

ISSN 1512–1712

**Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики**

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 20

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



**Тбилиси
2004**

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Е. С. Голод (Московский государственный университет)

А. Лашхи (Грузинский технический университет)

Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Овчинников (Московский государственный университет)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

А. В. Сарычев (Университет Флоренции)

Г. Химишашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 20

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н. Н. Субботина

**Метод характеристик
для уравнений Гамильтона—Якоби
и его приложения в динамической оптимизации**

**კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი**

2004

Посвящается светлой памяти моих родителей
Николая Максимовича и Зои Николаевны Барабановых

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2004 г. Н. Н. СУББОТИНА

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Основные обозначения	9
Глава I. Задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби	11
1. Уравнения Гамильтона—Якоби. Основные понятия	11
1.1. Классическое решение задачи Коши и классический метод характеристик Коши для уравнения Гамильтона—Якоби	11
1.2. Вязкостное решение уравнения Гамильтона—Якоби	13
2. Обобщение и релаксация классического метода характеристик для уравнения Гамильтона—Якоби	14
2.1. Обобщенные характеристики и непрерывное минимаксное решение уравнения Гамильтона—Якоби	14
2.2. Теоремы существования и единственности непрерывного минимаксного решения в задаче Коши для уравнения Гамильтона—Якоби	16
2.3. Дифференцируемость по направлению, суб- и супердифференциалы негладких функций	16
2.4. Свойства инвариантности множеств относительно дифференциальных включений	17
2.5. Эквивалентные определения минимаксного решения	17
Глава II. Классический и обобщенный методы характеристик в задачах оптимального управления	19
3. Постановка задачи оптимального управления	19
3.1. Программная задача оптимального управления	19
3.2. Основные предположения	19
3.3. Обобщенные программные управления	20
4. Функция цены в задаче оптимального управления	21
4.1. Принцип оптимальности	21
4.2. Репрезентативная формула для функции цены в задаче оптимального управления	21
4.3. Свойства гладкости функции цены	22
5. Функция цены и минимаксное решение уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана	23
5.1. Предварительные сведения	23
5.2. Обобщенное уравнение Беллмана и его минимаксное решение	24
6. Принцип максимума Понтрягина и классические характеристики для уравнения Беллмана	26
6.1. Случай дифференцируемых входных данных	26
6.2. Вспомогательные конструкции	27
6.3. Необходимые условия оптимальности	30
6.4. Связь принципа максимума Понтрягина с методом характеристик Коши для уравнения Беллмана	37
7. Необходимые и достаточные условия оптимальности	39
7.1. Принцип максимума Понтрягина и супердифференциал функции цены	39

7.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности в случае невыпуклой вектограммы	41
7.3. Репрезентативная формула минимаксного решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана в терминах классических характеристик	45
8. Метод динамического программирования и оптимальный синтез в позиционной задаче оптимального управления	49
8.1. Формализация позиционной задачи управления	49
8.2. Классический метод динамического программирования и непрерывный оптимальный синтез	51
8.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности обратных связей	52
Глава III. Обобщение метода характеристик в теории минимаксных решений сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби	60
9. Сингулярно возмущенные уравнения Гамильтона—Якоби	60
9.1. Постановка задачи Коши P^ε для сингулярно возмущенного уравнения Гамильтона—Якоби	60
9.2. Минимаксное решение в задаче P^ε	61
10. Формулировка и обсуждение условий сингулярной аппроксимации	62
10.1. Достаточные условия сходимости обобщенных решений	62
10.2. Комментарии	65
11. Доказательство достаточных условий сходимости	66
11.1. Вспомогательные сведения	66
11.2. Доказательство теоремы III.1	67
12. Примеры	73
Глава IV. Приложения обобщенного метода характеристик для дифференциальных игр с быстрыми и медленными движениями	76
13. Позиционная игровая задача управления G^ε	77
14. Предварительные сведения	78
14.1. Функция цены дифференциальной игры G^ε	78
14.2. Характеристические комплексы в задаче P^ε	80
15. Основные предположения и формулировка результата	80
16. Достаточные условия сходимости функций цены сингулярно возмущенных игр	83
16.1. Свойства множеств $Y_+^\varepsilon, Y_-^\varepsilon$	83
16.2. Доказательство основного результата	85
17. Пример	90
Глава V. Обобщенный метод характеристик в теории минимаксных решений квазилинейных параболических уравнений	91
18. Функция цены стохастической дифференциальной игры и ее свойства. Обобщенные стохастические производные	92
18.1. Формализация позиционной стохастической дифференциальной игры	92
18.2. Обобщенные программные управления и порождаемые ими случайные процессы	94
18.3. Некоторые свойства обобщенных программных управлений и порождаемых ими случайных процессов	99
18.4. Свойства стабильности непрерывных функций	105
18.5. Обобщенные стохастические производные	106
19. Параболическое уравнение Гамильтона—Якоби—Айзекса и его минимаксное решение в терминах обобщенных стохастических производных	107
19.1. Основное уравнение для функции цены стохастической дифференциальной игры	107
19.2. Минимаксное решение краевой задачи (19.1)–(19.3)	107
19.3. Инфинитезимальная форма условий стабильности	108
20. Обобщенные стохастические производные для функций нескольких переменных, дифференцируемых по части переменных	113

20.1. Класс функций, дифференцируемых по части переменных. Формулы стохастических производных	113
20.2. Доказательство формул для стохастических производных	114
20.3. Применение формул для стохастических производных	120
Список литературы	122

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателей монография посвящена исследованиям обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка и одного квазилинейного параболического уравнения.

Упомянутые выше уравнения в частных производных возникают при решении большого числа теоретических и прикладных задач в математике, механике, физике, биологии, химии, инженерных науках, управлении, навигации и т. д. Так, хорошо известны уравнение Гамильтона—Якоби в теоретической механике [8], уравнение Беллмана в теории оптимального управления [226], уравнение Айзекса в теории дифференциальных игр [259], уравнение эйконала в геометрической оптике [89]; предельные уравнения Бюргерса и Хопфа в газовой и гидродинамике [141, 246, 258, 272] и т. д.

Классическим методом решения краевых задач для этих уравнений является *метод характеристик*, предложенный О. Коши в первой половине XIX в. Этот метод сводит интегрирование уравнений в частных производных первого порядка к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой называются *характеристиками*. Метод Коши для уравнения в частных производных первого порядка (см., например, [89, 129, 141, 148]) основан на том, что график классического решения краевой задачи *инвариантен* относительно характеристик. Ограниченность области применения этого метода объясняется тем, что в случае нелинейного уравнения в частных производных классическое (гладкое) решение существует, в лучшем случае, лишь локально.

В то же время в приложениях изучаются *негладкие* (недифференцируемые на множестве меры нуль) или *разрывные* функции, имеющие, например, содержательный смысл времени оптимального быстрогодействия в играх сближения-уклонения, оптимального расстояния до цели в заданный момент времени в антагонистических дифференциальных играх, негладкого фронта распространения световой волны в неоднородной композитной среде и т. д. Эти негладкие функции определены глобально, удовлетворяют краевому условию, а в точках дифференцируемости удовлетворяют соответствующему уравнению в частных производных. Они могут рассматриваться как обобщенные решения рассматриваемых краевых задач.

Потребность введения корректного понятия обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби и других типов уравнений в частных производных стимулировала активные исследования в 50–70-е гг. XX в. Задачи, связанные с изучением *слабых* решений уравнений в частных производных, изучались в работах Н. С. Бахвалова, И. М. Гельфанда, С. К. Годунова, О. А. Ладыженской, О. А. Олейник, Б. Л. Рождественского, А. А. Самарского, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова, L. C. Evans, W. H. Fleming, E. Hopf, P. Lax и многих других известных математиков. Эти исследования опирались в основном на интегральные методы и интегральные свойства обобщенных решений.

Среди исследований этого периода отметим результаты С. Н. Кружкова, которые были получены для уравнений типа Гамильтона—Якоби с выпуклым гамильтонианом (см., например, [81]). В его работах были заложены основы систематического применения субдифференциального аппарата выпуклого анализа для исследования негладких решений уравнений в частных производных. В работе Ф. Кларка [234] для исследования обобщенного решения уравнения Беллмана было предложено использование другого нового аппарата негладкого анализа — обобщенных производных по направлению.

В начале 1980-х гг., развивая и применяя технику использования суб- и супердифференциалов негладких функций, М. Крэндэлл и П. Л. Лайонс [240, 241, 274] ввели понятие вязкостного

решения (viscosity solution), существование которого доказывалось с помощью метода исчезающей вязкости. В рамках теории вязкостных решений, имеющей многочисленных последователей, доказаны теоремы существования и единственности для различных типов уравнений первого порядка, эллиптических и параболических уравнений и различных типов краевых задач. Обзоры результатов теории вязкостных решений можно найти в работах [217, 242, 250]. В настоящее время большое внимание исследователей привлекают аналитические, конструктивные и численные методы построения вязкостных решений и приложения теоретических результатов к решению различных химических, экономических, биологических и других прикладных задач (см., например, [219, 220, 246, 260, 291]). В исследовании указанных проблем важную роль в этих исследованиях играют работы О. Alvarez, Z. Artstein, M. Bardi, G. Barles, E. N. Barron, I. Capuzzo-Dolcetta, P. D. Christofides, M. G. Crandall, L. C. Evans, M. Falcone, W. H. Fleming, V. G. Gaitsgory, H. Ishii, R. Jensen, S. Koike, P. L. Lions, B. Perthame, H. M. Soner, P. E. Souganidis, X. Y. Zhou и др.

Другая известная концепция обобщенного решения на базе идемпотентного анализа предложена в работах В. П. Маслова и его учеников (см., например, [66, 107]). С помощью этого подхода, линеаризующего выпуклые задачи, исследуются уравнения Гамильтона—Якоби с выпуклым гамильтонианом и их приложения к задачам математической физики.

Исследования, составившие основу предлагаемой книги, проводились в рамках концепции обобщенного (минимаксного) решения, предложенной А. И. Субботиным [149, 150, 293]. Концепция минимаксного решения имеет свои истоки в теории позиционных дифференциальных игр [71, 73, 74, 265], разработанной научной школой Н. Н. Красовского и базирующейся на минимаксных оценках и операциях. Фундаментальный вклад в построение теории позиционного гарантированного управления, наблюдения, оценивания и динамической реконструкции сыграли работы Н. Н. Красовского [71, 74, 264], А. Б. Куржанского [35, 90, 270], Ю. С. Осипова [85, 123, 267], А. И. Субботина [73, 160, 163] и их учеников. Ведущую роль в развитии этой теории играют работы Э. Г. Альбрехта, Б. И. Ананьева, В. Д. Батухтина, Ю. И. Бердышева, С. А. Брыкалова, В. Л. Гасилова, М. И. Гусева, Х. Г. Гусейнова, С. Н. Завалищина, А. Я. Каца, А. В. Кима, А. Ф. Клейменова, А. И. Короткого, А. Н. Красовского, А. В. Кряжмского, С. И. Кумкова, Н. Ю. Лукоянова, В. И. Максимова, О. И. Никонова, В. С. и Н. Л. Пацко, В. Г. Пименова, В. М. и Т. Н. Решетовых, А. Н. Сесекина, И. Ф. Сивергиной, А. М. Тарасьева, В. Е. Третьякова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой, А. Г. Ченцова, Г. И. Шишкина, А. Ф. Шорикова, и др.

На базе обнаруженного в теории позиционных дифференциальных игр факта инвариантности надграфика и подграфика функции цены игры относительно так называемых «уравнений в контингентах» Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным были введены фундаментальные понятия теории игр: понятия *u-стабильности* и *v-стабильности* вещественных функций. Наличие этих свойств у функции цены и интерпретация функции цены игры как обобщенного решения уравнения Айзека послужили прообразами формализации минимаксного решения уравнения в частных производных первого порядка. Понятие минимаксного решения можно определить различными способами, в том числе в инфинитезимальной форме, при помощи средств негладкого анализа: производных по направлениям, конусов касательных направлений, суб- и супер-дифференциалов и т. д. Формулировки этих определений и доказательство их эквивалентности даны, например, в [150, 293]). Все эти определения описывают свойство *слабой инвариантности* графика минимаксного решения относительно *обобщенных характеристик*, т.е. решений специальных, *характеристических* дифференциальных включений.

В рамках теории минимаксных решений доказаны теоремы существования и единственности, корректности и содержательности понятия минимаксного решения для различных типов краевых задач уравнений в частных производных первого порядка [1, 19, 37, 96, 97, 152, 161, 178, 180]. Разработаны конструктивные и численные (в том числе сеточные) методы решения этих задач [34, 38, 159, 162, 170, 181, 182]. Важным результатом теории минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка является доказательство нетривиального факта эквивалентности понятий минимаксного и вязкостного решений [163, 293]. В теории минимаксных решений широко используются методы теории дифференциальных игр, динамической оптимизации

и негладкого анализа. В то же время исследования минимаксных решений стимулируют развитие этих новых разделов математики (см., например, [62, 235]).

Задачи оптимального управления и дифференциальные игры, где функция цены совпадает с минимаксным решением уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана—Айзекса, занимают особое место в приложениях теории минимаксных решений (см., например, [22, 149, 150, 191–193, 265, 269, 305]). Функция цены каждой точке фазового пространства задачи ставит в соответствие совпадающие значения оптимальных гарантированных результатов двух игроков-антагонистов (или игрока и помехи), достижимых из нее как из начальной точки. Кроме того, эта функция играет ключевую роль в построении оптимальных и почти оптимальных способов управления по принципу обратной связи (см. [61, 70, 100, 137, 226, 228, 245, 247, 252, 259]). Истоки теории оптимального гарантированного управления восходят к работам Н. Н. Красовского, Л. С. Понтрягина, R. Bellman, R. J. Elliott, W. H. Fleming, A. Fridman, N. J. Kalton, R. Isaacs. Существенный вклад в эти исследования внесли также работы А. А. Аграчева, Л. А. Акуленко, Д. В. Аносова, В. И. Арнольда, А. А. Арутюнова, С. М. Асеева, В. И. Благодатских, В. Г. Болтянского, С. А. Вахрамеева, Р. В. Гамкрелидзе, Н. Л. Григоренко, П. Б. Гусятникова, А. Я. Дубовицкого, В. И. Жуковского, М. И. Зеликина, В. И. Зубова, А. Д. Иоффе, Ю. С. Ледяева, А. А. Меликяна; А. А. Милютина, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Моисеева, М. С. Никольского, Н. Н. Петрова, Л. А. Петросяна, Г. К. Пожарицкого, Е. С. Половинкина, Б. Н. Пшеничного, В. М. Тихомирова, В. И. Ухоботова, Ф. Л. Черноусько, А. А. Чикрия, В. А. Якубовича, L. D. Berkovitz, A. E. Bryson, Y.-C. Ho, G. Leitmann, R. Olsder, E. O. Roxin, J. Warga и многих других школ и исследователей.

Данная монография посвящена дальнейшему развитию теории минимаксных решений для новых типов уравнений: сингулярно возмущенного уравнения Гамильтона—Якоби и квазилинейного параболического уравнения Айзекса, а также обоснование приложений теории минимаксных решений этих уравнений и уравнения Беллмана к задачам оптимального управления и дифференциальным играм. *Метод характеристик* является ключевым в этих исследованиях, и потому он вынесен в заголовок книги.

Отметим, что различные обобщения метода характеристик играют все большую роль в современных исследованиях задач динамической оптимизации и краевых задач для соответствующих уравнений в частных производных. Новые подходы предложены в работах А. Б. Куржанского, Ю. С. Ледяева, А. А. Меликяна, Д. Б. Силина, J. P. Aubin, F. H. Clarke, H. Frankowska, G. Haddad и др.

Монография состоит из пяти глав, разбитых на двадцать разделов. Известные результаты, используемые в монографии, носят название *утверждений*. Вспомогательные результаты, полученные автором, носят название *лемм*, а основные результаты — *теорем*. Все утверждения, леммы и теоремы имеют двойную нумерацию: римская цифра означает номер главы, а арабская — порядковый номер утверждения (леммы, теоремы) в этой главе. Разделы имеют сплошную нумерацию. Подразделы и формулы имеют свою двойную нумерацию, где первая цифра означает номер раздела, а вторая — номер подраздела или формулы в разделе, соответственно.

В первой главе приводятся основные понятия классической теории уравнений Гамильтона—Якоби, необходимый аппарат негладкого анализа, а также необходимые понятия и факты теории минимаксных и вязкостных решений.

Во второй главе подробно исследуется функция Беллмана (функция цены) для задачи оптимального управления с функционалом типа Больца. При этом используется совпадение функции цены с минимаксным решением уравнения Беллмана. Указанная задача управления привлекает большое внимание теоретиков и прикладников (отметим наиболее близкие к проблематике монографии работы В. А. Вязгина, Р. Ф. Габасова, В. И. Гурмана, В. Ф. Демьянова, Ф. М. Кирилловой, В. Ф. Кротова, С. Н. Кружкова, Л. И. Розоноэра, М. М. Хрусталева, M. Bardi, E. N. Barron, L. D. Berkovitz, P. Cannarsa, F. H. Clarke, H. Frankowska, R. Jensen, G. Leitman, P. L. Lions, S. Mirică, R. T. Rockafellar, R. Vinter).

Теория минимаксных решений уравнения Беллмана позволяет получить результаты второй главы монографии:

- получена репрезентативная формула минимаксного решения как огибающей гладкого семейства функций;
- предложен вывод принципа максимума Понтрягина с помощью свойств дифференцируемости по параметру решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- доказано совпадение экстремалей и коэкстремалей принципа максимума Понтрягина с классическими характеристиками для уравнения Беллмана;
- получено условие первого порядка, дополняющее принцип максимума Понтрягина до необходимых и достаточных условий оптимальности;
- обоснован метод динамического программирования и структура оптимального синтеза — оптимального управления по принципу обратной связи;
- получена формула минимаксного решения краевой задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка с вогнутым гамильтонианом на базе классических характеристик этого уравнения.

В главах I и II приведены результаты исследований возможности сингулярной аппроксимации минимаксного решения невозмущенного уравнения Гамильтона—Якоби с помощью минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби, рассматриваемых в расширенном фазовом пространстве и сингулярно возмущенных по части импульсных переменных. При этом основной интерес представляет получение достаточных условий сингулярной аппроксимации и приложение этих результатов к построению асимптотик сингулярно возмущенных дифференциальных игр. Начало этим исследованиям положили работы А. Н. Тихонова, они близки также результатам Е. Ф. Мищенко и Л. С. Понтрягина, связанным с математическим описанием динамических процессов для систем с быстрыми и медленными движениями. Это направление исследований и приложений обобщенных решений имеет многочисленных последователей. Среди работ, наиболее близких к материалу данной монографии, отметим работы Л. Д. Акуленко, В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой, В. Г. Гайцгори, М. Г. Дмитриева, А. Б. Куржанского, А. А. Первозванского, Н. Х. Розова, Е. Л. Тонкова, Т. Ф. Филипповой, А. М. Фрадкова, Z. Artstein, M. Bardi, E. N. Barron, A. Bensoussan, L. C. Evans, P. Donchev, R. Jensen, P. V. Kokotovic, V. Veliov.

В главе III введено понятие минимаксного решения сингулярно возмущенного уравнения Гамильтона—Якоби, которое содержит малый параметр сингулярности в знаменателе коэффициентов перед частью импульсных переменных. Новым является появление быстрых и медленных компонент обобщенных характеристик, определяющих минимаксные решения. Предложены достаточные условия сходимости минимаксных решений сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби при стремлении параметра сингулярности к нулю и описана структура предельных невозмущенных задач. Ключевым в этих условиях является условие существования компактных аттракторов в подпространстве быстрых компонент обобщенных характеристик. Эти условия можно рассматривать как развитие и обобщение техники редукции Тихонова, предложенной для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты использованы в главе IV при исследовании сходимости функции цены и построении асимптотик в дифференциальных играх с быстрыми и медленными движениями и проиллюстрированы модельными примерами.

Глава V посвящена развитию теории минимаксных решений для квазилинейного параболического уравнения типа Гамильтона—Якоби—Айзекса. Интерес к этому обобщенному решению квазилинейного параболического уравнения Айзекса объясняется теми же причинами, что и в упомянутом выше детерминированном случае. Этим обобщенным решением является функция цены диффузионной дифференциальной игры с невырожденным и частично вырожденным шумом. В работах Н. Н. Красовского, В. Е. Третьякова, А. Н. Красовского [78, 264] доказано существование функции цены такой игры, введены понятия и обоснованы свойства стохастической *и-стабильности* и *в-стабильности* этой функции.

Понятие обобщенного *вязкостного* решения квазилинейного параболического уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса было введено П. Л. Лайонсом с помощью понятий суб- и суперструй, включающих понятия суб- и супердифференциалов и матриц коэффициентов вторых производных в аппроксимациях оператора Лапласа [275]. Исследованиями обобщенных решений квазилинейных

параболических уравнений и совпадающих с ними функций цены соответствующих стохастических дифференциальных игр занимались также А. М. Ильин, С. Н. Кружков, О. А. Ладыженская, О. А. Олейник, М. G. Crandall, L. C. Evans, W. H. Fleming, F. Fridman, H. Ishii, P. L. Lions, H. M. Soner и др.

В главе V для липшицевых вещественных функций вводятся понятия обобщенных стохастических производных относительно множества направлений сноса и матрицы диффузии, которыми определен диффузионный управляемый процесс. Введено понятие обобщенного минимаксного решения соответствующего квазилинейного параболического уравнения Айзекса. Это определение содержит пару дифференциальных неравенств для обобщенных стохастических производных минимаксного решения, что является одним из путей применения метода обобщенных характеристик для исследования функции цены стохастической игры. Для этой функции, совпадающей с минимаксным решением уравнения Айзекса, введенное определение является инфинитезимальной формой условий стохастической *u-стабильности* и *v-стабильности*. Получены формулы стохастических производных для класса функций, дифференцируемых по части переменных, и приведены соответствующие уточнения вида обобщенного квазилинейного параболического уравнения Айзекса для стохастических дифференциальных игр, в которых управление, помеха и шум действуют одновременно только на часть фазовых переменных.

Полученные в монографии результаты открывают перспективы дальнейшего развития теории минимаксных решений для новых типов уравнений и краевых задач. Эти результаты могут также быть положены в основу анализа конкретных задач управления, они могут служить базой и обоснованием алгоритмов построения управлений, разрешающих эти задачи.

Автор глубоко признательна светлой памяти А. И. Субботину за формирование её научных интересов, конструктивную критику и полезные советы.

Автор благодарна своему учителю академику Н. Н. Красовскому за благожелательное отношение, ценные советы, поддержку и его предложение опубликовать представленные результаты.

Автор выражает искреннюю признательность академику Р. В. Гамкрелидзе за предоставленную возможность опубликовать эту книгу.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность Э. Г. Альбрехту, М. И. Гусеву, А. В. Кряжимскому, А. Б. Куржанскому, А. А. Меликяну, Ю. С. Осипову, В. Е. Третьякову, В. Н. Ушакову, А. Г. Ченцову, Г. С. Шелементьеву и всем коллегам — сотрудникам отделов динамических систем, оптимального управления, управляемых систем и дифференциальных уравнений ИММ УрО РАН, а также кафедры прикладной математики УрГУ за внимание к работе и плодотворные обсуждения результатов на семинарах и при личных встречах.

Результаты, составившие материал этой монографии, были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 02-01-00769, № 03-01-00599) и грантом поддержки научной школы НШ-791.2003.1.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В работе приняты следующие основные обозначения.

$\mathbb{R}^n$	n -мерное евклидово пространство;
$\top$	операция транспонирования;
$\langle x, y \rangle$	скалярное произведение векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$;
$\ x\ $	евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$, $\ x\ = \langle x, x \rangle^{1/2}$;
$\text{dist}(x, X)$	расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\text{dist}(x, X) = \inf_{x' \in X} \ x - x'\ $;
$\text{int } X$	внутренность множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
$\text{cl } X$	замыкание $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
∂X	множество граничных точек $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
$\text{co } X$	выпуклая оболочка $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
$\text{comp } \mathbb{R}^n$	множество всех компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$;
$\text{diam } X$	диаметр множества $X \subset \text{comp } \mathbb{R}^n$, $\text{diam } X = \max_{x \in X, x' \in X} \ x - x'\ $;

$\text{dist}(X_1, X_2)$	хаусдорфово расстояние между множествами $X_1 \subset \text{comp } \mathbb{R}^n$ и $X_2 \subset \text{comp } \mathbb{R}^n$: $\text{dist}(X_1, X_2) = \max\left\{\max_{x_1 \in X_1} \text{dist}(x_1, X_2), \max_{x_2 \in X_2} \text{dist}(x_2, X_1)\right\};$
B_n	замкнутый единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат;
B_n^ε	замкнутый шар радиуса ε в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат;
$\text{proj}_x G$	проекция множества G , определенного в пространстве координат $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, на подпространство $\mathbb{R}^n$ координат x ;
$\varphi : W \rightarrow Q$	отображение с областью определения W и множеством значений Q ,
$\varphi(\cdot)$	отображение φ (в отличие от значения $\varphi(w)$ данного отображения в точке $w \in W$);
$\text{gr } \varphi$	график функции $\varphi(\cdot) : W \rightarrow Q \subseteq \mathbb{R}^1$: $\text{gr } \varphi = \{(w, r) \in W \times \mathbb{R}^1 : w \in W, r = \varphi(w)\};$
$\text{epi } \varphi$	надграфик функции $\varphi(\cdot) : W \rightarrow Q \subseteq \mathbb{R}^1$: $\text{epi } \varphi = \{(w, r) \in W \times \mathbb{R}^1 : w \in W, r \geq \varphi(w)\};$
$\text{hypo } \varphi$	подграфик функции $\varphi(\cdot) : W \rightarrow Q \subseteq \mathbb{R}^1$: $\text{hypo } \varphi = \{(w, r) \in W \times \mathbb{R}^1 : w \in W, r \leq \varphi(w)\};$
$D_x \omega$	вектор-градиент по $x = (x_1, \dots, x_n)$ функции $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (x, y) \mapsto \omega(x, y) \in \mathbb{R}^1$: $D_x \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right);$
$D\omega$	вектор-градиент функции $\omega(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $D\omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right);$
$\text{rpm } W$	множество всех регулярных вероятностных мер, определенных на $W \subset \text{comp } \mathbb{R}^m$;
$C_n(W)$	пространство непрерывных вещественных функций $\phi(\cdot) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \text{comp } \mathbb{R}^m$;
$C_n(W)^*$	пространство, сопряженное к пространству $C_n(W)$ непрерывных вещественных функций;
$L_n([t_0, T], C_n(W))$	пространство вещественных функций $\xi(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in [0, T]$, таких, что при всех $w \in W$ функции $\xi(\cdot, w) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ измеримы по Борелю и суммируемы, т.е. $\xi(\cdot, w) \in L_n([t_0, T])$, и при почти всех $t \in [t_0, T]$ функции $\xi(t, \cdot) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны, т.е. $\xi(t, \cdot) \in C_n(W)$;
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство, где Ω — некоторое непустое множество, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра подмножеств Ω , $\mathbb{P}$ — вероятностная мера;
$\mathbb{P}$ -п.в.	метка, обозначающая, что отмеченное ею условие справедливо почти всюду в Ω относительно меры $\mathbb{P}$;
$\{\mathcal{F}_s\}, s \geq 0$	неубывающее семейство σ -алгебр подмножеств Ω ;
$\text{tr } A$	след матрицы $A = \{a_{ij}\}, i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, n}, \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$;
$\mathcal{L}[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]$	множество всех постоянных прямоугольных матриц $A = \{a_{ij}\}, i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}$, размерности $n \times m$;
$\square$	конец доказательства.

ГЛАВА I

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

1. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Материалом для данной монографии послужили исследования уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона—Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'(t, x)}{\partial t} + H(t, x, V'(t, x), D_x V'(t, x)) &= 0, \quad (t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ D_x V'(t, x) &= \left(\frac{\partial V'(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V'(t, x)}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Такие уравнения возникают при решении большого числа прикладных (инженерных, управленческих, навигационных, экономических, химических, биологических) и теоретических задач.

В монографии рассматривается следующая краевая задача Коши для уравнения (1.1):

$$V'(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Введем основные понятия, принятые в теории уравнений Гамильтона—Якоби (см., например, [58, 89, 129]).

1.1. Классическое решение задачи Коши и классический метод характеристик Коши для уравнения Гамильтона—Якоби. Напомним, что функция $H(t, x, z, p) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в уравнении (1.1) называется *гамильтонианом*. В дальнейшем будут рассматриваться уравнения (1.1), гамильтониан которых не зависит от переменной z . Функция $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в условии (1.2) называется *краевой функцией*. Гамильтониан и краевая функция называются *входными данными* задачи (1.1), (1.2).

Непрерывная функция $V'(\cdot) : \text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемая в открытой полосе $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая *всюду* в точках этой полосы уравнению (1.1), а также удовлетворяющая краевому условию (1.2), называется *классическим решением* краевой задачи Коши (1.1), (1.2).

Одним из основных методов исследования и решения таких задач является предложенный О. Коши в первой половине XIX в. *метод характеристик*, который сводит интегрирование уравнения в частных производных (1.1) к интегрированию на интервале $[0, T]$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{p}}{dt} &= -D_{\hat{x}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{z}}{dt} &= \langle \hat{p}, D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}) \rangle - H(t, \hat{x}, \hat{p}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

при выполнении следующих краевых условий, согласованных с (1.2):

$$\hat{x}(T, y) = y, \quad \hat{p}(T, y) = D_y \sigma(y), \quad \hat{z}(T, y) = \sigma(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

где

$$D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \hat{p}_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \hat{p}_n} \right), \quad D_{\hat{x}} H(t, \hat{x}, \hat{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \hat{x}_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \hat{x}_n} \right),$$

а символ $\langle p, q \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов p и q .

Параметрическое семейство решений этих обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых *характеристическими*, заполняет график

$$\text{gr } \omega = \{(t, x, z) : (t, x) \in \text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n, z = \omega(t, x)\}$$

классического гладкого решения уравнения Гамильтона—Якоби и описывает векторное поле градиентов этого решения. Другими словами, график классического решения $\omega(\cdot) \in C^1(\text{cl } \Pi_T)$ уравнения

Гамильтона—Якоби (1.1) *инвариантен* относительно решений характеристических уравнений (1.3). Эти решения

$$(\hat{x}(\cdot, y), \hat{p}(\cdot, y), \hat{z}(\cdot, y)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

зависящие от параметра $y \in \mathbb{R}^n$, называются *характеристиками* (см. например, [89, 129, 141]).

Метод характеристик Коши применим для построения классического решения уравнения Гамильтона—Якоби в тех случаях, когда проекции $\hat{x}(\cdot, y)$ на фазовое пространство характеристик (1.5) не пересекаются, иными словами, когда при всех $(t, x) \in \Pi_T$ множество параметров

$$Y(t, x) = \{\forall y \in \mathbb{R}^n : \hat{x}(t, y) = x\} = \{y(t, x)\} \quad (1.6)$$

одноэлементно. Тогда классическое решение представимо в виде

$$V'(t, x) = \hat{z}(t, y(t, x)), \quad (t, x) \in \text{cl } \Pi_T. \quad (1.7)$$

Известно, что классический метод характеристик Коши является в общем случае локальным методом. Если в краевой задаче Коши (1.1), (1.2) со сколь угодно гладкими входными данными $\sigma(\cdot)$ и $H(t, x, p)$ гамильтониан нелинеен, то характеристики Коши не пересекаются лишь в достаточно малой окрестности краевых условий; вне этой окрестности классического решения краевой задачи для уравнения Гамильтона—Якоби не существует. Это типичное проявление нелинейности можно проиллюстрировать известным примером [293] негладкой интегральной поверхности, выстеленной линейными характеристиками уравнения (1.1) и имеющей особенность типа «ласточкин хвост» (т.е. самопересекающейся).

Пусть

$$H(t, x, p) = \sqrt{1 + p^2}, \quad \sigma(x) = \frac{x^2}{2},$$

$0 \leq t \leq T = 2$, $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$. Таким образом, рассматриваем следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 0, \quad u(2, x) = \frac{x^2}{2}. \quad (1.8)$$

Характеристическая система (1.3) для этой задачи имеет вид

$$\dot{x} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{z} = \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

В силу (1.4) решения рассматриваемой системы должны удовлетворять краевым условиям

$$\tilde{x}(2, y) = y, \quad \tilde{p}(2, y) = y, \quad \tilde{z}(2, y) = \frac{y^2}{2},$$

где $y \in \mathbb{R}$ — параметр. Следовательно, решения характеристической системы с указанными краевыми условиями описываются формулами

$$\tilde{x}(t, y) = y + \frac{(t-2)y}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \tilde{s}(t, y) = y, \quad \tilde{z}(t, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{(t-2)}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Эти характеристики не пересекаются при $1 < t \leq 2$. В полосе $D = \{(t, x) : 1 < t \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$ уравнение $x = \tilde{x}(t, y)$ имеет единственное решение $\tilde{y}(t, x)$. Функция $u(t, x) = \tilde{z}(t, y(t, x))$ непрерывно дифференцируема в области D . В соответствии с методом характеристик эта функция является локальным классическим решением задачи Коши (1.8) в полосе D .

Несмотря на ограниченность области применимости метода характеристик Коши идея использования инвариантности графика классического решения уравнения Гамильтона—Якоби относительно характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений оказалась глубокой и весьма плодотворной. Как показывает материал данной монографии, и классические характеристики (1.5), и обобщенные характеристики, составляющие основу понятия обобщенного (минимаксного) решения уравнения Гамильтона—Якоби, являются удобным инструментом исследований негладких решений этого уравнения, адекватным рассматриваемым задачам.

Будем полагать, что входные данные $\sigma(x)$ и $H(t, x, p)$ в рассматриваемой задаче Коши (1.1), (1.2) удовлетворяют следующим требованиям, стандартным в теории обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений [149, 240]:

(Н1) функция $\sigma(x)$ непрерывна и локально ограничена;

(Н2) гамильтониан $H(t, x, p)$ непрерывен в области определения $\text{cl } \Pi \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет оценке

$$\sup_{(t,x) \in \text{cl } \Pi_T} \frac{|H(t, x, 0)|}{(1 + \|x\|)} < \infty; \quad (1.9)$$

(Н3) гамильтониан $H(t, x, p)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной p :

$$|H(t, x, p') - H(t, x, p'')| \leq \lambda(x) \|p' - p''\| \quad (1.10)$$

при любых $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, $p', p'' \in \mathbb{R}^n$, где $\lambda(x) := (1 + \|x\|)\mu$, $\mu > 0$ — постоянная;

(Н4) гамильтониан $H(t, x, p)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной x :

$$\sup_{(t,x',x'',p)} \left\{ \frac{|H(t, x', p) - H(t, x'', p)|}{\|x' - x''\|(1 + \|p\|)} \right\} < \infty \quad (1.11)$$

при $(t, x', x'', p) \in [0, T] \times B \times B \times \mathbb{R}^n$, где B — произвольная ограниченная область $B \subset \mathbb{R}^n$.

1.2. Вязкостное решение уравнения Гамильтона—Якоби. Как известно, в задачах геометрической оптики, теоретической механики, механики сплошных сред, оптимального управления и многих других изучаются негладкие (недифференцируемые на множестве меры нуль) или разрывные функции, имеющие, например, содержательный смысл негладкого фронта распространения световой волны в неоднородной среде, поверхности кристаллов, растущих в насыщенном растворе, времени оптимального быстрогодействия и т. д.

Эти негладкие функции определены в достаточно больших областях $\text{cl } \Pi_T$ или даже во всем фазовом пространстве задачи, причем известно, что в точках дифференцируемости, т.е. почти всюду, они удовлетворяют соответствующему уравнению Гамильтона—Якоби. Они совпадают с классическим решением этого уравнения в тех областях, где это решение определено. Таким образом, эти функции могут быть истолкованы как обобщенные решения уравнений Гамильтона—Якоби. Однако формальное определение обобщенного решения как непрерывной функции, удовлетворяющей уравнению Гамильтона—Якоби почти всюду, является некорректным. Известны примеры, в которых существует бесконечно много функций, удовлетворяющих уравнению Гамильтона—Якоби почти всюду (см., например, [246]). Поэтому возникает проблема введения понятия обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби таким образом, чтобы оно сохранило содержательный смысл и было единственным.

Эта потребность стимулировала активные исследования уравнений Гамильтона—Якоби в 1950–70 гг. Задачи, связанные с изучением «слабых» решений уравнений в частных производных первого и более высоких порядков, исследовались в основном интегральными методами и с помощью интегральных представлений обобщенных решений.

Развитие выпуклого и негладкого анализа в 1970-е гг. позволило применить к исследованию обобщенных решений уравнений в частных производных новые результаты и методы, основанные на обобщениях понятия дифференцируемости. В начале 1980-х гг. М. Крэндэлл и П. Л. Лионс ввели понятие вязкостного решения (viscosity solution).

Напомним одно из эквивалентных определений вязкостного решения.

Определение 1.1. *Верхним вязкостным решением* уравнения (1.1) называется непрерывная функция $\omega(t, x)$, удовлетворяющая следующему условию: если разность функций $\omega(t, x) - \varphi(t, x)$ достигает локального минимума в точке $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ и в этой точке функция φ дифференцируема, то должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial \varphi(t_0, x_0)}{\partial t} + H(t_0, x_0, D_x \varphi(t_0, x_0)) \leq 0. \quad (1.12)$$

Нижним вязкостным решением уравнения (1.1) называется непрерывная функция $\omega(t, x)$, удовлетворяющая следующему условию: если разность функций $\omega(t, x) - \varphi(t, x)$ достигает локального

максимума в точке $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ и в этой точке функция φ дифференцируема, то должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial \varphi(t_0, x_0)}{\partial t} + H(t_0, x_0, D_x \varphi(t_0, x_0)) \geq 0. \quad (1.13)$$

Вязкостным решением называется функция, которая одновременно является верхним и нижним решением.

Далее в п. 2.5 будет приведено еще одно, эквивалентное данному, определение вязкостного решения в терминах суб- и супердифференциалов [241].

2. ОБОБЩЕНИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

2.1. Обобщенные характеристики и непрерывное минимаксное решение уравнения Гамильтона—Якоби. Результаты исследований, приведенных в данной книге, получены в рамках концепции минимаксного решения, предложенной А. И. Субботиным [149, 150, 293]. Понятие минимаксного обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби является содержательным и может быть истолковано как обобщение и релаксация классического метода характеристик Коши для уравнения Гамильтона—Якоби.

Приведем два эквивалентных (см. [293]) определения минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) определение I.3 и определение I.6.

Пусть S — некоторое непустое множество и M — многозначное отображение

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \times S \ni (t, x, s) \mapsto M(t, x, s) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Определение I.2. Пару (S, M) будем называть *характеристическим комплексом* (или, для краткости, комплексом), если выполнены указанные ниже требования.

1°. Для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и $s \in S$ множество $M(t, x, s) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ — непусто, выпукло и компактно. Для любых $(t, x, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times S$ и $(f, g) \in M(t, x, s)$ справедливы оценки

$$\|f\| \leq \lambda(x), \quad |g| \leq m(t, s)(1 + \|x\|),$$

где величина $\lambda(x)$ определена в условии (1.10). Для любого $s \in S$ функция $t \mapsto m(t, s)$ суммируема на $[0, T]$, а многозначное отображение $(t, x) \mapsto M(t, x, s)$ полунепрерывно сверху.

2°а. Для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и $p \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\max_{s \in S} \min_{(f, g) \in M(t, x, s)} [\langle f, p \rangle - g] = H(t, x, p).$$

2°б. Для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и $p \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\min_{s \in S} \max_{(f, g) \in M(t, x, s)} [\langle f, p \rangle - g] = H(t, x, p).$$

Совокупность комплексов (S, M) обозначим символом $\mathcal{C}(H)$.

Замечание I.1. Заметим, что указанным условиям удовлетворяет, например, пара (S, M) , где $S = \mathbb{R}^n$ и

$$M(t, x, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \lambda(x), \quad g = \langle f, s \rangle - H(t, x, s)\}$$

при всех $s \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, где $\lambda(x) = (1 + \|x\|)\mu$ — константа Липшица из предположения (1.10).

Выберем произвольно комплекс $(S, M) \in \mathcal{C}(H)$ и $s \in S$. Символом $\text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций

$$(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

удовлетворяющих условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$ и дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in M(t, x(t), z(t), s), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.2)$$

Определение 1.3. Минимаксным решением уравнения (1.1) называется непрерывная функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующему условию: для любых $(t_0, x_0, z_0) \in \text{gr } u$, $s \in S$ и $\tau \in [t_0, T]$ существует траектория

$$(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$$

такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in \text{gr } V'$.

Дифференциальное включение (2.2) называется *характеристическим*, а его решения называются *обобщенными характеристиками*.

Известно [293], что приведенное определение не зависит от выбора конкретного комплекса $(S, M) \in \mathcal{C}(H)$. Это свойство разнообразия (и/или унификации) характеристических комплексов, сопряженных с данным гамильтонианом согласно условиям 2°а, 2°b, играет важную роль при исследовании и конструировании минимаксных решений. Оно, в частности, используется в главе IV при определении эффективных достаточных условий сходимости минимаксных решений сингулярно возмущенного уравнения Айзекса.

Определение 1.4. Пару (S_+, M_+) будем называть *верхним характеристическим комплексом* (или, для краткости, *верхним комплексом*), если выполнены указанные выше требования 1° и 2°а.

Пару (S_-, M_-) будем называть *нижним характеристическим комплексом* (или, для краткости, *нижним комплексом*), если выполнены указанные выше требования 1° и 2°b.

Символом $\text{Sol}_+(t_0, x_0, z_0, s_+)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций

$$(x^+(\cdot), z^+(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

удовлетворяющих условию $(x^+(t_0), z^+(t_0)) = (x_0, z_0)$ и дифференциальному включению

$$(\dot{x}^+(t), \dot{z}^+(t)) \in M_+(t, x(t), z(t), s_+), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.3)$$

где $s_+ \in S_+$, (S_+, M_+) — верхний характеристический комплекс.

Символом $\text{Sol}_-(t_0, x_0, z_0, s_-)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций

$$(x^-(\cdot), z^-(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

удовлетворяющих условию $(x^-(t_0), z^-(t_0)) = (x_0, z_0)$ и дифференциальному включению

$$(\dot{x}^-(t), \dot{z}^-(t)) \in M_-(t, x(t), z(t), s_-), \quad t \in [t_0, T],$$

где $s_- \in S_-$, (S_-, M_-) — нижний характеристический комплекс.

Определение 1.5. Верхним минимаксным решением уравнения (1.1) называется полунепрерывная снизу функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующему условию:

(i) для любых $(t_0, x_0, z_0^+) \in \text{epi } V'$, $s_+ \in S_+$ и $\tau \in [t_0, T]$ существует траектория

$$(x^+(\cdot), z^+(\cdot)) \in \text{Sol}_+(t_0, x_0, z_0^+, s_+)$$

такая, что $(\tau, x^+(\tau), z^+(\tau)) \in \text{epi } V'$, где

$$\text{epi } V' = \{(t, x, z) : t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n, z \geq V'(t, x)\}.$$

Нижним минимаксным решением уравнения (1.1) называется полунепрерывная сверху функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующему условию:

(ii) для любых $(t_0, x_0, z_0^-) \in \text{hypo } V'$, $s_- \in S_-$ и $\tau \in [t_0, T]$ существует траектория

$$(x^-(\cdot), z^-(\cdot)) \in \text{Sol}_-(t_0, x_0, z_0^-, s_-)$$

такая, что $(\tau, x^-(\tau), z^-(\tau)) \in \text{hypo } V'$, где

$$\text{hypo } V' = \{(t, x, z) : t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n, z \leq V'(t, x)\}.$$

Определение 1.6. Минимаксным решением уравнения (1.1) называется непрерывная функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$, которая одновременно является верхним и нижним минимаксным решением уравнения (1.1).

2.2. Теоремы существования и единственности непрерывного минимаксного решения в задаче Коши для уравнения Гамильтона—Якоби. В рамках теории минимаксных решений доказаны следующие утверждения [293].

Утверждение I.1. Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4). Тогда для любого верхнего решения V^* в задаче Коши (1.1), (1.2) и любого нижнего решения V_* в этой задаче справедливо неравенство $V^* \geq V_*$.

Утверждение I.2. Если выполнены условия (Н1)–(Н4), то существуют такие верхнее решение V^* и нижнее решение V_* задачи Коши (1.1), (1.2), что $V^* \leq V_*$.

Утверждение I.3. Если выполнены условия (Н1)–(Н4), то в задаче Коши (1.1), (1.2) существует единственное непрерывное минимаксное решение $V' = V^* = V_*$.

2.3. Дифференцируемость по направлению, суб- и супердифференциалы негладких функций. Понятие минимаксного решения можно вводить также другими способами, эквивалентными вышеприведенным, в том числе при помощи средств негладкого анализа: производных по направлениям, конусов касательных направлений, суб- и супер-дифференциалов. Формулировки этих определений и доказательство их эквивалентности даны, например, в [150, 293]. Часть определений содержится ниже в п. 2.5. В данном и в следующем (п. 2.4) разделах приведены те понятия негладкого анализа, которые используются в материале данной монографии (см. [115, 139, 234, 236, 240, 241, 243, 286]).

Определение I.7. Обобщенным дифференциалом Кларка функции

$$\mathbb{R}^{n+1} \supset \tilde{\Pi}_T \ni (t, x) \rightarrow V'(t, x) \in \mathbb{R}$$

в точке $(t, x) \in \Pi_T$ называется множество

$$\partial_C V'(t, x) = \text{co} \left\{ \forall (\rho, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : (\rho, p) = \lim_{(t', x') \rightarrow (t, x)} \frac{\partial V(t', x')}{\partial(t, x)} \right\}, \quad (2.4)$$

где (t', x') — точки, в которых функция $V'(\cdot)$ дифференцируема, и

$$\frac{\partial V'(t', x')}{\partial(t, x)} := \left(\frac{\partial V'(t', x')}{\partial t}, \frac{\partial V'(t', x')}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V'(t', x')}{\partial x_n} \right).$$

Определение I.8. Нижней полупроизводной Дини функции $\mathbb{R}^{n+1} \supset \tilde{\Pi}_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ в точке $(t, x) \in \Pi_T$ по направлению $(\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\frac{d^- V'(t, x)}{(\eta, h)} = \liminf_{\substack{\delta \downarrow 0 \\ (\eta', h') \rightarrow (\eta, h)}} \frac{V'(t + \delta \eta', x + \delta h') - V'(t, x)}{\delta}. \quad (2.5)$$

Аналогично, верхней полупроизводной Дини функции $\mathbb{R}^{n+1} \supset \tilde{\Pi}_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ в точке $(t, x) \in \Pi_T$ по направлению $(\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\frac{d^+ V'(t, x)}{(\eta, h)} = \limsup_{\substack{\delta \downarrow 0 \\ (\eta', h') \rightarrow (\eta, h)}} \frac{V'(t + \delta \eta', x + \delta h') - V'(t, x)}{\delta}. \quad (2.6)$$

Определение I.9. Субдифференциалом (регулярным) функции $\mathbb{R}^{n+1} \supset \tilde{\Pi}_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ в точке $(t, x) \in \Pi_T$ называется множество

$$\partial^- V'(t, x) := \left\{ (\rho, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \forall (\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \langle (\rho, p), (\eta, h) \rangle - \frac{d^- V'(t, x)}{(\rho, p)} \leq 0 \right\}. \quad (2.7)$$

Аналогично, супердифференциалом (регулярным) функции $\mathbb{R}^{n+1} \supset \tilde{\Pi}_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ в точке $(t, x) \in \Pi_T$ называется множество

$$\partial^+ V'(t, x) := \left\{ (\rho, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \forall (\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \langle (\rho, p), (\eta, h) \rangle - \frac{d^+ V'(t, x)}{(\eta, h)} \geq 0 \right\}. \quad (2.8)$$

Замечание I.2. Для всех тех $(t_*, x_*) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$, где регулярные суб- и супердифференциалы непусты, из их определений и определения обобщенного дифференциала Кларка вытекает справедливость следующих соотношений:

$$\partial_C V'(t_*, x_*) \supset \partial^- V'(t_*, x_*), \quad \partial_C V'(t_*, x_*) \supset \partial^+ V'(t_*, x_*). \quad (2.9)$$

Ниже используется следующий результат негладкого анализа.

Утверждение I.4 (см. [234, 286]). Для локально липшицевой функции $\mathbb{R}^{n+1} \ni \text{cl } \Pi_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ в любой точке $(t, x) \in \Pi_T$ множество $\partial_C V'(t, x)$ является непустым, выпуклым и компактным, существуют полупроизводные Дини $\frac{d^\pm V'(t, x)}{(\eta, h)}$ по любому направлению $(\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, причем справедливы соотношения

$$\frac{d^+ V'(t, x)}{(\eta, h)} \leq \max_{(\rho, p) \in \partial_C V'(t, x)} \langle (\rho, p), (\eta, h) \rangle, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^- V'(t, x)}{(\eta, h)} \geq \min_{(\rho, p) \in \partial_C V'(t, x)} \langle (\rho, p), (\eta, h) \rangle. \quad (2.11)$$

2.4. Свойства инвариантности множеств относительно дифференциальных включений. Ключевым понятием теории минимаксных решений является понятие слабой инвариантности (см. [210, 239, 256, 286]).

Пусть S — непустое замкнутое множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и S_t — его сечение в момент t . Пусть $(t, x) \mapsto F(t, x)$ — многозначное отображение, которое точкам полосы $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.12)$$

Определение I.10. Множество S называется *слабо инвариантным* относительно дифференциального включения (2.12), если *существует* траектория $x(\cdot)$ дифференциального включения (2.12), стартовая в точке $x_0 \in S_{t_0}$ и определенная на отрезке $[t_0, T]$, $t_0 \in [0, T]$, которая остается во множестве S при всех $t \in [t_0, T]$, т.е. $x(t) \in S_t$.

Еще одним важным понятием, применяющемся ниже, является понятие сильной инвариантности (см. [210]).

Определение I.11. Множество S называется *сильно инвариантным* относительно дифференциального включения (2.12), если *любая* траектория $x(\cdot)$ дифференциального включения (2.12), стартовая в точке $x_0 \in S_{t_0}$ и определенная на отрезке $[t_0, T]$, $t_0 \in [0, T]$, остается во множестве S при всех $t \in [t_0, T]$, т.е. $x(t) \in S_t$.

2.5. Эквивалентные определения минимаксного решения. Как известно из теории минимаксных решений [293], эквивалентные вышеприведенным определения верхних, нижних и минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби могут быть сформулированы также с помощью различных инструментов негладкого анализа из пп. 2.3. Приведем определения, которые будут использоваться далее в данной книге.

Условия, определяющие верхнее решение. Рассмотрим условия **(U1)–(U3)**, которые доставляют определения верхнего решения уравнения (1.1). Функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V^*(t, x) \in \mathbb{R}$ предполагается полунепрерывной снизу.

(U1) При любом выборе элемента $s_+ \in S_+$ надграфик функции V^* слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}^+(t), \dot{z}^+(t)) \in M^+(t, x^+(t), z^+(t), s_+). \quad (2.13)$$

Здесь и в условии **(U2)** символом (S_+, M^+) обозначается любой верхний характеристический комплекс, который удовлетворяет сформулированным выше требованиям 1° и 2°а.

(U2) Для всех $(t, x) \in \Pi_T$ и $s_+ \in S_+$ имеем

$$\inf_{(f,g) \in M^+(t,x,V^*(t,x),s_+)} \left[\frac{d^- V^*(t,x)}{(1,f)} - g \right] \leq 0. \quad (2.14)$$

(U3) Для всех $(t, x) \in \Pi_T$ и $(\rho, p) \in D^- V^*(t, x)$ имеем

$$\rho + H(t, x, p) \leq 0 \quad (2.15)$$

Условия, определяющие нижнее решение. Рассмотрим нижние решения уравнения (1.1). Функция $V_*(t, x)$ в условиях **(L1)–(L3)** предполагается полунепрерывной сверху.

(L1) При любом выборе элемента $s_- \in S_-$ подграфик функции V_* слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}^-(t), \dot{z}^-(t)) \in M^-(t, x^-(t), z^-(t), s_-). \quad (2.16)$$

Здесь и в условии **(L2)** символ (S_-, M^-) соответствует произвольному нижнему характеристическому комплексу, который удовлетворяет сформулированным выше требованиям 1° и 2°b.

(L2) Для всех $(t, x) \in \Pi_T$ и $s_- \in S_-$ имеем:

$$\sup_{(f,g) \in M^-(t,x,V_*(t,x),s_-)} \left[\frac{d^+ V_*(t,x)}{(1,f)} - g \right] \geq 0. \quad (2.17)$$

(L3) Для всех $(t, x) \in \Pi_T$ и $(\rho, p) \in D^+ V_*(t, x)$ имеем:

$$\rho + H(t, x, p) \geq 0. \quad (2.18)$$

Заметим, что

$$\frac{d^+ V'(t, x)}{(\alpha, f)} = - \frac{d^- (-V'(t, x))}{(\alpha, f)}, \quad D^+ V'(t, x) = -D^- (-V'(t, x)).$$

Условия, определяющие минимаксное решение. Рассмотрим условия **(M1)**, **(M2)**, которые определяют минимаксное решение уравнения (1.1). Мы предполагаем что функция $V'(t, x)$ в этих условиях непрерывна.

(M1) Для любых $(t_0, x_0, z_0) \in \text{gr } V'$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существуют некоторое число $\tau \in (0, T)$ и абсолютно непрерывные функции $(x(\cdot), z(\cdot)) : [t_0, \tau] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют начальному условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$, дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in M(t, x(t), z(t), s) \quad (2.19)$$

и равенству $z(t) = V'(t, x(t))$ при всех $t \in [t_0, \tau]$. Здесь и ниже в условии **(M2)** (S, M) — произвольный характеристический комплекс, который удовлетворяет сформулированным выше требованиям 1°, 2°a и 2°b.

(M2) Функция V' является одновременно верхним и нижним решением уравнения (1.1), т.е. V' удовлетворяет паре условий **(Ui)**, **(Lj)** для некоторых $i, j = 1, 2, 3$.

Утверждение I.5 (см. [293]). Для полунепрерывной снизу функции $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V^*(t, x) \in \mathbb{R}$ условия **(U1)–(U3)** эквивалентны.

Аналогично, для полунепрерывной сверху функции V_* условия **(L1)–(L3)** эквивалентны.

Для непрерывной функции V' условия **(M1)**, **(M2)** эквивалентны.

Опираясь на утверждение I.5, представим следующие определения верхних, нижних и минимаксных решений.

Определение I.12. Полунепрерывная снизу функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V^*(t, x) \in \mathbb{R}$, которая удовлетворяет одному из вышеупомянутых (эквивалентных) условий **(U1)–(U3)**, называется *верхним решением* уравнения (1.1).

Аналогично, полунепрерывная сверху функция $V_*(t, x)$, которая удовлетворяет одному из условий **(L1)–(L3)**, называется *нижним решением* уравнения (1.1).

Непрерывная функция $V'(t, x)$, удовлетворяющая одному из условий **(M1)**, **(M2)**, называется *минимаксным решением* уравнения (1.1).

Отметим, что условия **(U3)**, **(L3)** представляют собой определение вязкостного решения уравнения (1.1) (см. [241]), эквивалентное определению, приведенному в п. 1.2.

Из утверждений I.1–I.3 и I.5 вытекает, что при выполнении предположений **(H1)–(H4)** относительно гамильтониана H и терминальной функции σ существует одно и только одно минимаксное решение задачи Коши (1.1), (1.2), которое совпадает с единственным непрерывным вязкостным решением этой задачи. Доказательство этих фактов приведено в [150, 293].

Упомянутые выше понятия обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби различны по форме и по используемому математическому аппарату, но эквивалентны по содержанию, так как определяют одни и те же функции. В своей основе все эти определения содержат одно и то же свойство *слабой инвариантности* графика обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби относительно характеристических комплексов.

Таким образом, содержательное понятие обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби базируется на идеях, заложенных в классическом методе характеристик Коши.

ГЛАВА II

КЛАССИЧЕСКИЙ И ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОДЫ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3. Постановка задачи оптимального управления

3.1. Программная задача оптимального управления. Рассмотрим задачу оптимального управления **(ОСР)** системой, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

где t — время, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, значения управляющего параметра u выбираются из заданного компактного множества $P \subset \mathbb{R}^m$, начальное состояние системы $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in [0, T]$. Фиксирован момент окончания процесса управления T и задан функционал платы $I_{t_0, x_0}(x(\cdot), u(\cdot))$ типа Больца:

$$I_{t_0, x_0}(x(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, u(\cdot))) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t)) dt, \quad (3.2)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — траектория движения динамической системы (3.1), стартовой из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$.

Задача оптимального управления ОСР состоит в управлении системой (3.1) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат (*цену*) $V(t_0, x_0)$, который определяется следующим соотношением:

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) \quad (3.3)$$

для начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Символом $\mathbf{U}_{t_0}$ обозначается множество всех допустимых управлений — измеримых функций $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$, называемых *программами* ($t_0 \in [0, T]$). Символами Π_T и $\text{cl } \Pi_T$ будут обозначаться следующие множества (полосы) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad \text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

3.2. Основные предположения. Предположим, что исходные данные рассматриваемой задачи **ОСР** удовлетворяют следующим условиям.

(A1) Функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ в (3.1), (3.2) непрерывны на $\text{cl } \Pi_T \times P$ и липшицевы относительно t и x , т.е.

$$\begin{aligned} \|f(t', x', u) - f(t'', x'', u)\| &\leq L_1(|t' - t''| + \|x' - x''\|), \\ \|g(t', x', u) - g(t'', x'', u)\| &\leq L_1(|t' - t''| + \|x' - x''\|) \end{aligned}$$

для любых $t', t'' \in [0, T]$, $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ с константой $L_1 > 0$.

(A2) Выполнены условия продолжимости

$$\|f(t, x, u)\| \leq K_1(1 + \|x\|), \quad \|g(t, x, u)\| \leq K_1(1 + \|x\|)$$

при всех $(t, x, u) \in \text{cl } \Pi_T \times P$, где $K_1 > 0$ — константа.

(A3) Терминальная функция платы $\sigma(x)$ в (3.2) удовлетворяет условию Липшица

$$|\sigma(x') - \sigma(x'')| \leq L_2 \|x' - x''\|$$

при любых $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, где $L_2 > 0$ — константа.

(A4) Полные вектограммы скоростей

$$E(t, x) = (f(t, x, P), g(t, x, P)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (3.4)$$

являются выпуклыми множествами при всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$.

Известно (см. [129, 134, 148]), что предположения **(A1)–(A3)** обеспечивают существование, единственность и продолжимость траекторий $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (3.1), стартующих из начальных точек $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$ под воздействием измеримых управлений (программ) $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$.

Условие **(A4)** гарантирует (см., например, [4, 16, 21, 27, 70, 100, 137]) для каждой начальной точки (t_0, x_0) существование оптимального программного управления $u^0(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$, $u^0(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$, удовлетворяющего равенству

$$V(t_0, x_0) = \min_{u(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) = I_{t_0, x_0}(x^0(\cdot; t_0, x_0, u^0(\cdot)), u^0(\cdot)). \quad (3.5)$$

3.3. Обобщенные программные управления. В дальнейшем, в ряде разделов данной главы, условие **(A4)** будет опущено. Известно, что при этом оптимальный результат $V(t_0, x_0)$ (3.3) в задаче **ОСР** может быть недостижим на множестве $\mathbf{U}_{t_0}$ программных управлений. Он достигается на расширении $\mathbf{M}_{t_0}$ множества $\mathbf{U}_{t_0}$, состоящем из всех *обобщенных программных управлений*, в качестве которых в данной работе рассматриваются измеримые функции $\mu(\cdot|du) : [t_0, T] \rightarrow \text{grm}(P)$ со значениями в множестве $\text{grm}(P)$ регулярных вероятностных борелевских мер на P и с топологией, индуцированной *-слабой топологией пространства $C^*(P)$ [21]. (Символ $C^*(P)$ означает пространство, сопряженное к пространству непрерывных функций, заданных на компакте P .) Известны и широко применяются и другие подходы к понятию обобщенных программных управлений (см., например, [21, 27]). При этом траектория $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \mu(\cdot|du)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (3.1), порожденная обобщенным управлением $\mu := \mu(\cdot|du)$, является решением уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_P f(t, x(t), u) \mu(t|du), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.6)$$

а соответствующее значение функционала $I_{t_0, x_0}(x(\cdot), \mu(\cdot|du))$ вычисляется по формуле

$$I_{t_0, x_0}(x(\cdot), \mu(\cdot|du)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, \mu(\cdot|du))) + \int_{t_0}^T \int_P g(t, x(t), u) \mu(t|du) dt. \quad (3.7)$$

Множество всех траекторий $x(\cdot, t_0, x_0, \mu)$ (3.6), $\mu \in \mathbf{M}_{t_0}$, обозначается символом $\text{Sol}(t_0, x_0)$.

