ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 22

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Тбилиси
2004

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

Г. Харатишвили (Институт кибернетики Академии наук Грузии)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчев (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)
Г. Гиоргадзе (Институт кибернетики Академии наук Грузии)
Е. С. Голод (Московский государственный университет)
А. Лашхи (Грузинский технический университет)
И. Кигурадзе (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)
Е. Ф. Мищенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
А. В. Овчинников (Московский государственный университет)
В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
А. В. Сарычев (Университет Флоренции)
Г. Химшиашвили (Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии)

©Институт кибернетики Академии наук Грузии, 2004

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 22

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Труды международной конференции по алгебре и геометрии Батуми, 2003

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Конечные четырехугольники Муфанг (*Дж. А. Тас, Х. ван Малдехем*) 3
Алгебраическая геометрия в логике первого порядка (*Б. Плоткин*) 16
Накрытия топологических луп (*П. Т. Надь, К. Штрамбах*) 63
Гамильтоновы системы на комплексном грассмановом многообразии. Голономия и уравнение Шредингера (*З. Гиунашвили*) 82
О подфакторах с унитарным ортонормированным базисом (*Т. Чеккерини-Зильберштейн*) . . 102
Аффинная геометрия модулей над кольцом с инвариантным базисным числом (*А. А. Лашхи, Т. Г. Квирикашвили*) 126
О геометриях, связанных с общими геометрическими решетками (*С. Г. Кемкадзе, В. Сесадзе*) 139

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 3–15

КОНЕЧНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ МУФАНГ

© 2004 г. **ДЖ. А. ТАС, Х. ВАН МАЛДЕХЕМ**

Аннотация. Приведен обзор эквивалентных условий типа Муфанг и соответствующей геометрической классификации для конечного случая.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 3
2. Определения 5
3. Условия, эквивалентные условию Муфанг 9
4. Конечные четырехугольники Муфанг: четыре случая 10
5. Конечные трансляционные четырехугольники порядка (s, s^2) 11
6. Последний шаг и обобщения 12
Список литературы 14

1. Введение

Понятие *обобщенного четырехугольника* было формально введено в литературе Дж. Титсом в его известной статье о тройственности [33] как часть более общего понятия *обобщенного многоугольника*. Позже Титсом были введены структуры, называемые *небоскребами*; их важный класс составляют *сферические небоскребы* (они содержат, в частности, все конечные небоскребы). Они имеют некоторый ранг (размерность), и в случае, когда этот ранг равен 2, понятие густого сферического небоскреба совпадает с понятием густого обобщенного многоугольника. На самом деле все небоскребы ранга 2 суть деревья, не имеющие вершин валентности 1.

В 1974 г. Титсом была опубликована книга о классификации всех густых сферических небоскребов ранга, равного по меньшей мере 3 (см. [34]). В приложении к этой книге он ввел условие Муфанг для сферических небоскребов (а значит, и для обобщенных многоугольников и четырехугольников), мотивированное утверждением, что классификация многоугольников Муфанг значительно упростит классификацию сферических небоскребов высших рангов. Титс сам начал реализацию этой программы уже в 1960-х гг. и вскоре получил классификацию всех шестиугольников Муфанг, хотя и не опубликовал ее.

В это же время Дж. Фолкнер изучал некоторые простые группы (группы Шевалле ранга 2) с помощью *представления Стейнберга*. Он получил в [3] множество классификационных результатов и примеров шестиугольников Муфанг и четырехугольников Муфанг при очевидно более сильных условиях. На самом деле Фолкнер показал, как можно классифицировать некоторые типы сферических небоскребов с помощью полученных им результатов. Однако пока эти результаты были неполными (например, не рассматривались четырехугольники характеристики 2), они не были популярны.

Титс независимо работал над своей программой и смог классифицировать восьмиугольники Муфанг в 1976 г., а также доказать, что не существует n-угольников Муфанг, кроме случаев $n = 3, 4, 6, 8$ (см. [35,37]). Последний результат был также доказан Вейсом [44], установившим его в более общей постановке и более простым способом. Случай $n = 3$ соответствует проективным плоскостям; он был охарактеризован значительно раньше (терминология происходит из этого случая). Оставался не рассмотренным только случай четырехугольников Муфанг. Тем не менее Титс знал, как вывести соотношения Стейнберга из свойства Муфанг и рассматривал их как первый шаг в классификации. Этот результат был опубликован в 1994 г. (см. [39]).

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

Для конечного случая Фонг и Зейтц опубликовали две статьи [4,5], в которых были классифицированы конечные группы, обладающие некоторым свойством. Ими не была дана геометрическая интерпретация полученного результата, однако Титсом было замечено, что одно из установленных ими следствий на самом деле относится к классификации всех конечных многоугольников Муфанг, в частности, ко всем конечным квадратам Муфанг.

В это же время стали известны характеризации и эквивалентные определения конечных четырехугольников Муфанг. Многие из них исходят из априори более слабого условия, чем условие Муфанг. Например, Тас, Пейн и Ван Малдехем доказали [29], что каждый конечный *полумуфангов четырехугольник* (см. ниже) есть четырехугольник Муфанг. Аналогичный подход был использован Ван Малдехемом, Тасом и Пейном в [42] для доказательства того, что любой конечный 3-*муфангов* обобщенный четырехугольник является четырехугольником Муфанг (см. ниже; этот результат был обобщен Ван Малдехемом и Вейсом на произвольные конечные многоугольники в [43]). В 1998 г. Ван Малдехем [41] доказал, что 2-условие Муфанг для густых обобщенных четырехугольников эквивалентно 3-условию Муфанг. Недавно Тас и Ван Малдехем [32] доказали, что из половины 2-*условия Муфанг* следует условие Муфанг для конечных обобщенных четырехугольников. Существуют и другие типы характеризаций, использующие коллинеации. Например, в [22] Тас показал, что условие Муфанг для конечных обобщенных четырехугольников эквивалентно условию на группу коллинеации, оставляющую неподвижным произвольный апартмент. Обзор этих результатов будет дан ниже.

В 2002 г. в [40] появилась полная классификация обобщенных многоугольников. Часть, касающаяся четырехугольников, занимает особое место, не только потому, что она самая длинная, но и потому, что она самая сложная. Наиболее важным является класс четырехугольников Муфанг, открытый на этом пути в 1997 г. Эти новые примеры не только отсутствуют в оригинальном списке Титса, но и никогда не связывались ни с какой классической, алгебраической или смешанной группой, до тех пор, пока Мюхлер и Ван Малдехем не показали в [12], что любой такой обобщенный четырехугольник возникает как структура неподвижных точек некоторого смешанного небоскреба типа F_4. Это обстоятельство не было замечено Титсом, поскольку процесс построения не следует теории алгебраических групп, а является ее «смешанным аналогом». Конечно, все эти новые четырехугольники бесконечны.

Таким образом, сейчас имеется красивое и удовлетворительное доказательство классификации четырехугольников Муфанг (значительно более элементарное, чем доказательство Фонга и Зейтца для конечного случая).

Как только стало ясно, что все четырехугольники Муфанг можно классифицировать, стали рассматриваться бесконечные аналоги конечных четырехугольников Муфанг, упомянутых выше. В итоге почти все упомянутые выше результаты были обобщены на бесконечный случай, в том числе и оригинальный результат Фонга и Зейтца.

Сложный и запутанный теоретико-групповой подход Фонга и Зейтца инспирировал начать поиски комбинаторно-геометрической классификации конечных четырехугольников Муфанг в середине 1970-х гг. В то время конечные обобщенные четырехугольники Муфанг были популярным и важным объектом исследования в конечной геометрии, имеющим много приложений и параллелей с другими областями. Значительное число технических приемов для решения всех типов задач о конечных обобщенных четырехугольниках были созданы в основном усилиями Пейна и Таса (см. [15]). Кроме того, монография [15] содержит и чисто геометрический подход к конечным четырехугольникам Муфанг. Она не дает полной классификации: один случай не может быть рассмотрен ее методами.

Недавно Тасом были доказаны новые классификационные результаты о конечных обобщенных четырехугольниках, допускающих некоторые коллинеации, значительно более слабые, чем условие Муфанг, в том смысле, что условия Таса *локальны*, т.е. гипотетическая группа фиксирует некоторый элемент. Однако как следствие получается полная классификация конечных четырехугольников Муфанг внутренним, геометрическим образом.

В данной статье дается обзор некоторых эквивалентных условий Муфанг для (конечных) обобщенных четырехугольников, а также обзор геометрической классификации для конечного случая.

2. Определения

2.1. Обобщенные четырехугольники. *Обобщенным четырехугольником* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathtt{I})$ называется структура, состоящая из (непустого) *множества точек* $\mathcal{P}$, (непустого) *множества прямых* $\mathcal{L}$, а также симметричного отношения $\mathtt{I}$ между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$, называемого *отношением инцидентности*, удовлетворяющего следующим аксиомам.

(GQ1) Каждая прямая инцидентна по крайней мере двум точкам и никакие две прямые не инцидентны двум общим точкам.

(GQ2) Каждая точка инцидентна по крайней мере двум прямым и никакие две точки не инцидентны двум общим прямым.

(GQ3) Для каждой точки $x \in \mathcal{P}$ и для каждой прямой $L \in \mathcal{L}$, $x \not\mathtt{I}\ L$, существует единственная пара точка-прямая $(y, M) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, для которой $x\ \mathtt{I}\ M\ \mathtt{I}\ y\ \mathtt{I}\ L$.

Последнее свойство (GQ3) называется *основной аксиомой*. Если каждая точка (соответственно, прямая) инцидентна по крайней мере трем прямым (соответственно, точкам), то обобщенный четырехугольник называется *густым*. Негустой обобщенный четырехугольник в точности с двумя прямыми, проходящими через любую точку, называется $(k \times \ell)$-*сеткой*, где соответствующие прямые имеют размеры k и ℓ. Каждый негустой обобщенный четырехугольник есть либо сетка, либо двойственная сетка. Оказывается, что обобщенный четырехугольник — густой, если *некоторая* прямая инцидентна по крайней мере трем точкам и *некоторая* точка инцидентна по крайней мере трем прямым. Сетка, являющаяся и двойственной сеткой, называется *обычным четырехугольником*. Что же касается отношения инцидентности, часто будет использоваться терминология, предполагающая, что прямые рассматриваются как множества точек (это допустимо ввиду того, что эти точки полностью определяют рассматриваемую прямую). *Коллинеарными точками* называются точки, лежащие на одной прямой (*соединяемые прямой*); пересекающиеся прямые — это прямые, проходящие через одну и ту же точку (*пересекающиеся в одной и той же точке*). Множество точек, коллинеарных данной точке x, обозначается через $x^\perp$. Более общо, множество точек, коллинеарных каждой точке некоторого подмножества $A \subseteq \mathcal{P}$ обозначается через $A^\perp$. Пишем также $A^{\perp\perp}$ для $(A^\perp)^\perp$. Для точек x, y множество $\{x, y\}^\perp$ называется *следом* x *и* y, а $\{x, y\}^{\perp\perp}$ — *оболочкой* x *и* y. Если две точки не коллинеарны или две прямые не пересекаются в одной точке, то их иногда называют *противоположными*. Для густого обобщенного четырехугольника автоматически выполняется следующее свойство: *число точек на прямой равно постоянной* $1 + s$ и *число прямых, проходящих через точку, равно постоянной* $1 + t$. В этом случае (s, t) называется *порядком* обобщенного четырехугольника. Заметим, что s не обязательно равно t (см. примеры ниже). Если $s = t$, то просто говорят о *порядке* s.

Определение обобщенного четырехугольника симметрично относительно $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$. Замена этих множеств друг на друга приводит к другому обобщенному четырехугольнику $\mathcal{S}^D$, называемому *двойственным* к $\mathcal{S}$. Следовательно, справедлив следующий *принцип двойственности*: каждое утверждение имеет двойственное, не нуждающееся в отдельном доказательстве. Каждое определение допускает двойственное, не нуждающееся в отдельном объяснении.

Если x — точка обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$, а L — прямая, не проходящая через эту точку, то единственная точка $\mathcal{S}$, коллинеарная x и инцидентная L, часто обозначается через $\mathrm{proj}_L x$ и называется *проекцией точки* x *на* L. Основная аксиома гарантирует, что проекция корректно определена. Обобщим это определение на точки z, лежащие на L, полагая $z = \mathrm{proj}_L z$, если $z\ \mathtt{I}\ L$, и на прямые M, пересекающиеся в одной точке с $L \neq M$, обозначая эту точку пересечения через $\mathrm{proj}_L M$. Для двойственных объектов все определения аналогичны.

2.2. Коллинеации и подчетырехугольники. Пусть $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathtt{I})$ — обобщенный четырехугольник. Пусть $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ и $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ таковы, что $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathtt{I}')$ с индуцированным отношением инцидентности $\mathtt{I}'$ в $(\mathcal{P}' \times \mathcal{L}') \cup (\mathcal{L}' \times \mathcal{P}')$ есть обобщенный четырехугольник. Тогда говорят, что $\mathcal{S}'$ — *подчетырехугольник* четырехугольника $\mathcal{S}$, *индуцированный* $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{L}'$. Если $\mathcal{S}'$ обладает тем дополнительным свойством, что каждая точка $\mathcal{S}$ на любой прямой $\mathcal{S}'$ принадлежит $\mathcal{S}'$, то говорят, что $\mathcal{S}'$ — *полный подчетырехугольник*. Двойственным образом получаем *идеальный подчетырехугольник*. В конечном случае имеются сильные ограничения, при которых существуют башни

полных или идельных подчетырехугольников. Они являются следствием комбинаторного результата, утверждающего, что $t \leqslant s^2$ и $s \leqslant t^2$ для порядка (s,t) густого обобщенного четырехугольник (это впервые установлено в [8]). В частности, это свойство выводится из результатов [15, гл. 1, 2].

Предложение 2.1 (см. [15]). *Пусть $\mathcal{S}$ — густой обобщенный четырехугольник порядка (s,t). Тогда $t \leqslant s^2$ и $s \leqslant t^2$. Если $\mathcal{S}'$ — полный подчетырехугольник порядка (s,t'), $t' < t$, то $st' \leqslant t$. Если, кроме того, $\mathcal{S}''$ — полный подчетырехугольник в $\mathcal{S}'$ порядка (s,t''), $t'' < t'$, то $t = s^2$, $t' = s$ и $t'' = 1$. В частности, $\mathcal{S}''$ не допускает собственного полного подчетырехугольника.*

Изоморфизм из обобщенного четырехугольника $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathtt{I})$ в обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathtt{I}')$ состоит из биекции $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ и биекции (обозначаемой тем же символом) $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ таких, что $x \mathtt{I} L$ в том и только том случае, если $x^\varphi \mathtt{I}' L^\varphi$ при всех $(x, L) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Если существует изоморфизм из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}'$, то говорят, что $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ *изоморфны*. Изоморфизм из $\mathcal{S}$ в себя называется*коллинеацией* или *автоморфизмом*. Множество всех коллинеаций данного обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ есть группа, обозначаемая через $\operatorname{Aut}\mathcal{S}$ и называемая *полной группой коллинеаций* $\mathcal{S}$, в отличие от обычной *группы коллинеаций* $\mathcal{S}$, которая есть просто подгруппа $\operatorname{Aut}\mathcal{S}$.

Связь между коллинеациями и подчетырехугольниками становится ясной из следующего предложения, которое можно легко вывести из теоремы 2.4.1 в [15].

Предложение 2.2 (см. [15]). *Пусть φ — коллинеация обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$. Пусть $\mathcal{P}'$ (соответственно, $\mathcal{L}'$) — множество инвариантных точек (соответственно, прямых) обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ при φ. Если $\mathcal{P}'$ содержит две противоположные точки из $\mathcal{S}$, а $\mathcal{L}'$ — две противоположные прямые из $\mathcal{S}$, то $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{L}'$ индуцируют подчетырехугольник в $\mathcal{S}$.*

Оперением x называется коллинеация обобщенного четырехугольника, оставляющая неподвижными все прямые, проходящие через точку x. Из предыдущего предложения вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть φ — оперение точки x густого обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}'$ — множество инвариантных точек φ, а $\mathcal{L}'$ — множество инвариантных прямых φ. Тогда могут иметь место только следующие возможности*:

(i) *$\mathcal{L}'$ есть множество прямых, проходящих через x, и $\mathcal{P}' \subseteq x^\perp$;*
(ii) *существует точка $y \notin x^\perp$, неподвижная для φ, и $\{x,y\}^\perp \subseteq \mathcal{P}' \subseteq (\{x,y\}^\perp \cup \{x,y\}^{\perp\perp})$, тогда как каждый каждый элемент $\mathcal{L}'$ инцидентен единственной точке $\{x,y\}^\perp$ и единственной точке $\{x,y\}^{\perp\perp}$;*
(iii) *множества $\mathcal{P}'$ and $\mathcal{L}'$ индуцируют густой подчетырехугольник в $\mathcal{S}$.*

2.3. Свойство Муфанг и его аналоги. Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенный четырехугольник. *Апартментом* называется обычный четырехугольник в $\mathcal{S}$. Он состоит из четырех точек и четырех прямых, образующих замкнутый путь длины 8 в графе инцидентности $\mathcal{S}$. *Корнем* называется множество пяти «последовательных» элементов апартмента (кривая длины 4 в графе инцидентности). Следовательно, корень содержит либо две точки x_1, x_2 и три прямых L_1, L_2, L_3 с $L_1 \mathtt{I} x_1 \mathtt{I} L_2 \mathtt{I} x_2 \mathtt{I} L_3$ или, двойственным образом, три точки и две прямых. Полезно различать эти двойственные понятия. Поэтому назовем первое корнем, а второе (двойственное) — *двойственным корнем*. Подчеркнем однако, что это мотивировано только рассматриваемой специальной ситуацией и такое различие обычно не проводится в литературе. Корень без его крайних прямых называется *панелью*, более точно, *внутренней панелью* корня. Аналогично определяется *двойственная панель*. Таким образом, панель — это множество коллинеарных точек вместе с соединяющей их прямой.

Теперь все готово для определения свойства Муфанг для обобщенных четырехугольников.

Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенный четырехугольник с полной группой коллинеаций G, π — панель. Будем говорить, что π *обладает свойством Муфанг* (или, эквивалентно, π — *панель Муфанг*), если для

некоторого корня α с внутренностью π группа коллинеаций $G^{[\pi]}$ (называемых *корневыми элациями*), оставляющая неподвижным любой элемент, инцидентный некоторому элементу π, транзитивно действует на множестве апартментов, содержащих α. Легко показать, что определение панели Муфанг не зависит от корня, участвующего в ее определении.

Более того, пусть $\theta \in G^{[\pi]}$ с тем же π, что и выше. Допустим, что θ оставляет инвариантным апартмент, проходящий через π. Тогда используя следствие 2.3, видим, что θ — единица. Следовательно, вообще говоря, $G^{[\pi]}$ полурегулярно действует на множестве апартментов, проходящих через α, с корнем α, имеющим внутренность π, и это действие регулярно на этом множестве в точности тогда, когда π — панель Муфанг.

Если каждая панель и каждая двойственная панель обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ обладают свойством Муфанг, то говорят, что $\mathcal{S}$ *обладает свойством Муфанг* или что $\mathcal{S}$ — *муфангов обобщенный четырехугольник*. Если каждая панель муфангова или каждая двойственная панель — двойственная панель Муфанг, то говорят, что $\mathcal{S}$ — *полумуфангов* обобщенный четырехугольник. Если $\mathcal{S}$ — муфангов обобщенный четырехугольник, то группа, порожденная корневыми элациями и двойственными корневыми элациями, называется *малой проективной группой* $\mathcal{S}$.

Коллинеация $\mathcal{S}$, оставляющая неподвижными все прямые, пересекающиеся в одной точке с заданной прямой L, автоматически является корневой элацией и называется *аксиальной корневой элацией* с осью L. Двойственным образом определяются *центральные корневые элации* с центром в некоторой точке x.

Иногда аксиальную корневую элацию с осью L также называют *симметрией относительно* L; аналогично, центральная корневая элация с центром x также называется *симметрией относительно* x.

Флагом обобщенного четырехугольника называется инцидентная пара точка-прямая. Пусть $\{x, L\}$ — флаг обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$. Пусть $M \mathtt{I} x$ и $y \mathtt{I} L$ таковы, что $y \not\mathtt{I} M$. Как и выше, легко видеть (с помощью следствия 2.3), что группа $G^{[x,L]}$ оперений вокруг x и L полурегулярно действует на множестве апартментов, содержащих $\{x, y, L, M\}$. Назовем флаг $\{x, L\}$ *муфанговым*, если группа $G^{[x,L]}$ транзитивно (а, следовательно, регулярно) действует на множестве апартментов, содержащих $\{x, y, L, M\}$. Это определение не зависит от выбранной прямой M, проходящей через точку x, $M \neq L$, и от выбранной точки y на L, $y \neq x$.

Ясно, что определение муфангова флага автодуально, а значит, нет необходимости вводить какие-либо понятия типа «двойственного муфангова флага». Если каждый флаг обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ муфангов, то $\mathcal{S}$ называется *3-муфанговым*, где число 3 относится к длине последовательности (y, L, x, M) как пути в графе инцидентности $\mathcal{S}$ (являющимся графом с вершиной в $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, в котором примыкание и есть инцидентность).

Пусть теперь x — любая точка обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$. Если группа $G^{[x]}$ оперений точки x транзитивно действует на множестве точек $\mathcal{S}$, противоположных x (здесь это действие не обязательно регулярно), то говорят, что x — *центр транзитивности*. Двойственным образом определяется *ось транзитивности*. Если все точки являются центрами транзитивности, а все прямые — осями транзитивности, то говорят, что $\mathcal{S}$ есть 2-*муфангов обобщенный четырехугольник*. Если либо точки являются центрами транзитивности, либо все прямые — осями транзитивности, то $\mathcal{S}$ называется *полу*-2-*муфанговым обобщенным четырехугольником*.

Специальный случай сказанного выше возникает, когда для точки x существует группа ее оперений G, точно транзитивно действующая на множестве точек, противоположных x. В этом случае говорят, что x есть *точка элации*. Двойственным образом определяются *прямые элации*. Каждая точка элации есть центр транзитивности. Если x — точка элации, а группа G абелева, то говорят, что x — *точка трансляции*, а $\mathcal{S}$ — *трансляционный обобщенный четырехугольник*.

Пусть $\{x, L\}$ — флаг обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ с точкой x и прямой L. Флаг $\{y, M\}$ называется *противоположным* $\{x, L\}$, если точка y противоположна x, а прямая M противоположна L. Если группа $G_{x,L}$ всех коллинеаций $\mathcal{S}$, оставляющих неподвижным флаг $\{x, L\}$, транзитивно действует на множестве флагов, противоположных $\{x, L\}$, то говорят, что $\{x, L\}$ — *транзитивный*

флаг. Если все флаги транзитивны, то говорят, что $\mathcal{S}$ — *1-муфангов обобщенный четырехугольник*, или что $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию Титса*, или что $\mathcal{S}$ — *титсов обобщенный четырехугольник*.

Пусть $\mathcal{S}$ — титсов обобщенный четырехугольник с полной группой коллинеаций G. Пусть $\{x, L\}$ — любой флаг в $\mathcal{S}$ с $x \in \mathcal{P}$ и $L \in \mathcal{L}$. Положим $B = G_{x,L}$. Пусть Σ — апартмент, содержащий $\{x, L\}$. Пусть $N = G_\Sigma$ — (множественный) стабилизатор Σ. Положим $H = B \cap N$. Тогда H должна оставлять неподвижным каждый элемент Σ и есть в точности группа коллинеаций, оставляющая неподвижным каждый элемент Σ. Следовательно, $H \trianglelefteq N$. Если теперь существует нильпотентная нормальная подгруппа U группы B такая, что $UH = B$, то говорят, что $\mathcal{S}$ обладает *свойством Фонга—Зейтца* (*удовлетворяет условию Фонга—Зейтца*). Следовательно, обобщенный четырехугольник *Фонга—Зейтца* есть титсов обобщенный четырехугольник с дополнительным теоретико-групповым свойством (существует достаточно большая нильпотентная нормальная подгруппа U группы B; «большая» означает, что $UH = B$). С теоретико-групповой точки зрения это условие естественно. Заметим, что априори ничто не гарантирует единственности U.

