 145 |
| 11.3. Универсальный инвариант Васильева . . . . .                          | 146 |
| 12. Интеграл Концевича для танглов . . . . .                               | 147 |
| 12.1. Определение тангла . . . . .   | 147 |
| 12.2. Хордовые диаграммы танглов . . . . .                                 | 147 |
| 12.3. Разложение узлов в композицию элементарных танглов . . . . .         | 148 |
| 12.4. Вычисление интеграла для элементарных танглов . . . . .              | 149 |
| 12.5. Сокращение количества слагаемых под знаком интеграла . . . . .       | 150 |
| 13. Вычисление интеграла Концевича для узлов . . . . .                     | 151 |
| 13.1. Вычисление интеграла Концевича для композиции танглов . . . . .      | 151 |
| 13.2. Вычисление интеграла Концевича для $\cup$ -узла . . . . .            | 152 |
| 13.3. Вычисление интеграла Концевича для трилистника и восьмерки . . . . . | 154 |
| Список литературы . . . . .  | 156 |

## ВВЕДЕНИЕ

Современная теория инвариантов узлов восходит к работе Дж. Александера [13], в которой впервые был построен полиномиальный инвариант узла. Для его определения было разработано свободное дифференциальное исчисление Фокса [4].

Спустя 60 лет появилось много работ (см., например, [34, 35, 38, 45, 61]) с аналогичными конструкциями. В 1984 г. В. Джонс построил полиномиальный инвариант  $V_L(q)$ , называемый теперь полиномом Джонса; он возник из теории операторных алгебр и связан с II-факторами фон Ноймана.

Следующий этап в теории инвариантов узлов связан с построением инвариантов конечного типа. В 1990 г. В. А. Васильев [54, 55], используя дискретные производные для распространения инвариантов на пространство сингулярных узлов, построил инварианты, которые начиная с некоторого момента имеют нулевые производные (т.е. ведут себя как многочлены). Эти инварианты теперь называются инвариантами Васильева. Их старшие производные (или весовые системы) связаны с хордовыми диаграммами и, в отличие от самих инвариантов, имеют простое комбинаторное описание. Возникает задача восстановления инвариантов по их весовым системам, т.е. задача интегрирования.

Теорема о восстановлении весовой системы произвольного порядка до инварианта того же порядка была доказана в 1993 г. М. Концевичем (см. [39]), который дал выражение для всех инвариантов Васильева в виде кратных интегралов по соответствующим конфигурационным пространствам. Эти формулы являются обобщением электродинамической формулы Гаусса, выражающей коэффициенты зацепления двух замкнутых кривых в трехмерном пространстве в виде двойного интеграла.

Таким образом, интеграл Концевича является интегралом в двух смыслах: во-первых, с помощью него весовые системы интегрируются до инвариантов, а во-вторых, его слагаемые являются обычными интегралами от дифференциальных форм вида  $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$ .

После решения принципиальных вопросов, связанных с описанием пространств весовых систем и возможности их интегрирования, возникла задача эффективного вычисления инвариантов по простым исходным данным, например, по координатам на диаграмме узла.

Первые явные формулы были построены Ж. Ланном [40], который, используя идею разложения инварианта в ряд Тейлора, получил выражения для базисных инвариантов второго и третьего порядков.

Затем О. Виро и М. Поляк дали комбинаторно-диаграммную трактовку этого метода [48], а М. Гусаров в 1998 г. доказал теорему о существовании представления любого инварианта в виде стрелочно-хордового полинома, которая является аналогом теоремы Ланна о разложении инварианта в ряд Тейлора.

Цель данной работы — опираясь на идеи дифференциального и интегрального исчисления и применяя их к теории инвариантов узлов, исследовать пространство инвариантов Васильева конечных порядков, построить явные формулы для вычисления инвариантов четвертого порядка и установить связь коэффициентов при весовых функциях в этих формулах с коэффициентами хордовых диаграмм в интеграле Концевича, вычислить соответствующие слагаемые ряда Концевича, определить критерий целочисленности инвариантов четвертого порядка, получить формулы для произвольных инвариантов до 4 порядка включительно.

Получена формула для вычисления двух базисных инвариантов четвертого порядка. Установлено, что формула Виро—Поляка для третьего базисного инварианта четвертого порядка не всегда дает правильные результаты. Подробно разобран соответствующий контрпример для узла  $5_1$ . Показано, что при определенных дополнительных условиях инварианты произвольного порядка получаются с помощью формул типа Ланна. Эти формулы используются для анализа ряда Концевича.

Глава 1 содержит ряд предварительных сведений (необходимые определения, утверждения), обобщение некоторых известных результатов. Раздел 2 посвящен краткому изложению истории вопроса и обсуждению полученных ранее результатов и нерешенных проблем теории узлов. В разделе 2 описаны основные определения и свойства узлов, зацеплений, сингулярных узлов, соответствующих им диаграмм Гаусса и хордовых диаграмм.

В разделе 3 рассматривается пространство хордовых диаграмм, весовых функций (систем) на нем, дается определение инвариантов конечного типа (инвариантов Васильева), а в разделе 4 — примеры вычисления этих инвариантов. В разделе 5 вводится модуль Васильева (объект, двойственный пространству инвариантов Васильева). Доказывается формула разложения произвольного инварианта порядка не выше 4 по базисным инвариантам и приводится формула разложения узла в модуле Васильева произвольного порядка.

Глава 2 посвящена исследованию следующей проблемы: как проинтегрировать данную весовую систему, чтобы получить инвариант конечного типа? В разделе 6 инварианты Васильева определяются через дискретные производные и обсуждаются их основные свойства. Затем вводится понятие интегрирования весовой системы.

В разделе 7 описаны явные формулы для инвариантов порядков 2 и 3, полученные Ж. Ланном [40]. Обсуждается аналогичная формула для инвариантов 4 порядка. В разделе 8 приводятся стрелочные формулы Виро—Поляка для этих инвариантов, а также доказывается новая формула для инварианта порядка 3 с целыми коэффициентами.

В разделе 9 получена новая формула для двух (из трех) базисных инвариантов 4 порядка. Кроме того, показано, что известная формула Виро—Поляка для третьего базисного инварианта порядка 4 некорректна, и подробно рассмотрен соответствующий контрпример — узел  $5_1$ .

В разделе 10 вычислены все инварианты Васильева для торических узлов типа  $(2, n)$ ,  $n = 2k + 1$ ,  $k \geq 1$ .

В главе 3 вычисляются все слагаемые интеграла Концевича до 4 порядка включительно. В разделах 11 и 12 даются определения интеграла Концевича для узлов и танглов.

Раздел 13 посвящен вычислению интеграла Концевича для узла  $\cup$  с четырьмя критическими точками (см., например, [2]). Ряд Концевича до 4 порядка для этого вычисляется узла тремя различными способами: прямым вычислением кратных интегралов, с использованием гипотезы Д. Бар-Натана и с использованием монодромии уравнения Книжника—Замолодчикова для трех точек, когда его коэффициенты трактуются как хордовые диаграммы на трех струнах и используется замыкание этих диаграмм. Исследуются также разложения узлов на элементарные танглы, вычисляются интегралы Концевича от этих танглов, их композиций и простейших узлов (тривиального, трилистника, восьмерки).

## ГЛАВА 1

## ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ

## 1. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прародителем теории узлов является К. Ф. Гаусс, который вывел замечательную интегральную формулу для числа оборотов одной замкнутой кривой в пространстве вокруг другой, а также оставил в своих записных книжках многочисленные рисунки узлов без комментариев. Систематическое развитие теории узлов началось с 1880-х годов, когда несколько математиков и физиков с большим энтузиазмом занялись составлением таблиц узлов под влиянием идей знаменитого физика У. Томпсона (впоследствии известного как лорд Кельвин) о том, что узлы должны взаимно однозначно соответствовать химическим элементам.

Приведем формулировки нескольких знаменитых проблем теории узлов. Некоторые из них не поддавались решению в течение десятков лет и были решены сравнительно недавно, а некоторые открыты до сих пор.

**Решенные проблемы.**

1. Существуют ли необратимые узлы? (Решена положительно в 1962 г. (Н. F. Trotter, [52]).
2. Определяется ли класс эквивалентности неориентированного узла  $K$  топологическим типом его дополнения  $\mathbb{R}^3 - K$ ? (Решена положительно в 1989 г. (С. Gordon, J. Luecke, [30]).
3. В конце прошлого века П. Тейт сформулировал несколько знаменитых гипотез, две из которых совсем недавно были доказаны, а одна опровергнута. В первых двух гипотезах речь идет об альтернированных диаграммах (таких, у которых при движении по узлу проходы и переходы чередуются).

**Гипотеза 1.** Редуцированная альтернированная диаграмма имеет наименьшее возможное число точек самопересечения среди всех диаграмм данного узла. Эта гипотеза доказана независимо в [37, 45, 51]).

**Гипотеза 2** (Tait flying conjecture). От одной альтернированной диаграммы узла к другой можно перейти последовательностью переворачиваний. Эта гипотеза доказана в [44].

**Гипотеза 3.** Узел, для которого минимальное число пересечений нечетно, всегда зеркален, т.е. эквивалентен своему зеркальному отражению. Эта гипотеза просуществовала 104 года и была опровергнута только в 1994 году М. Тислтуэйтом [32].

4. Существует ли алгоритм выявления эквивалентности двух данных узлов по их диаграммам? Проблема решена положительно. В последние годы изобретено несколько таких алгоритмов (С. В. Матвеев, Дж. Бирман, Е. Фоминых, И. Дынников). Надо только отметить, что полное доказательство правильности алгоритма проведено лишь для одного из них, самого трудоемкого и имеющего чисто теоретическое значение. Подробности см. в [6].

**Нерешенные проблемы.**

1. Как распознать обратимость узла?
2. Пусть  $C(n)$  — число различных простых неориентированных узлов с минимальным числом пересечений  $n$ . Как ведет себя функция  $C(n)$  с ростом  $n$ ? Про эту функцию очень мало известно. Например, до сих пор нет строгого доказательства, что  $C(n)$  монотонно возрастает с ростом  $n$ , хотя этот факт кажется очевидным. На компьютере найдены значения  $C(n)$  для  $n < 16$  (последние три значения нашли в 1997 г. Хост, Тислтуэйт и Уикс [33]):

|        |   |   |   |   |   |    |    |     |     |      |      |       |        |         |
|--------|---|---|---|---|---|----|----|-----|-----|------|------|-------|--------|---------|
| $n$    | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10  | 11  | 12   | 13   | 14    | 15     | 16      |
| $C(n)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 7 | 21 | 49 | 165 | 552 | 2176 | 9988 | 46972 | 253293 | 1388705 |

3. Если некоторый узел имеет две диаграммы  $K_+$  и  $K_-$ , которые получаются друг из друга заменой одного прохода на переход, то верно ли, что удаление этой двойной точки приводит к распадению узла на две компоненты связности?
4. Верно ли, что число пересечений аддитивно относительно связной суммы узлов:  $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ ?
5. Существует ли нетривиальный узел, полином Джонса которого равен 1, т.е. полиному Джонса тривиального узла? Доказано, что пример, если он существует, должен быть достаточно сложным: число пересечений такого узла не меньше 18 (см. [26]).
6. Найти ограничение сверху на число перестроек Рейдемейстера, переводящих одну из двух данных диаграмм узла в другую.
7. Найти критерий простоты узла в терминах его диаграммы.
8. Является ли универсальный инвариант Васильева полным инвариантом (ориентированного) узла? Иными словами, верно ли, что если два узла  $K_1$  и  $K_2$  различны, то найдется инвариант конечного порядка  $v$  такой, что  $v(K_1) \neq v(K_2)$ ?
9. Верно ли, что инварианты Васильева различают обращение узла? Иными словами, существует ли пара взаимно обратных неэквивалентных узлов  $K, K'$  и такой инвариант Васильева  $v$ , что  $v(K) \neq v(K')$ ? Этот вопрос допускает следующую комбинаторную формулировку: существует ли хордовая диаграмма, которая неэквивалентна своему зеркальному отражению по модулю 4-членных соотношений? Известно, что такая диаграмма, если она существует, должна иметь степень не меньше 13.

Настоящая глава содержит ряд предварительных сведений (необходимые определения, утверждения), обобщение некоторых известных результатов. Здесь приведены определения и описаны основные свойства узлов, сингулярных узлов, соответствующих им диаграмм Гаусса и хордовых диаграмм; рассмотрены пространства хордовых диаграмм, весовых функций на нем; дано определение инвариантов конечного типа, разобраны примеры их вычисления; введено понятие модуля Васильева, доказаны теоремы разложения узлов в модулях Васильева второго, третьего и четвертого порядков и получены их обобщения на произвольный порядок.

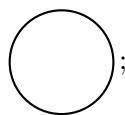
## 2. Узлы, сингулярные узлы и диаграммы

**2.1. Изотопическая эквивалентность узлов.** Узел  $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — это гладкое вложение окружности  $S^1$  в пространство  $\mathbb{R}^3$ , т.е. бесконечно дифференцируемое отображение  $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которое переводит разные точки окружности в разные точки пространства, причем вектор скорости  $K'(u)$  не обращается в нуль ни при каком  $u \in S^1$ .

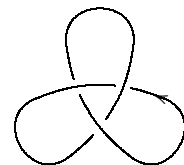
Если выбрать систему координат в пространстве, то узел можно задать набором из трех гладких периодических функций  $x(u), y(u), z(u)$ .

### Пример 1.

$$\begin{cases} x = \cos u, \\ y = \sin u, \\ z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = (2 + \cos 3u) \cos 2u, \\ y = (2 + \cos 3u) \sin 2u, \\ z = \sin 3u \end{cases}$$



Мы будем всегда считать узлы ориентированными, считая положительным направлением обхода узла то, которое соответствует вращению против часовой стрелки на параметризующей окружности  $S^1 = \{(\cos u, \sin u) \mid u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Кроме того, будем рассматривать ориентированные *сингулярные узлы*  $K_n^{\text{sing}} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — погружения, допускающие конечное число  $n$  двойных точек трансверсального самопересечения.

Гладкая замкнутая кривая, рассматриваемая сама по себе, может служить предметом дифференциальной геометрии, но не топологии. Топологическое понятие узла подразумевает, что узлы рассматриваются с точностью до естественного отношения эквивалентности, моделирующего те преобразования, которые можно физически проделать с куском веревки, концы которой связаны.

Отображения  $f$  и  $g$  *гомотопны*, если существует семейство непрерывных отображений  $\psi_t : X \rightarrow Y$  (непрерывно зависящих от  $t$  и  $x \in X$ ), «соединяющее» отображения  $f$  и  $g$ , т.е. в начальный момент деформации  $t = 0$  мы имеем  $\psi_0 = f$ , а в конечный момент деформации  $t = 1$  имеем  $\psi_1 = g$ .

Гомотопия узла определяет отображение  $F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданное формулой  $\psi_t(x) = F(x, t)$ . Два гладких вложения  $K_1, K_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  называются *изотопными* (или гладко изотопными), если существует такая гладкая гомотопия  $F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  между отображениями  $K_1$  и  $K_2$ , что отображение  $\psi_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , определенное по формуле  $F(x, t) = \psi_t(x)$ , является для каждого  $t \in [0, 1]$  гладким вложением. Другими словами, два вложения изотопны, если их можно деформировать друг в друга в классе гладких вложений.

Можно дать другое определение эквивалентности узлов.

Два узла назовем *эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм пространства  $\mathbb{R}^3$  в себя, переводящий один узел в другой.

Два определения эквивалентны в силу теоремы об изотопности гомеоморфизма  $\mathbb{R}^3$  тождественному гомеоморфизму.

Таким образом, два узла являются эквивалентными, если они *изотопны*.

Аналогично, два погружения окружности  $S^1$  в пространство  $\mathbb{R}^3$  называются эквивалентными, если их можно гладко деформировать друг в друга в классе погружений, т.е. если существует гладкая гомотопия  $\psi_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  такая, что каждое  $\psi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , является погружением.

Два сингулярных узла являются эквивалентными, если они гомотопны в классе погружений.

Итак, два узла называются изотопными, если их можно деформировать друг в друга в классе гладких вложений. Два сингулярных узла называются эквивалентными, если их можно гладко деформировать друг в друга в классе погружений.

Обозначим множества изотопических классов (классов эквивалентности) узлов через  $\mathcal{K}$  и сингулярных узлов через  $\mathcal{K}^{\text{sing}}$ .

Заметим, что  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\text{sing}}$ , т.е.  $K_n^{\text{sing}}$  при  $n = 0$  — обычный узел.

**2.2. Диаграммы узлов.** В принципе, любой узел можно задать явными формулами  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  в виде тригонометрических многочленов. Пример представления в таком виде одного узла (трилистника) был приведен выше (см. пример 1). Тот факт, что для любого узла найдется эквивалентный ему тригонометрический, вытекает из того, что любые периодические функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  можно с любой степенью точности приблизить тригонометрическими многочленами, т.е. комбинациями  $\sin kt$  и  $\cos kt$ .

Надо, однако, заметить, что не существует никакого разумного способа распознать эквивалентность или доказать неэквивалентность узлов, заданных явными формулами. Все способы задания узлов, с которыми можно реально работать, имеют комбинаторный характер. В этом разделе мы рассмотрим (классические) диаграммы узлов.

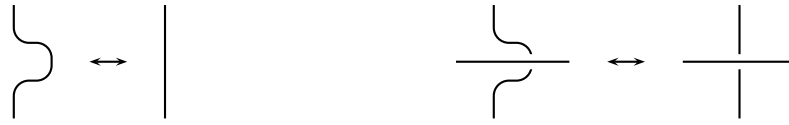
*Диаграммой*  $D_K$  узла  $K$  называется проекция общего положения этого узла на плоскость  $\mathbb{R}^2$  с конечным числом двойных точек трансверсального самопересечения, в каждой из которых верхняя ветвь узла («проход») изображается сплошной линией, а нижняя («переход») — линией с разрывом. Направление ориентации узла указывается стрелкой.

Следующие диаграммы изображают узел трилистник и сингулярный узел трилистник с двумя сингулярными точками:

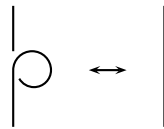




Две диаграммы называют плоско изотопными, если они получаются друг из друга конечной последовательностью преобразований, каждое из которых имеет вид



Эти преобразования не изменяют число перекрестков диаграммы. Поэтому, в частности, преобразование

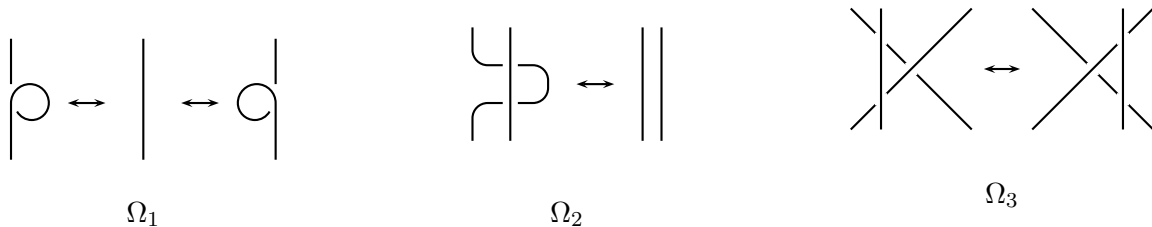


не является плоской изотопией. Тем не менее, это преобразование переводит узел в эквивалентный ему (изотопный в пространстве) узел.

Как следует из определения, в процессе плоской изотопии не могут возникать следующие ситуации:

- 1) появляется новый перекресток или исчезает старый перекресток;
- 2) проекции двух ветвей узла касаются друг друга;
- 3) точки трех различных ветвей узла проектируются в одну и ту же точку.

Запрещенные ситуации возникают при пространственных изотопиях узлов:



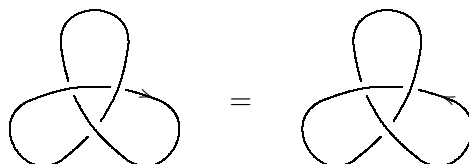
Соответствующие преобразования диаграммы узла называют *первым*, *вторым* и *третьим преобразованиями (движениями) Рейдемейстера* и обозначают  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Эти преобразования сводят пространственную изотопию к преобразованиям диаграмм. А именно, справедливо следующее утверждение (теорема Рейдемейстера).

**Теорема 2.1** (см. [9, с. 20]). *Две диаграммы соответствуют изотопным узлам тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа преобразований Рейдемейстера и плоских изотопий.*

**2.3. Типы узлов.** Тривиальный узел (неузел) — это узел, эквивалентный плоской окружности.

**Лемма 2.2** (см. [9, Теорема 3.8]). *Любой узел может быть преобразован в тривиальный с помощью конечной последовательности изменений типов некоторых его перекрестков.*

Ориентированный узел называют *обратимым*, если он изотопен самому себе с обратной ориентацией. Например, трилистник обратим, т.е. два ориентированных узла



получаются друг из друга с помощью преобразований Рейдемейстера и плоских изотопий.

Среди узлов, имеющих не более 8 пересечений, есть только один необратимый: это узел  $8_{17}$ .

Распознать, обратим ли данный узел, непросто. Первое строгое доказательство необратимости было проведено только в 1962 г. (пример Троттера [52]). Общего алгоритма для решения этой проблемы не найдено до сих пор.

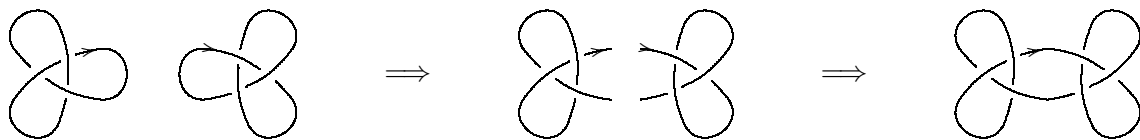
Узел называется *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному отражению (т.е. образу при симметрии относительно плоскости). Например, узел восьмерка зеркален, а трилистник не зеркален:



Узел называется *альтернированным*, если существует такая диаграмма узла, что при обходе этой диаграммы «проходы» и «переходы» встречаются поочередно. Примером альтернированного узла служит трилистник, примером не альтернированного — узел



Для двух ориентированных узлов  $K_1$  и  $K_2$  определим их *композицию*, или *связную сумму*  $K_1 \# K_2$  как узел, который получается выбрасыванием интервала из каждого узла и склеиванием оставшихся частей по границе (краю) так, чтобы направления их обхода были согласованы:



Узел называют *простым*, если он не тривиален и его нельзя представить в виде композиции двух нетривиальных узлов. Трилистник и восьмерка – простые узлы, а узел (1) — *составной* (т.е. не простой).