Известно, что на множествах $\mathbf{M}_{t_0}$, $t_0 \in [0, T]$, всех измеримых функций $\mu(\cdot|du) : [t_0, T] \rightarrow \text{grm}(P)$ можно определить слабую метрическую топологию, совпадающую с индуцированной на $\mathbf{M}_{t_0}$ *-слабой топологией пространства $B^* = L^1([t_0, T], C(P))^*$ (см. [21, с. 284]), причем метрические пространства $\mathbf{M}_{t_0}$ будут сепарабельными и компактными.

Более того, всегда справедливо включение

$$\text{Sol}(t_0, x_0) \supseteq \{\forall x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}\}. \quad (3.8)$$

Таким образом, при программной постановке задачи (3.1)–(3.3) и сделанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Утверждение II.1. При выполнении условий **(A1)–(A4)** задача **ОСР** для любой точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ имеет решение $u^0(\cdot)$ в классе программных управлений $\mathbf{U}_{t_0}$, а при условиях **(A1)–(A3)** для всех $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) &= \inf_{u(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) = \\ &= \min_{\mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, \mu(\cdot|du)), \mu(\cdot|du)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

т.е. задача **ОСР** при условиях **(A1)–(A3)** всегда имеет решение $\mu^0(\cdot|du)$ в классе обобщенных программных управлений $\mathbf{M}_{t_0}$.

4. ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Принцип оптимальности. Отображение

$$(t_0, x_0) \mapsto V(t_0, x_0) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

называется *функцией цены* (функцией оптимального результата, *функцией Беллмана*) в рассматриваемой задаче **ОСР**. Широко известно (и будет показано ниже), что функция цены $V(t, x)$ играет ключевую роль в исследовании и решении задачи **ОСР** и связанной с ней задачи Коши для уравнения Беллмана — уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона—Якоби (см., например, [25, 52, 70, 90, 137, 196, 208, 217, 226, 227, 236, 250, 266]).

Зафиксируем начальную точку $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$ и обобщенную траекторию $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \mu)$, $\mu \in \mathbf{M}_{t_0}$ системы (3.6). Рассмотрим изменение функции цены $V(t, x)$ вдоль этой траектории, т.е. рассмотрим реализацию $[t_0, T] \ni t \mapsto V[t] = V(t, x(t))$. Используя определение (3.3) функции $V(t, x)$ и утверждение II.1, нетрудно доказать следующие утверждения.

Лемма II.1. Для произвольной траектории $x(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0)$ вида (3.6) при всех $t \in [t_0, T]$, $\delta \in (0, T - t)$ выполняется неравенство

$$V(t + \delta, x(t + \delta)) + \int_t^{t+\delta} g(\tau, x(\tau), u) \mu(\tau|du) \geq V(t, x(t)).$$

Лемма II.2. Обобщенное управление $\mu^0 \in \mathbf{M}_{t_0}$ и порождаемая им траектория $x^0(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0)$ оптимальны в смысле (3.9) тогда и только тогда, когда при всех $t \in [t_0, T]$, $\delta \in (0, T - t)$ выполняется равенство

$$V(t + \delta, x^0(t + \delta)) + \int_t^{t+\delta} g(\tau, x^0(\tau), u) \mu^0(\tau|du) = V(t, x^0(t)). \quad (4.1)$$

Условие (4.1) называется *принципом оптимальности* в задаче **ОСР**.

4.2. Репрезентативная формула для функции цены в задаче оптимального управления. Докажем следующую формулу, описывающую структуру функции цены $V(t, x)$ в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3).

Теорема II.1. Функция цены $V(t, x)$ в задаче **ОСР** имеет представление

$$V(t, x) = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \omega(t, x, \alpha) \quad (4.2)$$

при всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, где параметр α принимает значения из метрического компакта $\mathbf{A}$. Если в рассматриваемой задаче **ОСР** выполняются условия **(A1)–(A3)**, то функция $\omega(\cdot) : \text{cl } \Pi_T \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. При фиксированном значении параметра $\alpha \in \mathbf{A}$ функция

$$\text{cl } \Pi_T \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto \omega(t, x, \alpha)$$

удовлетворяет условию Липшица на любом компакте $G \subset \text{cl } \Pi_T$ с константой $L = L(G) > 0$, равномерной относительно $\alpha \in \mathbf{A}$.

Доказательство. Построим функции $(t, x) \mapsto \omega(t, x, \alpha)$ следующим образом (см. также [155, 157, 167]). Пусть $\alpha : \tau \mapsto \alpha(\tau|du)$ — измеримая функция, определенная на стандартном интервале $[0, 1]$, значениями которой являются регулярные вероятностные меры на множестве $P \ni u$, т.е. рассматриваемая функция $\alpha := \alpha(\cdot|du)$ является стандартизованным обобщенным программным управлением (см. выше п. 3.3). Положим

$$\mathbf{A} = \{\forall \alpha : \alpha(\cdot|du) : [0, 1] \rightarrow \text{rpm}(P) \text{ измерима}\}. \quad (4.3)$$

Так же, как и множества $\mathbf{M}_t$, определенные выше в п. 3.3, множество $\mathbf{A}$ всех стандартизованных обобщенных управлений α является метрическим компактом [21].

Определим функции

$$\omega(t, x, \alpha) = \sigma(y(1; 0, x, \alpha; t)) + z(1; 0, 0, \alpha; t, x) = \sigma(y(1)) + z(1), \quad (4.4)$$

где абсолютно непрерывные функции

$$y(\cdot) = y(\cdot; 0, x, \alpha; t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad z(\cdot) = z(\cdot; 0, 0, \alpha; t, x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

являются траекториями системы

$$\dot{y} = (T - t) \int_P f(\xi(t, \tau), y(\tau), u) \alpha(\tau|du), \quad (4.5)$$

$$\dot{z} = (T - t) \int_P g(\xi(t, \tau), y(\tau), u) \alpha(\tau|du) \quad (4.6)$$

с начальным условием $y(0) = x, z(0) = 0$. Здесь t играет роль параметра, а $\xi(t, \tau)$ — линейное преобразование $[0, 1] \rightarrow [t, T]$ вида

$$\xi(t, \tau) = t + (T - t)\tau. \quad (4.7)$$

Таким образом, функции $(t, x) \mapsto \omega(t, x, \alpha)$ (4.4), определяются с помощью суперпозиции от терминальной функции задачи **ОСР** $\sigma(\cdot)$ и решений $y(\cdot; 0, x, \alpha; t), z(\cdot; 0, 0, \alpha; t, x)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5)–(4.6). Свойства функций $\omega(t, x, \alpha)$, заявленные в теореме II.1, являются следствием предположений **(A1)–(A3)** и липшицевой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5), (4.6) от параметров и начальных данных (см., например, [21]).

Используя лемму Гронуолла, вычисляем константу $L = L(G) > 0$ (см. [157]):

$$L = (1 + K_1 + L_1 \cdot T) (1 + L_2 + e^{L_1 T})^2 \cdot [4 + C_1(G)], \quad (4.8)$$

где

$$C_1(G) = e^{K_1 T} \max_{(t_0, x_0) \in G} (1 + \|x_0\|). \quad (4.9)$$

Нетрудно видеть, что множество $\mathbf{A}$ при линейном преобразовании $\xi(t, \cdot) : [0, 1] \rightarrow [t, T]$ вида (4.7) обращается в множество $\mathbf{M}_t$, а задача (4.4)–(4.6) обращается в исходную задачу (3.1)–(3.2).

Из определения цены $V(t, x)$ (3.3) и утверждения II.1 выводим справедливость равенства (4.2). Теорема II.1 доказана. $\square$

4.3. Свойства гладкости функции цены. Из того факта, что функция цены является нижней огибающей (см. (4.2)) семейства локально липшицевых функций $(t, x) \mapsto \omega(t, x, \alpha)$ с равномерной относительно параметра α константой Липшица, очевидным образом следует справедливость следующего утверждения.

Теорема II.2. *Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1)–(A3)**, то функция цены $V(t, x)$ является локально липшицевой в полосе $\text{cl } \Pi_T$.*

Согласно теореме Радемахера [21] локально липшицева функция дифференцируема почти всюду. Следовательно, почти всюду для функции цены справедливо соотношение

$$\frac{d^\pm V(t, x)}{(1, f)} = \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial(t, x)}, (1, f) \right\rangle. \quad (4.10)$$

Замечание II.1. Из определений обобщенных дифференциалов вытекает справедливость при всех $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ и всех $(\eta, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ следующих соотношений:

$$\emptyset \neq \partial_C V(t, x) \supset \partial^+ V(t, x), \quad (4.11)$$

$$\emptyset \neq \partial_C V(t, x) \supset \partial^- V(t, x). \quad (4.12)$$

Из абсолютной непрерывности траекторий $x(\cdot)$ системы (3.6), теоремы II.2 и лемм II.1, II.2 вытекает, что реализация $V[t]$ функции цены $V(t, x)$ вдоль этих траекторий обладает следующими свойствами.

Лемма II.3. Для произвольной траектории $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \mu(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0)$ при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$\inf_{(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \tilde{E}(t, x(t))} \frac{d^\pm V(t, x(t))}{(1, \tilde{f})} + \tilde{g} \geq 0, \quad (4.13)$$

т.е. при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$\frac{d^\pm V(t, x(t))}{\left(1, \int_P f(t, x(t), u) \mu(t|du)\right)} \geq - \int_P g(t, x(t), u) \mu(t|du). \quad (4.14)$$

Лемма II.4. Обобщенное управление $\mu^0 \in \mathbf{M}_{t_0}$ и порождаемая им траектория $x^0(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0)$ оптимальны в смысле (3.9) тогда и только тогда, когда при всех $t \in [t_0, T]$ выполняются равенства

$$\min_{(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \tilde{E}(t, x^0(t))} \frac{d^\pm V(t, x^0(t))}{(1, \tilde{f})} + \tilde{g} = \frac{d^\pm V(t, x^0(t))}{(1, \tilde{f}^0)} + \tilde{g}^0 = \frac{dV(t, x^0(t))}{(1, \tilde{f}^0)} + \tilde{g}^0 = 0, \quad (4.15)$$

т.е. при почти всех $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство

$$\frac{dV(t, x^0(t))}{\left(1, \int_P f(t, x^0(t), u) \mu^0(t|du)\right)} = - \int_P g(t, x^0(t), u) \mu^0(t|du), \quad (4.16)$$

где

$$\tilde{E}(t, x) := \text{co}\{(f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P\}.$$

В качестве очевидного следствия лемм II.3, II.4 получаем следующее утверждение.

Теорема II.3. Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1)–(A3)**, то для функции цены $V(t, x)$ во всех точках $(t, x) \in \Pi_T$ существуют такие векторы $(1, \tilde{f}^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) \in \tilde{E}(t, x)$, в направлении которых локально липшицева функция цены дифференцируема, т.е.

$$\frac{dV(t, x)}{(1, \tilde{f}^0)} = -\tilde{g}^0, \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad (\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) \in \tilde{E}(t, x). \quad (4.17)$$

5. ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ И МИНИМАКСНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ—БЕЛЛМАНА

5.1. Предварительные сведения. Хорошо известно [226], что функция цены $V(t, x)$ задачи **ОСР** удовлетворяет в точках дифференцируемости (в регулярных точках) уравнению Беллмана

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in P} [D_x V(t, x), f(t, x, u)] + g(t, x, u) = 0, \quad (5.1)$$

а также краевому условию

$$V(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.2)$$

Здесь $D_x V(t, x) = \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_n} \right)$, а символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение.

Задача **ОСР** рассматривается в предположении, что выполнены условия **(A1)–(A3)**, при которых функция цены, как показано выше, почти всюду дифференцируема в области $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ и, следовательно, удовлетворяет уравнению Беллмана почти всюду в Π_T .

Задачу **ОСР** можно трактовать как дифференциальную игру с фиктивным вторым игроком v , управление которого принимает единственное допустимое значение $\{0\} \in \mathbb{R}^n$, а уравнения движения системы (3.1) формально приобретают вид

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) + v, \quad u \in P, \quad v \in Q := \{0\} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3)$$

При этом функционал платы остается прежним, т.е. имеет вид (3.2). Известно, что для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$ существует цена позиционной дифференциальной игры (5.3)–(3.2) (см. [73]). Из определения динамики (3.1) и (5.3) следует, что цена этой игры совпадает с ценой в позиционной задаче **ОСР** и с ценой в программной задаче $V(t_0, x_0)$ (3.3).

Используя эти свойства, привлечем из теории позиционных дифференциальных игр [73, 265] следующий факт относительно функции цены $V(t, x)$ в задаче **ОСР**.

Утверждение II.2. Для того чтобы локально липшицева функция

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$$

совпадала с функцией цены в задаче **ОСР**, необходимо и достаточно выполнение во всех точках $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ следующих условий:

$$\min_{u \in P} \left[\frac{d^+ V'(t, x)}{(1, f(t, x, u))} + g(t, x, u) \right] \geq 0 \geq \min_{(f, g) \in \tilde{E}(t, x)} \left[\frac{d^- V'(t, x)}{(1, f)} + g \right], \quad (5.4)$$

где

$$\tilde{E}(t, x) := \text{co}\{(f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P\}, \quad (5.5)$$

и выполнение краевого условия

$$V'(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.6)$$

5.2. Обобщенное уравнение Беллмана и его минимаксное решение. Следующий известный факт теории обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби [240, 250, 293] связывает функцию цены $V(t, x)$ (3.3) в задаче оптимального управления **ОСР** и обобщенное (минимаксное и/или вязкостное) решение $V'(t, x)$ задачи Коши (5.2) для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана (5.1).

Утверждение II.3. Если в задаче **ОСР** выполнены условия **(A1)–(A3)**, то существует и единственно минимаксное (и/или вязкостное) решение

$$\text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$$

в соответствующей задаче Коши (5.2) для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана (5.1) и оно совпадает с функцией цены $V(t, x)$ в исходной задаче **ОСР**.

Докажем следующую теорему (см. аналогичное утверждение в [157, 302]).

Теорема II.4. Для того чтобы локально липшицева функция $\text{cl } \Pi_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ совпадала с функцией цены $V(t, x)$ в задаче **ОСР**, необходимо и достаточно, чтобы

(i) во всех точках $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ выполнялись равенства

$$\min_{(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \tilde{E}(t, x)} \frac{d^\pm V'(t, x)}{(1, \tilde{f})} + \tilde{g} = 0, \quad (5.7)$$

где

$$\tilde{E}(t, x) := \text{co}\{(f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P\};$$

(ii) выполнялось краевое условие

$$V'(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.8)$$

Доказательство. Необходимость условий (5.7), (5.8). Согласно постановке задачи **ОСР**, для любой точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ и любого допустимого обобщенного управления $\mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$ в паре с порождаемой им траекторией $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu(\cdot|du))$ справедливо неравенство

$$V(t_0, x_0) \leq V(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)) + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \int_P g(\tau, x(\tau), u) \mu(\tau|du) d\tau, \quad \delta > 0, \quad (5.9)$$

причем

$$x(t_0 + \delta) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \int_P f(\tau, x(\tau), u) \mu(\tau|du) d\tau. \quad (5.10)$$

Используя (5.9) и определения $\frac{d^\pm V(t_0, x)}{(1, f)}$, получим, что в точке (t_0, x_0) для произвольного вектора

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \left(\int_P f(t_0, x_0, u) \mu(t|du), \int_P g(t_0, x_0, u) \mu(t|du) \right) \in E(t_0, x_0)$$

выполняются неравенства

$$\frac{d^\pm V(t_0, x_0)}{(1, \tilde{f})} + \tilde{g} \geq 0. \quad (5.11)$$

Как нетрудно заметить, вдоль любой оптимальной траектории $x^0(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu^0) \in \text{Sol}(t_0, x_0)$ выполняются равенства

$$V(t, x^0(t)) + \int_{t_0}^t \int_P g(\tau, x^0(\tau), u) \mu^0(\tau|du) d\tau = V(t_0, x_0) \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (5.12)$$

Условия (5.11) и (5.12) влекут за собой выполнение равенств

$$\min_{(\tilde{f}, \tilde{g}) \in E(t_0, x_0)} \frac{d^\pm V(t_0, x_0)}{(1, \tilde{f})} + \tilde{g} = 0 \quad (5.13)$$

в произвольной точке $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$. Тем самым необходимость выполнения условия (5.7) доказана. Справедливость выполнения для функции цены краевого условия (5.8) следует из ее определения.

Достаточность условий (5.7), (5.8). Если для локально липшицевой функции $V'(t, x)$ выполняются условия (5.7), (5.8), то при всех $(t, x) \in \Pi_T$, согласно определениям $\tilde{E}(t, x)$ и $\frac{d^\pm V'(t, x)}{(1, f)}$, выполняются также условия (5.4), так как

$$\min_{u \in P} \frac{d^\pm V'(t, x)}{(1, f(t, x, u))} + g(t, x, u) \geq 0 = \min_{(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \tilde{E}(t, x)} \frac{d^\pm V'(t, x)}{(1, \tilde{f})} + \tilde{g}. \quad (5.14)$$

Согласно утверждению II.2, эти условия являются достаточными для совпадения функции $V'(t, x)$ с функцией $V(t, x)$ цены в задаче **ОСР**. Теорема II.4 доказана. $\square$

Замечание II.2. Равенства (5.7), в силу (4.10), обращаются в уравнение Беллмана (5.1) в тех точках (t, x) , где функция цены дифференцируема, так что эти равенства можно рассматривать как обобщение уравнения Беллмана. В силу теоремы II.4 и утверждения II.3, минимаксное (и/или вязкостное) решение $\text{cl } \Pi_T \ni (t, x) \mapsto V'(t, x) \in \mathbb{R}$ задачи Коши (5.2) для уравнения Беллмана (5.1) во всех точках $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ удовлетворяет обобщенному уравнению Беллмана (5.7).

Таким образом, в настоящем разделе приведено обоснование метода динамического программирования в задаче оптимального управления **ОСР** с локально липшицевой динамикой (3.1) и локально липшицевой функцией цены $V(t, x)$ (3.3). Получено новое обобщение уравнения Беллмана

(5.7) в терминах *полупроизводных Дини* (2.5), (2.6) $\frac{d^\pm V'(t, x)}{(1, f)}$ по направлениям $(1, f) \in \mathbb{R}^{n+1}$, причем соотношения (5.7) выполняются во *всех* точках $(t, x) \in \Pi_T$. Последнее обстоятельство позволяет использовать соотношения (5.7) для построения в задаче **ОСР** оптимального синтеза или, другими словами, оптимального управления по принципу обратной связи (см. раздел 8 ниже и [302]).

Замечание II.3. Теорема II.4 доказана без предположения о существовании непрерывных частных производных по (t, x) у функций $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, которое использовалось в [157], или о существовании непрерывных вторых производных у этих функций, что предполагалось в [198]. Не предполагалось также наличие дополнительного свойства «полувыпуклости» функций $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, использованное в работе [231]. Упомянутые усиленные предположения обеспечивали свойство дифференцируемости функции цены $V(t, x)$ по *всем* направлениям $(1, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Результаты, полученные в данном разделе, обоснованы для более общего случая локально-липшицевых входных данных задачи оптимального управления **ОСР** и, как следствие, для более «негладкой» локально липшицевой функции цены, не обладающей, вообще говоря, свойством дифференцируемости по *любому* направлению $(1, f) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

6. Принцип максимума Понтрягина

И КЛАССИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА

6.1. Случай дифференцируемых входных данных. В этом и следующем разделах задача **ОСР** (3.1)–(3.3) будет рассмотрена в предположении, что условия **(A1)**, **(A3)** заменены на следующие, более жесткие требования к входным данным задачи.

- (A1')** Функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ в (3.1), (3.2) определены и непрерывны на $\text{cl } \Pi_T \times P$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x_i}, i \in \overline{1, n}$.
- (A3')** Терминальная составляющая $\sigma(x)$ функционала платы (3.2) определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, i \in \overline{1, n}$.

Изменение требований к гладкости входных данных задачи **ОСР** влечет за собой изменение свойств гладкости ее функции цены $V(t, x)$ (3.3). Справедливы следующие утверждения.

Теорема II.5. Если в рассматриваемой задаче **ОСР** выполняются условия **(A1')**, **(A2)**, **(A3')**, то функция цены $V(t, x)$ (3.3) имеет представление

$$V(t, x) = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \omega(t, x, \alpha) \quad (6.1)$$

при всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, где параметр α принимает значения из метрического компакта $\mathbf{A}$.

Функция $\omega(\cdot) : \text{cl } \Pi_T \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а функции

$$\text{cl } \Pi_T \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \rightarrow \omega(t, x, \alpha), \quad \alpha \in \mathbf{A},$$

имеют равностепенно по α непрерывные частные производные

$$(t, x, \alpha) \mapsto \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x_i}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Доказательство формулы (6.1) в теореме II.5 совпадает с доказательством формулы (4.2) в теореме II.1. Различаются эти теоремы утверждениями о свойствах функций $\omega(t, x, \alpha)$.

По построению, функции $(t, x) \mapsto \omega(t, x, \alpha)$ (4.4) являются суперпозициями от терминальной функции задачи **ОСР** $\sigma(\cdot)$ и решений $y(\cdot; 0, x, \alpha; t)$, $z(\cdot; 0, 0, \alpha; t, x)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5)–(4.6). Свойства функций $\omega(t, x, \alpha)$, заявленные в теореме II.5, являются следствием предположений **(A1')**, **(A2)**, **(A3')** и непрерывной дифференцируемости по параметрам и начальным данным решений обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5), (4.6) (см. [21, 134]).

Утверждения теоремы II.5 о представимости цены в виде (6.1) огибающей компактного семейства гладких функций $\omega(\cdot, \alpha)$, известная формула производной по направлению для этой огибающей (см. [42, 234]), а также теорема II.4 доставляют справедливость следующих утверждений.

Теорема II.6. Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2)**, **(A3')**, то функция цены $V(t, x)$ является локально липшицевой в полосе $\text{cl } \Pi_T$. В каждой точке $(t, x) \in \Pi_T$ для любого вектора $f \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $\frac{dV(t, x)}{(1, f)} = \frac{d^\pm V(t, x)}{(1, f)}$, причем справедлива формула

$$\frac{dV(t, x)}{(1, f)} = \min_{\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t, x)} \left[\frac{\partial \omega(t, x, \alpha^0)}{\partial t} + \langle D_x \omega(t, x, \alpha^0), f \rangle \right], \quad (6.2)$$

где

$$\mathbf{A}^0(t, x) = \{\alpha^0 \in \mathbf{A} : \omega(t, x, \alpha^0) = V(t, x)\}. \quad (6.3)$$

При всех $(t, x) \in \Pi_T$ функция цены удовлетворяет обобщенному уравнению Беллмана

$$\min_{(f, g) \in \tilde{E}(t, x)} \left[\frac{dV(t, x)}{(1, f)} + g \right] = 0, \quad (6.4)$$

где

$$\tilde{E}(t, x) = \text{co}\{(f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P\}.$$

Замечание II.4. Из определений обобщенных дифференциалов вытекает справедливость при всех $(t, x) \in \Pi_T$ следующих соотношений в рассматриваемой задаче **ОСР**:

$$\emptyset \neq \partial_C V(t, x) = \partial^+ V(t, x) = \text{co} \left\{ \left(\frac{\partial \omega(t, x, \alpha^0)}{\partial t}, D_x \omega(t, x, \alpha^0) \right) : \alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t, x) \right\}. \quad (6.5)$$

6.2. Вспомогательные конструкции. Здесь сконцентрирован предварительный технический материал, на базе которого в следующем п. 6.3 будут выведены необходимые условия оптимальности.

Рассмотрим произвольный элемент $\alpha \in \mathbf{A}$ (4.3) и моменты времени t, t_* , удовлетворяющие соотношениям $0 \leq t_* \leq t \leq T$. Поставим им в соответствие элемент $\alpha[t; t_*] \in \mathbf{A}$ согласно следующему правилу.

Пусть взаимно однозначное соответствие точек $\xi \in [t_*, T]$ и $\tau \in [0, 1]$ определяется формулой

$$\xi = t_* + (T - t_*)\tau. \quad (6.6)$$

Выберем элемент $\mu \in \mathbf{M}_{t_*}$ (см. п. 1.2), равный

$$\mu(\xi|du) = \alpha(\tau|du). \quad (6.7)$$

Пусть $\mu[t/t_*](\cdot|du) : [t, T] \rightarrow \text{rpm}(P)$ — сужение функции $\mu(\cdot|du) : [t_*, T] \rightarrow \text{rpm}(P)$. Полагаем

$$\alpha[t; t_*](\tau|du) = \mu[t/t_*](\xi|du) \quad \text{при} \quad \tau \in [0, 1], \quad \xi = t + (T - t)\tau. \quad (6.8)$$

Из построений (6.6)–(6.8) вытекает, что

$$\alpha[t; t_*](\tau|du) = \alpha(\tau_*|du) \quad (6.9)$$

при

$$\tau_* = [(t - t_*) + (T - t)\tau] \cdot (T - t_*)^{-1}, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (6.10)$$

Определенная таким образом функция $\tau \mapsto \alpha[t; t_*](\tau|du)$ измерима и $\alpha[t; t_*] \in \mathbf{A}$. Из определения сходимости на компакте $\mathbf{A}$ (см. [21]) и конструкции отображения $[t_*, T] \ni t \mapsto \alpha[t; t_*] \in \mathbf{A}$ (см. (6.6)–(6.8)) вытекает следующий результат.

Лемма II.5. Для любых $\alpha \in \mathbf{A}$, $t_* \in [0, T)$ отображение $[t_*, T] \ni t \mapsto \alpha[t; t_*] \in \mathbf{A}$ непрерывно.

При формулировке теоремы II.6 для функции цены $V(t, x)$ (см. (3.3)) в каждой точке $(t, x) \in \Pi_T$ определено множество

$$\mathbf{A}^0(t, x) = \{\alpha^0 \in \mathbf{A} : \omega(t, x, \alpha^0) = V(t, x)\}.$$

Непосредственно из этого определения, леммы II.4 и условий (6.6), (6.7) вытекает следующая лемма.

Лемма II.6. Пусть $\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t_*, x_*)$, $t_* \in [0, T]$. Тогда для любого $t \in [t_*, T]$ справедливо включение

$$\alpha^0[t; t_*] \in \mathbf{A}^0(t, x^0(t)), \quad (6.11)$$

где

$$x^0(t) = x_* + \int_{t_*}^t \int_P f(\xi, x^0(\xi), u) \mu^0(\xi|du) d\xi, \quad (6.12)$$

$$\mu^0(\xi|du) = \alpha^0(\tau|du), \quad \text{при } \xi \in [t_*, T], \quad \tau = (\xi - t_*)/(T - t_*). \quad (6.13)$$

С помощью лемм II.5, II.6 докажем следующий результат.

Теорема II.7. Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2)**, **(A3')**, то для любых $(t, x) \in \Pi_T$, $\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t, x)$ имеет место равенство

$$\min_{u \in P} \left[\frac{\partial \omega(t, x, \alpha^0)}{\partial t} + \langle D_x \omega(t, x, \alpha^0), f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u) \right] = 0. \quad (6.14)$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют такие $(t_*, x_*) \in \Pi_T$, $\alpha_*^0 \in \mathbf{A}^0(t_*, x_*)$ и число $d > 0$, что

$$\min_{u \in P} \left[\frac{\partial \omega(t_*, x_*, \alpha_*^0)}{\partial t} + \langle D_x \omega(t_*, x_*, \alpha_*^0), f(t_*, x_*, u) \rangle + g(t_*, x_*, u) \right] = d > 0. \quad (6.15)$$

В силу непрерывности функций $\frac{\partial \omega(\cdot)}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega(\cdot)}{\partial x_i}$, $i \in \overline{1, n}$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ существуют такие число $\delta > 0$ и замкнутая δ -окрестность $B^\delta(\alpha_*^0)$ элемента $\alpha_*^0 \in \mathbf{A} \subset L^1([0, 1], C(P))^*$, что для всех (t, x, α) , удовлетворяющих условиям $0 \leq t - t_* \leq \delta$, $\|x - x_*\| \leq \delta$, $\alpha \in B^\delta(\alpha_*^0) \cap \mathbf{A}$, справедливо неравенство

$$\min_{u \in P} \left[\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} + \langle D_x \omega(t, x, \alpha), f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u) \right] \geq \frac{d}{2} > 0. \quad (6.16)$$

Рассмотрим оптимальную траекторию $x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_*, x_*, \mu_*^0)$ системы (3.6), порожденную из начальной точки $x^0(t_*) = x_*$ обобщенным управлением $\mu_*^0 \in \mathbf{M}_{t_*}$, отвечающим элементу $\alpha_*^0 \in \mathbf{A}^0(t_*, x_*)$ согласно правилу

$$\mu_*^0(\xi|du) = \alpha_*^0(\tau|du), \quad \tau \in [0, 1], \quad \xi = t_* + (T - t_*)\tau.$$

Оценим изменение функции цены $V(t, x)$ вдоль траектории $x^0(\cdot)$. Согласно леммам II.4, II.6 и теоремам II.5, II.6 имеем

$$\begin{aligned} - \int_{t'}^t \int_P g(\xi, x^0(\xi), u) \mu_*^0(\xi|du) d\xi &= V(t, x^0(t)) - V(t', x^0(t')) = \\ &= \omega(t, x^0(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t'; t_*]) \geq \\ &\geq \omega(t, x^0(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t; t_*]) \end{aligned} \quad (6.17)$$

для любых t, t' таких, что $t_* \leq t' \leq t \leq T$.

Подберем моменты $t', t'', t_* \leq t' < t'' < \min\{T, t_* + \delta\}$, таким образом, чтобы выполнялись следующие условия.

При всех $t \in [t_*, t'']$, согласно лемме II.6, из непрерывности отображения $t \mapsto \alpha_*^0[t; t_*]$ следует

$$\alpha_*^0[t; t_*] \in B^\delta(\alpha_*^0) \cap \mathbf{A}. \quad (6.18)$$

Пусть точка t' такова, что в ней абсолютно непрерывная функция $x^0(\cdot)$ имеет производную

$$\frac{dx^0(t')}{dt} = \int_P f(t', x^0(t'), u) \mu_*^0(t'|du) = f(t', x^0(t'), u') \quad (6.19)$$

и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{t'}^t \int_P g(\xi, x^0(\xi), u) \mu_*^0(\xi) du = g(t', x^0(t'), u'). \quad (6.20)$$

Возможность выбора $u' \in P$ в соотношениях (6.19), (6.20) обеспечивается выпуклостью вектограммы $E(t', x^0(t'))$ согласно предположению **(A4)**. Из (6.19) выводим для $t \in [t', t'']$:

$$x^0(t) = x^0(t') + f(t', x^0(t'), u') \cdot (t - t') + o_{t'}(t - t'), \quad (6.21)$$

$$\frac{\|o_{t'}(t - t')\|}{t - t'} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \downarrow t'. \quad (6.22)$$

Пусть

$$x'(t) = x^0(t') + f(t', x^0(t'), u') \cdot (t - t') \quad \text{при} \quad t \in [t', t'']. \quad (6.23)$$

Полагаем, что t' и t'' подобраны так, что из (6.21)–(6.23) следует

$$\|x'(t) - x^0(t)\| \leq \delta \quad \text{при} \quad t \in [t', t'']. \quad (6.24)$$

Из условий гладкости функции $\omega(\cdot)$ нетрудно получить, что эта функция в замкнутой δ -окрестности графика траектории $x^0(t)$, $t_* \leq t \leq T$, удовлетворяет условию Липшица по (t, x) с константой $\kappa > 0$ равномерно по $\alpha \in \mathbf{A}$. Учитывая (6.21)–(6.23), получаем для $t \in [t', t'']$ оценку

$$|\omega(t, x^0(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t; t_*])| \leq \kappa \|x^0(t) - x'(t)\| = \kappa \|o_{t'}(t - t')\|. \quad (6.25)$$

Пусть

$$\beta_t(\Delta) = \max_{0 \leq i \leq n} \Omega_i(\Delta), \quad \Delta > 0,$$

где $\Delta \mapsto \Omega_0(\Delta)$ — модуль непрерывности функции

$$\Phi_0(t, \cdot) = \frac{\partial \omega(\cdot, x^0(\cdot), \alpha_*^0[t; t_*])(\cdot)}{\partial t} : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R},$$

а $\Delta \mapsto \Omega_i(\Delta)$, $i \in \overline{1, n}$, — модуль непрерывности функции

$$\Phi_i(t, \cdot) = \frac{\partial \omega(\cdot, x^0(\cdot), \alpha_*^0[t; t_*])(\cdot)}{\partial x_i} : [t', t''] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Из свойств гладкости функции $\omega(\cdot)$ (6.1) следует, что

$$\beta_t(\Delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta \rightarrow 0 \quad (6.26)$$

равномерно по $t \in [t', t'']$.

Подберем теперь момент $t \in (t', t'']$ таким образом, чтобы согласно (6.22), (6.26), (6.20) выполнялись соотношения

$$-\kappa \frac{\|o_{t'}(t - t')\|}{t - t'} - \beta_t(t - t') \geq -\frac{d}{8}, \quad (6.27)$$

$$\int_{t'}^t \int_P g(\xi, x^0(\xi), u) \mu_*^0(\xi) du d\xi - g(t', x^0(t'), u') \cdot (t - t') = \hat{o}_{t'}(t - t'),$$

$$\frac{\|\hat{o}_{t'}(t - t')\|}{t - t'} \leq d/8. \quad (6.28)$$

Используя соотношения (6.25), (6.27), (6.16), (6.18), (6.24), продолжим оценку (6.17):

$$\begin{aligned}
& - \int_{t'}^t \int_P g(\xi, x^0(\xi), u) \mu_*^0(\xi|du) d\xi = -g(t', x^0(t'), u')(t - t') + \hat{o}_{t'}(t - t') = \\
& = \omega(t, x^0(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t, x'(t), \alpha_*^0[t; t_*]) + \omega(t, x'(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t'; t_*]) \geq \\
& \geq \omega(t, x^0(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t, x'(t), \alpha_*^0[t; t_*]) + \omega(t, x'(t), \alpha_*^0[t; t_*]) - \omega(t', x'(t'), \alpha_*^0[t; t_*]) \geq \\
& \geq \left\{ -\kappa \frac{\|o_{t'}(t - t')\|}{t - t'} - \beta_t(t - t') + \frac{\partial \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t; t_*])}{\partial t} + \right. \\
& \quad \left. + \langle D_x \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t; t_*]), f(t', x^0(t'), u') \rangle \right\} (t - t').
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Из (6.28), (6.29) окончательно получаем для $t > t'$:

$$\begin{aligned}
0 & \geq \left\{ \frac{\partial \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t; t_*])}{\partial t} + \right. \\
& + \min_{u \in P} \left[\langle D_x \omega(t', x^0(t'), \alpha_*^0[t; t_*]), f(t', x^0(t'), u) \rangle + g(t', x^0(t'), u) \right] \Big\} (t - t') - 2\frac{d}{8}(t - t') \geq \\
& \geq \frac{d}{2}(t - t') - \frac{d}{4}(t - t') = \frac{d}{4}(t - t') > 0.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Полученное противоречие доказывает теорему II.7. $\square$

6.3. Необходимые условия оптимальности. В этом разделе на базе теоремы II.7 проводится вывод необходимых условий оптимальности — принципа максимума Понтрягина [137].

Исходя из определения $\omega(\cdot)$ в формуле (6.1) для $V(t, x)$ (см. выше теоремы II.5, II.1) получаем

$$\omega(t, x, \alpha) = \sigma(y(1; 0, x, \alpha; t)) + z(1; 0, 0, \alpha; t, x) = \sigma(y(1)) + z(1), \tag{6.31}$$

где абсолютно непрерывные функции

$$y(\cdot) = y(\cdot; 0, x, \alpha; t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad z(\cdot) = z(\cdot; 0, 0, \alpha; t, x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

— решения системы

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (T - t), \tag{6.32}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = (T - t) \int_P f(\xi(t, \tau), y(\tau), u) \alpha(\tau|du), \tag{6.33}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = (T - t) \int_P g(\xi(t, \tau), y(\tau), u) \alpha(\tau|du) \tag{6.34}$$

с начальным условием $\xi(0) = t$, $y(0) = x$, $z(0) = 0$. Здесь t играет роль параметра, а $\xi(t, \tau)$ имеет вид

$$\xi(t, \tau) = t + (T - t)\tau, \quad \tau \in [0, 1]. \tag{6.35}$$

Отметим, что в силу предположений **(A1')**, **(A3')** (см. [21, 134]) решения обыкновенных дифференциальных уравнений (6.33), (6.34) имеют непрерывные частные производные по параметрам и начальным данным. Из выражения (6.31) выводим, что существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x_i}$, $i \in \overline{1, n}$, $\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}$.

Лемма II.7. Пусть в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2)**, **(A3')**, **(A4)**, а управление $\mu^0(\cdot) \in \mathbf{M}_{t_0}$ и порождаемая им траектория $x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0(\cdot))$ системы (3.1) оптимальны (3.3) для точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$. Для стандартизованного обобщенного управления $\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t_0, x_0)$ вида

$$\alpha^0 = \alpha^0(\tau|du) = \mu^0(\xi|du), \quad \xi = \xi(t_0, \tau) = t_0 + (T - t_0) \cdot \tau, \quad \tau \in [0, 1], \tag{6.36}$$

и стандартизованных обобщенных управлений $\alpha^0[t, t_0] \in \mathbf{A}^0(t, x^0(t))$, построенных по $\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t_0, x_0)$ с помощью правила (6.6)–(6.8) при всех $t \in [t_0, T]$, введем в рассмотрение отображения

$$\begin{aligned} [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n : \quad t &\mapsto p^0(t) = D_x \omega(t, x^0(t), \alpha^0[t; t_0]), \\ [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R} : \quad t &\mapsto \lambda^0(t) = \frac{\partial \omega(t, x^0(t), \alpha^0[t; t_0])}{\partial t} : \end{aligned} \quad (6.37)$$

При всех $t \in [t_0, T]$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} p^0(t) &= D_x \sigma(x^0(T)) + \int_t^T \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial x} \mu^0(\xi|du) \right)^\top p^0(\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_t^T \int_P D_x g(\xi, x^0(\xi), u) \mu^0(\xi|du) d\xi; \\ \lambda^0(t) &= - \min_{u \in P} [\langle p^0(T), f(T, x^0(T), u) \rangle + g(T, x^0(T), u)] + \\ &\quad + \int_t^T \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial \xi} \mu^0(\xi|du) \right)^\top p^0(\xi) d\xi + \int_t^T \int_P \frac{\partial g(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial \xi} \mu^0(\xi|du) d\xi. \end{aligned}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что символы

$$\begin{aligned} x^0(\cdot) &= (x_1^0(\cdot), \dots, x_n^0(\cdot)), \quad D_x \omega(t, x, \alpha) = \left(\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x_n} \right), \\ D_x \sigma(x) &= \left(\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_n} \right), \quad \frac{\partial f(\xi, x, u)}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial f_1(\xi, \cdot)}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial f_n(\xi, \cdot)}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

и другие, обозначающие ниже конечномерные векторы, понимаются как обозначения вектор-столбцов. Надстрочный символ $^\top$ означает транспонирование; так, символ $\frac{\partial f}{\partial x}$ означает матрицу частных производных вектора $f(\xi, x, u)$ по x_i , $i \in \overline{1, n}$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Перейдем в формулах (6.31)–(6.36) от переменной $\tau \in [0, 1]$ к переменной $\xi \in [t, T]$ с помощью линейного преобразования $\xi = \xi(t, \tau)$ вида (6.35). Получим

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbf{A}, \alpha(\tau|du) &= \mu(\xi|du) \Rightarrow \mu = \mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_t, \\ \xi(\tau, t) &= \tilde{\xi}(\xi; t, t) = \xi, \\ y(\tau; 0, x, \alpha; t) &= \tilde{x}(\tilde{\xi}(\xi; t, t); t, x, \mu), \\ z(\tau; 0, 0, \alpha; t, x) &= \tilde{z}(\tilde{\xi}(\xi; t, t); t, 0, \mu; t, x), \end{aligned}$$

где $\tilde{\xi}(\cdot) = \tilde{\xi}(\cdot; t, t)$, $\tilde{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot; t, x, \mu)$, $\tilde{z}(\cdot) = \tilde{z}(\cdot; t, 0, \mu; t, x)$ — решение следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\xi}(\xi)}{d\xi} &= 1, & \xi \in (t, T), \quad \tilde{\xi}(t) &= t, \\ \frac{d\tilde{x}(\xi)}{d\xi} &= \int_P f(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du), & \xi \in (t, T), \quad \tilde{x}(t) &= x, \\ \frac{d\tilde{z}(\xi)}{d\xi} &= \int_P g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du), & \xi \in (t, T), \quad \tilde{z}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Перепишем формулу $\omega(t, x, \alpha)$ (6.31) в этих обозначениях:

$$\omega(t, x, \alpha) = \sigma(\tilde{x}(T)) + \tilde{z}(T) = \sigma(\tilde{x}(T)) + \int_t^T \int_P g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) d\xi. \quad (6.39)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче предполагается выполненным условие **(A1')**, решение $\tilde{x}(\cdot; t, x, \mu)$ системы (6.38) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \tilde{x}(\cdot; t, x, \mu)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{x}(\cdot; t, x, \mu)}{\partial t}$ по начальным данным (t, x) , причем эти производные при $\xi \in (t, T)$ удовлетворяют следующей системе уравнений в вариациях (см., например, [134, 148]):

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial x} = \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial x} \mu(\xi|du) \right) \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial x}, \quad (6.40)$$

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial t} = \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial x} \mu(\xi|du) \right) \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial f(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial \xi} \quad (6.41)$$

и начальным условиям

$$\frac{\partial \tilde{x}(t; t, x, \mu)}{\partial x} = \mathbf{E}_n, \quad \frac{\partial \tilde{x}(t; t, x, \mu)}{\partial t} = \theta_n, \quad (6.42)$$

где матрица $\frac{\partial \tilde{x}(t; t, x, \mu)}{\partial x}$ имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{E}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица, θ_n — нулевой вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что справедливо тождество

$$\frac{\partial \tilde{\xi}(\xi; t, t)}{\partial t} = 1 \quad \forall \xi \in [t, T]. \quad (6.43)$$

Из определения $\tilde{z}(\xi; t, 0, \mu; t, x)$ и правила дифференцирования интегралов по параметрам получаем следующие выражения:

$$D_x \tilde{z}(T; t, 0, \mu; t, x)^\top = \int_t^T \left(\int_P D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) \right)^\top \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial x} d\xi, \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}(T; t, 0, \mu; t', x)}{\partial t'} &= \int_t^T \int_P \frac{\partial g(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial \xi} \mu(\xi|du) d\xi + \\ &+ \int_t^T \left(\int_P D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) \right)^\top \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t', x, \mu)}{\partial t'} d\xi. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Используя полученные формулы для производных решения системы (6.38) по параметрам и начальным данным t, x , получим из формулы (6.39) следующие выражения для искомых производных

функции $\omega(t, x, \alpha)$:

$$\begin{aligned} D_x \omega(t, x, \alpha)^\top &= \left\{ \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x_n} \right\} = \\ &= D_x \sigma(\tilde{x}(T; t, x, \mu))^\top \frac{\partial \tilde{x}(T; t, x, \mu)}{\partial x} + D_x \tilde{z}(T; t, 0, \mu; t, x)^\top, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} &= D_x \sigma(\tilde{x}(T; t, x, \mu))^\top \frac{\partial \tilde{x}(T; t, x, \mu)}{\partial t} + D_x \sigma(\tilde{x}(T; t, x, \mu))^\top \frac{d\tilde{x}(T; 0, x, \mu)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \tilde{\xi}(T; t, t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \tilde{z}(T; t, 0, \mu; t, x)}{\partial t} + \frac{d\tilde{z}(T; t, 0, \mu; t, x)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \tilde{\xi}(T; t, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Согласно (6.40), (6.42), матрица $\frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial x}$ совпадает с фундаментальной матрицей $X(\xi, t)$ решений системы уравнений в вариациях. Как известно, матрица $(X(\xi, t)^\top)^{-1} = \Phi(\xi, t)$ является фундаментальной матрицей решений системы, сопряженной к системе уравнений в вариациях, т.е. удовлетворяет при $\xi \in (t, T)$ системе

$$\frac{d\Phi(\xi, t)}{d\xi} = - \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial x} \mu(\xi|du) \right)^\top \Phi(\xi, t) \quad (6.48)$$

и краевому условию

$$\Phi(t, t) = \mathbf{E}_n. \quad (6.49)$$

Как известно, для матрицы $\Phi(\xi, t)$ имеет место следующее полугрупповое свойство:

$$\Phi(T, t) = \Phi(T, \xi) \Phi(\xi, t) \quad \forall \xi \in [t, T]. \quad (6.50)$$

Используя эти замечания и обозначения, преобразуем соотношения (6.46):

$$\begin{aligned} \Phi(T, t) D_x \omega(t, x, \alpha) &= \left(X(T, t)^\top \right)^{-1} D_x \omega(t, x, \alpha) = \\ &= \left(X(T, t)^\top \right)^{-1} X(T, t)^\top D_x \sigma(\tilde{x}(T; t, x, \mu)) + \\ &+ \int_t^T \left(X(T, t)^\top \right)^{-1} X(\xi, t)^\top \left(\int_P D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) \right) d\xi = \\ &= D_x \sigma(\tilde{x}(T; t, x, \mu)) + \int_t^T \Phi(T, \xi) D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) d\xi. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Отсюда согласно формуле Коши для решения неоднородной системы линейных уравнений получаем, что существует абсолютно непрерывная функция $p(\cdot) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой выполняются следующие условия:

(i) при $\xi = T$:

$$p(T) = D_x \sigma(\tilde{x}(T; t, x, \mu)); \quad (6.52)$$

(ii) при почти всех $\xi \in (t, T)$:

$$\frac{dp(\xi)}{d\xi} = - \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial x} \mu(\xi|du) \right)^\top p(\xi) - \int_P D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du); \quad (6.53)$$

(iii) при $\xi = t$:

$$p(t) = D_x \omega(t, x, \alpha). \quad (6.54)$$

Преобразуем теперь выражение (6.47), используя свойства функции $p(\xi)$, соотношения (6.43), (6.45) и вводя обозначение

$$\lambda(T) = p(T)^\top \frac{d\tilde{x}(T; t', x, \mu)}{dt'} + \frac{d\tilde{z}(T; t, 0, \mu; t', x)}{dt'}. \quad (6.55)$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} = \\ &= p(T)^\top \frac{d\tilde{x}(T; 0, x, \mu)}{d\xi} + \frac{d\tilde{z}(T; t, 0, \mu; t, x)}{d\xi} + p(T)^\top \frac{\partial \tilde{x}(T; t, x, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{z}(T; t, 0, \mu; t, x)}{\partial t} = \\ &= \lambda(T) + p(T)^\top \frac{\partial \tilde{x}(T; t, x, \mu)}{\partial t} - p(t)^\top \frac{\partial \tilde{x}(t; t, x, \mu)}{\partial t} + \\ &+ \int_t^T \left(\int_P D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) \right)^\top \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial t} d\xi + \int_t^T \int_P \frac{\partial g(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial \xi} \mu(\xi|du) d\xi = \\ &= \lambda(T) + \int_t^T \frac{d}{d\xi} \left\langle p(\xi), \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial t} \right\rangle d\xi + \\ &+ \int_t^T \left(\int_P D_x g(\xi, \tilde{x}(\xi), u) \mu(\xi|du) \right)^\top \frac{\partial \tilde{x}(\xi; t, x, \mu)}{\partial t} d\xi + \int_t^T \int_P \frac{\partial g(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial \xi} \mu(\xi|du) d\xi = \\ &= \lambda(T) + \int_t^T \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial \xi} \mu(\xi|du) \right)^\top p(\xi) d\xi + \int_t^T \int_P \frac{\partial g(\xi, \tilde{x}(\xi), u)}{\partial \xi} \mu(\xi|du) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, определена абсолютно непрерывная функции $\lambda(\cdot) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполняются следующие условия:

(i) при почти всех $\xi \in (t, T)$:

$$\frac{d\lambda(\xi)}{d\xi} = - \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, x(\xi), u)}{\partial t} \mu(\xi|du) \right)^\top p(\xi) - \int_P \frac{\partial g(\xi, x(\xi), u)}{\partial t} \mu(\xi|du); \quad (6.56)$$

(ii) при $\xi = t$:

$$\lambda(t) = \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}. \quad (6.57)$$

Зафиксируем начальную позицию $(t_0, x_0) \in \Pi_T$, элемент $\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t_0, x_0)$ и решение $x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0)$, где $\mu^0 \in \mathbf{M}_{t_0}$, $\mu^0(\xi|du) = \mu^0(\xi(t_0, \tau)|du) = \alpha^0(\tau|du)$, $\tau \in [0, 1]$, $\xi(t_0, \tau) = t_0 + (T - t_0)\tau$.

Из леммы II.6 следует, что для любых $t \in (t_0, T)$ и $\xi \in [t, T]$ справедливо равенство

$$x^0(\xi; t_0, x_0, \mu^0) = x^0(\xi; t, x^0(t), \mu^0[t, t_0]) \quad (6.58)$$

где $\mu^0[t, t_0] : [t, T] \rightarrow \text{rpm}(P)$ — сужение отображения $\mu^0 : [t_0, T] \rightarrow \text{rpm}(P)$:

$$\mu^0[t, t_0](\xi|du) = \mu^0(\xi|du) \quad \text{при} \quad \xi \in [t, T].$$

Рассмотрим произвольный момент $t \in [t_0, T]$, точку на оптимальной траектории $x = x^0(t)$ и элемент $\alpha^0[t, t_0]$ из $\mathbf{A}^0(t, x^0(t))$, соответствующий сужению $\mu^0[t, t_0]$,

$$\mu^0[t, t_0](\xi(t, \tau)|du) = \alpha^0[t, t_0](\mu|du), \quad \tau \in [0, 1],$$

оптимального управления μ^0 .

Нетрудно видеть, что решение $p^0(\xi), \lambda^0(\xi) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ системы

$$\frac{dp^0(\xi)}{d\xi} = - \left(\int_P \frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial x} \mu^0(\xi|du) \right)^\top p^0(\xi) - \int_P D_x g(\xi, x^0(\xi), u) \mu^0(\xi|du), \quad (6.59)$$

$$\frac{d\lambda^0(\xi)}{d\xi} = - \int_P \left(\frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial t} \right)^\top p^0(\xi) \mu^0(\xi|du) - \int_P \frac{\partial g(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial t} \mu^0(\xi|du) \quad (6.60)$$

с начальными данными

$$p^0(t_0) = D_x \omega(t_0, x_0, \alpha^0); \quad (6.61)$$

$$\lambda^0(t_0) = \frac{\partial \omega(t_0, x_0, \alpha^0)}{\partial t} \quad (6.62)$$

совпадает при всех $\xi \in [t, T]$, $t \in [t_0, T]$ с $p(\xi)$, $\lambda(\xi)$ (см. (6.53)–(6.54), (6.56)–(6.57)).

Согласно теореме II.7 и лемме II.6 при всех $t \in [t_0, T]$ справедливы соотношения

$$p^0(t) = p(t) = D_x \omega(t, x^0(t), \alpha^0[t, t_0]); \quad (6.63)$$

$$\lambda^0(t) = \lambda(t) = \frac{\partial \omega(t, x^0(t), \alpha^0[t, t_0])}{\partial t} = - \min_{u \in P} [\langle p^0(t), f(t, x^0(t), u) \rangle + g(t, x^0(t), u)]. \quad (6.64)$$

Следовательно, по непрерывности, функции $p^0(\cdot), \lambda^0(\cdot)$ удовлетворяют также краевым условиям

$$p^0(T) = D_x \sigma(x^0(T)), \quad (6.65)$$

$$\lambda^0(T) = - \min_{u \in P} [\langle p^0(T), f(T, x^0(T), u) \rangle + g(T, x^0(T), u)].$$

Лемма II.7 доказана. $\square$

Пусть $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $u^0(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$, $x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_0, x_0, u^0(\cdot))$ — оптимальное управление и порожденная им оптимальная траектория системы (3.1), т.е.

$$I_{t_0, x_0}(x^0(\cdot), u^0(\cdot)) = V(t_0, x_0), \quad (6.66)$$

причем в силу выпуклости вектограмм $E(t, x)$ (см. предположение **(A4)**) из леммы Филиппова [21, 195] вытекает, что при почти всех $\xi \in [t_0, T]$ выполняется равенство

$$f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) = \int_P f(\xi, x^0(\xi), u) \mu^0(\xi|du), \quad (6.67)$$

где значениями $\mu^0(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$ при почти всех $\xi \in [t_0, T]$ являются регулярные вероятностные меры на P , сосредоточенные в точках $u^0(\xi)$. Таким образом, оптимальная траектория $x^0(\cdot)$ системы (3.1) совпадает с траекторией системы (3.6):

$$x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_0, x_0, u^0(\cdot)) = x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0(\cdot)), \quad (6.68)$$

и справедливо равенство

$$I_{t_0, x_0}(x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0(\cdot|du)), \mu^0(\cdot|du)) = V(t_0, x_0).$$

Определим

$$\alpha^0 = \alpha^0(\tau|du) = \mu^0(\xi|du) \quad (6.69)$$

при

$$\xi = \xi(t_0, \tau) = t_0 + (T - t_0) \cdot \tau, \quad \tau \in [0, 1], \quad \alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t_0, x_0) \subset \mathbf{A}.$$

Построенный элемент $\alpha^0 \in \mathbf{A}$ соответствует оптимальному управлению $u^0(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$.

Согласно лемме II.4 имеем

$$\frac{dV(t, x^0(t))}{\left(1, \int_P f(t, x^0(t), u) \mu^0(t|du)\right)} = - \int_P g(t, x^0(t), u) \mu^0(t|du), \quad (6.70)$$

а производная по направлению $\frac{dV(t, x)}{(1, f)}$ для нижней огибающей гладкого семейства функций (см. (6.1)) определена формулой (6.2):

$$\frac{dV(t, x)}{(1, f)} = \min_{\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t, x)} \left[\frac{\partial \omega(t, x, \alpha^0)}{\partial t} + \langle D_x \omega(t, x, \alpha^0), f \rangle \right], \quad (6.71)$$

где

$$\mathbf{A}^0(t, x) = \{\alpha^0 \in \mathbf{A} : \omega(t, x, \alpha^0) = V(t, x)\}. \quad (6.72)$$

Из теоремы II.7 и леммы II.7 (см. (6.63)–(6.64)) следует, что для оптимальных $u^0(\cdot), x^0(\cdot)$ выполняется принцип максимума Понтрягина [137], который для рассматриваемой задачи **ОСР** формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема II.8. Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2)**, **(A3')**, **(A4)**, а управление $u^0(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$ и порождаемая им траектория $x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_0, x_0, u^0(\cdot))$ системы (3.1) оптимальны в смысле (3.3) для точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$, то для абсолютно непрерывной вектор-функции $p^0(\cdot), \lambda^0(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которая является решением полной сопряженной системы

$$\frac{dp^0(\xi)}{d\xi} = - \left(\frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{\partial x} \right)^\top p^0(\xi) - D_x g(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)), \quad (6.73)$$

$$\frac{d\lambda^0(\xi)}{d\xi} = - \left(\frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{\partial t} \right)^\top p^0(\xi) - \frac{\partial g(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{\partial t}, \quad (6.74)$$

где $\xi \in [t_0, T]$, и выполнены краевые условия

$$\begin{aligned} p^0(T) &= D_x \sigma(x^0(T)) = p^0, \\ \lambda^0(T) &= - \min_{u \in P} [\langle p^0, f(T, x^0(T), u) \rangle + g(T, x^0(T), u)] = \lambda^0, \end{aligned} \quad (6.75)$$

при почти всех $\xi \in [t_0, T]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\lambda^0(\xi) \cdot 1 + \min_{u \in P} [\langle p^0(\xi), f(\xi, x^0(\xi), u) \rangle + g(\xi, x^0(\xi), u)] = \\ &= \lambda^0(\xi) \cdot 1 + [\langle p^0(\xi), f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) \rangle + g(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))] = 0. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Интегрируя уравнение (6.74) и принимая во внимание краевое условие (6.75) и формулы (6.63)–(6.66), получаем пополнение стандартных условий принципа максимума, т.е. справедливость равенств

$$\begin{aligned} H(t, x^0(t), p^0(t)) &= -\lambda^0(t) = -\frac{\partial \omega(t, x^0(t), \alpha^0[t; t_0])}{\partial t} = \\ &= - \int_t^T \left\langle p^0(\xi), \int_P \frac{\partial f(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial \xi} \mu^0(\xi|du) \right\rangle d\xi - \\ &\quad - \int_t^T \int_P \frac{\partial g(\xi, x^0(\xi), u)}{\partial \xi} \mu^0(\xi|du) d\xi + \\ &\quad + \min_{u \in P} [\langle p^0, f(T, x^0(T), u) \rangle + g(T, x^0(T), u)]. \end{aligned}$$

Эти соотношения выполняются при почти всех $t \in [t_0, T]$.

Определение II.1. Экстремалью для точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ в задаче **ОСР** называется траектория $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u^e(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (3.1), порождаемая управлением $u^e(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{dx^e(t)}{dt} &= f(t, x^e(t), u^e(t)), \quad t \in [t_0, T], \\ x^e(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (6.77)$$

для которой при почти всех $t \in [t_0, T]$ выполняются условия принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \min_{u \in P} [\langle p^e(t), f(t, x^e(t), u) \rangle + g(t, x^e(t), u)] = \\ = [\langle p^e(t), f(t, x^e(t), u^e(t)) \rangle + g(t, x^e(t), u^e(t))], \end{aligned} \quad (6.78)$$

где $p^e(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — коэкстремаль, т.е. решение сопряженной системы (6.73):

$$\begin{aligned} \frac{dp^e(t)}{dt} = - \left(\frac{\partial f(t, x^e(t), u^e(t))}{\partial x} \right)^\top p^e(t) - D_x g(t, x^e(t), u^e(t)), \\ p^e(T) = D_y \sigma(x^e(T)). \end{aligned} \quad (6.79)$$

6.4. Связь принципа максимума Понтрягина с методом характеристик Коши для уравнения Беллмана. Напомним, что в рассматриваемой задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) гамильтониан для уравнения Беллмана (5.1) (уравнения типа Гамильтона—Якоби) имеет вид

$$H(t, x, p) = \min_{u \in P} [\langle p, f(t, x, u) \rangle + g(t, x, u)]. \quad (6.80)$$

В данном разделе 6.4 будем предполагать, что в задаче оптимального управления **ОСР** выполнены предположения **(A1')**, **(A2)**, **(A3')**, а также следующие усиления предположений **(A2)** и **(A4)**.

(A2') Условия **(A2)** пополнены следующими условиями продолжимости:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_j} \right\| \leq K_1(1 + \|x\|), \quad \left\| \frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial t} \right\| \leq K_1(1 + \|x\|), \\ \left\| \frac{\partial g(t, x, u)}{\partial x_j} \right\| \leq K_1(1 + \|x\|), \quad \left\| \frac{\partial g(t, x, u)}{\partial t} \right\| \leq K_1(1 + \|x\|) \end{aligned}$$

при всех $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, n}$, $(t, x, u) \in \Pi_T \times P$, где $K_1 > 0$ — константа.

(A4') Вектограммы

$$E(t, x) = \{(f(t, x, P), g(t, x, P))\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

являются строго выпуклыми множествами при всех $(t, x) \in \Pi_T$.

Из предположения **(A4')** вытекает, что в выражении (6.80) для гамильтониана $H(t, x, p)$ минимум достигается на единственном элементе $u^0 = u^0(t, x, p)$:

$$H(t, x, p) = [\langle p, f(t, x, u^0) \rangle + g(t, x, u^0)], \quad (6.81)$$

отображение $(t, x, p) \mapsto u^0(t, x, p)$ непрерывно, а гамильтониан имеет непрерывные частные производные по импульсным переменным p_i , $i \in \overline{1, n}$, причем вектор этих частных производных имеет вид

$$D_p H(t, x, p) = f(t, x, u^0). \quad (6.82)$$

Кроме того, из (6.81) легко получить выражения для частных производных гамильтониана по x и t :

$$D_x H(t, x, p) = \left(\frac{\partial f(t, x, u^0)}{\partial x} \right)^\top \cdot p + D_x g(t, x, u^0), \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial H(t, x, p)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial f(t, x, u^0)}{\partial t}, p \right\rangle + \frac{\partial g(t, x, u^0)}{\partial t}. \quad (6.84)$$

Из предположения **(A1')** и формул (6.82)–(6.84) вытекает, что отображение

$$\Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \left(D_p H(t, x, u^0), D_x H(t, x, u^0), \frac{\partial H(t, x, u^0)}{\partial t} \right)$$

непрерывно и ограничено на любом компакте $Q \in \Pi_T$.