Сразу проверяется, что муфангов обобщенный четырехугольник всегда является 3-муфанговым обобщенным четырехугольником, что 3-обобщенный четырехугольник всегда 2-муфангов, а 2-муфангов обобщенный четырехугольник всегда титсов.

Наконец, пусть x и y — две противоположные точки обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$, L — любая прямая, проходящая через x. Если группа оперений вокруг x и y транзитивно действует на множестве точек, инцидентных L, но отличных от x и $\mathrm{proj}_L\, y$, то говорят, что $\{x, y\}$ — *транзитивная пара точек*. Легко доказывается, что это определение не зависит от выбора L и порядков точек x и y.

Все муфанговы обобщенные четырехугольники были классифицированы Титсом и Вейсом в [40]. Технически эта классификация была закончена в 1997 г. В конечном случае, который будет рассмотрен ниже, классификация муфанговых обобщенных четырехугольников вытекает из классификации обобщенных четырехугольников Фонга—Зейтца [4, 5]. Фонг и Зейтц доказали, что из условия Муфанг вытекает условие Фонга—Зейтца, а затем использовали собственно теоретико-групповые методы для классификации обобщенных четырехугольников Фонга—Зейтца. Их доказательство совершенно не ясно с геометрической точки зрения и занимает примерно 100 страниц. Результаты, описанные в данной статье, дают полное альтернативное доказательство классификации обобщенных четырехугольников Фонга—Зейтца с помощью чисто геометрических рассуждений. Конечно, поскольку условие Фонга—Зейтца теоретико-групповое, оно содержит некоторую (элементарную) теорию групп для сведения условий к более геометрическим. Эта геометрическая трактовка есть в точности условие Муфанг, в котором уже не предполагается нильпотентности никакой группы.

2.4. Некоторые комбинаторные определения. Геометрическая классификация конечных четырехугольников Муфанг существенно использует комбинаторику этих объектов. При таком подходе решающими являются следующие определения.

Пусть $\mathcal{S}$ — конечный обобщенный четырехугольник порядка (s, t). Пара противоположных точек x, y называется *регулярной*, если каждая точка, коллинеарная по крайней мере двум точкам из $\{x, y\}^\perp$, коллинеарна всем элементам $\{x, y\}^\perp$; в таком случае либо $s = 1$, либо $s \geqslant t$ (см. [15, 1.3.6]). Двойственным образом определяется регулярная пара противоположных прямых. Если для точки x все пары противоположных точек, содержащие x, регулярны, то говорят, что точка x *регулярна*. Следовательно, если x — регулярная точка, а y противоположна x, то $|\{x, y\}^{\perp\perp}| = |\{x, y\}^\perp| = 1 + t$.

Триадой точек называется множество из трех попарно противоположных точек.

Предположим снова, что x и y — противоположные точки обобщенного четырехугольника $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathtt{I})$. Тогда положим $\mathrm{cl}(x, y) = \{z \in \mathcal{S} | z^\perp \cap \{x, y\}^{\perp\perp} \neq \emptyset\}$. Говорят, что точка u обладает *свойством* (H) в предположении, что $z \in \mathrm{cl}(x, y)$, в том и только том случае, если $x \in \mathrm{cl}(y, z)$ как только $\{x, y, z\}$ есть триада точек в $u^\perp$.

2.5. Конечные четырехугольники Муфанг. В этом пункте описываются конечные густые четырехугольники Муфанг, которые (с точностью до двойственности) являются конечными классическими четырехугольниками, связанными с классическими группами (см. [15]).

Рассмотрим неособую квадрику индекса Витта 2, т.е. проективного индекса 1 соответственно в $\mathrm{PG}(4,q)$ и $\mathrm{PG}(5,q)$. Точки и прямые квадрики образуют обобщенный четырехугольник, обозначаемый соответственно через $\mathcal{Q}(4,q)$ и $\mathcal{Q}(5,q)$, имеющий порядок соответственно равный (q,q) и (q,q^2). Далее, пусть $\mathcal{H}$ — неособое эрмитово многообразие в $\mathrm{PG}(3,q^2)$ (соответственно в $\mathrm{PG}(4,q^2)$). Точки и прямые обобщенного четырехугольника $H(3,q^2)$ (соответственно $H(4,q^2)$) имеют порядок (q^2,q) (соответственно (q^2,q^3)). Точки $\mathrm{PG}(3,q)$ вместе с тотально изотропными прямыми относительно симплектической полярности в $\mathrm{PG}(3,q)$ образуют обобщенный четырехугольник $W(q)$ порядка q. Обобщенные четырехугольники, определенные в этом пункте, это так называемые *густые классические обобщенные четырехугольники* (см. [15, гл. 3]).

3. Условия, эквивалентные условию Муфанг

3.1. Некоторые общие результаты. В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [6,19,20])**.** *Пусть $\mathcal{S}$ — густой обобщенный четырехугольник. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *условие Муфанг*;
(b) 3-*условие Муфанг*;
(c) 2-*условие Муфанг*;
(d) *половинное условие Муфанг*;
(e) *условие Фонга—Зейтца*.

Доказательство импликации (a)⇒(e) выявляет другое интересное свойство обобщенных четырехугольников Муфанг.

Фиксируем апартмент Σ, содержащий $\{x,L\}$. Положим $\Sigma=\{x_1,x_2,\dots,x_8\}$, где индекс рассматривается по модулю 8 с $x_i \mathtt{I} x_{i+1}$ при всех $i\in\mathbb{Z} \bmod 8$, а $x_2=x$ и $x_3=L$. Группа корневых элаций, связанная с панелью $\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\}$, будет обозначаться через U_i. Положим $U=\langle U_1,U_2,U_3,U_4\rangle$. Тогда можно показать, что $U=U_1U_2U_3U_4$. Если *коммутатор* двух элементов g,h этой группы есть произведение $[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$, а *коммутаторная подгруппа* $[A,B]$ двух подгрупп A,B есть группа, порожденная элементами $[a,b]$ при всех $a\in A$ и $b\in B$, то можно доказать следующие свойства с точностью до перенумерации:

(i) $[U_1,U_2]=[U_2,U_3]=[U_3,U_4]=\{\mathrm{id}\}$.
(ii) U_2 и U_4 коммутируют, а U_1 и U_3 — нильпотентны класса не более, чем 2 (т.е. $[U_i,U_i]\leqslant Z(U_i)$, $i=1,3$).
(iii) $[U_{i-1},U_{i+1}]\leqslant U_i$, $i=2,3$, и $[U_1,[U_2,U_4]]=\{\mathrm{id}\}$.
(iv) $[U_1,U_4]\leqslant U_2U_3$ и d $[[U_0,U_2],U_4]\leqslant U_2[U_2,U_4]$.

Эти соотношения называются *соотношениями Стейнберга*. Они вытекают из групп с представлением Стейнберга, изученных Фолкнером (см. введение). Теперь ясно, что Фолкнер изучал четырехугольники Муфанг, но исходя из априори более сильного условия. Кроме того, представление Стейнберга содержит только один апартмент, отражающий следующее свойство.

Предложение 3.2 (см. [40])**.** *Обобщенный четырехугольник обладает свойством Муфанг в том и только том случае, если для некоторого апартмента Σ каждая панель и каждая двойственная панель внутри Σ соответственно есть муфангова панель и двойственная муфангова панель.*

Из теоремы 3.1 также выводится, что каждый четырехугольник Муфанг допускает нетривиальные симметрии.

Заметим, что произведение $U_1U_2U_3$ есть группа оперений и действует точно и транзитивно на множестве точек, противоположных $x=x_2$. Поэтому каждая точка четырехугольника Муфанг есть точка элации. Легко вывести следующее утверждение.

Следствие 3.3 (см. [6]). *Обобщенный четырехугольник является четырехугольником Муфанг в том и только том случае, если он содержит две противоположные точки элации и линию элации или две противоположные линии элации и точку элации.*

Из того, что 2-муфанговы четырехугольники есть четырехугольники Муфанг, вытекает другой интересный факт.

Следствие 3.4 (см. [6]). *Если все пары противоположных точек обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ транзитивны и транзитивны все пары прямых, то $\mathcal{S}$ — четырехугольник Муфанг* (*но не все четырехугольники Муфанг возникают таким образом*).

3.2. Конечный случай. В конечном случае получаются некоторые более сильные результаты. Приведем их сводку.

Теорема 3.5 (см. [4, 5, 22, 29, 32, 41, 42]). *Пусть $\mathcal{S}$ — густой конечный обобщенный четырехугольник. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *условие Муфанг*;
(b) 3-*условие Муфанг*;
(c) 2-*условие Муфанг*;
(d) *половинное условие Муфанг*;
(e) *условие Фонга—Зейтца*;
(f) *половинное* 2-*условие Муфанг*;
(g) *каждая точка есть точка элации*;
(h) *с точностью до двойственности каждая пара противоположных точек есть транзитивная пара.*

Следующий недавний результат характеризует подкласс класса конечных четырехугольников Муфанг.

Предложение 3.6 (см. [31]). *Пусть $\mathcal{S}$ — конечный обобщенный четырехугольник. Предположим, что для каждой пары $\{L, M\}$ противоположных линий существует линия N, пересекающаяся в одной точке с L и M, обладающая тем свойством, что группа оперений для L и M транзитивно действует на точках, инцидентных N, но отличных от $\mathrm{proj}_N L$ и $\mathrm{proj}_N M$. Тогда $\mathcal{S}$ — обобщенный четырехугольник Муфанг.*

Наконец, отметим, что приведенные выше результаты доказаны без классификации конечных простых групп. В самом деле, имея такую классификацию, можно классифицировать все конечные 1-муфанговы обобщенные четырехугольники. Это сделано в [2], однако доказательство не проясняет изложенного выше. Поэтому приведенные выше результаты и их доказательства уместны.

4. Конечные четырехугольники Муфанг: четыре случая

4.1. Конечные четырехугольники Муфанг и свойство (H). Следующая теорема указывает связь между условием Муфанг и свойством (H).

Теорема 4.1 (см. [15, гл. 9]). *Если каждая панель густого конечного обобщенного четырехугольника Муфанг $\mathcal{S}$ является муфанговой панелью, то любая точка и четырехугольника $\mathcal{S}$ обладает свойством (H).*

Имеет место следующий сильный результат.

Теорема 4.2 (см. [15, гл. 5]). *Если густой конечный обобщенный четырехугольник Муфанг $\mathcal{S}$ порядка (s, t) удовлетворяет условию (H) в каждой точке, то имеет место один из следующих случаев*:

(i) *все точки $\mathcal{S}$ регулярны, а потому $s \geqslant t$*;
(ii) *все оболочки противоположных пар точек имеют размер* 2;
(iii) $\mathcal{S} \cong H(4, s)$.

Сопоставляя теоремы 4.1 и 4.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Если каждая панель густого обобщенного четырехугольника $\mathcal{S}$ порядка (s,t) муфангова, то имеет место один из следующих случаев*:

(i) *все точки $\mathcal{S}$ регулярны, а потому $s \geqslant t$;*
(ii) *все оболочки противоположных пар точек имеют размер* 2;
(iii) $\mathcal{S} \cong H(4,s)$.

Следующая теорема характеризации играет решающую роль в доказательстве теоремы 4.2.

Теорема 4.4 (см. [21])**.** *Обобщенный четырехугольник порядка (s,t) с $s^3 = t^2$ и $s \neq 1$ изоморфен классическому четырехугольнику $H(4,s)$ в том и только том случае, если все оболочки противоположных пар точек имеют размер по крайней мере равный $\sqrt{s}+1$.*

4.2. Конечные четырехугольники Муфанг: четыре случая. Как показывает следующая теорема, для классификации всех конечных четырехугольников Муфанг нужно рассмотреть четыре случая.

Теорема 4.5 (см. [15, гл. 9])**.** *Пусть $\mathcal{S}$ — конечный четырехугольник Муфанг порядка (s,t), $1 < s \leqslant t$. Тогда выполнено одно из следующих условий*:

(i) *либо $\mathcal{S}$, либо его двойственный изоморфен $W(s)$, а потому $(s,t) = (q,q)$ для некоторой простой степени q;*
(ii) *$\mathcal{S} \cong H(4,s)$, а потому $(s,t) = (q^2,q^3)$ для некоторой простой степени q;*
(iii) *все прямые регулярны, $s < t$, а все оболочки пар противоположных точек имеют размер* 2;
(iv) *все оболочки пар противоположных точек имеют размер* 2*, все оболочки противоположных пар прямых также имеют размер* 2.

Чтобы получить случай (i), воспользуемся следующей теоремой характеризации.

Теорема 4.6. *Конечный обобщенный четырехугольник порядка s, $s \neq 1$, изоморфен $W(s)$ в том и только том случае, если все его точки регулярны.*

Замечание. Теорема 4.6 — это старейшая комбинаторная характеризация класса обобщенных четырехугольников. Ее доказательство принадлежит Синглетону [17], хотя он ошибочно считал, что им доказан более сильный результат, а первая удовлетворительная его трактовка была дана Бенсоном [1]. Вне всяких сомнений, этот результат был получен независимо и несколькими авторами, например, Таллини [18].

4.3. Случаи (iii) и (iv). Для доказательства следующего результата применим основную теорему, касающуюся групп Фробениуса.

Теорема 4.7 (см. [15, гл. 9])**.** *Случай* (iv) *невозможен.*

Для случая (iii) можно доказать следующий результат.

Теорема 4.8 (см. [15, гл. 9])**.** *В случае* (iii) *справедливо равенство $t = s^2$ и каждая точка есть точка перехода.*

Следствие 4.9. *Для завершения классификации всех конечных четырехугольников Муфанг достаточно показать, что если $\mathcal{S}$ — обобщенный четырехугольник порядка (s,s^2), $s \neq 1$, для которого любая точка есть точка перехода, то $\mathcal{S} \cong Q(5,s)$.*

5. Конечные трансляционные четырехугольники порядка (s,s^2)

5.1. Трансляционные обобщенные четырехугольники и овоиды. Рассмотрим в пространстве $\mathrm{PG}(4n-1,q)$ множество $O = O(n,2n,q)$ всех $q^{2n}+1$ $(n-1)$-мерных подпространств $\mathrm{PG}^{(0)}(n-1,q)$, $\mathrm{PG}^{(1)}(n-1,q)$, …, $\mathrm{PG}^{(q^{2n})}(n-1,q)$, каждые три из которых порождают $\mathrm{PG}(3n-1,q)$, причем такие, что каждый элемент $\mathrm{PG}^{(i)}(n-1,q)$ множества O содержится в $\mathrm{PG}^{(i)}(3n-1,q)$, не имеющем общих точек с никаким $\mathrm{PG}^{(j)}(n-1,q)$ при $j \neq i$. Пространство $\mathrm{PG}^{(i)}(3n-1,q)$ называется *касательным пространством* к O в точке $\mathrm{PG}^{(i)}(n-1,q)$. Такое множество O называется *псевдоовоидом*, или

обобщенным овоидом, или $[n-1]$-*овоидом* $\mathrm{PG}(4n-1,q)$; [0]-овоид $\mathrm{PG}(3,q)$ есть в точности овоид $\mathrm{PG}(3,q)$.

Вложим теперь $\mathrm{PG}(4n-1,q)$ в $\mathrm{PG}(4n,q)$ и рассмотрим следующую геометрию прямых и точек $T(n,2n,q)=T(O)$. Точки являются точками следующих трех типов:

(i) точки $\mathrm{PG}(4n,q)$, не принадлежащие $\mathrm{PG}(4n-1,q)$;
(ii) $3n$-мерные подпространства $\mathrm{PG}(4n,q)$, пересекающие $\mathrm{PG}(4n-1,q)$ в одной из точек $\mathrm{PG}^{(i)}(3n-1,q)$;
(iii) символ (∞).

Прямые являются прямыми следующих типов:

(a) n-мерные подпространства $\mathrm{PG}(4n,q)$, пересекающие $\mathrm{PG}(4n-1,q)$ в $\mathrm{PG}^{(i)}(n-1,q)$;
(b) элементы $O(n,2n,q)$.

Инцидентность в $T(n,2n,q)$ определяется следующим образом. Точка типа (i) инцидентна только прямой типа (a); здесь инцидентность понимается в смысле $\mathrm{PG}(4n,q)$. Точка типа (ii) инцидентна всем прямым типа (a), содержащихся в ней, а также единственному элементу O, содержащемуся в ней. Точка (∞) не инцидентна никакой прямой типа (a) и никакой прямой типа (b).

Справедлив следующий фундаментальный результат.

Теорема 5.1 (см. [15, гл. 8]). *Геометрия прямых-точек $T(O)=T(n,2n,q)$ есть обобщенный четырехугольник порядка (q^n,q^{2n}), имеющий (∞) в качестве точки перехода. Обратно, каждый трансляционный обобщенный четырехугольник порядка (s,s^2), $s\neq 1$, изоморфен $T(n,2n,q)$. Теория трансляционных обобщенных четырехугольников порядка (s,s^2), $s\neq 1$, эквивалентна теории овоидов $O(n,2n,q)$.*

Замечание. Теория овоидов и трансляционных обобщенных четырехугольников также разработана и для обобщенных четырехугольников любого порядка (s,t); см. [15, гл. 8].

5.2. Ядерные и трансляционные двойственные. Каждый трансляционный обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}$ порядка (s,s^2), $s\neq 1$, с точкой перехода (∞) имеет *ядро* $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — поле, мультипликативная группа которого изоморфна группе всех коллинеаций $\mathcal{S}$, линейно оставляющей неподвижной точку перехода (∞) и любую точку, противоположную (∞). Имеем $|\mathbb{K}|\leqslant s$. Поле $\mathrm{GF}(q)$ есть подполе $\mathbb{K}$ в том и только том случае, если $\mathcal{S}$ изоморфно $T(n,2n,q)$ (см. подробности в [15, гл. 8]).

Рассмотрим любой трансляционный обобщенный четырехугольник $T(n,2n,q)=T(O)$. $q^{2n}+1$ касательных пространств к O образуют овоид $O^*=O^*(n,2n,q)$ в двойственном пространстве к $\mathrm{PG}(4n-1,q)$ (см. [15, гл. 8]). Поэтому кроме $T(O)$ возникает трансляционный обобщенный четырехугольник $T(O^*)$, также обозначаемый через $T^*(O)$, имеющий тот же порядок (q^n,q^{2n}). Трансляционный обобщенный четырехугольник $T^*(O)$ называется *трансляционно двойственным* к трансляционному обобщенному четырехугольнику $T(O)$. Известны примеры, когда $T(O)\cong T(O^*)$, а также когда $T(O)\ncong T(O^*)$ (см., например, [24]).

6. Последний шаг и обобщения

6.1. Трансляционные обобщенные четырехугольники, содержащие регулярную линию, не инцидентную точке перехода. Пусть $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ — трансляционный обобщенный четырехугольник порядка (s,s^2), $s\neq 1$, с точкой перехода (∞). Согласно [15, гл. 8] все прямые, инцидентные (∞), регулярны. *До конца этого раздела предполагаем, что $\mathcal{S}$ допускает регулярную прямую M, не инцидентную точке* (∞).

Пусть $\mathcal{S}=T(n,2n,q)=T(O)$, $O=\{\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_{q^{2n}}\}$, где M пересекается в одной точке с прямой π_0 из $\mathcal{S}$. По транзитивности ясно, что все прямые, пересекающиеся в одной точке с π_0, регулярны. Проективное пространство, содержащее O, обозначается через $\mathrm{PG}(4n-1,q)$. Касательное пространство к O в точке π_i обозначается через τ_i, $i=0,1,\ldots,q^{2n}$. Далее положим $\tilde{O}=\pi_0\cup\pi_1\cup\cdots\cup\pi_{q^{2n}}$.

В [28] были доказаны следующие результаты. Пусть π_i, π_j, π_k — различные элементы O такие, что существует $((q^n+1)\times(q^n+1))$-сетка, т.е. подчетырехугольник порядка $(q^n,1)$, не содержащий (∞), но содержащий точки, инцидентные соответственно π_i, π_j, π_k; это случай, когда $\pi_0\in\{\pi_i,\pi_j,\pi_k\}$. Если $x\in\pi_i$, то единственная коника $\mathcal{C}$, содержащая x, точку π_j и π_k, чья плоскость содержит прямую из τ_i, τ_j и τ_k, целиком принадлежит $\tilde{O}$. Такая коника называется *π_0-коникой*. Кроме того, плоскости этих $(q^n-1)/(q-1)$ π_0-коник, пересекающие π_i, π_j, π_k, принадлежат некоторому многообразию Сегре $\mathcal{S}_{2;n-1}$ (по поводу определения и свойств многообразий Сегре см. [9, § 25.5]). Далее, $q+1$ максимальных $(n-1)$-пространств $\mathcal{S}_{2;n-1}$, содержащих точку $\mathcal{C}$ и отличных от плоскости из $\mathcal{C}$ при $n=3$, суть элементы овоида O. Множество этих $q+1$ пространств называется *надутой π_0-коникой*.

Пусть $q\neq 2$, $\pi_j,\pi_k\in O\backslash\{\pi_0\}$, $\pi_j\neq\pi_k$, а $\langle\pi_j,\pi_k\rangle\cap\tau_0=\tau_{j,k}$, $\langle\pi_j,\pi_k\rangle$ — проективное пространство, порожденное π_j и π_k. Если π_0-коника $\mathcal{C}$ пересекает π_0, π_j, π_k, то говорят, что $\langle\tau_{j,k},\pi_0\rangle$ — *касательное пространство* в точке π_0 надутой π_0-коники, определенной $\mathcal{C}$. Это касательное пространство касательно в точности q^{2n-1} надутым π_0-коникам. Если $q=2$ и $\mathcal{S}$ имеет точку перехода, коллинеарную, но отличную от точки перехода (∞), то имеем тот же вывод.

Изложенные выше результаты являются отправной точкой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 6.1 (см. [28, теорема 6.1])**.** *Пусть $q\neq 2$. Если $\pi_j,\pi_k\in O\backslash\{\pi_0\}$, $\pi_j\neq\pi_k$, то $(3n-1)$-мерное пространство $\langle\pi_0,\pi_j,\pi_k\rangle$ содержит в точности q^n+1 элементов овоида O, т.е. O — хорошее в его элементе π_0. Если $q=2$ и $\mathcal{S}$ имеет точку перехода, коллинеарную, но отличную от точки перехода (∞), то справедливо то же заключение.*

6.2. Пучки и обобщенные четырехугольники. Пусть F — *пучок* квадратичного конуса K с вершиной x в $\mathrm{PG}(3,q)$, т.е. разбиение $K\backslash\{x\}$ на непересекающиеся неприводимые коники. Тогда в силу [10, 11, 13, 14, 23], с F связывается обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}(F)$ порядка (q^2,q); такой обобщенный четырехугольник называется *пучковым обобщенным четырехугольником*.

В [24–26] была получена следующая теорема.

Теорема 6.2 (см. [24–26])**.** *Если овоид O — хороший в его элементе π_0, а q нечетно, то $\mathcal{S}$ есть двойственное точка-прямая трансляционного двойственного к пучковому трансляционному обобщенному четырехугольнику.*

В четном случае, основываясь на [27], можно доказать следующую теорему.