**Теорема 2.3** (см. [9]). *Если узел  $K_1$  нетривиален, то для любого узла  $K_2$  связная сумма  $K_1 \# K_2$  является нетривиальным узлом.*

**Предложение 2.4** (см. [9]). *Представление любого нетривиального узла в виде связной суммы простых узлов существует и единственно (с точностью до порядка слагаемых).*

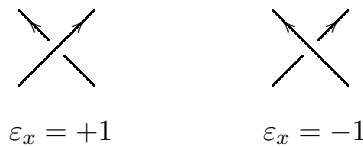
Изотопические классы узлов образуют полугруппу относительно композиции — связной суммы (нет обратного элемента, см. теорему 2.3), изоморфную аддитивной полугруппе неотрицательных чисел (но этот изоморфизм не канонический, поскольку на множестве узлов нет канонического линейного порядка).

**2.4. Диаграммы Гаусса.** Диаграмма узла, рассматриваемая с точностью до плоских изотопий, содержит следующую информацию:

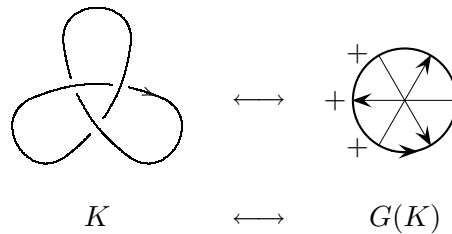
- 1) в каком порядке вдоль кривой следуют точки самопересечения,
- 2) какая ветвь кривой в точке самопересечения является проходом, а какая переходом.

Удобным инструментом кодирования плоских замкнутых кривых являются *гауссовы диаграммы*.

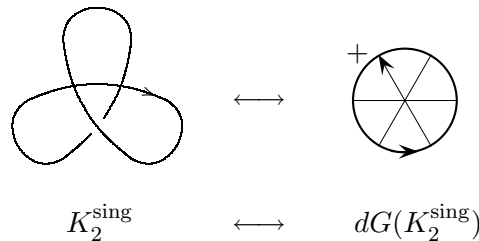
Рассмотрим узел и его диаграмму. Отметим на окружности прообразы всех двойных точек диаграммы. Пары, соответствующие одной двойной точке, соединим хордой. Теперь в каждой двойной точке укажем, какая ветвь узла проходит выше, какая — ниже. Для этого ориентируем хорду от прообраза верхней ветви к прообразу нижней ветви. Каждой полученной стрелке поставим в соответствие знак  $\varepsilon_x = \pm 1$  в зависимости от типа перекрестка в соответствующей двойной точке  $x$  диаграммы узла:



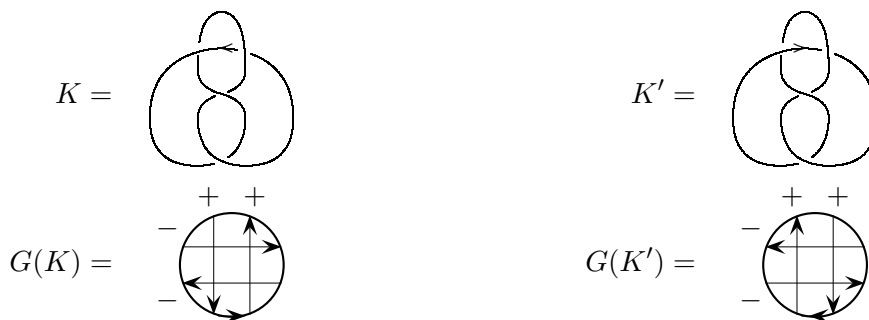
Таким образом, узлу  $K$  ставится в соответствие *диаграмма Гаусса*  $G(K)$ . Например, диаграмма Гаусса трилистника имеет вид



Аналогично, сингулярному узлу  $K_n^{\text{sing}}$  ставится в соответствие диаграмма Гаусса  $dG(K_n^{\text{sing}})$  следующим образом:

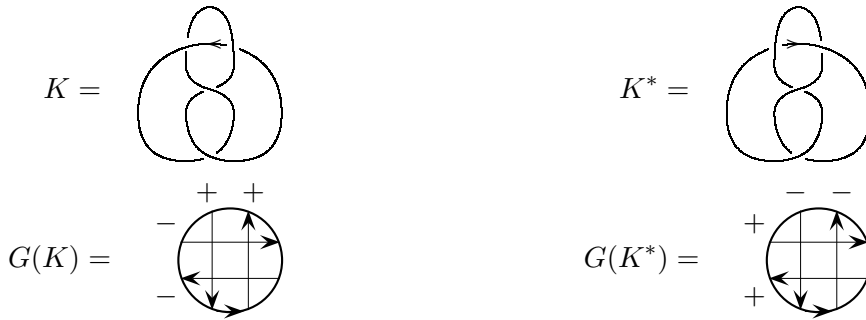


**2.5. Диаграммы Гаусса зеркального и инверсного отображений узла.** Рассмотрим произвольный ориентированный узел  $K$  и его диаграмму Гаусса  $G(K)$ . Обозначим через  $K'$  узел, полученный из  $K$  сменой ориентации, и рассмотрим его диаграмму Гаусса  $G(K')$ . Смена ориентации узла соответствует на диаграмме Гаусса изменению направления окружности на противоположное, при этом знаки стрелок не меняются, так как смена ориентации узла не изменяет типов перекрестков. Таким образом, диаграммы  $G(K)$  и  $G(K')$  симметричны относительно прямой:



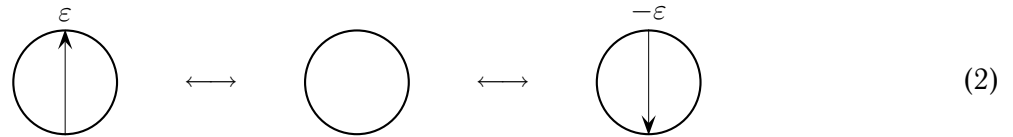
Смена ориентации сингулярного узла приводит к таким же последствиям.

Рассмотрим произвольный ориентированный узел  $K$  и его диаграмму Гаусса  $G(K)$ . Обозначим через  $K^*$  и  $G(K^*)$  соответственно зеркальный ему узел и его хордовую диаграмму. Диаграммы Гаусса зеркальных узлов  $K$  и  $K^*$  отличаются только знаками (знак каждой хорды меняется на противоположный, так как при взятии зеркального образа узла изменяется тип каждого перекрестка):



**2.6. Движения Рейдемейстера на языке диаграмм Гаусса.**

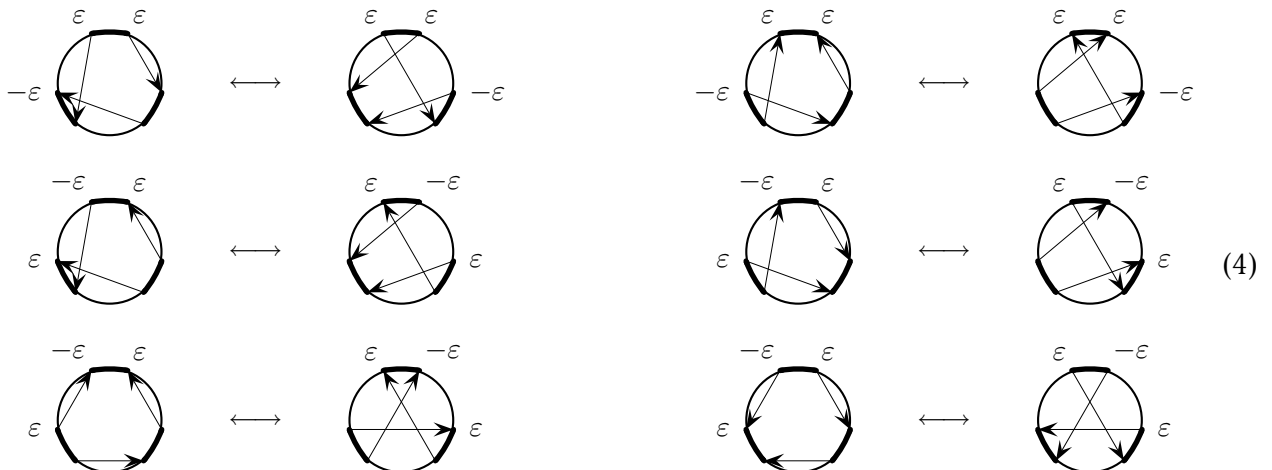
1. *Первое движение Рейдемейстера.* В зависимости от направления и типа петли на диаграмме Гаусса при первом движении Рейдемейстера добавляется или уничтожается изолированная стрелка:



2. *Второе движение Рейдемейстера.* В зависимости от направления и порядка прохождения ветвей узла на диаграмме Гаусса появляются и уничтожаются две сонаправленные стрелки с противоположными знаками, между началами и концами которых нет концов (начал) других стрелок:



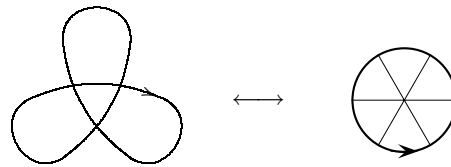
3. *Третье движение Рейдемейстера.* Третьему движению Рейдемейстера соответствуют восемь движений на диаграммах Гаусса (см. (4) и (5)). Как показал О.-П. Остлунд [46], учитывать шесть движений (4) нет необходимости.





Таким образом, любая последовательность движений диаграммы Гаусса может быть представлена как последовательность движений (2), (3), (5).

**2.7. Хордовые диаграммы.** Сингулярному узлу  $K_n^{\text{sing}} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  с  $n$  двойными точками поставим в соответствие *хордовую диаграмму*  $d(K_n^{\text{sing}})$ . На окружности отметим прообразы каждой двойной точки узла (их число  $2n$ ). Пары точек окружности, соответствующие одной и той же двойной точке узла, соединим хордой. На следующем рисунке изображен сингулярный узел с тремя двойными точками и соответствующая ему хордовая диаграмма с тремя хордами.



Можно определить хордовую диаграмму независимо от сингулярных узлов. Хордовая диаграмма — это окружность с отмеченными парами точек, соединенных хордами, рассматриваемых с точностью до диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию окружности.

Иными словами, хордовая диаграмма — это неориентированная гауссова диаграмма. Хордовые диаграммы рассматриваются как чисто комбинаторный объект: расстояние между концами хорд и форма хорд не имеют никакого значения, важен лишь порядок, в котором пары точек, соединенных хордами, следуют по кругу. Хордовая диаграмма — это то же самое, что слово в алфавите из  $n$  букв  $a_1, \dots, a_n$ , в котором каждая буква встречается ровно два раза. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв и произвольной перенумерации переменных  $a_1, \dots, a_n$ .

Хордовой диаграммой порядка  $n$  называется диаграмма с  $n$  хордами. Рассмотрим линейное пространство над  $\mathbb{Q}$ , порожденное хордовыми диаграммами порядка  $n$ . Назовем его пространством хордовых диаграмм порядка  $n$  и обозначим через  $\text{Ch}_n^*$ .

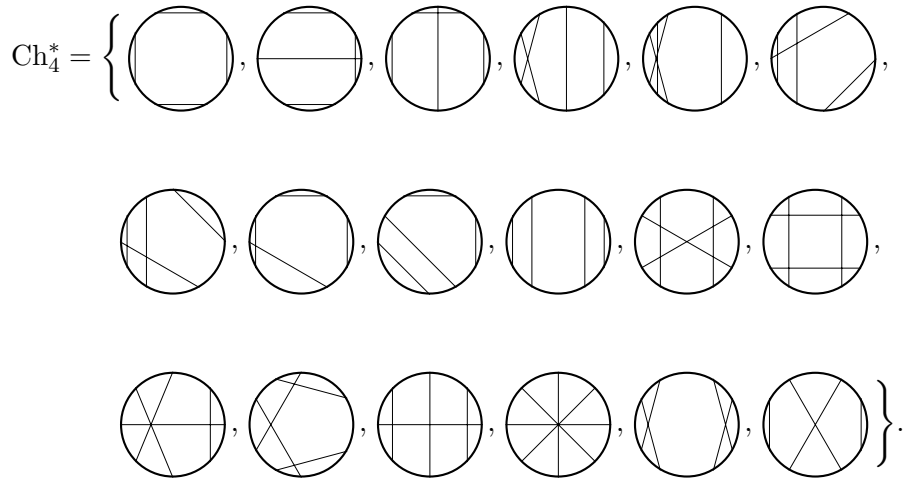
Каждое из пространств  $\text{Ch}_0^*, \text{Ch}_1^*$  порождается одной диаграммой:

$$\text{Ch}_0^* = \left\{ \bigcirc \right\}, \quad \text{Ch}_1^* = \left\{ \bigcirc \text{---} \bigcirc \right\}.$$

Пространства  $\text{Ch}_2^*, \text{Ch}_3^*$  и  $\text{Ch}_4^*$  порождаются соответственно, 2, 5 и 18 элементами:

$$\text{Ch}_2^* = \left\{ \bigcirc \text{---} \bigcirc, \bigcirc \text{---} \bigcirc \right\},$$

$$\text{Ch}_3^* = \left\{ \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc, \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc, \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc, \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc, \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \right\},$$



Введем в модуле  $Ch_n^*$  множество линейных соотношений: одночленное соотношение

$$\text{[Diagram of a circle with a vertical chord]} = 0$$

для хордовой диаграммы, содержащей изолированную хорду (т.е. хорду, которую не пересекает никакая другая), и четырехчленное соотношение

$$\text{[Diagram 1]} - \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} - \text{[Diagram 4]} = 0$$

для диаграмм, у которых  $(n - 2)$  хорды совпадают (на рисунке они не изображены), а оставшиеся хорды расположены так, как показано на рисунке. При этом отсутствующие  $(n - 2)$  хорды не заканчиваются в запретных дугах окружности (на рисунке эти дуги выделены утолщением).

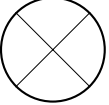
Пространство хордовых диаграмм порядка  $n$  по модулю одночленного и четырехчленного соотношений обозначим  $Ch_n$ :

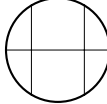
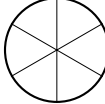
$$Ch_n = Ch_n^* / \{1\text{-членное и } 4\text{-членное соотношения}\}.$$

Размерности пространств  $Ch_n$  в малых размерностях таковы:

ТАБЛИЦА 1

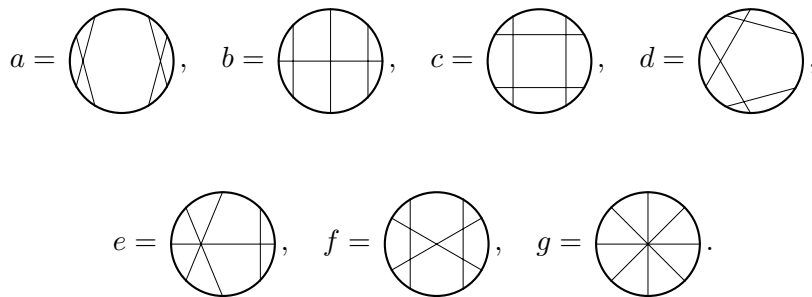
|             |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |     |     |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|
| $n$         | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11  | 12  |
| $\dim Ch_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 9 | 14 | 27 | 44 | 80 | 132 | 232 |

В пространстве  $Ch_2$  имеется одна нетривиальная хордовая диаграмма . В пространстве

$Ch_3$  имеются две нетривиальные хордовые диаграммы  и , связанные соотношением

$$2 \cdot \text{[Cross Diagram]} = \text{[Star Diagram]}.$$

В пространстве  $Ch_4$  имеются семь нетривиальных хордовых диаграмм, которые обозначим следующим образом:



В качестве базисных выберем диаграммы  $\{a, d, g\}$ . Тогда остальные хордовые диаграммы линейно выражаются через базисные следующим образом:

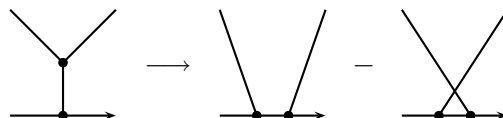
$$b = -a + d, \quad c = 2a - 3d + g, \quad e = -a + 2d, \quad f = a - 2d + g.$$

Эти выражения являются следствиями четырехчленных соотношений.

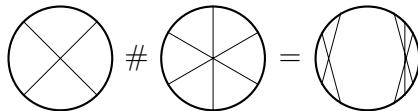
Хордовые диаграммы являются частным случаем диаграмм Фейнмана.

Диаграмма Фейнмана степени  $n$  — это регулярный трехвалентный граф с  $2n$  вершинами, в котором выделен некоторый ориентированный цикл, называемый *петлей Уилсона*, и в каждой вершине, не лежащей на петле Уилсона, задан циклический порядок выходящих из нее ребер.

Каждую диаграмму Фейнмана  $f$  можно превратить в линейную комбинацию хордовых диаграмм, многократно применяя следующее соотношение для разрешения тройных точек, смежных с петлей Уилсона:



Прямая сумма всех пространств хордовых диаграмм  $\text{Ch} = \text{Ch}_0 \oplus \text{Ch}_1 \oplus \dots \oplus \text{Ch}_n$  является алгеброй. Умножение определяется как связная сумма хордовых диаграмм (две окружности разрываются и склеиваются в одну):



Умножение определено корректно (т.е. не зависит от места, где разрываются окружности) благодаря четырехчленному соотношению (см. [58, Proposition 4.4]). На самом деле можно доказать, что  $\text{Ch}$  является алгеброй Хопфа (см. [58]).

### 3. ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ

Фундаментальной проблемой теории узлов и зацеплений является классификация узлов в  $\mathbb{R}^3$  с точностью до изотопии. В частности, хотелось бы иметь критерий определения, являются ли два узла изотопными или нет, изотопен ли данный узел тривиальному.

Классический путь решения этой проблемы состоит в сопоставлении каждому узлу  $K$  такого алгебраического объекта  $I_K$ , что  $I_K = I_{K'}$  для эквивалентных узлов  $K$  и  $K'$ . Иначе говоря, *инвариант узла* — это функция, ставящая в соответствие изотопическому классу узла некоторый алгебраический объект (число, полином, группу).

Кратко опишем нескольких замечательных инвариантов, играющих важную роль в теории узлов.

1. Число пересечений, т.е. минимальное число двойных точек на диаграмме узла. В некотором смысле число пересечений можно считать мерой сложности узла. Все узлы с числом пересечений 1 или 2 тривиальны. Простейший нетривиальный узел (трилистник) имеет число пересечений, равное 3; с точностью до зеркального отражения, это единственный узел с тремя пересечениями. В таблицах узлы традиционно упорядочиваются по числу пересечений.

2. Топологический тип дополнения — полный инвариант неориентированного узла. Теорема Гордана—Люке, доказанная лишь в 1989 г., хотя проблема была поставлена еще в начале XX в., формулируется следующим образом: если дополнения  $\mathbb{R}^3 - K_1$  и  $\mathbb{R}^3 - K_2$  двух узлов гомеоморфны, то сами узлы эквивалентны с точностью до ориентации узла и ориентации пространства.

3. Род узла — наименьший род его поверхности Зейферта (см. [8]).

4. Группа узла — фундаментальная группа топологического пространства  $\mathbb{R}^3 - K$  (дополнения к узлу в пространстве). Эта группа состоит из классов эквивалентности замкнутых путей, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же точке (групповая операция — последовательное прохождение двух путей). Существует простой алгоритм задания группы узла при помощи образующих и определяющих соотношений (см., например, [4]).

Неэквивалентные узлы могут иметь изоморфные группы. Например, группы бабушкина узла и сквер-узла изоморфны. Оба эти узла составные: они получаются композицией двух трилистников (двух левых или левого и правого). Интересно отметить, что для простых узлов подобный пример невозможен. Это вытекает из теоремы Гордана—Люке, сформулированной выше, и следующего утверждения [57]: если группы двух простых узлов изоморфны, то эти узлы имеют гомеоморфные дополнения.

Инварианты Васильева представляют собой самый мощный класс численных инвариантов узлов. Инварианты Васильева (инварианты конечного типа) появились около 1990 г. в работах В. А. Васильева (см., например, [55]) по топологии дискриминантов в бесконечномерных пространствах отображений. Это не один какой-то инвариант, как полином Джонса, а целый класс инвариантов, выделяемый определенным свойством.

**3.1. Инварианты узлов конечного типа.** Будем рассматривать инварианты со значениями в поле рациональных чисел

$$V : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{Q}.$$



Инвариант  $V$ , принимающий значения в некотором основном поле, будем называть *четным* (соответственно, *нечетным*), если для любого узла  $K$  и его зеркального отображения  $K^*$  имеет место равенство  $V(K) = V(K^*)$  (соответственно,  $V(K) = -V(K^*)$ ).

Инварианты можно продолжить на множество сингулярных узлов различными способами. В настоящей работе будет использоваться наиболее известный способ — линейное продолжение с коэффициентами  $\pm 1$  (см. например, [16, 54]). Опишем это продолжение более детально.