Следствием последнего свойства и условия **(A2')** является то, что при сделанных предположениях о входных данных задачи **ОСР** определены классические характеристики [89] для уравнения Беллмана (5.1) в краевой задаче (5.2), т.е. определено семейство абсолютно непрерывных функций:

$$(\hat{x}(\cdot, y), \hat{p}(\cdot, y), \hat{z}(\cdot, y)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

зависящих от параметра $y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих при $t \in (0, T)$ системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= D_p H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{p}}{dt} &= -D_x H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{z}}{dt} &= \langle D_p H(t, \hat{x}, \hat{p}), \hat{p} \rangle - H(t, \hat{x}, \hat{p}),\end{aligned}\tag{6.85}$$

а при $t = T$ — краевому условию

$$\hat{x}(T, y) = y, \quad \hat{p}(T, y) = D_y \sigma(y), \quad \hat{z}(T, y) = \sigma(y).\tag{6.86}$$

Из формул (6.82)–(6.85) для характеристик и из определения экстремалей и коэкстремалей (6.77)–(6.79) в задаче **ОСР** вытекает следующее утверждение.

Теорема II.9. *Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2')**, **(A3')**, **(A4')**, то для любой точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ множество экстремалей $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u^e(\cdot))$ совпадает с множеством $X(t_0, x_0)$ компонент $\hat{x}(\cdot, y_0)$ классических характеристик для уравнения Беллмана (5.1), пересекающихся в точке (t_0, x_0) , т.е.*

$$\begin{aligned}X(t_0, x_0) &= \{\hat{x}(\cdot, y_0) : y_0 \in Y(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^n, Y(t_0, x_0) \neq \emptyset\}, \\ Y(t_0, x_0) &= \{y_0 : \hat{x}(t_0, y_0) = x_0\}.\end{aligned}$$

Множество соответствующих им коэкстремалей $p^e(\cdot)$ совпадает с множеством компонент $\hat{p}(\cdot, y_0)$, $y_0 \in Y(t_0, x_0)$ классических характеристик.

Отметим, что согласно теореме II.9 и определениям характеристик функцию $\hat{x}(\cdot, y_0)$ можно рассматривать, как траекторию системы (3.1), порожденную управлением $\hat{u}(\cdot, y_0)$:

$$\hat{u}(t, y_0) = u^0(t, \hat{x}(t, y_0), \hat{p}(t, y_0)), \quad t \in [t_0, T], \quad y_0 \in Y(t_0, x_0),$$

где $u^0(t, x, p)$ определено соотношениями (6.81). Нетрудно видеть, что $\hat{u}(\cdot, y_0) \in \mathbf{U}_{t_0}$.

Согласно теореме II.9 и определениям характеристик, экстремалей и коэкстремалей получаем также справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{z}(t, y_0)}{dt} &= \langle f(t, \hat{x}(t, y_0), \hat{u}(t, y_0)), \hat{p}(t, y_0) \rangle + H(t, \hat{x}(t, y_0), \hat{p}(t, y_0)) = \\ &= -g(t, \hat{x}(t, y_0), \hat{u}(t, y_0)), \quad t \in (t_0, T), \\ y_0 &= \hat{x}(T, y_0) = x^e(T), \quad y_0 \in Y(t_0, x_0), \\ \hat{z}(T, y_0) &= \sigma(y_0) = \sigma(x^e(T)), \quad \hat{z}(t_0, y_0) = I_{t_0, x_0}(\hat{x}(\cdot, y_0), \hat{u}(\cdot, y_0))\end{aligned}\tag{6.87}$$

Поскольку условия теоремы II.8 (принципа максимума Понтрягина) являются необходимыми условиями оптимальности, для вычисления цены $V(t_0, x_0)$ достаточно в формуле (3.3) брать минимум не по всем допустимым программным управлениям $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$ и порождаемым ими траекториям $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (3.1), а по тем управлениям $u^e(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$ и соответствующим траекториям $x^e(\cdot)$, которые удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина.

Из сказанного выше и соотношений (6.87) вытекает, что для вычисления цены $V(t_0, x_0)$ (3.3) достаточно брать минимум функционала платы $I_{t_0, x_0}(x(\cdot), u(\cdot))$ (3.2) по всем компонентам характеристик $\hat{x}(\cdot, y_0)$, которые пересекаются в точке (t_0, x_0) (т.е. по всем $y_0 \in Y(t_0, x_0)$, см. (6.85)–(6.86)) и соответствующим программным управлениям $\hat{u}(\cdot, y_0)$, т.е.

$$V(t_0, x_0) = \min_{y_0 \in Y(t_0, x_0)} I_{t_0, x_0}(\hat{x}(\cdot, y_0), \hat{u}(\cdot, y_0)).\tag{6.88}$$

Отметим, что в силу предположения **(A4')** существует оптимальное управление $u^0(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$, а в силу теорем II.8, II.9 оно содержится среди $\hat{u}(\cdot, y_0)$. Таким образом, минимум в (6.88) определен. Более того, из определений (6.85), (6.86) и предположений **(A1')**, **(A2')**, **(A3')**, **(A4')** вытекает, что множества $Y(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0) \in \hat{\Pi}_T$ являются компактами.

Преобразуем отрезок $[t_0, T]$ в стандартный отрезок $[0, 1]$ с помощью линейного преобразования $\xi(t_0, \tau)$ вида (4.7):

$$\xi(t_0, \tau) = t_0 + (T - t_0)\tau, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (6.89)$$

При этом управления $\hat{u}(\cdot, y_0)$ преобразуются в стандартизованные обобщенные управления $\hat{\alpha}(t_0, y_0) \in \mathbf{A}$:

$$\hat{\alpha}(t_0, y_0) : \hat{\alpha}(t_0, y_0)(\tau|du) = \hat{u}(\xi(t_0, \tau), y_0), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (6.90)$$

Обозначим символом $\hat{\mathbf{A}}(t_0, x_0)$ множество всех таких управлений:

$$\hat{\mathbf{A}}(t_0, x_0) = \{\hat{\alpha}(t_0, y_0) : y_0 \in Y(t_0, x_0)\}. \quad (6.91)$$

Согласно формулам (4.4)–(4.6) имеем

$$I_{t_0, x_0}(\hat{x}(\cdot, y_0), \hat{u}(\cdot, y_0)) = \omega(t_0, x_0, \hat{\alpha}(t_0, y_0)).$$

Таким образом, из (6.88) получаем следующее уточнение репрезентативной формулы (6.1) (см. теорему II.5 для функции цены).

Лемма II.8. Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2')**, **(A3')**, **(A4')**, то функция цены $V(t, x)$ (3.3) имеет представление

$$V(t, x) = \min_{\hat{\alpha} \in \hat{\mathbf{A}}(t, x)} \omega(t, x, \hat{\alpha}), \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad (6.92)$$

при всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, где $\mathbf{A} \supseteq \hat{\mathbf{A}}(t, x) \supseteq \mathbf{A}^0(t, x)$ (см. (6.91), (6.3)).

Функция $\omega(\cdot) : \text{cl } \Pi_T \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а функции

$$\text{cl } \Pi_T \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto \omega(t, x, \hat{\alpha}), \quad \hat{\alpha} \in \hat{\mathbf{A}}(t, x),$$

имеют равномерно по $\hat{\alpha}$ непрерывные частные производные $\frac{\partial \omega(t, x, \hat{\alpha})}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega(t, x, \hat{\alpha})}{\partial x_i}$, $i \in \overline{1, n}$.

7. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

7.1. Принцип максимума Понтрягина и супердифференциал функции цены. Из теоремы II.6, замечания II.4 и формул (6.63), (6.64) следует, что в каждой точке $(t, x) \in \Pi_T$ непуст супердифференциал функции цены $\partial^+ V(t, x)$, который описывается формулой

$$\partial^+ V(t, x) = \text{co} \left\{ (\lambda^0, p^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \lambda^0 = \frac{\partial \omega(t, x, \alpha^0)}{\partial t}, p^0 = D_x \omega(t, x, \alpha^0), \alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t, x) \right\}, \quad (7.1)$$

причем, согласно теореме II.9, справедливы также соотношения

$$p^0 = \hat{p}(t, y_0), \quad \lambda^0 = \hat{\lambda}(t, y_0) = -H(t, \hat{x}(t, y_0), \hat{p}(t, y_0)), \quad y_0 \in Y(t, x). \quad (7.2)$$

Используя представления (7.1)–(7.2) для супердифференциала функции цены $\partial^+ V(t, x)$, дополним необходимые условия оптимальности (см. теорему II.8) до достаточных. Покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема II.10. Если в задаче **ОСР** (3.1)–(3.3) выполнены условия **(A1')**, **(A2')**, **(A3')**, **(A4')**, то для того, чтобы управление $u^e(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$ и порождаемая им траектория $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u^e(\cdot))$ системы (3.1) были оптимальны в смысле (3.3) для точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$, необходимо и достаточно, чтобы для абсолютно непрерывной вектор-функции $p^e(\cdot), \lambda^e(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которая является решением полной сопряженной системы (6.73)–(6.75), при почти всех $t \in [t_0, T]$ выполнялся принцип максимума Понтрягина

$$\begin{aligned} \lambda^e(t) \cdot 1 + \min_{u \in P} \left[\langle p^e(t), f(t, x^e(t), u) \rangle + g(t, x^e(t), u) \right] = \\ = \lambda^e(t) \cdot 1 + \left[\langle p^e(t), f(t, x^e(t), u^e(t)) \rangle + g(t, x^e(t), u^e(t)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

а также при всех $t \in [t_0, T]$ выполнялось включение

$$(\lambda^e(t), p^e(t)) \in \partial^+ V(t, x^e(t)). \quad (7.4)$$

Доказательство. Необходимость. Справедливость выполнения условий (7.3)–(7.4) вытекает из теорем II.8, II.9 и формул (7.1), (7.2).

Достаточность. Пусть для некоторой пары $(x^e(\cdot), u^e(\cdot))$, состоящей из управления $u^e(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$ и порождаемой им траектории $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u^e(\cdot))$ системы (3.1), выполнены условия (7.3), (7.4). Согласно теореме II.6 для функции цены $V(t, x)$ вдоль движения $x^e(t)$ при почти всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$0 = \min_{u \in P} \left[\frac{dV(t, x^e(t))}{(1, f(t, x^e(t), u))} + g(t, x^e(t), u) \right] \leq \left[\frac{dV(t, x^e(t))}{(1, f(t, x^e(t), u^e(t)))} + g(t, x^e(t), u^e(t)) \right]. \quad (7.5)$$

Из теорем II.6, II.8, II.9 и формул (7.1), (7.2) следует

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, x)}{(1, f)} &= \min_{\alpha^0 \in \mathbf{A}^0(t, x)} \left[\frac{\partial \omega(t, x, \alpha^0)}{\partial t} + \langle D_x \omega(t, x, \alpha^0), f \rangle \right] = \\ &= \min_{y_0 \in Y(t, x)} [\hat{\lambda}(t, y_0) + \langle \hat{p}(t, y_0), f \rangle] = \min_{(\lambda^0, p^0) \in \partial^+ V(t, x)} [\lambda^0 + \langle p^0, f \rangle], \end{aligned} \quad (7.6)$$

где

$$\mathbf{A}^0(t, x) = \{\alpha^0 \in \mathbf{A} : \omega(t, x, \alpha^0) = V(t, x)\},$$

$$Y(t, x) = \{y^0 \in \mathbb{R}^n : \hat{x}(t, y_0) = x, \hat{x}(T, y_0) = y_0\}.$$

Для рассматриваемых экстремали $x^e(\cdot)$, порожденной управлением $u^e(\cdot)$, и коэкстремали $p^e(\cdot)$, дополненной компонентой $\lambda^e(\cdot)$ (см. (6.77)–(6.75)), имеют место соотношения

$$\frac{\partial \omega(t, x^e(t), \alpha^e[t, t_0])}{\partial t} = \hat{\lambda}(t, y_0) = \lambda^e(t), \quad (7.7)$$

$$D_x \omega(t, x^e(t), \alpha^e[t, t_0]) = \hat{p}(t, y_0) = p^e(t), \quad (7.8)$$

где $\alpha^e[t, t_0] \in \mathbf{A}$ построено по сужению на отрезок $[t, T]$, $t_0 \leq t \leq T$, управления $u^e(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$, с помощью линейного отображения $\xi(t, \tau) = t + (T - t)\tau$ отрезка $[t, T]$ в стандартный отрезок $[0, 1]$. Согласно условиям (7.3), (7.4) имеем

$$\lambda^e(t) \cdot 1 + \left[\langle p^e(t), f(t, x^e(t), u^e(t)) \rangle + g(t, x^e(t), u^e(t)) \right] = 0, \quad (7.9)$$

$$(\lambda^e(t), p^e(t)) \in \partial^+ V(t, x^e(t)). \quad (7.10)$$

Используя соотношения (7.6), (7.9), (7.10), продолжим оценку (7.5):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{dV(t, x^e(t))}{(1, f(t, x^e(t), u^e(t)))} + g(t, x^e(t), u^e(t)) = \\ &= \min_{(\lambda^0, p^0) \in \partial^+ V(t, x^e(t))} \lambda^0 + \langle p^0, f(t, x^e(t), u^e(t)) \rangle + g(t, x^e(t), u^e(t)) \leq \\ &\leq \lambda^e(t) + \langle p^e(t), f(t, x^e(t), u^e(t)) \rangle + g(t, x^e(t), u^e(t)) = 0. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что при почти всех $t \in [t_0, T]$ справедливо равенство (7.11) и включение (7.12):

$$\frac{dV(t, x^e(t))}{(1, f(t, x^e(t), u^e(t)))} + g(t, x^e(t), u^e(t)) = 0, \quad (7.11)$$

$$\alpha^e[t, t_0] \in \mathbf{A}^0(t, x^e(t)), \quad (7.12)$$

которые в силу леммы II.4 (см. п. 4.2, (4.16)) являются достаточными условиями оптимальности рассматриваемого управления $u^e(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}$ и порожденной им экстремали $x^e(\cdot)$. Теорема II.10 доказана. $\square$

Замечание II.5. Если вместо включения (7.4) рассматривать включение

$$(\lambda^e(t), p^e(t)) \in \left\{ (-H(t, \hat{x}(t, y_0), \hat{p}(t, y_0)), \hat{p}(t, y_0)) : y_0 \in Y(t, x^e(t)) \right\}, \quad (7.13)$$

то теорема II.10 остается справедливой. Справедливость этого замечания следует из формул (7.3), (7.6) и линейности операции скалярного произведения.

Замечание II.6. Отметим, что условие (7.4) обобщает следующее *необходимое* условие оптимальности, полученное в работе [237]:

$$\forall t \in [t_0, T]: \quad p^e(t) \in \partial_x V(t, x^e(t)) = \text{co} \left\{ p^e = \lim_{\substack{t_k \rightarrow t \\ x_k \rightarrow x^e(t)}} D_x V(t_k, x_k) : (t_k, x_k) \in \Pi_T \right\}, \quad (7.14)$$

где (t_k, x_k) — точки дифференцируемости локально липшицевой функции $V(\cdot)$.

Замечание II.7. Отметим, что условия (7.4), (7.14) являются условиями первого порядка. Эффективность их использования в необходимых и достаточных условиях оптимальности объясняется тем, что в них участвует функция цены, которая содержит глобальную информацию об управляемой системе.

7.2. Необходимые и достаточные условия оптимальности в случае невыпуклой вектограммы. В этом разделе рассматривается задача **ОСР** в предположениях **(A1')–(A3')**. Условие **(A4)** о выпуклости расширенной вектограммы скоростей $E(t, x)$ системы (3.1), (3.2) (см. (3.4)) будет опущено. Как отмечалось выше (см. п. 3.3), для того, чтобы гарантировать достижимость оптимального результата $V(t_0, x_0)$ (3.3), нужно расширить классы допустимых программных управлений $\mathbf{U}_{t_0}$ до обобщенных программных управлений $\mathbf{M}_{t_0}$, т.е. до классов измеримых функций на $[t_0, T]$ со значениями во множестве $\text{rpm}(P)$ регулярных вероятностных мер, определенных на компакте P — заданном ограничении значений управлений в системе (3.1).

Напомним, что описание динамики системы (3.1), на которую подается обобщенное управление $\mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$, приобретает вид (3.6), т.е.

$$\dot{x}(t) = \int_P f(t, x(t), u) \mu(t|du), \quad x(t_0) = x_0, \quad (7.15)$$

а соответствующее значение функционала $I_{t_0, x_0}(x(\cdot), \mu(\cdot|du))$ (3.7) вычисляется следующим образом:

$$I_{t_0, x_0}(x(\cdot), \mu(\cdot|du)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, \mu(\cdot|du))) + \int_{t_0}^T \int_P g(t, x(t), u) \mu(t|du) dt, \quad (7.16)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \mu(\cdot|du))$ — траектория системы (7.15), порожденная обобщенным управлением $\mu := \mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$.

Как следует из утверждения II.1, оптимальный результат

$$\tilde{V}(t_0, x_0) = \min_{\mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, \mu(\cdot|du)), \mu(\cdot|du)) \quad (7.17)$$

в задаче (7.15), (7.16) достижим и совпадает с оптимальным результатом $V(t_0, x_0)$ (3.3) в задаче (3.1), (3.2).

Гамильтониан $\tilde{H}(t, x, p)$ в задаче (7.15)–(7.17) вычисляется по формуле

$$\tilde{H}(t, x, p) = \min_{(f, g) \in \tilde{E}(t, x)} [\langle p, f \rangle + g], \quad (7.18)$$

где множество $\tilde{E}(t, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{E}(t, x) &= \text{co } E(t, x) = \text{co} \{ (f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P \} = \\ &= \left\{ \left(\int_P f(t, x, u) \mu(du), \int_P g(t, x, u) \mu(du) \right) : \mu(\cdot) \in \text{rpm}(P) \right\}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Из формул (7.18), (7.19), (6.80) и линейности операции скалярного произведения вытекает, что $\tilde{H}(t, x, p) = H(t, x, p)$. Отметим, что при отсутствии требования **(A4)** гамильтониан $\tilde{H}(t, x, p)$ не является дифференцируемым по переменной p .

Воспользуемся тем фактом [21, 27, 194], что всякий элемент $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \tilde{E}(t, x)$ представим в виде

$$\tilde{f} = \int_P f(t, x, u) \mu(du), \quad \tilde{g} = \int_P g(t, x, u) \mu(du), \quad (7.20)$$

где $\mu \in \text{grm}(P)$.

В силу предположения **(A1')** и известных результатов анализа [21] при всех $(t, x) \in \Pi_T$, $\mu \in \text{grm}(P)$, $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in \tilde{E}(t, x)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_P f(t, x, u) \mu(du) = \int_P \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial t} \mu(du), \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_P f(t, x, u) \mu(du) = \int_P \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \mu(du), \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_P g(t, x, u) \mu(du) = \int_P \frac{\partial g(t, x, u)}{\partial t} \mu(du), \\ D_x \tilde{g} &= D_x \int_P g(t, x, u) \mu(du) = \int_P D_x g(t, x, u) \mu(du). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Опираясь на определение гамильтониана $\tilde{H}(t, x, p)$ (7.18), для всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, введем в рассмотрение множества

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, x, p) &= \left\{ (\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) \in \tilde{E}(t, x) : \tilde{H}(t, x, p) = \langle \tilde{f}^0, p \rangle + \tilde{g}^0 \right\} = \\ &= \text{co} \left\{ (f^0, g^0) : (f^0, g^0) = (f(t, x, u^0), g(t, x, u^0)), \quad u^0 \in P, \right. \\ &\quad \left. \langle f(t, x, u^0), p \rangle + g(t, x, u^0) = H(t, x, p) \right\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

По определению, эти множества являются выпуклыми компактами, причем из (7.21), (7.22) следует, что для любого элемента $(\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) = (\tilde{f}(t, x, p), \tilde{g}(t, x, p))$ множества $\tilde{F}(t, x, p)$ определены частные производные

$$\frac{\partial \tilde{f}_i(t, x, p)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{g}(t, x, p)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{f}_i(t, x, p)}{\partial x_j}, \quad D_x \tilde{g}(t, x, p), \quad i, j \in \overline{1, n}.$$

Таким образом, гамильтониан $\tilde{H}(t, x, p)$ является негладкой функцией (см. [43, 61, 115, 139, 143]), у которой существуют частные супердифференциалы $\partial_t \tilde{H}(t, x, p)$, $\partial_x \tilde{H}(t, x, p)$, $\partial_p \tilde{H}(t, x, p)$, причем справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \partial_p \tilde{H}(t, x, p) &= \left\{ \tilde{f}^0 \in \mathbb{R}^n : \exists \tilde{g}^0 \in \mathbb{R}, (\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) \in \tilde{F}(t, x, p) \right\}, \\ \partial_t \tilde{H}(t, x, p) &= \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial t} \right)^\top p + \frac{\partial \tilde{g}^0}{\partial t} : (\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) \in \tilde{F}(t, x, p) \right\}, \\ \partial_x \tilde{H}(t, x, p) &= \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial x} \right)^\top p + D_x \tilde{g}^0 : (\tilde{f}^0, \tilde{g}^0) \in \tilde{F}(t, x, p) \right\}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Замечание II.8. Из определения (7.23) частных супердифференциалов вытекает, что многозначные отображения

$$(t, x) \mapsto \partial_p \tilde{H}(t, x, p), \quad (t, x) \mapsto \partial_x \tilde{H}(t, x, p), \quad (t, x) \mapsto \partial_t \tilde{H}(t, x, p)$$

имеют непустые выпуклые компактные значения и полунепрерывны сверху по включению.

Определим теперь квази-характеристику в задаче (7.15)–(7.17) как n -параметрическое семейство функций

$$(\tilde{x}(\cdot, y), \tilde{p}(\cdot, y), \tilde{z}(\cdot, y)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющих при почти всех $t \in [0, T]$ дифференциальным включениям

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &\in \partial_p \tilde{H}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t)), \\ \frac{d\tilde{p}(t)}{dt} &\in -\partial_x \tilde{H}(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t)), \\ \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} &= \left\langle \frac{d\tilde{x}(t)}{dt}, \tilde{p}(t) \right\rangle - H(t, \tilde{x}(t), \tilde{p}(t)), \end{aligned} \quad (7.24)$$

а при $t = T$ — краевому условию

$$\tilde{x}(T, y) = y, \quad \tilde{p}(T, y) = D_y \sigma(y), \quad \tilde{z}(T, y) = \sigma(y). \quad (7.25)$$

Заметим, что условие **(A1')** и замечание II.8 гарантируют существование квази-характеристик (7.24), (7.25), а условие **(A2')** гарантирует их продолжимость. При этом краевому условию (7.25) удовлетворяет, вообще говоря, не единственная квази-характеристика.

Введем понятия экстремалей и коэкстремалей в задаче (7.15)–(7.17).

Определение II.2. Экстремалью для точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ в задаче (7.15)–(7.17) называется траектория

$$x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu^e(\cdot|du)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

системы (7.15), порождаемая управлением $\mu^e(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$, т.е.

$$\frac{dx^e(t)}{dt} = \int_P f(t, x^e(t), u) \mu^e(t|du), \quad t \in [t_0, T], \quad x^e(t_0) = x_0, \quad (7.26)$$

для которой при почти всех $t \in [t_0, T]$ выполняются условия принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \min_{\mu \in \text{rpm}(P)} \left[\left\langle p^e(t), \int_P f(t, x^e(t), u) \mu(du) \right\rangle + \int_P g(t, x^e(t), u) \mu(du) \right] = \\ = \left[\left\langle p^e(t), \int_P f(t, x^e(t), u) \mu^e(t|du) \right\rangle + \int_P g(t, x^e(t), u) \mu^e(t|du) \right], \end{aligned} \quad (7.27)$$

где $p^e(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — коэкстремаль, т.е. решение сопряженной системы

$$\begin{aligned} \frac{dp^e(t)}{dt} &= - \int_P \left(\frac{\partial f(t, x^e(t), u)}{\partial x} \right)^\top \mu^e(t|du) \cdot p^e(t) - \int_P D_x g(t, x^e(t), u) \mu^e(t|du), \\ p^e(T) &= D_y \sigma(x^e(T)). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Дополним коэкстремаль $p^e(\cdot)$ компонентой $\lambda^e(\cdot)$, которая является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей при почти всех $t \in [t_0, T]$ дифференциальному уравнению (7.29), составляющему вместе с уравнением (7.28) полную сопряженную систему в задаче (7.15)–(7.17):

$$\frac{d\lambda^e(t)}{dt} = - \int_P \left\langle \left(\frac{\partial f(t, x^e(t), u)}{\partial t} \right)^\top \mu^e(t|du), p^e(t) \right\rangle - \int_P \frac{\partial g(t, x^e(t), u)}{\partial t} \mu^e(t|du), \quad (7.29)$$

$$\lambda^e(T) = -\tilde{H}(T, x^e(T), p^e(T)). \quad (7.30)$$

Согласно (7.18), (7.26)–(7.30) при всех $t \in [t_0, T]$ имеет место равенство

$$\lambda^e(t) = -\tilde{H}(t, x^e(t), p^e(t)). \quad (7.31)$$

Как и в выпуклом случае (случае выполнения условия **(A4')**), из формул (7.22)–(7.28) и результатов выпуклого анализа [61] следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dx^e(t)}{dt} &\in \partial_p \tilde{H}(t, x^e(t), p^e(t)), \quad x^e(t_0) = x_0, \\ \frac{dp^e(t)}{dt} &\in -\partial_x \tilde{H}(t, x^e(t), p^e(t)), \quad p^e(T) = \frac{\partial \sigma(x^e(T))}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Так как тройка $(x^e(t), p^e(t), \lambda^e(t) = -H(t, x^e(t), p^e(t)))$ удовлетворяет равенству (6.76) принципа максимума Понтрягина, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x^e(t) &= \tilde{x}(t, y_0), \quad p^e(t) = \tilde{p}(t, y_0), \quad t \in [t_0, T], \\ y_0 &= x^e(T) \in Y(t_0, x_0) \neq \emptyset, \\ \tilde{z}(t_0, y_0) &= I_{t_0, x_0}(x^e(\cdot), \mu^e(\cdot|du)), \end{aligned} \quad (7.33)$$

и наоборот, по определению, всякая квази-характеристика $\tilde{x}(\cdot, y_0)$, $\tilde{p}(\cdot, y_0)$, $\tilde{z}(\cdot, y_0)$, $y_0 \in Y(t_0, x_0) \neq \emptyset$, связана с некоторой экстремалью $x^e(\cdot)$ и соответствующей коэкстремалью $p^e(\cdot)$ соотношениями (7.33), которые означают справедливость следующего утверждения, эквивалентного теореме II.9.

Теорема II.11. *Если в задаче (7.15)–(7.17) выполнены условия **(A1')**, **(A2')**, **(A3')**, то для любой точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ множество экстремалей $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu^e(\cdot|du))$ совпадает с множеством $\tilde{X}(t_0, x_0)$ компонент $\tilde{x}(\cdot, y_0)$ квази-характеристик (7.24), (7.25) для уравнения Беллмана (5.1), которые пересекаются в точке (t_0, x_0) , т.е.*

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t_0, x_0) &= \{\tilde{x}(\cdot, y_0) : y_0 \in Y(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^n, Y(t_0, x_0) \neq \emptyset\}, \\ Y(t_0, x_0) &= \{\forall y_0; \tilde{x}(t_0, y_0) = x_0\}. \end{aligned}$$

Множество соответствующих им коэкстремалей $p^e(\cdot)$ совпадает с множеством компонент $\tilde{p}(\cdot, y_0)$, $y_0 \in Y(t_0, x_0)$ квази-характеристик.

Заметим, что теорема II.11 выражает факт эквивалентности необходимых условий оптимальности в рамках подходов Л. С. Понтрягина и Ф. Кларка (см. [61]).

Используя теорему II.11 и равенство (7.31) и повторяя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых была доказана теорема II.10, приходим к справедливости следующего утверждения (критерия оптимальности в унифицированной форме).

Теорема II.12. *Если в задаче (7.15)–(7.17) выполнены условия **(A1')**, **(A2')**, **(A3')**, то для того, чтобы управление $\mu^e(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$ и порождаемая им траектория $x^e(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu^e(\cdot|du))$ системы (7.15) были оптимальны (7.17) для точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

- (i) *траектория $x^e(\cdot)$ совпадает с фазовой компонентой $\tilde{x}(\cdot, y_0)$ квази-характеристики Коши (7.24)–(7.25), где $y_0 \in Y(t_0, x_0)$;*
- (ii) *при всех $t \in [t_0, T]$ для этой квази-характеристики выполняется включение*

$$(-\tilde{H}(t, \tilde{x}(t, y_0), \tilde{p}(t, y_0), \tilde{p}(t, y_0)) \in \partial \tilde{V}(t, \tilde{x}(t, y_0)). \quad (7.34)$$

Замечание II.9. Как отмечалось выше, гамильтонианы $\tilde{H}(t, x, p)$ и $H(t, x, p)$, а также оптимальные результаты $\tilde{V}(t, x)$ и $V(t, x)$ в задачах (7.15)–(7.17) и (3.1)–(3.3) совпадают. Если оптимальное обобщенное управление $\mu^0(\cdot|du) \in M_{t_0}$ порождает оптимальную траекторию $x^0(\cdot)$, которая не может быть получена как результат воздействия обычного управления из класса $\mathbf{U}_{t_0}$ (что возможно, если множество $E(t, x)$ невыпукло), то эту ситуацию можно трактовать как режим скольжения системы (3.1) вдоль фазовой компоненты $\tilde{x}(\cdot, y_0)$ квази-характеристики (7.24)–(7.25), для которой выполняется условие (7.34).

7.3. Репрезентативная формула минимаксного решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана в терминах классических характеристик. В данном разделе результаты предыдущих пп. 6.4, 7.1, 7.2 будут использованы для построения обобщенного решения в задаче Коши для уравнения в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + H(t, x, D_x u(t, x)) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7.35)$$

с краевым условием на правом конце

$$u(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (7.36)$$

Напомним, что

$$D_x u(t, x) = \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_n} \right) = p \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим эту задачу при условии достаточной гладкости входных данных задачи. Основным предположением будет *вознутасть* гамильтониана $H(t, x, p)$ по переменной p . Это предположение выполняется, в частности, для уравнения Беллмана [226].

В случае существования в рассматриваемой задаче (7.35), (7.36) классического решения $u(t, x)$ (во всей области $\text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ или хотя бы локально, в окрестности гиперплоскости $t = T$), оно может быть построено (см. [89, 129, 148]) с помощью классических характеристик, т.е. семейства функций

$$(\hat{x}(\cdot, y), \hat{p}(\cdot, y), \hat{z}(\cdot, y)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (7.37)$$

зависящих от параметра $y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих при $0 < t < T$ системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{p}}{dt} &= -D_{\hat{x}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \frac{d\hat{z}}{dt} &= \langle \hat{p}, D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}) \rangle - H(t, \hat{x}, \hat{p}), \end{aligned} \quad (7.38)$$

а при $t = T$ — краевому условию

$$\hat{x}(T, y) = y, \quad \hat{p}(T, y) = D_y \sigma(y), \quad \hat{z}(T, y) = \sigma(y), \quad (7.39)$$

где $H(t, x, p)$, $\sigma(x)$ — входные данные задачи (7.35), (7.36).

Для $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$ определим множество

$$Y(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \hat{x}(t, y) = x\}. \quad (7.40)$$

В случае, когда задача (7.35), (7.36) имеет классическое решение $u(t, x)$ в C^1 , это множество одноэлементно, т.е. $Y(t, x) = \{y(t, x)\}$, и, согласно методу Коши, справедливы соотношения

$$u(t, x) = \hat{z}(t, y(t, x)), \quad D_t u(t, x) = -H(t, \hat{x}(t, y(t, x)), \hat{p}(t, y(t, x))), \quad D_x u(t, x) = \hat{p}(t, y(t, x)).$$

Однако классическое решение в задаче (7.35), (7.36) существует крайне редко (см., например, [89, 129]). При этом в данной задаче *глобально* определена функция (возможно негладкая), которая имеет содержательный смысл функции цены для локальных задач оптимального управления. В точках дифференцируемости эта функция удовлетворяют уравнению (7.35), а при $t = T$ — краевому условию (7.36). Как показано в теории минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка [150, 293], эта функция совпадает с минимаксным решением задачи (7.35), (7.36).

В данном разделе будет обоснована следующая конструкция построения негладкого минимаксного решения задачи (7.35), (7.36) с помощью классических характеристик (7.37)–(7.40):

$$u(t, x) = \min \{ \hat{z}(t, y) : y \in Y(t, x) \} \quad \forall (t, x) \in \text{cl } \Pi_T. \quad (7.41)$$

Важно отметить следующее.

1. Если в задаче (7.35), (7.36) выполняются предположения из работ [66, 80, 87, 120], то формула (7.41) справедлива и для рассматриваемых в этих работах обобщенных решений.
2. Эта формула, очевидно, согласуется с упомянутым выше классическим случаем $u(\cdot) \in C^1$.

3. Наконец, из эквивалентности минимаксных и вязкостных решений задачи (7.35), (7.36) следует, что формула (7.41) справедлива также для вязкостного решения.

Задача (7.35), (7.36) рассматривается при следующих предположениях.

- (A1) Функции $H(\cdot)$, $D_t H(\cdot)$, $D_x H(\cdot)$, $D_p H(\cdot)$, $D_{tp} H(\cdot)$, $D_{pt} H(\cdot)$, $D_{xp} H(\cdot)$, $D_{px} H(\cdot)$ определены на $\text{cl } \Pi_T \times \mathbb{R}^n$ и непрерывны; функции $\sigma(\cdot)$, $D_x \sigma(\cdot)$ определены и непрерывны на $\mathbb{R}^n$.
- (A2) Функции $D_{tp} H(t, x, p)$ и $D_{xp} H(t, x, p)$ равномерно по p ограничены на каждом компакте $D \subset \text{cl } \Pi_T$.
- (A3) Функция $p \rightarrow H(t, x, p)$ вогнута при любых $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$.
- (A4) Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \|D_p H(t, x, p)\| &\leq C(1 + \|x\|) \quad \forall (t, x, p) \in \text{cl } \Pi_T \times \mathbb{R}^n, \\ |H^*(t, x, f)| &\leq C(1 + \|x\|) \quad \forall (t, x) \in \text{cl } \Pi_T, \quad \forall f \in \text{dom } H^*(t, x, \cdot), \end{aligned}$$

где $H^*(t, x, \cdot)$ — функция, сопряженная к $H(t, x, \cdot)$, $\text{dom } H^*(t, x, \cdot)$ — эффективное множество функции $H^*(t, x, \cdot)$ (см., например, [143]).

- (A5) Для любого компакта $D \subset \text{cl } \Pi_T$ существует константа $C(D) > 0$ такая, что для всех $p \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D$ имеют место оценки

$$|H_t(t, x, p)| \leq C(D)(1 + \|p\|), \quad \|H_x(t, x, p)\| \leq C(D)(1 + \|p\|).$$

Из предположений (A1)–(A5) и результатов выпуклого анализа [143] нетрудно получить следующее свойство задачи (7.35), (7.36).

Лемма II.9. При любых $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$ и при выполнении условий (A1)–(A5) эффективное множество сопряженной к гамильтониану функции, т.е. $\text{dom } H^*(t, x, \cdot)$, является выпуклым компактом, причем

$$\text{dom } H^*(t, x, \cdot) = \text{co}\{D_s H(t, x, s) : s \in \mathbb{R}^n\}. \quad (7.42)$$

Гамильтониан $H(t, x, p)$ (7.35) представим при всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$, $p \in \mathbb{R}^n$ в виде

$$\begin{aligned} H(t, x, p) &= \min \left\{ \langle f, p \rangle - H^*(t, x, f) : f \in \text{dom } H^*(t, x, \cdot) \right\} = \\ &= \min_{s \in \mathbb{R}^n} \left[\langle p, D_s H(t, x, s) \rangle - H^*(t, x, D_s H(t, x, s)) \right] = \\ &= \langle p, D_p H(t, x, p) \rangle - H^*(t, x, D_p H(t, x, p)). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма II.10. Для любого компакта $D_0 \subset \text{cl } \Pi_T$ существует константа $K(D_0) > 0$ такая, что для всех характеристик (7.37)–(7.39), удовлетворяющих при $\tau = T$ краевому условию

$$y \in Y(D_0) = \bigcup_{(t_0, x_0) \in D_0} Y(t_0, x_0), \quad (7.44)$$

имеют место при $\tau \in [t_0^*(D_0), T]$ следующие оценки:

$$\|\hat{x}(\tau, y)\| \leq K(D_0), \quad \|\hat{p}(\tau, y)\| \leq K(D_0), \quad (7.45)$$

где $t_0^*(D_0) = \min \{t \in [0, T] : \exists (t, x) \in D_0\}$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность компонент $\hat{x}(\cdot)$ для всех характеристик (7.37)–(7.39), удовлетворяющих условию (7.44). Обозначим эту совокупность символом $\hat{X}(D_0)$. Согласно условию (A4) имеем

$$\left\| \frac{d\hat{x}(\tau, y)}{d\tau} \right\| \leq C(1 + \|\hat{x}(\tau, y)\|)$$

при всех $\hat{x}(\cdot) \in \hat{X}(D_0)$, $t_0^* \leq t_0 \leq \tau \leq T$.

Используя это неравенство и лемму Гронвалла [21], приходим к оценке

$$\|\hat{x}(\tau, y)\| \leq (e^{C(t-t_0)} - 1) + \|x_0\| \cdot e^{C(t-t_0)} \leq K_1(D_0) \quad (7.46)$$

при всех $\hat{x}(\cdot) \in \hat{X}(D_0)$, $t_0^* \leq t_0 \leq \tau \leq T$, где

$$K_1(D_0) = \max_{(t_0, x_0) \in D_0} (1 + \|x_0\|) \cdot e^{CT} < \infty. \quad (7.47)$$

В частности, из оценок (7.46), (7.47) получаем оценку для краевых условий $\hat{p}(T, y)$, $y \in Y(D_0)$:

$$\max_{y \in Y(D_0)} \|p(T, y)\| \leq \max_{\|y\| \leq K_1(D_0)} \|D_y \sigma(y)\| = K_2(D_0). \quad (7.48)$$

Рассмотрим множество

$$D'_0 := [t_0^*, T] \times \{x : \|x\| \leq 3K_1(D_0)\} \subset \text{cl } \Pi_T. \quad (7.49)$$

Согласно условию (A5) существует такая константа $C'_0 = C(D'_0) > 0$, что для всех $p \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D'_0$ имеет место оценка

$$\|H_x(t, x, p)\| \leq C'_0(1 + \|p\|).$$

Из этого неравенства в силу (7.46), (7.47) для компонент $\hat{p}(\tau, y)$ всех характеристик (7.37)–(7.39), удовлетворяющих условию (7.44), следует оценка

$$\left\| \frac{d\hat{p}(\tau, y)}{d\tau} \right\| \leq C'_0(1 + \|\hat{p}(\tau, y)\|) \quad (7.50)$$

при всех $y \in Y(D_0)$, $t_0^* \leq t_0 \leq \tau \leq T$.

Используя неравенства (7.48), (7.50) и лемму Гронуолла, приходим к оценке

$$\|\hat{p}(\tau, y)\| \leq (e^{C'_0(\tau-t_0)} - 1) + \|\hat{p}(T, y)\| \cdot e^{C'_0(t-T)} \leq K_3(D_0) \quad (7.51)$$

при всех $y \in Y(D_0)$, $t_0^* \leq t_0 \leq \tau \leq T$, где

$$K_3(D_0) = (1 + K_2(D_0)) \cdot e^{C'_0 T} < \infty. \quad (7.52)$$

Наконец, определим константу $K(D_0)$, заявленную в утверждении леммы II.10, с помощью соотношения

$$K(D_0) = \max\{K_1(D_0), K_3(D_0)\}. \quad (7.53)$$

Лемма II.10 доказана. $\square$

Рассмотрим вспомогательную управляемую систему

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = D_s H(\tau, x(\tau), s(\tau)), \quad \tau \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0, \quad (7.54)$$

где $s(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — измеримое управление, $t_0 \in [0, T]$. Обозначим через $\mathbf{S}_{t_0}$ множество всех таких управлений, а через $G_T(D_0)$ — область достижимости системы (7.54) в момент T для всех начальных точек $(t_0, x_0) \in D_0 \subset \text{cl } \Pi_T$ и всех измеримых $s(\cdot)$, т.е.

$$G_T(D_0) = \bigcup_{(t_0, x_0) \in D_0} \bigcup_{s(\cdot) \in \mathbf{S}_{t_0}} \{x(T) = x(T; t_0, x_0, s(\cdot)) \in \mathbb{R}^n\},$$

где $x(\cdot; t_0, x_0, s(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — траектория системы (7.54), стартовая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $s(\cdot) \in \mathbf{S}_{t_0}$.

Подберем по входным данным H и σ задачи (7.35), (7.36) и начальной области $D_0 \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$ такую вспомогательную задачу оптимального управления **ОСР'** системой (7.54), для которой оптимальный результат в D_0 совпадает с функцией $u(t, x)$ вида (7.41).

Рассмотрим функционал платы $J_{(t_0, x_0)}(x(\cdot), s(\cdot))$ вида

$$J_{(t_0, x_0)}(x(\cdot), s(\cdot)) = \sigma(x(T)) - \int_{t_0}^T H^*(\tau, x(\tau), D_p H(\tau, x(\tau), s(\tau))) d\tau, \quad (7.55)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, s(\cdot))$ — траектория системы (7.54), порожденная управлением $s(\cdot) \in \mathbf{S}_{t_0}$, а подынтегральная функция $H^*(\tau, x, f)$ сопряжена к гамильтониану H .

Рассмотрим множество $U_{t_0}(P^*) \subset \mathbf{S}_{t_0}$ всех измеримых управлений $s(\cdot)$ со значениями из компакта $P^* \subset \mathbb{R}^n$.

Задача **ОСР'** состоит в минимизации функционала (7.55) на множестве управлений $s(\cdot) \in U_{t_0}(P^*)$ и порождаемых ими траекторий $x(\cdot)$ системы (7.54). Согласно утверждению II.1 при любом P^* решение задачи **ОСР'** (7.54), (7.55) существует, во всяком случае, в классе обобщенных программных управлений.

Обозначим через $V^0(t_0, x_0)$ величину оптимального результата

$$V^0(t_0, x_0) = \inf \{J_{(t_0, x_0)}(x(\cdot), s(\cdot)) : s(\cdot) \in U_{t_0}(P^*)\}. \quad (7.56)$$

Используя лемму II.10, определим по начальному множеству $D_0 \subset \text{cl } \Pi_T$ константу $K(D_0) > 0$ (7.53) и множества

$$D_1 := [0, T] \times \{x : \|x\| < 2K_1(D_0)\}, \quad (7.57)$$

$$P^* = P_1 = P^*(D_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq K(D_0)\}. \quad (7.58)$$

Из лемм II.1, II.2 и условий (A1)–(A5) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма II.11. Если для входных данных задачи Коши (7.35), (7.36) выполнены условия (A1)–(A5), то во вспомогательной задаче оптимального управления **ОСР'** (7.54), (7.55), (7.58) на множестве D_1 (7.57) выполняются условия **(A1')**, **(A2')**, **(A3')** (см. пп. 6.1, 6.4).

Используя материал п. 7.2, свойства частных супердифференциалов $\partial_t \tilde{H}(t, x, p)$, $\partial_x \tilde{H}(t, x, p)$, $\partial_p \tilde{H}(t, x, p)$ (см. (7.23)) и лемму II.11, получаем следующее утверждение.

Лемма II.12. Во вспомогательной задаче оптимального управления **ОСР'** (7.54), (7.55), (7.58) на множестве D_1 (7.57) выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} H(t, x, p) = \tilde{H}(t, x, p) &= \min_{s \in P^*} [\langle p, D_s H(t, x, s) \rangle - H^*(t, x, D_s H(t, x, s))] = \\ &= \langle p, D_p H(t, x, p) \rangle - H^*(t, x, D_p H(t, x, p)), \end{aligned} \quad (7.59)$$

а также

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{H}(t, x, p) &= \left\{ \frac{\partial H(t, x, p)}{\partial t} \right\}, \\ \partial_x \tilde{H}(t, x, p) &= \{D_x H(t, x, p)\}, \\ \partial_p \tilde{H}(t, x, p) &= \{D_p H(t, x, p)\}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Из теоремы II.12 и леммы II.12 вытекает справедливость следующего факта.

Лемма II.13. Всякая оптимальная траектория $x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0(\cdot|ds))$, $\mu^0(\cdot|ds) \in \mathbf{M}_{t_0}$, в задаче **ОСР'** (7.54)–(7.56) при $(t_0, x_0) \in D_0$ совпадает с фазовой компонентой $\hat{x}(\cdot, y_0)$ классической характеристики (7.38), (7.39), где $y_0 \in Y(t_0, x_0)$ (7.40).

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема II.13. Минимаксное решение $u(t, x)$ задачи (7.35), (7.36) определяется для любых $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$ с помощью формул (7.37)–(7.41), где $Y(t, x) \neq \emptyset$ при всех $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$. Для супердифференциала $\partial^+ u(t, x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ функции $u(\cdot)$ при всех $(t, x) \in \Pi_T$ справедлива формула

$$\partial^+ u(t, x) = \text{co} \left\{ (-H(t, x, p(t, y^0)), p(t, y^0)) : y^0 \in Y^0(t, x) \right\}. \quad (7.61)$$

Здесь

$$Y^0(t, x) = \{y^0 \in Y(t, x) : z(t, y^0) = u(t, x)\} \neq \emptyset. \quad (7.62)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные точку $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$ и число $\varepsilon \in (0, T - t_0)$. Пусть $D_0 = D_\varepsilon(t_0, x_0) \cap \text{cl } \Pi_T$, где $D_\varepsilon(t_0, x_0)$ — замкнутая ε -окрестность точки (t_0, x_0) в $\mathbb{R}^{n+1}$, и число $K(D_0) > 0$ подобрано согласно лемме II.10.

Определим множество $P^* = P_1$ для задачи **ОСР'** согласно (7.58):

$$P^* = P_1 = P^*(D_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq K(D_0)\}.$$

Проинтегрируем уравнение для $\hat{z}(\cdot, y)$ в (7.38), (7.39), где $y \in Y(t, x)$, $(t, x) \in D_0$, учитывая формулу (7.59) для $H(t, x, p)$ в области D_1 (7.57):

$$H(t, x, p) = \langle p, D_p H(t, x, p) \rangle - H^*(t, x, D_p H(t, x, p)).$$

Для $t < T$ получим

$$\hat{z}(t, y) = \sigma(y) - \int_t^T H^*\left(\tau, \hat{x}(\tau, y), D_p H(\tau, \hat{x}(\tau, y), \hat{p}(\tau, y))\right) d\tau.$$

Из теоремы II.11 и леммы II.13 вытекает, что для любой точки $(t, x) \in D_0$, и любой пары

$$x^e(\cdot) = x^e(\cdot; t, x, \mu^e(\cdot|ds)), \quad p^e(\cdot) = p^e\left(\cdot; T, \frac{\partial \sigma(x^e(T))}{\partial x}, \mu^e(\cdot|ds)\right) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

состоящей из экстремали и коэкстремали в задаче **ОСР'**, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} Y(t, x) &\neq \emptyset, \\ y \in Y(t, x) &\Leftrightarrow y = x^e(T, t, x, \mu^e(\cdot|ds)) = x^e(T), \\ x^e(\tau, t, x, \mu^e(\cdot|ds)) &= \hat{x}(\tau, x^e(T)), \quad p^e(\tau) = \hat{p}(\tau, x^e(T)) = \mu^e(\tau|ds) \quad \text{при } \tau \in [t, T], \\ \hat{z}(t, x^e(T)) &= J_{(t,x)}(\hat{p}(\cdot, x^e(T)), \hat{x}(\cdot, x^e(T))), \\ V^0(t, x) &= \min_{y \in Y(t,x)} J_{(t,x)}(\hat{p}(\cdot, y), \hat{x}(\cdot, y)) = \min \{ \hat{z}(t, y) : y \in Y(t, x) \} = u(t, x). \end{aligned}$$

Таким образом, в области D_0 функция $u(t, x)$ вида (7.41) совпадает с функцией цены (функцией оптимального результата) $V^0(t, x)$ во вспомогательной задаче **ОСР'** (7.54), (7.55), (7.58), а уравнение (7.35) можно в силу (7.59) трактовать как уравнение Беллмана для этой задачи.

Применяя результаты теории минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби [149, 293], получаем, что функция $(t, x) \mapsto u(t, x)$ совпадает с единственным минимаксным решением задачи Коши (7.35), (7.36) в области D_0 . При этом для всех $(t, x) \in D_0$ справедлива формула (7.61), а именно,

$$\begin{aligned} \partial V^0(t, x) &= \text{co} \left\{ (-H(t, x, p), p) : p \in \hat{P}^0(t, x) \right\} = \\ &= \text{co} \left\{ (-H(t, \hat{x}(t, y), \hat{p}(t, y))) : y \in Y^0(t, x) \right\} = \partial u(t, x) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

где

$$\hat{P}^0(t, x) = \left\{ p = p^e(t) : J_{(t,x)}(p^e(\cdot), x^e(\cdot)) = V^0(t, x) \right\},$$

а множество $Y^0(t, x)$ определено в (7.62).

В силу произвольности (t_0, x_0) и $\varepsilon \in (0, T - t_0)$, функция $(t, x) \mapsto u(t, x)$ (см. (7.37)–(7.41)), совпадающая с оптимальным результатом во вспомогательных задачах **ОСР'** (7.54), (7.55), (7.58), является глобальным минимаксным решением задачи Коши (7.35), (7.36) (в других терминах — «решением в целом»).

8. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ПОЗИЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

8.1. Формализация позиционной задачи управления. Одним из основных подходов к исследованию и решению задачи **ОСР** является позиционный подход, целью которого является построение оптимального управления по принципу обратной связи (в других терминах — оптимального синтеза, оптимальной позиционной стратегии, optimal feedback), т.е. функции

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto U(t, x) \in P,$$

причем допускается возможность разрывных обратных связей [137, 226, 265].

Для определения понятия движения системы (3.1) под воздействием разрывного закона управления по принципу обратной связи, известны следующие формализации:

- (i) формализации, использующие решения дифференциальных включений, построенных по разрывной правой части уравнения динамики [195, 211];
- (ii) формализации, использующие пределы пошаговых движений (т.е. ломаных Эйлера с дискретной обратной связью) [71, 73, 252];
- (iii) формализации, использующие многозначные позиционные стратегии, построенные на базе разрывной обратной связи [229] и др.

В рамках этих формализаций разрывная обратная связь порождает не одно движение, а целое множество, и возникает необходимость вводить понятие гарантированного результата как *наихудшего* значения функционала на множестве всех движений, порождаемых обратной связью.

Замечание II.10. Заметим, что множество движений, полученных как пределы ломаных Эйлера, оказывается наименьшим, а соответствующий гарантированный результат — *наилучшим* из всех упомянутых выше. Отмеченное обстоятельство послужило обоснованием для применения этого подхода в дальнейших построениях.

Напомним формализацию позиционной задачи **ОСР**, предложенную и используемую в теории дифференциальных игр [71, 73].

Рассмотрим обратную связь (feedback)

$$\text{cl } \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto U(t, x) \subset P.$$

Пусть $\Delta := \{t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_{N+1} = T\}$ — разбиение отрезка $[t_0, T]$ с диаметром $\text{diam } \Delta := \max\{(\tau_{i+1} - \tau_i) : 0 \leq i \leq N\}$.

Определение II.3. Ломаной Эйлера $x_\Delta(\cdot) = x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, U) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, отвечающей обратной связи $U(t, x)$ и разбиению Δ , называется траектория системы (3.1), порождаемая на каждом подынтервале разбиения $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, постоянным управлением $u_i = U(\tau_i, x_\Delta(\tau_i))$, т.е.

$$\dot{x}_\Delta(t) = f(t, x_\Delta(t), u_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (8.1)$$

При этом выполнено начальное условие $x_\Delta(t_0) = x_0$ и определена дискретная реализация обратной связи $U(t, x)$, т.е. $U_\Delta[t] = u_i$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Соответствующее значение функционала $I_{t_0, x_0}(x_\Delta(\cdot), U_\Delta[\cdot])$ вычисляется следующим образом:

$$I_{t_0, x_0}(x_\Delta(\cdot), U_\Delta[\cdot]) = \sigma(x_\Delta(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x_\Delta(t), U_\Delta[t]) dt. \quad (8.2)$$

Определение II.4. Движением $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, U) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ системы (3.1), стартующим из начальной точки (t_0, x_0) и отвечающим обратной связи $U(t, x)$, называется равномерный предел ломаных Эйлера $x_\Delta(\cdot)$ при $\text{diam } \Delta = \max_{i \in \overline{1, N}} (\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$.

Множество всех движений $x(t)$ системы (3.1), отвечающих обратной связи $U(t, x)$ и начальной точке (t_0, x_0) , будет обозначаться ниже символом $\text{Sol}(t_0, x_0, U)$.

Замечание II.11. Из конструкции движений $x(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0, U)$, компактности множества $\mathbf{M}$ и предположений **(A1)–(A3)** вытекает, что всякое движение $x(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0, U)$ совпадает с некоторой траекторией системы (3.1), порождаемой обобщенным управлением $\mu(\cdot|du) : [t_0, T] \rightarrow \text{grm}(P)$.

Определение II.5. Гарантированным результатом $\Gamma(t_0, x_0, U)$ для обратной связи $U(t, x)$ в задаче **ОСР** с начальной точкой $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ называется величина

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0, x_0, U) &= \limsup_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} I_{t_0, x_0}(x_\Delta(\cdot), U_\Delta[\cdot]) = \\ &= \sup_{x(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0, U)} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, \mu(\cdot|du)), \mu(\cdot|du)), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где предел вычисляется по всем возможным сходящимся последовательностям ломаных Эйлера $x_\Delta(\cdot) = x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, U)$ в паре с дискретными реализациями $U_\Delta[\cdot]$, порождающими эти ломаные, а супремум вычисляется по всем пределам $x(\cdot)$ ломаных Эйлера в паре с обобщенными программными управлениями $\mu(\cdot)$, порождающими эти предельные движения.

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Определение II.6. Обратная связь $U^\varepsilon : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$ называется ε -оптимальной для начальной точки $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$, если для нее выполняются соотношения

$$\Gamma(t_0, x_0, U^\varepsilon) = \limsup_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} I_{t_0, x_0}(x_\Delta^\varepsilon(\cdot), U_\Delta^\varepsilon[\cdot]) \leq V(t_0, x_0) + \varepsilon, \quad (8.4)$$

где $x_\Delta^\varepsilon(\cdot) = x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, U^\varepsilon)$, а $U_\Delta^\varepsilon[\cdot]$ — соответствующая дискретная реализация этой обратной связи.

Определение II.7. Обратная связь $U^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$ называется оптимальной для начальной точки $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$, если для нее выполняются равенства

$$\Gamma(t_0, x_0, U^0) = \limsup_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} I_{t_0, x_0}(x_\Delta^0(\cdot), U_\Delta^0[\cdot]) = V(t_0, x_0), \quad (8.5)$$

где $x_\Delta^0(\cdot) = x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, U^0)$, а $U_\Delta^0[\cdot]$ — соответствующая дискретная реализация этой обратной связи.

Определение II.8. Обратная связь $U^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$ называется универсальной оптимальной в области $D \subset \text{cl } \Pi_T$, если для нее равенства

$$\Gamma(t_0, x_0, U^0) = \limsup_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} I_{t_0, x_0}(x_\Delta^0(\cdot), U_\Delta^0[\cdot]) = V(t_0, x_0)$$

выполняются для всех начальных точек $(t_0, x_0) \in D$. Здесь $x_\Delta^0(\cdot) = x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, U^0)$, а $U_\Delta^0[\cdot]$ — соответствующая дискретная реализация этой обратной связи.

Напомним следующий результат теории позиционного управления [265].

Утверждение II.4. В задаче **ОСР** при условиях **(A1)–(A3)** для всех $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ оптимальный программный и оптимальный гарантированный позиционный результаты совпадают, т.е. выполняются соотношения

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) &= \inf_{u(\cdot) \in \mathbf{U}_{t_0}} I_{t_0, x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) = \\ &= \inf_U \Gamma(t_0, x_0, U) = \inf_U \limsup_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} I_{t_0, x_0}(x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, U), U_\Delta[\cdot]), \end{aligned} \quad (8.6)$$

где последний инфимум определяется по множеству всех возможных обратных связей $U = U(t, x)$.

8.2. Классический метод динамического программирования и непрерывный оптимальный синтез. Функция цены $V(t, x)$ (3.3) играет ключевую роль в исследовании и решении **ОСР** в классе позиционных законов управления (см., например, [157, 198, 217, 226, 229, 231, 236, 250, 293]). Один из классических методов решения позиционной задачи **ОСР**, метод динамического программирования [226], опирается на следующие свойства функции цены.

Утверждение II.5. Пусть функция $V^*(\cdot) : \text{cl } \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}$ является классическим решением краевой задачи Коши

$$V^*(T, x) = \sigma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (8.7)$$

для уравнения Беллмана в области $(t, x) \in \Pi_T$:

$$\frac{\partial V^*(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in P} \left[\left\langle \frac{\partial V^*(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle + g(t, x, u) \right] = 0, \quad (8.8)$$

и пусть отображение (обратная связь) $\Pi_T \rightarrow P$, $(t, x) \mapsto U^0(t, x)$, где

$$U^0(t, x) = \text{Arg min}_{u \in P} \left\{ \left\langle \frac{\partial V^*(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle + g(t, x, u) \right\}, \quad (8.9)$$

однозначно и непрерывно. Тогда для траекторий $x^0(\cdot) = x^0(\cdot, t_0, x_0, U^0)$ замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= f(t, x^0(t), U^0(t, x^0(t))), \quad t \in [t_0, T], \\ x^0(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (8.10)$$

и соответствующих реализаций $u^0(t) = U^0(t, x^0(t))$ обратной связи $U^0(t, x)$ (см. (8.9)) при всех $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$ справедливы равенства

$$I_{t_0, x_0}(x^0(\cdot, t_0, x_0, U^0), u^0(\cdot)) = V^*(t_0, x_0) = V(t_0, x_0). \quad (8.11)$$

Итак, классический метод динамического программирования предполагает гладкость (дифференцируемость) функции цены и непрерывность оптимальной обратной связи $U^0(t, x)$ (8.9).

Хорошо известно [137], что применимость классического метода динамического программирования для построения оптимального синтеза в задаче **ОСР** весьма ограничена. Это связано с тем, что функция цены, как правило, не является гладкой, а соотношения типа (8.9) для $U^0(t, x)$ не определены в нерегулярных точках функции цены, т.е. там, где она не дифференцируема. Таким образом, глобального классического решения задачи Коши (8.7), (8.8), как правило, не существует [81], а там, где оно существует, отображение (8.9) многозначно и полунепрерывно сверху [229, 231].

Однако выше (см. п. 5.2) было показано, что функция цены $V(t, x)$ (3.3) совпадает с минимаксным [293] (и/или вязкостным [240]) решением $V'(t, x)$ упомянутой задачи Коши. Согласно теореме II.4 в нерегулярных точках определены соотношения (5.7), которые можно использовать для определения $U^0(t, x)$ всюду в области Π_T .

8.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности обратных связей. Следует отметить, что $U^0(t, x)$ (8.9) является *универсальной* обратной связью (оптимальным синтезом) в задаче **ОСР** для любой заданной области начальных точек $D \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Для управляемых систем, на которые помимо контролируемых воздействий влияют также помехи или неконтролируемые возмущения (т.е. в задачах теории дифференциальных игр), известны примеры, в которых доказана невозможность построения оптимального синтеза [164, 265]. Однако при любой заданной точности $\varepsilon > 0$ универсальные ε -оптимальные обратные связи всегда существуют и гарантируют эту точность равномерно для всех начальных точек из выбранной области. Дискуссии и примеры конструкций универсальных ε -оптимальных обратных связей можно найти в [67, 264, 265].

В тех задачах теории дифференциальных игр, где универсальные оптимальные связи все же существуют, их структура и значения близки аргументам соотношения (8.9) почти всюду на множестве регулярных точек негладкой функции цены (см. ниже утверждение II.6 и [164, 265]).

Приведем необходимые условия оптимальности синтеза, разрывного, в общем случае. Эти условия получены в теории дифференциальных игр [164, 265] и модифицированы для задачи оптимального управления **ОСР** согласно сделанному в п. 5.1 замечанию о том, что эту задачу можно интерпретировать как дифференциальную игру с фиктивным вторым игроком.