Теорема 6.3 (см. [28])**.** *Если овоид O — хороший в его элементе π_0, q четно, а $T(O)$ имеет регулярную прямую M, пересекающуюся в одной точке с π_0, но не инцидентной (∞), то $T(O)\cong Q(5,q^n)$.*

6.3. Основные теоремы. Из результатов разделов 6.1 и 6.2 легко выводятся следующие теоремы.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathcal{S}$ — трансляционный обобщенный четырехугольник порядка (s,s^2), $s\neq 1$, с точкой перехода (∞), имеющий регулярную прямую M, не инцидентную точке (∞). Если ядро $\mathcal{S}$ не есть $\mathrm{GF}(2)$, то для нечетного s обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}$ есть двойственное точка-прямая трансляционного двойственного пучкового трансляционного четырехугольника, а для четного s $\mathcal{S}$ изоморфен классическому обобщенному четырехугольнику $Q(5,s)$.*

Теорема 6.5. *Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенный четырехугольник порядка (s,s^2), $s\neq 1$, имеющий две различные коллинеарные точки перехода. Тогда справедливо заключение теоремы* 6.4.

Теорема 6.6. *Пусть $\mathcal{S}$ — обобщенный четырехугольник порядка (s,s^2), $s\neq 1$, каждая точка которого — точка перехода. Тогда $\mathcal{S}\cong Q(5,s)$.*

Замечание. Впервые теорема 6.5 была доказана Тасом в [30], но она основывалась на классификации конечных групп с расщепленной BN-парой ранга 1 [7, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benson C. T.* On the structure of generalized quadrangles// J. Algebra. — 1970. — *15*. — С. 443–454.
2. *Buekenhout F., Van Maldeghem H.* Finite distance transitive generalized polygons// Geom. Dedic. — 1994. — *52*. — С. 41–51.
3. *Faulkner J. R.* Groups with Steinberg relations and coordinatization of polygonal geometries// Mem. Amer. Math. Soc. — 1977. — *185*.
4. *Fong P., Seitz G. M.* Groups with a (B, N)-pair of rank 2. I// Invent. Math. — 1973. — *21*. — С. 1–57.
5. *Fong P., Seitz G. M.* Groups with a (B, N)-pair of rank 2. II// Invent. Math. — 1974. — *21*. — С. 191–239.
6. *Haot F., Van Maldeghem H.* Some characterizations of Moufang generalized quadrangles// Glasgow Math. J., to appear.
7. *Hering C., Kantor W. M., Seitz G. M.* Finite groups with a split BN-pair of rank 1. I// J. Algebra. — 1972. — *20*. — С. 435–475.
8. *Higman D. G.* Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs// in: Atti convegno di geometria e sue applicazioni (A. Barlotti, Ed.), Perugia (1971), С. 263–293.
9. *Hirschfeld J. W. P., Thas J. A.* General Galois Geometries. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1991.
10. *Kantor W. M.* Generalized quadrangles associated with $G_2(q)$// J. Combin. Theory, Ser. A. — 1980. — *29*. — С. 212–219.
11. *Kantor W. M.* Some generalized quadrangles with parameters (q^2, q)// Math. Z. — 1986. — *192*. — С. 45–50.
12. *Mühlherr B., Van Maldeghem H.* Exceptional Moufang quadrangles of type F_4// Can. J. Math. — 1999. — *51*. — С. 347–371.
13. *Payne S. E.* Generalized quadrangles as group coset geometries// Congr. Numer. — 1980. — *29*. — С. 717–734.
14. *Payne S. E.* A new infinite family of generalized quadrangles// Congr. Numer. — 1980. — *49*. — С. 115–128.
15. *Payne S. E., Thas J. A.* Finite generalized quadrangles// Res. Notes Math. — Pitman Adv. Publ. Progr., Boston–London–Melbourne, 1984. — *110*.
16. *Shult E. E.* On a class of doubly transitive groups// Ill. J. Math. — 1972. — *16*. — С. 434–455.
17. *Singleton R. R.* Minimal regular graphs with maximal even girth// J. Combin. Theory. — 1966. — *1*. — С. 306–332.
18. *Tallini G.* Strutture di incidenza dotate di polarità// Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. — 1971. — *41*. — С. 3–42.
19. *Tent K.* Half Moufang implies Moufang for generalized quadrangles// J. Reine Angew. Math., to appear.
20. *Tent K., Van Maldeghem H.* Split BN-pairs of rank 2 and Moufang polygons. I// Adv. Math. — 2003. — *174*. — С. 254–265.
21. *Thas J. A.* On generalized quadrangles with parameters $s = q^2$ and $t = q^3$// Geom. Dedic. — 1976. — *5*. — С. 485–496.
22. *Thas J. A.* The classification of all (x, y)-transitive generalized quadrangles// J. Combin. Theory, Ser. A. — 1986. — *42*. — С. 154–157.
23. *Thas J. A.* Generalized quadrangles and flocks of cones// Eur. J. Combin. — 1987. — *8*. — С. 441–452.
24. *Thas J. A.* Generalized quadrangles of order (s, s^2). I// J. Combin. Theory, Ser. A. — 1994. — *67*. — С. 140–160.
25. *Thas J. A.* Generalized quadrangles of order (s, s^2). II// J. Combin. Theory, Ser. A. — 1997. — *79*. — С. 223–254.
26. *Thas J. A.* Generalized quadrangles of order (s, s^2). III// J. Combin. Theory, Ser. A. — 1999. — *87*. — С. 247–272.
27. *Thas J. A.* Translation generalized quadrangles of order (s, s^2), s even, and eggs// J. Combin. Theory, Ser. A. — 2002. — *99*. — С. 40–50.
28. *Thas J. A.* Moufang quadrangles and the theorem of Fong–Seitz on BN-pairs/ Preprint.
29. *Thas J. A., Payne S. E., Van Maldeghem H.* Half Moufang implies Moufang for finite generalized quadrangles// Invent. Math. — 1991. — *105*. — С. 153–156.
30. *Thas J. A.* The classification of generalized quadrangles with two translation points// Beiträge Algebra Geom. — 2002. — *43*. — С. 365–398.
31. *Thas J. A., Van Maldeghem H.* Moufang-like conditions for generalized quadrangles and classification of all finite quasi-transitive generalized quadrangles// Des. Codes Cryptogr., to appear.
32. *Thas J. A., Van Maldeghem H.* Geometrical characterizations of some Chevalley groups of rank 2/ Preprint.
33. *Tits J.* Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent// Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1959. — *2*. — С. 13–60.

34. *Tits J.* Buildings of spherical type and finite BN-pairs// Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1974. — *386*.
35. *Tits J.* Non-existence de certains polygones généralisés. I// Invent. Math. — 1976. — *36*. — С. 275–284.
36. *Tits J.* Classification of buildings of spherical type and Moufang polygons: a survey// Coll. Intern. Teorie Combin. Accad. Naz. Lincei, Roma 1973. — Atti dei convegni Lincei, 1976. — *17*. — С. 229–246.
37. *Tits J.* Non-existence de certains polygones généralisés. II// Invent. Math. — 1979. — *51*. — С. 267–269.
38. *Tits J.* Moufang octagons and the Ree groups of type ${}^2F_4$// Amer. J. Math. — 1983. — *105*. — С. 539–594.
39. *Tits J.* Moufang polygons. I. Root data// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 1994. — *1*. — С. 455–468.
40. *Tits J., Weiss R.* Moufang polygons. — Springer Monogr. Math., 2002.
41. *Van Maldeghem H.* Some consequences of a result of Brouwer// Ars Combin. — 1998. — *48*. — С. 185–190.
42. *Van Maldeghem H., Thas J. A., Payne S. E.* Desarguesian finite generalized quadrangles are classical or dual classical// Des. Codes Cryptogr. — 1992. — *1*. — С. 299–305.
43. *Van Maldeghem H., Weiss R.* On finite Moufang polygons// Isr. J. Math. — 1992. — *79*. — С. 321–330.
44. *Weiss R.* The nonexistence of certain Moufang polygons// Invent. Math. — 1979. — *51*. — С. 261–266.

J. A. Thas
Ghent University
Department of Pure Mathematics and Computer Algebra
Galglaan 2, B-9000 Ghent, Belgium
E-mail: jat@cage.ugent.be

H. Van Maldeghem
Ghent University
Department of Pure Mathematics and Computer Algebra
Galglaan 2, B-9000 Ghent, Belgium
E-mail: hvm@cage.ugent.be

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 16–62

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЛОГИКЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2004 г. **Б. ПЛОТКИН**

Аннотация. Для каждого многообразии алгебр Θ можно рассматривать его логику и его алгебраическую геометрию. В предыдущих статьях автора рассматривалась геометрия в эквациональной логике, т.е. эквациональная геометрия. Здесь описывается обобщение этой теории на логику первого порядка (ЛПП). Алгебраические множества в такой геометрии определяются произвольными множествами формул ЛПП. Основной мотив обобщения — приложения к науке о знаниях. В данной статье формулы первого порядка рассматриваются в контексте алгебраической логики. С этой целью определяются специальные категории Халмоша; эти категории в алгебраической геометрии, связанной с ЛПП, играют ту же роль, что и категория свободных алгебр Θ^0 в эквациональной алгебраической геометрии. Статья состоит из трех частей. Раздел 1 носит вводной характер. Первая часть (разделы 2–4) содержит изложение основ алгебраической логики в данном многообразии алгебр Θ. Вторая часть посвящена алгебраической геометрии, связанной с ЛПП (разделы 5–7). В последней третьей части (разделы 8–9) рассматриваются приложение изложенного выше материала к науке о знаниях.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Алгебра и логика 16
2. Алгебраическая логика 19
3. Категория и алгебра формул $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}$ 21
4. Структура алгебры $\mathrm{Hal}_{\Theta}(\Phi)$ 23
5. Алгебраическая геометрия в логике первого порядка 30
6. Теория Галуа—Краснера в алгебраической логике и алгебраической геометрии 41
7. Геометрические свойства моделей 50
8. Приложения к науке о знаниях 53
9. Эквивалентность баз знаний 57
Список литературы 62

1. Алгебра и логика

1.1. Многосортная алгебра. Всюду в этой статье термин алгебра означает *многосортную* алгебру, т.е. не обязательно односортную. Фиксируем множество сортов Γ. В рассматриваемых многообразиях Θ это множество конечно, но, вообще говоря, конечным быть не обязано. Бесконечное множество Γ встретится в следующем разделе.

Для каждой алгебры $G \in \Theta$ пишем

$$G = (G_i, i \in \Gamma).$$

Множество операций Ω называется *сигнатурой алгебр* в Θ. Каждый символ $\omega \in \Omega$ имеет тип $\tau = \tau(\omega) = (i_1, \ldots, i_n; j)$, $i, j \in \Gamma$. Операция типа τ — это отображение

$$G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_n} \to G_j.$$

Все операции сигнатуры Ω удовлетворяют некоторому набору тождеств. Эти тождества определяют многообразие Θ Γ-сортных Ω-алгебр. Рассмотрим гомоморфизмы и свободные алгебры в Θ. Гомоморфизм алгебр в Θ имеет вид

$$\mu = (\mu_i, i \in \Gamma) : G = (G_i, i \in \Gamma) \to G' = (G'_i, i \in \Gamma).$$

Здесь $\mu_i : G_i \to G'_i$ — отображения множеств, согласованные с операциями в Ω. Конгруэнтность $\mathrm{Ker}\,\mu = (\mathrm{Ker}\,\mu_i, i \in \Gamma)$ есть ядро гомоморфизма μ.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

Рассмотрим многосортное множество $X = (X_i, i \in \Gamma)$ и соответствующие свободные в Θ алгебры

$$W = W(X) = (W_i, i \in \Gamma).$$

Множество X и свободная алгебра W могут быть представлены соответственно как объединение всех X_i и всех W_i.

Каждое (многосортное) отображение $\mu : X \to G$ продолжается до гомоморфизма $\mu : W \to G$. Обозначим множество всех таких μ через $\mathrm{Hom}(W, G)$. Если все X_i конечные, то это множество рассматривается как аффинное пространство. Гомоморфизмы $\mu : W \to G$ есть точки этого пространства.

Для данных $G = (G_i, i \in \Gamma)$ и $X = (X_i, i \in \Gamma)$ можно рассмотреть множество

$$G^X = (G_i^{X_i}, i \in \Gamma).$$

Это множество — множество отображений

$$\mu = (\mu_i, i \in \Gamma) : X \to G.$$

Существует естественная биекция $\mathrm{Hom}(W, G) \to G^X$. Больше информации о многосортных алгебрах можно найти в [12].

Обратимся теперь к моделям. Фиксируем некоторое множество символов соотношений Φ. Каждый $\varphi \in \Phi$ имеет свой тип $\tau = \tau(\varphi) = (i_1, \ldots, i_n)$. Соотношение, соответствующее φ, есть подмножество прямого произведения $G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_n}$. Обозначим через $\Phi\Theta$ класс моделей (G, Φ, f), где $G \in \Theta$, а f — интерпретация множества Φ в G. Что же касается гомоморфизмов моделей, то они являются гомоморфизмами соответствующих алгебр, согласованных с соотношениями.

1.2. Логика. В дальнейшем для ясности изложения будем иногда «забывать», что рассматриваемые алгебры, вообще говоря, многосортные и будем использовать «односортный» язык. Рассмотрим логику в данном многообразии Θ. Для каждого конечного X существует логическая сигнатура

$$L = L_X = \{\vee, \wedge, \neg, \exists x,\ x \in X\},$$

где X — объединение $\bigcup\limits_{i \in \Gamma} X_i$ по конечному Γ. Рассмотрим множество (точнее, L-алгебру) формул $L\Phi W$ над свободной алгеброй $W = W(X)$. Эта алгебра есть L-алгебра формул ЛПП над данными Θ, Φ и X.

Определим сначала атомные формулы. Они являются равенствами вида $w \equiv w'$ с $w, w' \in W$ из некоторого сорта и формулами вида $\varphi(w_1, \ldots, w_n)$, где $w_i \in W$, и все w_i размещаются в соответствии с типом $\tau = \tau(\varphi)$ соотношений φ и сортов. Обозначим множество всех атомных формул через $M = M_X$. Определим $L\Phi W$ как абсолютно свободную L_X-алгебру над M_X.

Рассмотрим другой пример L_X-алгебры.

Для заданных $W = W(X)$ и $G \in \Theta$ обозначим через $\mathrm{Bool}(W, G)$ булеву алгебру $\mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}(W, G))$ всех подмножеств $\mathrm{Hom}(W, G)$. Определим действие кванторов в $\mathrm{Bool}(W, G)$. Пусть A — подмножество $\mathrm{Hom}(W, G)$, а $x \in X_i$ — переменная сорта i. Тогда $\mu : W \to G$ принадлежит множеству $\exists x A$, если существует $\nu : W \to G$ в A такое, что $\mu(y) = \nu(y)$ для каждого $y \in X$ сорта j, $j \neq i$, и для каждого $y \in X_i$, $y \neq x$. Таким образом, получаем L-алгебру $\mathrm{Bool}(W, G)$.

Определим теперь отображение

$$\mathrm{Val}_f^X : M_X \to \mathrm{Bool}(W, G),$$

где f — модель (предмет знания), реализующий множество Φ в данном G. Если $w \equiv w'$ — равенство сорта i, то полагаем

$$\mu : W \to G \in \mathrm{Val}_f^X(w \equiv w') = \mathrm{Val}^X(w \equiv w'),$$

если $\mu_i(w) = \mu_i(w')$ в G. Здесь μ — решение уравнения $w \equiv w'$. Если формула имеет вид $\varphi(w_1, \ldots, w_n)$, то

$$\mu \in \mathrm{Val}_f^X(\varphi(w_1, \ldots, w_n)),$$

если $\varphi(\mu(w_1),\dots,\mu(w_n))$ справедливо в модели (G,Φ,f). Здесь $\mu(w_j)=\mu_{i_j}(w_j)$, а i_j — сорт w_j. Отображение Val_f^X единственным образом продолжается до L-гомоморфизма

$$\mathrm{Val}_f^X : L\Phi W \to \mathrm{Bool}(W,G).$$

Таким образом, для каждой формулы $u\in L\Phi W$ определено ее значение $\mathrm{Val}_f(u)$ в модели (G,Φ,f), которое является элементом $\mathrm{Bool}(W,G)$.

Каждую формулу $u\in L\Phi W$ можно рассматривать как уравнение в данной модели. Тогда точка $\mu: W\to G$ — решение «уравнения» u, если $\mu\in\mathrm{Val}_f(u)$.

1.3. Геометрический аспект. Рассмотрим в L-алгебре $L\Phi W$ формул $W=W(X)$ различные ее подмножества T. С другой стороны, рассмотрим подмножества A в аффинном пространстве $\mathrm{Hom}(W,G)$, т.е. элементы L-алгебры $\mathrm{Bool}(W,G)$. Для каждой модели (G,Φ,f) и этих T и A установим следующее *соответствие Галуа* между множествами формул в L-алгебре формул $L\Phi W$ и множествами точек в пространстве $\mathrm{Hom}(W,G)$:

$$T^f=A=\bigcap_{u\in T}\mathrm{Val}_f(u),\quad A^f=T=\{u\mid A\subset\mathrm{Val}_f(u)\}.$$

Здесь $A=T^f$ — совокупность точек, удовлетворяющих формулам из T. Рассматриваем также T как систему «уравнений», в которой каждое «уравнение» представляется формулой u из T. Каждое множество A такого рода называется *алгебраическим множеством* (или замкнутым множеством, или алгебраическим многообразием), определенным для данной модели. Определим *знание* как

$$(X,T,A,(G,\Phi,f));$$

здесь T — *описание знания*, (G,Φ,f) — *предмет знания*. $A=T^f$ называется *содержанием знания*, представимым как алгебраическое многообразие, а X — *помещением знания* (местом, в которое помещается знание). Множество A можно также рассматривать как соотношение между элементами G, выведенное из равенств и соотношений основного множества Φ. Соответствие $A=T^f$ принадлежит многосортному множеству

$$G^X=\{G_i^{X_i},\ i\in\Gamma\}.$$

Множество T вида $T=A^f$ для некоторого A называется *f-замкнутым множеством*. Для произвольного T определено его замыкание $T^{ff}=(T^f)^f$, а для каждого $A\subset\mathrm{Hom}(W,G)$ — его замыкание $A^{ff}=(A^f)^f$.

Легко понять, что имеет место следующее правило:

Формула v принадлежит множеству T^{ff} в том и только том случае, если формула

$$\left(\bigwedge_{u\in T}u\right)\to v$$

справедлива в модели (G,Φ,f).

Если множество T бесконечно, то соответствующая формула называется *инфинитной*.

Мы хотим изучать знания с различными, меняющимися «местами знания» X. В этом случае нужно рассматривать различные $W=W(X)$, различные «пространства знаний» $\mathrm{Hom}(W(X),G)$, а также различные $L\Phi W(X)$.

Алгебры $W(X)$, свободные в Θ, с различными X — это объекты категории, обозначаемой через Θ^0. Морфизмы этой категории $s: W(X)\to W(Y)$ суть произвольные гомоморфизмы алгебр. Категория Θ^0 есть полная подкатегория в категории Θ.

Мы построим новую категорию, связанную с логикой первого порядка для данного Θ. Эта категория будет играть для ЛПП роль, аналогичную роли категории свободных алгебр Θ^0 в эквациональной логике. С этой целью перейдем от чистой логике к алгебраической. Такой переход позволит связать описание знания с с его содержанием более интересным образом. Множества типа $T=A^f$ выглядят также более естественно.

2. Алгебраическая логика

2.1. Основная идея. В алгебраической логике рассматриваются алгебраические структуры, связанные с различными логическими структурами, которые соответствуют различным логическим исчислениям. Например, булевы алгебры связаны с классической пропозиционной логикой, алгебры Хейтинга ассоциируются с неклассической пропозиционной логикой, а цилиндрические алгебры Тарского и полиадические алгебры Халмоша — с ЛПП.

Каждое логическое исчисление предполагает наличие формул исчисления, аксиом логики и правил вывода. На этой основе определяется синтаксическая эквивалентность формул, совместимая с семантической эквивалентностью. Переход от чистой логике к алгебраической основан на трактовке логических формул с точностью до некоторой эквивалентности. Соответствующие классы называются *сжатыми формулами*. Указанный переход приводит к различным алгебраическим структурам, в частности, к структурам, упомянутым выше.

Логические исчисления обычно связаны с некоторым бесконечным числом переменных. Обозначим это множество через X^0. В рассматриваемой ситуации им является многосортное множество $X^0 = (X^0_i, i \in \Gamma)$. Имея в виду теорию знаний и ее геометрический аспект, будем использовать систему всех конечных подмножеств $X = (X_i, i \in \Gamma)$ из X^0 вместо этого бесконечного универсума; это приводит к многосортной логике и многосортной алгебраической логике. Каждая формула имеет определенный сорт X. Обозначим множество сортов через Γ^0; оно представляет собой множество всех конечных подмножеств исходного множества X^0.

2.2. Категории Халмоша и многосортные алгебры Халмоша. Фиксируем некоторое многообразие алгебр Θ. Это означает, что заданы некоторое конечное множество сортов Γ, сигнатура $\Omega = \Omega(\Theta)$, связанная с Γ, а также система тождеств $\mathrm{Id}(\Theta)$.

Определим категории Халмоша для данного Θ.

Во-первых, для данной булевой алгебры B определим ее экзистенциональные кванторы [6]. Экзистенциональные кванторы — это отображения $\exists : B \to B$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\exists 0 = 0$;
2) $a < \exists a$;
3) $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$, $0, a, b \in B$.

Универсальный квантор $\forall : B \to B$ определяется двойственным образом:

1) $\forall 1 = 1$,
2) $a > \forall a$,
3) $\forall(a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b$.

Пусть B — булева алгебра, X — множество. Говорят, что B — *кванторная X-алгебра*, если квантор $\exists x : B \to B$ определен для каждого $x \in X$ и для каждых двух элементов $x, y \in X$ выполнено равенство $\exists x \exists y = \exists y \exists x$.

Можно также рассмотреть и *кванторные X-алгебры B с равенствами* над $W(X)$. В таких алгебрах каждым элементам $w, w' \in W(X)$ одного и того же сорта соответствует элемент $w \equiv w' \in B$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $w \equiv w$ — единица в B,
2) $(w_1 \equiv w'_1 \wedge \ldots \wedge w_n \equiv w'_n) < (w_1 \ldots w_n \omega \equiv w'_1 \ldots w'_n \omega)$, где ω — операция в Ω, и все совместимо с типом этой операции.

Дадим теперь общее определение категории Халмоша для заданного Θ, которое далее сопроводим примерами.

Категория Халмоша H для произвольного конечного $X = (X_i, i \in \Gamma)$ фиксирует некоторую кванторную X-алгебру $H(X)$ с равенствами над $W(X)$. Все такие $H(X)$ суть объекты H.

Морфизмы H соответствуют морфизмам в категории Θ^0. Каждый морфизм s_* в H имеет вид

$$s_* : H(X) \to H(Y),$$

где $s : W(X) \to W(Y)$ — морфизм в Θ^0.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

1) Переходы $W(X) \to H(X)$ и $s \to s_*$ дают (ковариантный) функтор $\Theta^0 \to H$.
2) Каждый $s_* : H(X) \to H(Y)$ есть булев гомоморфизм.
3) Координация с кванторами такова:
   (a) $s_1 \exists x a = s_2 \exists x a, \quad a \in H(X)$, если $s_1 y = s_2 y$ для любого $y \in X$, $y \neq x$.
   (b) $s \exists x a = \exists (sx)(sa)$, если $sx = y \in Y$ и $y = sx$ не лежит в носителе (см. § 4.2) sx', $x' \in X$, $x' \neq x$.
4) Следующие условия описывают координацию с равенствами:
   (a) $s_*(w \equiv w') = (sw \equiv sw')$ при $s : W(X) \to W(Y)$, причем $w, w' \in W(X)$ — одного и того же сорта.
   (b) $s^x_w a \wedge (w \equiv w') < s^x_{w'} a$ для произвольного $a \in H(X)$, $x \in X$, w, w' — одного и того же сорта с x в $W(X)$, а $s^x_w : W(X) \to W(X)$ определяется по правилу $s^x_w(x) = w$, $sy = y$, $y \in X$, $y \neq x$.

Это заканчивает определение категории Халмоша для данной Θ.