На множестве сингулярных узлов естественным образом определена каноническая фильтрация:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{\leq 1}^{\text{sing}} \subset \mathcal{K}_{\leq 2}^{\text{sing}} \subset \dots \subset \mathcal{K}_{\leq n}^{\text{sing}} \subset \dots \subset \mathcal{K}^{\text{sing}},$$

где через  $\mathcal{K}_{\leq n}^{\text{sing}}$ ,  $n \geq 1$ , обозначено подмножество  $\mathcal{K}^{\text{sing}}$ , состоящее из сингулярных узлов, имеющих не более чем  $n$  двойных точек,

$$\mathcal{K}^{\text{sing}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\leq i}^{\text{sing}}, \quad \mathcal{K}_0^{\text{sing}} = \mathcal{K}.$$

Пусть

$$\mathcal{K}_n^{\text{sing}} = \mathcal{K}_{\leq n}^{\text{sing}} / \mathcal{K}_{\leq n-1}^{\text{sing}}.$$

По определению положим

$$V^{(1)} \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) = V \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - V \left( \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right).$$

В правой и левой частях равенства рассматриваются узлы, которые совпадают вне некоторого шара, а внутри него устроены так, как показано на рисунках. Таким образом, инвариант  $V$  продолжен на первый член фильтрации  $\mathcal{K}_{\leq 1}^{\text{sing}}$ . На следующем шаге получим продолжение на  $\mathcal{K}_{\leq 2}^{\text{sing}}$ :

$$V^{(2)} \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) = V^{(1)} \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - V^{(1)} \left( \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right).$$

Таким образом, инвариант  $V$  можно последовательно продолжать на сингулярные узлы с любым количеством двойных точек. В пределе получается инвариант, определенный на всем пространстве сингулярных узлов:

$$\tilde{V} : \mathcal{K}^{\text{sing}} \rightarrow \mathbb{Q},$$

который будем обозначать снова через  $V$ .

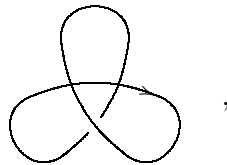
Такое продолжение инварианта  $V$ ,

$$V \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) = V \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - V \left( \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right),$$

часто называется также *скейн-соотношением* (skein-relation). На языке стрелочно-хордовых диаграмм скейн-соотношение можно выразить через соотношения следующего типа:

$$f \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} \right) = f \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \uparrow \\ \bigcirc \end{array} \right) - f \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \downarrow \\ \bigcirc \end{array} \right).$$

**Пример 2.** Вычислим значение продолженного по Васильеву полинома Джонса на следующем сингулярном узле  $T_2^{\text{sing}}$ :



где  $T$  — узел трилистник,  $O$  — тривиальный узел. Имеем:

$$\tilde{V}(T_2^{\text{sing}}) = V(T) - V(O) = t + t^3 - t^4 - 1.$$

**3.2. Инварианты Васильева.** Среди всех инвариантов узлов инварианты Васильева выделяются условием конечности. А именно, инвариант

$$V : \mathcal{K}^{\text{sing}} \rightarrow \mathbb{Q}$$

называется инвариантом Васильева порядка не выше  $n$ , если он принимает нулевое значение на любом сингулярном узле с числом двойных точек, бóльшим  $n$ , т.е.

$$V_n(K_m^{\text{sing}}) = 0 \quad \forall m > n.$$

Инварианты порядка не выше  $n$  образуют пространство конечной размерности, которое называется пространством инвариантов Васильева порядка не выше  $n$  и обозначается через  $\mathcal{V}_n$ . Приведем таблицу для размерностей пространств инвариантов  $\mathcal{V}_n$ :

ТАБЛИЦА 2

|                      |   |   |   |   |   |    |    |    |    |     |     |     |     |
|----------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| $n$                  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9   | 10  | 11  | 12  |
| $\dim \mathcal{V}_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 10 | 19 | 33 | 60 | 104 | 184 | 316 | 548 |

Инварианту порядка не выше  $n$  поставим в соответствие *старший скачок*  $\nabla^n V_n$ . Старшим скачком инварианта порядка не выше  $n$  называется ограничение этого инварианта на сингулярные узлы ровно с  $n$  двойными точками:

$$\nabla^n V_n = V_n|_{\mathcal{K}_n^{\text{sing}}}.$$

**Лемма 3.1** (см. [9, с. 60]). *Старший скачок  $\nabla^n V_n(K_n^{\text{sing}})$  на сингулярном узле с  $n$  двойными точками зависит только от хордовой диаграммы узла  $K_n^{\text{sing}}$ .*

Таким образом, старший скачок  $\nabla^n V_n$  определен на пространстве хордовых диаграмм  $\text{Ch}_n^*$ :

$$\nabla^n V_n : \text{Ch}_n^* \rightarrow \mathbb{Q}.$$

**3.3. Весовые системы.** Весовой системой (весовой функцией)  $W_n$  называется линейная функция на  $\text{Ch}_n^*$  со значениями в поле рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ :

$$W_n : \text{Ch}_n^* \rightarrow \mathbb{Q},$$

удовлетворяющая двум линейным соотношениям: одночленному

$$W \left( \text{circle with vertical chord} \right) = 0$$

и четырехчленному

$$W \left( \text{circle with two chords} \right) - W \left( \text{circle with one chord} \right) + W \left( \text{circle with two crossing chords} \right) - W \left( \text{circle with one chord and one arc} \right) = 0.$$

Весовые системы образуют пространство, которое называется пространством весовых систем  $\mathbf{W}_n$ . Приведем таблицу для размерностей пространств весовых систем  $\mathbf{W}_n$  для  $n = 0, \dots, 4$ .

ТАБЛИЦА 3

|                     |   |   |   |   |   |
|---------------------|---|---|---|---|---|
| $n$                 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\dim \mathbf{W}_n$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |

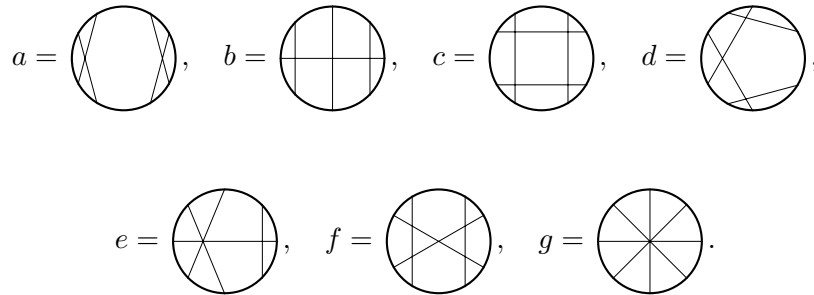
**Пример 3** (весовые системы порядка 2).

$$W_2 \left( \text{circle with two diagonals} \right) = 1, \quad W_2 \left( \text{circle with two vertical lines} \right) = 0.$$

**Пример 4** (весовые системы порядка 3).

$$W_3 \left( \text{circle with three lines from center to boundary} \right) = 2, \quad W_3 \left( \text{circle with three vertical lines} \right) = 0, \quad W_3 = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

**Пример 5** (весовые системы порядка 4). Напомним, что в пространстве  $\text{Ch}_4$  семь нетривиальных хордовых диаграмм обозначены следующим образом:



Весовые системы порядка 4 перечислены в таблице 4.

ТАБЛИЦА 4

|         | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $W_4^1$ | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 1   | 1   |
| $W_4^2$ | 1   | -1  | 2   | 0   | -1  | 1   | 0   |
| $W_4^3$ | 0   | 1   | -3  | 1   | 2   | -2  | 0   |

В остальных случаях  $W_4^1 = W_4^2 = W_4^3 = 0$ , и весовые системы  $W_4^1, W_4^2, W_4^3$  образуют базис в пространстве  $\mathbf{W}_4$ .

**Лемма 3.2.** *Старший скачок  $\nabla^n V_n$  является весовой системой, т.е. определено линейное отображение  $\nabla^n V_n : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbb{W}_n$ .*

**Теорема 3.3** (М. Концевич [39]). *Пусть основное поле —  $\mathbb{Q}$ . Тогда всякая весовая система  $\mathbb{W}_n$  является символом некоторого инварианта  $V_n$  порядка  $n$ .*

*Иными словами, старший скачок  $\nabla^n V_n$  определяет отображение из  $\mathcal{V}_n$  в  $\mathbf{W}_n$ , и это отображение является эпиморфизмом:*

$$\nabla^n V_n : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbf{W}_n \rightarrow 0.$$

Ядро отображения  $\nabla^n V_n$  образуют инварианты Васильева порядка не выше  $n - 1$ , т.е. имеет место следующая точная последовательность конечномерных векторных пространств:

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{n-1} \rightarrow \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbf{W}_n \rightarrow 0,$$

при этом

$$\mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \simeq \mathbf{W}_n.$$

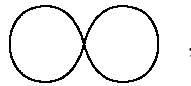
Из этой теоремы следует конечномерность пространств инвариантов Васильева порядка не выше  $n$ :

$$\dim \mathcal{V}_n = \dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1} + \dim \mathcal{V}_{n-1}/\mathcal{V}_{n-2} + \cdots + \dim \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_0.$$

#### 4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ

**4.1. Инварианты нулевого и первого порядков.** Любой инвариант Васильева  $V_0$  порядка 0 обращается в нуль на любом сингулярном узле, имеющем хотя бы одну точку самопересечения. Если  $V_0$  принимает значение  $q$  на каком-либо узле без точек самопересечения, то он принимает то же самое значение и на всех других узлах без точек самопересечения. В самом деле, соотношение Васильева показывает, что если два узла получаются друг из друга заменой типа одного перекрестка, то они отличаются на значение  $V_0$  на сингулярном узле с точкой самопересечения, соответствующей этому перекрестку. Но значение  $V_0$  на таком узле равно нулю. А так как любые два узла без точек самопересечения получаются друг из друга с помощью конечного числа замен перекрестков, то значение  $V_0$  на любом узле без особых точек равно  $q$ . Таким образом,  $\mathcal{V}_0 = \mathbb{Q}$ .

Итак, с помощью инвариантов порядка 0 узлы различать нельзя. Оказывается, что инварианты порядка 1 тоже не различают узлы:  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0$ , потому что любой инвариант  $V_1$  обращается в нуль на любом узле, имеющем хотя бы одну точку самопересечения (хотя в определении требуется лишь его равенство нулю на узле с двумя точками самопересечения). В самом деле, пусть  $K_1$  — узел с одной точкой самопересечения, а узел  $K'_1$  получен из узла  $K_1$  одной заменой типа перекрестка. Тогда из скейн-соотношения следует, что  $V_1(K_1) - V_1(K'_1) = V_1(K_2)$ , где узел  $K_2$  имеет две точки самопересечения. Согласно определению  $V_1(K_2) = 0$ , а значит,  $V_1(K_1) = V_1(K'_1)$ . Таким образом, при заменах типов перекрестков узла  $K_1$  значение инварианта  $V_1$  не изменяется. Если количество точек самопересечения узла  $K_1$  больше 1, то  $V_1(K_1) = 0$  по определению. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда узел  $K_1$  имеет ровно одну точку самопересечения, которая разбивает узел на две части. Каждую из частей можно превратить в тривиальный узел, а затем их можно расцепить, изменяя подходящим образом типы перекрестков; значение инварианта при этом не изменяется. В результате получается узел



для которого значение любого инварианта Васильева равно нулю в силу одночленного соотношения. Итак, мы получаем:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 = \mathbb{Q}.$$

Теория инвариантов становится содержательной уже на следующем шаге, т.е. для инвариантов порядка 2.

**4.2. Инварианты второго порядка.** Предварительно введем некоторые определения. Для простоты здесь и далее под узлом будем понимать его плоскую проекцию, и вместо  $V_n(K)$  будем писать  $K$ . Тогда скейн-соотношение перепишем в виде:

$$\text{Crossing} = \text{Crossing} - \text{Crossing}.$$

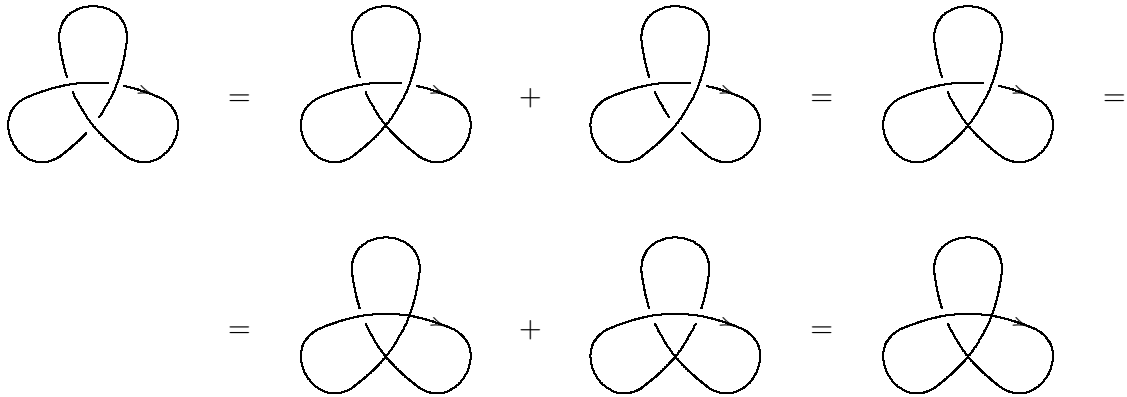
Весовые системы порядка 2 образуют одномерное пространство. Чтобы фиксировать базисный инвариант  $V_2$ , положим

$$V_2\left(\text{Crossing in circle}\right) = 1, \quad V_2\left(\text{Circle}\right) = 0.$$

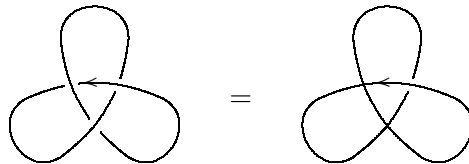
Первое условие определяет старший скачок инварианта  $V_2$ , а выполнения второго условия можно добиться, вычтя (при необходимости) инварианты порядка 0 (а именно, если  $V_2(O) = q \neq 0$ , то

нужно вычесть инвариант порядка 0, принимающий значение  $q$  на всех узлах без точек самопересечения).

Вычисление начнем с трилистника.

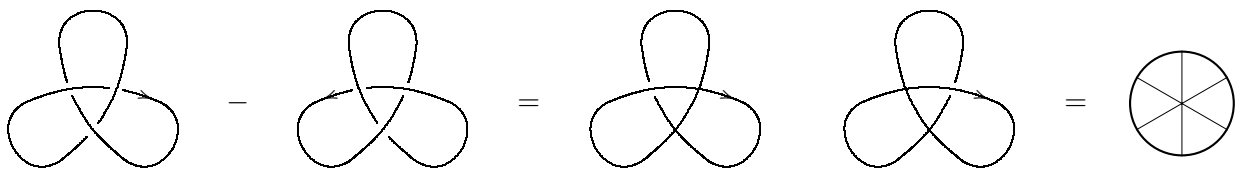


Аналогичные вычисления для левого трилистника приводят к следующему результату:



В обоих случаях получаем узел с хордовой диаграммой  $\otimes$ , поэтому для обоих узлов значение инварианта  $V_2$  равно 1. Таким образом, инварианты Васильева второго порядка не позволяют отличить левый трилистник от правого.

**4.3. Инварианты третьего порядка.** Инварианты Васильева третьего порядка уже позволяют отличить левый трилистник от правого. В самом деле, следующие вычисления приводят к сингулярному узлу с одной и той же диаграммой Гаусса:



Положим, что инвариант  $V_3$  является нечетным, т.е.  $T = -T^*$ . Тогда

$$T - (-T) = \text{Chord Diagram} \implies 2T = \text{Chord Diagram}.$$

В силу соотношения

$$2 \cdot \text{Chord Diagram} = \text{Chord Diagram}.$$

получаем

$$T = \text{circle with cross}$$

В качестве старшего скачка рассмотрим весовую систему третьего порядка из примера 4. Тогда

$$V_3(T) = 1, \quad V_3(T^*) = -1.$$

Рассмотрим теперь узел «восьмерку»  $H$ :

$$\begin{aligned} & \text{diagram of H} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \\ & = - \text{diagram 3} + \text{diagram 4} = - \text{diagram 5} = - \text{circle with cross}; \end{aligned}$$

откуда

$$V_2(H) = -1.$$

Аналогичные вычисления инварианта Васильева третьего порядка для узла  $H$  приводят к следующему результату:

$$\text{circle with cross} = \text{diagram of H} = T + H.$$

Отсюда, учитывая, что  $V_3(T) = 1$ , получим  $V_3(H) = 0$ . Это равенство также следует из того, что узел «восьмерка» является зеркальным.

Очевидно, если узел является зеркальным, то все инварианты нечетного порядка принимают на нем нулевые значения. Верно ли обратное, не известно (см. [1, гл. 5, § 9, с. 77]).

### 5. Модуль Васильева

Введем объект, двойственный пространству инвариантов Васильева — модуль Васильева, который позволяет работать с изотопическими классами узлов. Алгоритм вычисления инвариантов с помощью спектральной последовательности с заполнением таблицы актуальностей запишем в виде системы разложений на двойственном языке модулей Васильева.

#### 5.1. Двойственность пространств инвариантов и сингулярных узлов.

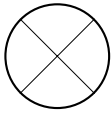
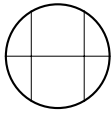
**Определение 1.** Модуль Васильева порядка  $n$  — это модуль  $\mathbb{V}_n$  над кольцом  $\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Q}$ , порожденный изотопическими классами ориентированных узлов и сингулярных узлов со следующими соотношениями:

- 1)  $E = 0$ , где  $E$  — тривиальный узел,
- 2) скейн-соотношение Васильева

$$\text{crossing} = \text{crossing} - \text{crossing};$$

3)  $K_m^{\text{sing}} = 0$ , если  $m > n$ .

**5.2. Разложения инвариантов в модулях Васильева.** Обозначим сингулярный узел с хордовой

диаграммой  через  $\bar{x}$ , с диаграммой  через  $\hat{h}$ , а сингулярные узлы, соответствующие

хордовым диаграммам  $a$ ,  $d$  и  $g$  — через  $\hat{a}$ ,  $\hat{d}$ ,  $\hat{g}$  соответственно.

Прямыми вычислениями, используя соотношение Васильева, в модулях Васильева второго, третьего и четвертого порядков получены следующие разложения для узлов, имеющих не более 8 двойных точек в диаграммах с минимальным количеством двойных точек проекции:

Таблица 5: Разложения в модулях Васильева

| Узел         | Разложение     |                  |                                  |  |
|--------------|----------------|------------------|----------------------------------|--|
|              | $\mathbf{V}_2$ | $\mathbf{V}_3$   | $\mathbf{V}_3$                   | $\mathbf{V}_4$   |
| $3_1^*$      | $\bar{x}$      | $T$              | $T$                              | $T$  |
| $3_1$        | $\bar{x}$      | $T - 2\bar{h}$   | $T^*$                            | $T^*$  |
| $4_1$        | $-\bar{x}$     | $-T + \bar{h}$   | $-\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^*$ | $-\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^* + \bar{a} - \frac{3}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$             |
| $5_1$        | $3\bar{x}$     | $3T - 8\bar{h}$  | $-T + 4T^*$                      | $-T + 4T^* + \bar{g}$  |
| $5_2$        | $2\bar{x}$     | $2T - 5\bar{h}$  | $-\frac{1}{2}T + \frac{5}{2}T^*$ | $-\frac{1}{2}T + \frac{5}{2}T^* - \frac{1}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$                       |
| $6_1$        | $-2\bar{x}$    | $-2T + 3\bar{h}$ | $-\frac{1}{2}T - \frac{3}{2}T^*$ | $-\frac{1}{2}T - \frac{3}{2}T^* + \frac{5}{2}\bar{a} - \frac{11}{2}\bar{d} + \frac{3}{2}\bar{g}$ |
| $6_2$        | $-\bar{x}$     | $-T + 2\bar{h}$  | $-T^*$                           | $-T^* + 3\bar{a} - 5\bar{d} + \bar{g}$   |
| $6_3$        | $\bar{x}$      | $T - \bar{h}$    | $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^*$  | $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* - \bar{a} + \frac{5}{2}\bar{d} - \frac{1}{2}\bar{g}$              |
| $3_1\#3_1^*$ | $2\bar{x}$     | $2T - 2\bar{h}$  | $T + T^*$                        | $T + T^* + \bar{a}$  |
| $7_1$        | $6\bar{x}$     | $6T - 20\bar{h}$ | $-4T + 10T^*$                    | $-4T + 10T^* + 5\bar{g}$   |
| $7_2$        | $3\bar{x}$     | $3T + 3\bar{h}$  | $\frac{9}{2}T - \frac{3}{2}T^*$  | $\frac{9}{2}T - \frac{3}{2}T^* - \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{d} + \frac{3}{2}\bar{g}$              |
| $7_3$        | $5\bar{x}$     | $5T + 6\bar{h}$  | $8T - 3T^*$                      | $8T - 3T^* + \bar{a} - 3\bar{d} + 4\bar{g}$  |
| $7_4$        | $4\bar{x}$     | $4T + 4\bar{h}$  | $6T - 2T^*$                      | $6T - 2T^* + 2\bar{a} - 5\bar{d} + 3\bar{g}$   |
| $7_5$        | $4\bar{x}$     | $4T + 4\bar{h}$  | $-2T + 6T^*$                     | $-4T + 6T^* + \bar{a} + \bar{d} + 2\bar{g}$  |
| $7_6$        | $\bar{x}$      | $T - 3\bar{h}$   | $-\frac{1}{2}T + \frac{3}{2}T^*$ | $-\frac{1}{2}T + \frac{3}{2}T^* - \frac{3}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$                       |
| $7_7$        | $-\bar{x}$     | $-T + 2\bar{h}$  | $-T^*$                           | $-T^* + \bar{d}$   |
| $3_1\#4_1$   | 0              | $-\bar{h}$       | $-\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^*$ | $-\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* - \frac{3}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$                       |
| $8_1$        | $-3\bar{x}$    | $-3T + 6\bar{h}$ | $-3T^*$                          | $-3T^* + 10\bar{a} - 13\bar{d} + 3\bar{g}$   |