Утверждение II.6. Пусть Ω и Φ — открытые области в $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что в задаче **ОСР** существует обратная связь $U^0(t, x)$, универсально оптимальная в области Ω . Предположим также, что функция цены $V(t, x)$ непрерывно дифференцируема в области Φ и $\Omega \supset \Phi$. Тогда для любого малого $\varepsilon > 0$ существует всюду плотное в Φ множество Φ_ε такое, что в каждой точке $(t, x) \in \Phi_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x, U^0(t, x)) \right\rangle + g(t, x, U^0(t, x)) \leq \min_{u \in P} \left[\left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle + g(t, x, u) \right] + \varepsilon. \quad (8.12)$$

Этот результат, а также соотношения (8.9), послужили наводящими соображениями при конструировании оптимального синтеза $U^0(t, x)$ для локально-липшицевой функции цены $V(t, x)$.

Введем в рассмотрение следующие величины.

Для заданного компактного множества $D \in \text{cl } \Pi_T$ рассмотрим точки (t_*, x_*) , $t_* \in [t_0, T]$, где $x_* = x(t_*)$ — точки на траекториях решений $x(\cdot)$ из множеств $\text{Sol}(t_0, x_0)$ (см. п. 3.3), $(t_0, x_0) \in D$.

Замечание II.12. Из определений II.3–II.4 и предположений **(A1)–(A2)** следует, что для компакта $D \in \text{cl } \Pi_T$ все точки

$$(t_*, x_*, z_*) : \quad t_* \in [t_0, T], \quad x_* = x_*(t_*), \quad z_* = z_*(t_*), \quad x_*(t_0) = x_0, \quad z_*(t_0) = 0, \\ z_*(t_*) = \int_{t_0}^{t_*} \int_P g(t, x_*(t), u) \mu_*(t|du) dt, \quad x(\cdot) \in \text{Sol}(t_0, x_0), \quad (8.13)$$

содержатся в некотором компакте $Q_{n+2}^*(D) \ni (t_*, x_*, z_*)$, $Q_{n+2}^*(D) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (см. лемму II.10). Обозначим через $Q^*(D)$ проекцию компакта $Q_{n+2}^*(D)$ на пространство $\mathbb{R}^{n+1}$.

Для любого заданного числа $\delta > 0$ вычислим «средние скорости»

$$\frac{x_*(t_* + \delta) - x(t_*)}{\delta}, \quad \frac{1}{\delta} \int_{t_*}^{t_* + \delta} \int_P g(t, x_*(t), u) \mu_*(t|du) dt$$

и их пределы вдоль траекторий $x_*(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$:

$$\tilde{f}(t_*, x_* | x_*(\cdot)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{x_*(t_* + \delta) - x(t_*)}{\delta}, \\ \tilde{g}(t_*, x_* | x_*(\cdot)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{t_*}^{t_* + \delta} \int_P g(t, x_*(t), u) \mu_*(t|du) dt.$$

Определим на компакте $Q^*(D) \ni (t_*, x_*)$ следующие величины («модули инерционности»):

$$\beta_f(\delta, t_*, x_*) = \sup_{x_*(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)} \left\| \tilde{f}(t_*, x_* | x_*(\cdot)) - \frac{x_*(t_* + \delta) - x(t_*)}{\delta} \right\|, \\ \beta_g(\delta, t_*, x_*) = \sup_{x_*(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)} \left\| \tilde{g}(t_*, x_* | x_*(\cdot)) - \frac{1}{\delta} \int_{t_*}^{t_* + \delta} \int_P g(t, x_*(t), u) \mu_*(t|du) dt \right\|$$

и

$$\beta_f(\delta, D) = \sup_{(t_*, x_*) \in Q^*(D)} \beta_f(\delta, t_*, x_*), \quad \beta_g(\delta, D) = \sup_{(t_*, x_*) \in Q^*(D)} \beta_g(\delta, t_*, x_*). \quad (8.14)$$

По определению, величины $\beta_f(\delta, D) > 0$, $\beta_g(\delta, D) > 0$ (см. (8.14)) удовлетворяют условиям

$$\beta_f(\delta, D) \downarrow 0, \quad \beta_g(\delta, D) \downarrow 0 \quad (8.15)$$

при $\delta \rightarrow 0$.

Опираясь на репрезентативную формулу (4.2) для функции цены

$$V(t, x) = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \omega(t, x, \alpha)$$

(см. теорему II.1) и используя условие (8.15), докажем следующий вспомогательный факт.

Теорема II.14. Если в задаче **ОСР** выполнены условия **(A1)–(A4)**, то для функции цены в произвольной точке $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ и для любого значения параметра $\alpha^0 \in A^0(t_0, x_0)$, где

$$A^0(t, x) := \{\alpha^0 \in A : V(t, x) = \omega(t, x, \alpha^0)\}, \quad (8.16)$$

существует такое значение управления $u^0 = u(t_0, x_0, \alpha^0) \in P$, что справедливы соотношения

$$\frac{d\omega(t_0, x_0, \alpha^0)}{(1, f(t_0, x_0, u^0))} + g(t_0, x_0, u^0) = \frac{dV(t_0, x_0)}{(1, f(t_0, x_0, u^0))} + g(t_0, x_0, u^0) = 0. \quad (8.17)$$

Доказательство. Из утверждения II.1 следует (см. (3.9)), что в задаче **ОСР** для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in \text{cl } \Pi_T$ существует обобщенное управление $\mu^0(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$, порождающее траекторию $x^0(\cdot) = x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0(\cdot))$ системы (3.6), стартующую из точки (t_0, x_0) и такую, что для соответствующего значения функционала платы (3.7) выполняется равенство

$$I_{t_0, x_0}(x^0(\cdot; t_0, x_0, \mu^0(\cdot|du), \mu^0(\cdot|du))) = V(t_0, x_0), \quad (8.18)$$

т.е. эта траектория и порождающее ее обобщенное управление являются оптимальными для начальной точки (t_0, x_0) .

Используем конструкции (4.4), (4.5) теоремы II.1, линейное преобразование $[t_0, T] \rightarrow [0, 1]$ (см. (4.7)) и взаимно однозначное соответствие между обобщенными управлениями $\mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}_{t_0}$ и элементами $\alpha \in A$. Таким образом, всякому оптимальному управлению $\mu^0(\cdot|du)$ соответствует элемент $\alpha^0 \in A^0(t, x)$, так что справедливо равенство

$$V(t_0, x_0) = \omega(t_0, x_0, \alpha^0). \quad (8.19)$$

Согласно принципу оптимальности для любого момента $t \in [t_0, T]$ и сужения $(x_t^0(\cdot), \mu_t^0(\cdot|du))$ оптимальной пары $(x^0(\cdot), \mu^0(\cdot|du))$ на отрезок $[t, T]$ справедливо соотношение

$$I_{t, x^0(t)}(x_t^0(\cdot; t, x^0(t), \mu_t^0(\cdot|du))) = V(t, x^0(t)). \quad (8.20)$$

Обозначим символом α_t^0 элемент из компакта A , получающийся из $\mu_t^0(\cdot|du)$ в результате линейного преобразования (4.7): $[t, T] \rightarrow [0, 1]$. Аналогично (8.19), имеет место равенство

$$V(t, x^0(t)) = \omega(t, x^0(t), \alpha_t^0) \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (8.21)$$

Из (8.20) следует, что для любого момента $t \in [t_0, T]$ и $\delta \in (0, T - t)$ выполнены соотношения

$$V(t + \delta, x^0(t + \delta)) = \omega(t + \delta, x^0(t + \delta), \alpha_{t+\delta}^0) = \omega(t, x^0(t), \alpha_t^0) = V(t, x^0(t)), \quad (8.22)$$

причем для оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ справедливо представление

$$x^0(t + \delta) = x^0(t) + \int_t^{t+\delta} \int_P f(\tau, x^0(\tau), u) \mu^0(\tau|du) d\tau. \quad (8.23)$$

Выпуклость и компактность множества

$$E(t, x) = \{(f(t, x, u), g(t, x, u)) : u \in P\}$$

(см. условия **(A1)**, **(A4)**) влекут за собой выполнение следующих соотношений:

- (i) для любого момента $t \in [t_0, T]$ и для почти всех $\tau \in (t, t + \delta)$ множество $E(t, x^0(t))$ содержит точки $(f^0[t, \tau], g^0[t, \tau])$, где

$$f^0[t, \tau] = \int_P f(t, x^0(t), u) \mu^0(\tau|du), \quad g^0[t, \tau] = \int_P g(t, x^0(t), u) \mu^0(\tau|du), \quad (8.24)$$

а также их «усреднения» $(f_\delta^0(t), g_\delta^0(t)) \in E(t, x^0(t))$, где

$$f_\delta^0(t) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} f^0[t, \tau] d\tau, \quad g_\delta^0(t) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} g^0[t, \tau] d\tau. \quad (8.25)$$

- (ii) любой «предельный средний» вектор $(f^0(t), g^0(t))$ такой, что

$$f^0(t) = \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \{f_{\delta_k}^0(t)\}, \quad g^0(t) = \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \{g_{\delta_k}^0(t)\}, \quad (8.26)$$

также удовлетворяет включению $(f^0(t), g^0(t)) \in E(t, x^0(t))$, а из условий **(A1)** и (8.15) вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|f_{\delta_k}^0(t) - f^0(t)\| &\leq \beta_f(\delta_k, D) + L_1(1 + K^0)\delta_k, \\ \|g_{\delta_k}^0(t) - g^0(t)\| &\leq \beta_g(\delta_k, D) + L_1(1 + K^0)\delta_k, \end{aligned} \quad (8.27)$$

где $(t_0, x_0) \in D \subset \text{cl } \Pi_T$, D — компактное множество, $(t, x^0(t)) \in Q^*(D)$ и

$$K^0 := \max_{(t,x,u) \in Q^*(D) \times P} \{ \|f(t, x, u)\|, |g(t, x, u)| \}.$$

Поэтому в силу условий **(A1)–(A2)** и (8.15) оценки (8.27) равномерны относительно $(t, x) = (t, x_*^0(t)) \in Q^*(D)$ и $x_*^0(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x^0(t_*))$, $t_0 \leq t_* \leq t \leq T$.

Описанные выше свойства (8.24)–(8.26) влекут за собой выполнение соотношений

$$\begin{aligned} x_*^0(t + \delta_k) - x^0(t) &= f^0(t) \cdot \delta_k + h_f(\delta_k), \\ z_*^0(t + \delta_k) - z^0(t) &= g^0(t) \cdot \delta_k + h_g(\delta_k), \end{aligned} \quad (8.28)$$

где в силу предположения **(A4)** о выпуклости $E(t, x)$ существует такое значение управляющего параметра $u_*^0 = u_*^0(t, x, \alpha_t^0) \in P$, что

$$f^0(t) = f(t, x^0(t), u_*^0), \quad g^0(t) = g(t, x^0(t), u_*^0), \quad (8.29)$$

а вектор $h(\delta_k) = (h_f(\delta_k), h_g(\delta_k))$ в силу (8.14), (8.24)–(8.26), (8.28), (8.29), имеет вид

$$\begin{aligned} h_f(\delta_k) &= [x_*^0(t + \delta_k) - x^0(t)] - f(t, x^0(t), u_*^0)\delta_k, \\ h_g(\delta_k) &= [z_*^0(t + \delta_k) - z^0(t)] - g(t, x^0(t), u_*^0)\delta_k. \end{aligned}$$

Используя (8.15), оценим величину $\|h(\delta)\|$:

$$\|h(\delta)\| \leq \beta_f(\delta, D) \cdot \delta + \beta_g(\delta, D) \cdot \delta. \quad (8.30)$$

Из соотношений (8.22), (8.23), (8.28)–(8.30) вытекает, в частности, что локально липшицева функция цены $V(t, x)$ в любой точке $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ удовлетворяет требуемым соотношениям (8.17), а именно,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[V(t_0 + \delta, x^0(t_0 + \delta)) - V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \int_P g(\tau, x^0(\tau), u) \mu^0(\tau|du) d\tau \right] = \\ &= \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + \delta_k, x_0 + f(t_0, x_0, u^0)\delta_k) - V(t_0, x_0)}{\delta_k} + g(t_0, x_0, u^0) = \\ &= \frac{d\omega(t_0, x_0, \alpha^0)}{(1, f(t_0, x_0, u^0))} + g(t_0, x_0, u^0) = \frac{dV(t_0, x_0)}{(1, f(t_0, x_0, u^0))} + g(t_0, x_0, u^0) = 0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Теорема II.14 доказана. $\square$

Заметим, что согласно принципу оптимальности [167, 226] для любой точки $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ и любого обобщенного управления $\mu(\cdot|du) \in \mathbf{M}$ в паре с порождаемой им траекторией $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \mu(\cdot|du))$ справедливо неравенство

$$V(t_0 + \delta, x(t_0 + \delta)) \geq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \int_P g(\tau, x(\tau), u) \mu(\tau|du) d\tau, \quad (8.32)$$

причем

$$x(t_0 + \delta) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \int_P f(\tau, x(\tau), u) \mu(\tau|du) d\tau. \quad (8.33)$$

Соотношения (8.17), (8.31) теоремы II.14 и неравенства (8.32), (8.33) приводят к заключению о справедливости следствия II.1.

Следствие II.1. Для функции цены в задаче **ОСР** при выполнении предположений **(A1)–(A4)** в произвольной точке $(t, x) \in \text{cl } \Pi_T$ имеют место равенства

$$\min_{u \in P} \min_{\alpha^0 \in A^0(t, x)} \frac{d^\pm \omega(t, x, \alpha^0)}{(1, f(t, x, u))} + g(t, x, u) = \frac{d\omega(t, x, \alpha_*^0)}{(1, f(t, x, u_*^0))} + g(t, x, u_*^0) = \frac{dV(t, x)}{(1, f(t, x, u_*^0))} + g(t, x, u_*^0), \quad (8.34)$$

где $u_*^0 = u_*^0(t, x, \alpha_*)$.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема II.15. Пусть в рассматриваемой задаче **ОСР** выполнены условия **(A1)–(A4)**. Тогда универсальные оптимальные обратные связи $U^0(t, x)$ можно определять при всех $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ с помощью соотношений

$$U^0(t, x) \in \operatorname{Arg} \min_{u \in P} \left\{ \frac{d^\pm V(t, x)}{(1, f(t, x, u))} + g(t, x, u) \right\}, \quad (8.35)$$

где $V(t, x)$ — функция цены в рассматриваемой задаче **ОСР** (см. (3.3)).

Доказательство. Согласно теореме II.4 и определению обратной связи $U^0(t, x)$ (8.35) при всех $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\frac{d^\pm V(t, x)}{(1, f(t, x, U^0(t, x)))} + g(t, x, U^0(t, x)) = 0. \quad (8.36)$$

Из доказательства теоремы II.3 и определений полупроизводных $\frac{d^\pm V(t, x)}{(1, f)}$ следует, что функция цены во всех точках $(t, x) \in \Pi_T$ дифференцируема по направлениям $(1, f(t, x, U^0(t, x)))$ сдвига вдоль оптимальных траекторий и имеют место равенства для производных по этим направлениям:

$$\frac{dV(t, x)}{(1, f(t, x, U^0(t, x)))} + g(t, x, U^0(t, x)) = 0. \quad (8.37)$$

Пусть множество $D \subset \operatorname{cl} \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ — некоторый компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зафиксируем точку $(t_0, x_0) \in D$. Рассмотрим движение $x(\cdot) \in \operatorname{Sol}(t_0, x_0, U^0)$ (см. определения I.3, I.4), стартующее из начальной точки $x_\Delta(t_0) = x_0$ под воздействием закона управления по принципу обратной связи $U^0(t, x)$ (8.35). Рассмотрим аппроксимирующие это движение $x(\cdot)$ ломаные Эйлера $x_\Delta(\cdot)$, порожденные кусочно постоянным управлением $U_\Delta^0(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$, которое формируется в узлах τ_j , $j = 0, 1, \dots, N(\Delta)$, из разбиения Δ интервала $[t_0, T]$ с помощью этой обратной связи:

$$U_\Delta^0(t) = U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j)) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}). \quad (8.38)$$

Замечание II.13. Из определений II.3, II.4 и предположений **(A1)–(A2)** следует, что для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in D$, $z(t_0) = 0$, и любого разбиения Δ отрезка $[t_0, T]$ при выборе $\operatorname{diam} \Delta \leq 1$ все точки $(t, x_\Delta(t))$, $t \in [t_0, T]$, на соответствующих ломаных Эйлера $x_\Delta(\cdot)$, $x_\Delta(t_0) = x_0$ содержатся в компакте $Q^*(D) \ni (t, x_\Delta(t))$, который является проекцией на пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ компакта $Q_{n+2}^*(D) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (см. замечание II.12).

Упростим обозначения следующим образом:

$$Q^* := Q^*(D), \quad K^* = \max_{(t, x, u) \in Q^* \times P} \{ \|f(t, x, u)\|, |g(t, x, u)| \}, \quad (8.39)$$

$$|V(t', x') - V(t'', x'')| \leq L^* \|(t', x') - (t'', x'')\| \quad \forall (t', x') \in Q^*, \quad (t'', x'') \in Q^*,$$

т.е. $L^* = L^*(Q^*) > 0$ — константа Липшица функции цены $V(t, x)$ на компакте Q^* .

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} 0 \leq I_{t_0, x_0}(x(\cdot)) - V(t_0, x_0) &= \\ &= \lim_{\operatorname{diam} \Delta \rightarrow 0} \left[\sigma(x_\Delta(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x_\Delta(t), U_\Delta^0(t)) dt \right] - V(t_0, x_0) \end{aligned} \quad (8.40)$$

и оценим величину, стоящую в (8.40) под знаком предела:

$$\begin{aligned} & \left[\sigma(x_\Delta(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x_\Delta(t), U_\Delta^0(t)) dt \right] - V(t_0, x_0) = \\ & = \sum_{j=0}^{N-1} \left[V(\tau_{j+1}, x_\Delta(\tau_{j+1})) - V(\tau_j, x_\Delta(\tau_j)) + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(t, x_\Delta(t), U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j))) dt \right], \end{aligned} \quad (8.41)$$

где $\tau_N = T$ и $\sigma(x(T)) = V(T, x(T))$.

Рассмотрим одно из слагаемых этой суммы и введем обозначения

$$\begin{aligned} x_j &= x_\Delta(\tau_j), \quad U_j^0 = U^0(\tau_j, x_j), \\ f_j^0 &= f(\tau_j, x_j, U^0(\tau_j, x_j)), \quad g_j^0 = g(\tau_j, x_j, U^0(\tau_j, x_j)). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Перепишем соотношения (8.41) в этих обозначениях:

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(\tau_{j+1}, x_\Delta(\tau_{j+1})) + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(t, x_\Delta(t), U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j))) dt - V(\tau_j, x_j) = \\ &= \left[V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) - V(\tau_j, x_j) \right] + g_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + \\ &+ \left[V(\tau_{j+1}, x_\Delta(\tau_{j+1})) - V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) \right] + \\ &+ \left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(t, x_\Delta(t), U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j))) dt - g_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) \right] = I_j + I'_j + I''_j. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Используя предположения **(A1)–(A2)** и обозначения (8.39), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} x_\Delta(\tau_{j+1}) &= x_j + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(t, x_\Delta(t), U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j))) dt \leq x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + \Delta x_j, \\ \|\Delta x_j\| &\leq \frac{L_1(1 + K^*)}{2} (\tau_{j+1} - \tau_j)^2; \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} I'_j &= \left[V(\tau_{j+1}, x_\Delta(\tau_{j+1})) - V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) \right] \leq \\ &\leq L^* \|x_\Delta(\tau_{j+1}) - x_j - f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)\| \leq L^* L_1 \frac{1 + K^*}{2} (\tau_{j+1} - \tau_j)^2; \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$I''_j = \left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(t, x_\Delta(t), U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j))) dt - g_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) \right] \leq L_1 \frac{1 + K^*}{2} (\tau_{j+1} - \tau_j)^2. \quad (8.46)$$

Слагаемые I_j в правой части соотношений (8.43) оценим, используя отрезки оптимальных траекторий

$$x_j^0(\cdot) : [\tau_j, \tau_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_j^0(\cdot) = x(\cdot; \tau_j, x_j, \mu_j^0(\cdot|du)),$$

стартовых из начальных точек (τ_j, x_j) под воздействием оптимальных обобщенных управлений $\mu_j^0(\cdot|du) : [\tau_j, T] \rightarrow \text{grm}(P)$, а именно,

$$\begin{aligned}
I_j &= \left[V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) - V(\tau_j, x_j) \right] + g_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \\
&\leq \left[V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) - V(\tau_{j+1}, x_j^0(\tau_{j+1})) \right] + \\
&\quad + \left[V(\tau_{j+1}, x_j^0(\tau_{j+1})) - V(\tau_j, x_j) \right] + g_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) = \\
&= \left[V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) - V(\tau_{j+1}, x_j^0(\tau_{j+1})) \right] - \\
&\quad - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P g(\tau, x_j^0(\tau), u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau + g(\tau_j, x_j, U^0(\tau_j, x_j)) \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j). \quad (8.47)
\end{aligned}$$

Используя липшицевость функции цены $V(t, x)$ и функций $f(\cdot, u)$, $g(\cdot, u)$, а также равномерную ограниченность $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ на Q^* (8.39), оценим слагаемые в правой части неравенств (8.47):

$$\begin{aligned}
&\left[V(\tau_{j+1}, x_j + f_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)) - V(\tau_{j+1}, x_j^0(\tau_{j+1})) \right] \leq \\
&\leq L^* \left\| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \|f(\tau_j, x_j, U_j^0) - \int_P f(\tau, x_j^0(\tau), u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau\| \right\| \leq \\
&\leq L^* \left\| f_j^0 - \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P f(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right\| \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + \\
&\quad + L^* \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P \|f(\tau_j, x_j, u) - f(\tau_j, x_j^0(\tau), u)\| \mu_j^0(\tau|du) d\tau \leq \\
&\leq L^* \left\| f_j^0 - \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P f(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right\| \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + \\
&\quad + L^* L_1 (1 + K^*) \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)^2. \quad (8.48)
\end{aligned}$$

Аналогично оценим вторую часть слагаемых в правой части неравенств (8.47):

$$\begin{aligned}
&\left| g_j^0 \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P g(\tau, x_j^0(\tau), u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right| \leq \\
&\quad \left| g_j^0 - \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P g(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right| \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + \\
&\quad + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P |g(\tau_j, x_j, u) - g(\tau_j, x_j^0(\tau), u)| \mu_j^0(\tau|du) d\tau \leq \\
&\leq \left| g_j^0 - \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P g(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right| \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + L_1 (1 + K^*) \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j)^2. \quad (8.49)
\end{aligned}$$

Выберем $x_j^0(\cdot)$, $\mu_j^0(\cdot|du)$ таким образом, чтобы согласно конструкциям, введенным при доказательстве теоремы II.14, были справедливы представления

$$f_j^0 = f_j^0(\tau_j) = \lim_{\delta_{k_j} \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_j + \delta_{k_j}} \int_P f(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau,$$

$$g_j^0 = g_j^0(\tau_j) = \lim_{\delta_{k_j} \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_j + \delta_{k_j}} \int_P g(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau.$$

Используем соотношения (8.27), равномерно выполняющиеся для всех точек (τ_j, x_j) компакта Q^* , чтобы продолжить оценки (8.48) и (8.49):

$$\left\| f_j^0 - \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P f(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right\| \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq$$

$$\leq [\beta_f((\tau_{j+1} - \tau_j), D) + L_1(1 + K^*)(\tau_{j+1} - \tau_j)] \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j), \quad (8.50)$$

$$\left| g_j^0 - \frac{1}{\delta_{k_j}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_P g(\tau_j, x_j, u) \mu_j^0(\tau|du) d\tau \right| \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq$$

$$\leq [\beta_g((\tau_{j+1} - \tau_j), D) + L_1(1 + K^0)(\tau_{j+1} - \tau_j)] \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j), \quad (8.51)$$

где согласно (8.15)

$$\beta_f((\tau_{j+1} - \tau_j), D) \downarrow 0, \quad \beta_g((\tau_{j+1} - \tau_j), D) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad \text{diam } \Delta \rightarrow 0.$$

Суммируя неравенства (8.48)–(8.51), получаем окончательную оценку для I_j (см. (8.47)):

$$I_j \leq \psi(\tau_{j+1} - \tau_j) \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j), \quad (8.52)$$

где величина $\psi = \psi(\tau_{j+1} - \tau_j)$ определяется равенством

$$\psi := \left[\frac{5}{2} L_1 \cdot (1 + L^*)(1 + K^*) \cdot (\tau_{j+1} - \tau_j) + \beta_f((\tau_{j+1} - \tau_j), D) + \beta_g((\tau_{j+1} - \tau_j), D) \right], \quad (8.53)$$

причем $\psi(\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \psi(\text{diam}(\Delta))$, $j = 0, 1, \dots, N-1(\Delta)$.

На базе (8.43), (8.45), (8.46), (8.53) получаем окончательную оценку разности:

$$0 \leq I_{t_0, x_0}(x_\Delta(\cdot)) - V(t_0, x_0) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[V(\tau_{j+1}, x_\Delta(\tau_{j+1})) - V(\tau_j, x_\Delta(\tau_j)) + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} g(t, x_\Delta(t), U^0(\tau_j, x_\Delta(\tau_j))) dt \right] \leq (T - t_0) \cdot \psi(\text{diam}(\Delta)). \quad (8.54)$$

Очевидно, $\psi(\text{diam}(\Delta)) \rightarrow 0$ при $\text{diam}(\Delta) \rightarrow 0$; следовательно,

$$0 \leq I_{t_0, x_0}(x_\Delta(\cdot)) - V(t_0, x_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \text{diam}(\Delta) \rightarrow 0. \quad (8.55)$$

Из оценки (8.55) и определений II.3, II.4 следует справедливость утверждения теоремы II.15. $\square$

ГЛАВА III

**ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК
В ТЕОРИИ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ
ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ**

Нелинейные уравнения Гамильтона—Якоби, как правило, не имеют глобальных классических решений или решений, допускающих описание, при котором используются *классические* характеристики. В настоящей и следующей главах речь идет о дальнейшем развитии метода *обобщенных* характеристик для исследования и построения глобальных негладких решений. При этом рассматривается новый класс уравнений Гамильтона—Якоби — класс сингулярно возмущенных уравнений, т.е. уравнений в частных производных первого порядка, которые содержат малый параметр в *знаменателях* коэффициентов при части импульсных переменных.

В данной главе исследуется вопрос о возможности *сингулярной аппроксимации* минимаксного решения невозмущенного уравнения Гамильтона—Якоби, т.е. об аппроксимации с помощью минимаксных решений сингулярно возмущенных уравнений, рассматриваемых в расширенном фазовом пространстве. При такой аппроксимации сингулярно возмущенный гамильтониан содержит малый параметр в знаменателях коэффициентов при соответствующих *дополнительных* импульсных переменных.

Для сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби получены достаточные условия сходимости их минимаксных решений к минимаксному решению предельного невозмущенного уравнения Гамильтона—Якоби (асимптотики). Ключевым условием сходимости является наличие аттракторов в подпространстве сингулярно возмущенных (быстрых) фазовых компонент для обобщенных характеристик Коши. Рассматриваемая сингулярная аппроксимация может трактоваться как развитие техники редукции А. Н. Тихонова [183], использующейся при построении асимптотик в сингулярно возмущенных задачах динамики.

9. СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

9.1. Постановка задачи Коши P^ε для сингулярно возмущенного уравнения Гамильтона—Якоби. Рассмотрим две задачи Коши для уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона—Якоби: невозмущенную P и сингулярно возмущенную P^ε .

Невозмущенная задача P в фазовом пространстве переменных (t, x) имеет вид

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + H(t, x, D_x u(t, x)) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9.1)$$

$$u(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9.2)$$

где $D_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Сингулярно возмущенная задача P^ε в расширенном фазовом пространстве переменных (t, x, y) имеет вид

$$\frac{\partial u^\varepsilon(t, x, y)}{\partial t} + H^\varepsilon \left(t, x, y, D_x u^\varepsilon(t, x, y), \frac{1}{\varepsilon} D_y u^\varepsilon(t, x, y) \right) = 0, \quad (t, x, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad (9.3)$$

$$u^\varepsilon(T, x, y) = \sigma^\varepsilon(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad (9.4)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Введем следующие обозначения для импульсных переменных:

$$p = D_x u^\varepsilon = \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n, \quad q = D_y u^\varepsilon = \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_k} \right) \in \mathbb{R}^k.$$

Заметим, что часть импульсных переменных, а именно, компоненты вектора q , имеют коэффициенты $1/\varepsilon$ в выражении для гамильтониана $H^\varepsilon(t, x, y, p, \varepsilon^{-1}q)$. Дополнительные фазовые переменные

$y = (y_1, \dots, y_k)$ называются также *быстрыми*, а переменные основного фазового пространства $x = (x_1, \dots, x_n)$ — *медленными*. Смысл этих терминов будет пояснен ниже.

Материал данной главы составили результаты, полученные в рамках теории минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби [149, 150, 293]. Как отмечалось в главе I, понятия *минимаксного* и *вязкостного* решений эквивалентны. Для вязкостных же решений доказана возможность аппроксимации этих решений с помощью *метода исчезающей вязкости*, т.е. с помощью предельного перехода в последовательности гладких решений уравнений в частных производных второго порядка параболического типа с малым коэффициентом при операторе Лапласа (с малой вязкостью) при стремлении этого коэффициента к нулю. Следуя терминологии теории возмущений, метод исчезающей вязкости можно трактовать как *регулярную* аппроксимацию вязкостного (и/или) минимаксного решения уравнения Гамильтона—Якоби (9.1), так как малый параметр входит в *числитель* коэффициентов перед старшими производными в регулярно возмущенном уравнении Гамильтона—Якоби. Аппроксимация рассматривается в фазовом пространстве переменных (t, x) .

В настоящей главе изучается другая возможность построения обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби (9.1) — с помощью *сингулярной* аппроксимации (9.3) в расширенном фазовом пространстве переменных (t, x, y) .

9.2. Минимаксное решение в задаче P^ε . Определение III.2 минимаксного решения, используемое ниже для класса сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби, отличается по форме от канонического (см. п. 2.3, определение I.10, а также [149, 150, 293]). Оно содержит модификацию, учитывающую появление сингулярных (быстрых) компонент у обобщенных характеристик. Рассмотрим это определение.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть S^ε — некоторое непустое множество, а M^ε — многозначное отображение

$$[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times S^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}, \quad (t, x, y, s') \mapsto M^\varepsilon(t, x, y, s'). \quad (9.5)$$

Пара $(S^\varepsilon, M^\varepsilon)$ называется *характеристическим комплексом* (или, короче, комплексом) в сингулярно возмущенной задаче P^ε (9.3)–(9.4), если выполняются следующие условия:

(1°) для любых $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и $s' \in S^\varepsilon$ множества

$$M^\varepsilon(t, x, y, s') = \{(f, h, g) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R})\}$$

непусты, выпуклы и замкнуты; компоненты $(f, h, g) \in M^\varepsilon(t, x, y, s')$ удовлетворяют неравенству

$$\|f\| + \|h\| + |g| \leq \mu^\varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \forall s' \in S^\varepsilon,$$

где $\mu^\varepsilon > 0$ — константы; многозначные отображения $(t, x, y) \mapsto M^\varepsilon(t, x, y, s')$ полунепрерывны сверху по включению для всех $s' \in S^\varepsilon$;

(2°а) для любых $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и $(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ справедливо равенство

$$\max_{s' \in S^\varepsilon} \min \left\{ \langle f, p \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle h, q \rangle - g : (f, h, g) \in M^\varepsilon(t, x, y, s') \right\} = H^\varepsilon \left(t, x, y, p, \frac{1}{\varepsilon} q \right); \quad (9.6)$$

(2°б) для любых $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и $(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ справедливо равенство

$$\min_{s' \in S^\varepsilon} \max \left\{ \langle f, p \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle h, q \rangle - g : (f, h, g) \in M^\varepsilon(t, x, y, s') \right\} = H^\varepsilon \left(t, x, y, p, \frac{1}{\varepsilon} q \right). \quad (9.7)$$

Множество всех характеристических комплексов $(S^\varepsilon, M^\varepsilon)$ обозначается символом $\mathcal{C}(H^\varepsilon)$.

Пара $(S_+^\varepsilon, M_+^\varepsilon)$ (соответственно, $(S_-^\varepsilon, M_-^\varepsilon)$) называется *верхним* (соответственно, *нижним*) характеристическим комплексом, если выполняются условия (1°) и (2°а) (соответственно, условия (1°) и (2°б)). Множества всех верхних и нижних характеристических комплексов $(S_+^\varepsilon, M_+^\varepsilon)$ и $(S_-^\varepsilon, M_-^\varepsilon)$ обозначаются символами $\mathcal{C}^\uparrow(H^\varepsilon)$ и $\mathcal{C}^\downarrow(H^\varepsilon)$, соответственно.

Для любых $(S^\varepsilon, M^\varepsilon) \in \mathcal{C}(H^\varepsilon)$ и $s' \in S^\varepsilon$ обозначим через $\text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ множество всех абсолютно непрерывных функций $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют начальному условию $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ и *характеристическому дифференциальному включению*

$$(\dot{x}(t), \varepsilon \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \in M^\varepsilon(t, x(t), y(t), s'). \quad (9.8)$$

Решения характеристических дифференциальных включений называются *обобщенными характеристиками*. Отметим, что скорости $\dot{y}(t)$ сингулярных компонент этих характеристик входят в левые части дифференциального включения (9.8) с малым коэффициентом ε .

Определение III.1. Полунепрерывная снизу функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) \mapsto v^\varepsilon(t, x, y) \in \mathbb{R}$ называется *верхним минимаксным решением* уравнения Гамильтона—Якоби (9.3), если выполняется следующее условие: для любых $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in \text{epi } v^\varepsilon$ и $s' \in S_+^\varepsilon$ существует траектория $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ такая, что

$$(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \in \text{epi } v^\varepsilon \quad \forall \tau \in [t_0, T].$$

Полунепрерывная сверху функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) \mapsto w^\varepsilon(t, x, y) \in \mathbb{R}$ называется *нижним минимаксным решением* уравнения Гамильтона—Якоби (9.3), если выполняется следующее условие: для любых $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in \text{hypo } w^\varepsilon$ и $s' \in S_-^\varepsilon$ существует траектория $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s')$ такая, что

$$(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \in \text{hypo } w^\varepsilon \quad \forall \tau \in [t_0, T].$$

Здесь $(S_+^\varepsilon, M_+^\varepsilon) \in \mathcal{C}^\uparrow(H^\varepsilon)$ (соответственно, $(S_-^\varepsilon, M_-^\varepsilon) \in \mathcal{C}^\downarrow(H^\varepsilon)$). Символы $\text{epi } v^\varepsilon$ и $\text{hypo } w^\varepsilon$ обозначают надграфик v^ε и подграфик w^ε соответственно.

Замечание III.1. Подчеркнем, что верхнее и нижнее минимаксные решения не зависят от того, какой именно допустимый характеристический комплекс, $(S_+^\varepsilon, M_+^\varepsilon) \in \mathcal{C}^\uparrow(H^\varepsilon)$ или $(S_-^\varepsilon, M_-^\varepsilon) \in \mathcal{C}^\downarrow(H^\varepsilon)$, участвует в конструкциях определения III.1 (см. [150, 293]).

Примеры различных характеристических комплексов приведены в п. 10.2 данной главы и в следующей главе, посвященной уравнениям Айзекса, возникающим в теории антагонистических дифференциальных игр. Примерами характеристических включений в задачах Коши **P** (9.1)–(9.2) и **P**^ε (9.3)–(9.4) для уравнения Айзекса могут служить известные в теории дифференциальных игр включения (так называемые «уравнения в контингенциях»), которые определяют свойства u -стабильности и v -стабильности функции цены (см., например, [73, 265]).

Определение III.2. Непрерывная функция $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) \mapsto u^\varepsilon(t, x, y) \in \mathbb{R}$ называется *минимаксным решением* уравнения Гамильтона—Якоби (9.3), если она является одновременно верхним и нижним минимаксным решением.

Замечание III.2. Отметим, что характеристические дифференциальные включения (9.8), согласованные, в силу **(2°a)** и **(2°b)**, с гамильтонианом H^ε сингулярно возмущенной задачи **P**^ε, содержат малый параметр ε в качестве коэффициента перед производной переменной $y(t)$, так что скорость этой переменной имеет порядок $1/\varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта скорость сколь угодно велика, поэтому такую сингулярно возмущенную компоненту обобщенных характеристик $(x(t), y(t), z(t))$ будем называть *быстрой* переменной, а исходную фазовую переменную $x(t)$ и компоненту $z(t)$ — *медленными* переменными.

10. ФОРМУЛИРОВКА И ОБСУЖДЕНИЕ УСЛОВИЙ СИНГУЛЯРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

10.1. Достаточные условия сходимости обобщенных решений. Задачи Коши **P** и **P**^ε рассматриваются при следующих предположениях.

(A^ε1) Функции $\sigma^\varepsilon(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и ограничены; $\sigma^\varepsilon(x) \rightarrow \sigma(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

(A^ε2) Гамильтонианы $H^\varepsilon(t, x, y, p, \varepsilon^{-1}q)$ непрерывны в области $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и удовлетворяют оценкам

$$\sup_{(t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k} \frac{|H^\varepsilon(t, x, y, 0, 0)|}{|1 + \|x\| + \|y\||} < \infty. \quad (10.1)$$

(A^ε3) Для гамильтонианов H^ε имеют место следующие условия Липшица относительно импульсных переменных (p, q) :

$$\left| H^\varepsilon \left(t, x, y, p', \frac{1}{\varepsilon} q' \right) - H^\varepsilon \left(t, x, y, p'', \frac{1}{\varepsilon} q'' \right) \right| \leq \lambda^\varepsilon(x, y) \left(\|p' - p''\| + \frac{1}{\varepsilon} \|q' - q''\| \right) \quad (10.2)$$

при любых $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(p', q'), (p'', q'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ и $\lambda^\varepsilon(x, y) = \mu^\varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|)$, где $\mu^\varepsilon > 0$ — константы (см. п. 9.2, условие **(1°)**).

(A^ε4) Для гамильтонианов H^ε выполняются следующие локальные условия Липшица по фазовым переменным (x, y) :

$$\sup_{(t', t'', x', x'', y', y'')} \frac{\left| H^\varepsilon \left(t', x', y', p, \frac{1}{\varepsilon} q \right) - H^\varepsilon \left(t'', x'', y'', p, \frac{1}{\varepsilon} q \right) \right|}{(\|x' - x''\| + \|y' - y''\|) \left(1 + \|p\| + \frac{1}{\varepsilon} (1 + \|q\|) \right)} < L^\varepsilon, \quad (10.3)$$

где $(t', x', y'), (t'', x'', y'') \in B \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, множество B — произвольный компакт, $L^\varepsilon = L^\varepsilon(B) \in (0, \infty)$ — константы.

Известно (см. [150, 293]), что условия **(A^ε1)**–**(A^ε4)** гарантируют существование, единственность и эквивалентность минимаксных и вязкостных решений $u^\varepsilon(t, x, y)$ в задаче **P^ε** при любом $\varepsilon > 0$. Аналогичные условия (при $q = 0$) используются в невозмущенной задаче **P**.

Чтобы обеспечить сходимость минимаксных решений $u^\varepsilon(t, x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, добавим следующий ряд требований к исходным данным задачи.

(A^ε5) Для любого $\varepsilon > 0$ существуют верхний и нижний характеристические комплексы (S_+, M_+^ε) и (S_-, M_-^ε) , у которых:

- множества параметров S_+ и S_- не зависят от ε ;
- многозначные отображения $(t, x, y) \mapsto M_+^\varepsilon(t, x, y, s_+)$ и $(t, x, y) \mapsto M_-^\varepsilon(t, x, y, s_-)$ липшиц-непрерывны в метрике Хаусдорфа:

$$\text{dist}(M_\pm^\varepsilon(t', x', y', s_\pm), M_\pm^\varepsilon(t'', x'', y'', s_\pm)) \leq r^\varepsilon(|t' - t''| + \|x' - x''\| + \|y' - y''\|), \quad (10.4)$$

где $(t', x', y'), (t'', x'', y'') \in B \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, множество B — произвольный компакт, $r^\varepsilon = r^\varepsilon(B) \in (0, \infty)$ — константы, символ $\text{dist}(M^1, M^2)$ обозначает хаусдорфово расстояние между множествами M^1 и M^2 ;

- предполагается, что множества $M_+^\varepsilon, M_-^\varepsilon$ непрерывно продолжимы на отрезок $\varepsilon \in [0, 1]$.

Введем в рассмотрение следующие конструкции. Положим

$$s_+ \in S_+, \quad Y_+^\varepsilon = Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) \subset \left\{ y^0 \in \mathbb{R}^k : \text{proj}_y M_+^\varepsilon(t, x, y^0, s_+) \ni 0 \right\}, \quad (10.5)$$

$$s_- \in S_-, \quad Y_-^\varepsilon = Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) \subset \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^k : \text{proj}_y M_-^\varepsilon(t, x, y_0, s_-) \ni 0 \right\}, \quad (10.6)$$

где символом $\text{proj}_y M_\pm^\varepsilon$ обозначается проекция множества $M_\pm^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ на подпространство $\mathbb{R}^k$ быстрых переменных y .

Предположим, что выполнены также следующие условия.

(A^ε6) Для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s_\pm \in S_\pm$ множества $Y_\pm^\varepsilon$ непусты, замкнуты и ограничены, т.е.

$$\|y\| \leq \chi^\varepsilon(1 + \|x\|) \quad \forall y \in Y_\pm^\varepsilon(t, x, s_\pm), \quad (10.7)$$

где χ^ε — константы, $\chi^\varepsilon \in (0, \mu^\varepsilon]$. Множества $Y_\pm^\varepsilon$ непрерывно зависят от параметра $\varepsilon \in [0, 1]$.

(A^ε7) Для любых $(t', x'), (t'', x'') \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s_\pm \in S_\pm$ имеют место следующие условия Липшица:

$$\text{dist}(Y_\pm^\varepsilon(t', x', s_\pm), Y_\pm^\varepsilon(t'', x'', s_\pm)) \leq K^\varepsilon(|t' - t''| + \|x' - x''\|), \quad (10.8)$$

где K^ε — константы, $K^\varepsilon \in (0, L^\varepsilon]$.

(A^ε8) Существуют такие множества параметров $\{s_\pm\} = S'_\pm \subset S_\pm$, что для любого компакта $D \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и компактов $D^0 \subset \mathbb{R}^k$, $D_0 \subset \mathbb{R}^k$, стесненных требованиями

$$D^0 \supset D_+^\varepsilon = \bigcup_{(t_0, x_0) \in D^1, s_+ \in S'_+} Y_+^\varepsilon(t_0, x_0, s_+) + B_k^\varepsilon,$$

$$D_0 \supset D_-^\varepsilon = \bigcup_{(t_0, x_0) \in D^1, s_- \in S'_-} Y_-^\varepsilon(t_0, x_0, s_-) + B_k^\varepsilon,$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$, можно указать величины $C^\varepsilon = C^\varepsilon(D, D^0, D_0) > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $\delta(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$;
- при любых $(t_0, x_0, y_0) \in D^1 \times (D_0 \cup D^0)$, $s_\pm \in S'_\pm$ и при всех $(x^\varepsilon_\pm(\cdot), y^\varepsilon_\pm(\cdot), z^\varepsilon_\pm(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s_\pm)$, для которых

$$\begin{aligned} z^\varepsilon_+(t) &\geq u^\varepsilon(t, x^\varepsilon_+(t), y^\varepsilon_+(t)) & \forall t \geq t_0, \\ z^\varepsilon_-(t) &\leq u^\varepsilon(t, x^\varepsilon_-(t), y^\varepsilon_-(t)) & \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

справедливы следующие соотношения, играющие ключевую роль:

$$\text{dist}(y^\varepsilon_\pm(t), Y^\varepsilon_\pm(t, x^\varepsilon_\pm(t), s_\pm) + B^\varepsilon_k) \leq C^\varepsilon \cdot \text{diam } D_0 \cup D^0 = d^\varepsilon_0 \quad \forall t \in [t_0, T], \quad (10.9)$$

$$y^\varepsilon_\pm(t) \in Y^\varepsilon_\pm(t, x^\varepsilon_\pm(t), s_\pm) + B^\varepsilon_k \quad \forall t \in [t_0 + \delta(\varepsilon), T], \quad (10.10)$$

где

$$B^\varepsilon_k = \{y \in \mathbb{R}^k : \|y\| \leq \varepsilon\}, \quad D^1 = D + B^1_{n+1}, \quad B^1_{n+1} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(t, x)\| \leq 1\}.$$

(A^ε9) Все константы в **(A^ε1)**–**(A^ε8)** и регулярные (при $q = 0$) составляющие гамильтонианов, т.е. $H^\varepsilon(t, x, y, p, 0)$, непрерывно зависят от ε и непрерывно продолжимы на отрезок $[0, 1]$.

Введем в рассмотрение «верхний» H^ε_+ и «нижний» H^ε_- гамильтонианы:

$$H^\varepsilon_+(t, x, p) = \max_{s_+ \in S'_+} \min \left\{ \langle f, p \rangle - r : (f, r) \in \text{co proj}_{x,z} M^\varepsilon_+(t, x, Y^\varepsilon_+(t, x, s_+), s_+) \right\}, \quad (10.11)$$

$$H^\varepsilon_-(t, x, p) = \max_{s_- \in S'_-} \min \left\{ \langle f, p \rangle - r : (f, r) \in \text{co proj}_{x,z} M^\varepsilon_-(t, x, Y^\varepsilon_-(t, x, s_-), s_-) \right\}, \quad (10.12)$$

где символами $\text{proj}_{x,z} M^\varepsilon_\pm$ обозначены проекции множеств $M^\varepsilon_\pm$ из пространства переменных $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ на подпространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ переменных (x, z) .

(A^ε10) Пусть для любых $(t, x, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ имеют место следующие неравенства:

$$|H^\varepsilon_-(t, x, p) - H^\varepsilon_+(t, x, p)| \leq \alpha(\varepsilon), \quad (10.13)$$

где $\alpha(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Обозначим символом $H^0(t, x, p)$ следующий предел:

$$H^0(t, x, p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H^\varepsilon_+(t, x, p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H^\varepsilon_-(t, x, p), \quad (10.14)$$

который будет играть роль гамильтониана в предельной невозмущенной задаче **P⁰** (асимптотике):

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + H^0(t, x, D_x u) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad (10.15)$$

$$u(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (10.16)$$

(A^ε11) Предположим, что для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s_+ \in S'_+$, $s_- \in S'_-$ справедливо также условие

$$Y^0_+(t, x, s_+) \cap Y^0_-(t, x, s_-) \neq \emptyset. \quad (10.17)$$

Основной результат данной главы — достаточные условия сходимости $u^\varepsilon(t, x, y)$ к $u(t, x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ — может быть представлен в виде следующего утверждения.

Теорема III.1. Пусть в сингулярно возмущенной задаче Коши **P^ε** (9.3)–(9.4), $\varepsilon \in (0, 1]$, выполняются условия **(A^ε1)**–**(A^ε11)**. Тогда минимаксные решения $u^\varepsilon(t, x, y)$ этой задачи сходятся к минимаксному решению $u(t, x)$ невозмущенной задачи Коши **P⁰** (10.15)–(10.16) при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y), \quad (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k. \quad (10.18)$$

Эта сходимость равномерна на любых компактах $D \times (D^0 \cup D_0) : D \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, D^0 \cup D_0 \in \mathbb{R}^k$.

10.2. Комментарий. Следует сделать следующие замечания по поводу достаточных условий $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{1})$ – $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{11})$.

Замечание III.3. Предположение о существовании липшиц-непрерывных многозначных отображений $(t, x, y) \mapsto M^\varepsilon(t, x, y, s')$, определяющих характеристические комплексы из условия $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{5})$, не является экзотическим при выполнении стандартных требований $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{3})$ и $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{4})$ (можно также отказаться от требования липшиц-непрерывной зависимости по t входных данных задачи и не требовать липшицевости по t от M^ε и Y^ε). Нетрудно проверить, что примером таких комплексов могут быть пары, состоящие из множества параметров

$$S_\pm = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni s_\pm = (p, q)$$

и многозначных отображений со значениями

$$M^\varepsilon(t, x, y, s_\pm) = \left\{ (f, h, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : \right. \\ \left. \|f\| \leq \lambda^\varepsilon(x, y), \|h\| \leq \lambda^\varepsilon(x, y), g = \langle f, p \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle h, q \rangle - H^\varepsilon(t, x, y, p, q) \right\}, \quad (10.19)$$

где $\lambda^\varepsilon(x, y) = \mu^\varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|)$ (см. условие $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{3})$).

Замечание III.4. Используя предположения $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{5})$, $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{9})$ о непрерывной зависимости от параметра ε регулярной части входных данных задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$, получаем, что для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s_\pm \in S'_\pm$ при $\varepsilon \downarrow 0$ сходятся в метрике Хаусдорфа множества $Y^\varepsilon_\pm(t, x, s_\pm) \rightarrow Y^0_\pm(t, x, s_\pm)$,

$$\hat{M}^\varepsilon_+(t, x, s_+) = \text{co proj}_{x,z} M^\varepsilon_+(t, x, Y^\varepsilon_+(t, x, s_+), s_+) \rightarrow \hat{M}^0_+(t, x, s_+), \quad (10.20)$$

$$\hat{M}^\varepsilon_-(t, x, s_-) = \text{co proj}_{x,z} M^\varepsilon_-(t, x, Y^\varepsilon_-(t, x, s_-), s_-) \rightarrow \hat{M}^0_-(t, x, s_-). \quad (10.21)$$

В силу этого, а также вследствие предположения $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{7})$, при любых $s_\pm \in S'_\pm$ многозначные отображения $(t, x) \mapsto \hat{M}^0_\pm(t, x, s_\pm)$ являются выпукло- и компактно-значными и удовлетворяют условию Липшица с константой

$$L^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} L^\varepsilon(1 + K^\varepsilon) > 0.$$

Из условия $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{10})$ вытекает, что комплексы $(S'_+, \hat{M}^0_+)$, $(S'_-, \hat{M}^0_-)$ являются соответственно верхним и нижним характеристическими комплексами в предельной невозмущенной задаче Коши $\mathbf{P}^0$ (10.15), (10.16), где гамильтониан $H^0(t, x, p)$ имеет представление

$$H^0(t, x, p) = \max_{s_+ \in S'_+} \min \{ \langle f, p \rangle - g : (f, g) \in \hat{M}^0_+(t, x, s_+) \} = \\ = \min_{s_- \in S'_-} \max \{ \langle f, p \rangle - g : (f, g) \in \hat{M}^0_-(t, x, s_-) \}. \quad (10.22)$$

Замечание III.5. Используя (10.19) и следуя определениям верхних и нижних характеристических комплексов, в условиях $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{8})$ – $(\mathbf{A}^\varepsilon \mathbf{10})$ можно выбрать пары

$$S'_+ = \{(p, 0) = s_+\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \\ \hat{M}^\varepsilon_+ = \hat{M}^\varepsilon_+(t, x, s_+) = \text{co proj}_{x,z} M^\varepsilon_+(t, x, Y^\varepsilon_+(t, x, (p, 0)), (p, 0)) = \\ = \left\{ (f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : \|f\| \leq \mu^\varepsilon(1 + \chi^\varepsilon)(1 + \|x\|), \right. \\ \left. g \in \langle f, p \rangle - \text{co } H^\varepsilon(t, x, Y^\varepsilon_+(t, x, (p, 0)), p, 0) \right\}$$

в качестве верхних характеристических комплексов для верхнего гамильтониана $H_+^\varepsilon(t, x, p)$ (10.11), и пары

$$\begin{aligned} S'_- &= \{(p, 0) = s_-\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \\ \hat{M}_-^\varepsilon &= \hat{M}_-^\varepsilon(t, x, s_-) = \text{co } \text{pr}_{x,z} M_-^\varepsilon(t, x, Y_-^\varepsilon(t, x, (p, 0)), (p, 0)) = \\ &= \left\{ (f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : \|f\| \leq \mu^\varepsilon(1 + \chi^\varepsilon)(1 + \|x\|), \right. \\ &\quad \left. g \in \langle f, p \rangle - \text{co } H^\varepsilon(t, x, Y_-^\varepsilon(t, x, (p, 0)), p, 0) \right\} \end{aligned}$$

в качестве нижних характеристических комплексов для нижнего гамильтониана $H_-^\varepsilon(t, x, p)$ (10.12).

Замечание III.6. Для гамильтониана $H^0(t, x, p)$ (10.14) в качестве верхнего и нижнего характеристических комплексов соответственно могут выступать пары

$$\begin{aligned} S'_+ &= \{(p, 0) = s_+\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \\ \hat{M}_+^0 &= \hat{M}_+^0(t, x, s_+) = \text{co } \text{proj}_{x,z} M_+^0(t, x, Y_+^0(t, x, (p, 0)), (p, 0)) = \\ &= \left\{ (f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : \|f\| \leq \mu^0(1 + \chi^0)(1 + \|x\|), \right. \\ &\quad \left. g \in \langle f, p \rangle - \text{co } H^0(t, x, Y_+^0(t, x, (p, 0)), p, 0) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_- &= \{(p, 0) = s_-\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \\ \hat{M}_-^0 &= \hat{M}_-^0(t, x, s_-) = \text{co } \text{proj}_{x,z} M_-^0(t, x, Y_-^0(t, x, (p, 0)), (p, 0)) = \\ &= \left\{ (f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : \|f\| \leq \mu^0(1 + \chi^0)(1 + \|x\|), \right. \\ &\quad \left. g \in \langle f, p \rangle - \text{co } H^0(t, x, Y_-^0(t, x, (p, 0)), p, 0) \right\}. \end{aligned}$$

В этом случае хорошо известные свойства характеристических комплексов вида (10.19) (см., например, [150]), замечание III.5 и условия **(A^{ε7})**–**(A^{ε10})** влекут выполнение условия **(A^{ε11})**.

Учитывая вид этих характеристических комплексов, можно конкретизировать представление (10.22) предельного гамильтониана H^0 следующим образом:

$$H^0(t, x, p) = \max_{s_+ \in S'_+} \min_{y^* \in Y^0(t, x, s_+)} H^0(t, x, y^*, p, 0) = \min_{s_- \in S'_-} \max_{y_* \in Y^0(t, x, s_-)} H^0(t, x, y_*, p, 0), \quad (10.23)$$

где $H^0(t, x, y, p, 0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H^\varepsilon(t, x, y, p, 0)$.

11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ СХОДИМОСТИ

11.1. Вспомогательные сведения. При доказательстве теоремы III.1 в дальнейшем потребуется следующий факт теории дифференциальных включений (см. [15, 195, 211]).

Пусть

$$[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} : (t, x, z) \mapsto F_i(t, x, z) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

— два многозначных отображения с выпуклыми, компактными, непустыми значениями, полунепрерывные сверху по включению. Пусть $x_i^0 \in \mathbb{R}^n$, $z_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$\begin{aligned} (\dot{x}_i(t), \dot{z}_i(t)) &\in F_i(t, x_i(t), z_i(t)), \quad t \in [t_0, T], \\ (x_i(t_0), z_i(t_0)) &= (x_i^0, z_i^0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Множество решений $(x_i(\cdot), z_i(\cdot))$ i -го дифференциального включения (11.1) обозначим символом $\text{Sol}_i(t_0, x_i^0, z_i^0)$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение III.1 (см. [195]). Для любого решения $(x_1(\cdot), z_1(\cdot)) \in \text{Sol}_1(t_0, x_1^0, z_1^0)$ существует такое решение $(x_2(\cdot), z_2(\cdot)) \in \text{Sol}_2(t_0, x_2^0, z_2^0)$, что при всех $t \in [t_0, T]$, $w = x$ и $w = z$ справедливы оценки

$$\|w_1(t) - w_2(t)\| \leq \|w_1(t_0) - w_2(t_0)\| + \int_{t_0}^t \text{dist} \left(F_1(\tau, x_1(\tau), z_1(\tau)), F_2(\tau, x_2(\tau), z_2(\tau)) \right) d\tau. \quad (11.2)$$

11.2. Доказательство теоремы III.1. Для наглядности большинство дальнейших рассуждений проводится для верхних характеристических комплексов и соответствующих множеств притяжения, фигурирующих в условии **(A^ε8)**. Аналогичные конструкции и утверждения для нижних характеристических комплексов получаются заменой индексов «+» на индексы «−», неравенств $\geq$ на неравенства $\leq$, множеств $\text{epi } v$ на множества $\text{hypo } w$.

Рассмотрим произвольные компакты D, D^0, D_0 , комплексы $(S'_\pm, M_\pm^\varepsilon)$ и соответствующие обобщенные характеристики

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s_\pm), \quad s_\pm \in S'_\pm,$$

с начальными условиями $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D^0$ или $y_0 \in D_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, а также соответствующие множества притяжения $Y_\pm^\varepsilon$, участвующие в условии **(A^ε8)**.

Напомним, что динамика обобщенных характеристик $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$ описывается дифференциальными включениями

$$\begin{aligned} (\dot{x}^\varepsilon(t), \varepsilon \dot{y}^\varepsilon(t), \dot{z}^\varepsilon(t)) &\in M_\pm^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), s_\pm), \\ (x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) &= (x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Введем в рассмотрение решения $(x_\pm^\varepsilon(\cdot), z_\pm^\varepsilon(\cdot))$ дифференциального включения

$$\begin{aligned} (\dot{x}_\pm^\varepsilon(t), \dot{z}_\pm^\varepsilon(t)) &\in \text{co proj}_{x,z} M_\pm^\varepsilon(t, x_\pm^\varepsilon(t), Y_\pm^\varepsilon(t, x_\pm^\varepsilon(t), s_\pm), s_\pm), \\ (x_\pm^\varepsilon(t_0), z_\pm^\varepsilon(t_0)) &= (x_0, z_0). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$. Обозначим множество всех решений

$$(x_\pm^\varepsilon(\cdot), z_\pm^\varepsilon(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

дифференциального включения (11.4) символом $\text{Sol}_\pm^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_\pm)$.