Перейдем теперь к определению многосортных алгебр Халмоша. Пусть все конечные X являются подмножествами некоторого бесконечного универсума X^0.

Обозначим через Γ^0 множество сортов. Оно есть множество всех конечных подмножеств в фиксированном X^0.

Для каждого $X \in \Gamma^0$ рассмотрим сигнатуру

$$L_X = \{\vee, \wedge,]; \exists x, x \in X\}$$

Пусть L — объединение всех $L_X, X \in \Gamma^0$, а V — множество всех равенств $w \equiv w'$, где w, w' — одного и того же сорта в $W(X)$. Равенства рассматриваются как нульарные операции. Пусть $S = S_\Theta$ — множество всех $s : W(X) \to W(Y)$, $X, Y \in \Gamma^0$. Введем обозначение $\tilde{L} = L \cup S_\Theta \cup V$. Многосортная сигнатура $\tilde{L}$ рассматривается как новая сигнатура для ЛПП; мы изучаем алгебры в этой сигнатуре, имеющие вид $H = \{H(X), X \in \Gamma^0\}$. Здесь $H(X)$ — алгебра в сигнатуре L_X, снабженная унарными операциями $s : H(X) \to H(Y)$ для $s : W(X) \to W(Y)$ и нульарными операциями из V. Рассмотрим подмногообразие всех алгебр Халмоша в многообразии всех H и обозначим его через Hal_Θ.

Тождества Hal_Θ таковы:

1) булевы тождества для всех $H(X)$;
2) тождества, превращающие каждый $\exists x : H(X) \to H(X)$ экзистенциональным квантором;
3) тождества, превращающие каждую $H(X)$ в кванторную X-алгебру с равенствами;
4) тождества, превращающие каждый $s : H(X) \to H(Y)$ в булев гомоморфизм;
5) тождества, коррелирующие операции типа s с кванторами и равенствами;
6) тождества, превращающие систему всех $H(X)$ и всех s в категорию, а $\Theta^0 \to H$ — в функтор.

Алгебры $H = \{H(X), X \in \Gamma^0\}$ с операциями из расширенной сигнатуры $\tilde{L}$, удовлетворяющими предыдущим тождествам, называются *многосортными алгебрами Халмоша*. Они образуют многообразие Hal_Θ всех многосортных алгебр Халмоша в Θ. Очевидно, что если все X суть подмножества некоторого универсума X^0, то каждая категория Халмоша есть многосортная алгебра Халмоша, а каждую многосортную алгебру Халмоша можно рассматривать как категорию Халмоша. Тем не менее нужно иметь в виду, что в этой ситуации обозначения подалгебры и подкатегории различны. Аналогичная ситуация имеет место для гомоморфизмов. Говоря о гомоморфизмах, мы имеем в виду гомоморфизмы алгебр Халмоша.

2.3. Категория и алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Фиксируем алгебру G в многообразии Θ. Для любого конечного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и алгебры $W = W(x_1, \ldots, x_n)$, свободной в Θ, рассмотрим множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(W, G)$ как аффинное пространство. Точками этого пространства являются гомоморфизмы $\mu : W \to G$. Существует биекция

$$\mathrm{Hom}(W, G) \to G^{(n)},$$

заданная как

$$\mu \to (\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n)).$$

Пусть теперь $\mathrm{Bool}(W,G)$ — булева алгебра всех подмножеств $\mathrm{Hom}(W,G)$:

$$\mathrm{Bool}(W,G) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}(W,G)).$$

Определим кванторы $\exists x : \mathrm{Bool}(W,G) \to \mathrm{Bool}(W,G)$, $x \in X$, в этой алгебре следующим образом: $\mu \in \exists xA \Leftrightarrow \exists \nu \in A$ такое, что $\mu(y) = \nu(y)$ for $y \in X$, $y \neq x$. Здесь A — произвольное множество в $\mathrm{Hom}(W,G)$. Аксиомы экзистенциональных кванторов и равенств выполнены (см. например, [12]). Получаем здесь кванторную X-алгебру с равенствами $\mathrm{Bool}(W,G)$ и полагаем

$$\mathrm{Hal}_\Theta(G)(X) = \mathrm{Bool}(W(X),G).$$

Рассмотрим теперь морфизмы категории $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Возьмем некоторое $s : W(X) \to W(Y)$ в Θ^0. Имеем

$$\tilde{s} : \mathrm{Hom}(W(Y),G) \to \mathrm{Hom}(W(X),G),$$

$\tilde{s}(\nu) = \nu s$ для произвольного $\nu : W(Y) \to G$. Если A — подмножество в $\mathrm{Hom}(W(X),G)$, то $\nu \in s_*A = sA$ в том и только том случае, если $\tilde{s}(\nu) \in A$. Следовательно, получаем отображение

$$s_* : \mathrm{Bool}(W(X),G) \to \mathrm{Bool}(W(Y),G),$$

которое является булевым гомоморфизмом. Легко проверяется, что все такие s_* корректно коррелированы с кванторами и равенствами [12]. Таким образом, категория Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ определена. Далее, если ограничиться рассмотрением множеств X из данного X^0, то придем к алгебре Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

Теорема 1. *Алгебры* $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ *с различными* $G \in \Theta$ *порождают многообразие алгебр Халмоша* Hal_Θ.

Доказательство этой теоремы будет дано в разделе 4.3.

Заметим, что каждому s_* соответствует сопряженное отображение

$$s^* : \mathrm{Bool}(W(Y).G) \to \mathrm{Bool}(W(X),G),$$

где для любого $A \subset \mathrm{Hom}(W(Y),G)$ множество s^*A есть $\tilde{s}$-образ множества A. Начиная с этого места предполагаем, что такое сопряженное отображение $s^* : H(Y) \to H(X)$ всегда существует в алгебрах и категориях Халмоша.

3. Категория и алгебра формул $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}$

3.1. Определение алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$. Сжатые формулы. По определенным соображениям будем использовать также и обозначение $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ для $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}$. Начнем с алгебры чистых формул и построим $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} = \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ как алгебру специальных сжатых формул.

Фиксируем множество X^0 и множество Φ символов соотношений (Φ может быть и пустым множеством). Для данного X атомные формулы сорта X суть равенства $w \equiv w'$, $w, w' \in W(X)$, и формулы $\varphi(w_1,\dots,w_n)$ с n-арными $\varphi \in \Phi$ и $w_1,\dots,w_n \in W(X)$. Обозначим множество таких формул через M_X. Имеем также и многосортное множество M с $M(X) = M_X, X \in \Gamma^0$.

Далее рассматриваем сигнатуру $\tilde{L}$, определенную ранее для ЛПП. Пусть H — многосортная (Γ^0-сортная) абсолютно свободная алгебра в $\tilde{L}$ над множеством атомных формул M. Это алгебра чистых формул ЛПП в Θ. Каждая формула $u \in H$ имеет некоторый специальный сорт X.

Факторизуя H единицами многообразия Hal_Θ, получаем алгебру $\tilde{H}$, свободную в Hal_Θ. Здесь $\tilde{H}$ — свободная алгебра Халмоша над тем же множеством атомарных формул M.

Каждая формула в H имеет конечеую запись в сигнатуре $\tilde{L}$ чкрез атомарные формулы. Это же справедливо и для формул из $\tilde{H}$.

Рассмотрим соотношения для атомарных формул вида

$$s_*(\varphi(w_1,\dots,w_n)) = \varphi(sw_1,\dots,sw_n).$$

Система всех таких соотношений обозначается через $(*)$.

Теперь, по определению, алгебра сжатых формул $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} = \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ есть результат факторизации свободной алгебры Халмоша $\tilde{H}$ по определяющим соотношениям $(*)$. Ее элементы называются *сжатыми формулами*.

Одновременно определена также и категория Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$. Алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ уже не есть свободная алгебра Халмоша, но она сохраняет некоторое свойство свободы.

Рассмотрим (многосортные) отображения $\tau : M \to Q$, где Q — произвольная алгебра Халмоша в Θ, а M — множество атомных формул. Для каждого $X \in \Gamma^0$ имеем

$$\tau_X : M_X \to Q(X).$$

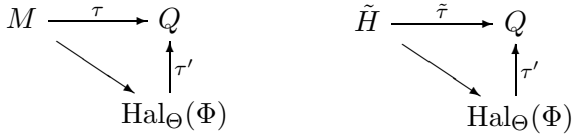
Назовем отображение τ *корректным*, если для любого $s : W(X) \to W(Y)$ имеем

$$\tau(sw \equiv sw') = s_*(\tau(w \equiv w')), \quad \tau(\varphi(sw_1, \dots, sw_n)) = s_*\tau\varphi(w_1, \dots, w_n)$$

при $w, w', w_1, \dots, w_n \in W(X)$.

Теорема 2. *Отображение $\tau : M \to Q$ продолжается до гомоморфизма $\tau : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to Q$ в том и только том случае, если это отображение корректно.*

Доказательство. Возьмем гомоморфизм $\tilde{\tau} : \tilde{H} \to Q$ для данного $\tau : M \to Q$. Кроме того, рассмотрим естественный гомоморфизм $\tilde{H} \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$. Задача состоит в построении гомоморфизма $\tau' : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to Q$ с коммутативными диаграммами



Такое τ' существует в том и только том случае, если соотношения $(*)$ принадлежат $\mathrm{Ker}\,\tau$. Но это в точности и означает, что отображение $\tau : M \to Q$ корректно. □

В дальнейшем условие корректности отображения τ будет связано с идеей носителя элементов алгебры Халмоша.

3.2. Значение формулы. Фиксируем модель (G, Φ, f), $G \in \Theta$, где f — интерпретация множества Φ в G. Для каждого n-арного соотношения $\varphi \in \Phi$ имеем $f(\varphi) \subset G^{(n)}$. Для данной модели f определим каноническое отображение Val_f, являющееся гомоморфизмом алгебр Халмоша

$$\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G).$$

Сначала определим его на атомных формулах. Возьмем некоторую $X \in \Gamma^0$ и рассмотрим формулы в M_X. Теперь определим

$$\mathrm{Val}_f(w \equiv w') = \mathrm{Val}(w \equiv w')$$

как равенство в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)(X)$. Таким образом,

$$\mathrm{Val}_f(w \equiv w') = \{\mu : W(X) \to G \mid w^\mu = w'^\mu\}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{Val}_f(\varphi(w_1, \dots, w_n)) = \{\mu | (w_1^\mu, \dots, w_n^\mu) \in f(\varphi)\}.$$

В частности ясно, что множество $f(\varphi)$ взаимно однозначно соответствует множеству $\mathrm{Val}_f(\varphi(x_1, \dots, x_n))$, где все $x_1, \dots, x_n$ различны, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Имеем многосортное отображение

$$\mathrm{Val}_f : M \to \mathrm{Hal}_\Theta(G).$$

Алгебра Халмоша $\tilde{H}$ свободно порождена множеством M. Поэтому имеем гомоморфизм алгебр Халмоша

$$\mathrm{Val}_f : \tilde{H} \to \mathrm{Hal}_\Theta(G).$$

Одновременно имеем гомоморфизм $\tilde{L}$-алгебр

$$\mathrm{Val}_f : H \to \mathrm{Hal}_\Theta(G).$$

Легко проверяется, что соотношения $(*)$ выполняются в любой алгебре $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, что означает, что они принадлежат ядрам гомоморфизмов, построенных выше. Это дает гомоморфизм

$$\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G),$$

который и нужен.

Для каждой формулы u, чистой или сжатой, определено ее значение на модели (G, Φ, f) как $\mathrm{Val}_f(u)$. Оно является подмножеством $A = \mathrm{Val}_f(u)$ в пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), G)$.

Ядро $\mathrm{Ker}(\mathrm{Val}_f)$, лежащее в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$, есть фильтр, который можно рассматривать как *элементарную теорию модели* (G, Φ, f).

Две формулы u и v одного и того же сорта X в алгебре чистых формул H называются *семантически эквивалентными*, если для каждой модели (G, Φ, f) справедливо равенство $\mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(v)$.

Теорема 3. *Формулы u и v семантически эквивалентны, если они совпадают в алгебре* $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$.

Доказательство будет дано в разделе 4.3.

Введем *логическое ядро* гомоморфизма $\mu : W(X) \to G$ по правилу $\mathrm{Log\,Ker}(\mu) = \{u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \mid \mu \in \mathrm{Val}_f(u)\}$. Оно является булевым фильтром и, более того, ультафильтром в алгебре $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Обычное ядро $\mathrm{Ker}(\mu)$ можно рассматривать как множество равенств $w \equiv w'$ in $\mathrm{Log\,Ker}(\mu)$.

Каждое равенство $w \equiv w'$ можно рассматривать как уравнение в алгебре G. Множество всех решений такого уравнения есть множество $\mathrm{Val}_f(w \equiv w') = \mathrm{Val}(w \equiv w')$. Теперь произвольную формулу $u \in H$ можно также рассматривать как уравнение, но в модели (G, Φ, f). Множество всех решений такого «уравнения» u есть множество $\mathrm{Val}_f(u)$.

Заметим здесь также, что точка $\mu : W \to G$ есть решение уравнения $w \equiv w'$ в том и только том случае, если $(w \equiv w') \in \mathrm{Ker}(\mu)$. Это же μ есть решение «уравнения» u в том и только том случае, если $u \in \mathrm{Log\,Ker}(\mu)$. Эта точка зрения будет использована в универсальной алгебраической геометрии.

4. Структура алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$

4.1. Элементарные формулы. Операция $s \in S_\Theta$ можно включить в формулы $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Формулы, не содержащие таких s, рассматриваются как элементарные. Докажем здесь, что каждая u типа X в некотором естественном смысле эквивалентна элементарной формуле v типа Y, $X \subset Y$.

Понятие эквивалентности формул обобщает понятие семантической эквивалентности. Соответствующие формулы не обязаны быть формулами одного и того же сорта.

Пусть множество X есть подмножество множества Y. Тождественное включение $X \to Y$ определяет тождественный гомоморфизм $s^0 : W(X) \to W(Y)$,

$$s^0 : H(X) \to H(Y), \quad s^0_* : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y).$$

Обозначим через $\overline{u}$ сжатую формулу из $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$, соответствующую формуле $u \in H$ типа X. Пусть теперь u и v — две формулы сортов соответственно X_1 и X_2. Назовем эти формулы эквивалентными, если для некоторого Y, содержащего X_1 и X_2, справедливо равенство

$$\overline{s^0_1 u} = \overline{s^0_2 v},$$

которое дает

$$s^0_1 \overline{u} = s^0_2 \overline{v}.$$

Формула $u \in H(X)$ называется *элементарной*, если ее можно выразить атомной формулой множества M_X в терминах сигнатуры L_X.

Следующая теорема — это теорема об устранении операции типа $s \in S_\Theta$.

Теорема 4. *Каждая формула u в алгебре чистых формул H эквивалентна некоторой элементарной формуле.*

Доказательство. Обозначим через H^0 подмножество H, определенное с помощью следующего правила: $u \in H^0(X)$, если формула u эквивалентна некоторой элементарной формуле. Ясно, что множество всех атомных формул M есть часть множества H^0. Проверим, что $H = H^0$. Достаточно убедиться, что H^0 — подалгебра в H.

Сделаем несколько замечаний о понятии эквивалентности двух формул.

Пусть v — элементарная формула типа Y и пусть задано включение $s^0 : W(Y) \to W(Y')$. Тогда формула $s^0 v$ эквивалентна элементарной формуле типа Y'. В самом деле, возьмем формулу v' из $H(Y')$, запись которой совпадает с v, но в множестве $M_{Y'}$. Эта v' есть элементарная формула; легко понять, что $\overline{s_0 v} = \overline{v'}$. Последнее означает, что $s^0 v$ и v' эквивалентны.

Пусть теперь u и v — две эквивалентные формулы соответственно типа X_1 и X_2, а Y — множество, содержащее X_1 и X_2 с включениями

$$s_1^0 : W(X_1) \to W(Y), \quad s_2^0 : W(X_2) \to W(Y)$$

такими, что выполнено $s_1^0 \bar{u} = s_2^0 \bar{v}$. Возьмем теперь произвольное множество Y', содержащее Y, с включением $s^0 : W(Y) \to W(Y')$. Тогда имеем также и включения

$$s^0 s_1^0 : W(X)_1) \to W(Y'), \quad s^0 s_2^0 : W(X_2) \to W(Y'),$$

причем

$$(s^0 s_1^0)\overline{u} = s^0(s_1^0 \overline{u}) = s^0(s_2^0 \overline{v}) = (s^0 s_2^0)\overline{v}, \quad \overline{(s^0 s_1^0)u} = \overline{(s^0 s_2^0)v}.$$

Таким образом, видно, что наряду с множеством Y_1, содержащим X_1 и X_2, можно использовать любое Y', содержащее Y, в определении эквивалентности двух формул. Используя эти замечания, легко проверить, что каждое множество $H^0(X)$ замкнуто относительно операций сигнатуры L_X. Теперь нужно только убедиться в том, что множество H^0 инвариантно относительно операций типа s.

Возьмем $s : W(X) \to W(Y)$; пусть u — формула в $H^0(X)$. Проверим, что $su \in H^0(Y)$.

Формула u эквивалентна элементарной формуле. Рассмотрим сначала ситуацию, в которой u сама элементарна. Применим индукцию по записи формулы u в атомных формулах множества M_X. Здесь X — фиксированное множество, тогда как Y и $s : W(X) \to W(Y)$ произвольны.

Если u — атомарная формула, то формула su эквивалентна атомарной, элементарной формуле.

Пусть теперь u_1 и u_2 типа X — элементарные формулы, а su_1 и su_2 эквивалентны элементарным формулам v_1 и v_2. Формулы su_1 и su_2 имеют тип Y. Пусть Y_1 — тип формулы v_1, а Y_2 — тип формулы v_2. Тогда существует множество Y', содержащее Y, Y_1, Y_2 с включениями

$$s^0 : W(Y) \to W(Y'), \quad s_1^0 : W(Y_1) \to W(Y'), \quad s_2^0 : W(Y_2) \to W(Y'),$$

такое, что выполнено

$$\overline{(s^0 s)u_1} = \overline{s_1^0 v_1}, \quad \overline{(s^0 s)u_2} = \overline{s_2^0 v_2}.$$

Возьмем $u = u_1 \vee u_2$. Имеем

$$\overline{su} = s\overline{u} = s(\overline{u}_1 \vee \overline{u}_2) = s\overline{u}_1 \vee s\overline{u_2};$$

$$(s^0 s)\overline{u} = s^0(s\overline{u}_1 \vee s\overline{u}_2) = (s^0 s)\overline{u}_1 \vee (s^0 s)\overline{u}_2 = \overline{s_1^0 v_1} \vee \overline{s_2^0 v_2} = \overline{s_1^0 v_1 \vee s_2^0 v_2}.$$

Воспользуемся первым замечанием об эквивалентности формул. Имеем

$$\overline{(s^0 s)u} = \overline{s_1^0 v_1} \vee \overline{s_2^0 v_2} = \overline{v_1'} \vee \overline{v_2'} = \overline{v_1' \vee v_2'} = \overline{v'}.$$

Формула $v' = v_1' \vee v_2'$ — элементарная формула типа Y', а $su \in H^0(Y)$.

Аналогично проверяется, что если $u = u_1 \wedge u_2$ или $u = \neg u_1$, то $su \in H^0(Y)$.

Рассмотрим далее случай $u = \exists x u_1$. Как и ранее, u и u_1 имеют тип X и элементарны, а предположение индукции выполнено для u_1, т7е. su_1 эквивалентна элементарной формуле для любого s.

Обратимся к формулам $su = s\exists x u_1$ и $\overline{su} = s\overline{u} = s\exists x \overline{u}_1$.

Переменная x принадлежит множеству X, а su — множеству $H(Y)$. Расширим множество Y до Y', добавляя произвольную переменную y' к Y. Пусть $s^0 : W(Y) \to W(Y')$ — соответствующее тождественное включение. Перейдем к $s^0 s : W(X) \to W(Y')$ и рассмотрим гомоморфизм $s_1 : W(X) \to W(Y')$, действующий как $s^0 s$ на всех элементах из X, кроме x, и $s_1 x = y'$. Имеем

$$(s^0 s)\overline{u} = (s^0 s)\exists x \overline{u_1} = s_1 \exists x \overline{u}_1.$$

Элемент $y' = s_1 x$ не принадлежит записи любых $s_1 x_1$, $x_1 \neq x$ по построению. Тогда

$$(s^0 s)\overline{u} = \exists y' s_1 \overline{u}_1.$$

Согласно предположению индукции элемент s_1u_1 эквивалентен элементарной v. Пусть v имеет тип Y_1, а s_1u_1 — тип Y'. Возьмем множество Y_1', содержащее Y_1 и Y'; пусть $s_1^0 : W(Y_1) \to W(Y_1')$, $s_2^0 : W(Y') \to W(Y_1')$ — тождественные включения. Тогда $(s_2^0 s_1)\overline{u}_1 = s_1^0\overline{v}$. Имеем также, что $(s_2^0 s^0 s)\overline{u} = s_2^0 s_1 \exists x \overline{u}_1 = s_2^0 \exists y' s_1 \overline{u}_1 = \exists y' s_2^0 s_1 \overline{u}_1 = \exists y' \overline{s_1^0 v} = \exists y' \overline{v^1}$, где v' — элементарная формула типа Y_1'. это же верно и для формулы $\exists y' v'$. Имеем

$$\overline{(s_2^0 s^0)(su)} = \overline{\exists y' v'}, \quad su \in H^0(Y).$$

Это равенство справедливо для каждой элементарной формулы u в $H^0(X)$.

Рассмотрим случай, когда u не обязательно элементарна. Формула u эквивалентна элементарной формуле u', например, типа X_1. Возьмем множество X' с включениями $s^0 : W(X) \to W(X')$ и s_1^0: $W(X_1) \to W(X')$, а также с условием $\overline{s^0 u} = s^0\overline{u} = s_1^0\overline{u'} = \overline{s_1^0 u'}$. Так как u' — элементарная формула, то $\overline{s_1^0 u'} = \overline{v}$, где v — элементарная формула типа X'. Таким образом, $\overline{s^0 u} = \overline{v}$.

Выберем множество Y', содержащее Y, с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} W(X) & \xrightarrow{s} & W(Y) \\ {\scriptstyle s^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_2^0} \\ W(X') & \xrightarrow{s_1} & W(Y') \end{array}$$

где s^0, s_2^0 — включения, а $s_1 s^0 = s_2^0 s$. Применим ее к $\overline{u}$:

$$s_1 s^0 \overline{u} = s_2^0 s \overline{u} = \overline{s_1 v}.$$

Здесь v — элементарная формула типа Y', а следовательно, формула $s_1 v$ эквивалентна элементарной формуле v_1. Пусть v_1 имеет тип Y_1, а множество Y_1' содержит Y_1 и Y'. Имеем включения $s_3^0 : W(Y') \to W(Y_1')$, $s_4^0 : W(Y_1) \to W(Y_1')$ с условием $s_3^0 s_1 \overline{v} = s_4^0 \overline{v_1} = \overline{s_4^0 v_1} = \overline{v'}$, где v' — элементарная формула типа Y_1'. Теперь

$$s_3^0 s_1 \overline{v} = s_3^0 s_2^0 s \overline{u} = \overline{v'}, \quad (s_3^0 s_2^0)(\overline{su}) = \overline{v'}.$$

Таким образом, формула su эквивалентна элементарной формуле, т.е. $su \in H^0(Y)$. Теорема доказана. □

4.2. Дополнительные замечания. Заметим прежде всего, что если задан тип X формулы u, то одновременно выделяется пространство, в котором лежит значение формулы $\mathrm{Val}_f(u)$. Формула $y^2 \equiv 2px$ определяет параболу в двумерном вещественном пространстве, если $X = \{x, y\}$. Эта же формула для $X = \{x, y, z\}$ задает цилиндр в трехмерном пространстве.

Формулы u и v рассматриваются как разные, если они имеют различный тип. С другой стороны, можно рассмотреть другую эквивалентность таких формул.