| (Таблица 5: продолжение) |             |                  |                                   |  |
|--------------------------|-------------|------------------|-----------------------------------|--|
| Узел                     | Разложение  |                  |                                   |  |
| $K$                      | $V_2$       | $V_3$            | $V_3$                             | $V_4$  |
| $8_2$                    | 0           | $\bar{h}$        | $-\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^*$  | $-\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^* + 6\bar{a} - \frac{21}{2}\bar{d} + \frac{3}{2}\bar{g}$ |
| $8_3$                    | $-4\bar{x}$ | $-4T + 4\bar{h}$ | $-2T - 2T^*$                      | $-2T - 2T^* + 6\bar{a} - 11\bar{d} + 5\bar{g}$   |
| $8_4$                    | $-3\bar{x}$ | $-3T + 8\bar{h}$ | $T - 4T^*$                        | $T - 4T^* + 11\bar{a} - 17\bar{d} + 4\bar{g}$  |
| $8_5$                    | $-\bar{x}$  | $-T - 2\bar{h}$  | $-2T + T^*$                       | $-2T + T^* + 9\bar{a} - 14\bar{d} + 2\bar{g}$  |
| $8_6$                    | $-2\bar{x}$ | $-2T + 9\bar{h}$ | $\frac{5}{2}T - \frac{9}{2}T^*$   | $\frac{5}{2}T - \frac{9}{2}T^* + 9\bar{a} - \frac{27}{2}\bar{d} + \frac{5}{2}\bar{g}$  |
| $8_7$                    | $2\bar{x}$  | $2T$             | $2T$                              | $2T - 3\bar{a} + 7\bar{d} - \bar{g}$   |
| $8_8$                    | $2\bar{x}$  | $2T - \bar{h}$   | $\frac{3}{2}T + \frac{1}{2}T^*$   | $\frac{3}{2}T + \frac{1}{2}T^* - \bar{a} + \frac{7}{2}\bar{d} - \frac{1}{2}\bar{g}$    |
| $8_9$                    | $-2\bar{x}$ | $-2T + 2\bar{h}$ | $-T - T^*$                        | $-T - T^* + 8\bar{a} - 14\bar{d} + 3\bar{g}$   |
| $8_{10}$                 | $3\bar{x}$  | $3T$             | $3T$                              | $3T + 3\bar{d}$  |
| $8_{11}$                 | $-\bar{x}$  | $-T + 3\bar{h}$  | $\frac{1}{2}T - \frac{3}{2}T^*$   | $\frac{1}{2}T - \frac{3}{2}T^* + 6\bar{a} - \frac{11}{2}\bar{d} + \frac{3}{2}\bar{g}$  |
| $8_{12}$                 | $-3\bar{x}$ | $-3T + 3\bar{h}$ | $-\frac{3}{2}T - \frac{3}{2}T^*$  | $-\frac{3}{2}T - \frac{3}{2}T^* + 7\bar{a} - \frac{17}{2}\bar{d} + \frac{5}{2}\bar{g}$ |
| $8_{13}$                 | $\bar{x}$   | $T$              | $T$                               | $T - 3\bar{a} + 6\bar{d} - \bar{g}$  |
| $8_{14}$                 | 0           | 0                | 0                                 | $3\bar{a} - 6\bar{d} + \bar{g}$  |
| $8_{15}$                 | $4\bar{x}$  | $4T - 11\bar{h}$ | $-\frac{3}{2}T + \frac{11}{2}T^*$ | $-\frac{3}{2}T + \frac{11}{2}T^* + \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{d} + \frac{3}{2}\bar{g}$  |
| $8_{16}$                 | $\bar{x}$   | $T - 2\bar{h}$   | $T^*$                             | $T^* - 3\bar{a} + 6\bar{d} - \bar{g}$  |
| $8_{17}$                 | $-\bar{x}$  | $-T + 2\bar{h}$  | $-T^*$                            | $-T^* + 3\bar{a} - 5\bar{d} + \bar{g}$   |
| $8_{18}$                 | $\bar{x}$   | $T - \bar{h}$    | $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^*$   | $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* + 2\bar{a} - \frac{7}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$   |
| $8_{19}$                 | $5\bar{x}$  | $5T + 5\bar{h}$  | $\frac{15}{2}T - \frac{5}{2}T^*$  | $\frac{15}{2}T - \frac{5}{2}T^* + \frac{15}{2}\bar{d} + \frac{5}{2}\bar{g}$            |
| $8_{20}$                 | $2\bar{x}$  | $2T - 4\bar{h}$  | $2T^*$                            | $2T^* + \bar{d}$   |
| $8_{21}$                 | 0           | $\bar{h}$        | $\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^*$   | $\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^* + 3\bar{a} - \frac{9}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$   |
| $4_1\#4_1$               | $-2\bar{x}$ | $-2T + 2\bar{h}$ | $-T - T^*$                        | $-T - T^* + 3\bar{a} - 3\bar{d} + \bar{g}$   |
| $3_1\#5_1$               | $4\bar{x}$  | $4T - 10\bar{h}$ | $-T + 5T^*$                       | $-T + 5T^* + 3\bar{a} + \bar{g}$   |
| $3_1^*\#5_2^*$           | $3\bar{x}$  | $3T + \bar{h}$   | $\frac{7}{2}T - \frac{1}{2}T^*$   | $\frac{7}{2}T - \frac{1}{2}T^* + 2\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{d} + \frac{1}{2}\bar{g}$   |

В таблице использованы общепринятые обозначения узлов (см., например, [5]),  $K^*$  обозначает зеркальный образ узла  $K$ . Сингулярные узлы выражаются через обычные узлы следующим



образом:

$$\bar{x} = T, \quad \bar{h} = H + T, \quad \bar{a} = P - 3F + H + 4T, \quad \bar{d} = P - 2F + T, \quad \bar{g} = P - 4T + T^*.$$

**Предложение 5.1.** В разложениях узлов (см. таблицу 5) коэффициенты при  $\hat{x}, \hat{h} + \hat{x}, \hat{a}, \hat{d}, \hat{g}$  являются, соответственно, инвариантами Васильева 2, 3 и 4 порядков  $V_2, V_3, V_4^1, V_4^2, V_4^3$ .

Приведем таблицу значений этих инвариантов.

Таблица 6: Значения инвариантов Васильева

| $K$            | $V_2$ | $V_3$ | $V_4^1$       | $V_4^2$         | $V_4^3$        |
|----------------|-------|-------|---------------|-----------------|----------------|
| $3_1$          | 1     | -1    | 0             | 0               | 0              |
| $4_1$          | -1    | 0     | 1             | $-\frac{3}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| $5_1$          | 3     | -5    | 0             | 0               | 1              |
| $5_2$          | 2     | -3    | 0             | $-\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| $6_1$          | -2    | 1     | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $\frac{3}{2}$  |
| $6_2$          | -1    | 1     | 3             | -5              | 1              |
| $6_3$          | 1     | 0     | -1            | $\frac{5}{2}$   | $-\frac{1}{2}$ |
| $3_1 \# 3_1^*$ | 2     | 0     | 1             | 0               | 0              |
| $7_1$          | 6     | -14   | 0             | 0               | 5              |
| $7_2$          | 3     | 6     | -1            | $-\frac{1}{2}$  | $\frac{3}{2}$  |
| $7_3$          | 5     | 11    | 1             | -3              | 4              |
| $7_4$          | 4     | 8     | 2             | -5              | 3              |
| $7_5$          | 4     | 8     | 1             | 1               | 2              |
| $7_6$          | 1     | -2    | 0             | $-\frac{3}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| $7_7$          | -1    | 1     | 0             | 1               | 0              |
| $3_1 \# 4_1$   | 0     | -1    | 0             | $-\frac{3}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| $8_1$          | -3    | 3     | 10            | -13             | 3              |
| $8_2$          | 0     | 1     | 6             | $-\frac{21}{2}$ | $\frac{3}{2}$  |
| $8_3$          | -4    | 0     | 6             | -11             | 5              |
| $8_4$          | -3    | 5     | 11            | -17             | 4              |
| $8_5$          | -1    | -3    | 9             | -14             | 2              |
| $8_6$          | -2    | 7     | 9             | $-\frac{27}{2}$ | $\frac{5}{2}$  |

| (Таблица 6: продолжение)          |       |       |         |                 |                |
|-----------------------------------|-------|-------|---------|-----------------|----------------|
| $K$                               | $V_2$ | $V_3$ | $V_4^1$ | $V_4^2$         | $V_4^3$        |
| 8 <sub>7</sub>                    | 2     | 2     | -3      | 7               | -1             |
| 8 <sub>8</sub>                    | 2     | 1     | -1      | $\frac{7}{2}$   | $-\frac{1}{2}$ |
| 8 <sub>9</sub>                    | -2    | 0     | 8       | -14             | 3              |
| 8 <sub>10</sub>                   | 3     | 3     | 0       | 3               | 0              |
| 8 <sub>11</sub>                   | -1    | 2     | 6       | $-\frac{11}{2}$ | $\frac{3}{2}$  |
| 8 <sub>12</sub>                   | -3    | 0     | 7       | $-\frac{17}{2}$ | $\frac{5}{2}$  |
| 8 <sub>13</sub>                   | 1     | 1     | -3      | 6               | -1             |
| 8 <sub>14</sub>                   | 0     | 0     | 3       | -6              | 1              |
| 8 <sub>15</sub>                   | 4     | -7    | 1       | $\frac{1}{2}$   | $\frac{3}{2}$  |
| 8 <sub>16</sub>                   | 1     | -1    | -3      | 6               | -1             |
| 8 <sub>17</sub>                   | -1    | -1    | 3       | -5              | 1              |
| 8 <sub>18</sub>                   | 1     | 0     | 2       | $-\frac{7}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| 8 <sub>19</sub>                   | 5     | 10    | 0       | $\frac{15}{2}$  | $\frac{5}{2}$  |
| 8 <sub>20</sub>                   | 2     | -2    | 0       | 1               | 0              |
| 8 <sub>21</sub>                   | 0     | 1     | 3       | $-\frac{9}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| 4 <sub>1</sub> #4 <sub>1</sub>    | -2    | 0     | 3       | -3              | 1              |
| 3 <sub>1</sub> #5 <sub>1</sub>    | 4     | -6    | 3       | 0               | 1              |
| 3 <sub>1</sub> *#5 <sub>2</sub> * | 3     | 4     | 2       | $-\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |

Теперь рассмотрим разложения узлов в модуле Васильева 4 порядка, когда в качестве базисных сингулярных узлов выбираются узлы, соответствующие хордовым диаграммам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Получим следующие разложения:

$$\begin{aligned}
3_1 &= -T - 2H + \bar{c}, & 6_1 &= T + 3H - \bar{b}, \\
5_1^* &= 5T + 2H + \bar{a} + 3\bar{b}, & 6_1^* &= -T + H - \bar{b} + \bar{c}, \\
5_1 &= -5T - 8H + \bar{a} + 3\bar{b} + 5\bar{c}, & 6_2^* &= -T - \bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}, \\
5_2^* &= 3T + H + \bar{b}, & 6_2 &= T + 2H - \bar{a} - 2\bar{b}, \\
5_2 &= -3T - 5H + \bar{b} + 3\bar{c}, & 6_3 &= -H + \bar{a} + \bar{b}, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

В этих разложениях коэффициенты при  $\bar{b}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{c}$  также являются инвариантами Васильева 4 порядка  $i_4^1$ ,  $i_4^2$ ,  $i_4^3$  соответственно.

Таблица 7: Инварианты Васильева 4 порядка

| $K$     | $i_4^1$ | $i_4^2$ | $i_4^3$ |
|---------|---------|---------|---------|
| $3_1^*$ | 0       | 0       | 0       |
| $3_1$   | 0       | 0       | 1       |
| $4_1$   | 0       | 0       | 0       |
| $5_1^*$ | 3       | 1       | 0       |
| $5_1$   | 3       | 1       | 5       |
| $5_2^*$ | 1       | 0       | 0       |
| $5_2$   | 1       | 0       | 3       |
| $6_1$   | -1      | 0       | 0       |
| $6_1^*$ | -1      | 0       | 1       |
| $6_2^*$ | -2      | -1      | 1       |
| $6_2$   | -2      | -1      | 0       |
| $6_3$   | 1       | 1       | 0       |

Эти инварианты могут быть выражены через инварианты  $V_4^1, V_4^2, V_4^3$ . Заметим, что инвариант Васильева  $i_4^3$  не является четным.

Если в разложениях (см. табл. 5) вместо сингулярных узлов  $\bar{a}, \bar{d}, \bar{g}$  возьмем сингулярные узлы, соответствующие другим базисным хордовым диаграммам, а именно,  $b, c, d$ , то коэффициенты будут инвариантами Васильева 4 порядка, указанными в [1].

**5.3. Теорема разложения.** Пространство инвариантов Васильева порядка не выше 2 двумерно (см. табл. 2). Оно порождено инвариантом порядка 0 (который принимает равные значения на всех узлах) и инвариантом порядка 2. В качестве базисного инварианта второго порядка возьмем  $V_2$  (табл. 6). Тогда произвольный инвариант  $v_2$  порядка не выше 2 будет пропорционален  $V_2$  с некоторым коэффициентом пропорциональности.

**Предложение 5.2** (см. [40, Proposition 4.2.9]). *Произвольный инвариант  $v_2$  порядка не выше 2 пропорционален  $V_2$  с коэффициентом пропорциональности  $v_2(T)$ :*

$$v_2(K) = V_2(K)v_2(T).$$

*Доказательство.* Методом неопределенных коэффициентов решим уравнение

$$v_2(K) = V_2(K)c.$$

Положим  $K = T$ , где  $T$  — трилистник. Аналогичное равенство справедливо и для сингулярных узлов с двумя двойными точками:

$$v_2(K_2^{\text{sing}}) = V_2(K_2^{\text{sing}})c.$$

Рассмотрим сингулярный узел трилистник с двумя двойными точками, для которого последнее равенство перепишем:

$$v_2(T_2^{\text{sing}}) = V_2(T_2^{\text{sing}})c.$$

По определению весовой системы, правая часть равенства есть  $W_2 \left( \left( \bigotimes \right) \right) c$ , т.е.

$$v_2(T_2^{\text{sing}}) = W_2 \left( \left( \bigotimes \right) \right) c.$$

Из формулы разложения трилистника (см. таблицу 5) в модуле второго порядка следует равенство:

$$v_2(T) = W_2 \left( \left( \bigotimes \right) \right) c.$$

Поскольку весовая система  $W_2$  соответствует базисному инварианту  $V_2$ , то  $W_2 \left( \bigotimes \right) = 1$ , откуда  $v_2(T) = c$ .  $\square$

Инварианты Васильева порядка не выше 3 образуют трехмерное пространство  $\mathcal{V}_3$  (см. табл. 2), которое порождается инвариантами  $V_0$ ,  $V_2$  и  $V_3$  порядков 0, 2 и 3, соответственно (см. табл. 6). Произвольный инвариант порядка не выше 3 выражается следующим образом (см. [40, Proposition 4.3.10]):

$$v_3(K) = V_3(K)(v_3(T) + v_3(H)) - V_2(K)v_3(H).$$

Доказательство последнего равенства проводится так же, как в случае второго порядка.

Пространство  $\mathcal{V}_4$  шестимерно (см. табл. 2). Оно порождено инвариантами  $V_0$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  и тремя инвариантами 4 порядка. В качестве базисных инвариантов 4 порядка возьмем  $V_4^1$ ,  $V_4^2$  и  $V_4^3$  (см. табл. 6). Тогда произвольный инвариант порядка не выше 4 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_4(K) = & v_2(K) \left[ \frac{1}{2}V_4(T) + \frac{1}{2}v_4(T^*) \right] + V_3(K) \left[ \frac{1}{2}v_4(T) - \frac{1}{2}v_4(T^*) \right] + \\ & + V_4^1(K)[4v_4(T) + v_4(H) - 3v_4(F) + V_4(P)] + V_4^2(K)[v_4(T) - v_4(F) + v_4(P)] + \\ & + V_4^3(K)[-v_4(T) + v_4(T^*) + v_4(P)]. \end{aligned}$$

На двойственном языке модулей Васильева предыдущие три формулы можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} K &= V_2(K)T, \\ K &= V_3(K)T + (V_3 - V_2)(K)H, \\ K &= \left( \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 + 4V_4^1 + V_4^2 - V_4^3 \right) (K)T + \left( \frac{1}{2}V_2 - \frac{1}{2}V_3 + V_4^3 \right) (K)T^* + \\ & + V_4^1(K)H + (-3V_4^1 - 2V_4^2)(K)F + (V_4^1 + V_4^2 + V_4^3)(K)P. \end{aligned}$$

Если в качестве базисных инвариантов рассматривать  $i_4^1$ ,  $i_4^2$ ,  $i_4^3$ , то в модуле Васильева 4 порядка любой узел  $K$  имеет следующее разложение:

$$\begin{aligned} K &= (V_3 - 3i_4^1 + 4i_4^2 + i_4^3)(K)T + i_4^3(K)T^* + \\ & + (-V_2 + V_3 - i_4^1 + i_4^2 + 2i_4^3)(K)H + (i_4^1 - 3i_4^2)(K)F + i_4^2(K)P. \end{aligned}$$

Последние две формулы разложений в  $\mathbb{V}_4$ , а также анализ таблицы 7 приводят к следующему заключению.

**Критерий целочисленности.** Любая целочисленная весовая система четвертого порядка восстанавливается до целочисленных инвариантов Васильева четвертого порядка.

Любая целочисленная весовая система, принимающая четное значение на хордовой диаграмме  $s$ , восстанавливается до целочисленных четных инвариантов Васильева четвертого порядка.

Не существует базиса из весовых систем 4 порядка, которые восстанавливались бы до целочисленных четных инвариантов Васильева 4 порядка.

Из примеров разложений в модуле  $\mathbb{V}_3$  (см. табл. 6) видно, что коэффициенты в разложениях зависят от выбора «базисных» узлов, которые могут быть как обычными, так и сингулярными.

В последних трех разложениях выбор в качестве базисных узлов  $T, H, F, P, T^*$  мотивирован тем, что эти узлы наиболее просты (в том смысле, что минимальное число двойных точек их диаграмм не превышает 5).

Эти же разложения можно переписать и в более общем виде, обозначив базисные узлы через  $X$  в модуле  $\mathbb{V}_2$ , через  $X$  и  $Y$  в  $\mathbb{V}_3$  и через  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  в модуле  $\mathbb{V}_4$ :

$$K = \frac{V_2(K)}{V_2(X)}X,$$

что равносильно следующему выражению:

$$\begin{vmatrix} V_2(X) & X \\ V_2(K) & K \end{vmatrix} = 0,$$

где  $V_2(X) \neq 0$ ;

$$\begin{vmatrix} V_2(X) & V_3(X) & X \\ V_2(Y) & V_3(Y) & Y \\ V_2(K) & V_3(K) & K \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{vmatrix} V_2(X) & V_3(X) \\ V_2(Y) & V_3(Y) \end{vmatrix} \neq 0;$$

и, наконец,

$$\begin{vmatrix} V_2(X_1) & V_3(X_1) & V_4^1(X_1) & V_4^2(X_1) & V_4^3(X_1) & X_1 \\ V_2(X_2) & V_3(X_2) & V_4^1(X_2) & V_4^2(X_2) & V_4^3(X_2) & X_2 \\ V_2(X_3) & V_3(X_3) & V_4^1(X_3) & V_4^2(X_3) & V_4^3(X_3) & X_3 \\ V_2(X_4) & V_3(X_4) & V_4^1(X_4) & V_4^2(X_4) & V_4^3(X_4) & X_4 \\ V_2(X_5) & V_3(X_5) & V_4^1(X_5) & V_4^2(X_5) & V_4^3(X_5) & X_5 \\ V_2(K) & V_3(K) & V_4^1(K) & V_4^2(K) & V_4^3(K) & K \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{vmatrix} V_2(X_1) & \dots & V_4^3(X_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_2(X_5) & \dots & V_4^3(X_5) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для произвольного порядка имеет место следующая теорема о разложении.

**Теорема 5.3.** *Любой узел  $K$  в модуле Васильева  $n$ -го порядка ( $n > 1$ ) имеет следующее разложение:*

$$K = \sum_{i=1}^{r+s} v_i(K)K_i,$$

где  $r$  — размерность пространства инвариантов Васильева порядка, меньшего или равного  $n - 1$ ,  $s$  — размерность пространства весовых систем порядка  $n$ ,  $v_i$  — инварианты Васильева порядка, меньшего или равного  $n$ ,  $K_i$  — фиксированные (базисные) узлы.

Последнее равенство можно переписать в таком виде:

$$\begin{vmatrix} V_2(X_1) & \dots & V_n^1(X_1) & \dots & V_n^s(X_1) & X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_2(X_{r+s}) & \dots & V_n^1(X_{r+s}) & \dots & V_n^s(X_{r+s}) & X_{r+s} \\ V_2(K) & \dots & V_n^1(K) & \dots & V_n^s(K) & K \end{vmatrix} = 0.$$

## ГЛАВА 2

## ФОРМУЛЫ ТИПА ЛАННА И ВИРО—ПОЛЯКА ДЛЯ ИНВАРИАНТОВ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В настоящей главе исследуется проблема интегрирования весовой системы до инварианта конечного типа и решается задача интегрирования весовой системы четвертого порядка до инварианта Васильева порядка 4.

### 6. ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА КАК ПРОИЗВОДНЫЕ

**6.1. Аналог теоремы Лейбница для инвариантов конечного типа.** Определим произведение двух числовых инвариантов узлов поточечно следующим образом:

$$(V_1 V_2)(K) = V_1(K) V_2(K).$$

Напомним известную *теорему Лейбница* для дифференцирования в случае многих переменных.

**Теорема 6.1.** Пусть  $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемые функции. Тогда

$$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \sum_{i=0}^n \sum_{I, J} \frac{\partial^i f}{\partial x_I} \frac{\partial^{n-i} g}{\partial x_J},$$

где  $I = \{a_1, \dots, a_i\} \in \{1, \dots, n\}$ ,  $J = \{a_{i+1}, \dots, a_n\} \in \{1, \dots, n\} - \{a_1, \dots, a_i\}$  — мультииндексы,  $\partial x_I = \partial x_{a_{i+1}} \dots \partial x_{a_i}$ ,  $\partial x_J = \partial x_{a_{i+1}} \dots \partial x_{a_n}$ .