Лемма III.1. Для любых компактов D, D_0, D^0 из условия **(A^ε8)** существуют такие отображения

$$(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \quad \varepsilon \mapsto (\delta(\varepsilon), \rho(\varepsilon)),$$

что справедливы следующие утверждения:

- (i) $\delta(\varepsilon) \downarrow 0$, $\rho(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$;
- (ii) для любых $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_0 \cup D^0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $s' = s_\pm \in S'_\pm$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, где $T - t_0 > \alpha(\varepsilon_1)$ и для решений

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s'),$$

удовлетворяющих при всех $t \geq t_0$ неравенствам

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(t) &\geq u^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)), \quad \text{если } s' = s_+, \\ z^\varepsilon(t) &\leq u^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)), \quad \text{если } s' = s_-, \end{aligned} \quad (11.5)$$

существуют решения $(x_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t)) = (x_\pm^\varepsilon(t), z_\pm^\varepsilon(t))$,

$$(x_\pm^\varepsilon(\cdot), z_\pm^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}_\pm^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_\pm),$$

для которых при всех $t \in [t_0 + \delta(\varepsilon), T]$ справедливы оценки

$$\|x^\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\| \leq \rho(\varepsilon), \quad |z^\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)| \leq \rho(\varepsilon). \quad (11.6)$$

Доказательство. Пусть $(t_0, x_0, y_0) \in D \times D_0$, $z_0 \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \in (0, 1]$ и, согласно **(A^ε8)**, для $s_+ \in S'_+$ указаны множества $Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)$, т.е. множества притяжения быстрых компонент комплексов (S'_+, M_+^ε) . Пусть $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+)$, $s_+ \in S'_+$, т.е.

$$\begin{aligned} (\dot{x}^\varepsilon(t), \varepsilon \dot{y}^\varepsilon(t), \dot{z}^\varepsilon(t)) &\in M_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), s_+), \\ (x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) &= (x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Используя предположения **(A^ε5)**, **(A^ε7)** о липшиц-непрерывности в метрике Хаусдорфа многозначных отображений

$$(t, x, y) \mapsto M_+^\varepsilon(t, x, y, s_+), \quad (t, x) \mapsto Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), \quad s_+ \in S'_+,$$

получаем, что при всех $t \in [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]$ справедливо включение

$$M_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), s_+) \subset M_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+), s_+) + B_{n+k+1}^{\rho_1}, \quad (11.8)$$

где, согласно условию **(A^ε8)** (10.9), выполняются неравенства

$$\rho_1 \leq r^\varepsilon \cdot \text{dist}(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+)) \leq r^\varepsilon \cdot d_0^\varepsilon, \quad (11.9)$$

$r^\varepsilon = r^\varepsilon(B)$, множество B имеет вид

$$B = (D_1 \times (D_0 \cup D^0) + B_k^{d_0^\varepsilon}) \cdot \exp\left(\frac{\mu^\varepsilon T}{1 + d_0^\varepsilon}\right),$$

символ B_m^d означает замкнутый шар радиуса d в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Из (11.8), (11.9) следует, что динамика компонент $x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)$ обобщенных характеристик (11.7) может быть описана с помощью дифференциальных включений

$$\begin{aligned} (\dot{x}^\varepsilon(t), \dot{z}^\varepsilon(t)) &\in \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon\left(t, x^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+), s_+\right) + B_{n+1}^{\rho_1}, \\ (x^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) &= (x_0, z_0). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Рассмотрим теперь решение

$$(x_+^\varepsilon(\cdot), z_+^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}_+^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$$

дифференциального включения

$$\begin{aligned} (\dot{x}_+^\varepsilon(t), \dot{z}_+^\varepsilon(t)) &\in \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon\left(t, x_+^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), s_+), s_+\right), \\ (x_+^\varepsilon(t_0), z_+^\varepsilon(t_0)) &= (x_0, z_0). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Используя снова предположения **(A^ε5)**, **(A^ε7)** о липшиц-непрерывности в метрике Хаусдорфа многозначных отображений $M_+^\varepsilon(\cdot)$ и $Y_+^\varepsilon(\cdot)$, получаем соотношения, аналогичные (11.8), (11.9):

$$\begin{aligned} \hat{M}_1^\varepsilon(t) &= \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon\left(t, x_+^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), s_+), s_+\right) \subset \\ &\subset \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon\left(t, x^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+), s_+\right) + B_{n+1}^{\rho_2} = \hat{M}_2^\varepsilon(t) + B_{n+1}^{\rho_2}, \end{aligned} \quad (11.12)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_2 &\leq L^\varepsilon \left[\|x^\varepsilon(t) - x_+^\varepsilon(t)\| + \text{dist}\left(Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+), Y_+^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), s_+)\right) \right] \\ &\leq L^\varepsilon (1 + K^\varepsilon) (\|x^\varepsilon(t) - x_+^\varepsilon(t)\|). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Оценим теперь расстояние между решениями $(x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$ дифференциального включения (11.10) и решениями $(x_+^\varepsilon(\cdot), z_+^\varepsilon(\cdot))$ дифференциального включения (11.11). Используем для этого

утверждение III.1, в котором, с учетом (11.8), (11.12), (11.13), положим

$$\begin{aligned} (x_1(\cdot), z_1(\cdot)) &= (x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)), \quad (x_2(\cdot), z_2(\cdot)) = (x_+^\varepsilon(\cdot), z_+^\varepsilon(\cdot)), \\ F_1(t, x, z) &= \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon(t, x, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), s_+) + B_{n+1}^{\rho_1}, \\ F_2(t, x, z) &= \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon(t, x, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), s_+), \\ F_1(t, x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t)) &= \hat{M}_2^\varepsilon(t) + B_{n+1}^{\rho_1}, \\ F_2(t, x_+^\varepsilon(t), z_+^\varepsilon(t)) &= \hat{M}_1^\varepsilon(t) \subset \hat{M}_2^\varepsilon(t) + B_{n+1}^{\rho_2} \end{aligned}$$

и выберем $x_+^\varepsilon(\cdot), z_+^\varepsilon(\cdot) \in \text{Sol}_+^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \|x^\varepsilon(t) - x_+^\varepsilon(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \text{dist} \left(F_1(t, x^\varepsilon(\tau), z^\varepsilon(\tau)), F_2(t, x_+^\varepsilon(\tau), z_+^\varepsilon(\tau)) \right) d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \text{dist} \left(\hat{M}_2^\varepsilon(\tau) + B_{n+1}^{\rho_1}, \hat{M}_2^\varepsilon(\tau) + B_{n+1}^{\rho_2} \right) d\tau \leq \int_{t_0}^t C_1 \|x^\varepsilon(\tau) - x_+^\varepsilon(\tau)\| + C_2 d\tau, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$ — константы.

Применяя лемму Гронуолла [12, 21] и неравенство (11.9), получаем, что на отрезке $[t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]$ для оцениваемого расстояния справедливы неравенства

$$\|x^\varepsilon(t) - x_+^\varepsilon(t)\| \leq \frac{C_2}{C_1} \left(e^{C_1 \delta(\varepsilon)} - 1 \right) = \varphi(\varepsilon),$$

где $C_1 = L^\varepsilon(1 + K^\varepsilon) > 0$, $C_2 = \rho_1 > 0$ и $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следовательно, для разности компонент z решений дифференциальных включений (11.10) и (11.11) имеем на отрезке $[t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]$ оценку

$$\begin{aligned} |z^\varepsilon(t) - z_+^\varepsilon(t)| &\leq \int_{t_0}^t \text{dist} \left(F_1(t, x^\varepsilon(\tau), z^\varepsilon(\tau)), F_2(t, x_+^\varepsilon(\tau), z_+^\varepsilon(\tau)) \right) d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t C_1 \|x^\varepsilon(\tau) - x_+^\varepsilon(\tau)\| + C_2 d\tau \leq (C_1 \varphi(\varepsilon) + C_2) \cdot \delta(\varepsilon) = \varphi_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Используя предположение **(A^ε8)** (10.10), получаем, что при $t \in [t_0 + \delta(\varepsilon), T]$ в дифференциальном включении (11.10), описывающем динамику $x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t)$, величина ρ_1 равна нулю. Теперь согласно утверждению III.1 подберем решение $x_+^\varepsilon(t), z_+^\varepsilon(t)$ дифференциального включения (11.11) на отрезке $[t_0 + \delta(\varepsilon), T]$ таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} &\|x^\varepsilon(t) - x_+^\varepsilon(t)\| \leq \|x^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - x_+^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon))\| + \\ &+ \int_{t_0 + \delta(\varepsilon)}^t \text{dist} \left(F_1(t, x^\varepsilon(\tau), z^\varepsilon(\tau)), F_2(t, x_+^\varepsilon(\tau), z_+^\varepsilon(\tau)) \right) d\tau \leq \\ &\leq \|x^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - x_+^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon))\| + \int_{t_0 + \delta(\varepsilon)}^t \text{dist} \left(\hat{M}_2^\varepsilon(\tau), \hat{M}_2^\varepsilon(\tau) + B_{n+1}^{\rho_2} \right) d\tau \leq \\ &\leq \|x^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - x_+^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon))\| + \int_{t_0 + \delta(\varepsilon)}^t C_1 \|x^\varepsilon(\tau) - x_+^\varepsilon(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Применяя снова лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\|x^\varepsilon(t) - x_+^\varepsilon(t)\| \leq \|x^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - x_+^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon))\| \cdot e^{C_1(t-t_0+\delta(\varepsilon))} \leq \varphi(\varepsilon) \cdot e^{C_1 T} = \psi(\varepsilon), \quad (11.14)$$

где $\psi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Разность компонент z оцениваем при $t \in [t_0 + \delta(\varepsilon), T]$ неравенствами

$$\begin{aligned} |z^\varepsilon(t) - z_+^\varepsilon(t)| &\leq |z^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon)) - z_+^\varepsilon(t_0 + \delta(\varepsilon))| + \\ &+ \int_{t_0 + \delta(\varepsilon)}^t \text{dist} \left(F_1(t, x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t)), F_2(t, x_+^\varepsilon(t), z_+^\varepsilon(t)) \right) d\tau \leq \varphi_1(\varepsilon) + \int_{t_0 + \delta(\varepsilon)}^t C_1 \|x^\varepsilon(\tau) - x_+^\varepsilon(\tau)\| d\tau, \end{aligned}$$

т.е.

$$|z^\varepsilon(t) - z_+^\varepsilon(t)| \leq \varphi_1(\varepsilon) + C_1 T \psi(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon), \quad (11.15)$$

где $\psi_1(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Суммируя вышесказанное, в частности, замечание о том, что приведенные выше рассуждения применимы как для верхних, так и для нижних характеристических комплексов, фигурирующих в условии **(A^ε8)**, приходим к выводу о том, что величина $\rho(\varepsilon)$ в оценках (11.6) может быть выбрана равной $\psi_1(\varepsilon)$ из предыдущих оценок (11.14), (11.15). Лемма III.1 доказана. $\square$

Замечание III.7. Обозначим через $G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, s')$ область достижимости системы (11.7), $s' \in S'_\pm$, в момент времени $t = \tau$, т.е.

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, s') &= \left\{ \forall (x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), z^\varepsilon(\tau)) : \right. \\ &(\dot{x}^\varepsilon(t), \varepsilon \dot{y}^\varepsilon(t), \dot{z}^\varepsilon(t)) \in M_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), s_+), \quad t \in [t_0, \tau], \\ &\left. (x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) = (x_0, y_0, z_0) \right\}, \end{aligned}$$

а через $\hat{G}_\varepsilon^\rho(t_0, \tau, x_0, z_0, s')$ — замкнутую ρ -окрестность области достижимости $\hat{G}_\varepsilon$ системы (11.11):

$$\begin{aligned} \hat{G}_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, z_0, s') &= \left\{ \forall (x_+^\varepsilon(\tau), z_+^\varepsilon(\tau)) : \right. \\ &(\dot{x}_+^\varepsilon(t), \dot{z}_+^\varepsilon(t)) \in \text{co proj}_{x,z} M_+^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), s_+), s_+), \quad t \in [t_0, \tau], \\ &\left. (x_+^\varepsilon(t_0), z_+^\varepsilon(t_0)) = (x_0, z_0) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда условие (11.6) можно переписать в виде

$$\text{proj}_{x,z} G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, s') \cap \hat{G}_\varepsilon^\rho(t_0, \tau, x_0, z_0, s') \neq \emptyset,$$

где величина $\rho = \rho(\varepsilon)$ одна и та же для всех $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_0 \cup D^0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $s' = s_+ \in S'_\pm$ и определяется согласно лемме III.1 как $\rho = \rho(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} v_\varepsilon^+(t, x, s_+) &= \min_{y \in Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) + B_k^\varepsilon} v^\varepsilon(t, x, y), \\ w_\varepsilon^-(t, x, s_-) &= \max_{y \in Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) + B_k^\varepsilon} w^\varepsilon(t, x, y), \end{aligned} \quad (11.16)$$

где $v^\varepsilon(t, x, y)$ — верхнее минимаксное решение сингулярно возмущенной задачи **P^ε**, $w^\varepsilon(t, x, y)$ — нижнее минимаксное решение задачи **P^ε**.

Конструкции типа (11.16) и соответствующая техника слабых пределов при $\varepsilon \rightarrow 0$ были введены Бэрлсом и Пертамом в работе [220] и широко используются в теории вязкостных решений (см. [250]).

Лемма III.2. Для любых $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_0 \cup D^0$, $s_\pm \in S'_\pm$, $z_+^0 \geq v_\varepsilon^+(t_0, x_0, s_+)$, $z_-^0 \leq w_\varepsilon^-(t_0, x_0, s_-)$, $\tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon), T]$, $\rho = \rho(\varepsilon)$, где $(\delta(\varepsilon), \rho(\varepsilon))$ выбраны согласно лемме III.1, существуют точки

$$(x_+^*, z_+^*) \in \hat{G}_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_+^0, s_+), \quad (x_-^*, z_-^*) \in \hat{G}_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_-^0, s_-)$$

такие, что

$$(\tau, x_+^*, z_+^*) \in \text{epi } v_\varepsilon^+, \quad (\tau, x_-^*, z_-^*) \in \text{hypo } w_\varepsilon^-.$$

Доказательство. Фиксируем значения параметров $s_+ \in S_+$, $s_- \in S_-$ и выберем точки $y_\pm^0 \in Y_\pm^\varepsilon(t_0, x_0, s_\pm) + B_k^\varepsilon$ из условий

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(t_0, x_0, y_+^0) &= \min_{y \in Y_+^\varepsilon(t_0, x_0, s_+) + B_k^\varepsilon} v^\varepsilon(t_0, x_0, y) = v_\varepsilon^+(t_0, x_0, s_+), \\ w^\varepsilon(t_0, x_0, y_-^0) &= \min_{y \in Y_-^\varepsilon(t_0, x_0, s_-) + B_k^\varepsilon} w^\varepsilon(t_0, x_0, y) = w_\varepsilon^-(t_0, x_0, s_-). \end{aligned}$$

Согласно условиям леммы $z_+^0 \geq v_\varepsilon^+(t_0, x_0, s_+)$; поэтому $(t_0, x_0, y_+^0, z_+^0) \in \text{epi } v^\varepsilon$. Аналогично, из предположения $z_-^0 \leq w_\varepsilon^-(t_0, x_0, s_-)$ следует, что $(t_0, x_0, y_-^0, z_-^0) \in \text{hypo } w^\varepsilon$.

Поскольку функция v^ε — верхнее решение задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$ и $s_+ \in S'_+$, а функция w^ε — нижнее решение задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$ и $s_- \in S'_-$, то существуют точки $(x_\pm^*, y_\pm^*, z_\pm^*) \in G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_\pm^0, z_\pm^0, s_\pm)$ такие, что

$$z_+^* \geq v^\varepsilon(\tau, x_+^*, y_+^*), \quad z_-^* \leq w^\varepsilon(\tau, x_-^*, y_-^*). \quad (11.17)$$

Из оценок (11.14), (11.15) леммы III.1 вытекает включение

$$(x_\pm^*, z_\pm^*) \in \hat{G}_\varepsilon^{\rho(\varepsilon)}(t_0, \tau, x_0, z_\pm^0, s_\pm).$$

Поскольку согласно условию (10.10) из предположения **(A^ε8)** вытекает включение

$$y_\pm^* \in Y_\pm^\varepsilon(\tau, x_\pm^*, s_\pm) + B_k^\varepsilon \quad \text{при} \quad \tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon), \theta],$$

то согласно определению функций $v_\varepsilon^+(\cdot)$, $w_\varepsilon^-(\cdot)$ справедливы неравенства

$$v^\varepsilon(\tau, x_+^*, y_+^*) \geq v_\varepsilon^+(\tau, x_+^*, s_+), \quad w^\varepsilon(\tau, x_-^*, y_-^*) \leq w_\varepsilon^-(\tau, x_-^*, s_-).$$

Из этих неравенств и (11.17) получаем $z_+^* \geq v_\varepsilon^+(\tau, x_+^*, s_+)$, т.е. $(\tau, x_+^*, z_+^*) \in \text{epi } v_\varepsilon^+$, и $z_-^* \leq w_\varepsilon^-(\tau, x_-^*, s_-)$, т.е. $(\tau, x_-^*, z_-^*) \in \text{hypo } w_\varepsilon^-$. Лемма III.2 доказана. $\square$

Лемма III.3. Функция

$$v^h(t, x) = \inf_{s_+ \in S'_+} \liminf_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} v_\varepsilon^+(t', x, s_+) \quad (11.18)$$

является верхним решением задачи $\mathbf{P}^0$, а функция

$$w^h(t, x) = \sup_{s_- \in S'_-} \limsup_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_\varepsilon^-(t', x', s_-) \quad (11.19)$$

является нижним решением задачи $\mathbf{P}^0$.

Доказательство. Рассмотрим множество $D \in \text{comp}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, $\text{int } D \neq \emptyset$, и множества $D^0 \cup D_0 \subset \text{comp } \mathbb{R}^k$, фигурирующие в условиях **(A^ε8)**. Пусть

$$\begin{aligned} (S'_+, M_+^\varepsilon) &\in \mathcal{C}^\uparrow(H^\varepsilon), \quad (S'_-, M_-^\varepsilon) \in \mathcal{C}^\downarrow(H^\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0, \\ (S'_+, \hat{M}_+^0) &\in \mathcal{C}^\uparrow(H^0), \quad (S'_-, \hat{M}_-^0) \in \mathcal{C}^\downarrow(H^0) \end{aligned}$$

— комплексы, выбранные из условий (10.20), (10.21) и замечания III.4.

Из доказательства леммы III.1 вытекает, что для любых $\varepsilon > 0$, $z_\pm^0 \in Z_0 \subset \text{comp } \mathbb{R}$ определены такие компактные множества $\hat{D}_\pm \subset \text{comp } \mathbb{R}^n$, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \hat{D}_\pm &\supset \text{cl} \left\{ \bigcup_{\substack{s_\pm \in S'_\pm \\ (t_0, x_0) \in D \\ y_0 \in D^0 \cup D_0}} \text{proj}_x G_\varepsilon(t_0, T, x_0, y_0, z_\pm^0, s_\pm) \right\}, \\ \hat{D}_\pm &\supset \text{cl} \left\{ \bigcup_{\substack{s_\pm \in S'_\pm \\ (t_0, x_0) \in D}} \text{proj}_x \hat{G}_0(t_0, T, x_0, z_\pm^0, s_\pm) \right\}. \end{aligned}$$

Из определения функций $v^\sharp$ и $w^\sharp$ следует их локальная ограниченность:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \hat{D}_+} \sigma(x) &\leq v^\sharp(t, x) \leq \max_{x \in \hat{D}_+} \sigma(x) \quad \forall (t, x) \in D, \\ \min_{x \in \hat{D}_-} \sigma(x) &\leq w^\sharp(t, x) \leq \max_{x \in \hat{D}_-} \sigma(x) \quad \forall (t, x) \in D, \end{aligned}$$

и выполнение краевого условия

$$v^\sharp(T, x) = w^\sharp(T, x) = \sigma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Методом от противного нетрудно показать, что функция $v^\sharp$ полунепрерывна снизу, а функция $w^\sharp$ полунепрерывна сверху.

Для определенности докажем сначала утверждение этой леммы относительно функции $v^\sharp$ (11.18).

Выберем произвольно $(t_0, x_0) \in \text{int } D$, $z_+^0 \geq v^\sharp(t_0, x_0)$, $\tau \in (t_0, T]$, $s_+ \in S'_+$. Покажем, что существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}_+^0(t_0, x_0, z_+^0, s_+)$ дифференциального включения (11.4), где $\varepsilon = 0$, такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in \text{epi } v^\sharp$, или, что то же самое,

$$\{\tau\} \times \hat{G}_0(t_0, \tau, x_0, z_+^0, s_+) \cap \text{epi } v^\sharp \neq \emptyset, \quad (11.20)$$

где $\hat{G}_0(\dots, s_+)$ — область достижимости комплекса (S'_+, M_+^0) .

Рассмотрим сначала случай $z_+^0 > v^\sharp(t_0, x_0)$.

Согласно (11.18), существуют значение параметра $s'_+ \in S'_+$ и последовательность $\{\varepsilon_k, t_k, x_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что

$$\begin{aligned} z_+^0 &\geq v_{\varepsilon_k}^+(t_k, x_k, s'_+) = v^\varepsilon(t_k, x_k, y'_k), \\ y'_k &\in Y_+^{\varepsilon_k}(t_k, x_k, s'_+) + B^{\varepsilon_k}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k &= 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, x_k) = (t_0, x_0). \end{aligned}$$

Можно полагать, что $(t_k, x_k) \in \text{int } D$ и $t_k + \delta(\varepsilon) < \tau$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, $y'_k \in D^0$ при всех $k = 1, 2, \dots$

Используя схему доказательства и результаты леммы III.2, получаем, что для любого фиксированного значения параметра $s_+ \in S_+$ существует последовательность

$$(x_+^k, z_+^k) \in \text{proj}_{x,z} G_{\varepsilon_k}(t_k, \tau, x_k, y'_k, z_+^0, s_+)$$

такая, что

$$(x_+^k, z_+^k) \in \hat{G}_{\varepsilon_k}^{\rho^k}(t_k, \tau, x_k, z_+^0, s_+), \quad (\tau, x_+^k, z_+^k) \in \text{epi } v_{\varepsilon_k}^+.$$

Здесь согласно лемме III.1 $\rho^k = \rho(\varepsilon_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по всем $s_+ \in S_+$. Без ограничения общности рассуждений можно принять, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_+^k, z_+^k) = (x_+^*, z_+^*).$$

Отметим, что $(x_+^*, z_+^*) \in \hat{G}_0(t_0, \tau, x_0, z_+^0, s_+)$. Поскольку $z_+^k \geq v_{\varepsilon_k}^+(\tau, x_+^k, s_+)$, то согласно определению функции $v^\sharp$ получаем, что $z_+^* \geq v^\sharp(\tau, x_+^*)$. Итак, соотношение (11.20) доказано для произвольного значения параметра $s_+ \in S_+$ в случае $z_+^0 > v^\sharp(t_0, x_0)$.

В случае же $z_+^0 \geq v^\sharp(t_0, x_0)$ рассмотрим последовательность $z_k = z_+^0 + 1/k$. Поскольку $z_k > v^\sharp(t_0, x_0)$, то из доказанного выше следует, что

$$\{\tau\} \times \hat{G}_0(t_0, \tau, x_0, z_k, s_+) \cap \text{epi } v^\sharp \neq \emptyset \quad \forall s_+ \in S_+.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, используя замкнутость множества $\text{epi } v^\sharp$ и полунепрерывность сверху отображения $z \mapsto \hat{G}_0(t_0, \tau, x_0, z, s_+)$, опять получаем (11.20).

Рассмотрим $\varepsilon > 0$, w^ε — нижние решения задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$ и конструкцию функции $w^\sharp$. Доказательство второй половины данной леммы аналогично доказательству соотношения (11.20) и сводится к замене символов «+» на «-», верхних комплексов на нижние, знаков неравенства $\geq$ на $\leq$ и $\text{epi } v$ на $\text{hypo } w$.

Из полунепрерывности отображения $(t_0, x_0) \mapsto \hat{G}_0(t_0, T, x_0, z_{\pm}^0, s_{\pm})$ и замкнутости $\hat{G}_0$, ерi v , нуру w следует, что соотношения (11.20) справедливы для всех точек (t_0, x_0) множества D . Произвольность выбора множества D обуславливает справедливость утверждений леммы III.3. $\square$

Пусть $u^\varepsilon(t, x, y)$, $(\varepsilon > 0)$ — минимаксное решение задачи $\mathbf{P}^\varepsilon$. Положим в (11.16), (11.18) и (11.19) $v^\varepsilon = w^\varepsilon = u^\varepsilon$. Определим соответствующие функции $v^\natural$ и $w^\natural$. Согласно построению, $w^\natural \geq v^\natural$. С другой стороны, поскольку $v^\natural$ — верхнее решение задачи $\mathbf{P}^0$, а $w^\natural$ — нижнее решение этой задачи, то, как известно [293], справедливо неравенство $w^\natural \leq v^\natural$. Поэтому $v^\natural = w^\natural = u$, где u — минимаксное решение задачи $\mathbf{P}^0$ (напомним, что минимаксное решение можно определить как функцию, которая одновременно является верхним и нижним решением).

Итак, получаем

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sup_{s_- \in S_-} \limsup_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} \max_{y \in Y_-^\varepsilon(t', x', s_-) + B_k^\varepsilon} u^\varepsilon(t', x', y) = \\ &= \inf_{s_+ \in S_+} \liminf_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} \min_{y \in Y_-^\varepsilon(t', x', s_+) + B_k^\varepsilon} u^\varepsilon(t', x', y). \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует (см. (10.18))

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y), \quad (t, x) \in D, \quad y \in (D^0 \cup D_0).$$

Оценки, полученные в лемме III.1, позволяют заключить, что эта сходимость равномерна на любых выбранных согласно **(A^ε8)** компактах $D \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и $D_0 \cup D^0 \subset \mathbb{R}^k$. Теорема III.1 доказана. $\square$

12. ПРИМЕРЫ

Пример III.1. Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Коши $\mathbf{P}^\varepsilon$, в которой выполняются достаточные условия, представленные в теореме III.1. Гамильтониан H^ε в этой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} H^\varepsilon \left(t, x, y_1, y_2, s, \frac{1}{\varepsilon} \zeta_1, \frac{1}{\varepsilon} \zeta_2 \right) &= \langle f(t, x, y_1, y_2), s \rangle + g(t, x, y_1, y_2) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left[k_1(y_1) \cdot \zeta_1 + k_2(y_2) \cdot \zeta_2 + \min_{\alpha \in A} (\zeta_1 \cdot \alpha) + \max_{\beta \in B} (\zeta_2 \cdot \beta) \right], \end{aligned} \quad (12.1)$$

где фазовыми переменными являются $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, а импульсными переменными являются $s \in \mathbb{R}^2$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$ и

$$k_1(y_1) = \begin{cases} -y_1, & \text{если } y_1 \geq 0, \\ -2y_1, & \text{если } y_1 < 0, \end{cases} \quad k_2(y_2) = \begin{cases} -4y_2, & \text{если } y_2 \geq 0, \\ -y_2, & \text{если } y_2 < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую дифференциальную игру $\mathbf{DG}^\varepsilon$, для которой уравнение Айзекса имеет гамильтониан, совпадающий с (12.1). В этой игре x играет роль медленной фазовой переменной, а y — роль быстрой переменной. Динамика управляемой системы описывается следующим образом:

$$\dot{x} = f(t, x, y_1, y_2), \quad \varepsilon \dot{y}_1 = k_1(y_1) + \alpha, \quad \varepsilon \dot{y}_2 = k_2(y_2) + \beta.$$

Ограничения на допустимые значения управлений первого и второго игроков $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ имеют вид

$$\alpha \in A = [\alpha_0, \alpha^0] \ni 0, \quad \beta \in B = [\beta_0, \beta^0] \ni 0$$

и задан функционал платы Больца:

$$\begin{aligned} I_{t_0, x_0, y_0}^\varepsilon(x(\cdot), y(\cdot), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)) &= \sigma(x(T; t_0, x_0, y_0)) + \\ &+ \int_{t_0}^T g(t, x(t), y_1(t; t_0, y_{10}, \alpha(\cdot)), y_2(t; t_0, y_{20}, \beta(\cdot))) dt. \end{aligned}$$

Предполагается, что функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ непрерывны, функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ липшицевы по переменным t, x, y_1, y_2 с константой $L_* > 0$. Также предполагается выполненным условие Айзекса.

Здесь верхний и нижний характеристические комплексы могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} S'_+ &= B, \quad s_+ = \beta, \quad S'_- = A, \quad s_- = \alpha, \\ M_+^\varepsilon(t, x, y_1, y_2, \beta) &= \text{co} \left\{ f(t, x, y_1, y_2), \frac{1}{\varepsilon}[k_1(y_1) + A], \frac{1}{\varepsilon}[k_2(y_2) + \beta], -g(t, x, y_1, y_2) \right\}, \\ M_-^\varepsilon(t, x, y_1, y_2, \alpha) &= \text{co} \left\{ f(t, x, y_1, y_2), \frac{1}{\varepsilon}[k_1(y_1) + \alpha], \frac{1}{\varepsilon}[k_2(y_2) + B], -g(t, x, y_1, y_2) \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующие множества притяжения (аттракторы) $Y_+^\varepsilon = Y_+$ и $Y_-^\varepsilon = Y_-$ имеют вид

$$Y_+ = Y_+^\varepsilon(t, x, \beta) = \left\{ (y_1, y_2) : y_1 \in \bigcup_{\alpha \in A} \xi_1(\alpha)\alpha, \quad y_2 = \xi_2(\beta)\beta \right\}, \quad (12.2)$$

$$Y_- = Y_-^\varepsilon(t, x, \alpha) = \left\{ (y_1, y_2) : y_2 \in \bigcup_{\beta \in B} \xi_2(\beta)\beta, \quad y_1 = \xi_1(\alpha)\alpha \right\}, \quad (12.3)$$

где

$$\xi_1(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \geq 0, \\ 1/2, & \text{если } \alpha \leq 0, \end{cases} \quad \xi_2(\beta) = \begin{cases} 1/4, & \text{если } \beta \geq 0, \\ 1, & \text{если } \beta \leq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $r_\beta^\varepsilon[t]$ расстояние между быстрой переменной $y_+^\varepsilon(t)$ и множеством притяжения $Y_+^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), \beta)$ (см. (12.2)) и оценим скорость изменения функции $r_\beta^\varepsilon[t]$, $\beta \in B$, вдоль решения $y_+^\varepsilon(t) = (y_1(t), y_2(t))$ дифференциальных включений

$$\varepsilon \dot{y}_1(t) \in [k_1(y_1(t)) + A], \quad \varepsilon \dot{y}_2(t) = [k_2(y_2(t)) + \beta].$$

Обозначим через $r_\alpha^\varepsilon[t]$ расстояние между быстрой переменной $y_-^\varepsilon(t)$ и множеством притяжения $Y_-^\varepsilon(t, x_-^\varepsilon(t), \alpha)$ (см. (12.3)) и оценим скорость изменения функции $r_\alpha^\varepsilon[t]$, $\alpha \in A$, вдоль решения $y_-^\varepsilon(t) = (y_1(t), y_2(t))$ дифференциальных включений

$$\varepsilon \dot{y}_1(t) \in [k_1(y_1(t)) + \alpha], \quad \varepsilon \dot{y}_2(t) = [k_2(y_2(t)) + B].$$

Получаем следующие значения параметров в условии **(A^ε8)**:

$$\begin{aligned} C^\varepsilon &= C = 1 + |\alpha^0 - \alpha_0| + |\beta^0 - \beta_0|, \\ \delta(\varepsilon) &= \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon \cdot (\text{diam}(D_0 \cup D^0) + C)), \\ \delta(\varepsilon) &< \varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{\text{diam}(D_0 \cup D^0) + C}, T - t_0, 1 \right\}, \\ \delta(\varepsilon) &\downarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Согласно теореме III.1, гамильтониан H^0 в предельной невозмущенной задаче Коши $\mathbf{P}^0$ описывается формулой

$$\begin{aligned} H^0(t, x, s) &= \min_{p \in P} \max_{q \in Q} \left[\langle f(t, x, p, q), s \rangle + g(t, x, p, q) \right] = \\ &= \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \left[\langle f(t, x, p, q), s \rangle + g(t, x, p, q) \right], \end{aligned} \quad (12.4)$$

где компактные множества P и Q определены следующим образом:

$$P = \bigcup_{\alpha \in A} \xi_1(\alpha)\alpha, \quad Q = \bigcup_{\beta \in B} \xi_2(\beta)\beta. \quad (12.5)$$

В качестве верхних характеристических комплексов в невозмущенной задаче $\mathbf{P}^0$ могут быть выбраны следующие комплексы:

$$\begin{aligned} s_+ &= \xi_2(\beta)\beta = \hat{q}, \quad S_+ = Q, \\ M_+^0(t, x, \hat{q}) &= \text{co} \left\{ (f(t, x, p, \hat{q}), -g(t, x, p, \hat{q})) : p \in P \right\}. \end{aligned}$$

Нижние характеристические комплексы в невозмущенной задаче $\mathbf{P}^0$ могут иметь вид

$$s_- = \xi_1(\alpha)\alpha = \hat{p}, \quad S_- = P,$$

$$M_-^0(t, x, \hat{p}) = \text{co} \left\{ (f(t, x, \hat{p}, q), -g(t, x, \hat{p}, q)) : q \in Q \right\}.$$

Предельная задача $\mathbf{P}^0$ может быть рассмотрена как задача Коши для уравнения Айзекса с гамильтонианом H^0 (12.4) и краевым условием

$$u(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Этой задаче соответствует следующая невозмущенная дифференциальная игра $\mathbf{DG}^0$, в которой динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, p, q),$$

где $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовые переменные, допустимые значения управлений игроков $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ограничены:

$$p \in P, \quad q \in Q;$$

компактные множества P и Q определены соотношениями (12.5). Предельный функционал платы имеет вид

$$I_{t_0, x_0}^0(x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, p(\cdot), q(\cdot))) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), p(t), q(t)) dt.$$

Пример III.2. Рассмотрим теперь сингулярно возмущенную задачу Коши $\mathbf{P}^\varepsilon$, в которой не выполняются достаточные условия, представленные в теореме III.1. (Этот пример рассмотрен также в монографии [26].) Гамильтониан H^ε в этой задаче имеет вид

$$H^\varepsilon \left(t, x, y_1, y_2, s, \frac{1}{\varepsilon}\zeta_1, \frac{1}{\varepsilon}\zeta_2 \right) = -(y_1)^2 \cdot s + \frac{1}{\varepsilon}(\zeta_1 \cdot y_2) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\zeta_2(\omega^2 y_1 + k \cdot y_2) + \min_{|u| \leq 1} \left[u^2 \cdot s + \frac{1}{\varepsilon}(\zeta_2 \cdot u) \right]; \quad (12.6)$$

где фазовыми переменными являются $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, а импульсными переменными являются $s \in \mathbb{R}^1$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления $\mathbf{DG}^\varepsilon$, для которой уравнение Беллмана имеет гамильтониан, совпадающий с (12.6). При этом x играет роль медленной фазовой переменной, а y — роль быстрой переменной. Динамика управляемой системы описывается следующим образом:

$$\dot{x} = -(y_1)^2 + u^2, \quad (12.7)$$

$$\varepsilon \dot{y}_1 = y_2, \quad \varepsilon \dot{y}_2 = -\omega^2 \cdot y_1 - k \cdot y_2 + u. \quad (12.8)$$

Допустимые значения управляющего параметра $u \in \mathbb{R}^1$ стеснены ограничениями $|u| \leq 1$.

Пусть функционал платы имеет равный нулю интегрант в (3.2). Таким образом, пусть минимизируется функционал платы Майера

$$I_{t_0, x_0, y_0}^\varepsilon(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \sigma \left(x(T; t_0, x_0, y_0, u(\cdot)), y(T; t_0, x_0, y_0, u(\cdot)) \right),$$

где терминальная функция платы имеет вид

$$\sigma(x, y) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть константы ω и k из (12.8) удовлетворяют неравенствам $\omega > 1$, $k\omega < 1$. В качестве верхнего комплекса можно рассмотреть следующий комплекс, не зависящий от параметра s' :

$$S'_+ = \emptyset, \quad M_+^\varepsilon(t, x, y_1, y_2) = \text{co} \left\{ -(y_1)^2 + u^2; y_2; -\omega^2 \cdot y_1 - k \cdot y_2 + u : u \in P \right\}. \quad (12.9)$$

Согласно (10.5) отвечающее этому комплексу множество притяжения (аттрактор) $Y_+^\varepsilon = Y_+$ должно иметь вид

$$Y_+ = Y_+^\varepsilon(t, x,) = \left\{ (y_1, y_2) : y_2 = 0; y_1 \in \frac{[-1, 1]}{\omega^2} \right\}. \quad (12.10)$$

Выберем следующее допустимое управление:

$$u^\varepsilon(t) = \cos\left(\frac{\omega}{\varepsilon}t\right). \quad (12.11)$$

Рассмотрим движения $(y_1^\varepsilon(t), y_2^\varepsilon(t))$ быстрой подсистемы (12.8), порождаемые этим управлением. Непосредственно проверяется, что эти периодические движения имеют вид

$$y_1^\varepsilon(t) = \frac{1}{\omega k} \sin\left(\frac{\omega}{\varepsilon}t\right), \quad y_2^\varepsilon(t) = \frac{1}{k} \cos\left(\frac{\omega}{\varepsilon}t\right).$$

Отметим, что движения $(x^\varepsilon(t), y_1^\varepsilon(t), y_2^\varepsilon(t))$ полной системы (12.7), (12.8), порождаемые этим управлением (12.11), можно трактовать как верхние обобщенные характеристики уравнения Беллмана с гамильтонианом вида (12.6). А именно, эти движения являются также решениями верхнего характеристического дифференциального включения, отвечающего комплексу (12.9).

Очевидно, что периодическое движение $y_2^\varepsilon(t)$ не стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, быстрые компоненты $(y_1^\varepsilon(t), y_2^\varepsilon(t))$ упомянутых выше верхних обобщенных характеристик не стремятся к аттрактору Y_+ (12.10). Таким образом, ключевое соотношение (10.10) в достаточном условии **(A^ε8)** не выполняется.

Отметим, что методика построения асимптотик в задачах динамической оптимизации для колебательных систем получила в последнее время существенное развитие в работах В. Гайцгори.

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Областью приложения результатов, полученных в предыдущей главе, являются, в частности, задачи оптимального управления и дифференциальные игры, в которых динамика управляемых систем содержит «быстрые» (сингулярные) и «медленные» (регулярные) составляющие. Настоящая глава посвящена таким приложениям к игровым задачам управления.

Центральная роль в теории дифференциальных игр принадлежит понятию функции цены игры [73, 265]. Эта функция доставляет равновесные значения оптимальных гарантированных результатов двух игроков-антагонистов в любой начальной позиции. Она является также базовым элементом конструкций позиционных законов управления, разрешающих задачи этих игроков. Известно [149], что функция цены дифференциальной игры совпадает с минимаксным решением соответствующего уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса.

В данной главе изучаются вопросы сходимости функций цены сингулярно возмущенных дифференциальных игр с функционалом платы типа Больца при стремлении скорости быстрых переменных к бесконечности (или, что то же самое, — параметра сингулярности к нулю). Получены эффективные достаточные условия сходимости функций цены сингулярно возмущенных дифференциальных игр к функциям цены предельных невозмущенных дифференциальных игр (асимптотик) [301]. При этом используется специфика уравнения Айзекса и обобщение техники редукции (см. главу III и [20, 183, 280]) для описания этих асимптотик. Применение теории минимаксных решений позволяет строить динамику и функционал платы асимптотик в фазовом подпространстве медленных (регулярных) переменных.

13. ПОЗИЦИОННАЯ ИГРОВАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ $\mathbf{G}^\varepsilon$

Математические модели динамических систем с «быстрыми» и «медленными» движениями часто возникают в различных прикладных и теоретических задачах механики, физики, техники, биологии, экономики и т. д.

В данной главе рассматриваются сингулярно возмущенные дифференциальные игры $\mathbf{G}^\varepsilon$, в которых динамика конфликтно управляемой системы описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x} = f^\varepsilon(t, x, y, u, v), \quad \varepsilon \dot{y} = h^\varepsilon(t, x, y, u, v, \alpha, \beta), \quad (13.1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр сингулярности, $t \in [0, T]$ — время, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, x — «медленная» (регулярная) переменная, y — «быстрая» (сингулярная) переменная. Термины «медленная переменная» и «быстрая переменная» подчеркивают разницу между динамикой x и y : скорость $\dot{y}$ имеет порядок $1/\varepsilon$, поэтому y может изменяться во времени сколь угодно быстро.

Предполагается, что известны множества допустимых значений управлений первого игрока (u, α) и управлений второго игрока (v, β) , а именно,

$$\begin{aligned} u \in P \in \text{comp } \mathbb{R}^{m_1}, \quad \alpha \in A \in \text{comp } \mathbb{R}^{r_1}, \\ v \in Q \in \text{comp } \mathbb{R}^{m_2}, \quad \beta \in B \in \text{comp } \mathbb{R}^{r_2}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Рассматриваются игры с фиксированным моментом окончания T и функционалом платы типа Больца:

$$I_{t,x,y}^\varepsilon(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), \alpha(\cdot), v(\cdot), \beta(\cdot)) = \sigma^\varepsilon(x(T)) + \int_t^T g^\varepsilon(\tau, x(\tau), y(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad (13.3)$$

где $(x(\cdot), y(\cdot)) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ — траектории уравнения (13.1), стартующие из точки $(x(t), y(t)) = (x, y)$, $t \in [0, T]$, под воздействием измеримых управлений

$$(u(\cdot), v(\cdot), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)) : [t, T] \rightarrow P \times Q \times A \times B.$$

Первый игрок стремится минимизировать функционал платы, а второй игрок заинтересован в максимальной величине I^ε .

Предполагается, что при любом $\varepsilon > 0$ существует функция цены [73, 265] дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ (см. (13.1)–(13.3)):

$$(t, x, y) \mapsto \text{Val}^\varepsilon(t, x, y) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}.$$

Точное определение этого понятия приведено ниже в п. 14.1.

Известно, что функция цены $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ совпадает с минимаксным (см. [149, 150, 293]) и/или вязкостным (см. [240, 241]) обобщенным решением следующей задачи Коши $\mathbf{P}^\varepsilon$:

$$\frac{\partial \text{Val}^\varepsilon}{\partial t} + H^\varepsilon\left(t, x, y, D_x \text{Val}^\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} D_y \text{Val}^\varepsilon\right) = 0, \quad (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad (13.4)$$

$$\text{Val}^\varepsilon(T, x, y) = \sigma^\varepsilon(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad (13.5)$$

где векторы $p = D_x \text{Val}^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $q = D_y \text{Val}^\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ — градиенты функции $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ относительно x и y , а именно,

$$D_x \text{Val}^\varepsilon = \left(\frac{\partial \text{Val}^\varepsilon}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \text{Val}^\varepsilon}{\partial x_n} \right), \quad D_y \text{Val}^\varepsilon = \left(\frac{\partial \text{Val}^\varepsilon}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \text{Val}^\varepsilon}{\partial y_k} \right),$$

и $H^\varepsilon(t, x, y, p, q/\varepsilon)$ — гамильтониан задачи.

Гамильтониан имеет следующий специфический вид:

$$\begin{aligned}
 H^\varepsilon(t, x, y, p, \frac{1}{\varepsilon}q) &= \\
 &= \min_{\substack{u \in P \\ \alpha \in A}} \max_{\substack{v \in Q \\ \beta \in B}} \left[\langle f^\varepsilon(t, x, y, u, v), p \rangle + g^\varepsilon(t, x, y, u, v) + \frac{1}{\varepsilon} \langle h^\varepsilon(t, x, y, u, v, \alpha, \beta), q \rangle \right] = \\
 &= \max_{\substack{v \in Q \\ \beta \in B}} \min_{\substack{u \in P \\ \alpha \in A}} \left[\langle f^\varepsilon(t, x, y, u, v), p \rangle + g^\varepsilon(t, x, y, u, v) + \frac{1}{\varepsilon} \langle h^\varepsilon(t, x, y, u, v, \alpha, \beta), q \rangle \right].
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Условие равновесия (13.6) называется условием Айзекса, а уравнение (13.4) называется уравнением Айзекса [259] для дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ (13.1)–(13.3). Оно является *сингулярно возмущенным* (СВ) уравнением типа Гамильтона—Якоби, так как содержит слагаемые с коэффициентами $1/\varepsilon$, где ε — малый параметр сингулярности.

Целью данной главы является обоснование эффективных достаточных условий сходимости $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и построение предельного уравнения Гамильтона—Якоби для (13.4). Важным результатом при этом является построение асимптотик, т.е. нахождение предельных невозмущенных дифференциальных игр, для которых соответствующее уравнение Айзекса совпадает с предельным уравнением Гамильтона—Якоби, а его минимаксное и/или вязкостное решение совпадает с пределом функций цены $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$.

14. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

14.1. Функция цены дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$. Фиксируем значение параметра $\varepsilon \in (0, 1)$.

Приведем определение функции цены позиционной дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ (13.1)–(13.3) (см. [73, 265]), где в качестве допустимых позиционных стратегий игроков рассматриваются произвольные функции:

- (i) $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) \mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y)) \in P \times A \subset \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{r_1}$ — для первого (минимизирующего функционал платы I^ε),
- (ii) $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) \mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y)) \in Q \times B \subset \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^{r_2}$ — для второго игрока (максимизирующего I^ε).

Фиксируем позиционные стратегии (возможно разрывные):

$$\begin{aligned}
 [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) &\mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y)), \\
 [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (t, x, y) &\mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y)).
 \end{aligned}$$

Пусть $t_0 \in [0, T]$ и выбрано разбиение

$$\Delta := \{t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_{N+1} = T\}$$

интервала $[t_0, T]$ с диаметром

$$\text{diam } \Delta := \max\{(\tau_{i+1} - \tau_i) : 0 \leq i \leq N\}.$$

Определение IV.1. Пошаговым движением системы (13.1)

$$\begin{aligned}
 x_\Delta(\cdot) &= x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, y_0, U, \alpha, v(\cdot), \beta(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\
 y_\Delta(\cdot) &= x_\Delta(\cdot; t_0, x_0, y_0, U, \alpha, v(\cdot), \beta(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k,
 \end{aligned}$$

порожденным позиционной стратегией первого игрока $(t, x, y) \mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y))$, измеримым управлением противника $(v(\cdot), \beta(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow Q \times B$ и разбиением Δ , называется ломаная Эйлера, определенная на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, как траектория системы (13.1) с кусочно постоянным управлением первого игрока, равным

$$\begin{aligned}
 U_\Delta[t] &= u_i = U(\tau_i, x_\Delta(\tau_i), y_\Delta(\tau_i)), \\
 \alpha_\Delta[t] &= \alpha_i = \alpha(\tau_i, x_\Delta(\tau_i), y_\Delta(\tau_i)),
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Delta(t) &= f^\varepsilon(t, x_\Delta(t), y_\Delta(t), u_i, v(t)), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}); \\ \varepsilon \dot{y} &= h^\varepsilon(t, x_\Delta(t), y_\Delta(t), u_i, v(t), \alpha_i, \beta(t)), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1})\end{aligned}$$

при заданном начальном условии $x_\Delta(t_0) = x_0$, $y_\Delta(t_0) = y_0$.

Определение IV.2. Решением системы (13.1)

$$(x(\cdot), y(\cdot)) = (x(\cdot; t_0, x_0, y_0, U, \alpha), y(\cdot; t_0, x_0, y_0, U, \alpha)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

порожденным позиционной стратегией (обратной связью) первого игрока $(t, x, y) \mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y))$, называется равномерный предел последовательности пошаговых движений $\{(x_{\Delta_k}(\cdot), y_{\Delta_k}(\cdot))\}_1^\infty$ при $\text{diam } \Delta_k \rightarrow 0$, где ломаные Эйлера $(x_{\Delta_k}(\cdot), y_{\Delta_k}(\cdot))$ определяются также измеримыми управлениями противника $(v_k(\cdot), \beta_k(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow Q \times B$, $k = 1, 2, \dots$

Аналогично определяются пошаговые движения и решения системы (13.1), порожденные позиционными стратегиями (обратными связями) второго игрока $(t, x, y) \mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y))$.

Определение IV.3. Решением системы (13.1)

$$(x(\cdot), y(\cdot)) = (x(\cdot; t_0, x_0, y_0, U, \alpha), y(\cdot; t_0, x_0, y_0, U, \alpha)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

порожденным позиционной стратегией второго игрока $(t, x, y) \mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y))$, называется равномерный предел последовательности пошаговых движений $\{(x_{\Delta_k}(\cdot), y_{\Delta_k}(\cdot))\}_1^\infty$ при $\text{diam } \Delta_k \rightarrow 0$, где ломаные Эйлера $(x_{\Delta_k}(\cdot), y_{\Delta_k}(\cdot))$ определяются также измеримыми управлениями противника $(u_k(\cdot), \alpha_k(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow Q \times B$, $k = 1, 2, \dots$

Множество всех решений $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (13.1), порожденных обратной связью $(t, x, y) \mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y))$ первого игрока из начальной точки (t_0, x_0, y_0) , обозначается символом $\text{Sol}(t_0, x_0, y_0, U, \alpha)$.

Множество всех решений $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (13.1), порожденных обратной связью $(t, x, y) \mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y))$ второго игрока из начальной точки (t_0, x_0, y_0) , обозначается символом $\text{Sol}(t_0, x_0, y_0, V, \beta)$.

Определение IV.4. Гарантированный результат $\Gamma_I(t_0, x_0, y_0, U, \alpha)$ позиционной стратегии первого игрока $(t, x, y) \mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y))$ в игре $\mathbf{G}^\varepsilon$ из начальной точки (t_0, x_0, y_0) определяется следующим образом:

$$\Gamma_I(t_0, x_0, y_0, U, \alpha) = \limsup_{\substack{\text{diam } \Delta_k \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} I_{t_0, x_0, y_0}^\varepsilon(x_{\Delta_k}(\cdot), y_{\Delta_k}(\cdot), U_{\Delta_k}[\cdot], \alpha_{\Delta_k}[\cdot], v_k(\cdot), \beta_k(\cdot)).$$

Гарантированный результат $\Gamma_{II}(t_0, x_0, y_0, V, \beta)$ позиционной стратегии второго игрока $(t, x, y) \mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y))$ в игре $\mathbf{G}^\varepsilon$ из начальной точки (t_0, x_0, y_0) определяется следующим образом:

$$\Gamma_{II}(t_0, x_0, y_0, V, \beta) = \liminf_{\substack{\text{diam } \Delta_k \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} I_{t_0, x_0, y_0}^\varepsilon(x_{\Delta_k}(\cdot), y_{\Delta_k}(\cdot), u_k(\cdot), \alpha_k(\cdot), V_{\Delta_k}[\cdot], \beta_{\Delta_k}[\cdot]).$$

Определение IV.5. Оптимальный гарантированный результат $\Gamma_I^0(t_0, x_0, y_0)$ первого игрока в игре $\mathbf{G}^\varepsilon$ из начальной точки (t_0, x_0, y_0) определяется следующим образом:

$$\Gamma_I^0(t_0, x_0, y_0) = \sup_{(U, \alpha)} \Gamma_I(t_0, x_0, y_0, U, \alpha),$$

где точная верхняя грань берется по всем допустимым позиционным стратегиям $(t, x, y) \mapsto (U(t, x, y), \alpha(t, x, y))$.

Оптимальный гарантированный результат $\Gamma_{II}^0(t_0, x_0, y_0)$ второго игрока в игре $\mathbf{G}^\varepsilon$ из начальной точки (t_0, x_0, y_0) определяется следующим образом:

$$\Gamma_{II}^0(t_0, x_0, y_0) = \inf_{(V, \beta)} \Gamma_{II}(t_0, x_0, y_0, V, \beta),$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым позиционным стратегиям $(t, x, y) \mapsto (V(t, x, y), \beta(t, x, y))$.

Определение IV.6. Равновесное значение

$$\text{Val}^\varepsilon(t_0, x_0, y_0) = \Gamma_I^0(t_0, x_0, y_0) = \Gamma_{II}^0(t_0, x_0, y_0)$$

называется *ценой позиционной дифференциальной игры* $\mathbf{G}^\varepsilon$ (13.1)–(13.3) в точке (t_0, x_0, y_0) .

Отображение $(t_0, x_0, y_0) \mapsto \text{Val}^\varepsilon(t_0, x_0, y_0) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией цены* позиционной дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ (см. [73, 265]).

14.2. Характеристические комплексы в задаче $\mathbf{P}^\varepsilon$. Как было отмечено в предыдущей главе, определение минимаксного решения, применяемое для исследования сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби, отличается от канонического, приведенного во введении, в п. 2.1 (см. также [149, 150, 293]). Специфика модифицированного определения проявляется в описании сингулярных (быстрых) компонент у обобщенных характеристик Коши.

Подчеркнем еще раз, что определения III.1, III.2 верхнего, нижнего и минимаксного решений, приведенные в предыдущей главе, не зависят от конкретного вида комплексов

$$(S, M^\varepsilon) \in C(H^\varepsilon), \quad (S_+, M_+^\varepsilon) \in C^\uparrow(H^\varepsilon), \quad (S_-, M_-^\varepsilon) \in C^\downarrow(H^\varepsilon),$$

которые участвуют в их конструкциях. Тем самым, эти определения допускают свободу выбора характеристических комплексов и создают возможность выбирать эти комплексы наиболее удобными, адекватными тем или иным задачам, связанным с исследованиями минимаксных решений.

Эта возможность используется в данной главе при доказательстве достаточных условий сходимости функций цены сингулярно возмущенных дифференциальных игр и при описании предельных невозмущенных игр. Этот материал существенно использует структуру конкретного вида комплексов для задачи Коши $\mathbf{P}^\varepsilon$ (13.4), (13.5), (13.6) а именно,

$$\begin{aligned} S_+ &= Q \times B \ni s_+ = (v^*, \beta^*), \\ M_+^\varepsilon(t, x, y, s_+) &= \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, y, P, v^*), h^\varepsilon(t, x, y, P, v^*, A, \beta^*), -g^\varepsilon(t, x, y, P, v^*) \right\}, \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned} S_- &= P \times A \ni s_- = (u_*, \alpha_*), \\ M_-^\varepsilon(t, x, y, s_-) &= \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, y, u_*, Q), h^\varepsilon(t, x, y, u_*, Q, \alpha_*, B), -g^\varepsilon(t, x, y, u_*, Q) \right\}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Комплексы типа (14.1) и (14.2) широко применяются в теории позиционных дифференциальных игр [73, 265] при исследовании так называемых свойств *u-стабильности* и *v-стабильности* функции цены. Как отмечалось выше, функция цены дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ является единственным непрерывным минимаксным решением краевой задачи Коши (13.4), (13.5) для уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса с сингулярно возмущенным гамильтонианом (13.6).

15. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Предположим, что исходные данные сингулярно возмущенных дифференциальных игр $\mathbf{G}^\varepsilon$ (13.1)–(13.3) удовлетворяют следующим условиям:

(B1) Функции $\sigma^\varepsilon(x)$, $f^\varepsilon(t, x, y, u, v)$, $g^\varepsilon(t, x, y, u, v)$, $h^\varepsilon(t, x, y, u, v, \alpha, \beta)$ определены и непрерывны относительно всех переменных и параметра ε на множествах

$$\varepsilon \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad \alpha \in A, \quad \beta \in B.$$

(B2) Имеет место следующее условие подлинейного роста:

$$\|f^\varepsilon(t, x, y, u, v)\| + \|h^\varepsilon(t, x, y, u, v, \alpha, \beta)\| + |g^\varepsilon(t, x, y, u, v)| \leq \lambda^\varepsilon(x, y),$$

где $\lambda^\varepsilon(x, y) = \mu^\varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|)$ и $\mu^\varepsilon > 0$ — константа.

(B3) На любом компакте $\bar{D} \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ функции $f^\varepsilon(t, x, y, u, v)$, $g^\varepsilon(t, x, y, u, v)$, $h^\varepsilon(t, x, y, u, v, \alpha, \beta)$ удовлетворяют условию Липшица относительно переменных (t, x, y) с константами $L^\varepsilon = L^\varepsilon(\bar{D}) > 0$ равномерно по $(u, v, \alpha, \beta) \in P \times Q \times A \times B$.

(B4) Для любых $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ выполняется условие Айзекса (13.6).

Известно (см. [73, 265]), что условия **(B1)–(B4)** гарантируют существование функции цены $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ в игре $\mathbf{G}^\varepsilon$ при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1]$. Чтобы обеспечить сходимость этих функций цены $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, введем следующие дополнительные условия и конструкции.

Используем далее характеристические комплексы (14.1), (14.2), где роль параметров s_+ и s_- играют значения управлений игроков, а именно,

$$s_+ = (v^*, \beta^*) \in Q \times B = S_+, \quad s_- = (u_*, \alpha_*) \in P \times A = S_-.$$

Определим в подпространстве быстрых переменных $\mathbb{R}^k$ следующие множества Y^ε , Y_+^ε , Y_-^ε «быстрых» корней $\bar{y}$:

$$Y^\varepsilon = Y^\varepsilon(t, x, u, v, \alpha, \beta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^k : h^\varepsilon(t, x, \bar{y}, u, v, \alpha, \beta) = 0\}, \quad (15.1)$$

$$\forall s_+ = (v^*, \beta^*) : \quad Y_+^\varepsilon = Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) = \bigcup_{\substack{u \in P \\ \alpha \in A}} Y^\varepsilon(t, x, u, v^*, \alpha, \beta^*), \quad (15.2)$$

$$\forall s_- = (u_*, \alpha_*) : \quad Y_-^\varepsilon = Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) = \bigcup_{\substack{v \in Q \\ \beta \in B}} Y^\varepsilon(t, x, u_*, v, \alpha_*, \beta). \quad (15.3)$$

Предположим, что выполнены также следующие условия.

(B5) Для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$ имеем

$$Y^\varepsilon(t, x, u, v, \alpha, \beta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^k : h^\varepsilon(t, x, \bar{y}, u, v, \alpha, \beta) = 0\} \neq \emptyset.$$

(B6) Для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s_\pm \in S_\pm$ множества $Y_\pm^\varepsilon(t, x, s_\pm)$ ограничены, т.е.

$$\|y\| \leq \chi^\varepsilon(1 + \|x\|) \quad \forall y \in Y_\pm^\varepsilon(t, x, s_\pm),$$

где χ^ε — константы, $\chi^\varepsilon \in (0, \mu^\varepsilon]$.

(B7) Для любых $(t', x') \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $(t'', x'') \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $s_\pm \in S_\pm$ имеют место следующие условия Липшица:

$$\text{dist}(Y_\pm^\varepsilon(t', x', s_\pm), Y_\pm^\varepsilon(t'', x'', s_\pm)) \leq \mathcal{K}^\varepsilon(|t' - t''| + \|x' - x''\|),$$

где $\mathcal{K}^\varepsilon > 0$ — константы; символ $\text{dist}(Y^1, Y^2)$ обозначает расстояние в метрике Хаусдорфа между множествами Y^1 и Y^2 .

Рассмотрим произвольные компактные множества $D \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $D_\pm^0 \subset \mathbb{R}^k$ начальных состояний $(t_0, x_0) \in D$, $y_\pm^0 \in D_\pm^0$, удовлетворяющие включению

$$D_+^0 \cup D_-^0 \supset \bigcup_{\varepsilon \in [0, 1]} \bigcup_{(t_0, x_0) \in D^1} \bigcup_{s^* \in S^*} Y^\varepsilon(t_0, x_0, s^*) + B_k^\varepsilon,$$

где $D^1 = D + B_{n+1}$, B_{n+1} — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^{n+1}$, B_k^ε — замкнутый шар радиуса ε в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Для любых $(t_0, x_0) \in D$, $y_\pm^0 \in D_\pm^0$, $z_0 \in \mathbb{R}$ рассмотрим множества обобщенных характеристик $(x_\pm^\varepsilon(\cdot), y_\pm^\varepsilon(\cdot), z_\pm^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}^\varepsilon(t_0, x_0, y_\pm^0, z_0, s_\pm)$, отвечающих комплексам $(S_\pm, M_\pm^\varepsilon)$ (14.1), (14.2). Чтобы обеспечить экспоненциальную сходимость быстрых компонент $y_\pm^\varepsilon(\cdot)$ к соответствующим множествам $Y_\pm^\varepsilon$, предположим, что выполнены следующие условия.

(B8) Для множеств D , $D_\pm^0$ существуют числа $\kappa_\pm^\varepsilon = \kappa_\pm^\varepsilon(D, D_\pm^0) > 0$ такие, что

$$\max_{\substack{u \in P \\ \alpha \in A}} \left\langle y - y^0, h^\varepsilon(t, x, y, u, v^*, \alpha, \beta^*) - h^\varepsilon(t, x, y^0, u, v^*, \alpha, \beta^*) \right\rangle \leq -\kappa_+^\varepsilon \text{dist}^2(y, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+))$$

для любых значений параметров $(v^*, \beta^*) = s_+ \in S_+ = Q \times B$ и любых точек $(t, x) \in D^1 \cdot \varphi_+^\varepsilon$, $y^0 \in Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)$, $y \in (D_+^0 \cup B_k^{\varphi_+^\varepsilon})$. Аналогично,

$$\max_{\substack{v \in Q \\ \beta \in B}} \left\langle y - y_0, h^\varepsilon(t, x, y, u_*, v, \alpha_*, \beta) - h^\varepsilon(t, x, y_0, u_*, v, \alpha_*, \beta) \right\rangle \leq -\kappa_-^\varepsilon \text{dist}^2(y, Y_-^\varepsilon(t, x, s_-))$$

для любых значений параметров $(u_*, \alpha_*) = s_- \in S_- = P \times A$ и любых точек $(t, x) \in D^1 \cdot \varphi_-^\varepsilon$, $y_0 \in Y_-^\varepsilon(t, x, s_-)$, $y \in (D_-^0 \cup B_k^{\varphi_-^\varepsilon})$, где

$$\varphi_\pm^\varepsilon = \varphi_\pm^\varepsilon(D_\pm^0) = 2\mathcal{K}^\varepsilon(1 + \mathcal{M}^\varepsilon \cdot \exp \mathcal{M}^\varepsilon) + \left(\frac{\mathcal{M}^\varepsilon}{T} + L^\varepsilon d_\pm^0 \right) \times \left[T + \frac{T^2}{2} \cdot \exp \mathcal{M}^\varepsilon \right],$$

$$d_\pm^0 = \text{diam } D_\pm^0, \quad \mathcal{M}^\varepsilon = \mu^\varepsilon(1 + \chi^\varepsilon)T.$$

Символ $\text{diam } D^0$ означает диаметр множества $D^0 \in \text{comp } \mathbb{R}^k$, т.е.

$$\text{diam } D^0 = \max_{\substack{w' \in D^0 \\ w'' \in D^0}} \|w' - w''\|.$$

(B9) Константы μ^ε , L^ε , χ^ε , $\mathcal{K}^\varepsilon$, κ^ε зависят непрерывно от параметра $\varepsilon \in [0, 1]$.

Введем в рассмотрение *верхний* H_+^ε и *нижний* H_-^ε гамильтонианы с помощью формул

$$H_+^\varepsilon(t, x, s) = \max_{s_+ = (v^*, \beta^*) \in S_+} \min_{(f, g) \in F_+^\varepsilon(t, x, s_+)} [\langle f, s \rangle + g],$$

где

$$F_+^\varepsilon(t, x, s_+) = \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), P, v^*), \quad g^\varepsilon(t, x, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), P, v^*) \right\},$$

и

$$H_-^\varepsilon(t, x, s) = \min_{s_- = (u_*, \alpha_*) \in S_-} \max_{(f, g) \in F_-^\varepsilon(t, x, s_-)} [\langle f, s \rangle + g],$$

где

$$F_-^\varepsilon(t, x, s_-) = \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, Y_-^\varepsilon(t, x, s_-), u_*, Q), \quad g^\varepsilon(t, x, Y_-^\varepsilon(t, x, s_-), u_*, Q) \right\}.$$

Предположим, что выполнено следующее условие.