Пусть u и v соответственно имеют типы X_1 и X_2. Будем рассматривать их как эквивалентные, если для некоторого Y, содержащего X_1, X_2, выполнено равенство $s_1^0 u = s_2^0 v$, где s_1^0 и s_2^0 определены так же, как и выше. При $X_1 = X_2$ формулы u и v эквивалентны, если они совпадают.

Используя эту новую эквивалентность, можно связать односортные и многосортные алгебры Халмоша. К этому вопросу вернемся позже.

Предложение 1. *Для каждого гомоморфизма* $\sigma : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G)$ *существует модель* (G, Φ, f) *с условием* $\sigma = \mathrm{Val}_f$.

Доказательство. Для каждой n-арной $\varphi \in \Phi$ фиксируем множество $X_\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и рассмотрим атомарную формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ типа $X = X_\varphi$. Все эти $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и равенство $x \equiv y$ типа $\{x, y\}$ порождают всю алгебру $H_\Theta\Phi$. Обозначим это множество генераторов через M^0.

Определим

$$f(\varphi) = (\sigma\varphi(x_1, \ldots, x_n))^\pi.$$

Здесь биекция $\pi : \mathrm{Hom}(W(X), G) \to G^{(n)}$ определяется как

$$\pi(\mu) = (\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n))$$

для каждого $\mu : W(X) \to G$. Тем самым определена модель (G, Φ, f).

Нужно проверить, что $\sigma = \mathrm{Val}_f$. Имеем

$$\mathrm{Val}_f(\varphi(x_1,\dots,x_n)) = f(\varphi)^{\pi^{-1}} = (\sigma\varphi(x_1,\dots,x_n))^{\pi\pi^{-1}} = \sigma\varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Здесь было использовано определение функции Val_f на атомных формулах. Что же касается равенств, то заметим, что, согласно определению гомоморфизма, каждое σ должно быть коррелировано с равенствами. Это означает, в частности, что $\sigma(x \equiv y)$ должно быть равенством в $\mathrm{Hom}(W(x,y),G)$. По определению, имеем $\sigma(x \equiv y) = \mathrm{Val}_f(x \equiv y)$. Таким образом, равенство $\sigma = \mathrm{Val}_f$ справедливо на образующих, а значит, и всегда справедливо. □

Рассмотрим подробнее ядра гомоморфизмов и фильтры в многосортных алгебрах Халмоша.

Пусть $\tau : H \to H'$ — гомоморфизм многосортных алгебр Халмоша. Для каждого $X \in \Gamma^0$ существует гомоморфизм кванторных X-алгебр с равентствами

$$\tau_X = \tau(X) : H(X) \to H'(X).$$

Его ядро $U(X) = \mathrm{Ker}(\tau_X)$ есть полный кообраз единицы; это булев фильтр в $H(X)$, совместимый с кванторами. Условие совместности с кванторами означает, что $\forall xu \in U(X)$ выполнено для каждого $x \in X$ и каждого $u \in U(X)$.

Здесь, как обычно, $\forall u = \neg(\exists x \neg u)$. Говорят, что фильтр $U(X)$ инвариантен относительно универсальных кванторов $\forall x$, $x \in X$.

Отметим также условия совместности с операциями типа $s \in S_\Theta$: для каждого $s : W(X) \to W(Y)$ и каждого $u \in U(X)$ имеем $su \in U(Y)$.

Ядро $\mathrm{Ker}(\tau) = U$ есть множество всех $U(X) = \mathrm{Ker}(\tau_X)$ для всех $X \in \Gamma^0$. Все эти $U(X)$ совместимы с универсальными кванторами и операциями типа s. Этим определен фильтр многосортной алгебры Халмоша. Непосредственная проверка показывает, что такие фильтры и гомоморфизмы связаны корректно. Кроме того, определены идеалы многосортных алгебр Халмоша.

Фильтр U называется *тривиальным*, если он всегда состоит только из единицы алгебры H. Если $U(X) = H(X)$ выполняется для каждого X, то U называется *несобственным* фильтром. Такие фильтры всегда существуют в любом H. Если не существует никаких других фильтров в H, то алгебра H называется *простой*.

Повторяя рассуждения из [12], можно доказать, что каждая алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ и все ее подалгебры — простые алгебры Халмоша и только они являются простыми алгебрами Халмоша (см. раздел 4.3).

Кроме того, будет доказано (см. лемму 2), что каждая алгебра Халмоша полупроста: она аппроксимируется простыми. Доказательство теоремы 1 (см. раздел 4.3) использует все, что сказано выше.

Рассмотрим понятие носителя элемента алгебры Халмоша. Пусть H — алгебра Халмоша, а u — ее элемент типа X. *носитель* Δu элемента u определяется по правилу

$$\Delta u = \Delta_X u = \{x \in X \mid \exists xu \neq u\}.$$

Это условие означает, что данный элемент x существенно участвует в «записи» элемента u. Тем не менее, говоря о записи элемента, нужно соблюдать осторожность. Например, элемент $su = v$ для $s : W(X) \to W(Y)$ и $u \in H(X)$ имеет тип Y и его носитель вычисляется в Y. Тогда все, что входит в запись u в $H(X)$, не входит в запись элемента v.

Таким образом, переменные, не принадлежащие множеству X, могут участвовать в записи элемента данного типа X, если операции типа s включены в эту запись. Эти наблюдения формализуются в алгебре формул $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$. Для элементарных формул носитель формулы и переменные, участвующие в записи, точно скоординированы. На самом деле понятие носителя элемента в произвольной многосортной алгебре Халмоша требует специального рассмотрения. Например, что можно сказать о связи между носителями $\Delta_Y(su)$ и $\Delta_X(u)$, если u имеет тип X, а $s : W(X) \to W(Y)$ задано? Можно считать, что такие соотношения учитывают переходы от переменных $x \in X$ к носителю элементов $sx \in W(Y)$ (см. также [12]).

Предложение 2. *Если $\tau : H \to H'$ — гомоморфизм алгебр Халмоша, то $\Delta_X(\tau u) \subset \Delta_X(u)$ для каждого $u \in H$ типа X.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\exists x \tau(u) = \tau(\exists x u) \neq \tau u$. Тогда $\exists x u \neq u$, $x \in \Delta_X(u)$. □

Такое свойство называется координацией между гомоморфизмами и носителями элементов.

Ранее было определено множество образующих M^0. то множество можно рассматривать как многосортное множество. Носители формул из M^0 есть $\Delta\varphi(x_1, \ldots, x_n) = X_\varphi = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\Delta(x \equiv y) = \{x, y\}$. Пусть H' — произвольная алгебра Халмоша. Многосортное отображение $\tau : M^0 \to H'$ называется скоординированным с носителями элементов, если для каждого $\varphi \in \Phi$ и каждого $X \in \Gamma^0$ с $X_\varphi \cup \{x, y\} \subset X$ справедливы формулы

$$\Delta_X(\tau_\varphi(x_1, \ldots, x_n)) \subset X_\varphi, \quad \Delta_X \tau(x \equiv y))) \subset \{x, y\}.$$

Каждое такое τ единственным образом продолжается до $\tau : M \to H'$.

Возьмем $w, w', w_1, \ldots, w_n$ типа Y и рассмотрим $s : W(X) \to W(Y)$ с $s(x) = w$, $s(y) = w'$, $s(x_1) = w_1$, …, $s(x_n) = w_n$. Положим

$$\tau(\varphi(w_1, \ldots, w_n)) = s\tau(\varphi(x_1, \ldots, x_n)), \quad \tau(w \equiv w') = s\tau(x \equiv y).$$

Проверим, что это определение не зависит от выбора s.

Рассмотрим множество переменных $X_0 = \{x, y, x_1, \ldots, x_n\} \subset X$; пусть s' совпадает с s на множестве X_0. Возьмем $z \in X \setminus X_0$. Имеем

$$s\tau(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = s\exists z \tau\varphi(x_1, \ldots, x_n) = s'\exists z \tau\varphi(x_1, \ldots, x_n) = s'\tau\varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь $\tau\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists z \tau\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ по определению τ, а z не принадлежит носителю при $\tau\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Переход от s к s' выполняется в соответствии с правилами алгебры Халмоша. Аналогично, $s\tau(x \equiv y) = s'\tau(x \equiv y)$. Таким образом, $\tau : M \to H'$. Проверим, что отображение τ корректно, а потому оно единственным образом продолжается до гомоморфизма $\tau : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to H'$.

Возьмем некоторое $s : W(X) \to W(Y)$; пусть $w, w', w_1, \ldots, w_n$ имеют тип X. Возьмем также множество X_0, содержащее переменные $x, y, x_1, \ldots, x_n$; пусть $s_0 : W(X_0) \to W(X)$ определяется как и выше s. Тогда

$$\begin{aligned}\tau\varphi(sw_1, \ldots, sw_n) = \tau\varphi(ss_0x_1, \ldots, ss_0x_n) = ss_0\tau\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \\ = s\tau\varphi(s_0x_1, \ldots, s_0x_n) = s\tau\varphi(w, \ldots, w_n).\end{aligned}$$

Аналогично, $\tau(sw \equiv sw') = s\tau(w \equiv w')$. Следовательно, отображение τ корректно. Это свойство упоминалось в теореме 2. Следующее предложение также относится к важным свойствам алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$.

Предложение 3. *Пусть $\alpha : H \to H'$ — сюръективный гомоморфизм двух (многосортных) алгебр Халмоша. Пусть задан гомоморфизм $\beta : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} \to H'$. Тогда существует : $\gamma : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} \to H$ такое, что $\alpha\gamma = \beta$.*

Доказательство. Воспользуемся сначала вспомогательным замечанием. Пусть h — элемент H типа X. Тогда $\Delta_X(\alpha(h)) \subset \Delta_X(h)$. Покажем, что существует элемент h_1 в H типа X такой, что $\alpha(h) = \alpha(h_1)$ и $\Delta_X(h_1) = \Delta_X\alpha(h_1)$.

Возьмем

$$Y = \Delta_X(h) \backslash \Delta_X(\alpha(h));$$

пусть $h_1 = \exists(Y)h$. Так как Y не пересекает носитель элемента $\alpha(h)$, то

$$\alpha(h_1) = \alpha(\exists Y h) = \exists(Y)\alpha(h) = \alpha(h).$$

Кроме того,

$$\Delta_X(h_1) = \Delta_X(h) \backslash Y = \Delta_X\alpha(h) = \Delta_X\alpha(h_1)$$

и $\Delta_X(h_1) = \Delta_X\alpha(h_1)$.

Воспользуемся теперь этим замечанием. Для каждого базисного элемента u типа X в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}$ возьмем $\beta(u)$. Это элемент типа X в H'. Возьмем элемент $h \in H$ с $\alpha(h) = \beta(u)$. Рассмотрим h_1 такой, что $\alpha(h_1) = \alpha(h) = \beta(u)$ и

$$\Delta_X(h_1) = \Delta_X\alpha(h_1) = \Delta_X\beta(u) \subset \Delta_X(u).$$

Обозначим $\gamma(u) = h_1$. Таким образом, для каждого u имеем

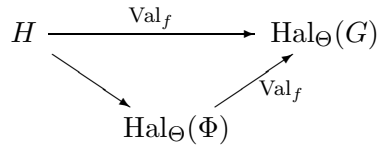
$$\Delta_X(\gamma(u) = \Delta_X(h_1) \subset \Delta_X(u).$$

Это означает, что определен гомоморфизм $\gamma : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} \to H$.

Для каждого базиса u имеем $(\alpha\gamma)(u) = \alpha(h_1) = \alpha(h) = \beta(u)$. Тогда $(\alpha\gamma)(u) = \beta(u)$ для каждого u, т.е. $\alpha\gamma = \beta$. Предложение доказано □

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Следующая коммутативная диаграмма вытекает из определений:



Это означает, что $\mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(\overline{u})$ выполняется для каждой формулы $u \in H$. Если теперь $\overline{u} = \overline{v}$, то $\mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(\overline{u}) = \mathrm{Val}_v(\overline{v}) = \mathrm{Val}_f(v)$. Это верно для каждой модели (G, Φ, f). Таким образом, из $\overline{u} = \overline{v}$ следует семантическая эквивалентность формул u и v.

Обратно, пусть u и v семантически эквивалентны. Применим тот факт, что каждая алгебра Халмоша полупроста. В частности, алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ полупроста. Имеем систему гомоморфизмов $\sigma_\alpha : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to H_\Theta(G_\alpha)$, $\alpha \in I$, таких, что если $\sigma_\alpha(u) = \sigma_\alpha(v)$ при всех α, то $u = v$. Здесь каждый σ_α можно представить как Val_{f_α} с помощью модели $(G_\alpha, \Phi, f_\alpha)$. Если u и v — семантически эквивалентные формулы в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$, то $\mathrm{Val}_{f\alpha}(u) = \mathrm{Val}_{f\alpha}(v)$, $\sigma_\alpha(u) = \sigma_\alpha(v)$ для всех $\alpha \in I$. Это дает $u = v$. □

Заметим, что аналогичное рассуждение не пригодно, например, для алгебры $\tilde{H}$. Здесь $\sigma : \tilde{H} \to \mathrm{Hal}_\Theta(G)$ можно представить как $\sigma = \mathrm{Val}_f$ в том и только том случае, если σ скоординировано с соотношениями $(*)$.

4.3. Некоторые доказательства. Здесь дается доказательство теоремы 1.

Наряду с фильтрами рассмотрим идеалы. Идеал U алгебры Халмоша H индуцирует в $H(X)$ булев идеал $U(X)$ для каждого $X \in \Gamma^0$, который инвариантен относительно кванторов $\exists x$, $x \in X$, и для каждого $s : W(X) \to W(Y)$ из $u \in U(X)$ следует $su \in U(Y)$. Идеалы и фильтры двойственны. Нулевой идеал есть идеал U, для которого все $U(X)$ нулевые. Идеал U тривиален, если $U(X) = H(X)$ для всех X. Алгебра H проста в том и только том случае, если она не имеет никаких других идеалов.

Лемма 1. *Каждая алгебра* $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ *и все ее подалгебры просты.*

Доказательство. Рассмотрим непустое подмножество A в $\mathrm{Hom}(W(X), G)$. Применим квантор $\exists(X) = \exists x_1 \ldots \exists x_n, X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Гомоморфизм $\mu : W(X) \to G$ принадлежит множеству $\exists(X)A$, если μ совпадает с некоторым $\nu : W(X) \to G$ вне X. Так как вне X нет переменных, то каждый μ принадлежит $\exists(X)A$; $\exists XA = \mathrm{Hom}(W(X), G)$. Он является единицей алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), G)$.

Пусть теперь H — произвольная алгебра Халмоша такая, что $\exists Xa = 1$ выполняется для каждого ненулевого элемента $a \in H(X)$ при каждом $X \in \Gamma^0$. Проверим, что H полупроста. Пусть U — ненулевой идеал в H. Для некоторого X имеем $U(X) \neq 0$ и в $U(X)$ существует ненулевой элемент a. Получаем $\exists xa = 1$, т.е. $U(X)$ содержит единицу. Тогда $U(X) = H(X)$. Для любого $s : W(X) \to W(Y)$ имеем $su \in U(Y)$ при $u \in U(X)$. Если u — единица в $H(X)$, то su — единица в $H(Y)$, $U(Y)$ содержит единицу, а $U(Y) = H(Y)$. Идеал U тривиален, т.е. алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ и все ее подалгебры просты. □

Позже будет доказано, что каждая простая алгебра Халмоша является подалгеброй некоторой алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

Воспользуемся следующим определением.

Пусть H — многосортная алгебра Халмоша. Скажем, что эта алгебра *односортно представима*, если существует односортная алгебра Халмоша $H(X^0) = H^0$ такая, что выполнены следующие условия.

1) Каждому включению $s^0 : W(X) \to W(X^0)$ соответствует булево включение $s^0 : H(X) \to H(X^0)$, естественным образом скоррелированное с кванторами и равенствами.
2) Каждой коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} W(X) & \xrightarrow{s} & W(Y) \\ {\scriptstyle s^0_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^0_Y} \\ W(X^0) & \xrightarrow{s'} & W(X^0) \end{array}$$

соответствует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H(X) & \xrightarrow{s} & H(Y) \\ {\scriptstyle s^0_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^0_Y} \\ H^0 & \xrightarrow{s'} & H^0 \end{array}$$

Как и в [12], можно доказать, что каждая H представима. Это легко проверить непосредственно для алгебр $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Это понятие устанавливает связи между многосортными и односортными алгебрами Халмоша. Этот факт о представимости используется в следующей теореме.

Теорема 5. *Каждая алгебра Халмоша полупроста.*

Доказательство. Пусть задано представление $H \to H^0$. Для каждого элемента $a \in H^0$ существует максимальный булев идеал V, не содержащий элемента a. Пусть V_* — идеал алгебры Халмоша H^0, определенный по следующему правилу: элемент $u \in H^0$ принадлежит V_*, если $\exists(X^0)u \in V$. Можно представлять себе, что алгебра H^0 локально конечна. Тогда $\exists X^0 u = \exists(X)u$, где $X \in \Gamma^0$. Доказывается, что V_* есть максимальный идеал алгебры Халмоша H^0 и что $V_* \subset V$ (см. [12]).

На основе V_* строим идеал U в многосортной алгебре H. Для каждого конечного $X \subset X^0$ обозначим через $U(X)$ множество элементов $u \in H(X)$, для которых $s^0 u \in V_*$. Здесь $s^0 : H(X) \to H(X^0) = H^0$ — естественное вложение.

Легко проверить, что $U(X)$ есть булев идеал в $H(X)$, сохраняющий квантор $\exists(X)$. Проверим также, что если $u \in U(X)$, то $su \in U(Y)$ для каждого $s : W(X) \to W(Y)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H(X) & \xrightarrow{s} & H(Y) \\ {\scriptstyle s^0_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^0_Y} \\ H^0 & \xrightarrow{s'} & H^0 \end{array}$$

Имеем $s^0_Y s = s' s^0_X$. Требуется, чтобы $s^0_Y(su) \in V_*$. Теперь $s^0_Y su = s' s^0_X u$. По условию, $s^0_X u \in V_*$. Тогда $s' s^0_X u \in V_*$, $s^0_Y(su) \in V_*$. Следовательно, U есть идеал алгебры H. Покажем, что U есть максимальный идеал. Пусть U_1 — больший идеал. Идеал U_* в H^0, определенный U_1, ему соответствует, а $U_* > V_*$. Так как V_* максимален, то $U_* = V_*$. Должно быть $U_1(X) > U(X)$ для некоторого конечного X. Пусть $u \in U_1(X) \setminus U(X)$. Имеем $s^0 u \in U_* = V_*$, но тогда $u \in U(X)$. Полученное противоречие означает, что идеал U максимален.

Далее возьмем элемент $a \in H(X)$ и $s^0 a \in H^0$. Элемент $s^0 a$ определяет максимальный булев идеал V и, соответственно, идеал V_* алгебры Халмоша. Пусть U — фильтр алгебры Халмоша H, соответствующий V_*. Обозначим $U = U_a$. Возьмем эти U_a для всех ненулевых элементов $a \in H$ различных типов X.

Все U_a суть максимальные идеалы в H, а их пересечение есть нулевой идеал. Это означает, что алгебра H полупроста, поскольку она аппроксимируется простыми алшебрами. □

Лемма 2. *Каждая простая алгебра H изоморфна некоторой подалгебре алгебры типа* $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

Доказательство. Пусть H — простая алгебра, а H_0 — некоторое множество, порожденное элементами из H. Для каждого $h \in H_0$ возьмем символ соотношения φ. Если h имеет тип

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то φ является n-арным. Рассмотрим соответствие $\varphi(x_1, \dots, x_n) \to h$. Напомним, что каждая алгебра H рассматривается как алгебра с равенствами. Тогда формула $w \equiv w'$ ассоциируется с с соответствующим равенством в H.

Соберем все φ в множество Φ и рассмотрим соответствующую свободную алгебру $\tilde{H}$ для Φ и Θ. Это дает гомоморфизм алгебры $\tilde{H}$ в алгебру H. Пусть идеал U есть ядро такого гомоморфизма. Используем здесь односортное представление алгебр $\tilde{H}$ и H; пусть идеал U_0 соответствует идеалу U в алгебре $\tilde{H}^0$. Алгебра $\tilde{H}^0$ есть свободная односортная алгебра Халмоша. Возьмем фильтр T_0, соответствующий идеалу U_0. Так как алгебра H проста, то фильтр T_0 максимален, а U — максимальный идеал. Фильтр T в алгебре H, ассоциированный с идеалом U, соответствует фильтру T_0.

Фильтр T_0 определяет некоторую модель (G, Φ, f), в которой справедливы множество формул T_0, а также все формулы фильтра T. Возьмем $\mathrm{Val}_f : \tilde{H} \to \mathrm{Hal}_\Theta(G)$ для f. Здесь $T = \mathrm{Ker}(\mathrm{Val}_f)$. Отсюда следует, что алгебра H изоморфна некоторой подалгебре в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. □

Из лемм 1 и 2 и теоремы 5 следует теорема 2 с помощью характеризации типа теорем Биркгоффа многообразий алгебр Халмоша.

5. Алгебраическая геометрия в логике первого порядка

5.1. Множества формул и алгебраические множества. Фиксируем конечное множество X. Пусть $W = W(X)$ — свободная алгебра над X в данном многообразии Θ. Множество символов Φ соотношений и модель $(G, \Phi, f), G \in \Theta$ также фиксируются. Рассмотрим множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(W, G)$ как аффинное пространство (см. также п. 1.3) .

Теперь рассмотрим множества A точек $\mu : W \to G$ в этом пространстве и множества T формул в алгебре $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Установим следующее соответствие Галуа для данной модели (G, Φ, f):

$$T^f = A = \bigcap_{u \in T} \mathrm{Val}_f(u) = \{\mu \mid T \subset \mathrm{Log}\,\mathrm{Ker}(\mu)\},$$
$$A^f = T = \{u \mid A \subset \mathrm{Val}_f(u)\} = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{Log}\,\mathrm{Ker}(\mu).$$

В каждой строке имеем три равенства, два первых из которых — определения, а третье — легко проверяемое соотношение. Эти равенства в действительности выполняются и определяют соответствие Галуа. Оно обобщает стандартное соответствие в классической алгебраической геометрии, а также соответствие Галуа в эквациональной геометрии в многообразии Θ для алгебры $G \in \Theta$.

Множество A вида $A = T^f$ для некоторого T называется *алгебраическим множеством* или *замкнутым множеством* (алгебраическим многообразием) над моделью (G, Φ, f). Используется также термин «элементарное множество».

Множество T вида $T = A^f$ для некоторого A есть булев фильтр в булевой алгебре $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Назовем его *$f$-замкнутым булевым фильтром*. Если A — алгебраическое множество, то рассмотрим фильтр $T = A^f$ как теорию множества A в алгебре $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Рассмотрим теперь булеву алгебру $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f$. Она является координатной алгеброй для данного A. Имеем следующее вложение:

$$\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f \to \prod_{\mu \in A} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Ker}(\mu).$$

Его правая часть есть декартово произведение двухэлементных алгебр.

Можно рассмотреть замыкания A^{ff} для каждого множества A и T^{ff} для каждого T. Следующее предложение устанавливает прямую связь между T и T^{ff}.

Предложение 4. *$v \in T^{ff}$ в том и только том случае, если* (*инфинитная*) *формула* $\left(\bigwedge_{u \in T} u\right) \to v$ *справедлива в модели* (G, Φ, f).