Введем следующие обозначения для перекрестков:

$$x = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}, \quad + = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \quad - = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}.$$

Тогда скейн-соотношение может быть записано так:

$$V(x) = V(+)-V(-).$$

Рассмотрим сингулярный узел  $K_m^{\text{sing}}$  с  $m$  двойными точками  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Будем использовать обозначение  $x'$  для указания той двойной точки, в которой дифференцируется инвариант  $V$ :

$$V(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m) = V(x_1, \dots, +, \dots, x_m) - V(x_1, \dots, -, \dots, x_m).$$

Будем использовать обозначение  $\bar{x}$  для указания той двойной точки, в которой производится операция «усреднения» значения инварианта  $V$ :

$$V(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_m) = \frac{1}{2}(V(x_1, \dots, +, \dots, x_m) + V(x_1, \dots, -, \dots, x_m)).$$

Определим множество  $S_m$  как множество упорядоченных наборов из  $m$  двойных точек, каждая из которых наделена одним из знаков  $x'$  или  $\bar{x}$ , например,

$$S_2 = \{(\bar{x}\bar{x}), (\bar{x}x'), (x'\bar{x}), (x'x')\}.$$

Пусть  $* \in S_m$ . Определим  $\tilde{*} \in S_m$  как элемент, полученный из  $*$  заменой  $x'$  на  $\bar{x}$  и наоборот, например,

$$\widetilde{(\bar{x}x')} = (x'\bar{x}).$$

В этих терминах сформулируем теорему, аналогичную теореме Лейбница.

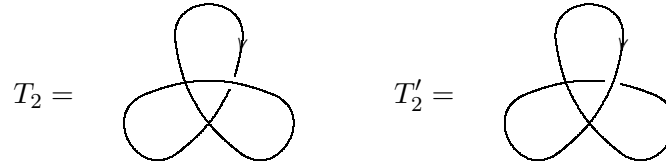
**Теорема 6.2.** Если  $V_1, V_2$  — инварианты узлов, то для узла  $K$  с  $m$  двойными точками имеет место равенство

$$(V_1 V_2)(x_1, \dots, x_m) = \sum_{* \in S_m} V_1(*) V_2(\tilde{*}).$$

**Следствие 6.3.** Если  $V_1, V_2$  — инварианты порядков  $m$  и  $n$  соответственно, то  $V_1 V_2$  — инвариант порядка  $m + n$ .

**6.2. Аналог формулы Лагранжа.** Пусть  $K$  и  $K'$  — сингулярные узлы, имеющие одинаковые хордовые диаграммы с  $m$  хордами. Напомним, что для инвариантов порядка не выше  $m$  имеет место равенство  $V_m(K) = V_m(K')$ , даже если узлы  $K$  и  $K'$  неэквивалентны (см. следующий пример).

**Пример 6.**



$$V_2(T_2) = V_2(T'_2).$$

Определим сингулярную изотопию  $\Phi : K \rightarrow K'$  как последовательность изотопий пространства  $\mathbb{R}^3$  и замен перекрестков, переводящую узел  $K$  в узел  $K'$ . Сингулярные отображения, соответствующие заменам типов перекрестков, будем обозначать  $\{\phi_i : i = 1, \dots, t\}$ . Определим индекс  $\varepsilon(\phi_i)$  сингулярного отображения как начальный знак перекрестка. В примере 6

$$\begin{aligned} \phi_1 : T_2 &\rightarrow T'_2, & \varepsilon(\phi_1) &= 1, \\ \phi'_1 : T'_2 &\rightarrow T_2, & \varepsilon(\phi'_1) &= -1. \end{aligned}$$

Если  $\phi$  — сингулярная изотопия из  $K$  в  $K'$ , то для инварианта  $V$  и его производной  $V'$  имеет место соотношение

$$V(K) - V(K') = \sum_{i=1}^t V'(\phi_i) \varepsilon(\phi_i).$$

Эта формула является аналогом формулы Лагранжа  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ , где  $x_1 < c < x_2$ .

**6.3. Интегрирование.** Переход от инварианта  $n$ -го порядка, заданного на узлах с  $n$  двойными точками (т.е. от весовой системы  $n$ -го порядка) к инварианту  $n$ -го порядка, определенному на обычных узлах, называется интегрированием. Проблема интегрирования касается следующих вопросов: является ли инвариант, определенный на множестве узлов  $\mathcal{K}_n^{\text{sing}}$  с  $n$  двойными точками, производной инварианта, определенного на множестве  $\mathcal{K}$  обычных узлов, и как по весовой функции построить инвариант Васильева соответствующего порядка? В [27] был описан первый шаг интегрирования: для произвольной весовой системы  $W_n$ , определенной на диаграммах с  $n$  хордами, была дана явная комбинаторная формула для инварианта на  $(n - 1)$ -сингулярных узлах, производная которого совпадает с  $W$ .

Пусть  $(K_{n-1}^{\text{sing}})$  — сингулярный узел с  $n - 1$  сингулярными точками. Обозначим через  $a_1, \dots, a_m$  множество двойных точек проекции узла  $K_{n-1}^{\text{sing}}$ . Тогда следующая формула дает значения инварианта, определенного на узлах с  $(n - 1)$  сингулярными точками, производная которого совпадает с весовой системой  $W_n$ , определенной на узлах с  $n$  сингулярными точками:

$$V(K_{n-1}^{\text{sing}}) = \frac{1}{2} \sum_{a_i} \varepsilon(a_i) W_n(K_{n-1+a_i}^{\text{sing}}),$$

где  $(K_{n-1+a_i}^{\text{sing}})$  — узел с  $n$  сингулярными точками,  $n - 1$  из которых совпадают с сингулярными точками узла  $(K_{n-1}^{\text{sing}})$ , а еще одна точка возникает при склеивании ветвей в окрестности двойной точки  $a_i$ . Суммирование ведется по всем двойным (но не сингулярным!) точкам проекции узла  $K_{n-1}^{\text{sing}}$ .

**Теорема 6.4** (см. [27, Theorem 3.6]). 1)  $V(K_{n-1}^{\text{sing}})$  — изотопический инвариант узлов с  $n - 1$  двойными точками.

2)  $V(x_1, \dots, x_{n-1}, +) - V(x_1, \dots, x_{n-1}, -) = W_n(x_1, \dots, x_n)$ .

3)  $V(K_{n-1}^{\text{sing}})$  удовлетворяет одночленному и четырехчленному соотношениям.

**6.4. Координаты на узле.** Пусть  $K$  — узел и  $D_K$  — диаграмма этого узла. На  $D_K$  отметим точку  $a$ , которая не совпадает ни с одной двойной точкой проекции; назовем ее «началом». Выбор точки  $a$  индуцирует порядок на  $D_K$ . Пусть  $x$  и  $y$  — двойные точки плоской проекции. Будем считать, что  $x < y$ , если при движении вдоль узла от отмеченной точки  $a$  в направлении обхода сначала проходим точку  $x$ , затем точку  $y$ .

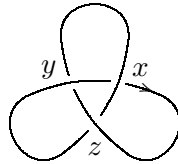
Напомним, что на диаграмме  $D_K$  в окрестности каждой двойной точки линия, проходящая снизу («переход»), изображается дугой с разрывом, а линия, проходящая сверху («проход»), изображается сплошной дугой.

Каждой двойной точке  $x$  диаграммы  $D_K$  узла  $K$  поставим в соответствие два целых числа  $\delta_x$  и  $\varepsilon_x$  по следующим правилам:

- 1) если при движении от отмеченной точки в направлении ориентации узла сначала проходим точку  $x$  по переходу, а затем по проходу, то  $\delta_x = 0$ ; в противном случае  $\delta_x = 1$ ;
- 2) двойной точке  $x$  проекции узла  $D$  поставим в соответствие число  $\varepsilon_x = \pm 1$  в зависимости от типа перекрестка:

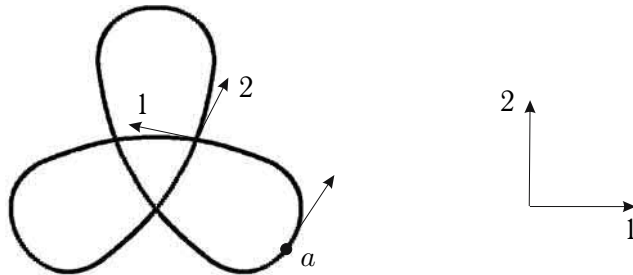
$$\varepsilon_x \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) = 1, \quad \varepsilon_x \left( \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} \right) = -1.$$

**Пример 7.** Координаты на трилистнике.



$$\begin{aligned} \delta_x &= 1, & \varepsilon_x &= 1, \\ \delta_y &= 1, & \varepsilon_y &= 1, \\ \delta_z &= 0, & \varepsilon_z &= 1. \end{aligned}$$

**6.5. Разложение инварианта в ряд Тейлора.** Рассмотрим сингулярный узел  $K_n^{\text{sing}}$  и его диаграмму  $D_{K_n^{\text{sing}}}$  и зафиксируем «начало»  $a$  на  $D_{K_n^{\text{sing}}}$ . Каждой сингулярной точке  $x$  поставим в соответствие знак  $\sigma = \pm 1$ . Точке самопересечения знак приписывается следующим образом: в плоскости задан ориентирующий репер [1, 2] (см. рис. ниже). Движемся по направленному узлу от точки  $a$ ; когда в первый раз встречаем точку самопересечения, то на касательном векторе этой ветви ставим номер 1; когда второй раз встречаем эту же точку, на этой ветви ставим номер 2. Таким образом, точке пересечения отвечает репер, ориентация которого либо совпадает с ориентирующим репером в  $\mathbb{R}^2$ , либо противоположна ему. В первом случае точка имеет знак «+», во втором — знак «-».



Заменяя каждую сингулярную точку на один из возможных перекрестков, из  $K_n^{\text{sing}}$  получим  $2^n$  различных узлов  $K_i$ . Множество таких узлов обозначим  $S_K$ ,  $S_K = \{K_i \mid i = 1, \dots, 2^n\}$ , и множество их диаграмм обозначим  $S_{D_K}$ ,  $S_{D_K} = \{D_{K_i} \mid i = 1, \dots, 2^n\}$ .

Нетрудно проверить, что  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  связаны следующим соотношением:

$$\varepsilon_x(D_K) = (-1)^{\delta_x(D_K)} \sigma_x(D_{K^{\text{sing}}}) = (1 - 2\delta_x(D_K)) \sigma_x(D_{K^{\text{sing}}}).$$

Пусть отображение  $f : S_D \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $D_{K_i} \in S_D$  и  $x$  — двойная точка диаграммы  $D_{K_i}$ . Положим

$$(\Delta_x f)(D_{K_i}) = f(D_{K_i} + x) - f(D_{K_i}),$$



где  $(D_{K_i} + x)$  — диаграмма узла, полученная из  $D_{K_i}$  заменой перекрестка в точке  $x$  на перекресток с противоположным значением  $\varepsilon_x$ .

Пусть  $|D_K|$  — число перекрестков диаграммы узла  $K$ . Обозначим через  $P_m$  набор из  $m$  ( $m \leq |D_K|$ ) двойных точек  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$  диаграммы  $D_{K_i}$ ,  $\{P_n\}$  — множество таких наборов и  $\mathcal{P} = \bigcup_{m \geq 0}^{D_K} \{P_m\}$  — совокупность всех таких множеств. Введем аналогичные обозначения и в случае сингулярных узлов:  $P_m^{\text{sing}}$  и  $\mathcal{P}^{\text{sing}}$  для соответствующих множеств сингулярных точек. Обозначим через  $\Delta_P$  композицию

$$\Delta_{x_1} \circ \Delta_{x_2} \circ \dots \circ \Delta_{x_l}, \quad x_i \in P.$$

Отметим, что

$$\Delta_x \Delta_y f = \Delta_y \Delta_x f.$$

Положим

$$\varepsilon_P(D_K) = \prod_{x \in P} \varepsilon_x(D_K), \quad \delta_P(D_K) = \prod_{x \in P} \delta_x(D_K).$$

Назовем диаграмму узла убывающей, если  $\delta_x = 0$  в любой двойной точке  $x$  этой диаграммы. Убывающую диаграмму обозначим  $D_K^0$ . Заметим, что  $D_K^0$  представляет тривиальный узел.

**Предложение 6.5** (см. [40, Proposition 2.3]). *Пусть  $f : S_D \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $D_K, D_K^0 \in S_D$ . Тогда имеет место следующее разложение:*

$$f(D_K) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \delta_P(D_K) (\Delta_P f)(D_K^0).$$

Введем обозначение  $c_P = \Delta_P f(D_K^0)$ . Тогда

$$f(D_K) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \delta_P(D_K) c_P.$$

**Предложение 6.6** (см. [40, Proposition 2.4]). *Пусть  $f : S_D \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Тогда следующие два условия эквивалентны:*

- 1)  $\Delta_P f = 0$  для  $\forall P_{m+1}^{\text{sing}}$ , состоящего из  $(m+1)$  точек.
- 2)  $(\Delta_P f)(D_K) = 0$  для любого  $P_k^{\text{sing}}$ , количество элементов  $k$  которого строго превышает  $m$ .

Когда выполняются эти условия, говорят, что  $f$  имеет порядок не выше  $m$ .

**Предложение 6.7.** *Для любого инварианта порядка не выше  $m$  существует аналог разложения в ряд Тейлора:*

$$2^m f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\leq m}} \varepsilon_P c_P.$$

где суммирование ведется по всем подмножествам  $P$  множества  $\mathcal{P}$  двойных точек диаграммы узла  $K$ , т.е.  $\mathcal{P} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $c_P(K) = \Delta_{x_1} \circ \Delta_{x_2} \circ \dots \circ \Delta_{x_n}$ ,  $\Delta_{x_i} = (\Delta_{x_i} f)(K) = f(K + x_i) - f(K - x_i)$ , узлы  $K + x_i$  и  $K - x_i$  получаются из узла  $K$  заменой перекрестков в точке  $x_i$  на перекрестки со значениями  $\delta$ , равными соответственно 1 и 0.

Рассмотрим узел  $K$  и его диаграмму  $D_K$  с  $n$  двойными точками  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Пусть  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $l \leq n$ . Преобразуем  $l$  двойных точек диаграммы в сингулярные точки  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\}$  и получим диаграмму  $D_{K_l^{\text{sing}}}$  сингулярного узла  $K_l^{\text{sing}}$ . Пусть  $f$  — инвариант порядка  $l$ . Тогда (см. [40, Proposition 2.5])

$$f(K_l^{\text{sing}}) = (-1)^{|P|} \varepsilon_P(D_{K_l^{\text{sing}}}) (\Delta_P f)(D_{K_l^{\text{sing}}}),$$

где  $|P| = l$ .

## 7. ФОРМУЛЫ ЛАННА

Техника получения значений инвариантов Васильева из скейн-соотношения базируется на последовательном преобразовании исходного узла в линейную комбинацию других узлов и сингулярных узлов или наоборот, сингулярного узла с  $m$  двойными точками в линейную комбинацию  $2^m$  обычных узлов.

Из примера вычисления инвариантов на узле «восьмерка» видно, что числовые значения могут быть получены при условии, что известны значения этих же инвариантов на трилистнике. Значения инвариантов на узле  $F$  ( $5_2^*$ ) могут быть получены при условии, что вычислены инварианты узлов  $T$  и  $H$  и т. д.

Формулы, описываемые в настоящем разделе, позволяют вычислить значение инварианта Васильева на произвольном узле  $K$  по его диаграмме, не вовлекая в рассмотрение другие узлы.

**7.1. Формулы Ланна для инвариантов нулевого и первого порядков.** Инвариант Васильева порядка не выше 0 тривиален. Действительно, из предложения 6.5 имеем следующее разложение:

$$f(D_K) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ |P| \leq 0}} \delta_P(D_K) c_P,$$

так что откуда слагаемое, соответствующее порядку 0, имеет вид  $f(D_K) = c_0$ , а остальные слагаемые равны нулю. Таким образом, для произвольных узлов  $K_1$  и  $K_2$  имеем  $f(D_{K_1}) = f(D_{K_2})$ . Сдвигая значение инварианта на константу, мы можем считать коэффициент  $c_0$  равным нулю.

**Предложение 7.1** (см. [40, Proposition 4.1]). *Инвариант Васильева порядка не выше 1 тривиален.*

*Доказательство.* Из разложения

$$f(D_K) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \delta_P(D_K) c_P$$

следует, что слагаемые, соответствующие порядку 1, имеют вид

$$f(D_K) = c_0 + \sum_{x \in \mathcal{P}_1} \delta_x(D_K) c_x.$$

Поскольку коэффициент  $c_0$  равен нулю и все коэффициенты  $c_x$  также равны нулю (см. [40]), имеем  $f_1 = 0$ .  $\square$

**7.2. Формулы Ланна для инвариантов второго и третьего порядков.**

**Теорема 7.2** (см. [40, Theorem 1, Sec. (4.2.9)]). *Базисный четный целочисленный инвариант Васильева второго порядка, принимающий значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике, задается следующей формулой:*

$$V_2(K) = \frac{1}{2} \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2} (-1)^{\delta_x + \delta_y} W_2(\{x,y\}) \varepsilon_x \varepsilon_y [\delta_x(1 - \delta_y) + \delta_y(1 - \delta_x)],$$

где  $W_2(\{x,y\})$  — значение весовой системы  $W_2$  (из примера 3) на диаграмме с двумя хордами, отвечающими двойным точкам  $x$  и  $y$ .

В модифицированном виде представим базисный инвариант  $V_3$  из [40].

**Теорема 7.3** (см. [40]). *Базисный нечетный целочисленный инвариант третьего порядка, принимающий значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике, задается следующей формулой:*

$$V_3(K) = \frac{1}{2} \sum_{\{x,y,z\} \in \mathcal{P}_3} (-1)^{\delta_x + \delta_y + \delta_z} W_3(\{x,y,z\}) \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \cdot [\delta_y(1 - \delta_x)(1 - \delta_z) - \delta_x \delta_z(1 - \delta_y)],$$

где  $W_3(\{x,y,z\})$  — значение весовой системы  $W_3$  из примера 4 на хордовой диаграмме, отвечающей двойным точкам  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**Замечание 1.** По аналогии с приведенными выше формулами можно рассмотреть следующую формулу для базисных инвариантов 4 порядка:

$$\alpha_4^{1,2,3}(K) = 1/2 \sum_{\{x,y,z,t\} \in P_4} W_4^{1,2,3}(\{x,y,z,t\}) \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \varepsilon_t \cdot [\delta_x \delta_z (1 - \delta_y)(1 - \delta_t) + \delta_y \delta_t (1 - \delta_x)(1 - \delta_z)].$$

Здесь  $\alpha_4^i$  не является инвариантом, но при подходящем выборе базисных весовых функций  $W_4^i$  и «хорошем» выборе отмеченной точки на каждом узле  $\alpha_4^{1,2,3}$  совпадают с  $V_4^{1,2,3}$  [1, табл. 5.1].

Аналогичные формулы можно построить и для инвариантов произвольного порядка  $n$ :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n^i(K) = & \frac{1}{2} \sum_{\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in P_n} W_n^i(\{x_1, x_2, x_3, \dots\}) \varepsilon_{x_1} \varepsilon_{x_2} \varepsilon_{x_3} \dots \\ & \times \left[ \delta_{x_1} \delta_{x_3} \dots (1 - \delta_{x_2})(1 - \delta_{x_4}) \dots \pm \delta_{x_2} \delta_{x_4} \dots (1 - \delta_{x_1})(1 - \delta_{x_3}) \dots \right]. \end{aligned}$$

Однако с помощью формул такого вида можно получить инварианты на ограниченном классе узлов, а именно,  $\tilde{V}_n$  дает значения инварианта  $n$ -го порядка для торических узлов типа  $(2, n)$  (см. п. 10). При некоторых дополнительных условиях, накладываемых на выбор отмеченной (начальной) точки и выбор весовой системы соответствующего порядка,  $\tilde{V}_n$  может задавать инвариант  $n$ -го порядка.

## 8. ФОРМУЛЫ ВИРО—ПОЛЯКА

**8.1. Формулы Виро—Поляка для инварианта Васильева второго порядка.** Пусть  $K$  — некоторый пунктированный узел и  $G$  — его диаграмма Гаусса. Зафиксируем поддиаграмму  $A$  диаграммы  $G$ . Обозначим через  $\langle A, G \rangle$  сумму знаков всех поддиаграмм  $G$ , имеющих комбинаторный тип  $A$ . Положим, что для целочисленной формальной линейной комбинации поддиаграмм  $\sum_{i=1}^k n_i A_i$  по определению выполняется равенство

$$\left\langle \sum_{i=1}^k n_i A_i, G \right\rangle = \sum_{i=1}^k n_i \langle A_i, G \rangle.$$

**Теорема 8.1** (см. [48, Theorem 1]). *Если  $G$  — диаграмма Гаусса узла  $K$ , то*

$$v_2(K) = \left\langle \left( \text{Diagram with two crossing arrows in a circle} \right), G \right\rangle,$$

где  $v_2(K)$  — базисный целочисленный четный инвариант Васильева порядка 2, который принимает значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике.

**8.2. Формулы Виро—Поляка для инварианта Васильева третьего порядка.**

**Теорема 8.2** (см. [48, Theorem 2]). *Если  $G$  — диаграмма Гаусса узла  $K$ , то*

$$v_3(K) = \left\langle \frac{1}{2} \left( \text{Diagram with three crossing arrows in a circle} \right) + \left( \text{Diagram with two crossing arrows in a circle} \right), G \right\rangle,$$

где  $v_3(K)$  — базисный нечетный инвариант Васильева порядка 3, который принимает значение 0 на тривиальном узле и значение 1 на трилистнике.

**8.3. Новая формула инварианта Васильева третьего порядка.** Покажем, что базисный целочисленный инвариант Васильева третьего порядка выражается формулой с целыми коэффициентами.

**Теорема 8.3.** Пусть  $v_3$  — базисный целочисленный нечетный инвариант Васильева третьего порядка, принимающий значения 0 на тривиальном узле и 1 на трилистнике. Тогда имеет место равенство

$$v_3(K) = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ + \\ \text{Diagram 2} \\ + \\ \text{Diagram 3} \\ + \\ \text{Diagram 4} \\ + \\ \text{Diagram 5} \end{array}, G \right\rangle,$$

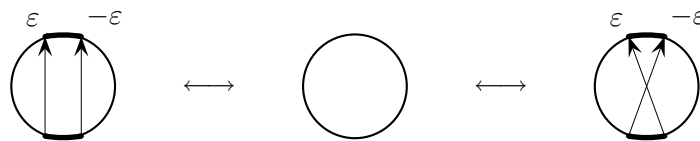
где правая часть рассматривается в классе пунктированных диаграмм.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно показать независимость правой части при движениях Рейдемейстера и что полученный инвариант имеет порядок три.