(B10) Для любых $(t, x, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|H_+^\varepsilon(t, x, s) - H_-^\varepsilon(t, x, s)| \leq \delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Обозначим через $H^0(t, x, s)$ величину

$$H^0(t, x, s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_+^\varepsilon(t, x, s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_-^\varepsilon(t, x, s),$$

которая будет играть роль гамильтониана в предельной невозмущенной задаче $\mathbf{P}^0$

$$\frac{\partial \text{Val}^0(t, x)}{\partial t} + H^0(t, x, D_x \text{Val}^0(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad (15.4)$$

с краевым условием

$$\text{Val}^0(T, x) = \sigma^0(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sigma^\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (15.5)$$

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема IV.1. Пусть в сингулярно возмущенной дифференциальной игре $\mathbf{G}^\varepsilon$ (13.1)–(13.3) выполнены предположения **(B1)**–**(B10)**. Тогда на любом компактном множестве

$$\bar{D} = D \times (D_+^0 \cup D_-^0) \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

функции цены $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся равномерно к минимаксному решению $\text{Val}^0(t, x)$ задачи (15.4)–(15.5), которое совпадает с оптимальными гарантированными позиционными результатами игроков $\Gamma_I^0(t, x)$, $\Gamma_{II}^0(t, x)$ в следующих предельных дифференциальных играх $\mathbf{G}_I^0$, $\mathbf{G}_{II}^0$ с функционалом платы вида

$$I_{t_0, x_0}^0(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot), y(\cdot)) = \sigma^0(x(T)) + \int_{t_0}^T g^0(\tau, x(\tau), y(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad (15.6)$$

где $x(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — траектория уравнения

$$\dot{x}(t) = f^0(t, x(t), y(t), u(t), v(t)), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [0, T], \quad (15.7)$$

порожденная следующими измеримыми управлениями:

- (i) $(u(\cdot), \alpha(\cdot)) : [0, T] \rightarrow P \times A$ для первого игрока и $(v(\cdot), y(\cdot)) : [0, T] \rightarrow Q \times Y_-^0$ для второго игрока в игре $\mathbf{G}_I^0$, причем при почти всех $t \in [t_0, T]$ имеем

$$y(t) \in Y_-^0 = \bigcup_{\beta \in B} Y^0(t, x(t), u(t), v(t), \alpha(t), \beta) \quad (15.8)$$

$(\Gamma_I^0(t, x) — оптимальный гарантированный позиционный результат первого игрока в игре $\mathbf{G}_I^0$;$

- (ii) $(v(\cdot), \beta(\cdot)) : [0, T] \rightarrow Q \times B$ для второго игрока и $(u(\cdot), y(\cdot)) : [0, T] \rightarrow P \times Y_+^0$ для первого игрока в игре $\mathbf{G}_{II}^0$, причем при почти всех $t \in [t_0, T]$ имеем

$$y(t) \in Y_+^0 = \bigcup_{\alpha \in A} Y^0(t, x(t), u(t), v(t), \alpha, \beta(t)) \quad (15.9)$$

$(\Gamma_{II}^0(t, x) — оптимальный гарантированный позиционный результат второго игрока в игре $\mathbf{G}_{II}^0$.$

В (15.6), (15.7) функции $f^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$, $\sigma^0(\cdot)$ получены предельным переходом по $\varepsilon \rightarrow 0$ из исходных данных сингулярно возмущенной дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$. Множества $Y^0(t, x, u, v, \alpha, \beta)$ являются пределами множеств $Y^\varepsilon(t, x, u, v, \alpha, \beta)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ в метрике Хаусдорфа.

Заметим, что предельные невозмущенные игры $\mathbf{G}_i^0$ (15.6), (15.7), $i = I, II$, нестандартны, так как их динамика определена в редуцированном фазовом пространстве медленных движений, а возможности игроков расширены с помощью управлений $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Однако эти управления подчинены нестационарным геометрическим ограничениям $y(t) \in Y_\pm^0$, причем множества $Y_\pm^0 \subset \mathbb{R}^k$ зависят как от текущего фазового состояния системы $(t, x(t))$, так и от управления противника.

Предельные невозмущенные игры $\mathbf{G}_i^0$ (15.6), (15.7), $i = I, II$, называются *асимптотиками* для сингулярно возмущенной дифференциальной игры $\mathbf{G}^\varepsilon$ (13.1)–(13.3). Единственное минимаксное решение предельной задачи Коши $\mathbf{P}^0$ для невозмущенного уравнения Гамильтона—Якоби (15.4), (15.5) совпадает и с оптимальным гарантированным позиционным результатом $\Gamma_I^0(t, x)$ первого игрока в игре $\mathbf{G}_I^0$, и с оптимальным гарантированным позиционным результатом $\Gamma_{II}^0(t, x)$ второго игрока в игре $\mathbf{G}_{II}^0$.

Таким образом, предельное уравнение Гамильтона—Якоби (15.4) может быть истолковано как уравнение Айзекса для асимптотик $\mathbf{G}_i^0$, (15.6)–(15.7), $i = I, II$.

16. Достаточные условия сходимости функций цены сингулярно возмущенных игр

В данном разделе приведено доказательство теоремы IV.1, содержащей достаточные условия сходимости функций цены сингулярно возмущенных дифференциальных игр и структуру предельных невозмущенных игр. Это доказательство базируется на результатах, изложенных в предыдущей главе и в работах [173, 174], где изучались вопросы сходимости минимаксных решений нелинейных сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби общего вида (13.4).

16.1. Свойства множеств Y_+^ε , Y_-^ε . Нетрудно видеть, что из условий **(B1)**, **(B6)**, **(B7)**, **(B10)** вытекает, что при любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и

$$s_+ = (v^*, \beta^*) \in S_+ = Q \times B, \quad s_- = (u_*, \alpha_*) \in S_- = P \times A$$

множества Y^ε , Y_+^ε , Y_-^ε компактны и существуют следующие пределы в метрике Хаусдорфа при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$Y^\varepsilon(t, x, u, v, \alpha, \beta) \rightarrow Y^0(t, x, u, v, \alpha, \beta), \quad Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) \rightarrow Y_+^0(t, x, s_+), \quad Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) \rightarrow Y_-^0(t, x, s_-).$$

Предельные множества $Y^0(t, x, u, v, \alpha, \beta)$, $Y_+^0(t, x, s_+)$, $Y_-^0(t, x, s_-)$ также компактны, а многозначные отображения

$$(t, x) \mapsto Y^0(t, x, u_*, v^*, \alpha_*, \beta^*), \quad (t, x) \mapsto Y_+^0(t, x, s_+), \quad (t, x) \mapsto Y_-^0(t, x, s_-)$$

равномерно липшицевы относительно всех значений параметров

$$s_+ = (v^*, \beta^*) \in Q \times B = S_+, \quad s_- = (u_*, \alpha_*) \in P \times A = S_-.$$

Рассмотрим произвольную непрерывную ограниченную функцию $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и зафиксируем произвольные значения параметров $s_+ \in S_+$, $s_- \in S_-$ и $\varepsilon > 0$. Из предположений **(B8)** (см. [236, 293]) следует, что

- (а) множества $Y_+^\varepsilon(t, x(t), s_+) + B_k^\varepsilon$ сильно инвариантны относительно дифференциальных включений

$$\varepsilon \dot{y}^0(t) \in \text{co} \left\{ h^\varepsilon(t, x(t), y^0(t), P, v^*, A, \beta^*) \right\};$$

- (б) множества $Y_-^\varepsilon(t, x(t), s_-) + B_k^\varepsilon$ сильно инвариантны относительно дифференциальных включений

$$\varepsilon \dot{y}_0(t) \in \text{co} \left\{ h^\varepsilon(t, x(t), y_0(t), u_*, Q, \alpha_*, B) \right\}.$$

Для краткости изложения далее все исследования приводятся для *верхних* множеств Y_+^ε и *верхних* характеристических дифференциальных включений (14.1). Подобными же рассуждениями получаются аналогичные заключения и для *нижних* множеств Y_-^ε и *нижних* характеристических включений (14.2).

Пусть

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$$

— некоторое решение верхнего характеристического включения (14.1), отвечающего некоторому фиксированному значению параметра $s_+ = (v^*, \beta^*) \in S_+$ и начальному условию $(x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$, т.е.

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+).$$

Оценим $\text{dist}^2(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+))$. Для этого выберем $y_0 \notin Y_+^\varepsilon(t_0, x_0, s_+)$ и определим вектор

$$\tilde{y}_0 \in Y_+^\varepsilon(t_0, x_0, s_+), \quad \|y_0 - \tilde{y}_0\| = \text{dist}(y_0, Y_+^\varepsilon(t_0, x_0, s_+)) = \tilde{d}_0 > 0.$$

Рассмотрим решение дифференциального включения

$$\varepsilon \dot{y}^0(t) \in \text{co} \left\{ h^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^0(t), P, v^*, A, \beta^*) \right\}, \quad y^0(t_0) = \tilde{y}_0. \quad (16.1)$$

Сильная инвариантность множеств $Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+)$ относительно включений (16.1) влечет, что $y^0(t) \in Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+)$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Согласно (14.1) динамика быстрой переменной $y^\varepsilon(t)$ описывается следующим образом:

$$\varepsilon \dot{y}^\varepsilon(t) \in \text{co} \left\{ h^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), P, v^*, A, \beta^*) \right\}, \quad y^\varepsilon(t_0) = y_0. \quad (16.2)$$

Воспользуемся тем фактом (см. [21]), что траектории дифференциальных включений (16.2) и (16.1) могут быть описаны с помощью обобщенных управлений

$$\mathbf{u}_t(du), \mathbf{a}_t(d\alpha) : [t_0, T] \rightarrow \text{rpm}(P) \times \text{rpm}(A),$$

т.е. измеримых функций на $[0, T]$, значениями которых являются регулярные вероятностные меры на множествах допустимых значений управлений P и A , т.е. справедливо представление

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{y}^\varepsilon(t) &= \int_P \int_A h^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u, v^*, \alpha, \beta^*) \mathbf{u}_t^\varepsilon(du) \cdot \mathbf{a}_t^\varepsilon(d\alpha), \\ \varepsilon \dot{y}^0(t) &= \int_P \int_A h^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^0(t), u, v^*, \alpha, \beta^*) \mathbf{u}_t^0(du) \cdot \mathbf{a}_t^0(d\alpha). \end{aligned}$$

Рассмотрим траектории $y^\varepsilon(t)$ и $y^0(t)$, которые порождены одними и теми же обобщенными управлениями, т.е.

$$\mathbf{u}_t^\varepsilon(du) = \mathbf{u}_t^0(du), \quad \mathbf{a}_t^\varepsilon(d\alpha) = \mathbf{a}_t^0(d\alpha), \quad t \in [t_0, T].$$

Имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \text{dist} \left(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+) \right) &\leq \|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|, \\ \frac{d\|y^\varepsilon(t) - y^0(t)\|^2}{dt} &= 2 \left\langle y^\varepsilon(t) - y^0(t), \frac{dy^\varepsilon(t)}{dt} - \frac{dy^0(t)}{dt} \right\rangle \leq \frac{2}{\varepsilon} \max_{u \in P} \langle y^\varepsilon(t) - y^0(t), k^\varepsilon(t) - k_0^\varepsilon(t) \rangle, \\ k^\varepsilon(t) &= k^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u, v^*), \quad k_0^\varepsilon(t) = k^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^0(t), u, v^*). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и **(B8)**, получаем

$$\begin{aligned} \text{dist}^2 \left(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+) \right) &\leq \tilde{d}_0^2 - \int_{t_0}^t \frac{2\kappa^\varepsilon}{\varepsilon} \text{dist} \left(y^\varepsilon(\tau), Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+) \right) d\tau, \\ \text{dist} \left(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+) \right) &\leq \tilde{d}_0 \exp \left(-\frac{2\kappa^\varepsilon}{\varepsilon} (t - t_0) \right) \leq \tilde{d}_0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Таким образом, быстрые компоненты $y^\varepsilon(t)$ верхних характеристик (16.2) стремятся экспоненциально к соответствующим верхним множествам $Y_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), s_+)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для каждого $s_+ \in S_+$. Аналогичная сходимость быстрых компонент нижних характеристик к соответствующим нижним множествам Y_-^ε также имеет место.

Вследствие этого множества $Y_\pm^\varepsilon + B_k^\varepsilon$, участвующие в конструкциях условий **(B8)**–**(B10)**, играют роль аттракторов для быстрых компонент $y_\pm^\varepsilon(\cdot)$ соответствующих обобщенных характеристик. Из условия **(B8)** и оценки (16.3) следует, что все $\tilde{d}_0$ -окрестности ($\tilde{d}_0 > 0$) этих множеств сильно инвариантны относительно соответствующих характеристических включений.

16.2. Доказательство основного результата. Для доказательства теоремы IV.1 покажем, что выполнение условий **(B1)**–**(B10)** влечет выполнение условий **(A^ε1)**–**(A^ε11)** теоремы III.1.

Условия **(A^ε1)**–**(A^ε4)** следуют очевидным образом из **(B1)**–**(B4)** и конструкции гамильтониана $H^\varepsilon(t, x, y, p, q/\varepsilon)$ (13.6). Константы Липшица $\lambda^\varepsilon(x, y)$ и $L^\varepsilon = L^\varepsilon(t, x)$ в этих условиях совпадают.

Из предположения **(B3)** следует свойство **(A^ε5)** липшиц-непрерывности в метрике Хаусдорфа отображений

$$(t, x, y) \mapsto M_\pm^\varepsilon(t, x, y, s_\pm), \quad s_\pm \in S_\pm,$$

вида (14.1)–(14.2).

Условия **(B6)**–**(B7)** совпадают с условиями **(A^ε6)**–**(A^ε7)**.

Как показано в предыдущем разделе (п. 16.1), из оценок (16.3), равномерных для всех $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_\pm^0$, $z_0 \in Z^0$ следует выполнение условий (10.9), (10.10), т.е. справедливость предположения **(A^ε8)** для тех решений

$$(x_\pm^\varepsilon, y_\pm^\varepsilon, z_\pm^\varepsilon) \in \text{Sol} \left(t_0, x_0, y_0, z_0, s_\pm \right), \quad s_\pm \in S_\pm,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} z_+^\varepsilon(t) &\geq u^\varepsilon(t, x_+^\varepsilon(t), y_+^\varepsilon(t)) \quad \forall t \geq t_0, \\ z_-^\varepsilon(t) &\leq u^\varepsilon(t, x_-^\varepsilon(t), y_-^\varepsilon(t)) \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Более того, оценки (16.3) и, следовательно, условия (10.9), (10.10) выполняются для *всех* решений $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$ из пучков $\text{Sol}(t_0, x_0, y_0, z_0, s_\pm)$.

Условия **(B9)**–**(B10)** совпадают с условиями **(A^ε9)**–**(A^ε10)**.

Наконец, из условий **(B1)**, **(B5)** и конструкций множеств $Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)$ (15.2) и $Y_-^\varepsilon(t, x, s_-)$ (15.3) вытекает справедливость предположения **(A^ε11)**, т.е.

$$Y_+^0(t, x, s_+) \cap Y_-^0(t, x, s_-) \neq \emptyset$$

для любых $s_+ \in S_+$, $s_- \in S_-$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Таким образом, справедливость утверждений теоремы IV.1 следует теперь из теоремы III.1. Специфика применения характеристических комплексов (14.1), (14.2) влечет модификацию формулировок и уточнение оценок, полученных при доказательстве лемм III.1–III.3. Поэтому ниже приведено доказательство модифицированного утверждения леммы III.1 и формулировки лемм IV.2, IV.3.

Пусть выбраны $\varepsilon \in (0, 1]$, начальные точки $(t_0, x_0, y_0) \in D \times D_0$, $z_0 \in \mathbb{R}^1$, комплексы (S, M_+^ε) , определенные соотношениями (14.1), и множества $Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)$, $s_+ \in S_+$, вида (15.2).

Фиксируем решение

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}^\varepsilon(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+), \quad s_+ \in S_+.$$

По определению, при почти всех $t \in [t_0, T]$ справедливо вложение

$$(\dot{x}^\varepsilon(t), \varepsilon \dot{y}^\varepsilon(t), \dot{z}^\varepsilon(t)) \in M_+^\varepsilon(t, x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), s_+)$$

и выполняется краевое условие

$$(x^\varepsilon(t_0), y^\varepsilon(t_0), z^\varepsilon(t_0)) = (x_0, y_0, z_0).$$

По быстрой компоненте $y^\varepsilon(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ этого фиксированного решения сконструируем следующее многозначное отображение:

$$(t, x) \mapsto Y_{0+}^\varepsilon(t, x, s_+) = \left\{ y_0 \in Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) : \right. \\ \left. \|y^\varepsilon(t) - y_0\| = \text{dist}(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x, s_+)) \right\} \subset Y_+^\varepsilon(t, x, s_+). \quad (16.4)$$

Нетрудно проверить, что для любого значения параметра s_+ отображение $(t, x) \mapsto Y_{0+}^\varepsilon(t, x, s_+)$ имеет компактные значения и является полунепрерывным сверху. Следовательно, эти же свойства наследуются и отображением

$$(t, x) \mapsto \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, Y_{0+}^\varepsilon(t, x, s_+), P, v^*), -g^\varepsilon(t, x, Y_{0+}^\varepsilon(t, x, s_+), P, v^*) \right\}. \quad (16.5)$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$(\dot{x}_0^\varepsilon(t), \dot{z}_0^\varepsilon(t)) \in \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), Y_{0+}^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+), P, v^*), -g^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), Y_{0+}^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+), P, v^*) \right\}, \quad (16.6)$$

соответствующее отображению (16.5), с начальным условием

$$x_0^\varepsilon(t_0) = x_0, \quad z_0^\varepsilon(t_0) = z_0. \quad (16.7)$$

Согласно теории дифференциальных включений (см. [195]) существует решение дифференциального включения (16.6), (16.7) на $[t_0, T]$. Обозначим множество всех решений $(x_0^\varepsilon(\cdot), z_0^\varepsilon(\cdot))$ включения (16.6) с начальным условием (16.7) и при фиксированном значении параметра $s_+ \in S_+$, символом $\text{Sol}_{0+}^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$. Символ $\text{Sol}_+^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+)$ означает множество всех решений $(x_\varepsilon(\cdot), z_\varepsilon(\cdot))$ дифференциального включения вида

$$(\dot{x}_\varepsilon(t), \dot{z}_\varepsilon(t)) \in \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), s_+), P, v^*), -g^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), s_+), P, v^*) \right\} \quad (16.8)$$

с начальным условием

$$x_\varepsilon(t_0) = x_0, \quad z_\varepsilon(t_0) = z_0. \quad (16.9)$$

Очевидно,

$$\text{Sol}_{0+}^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+) \subset \text{Sol}_+^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+).$$

Рассмотрим выбранную траекторию

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}^\varepsilon(t_0, x_0, y_0, z_0, s_+)$$

и $t \in [t_0, T]$. Оценим расстояние между точкой $(x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$ и точкой $(x_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ на той траектории

$$(x_\varepsilon(\cdot), z_\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}_+^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+),$$

которая является ближайшей к траектории $(x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$.

Из определений этих точек следует, что упомянутое расстояние не превосходит расстояния между $(x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$ и точкой $(x_0^\varepsilon(t), z_0^\varepsilon(t))$ на той траектории

$$(x_0^\varepsilon(\cdot), z_0^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}_{0+}^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_+),$$

которая является ближайшей к траектории $(x^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$.

Применяя утверждение III.1, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|x^\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\| &\leq \|x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|\dot{x}^\varepsilon(\tau) - \dot{x}_0^\varepsilon(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \text{dist} \left(\text{co } f^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), P, v^*), \text{co } f^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), Y_0^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), s_+), P, v^*) \right) d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \max_{u \in P} \|f^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), u, v^*) - f^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), y_0^\varepsilon(\tau), u, v^*)\| d\tau; \quad (16.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z^\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)| &\leq |z^\varepsilon(t) - z_0^\varepsilon(t)| \leq \int_{t_0}^t |\dot{z}^\varepsilon(\tau) - \dot{z}_0^\varepsilon(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \max_{u \in P} |g^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), y^\varepsilon(\tau), u, v^*) - g^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), y_0^\varepsilon(\tau), u, v^*)| d\tau. \quad (16.11) \end{aligned}$$

где

$$y_0^\varepsilon(\cdot) : [t_0, \tau] \ni t \mapsto y_0^\varepsilon(t) \in Y_{0+}^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+) \subset D_0$$

— измеримая функция, удовлетворяющая, в силу определения (16.4), соотношению

$$\|y^\varepsilon(t) - y_0^\varepsilon(t)\| = \text{dist}(y^\varepsilon(t), Y_+^\varepsilon(t, x_0^\varepsilon(t), s_+)).$$

Принимая во внимание **(B7)** и свойства отображения dist , продолжим неравенства (16.10):

$$\begin{aligned} \|x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t)\| &\leq \int_{t_0}^t L^\varepsilon \left\{ \|x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau)\| + \|y^\varepsilon(\tau) - y_0^\varepsilon(\tau)\| \right\} d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t L^\varepsilon \left\{ \|x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau)\| + \text{dist}(y^\varepsilon(\tau), Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+)) + \right. \\ &\quad \left. + \text{dist}(Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+), Y_+^\varepsilon(\tau, x_0^\varepsilon(\tau), s_+)) \right\} d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t L^\varepsilon \left\{ (1 + K^\varepsilon) \|x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau)\| + \text{dist}(y^\varepsilon(\tau), Y_+^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_+)) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Чтобы завершить оценку, используем экспоненциальные оценки (16.3) для расстояния между быстрыми компонентами обобщенных характеристик и соответствующими аттракторами, а также неравенство Гронуолла (см. [21]):

$$\begin{aligned} \|x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t)\| &\leq \int_{t_0}^t L^\varepsilon (1 + K^\varepsilon) \|x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{\kappa^\varepsilon}{\varepsilon}(\tau - t_0)\right) \tilde{d}_0 d\tau \leq \int_{t_0}^t L^\varepsilon (1 + K^\varepsilon) \|x^\varepsilon(\tau) - x_0^\varepsilon(\tau)\| d\tau + \varepsilon \frac{d^0}{\kappa^\varepsilon}; \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|x^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t)\| \leq N^\varepsilon \cdot \varepsilon = \rho(\varepsilon), \quad (16.12)$$

где

$$N^\varepsilon = \frac{d^0}{\kappa^\varepsilon} \left[1 + L^\varepsilon(1 + K^\varepsilon)(T - t_0) \cdot \exp(L^\varepsilon(1 + K^\varepsilon)(T - t_0)) \right], \quad d^0 = \text{diam}\{D_+^0 \cup D_-^0\}.$$

Очевидно, $\rho(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Аналогичные рассуждения используются для того, чтобы доказать справедливость оценки (16.12) для разности $|z^\varepsilon(t) - z_0^\varepsilon|$.

Из оценок, полученных выше для верхних (подобные же оценки справедливы и для нижних) характеристических комплексов, вытекает, что имеет место следующее утверждение.

Лемма IV.1. Для любых компактных множеств D , D_+^0 и D_-^0 , участвующих в условии (B8), существуют числа $\delta^0 > 0$, $\rho^0 > 0$ и отображение

$$(0, 1] \rightarrow (0, \delta^0] \times (0, \rho^0] : \quad \varepsilon \mapsto (\delta(\varepsilon), \rho(\varepsilon))$$

такие, что

$$\delta(\varepsilon) \downarrow 0, \quad \rho(\varepsilon) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

и для любых начальных данных $(t_0, x_0) \in D$, $y_0 \in D_\pm^0$, $z_0 \in \mathbb{R}$, значений параметров $s_\pm \in S_\pm$, $\varepsilon \in (0, 1]$ и траекторий

$$(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}^\varepsilon(t_0, x_0, y_0, z_0, s_\pm)$$

можно указать такие траектории

$$(x_\varepsilon(\cdot), z_\varepsilon(\cdot)) \in \text{Sol}_\pm^\varepsilon(t_0, x_0, z_0, s_\pm),$$

что при всех $\tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon), T]$ имеют место следующие соотношения:

$$\|x^\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(\tau)\| \leq \rho(\varepsilon), \quad \|z^\varepsilon(\tau) - z_\varepsilon(\tau)\| \leq \rho(\varepsilon), \quad \text{dist}\left(y^\varepsilon(\tau), Y_\pm^\varepsilon(\tau, x^\varepsilon(\tau), s_\pm)\right) \leq \varepsilon.$$

Замечание IV.1. Величины $\delta(\varepsilon)$ в лемме IV.1 могут быть выбраны следующим образом:

$$\delta(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{\kappa^2} \ln \frac{\varepsilon}{d^0}.$$

Величины $\rho(\varepsilon)$ определены соотношениями (16.12).

Лемма IV.1 аналогична лемме III.1 из теоремы III.1.

Заметим также, что введенные выше дифференциальные включения (16.8) удовлетворяют определению верхних характеристических включений в «верхней» возмущенной задаче Коши $\hat{\mathbf{P}}_+^\varepsilon$ типа (15.4), (15.5) с гамильтонианом

$$\hat{H}_+^\varepsilon(t, x, s) = \max_{s_+ \in S_+} \min_{(f, g) \in F_+^\varepsilon(t, x, s_+)} [\langle s, f \rangle - g],$$

где

$$F_+^\varepsilon(t, x, s_+) = \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), P, v^*), -g^\varepsilon(t, x, Y_+^\varepsilon(t, x, s_+), P, v^*) \right\}.$$

Аналогично, конструкция гамильтониана

$$\hat{H}_-^\varepsilon(t, x, s) = \min_{s_- \in S_-} \min_{(f, g) \in F_-^\varepsilon(t, x, s_-)} [\langle s, f \rangle - g],$$

где

$$F_-^\varepsilon(t, x, s_-) = \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x, Y_-^\varepsilon(t, x, s_-), u_*, Q), -g^\varepsilon(t, x, Y_-^\varepsilon(t, x, s_-), u_*, Q) \right\},$$

позволяет интерпретировать комплексы (S_-, M_-^ε) , где

$$S_- = P \times A \ni s_- = (u^*, \alpha^*),$$

$$M_-^\varepsilon = M_-^\varepsilon(t, x, s_-) = \text{co} \left\{ f^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), Y_-^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), s_-), u^*, Q), -g^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), Y_-^\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), s_-), u^*, Q) \right\},$$

$$Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) = \bigcup_{v \in Q, \beta \in B} Y^\varepsilon(t, x, u_*, v, \alpha_*, \beta) \quad \forall s_- = (u_*, \alpha_*),$$

как нижние характеристические комплексы в соответствующей «нижней» возмущенной задаче Коши $\hat{\mathbf{P}}_-^\varepsilon$ типа (15.4), (15.5) с гамильтонианом $\hat{H}_-^\varepsilon$.

Согласно определению минимаксного решения $\text{Val}^\varepsilon(t, x, y)$ сингулярно возмущенного уравнения Айзекса (13.4), (13.6), надграфик и подграфик этого решения слабо инвариантны относительно характеристических включений, соответствующих комплексам (14.1) и (14.2)). Используя эти свойства слабой инвариантности и следуя общей схеме доказательств, приведенных в предыдущей главе, получим следующие утверждения.

Лемма IV.2. *Функция*

$$w^{\# \uparrow}(t, x) = \inf_{s_+ \in S_+} \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \min_{\substack{y' \in Y_+^\varepsilon(t', x', s_+) + B_k^\varepsilon \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w^\varepsilon(t', x', y')$$

является верхним минимаксным решением в «верхней» предельной задаче Коши $\mathbf{P}_+^0$ типа (15.4), (15.5), где гамильтониан H_+^0 имеет вид

$$H_+^0(t, x, s) = \max_{s_+ \in S_+} \min_{(f, g) \in F_+^0(t, x, s_+)} [\langle s, f \rangle - g], \quad (16.13)$$

причем

$$F_+^0(t, x, s_+) = \text{co} \left\{ f^0(t, x, Y_+^0(t, x, s_+), P, v^*), -g^0(t, x, Y_+^0(t, x, s_+), P, v^*) \right\}.$$

Лемма IV.3. *Функция*

$$w^{\# \downarrow}(t, x) = \sup_{s_- \in S_-} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \max_{\substack{y \in Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) + B_k^\varepsilon \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_\varepsilon^{0 \downarrow}(t', x')$$

является нижним минимаксным решением в «нижней» предельной задаче Коши $\mathbf{P}_-^0$ типа (15.4), (15.5), где гамильтониан H_-^0 имеет вид

$$H_-^0(t, x, s) = \min_{s_- \in S_-} \max_{(f, g) \in F_-^0(t, x, s_-)} [\langle s, f \rangle - g], \quad (16.14)$$

причем

$$F_-^0(t, x, s_-) = \text{co} \left\{ f^0(t, x, Y_-^0(t, x, s_-), u_*, Q), -g^0(t, x, Y_-^0(t, x, s_-), u_*, Q) \right\}.$$

Условие **(B10)** влечет справедливость равенства

$$w^{\# \uparrow} = w^{\# \downarrow} = \text{Val}^0, \quad (16.15)$$

т.е. Val^0 является минимаксным решением задачи $\mathbf{P}^0$ (15.4), (15.5) с гамильтонианом

$$H^0(t, x, s) = H_+^0(t, x, s) = H_-^0(t, x, s). \quad (16.16)$$

Из равномерных оценок (16.12) и равенств (16.15) следует сходимость

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Val}^\varepsilon(t, x, y) = \text{Val}^0(t, x),$$

равномерная на любых компактах $D \times (D_+^0 \cup D_-^0)$. Этим доказательство теоремы IV.1 завершено.

Предельные невозмущенные дифференциальные игры $\mathbf{G}_i^0$ (15.6)–(15.9), $i = I, II$, реконструируются по предельному гамильтониану $H^0(t, x, s)$ (16.13), (16.14), (16.16) с помощью определения характеристических комплексов для этого гамильтониана. При этом, согласно теории минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби—Айзекса, имеет мест тот факт, что минимаксное решение $\text{Val}^0(t, x)$ предельной задачи $\mathbf{P}^0$ совпадает с оптимальным гарантированным позиционным результатом первого игрока Γ_I^0 в игре $\mathbf{G}_I^0$ и с оптимальным гарантированным позиционным результатом второго игрока Γ_{II}^0 в игре $\mathbf{G}_{II}^0$. Таким образом, можно сказать, что игры $\mathbf{G}_i^0$, $i = I, II$, гамильтонианы в которых совпадают и равны $H^0(t, x, s)$, эквивалентны по результату.

17. ПРИМЕР

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную дифференциальную игру, к которой применима теорема IV.1:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = k(y) + \xi(t, x, \alpha, \beta), \quad (t, x, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}, \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 \in [0, T],\end{aligned}$$

где липшицева функция $y \mapsto k(y)$ имеет вид

$$k(y) = \begin{cases} -y, & \text{если } y \geq 0, \\ -2y, & \text{если } y \leq 0. \end{cases}$$

Управления первого и второго игроков (α и β , соответственно) стеснены ограничениями $\alpha \in A \subset \mathbb{R}$, $\beta \in B \subset \mathbb{R}$, где множества A и B компактны.

Фиксирован момент окончания игры T . Функционал платы имеет вид

$$I_{t_0, x_0, y_0}^\varepsilon(x(\cdot), y(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_{t_0}^T g(\tau, x(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

В рассматриваемой игре первый игрок стремится минимизировать функционал платы, а второй, напротив, максимизировать его.

Предполагается, что функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ непрерывны, функции $f(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ и $g(\cdot)$ *липшицевы* по переменным t , x , y с константой $L_* > 0$. Предполагается, что при любых $(t, x, s) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ выполнено условие Айзекса:

$$\min_{\alpha \in A} \max_{\beta \in B} \langle s, \xi(t, x, \alpha, \beta) \rangle = \max_{\beta \in B} \min_{\alpha \in A} \langle s, \xi(t, x, \alpha, \beta) \rangle.$$

Рассмотрим в возмущенной задаче характеристические комплексы вида

$$s_+ = \beta, \quad S_+ = B, \quad s_- = \alpha, \quad S_- = A, \quad (17.1)$$

$$M_+^\varepsilon(t, x, y, \beta) = \text{co} \left\{ \left(f(t, x, y), \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\xi - y), -g(t, x, y) \right) : \xi \in \text{co} \xi(t, x, A, \beta) \right\}, \quad (17.2)$$

$$M_-^\varepsilon(t, x, y, \alpha) = \text{co} \left\{ \left(f(t, x, y), \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\xi - y), -g(t, x, y) \right) : \xi \in \text{co} \xi(t, x, \alpha, B) \right\}. \quad (17.3)$$

Множества «быстрых корней» $Y(t, x, \alpha, \beta)$ определяются формулой

$$Y(t, x, \alpha, \beta) = \varphi(\xi) \xi(t, x, \alpha, \beta),$$

где функция $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ имеет вид

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq 0, \\ 1/2 & \text{при } \xi \leq 0. \end{cases}$$

Аттракторы $Y_\pm^\varepsilon$ для комплексов (17.2), (17.3), (17.1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}Y_+^\varepsilon(t, x, s_+) &= Y(t, x, \beta) + B^\varepsilon, \quad s_+ = \beta, \\ Y_-^\varepsilon(t, x, s_-) &= Y(t, x, \alpha) + B^\varepsilon, \quad s_- = \alpha,\end{aligned}$$

где B^ε — замкнутый шар радиуса ε в пространстве $\mathbb{R}$.

В предельной невозмущенной задаче в качестве характеристических комплексов можно выбрать

$$\begin{aligned}s_+ &= \beta, \quad S_+ = B, \quad s_- = \alpha, \quad S_- = A; \\ M_+^0(t, x, \beta) &= \text{co} \left\{ (f(t, x, \xi), -g(t, x, \xi)) : \xi \in Y(t, x, \beta) \right\}, \\ M_-^0(t, x, \alpha) &= \text{co} \left\{ (f(t, x, \xi), -g(t, x, \xi)) : \xi \in Y(t, x, \alpha) \right\},\end{aligned}$$

где

$$Y(t, x, \beta) = \varphi(\xi) \bigcup_{\alpha \in A} \xi(t, x, \alpha, \beta), \quad Y(t, x, \alpha) = \varphi(\xi) \bigcup_{\beta \in B} \xi(t, x, \alpha, \beta).$$

Предельные невозмущенные дифференциальные игры $\mathbf{G}_i^0$, $i = I, II$, вложены в рамки дифференциальной игры $\mathbf{G}^0$

$$\dot{x} = f(t, x, Y(t, x, \alpha, \beta)) = f(t, x, \varphi(\xi)\xi(t, x, \alpha, \beta))$$

с функционалом платы

$$\begin{aligned} I_{t_0, x_0}^0(x(\cdot), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)) &= \sigma(x(T)) + \int_{t_0}^T g(\tau, x(\tau), Y(t, x, \alpha, \beta)) d\tau = \\ &= \sigma(x(T)) + \int_{t_0}^T g(\tau, x(\tau), \varphi(\xi)\xi(t, x, \alpha, \beta)) d\tau, \end{aligned} \quad (17.4)$$

где в качестве допустимых управлений игроков выступают измеримые функции

$$t \mapsto \alpha(t) : [0, T] \rightarrow A, \quad t \mapsto \beta(t) : [0, T] \rightarrow B; \quad (17.5)$$

здесь $\alpha(\cdot)$ — управление первого игрока (минимизирующего функционал платы (17.4)), $\beta(\cdot)$ — управление второго (максимизирующего) игрока.

Согласно теореме IV.1, в невозмущенной игре также следует предполагать выполненным условие Айзекса

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A} \max_{\beta \in B} \left[\langle s, f(t, x, \varphi(\xi)\xi(t, x, \alpha, \beta)) \rangle + g(t, x, \varphi(\xi)\xi(t, x, \alpha, \beta)) \right] = \\ = \max_{\beta \in B} \min_{\alpha \in A} \left[\langle s, f(t, x, \varphi(\xi)\xi(t, x, \alpha, \beta)) \rangle + g(t, x, \varphi(\xi)\xi(t, x, \alpha, \beta)) \right]. \end{aligned}$$

ГЛАВА V

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕОРИИ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Данная глава посвящена развитию концепции обобщенного минимаксного решения для квазилинейного параболического уравнения типа Гамильтона—Якоби—Айзекса:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}\right) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Уравнения такого типа возникают при исследовании стохастических дифференциальных игр, в которых особый интерес представляет изучение цены игры. Эта функция лежит в основе конструкций оптимальных позиционных законов управления. Известно [83, 196, 247, 275], что указанному квазилинейному параболическому уравнению удовлетворяет в регулярных точках (в точках необходимой гладкости) функция цены диффузионной игры. Рассматриваемое уравнение в частных производных второго порядка в теории дифференциальных игр называют уравнением Айзекса или основным уравнением (ОУ).

В случае, когда шум, действующий на управляемый процесс, является невырожденным, функция цены является гладкой, а соответствующее ОУ — невырожденное параболическое уравнение. Это уравнение при заданном краевом условии, отвечающем исходной диффузионной дифференциальной игре с функционалом Майера, имеет единственное классическое решение [122]. Таким образом, в этом случае ОУ однозначно определяет функцию цены.

Если шум, действующий на управляемый процесс, является вырожденным, то ОУ — уравнение параболического типа, для которого соответствующая краевая задача, как правило, решения в классическом смысле не имеет. В этом случае негладкая функция цены не удовлетворяет ОУ на множестве нулевой меры и существует бесконечно много функций, удовлетворяющих ОУ почти всюду. Эти обстоятельства диктуют необходимость введения такого определения обобщенного решения квазилинейного параболического уравнения, которое является единственным для заданной краевой задачи и совпадает с функцией цены некоторой диффузионной дифференциальной игры. В данной главе вводится понятие обобщенного (минимаксного) решения с помощью метода характеристик, развитого для уравнения в частных производных второго порядка типа Гамильтона—Якоби—Айзекса.

Рассматривается стохастическая дифференциальная диффузионная игра с терминальной платой. Первые идеи, методы и результаты исследования таких игр содержатся в работах [226, 247]. Результаты, представленные в данной главе, получены в рамках другого подхода, предложенного Н. Н. Красовским (см. [73, 78, 293]).

Ниже введены понятия обобщенных стохастических производных. Получены необходимые и достаточные инфинитезимальные условия для функции цены диффузионной игры, которые состоят в выполнении для этой функции пары дифференциальных неравенств, содержащих обобщенные стохастические производные. В случае, когда шум отсутствует (т.е. для детерминированной игры), эти соотношения переходят в известные [149, 293] дифференциальные неравенства для полупроизводных Дини по направлению (см., например, выше (5.4)). В точках гладкости функции цены эти неравенства обращаются в уравнение Айзекса.

Пара неравенств для стохастических производных положена в определение обобщенного (минимаксного) решения ОУ. Доказано, что для соответствующей краевой задачи такое обобщенное решение параболического уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса существует, единственно и содержательно: оно совпадает с функцией цены стохастической дифференциальной диффузионной игры. Отметим, что это определение минимаксного решения эквивалентно определению вязкостного решения ОУ в смысле работ [246, 275].

В заключение данной главы рассмотрен класс непрерывных функций нескольких переменных, дифференцируемых по части переменных. Получены формулы обобщенных стохастических производных для функций из этого класса. С помощью этих формул получены обобщения уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса в тех диффузионных дифференциальных играх, где шум и управления одновременно действуют только на часть фазовых переменных конфликтно-управляемой системы.

18. ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ И ЕЕ СВОЙСТВА. ОБОБЩЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

18.1. Формализация позиционной стохастической дифференциальной игры. Рассмотрим следующую диффузионную игру. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_s\}, \mathbb{P})$, где $\{\mathcal{F}_s\}$, $s \geq 0$, — неубывающее семейство σ -алгебр подмножеств Ω . Пусть W_s — m -мерный стандартный винеровский процесс, который является $\{\mathcal{F}_s\}$ -мартингалом. Диффузионный управляемый процесс ξ_s описывается уравнением Ито [102, 224]:

$$\xi_s = x_0 + \int_0^s f(t_0 + s, \xi_s, u_s, v_s) ds + \int_0^s \psi(t_0 + s) dW_s, \quad (18.1)$$

$$(t_0, x_0) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n, \quad r \in [0, T - t_0].$$

Здесь $\mathbb{T}' = [0, T]$ — фиксированный конечный отрезок реального времени, на котором будет рассматриваться игра. Определены функции $f(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot) : \mathbb{T}' \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Символами u_s и v_s обозначены прогрессивно измеримые процессы со значениями в компактах $P \subset \mathbb{R}^p$ и $Q \subset \mathbb{R}^q$ соответственно. Процесс u_s называется управлением первого игрока, процесс v_s — управлением второго игрока. Отметим, что при описании процесса (18.1) сделана замена реального времени

$t \in \mathbb{T}'$ на $s = t - t_0 \in [0, T - t_0]$. Решение стохастического уравнения (18.1) понимается в сильном смысле [102, 224].

Предполагается, что функции $\psi(\cdot) : \mathbb{T}' \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ и $f(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

$$|\psi_{ij}(t_1) - \psi_{ij}(t_2)| \leq L_1 |t_1 - t_2|^\alpha, \quad i, j \in \overline{1, n}, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{T}', \quad (18.2)$$

$$\max_{\substack{t_0 \leq t \leq T \\ i, j \in \overline{1, n}}} |\psi_{ij}(t)| \leq F_1, \quad (18.3)$$

где $\psi_{ij}(t)$ — элемент матрицы $\psi(t)$, F_1, L_1, α — положительные константы, $\alpha > 1/2$,

$$\sup_{(t, x, u, v) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times P \times Q} \|f(t, x, u, v)\| \leq F_2, \quad (18.4)$$

$$\|f(t, x_1, u, v) - f(t, x_2, u, v)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\|, \quad (18.5)$$

где $F_2 > 0, L_2 > 0$ — константы, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (t, u, v) \in \mathbb{T}' \times P \times Q$,

$$\sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leq \delta \\ \|x_1 - x_2\| \leq \delta \\ \|u_1 - u_2\| \leq \delta \\ \|v_1 - v_2\| \leq \delta}} \|f(t_1, x_1, u_1, v_1) - f(t_2, x_2, u_2, v_2)\| \leq \beta(\delta), \quad \beta(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \downarrow 0, \quad (18.6)$$

где $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{T}', (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (u_1, u_2) \in P \times P, (v_1, v_2) \in Q \times Q$,

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = H(t, x, s), \quad (18.7)$$

где $(t, x, s) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Величина $H(t, x, s)$ (18.7) называется гамильтонианом диффузионного процесса (18.1).

Рассмотрим показатель качества $\gamma_* = \gamma_*(\xi_s)$ процесса ξ_s :

$$\gamma_*(\xi_s) = E\{\gamma(\xi_{T-t_0})\}, \quad (18.8)$$

где $E\{\cdot\}$ — математическое ожидание случайной величины $\gamma(\xi_{T-t_0}(\omega))$, T — фиксированный момент времени окончания процесса, а функция $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$|\gamma(x_1) - \gamma(x_2)| \leq L_3 \|x_1 - x_2\|, \quad (18.9)$$

где $L_3 > 0$ — константа и $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Первый игрок выбором управления u стремится минимизировать значение γ_* , а второй игрок подбирает управление v так, чтобы максимизировать γ_* .

Позиционная диффузионная дифференциальная игра (18.1), (18.8) формализуется для классов позиционных стратегий $U(t, x)$ и $V(t, x)$, т.е. измеримых по Борелю функций $U(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$ и $V(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow Q$, следующим образом.

Пусть $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n$ — начальное состояние процесса, $\Delta = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k+1} = T - t_0\}$ — разбиение отрезка $[0, T - t_0]$ времени τ , получающегося с помощью замены $\tau = t - t_0$ из отрезка реального времени t продолжительности игры $[t_0, T]$. Рассмотрим прогрессивно измеримый процесс $v(\cdot) : [0, T - t_0] \times \Omega$ и позиционную стратегию $U : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$. Обозначим через $\xi_r(t_0, x_0, U, v(\cdot), \Delta)$ случайный процесс ξ_r , $r \in [0, T - t_0]$, который описывается стохастическим уравнением

$$\xi_r = \xi_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^r f(t_0 + s, \xi_s, u_{\tau_i}, v_s) ds + \int_{\tau_i}^r \psi(t_0 + s) dW_s, \quad (18.10)$$

$$r \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

$$u_{\tau_i} = U(\tau_i + t_0, \xi_{\tau_i}) \text{ } \mathbb{P}\text{-п.в.}, \quad \xi_{\tau_0} = x_0 \text{ } \mathbb{P}\text{-п.в.}.$$

Метка $\mathbb{P}$ -п.в. означает, что помеченные ею соотношения выполняются почти всюду на Ω относительно меры $\mathbb{P}$. Напомним, что $\text{diam } \Delta = \max_{0 \leq i \leq k} (\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Определим гарантированный результат Γ_1 для стратегии U в позиции (t_0, x_0) следующим соотношением:

$$\Gamma_1(t_0, x_0, U) = \limsup_{\text{diam } \Delta \downarrow 0} \sup_{v(\cdot)} E \left\{ \gamma(\xi_{T-t_0}(t_0, x_0, U, v(\cdot), \Delta)) \right\}. \quad (18.11)$$

Оптимальный гарантированный результат первого игрока ρ_1 в классе позиционных стратегий $U(t, x)$ определяется равенством

$$\rho_1(t_0, x_0) = \inf_U \Gamma_1(t_0, x_0, U). \quad (18.12)$$

Аналогичным образом, с заменой u на v в (18.10), определяется гарантированный результат Γ_2 второго игрока при использовании им позиционной стратегии $V(t, x)$:

$$\Gamma_2(t_0, x_0, V) = \liminf_{\text{diam } \Delta \downarrow 0} \inf_{u(\cdot)} E \left\{ \gamma(\xi_{T-t_0}(t_0, x_0, V, u(\cdot), \Delta)) \right\}. \quad (18.13)$$

Для второго игрока оптимальный гарантированный результат определяется равенством

$$\rho_2(t_0, x_0) = \sup_V \Gamma_2(t_0, x_0, V) \quad (18.14)$$

Утверждение V.1 (см. [78]). *Для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n$ существует цена $\rho_0(t_0, x_0)$ позиционной диффузионной игры (18.1), (18.8), т.е.*

$$\rho_1(t_0, x_0) = \rho_2(t_0, x_0) = \rho_0(t_0, x_0). \quad (18.15)$$

Функция $\rho_0 : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определенная соотношением (18.15), называется *функцией цены* диффузионной игры (18.1), (18.8). Отметим, что эта функция совпадает с функцией цены, определенной в рамках другой известной формализации диффузионной игры, предложенной У. Флемингом [247], где используются пределы значений минорантных и мажорантных дискретных игр при стремлении шага дискретизации к нулю.

18.2. Обобщенные программные управления и порождаемые ими случайные процессы. Рассмотрим так же, как это было сделано в п. 3.3, множество обобщенных программных управлений первого игрока

$$A_I = \{ \forall \alpha_{(\cdot)} : s \mapsto \alpha_s : [0, T] \rightarrow \text{grm}(P) \text{ измеримо} \}, \quad (18.16)$$

элементами которого являются измеримые отображения отрезка времени $[0, T]$ во множество $\text{grm}(P)$ регулярных вероятностных мер, определенных на P . На множестве $\text{grm}(P)$ введена слабая норма, порождающая топологию, эквивалентную слабой-* топологии пространства $C^*(P)$ — сопряженного к пространству непрерывных скалярных функций на P . Отображения $s \mapsto \alpha_s$ могут быть отождествлены с непрерывными линейными функционалами над соответствующим пространством $\mathcal{B}$ функций Каратеодори, т.е. с элементами пространства $\mathcal{B}^*$, сопряженного к $\mathcal{B}$. Как известно, множество A_I — компакт в $\mathcal{B}^*$ относительно топологии слабой нормы, эквивалентной слабой-* топологии пространства $\mathcal{B}^*$ (см. [21]).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение V.2. *Множество A_I (18.16) обобщенных программных управлений α_s является метрическим компактом.*

Докажем следующую теорему.

Теорема V.1. *Для любого набора $(t_*, x_*, \alpha, v_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times A_I \times Q$ существует и единственно решение $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)$ уравнения*

$$\begin{aligned} \xi_r = x_* + \int_0^r ds \int_P f(t_* + s, \xi_s, u, v_*) \alpha_s(du) + \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s, \\ r \in [0, T - t_*], \quad (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n, \quad v_* \in Q, \end{aligned} \quad (18.17)$$

где W_s — m -мерный винеровский процесс, а свойства функций $f(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi(\cdot) : \mathbb{T}' \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ описаны в п. 18.1.

Доказательство. Схема доказательства повторяет аналогичные рассуждения теорем существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения из стандартных курсов теории случайных процессов [102, 224].

Единственность. Пусть ξ_r^1 и ξ_r^2 — два решения уравнения (18.17); тогда

$$\xi_r^1 = \xi_r^2 \quad \mathbb{P}\text{-п.в. на } \Omega \quad \forall r \in [0, T - t_*]. \quad (18.18)$$

Действительно, согласно (18.17) имеем

$$\begin{aligned} \xi_r^1 - \xi_r^2 = & \int_0^r ds \int_P \left[f(t_* + s, \xi_s^1, u, v_*) - f(t_* + s, \xi_s^2, u, v_*) \right] \alpha_s(du) + \\ & + \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s - \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Из условия Липшица (18.5) и (18.19) получаем оценку

$$\|\xi_r^1 - \xi_r^2\| \leq L_2 \int_0^r \|\xi_s^1 - \xi_s^2\| ds \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (18.20)$$

Согласно лемме Гронуолла из (18.20) следует

$$0 \leq \|\xi_r^1 - \xi_r^2\| \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (18.21)$$

В силу непрерывности по r процессов ξ_r^1 и ξ_r^2 , из (18.21) вытекает

$$\|\xi_r^1 - \xi_r^2\| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad \forall r \in [0, T - t_*] \quad (18.22)$$

или, что то же самое, условие (18.18).

Существование. Построим следующую итерационную процедуру:

$$\begin{aligned} y_r^{(0)} &= x_*, \\ y_r^{(n)} &= x_* + \int_0^r ds \int_P f(t_* + s, y_s^{(n-1)}, u, v_*) \alpha_s(du) + \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s. \end{aligned} \quad (18.23)$$

Отметим, что при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем $r \in [0, T - t_*]$ и при почти всех $\omega \in \Omega$ траектории $r \mapsto y_r^{(n)}(\omega)$ случайного процесса $y_s^{(n)}$ существуют и непрерывны, а случайные величины $\omega \mapsto y_r^{(n)}(\omega)$ измеримы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_r$ (см. [102, 224]).

Для величин $y_r^{(n)}$ и $y_r^{(n+1)}$ с помощью оценок типа (18.19), (18.20) выводим

$$\|y_r^{(n+1)} - y_r^{(n)}\| \leq L_2 \int_0^r \|y_s^{(n)} - y_s^{(n-1)}\| ds \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (18.24)$$

Используя оценку (18.24) рекуррентно, получаем $\mathbb{P}$ -п.в. на Ω :

$$\begin{aligned} & \|y_r^{(n+1)} - y_r^{(n)}\| \leq L_2^n \int_0^r \frac{(r-s)^{n-1}}{(n-1)!} \|y_s^{(1)} - x_*\| ds \leq \\ & \leq L_2^n \int_0^r \frac{(r-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\left\| \int_0^s d\tau \int_P f(t_* + \tau, x_*, u, v_*) d\tau(du) \right\| + \left\| \int_0^s \psi(t_* + s) dW_s \right\| \right]. \end{aligned}$$

Из этого неравенства в силу условия (18.4), теоремы Фубини и неравенства Коши—Буняковского выводим

$$E \left\{ \left\| y_r^{(n+1)} - y_r^{(n)} \right\| \right\} \leq L_2^n \int_0^r \frac{(r-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left[s \cdot F_2 + \sqrt{E \left\{ \left(\int_0^s \psi(t_* + \tau) dW_\tau \right)^2 \right\}} \right] ds.$$

Используя свойства стохастических интегралов, отсюда получаем:

$$\begin{aligned} E \left\{ \left\| y_r^{(n+1)} - y_r^{(n)} \right\| \right\} &\leq L_2^n \int_0^r \frac{(r-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left[F_2 s + \sqrt{2s \cdot \text{tr } A} \right] ds \leq \\ &\leq L_2^n \left[F_2 r + \sqrt{2r \cdot \text{tr } A} \right] \int_0^r \frac{(r-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \left[F_2 r + \sqrt{2r \cdot \text{tr } A} \right] \frac{(L_2 r)^n}{n!}, \end{aligned}$$

где $\text{tr } A = \max_{0 \leq t \leq T} |\text{tr } A(t)|$, а символ $\text{tr } A(t)$ означает след матрицы $A(t)$.

Более того, отсюда и из (18.24) выводим

$$E \left\{ \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| y_s^{(n+1)} - y_s^{(n)} \right\| \right\} \leq \left[F_2 r + \sqrt{2r \cdot \text{tr } A} \right] \frac{(L_2 r)^n}{n!} \leq C_1 \frac{(L_2 r)^n}{n!},$$

где

$$C_1 = F_2 T + \sqrt{2T \cdot \text{tr } A}.$$

Согласно неравенству Чебышева, имеем для любого $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| y_s^{(n+1)} - y_s^{(n)} \right\| > \frac{\varepsilon}{n^2} \right\} \leq \frac{E \left\{ \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| y_s^{(n+1)} - y_s^{(n)} \right\| \right\}}{\varepsilon/n^2} \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \cdot \frac{(L_2 r)^n}{n!} n^2. \quad (18.25)$$

Используя (18.25), выводим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| y_s^{(n+1)} - y_s^{(n)} \right\| > \frac{\varepsilon}{n^2} \right\} \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(L_2 r)^n}{n!} n^2 \leq \frac{C_1 \cdot C_0}{\varepsilon} < \infty, \quad (18.26)$$

где

$$C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (L_2 T)^n \frac{n^2}{n!} < \infty.$$

Для множеств

$$\begin{aligned} B_m^\varepsilon &= \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)} \right\| > \frac{\varepsilon}{m^2} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, \\ B^\varepsilon &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} B_m^\varepsilon = \left\{ \omega \in \Omega : \forall n \exists m \geq n \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)} \right\| > \frac{\varepsilon}{m^2} \right\} \end{aligned} \quad (18.27)$$

по лемме Бореля—Кантелли из (18.25)–(18.27) следует

$$P(B^\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (18.28)$$

Рассмотрим последовательность

$$\left\{ \varepsilon_l = \frac{6}{\pi^2 l} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Из (18.28) для $\varepsilon = \varepsilon_l$ следует

$$\sum_{l=1}^{\infty} P(B^{\varepsilon_l}) = 0. \quad (18.29)$$

Но тогда для множества

$$B_1 = \bigcup_{l=1}^{\infty} B^{\varepsilon_l} = \left\{ \omega \in \Omega : \exists \varepsilon_l \forall n \exists m \geq n \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)}\| > \frac{\varepsilon_l}{m^2} \right\} \quad (18.30)$$

из (18.29) вытекает

$$0 \leq \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} B^{\varepsilon_l}\right) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}(B^{\varepsilon_l}) = 0. \quad (18.31)$$

Докажем справедливость следующего включения:

$$B_2 = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)}\| > 0 \right\} \subset B_1. \quad (18.32)$$

Если $\omega \in B_2$, то существуют $l^0 > 0$ и $N < \infty$ такие, что для любого $n \geq N$ имеет место неравенство

$$\sum_{m=n}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)}(\omega) - y_s^{(m)}(\omega)\| > \frac{1}{l^0}. \quad (18.33)$$

Следовательно, по n можно подобрать такое $m \geq n$, что

$$\sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)}(\omega) - y_s^{(m)}(\omega)\| > \frac{\varepsilon_{l^0}}{m^2}, \quad (18.34)$$

поскольку иначе для некоторого $n \geq N$ получим

$$\sum_{m=n}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)}(\omega) - y_s^{(m)}(\omega)\| \leq \varepsilon_{l^0} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \varepsilon_{l^0} \frac{\pi^2}{6} = \frac{6}{\pi^2 l^0} \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{l^0},$$

что противоречит (18.33). Таким образом, для $\omega \in B_2$ получаем, что $\omega \in B_1$.

Далее, из неравенств

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(n)} - y_s\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)}\|$$

и включения (18.32) вытекает:

$$\begin{aligned} B_3 &= \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s - y_s^{(n)}\| > 0 \right\} = \\ &= \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \left\| \sum_{m=n}^{\infty} y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)} \right\| > 0 \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq r} \|y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)}\| > 0 \right\} \subset B_1. \end{aligned}$$

Но тогда отсюда и из (18.31) находим

$$0 \leq \mathbb{P}(B_3) \leq \mathbb{P}(B_1) = 0,$$

т.е. при почти всех $\omega \in \Omega$ имеет место равномерная на отрезке $[0, r]$ сходимость

$$y_s^{(n)} \rightarrow y_s = x_* + \sum_{m=1}^{\infty} [y_s^{(m+1)} - y_s^{(m)}].$$

Из непрерывности случайных процессов $y_s^{(n)}$ следует непрерывность процесса y_s .

Переходя в равенстве (18.23) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем в силу теоремы Лебега, что процесс y_s удовлетворяет следующему стохастическому уравнению:

$$y_r = x_* + \int_0^r ds \int_P f(t_* + s, y_s, u, v_*) \alpha_s(du) + \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s, \quad r \in [0, T - t_*].$$

Как отмечалось выше, при фиксированных $(t_*, x_*, \alpha, v_*, r)$ случайные величины $y_r^n(\omega)$, по построению, измеримы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_r$. Следовательно, измерим относительно этой σ -алгебры и их поточечный предел $y_r(\omega)$. Таким образом, существование решения $\xi_r = y_r$ уравнения (18.17) доказано. $\square$

Теорема V.2. *Решение $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)$ уравнения (18.17) обладает следующими свойствами:*

- (i) *при любых фиксированных $(t_*, x_*, \alpha, v_*, r)$ отображение $\omega \mapsto \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)$ измеримо относительно $\mathcal{F}_r$;*
- (ii) *при почти всех $\omega \in \Omega$ отображение*

$$(t_*, x_*, \alpha, v_*, r) \mapsto \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega) : T \times \mathbb{R}^n \times A_I \times Q \times [0, T - t_*] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

непрерывно.

Доказательство. Свойство (i) доказано в теореме V.1. Для доказательства свойства (ii) проделаем следующие оценки.