Доказательство. Эта формула выполняется в (G, Φ, f) в том и только том случае, если для произвольной точки $\mu : W \to G$ включение $\mu \in \mathrm{Val}_f(u)$ вытекает из включения $\mu \in \mathrm{Val}_f(u)$ для

всех $u \in T$. Пусть эта формула справедлива в модели. Докажем, что $v \in T^{ff}$. По определению,

$$T^{ff} = \bigcap_{\mu \in T^f} \operatorname{Log}\operatorname{Ker}(\mu).$$

Нужно доказать, что если $\mu \in T^f$, то $v \in \operatorname{Log}\operatorname{Ker}(\mu)$. Имеем

$$T^f = \bigcap_{u \in T} \operatorname{Val}_f(u).$$

Следовательно, $\mu \in T^f$ дает $\mu \in \operatorname{Val}_f(u)$ для всех $u \in T$. Кроме того, $\mu \in \operatorname{Val}_f(v)$, $v \in \operatorname{Log}\operatorname{Ker}(\mu)$ по условию предложения. Поэтому $v \in T^{ff}$.

Пусть теперь $v \in T^{ff}$. Докажем, что эта формула выполняется в (G, Φ, f).

Возьмем некоторое $\mu : W \to G$; пусть $\mu \in \operatorname{Val}_f(u)$ для всех $u \in T$. Нужно доказать, что $\mu \in \operatorname{Val}_f(v)$. Имеем

$$\mu \in \bigcap_{u \in T} \operatorname{Val}_f(u) = T^f, \quad T^{ff} \subset \operatorname{Log}\operatorname{Ker}(\mu).$$

Здесь $v \in T^{ff}$ означает, что $v \in \operatorname{Log}\operatorname{Ker}(\mu), \mu \in \operatorname{Val}_f(v)$. Предложение доказано. □

Следствие 1. *Если u — формула, то $v \in u^{ff}$ в том и только том случае, если формула $u \to v$ выполняется в модели.*

Это утверждение представляет собой версию теоремы Гильберта о нулях (Nullstellensats) в алгебраической геометрии.

5.2. Соответствие Галуа и морфизмы. В дальнейшем соответствия Галуа будут ассоциироваться с морфизмами категорий. В случае $\operatorname{Hal}_\Theta(G)$ гомоморфизмы $s : W(X) \to W(Y)$ дают отображения s_* и s^* для булеанов. Определим теперь действие s_* и s^* на множестве формул T. Если $T \subset \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi)(Y)$, то s_*T — множество формул в $\operatorname{Hal}_\Theta(\Phi)(X)$, определенных по правилу

$$u \in s_*T \quad \Leftrightarrow \quad s_*u \in T.$$

Если $T \subset \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi)(X)$, то $s^*T \subset \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi)(Y)$ и

$$s^*T = \{s_*u \mid u \in T\}.$$

Теорема 6. *Правила совместимости имеют следующий вид*:

1) *если $T \subset \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi)(X)$, то*

$$(s^*T)^f = s_*T^f = sT^f;$$

2) *если $A \subset \operatorname{Hom}(W(Y), G)$, то*

$$(s^*A)^f = s_*A^f.$$

Доказательство. Воспользуемся следующими определениями:

$$T^f = \bigcap_{u \in T} \operatorname{Val}_f(u); \quad A^f = \{u \mid A \subset \operatorname{Val}_f(u)\}.$$

Докажем первое правило. В силу $s^*T \subset \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi)(Y)$ имеем $(s^*T)^f$, $s_*T^f \subset \operatorname{Hom}(W(Y), G)$. Рассмотрим точку $\nu : W(Y) \to G$. Пусть $\nu \in (s^*T)^f = \bigcap_{u \in s^*T} \operatorname{Val}_f(u)$, $u = sv$, $v \in T$.

Для каждого $v \in T$ имеем

$$\nu \in \operatorname{Val}_f(sv) = s \operatorname{Val}_f(v) = s_* \operatorname{Val}_f(v).$$

Следовательно, для каждого $v \in T$ имеем $\nu s \in \operatorname{Val}_f(v)$ и $\nu s \in T^f = \bigcap_{v \in T} \operatorname{Val}_f(v)$, $\nu \in sT^f$.

Обратно, пусть $\nu \in sT^f$, $\nu s \in T^f = \bigcap_{v \in T} \operatorname{Val}_f(v)$. Тогда $\nu s \in \operatorname{Val}_f(v)$, $\nu \in s \operatorname{Val}_f(v) = \operatorname{Val}_f(sv)$ для каждого $v \in T$. Поэтому

$$\nu \in \bigcap_{v \in T} \operatorname{Val}_f(sv) = \bigcap_{u \in s^*T} \operatorname{Val}_f(u) = (s^*T)^f.$$

Рассмотрим второе правило. Здесь $s^*A \subset \mathrm{Hom}(W(X), G)$ и $(s^*A)^f$, $s_*A^f \subset \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)(X)$. Пусть $u \in (s^*A)^f$, откуда следует, что $s^*A \subset \mathrm{Val}_f(u)$. Следовательно, $\nu s \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\nu \in s\,\mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(su)$, $A \subset \mathrm{Val}_f(su)$, $su \in A^f$, $u \in s_*A^f$ для каждого $\nu \in A$.

Обратно, пусть $u \in s_*A^f$, $su \in A^f$, $A \subset \mathrm{Val}_f(su) = s\,\mathrm{Val}_f(u)$. Тогда $\nu s \in \mathrm{Val}_f(u)$, $s^*A \subset \mathrm{Val}_f(u)$, $u \in (s^*A)^f$ для каждого $\nu \in A$. □

Эти правила индуцируют хорошую согласованность между соответствиями Галуа в логике и морфизмами в категориях $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

5.3. Решетки и топология. Введем здесь функции Cl_f и Alv_f, определенные для произвольного $W = W(X)$.

Множество $\mathrm{Alv}_f(W)$ есть множество всех алгебраических множеств для данной модели (G, Φ, f) в аффинном пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), G)$.

Множество $\mathrm{Cl}_f(W)$ есть множество всех f-замкнутых фильтров T в булевой алгебре $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)(X)$.

Предложение 5. *Множества* $\mathrm{Alv}_f(W)$ *и* $\mathrm{Cl}_f(W)$ *являются двойственно изоморфными решетками.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathrm{Alv}_f(W)$, $A = T_1^f$, $B = T_2^f$. Тогда $A \cap B = (T_1 \cup T_2)^f$, $A \cap B \in \mathrm{Alv}_f(W)$.

1. Если $A = T^f$ — алгебраическое множество, то sA также алгебраическое множество.

2. Если $T = A^f$ f-замкнуто, то $sT = s_*T$ также f-замкнуто.

Обозначим множество всех $u \wedge v$, $u \in T_1$, $v \in T_2$, через $T_1 \wedge T_2$. Тогда $A \cup B = (T_1 \cap T_2)^f$, $A \cup B \in \mathrm{Alv}_f(W)$. Поэтому $\mathrm{Alv}_f(W)$ — решетка, являющаяся подрешеткой решетки $\mathrm{Bool}(W(X), G)$, которая, в свою очередь, является дистрибутивной решеткой.

Пусть теперь $T_1, T_2 \in \mathrm{Cl}_f(W)$, $T_1 = A^f$, $T_2 = B^f$. Тогда $T_1 \cap T_2 = A^f \cap B^f = (A \cup B)^f$, $T_1 \cap T_2 \in \mathrm{Cl}_f(W)$. Тем не менее нельзя утверждать, что $T_1 \cup T_2$ также принадлежит $\mathrm{Cl}_f(W)$, поскольку объединение фильтров может и не быть фильтром. Поэтому введем новую операцию

$$T_1 \overline{\cup} T_2 = (T_1 \cup T_2)^{ff}.$$

В результате получим решетку $\mathrm{Cl}_f(W)$. Проверим, что решетки $\mathrm{Alv}_f(W)$ и $\mathrm{Cl}_f(W)$ двойственно изоморфны. Отсюда будет следовать, что решетка Cl_f также дистрибутивна.

Переход f определяет биекцию между алгебраическими множествами в $\mathrm{Hom}(W, G)$ и f-замкнутыми фильтрами в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)(X)$. Другими словами, имеем биекции

$$f : \mathrm{Alv}_f(W) \to \mathrm{Cl}_f(W), \quad f : \mathrm{Cl}_f(W) \to \mathrm{Alv}_f(W).$$

Пусть $A, B \in \mathrm{Alv}_f(W)$. Тогда

$$(A \cap B)^f = (T_1^f \cap T_2^f)^f = (T_1 \cup T_2)^{ff} = T_1 \overline{\cup} T_2,$$

где $T_1 = A^f$, $T_2 = B^f$. Таким образом,

$$(A \cap B)^f = A^f \overline{\cup} B^f.$$

Теперь нужно доказать, что

$$(A \cup B)^f = A^f \cap B^f.$$

Поскольку множество $A \cup B$ замкнуто, то надо проверить, что $(A^f \cap B^f)^f = A \cup B$. Имеем

$$A^f \cap B^f = (A \cup B)^f, (A^f \cap B^f)^f = (A \cup B)^{ff} = A \cup B.$$

Предложение доказано. □

Можно рассматривать функцию $\mathrm{Cl}_f : \Theta^0 \to Set$ как функтор. Однако это не совместимо с решеткой $\mathrm{Cl}_f(W)$ в данном случае. С другой стороны, функция $\mathrm{Alv}_f : \Theta^0 \to Set$ совместима с решеткой и можно рассмотреть функтор

$$\mathrm{Alv}_f : \Theta^0 \to \mathrm{Lat},$$

где Lat — категория решеток.

Рассмотрим функцию Alv_f как многосортное множество. Имеем $\mathrm{Alv}_f(X) = \mathrm{Alv}_f(W(X))$ для каждого $X \in \Gamma^0$. Тогда Alv_f — подмножество алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, которую можно трактовать как многосортную решетку, инвариантную относительно операций типа $s \in S_\Theta$.

Вернемся к гомоморфизму $\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Пусть R_f — образ этого гомоморфизма. Он является подалгеброй в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Каждый элемент $A \in R_f$ имеет вид $A = \mathrm{Val}_f(u)$. Это есть алгебраическое множество, определенное одноэлементным множеством T, состоящим из элемента u. Назовем такие алгебраические множества простыми.

Все простые алгебраические множества для данной модели (G, Φ, f) образуют подалгебру алгебры Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

Как известно, каждая формула u эквивалентна некоторой элементарной формуле v. В дальнейшем с ними будут связаны многообразия $\mathrm{Val}_f(u)$ и $\mathrm{Val}_f(v)$.

Заметим далее, что основное внимание в группам и других структурах классической алгебраической геометрии и эквациональной геометрии уделяется свойствам индивидуальных алгебраических множеств. Наиболее важная цель состоит в получении некоторого описания системы всех решений уравнений.

Уделим здесь основное внимание решеткам и категориям алгебраических множеств. Свойства индивидуальных алгебраических множеств составляют отдельную тему.

Сделаем несколько замечаний о топологиях в пространстве $\mathrm{Hom}(W, G)$, ассоциированными с алгебраическими множествами, а именно, с обобщенными топологиями Зарисского. Замкнутые множества здесь — алгебраические множества. Тем не менее, естественно ограничиться рассмотрением множеств, определяемых семейством положительных формул, записываемых без отрицаний. Хорошая топология предполагает также, что здесь нет кванторов. Будем говорить об алгебраических множествах, определяемых семейством универсальных положительных формул, и рассматривать топологию Зарисского.

Пример 1. Начнем с с классического многообразия Θ коммутативных и ассоциативных алгебр с единицей над полем вещественных чисел. Рассмотрим единственное отношение (отношение порядка) как Φ. Модель (G, Φ, f) есть поле вещественных чисел, в котором естественным образом реализуется отношение порядка. Пусть $X = \{x, y\}$. Соответствующая алгебра W есть алгебра вещественных полиномов от двух переменных x и y. Пространство $\mathrm{Hom}(W, G)$ реализуется как вещественное пространство.

Легко понять, что в этом случае соответствующая обобщенная топология Зарисского совпадает с естественной топологией, тогда как обычная топология Зарисского с ней не совпадает. Рассмотрим, в частности, круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Он замкнут в естественной топологии, но не замкнут в обычной топологии Зарисского. Этот же круг можно задать формулой $\exists z(x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$. Множество Φ здесь пусто, но существует квантор и множество X состоит из трех переменных.

5.4. Категории $K_{\Phi\Theta}(f)$ и $C_{\Phi\Theta}(f)$. Наряду с многообразием алгебр Θ зафиксируем также и множество символов соотношений Φ и модель (G, Φ, f), $G \in \Theta$. Эти данные определяют категорию $K_{\Phi\Theta}(f)$ алгебраических множеств для данного многообразия f. Ее объекты имеют вид (X, A), где A — алгебраическое множество в данной логике для данной модели. Множество A лежит в аффинном пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), G)$, $A = T^f$ для некоторого множества формул T, но это T не фиксировано.

Морфизмы имеют вид $(X, A) \to (Y, B)$. Начнем с $s : W(Y) \to W(X)$ в Θ^0. Имеем

$$\tilde{s} : \mathrm{Hom}(W(X), G) \to \mathrm{Hom}(W(Y), G).$$

Скажем, что s допустим для A и B, если $\tilde{s}(\nu) = \nu s \in B$ при $\nu \in A$. Для каждого такого s имеем отображение

$$[s] : A \to B.$$

Рассмотрим теперь слабую и точные категории $K_{\Phi\Theta}(f)$.

В слабой категории морфизмы имеют вид

$$s : (X, A) \to (Y, B),$$

где s допустим для A и B. В точной категории морфизмы суть

$$[s] : (X, A) \to (Y, B).$$

Рассмотрим более подробно понятие допустимой тройки (s, A, B). Для $s : W(Y) \to W(X)$ имеем

$$s_* : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X).$$

Пусть T_2 и T_1 — некоторые множества формул соответственно в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$ и $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Скажем, что s_* допустим для T_2 и T_1, если $s_*u \in T_1$ при $u \in T_2$.

Предложение 6. *Гомоморфизм $s : W(Y) \to W(X)$ допустим для алгебраических множеств A и B в том и только том случае, если s_* допустим для $T_2 = B^f$ и $T_1 = A^f$.*

Доказательство. Заметим сначала, что включение $\nu s \in B$ при всех $\nu \in A$ означает, что $A \subset sB = s_*B$. Это справедливо в категории $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Применяя переход f, получаем $(s_*B)^f \subset A^f$. Далее утверждается, что $s^*B^f \subset (s_*B)^f$. Это правило не содержится среди упомянутых выше.

Возьмем $u \in s^*B^f$, $u = s_*v$, $v \in B^f$, $B \subset \mathrm{Val}_f(v)$. Отсюда следует, что $s_*B \subset s_* \mathrm{Val}_f(v) = \mathrm{Val}_f(s_*v) = \mathrm{Val}_f(u)$. Следовательно, $s_*B \subset \mathrm{Val}_f(u)$, $u \in (s_*B)^f$. Последнее включение справедливо для каждого $u \in s^*B^f$. Таким образом, $s^*B^f \subset (s_*B)^f$.

Пусть теперь s допустим для A и B. Имеем $A \subset sB$ и $(s_*B)^f \subset A^f = T_1$. Используя тот факт, что $s^*B^f \subset (s_*B)^f$, получаем $s^*B^f = s^*T_2 \subset T_1$. Это означает, что $s_*u \in T_1$ при $u \in T_2$, а s_* допустим для T_2 и T_1.

Обратно, пусть $s^*T_2 \subset T_1, s^*B^f \subset A^f$. Снова применяя f, получаем

$$T_1^f = A \subset (s^*T_2)^f = s_*T_2^f = s_*B = sB,$$

и s допустим для A и B. Предложение доказано. □

В этом случае имеем следующую коммутативную диаграмму булевых гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) & \xrightarrow{s_*} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^f & \xrightarrow{\overline{s_*}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f \end{array}$$

где μ_Y и μ_X — естественные гомоморфизмы.

Предложение 7. *Пусть s_1 и s_2 допустимы для A и B. Тогда $\overline{s_{1*}} = \overline{s_{2*}}$ следует из $[s_1] = [s_2]$.*

Доказательство. Пусть $[s_1] = [s_2]$. Тогда $\nu s_1 = \nu s_2$ для каждого $\nu \in A$. Рассмотрим следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) & \xrightarrow{s_{1*}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^f & \xrightarrow{\overline{s_{1*}}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) & \xrightarrow{s_{2*}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^f & \xrightarrow{\overline{s_{2*}}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f \end{array}$$

Утверждается, что $\overline{s_{1*}} = \overline{s_{2*}}$, т.е. $\overline{s_{1*}}\mu_Y(u) = \overline{s_{2*}}\mu_Y(u)$ для всех $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$. Следовательно, $\mu_X s_{1*}(u) = \mu_X s_{2*}(u)$.

Идея состоит в доказательстве того факта, что $s_{1*}(u)$ и $s_{2*}(u)$ совпадают по модулю фильтра A^f. Это означает, что

$$(\neg s_{1*}(u) \vee s_{2*}(u)) \wedge (s_{1*}(u) \vee \neg s_{2*}(u)) \in A^f.$$

Обозначим левую часть через v. Доказать то, что $v \in A^f$ — то же самое, что доказать включение $A \subset \mathrm{Val}_f(v)$. Поэтому получаем $\nu \in \mathrm{Val}_f(v)$ $\forall \nu \in A$. Имеем

$$\mathrm{Val}_f(v) = (\neg s_{1*} \mathrm{Val}_f(u) \vee s_{2*} \mathrm{Val}_f(u)) \wedge (s_{1*} \mathrm{Val}_f(u) \vee \neg s_{2*} \mathrm{Val}_f(u)).$$

Проверим, что ν содержится в первой скобке. Предположим, что это не так.

Тогда $\nu \in s_{1*} \mathrm{Val}_f(u)$, $\nu s_1 \in \mathrm{Val}_f(u)$. Равенство $\nu s_1 = \nu s_2$ и включения $\nu s_2 \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\nu \in s_{2*} \mathrm{Val}_f(u)$ приводят к противоречию. Следовательно, ν содержится в первой скобке и, аналогично, — во второй. Поэтому $A \subset \mathrm{Val}_f(v)$, $v \in A^f$. Таким образом, $s_{1*}(u)$ и $s_{2*}(u)$ совпадают

по модулю фильтра A^f. Это приводит к соотношениям $\mu_X s_{1*}(u) = \mu_X s_{2*}(u)$, $\overline{s_{1*}}\mu_Y(u) = \overline{s_{2*}}\mu_Y(u)$, $\overline{s_{1*}} = \overline{s_{2*}}$. Это и доказывает предложение. □

Обсудим обратное утверждение. Пусть $\overline{s_{1*}} = \overline{s_{2*}}$. Тогда $\overline{s_{1*}}\mu_Y(u) = \overline{s_{2*}}\mu_Y(u)$ для всех $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$. Поэтому $\mu_X s_{1*}(u) = \mu_X s_{2*}(u)$. Следовательно, $s_{1*}(u)$ и $s_{2*}(u)$ эквивалентны по модулю A^f.

Рассмотрим $v = (\neg s_{1*}(u) \vee s_{2*}(u)) \wedge (s_{1*}(u) \vee \neg s_{2*}(u)) \in A^f$, $A \subset \mathrm{Val}_f(v)$. Как и ранее, из $\nu \in A$ следует $\nu \in \mathrm{Val}_f(v)$ для каждого u.

Выясним теперь интерпретацию последнего включения. Пусть $\nu \in \neg s_{1*}\,\mathrm{Val}_f(u)$, $\nu s_1 \notin \mathrm{Val}_f(u)$. Используя вторую скобку в записи v, приходим к $\nu s_2 \notin \mathrm{Val}_f(u)$.

Если $\nu s_1 \in \mathrm{Val}_f(u)$, то включение $\nu s_2 \in \mathrm{Val}_f(u)$ следует из первой скобки. Приводит ли это к равенству $\nu s_1 = \nu s_2$? Проблема, возникающая здесь, состоит в том, верно ли то, что

$$\exists \nu \in A,\ \nu s_1 \neq \nu s_2,\ \exists u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$$

со свойствами $\nu s_1 \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\nu s_2 \notin \mathrm{Val}_f(u)$. Другими словами, существует ли u, разделяющий две различные точки νs_1 и νs_2? Вообще говоря, это не верно. Тем не менее, в случае, когда в соответствующей топологии Зарисского каждая точка f-замкнута, это свойство выполняется. В этом случае имеет место утверждение, противоположное предложению 7. Напомним также, что это противоположное утверждение справедливо и в эквациональной геометрии.

Объекты категории $C_{\Phi\Theta}(f)$ имеют вид $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T$, где T — f-замкнутый булев фильтр в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Морфизмы — это гомоморфизмы таких алгебр, индуцированные гомоморфизмами $s : W(X) \to W(Y)$. Как и выше, они имеют тип $\overline{s}_*$, т.е. не произвольные гомоморфизмы данных булевых алгебр. Переход

$$(X, A) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f$$

определяет контравариантный функтор

$$K_{\Phi\Theta}(f) \to C_{\Phi\Theta}(f)$$

для точной $K_{\Phi\Theta}(f)$, который вытекает из предложения 6. Вообще говоря, этот функтор не является двойственностью. Рассмотрим специальный случай, когда он представляет собой двойственность.

Пусть Θ — многообразие алгебр, а G — алгебра в Θ. Рассмотрим многообразие алгебр $\Theta(G)$ в Θ с константами из G. Например, если Θ — многообразие коммутативных и ассоциативных колец с единицей, а P — поле, то $\Theta(P) = \mathrm{Var} - P$ есть многообразие алгебр над P.

В общем случае рассмотрим G-алгебру G в $\Theta(G)$ и уравнения в ней. Здесь свободная алгебра имеет вид $W(X) = G * W_0(X)$, где $W_0(X)$ свободна в Θ, а $*$ — свободное произведение в Θ.

Пусть $\mu : W(X) \to G$ — точка, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, а $\mu(x_1) = a_1, \ldots, \mu(x_n) = a_n$. Константы $a_1, \ldots, a_n$ рассматриваются как элементы в $W(X)$. Таким образом, можно говорить о формуле u вида

$$(x_1 \equiv a_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = a_n).$$

В этом случае $\mathrm{Val}_f(u)$ состоит только из элемента μ, а точка μ замкнута в топологии Зарисского. Здесь имеем двойственность категорий.

Заметим также, что точка μ есть простое многообразие, определяемое элементарной формулой u. Сделаем несколько замечаний, связанных с этим наблюдением.

Пусть u — формула типа X, а v — элементарная формула типа $Y \supset X$, эквивалентная v. Свяжем с ними алгебраические многообразия $\mathrm{Val}_f(u)$ и $\mathrm{Val}_f(v)$. Начнем с тождественных включений $s^0 : W(X) \to W(Y)$ и $v = s^0_* u$. Имеем

$$\mathrm{Val}_f(v) = \mathrm{Val}_f(s^0_* u) = s^0_* \,\mathrm{Val}_f(u).$$

Здесь $\mathrm{Val}_f(v)$ — цилиндр в $\mathrm{Hom}(W(Y), G)$ над исходным многообразием $\mathrm{Val}_f(u)$. Этот новый цилиндр определяется с помощью элементарной формулы.

Рассмотрим далее одну специальную характеристику объектов в категории $C_{\Phi\Theta}(X)$. Они являются булевыми алгебрами вида $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f$.

Имеем канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Val}^X_f : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \to \mathrm{Bool}(W(X), G)$$

для каждого $X \in \Gamma^0$. Имеем также и изоморфизм булевых алгебр

$$\chi : \mathrm{Bool}(W(X), G) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Hom}(W(X), G), Z).$$

Здесь $Z = \{0, 1\}$ — двухэлементная булева алгебра, $\mathrm{Fun}(\mathrm{Hom}(W(X), G), Z)$ — булева алгебра бинарных функций, а $\chi(A)$ — характеристическая функция множества A в $\mathrm{Hom}(W(X), G)$.

Рассмотрим суперпозицию гомоморфизмов

$$\sim = (\chi \, \mathrm{Val}_f^X) : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Hom}(W(X), G), Z).$$

Здесь $\tilde{u}$ — характеристическая функция алгебраического множества $\mathrm{Val}_f(u)$, соответствующего формуле $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Возьмем алгебраическое множество $A = T^f$ с $T = A^f$ для данной модели (G, Φ, F) и рассмотрим отображение

$$\psi_A : \mathrm{Fun}(\mathrm{Hom}(W(X), G), Z) \to \mathrm{Fun}(A, Z),$$

которое сопоставляет сужение функции на A каждой функции из левой части. Он есть гомоморфизм булевых алгебр.