Первое движение Рейдемейстера.

Добавление (уничтожение) петли при первом движении Рейдемейстера выражается в добавлении (уничтожении) изолированной стрелки в диаграмме Гаусса, что не влияет на количество и знаки поддиаграмм, вносящих вклад в формулу. Переход отмеченной точки через изолированную стрелку также не изменит значение  $v_3$ .

На диаграммах Гаусса второе движение Рейдемейстера соответствует добавлению (уничтожению) двух стрелок с разными знаками, между концами и началами которых не начинаются и не заканчиваются другие стрелки:

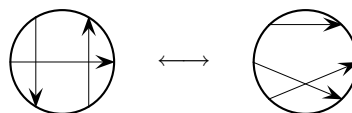


Обе стрелки одновременно с какой-либо третьей дают поддиаграмму, не входящую в доказываемую формулу, а количество поддиаграмм, содержащих одну из стрелок, совпадает с количеством поддиаграмм, содержащих другую.

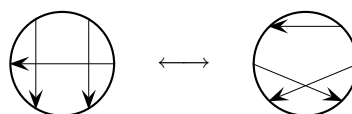
Третье движение Рейдемейстера.

В зависимости от порядка и направления прохождения линий возможны две принципиально различные ситуации на диаграммах Гаусса:

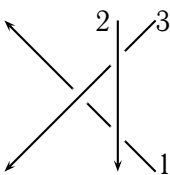
(а) когда диаграмма, вносящая вклад в формулу, переходит в диаграмму, не входящую в формулу



(b) обе диаграммы не встречаются в формуле



Для доказательства достаточно показать независимость формулы при третьем движении Рейдемейстера для случая (а).



При замыкании линий в соответствии с указанным порядком прохождения ветвей (см. рис.) возникнет по крайней мере еще одна двойная точка. Можно проверить, что количества существенных поддиаграмм в исходной диаграмме до и после движения находятся во взаимно однозначном соответствии и знаки этих поддиаграмм совпадают, т.е. совпадают алгебраические суммы поддиаграмм, входящих в (11). Аналогично рассматривается ситуация с большим числом «новых» двойных точек.

Докажем теперь, что порядок инварианта  $v_3(K)$  равен трем.

Пусть  $K^{\text{sing}}$  — сингулярный узел с двойной точкой  $x$ . Значение инварианта  $V$  на нем вычисляется с помощью скейн-соотношения, которое на языке стрелочно-хордовых диаграмм выглядит следующим образом:

$$\langle A, \bigcirc \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle A, \bigcirc^+ \rangle - \langle A, \bigcirc^- \rangle$$

Это правило индуктивно распространяется на стрелочно-хордовые диаграммы Гаусса с любым конечным числом хорд без стрелок.  $\square$

**Лемма 8.4.** Пусть инвариант задан стрелочной диаграммной формулой  $\langle A, G \rangle$ , в которой поддиаграммы, входящие в  $A$ , содержат не более  $n$  стрелок. Тогда инвариант  $\langle A, G \rangle$  имеет порядок не выше  $n$ .

*Доказательство.* Пусть  $K^{\text{sing}}$  — сингулярный узел с  $n+1$  двойными точками и  $G$  — его стрелочно-хордовая диаграмма. Покажем, что  $\langle A, G \rangle = 0$ .

По индуктивному правилу преобразуем стрелочно-хордовую диаграмму  $G$  в линейную комбинацию стрелочных (их получится  $2^{n+1}$ ). В каждом слагаемом берем поддиаграммы комбинаторного типа  $A$ . Сразу все потомки исходных  $(n+1)$  хорд без стрелок в них входить не могут по условию леммы. Та  $(n+1)$ -я хорда, которая не входит в поддиаграмму, по индуктивному правилу «преобразуется» в две стрелки, а диаграммы, которые ее содержат, имеют противоположные знаки. Таким образом, суммарный вклад этих поддиаграмм равен нулю. Отсюда следует, что  $\langle A, G \rangle$  имеет порядок не выше  $n$ .  $\square$

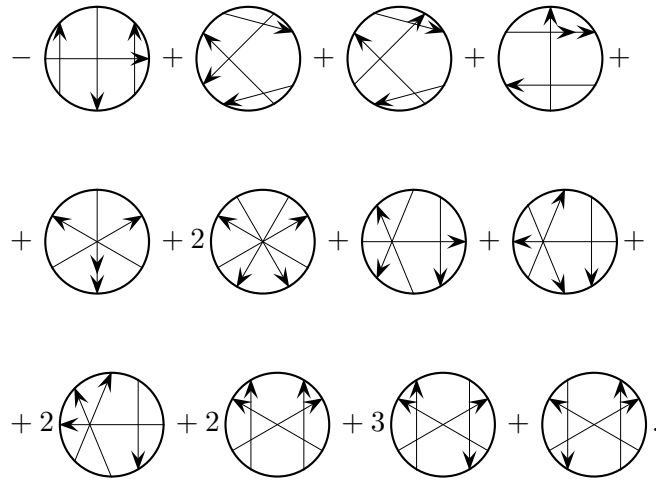
В соответствии с этой леммой рассматриваемый инвариант имеет порядок 3. Так как  $v_3(T) = 1$ ,  $v_3(H) = 0$ , получаем, что наш инвариант совпадает с инвариантом Ланна.

## 9. ДИАГРАММНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНВАРИАНТОВ 4 ПОРЯДКА

### 9.1. Формула Виро—Поляка для инварианта Васильева четвертого порядка.

**Теорема 9.1** (см. [48, Theorem 4]). Если  $G$  — диаграмма Гаусса узла  $K$ , то  $V_4^1(K) = \langle A, G \rangle$ , где  $V_4^1(K)$  — аддитивный четный инвариант Васильева порядка 4, который принимает значение 0 на тривиальном узле, значение 3 на трилистнике и значение 2 на узле восьмерка (узел типа  $4_1$ ) и  $A$  имеет вид

$$A = \bigcirc_1 + 2 \bigcirc_2 + 6 \bigcirc_3 + 2 \bigcirc_4 -$$



**9.2. Анализ формулы Виро—Поляка для инварианта Васильева четвертого порядка.** Разложения в модуле Васильева 4 порядка (см. таблицу 5) для узлов  $T, T^*, H, F, P$  преобразуем в следующие равенства:

$$T + T^* + 2H = c, \quad F - 3T - H = b, \quad P - 2H - 5T = g.$$

Прямые вычисления инвариантов 4 порядка по формуле из теоремы Виро—Поляка дают следующие значения этих инвариантов:

$$V_4(T) = V_4(T^*) = 3, \quad V_4(H) = 2, \quad V_4(F) = 9, \quad W_4(a) = 0,$$

которые перепишем в виде:

$$T = T^* = 3, \quad H = 2, \quad F = 9, \quad a = 0.$$

Подставим эти выражения в предыдущие равенства и получим значения весовых систем на хордовых диаграммах  $c$  и  $b$ :  $W_4(c) = 10, W_4(b) = -2$ . Из четырехчленного соотношения  $g = a + 3b + c$  следует, что значение соответствующей весовой системы на хордовой диаграмме  $g$  равно 4. Подставляя это значение в формулу разложения  $P - 2H - 5T = g$ , получаем равенство  $P = 23$ , т.е.  $V_4(P) = 23$ . Однако вычисление  $V_4(P)$  по формуле Виро—Поляка дает значение 15.

Пользуясь аналогичным рассуждением, нетрудно показать, что для узлов с диаграммой Гаусса, содержащей поддиаграмму типа  $g$ , формула Виро—Поляка дает неверные значения.

**9.3. Новая формула для инвариантов Васильева четвертого порядка.**

**Теорема 9.2.** Пусть  $W_4$  — произвольная весовая система 4 порядка, принимающая значение 0 на хордовой диаграмме  $g$ . Тогда следующая формула задает инвариант Васильева 4 порядка:

$$V_4(K) = \frac{1}{2}W_4\left(\text{diag}_1\right) \langle \text{diag}_2, G \rangle + \frac{1}{4}W_4\left(\text{diag}_3\right) \langle \text{diag}_4 + \text{diag}_5, G \rangle + \\ + \frac{1}{2}W_4\left(\text{diag}_6\right) \langle \text{diag}_7 + \text{diag}_8, G \rangle +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} W_4 \left( \text{circle with 4 chords} \right) \left\langle \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows}, G \right\rangle + \\
 & + \frac{1}{4} W_4 \left( \text{circle with 4 chords} \right) \left\langle \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows}, G \right\rangle + \\
 & + \frac{1}{4} W_4 \left( \text{circle with 4 chords} \right) \left\langle \text{circle with 4 arrows} + \text{circle with 4 arrows}, G \right\rangle,
 \end{aligned}$$

где  $G$  — диаграмма Гаусса узла  $K$ .

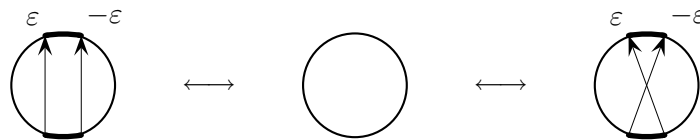
*Доказательство.* Для доказательства достаточно показать независимость правой части при движениях Рейдемейстера.

Первое движение Рейдемейстера.

Добавление (уничтожение) петли при первом движении Рейдемейстера выражается в добавлении (уничтожении) изолированной стрелки в диаграмме Гаусса, что не влияет на количество и знаки поддиаграмм, вносящих вклад в формулу.

Второе движение Рейдемейстера.

На диаграммах Гаусса второе движение Рейдемейстера соответствует добавлению (уничтожению) двух стрелок с разными знаками, между концами и началами которых не начинаются и не заканчиваются другие стрелки.



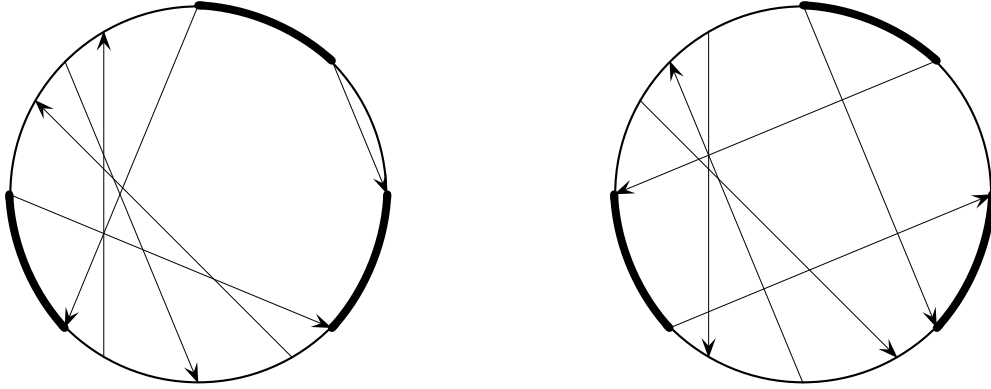
Обе стрелки одновременно с какой-либо третьей дают поддиаграмму, не входящую в доказываемую формулу. А количество поддиаграмм, содержащих одну из стрелок, совпадает с количеством поддиаграмм, содержащих другую.

Третье движение Рейдемейстера.

Третьему движению Рейдемейстера соответствуют восемь движений на диаграммах Гаусса (см. (4) и (5)). Как показал О.-П. Остлунд [46], учитывать шесть движений (4) нет необходимости, т.е. существенными являются лишь следующие движения:



Все три стрелки одновременно до движения и после него не меняют формулу, что легко проверяется простым перебором возможных добавлений произвольной четвертой стрелки, которая не начинается и не оканчивается на выделенных дугах окружности.



Каждая стрелка в отдельности не меняет формулу, так как до и после движения Рейдемейстера она меняет свое положение лишь относительно выделенных дуг окружности и не изменяет конфигурацию стрелок, не участвующих в третьем движении Рейдемейстера.

Две из трех стрелок, участвующих в движении, могут добавить или уничтожить стрелочные диаграммы, которые образуют линейную комбинацию весовых функций на соответствующих хордовых диаграммах. По модулю четырехчленного соотношения такие комбинации равны весу хордовой диаграммы  $g$ . Поскольку рассматриваемые весовые системы принимают значение 0 на этой диаграмме, соответствующие линейные комбинации, а значит и диаграммы, две из трех стрелок которых участвуют в движении, не меняют значения инварианта.  $\square$

Для демонстрации доказательства рассмотрим пример узла  $5_1$ . На рис. изображены диаграммы Гаусса этого узла до и после третьего движения Рейдемейстера. Из рисунка видно, что никакая поддиаграмма диаграммы Гаусса, расположенной слева, не входит в выражение инварианта  $V_4(K)$ , т.е.  $V_4(G_1(P)) = 0$ .

Однако диаграмма Гаусса, расположенная справа, содержит поддиаграммы, встречающиеся в формуле. С учетом знаков всех стрелок получаем следующую линейную комбинацию значений весовой системы, выражающую значение инварианта  $V_4$ :

$$V_4(G_2(P)) = 2W_4(e) + 2W_4(f).$$

По модулю четырехчленного соотношения, связывающего хордовые диаграммы  $e, f$  и  $g$ , правая часть последнего равенства эквивалентна  $2W_4(g)$ . По условию теоремы  $W_4$  принимает нулевое значение на хордовой диаграмме  $g$ . Следовательно,  $V_4(G_2(P)) = 0$ , т.е.  $V_4(G_1(P)) = V_4(G_2(P))$ .

Если в качестве  $W_4$  возьмем базисные весовые системы  $W_4^2$  и  $W_4^3$ , то получим инварианты  $V_4^2$  и  $V_4^3$ , которые вместе с  $V_4^1$  образуют базис в пространстве инвариантов четвертого порядка.

Нетрудно проверить, что инвариант  $V_4^1$  соответствует весовой системе  $\tilde{W}_4^1 = 7W_4^1 - W_4^3$ , где  $W_4^1$  и  $W_4^3$  — весовые системы из примера 5.

## 10. ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА ДЛЯ ТОРИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Данный раздел посвящен вычислению инвариантов Васильева для торических узлов. Основной результат — это доказательство рекуррентной формулы, с помощью которой инвариант Васильева любого заданного порядка для торического узла типа  $(2, n)$  явно выражается через инварианты для узлов типа  $(2, n - 2)$  и  $(2, n - 4)$ .

По определению, торический узел задается простой замкнутой кривой на торе  $T^2$ . Поскольку  $T^2 = S^1 \times S^1$ , то на торе можно выбрать систему координат таким образом, что каждая точка на нем будет определяться парой комплексных чисел  $\{\exp(i\varphi), \exp(i\psi)\}$  для некоторых  $0 < \varphi, \psi < 2\pi$ .



Пусть  $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — стандартное вложение тора в  $\mathbb{R}^3$  (см. [3]), т.е.

$$f(\exp(i\varphi), \exp(i\psi)) = \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi, \psi, \frac{1}{2} \sin \varphi \right).$$

Теперь зафиксируем два взаимно простых натуральных числа  $m, n$  и рассмотрим отображение  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданное следующим образом:

$$g(\exp(2\pi it)) = f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int)), \quad t \in [0, 1].$$

Обозначим образ отображения  $g$  через  $K_{m,n}$ . Очевидно, что  $K_{m,n}$  лежит на торе  $T^2$ , стандартно вложенном в  $\mathbb{R}^3$ , и  $g$  задает гомеоморфизм между  $S^1$  и  $K_{m,n}$ , так что  $K_{m,n}$  — это узел. Узел  $K_{m,n}$  будем называть торическим узлом типа  $(m, n)$ . Таким образом, трилистник — это торический узел типа  $(2, 3)$ .

Пусть  $(m, n)$  и  $(m', n')$  — две пары взаимно простых натуральных чисел, больших единицы. Хорошо известно [3], что два торических узла  $K_{m,n}$  и  $K_{m',n'}$  изотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены равенства  $m = m', n = n'$  или  $m = n', n = m'$ . При этом все такие торические узлы заузлены.

Пусть  $K = K_{2,n}$  — торический узел типа  $(2, n)$ , так что  $n$  нечетно по условию. Тор  $f(T^2)$  расположен в пространстве  $\mathbb{R}^3$  так, что его осевая линия лежит в плоскости  $(x, y)$ . Спроектируем на плоскость  $(x, y)$  ортогонально вдоль оси  $z$  узел  $K$ :

$$\pi : K \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Если мы при этом укажем в каждой двойной точке, какая ветвь узла выше (непрерывная линия), а какая ниже (линия с разрывом), т.е. укажем тип перекрестка, то полученная фигура называется диаграммой узла  $K$ . Будем обозначать ее через  $D_K = D_{K(2,n)}$ . Ясно, что все перекрестки имеют один и тот же комбинаторный тип.

Каждому перекрестку поставим в соответствие число  $\varepsilon_x$ , равное  $+1$  или  $-1$  в зависимости от взаимного расположения ветвей:



Зафиксируем  $m$  перекрестков диаграммы  $D_K$ ,  $m \leq n$ . Склеим ветви каждого перекрестка так, чтобы получились двойные точки трансверсального самопересечения. Получившийся в результате этой операции сингулярный узел обозначим через  $(2, n)^m$ .

**Лемма 10.1.** *Значение инварианта  $V$  конечного порядка на сингулярном торическом узле  $(2, n)^m$  не зависит от расположения двойных точек.*

*Доказательство.* Пусть  $x, y$  — пара находящихся рядом двойных точек диаграммы узла (т.е. при движении вдоль узла от точки  $x$  к  $y$  другие двойные точки не встречаются). Для определенности положим  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 1$ . Узел с отмеченными точками  $x$  и  $y$  обозначим через  $K_{++}$ , а сингулярные узлы, полученные из  $K_{++}$  склеиванием ветвей либо в точке  $x$ , либо в точке  $y$  обозначим через  $K_{x+}$  и  $K_{+y}$  соответственно. Имеем:

$$V(K_{x+}) = V(K_{++}) - V(K_{-+}), \quad V(K_{+y}) = V(K_{++}) - V(K_{+-}).$$

Нетрудно проверить, что узлы  $K_{-+}$  и  $K_{+-}$  переводятся друг в друга с помощью второго движения Рейдемейстера. Следовательно,  $V(K_{x+}) = V(K_{+y})$ , т.е. инвариант  $V$  не зависит от расположения одной двойной точки. Продолжая это рассуждение, получаем наше утверждение для узлов с любым числом двойных точек.  $\square$

**Теорема 10.2.** *Пусть  $n \geq 7$ . Тогда инварианты Васильева торических узлов связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned} V_k(n) &= 2V_k(n-2) - V_k(n-4) + V_{k-2}(n-2), \quad k \geq 4, \quad n \geq 7, \\ V_3(n) &= 2V_3(n-2) - V_3(n-4) + n - 2, \\ V_2(n) &= 2V_2(n-2) - V_2(n-4) + 1. \end{aligned}$$

Для  $n = 3$  имеем  $V_2(3) = 1$ ,  $V_3(3) = 1$ ,  $V_i(3) = 0$ ,  $i \geq 4$ , а для  $n = 5$  имеем  $V_2(5) = 3$ ,  $V_3(5) = 5$ ,  $V_4(5) = 1$ ,  $V_5(5) = 1$ ,  $V_i(5) = 0$ ,  $i \geq 6$ .

*Доказательство.* Используя рассуждения Ланна из [40], доказательство нашего утверждения можно свести к следующей комбинаторной задаче: подсчитать количество различных наборов чередующихся нулей и единиц длины  $k$ , содержащихся в последовательности чередующихся нулей и единиц длины  $n \geq 3$ .  $\square$

## ГЛАВА 3

### ИНТЕГРАЛ КОНЦЕВИЧА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ

Интеграл Концевича изобретен в 1992 г. (см. [39]) как средство доказательства сформулированной выше теоремы Концевича. Он является далеко идущим обобщением интегральной формулы Гаусса, выражающей коэффициент зацепления двух замкнутых кривых в пространстве.

Интеграл Концевича инвариантен относительно деформаций в классе узлов с невырожденными критическими точками, имеющих одинаковое число критических точек.

Заметим, что интеграл Концевича не инвариантен относительно деформаций, меняющих число критических точек, и даже имеется формула, показывающая, как он изменяется при деформациях. Это приводит к конструкции *универсального инварианта Васильева*.

#### 11. ИНТЕГРАЛ КОНЦЕВИЧА

**11.1. Определение интеграла Концевича.** Представим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  как прямое произведение комплексной прямой  $\mathbb{C}$  с координатой  $z$  и действительной прямой  $\mathbb{R}$  с координатой  $t$ .

Вложим узел  $K$  в пространство  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$  так, чтобы координата  $t$  была функцией Морса на  $K$ . Это значит, что во всех точках, где  $t$  как функция параметра на кривой имеет нулевую производную, ее вторая производная не должна обращаться в нуль, а значения  $t$  во всех таких точках (критические значения) должны быть различны между собой.

Определим итерированный интеграл, задающий инвариант морсовского узла, который не меняется на множестве вложений, имеющих заданное число морсовских критических точек.

Обозначим минимум и максимум функции  $t$  на  $K$  соответственно  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$ . Рассмотрим  $m$  не критических значений  $t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}$ . В каждой плоскости  $\{t = t_i\} \subset \mathbb{R}^3$  выбирается неупорядоченная пара различных точек  $(z_i, t_i)$  и  $(z'_i, t_i)$  на узле  $K$ . Обозначим через  $P = \{(z_i, z'_i)\}$  множество таких пар для  $i = 1, 2, \dots, m$ , а символом  $\downarrow$  — число точек  $(z_i, t_i)$  или  $(z'_i, t_i)$  в  $P$ , в которых ориентация узла  $K$  противоположна ориентации, определяемой  $dt$ .

На каждой компоненте связности переменные  $z_j$  и  $z'_j$  являются гладкими функциями переменной  $t_j$ . Подставляя эти функции в выражение  $\bigwedge_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$ , мы получаем дифференциальную форму от переменных  $t_1, \dots, t_m$ , определенную на симплексе в  $m$ -мерном пространстве этих переменных. Ее и следует проинтегрировать. Это даст коэффициент при соответствующей хордовой диаграмме  $D_P$ , когда точки  $z_i$  и  $z'_i$  соединяются хордами ( $i = 1, \dots, m$ ). Напомним, что  $\text{Ch} = \text{Ch}_0 \oplus \text{Ch}_1 \oplus \dots$  — алгебра хордовых диаграмм.