Пусть $J_\omega(\delta) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — траектория стохастического интеграла $\int_0^\delta dW_s$, соответствующая событию $\omega \in \Omega$. Согласно свойствам винеровского процесса W_s при $\mathbb{P}$ -п.в. $\omega \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \delta \leq T} \|J_\omega(\delta)\| &\leq F_\omega < \infty, \\ \sup_{\substack{\delta^1, \delta^2 \in [0, T] \\ |\delta^1 - \delta^2| = \Delta}} \|J_\omega(\delta^1) - J_\omega(\delta^2)\| &\leq \beta_\omega(\Delta), \quad \beta_\omega(\Delta) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha^i, \alpha^* \in A_I$ (см. (18.16)) и, кроме того,

$$\begin{aligned} v_i, v^* &\in Q, \quad 0 \leq r_* < r_i \leq T, \\ (t_*, t_0) &\in T \times \mathbb{R}^n, \quad (t_i, x_i) \in T \times \mathbb{R}^n, \quad t_i \geq t_0. \end{aligned}$$

Для $\xi_{r_i}^i = \xi_{r_i}(t_i, x_i, \alpha^i, v_*)$, $\xi_{r_*}^* = \xi_{r_*}(t_*, x_*, \alpha^*, v_*)$ справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} \xi_{r_i}^i &= x_i + \int_0^{r_i} ds \int_P f(t_i + s, \xi_s^i, u, v_i) \alpha_s^i(du) + \int_0^{r_i} \psi(t_i + s) dW_s = \\ &= x_i + \int_{t_i - t_*}^{r_*} ds \int_P f(t_* + s, \xi_s^i, u, v_i) \alpha_s^i(du) + \int_0^{r_* - (t_i - t_*)} \psi(t_i + s) dW_s + \\ &+ \int_0^{r_i - r_*} ds \int_P f(t_* + r_* + s, \xi_s^i, u, v_i) \alpha_s^i(du) + \int_0^{(r_i - r_*) - (t_i - t_*)} \psi(t_* + r_* + s) dW_s, \end{aligned} \quad (18.35)$$

$$\begin{aligned} \xi_{r_*}^* &= x_* + \int_0^{r_*} ds \int_P f(t_* + s, \xi_s^*, u, v_*) \alpha_s^*(du) + \int_0^{r_*} \psi(t_* + s) dW_s = \\ &= x_* + \int_0^{t_i - t_*} ds \int_P f(t_* + s, \xi_s^*, u, v_*) \alpha_s^*(du) + \int_0^{t_i - t_*} \psi(t_* + s) dW_s + \\ &+ \int_{t_i - t_*}^{r_*} ds \int_P f(t_* + s, \xi_s^*, u, v_*) \alpha_s^*(du) + \int_0^{r_* - (t_i - t_*)} \psi(t_i + s) dW_s. \end{aligned} \quad (18.36)$$

Введем обозначение

$$\Phi_*[\alpha^i - \alpha^*] = \int_{t_i - t_*}^{r_*} ds \int_P f(t_* + s, \xi_s^*, u, v_*)[\alpha^i - \alpha^*](du).$$

Получаем для $\mathbb{P}$ -п.в. $\omega \in \Omega$ оценку

$$\begin{aligned} & \|\xi_{r_i}^i(\omega) - \xi_{r_i}^*(\omega)\| \leq \|x_i - x_*\| + F_2|r_i - r_*| + \\ & + F_1 n^2 \cdot \beta_\omega(|r_i - r_*| + |t_i - t_*|) + F_2|t_i - t_*| + F_1 n^2 \cdot \beta_\omega(|t_i - t_*|) + \\ & + \left\| \int_{t_i - t_*}^{r_*} ds \left[\int_P f(t_* + s, \xi_s^i, u, v_i) \alpha_s^i(du) - \int_P f(t_* + s, \xi_s^*, u, v_*) \alpha_s^*(du) \right] \right\| \leq \\ & \leq \|x_i - x_*\| + F_2 \cdot (|t_i - t_*| + |r_i - r_*|) + 2F_1 n^2 \cdot \beta_\omega(|t_i - t_*| + |r_i - r_*|) + \\ & + T \cdot \beta(v_i - v_*) + L_2 \int_{t_i - t_*}^{r_*} |\xi_s^i - \xi_s^*| ds + \Phi_*[\alpha^i - \alpha^*]. \end{aligned} \quad (18.37)$$

Применяя лемму Гронуолла и оценку

$$\|\xi_{r_i}^i(\omega) - \xi_{r_*}^*(\omega)\| \leq \|\xi_{r_i}^i(\omega) - \xi_{r_i}^*(\omega)\| + (F_2 + F_1 n^2 \cdot \beta_\omega(|r_i - r_*|)),$$

из (18.18) находим

$$\|\xi_{r_i}^i(\omega) - \xi_{r_*}^*(\omega)\| \leq e^{L_2 \cdot (|t_* + r_* - t_i|)} \chi_\omega(|t_i - t_*|, |r_i - r_*|, \|x_i - x_*\|, \|v_i - v_*\|, \Phi_*[\alpha^i - \alpha^*]), \quad (18.38)$$

где

$$\chi_\omega(|t_i - t_*|, |r_i - r_*|, \|x_i - x_*\|, \|v_i - v_*\|, \Phi_*[\alpha^i - \alpha^*]) \rightarrow 0 \quad (18.39)$$

при

$$t_i \downarrow t_*, \quad r_i \downarrow r_*, \quad x_i \rightarrow x_*, \quad v_i \rightarrow v_*, \quad \alpha^i \xrightarrow{\omega} \alpha^*. \quad (18.40)$$

Оценка (18.37) при соответствующих изменениях в формулах (18.35), (18.36) остается справедливой и для $r_i < r_*$, либо $t_i < t_*$. Следовательно, оценки (18.38)–(18.40) имеют место и в случае, если в (18.40) вместо сходимости $t_i \downarrow t_*$, $r_i \downarrow r_*$ рассматривать сходимость $t_i \rightarrow t_*$, $r_i \rightarrow r_*$. Теорема V.2 доказана. $\square$

18.3. Некоторые свойства обобщенных программных управлений и порождаемых ими случайных процессов. В настоящем разделе исследуются свойства обобщенных программных управлений и порождаемых ими случайных процессов, которые будут использованы при доказательстве теоремы V.3. Все утверждения приводятся для обобщенных программных управлений первого игрока. Для того, чтобы получить аналогичные утверждения для обобщенных программных управлений второго игрока и порождаемых ими случайных процессов, нужно во всех последующих рассуждениях заменить v_* на u_* , $\alpha \in A_I$ на $\alpha \in A_{II}$, символ $\min$ на $\max$, вместо множества $F_1(t_*, x_*, v_*)$ (18.60) рассматривать множество $F_2(t_*, x_*, u_*)$ (18.82), поменять в формулах (18.77) (18.78) надстрочный символ черточку на звездочку, а в формуле (18.81) — надстрочную звездочку на черточку. Ряд полезных утверждений из теории случайных процессов приводится в этом разделе без доказательства, но со ссылкой на источник, где это доказательство содержится.

Лемма V.1. Пусть $\tau(\cdot)$ — марковский момент относительно $\{\mathcal{F}_s\}$ и $\mathcal{F}_\tau$ — порождаемая им σ -алгебра подмножеств на Ω . Тогда $\tau(\cdot)$ измерим относительно $\mathcal{F}_\tau$. Если $\tau^{(1)}(\cdot)$ и $\tau^{(2)}(\cdot)$ — два марковских момента и $\tau^1(\omega) \leq \tau^2(\omega)$ $\mathbb{P}$ -п.в., то $\mathcal{F}_{\tau^{(1)}} \subset \mathcal{F}_{\tau^{(2)}}$ (см. [102, лемма 1.5]).

Лемма V.2. Пусть $(\varphi_s, \mathcal{F}_s)$, $s \in T$, — непрерывный справа (или слева) случайный процесс. Тогда $\varphi_\tau = \varphi_{\tau(\omega)}(\omega)$ — случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_\tau$ (см. [102, следствие из леммы 1.8]).

Лемма V.3. Пусть $\tau^{(1)} : \Omega \rightarrow [0, T - t_*]$ — марковский момент относительно неубывающей системы σ -алгебр $\{\mathcal{F}_s\}$, $\mathcal{F}_{\tau^{(1)}}$ — σ -алгебра на Ω , порожденная $\tau^{(1)}$. Пусть

$$\Omega \rightarrow [0, T] : \omega \mapsto \delta[\omega] \quad (18.41)$$

— $\mathcal{F}_{\tau^{(1)}}$ -измеримое отображение. Тогда случайная функция

$$\omega \mapsto \tau^0(\omega) = \tau^1(\omega) + \delta[\omega] \quad (18.42)$$

является марковским моментом относительно $\{\mathcal{F}_s\}$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 1.3 в [102] и следует из соотношения

$$\begin{aligned} \left\{ \omega : \tau^{(1)}(\omega) + \delta[\omega] \leq s \right\} &= \left\{ \omega : \tau^{(1)}(\omega) = 0, \delta[\omega] = s \right\} \cup \left\{ \tau^{(1)}(\omega) = s, \delta[\omega] = 0 \right\} \cup \\ &\cup \left(\bigcup_{\substack{a+b \leq s \\ a, b \geq 0}} \left\{ \omega : \tau^{(1)}(\omega) < a, \delta[\omega] < b \right\} \right), \end{aligned} \quad (18.43)$$

где a, b — рациональные числа. Согласно определению $\mathcal{F}_\tau$, $\{\mathcal{F}_s\}$ и [102, лемма 1.1], имеем для $s \geq 0$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left\{ \omega : \tau^{(1)}(\omega) = 0, \delta[\omega] = s \right\} &\in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s, \\ \left\{ \omega : \delta[\omega] = 0, \tau^{(1)}(\omega) = s \right\} \cap \left\{ \omega : \tau^{(1)} \leq s \right\} &= \left\{ \omega : \delta[\omega] = 0, \tau^{(1)}(\omega) = s \right\} \in \mathcal{F}_s, \\ \left\{ \omega : \tau^{(1)}(\omega) < a, \delta[\omega] < b \right\} &\in \mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_s, \end{aligned} \quad (18.44)$$

откуда следует, что для любого $s \in [0, T]$

$$\left\{ \omega : \tau^{(0)}(\omega) \leq s \right\} \in \mathcal{F}_s, \quad (18.45)$$

т.е. $\tau^{(0)}(\omega) = \tau^{(1)}(\omega) + \delta[\omega]$ является марковским моментом относительно $\{\mathcal{F}_s\}$; $\tau^{(0)}(\omega) \geq \tau^{(1)}(\omega)$ для $\omega \in \Omega$ $\mathbb{P}$ -п.в.. $\square$

Лемма V.4. Пусть $\tau^{(1)}(\cdot)$ и $\tau^{(2)}(\cdot)$ — марковские моменты относительно $\{\mathcal{F}_s\}$, $\tau^{(1)}(\omega) \leq \tau^{(2)}(\omega)$ $\mathbb{P}$ -п.в.. Пусть $\alpha^{(i)}[\omega] : \Omega \rightarrow A_I$, $i = 1, 2$, — отображения, измеримые относительно σ -алгебр $\mathcal{F}_{\tau^{(i)}}$ соответственно. Тогда отображение

$$\omega \mapsto \alpha^0[\omega] = \begin{cases} \alpha_s^{(1)}[\omega] & \text{при } 0 \leq s \leq \tau^{(1)}(\omega), \\ \alpha_s^{(2)}[\omega] & \text{при } \tau^{(1)}(\omega) \leq s \leq T \end{cases} \quad (18.46)$$

является измеримым относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{\tau^{(2)}}$.

Доказательство. Согласно определению σ -алгебры $\mathcal{F}_{\tau^{(2)}}$ достаточно показать, что для любого замкнутого подмножества $\mathcal{A}$ множества A_I и любого $t \in \mathbb{T}'$ справедливо

$$\left\{ \omega : \alpha^0[\omega] \in \mathcal{A} \right\} \cap \left\{ \omega : \tau^{(2)}(\omega) \leq t \right\} \in \mathcal{F}_t. \quad (18.47)$$

Построим следующие многозначные отображения отрезка $[0, T]$ на множество всех замкнутых подмножеств метрического компакта A_I :

$$t \mapsto \mathcal{A}_t^1 = \left\{ \alpha \in A_I \left| \begin{array}{l} \alpha_s = \alpha_s^0[\omega], \ 0 \leq s \leq t, \ \omega \in \Omega, \\ \alpha_s : [t, T] \mapsto \text{rpm}(P) \text{ измеримо, если } \alpha^0[\omega] \in \mathcal{A}, \\ \text{в противном случае } \mathcal{A}_t^1 = \emptyset \end{array} \right. \right\}, \quad (18.48)$$

$$t \mapsto \mathcal{A}_t^2 = \left\{ \alpha \in A_I \left| \begin{array}{l} \alpha_s = \alpha_s^0[\omega], \ t \leq s \leq T, \ \omega \in \Omega, \\ \alpha_s : [0, t] \mapsto \text{rpm}(P) \text{ измеримо, если } \alpha^0[\omega] \in \mathcal{A}, \\ \text{в противном случае } \mathcal{A}_t^2 = \emptyset \end{array} \right. \right\}. \quad (18.49)$$

Отображение $t \mapsto \mathcal{A}_t^1$ непрерывно справа (и полунепрерывно сверху по включению), а отображение $t \mapsto \mathcal{A}_t^2$ непрерывно слева (и полунепрерывно сверху по включению) в метрике Хаусдорфа. Следовательно, согласно леммам V.1 и V.2, отображения

$$\omega \mapsto \mathcal{A}_{\tau(1)(\omega)}^{(1)}, \quad \omega \mapsto \mathcal{A}_{\tau(1)(\omega)}^{(2)} \quad (18.50)$$

являются и $\mathcal{F}_{\tau(1)}$ -измеримыми, и $\mathcal{F}_{\tau(2)}$ -измеримыми. Отсюда, а также из определения $\alpha^{(i)}[\omega]$, $i = 1, 2$, следует

$$\left\{ \omega : \alpha^{(1)}[\omega] \in \mathcal{A}_{\tau(1)(\omega)}^1 \right\} \subset \mathcal{F}_{\tau(1)} \subset \mathcal{F}_{\tau(2)}, \quad \left\{ \omega : \alpha^{(2)}[\omega] \in \mathcal{A}_{\tau(1)(\omega)}^2 \right\} \subset \mathcal{F}_{\tau(2)}. \quad (18.51)$$

Но тогда из (18.51) и соотношения

$$\left\{ \omega : \alpha^{(0)}[\omega] \in \mathcal{A} \right\} = \left\{ \omega : \alpha^{(1)}[\omega] \in \mathcal{A}_{\tau(1)(\omega)}^1 \right\} \cap \left\{ \omega : \alpha^{(2)}[\omega] \in \mathcal{A}_{\tau(1)(\omega)}^2 \right\} \quad (18.52)$$

в силу определения σ -алгебры $\mathcal{F}_{\tau(2)}$ вытекает справедливость условия (18.47). $\square$

Лемма V.5. Пусть $\rho : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)$ — решение стохастического уравнения (18.17), $\tau(\cdot)$ — марковский момент относительно $\{\mathcal{F}_s\}$, $\mathcal{F}_\tau$ — σ -алгебра на Ω , порождаемая $\tau(\cdot)$. Тогда существует отображение $\Omega \rightarrow A_I : \omega \mapsto \alpha^*[\omega]$, измеримое относительно $\mathcal{F}_\tau$ и такое, что при $\mathbb{P}$ -н.в. $\omega \in \Omega$ справедливо соотношение

$$\rho(t_* + \tau(\omega), \xi_{\tau(\omega)}(t_*, x_*, \alpha^*[\omega], v_*)(\omega)) = \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + \tau(\omega), \xi_{\tau(\omega)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)). \quad (18.53)$$

Доказательство. Согласно утверждению V.2 и лемме V.2 функции

$$\begin{aligned} \rho(\alpha; \cdot) : \omega &\mapsto \rho(t_* + \tau(\omega), \xi_{\tau(\omega)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)), \\ \rho[\cdot] : \omega &\mapsto \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + \tau(\omega), \xi_{\tau(\omega)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \end{aligned}$$

являются $\mathcal{F}_\tau$ -измеримыми при любых фиксированных

$$(t_*, x_*, \alpha, v_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times A_I \times Q, \quad (t_*, x_*, v_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times Q$$

соответственно, а при почти всех $\omega \in \Omega$ функция

$$\rho(\cdot, \omega) : A_I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \alpha \mapsto \rho(t_* + \tau(\omega), \xi_{\tau(\omega)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \quad (18.54)$$

непрерывна для любых фиксированных $(t_*, x_*, v_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times Q$. Доопределим функцию $\rho(\alpha, \omega)$ таким образом, чтобы при каждом $\omega \in \Omega$ она была непрерывной (например, положим ее тождественно равной некоторой константе там, где она была не определена, т.е. на $A_I \times E$, $E \in \mathcal{F}_\tau$, $\mathbb{P}(E) = 0$), а также добьемся, чтобы при всех $\alpha \in A_I$ функция $\omega \mapsto \rho(\alpha, \omega)$ была измеримой относительно $\mathcal{F}_\tau$.

После этого, воспользовавшись следствием 6.3 и теоремой 7.2 из [257], для многозначного отображения

$$\omega \mapsto A^*(\omega) = \begin{cases} \alpha^* \in A_I : \rho(\alpha^*, \omega) - \rho[\omega] = 0 & \text{при } \omega \in \Omega \setminus E, \\ A_I & \text{при } \omega \in E \end{cases} \quad (18.55)$$

получаем, что существует $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый селектор

$$\Omega \rightarrow A_I, \quad \omega \mapsto \alpha^*[\omega], \quad \alpha^*[\omega] \in A^*(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (18.56)$$

причем из (18.55) следует (18.53). Лемма V.5 доказана. $\square$

Следствие V.1. Пусть $\rho : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция, $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)$ — решение стохастического уравнения (18.17). Тогда для любого $r \in (0, T - t_*)$ существует отображение $\Omega \rightarrow A_I$, $\omega \mapsto \alpha^*[\omega]$, измеримое относительно $\mathcal{F}_\tau$ и такое, что при почти всех $\omega \in \Omega$ справедливо соотношение

$$\rho(t_* + r, \xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha^*[\omega], v_*)(\omega)) = \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)). \quad (18.57)$$

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что если выбрать $\tau(\omega) \equiv r$, то функции $\omega \mapsto \rho(\alpha, \omega)$, $\omega \mapsto \rho[\omega]$ являются $\mathcal{F}_r$ -измеримыми и селектор $\omega \mapsto \alpha^*[\omega]$, полученный по схеме доказательства леммы V.5 (см. (18.56)), также измерим относительно $\mathcal{F}_r$. $\square$

Лемма V.6. Пусть $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)$ — решение стохастического уравнения (18.17). Тогда для суперпозиции $\xi_r[\omega] = \xi_r(t_*, x_*, \alpha[\omega], v_*)(\omega)$, где $\Omega \rightarrow A_I$, $\omega \mapsto \alpha[\omega]$ — измеримое относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_r$ отображение, справедливо неравенство

$$E\{\|\xi_r[\omega] - x_*\|\} < \infty. \quad (18.58)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из теоремы V.2 вытекает измеримость относительно $\mathcal{F}_r$ суперпозиции $\omega \mapsto \xi_r[\omega]$ отображений

$$(\alpha, \omega) \mapsto \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega), \quad \omega \mapsto \alpha[\omega].$$

Справедливо следующее представление:

$$\xi_r[\omega] = x_* + f_*[\omega] \cdot r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega) + \xi_r^{(1)}(\omega) + \xi_r^{(2)}(\omega) + \xi_r^{(3)}(\omega). \quad (18.59)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \xi_r[\omega] &= x_* + \int_0^r ds \int_P f(t_* + s, \xi_s[\omega], u, v_*) \alpha_s[\omega](du) + \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s(\omega) = \\ &= x_* + \int_0^r ds \int_P f(t_*, x_*, u, v_*) \alpha_s[\omega](du) + \psi(t_*) \int_0^r dW_s(\omega) + \\ &\quad + \int_0^r ds \int_P [f(t_* + s, \xi_s[\omega], u, v_*) - f(t_*, x_*, u, v_*)] \alpha_s[\omega](du) + \\ &\quad + \int_0^r ds \int_P [f(t_* + s, \xi_s[\omega], u, v_*) - f(t_* + s, x_*, u, v_*)] \alpha_s[\omega](du) + \\ &\quad + \int_0^r [\psi(t_* + s) - \psi(t_*)] dW_s(\omega) = \\ &= x_* + f_*[\omega] \cdot r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega) + \xi_r^{(1)}(\omega) + \xi_r^{(2)}(\omega) + \xi_r^{(3)}(\omega). \end{aligned}$$

Здесь

$$f_*[\omega] \in \text{co} \{f(t_*, x_*, u, v_*) : u \in P\} = F_1(t_*, x_*, v_*), \quad (18.60)$$

$$\sqrt{r} \cdot \eta(\omega) = \int_0^r dW_s(\omega) \quad (18.61)$$

($\eta(\omega)$ — m -мерная нормированная гауссовская величина с независимыми компонентами согласно свойствам винеровского процесса W_s),

$$\xi_r^{(1)}(\omega) = \int_0^r ds \int_P [f(t_* + s, x_*, u, v_*) - f(t_*, x_*, u, v_*)] \alpha_s[\omega](du), \quad (18.62)$$

$$\xi_r^{(2)}(\omega) = \int_0^r ds \int_P [f(t_* + s, \xi_s[\omega], u, v_*) - f(t_* + s, x_*, u, v_*)] \alpha_s[\omega](du), \quad (18.63)$$

$$\xi_r^{(3)}(\omega) = \int_0^r [\psi(t_* + s) - \psi(t_*)] dW_s. \quad (18.64)$$

Используя условия (18.3), (18.4), получим следующие оценки:

$$\|\xi_r^{(1)}\| \leq \int_0^r ds \int_P \|f(t_* + s, x_*, u, v_*) - f(t_*, x_*, u, v_*)\| \alpha_s[\omega](du) \leq \beta(r)r, \quad (18.65)$$

$$\begin{aligned} \|\xi_r^{(2)}\| &\leq \int_0^r ds \int_P \|f(t_* + s, \xi_s[\omega], u, v_*) - f(t_* + s, x_*, u, v_*)\| \alpha_s[\omega](du) \leq \\ &\leq L_2 \cdot \int_0^r \|\xi_s[\omega] - x_*\| ds, \end{aligned} \quad (18.66)$$

$$\|\xi_r^{(3)}\| \leq L_1 \cdot r^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^m \eta_i^2(\omega)}, \quad E \left\{ \|\xi_r^{(3)}\| \right\} \leq L_1 \cdot r^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot m}. \quad (18.67)$$

Таким образом, из (18.59)–(18.67), (18.3), (18.4) получим

$$E \left\{ \|\xi_r(\omega) - x_*\| \right\} \leq K_2 r + \sqrt{r m n} + \beta(r)r + L_2 \int_0^r E \left\{ \|\xi_s[\omega] - x_*\| \right\} ds + L_1 \cdot r^\alpha \sqrt{r m n}. \quad (18.68)$$

Полагая

$$K = K_2 T + K_1 \sqrt{m n} + \max_{r \in [0, T]} \beta(r) \cdot \sqrt{T} + L_1 \cdot T^\alpha \sqrt{r m} < \infty, \quad (18.69)$$

с помощью леммы Гронуолла из (18.68) выводим

$$E \left\{ \|\xi_s[\omega] - x_*\| \right\} \leq \sqrt{r} K \exp L_2 r < \infty. \quad (18.70)$$

Лемма V.6 доказана. $\square$

Введем в рассмотрение класс функций Lip , элементами которого являются отображения $\rho : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию Липшица с соответствующими положительными константами $L_\rho < \infty$:

$$|\rho(t_1, x_1) - \rho(t_2, x_2)| < L_\rho (|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T] = \mathbb{T}', \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (18.71)$$

Лемма V.7. Пусть $\rho \in \text{Lip}$, $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)$ — решение стохастического уравнения (18.17). Для любых $(t_*, x_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n$, $r \in (0, T - t_*]$, $v_* \in Q$ справедлива оценка

$$\left| E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)) \right\} - E \left\{ \min_{f \in F_1(t_*, x_*, v_*)} \rho(t_* + r, x_* + f \cdot r + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta) \right\} \right| \leq r \cdot \zeta(r), \quad (18.72)$$

где

$$\zeta(r) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (18.73)$$

класс A_I определен соотношением (18.16), а компакт $F_1(t_*, x_*, v_*)$ — соотношением (18.60).

Доказательство. Пусть для $\rho \in \text{Lip}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} E \left\{ \min_{f \in F_1(t_*, x_*, v_*)} \rho(t_* + r, x_* + f \cdot r + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta) \right\} &= \\ &= E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + f^0[\omega] \cdot r + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta(\omega)) \right\}, \end{aligned} \quad (18.74)$$

где отображение $f^0[\cdot] : \Omega \mapsto F_1(t_*, x_*, v_*)$ выбрано (по схеме доказательства леммы V.5) $\mathcal{F}_r$ -измеримым.

Из теоремы Каратеодори [21, теорема I.6.2] для выпуклого компакта $F_1(t_*, x_*, v_*)$ (18.60) следует существование таких мер $\alpha^0[\omega] \in \text{grm}(P)$, $\omega \in \Omega$, что

$$f^0[\omega] = \int_P f(t_*, x_*, u, v_*) \alpha^0[\omega](du), \quad (18.75)$$

причем отображение $\Omega \rightarrow \text{grm}(P)$, $\omega \mapsto \alpha^0[\omega]$ $\mathcal{F}_r$ -измеримо [21, 257].

Если отображение $\omega \mapsto \alpha^*[\omega] \in A_I$ выбрано согласно следствию V.1, а отображение $\omega \mapsto \bar{\alpha}[\omega] \in A_I$ таково, что

$$\bar{\alpha}_s[\omega] = \alpha_s^0[\omega], \quad 0 \leq s \leq T - t_*, \quad (18.76)$$

то, используя представление и обозначения (18.59)–(18.64) из леммы V.6 и условие (18.57), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*))(\omega) \right\} = \\ = E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + f^*[\omega] \cdot r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega) + \xi_r^{(1)*} + \xi_r^{(2)*} + \xi_r^{(3)*}) \right\} \leq \\ \leq E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + \bar{f}[\omega] \cdot r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega) + \bar{\xi}_r^{(1)} + \bar{\xi}_r^{(2)} + \bar{\xi}_r^{(3)}) \right\}, \quad (18.77) \end{aligned}$$

где надстрочные символы $*$ и $\bar{}$ обозначают, что соответствующая величина вычислена соответственно при $\alpha^*[\omega]$ либо при $\bar{\alpha}[\omega]$.

Из (18.43) и условия (18.71) вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*))(\omega) \right\} - \\ - E \left\{ \min_{f \in F_1(t_*, x_*, v_*)} \rho(t_* + r, x_* + f \cdot r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega)) \right\} \leq \\ \leq E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + \bar{f}[\omega]r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega) + \bar{\xi}_r^{(1)}(\omega) + \bar{\xi}_r^{(2)}(\omega) + \bar{\xi}_r^{(3)}(\omega)) \right\} - \\ - E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + \bar{f}[\omega]r + \sqrt{r}\psi(t_*)\eta(\omega)) \right\} \leq \\ \leq L_\rho \cdot E \left\{ \left\| \bar{\xi}_r^{(1)} \right\| + \left\| \bar{\xi}_r^{(2)} \right\| + \left\| \bar{\xi}_r^{(3)} \right\| \right\}. \quad (18.78) \end{aligned}$$

Используя условия (18.65)–(18.67), (18.71) и (18.3), эту оценку можно продолжить:

$$E \left\{ \left\| \bar{\xi}_r^{(1)} \right\| + \left\| \bar{\xi}_r^{(2)} \right\| + \left\| \bar{\xi}_r^{(3)} \right\| \right\} \leq r \left[\beta(r) + L_2 \sqrt{r} \cdot K \exp(L_2 r) + L_1 r^{\alpha - \frac{1}{2}} \sqrt{nm} \right]. \quad (18.79)$$

Полагая

$$\zeta(r) = L_\rho \cdot \left[\beta(r) + L_2 \sqrt{r} \cdot K \exp(L_2 r) + L_1 r^{\alpha - \frac{1}{2}} \sqrt{nm} \right], \quad (18.80)$$

получаем из (18.78)–(18.80) одно из неравенств (18.72) и условие (18.71).

Аналогичными оценками проверяется и второе неравенство в (18.72) с использованием (18.74), (18.77) и (18.71):

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \min_{f \in F_1(t_*, x_*, v_*)} \rho(t_* + r, x_* + r \cdot f + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta(\omega)) \right\} - \\
& - E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*))(\omega) \right\} = \\
& = E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + r \cdot f^0[\omega] + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta(\omega)) \right\} - \\
& - E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + r \cdot f^*[\omega] + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta(\omega) + \xi_r^{(1)*} + \xi_r^{(2)*} + \xi_r^{(3)*}) \right\} \leq \\
& \leq E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + f^*[\omega] \cdot r + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta(\omega)) \right\} - \\
& - E \left\{ \rho(t_* + r, x_* + f^*[\omega] \cdot r + \sqrt{r} \psi(t_*) \eta(\omega) + \xi_r^{(1)*} + \xi_r^{(2)*} + \xi_r^{(3)*}) \right\} \leq \\
& \leq L_\rho \cdot E \left\{ \|\bar{\xi}_r^{(1)*}\| + \|\bar{\xi}_r^{(2)*}\| + \|\bar{\xi}_r^{(3)*}\| \right\} \leq r \cdot \zeta(r),
\end{aligned} \tag{18.81}$$

где $\zeta(r)$ имеет вид (18.80). Лемма V.7 доказана. $\square$

Для доказательства аналогичных утверждений относительно обобщенных программных управлений второго игрока и порождаемых ими случайных процессов необходимо использовать следующие конструкции:

(а) множество $F_2(t_*, x_*, u_*)$ вида

$$F_2(t_*, x_*, u_*) = \text{co} \{ f(t_*, x_*, u_*, v) : v \in Q \} \tag{18.82}$$

вместо множества $F_1(t_*, x_*, v_*)$ (18.60);

(б) множество

$$A_{II} = \{ \forall \alpha_{(\cdot)} : s \mapsto \alpha_s : \mathbb{T}' \rightarrow \text{grm}(Q) \text{ измеримо} \} \tag{18.83}$$

обобщенных программных управлений второго игрока;

(с) управляемый случайный процесс $\xi_r = \xi_r(t_*, x_*, u_*, \alpha)$, порождаемый таким управлением $\alpha \in A_{II}$ и получающийся как решение стохастического уравнения

$$\begin{aligned}
\xi_r &= x_* + \int_0^r ds \int_P f(t_* + s, \xi_s, u_*, v) \alpha_s(du) + \int_0^r \psi(t_* + s) dW_s, \\
r &\in [0, T - t_*], \quad (t_*, x_*, u_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times P.
\end{aligned} \tag{18.84}$$

Замечание о том, какие нужны изменения в формулах и в доказательстве подобных результатов для второго игрока, было сделано в начале этого раздела.

18.4. Свойства стабильности непрерывных функций. В данном разделе приводятся формулировки понятий стохастических *u*-стабильности и *v*-стабильности непрерывных функций, введенные в работе [78]. Эти определения использованы для получения инфинитезимальной формы (19.8) и (19.9) условий стабильности и применения последней для развития концепции минимаксного решения в краевой задаче Коши для квазилинейного параболического уравнения Айзекса. Возможны и другие эквивалентные определения понятия стабильности.

Отметим, что определения V.1 и V.2 свойств *u*-стабильности и *v*-стабильности имеют в детерминированном случае аналог, использующий аппарат теории дифференциальных включений [73, 149, 265, 293]. В основе понятий стохастической стабильности лежат обобщенные программные управления (18.16) (18.83) и порождаемые ими стохастические процессы (18.17) (18.84).

Итак, напомним определения свойств стабильности для непрерывной функции $\rho(t, x)$ относительно стохастических процессов (18.17) и (18.84).

Определение V.1. Непрерывная функция $\rho : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *и-стабильной*, если при всех $(t_*, x_*, v_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times Q$, $r \in [0, T - t_*]$ выполняется неравенство

$$E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)) \right\} \leq \rho(t_*, x_*). \quad (18.85)$$

Как вытекает из свойства (ii) теоремы V.2 и из леммы V.1, при $\mathbb{P}$ -п.в. $\omega \in \Omega$ минимум под знаком математического ожидания в неравенстве (18.85) достигается. Таким образом, условие (18.85) означает, что при любых заданных $(t_*, x_*, v_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times Q$, $r \in [0, T - t_*]$, $\omega \in \Omega$ можно подобрать такое обобщенное программное управление первого игрока $\alpha[\omega] \in A_I$, что для соответствующих траекторий $\xi_r[\omega]$ случайного процесса (18.17) среднее значение случайной величины

$$\rho[\xi_r[\omega]] = \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha[\omega], v_*))(\omega)$$

не превзойдет числа $\rho(t_*, x_*)$.

Определение V.2. Непрерывная функция $\rho : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *в-стабильной*, если при всех $(t_*, x_*, u_*) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \times P$, $r \in [0, T - t_*]$ выполняется неравенство

$$E \left\{ \max_{\alpha \in A_{II}} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, u_*, \alpha)) \right\} \geq \rho(t_*, x_*). \quad (18.86)$$

Утверждение V.3 (см. [78]). Для того, чтобы функция $\rho(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ совпадала с функцией $\rho_0(\cdot)$ цены дифференциальной игры (18.1), (18.8), необходимо и достаточно, чтобы она была одновременно *и-стабильна* и *в-стабильна* и удовлетворяла краевому условию

$$\rho(T, x) = \gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (18.87)$$

18.5. Обобщенные стохастические производные. Как известно [78, 247], в рассматриваемой диффузионной дифференциальной игре (18.1), (18.8) при сделанных предположениях (18.3)–(18.7), (18.9) функция цены игры $\rho_0(t, x)$ (18.15) является элементом класса Lip. Согласно теореме Радемахера функция из класса Lip может быть недифференцируема на множестве нулевой меры в $\mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n$. Для инфинитезимального анализа таких функций в каждой точке полосы $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ введем следующие понятия обобщенных стохастических производных.

Пусть $\rho \in \text{Lip}$, $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$, множество F — компакт в $\mathbb{R}^n$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ — m -мерная нормированная гауссовская случайная величина с независимыми компонентами, $\psi : \mathbb{T}' \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — матрица диффузии, удовлетворяющая условиям (18.3).

Определение V.3. Следующие величины называются соответственно *нижней* $\frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F, \psi)}$ и *верхней* $\frac{\tilde{d}^+ \rho(t, x)}{(F, \psi)}$ обобщенными стохастическими производными функции $\rho \in \text{Lip}$ в точке (t, x) относительно множества F и матрицы диффузии $\psi = \psi(t)$:

$$\frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F, \psi)} = \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[E \left\{ \min_{f \in F} \rho(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi(t) \eta) \right\} - \rho(t, x) \right], \quad (18.88)$$

$$\frac{\tilde{d}^+ \rho(t, x)}{(F, \psi)} = \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[E \left\{ \max_{f \in F} \rho(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi(t) \eta) \right\} - \rho(t, x) \right]. \quad (18.89)$$

Заметим, что если $\psi(t) = 0$, а множество F состоит из единственного элемента f , то выражения (18.88), (18.89) обращаются в нижнюю и верхнюю полупроизводные Дини от функции $\rho(\cdot) \in \text{Lip}$ в точке (t, x) по направлению $(1, f)$ (см. п. 2.3, определение I.8).

Нетрудно проверить, что если в окрестности точки (t, x) функция $\rho(\cdot)$ имеет первую производную по t и первую и вторые производные по x_i , то справедливы равенства

$$\frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F, \psi(t))} = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \min_{f \in F} \left\langle \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, f \right\rangle + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (18.90)$$

$$\frac{\tilde{d}^+ \rho(t, x)}{(F, \psi(t))} = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \max_{f \in F} \left\langle \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, f \right\rangle + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (18.91)$$

Здесь матрица $A(t) = (a_{ij}(t))$ порядка n имеет вид

$$A(t) = \frac{1}{2} \psi(t) \psi^T(t),$$

символ T означает операцию транспонирования.

Для стохастических производных можно разработать методы их исчисления. В частности, в разделе 20 получены формулы для обобщенных стохастических производных от функций, дифференцируемых по части переменных.

19. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ—АЙЗЕКСА И ЕГО МИНИМАКСНОЕ РЕШЕНИЕ В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ

19.1. Основное уравнение для функции цены стохастической дифференциальной игры.

Как известно (см., например, [83, 196, 226, 275]), функция цены дифференциальной игры (18.1), (18.8) липшицева и в точках гладкости удовлетворяет следующему уравнению в частных производных параболического типа, которые называют основным уравнением для диффузионной игры (18.1), (18.8), или *уравнением Айзекса*:

$$\frac{\partial \rho_0(t, x)}{\partial t} + H \left(t, x, \frac{\partial \rho_0(t, x)}{\partial x} \right) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 \rho_0(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (19.1)$$

где гамильтониан $H(t, x, s)$ системы (18.1), имеет вид (18.7):

$$H(t, x, s) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle$$

(так что квазилинейное параболическое уравнение (19.1) имеет тип уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса), символ $\frac{\partial \rho_0}{\partial x}$ означает вектор-градиент

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \rho_0}{\partial x_n} \right),$$

матрица $A(t) = (a_{ij}(t))$ порядка n имеет вид

$$A(t) = \frac{1}{2} \psi(t) \psi^T(t). \quad (19.2)$$

Очевидно, что для функции цены выполняется также краевое условие

$$\rho_0(T, x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (19.3)$$

19.2. Минимаксное решение краевой задачи (19.1)–(19.3). Рассмотрим краевую задачу (19.1)–(19.3) в предположении, что ее входные данные удовлетворяют условиям (18.2)–(18.7), (18.9). Если при этом матрица $A(t)$ положительно определена, то краевая задача (19.1), (19.3) имеет единственное классическое решение [83, 122]. В этом случае задача (19.1)–(19.3) полностью определяет функцию цены диффузионной дифференциальной игры (18.1), (18.8), поскольку функция цены совпадает с этим гладким решением. В частности, это справедливо, когда шум, действующий на систему, является невырожденным, т.е. $m = n$ и матрица $\psi(t)$ в (18.1) при всех $t \in T$ невырождена.

В случае, когда (19.1) — вырожденное уравнение параболического типа, краевая задача (19.1)–(19.3) не имеет классического решения. По аналогии с детерминированным случаем (см. п. 2.5, условия **(U2)** и **(L2)**), введем определение минимаксного решения краевой задачи (19.1)–(19.3) в

терминах обобщенных стохастических производных. Это определение, согласно теории минимаксных решений, можно рассматривать как инфинитезимальную форму обобщенного метода характеристик для параболического уравнения Гамильтона—Якоби—Айзекса.

Определение V.4. Функция $\rho(\cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in \text{Lip}$, называется *минимаксным решением* задачи (19.1)–(19.3), если она удовлетворяет краевому условию

$$\rho(T, x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (19.4)$$

и при всех $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\max_{v \in Q} \frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F_1(t, x, v), \psi(t))} \leq 0, \quad \min_{u \in P} \frac{\tilde{d}^+ \rho(t, x)}{(F_2(t, x, u), \psi(t))} \geq 0, \quad (19.5)$$

где

$$F_1(t, x, v) = \text{co} \{f(t, x, u, v) : u \in P\}, \quad F_2(t, x, u) = \text{co} \{f(t, x, u, v) : v \in Q\}. \quad (19.6)$$

В разделе 19.3 будет получена теорема V.4 существования и единственности минимаксного решения краевой задачи (19.1)–(19.3) в предположениях (18.2)–(18.7), (18.9). Эта теорема будет получена как следствие теоремы V.3 о свойствах стохастической стабильности для функции цены диффузионной дифференциальной игры (18.1), (18.8).

19.3. Инфинитезимальная форма условий стабильности. Сформулируем и докажем основной результат данного раздела.

Теорема V.3. Для того чтобы функция $\rho(t, x) \in \text{Lip}$ была функцией цены стохастической дифференциальной игры (18.1), (18.8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\rho(T, x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (19.7)$$

$$\max_{v \in Q} \frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F_1(t, x, v), \psi)} \leq 0, \quad (19.8)$$

$$\min_{u \in P} \frac{\tilde{d}^+ \rho(t, x)}{(F_2(t, x, u), \psi)} \geq 0, \quad (19.9)$$

где

$$F_1(t, x, v) = \text{co} \{f(t, x, u, v) : v \in Q\}, \quad F_2(t, x, u) = \text{co} \{f(t, x, u, v) : v \in P\},$$

$\psi = \psi(t)$ — матрица диффузии в уравнении (18.1), связанная с основным уравнением (19.1) соотношением (19.2).

Доказательство. Как следует из утверждения V.3, для доказательства теоремы V.3 достаточно установить эквивалентность условий (19.8), (19.9) и условий (18.85), (18.86) u - и v -стабильности соответственно.

Докажем сначала, что из условия u -стабильности (18.85) вытекает условие (19.8).

Действительно, для любых фиксированных $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times Q$ и $r \in [0, T - t]$ из условия (18.85) и леммы V.7 следует оценка

$$\begin{aligned} & \left[E \left\{ \min_{f \in F_1(t, x, v)} \rho(t + r, x + r \cdot f + \sqrt{r} \psi(t) \eta) \right\} - \rho(t, x) \right] r^{-1} \leq \\ & \leq \left[E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t + r, \xi_r(t, x, \alpha, v))(\omega) \right\} - \rho(t, x) \right] r^{-1} + \zeta(r) \leq \zeta(r). \end{aligned}$$

Переходя в обеих частях этого неравенства к пределу при $r \downarrow 0$, из (18.73), (18.88) получим

$$\frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F_1(t, x, v), \psi(t))} = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{E \left\{ \min_{f \in F_1(t, x, v)} \rho(t + r, x + r \cdot f + \sqrt{r} \psi(t) \eta) \right\} - \rho(t, x)}{r} \leq 0, \quad (19.10)$$

откуда в силу произвольности $v \in Q$ следует (19.8).

Докажем теперь импликацию (19.8) $\implies$ (18.85). Пусть для функции $\rho \in \text{Lip}$ выполняется условие (19.8). Выбрав произвольное положительное число ε , построим функцию

$$\rho^\varepsilon(t, x) = \rho(t, x) - (T - t) \cdot \varepsilon. \quad (19.11)$$

Нетрудно проверить, что функция ρ^ε удовлетворяет неравенству

$$\max_{v \in Q} \frac{\tilde{d}^- \rho(t, x)}{(F_1(t, x, v), \psi(t))} \leq -\varepsilon. \quad (19.12)$$

Покажем, что функция ρ^ε удовлетворяет в произвольной фиксированной точке $(t, x, v) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n \times Q$ и при любом заданном числе $r \in (0, T - t_*)$ условию стабильности (18.85). Воспользуемся для этого леммой Цорна (см. [57]).

Введем в рассмотрение частично упорядоченное множество S , элементами которого являются марковские моменты $\tau(\cdot)$ (относительно семейства σ -алгебр $\{\mathcal{F}_s\}$) такие, что

$$0 \leq \tau(\omega) \leq r \quad \mathbb{P}\text{-п.в.}, \quad (19.13)$$

$$E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon \left(t + \tau, \xi_\tau(t_*, x_*, \alpha, v_*) \right) \right\} \leq \rho^\varepsilon(t_*, x_*). \quad (19.14)$$

Очевидно, что множество S непусто, так как

$$\tau_0(\omega) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 \in S.$$

Из условия (19.12) и леммы V.7 вытекает также, что существуют такие $\tau_C(\omega) \equiv C > 0$, где C — константы, достаточно близкие к нулю, что $\tau_C(\omega) \in S$.

Для произвольной пары элементов (τ_1, τ_2) из множества S определено отношение порядка $\tau_1 \geq \tau_2$ (соответственно, $\tau_1 > \tau_2$):

$$\tau_1(\omega) \geq \tau_2(\omega) \quad (\text{соответственно, } \tau_1(\omega) > \tau_2(\omega)) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (19.15)$$

Рассмотрим линейно упорядоченное подмножество $\tilde{S} \subset S$. Каждому элементу $\tau \in \tilde{S}$ поставим в соответствие число $b = b(\tau)$ следующим образом:

$$\tau \mapsto b = b(\tau) = E\{\tau\} \leq r = E\{\tau \equiv r\}. \quad (19.16)$$

Из условий (19.13), (19.16) следует, что $\tilde{S}$ — ограниченное множество, числовое множество математических ожиданий его элементов имеет точную верхнюю грань $b_* \leq r$ и существует последовательность

$$b_i = b(\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

такая, что

$$\tau_i \in \tilde{S}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad b_i \uparrow b_* \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty. \quad (19.17)$$

Из линейной упорядоченности множества $\tilde{S}$ и линейности операции $E\{\cdot\}$ нетрудно вывести (напримр, методом от противного), что для элементов последовательности $\{\tau_i\}$, отвечающей монотонно возрастающей последовательности $\{b_i\}$ (19.17), справедливы следующие отношения порядка:

$$\tau_{i+1} > \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (19.18)$$

Отсюда вытекает, что при почти всех $\omega \in \Omega$ последовательности $\{\tau_i(\omega)\}$, $i = 1, 2, \dots$, монотонно не убывают, ограничены сверху числом r , а значит, существуют пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i(\omega) = \tau_*(\omega) = \sup_{i=1,2,\dots} \{\tau_i(\omega)\}. \quad (19.19)$$

Согласно [102, лемма 1.4], $\tau_* = \tau_*(\omega)$ — также марковский момент относительно $\{\mathcal{F}_s\}$ и, поскольку в силу теоремы Лебега можно перейти к пределу по $i \rightarrow \infty$ под знаком математических ожиданий в соотношениях

$$E\{\tau_i\} = b_i \leq b_* \leq r, \quad E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau_i, \xi_{\tau_i}(t_*, x_*, \alpha, v_*) \right) \right\} \leq \rho^\varepsilon(t_*, x_*),$$

получаем для $\tau_*(\omega)$ соотношения

$$E\{\tau_i(\cdot)\} \leq E\{\tau_*(\cdot)\} = b_* \leq r, \quad E\left\{\min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon\left(t_* + \tau_*(\cdot), \xi_{\tau_*(\cdot)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)\right)\right\} \leq \rho^\varepsilon(t_*, x_*),$$

т.е.

$$\tau_* \in S, \quad \tau_* \geq \tau \quad \forall \tau \in \tilde{S},$$

а значит, τ_* является верхней границей для линейно упорядоченного множества $\tilde{S}$.

Подмножество $\tilde{S} \subset S$ выбрано произвольно, следовательно, в силу леммы Цорна [57], в множестве S существует максимальный элемент $\tau_{\max}$ такой, что

$$\forall \tau \geq \tau_{\max} \quad \tau \in S \quad \Rightarrow \quad \tau(\omega) = \tau_{\max}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (19.20)$$

Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы доказать, что

$$\tau_{\max} = r \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (19.21)$$

Доказывать это утверждение будем методом от противного, предполагая, что существует такое множество $\Omega_* \in \mathcal{F}_{\tau_{\max}}$, для которого

$$\mathbb{P}(\Omega_*) > 0, \quad \tau_{\max}(\omega) < r \quad \text{при} \quad \omega \in \Omega_* \subset \Omega. \quad (19.22)$$

Дальше на базе предположения (19.22) будем строить противоречие с (19.20).

Построим многозначное отображение

$$B(\cdot) : [t_*, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, T - t_*]$$

согласно следующему правилу:

$$B(t, x) = \left\{ \delta \in [0, T] : E\left\{\min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon\left(t + \delta, \xi_\delta(t, x, \alpha, v_*)\right)\right\} \leq \rho^\varepsilon(t, x) \right\}. \quad (19.23)$$

Очевидно, что для любых (t, x) имеем $0 \in B(t, x)$.

Покажем, что множества $B(t, x)$ для любых $(t, x) \in [t_*, t_* + r) \times \mathbb{R}^n$ содержат элементы $\delta > 0$.

Подберем по заданному $\varepsilon > 0$ число $\beta > 0$ таким образом, чтобы

$$\zeta(\delta) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{для всех} \quad \delta \leq \beta, \quad (19.24)$$

где $\zeta(\cdot)$ — функция из условий (18.72), (18.73).

Из неравенства (19.12) вытекает, что число $\delta \in (0, \beta]$ можно подобрать так, чтобы

$$E\left\{\min_{f \in F_1(t, x, v_*)} \rho^\varepsilon\left(t + \delta, x + \delta \cdot f + \sqrt{\delta} \psi(t) \eta\right)\right\} - \rho^\varepsilon(t, x) \leq -\varepsilon \delta + \frac{\varepsilon}{4} \delta. \quad (19.25)$$

Как нетрудно заметить (см. определение (19.11) величины $\rho^\varepsilon(t, x)$), для функции $\rho^\varepsilon(t, x)$ лемма V.7 также справедлива, следовательно, из (18.72), (19.24), (19.25) вытекает оценка

$$E\left\{\min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon\left(t + \delta, \xi_\delta(t, x, \alpha, v_*)\right)\right\} - \rho^\varepsilon(t, x) \leq -\varepsilon \delta + \frac{\varepsilon}{4} \delta + \frac{\varepsilon}{4} \delta \leq -\frac{\varepsilon}{2} \delta < 0.$$

Таким образом, $\delta > 0$, выбранное из условий (19.24), (19.25), принадлежит $B(t, x)$.

Согласно свойству (ii) теоремы V.2 и непрерывности функции ρ^ε функция

$$(t, x, \delta) \rightarrow E\left\{\min_{\alpha \in A} \rho^\varepsilon\left(t + \delta, \xi_\delta(t, x, \alpha, v_*)\right)\right\}$$

непрерывна, откуда вытекает, что многозначное отображение $(t, x) \mapsto B(t, x)$ компактнозначно и полунепрерывно сверху по включению.

Следовательно (см. [21, 257]), существует измеримый на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ селектор $\delta(t, x) \in B(t, x)$ такой, что

$$\delta(t, x) \in (0, t_* + r - t] \quad \text{при} \quad t \in [t_*, t_* + r], \quad (19.26)$$

$$\delta(t_* + r, x) = 0. \quad (19.27)$$

Для построенного выше марковского момента $\tau_{\max}(\cdot)$ (19.20) и выбранного согласно лемме V.5 измеримого отображения $\alpha^*[\cdot] : \Omega \rightarrow A_I$ построим $\mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ -измеримое отображение

$$\omega \mapsto \delta[\omega] = \delta\left(t_* + \tau_{\max}(\omega), \xi_{\tau_{\max}(\omega)}(t_*, x_*, \alpha^*[\omega], v_*)(\omega)\right). \quad (19.28)$$

Из определения множества Ω_* (19.22) и условия (19.27) следует, что

$$\delta[\omega] = 0 \text{ при } \omega \in \Omega \setminus \Omega_*, \quad \delta[\omega] > 0 \text{ при } \omega \in \Omega_*, \quad \delta[\omega] \leq r - \tau_{\max}(\omega). \quad (19.29)$$

Согласно лемме V.3 случайная величина

$$\tau^0(\omega) = \tau_{\max}(\omega) + \delta[\omega] \quad (19.30)$$

является марковским моментом относительно $\{\mathcal{F}_s\}$, причем из (19.29), (19.30) следует, что

$$\tau^0 > \tau_{\max}, \quad \tau^0(\cdot) \leq r. \quad (19.31)$$

Для того чтобы завершить построение противоречия с (19.20), покажем, что $\tau^0 \in S$, т.е. для него справедливо неравенство (19.14).

Пусть $\alpha^0[\cdot] : \Omega \rightarrow A_I$ — отображение, измеримое относительно $\mathcal{F}_{\tau^0}$, которое построено согласно лемме V.5 таким образом, что при почти всех $\omega \in \Omega$

$$\rho\left(t_* + \tau^0(\omega), \xi_{\tau^0(\omega)}(t_*, x_*, \alpha^0[\omega], v_*)(\omega)\right) = \min_{\alpha \in A_I} \rho\left(t_* + \tau^0(\omega), \xi_{\tau^0(\omega)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)\right).$$

Для любого другого отображения $\alpha[\cdot] : \Omega \rightarrow A_I$, измеримого относительно $\mathcal{F}_{\tau^0}$, справедливо неравенство

$$E\left\{\rho\left(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha^0[\cdot], v_*)(\omega)\right)\right\} \leq E\left\{\rho\left(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha[\cdot], v_*)(\omega)\right)\right\}. \quad (19.32)$$

Построим $\mathcal{F}_{\tau^0}$ -измеримое отображение $\alpha^{00}[\cdot] : \Omega \rightarrow A_I$ следующим образом. Сначала построим согласно лемме V.5 отображение $\alpha_1[\cdot] : \Omega \rightarrow A_I$, измеримое относительно $\mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ и такое, что при почти всех $\omega \in \Omega$ справедливо равенство

$$\rho\left(t_* + \tau_{\max}(\omega), \xi_{\tau_{\max}(\omega)}(t_*, x_*, \alpha_1[\omega], v_*)(\omega)\right) = \min_{\alpha \in A_I} \rho\left(t_* + \tau_{\max}(\omega), \xi_{\tau_{\max}(\omega)}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)\right). \quad (19.33)$$

Как вытекает из теоремы V.2 и леммы V.2, отображения

$$\omega \mapsto t[\omega] = t_* + \tau_{\max}(\omega), \quad \omega \mapsto x[\omega] = \xi_{\tau_{\max}(\omega)}(t_*, x_*, \alpha_1[\omega], v_*)(\omega)$$

являются $\mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ -измеримыми и, следовательно, отображение

$$A_I \times [0, r] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\alpha, \delta, \omega) \mapsto \xi_{\delta}(t[\omega], x[\omega], \alpha, v_*)(\omega) \quad (19.34)$$

при любых фиксированных α, δ является $\mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ -измеримым по ω и при почти всех $\omega \in \Omega$ непрерывным по α, δ . Из леммы V.2 и соотношения (19.34) вытекает, что для $\delta = \delta[\omega]$ (19.28) отображение

$$A_I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\alpha, \omega) \mapsto \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha, v_*)(\omega) \quad (19.35)$$

непрерывно по α при почти всех $\omega \in \Omega$ и $\mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ -измеримо по ω при любом фиксированном $\alpha \in A_I$.

Так как в силу леммы V.1 и условия (19.31) имеем $\mathcal{F}_{\tau_{\max}} \subset \mathcal{F}_{\tau^0}$, а марковский момент $\tau^0(\cdot)$ (19.30) измерим относительно $\mathcal{F}_{\tau^0}$, то суперпозиция

$$(\alpha, \omega) \mapsto \rho^{\varepsilon}\left(t_* + \tau^0(\omega), \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha, v_*)(\omega)\right)$$

непрерывна по α при почти всех $\omega \in \Omega$ и $\mathcal{F}_{\tau^0}$ -измерима при любом фиксированном $\alpha \in A_I$.

Применяя рассуждения, аналогичные тем, что проделаны при доказательстве леммы V.5, строим отображение $\Omega \rightarrow A_I$, $\omega \mapsto \alpha_2[\omega]$, измеримое относительно $\mathcal{F}_{\tau^0}$ и такое, что при почти всех $\omega \in \Omega$ выполняется соотношение

$$\rho^{\varepsilon}\left(t_* + \tau^0(\omega), \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha_2[\omega], v_*)(\omega)\right) = \min_{\alpha \in A_I} \rho^{\varepsilon}\left(t[\omega] + \delta[\omega], \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha, v_*)(\omega)\right). \quad (19.36)$$

Построим теперь отображение $\alpha^{00}[\cdot] : \Omega \rightarrow A_I$ как следующую склейку отображений $\alpha_1[\cdot]$ (19.33) и $\alpha_2[\cdot]$ (19.36):

$$\alpha_t^{00}[\omega] = \begin{cases} \alpha_{1t}[\omega] & \text{при } 0 \leq t \leq t_* + \tau_{\max}(\omega), \\ \alpha_{2t}[\omega] & \text{при } t_* + \tau_{\max}(\omega) \leq t \leq T. \end{cases} \quad (19.37)$$

Согласно лемме V.3 отображение $\alpha^{00}[\cdot]$ является $\mathcal{F}_{\tau^0}$ -измеримым. Из (19.32), (19.36) и (19.37) следует оценка

$$\begin{aligned} E \left\{ \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha^{00}[\cdot], v_*)(\omega) \right) \right\} &\leq E \left\{ \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha^{00}[\cdot], v_*)(\omega) \right) \right\} = \\ &= E \left\{ \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau_{\max}(\omega) + \delta[\omega], \xi_{\delta[\omega]}(t_* + \tau_{\max}(\omega), x[\omega], \alpha_2[\omega], v_*)(\omega) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (19.38)$$

Поставим в соответствие $\mathcal{F}_{\tau^0}$ -измеримой величине

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau^0(\omega), \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha_2[\omega], v_*)(\omega) \right)$$

ее условное математическое ожидание относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{\tau_{\max}} \subset \mathcal{F}_{\tau^0}$, т.е. построим $\mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ -измеримую функцию

$$\begin{aligned} \omega \mapsto \tilde{E} \left\{ \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau_{\max}(\omega) + \delta[\omega], \xi_{\delta[\omega]}(t_* + \tau_{\max}(\omega), x[\omega], \alpha_2[\omega], v_*)(\omega) \right) \right\} &= \\ = \tilde{E} \left\{ \rho^\varepsilon \left(t[\omega] + \delta[\omega], \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha_2[\omega], v_*)(\omega) \right) \right\}, \end{aligned}$$

для которой согласно теореме Фубини (см. [102, 224]) на множествах $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_{\tau_{\max}}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho^\varepsilon \left(t_* + \tau^0(\omega), \xi_{\tau^0(\omega)}(t_*, x_*, \alpha^{00}[\omega], v_*)(\omega) \right) \mathbb{P}(d\omega) &= \\ = \int_{\mathcal{B}} \tilde{E} \left\{ \rho^\varepsilon \left(t[\omega] + \delta[\omega], \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha_2[\omega], v_*)(\omega) \right) \right\} \mathbb{P}(d\omega). \end{aligned} \quad (19.39)$$

Из условий (19.38), (19.39) при $\mathcal{B} = \Omega$, (19.14), (19.23), (19.29)–(19.26), (19.36), (19.33) получаем окончательную оценку:

$$\begin{aligned} E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \right\} &= E \left\{ \rho^\varepsilon(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha^{00}[\cdot], v_*)(\omega)) \right\} \leq \\ \leq E \left\{ \rho^\varepsilon(t_* + \tau^0, \xi_{\tau^0}(t_*, x_*, \alpha^{00}[\cdot], v_*)(\omega)) \right\} &= E \left\{ \tilde{E} \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon(t[\omega] + \delta[\omega], \xi_{\delta[\omega]}(t[\omega], x[\omega], \alpha, v_*)(\omega)) \right\} \right\} \leq \\ \leq E \left\{ \rho^\varepsilon(t[\omega], x[\omega]) \right\} &= E \left\{ \rho^\varepsilon(t_* + \tau_{\max}(\omega), \xi_{\tau_{\max}}(t_*, x_*, \alpha_1[\omega], v_*)(\omega)) \right\} = \\ = E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon(t_* + \tau_{\max}(\omega), \xi_{\tau_{\max}}(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \right\} &\leq \rho^\varepsilon(t_*, x_*). \end{aligned}$$

Таким образом, марковский момент τ^0 (19.30) принадлежит множеству S (19.14) и $\tau^0 > \tau_{\max}$ в силу (19.31), что противоречит условию (19.20) максимальности элемента $\tau_{\max}$ в S .

Следовательно, сделанное выше предположение (19.22) неверно, а имеет место условие (19.21), т.е.

$$\tau_{\max} = r \quad \mathbb{P}\text{-п.в.}$$

Итак, мы показали, что функция $\rho^\varepsilon(t, x)$ в произвольной точке $(t_*, x_*, v_*) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n \times Q$ и при произвольно заданном числе $r \in (0, T - t_*]$ удовлетворяет условию (18.85), т.е.

$$E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho^\varepsilon(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \right\} \leq \rho^\varepsilon(t_*, x_*).$$

Следовательно, для функции $\rho(t, x)$, связанной с $\rho^\varepsilon(t, x)$ соотношением (19.11), справедлива оценка

$$E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \right\} \leq \rho(t_*, x_*) + r \cdot \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ следует условие u -стабильности для $\rho(t, x)$ (18.85), т.е.

$$E \left\{ \min_{\alpha \in A_I} \rho(t_* + r, \xi_r(t_*, x_*, \alpha, v_*)(\omega)) \right\} \leq \rho(t_*, x_*).$$

Аналогичным образом, с заменой v_* на u_* , множества A_I на множество A_{II} , операции $\min$ на операцию $\max$ и знаков неравенства $\leq$ на знаки $\geq$, доказывается эквивалентность условия v -стабильности (18.86) и условия (19.9). Теорема V.3 доказана. $\square$

Из утверждения V.1, теоремы V.3 и определения V.4 минимаксного решения краевой задачи (19.1), (19.3) очевидным образом следует справедливость следующей теоремы.

Теорема V.4. *Если в краевой задаче (19.1), (19.3) выполнены условия (18.2)–(18.7), (18.9), то эта задача имеет единственное минимаксное решение, которое совпадает с функцией цены диффузионной дифференциальной игры (18.1), (18.8).*

Еще одним очевидным следствием теоремы V.3 является то, что определение минимаксного решения краевой задачи (19.1), (19.3), эквивалентное определению V.4, можно сформулировать с помощью неравенств (18.85), (18.86).

20. ОБОБЩЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

При описании инфинитезимальных свойств негладкой функции цены диффузионной дифференциальной игры с терминальной платой введены понятия обобщенных стохастических производных. Эти производные определены в разделе 19 в общем случае для функций, удовлетворяющих условию Липшица. Однако для широкого класса диффузионных игр (см., например, [249]), функция цены имеет производные по части переменных. Поэтому представляет интерес получение точных формул обобщенных стохастических производных для функций, дифференцируемых (в обычном смысле) по части переменных.

20.1. Класс функций, дифференцируемых по части переменных. Формулы стохастических производных. Пусть $\text{int } \mathbb{T}' = (0, T)$ — открытый временной интервал, $\mathbb{T}' = [0, T]$, $t \in \mathbb{T}'$, $x \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный фазовый вектор. Рассмотрим класс $\mathbf{K}$ функций $c(\cdot) : \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(а) существуют константы $L_0 > 0$, $c_0 > 0$ такие, что

$$|c(t^1, x^1) - c(t^2, x^2)| \leq L_0(|t^1 - t^2| + \|x^1 - x^2\|), \quad t^1, t^2 \in \mathbb{T}', \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n; \quad (20.1)$$

$$\sup_{(t, x) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n} |c(t, x)| \leq c_0 < \infty; \quad (20.2)$$

(б) существуют константы $L_1 > 0$, $\alpha > 0$ и число ν , $0 \leq \nu < n$, такие, что для $i = \nu + 1, \dots, n$ определены частные производные $\frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i}$, которые удовлетворяют условию Гельдера:

$$\left| \frac{\partial c(t^1, x^1)}{\partial x_i} - \frac{\partial c(t^2, x^2)}{\partial x_i} \right| \leq L_1 \left(|t^1 - t^2|^{\alpha/2} + \|x^1 - x^2\|^\alpha \right), \quad t^1, t^2 \in \text{int } \mathbb{T}', \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n. \quad (20.3)$$

Пусть F — некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$, $\psi = (\psi_{ij})$ — $(n \times m)$ -матрица диффузии, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — нормированная гауссовская m -мерная случайная величина с независимыми компонентами, $(t, x) \in \mathbb{T}' \times \mathbb{R}^n$ — некоторая точка.