Пусть $\tilde{u}_A = \psi_A(\tilde{u})$. Переход $u \to \tilde{u}$ есть гомоморфизм булевых алгебр. Назовем его образ *алгеброй регулярных функций на множестве* A.

Предложение 8. *Булева алгебра* $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T$ *есть изоморфизм на алгебру регулярных функций, определенных на многообразии* A.

Доказательство. Для любых u и $\mu : W \to G$ имеем $\tilde{u}(\mu) = 1$ в том и только том случае, если $\mu \in \mathrm{Val}_f(u)$ или, что то же самое, $u \in \mathrm{Log}\,\mathrm{Ker}(\mu)$. Тогда $u \in T = A^f = \bigcap\limits_{\mu \in A} \mathrm{Log}\,\mathrm{Ker}(\mu)$ в том и только том случае, если $\tilde{\mu} = 1$ для каждого $\mu \in A$. Это означает, что $u \in T$ в том и только том случае, если $\tilde{u}_A$ есть единица в рассматриваемой алгебре регулярных функций на множестве A. Отсюда и следует предложение. □

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 1. Две модели (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) геометрически эквивалентны в том и только том случае, если для произвольного множества формул T некоторого типа X

$$T^{f_1 f_1} = T^{f_2 f_2}.$$

Предложение 9. *Если модели* (G_1, Φ, f_1) *и* (G_2, Φ, f_2) *геометрически эквивалентны, то* (*слабые*) *категории* $K_{\Phi\Theta}(f_1)$ *и* $K_{\Phi\Theta}(f_2)$ *изоморфны.*

Доказательство. Это предложение для точных категорий в эквациональной теории непосредственно следует из соответствующей двойственности. В рассматриваемом случае двойственности нет и требуется доказательство.

Пусть данные модели (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) геометрически эквивалентны. Построим изоморфизм

$$F : K_{\Phi\Theta}(f_1) \to K_{\Phi\Theta}(f_2).$$

Определим $F(A) = A^{f_1 f_2} = B$ для каждого объекта A в категории $K_{\Phi\Theta}(f_1)$. Если A имеет тип X, то B того же типа. Аналогично, $B^{f_2 f_1}$ при B. Здесь $A^{f_1 f_2 f_2 f_1} = A^{f_1 f_1 f_1 f_1} = A^{f_1 f_1} = A$. Это означает, что F — биекция на объектах. Пусть теперь $s : W(Y) \to W(X)$ задан. Проверим, что s допустим для A_1 и A_2 в $K_{\Phi\Theta}(F_1)$ в том и только том случае, если s допустим для соответствующих B_1 и B_2 в $K_{\Phi\Theta}(f_2)$. Пусть задано $A_1 \subset sA_2$. Тогда $A_1^{f_1} \supset (sA_2)^{f_1}$ and $A_1^{f_1 f_2} \subset (sA_2)^{f_1 f_2}$. Имеем

$$(sA_2)^{f_1} \supset s^* A_2^{f_1}, \quad (sA_2)^{f_1 f_2} \subset (s^* A_2^{f_1})^{f_2} = sA_2^{f_1 f_2}.$$

Следовательно,

$$B_1 \subset (sA_2)^{f_1 f_2} \subset sB_2.$$

Это означает, что s допустим для B_1 и B_2. Обратное утверждение проверяется аналогично. Предложение доказано. □

Сделаем несколько замечаний о понятии геометрической эквивалентности моделей.

Предложение 10. *Если две модели геометрически эквивалентны, то они и элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть модели (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) геометрически эквивалентны и пусть формула u некоторого типа X принадлежит элементарной теории первой модели. Имеем $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$ и $\mathrm{Val}_{f_1}(u) = \mathrm{Hom}(W(X), G_1)$.

Пусть $A = \mathrm{Hom}(W(X), G_1)$ и $T = A^{f_1}$. Очевидно, что $T = T(X)$ — элементарная теория типа X первой модели и $u \in T$. Множество T f_1-замкнуто. Кроме того, оно минимальное с этим свойством в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Согласно предположению T также f_2-замкнуто и минимальное с этим свойством. Следовательно, если $B = \mathrm{Hom}(W(X), G_2)$, то $B^{f_2} = T$. Поэтому T — элементарная теория типа X второй модели.

Так как $u \in T$ — формула, то она принадлежит элементарной теории второй модели. Аналогично, если формула u принадлежит элементарной теории второй модели, то u выполняется в первой модели.

Проблема 1. Верно ли обратное? Инями словами, верно ли, что элементарно эквивалентные модели геометрически эквивалентны?

В заключение заметим, что категория $K_\Theta(G)$ в эквациональной теории есть полная подкатегория в $K_{\Phi\Theta}(f)$ для данной модели (G, Φ, f). Такого соотношения не существует для $C_\Theta(G)$ и $C_{\Phi\Theta}(f)$. Объекты первой есть алгебры в Θ, тогда как объекты второй — булевы алгебры. □

5.5. Категории $K_{\Phi\Theta}$ и $C_{\Phi\Theta}$. Объекты $K_{\Phi\Theta}$ имеют вид

$$(X, A, (G, \Phi, f)).$$

Здесь модель (G, Φ, f) не фиксирована в категории, а $A = T^f$ для некоторого T в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Объекты $C_{\Phi\Theta}$ имеют вид

$$(\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T, (G, \Phi, f)),$$

где T — f-замкнутый булев фильтр в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Перейдем к морфизмам. Для заданного морфизма $\delta : G_1 \to G_2$ в Θ имеем $\tilde{\delta} : \mathrm{Hom}(W(X), G_1) \to \mathrm{Hom}(W(X), G_2)$ по правилу $\tilde{\delta}(\nu) = \delta\nu$. В соответствии с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} W(Y) & \xrightarrow{s} & W(X) \\ {\scriptstyle \nu'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ G_2 & \xrightarrow{\delta} & G_1 \end{array}$$

можно написать $\nu' = \delta\nu s = \tilde{\delta}(\nu s) = \tilde{\delta}\tilde{s}(\nu) = \tilde{s}\tilde{\delta}(\nu) = (s, \delta)(\nu)$.

Пусть теперь заданы два объекта $(X, A, (G_1, \Phi, f_1))$ и $(Y, B, (G_2, \Phi, f_2))$. Скажем, что пара (s, δ) допустима для A и B, если $(s, \delta)(\nu) \in B$ для каждого $\nu \in A$. Такая допустимая пара (s, δ) определяет морфизм в слабой категории $K_{\Phi\Theta}$.

Для каждого множества B типа Y рассмотрим множество $(s, \delta)B$ типа X, определенное по правилу

$$\nu : W(X) \to G_1 \in (s, \delta)B \quad \text{если и только если} \quad (s, \delta)(\nu) \in B.$$

Имеем $\tilde{s}(\tilde{\delta}(\nu)) \in B$ и $\tilde{\delta}(\nu) \in sB$, $\nu \in \delta sB$. Здесь sB имеет тип X. Если C — множество типа Y, то δC имеет тот же тип и $\nu \in \delta C$, если $\tilde{\delta}(\nu) = \delta\nu \in G$. Следовательно, $(s, \delta)B = \delta sB = s\delta B$. Кроме того, пара (s, δ) допустима для A и B в том и только том случае, если $A \subset s\delta B$. Пишем также $\delta B = \delta_* B$ и рассматриваем δ^*, определенное как $\delta^* B = \{\delta\nu \mid \nu \in B\}$.

Можно также определить и точные морфизмы типа $([s], \delta)$. Для данного $\delta : G_1 \to G_2$ имеем отображение $[s] : A \to B$, определенное по правилу $[s](\nu) = \delta\nu s$, $\nu \in A$. В качестве морфизма возьмем пару $([s], \delta)$. Морфизмы

$$(\overline{s}, \delta) : (\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2, \quad (G_2, \Phi, f_2)) \to (\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1, (G_1, \Phi, f_1))$$

определяются подходящими парами (s, δ). Аналогично $([s], \delta)$, гомоморфизм $\overline{s}$ булевых алгебр зависит от $\delta : G_1 \to G_2$. К этому вопросу вернемся ниже.

Рассмотрим теперь некоторые подробности.

Для данного $A \subset \mathrm{Hom}(W(X), G_1)$, возьмем $(\delta_* A)^{f_2}$ в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Предложение 11. *Пара (s, δ) допустима для A и B в том и только том случае, если $su \in (\delta^* A)^{f_2}$ для каждого $u \in B^{f_2}$.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что для (s, δ) имеем гомоморфизм $\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^{f_2} \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/(s^* A)^{f_2}$. Он является морфизмом в категории $C_{\Phi\Theta}(f_2)$. Пусть пара (s, δ) допустима для A и B. Утверждается, что если $u \in T_2 = B^{f_2}$, то $su \in (\delta^* A)^{f_2}$.

Включение $u \in T_2 = B^{f_2}$ означает, что $B \subset \mathrm{Val}_{f_2}(u)$. Возьмем произвольный $\nu \in A$. Тогда $\nu' = \delta\nu s \in B$ и $\delta\nu s \in \mathrm{Val}_{f_2}(u)$, $\delta\nu \in \mathrm{Val}_{f_2}(su)$. Поэтому $\delta^* A \subset \mathrm{Val}_{f_2}(su)$, $su \in (\delta^* A)^{f_2}$.

Пусть теперь $su \in (\delta^* A)^{f_2}$ для каждого $u \in T_2$. Тогда $\nu' = \delta\nu s \in B$ для каждого $\nu \in A$. Это также означает, что

$$\delta\nu \in sB = sT_2^{f_2} = (s^* T_2)^{fs} = \bigcap_{v \in s^* T_2} \mathrm{Val}_{f_2}(v).$$

Нужно проверить, что $\delta\nu \in \mathrm{Val}_{f_2}(v)$ справедливо для каждого $v \in s^* T_2$. Имеем $v = su$, $u \in T_2$. Следовательно, $v = su \in (s^* A)^{f_2}$ и $\delta^* A \subset \mathrm{Val}_{f_2}(v)$. Таким образом, $\delta\nu \in \delta^* A$, $\delta\nu \in \mathrm{Val}_{f_2}(v)$. Предложение доказано. □

Рассмотрим снова пары (s, δ), допустимые для фиксированных A и B. Фиксируем также $\delta : G_1 \to G_2$ и будем изменять компоненту s. Для каждой такой s имеем $[s] : A \to B$ и $\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^{f_2} \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/(\delta^* A)^{f_2}$.

Предложение 12. *Для любого данного δ имеем $[s_1] = [s_2] \to \overline{s_1} = \overline{s_2}$.*

Доказательство этого предложения повторяет доказательство предложения 6 и опускается.

Вернемся к морфизмам категории $C_{\Phi\Theta}$. Как было видно, они имеют вид

$$(\overline{s}, \delta) : (\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2, (G_2, \Phi, f_2)) \to (\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1, (G_1, \Phi, f_1)).$$

Пары s и δ коррелированы специальным образом. Здесь $\delta : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм алгебр в Θ. Возьмем

$$(\delta^* T_1^{f1})^{f_2} = T_1^{\delta}$$

и предположим, что $s : W(Y) \to W(X)$ индуцирует гомоморфизм булевых алгебр

$$\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2 \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{\delta},$$

являющийся морфизмом категории $C_{\Phi\Theta} f_2$. Эти условия означают корреляцию между s и δ. В свою очередь, отсюда следует, что пара (s, δ) допустима для $A = T_1^{f_1}$ и $B = T_2^{f_2}$.

Обратим внимание на то, что гомоморфизм $\overline{s}$, вообще говоря, не является гомоморфизмом исходных булевых алгебр.

Рассмотрим более подробно умножение морфизмов в $K_{\Phi\Theta}$ и $C_{\Phi\Theta}$, используя предыдущие рассуждения. Пусть

$$([s], \delta) : (X, A; (G_1, \Phi, f_1)) \to (Y, B; (G_2, \Phi, f_2))$$
$$([s'], \delta') : (Y, B; (G_2, \Phi, f_2)) \to (Z, C; (G_3, \Phi, f_3))$$

заданы в точной категории $K_{\Phi\Theta}$. Определим умножение:

$$([s'], \delta')([s], \delta) = ([ss'], \delta'\delta) : (X, A; (G_1, \Phi, f_1)) \to (Z, C; (G_3, \Phi, f_3)).$$

Нужно проверить, что гомоморфизмы ss' и $\delta'\delta$ корректно скоординированы. Это означает, что $\delta'\delta\nu ss' \in C$ выполняется для каждого $\nu \in A$. Имеем $\delta\nu s \in B$ и далее $\delta'(\delta\nu s)s' \in C$. Следовательно, $ss'(u) \in T_1^{(\delta'\delta)}$ для каждого $u \in T_3$. Это дает гомоморфизм

$$\overline{ss'} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z)/T_3 \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{(\delta'\delta)}.$$

Определим умножение морфизмов в $C_{\Phi\Theta}$ следующим образом:

$$(\overline{s}', \delta')(\overline{s}, \delta) = (\overline{ss'}, \delta'\delta).$$

Видим, что переход $(X, A; (G, \Phi, f)) \to (\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f, (G, \Phi, f))$ определяет контравариантный функтор $K_{\Phi\Theta} \to C_{\Phi\Theta}$ для слабой и точной категорий $K_{\Phi\Theta}$.

Докажем, что гомоморфизм $\overline{ss'}$ можно представить как произведение двух морфизмов в категории $C_{\Phi\Theta}(f_3)$, связанных с s и s'.

Имеем диаграмму для s':

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z) & \xrightarrow{s'} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z)/T_3 & \xrightarrow{\overline{s'}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2^{\delta'} \end{array}$$

и другую — для s:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) & \xrightarrow{s} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2 & \xrightarrow{\overline{s}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{\delta} \end{array}$$

Третья диаграмма строится с помощью второй:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) & \xrightarrow{s} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu'_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2^{\delta'} & \xrightarrow{\overline{s}^{\delta'}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{(\delta'\delta)} \end{array}$$

с $\overline{ss'} = \overline{s}^{\delta'}\overline{s'}$. Здесь $\overline{s}^{\delta'}$ и $\overline{s'}$ — морфизмы в $C_{\Phi\Theta}(f_3)$.

Нужно показать, что $su \in T_1^{(\delta'\delta)}$ выполняется для каждого $u \in T_2^{\delta'}$. Фильтр $T_2^{\delta'}$ строится с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & W(Y) & & \\ & {\scriptstyle \nu'}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \mu} & \\ G_3 & & \xleftarrow{\delta'} & & G_2 \end{array}$$

Здесь $T_2^{\delta'} = (\delta'^* B)^{f_3} \subset \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$.

Перейдем к $(T_2^{\delta'})^{f_3} = (\delta'^* B)^{f_3 f_3} = C_1$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & W(X) & & \\ & & {\scriptstyle \nu''}\swarrow & {\scriptstyle \nu'}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\ G_3 & \xleftarrow{\delta'} & G_2 & \xleftarrow{\delta} & G_1 & & \end{array}$$

Она определяет $T_1^{(\delta'\delta)} \subset \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Включение $su \in T_1^{(\delta'\delta)}$ для каждого $u \in T_2^{\delta'}$ означает, что пара $(s, \delta'\delta)$ допустима для A и C_1. Проверим последнее утверждение. Пусть $\nu \in A$. Тогда $\delta\nu s \in B$ и, следовательно, $\delta'\delta\nu s \in \delta'^* B \subset (\delta'^* B)^{f_3 f_3} = C_1$.

Осталось проверить равенство $\overline{ss'} = \overline{s}^{\delta'}\overline{s'}$. Используя коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z) & \xrightarrow{s'} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) & \xrightarrow{s} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z)/T_3 & \xrightarrow{\overline{s'}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2^{\delta'} & \xrightarrow{\overline{s}^{\delta'}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{(\delta'\delta)} \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z) & \xrightarrow{ss'} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'_X} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z)/T_3 & \xrightarrow{\overline{ss'}} & \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{\delta'\delta} \end{array}$$

можно переписать произведение морфизмов как

$$(\overline{s}, \delta')(\overline{s}, \delta) = (\overline{s}^{\delta'}\overline{s'}, \delta'\delta).$$

Вернемся к определению морфизмов в $K_{\Phi\Theta}$. Для заданных морфизмов

$$(s, \delta) : (X, A; (G_1, \Phi, f_2)) \to (Y, B; (G_2, \Phi, f_2))$$

имеем $\delta\nu s \in B$ для каждого $\nu \in A$. Переходим к множеству $\delta^* A$, т.е. ко всем $\delta\nu$, $\nu \in A$. Здесь $\delta^* A \subset sB$. Множество sB f_2-замкнуто. Следовательно, если $A_1 = (\delta^* A)^{f_2 f_2}$, то $A_1 \subset sB$, и отображение $s : W(Y) \to W(X)$ допустимо для f_2-замкнутых множеств A_1 и B. Здесь имеем морфизм

$$[s] : (X, A_1) \to (Y, B)$$

в категории $K_{\Phi\Theta}(f_2)$. Этот морфизм скоординирован с морфизмом

$$\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/T_2 \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/T_1^{\delta}$$

в категории $C_{\Phi\Theta}(f_2)$. Теперь определения морфизмов в категориях $C_{\Phi\Theta}$ и $K_{\Phi\Theta}$ скоординированы.

Заметим далее, что каждая категория $K_{\Phi\Theta}(f)$ есть подкатегория $K_{\Phi\Theta}$, а каждая $C_{\Phi\Theta}(f)$ — также подкатегория $C_{\Phi\Theta}$. Кроме того, имеем подкатегории $K_{\Phi\Theta}(G)$ в категории $K_{\Phi\Theta}$ для каждой алгебры $G \in \Theta$ и произвольных интерпретаций f множества Φ in G. Существуют подкатегории $C_{\Phi\Theta}(G)$ в категории $C_{\Phi\Theta}$.

Приведем дальнейшие подробности об этих категориях. Объекты категории $K_{\Phi\Theta}(G)$ можно представить в виде (X, A, f), поскольку G и Θ фиксированы в этой категории. Гомоморфизмы $\delta : G \to G$ являются тождественными гомоморфизмами.

Морфизмы в $K_{\Phi\Theta}(G)$ суть

$$[s] : (X, A, f_1) \to (Y, B, f_2),$$

где s и единица скоординированы в соответствии с общим определением категории $K_{\Phi\Theta}$. Здесь $A = A_1^{f_1}$, $B = T_2^{f_2}$ для некоторого T_1 в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$ и $T_2 = \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$. Можно считать, что $T_1 = A^{f_1}$ и $T_2 = B^{f_2}$. Тогда соответствующее множество A_1 есть $A^{f_2 f_2}$, а T_1^{δ} есть $T_1^{f_1 f_2} = A^{f_2}$.

Гомоморфизм $s : W(Y) \to W(X)$ индуцирует гомоморфизм булевых алгебр

$$\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^{f_2} \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^{f_2}.$$

Каждый такой s определяет отображение $[s] : A \to B$ и одновременно отображение $A_1 \to B$.

Как отмечалось выше, подкатегория R_f простых подмногообразий (т.е. многообразий, определяемых одноэлементными множествами T) выбирается в категории $K_{\Phi\Theta}(f)$ для данной модели (G, Φ, f). Эта R_f есть также и алгебра Халмоша (подалгебра в $\mathrm{Hal}_{\Theta}(G)$), совпадающая с образом гомоморфизма

$$\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_{\Theta}(\Phi) \to \mathrm{Hal}_{\Theta}(G).$$

Можно взять гомоморфизм

$$\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_{\Theta}(\Phi) \to R_f$$

и рассмотреть включения на уровне объектов:

$$\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_{\Theta}(\Phi) \to K_{\Phi\Theta}(f).$$

Каждое такое включение определяет переходы от множеств формул T к соответствующим объектам категории $K_{\Phi\Theta}(f)$.

Рассмотрим новую категорию с объектами $\mathrm{Val}_f : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(f) \to K_{\Phi\Theta}(f)$ и коммутативными диаграммами

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Theta}(\Phi) & \xrightarrow{\mathrm{Val}_{f_1}} & K_{\Phi\Theta}(f_1) \\ & \searrow^{\mathrm{Val}_{f_2}} & \downarrow \gamma \\ & & K_{\Phi\Theta}(f_2) \end{array}$$

в качестве морфизмов. Здесь γ — функтор категорий, а коммутативность диаграмм понимается на уровне объектов.

Кроме того, f_1 ассоциируется с моделью (G_1, Φ, f_1), а f_2 — с (G_2, Φ, f_2). Тогда также меняются и алгебры G.

Соответствующий функтор γ, удовлетворяющий условию коммутативности диаграммы, называется *специальным функтором*.

Функтор γ называется *сильным*, если γ индуцирует гомоморфизм алгебр $R_{f_1} \to R_{f_2}$.

Каждый специальный функтор γ является сильным.

Если (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) геометрически эквивалентны, то функтор $\gamma = \gamma_{f_1}$, $f_2 = f$, определенный выше, есть специальный изоморфизм $K_{\Phi\Theta}(f_1) \to K_{\Phi\Theta}(f_2)$.

Определим теперь полуморфизмы рассматриваемой категории. Они имеют вид

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} & \xrightarrow{\mathrm{Val}_{f_1}} & K_{\Phi\Theta}(f_1) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} & \xrightarrow{\mathrm{Val}_{f_2}} & K_{\Phi\Theta}(f_2) \end{array}$$

где σ — автоморфизм алгебры $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta} = \mathrm{Hal}_{\Theta}(\Phi)$.

В этом случае γ индуцирует некоторый полугомоморфизм алгебр $R_{f_1} \to R_{f_2}$. Основная задача состоит в нахождении условий на модель, при которых она дает изоморфизм соответствующих категорий алгебраических множеств. Уже было видно, что если модели геометрически эквивалентны, то это так. Можно также утверждать, что в этой ситуации модели элементарно эквивалентны и, в частности, если они конечны, то они изоморфны.

Более общая информация получается из теории Галуа, к которой мы и переходим.

6. Теория Галуа—Краснера в алгебраической логике и алгебраической геометрии

6.1. Группа $\mathrm{Aut}(\mathrm{Hal}_{\Theta}(G))$**.** Теория, излагаемая в этом и следующих разделах, восходит к работе Краснера [8]. Позже были статьи [1, 2, 12] и др. Здесь мы следуем схеме из [2, 12]. Некоторые новые аспекты связаны с особенностями алгебры Халмоша $\mathrm{Hal}_{\Theta}(G)$.

Автоморфизм σ алгебры Халмоша $\mathrm{Hal}_{\Theta}(G)$ определяет автоморфизм σ_X кванторной X-алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), G)$ для каждого конечного множества $X \subset X^0$. Все эти автоморфизмы σ_X естественно согласованы с определением $s \in S_{\Theta}$.

Покажем, что некоторый автоморфизм $\delta_* = \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Hal}_{\Theta}(G))$ соответствует автоморфизму $\delta \in \mathrm{Aut}\, G$.