Пополнением  $\overline{\text{Ch}}$  алгебры  $\text{Ch}$ , по определению, называется множество всех бесконечных формальных рядов вида  $\sum_{m=0}^{\infty} \text{ch}_m a_m$ , где  $a_m \in \mathbb{C}$  — численные коэффициенты, а  $\text{ch}_m \in \text{Ch}_m$  — элементы пространства хордовых диаграмм степени  $m$ .

**Определение 2.** Интегралом Концевича узла  $K$  называется следующий элемент градуированного пополнения  $\overline{\text{Ch}}$  алгебры хордовых диаграмм:

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}} \sum_{P=\{(z_i, z'_i)\}} (-1)^{\downarrow} D_P \bigwedge_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i},$$

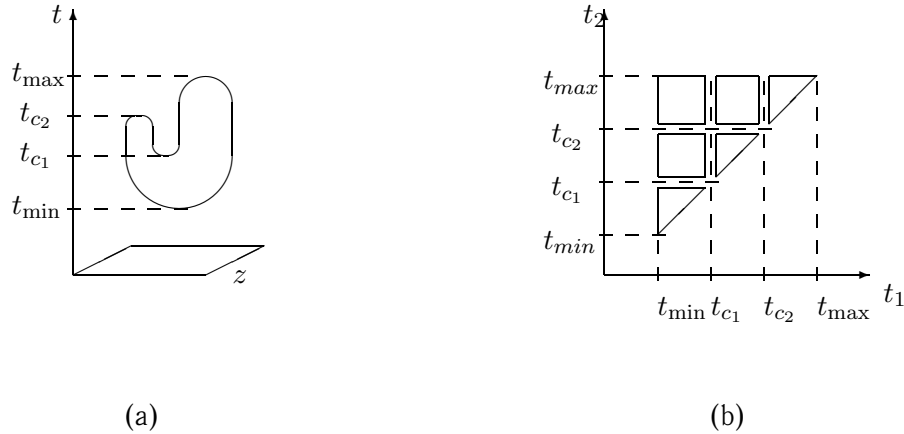


Рис. 1

где  $D_P$  — диаграмма с  $m$  хордами, связывающими точки  $z_i, z'_i$  ориентированной окружности  $K$ . Суммирование ведется по всем выборам пар точек  $z_i, z'_i$  на каждом из  $m$  уровней.

Областью интегрирования является  $m$ -мерный симплекс  $t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}$ , разделенный критическими значениями на связные компоненты. Например, для  $\cup$ -узла ( $m = 2$ ) соответствующая область интегрирования состоит из 6 связных компонент (рис. 1(b)). В подынтегральном выражении число слагаемых постоянно в каждой компоненте области интегрирования, но различно для разных компонент. В примере выше для компоненты  $\{t_{\min} < t_1 < t_{c_1}, t_{c_2} < t_2 < t_{\max}\}$  имеется только одна возможность выбора двух пар точек: на уровне  $\{t = t_1\}$  и  $\{t = t_2\}$ . Сумма по всем парам  $P$  для этой компоненты состоит из одного слагаемого. Для компоненты  $\{t_{\min} < t_1 < t_{c_1}, t_{c_1} < t_2 < t_{c_2}\}$  имеется только одна возможность выбора пары точек на уровне  $\{t = t_1\}$ , а на уровне  $\{t = t_2\}$  существует  $\binom{4}{2} = 6$  возможных выборов пар  $(z_2, z'_2)$ . Сумма по всем парам  $P$  для этой компоненты состоит из шести слагаемых.

Описанная конструкция работает при всех значениях  $m > 0$ . Для  $m = 0$  по определению полагают, что получится хордовая диаграмма порядка 0 (окружность без хорд, представляющая единичный элемент алгебры  $\text{Ch}$ ) с коэффициентом 1.

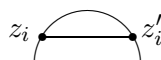
**11.2. Сходимость интеграла.** Можно доказать, что интеграл  $Z(K)$ , во-первых, сходится для любого узла, расположенного в пространстве указанным выше способом, а во-вторых, не меняется при гладких изотопиях узла, при которых сохраняется число критических точек функции  $t$ . Ввиду того, что узел — замкнутая кривая, появляться и исчезать критические точки могут только парами. Оказывается, что при этом выражение  $Z(K)$  меняется вполне определенным образом, а именно, если узел  $K_1$  получается из узла  $K$  добавлением пары соседних критических точек, то имеет место равенство

$$Z(K_1) = Z(K) \cdot Z(\cup),$$

где  $\cup$  — обозначение узла, изображенного на рис. 1.

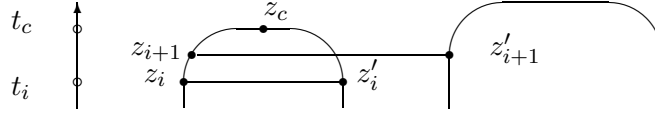
Сумма под знаком интеграла может иметь особенности на границах связных компонент. Это происходит только в следующих двух случаях:

- 1) Изолированная хорда  $(z_i, z'_i)$  стремится к нулю.



В этом случае соответствующая хордовая диаграмма  $D_P$  тривиальна вследствие одночленного соотношения.

- 2) Хорда  $(z_i, z'_i)$  стремится к нулю вблизи критической точки, но отделена от нее другой «длинной» хордой  $(z_{i+1}, z'_{i+1})$ :



В этом случае интеграл для  $(i + 1)$ -й хорды можно оценить следующим образом:

$$\left| \int_{t_i}^{t_c} \frac{dz_{i+1} - dz'_{i+1}}{z_{i+1} - z'_{i+1}} \right| \leq C \left| \int_{t_i}^{t_c} d(z_{i+1} - z'_{i+1}) \right|$$

$$= C|(z_c - z_i) - (z'_c - z'_i)| \leq C'|z_i - z'_i|$$

для некоторых положительных  $C, C'$ .

Таким образом, для  $(i + 1)$ -й хорды интеграл также мал, как и делитель соответствующей  $i$ -й хорды. Отсюда следует сходимость интеграла Концевича.

**11.3. Универсальный инвариант Васильева.** Интеграл Концевича инвариантен относительно деформаций в классе узлов с невырожденными критическими точками и имеющих одинаковое число критических точек. Под деформацией узла  $K$  понимается гладкое семейство диффеоморфизмов  $\mathbb{R}^3$ , содержащее тождественный. Любая деформация, оставляющая данный морсовский узел в классе узлов с невырожденными критическими точками и сохраняющая число критических точек, может быть разложена в композицию следующих движений:

- (а) горизонтальные деформации,
- (б) движения критических точек.

Горизонтальная деформация — это деформация  $\mathbb{R}^3$ , сохраняющая все горизонтальные плоскости  $\{t = \text{const}\}$ ; критические уровни  $\{t = t_c\}$  фиксируются поточечно. В частности, критические точки нельзя двигать. Деформации такого типа сохраняют связные компоненты области интегрирования. Поэтому интеграл по всем компонентам связности инвариантен относительно горизонтальных деформации [2].

Движение критической точки  $c$  — это деформация, тождественная всюду вне достаточно малой окрестности точки  $c$ . Инвариантность относительно движений критической точки  $c$  рассматривается в [2].

Заметим, что интеграл Концевича не инвариантен относительно деформаций, меняющих число критических точек, и даже имеется формула, показывающая, как он изменяется при деформациях.

Обозначим через  $c$  число критических точек функции  $t$  на  $K$  и рассмотрим выражение

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(\cup)^{c/2}},$$

где частное — это деление в алгебре  $\bar{A}$ , осуществляемое на основе правила

$$(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$$

Из сказанного выше ясно, что  $I(K)$  не меняется также и при добавлении (удалении) пар критических точек. Следовательно,  $I(K)$  представляет собой настоящий инвариант узла. Он называется универсальным инвариантом Васильева, потому что (в известном смысле) все инварианты Васильева получаются из него применением весовых систем к хордовым диаграммам, входящим в выражение интеграла.

Исходный интеграл  $Z(K)$  называют еще предварительным интегралом Концевича, а подправленное выражение  $I(K)$  — окончательным интегралом Концевича.

**Пример 8.** Пусть  $\bigcirc$  — неузел, вложенный в пространство как окружность, стоящая вертикально. Тогда

$$Z(\bigcirc) = 1, \quad I(\bigcirc) = 1/Z(\cup), \quad I(\cup) = Z(\cup)/Z(\cup)^2 = 1/Z(\cup).$$

Последние два ответа совпадают. Это неудивительно, ведь  $I$  — инвариант узла, а узлы  $O$  и  $H$  эквивалентны.

Д. Бар-Натан [16] предложил следующее определение универсального инварианта Васильева:

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(\cup)^{c/2-1}},$$

Тогда

$$Z(\bigcirc) = 1, \quad I(\bigcirc) = 1/Z(\cup)^0 = 1, \quad I(\cup) = Z(\cup)/Z(\cup)^1 = 1.$$

## 12. ИНТЕГРАЛ КОНЦЕВИЧА ДЛЯ ТАНГЛОВ

**12.1. Определение тангла.** Пусть  $M = [a, b] \times \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ . Танглом называется одномерное компактное подмногообразие  $T \subset M$ , граничные точки которого лежат на границе  $\partial M$ , причем касательные векторы в этих точках трансверсальны к границе  $\partial M$ . Танглы рассматриваются с точностью до изотопий  $M$ , тождественных на границе.

Плоскость  $a \times \mathbb{C}$  и граничные точки, лежащие на ней, будем называть *нижней границей*, а плоскость  $b \times \mathbb{C}$  и граничные точки, лежащие на ней, будем называть *верхней границей* тангла.

В случае, когда верхняя граница одного тангла  $T_2$  совпадает с нижней границей другого тангла  $T_1$ , можно определить произведение  $T_1 \cdot T_2$  танглов, надставив тангл  $T_2$  танглом  $T_1$ :

$$T_1 = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \right|, \quad T_2 = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \right|, \quad T_1 \cdot T_2 = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \bigcirc \\ \downarrow \end{array} \right|$$

**12.2. Хордовые диаграммы танглов.** Хордовой диаграммой тангла называется тангл  $T$ , снабженный множеством горизонтальных хорд, которые рассматриваются с точностью до диффеоморфизмов, сохраняющих горизонтальные слои (но не их уровни).

Умножение танглов индуцирует умножение хордовых диаграмм танглов. Определим пространство  $\mathcal{A}_T$  хордовых диаграмм танглов следующим образом. Пусть  $T$  — тангл. Тогда  $\mathcal{A}_T$  — это векторное пространство, порожденной всеми хордовыми диаграммами на тангле  $T$  по модулю одночленного и четырехчленного соотношения танглов, определенных следующим образом.

*Одночленное соотношение:* диаграмма тангла с изолированной хордой тривиальна, т.е.

$$z_i \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} z'_i = 0$$

*Четырехчленное соотношение:*

$$[t_{ij} + t_{ik}, t_{jk}] = 0,$$

где через  $t_{ij}$  обозначена хордовая диаграмма, состоящая из  $n$  параллельных вертикальных нитей и одной хорды между  $i$ -й и  $j$ -й нитями:

$$t_{ij} = (-1)^\downarrow \left| \begin{array}{c} \dots \\ \text{---} \\ \dots \\ \text{---} \\ \dots \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

На этом рисунке  $\downarrow$  обозначает число концов хорд, в которых нити направлены вниз.

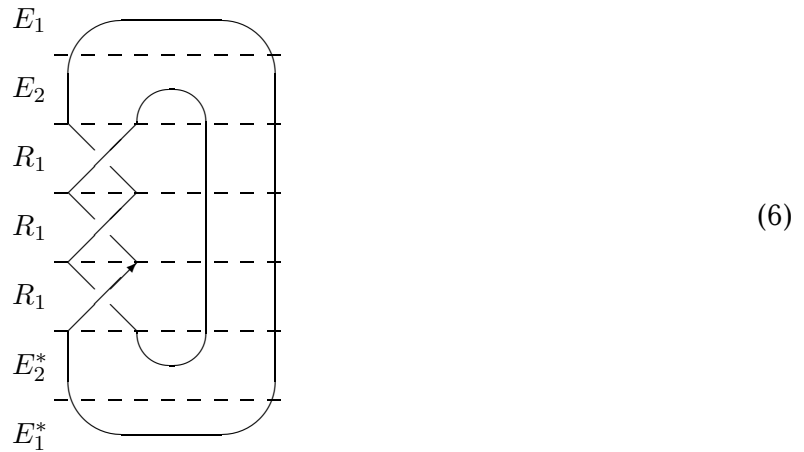
**12.3. Разложение узлов в композицию элементарных танглов.** Как было показано выше, в случае, когда верхняя граница одного тангла совпадает с нижней границей другого тангла, можно определить их произведение, надставив один тангл другим.

Рассмотрим такую проекцию узла на плоскость, что никакие две критические точки не лежат на одном уровне. Тогда такой узел может быть разложен в композицию следующих танглов, которые называются элементарными (см. [36, 42, 43]):

$$E_i = \left| \begin{array}{c} | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \end{array} \right|, \quad E_i^* = \left| \begin{array}{c} | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \end{array} \right|, \quad R_i = \left| \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \end{array} \right|, \quad R_i^* = \left| \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \end{array} \right|,$$

Тривиальным является тангл, состоящий из прямо натянутых нитей. Такой тангл будем обозначать через  $Y$ .

На следующем рисунке изображен трилистник в виде композиции элементарных танглов.



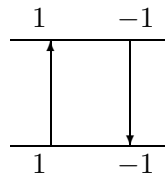
Обозначим множества верхних и нижних граничных точек тангла  $T$  соответственно  $r$  и  $s$  и также обозначим их знаки:

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_k), \quad r_i = \pm 1, \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_l), \quad s_i = \pm 1.$$

Заметим, что

$$\#\{r_i \mid r_i = 1\} - \#\{r_i \mid r_i = -1\} - \#\{s_i \mid s_i = 1\} + \#\{s_i \mid s_i = -1\} = 0.$$

Упомянутые выше знаки приписываются концам стрелок тангла согласно правилу, изображенному на следующем рисунке:



Мы будем рассматривать так называемые  $q$ -танглы (см. [41]), которые определяются как танглы с неассоциативными словами из чисел 1 и  $-1$ , т.е. словами со скобками. Правила расстановки скобок продемонстрируем на примере узла  $3_1$  — трилистника (см. (6)):

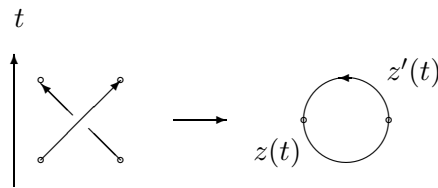
$$3_1 = E_1 \cdot E_2 \cdot Y \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot Y \cdot E_2^* \cdot E_1^*$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &: (1 - 1), \\ E_2 &: ((1(1 - 1)) - 1), \\ R_1 &: (((11) - 1) - 1), \\ E_2^* &: (1(1 - 1) - 1), \\ E_1^* &: (1 - 1). \end{aligned}$$

Тривиальный тангл  $Y$  соответствует «перебрасыванию» скобок. Поскольку два тангла, входящие в композицию, должны иметь общую границу, в примере выше тангл  $E_2$  надставить над танглом  $R_1$  нельзя (нижней границе тангла  $E_2$  соответствует слово  $((1(1 - 1)) - 1)$ , а верхней границе тангла  $R_1 - (((11) - 1) - 1)$ ). Чтобы привести в соответствие верхние и нижние границы танглов, входящих в композицию, будем добавлять, при необходимости, тривиальные танглы  $Y$ , как, например, в разложении трилистника тангл  $Y$  встречается два раза: между  $E_2$  и  $R_1$  и между  $R_1$  и  $E_2^*$ .

**12.4. Вычисление интеграла для элементарных танглов.** Явное вычисление интеграла Концевича для данного узла — трудная проблема. Заметим, что пока интеграл Концевича не вычислен в замкнутом виде даже для трилистника! В примере ниже мы рассматриваем простой тангл с двумя нитями, обозначенный в предыдущем пункте через  $R$ .



Введем параметризацию  $z(t)$  и  $z'(t)$  двух нитей тангла согласно изображению:

$$z(t) = e^{i(-\pi + \pi t)}, \quad z'(t) = e^{i\pi t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

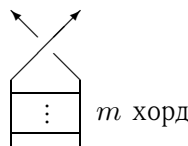
Тогда имеем

$$\begin{aligned} z(t) - z'(t) &= e^{i\pi t}(e^{-i\pi} - 1), \\ \ln(z(t) - z'(t)) &= i\pi t + \ln(e^{-i\pi} - 1), \\ d(\ln(z(t) - z'(t))) &= i\pi dt. \end{aligned}$$

Теперь легко вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} Z(R) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} D_m \int_{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}} \bigwedge_{i=1}^m d(\ln(z(t_i) - z'(t_i))) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} D_m \int_{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m}{2^m \cdot m!}, \end{aligned}$$

где  $D_m$  — следующая хордовая диаграмма тангла:



В терминах умножения хордовых диаграмм танглов ответ переписывается так:

$$Z(R) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array}\right) \cdot R,$$

где последний множитель обозначает хордовую диаграмму тангла  $R$  без хорд.

Для элементарных танглов универсальный инвариант Васильева вычислен в [41].

**Теорема 12.1** (см. [41, Theorem 0.4]). *Универсальный инвариант  $I$  от элементарных танглов выражается следующим образом:*

$$I(R_i) = e^{r_i r_{i+1} \Omega_{ii+1}/2} P_{ii+1}, \quad I(R_i^{-1}) = e^{-r_i r_{i+1} \Omega_{ii+1}/2} P_{ii+1},$$

$$I(E_i^*) = E_i^*, \quad I(E_i) = Z(\cup)^{-1} E_i,$$

$$I(Y) = \Phi \left( \begin{array}{cc} \sum_{\substack{i_0 \leq p \leq i_1 - 1 \\ i_1 \leq q \leq i_2 - 1}} r_p r_q \Omega_{pq}, & \sum_{\substack{i_1 \leq p \leq i_2 - 1 \\ i_2 \leq q \leq i_3 - 1}} r_p r_q \Omega_{pq} \end{array} \right),$$

где  $\Omega_{ij}$  — хорда, соединяющая  $i$ -ю и  $j$ -ю нити тангла,  $P_{ij}$  — оператор, переставляющий  $i$ -ю и  $j$ -ю нити тангла,  $\Phi(A, B)$  — ассоциатор Дринфельда (см. [28, 29]).

Это ряд, который можно выбрать разными способами, при этом произвольность выбора не влияет на окончательный ответ при вычислении инвариантов узлов. Дадим определение ассоциатора Дринфельда, которое будем использовать ниже.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$G'(z) = \frac{h}{2\pi i} \left( \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G(z),$$

где  $G(z)$  — формальный ряд от двух некоммутативных переменных  $A$  и  $B$  с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями комплексной переменной  $z$ . Будем считать, что формальный параметр  $h$  равен 1. Это уравнение (см. [36, Proposition XIX.6.1]) имеет единственные решения  $G_0$  и  $G_1$  в окрестностях  $U_0$  и  $U_1$  точек  $z = 0$  и  $z = 1$  с асимптотиками

$$G_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{\hbar A}, \quad G_1(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} (1-z)^{\hbar B},$$

где  $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ ,  $\hbar = h/2\pi i = 1/2\pi i$ .

**Определение 3** (см. [36, Definition XIX.6.2]). Определим  $\Phi(A, B)$  посредством равенства

$$G_0(z) = G_1(z)\Phi(A, B).$$

Элемент  $\Phi = \Phi(A, B)$ , по определению, является формальным рядом от двух некоммутативных переменных  $A$  и  $B$  с коэффициентами в  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  и называется *ассоциатором Дринфельда*.

**12.5. Сокращение количества слагаемых под знаком интеграла.** Мы можем использовать одночленное соотношение, чтобы сократить число слагаемых в интеграле Концевича. Действительно, в определении интеграла мы можем рассматривать только тот набор пар  $P = \{(z_i, z'_i)\}$ , для которого соответствующая хордовая диаграмма  $D_P$  не содержит изолированных хорд. В частности, это приводит к тому, что остается только одна компонента  $t_{c_1} < t_1 < t_2 < t_{c_2}$  области интегрирования. В этой компоненте остаются следующие шестнадцать пар из общего числа тридцать шесть:

Предположим, что имеется морсовский узел  $K$ , содержащий выделенный тангл  $T$ . Будем рассматривать только такие хорды между  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$ , оба конца которых лежат одновременно либо на  $T$ , либо на его дополнении к узлу:  $K \setminus T$ . Тогда соответствующий интеграл будем называть редуцированным интегралом Концевича относительно тангла  $T$  и обозначать  $Z_T(K)$ .

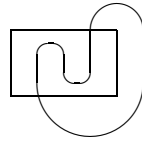
Как показано в работе [41], имеет место следующее утверждение.

**Лемма 12.2** (см. [41]). *Переход к узлу с удаленными хордами, соединяющими  $T$  и  $K \setminus T$ , не меняет значение интеграла Концевича, т.е.*

$$Z_T(K) = Z(K).$$



**Пример 9.** Рассмотрим  $\cup$ -узел и следующий тангл в нем:



В силу леммы 12.2 переход от  $\cup$ -узла к выделенному на нем танглу не повлечет изменение значения интеграла Концевича.

### 13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА КОНЦЕВИЧА ДЛЯ УЗЛОВ

Интеграл Концевича — довольно-таки сложный объект. В течение нескольких лет никто не умел вычислять его даже для тривиального узла: были известны лишь коэффициенты при некоторых хордовых диаграммах в бесконечной сумме. (Здесь имеется ввиду окончательный интеграл Концевича  $I(O)$ , ибо предварительный  $Z(O)$  равен 1.)

**13.1. Вычисление интеграла Концевича для композиции танглов.** Любой узел может быть представлен в виде композиции элементарных танглов. Зная выражения интеграла Концевича для этих танглов, можно получить выражение универсального инварианта Васильева от их композиции. Техника вычислений интеграла таким способом разработана в [41]. Однако в явном виде вычислены лишь слагаемые второго порядка для трилистника.