Введем в рассмотрение, согласно п. 18.5, нижнюю $\frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)}$ и верхнюю $\frac{\tilde{d}^+ c(t, x)}{(F, \psi)}$ обобщенные стохастические производные функции $c(\cdot) \in \mathbf{K}$ в точке (t, x) относительно множества $F \subset \mathbb{R}^n$ и

матрицы диффузии $\psi \in \mathcal{L}[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]$ следующим образом:

$$\frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)} = \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[E \left\{ \min_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta) \right\} - c(t, x) \right], \quad (20.4)$$

$$\frac{\tilde{d}^+ c(t, x)}{(F, \psi)} = \limsup_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} \left[E \left\{ \max_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta) \right\} - c(t, x) \right], \quad (20.5)$$

где $E\{\cdot\}$ — символ математического ожидания.

Обобщенные стохастические производные (20.4), (20.5) определены для функций $c(\cdot)$, обладающих свойствами (20.1), (20.2). Для функций $c(\cdot) \in \mathbf{K}$ выполнено также дополнительное условие (20.3).

Пусть множество F имеет следующую структуру:

$$F = \text{co } F, \quad \max_{f \in F} \|f\| = C_1 < \infty, \quad F = \bar{F} + \tilde{F}, \quad (20.6)$$

$$\bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad (20.7)$$

$$\tilde{F} = \left\{ \tilde{f} = (0, \dots, 0, \tilde{f}_{\nu+1}, \dots, \tilde{f}_n) \right\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (20.8)$$

где ν определено условием (20.3), символом $\text{co } F$ обозначена выпуклая оболочка множества F .

Стохастические производные имеют следующий вид для функций из класса $\mathbf{K}$.

Теорема V.5. Для функций $c(\cdot) \in \mathbf{K}$ и множества $F \subset \mathbb{R}^n$ вида (20.6)–(20.8) справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)} = \min_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i} \tilde{f}_i + \frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(\bar{F}, \psi)}, \quad (20.9)$$

$$\frac{\tilde{d}^+ c(t, x)}{(F, \psi)} = \max_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i} \tilde{f}_i + \frac{\tilde{d}^+ c(t, x)}{(\bar{F}, \psi)}. \quad (20.10)$$

Справедливость формул (20.9), (20.10) очевидным образом вытекает из следующих лемм V.8, V.9.

20.2. Доказательство формул для стохастических производных.

Лемма V.8. Если $c(\cdot) \in \mathbf{K}$, а множество $F \subset \mathbb{R}^n$ имеет структуру (20.6)–(20.8), то для любого $f = \bar{f} + \tilde{f} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \cdot E \left\{ c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta} \psi \eta) - c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta) \right\} = \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i} \tilde{f}_i. \quad (20.11)$$

Лемма V.9. Если $c(\cdot) \in \mathbf{K}$, а множество $F \subset \mathbb{R}^n$ имеет структуру (20.6)–(20.8), то имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)} = \min_{f \in F} \left[\liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta) \right\} - c(t, x) \right] \right], \quad (20.12)$$

$$\frac{\tilde{d}^+ c(t, x)}{(F, \psi)} = \max_{f \in F} \left[\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta) \right\} - c(t, x) \right] \right]. \quad (20.13)$$

Докажем леммы V.8 и V.9, договорившись о следующих обозначениях.

Символ $\text{cons}_i[h]_j$, $0 \leq i < j \leq n$, $h \in \mathbb{R}^n$, имеет следующий смысл:

$$\text{cons}_i[h]_j = (0, \dots, 0, h_{i+1}, \dots, h_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

причем для $j = i = n$, $j = i = 0$ полагаем

$$\text{cons}_n[h]_n = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \text{cons}_0[h]_0 = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Для упрощения записей будем использовать также обозначения

$$\text{cons}[h]_j = \text{cons}_0[h]_j, \quad j \in \overline{0, n}, \quad \text{cons}_i[h] = \text{cons}_i[h]_n, \quad i \in \overline{0, n}.$$

В этих обозначениях условия (20.7), (20.8) можно переписать в виде

$$\bar{f} = \text{cons}[f]_\nu = \text{const} \quad \text{для любого} \quad f \in F, \quad \tilde{F} = \{\text{cons}_\nu[f] : f \in F\}.$$

Для функции $c(\cdot) \in \mathbf{K}$ положим

$$\text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t, x)}{\partial x} \right] = \left(0, \dots, 0, \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_{\nu+1}}, \dots, \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_n} \right).$$

Доказательство леммы V.8. Обозначим через J_δ^1 при фиксированном $\delta > 0$ величину

$$J_\delta^1 = \delta^{-1} E \left\{ c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta} \psi \eta) - c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta) \right\}, \quad (20.14)$$

которую, применяя формулу конечных приращений, можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} J_\delta^1 &= E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta(\cdot) \delta \cdot \tilde{f})}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle \right\} = \\ &= E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle \right\} + \\ &+ E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta(\cdot) \delta \cdot \tilde{f})}{\partial x} \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle \right\} \leq \\ &\leq E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle \right\} + \varphi^{(1)}(\delta), \end{aligned} \quad (20.15)$$

где $0 < \theta(\cdot) < 1$, $\nu < n$,

$$\varphi^{(1)}(\delta) = L_1 \cdot (C_1)^2 \cdot \sqrt{(n - \nu)} \cdot \delta^\alpha, \quad \varphi^{(1)}(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \downarrow 0. \quad (20.16)$$

Оценка $\varphi^{(1)}(\delta)$ получена с использованием условия Гельдера (20.3) и условия (20.6):

$$\begin{aligned} &E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta(\cdot) \delta \cdot \tilde{f})}{\partial x} \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle \right\} \leq \\ &\leq E \left\{ \left\| \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta(\cdot) \delta \cdot \tilde{f})}{\partial x} \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta \bar{f} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot))}{\partial x} \right] \right\| \cdot \|\tilde{f}\| \right\} \leq \\ &\leq C_1 E \left\{ \left(\sum_{i=\nu+1}^n (L_1)^2 |\theta(\cdot) \delta \cdot \tilde{f}_i|^{2\alpha} \right)^{1/2} \right\} \leq C_1 L_1 \delta^\alpha \sqrt{\sum_{i=\nu+1}^n |\tilde{f}_i|^{2\alpha}} \leq \\ &\leq C_1^{1+\alpha} L_1 \delta^\alpha (n - \nu)^{1/2} \leq C_1^2 L_1 (n - \nu)^{1/2} \delta^\alpha = \varphi^{(1)}(\delta). \end{aligned}$$

С другой стороны, с помощью аналогичных рассуждений получаем:

$$\begin{aligned}
-J_\delta^1 &= E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\cdot) - \theta'(\cdot)\delta \cdot \tilde{f})}{\partial x} \right], (-\tilde{f}) \right\rangle \right\} = \\
&= E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\cdot))}{\partial x} \right], (-\tilde{f}) \right\rangle \right\} + \\
&+ E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\cdot) - \theta'(\cdot)\delta \cdot \tilde{f})}{\partial x} \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\cdot))}{\partial x} \right], (-\tilde{f}) \right\rangle \right\} \leqslant \\
&\leqslant -E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\cdot))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle \right\} + \varphi^{(1)}(\delta),
\end{aligned} \tag{20.17}$$

где $0 < \theta'(\cdot) < 1$, $\nu < n$ и оценка $\varphi^{(1)}(\delta)$ имеет вид (20.16).

Так как при почти всех $\omega \in \Omega$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \downarrow 0} \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta\bar{f} + \sqrt{\delta}\psi\eta(\omega))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle = \\
&= \lim_{\delta \downarrow 0} \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c(t + \delta, x + \delta(\bar{f} + \tilde{f}) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\omega))}{\partial x} \right], \tilde{f} \right\rangle = \\
&= \sum_{i=\nu+1}^n \tilde{f}_i \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i} = \sum_{i=\nu+1}^n f_i \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

то можно использовать теорему Лебега о предельном переходе под знаком $E\{\cdot\}$. Устремляя δ к нулю, из соотношений (20.14)–(20.17) получаем (20.11). Лемма V.8 доказана. $\square$

Доказательство леммы V.9. Докажем справедливость равенства (20.12). Соотношение (20.13) доказывается с помощью аналогичных оценок при замене операций $\min$ на $\max$ и $\liminf$ на $\limsup$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Из свойства (20.1) и замкнутости F вытекает существование измеримого отображения $f(\cdot) : \Omega \rightarrow F$ такого, что при почти всех $\omega \in \Omega$ имеем

$$\min_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta \cdot f + \sqrt{\delta}\psi\eta(\omega)) = c(t + \delta, x + \delta \cdot f(\omega) + \sqrt{\delta}\psi\eta(\omega)). \tag{20.18}$$

Обозначим через $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*) \in \mathbb{R}^n$ вектор вида

$$f^* = E\{f(\cdot)\}, \tag{20.19}$$

для которого из условий (20.6)–(20.8) следует, что

$$f^* \in F, \quad \text{cons}[f^*]_\nu = \text{cons}[f(\omega)]_\nu = \bar{f}, \quad \omega \in \Omega. \tag{20.20}$$

Используя формулу конечных приращений и условия (20.18), (20.20), (20.3) и (20.6), сделаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
& E \left\{ c \left(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) \right) - \min_{f \in F} c \left(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) \right) \right\} = \\
& = E \left\{ c \left(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) \right) - \min_{f \in F} c \left(t + \delta, x + \delta f(\cdot) + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) \right) \right\} = \\
& = E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(t + \delta, x + \delta f(\cdot) + \sqrt{\delta} \eta(\cdot) + \theta''(\cdot)(f^* - f(\cdot))\delta \right) \right], (f^* - f(\cdot)) \cdot \delta \right\rangle \right\} = \\
& = \delta \cdot E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} (t + \delta, x + \delta f^*) \right], (f^* - f(\cdot)) \right\rangle \right\} + \\
& + \delta \cdot E \left\{ \left\langle \left(\text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(t + \delta, x + \delta f(\cdot) + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta''(\cdot)(f^* - f(\cdot)) \cdot \delta \right) \right] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \eta(\cdot) + \theta''(\cdot)(f^* - f(\cdot))\delta \right) \right] \right), (f^* - f(\cdot)) \right\rangle \right\} + \\
& + \delta \cdot E \left\{ \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta''(\cdot)(f^* - f(\cdot)) \cdot \delta \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} (t + \delta, x + \delta f^*) \right], (f^* - f(\cdot)) \right\rangle \right\} \leq \\
& \leq \delta \cdot \left\langle \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} (t + \delta, x + \delta f^*) \right], E \{ f^* - f(\cdot) \} \right\rangle + \delta \cdot E \left\{ \left(\sum_{i=\nu+1}^n L_1^2 |\delta(f_i(\cdot) - f_i^*)|^{2\alpha} \right)^{1/2} \right\} \cdot 2C_1 + \\
& + \delta \cdot E \left\{ \left\| \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta''(\cdot)(f^* - f(\cdot))\delta \right) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} (t + \delta, x + \delta f^*) \right] \right\| \right\} \cdot 2C_1 \leq 0 + \delta \cdot [\varphi^{(2)}(\delta) + \varphi^{(3)}(\delta)], \quad (20.21)
\end{aligned}$$

где $0 < \theta''(\cdot) < 1$, $\nu < n$,

$$\varphi^{(2)}(\delta) = E \left\{ \left(\sum_{i=\nu+1}^n (L_1)^2 \delta^{2\alpha} \cdot |f_i(\cdot) - f_i^*|^{2\alpha} \right)^{1/2} \right\} \cdot 2C_1 \leq L_1(n - \nu)^{1/2} \cdot (2C_1)^{1+\alpha} \cdot \delta^{\alpha/2}, \quad (20.22)$$

причем

$$\varphi^{(2)}(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \downarrow 0.$$

Оценка $\varphi^{(3)}(\delta)$ в (20.21) выведена следующим образом. Сначала из условия Гельдера (20.3) для $c(\cdot)$, ограниченности (20.6) множества F , неравенства Гельдера и оценки для квадрата суммы

получим соотношения

$$\begin{aligned}
\varphi^{(3)}(\delta) &= E \left\{ \left\| \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) + \theta''(\cdot)(f(\cdot) - f^*)\delta \right) \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{cons}_\nu \left[\frac{\partial c}{\partial x} (t + \delta, x + \delta f^*) \right] \right\| \right\} 2C_1 \leq \\
&\leq 2C_1 \cdot E \left\{ \left(\sum_{i=\nu+1}^n L_1^2 \cdot \left| \sqrt{\delta} \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \eta_j(\cdot) + \theta''(\cdot)(f_i(\cdot) - f_i^*)\delta \right|^{2\alpha} \right)^{1/2} \right\} \leq \\
&\leq 2C_1 L_1 \left(\sum_{i=\nu+1}^n E \left\{ \left(2\delta \cdot \left| \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \eta_j(\cdot) \right|^2 + \delta^2 \cdot 8C_1^2 \right)^\alpha \right\} \right)^{1/2} = \\
&= 2C_1 L_1 \cdot (2\delta)^{\alpha/2} \left(\sum_{i=\nu+1}^n E \left\{ \left(\left| \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \eta_j(\cdot) \right|^2 + 4\delta^2 C_1^2 \right)^\alpha \right\} \right)^{1/2} = J_\delta^*. \quad (20.23)
\end{aligned}$$

Из свойств гауссовской величины $\eta(\cdot)$ следует, что случайные величины

$$\xi_i(\cdot) = \sum_{j=1}^m \psi_{ij} \eta_j(\cdot), \quad i \in \overline{\nu+1, n},$$

также являются гауссовскими с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными $\sum_{j=1}^m (\psi_{ij})^2$ соответственно.

Обозначим величину $4\delta C_1^2$ через b и рассмотрим $\alpha < 1$. Нетрудно видеть справедливость неравенств

$$\begin{aligned}
E \{ (\xi_i^2(\cdot) + b)^\alpha \} &\leq E \{ \xi_i^2(\cdot) + b \} + \mathbb{P} \{ \|\xi_i^2(\cdot) + b\| \leq 1 \} \leq \\
&\leq E \{ \xi_i^2(\cdot) \} + b + \mathbb{P} \{ -\infty < \xi_i^2(\cdot) < +\infty \} = \sum_{j=1}^m \psi_{ij}^2 + b + 1, \quad (20.24)
\end{aligned}$$

где символ $\mathbb{P}\{\mathcal{A}\}$ означает вероятность события $\mathcal{A} \subset \Omega$.

Учитывая (20.24), продолжаем неравенства (20.23) и получаем оценку для $\varphi^{(3)}(\delta)$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(3)}(\delta) &\leq \delta^{\alpha/2} \cdot 4C_1 L_1 \left[\sum_{i=\nu+1}^n \sum_{j=1}^m \psi_{ij}^2 + (n - \nu)(4\delta C_1 + 1) \right]^{1/2}, \quad (20.25) \\
\varphi^{(3)}(\delta) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Из (20.18), (20.19), (20.21) выводим, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta} \cdot \left[E \left\{ \min_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] &\leq \\
&\leq \frac{1}{\delta} \cdot \left[\min_{f \in F} E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] \leq \\
&\leq \frac{1}{\delta} \cdot \left[E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) - c(t, x) \right\} \right] = \\
&= \frac{1}{\delta} \cdot \left[E \left\{ \min_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] + \\
&+ \frac{1}{\delta} \cdot E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) - \min_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} \leq \\
&\leq \frac{1}{\delta} \cdot \left[E \left\{ \min_{f \in F} c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] + \varphi^{(2)}(\delta) + \varphi^{(3)}(\delta). \quad (20.26)
\end{aligned}$$

Переходя в неравенствах (20.26) к пределу при $\delta \downarrow 0$, из (20.4), (20.22), (20.25) находим

$$\frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)} = \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \cdot \left[\min_{f \in F} E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right]. \quad (20.27)$$

Отметим, что вектор $f^* \in F$ вида (20.19) построен для фиксированного δ , и обозначим этот вектор через f_δ^* . В силу условия Липшица (20.1), для любых двух векторов $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ из F справедлива оценка

$$\begin{aligned}
-L_0 \cdot \delta \|f^{(1)} - f^{(2)}\| &\leq E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f^{(1)} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) - \right. \\
&\left. - c(t + \delta, x + \delta f^{(2)} + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} \leq L_0 \cdot \delta \|f^{(1)} - f^{(2)}\|. \quad (20.28)
\end{aligned}$$

Используя этот факт, из определения (20.27) и условия (20.28) выводим, что существуют такие сходящиеся последовательности

$$\delta_i \downarrow 0, \quad f_{\delta_i}^* \rightarrow f_0^*,$$

что $f_0^* \in F$ и имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)} &= \lim_{\delta_i \downarrow 0} \frac{1}{\delta_i} \cdot \left[E \left\{ c(t + \delta_i, x + \delta_i f_{\delta_i}^* + \sqrt{\delta_i} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] = \\
&= \lim_{\delta_i \downarrow 0} \frac{1}{\delta_i} \cdot \left[E \left\{ c(t + \delta_i, x + \delta_i f_0^* + \sqrt{\delta_i} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right]. \quad (20.29)
\end{aligned}$$

Опираясь на (20.29), получаем оценки

$$\begin{aligned}
\inf_{f \in F} \liminf_{\delta \downarrow 0} \left[E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] \frac{1}{\delta} &\leq \\
&\leq \liminf_{\delta \downarrow 0} \left[E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f_0^* + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] \frac{1}{\delta} \leq \\
&\leq \liminf_{\delta_i \downarrow 0} \left[E \left\{ c(t + \delta_i, x + \delta_i f_0^* + \sqrt{\delta_i} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] \frac{1}{\delta_i} = \\
&= \frac{\tilde{d}^- c(t, x)}{(F, \psi)} = \\
&= \liminf_{\delta \downarrow 0} \left[\min_{f \in F} E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] \frac{1}{\delta} \leq \\
&\leq \inf_{f \in F} \liminf_{\delta \downarrow 0} \left[E \left\{ c(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot)) \right\} - c(t, x) \right] \frac{1}{\delta}. \quad (20.30)
\end{aligned}$$

Кроме того, используя (20.28), можно показать липшицевость операции

$$f \mapsto \liminf_{\delta \downarrow 0} \left[E \left\{ c \left(t + \delta, x + \delta f + \sqrt{\delta} \psi \eta(\cdot) \right) \right\} - c(t, x) \right] \frac{1}{\delta}$$

с константой $L_0 > 0$. Следовательно, из (20.30) вытекает, что операции $\liminf$ и $\min$ в (20.3) можно переставить и получить справедливость формулы (20.12), что и требовалось доказать. $\square$

В качестве следствия из теоремы V.5 можно высказать следующее утверждение.

Замечание V.1. Если функция $c(\cdot) \in \mathbf{K}$ обладает дополнительно непрерывными частными производными $\frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j \in \overline{\nu+1, n}$, матрица $\psi = (\psi_{ij})$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$, такова, что

$$\psi_{ij} = 0, \quad i \in \overline{1, \nu}, \quad j \in \overline{1, m}, \quad (20.31)$$

а множество F удовлетворяет условиям (20.6)–(20.8), то, применяя формулу Тейлора, можно показать, что формулы (20.9), (20.10) для обобщенных стохастических производных можно уточнить, а именно,

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{d^-} c(t, x)}{(F, \psi)} &= \min_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i} \cdot \tilde{f}_i + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=\nu+1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{[c(t + \delta, x + \delta \cdot \tilde{f}) - c(t, x)]}{\delta}, \end{aligned} \quad (20.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{d^+} c(t, x)}{(F, \psi)} &= \max_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c(t, x)}{\partial x_i} \cdot \tilde{f}_i + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=\nu+1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{[c(t + \delta, x + \delta \cdot \tilde{f}) - c(t, x)]}{\delta}, \end{aligned} \quad (20.33)$$

где

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^m \psi_{ik} \psi_{jk}, \quad i, j \in \overline{\nu+1, n}. \quad (20.34)$$

20.3. Применение формул для стохастических производных. Формулы (20.9), (20.10) и (20.32)–(20.34) для обобщенных стохастических производных можно применять для исследования функции цены следующего класса диффузионных дифференциальных игр, изученного в работе [249].

Пусть управляемый диффузионный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ описывается уравнением

$$\xi_r = \xi_r(t_0, x_0, u_{(\cdot)}, v_{(\cdot)}) = x_0 + \int_0^r f(t_0 + s, \xi_s, u_s, v_s) ds + \int_0^r \psi(t_0 + s) dW_s, \quad r \geq 0, \quad (20.35)$$

где x_0 — начальное фазовое состояние (n -мерный вектор) в начальный момент времени t_0 ; ξ_r — текущее фазовое состояние процесса; $\{\mathcal{F}_s\}$, $s \geq 0$, — неубывающая система σ -алгебр подмножеств множества Ω ; W_s , $s \geq 0$, — m -мерный стандартный винеровский процесс относительно $\{\mathcal{F}_s\}$; $u_s : \Omega \rightarrow P \subset \mathbb{R}^p$, $v_s : \Omega \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^q$ — неупреждающие процессы, которые называются соответственно управлением и помехой (множества их значений P и Q предполагаются компактными); $0 \leq t_0 \leq T$, T — фиксированный момент окончания игры.

Качество управляемого процесса ξ_r оценивается показателем

$$\gamma^*(\xi_{(\cdot)}) = E \left\{ \gamma(\xi_{T-t_0}(t_0, x_0, u_{(\cdot)}, v_{(\cdot)})) \right\}, \quad (20.36)$$

где $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная функция, ограниченная и равномерно липшицева.

Предполагается, что функция $f(\cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна, равномерно ограничена и равномерно липшицева по x . Пусть $(n \times m)$ -мерная матрица-функция

$$t \mapsto \psi(t) = (\psi_{ij}(t)), \quad i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, m}, \quad t \in [0, T],$$

и функция $t \mapsto f(t, x, u, v)$ удовлетворяют равномерному условию Гельдера. Предположим также, что существует $\nu \in \overline{1, (n-1)}$, при котором выполнены условия

$$f_i(t, x, u, v) = f_i(t, x); \quad \psi_{ij}(t) = 0 \quad \text{при} \quad i \in \overline{1, \nu}, \quad j \in \overline{1, m}, \quad (20.37)$$

т.е. шум, помехи и управление действуют одновременно на часть координат ($i = \nu + 1, \dots, n$) процесса (20.35). Наконец, предположим, что выполнено условие Айзекса

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \sum_{i=\nu+1}^n s_i \cdot \tilde{f}_i(t, x, u, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \sum_{i=\nu+1}^n s_i \cdot \tilde{f}_i(t, x, u, v) = H(t, x, \tilde{s}) \quad (20.38)$$

для любого вектора $\tilde{s} = \{0, \dots, 0, s_{\nu+1}, \dots, s_n\} \in \mathbb{R}^n$.

В [249] показано, что игра (20.35), (20.36) в каждой начальной позиции (t_0, x_0) имеет цену $c^0(t_0, x_0)$, причем $c^0(\cdot) \in \mathbf{K}$. При почти всех (t, x) эта функция в регулярных точках гладкости удовлетворяет квазилинейному параболическому уравнению типа Гамильтона—Якоби—Айзекса вида

$$\frac{\partial c^0(t, x)}{\partial t} + \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \left\langle \frac{\partial c^0(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u, v) \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=\nu+1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (20.39)$$

где $a_{ij}(t)$ построены по $\psi = (\psi_{ij}(t))$ согласно (20.34).

Дифференциальные неравенства (19.8), (19.9) и формулы (20.32), (20.34) позволяют получить следующие инфинитезимальные соотношения, которые заменяют уравнение Айзекса (20.39) и характеризуют функцию цены $c^0(t, x)$ на множестве ее сингулярности:

$$\begin{aligned} -\frac{d^+ c^0(t, x)}{(1, \bar{f}(t, x))} &\leq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c^0(t, x)}{\partial x_i} \cdot \tilde{f}_i(t, x, u, v) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=\nu+1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 c^0(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \sum_{i=\nu+1}^n \frac{\partial c^0(t, x)}{\partial x_i} \cdot \tilde{f}_i(t, x, u, v) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=\nu+1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial^2 c^0(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} \leq -\frac{d^- c^0(t, x)}{(1, \bar{f}(t, x))}, \end{aligned} \quad (20.40)$$

где вектор $\bar{f}(t, x) \in \mathbb{R}^n$ представляет собой неконтролируемую и невозмущаемую составляющую вектора сноса, а именно,

$$\bar{f}_i(t, x) = \begin{cases} f_i(t, x) & \text{при } i \in \overline{1, \nu}, \\ 0 & \text{при } i \in \overline{\nu+1, n}. \end{cases}$$

Символами $\tilde{f}_i(t, x, u, v)$ обозначены контролируемые и возмущаемые компоненты вектора сноса:

$$\tilde{f}_i(t, x, u, v) = f_i(t, x, u, v), \quad i \in \overline{\nu+1, n}.$$

Неравенства (20.40) можно рассматривать как обобщение квазилинейного параболического уравнения Айзекса (19.1) для стохастической игры (20.35), (20.36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адиатуллина Р. А., Тарасьев А. М. Дифференциальная игра неограниченной продолжительности// Прикл. мат. мех. — 1987. 51. — С. 531–537.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.
3. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1987.
4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
5. Алексейчик М. И. Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры// Мат. анализ и его приложения/ Сб. науч. тр. — Ростовский-на-Дону гос. ун-т, 1975. — 7. — С. 191–199.
6. Альбрехт Э. Г. Построение приближенных решений некоторых квазилинейных дифференциальных игр// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 1. — С. 27–38.
7. Альбрехт Э. Г., Шелементьев Г. С. Лекции по теории стабилизации. — Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1972.
8. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
9. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. — М.: Фазис, 1996.
10. Арутюнов А. В., Асеев С. М. Принцип максимума для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями// Докл. РАН. — 1994. — 334, № 2. — С. 134–137.
11. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
12. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
13. Батухтин В. Д. Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения// Докл. АН СССР. — 1972. — 27, № 1.
14. Бердышев Ю. И. Качественный анализ областей достижимости// Косм. исслед. — 1996. — 34, № 2. — С. 141–144.
15. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1985. — 169. — С. 194–252.
16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1966.
17. Боткин Н. Д., Зарх М. А., Кейн В. Н., Пацко В. С., Турова В. Л. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах// Изв. РАН. Техн. киберн. — 1993. — № 1. — С. 68–76.
18. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
19. Брыкалов С. А. Конфликтно управляемая система с нефиксированным моментом окончания// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 313–319.
20. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
21. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
22. Вахрушев В. А., Ушаков В. Н. О вычислительной реализации процедур управления с поводиром// Прикл. мат. мех. — 2002. — 66, № 2. — С. 228–238.
23. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
24. Вязгин В. А. К обоснованию достаточных условий методами Вейерштрасса и Гамильтона—Якоби—Беллмана// Автомат. телемех. — 1984. — 4. — С. 31–37.
25. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.
26. Гайцгори В. Г. Управление системами с быстрыми и медленными движениями. — М.: Наука, 1991.
27. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
28. Гамкрелидзе Р. В., Аграчев А. А., Вахрамеев С. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление// Итоги науки и техн. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНТИ, 1989. — 35. С. 3–107.
29. Гасилов В. Л., Костоусов В. Б. Методы получения и представления эталонной информации о геофизических полях// Гироскопия навигация. — 1996. — 4, № 15. С. 64–65.
30. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений// Усп. мат. наук. — 1959. — 14, № 2 (86). — С. 87–158.
31. Геращенко Е. И., Геращенко С. М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. — М.: Наука, 1975.
32. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
33. Григоренко Н. Л., Киселев Ю. Н., Лагунов Н. В., Силин Д. Б., Тринько Н. Г. Методы решения дифференциальных игр. Математическое моделирование. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993.

34. Григорьева С. В., Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конструкции теории дифференциальных игр при решении уравнений Гамильтона—Якоби// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. С. 320–336.
35. Гусев М. И., Куржанский А. Б. К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений, I// Диффер. уравн. — 1971. — 7, № 9. — С. 1591–1602; II// Диффер. уравн. — 1971. — 7, № 10. — С. 1789–1800.
36. Гусев М. И. О структуре оптимальных минимаксных оценок в задачах гарантированного оценивания// Докл. РАН. — 1992. — 322, № 5. — С. 832–835.
37. Гусейнов Х. Г., Джафаров В. Я. Левосторонние решения уравнения Гамильтона—Якоби// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 337–350.
38. Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н. О построении дифференциальных включений с предписанными свойствами// Диффер. уравн. — 2000. — 36, № 4. С. 438–445.
39. Гусейнов Х. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления// Пробл. управл. теор. информ. — 1985. — 14, № 3. — С. 1–14.
40. Гусятников П. Б. Теория дифференциальных игр. — М.: Изд-во МФТИ, 1982.
41. Данилин А. Р. Асимптотика управлений для сингулярной эллиптической задачи// Докл. РАН. — 1999. — 369, № 3. — С. 305–308.
42. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.
43. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.
44. Джафаров В. Я. Об устойчивости гарантированного результата в задаче позиционного управления// Докл. АН СССР. — 285, № 1. — С. 27–31.
45. Дмитриев М. Г. Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления// Диффер. уравн. — 1985. — 21, № 10. — С. 1693–1698.
46. Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. — М.: Мир, 1987.
47. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений// Докл. АН СССР. — 1963. — 149, № 4. — С. 759–762.
48. Жаутыков О. А., Жуковский В. И., Жаркынбаев С. Дифференциальные игры нескольких лиц. — Алма-Ата: Наука, 1988.
49. Завалишин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
50. Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1985.
51. Зеликина Л. Ф. Универсальные многообразия и теоремы о магистрали для некоторого класса задач оптимального управления// Докл. АН СССР. — 1975. — 224, № 1.
52. Zubov В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
53. Иванов А. Г. Задача о брахистохроне в центральном поле тяготения// Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений/ Сб. науч. тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 1998. — № 2. — С. 95–109.
54. Ильин А. М. Пограничный слой// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНТИ, 1988. — 34.
55. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Усп. мат. наук. — 1962. — 17, № 3 (105). — С. 3–146.
56. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
57. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
58. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966.
59. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург, 1998.
60. Ким А. В., Пименов В. Г. О применении i -гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений// Сб. науч. тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 1998. — 5. — С. 119–142.
61. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
62. Кларк Ф., Ледяев Ю. С. Новые формулы конечных приращений// Докл. РАН. — 1993. — 331, № 3. — С. 275–277.
63. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. — Екатеринбург: Наука, 1993.

64. Климусhev А. И., Красовский Н. Н. Равномерная асимптотическая устойчивость систем уравнений с малым параметром перед производными// Прикл. мат. мех. — 1962. — 25. — С. 1011–1025.
65. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.
66. Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Идемпотентный анализ и его применения в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.
67. Кононенко А. Ф. Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1980. — 20, № 5. — С. 1105–1116.
68. Короткий А. И. Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1991. — № 2. — С. 154–164.
69. Красовский А. Н. Дифференциальная игра для позиционного функционала// Докл. АН СССР. — 1980. — 253, № 6. — С. 1303–1307.
70. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
71. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
72. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения// Прикл. мат. мех. — 1970. — 34. — С. 1005–1022.
73. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
74. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
75. Красовский Н. Н., Лукоянов Н. Ю. Уравнение типа Гамильтона—Якоби в наследственных системах: Минимаксные решения// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 1. — С. 110–130.
76. Красовский Н. Н., Решетов В. М. Задачи сближения и уклонения в системах с малым параметром перед производной// Прикл. мат. мех. — 1974. — 38, № 5. — С. 771–779.
77. Красовский Н. Н., Решетова Т. Н. О программном синтезе гарантирующего управления// Пробл. управл. теор. информ. — 1988. — 17, № 6. — С. 1–11.
78. Красовский Н. Н., Третьяков В. Е. Седловая точка стохастической дифференциальной игры// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 3. — С. 534–539.
79. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
80. Кружков С. Н. К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Усп. мат. наук. — 1965. — 20, № 6. — С. 112–118.
81. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений со многими независимыми переменными, 1// Мат. сб. — 1966. — 70, № 3. — С. 394–416.
82. Кружков С. Н., Петросян Н. С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка// Усп. мат. наук. — 1987. — 42. — С. 3–40.
83. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.
84. Кряжмский А. В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения и уклонения// Докл. АН СССР. — 1978. — 239, № 4. — С. 779–782.
85. Кряжмский А. В., Осипов Ю. С. О позиционном моделировании управления в динамических системах// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1983. — № 2. — С. 51–60.
86. Кряжмский А. В., Осипов Ю. С. Экстремальные задачи с отделимыми графиками// Киберн. систем. анализ. — 2002. — 2. — С. 32–55.
87. Кузнецов Н. Н., Рождественский Б. Л. Построение обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения// Усп. мат. наук. — 1959. — 14, № 2 (86). — С. 211–215.
88. Кумков С. С., Пацко В. С. Максимальные стабильные мосты в контрольном примере Л. С. Понтрягина// Вестн. Удмурт. ун-та, сер. мат., мех. — 2000. — № 1. — С. 92–103.
89. Курант Р. Уравнения с частными производными. Т. 2. — М.: Мир, 1964.
90. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1979.
91. Куржанский А. Б., Никонов О. И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления// Докл. РАН. — 1993. — 333, № 5.
92. Куржанский А. Б., Сивергина И. Ф. Метод динамического программирования в обратных задачах оценивания для распределенных систем// Докл. РАН. — 1998. — 369, № 2. — С. 161–166.
93. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. О методе сингулярных возмущений для дифференциальных включений// Докл. АН СССР. — 1991. — 321, № 3. — С. 454–459.
94. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.
95. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

96. *Ляхтин А. С., Субботин А. И.* Многочленные решения уравнений с частными производными первого порядка// Мат. сб. — 1998. — 189, № 6. — С. 33–58.
97. *Ляхтин А. С., Субботин А. И.* Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка// Докл. РАН. — 1998. — 359, № 4. — С. 452–455.
98. *Леликова Е. Ф.* Об асимптотике фундаментального решения параболического уравнения высокого порядка// Докл. РАН. — 1995. — 341, № 5. — С. 532–537.
99. *Ледяев Ю. С., Мищенко Е. Ф.* Экстремальные задачи в теории дифференциальных игр// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1988. — 85. — С. 147–170.
100. *Лейтман Дж.* Введение в теорию оптимального управления. — М.: Наука, 1968.
101. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
102. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
103. *Логонов М. И., Соболев О. Н., Шелементьев Г. С.* Введение в статистический анализ. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1999.
104. *Лукоянов Н. Ю.* Минимаксные решения уравнений Гамильтона—Якоби для систем с наследственностью// Докл. РАН. — 2000. — 371, № 2. — С. 163–166.
105. *Максимов В. И.* Принцип экстремального сдвига в задаче нахождения решений операторных уравнений// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 1. — С. 141–149.
106. *Мальшев В. В., Кибзун А. И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987.
107. *Маслов В. П., Самборский С. Н.* Существование и единственность решений стационарных уравнений Гамильтона—Якоби и Беллмана. Новый подход// Докл. РАН. — 1992. — 324, № 6. — С. 1143–1148.
108. *Меликян А. А.* Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка// Докл. РАН. — 1996. — 382, № 2. — С. 203–217.
109. *Меликян А. А.* Уравнения распространения слабого разрыва решения вариационной задачи// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 446–459.
110. *Минченко Л. И., Борисенко О. Ф.* Дифференциальные свойства маргинальных функций и их приложения к задачам оптимизации. — Минск: Навука и тэхніка, 1992.
111. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1971. — № 5. — С. 3–9.
112. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Периодические решения систем почти разрывных дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1955. — 102, № 5. — С. 889–891.
113. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
114. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1971.
115. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
116. *Незнахин А. А., Ушаков В. Н.* Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения// Ж. выч. мат. мат. физ. — 2001. — 41, № 6. — С. 895–908.
117. *Никольский М. С.* Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина// Мат. сб. — 1981. — 116, № 1. — С. 136–144.
118. *Никольский М. С., Абубакар М.* Некоторые оценки множества достижимости для управляемого уравнения Ван дер Поля// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 1. — С. 150–159.
119. *Обэн Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.
120. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1957. — 12, № 3 (75). — С. 3–73.
121. *Олейник О. А.* О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения «исчезающей вязкости»// Усп. мат. наук. — 1959. — 14, № 2. — С. 159–164.
122. *Олейник О. А., Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными// Усп. мат. наук. — 1961. — 16, № 5. — С. 115–155.
123. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами// Докл. АН СССР. — 1975. — 223, № 6. — С. 1314–1317.
124. *Осипов Ю. С.* Позиционное управление в параболических системах// Прикл. мат. мех. — 1977. — 41, № 2.
125. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. — М.: Наука, 1986.
126. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. — М.: Наука, 1979.

127. Петров Н. Н. О существовании значения игры преследования// Докл. АН СССР. — 1970. — 190, № 6. — С. 621–624.
128. Петров Н. Н. Теория игр. — Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 1997.
129. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
130. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
131. Петросян Л. А., Захаров В. В. Математические модели в экологии. — С.-Пб.: Изд-во Санкт-Петербург. гос. ун-та, 1997.
132. Половинкин Е. С. Элементы теории многозначных отображений. — М.: Изд-во МФТИ, 1982.
133. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
134. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965.
135. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх, 1// Докл. АН СССР. — 1967. — 174, № 6. — С. 1278–1280; 2// Докл. АН СССР. — 1967. — 175, № 4. — С. 764–766.
136. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1985. — 169. — С. 119–157.
137. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961.
138. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр// Докл. АН СССР. — 1969. — 184, № 2. — С. 285–287.
139. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.
140. Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В. Дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка, 1992.
141. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
142. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем// Автомат. телемех. — 1959. — 20. — С. 10–12.
143. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
144. Сидоров А. Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев// Докл. АН СССР. — 1990. — 313, № 2. — С. 283–287.
145. Сидоров А. Ф., Гасилов В. Л., Кукушкин А. П. Разработка высокопроизводительных алгоритмических и программных средств на базе параллельных технологий// Алгоритмы и програм. средства параллельных вычислений/ Сб. науч. тр. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995. — С. 3–20.
146. Сидорова Е. В., Субботина Н. Н. Алгоритм вычисления функции цены линейной дифференциальной игры с выпуклой платой// Позиционное управление с гарантированным результатом/ Сб. науч. тр. под ред. А. И. Субботина и А. М. Тарасьева. — Свердловск: Ин-т мат. мех. УрО АН СССР, 1986. — С. 62–74.
147. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
148. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
149. Субботин А. И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 2. — С. 293–297.
150. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. — М.: Наука, 1991.
151. Субботин А. И. Непрерывные и разрывные решения краевых задач для уравнений с частными производными первого порядка// Докл. РАН. — 1992. — 323, № 1. — С. 30–34.
152. Субботин А. И. Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 2 (308). — С. 105–138.
153. Субботин А. И., Субботина Н. Н. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры// Докл. АН СССР. — 1978. — 243, № 4. — С. 829–865.
154. Субботин А. И., Субботина Н. Н. Необходимые и достаточные условия для негладкой цены дифференциальной игры// Задачи динамического управления/ Сб. науч. тр. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. — С. 73–81.
155. Субботин А. И., Субботина Н. Н. Функция оптимального результата в задаче управления// Докл. АН СССР. — 1982. — 266, № 2. — С. 294–299.
156. Субботин А. И., Субботина Н. Н. Свойства потенциала дифференциальной игры// Прикл. мат. мех. — 1982. — 46, № 2. — С. 204–211.
157. Субботин А. И., Субботина Н. Н. К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1983. — 2. — С. 24–32.

158. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Свойства дифференцируемости функции цены дифференциальной игры с интегрально-терминальной платой// Пробл. управл. теор. информ. — 1983. — 12, № 3. — С. 153–166.
159. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Кусочно-гладкие решения уравнений с частными производными первого порядка// Докл. РАН. — 1993. — 333, № 6. — С. 705–707.
160. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.
161. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона—Якоби// Докл. РАН. — 1996. — 348, № 3. — С. 45–48.
162. *Субботин А. И., Шагалова Л. Г.* Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнений Гамильтона—Якоби// Докл. РАН. — 1992. — 325, № 5. — С. 932–936.
163. *Субботин А. И., Тарасьев А. М., Ушаков В. Н.* Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона—Якоби// Изв. РАН. Техн. киберн. — 1993. — № 1. — С. 190–197.
164. *Субботина Н. Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх// Диффер. уравн. — 1983. — 19, № 11. — С. 1377–1382.
165. *Субботина Н. Н.* Некоторые достаточные условия существования универсальных стратегий// Исследования задач минимаксного управления/ Сб. науч. тр. под ред. А. И. Субботина и В. С. Пацко. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1985. — С. 72–81.
166. *Субботина Н. Н.* Инфинитезимальные свойства функции цены диффузионной дифференциальной игры/ Деп. в ВИНТИ, № 7690-D19. — Свердловск, ИММ УНЦ АН СССР, 1985.
167. *Субботина Н. Н.* Необходимые и достаточные условия оптимальности управлений и траекторий// Синтез оптимального управления в игровых системах/ Сб. науч. тр. под ред. А. И. Субботина и А. Ф. Клейменова. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1986. — С. 86–96.
168. *Субботина Н. Н.* Обобщенные стохастические производные для функций нескольких переменных, дифференцируемых по части переменных// Управление с гарантированным результатом/ Сб. науч. тр. под ред. А. И. Субботина и В. Н. Ушакова. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. — С. 77–85.
169. *Субботина Н. Н.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в терминах принципа максимума и супердифференциала функции цены/ Деп. в ВИНТИ, № 2898-B88. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1988.
170. *Субботина Н. Н.* Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана// Докл. АН СССР. — 1991. — 320, № 3. — С. 556–561.
171. *Субботина Н. Н.* Построение обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана с помощью метода характеристик Коши/ Деп. в ВИНТИ, № 2571-B91. — Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1991.
172. *Субботина Н. Н.* Унифицированные условия оптимальности в задачах управления// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 1992. — 1. — С. 147–160.
173. *Субботина Н. Н.* Асимптотические свойства минимаксных решений уравнений Беллмана—Айзекса в дифференциальных играх с быстрыми и медленными движениями// Прикл. мат. мех. — 1996. — 60, № 6. — С. 883–890.
174. *Субботина Н. Н.* Асимптотики сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона—Якоби// Прикл. мат. мех. — 1999. — 63, № 2. — С. 220–230.
175. *Субботина Н. Н.* Сингулярные аппроксимации минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона—Якоби// Тр. Ин-та мат. мех. — 2000. — 6, № 1. — С. 190–208.
176. *Субботина Н. Н.* Почти оптимальные обратные связи в механических системах с быстрыми и медленными движениями// VIII Всеросс. съезд по теор. и прикл. мех., 23–29 августа 2001, Пермь/ Тез. докл. — 2001. — С. 546.
177. *Субботина Н. Н.* Условия оптимальности обратных связей в задачах управления/ Деп. в ВИНТИ, № 1212-B2002. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002.
178. *Субботина Н. Н.* Метод динамического программирования для класса локально-липшицевых функций// Докл. РАН. — 2003. — 389, № 2. — С. 169–172.
179. *Субботина Н. Н., Ченцов А. Г.* О существовании функции Беллмана в линейной дифференциальной игре// Сб. науч. тр. ИММ УНЦ АН СССР. — 1979. — № 26. — С. 80–86.
180. *Субботина Н. Н., Субботин А. И., Третьяков В. Е.* Стохастическое и детерминированное управление. Дифференциальные неравенства// Пробл. управл. теор. информ. — 1985. — 14, № 6. — С. P1–P15.
181. *Тарасьев А. М.* Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона—Якоби// Прикл. мат. мех. — 1994. — 58, № 2. — С. 22–36.

182. Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби// Изв. РАН. Техн. Киберн. — 1994. — № 3. — С. 173–185.
183. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр перед производными// Мат. сб. — 1952. — 31, № 3. — С. 575–586.
184. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка// Докл. АН СССР. — 1954. — 99, № 1. — С. 27–30.
185. Тонков Е. Л. Некоторые вопросы управления периодическими движениями// Динамика управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1979.
186. Третьяков В. Е. К теории стохастических дифференциальных игр// Докл. АН СССР. — 1983. — 269, № 3. — С. 1049–1053.
187. Третьяков В. Е., Целищева И. В., Шишкин Г. И. Оптимальное управление системами с неполной и неточной информацией// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2. — С. 176–187.
188. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. — Л.: Машиностроение, 1976.
189. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. — М.: Наука, 1974.
190. Ухоботов В. И. Синтез гарантированного управления на основе аппроксимационной схемы// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 1. — С. 239–246.
191. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1980. — № 4. С. 29–36.
192. Ушаков В. Н. К вопросу стабильности в дифференциальных играх// Позиционное управление с гарантированным результатом/ Сб. науч. тр. под ред. А. И. Субботина и А. М. Тарасьева. — Свердловск: Ин-т мат. мех. УрО АН СССР, 1988. — С. 101–109.
193. Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. О приближенном построении решений в игровых задачах управления// Прикл. мат. мех. — 1997. — 61, № 3. — С. 413–421.
194. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., физ., хим. — 1959. — № 2. — С. 25–32.
195. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
196. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
197. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.
198. Хрусталева М. М. Необходимые и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана// Докл. АН СССР. — 1980. — 254. — С. 293–297.
199. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени// Мат. сб. — 1976. — 99. — С. 394–420.
200. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.
201. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978.
202. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.
203. Чикрий А. А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992.
204. Чистяков С. В. О решениях игровых задач преследования// Прикл. мат. мех. — 1977. — 41. — С. 825–832.
205. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.
206. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980.
207. Шориков А. Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1997.
208. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974.
209. Ananiev B. I. On minimax state estimates for multistage statistically uncertain systems// Probl. Contr. Inform. Theory. — 1981. — 18, № 1. — С. 27–41.
210. Aubin J. P. Viability theory. — Boston: Birkhäuser, 1991.
211. Aubin J. P., Cellina A. Differential inclusions. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
212. Aubin J. P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston: Birkhäuser.
213. Artstein Z., Gaitgory V. Tracking fast trajectories along a slow dynamics. A singular perturbations approach// SIAM J. Control Optim. — 1997. — 35. — С. 1487–1507.

214. Artstein Z., Gaitsgory V. The value function of singularly perturbed control systems// Appl. Math. Optim. — 2000. — 41. — С. 425–445.
215. Barabanov A. E., Ghulchak A. M. H-infinity optimisation problem with sign-indefinite quadratic form// Syst. Control Lett. — 1996. — 29. — С. 157–164.
216. Barabanov N. E., Ortega R. Necessary and sufficient conditions for passivity of the Lugre friction model// IEEE Trans. Automat. Contr. — 2000. — 1.
217. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and viscosity solutions of Hamilton—Jacobi—Bellman equations. — Boston: Birkhäuser, 1997.
218. Bardi M., Evans L. C. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton—Jacobi equations// Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. — 1984. — 8, № 11. — С. 1373–1381.
219. Bardi M., Falcone M. An approximation scheme for the minimum time function// SIAM J. Control Optim. — 1990. — 28. — С. 950–965.
220. Barles G., Perthame B. Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations// SIAM J. Control Optim. — 1988. — 26. — С. 1133–1148.
221. Barron E. N., Jensen R. The Pontryagin maximum principle from dynamic programming and viscosity solutions to first-order partial differential equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — 298, № 2. — С. 635–641.
222. Barron E. N., Evans L. C., Jensen R. Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls// J. Differ. Equations. — 1984. — 53, № 2. — С. 213–233.
223. Basar T., Bernhard P. H^∞ -Optimal control and related minimax design problems. — Boston: Birkhäuser, 1991.
224. Bensoussan A., Lions J. L. Applications of variational inequalities in stochastic control. — Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland Publ. Company, 1982.
225. Bensoussan A. Perturbation methods in optimal control. — New York—Chichester: Wiley-Gautier, 1988.
226. Bellman R. Dynamic programming. — Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.
227. Bellman R., Kalaba R. Dynamic programming and modern control theory. — New York: Academic Press, 1965.
228. Berkovitz L. D. A variational approach to differential games// Adv. Game Theory/ Ann. Math. Stud. — 1964. — 52.
229. Berkovitz L. D. Optimal feedback controls// SIAM J. Control Optim. — 1989. — 27. — С. 991–1006.
230. Bulirsh R., Ners E., Pesh H. J., von Stryk O. Combining direct and indirect methods in optimal control: range maximisation of a hang glider/ Report № 313. — München: Math. Inst. Techn. Univ. München, 1991.
231. Cannarsa P., Frankowska H. Some characterization of optimal trajectories in control theory// SIAM J. Control Optim. — 1991. — 29. — С. 1322–1347.
232. (1997). Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
233. Chentsov A. G., Pak V. E. On the extension of the nonlinear problem of optimal control with nonstationary phase restrictions// Nonlin. Anal. Theory, Methods Appl. — 1996. — 26, № 2. — С. 383–394.
234. Clarke F. H. Generalized gradients and applications. Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — 205. — С. 246–262.
235. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. Proximal analysis and feedback constructions// Control in Dynamic Systems/ Proc. Steklov Inst. Math. — MAIK Nauka/Interperiodica, 2000. — Suppl. Issue 1. С. S72–S89.
236. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth analysis and control theory. — New York: Springer-Verlag, 1997.
237. Clarke F. H., Vinter R. The relationship between the maximum principle and dynamic programming// SIAM J. Control Optim. — 1987. — 5. — С. 1291–1311.
238. Conway E. D., Hopf E. Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton—Jacobi equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1964. — 13, № 2. — С. 939–986.
239. Crandall M. G. A generalization of Peano's existence theorem and flow invariance// Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — 36, № 1. — С. 151–155.
240. Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — 277. — С. 1–42.
241. Crandall M. G., Evans L. C., Lions P. L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — 282. — С. 487–502.
242. Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L. A user's guide to viscosity solutions// Bull. Amer. Math. Soc. — 1992. — 27. — С. 1–67.
243. Demjanov V. F., Rubinov A. M. Constructive nonsmooth analysis. — Frankfurt: Peter Lang, 1995.

244. *Elliott R.* Viscosity solutions and optimal control// Pitman Research Notes, Math. Ser. — Boston: Longman Sci. Techn., 1987. — 165.
245. *Elliott R. J., Kalton N. J.* The existence of value in differential games of pursuit and evasion// J. Differ. Equations. — 1972. — 12, № 3. — С. 504–523.
246. *Evans L. C.* Partial differential equations/ Grad. Stud. Math. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. — 19.
247. *Fleming W. H.* The convergence problem for differential game, II// Adv. Game Theory/ Ann. Math. Stud. — 1964. — 52. — С. 195–210.
248. *Fleming W. H.* The Cauchy problem for degenerate parabolic equations// J. Math. Mech. — 1964. — 13, № 6. — С. 987–1008.
249. *Fleming W. H.* The Cauchy problem for a nonlinear first order differential equation// J. Differ. Equations. — 1969. — 5, № 3. — С. 515–550.
250. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solutions. — New York: Springer-Verlag, 1993.
251. *Filippov A. F.* Differential equations with discontinuous right-hand sides. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988.
252. *Friedman A.* Differential games. — New York: Wiley Interscience, 1971.
253. *Gaitsgory V. G.* Suboptimal control of singularly perturbed systems and periodic Optimization// IEEE Trans. Automat. Contr. — 1993. — 38, № 6. — С. 888–902.
254. *Gaitsgory V. G.* Limit Hamilton–Jacobi equations for singularly perturbed zero-sum differential games// J. Math. Anal. Appl. — 1996. — 202. — С. 862–899.
255. *Goritski A. Yu., Panov E. Yu.* Example of nonuniqueness of entropy solutions in the class of locally bounded functions// Russ. J. Math. Phys. — 1999. — 6, № 4. — С. 492–494.
256. *Haddad G.* Monotone trajectories of differential inclusions and functional-differential inclusions with memory// Isr. J. Math. — 1981. — 39. — С. 83–100.
257. *Himmelberg C. J.* Measurable relations// Fundam. Math. — 1975. — 82, № 1. — С. 53–72.
258. *Hopf E.* Generalized solutions of nonlinear equations of first order// J. Math. Mech. — 1965. — 14. — С. 951–972.
259. *Isaacs R.* Differential games. — New York: Wiley, 1965.
260. *Ishii H., Koike S.* Remarks on elliptic singular perturbation problems// Appl. Math. Optim. — 1991. — 23. — С. 1–75.
261. *Isidori A.* Nonlinear control systems. — New York: Springer-Verlag, 1995.
262. *Kamneva L. V., Patsko V. S., Turova V. L.* Construction of the value function for game brachistochrone problem// Proc. X Int. Symp. «Dynamic Games and Applications», July 8–11, 2002. — St. Petersburg, 2002. — 2. — С. 408–415.
263. *Kokotovic P. V.* Applications of singular perturbations techniques to control problems// SIAM J. Rev. — 1984. — 26, № 4. — С. 501–510.
264. *Krasovskii A. N., Krasovskii N. N.* Control under lack of information. — Boston: Birkhäuser, 1995.
265. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-theoretical control problems. — New York: Springer-Verlag, 1988.
266. *Krotov V. F.* Global methods in optimal control theory// Adv. Nonlin. Dynam. Control. Progr. Syst. Control Theory. — Boston: Birkhäuser, 1993. — № 17. — С. 76–121.
267. *Kryazhinskii A. V., Osipov Yu. S.* On differential-evolutionary games// Proc. Steklov Inst. Math. — 1995. — 211. — С. 234–261.
268. *Kumkov S. I., Patsko V. S.* Control of informational sets in a pursuit problem// New Trends in Dynam. Games and Appl./ Ann. Int. Soc. Dynam. Games. — Boston: Birkhäuser, 1995. — 3. — С. 191–206.
269. *Kumkov S. I., Patsko V. S., Pyatko S. G., Fedotov A. A.* Construction of the stable bridge in a problem of aircraft guiding under wind disturbances// Proc. X Int. Symp. «Dynamic Games and Applications», July 8–11, 2002. — St. Petersburg, 2002. — 2. — С. 474–480.
270. *Kurzanski A. B., Filippova T. F.* On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control// Adv. Nonlin. Dynam. Control. Progr. Syst. Control Theory. — Boston: Birkhäuser, 1993. — № 17. — С. 122–188.
271. *Kurzanski A. B., Varaiya P.* On reachability under uncertainty// SIAM J. Control Optim. — 2002. — 41, № 1. — С. 181–216.
272. *Lax P.* Hyperbolic systems of conservations laws, II// Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — 10. — С. 537–566.
273. *Leitman G.* One approach to the control of uncertain dynamical systems// Appl. Math. Comput. — 1995. — 70. — С. 261–272.

274. *Lions P. L.* Generalized solutions of Hamilton—Jacobi equations// Pitman Research Notes Math. Ser. — 1982. — 69.
275. *Lions P. L.* Optimal control of diffusion processes and Hamilton—Jacobi—Bellman equations, 2// Commun. Partial Differ. Equations. — 1983. — 8, № 11. — С. 1229–1276.
276. *Lions P. L., Souganidis P. E.* Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs's equations// SIAM J. Control Optim. — 1985. — 23, № 4. — С. 566–583.
277. *Malafeev O. A.* Perfect equilibrium in noncooperative differential games// Proc. X Int. Symp. «Dynamic Games and Applications», July 8–11, 2002. — St. Petersburg, 2002. — 2. — С. 492–494.
278. *Melikyan A. A.* Generalized characteristics of first order PDEs: Applications in optimal control and differential games. — Boston: Birkhäuser, 1998.
279. *Mirică S.* Extending Cauchy's method of characteristics for Hamilton—Jacobi equations// Stud. Cerc. Mat. — 1985. — 37, № 6. — С. 555–565.
280. *O'Malley R.* Introduction to singular perturbations. — New York: Academic Press, 1974.
281. *Ortega R. Van der Schaft A. J., Maschke B. M.* Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems via energy balancing// Stability and Stabilization of Nonlinear Systems. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 246.
282. *Parthasarathy T., Raghavan T.* Some topics in two-person games// Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. — New York: Elsevier, 1971. — 22.
283. *Pashkov A. G., Terekhov S. D.* Differential game of approach with two pursuers and one evader// J. Optim. Theory Appl. — 1987. — 55, № 2. — С. 303–311.
284. *Patsko V. S., Turova V. L.* Level sets of the value function in differential games with the homicidal Chauffeur dynamics// Int. Game Theory Rev. — 2001. — 3, № 1. — С. 67–112.
285. *Pervosvanski A. A., Gaitsgory V. G.* Theory of suboptimal solutions. — Dordrecht: Kluwer Acad., 1988.
286. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.* Variational analysis. — New York: Springer-Verlag, 1998.
287. *Rockafellar R. T., Wolenski P. R.* Convexity and duality in Hamilton—Jacobi theory/ Report IR-98-057. — Laxenburg: Int. Inst. Appl. Syst. Anal., 1998.
288. *Rowland J. D. L., Vinter R. B.* Constructions of optimal feedback controls// Syst. Control Lett. — 1991. — 16. — С. 357–367.
289. *Roxin E.* The axiomatic approach in differential games// J. Optim. Theory Appl. — 1969. — 3. — С. 153–163.
290. *Sonnevend G.* On constructing feedback control in differential games by use of central trajectories/ Report № 385. — Wuerzburg: Inst. Angew. Mat. Statist. Univ. Wuerzburg. 1992.
291. *Souganidis P. E.* Max-min representations and product formulas for the viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations with applications to differential games// Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. — 1985. — 9, № 3. — С. 217–257.
292. *Stoer J., Witzgall C.* Convexity and optimization in finite dimensions. I. — New York: Springer-Verlag, 1970.
293. *Subbotin A. I.* Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.
294. *Subbotin A. I., Taras'ev A. M., Ushakov V. N.* Generalized characteristics of Hamilton—Jacobi equations// J. Comput. Systems Sci. Int. — 1994. — 32, № 2. — С. 157–163.
295. *Subbotina N. N.* The maximum principle and the superdifferential of the value function// Probl. Control Inform. Theory. — 1989. — 18, № 3. — С. 151–160.
296. *Subbotina N. N.* Necessary and sufficient optimality conditions in terms of characteristics of Hamilton—Jacobi—Bellman equation// Report № 393. — Wuerzburg: Inst. Angew. Mat. Statist. Univ. Wuerzburg, 1992.
297. *Subbotina N. N.* Asymptotics for singularly perturbed differential games// Proc. IFAC Conf. «Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization», June 17–20, 1998, Chelyabinsk, Russia. — Oxford: Elsevier Science Ltd., 1998. — С. 43–52.
298. *Subbotina N. N.* On structure of optimal feedbacks to control problems// Proc. 11 IFAC Int. Workshop «Control Applications of Optimization», July 3–6, 2000, St.-Petersburg. — С. 254–255.
299. *Subbotina N. N.* On structure of optimal feedbacks to control problems// Proc. 11 IFAC Int. Workshop «Control Applications of Optimization», July 3–6, 2000, St.-Petersburg. — 1. — С. 339–344.
300. *Subbotina N. N.* Generalized Cauchy characteristics to singularly perturbed Hamilton—Jacobi equations// Междунар. конф. по дифф. уравн. и динам. сист., 21–26 августа 2000, Суздаль/ Тез. докл. — Владимир: Владимирский гос. ун-т. — С. 93–94.

301. *Subbotina N. N.* Asymptotics for singularly perturbed differential games// *Game Theory Appl.* — 2001. — 7. — С. 175–196.
302. *Subbotina N. N.* Sufficient optimality conditions for feedbacks to control problems// *Proc. X Int. Symp. «Dynamic Games and Applications», July 8–11, 2002.* — St. Petersburg, 2002. — 2. — С. 829–834.
303. *Subbotina N. N., Subbotin A. I., Tret'jakov V. E.* Stochastic and deterministic control. Differential inequalities// *Lect. Notes Control Inform.* — 1987. — 81. — С. 728–737.
304. *Subbotina N. N. and Ushakov V. N.* On characteristic differential inclusions to unified differential games// *Proc. IX Int. Symp. Dynamic Games and Applications. December 18–21, 2000, Adelaide, Australia.* — Adelaide: Univ. South Australia, 2000. — С. 464–467.
305. *Ushakov V. N.* Constructions of solutions in differential game of pursuit-evasion. Differential inclusions and optimal control// *Lect. Notes Nonlin. Anal.* — 1998. — 2. — С. 269–281.
306. *Varaiya P.* On the existence of solutions to a differential game// *SIAM J. Control Optim.* — 1967. — 5, № 1. — С. 153–162.
307. *Veliov V.* A generalization of the Tikhonov theorem for singularly perturbed differential inclusions// *J. Dynam. Control Syst.* — 1997. — 3. — С. 291–319.
308. *Veliov V.* Stability-like properties of differential inclusions// *Set-Valued Anal.* — 1997. — 5, № 1. — С. 73–88.
309. *Zhou X.-Y.* Maximum principle, dynamic programming and their connection in deterministic controls// *J. Optim. Theory Appl.* — 1990. — 65. — С. 363–373.

Нина Николаевна Субботина

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

E-mail: subb@uran.ru