Напомним, что значения окончательного интеграла Концевича на элементарных танглах были вычислены в [41] (см. теорему 12.1).

В явном виде ассоциатор Дринфельда был вычислен до членов третьего порядка в [36]. Ниже приводится выражение ассоциатора до членов четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \Phi(A, B) = & 1 + \frac{-\zeta(2)}{(2\pi i)^2} [A, B] + \frac{-\zeta(3)}{(2\pi i)^3} ([B, [A, B]] + [A, [A, B]]) \\ & + \frac{-\zeta(4)}{(2\pi i)^4} ([B, [B, [A, B]]] + [A, [A, [A, B]]]) \\ & + \frac{-3\zeta(4) + \zeta^2(2)}{2(2\pi i)^4} [B, [A, [A, B]]] + \frac{\zeta^2(2)}{2(2\pi i)^4} [A, B]^2 + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим тривиальный тангл  $Y$ , состоящий из трех нитей. Положим  $A = \Omega_{12}$ ,  $B = \Omega_{23}$ . Замыкание этого тангла в  $\cup$ -узел даст следующее выражение для  $\Phi(\Omega_{12}, \Omega_{23})$ :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{24} \text{Diagram 1} + \frac{1}{5760} \text{Diagram 2} + \frac{1}{720} \text{Diagram 3} - \frac{1}{1152} \text{Diagram 4}.$$

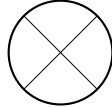
Вычислим  $\Phi^{-1}$ ,  $\Phi^{-2}$  и  $\Phi^{-3}$ :

$$\Phi^{-1} = 1 - \frac{1}{24} \text{Diagram 1} - \frac{1}{5760} \text{Diagram 2} + \frac{1}{2880} \text{Diagram 3} + \frac{1}{1152} \text{Diagram 4},$$

$$\Phi^{-2} = 1 - \frac{1}{12} \text{Diagram 1} - \frac{1}{2880} \text{Diagram 2} + \frac{7}{2880} \text{Diagram 3} + \frac{1}{576} \text{Diagram 4},$$

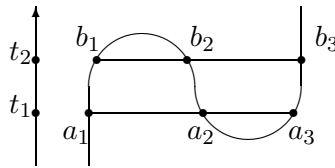
$$\Phi^{-3} = 1 - \frac{1}{8} \text{ (circle with X)} - \frac{1}{1920} \text{ (circle with grid)} + \frac{1}{160} \text{ (circle with chords)} + \frac{1}{384} \text{ (circle with chords)}.$$

**13.2. Вычисление интеграла Концевича для U-узла.** Сначала рассмотрим пример из [15].

Вычислим коэффициент хордовой диаграммы  в

$$Z \left( \text{U-knot diagram} \right).$$

Выберем два уровня  $t_1$  и  $t_2$  и две пары точек на них  $(z_1, z'_1)$  и  $(z_2, z'_2)$ . Ориентируем кривую как указано на рисунке. Обозначим через  $a_1, a_2, a_3$  (соответственно  $b_1, b_2, b_3$ ) три точки пересечения кривой с уровнем  $\{t = t_1\}$  (соответственно  $\{t = t_2\}$ ):



Всего имеется 4 набора пар точек  $(z_1, z'_1)$  и  $(z_2, z'_2)$ :

|               |              |              |              |              |
|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $(z_2, z'_2)$ | $(b_1, b_3)$ | $(b_2, b_3)$ | $(b_1, b_3)$ | $(b_2, b_3)$ |
| $(z_1, z'_1)$ | $(a_1, a_2)$ | $(a_1, a_2)$ | $(a_1, a_3)$ | $(a_1, a_3)$ |

Положим  $a_{ij} = a_j - a_i$  и  $b_{ij} = b_j - b_i$ . Тогда интеграл имеет вид:

$$\begin{aligned} Z(K) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{t_{\min} < t_1 < t_2 < t_{\max}} -d \ln a_{12} \wedge d \ln b_{13} + d \ln a_{12} \wedge d \ln b_{23} + \\ &+ d \ln a_{13} \wedge d \ln b_{13} - d \ln a_{13} \wedge d \ln b_{23} = \\ &= \frac{1}{(-4\pi)^2} \int_{t_{\min} < t_1 < t_2 < t_{\max}} -d \ln \frac{a_{12}}{a_{13}} \wedge d \ln b_{13} + d \ln \frac{a_{12}}{a_{13}} \wedge d \ln b_{23} = \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_{t_{\min} < t_1 < t_2 < t_{\max}} -d \ln \frac{a_{12}}{a_{13}} \wedge d \ln \frac{b_{23}}{b_{13}}. \end{aligned}$$

После замены переменных

$$u(t_1, t_2) = \frac{a_{12}}{a_{13}}, \quad v(t_1, t_2) = \frac{b_{23}}{b_{13}}$$

область интегрирования  $t_{\min} < t_1 < t_2 < t_{\max}$  преобразуется в треугольник

$$u \leq 1, \quad v \leq 1, \quad u + v \geq 1.$$

Нетрудно видеть, что замена  $(t_1, t_2) \mapsto (u, v)$  — диффеоморфизм с отрицательным якобианом. Заметим, что  $a_{12}$  — убывающая функция от  $t$ , тогда как  $a_{23}$  — возрастающая. Таким образом, после замены переменных интеграл преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \left( \int_{1-u}^1 d \ln v \right) \frac{du}{u} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \ln(1-u) \frac{du}{u}.$$

Разлагая  $\ln$  в последнем выражении в ряд Тейлора, получаем

$$-\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u^k}{k} \frac{du}{u} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \zeta(2) = -\frac{1}{24}.$$

До членов четвертого порядка  $Z(\cup)$  имеет следующее выражение:

$$Z(\cup) = 1 - \frac{1}{24} \text{ (диаграмма с двумя диагоналями)} - \frac{1}{5760} \text{ (диаграмма с 3-мя хордами)} + \frac{1}{1152} \text{ (диаграмма с 4-мя хордами)} + \frac{1}{2880} \text{ (диаграмма с 5-ю хордами)} + \dots$$

Коэффициент при хордовой диаграмме третьего порядка равен нулю, поскольку тривиальный узел является зеркальным, а универсальный инвариант третьего порядка можно выбрать нечетным.

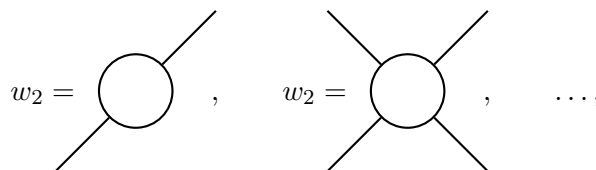
Интеграл Концевича для  $\cup$ -узла может быть вычислен другим способом, разработанным Д. Бар-Натаном. Согласно гипотезе Д. Бар-Натана с соавторами [17] (доказанной в 1998 г. в [18]) универсальный инвариант Васильева от этого узла выражается следующим образом:

$$I(\cup) = \exp \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} = 1 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} \right)^2 + \dots,$$

где  $b_{2n}$  — модифицированные числа Бернулли, т.е. коэффициенты следующего ряда Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x/2};$$

( $b_2 = 1/48$ ,  $b_4 = -1/5760$ , ...), а  $w_{2n}$  — колеса, т.е. трехвалентные графы вида



или фейнмановские диаграммы, свободные концы которых приклеиваются к окружности, называемой петлей Уилсона. Произведения колес, возникающие при вычислении экспоненты через ряд Тейлора, понимаются как несвязное объединение диаграмм, а сами колеса (и их объединения) интерпретируются как линейные комбинации диаграмм Фейнмана, равные среднему арифметическому по всем  $(2n)!$  способам приклеить петлю Уилсона к одновалентным вершинам колеса.

Разрешение тройных точек диаграмм Фейнмана осуществляется по правилу, описанному выше. Так, для диаграммы  $w_4$  получаем следующее выражение через обычные хордовые диаграммы:

$$w_4 = c - \frac{10}{3} \text{ (диаграмма с 4 хордами)} + \frac{4}{3} \text{ (диаграмма с 5 хордами)}.$$

Подобным образом можно найти выражение через хордовые диаграммы также для мономов  $w_2$  и  $w_2^2$ . Подставляя найденные выражения в ряд

$$I(\bigcirc) = 1 + \frac{1}{48}w_2 + \frac{1}{4608}w_2^2 - \frac{1}{5760}w_4 + \dots,$$

получаем следующий результат:

$$I(\bigcirc) = 1 - \frac{1}{24} \text{diag}_1 + \frac{1}{1152} \text{diag}_2 - \frac{1}{5760} \text{diag}_3 + \frac{1}{2880} \text{diag}_4 + \dots,$$

что совпадает с интегралом, полученным прямыми вычислениями выше.

Кроме того, последний результат совпадает с  $\Phi(\Omega_{12}, \Omega_{23})$ .

Все коэффициенты этого ряда рациональны. Этот факт верен для любого узла, что подтверждается вычислениями, приведенными в следующем пункте.

**13.3. Вычисление интеграла Концевича для трилистника и восьмерки.** Узел трилистник представляется как композиция элементарных танглов следующим образом:

$$3_1 = E_1 E_2 Y R^3 Y E_2^* E_1^*.$$

Тогда универсальный инвариант Васильева выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} I(3_1) &= Z(\cup)^{-1} E_1 Z(\cup)^{-1} E_2 \Phi(\Omega_{12}, -\Omega_{23}) e^{3\Omega_{12}/2} P_{12} \Phi(-\Omega_{23}, \Omega_{12}) E_2^* E_1^* \\ &= Z(\cup)^{-2} E_1 E_2 \Phi(\Omega_{12}, -\Omega_{23}) e^{3\Omega_{12}/2} P_{12} \Phi(-\Omega_{23}, \Omega_{12}) E_2^* E_1^*. \end{aligned}$$

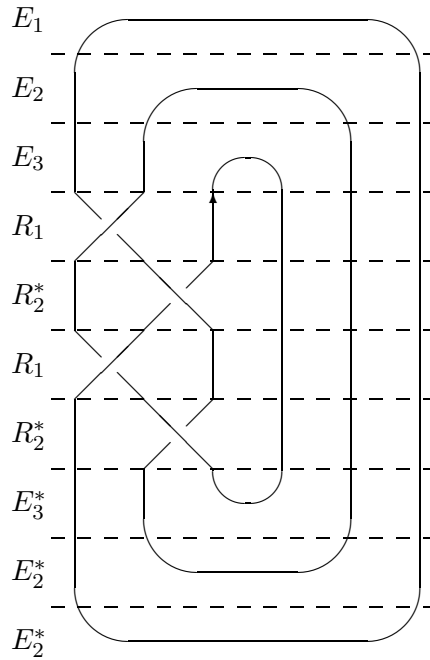
Разложим в ряд  $e^{3\Omega_{12}/2}$ :

$$e^{3\Omega_{12}/2} = 1 + \frac{3}{2}\Omega_{12} + \frac{9}{8}\Omega_{12}^2 + \frac{9}{16}\Omega_{12}^3 + \frac{27}{128}\Omega_{12}^4 + \dots$$

Перемножив ряды, получаем окончательное выражение универсального инварианта Васильева до членов 4 порядка для трилистника:

$$I(3_1) = 1 + \frac{23}{24} \text{diag}_1 + \text{diag}_2 + \frac{1199}{5760} \text{diag}_3 - \frac{1199}{2880} \text{diag}_4 + \frac{529}{1152} \text{diag}_5.$$

Вычислим универсальный инвариант для узла восьмерка.



Узел восьмерку можно представить в виде следующей композиции элементарных танглов:

$$4_1 = E_1 E_2 E_3 Y Y Y R_1 Y R_2^* Y R_1 Y R_2^* Y Y Y Y E_3^* E_2^* E_1^*,$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &: (1 - 1), \\ E_2 &: ((1(1 - 1)) - 1), \\ E_3 &: ((1((1(1 - 1)) - 1)) - 1), \\ Y &: (((1(1(1 - 1))) - 1) - 1), \\ Y &: (((((11)(1 - 1)) - 1) - 1), \\ Y &: ((((((11)1) - 1) - 1) - 1), \\ R_1 &: ((((((11)1) - 1) - 1) - 1), \\ Y &: (((((1(11)) - 1) - 1) - 1), \\ R_2^* &: (((((1(11)) - 1) - 1) - 1), \\ Y &: (((((1(11)) - 1) - 1) - 1), \\ Y &: ((((((11)1) - 1) - 1) - 1), \\ Y &: (((((11)(1 - 1)) - 1) - 1), \\ Y &: (((((1(1 - 1))) - 1) - 1), \\ E_3^* &: ((1((1(1 - 1)) - 1)) - 1), \\ E_2^* &: ((1(1 - 1)) - 1), \\ E_1^* &: (1 - 1). \end{aligned}$$

Тогда универсальный инвариант Васильева выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} I(4_1) &= Z(\cup)^{-1} E_1 Z(\cup)^{-1} E_2 Z(\cup)^{-1} E_3 \\ &\Phi(\Omega_{12} + \Omega_{13} - \Omega_{14}, -\Omega_{25} - \Omega_{35} + \Omega_{45}) \Phi(\Omega_{12}, \Omega_{23} - \Omega_{24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Phi(\Omega_{13} + \Omega_{23}, -\Omega_{34})(e^{\Omega_{12}/2} P_{12} \Phi(\Omega_{23}, \Omega_{12}) e^{-\Omega_{23}/2} P_{23} \Phi(\Omega_{12}, \Omega_{23}))^2 \\ & \Phi(-\Omega_{34}, \Omega_{13} + \Omega_{23}) \Phi(\Omega_{23} - \Omega_{24}, \Omega_{12}) \\ & \Phi(-\Omega_{25} - \Omega_{35} + \Omega_{45}, \Omega_{12} + \Omega_{13} - \Omega_{14}) E_3^* E_2^* E_1^*. \end{aligned}$$

Аналогичные, очень громоздкие вычисления для узла восьмерка приводят к следующему результату: выражение для универсального инварианта Васильева до членов 4-го порядка для восьмерки:

$$I(H) = 1 - \frac{25}{24} \text{ (diagram 1)} + \frac{1679}{5760} \text{ (diagram 2)} + \frac{1201}{2880} \text{ (diagram 3)} - \frac{527}{1152} \text{ (diagram 4)}.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. — М.: Фазис, 1997.
2. Дужин С. В., Чмутов С. В. Узлы и их инварианты// Мат. просвещение, сер. 3. — 1999. — 3. — С. 59–93.
3. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983.
4. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. — М.: Мир, 1967.
5. Математическая энциклопедия. — М., Советская энциклопедия, 1985.
6. Матвеев С. В. Классификация достаточно больших трехмерных многообразий// Усп. мат. наук. — 1997. — 52, № 5. — С. 147–174.
7. Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. — М.: Наука, 1998.
8. Прасолов В. В. Поверхности Зейферта// Мат. просвещение. Сер. 3. — 1999. — 3. — С. 116–126.
9. Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. — М.: МЦНМО, 1997.
10. Тюрина С. Д. О формулах типа Ланна и Виро—Поляка для инвариантов Васильева// Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина/ Тез. докл. — М.: МГУ, 1998. — С. 329–330.
11. Тюрина С. Д. О формулах типа Ланна и Виро—Поляка для инвариантов конечного порядка// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 4.
12. Тюрина С. Д. Диаграммные формулы типа Виро—Поляка для инвариантов конечного порядка// Усп. мат. наук. — 1999. — 54, № 3.
13. Alexander J. W. Topological invariants of knots and links// Trans. Amer. Math. Soc. — 1923. — 20. — С. 275–306.
14. Arnold V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classification// In: «Singularities and Bifurcations»/ Adv. Sov. Math. — Amer. Math. Soc., 1994. — 21. — С. 33–91.
15. Arnold V. I. Vassiliev's theory of discriminants and knots// First European Congr. Math. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1992. — 1. — С. 3–29.
16. Bar-Natan D. On the Vassiliev knot invariants// Topology. — 1995. — 34. — С. 423–472.
17. Bar-Natan D., Garoufalidis S., Rozansky L., Thurston D. Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot/ Preprint. — 1997.
18. Bar-Natan D., Thang Le, Thurston D. The Kontsevich integral of the unknot// In preparation.
19. Birman J. Braids, links and mapping class groups// Ann. Math. Stud. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974. — 82.
20. Birman J. New points of view in knot theory// Bull. Amer. Math. Soc. — 1993. — 28. — С. 253–287.
21. Birman J., Hirsch M. D. A new algorithm for recognizing the unknot// Preprint <http://xxx.lanl.gov/abs/math.GT/9801126>.
22. Birman J., Lin X. S. Knot polynomials and Vassiliev's invariants// Invent. Math. — 1993. — 111. — С. 225–270.
23. Cartier P. Construction combinatoire des invariants de Vassiliev–Kontsevich des noeuds// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1993. — 316. — С. 1205–1210.
24. Chmutov S. V., Duzhin S. V., Lando S. K. Vassiliev knot invariants, I–III// Adv. Sov. Math. — 1994. — 21. — С. 117–147.
25. Chmutov S. V., Varchenko A. N. Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from  $sl_2$ // Topology. — 1997. — 36. — С. 153–178.

26. *Dasbach O. T., Hougardy S.* Does the Jones polynomial detect unknottedness?// J. Exp. Math. — 1997. — 6, № 1. — С. 51–56.
27. *Domergue M., Donato P.* Integrating a weight system of order  $n$  to an invariant of  $(n-1)$ -singular knots// J. Knot Theory Ramifications. — 1996. — 5, № 1. — С. 23–35.
28. *Drinfel'd V. G.* Quasi-Hopf algebras// Algebra Analiz. — 1989. — 1, № 6. — С. 114–148.
29. *Drinfel'd V. G.* On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(Q/Q)$ // Algebra Analiz. — 1990/ — 2, № 4. — С. 149–181.
30. *Gordan S., Luecke J.* Knots are determined by their complements// J. Amer. Math. Soc. — 1989. — 2. — С. 371–415.
31. *Gusarov M. N.* A new form of the Conway–Jones polynomial of oriented links// Zap. Nauch. Semin. LOMI. — 1991. — 193. — С. 4–9
32. *Hoste J., Thistlethwaite M., Weeks J.* The first 1701936 knots// Math. Intell. — 1998. — 20. — С. 33–48.
33. *Hoste J., Thistlethwaite M., Weeks J.* Таблица узлов и программа KnotScape// <http://www.math.utk.edu/~morwen>.
34. *Jones V. F. R.* Polynomial invariants of knots via van Neumann algebras// Bull. Amer. Math. Soc. — 1985. — 12. — С. 103–111.
35. *Jones V. F. R.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials// Ann. Math. — 1987. — 126. — С. 335–388.
36. *Kassel C.* Quantum groups/ Grad. Texts Math. — 155. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1995.
37. *Kauffman L.* State models and the Jones polynomial// Topology. — 1987. — 26. — С. 395–407.
38. *Kauffman L.* Knots and physics/ Series on knots and everything. — 1. — Singapore: World Scientific, 1993.
39. *Kontsevich M.* Vassiliev's knot invariants// Adv. Soviet Math. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1993. — 16, № 2. — С. 137–150.
40. *Lannes J.* Sur les invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3// L'Enseig. Math. — 1993. — 39. — С. 295–316.
41. *Le T. Q. T., Murakami J.* Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral// Commun. Math. Phys. — 1995. — 168. — С. 535–562.
42. *Le T. Q. T., Murakami J.* The universal Vassiliev–Kontsevich invariant for framed oriented links// Comp. Math. — 1996. — 102. — С. 41–64.
43. *Le T. Q. T., Murakami J.* Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial// Nagoya Math. J. — 1996. — 142. — С. 39–65.
44. *Menasco W., Thistlethwaite M.* A classification of alternating links// Ann. Math. — 1993. — 138. — С. 113–171.
45. *Murasugi K.* Jones polynomial and classical conjectures in knot theory// Topology. — 1987. — 26. — С. 184–194.
46. *Östlund O.-P.* Preprint. — Uppsala University, 1997.
47. *Polyak M.* On Milnor's triple linking number// C. R. Acad.Sci. Paris, Ser. I. — 1997. — 325. — С. 77–82.
48. *Polyak M., Viro O.* Gauss diagram formulae for Vassiliev invariants// Int. Math. Res. Notices. — 1994. — 11. — С. 445–453.
49. *Piunikhin S.* Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant// Commun. Math. Phys. — 1995. — 168. — С. 1–22.
50. *Piunikhin S.* Weights of Feynman diagrams, links polynomials and Vassiliev knot invariants// J. Knot Theory Ramifications. — 1995. — 4, № 1. — С. 163–188.
51. *Thistlethwaite M.* A spanning tree expansion for the Jones polynomial// Topology. — 1987. — 26. — С. 297–309.
52. *Trotter H. F.* Non-invertible knots exist// Topology. — 1964. — 2. — С. 275–280.
53. *Tyurina S. D.* Explicit formulas for finite degree invariants// Int. Conf. «Monodromie et équations différentielles en théorie des singularités et des représentations de groupes»/ Thèses. — Luminy, France: CNRS-SMF, 1999.
54. *Vassiliev V. A.* Topology of complements to discriminants and loop spaces// Adv. Soviet Math. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1990. — 1. — С. 9–21.
55. *Vassiliev V. A.* Cohomology of knot spaces// Adv. Soviet Math. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1990. — 1. — С. 23–69.
56. *Viro O.* First degree invariants of generic curves on surfaces/ Preprint. — Uppsala University, 1994.
57. *Whitten W.* Knot complements and groups// Topology. — 1987. — 26. — С. 41–44.

58. *Willerton S.* Vassiliev invariants and Hopf algebra of chord diagram// *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* — 1996. — 119. — С. 55–65.
59. *Willerton S.* A combinatorial half-integration from weight system to Vassiliev knot invariant// *J. Knot Theory Ramifications.* — 1998. — 7, № 4. — С. 519–526.
60. *Willerton S.* Vassiliev invariants as polynomials// *Knot Theory.* — Warszawa: Banach Center Publ. 1998. — 42.
61. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial// *Commun. Math. Phys.* — 1989. — 121. — С. 351–399.