Начнем с конструкции, использовавшейся ранее. Пусть задан гомоморфизм $\delta : G_1 \to G_2$. Тогда

$$\tilde{\delta} : \mathrm{Hom}(W(X), G_1) \to \mathrm{Hom}(W(X), G_2).$$

Если теперь $B \subset \mathrm{Hom}(W(X), G_2)$, то

$$A = \delta_* B = \tilde{\delta}^{-1}(B) \subset \mathrm{Hom}(W(X), G_1),$$

т.е. $\mu \in A = \delta_* B$ в том и только том случае, если $\delta\mu \in B$. Таким образом, имеем

$$\delta_* : \mathrm{Hal}_{\Theta}(G_2) \to \mathrm{Hal}_{\Theta}(G_1).$$

Этот δ_* совместим с булевой структурой и с морфизмами $\delta_*(sB) = s\delta_*(B)$ для каждого $s : W(Y) \to W(X)$. В самом деле, пусть ν принадлежит $\mathrm{Hom}(W(Y), G_1)$. Тогда $\nu \in \delta_*(sB)$ в том и только том случае, если $\delta\nu \in sB$, $(\delta\nu)s \in B$, $(\delta\nu)s = \delta(\nu s) \in B$. Так как умножение морфизмов ассоциативно, это верно в том и только том случае, если $\nu s \in \delta_* B$ и $\nu \in s\delta_* B$. Отсюда также получаем, что если $s : W(Y) \to W(X)$ допусти́м для A и B, то s допусти́м и для $\delta_*(A)$ и $\delta_*(B)$. В самом деле, если $A \subset sB$, то $\delta_*(A) \subset \delta_*(sB) = s\delta_*(B)$. Но δ_*, вообще говоря, не совместим с кванторами. δ_* есть автоморфизм алгебр Халмоша в том и только том случае, если $\delta : G_1 \to G_2$ — изоморфизм в Θ. В этом случае s допусти́м для A и B в том и только том случае, если s допусти́м для $\delta_*(A)$ и $\delta_*(B)$. Следовательно, если $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$, то $\delta_* = \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Hal}_{\Theta}(G))$.

Имеем представление групп

$$\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Hal}_{\Theta}(G)).$$

Основной результат — это следующая теорема.

Теорема 7. *Представление* $\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Hal}_{\Theta}(G))$ *представляет собой изоморфизм групп.*

Доказательство. Начнем доказательство со следующего утверждения. Пусть M — произвольное непустое множество, а $\mathfrak{M} = \mathrm{Sub}\, M$ — булева алгебра всех подмножеств в M. Тогда каждый автоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{M}$ определяет подстановку на множестве M, индуцирующую этот автоморфизм (см., например, [12, с. 338].

Здесь если τ — подстановка на множестве M, то соответствующий автоморфизм τ_* определяется по правилу

$$a \in \tau_* A = \tau A \quad \text{если и только если} \quad \tau a \in A, \quad A \subset M.$$

Далее фиксируем конечное множество X и начнем с $M = M_X = \mathrm{Hom}(W(X), G)$. Каждый автоморфизм σ алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ определяет автоморфизм σ_X булевой алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), G)$, т.е. алгебры $\mathfrak{M}_X$. Этот автоморфизм σ_X задается подстановкой τ_X на множестве $M_X = \mathrm{Hom}(W(X), G)$, зависящей от σ и X.

Обозначим через Σ_X группу всех подстановок множества M_X, через Σ_G — группу всех подстановок множества G, а через $\tilde{\Sigma}_G = \Sigma_G^X$ — их декартову степень. Рассмотрим включение

$$\tilde{} : \tilde{\Sigma}_G \to \Sigma_X.$$

Это включение определяется следующим образом. Если $\zeta \in \tilde{\Sigma}_G$, то подстановка $\tilde{\zeta} \in \Sigma_X$ определяется по правилу: каждому $\mu : W(X) \to G$ ставится в соответствие гомоморфизм $\tilde{\zeta}(\mu) : W(X) \to G$, определенный как $\tilde{\zeta}(\mu)(X) = \zeta(X)(\mu(X))$ при всех $x \in X$.

Мы хотим охарактеризовать группу $\tilde{\Sigma}_G$ как подгруппу в Σ_X.

Рассмотрим следующее вспомогательное предложение.

Определение 2. Подстановка $\tau \in \Sigma_X$ называется корректной, если

$$\mu(x) = \nu(x) \Leftrightarrow (\tau\mu)(x) = (\tau\nu)(x)$$

для всех $\mu, \nu : W(X) \to G$ и каждого $x \in X$.

Предложение 13. *Подстановка τ корректна в том и только том случае, если $\tau = \tilde{\zeta}$ для некоторой $\zeta = \tilde{\Sigma}_G$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \tilde{\zeta}$ для некоторой $\zeta = \tilde{\Sigma}_G$. Проверим корректность τ. Возьмем $x \in X$, $\mu, \nu : W(X) \to G$. Тогда $\tilde{\zeta}(\mu)(x) = \zeta(x)\mu(x)$, $\tilde{\zeta}(\nu)(x) = \zeta(x)\nu(x)$. Ясно, что равенство $\tilde{\zeta}(\mu)(x) = \tilde{\zeta}(\nu)(x)$ справедливо в том и только том случае, если $\mu(x) = \nu(x)$.

Пусть τ — произвольная корректная подстановка на множестве $M_X = \mathrm{Hom}(W(X), G)$. Построим $\zeta \in \tilde{\Sigma}_G$ с условием $\tau = \tilde{\zeta}$.

Фиксируем некоторую $x \in X$ и определим подстановку $\zeta(x)$ на множестве G. Рассмотрим произвольные $g \in G$ и $\mu : W(X) \to G$ с $\mu(x) = g$. Положим

$$\zeta(x)g = (\tau\mu)(x).$$

Так как τ корректна, то это определение не зависит от выбора μ. Если $\nu(x) = \mu(x)$, то $(\tau\nu)(x) = (\tau\mu)(x) = \zeta(x)(g)$. Проверим, что отображение $\zeta(x) : G \to G$ является подстановкой.

Заметим прежде всего, что если τ — корректная подстановка, то это же справедливо для τ^{-1}. В самом деле, возьмем $x \in X$, $\mu, \nu : W(X) \to G$. Обозначим $\mu_1 = \tau^{-1}\mu$, $\nu_1 = \tau^{-1}\nu$, $\mu = \tau\mu_1$, $\nu = \tau\nu_1$. Имеем $(\tau\mu_1)(x) = (\tau\nu_1)(x) \Leftrightarrow (\mu_1(x) = \nu_1(x)$. Это дает $\mu(x)\nu(x) \Leftrightarrow (\tau^{-1}\mu)(x) = (\tau^{-1}\nu)(x)$. Подстановка τ^{-1} корректна.

Возьмем теперь произвольный элемент $g_1 \in G$ и покажем, что $\zeta(x)(g) = g_1$ для некоторого $g \in G$. Пусть $\mu_1(x) = g_1$, $(\tau^{-1}\mu_1)(x) = g = \mu(x)$, $\mu = \tau^{-1}\mu_1$. Тогда

$$(\tau\mu)(x) = \zeta(x)(g) = (\tau\tau^{-1}\mu_1)(x) = \mu_1(x) = g_1.$$

Осталось проверить, что из $\zeta(x)(g_1) = \zeta(x)(g_2)$ следует $g_1 = g_2$. Пусть $\mu_1(x) = g_1$, $\mu_2(x) = g_2$. Имеем

$$\zeta(x)(g_1) = (\tau\mu_1)(x) = \zeta(x)(g_2) = (\tau\mu_2)(x).$$

Последнее дает $\mu_1(x) = \mu_2(x)$ и $g_1 = g_2$. Мы проверили, что $\zeta(x)$ — подстановка.

Возьмем $\zeta \in \tilde{\Sigma}_G = \Sigma_G^X$. В соответствии с правилом, $\zeta(x)$ определяется τ. Проверим, что $\tau = \tilde{\zeta}$. Возьмем произвольное $\mu : W(X) \to G$ и проверим, что $\tau\mu = \tilde{\zeta}\mu$. Рассмотрим произвольную $x \in X$. Тогда $(\tau\mu)(x) = \zeta(x)\mu(x) = (\tilde{\zeta}\mu)(x)$. Это завершает доказательство предложения. □

Предложение 14. *Подстановка τ коммутирует с кванторами из $\mathrm{Bool}(W(X), G)$ в том и только том случае, если τ корректна.*

Доказательство. Имеется в виду коммутативность вида

$$\tau\exists xA = \exists x\tau A$$

при $x \in X$ и $A \subset \mathrm{Hom}(W(X), G)$.

Пусть τ корректна, $\tau = \tilde{\zeta}$, $\zeta \in \tilde{\Sigma}_G$. Возьмем $\mu \in \tau\exists xA = \tilde{\zeta}\exists xA$. Имеем $\tilde{\zeta}\mu \in \exists xA$. Выберем $\nu \in A$ с $(\tilde{\zeta}\mu)(x') = \nu(x')$ для любых $x' \in X$, $x' \neq x$. Пусть $\nu = \tilde{\zeta}\nu_1$. Так как $\nu \in A$, то $\nu_1 \in \tilde{\zeta}A$. Равенство $\tilde{\zeta}\mu(x') = \tilde{\zeta}\nu_1(x')$ дает $\mu(x') = \nu_1(x')$ для любого $x' \neq x$, а потому $\mu \in \exists x\tilde{\zeta}A$.

Пусть теперь $\mu \in \exists x\tilde{\zeta}A$. Возьмем ν_1 в $\tilde{\zeta}A$ с $\mu(x') = \nu_1(x')$ при $x' \neq x$. Имеем $(\tilde{\zeta}\mu)(x') = (\tilde{\zeta}\nu_1)(x')$. Здесь $\nu = \tilde{\zeta}\nu_1 \in A$. Следовательно, $\tilde{\zeta}\mu \in \exists xA$, $\mu \in \tilde{\zeta}\exists xA$. Мы проверили коммутативность при $\tau = \tilde{\zeta}$.

Докажем обратное, т.е. коммутативность и корректность подстановки τ.

Пусть μ и ν — два элемента из $\mathrm{Hom}(W(X), G)$, $\mu(x) = \nu(x)$ для некоторого $x \in X$. Нужно показать, что $(\tau\mu)(x) = (\tau\nu)(x)$. Обозначим через Y множество X без x (т.е. $Y = X \setminus x$). Обозначим произведение всех $\exists y$, $y \in Y$, через $\exists(Y)$. Из коммутирования τ с каждым $\exists y$ следует коммутирование с $\exists(Y)$. Возьмем далее множество A, состоящее из одного элемента ν: $A = \{\nu\}$. Тогда $\mu \in \exists(Y)\{\nu\}$. Теперь

$$\tau\mu \in \tau^{-1}\exists(Y)\{\nu\} = \exists(Y)\tau^{-1}\{\nu\} = \exists(Y)\{\tau\nu\}.$$

Следовательно, $(\tau\mu)(x) = (\tau\nu)(x)$. Здесь использовалась коммутативность τ^{-1} с кванторами. Аналогично выводится, что из $(\tau\mu)(x) = (\tau\nu)(x)$ следует $\mu(x) = \nu(x)$. Таким образом, τ — корректная подстановка. □

Следовательно, можно считать, что каждый автоморфизм кванторной X-алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), G)$ реализуется корректной подстановкой множества $\mathrm{Hom}(W(X), G)$, зависящей от этого автоморфизма.

Рассмотрим согласование с операциями $s \in S_\Theta$.

Фиксируем подгруппу Σ_0 в $\tilde{\Sigma}_G = \Sigma_G^X$, состоящую из констант ζ, т.е. $\zeta(x) = \delta \in \Sigma_G$ при всех $x \in X$. Константа ζ соответствует $\delta \in \Sigma_G$. Этим определено включение $\Sigma_G \to \tilde{\Sigma}_G = \Sigma_G^X$ образ которого есть Σ_0. Одновременно имеем включение $\mathrm{Aut}(G) \to \Sigma_G^X$ для каждого $X \subset X^0$.

Обозначим это включение для каждого X через ${}^\sim X$. Если $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ или $\delta \in \Sigma_G$, то $\delta^{\sim X} \in \tilde{\Sigma}_G$. Далее меняем конечное множество $X \subset X^0$ и переходим к многосортным вариантам множеств и алгебр. В частности, рассмотрим многосортное множество M с компонентами $M_X = \mathrm{Hom}(W(X), G)$.

Подстановка τ множества M — это функция, определяющая подстановку τ^X множества M_X для каждого X. Такая τ корректна, если все τ^X корректны, $\tau^X = \zeta^{\sim X}, \tau = \tilde{\zeta}$. Здесь ζ — также функция, определяющая элемент ζ^X в Σ_G^X для каждого X. Каждому $\delta \in \Sigma_G$ соответствует $\delta^{\sim X}$ в Σ_G^X, определяющая подстановку $\tilde{\delta}$ многосортного множества M.

Рассмотрим гомоморфизмы $s : W(X) \to W(Y)$. Операция $s : \mathrm{Bool}(W(X), G) \to \mathrm{Bool}(W(Y), G)$ в алгебре $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ соответствует гомоморфизму s. Подстановка τ многосортного множества M коммутирует со всеми такими s, если для каждого A в $\mathrm{Hom}(W(X), G)$ выполнено $\tau^Y sA = s\tau^X A$.

Пусть $\tau = \tilde{\zeta}$ — произвольная подстановка.

Предложение 15. *Подстановка τ коммутирует со всеми $s \in S_\Theta$ в том и только том случае, если $\tau = \tilde{\delta}$, где δ — автоморфизм алгебры G.*

Доказательство. Уже известно, что каждая $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ действует на алгебре $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ как автоморфизм. В частности, это означает, что функция $\tilde{\delta} = \tau$ для таких δ обладает нужными свойствами.

Пусть теперь $\tau = \tilde{\zeta}$ коммутирует с операциями типа s. Проверим, верно ли, что $\tau = \tilde{\delta}$, где $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$.

Покажем сначала, что каждая ζ^X есть константа, а затем заметим, что все ζ^X для различных $X \subset X^0$ имеют одно и то же значение $\delta \in \Sigma_G$. Сделаем это одновременно. Возьмем $x \in X$ и $y \in Y$ и предположим, что $\zeta^X(x) \neq \zeta^Y(y)$. Выберем элемент $a \in G$ такой, что $\zeta^X(x)a \neq \zeta^Y(y)a$, и

рассмотрим $\mu : W(Y) \to G$ с $\mu(y) = a$. Пусть $s : W(X) \to W(Y)$ переводит x в y. Тогда

$$(\tau^Y \mu)(sx) = (\tau^Y \mu)(y) = \zeta^Y(y)\mu(y) = \zeta^Y(y)(a),$$
$$\zeta^X(x)(a) = \zeta^X(x)\mu(y) = \zeta^X(x)(\mu s)(x) = (\zeta^X(x)(\mu s))(x),$$
$$(\zeta^X(x)(\mu s))(x) = \tau^X(\mu s)(x).$$

Следовательно,

$$((\tau^Y \mu)s)(x) \neq \tau^X(\mu s)(x), \quad (\tau^Y \mu)(s) \neq \tau^X(\mu s).$$

Это можно переписать как

$$\tilde{s}(\tau^Y \mu) \neq \tau^X(\tilde{s}(\mu)).$$

Возьмем теперь произвольное $A \subset \mathrm{Hom}(W(X), G)$; пусть $\mu \in s\tau^X A$. Таким образом, $\mu s = \tilde{s}(\mu) \in \tau^X A$, $\tau^X(\mu s) \in A$, $\tau^X(\tilde{s}(\mu)) \in A$.

С другой стороны, $\mu \in \tau^Y(sA)$ означает, что $(\tau^Y)(\mu) \in sA$, $\tilde{s}(\tau^Y \mu) \in A$. Так как $\tau^X(\tilde{s}(\mu)) \neq \tilde{s}(\tau^Y \mu)$, то ясно, что для некоторого A коммутативности нет. Достаточно взять одноэлементное множество A. Значит, если τ не постоянна, то коммутативности нет. Следовательно, τ постоянна и $\tau = \tilde{\delta}$, $\delta \in \Sigma_G$.

Докажем далее, что подстановка δ есть автоморфизм алгебры G, если имеет место коммутативность.

Пусть $\omega \in \Omega$ — n-арная операция, а $a_1, \ldots, a_n$ — элементы G. Проверим, что

$$\delta(a_1 \ldots a_n \omega) = (\delta a_1) \ldots (\delta a_n)\omega.$$

Возьмем $X = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$, $W = W(X)$ и $\mu : W \to G$ с условием $\mu(x_1) = a_1$, $\ldots$, $\mu(x_n) = a_n$. Рассмотрим также $s : W \to W$ с $sx = x_1 \ldots x_n \omega$. Коммутирование с s означает для $\tau = \tilde{\delta}$, что

$$\tau(\mu s) = \tau(\mu) \cdot s.$$

Для данного x имеем

$$\tau(\mu s)(x) = \tilde{\delta}(\mu s)(x) = \delta(\mu s)(x) = \delta(\mu s(x)) = \delta(\mu(x_1 \ldots x_n \omega)) = \delta(a_1 \ldots a_n \omega),$$
$$(\tau(\mu) \cdot s)(x) = \tau(\mu)(sx) = \tau(\mu)(x_1 \ldots x_n)\omega = (\tau\mu(x_1)) \ldots (\tau\mu(x_n))\omega = \delta(a_1) \ldots \delta(a_n)\omega.$$

Это завершает доказательство предложения 14. □

Вернемся к доказательству теоремы 7.

Пусть σ — автоморфизм алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Автоморфизм σ индуцирует автоморфизм каждой булевой алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), G)$. Таким образом, σ определяется перестановкой τ многосортного множества M с компонентами $M(X) = \mathrm{Hom}(W(X), G)$. Коммутирование с кванторами означает, что $\tau = \tilde{\zeta}$, тогда как коммутирование с операциями типа $s \in S_\Theta$ приводит к $\tau = \tilde{\delta}$, где δ — автоморфизм алгебры G. Легко видеть, что $\delta_* = \sigma$ для таких δ. Теорема 7 доказана. □

6.2. Основные результаты. Пусть задана модель (G, Φ, f). Группа автоморфизмов этой модели $\mathrm{Aut}(f)$ есть подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$. Как мы видели, $\mathrm{Aut}(G)$ действует на каждом множестве $\mathrm{Hom}(W(X), G)$. Группа $\mathrm{Aut}(f)$ также действует на этих множествах.

Теорема 8. *Каждое f-алгебраическое множество в $\mathrm{Hom}(W(X), G)$ инвариантно относительно действия группы $\mathrm{Aut}(f)$.*

Доказательство. Проверим, во-первых, что для каждой формулы $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$, каждой точки $\mu : W \to G$ и для каждого автоморфизма $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$ имеем

$$\mu \in \mathrm{Val}_f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \delta\mu \in \mathrm{Val}_f(u).$$

Назовем это свойство формулы u свойством корректности. Покажем, что каждая u корректна.

Хотя это и тривиально, приведем точное доказательство. Все атомные формулы корректны, и нетрудно видеть, что если u и v корректны, то $u \vee v$, $u \wedge v$, $\neg u$ также корректны. Пусть u корректна. Возьмем формулу $\exists x u$ для некоторого $x \in X$. Пусть $\mu \in \mathrm{Val}_f(\exists x u) = \exists x\, \mathrm{Val}_f(u)$. Можно взять точку $\nu : W \to G$ такую, что $\nu \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\mu(y) = \nu(y)$ для каждого $y \in X$, $y \neq x$. Рассмотрим теперь $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$. Имеем $\sigma\mu(y) = \delta\nu(y)$, $\delta\nu \in \mathrm{Val}_f(u)$. Значит, $\delta\mu \in \exists x\, \mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(\exists x u)$.

Обратно, пусть $\delta\mu \in \mathrm{Val}_f(\exists xu)$. Возьмем некоторое $\nu = \delta\nu_1 \in \mathrm{Val}_f(u)$ с $\nu(y) = \delta\nu_1(y) = \delta\mu(y)$, $y \neq x$. Тогда $\mu(y) = \nu_1(y)$, $\nu_1 \in \mathrm{Val}_f(u)$ и $\mu \in \exists x\,\mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(\exists xu)$.

Наконец, пусть $v = su$, где u имеет некоторый тип Y, корректна. Для данного $s : W(Y) \to W(X)$, получаем $\mathrm{Val}_f(v) = s\,\mathrm{Val}(u)$. Рассмотрим $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$; пусть $\mu \in \mathrm{Val}_f(v)$, $\mu \in s\,\mathrm{Val}_f(u)$, $\mu s \in \mathrm{Val}_f(u)$. По условию на u, имеем $\delta\mu s \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\delta\mu \in s\,\mathrm{Val}_f(u) = \mathrm{Val}_f(su) = \mathrm{Val}_f(v)$.

Пусть теперь заданы $\delta\mu \in \mathrm{Val}_f(v) = s\,\mathrm{Val}_f(u)$. Тогда $\delta\mu s \in \mathrm{Val}_f(u)$ и $\mu s \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\mu \in \mathrm{Val}_f(v)$.

Значит, все корректные формулы образуют подалгебру в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$. Эта подалгебра содержит множество образующих M, а потому все формулы в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ корректны.

Пусть теперь $A = T^f = \bigcap\limits_{u\in T} \mathrm{Val}_f(u)$ для некоторого T типа X, $\mu \in A$, $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$. Тогда для каждого $u \in T$ имеем $\mu \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\delta\mu \in \mathrm{Val}_f(u)$, $\delta\mu \in A$. Теорема доказана. □

Заметим, кроме того, что если множество A f-замкнуто и $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$, то $\delta_* A = \delta A = A$. В самом деле, можно утверждать, что если $\delta_* A = A$ для некоторых $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ и $A \subset \mathrm{Hom}(W(X), G)$, то существует модель (G, Φ, f) с некоторыми Φ and f такими, что $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$ и множество A f-замкнуто.

Докажем это утверждение. Рассмотрим $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть множество Φ состоит из одного n-арного соотношения φ. Рассмотрим формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и реализуем φ в G. Начнем со стандартной биекции $\pi : \mathrm{Hom}(W(X), G) \to G^{(n)}$, полагая $f(\varphi) = A^\pi \subset G^{(n)}$. Имеем $\mathrm{Val}_f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = A$ для таких f. Таким образом, A — f-алгебраическое множество. Условие $\delta A = A$ означает, что автоморфизм δ согласован с с интерпретацией f данного множества Φ, т.е. $\delta \in \mathrm{Aut}(f)$.

Сделаем несколько замечаний о предыдущем построении. Для данных модели (G_1, Φ, f) и изоморфизма алгебр $\delta : G_1 \to G_2$ рассмотрим другую модель (G_2, Φ, f^δ) с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) & \\ {\scriptstyle \mathrm{Val}_{f^\delta}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \mathrm{Val}_f} \\ \mathrm{Hal}_\Theta(G_2) & \xrightarrow{\delta_*} & \mathrm{Hal}_\Theta(G_1) \end{array}$$

Определим f^δ так, чтобы модели были бы изоморфными, а диаграмма — действительно коммутативной.

Возьмем формулу u типа X в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$. Должно выполняться равенство

$$\mathrm{Val}_f(u) = \delta_* \mathrm{Val}_{f^\delta}(u).$$

Пусть φ — n-арное отношение в Φ. Возьмем $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Перейдем к $\delta^{(n)} : G_1^{(n)} \to G_2^{(n)}$ и биекциям $\pi_1 : \mathrm{Hom}(W(X), G_1) \to G_1^{(n)}$ и $\pi_2 : \mathrm{Hom}(W(X), G_2) \to G_2^{(n)}$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(W(X), G_1) & \xrightarrow{\tilde\delta} & \mathrm{Hom}(W(X), G_2) \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ G_1^{(n)} & \xrightarrow{\delta^{(n)}} & G_2^{(n)} \end{array}$$

коммутативна.

Нужно найти $f^\delta(\varphi)$, удовлетворяющую уравнению $\mathrm{Val}_f(u) = \delta_* \mathrm{Val}_{f^\delta}(u)$ при $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим $A = \mathrm{Val}_f(u)$ и $B = \mathrm{Val}_{f^\alpha}(u)$. Тогда $A = \delta_* B$. Здесь $f(\varphi) = \pi_1^* A$ и $f^\delta(\varphi) = \pi_2^* B$. Имеем $\nu \in A$ в том и только том случае, если $\delta\nu \in B$; это дает, что $(a_1, \ldots, a_n) \in f(\varphi)$ в том и только том случае, если $(\delta a_1, \ldots, \delta a_n) \in f^\delta(\varphi)$. Последнее определяет модель (G_2, Φ, f^δ), изоморфную исходной модели (G_1, Φ, f) с помощью изоморфизма δ.

Можно проверить, что вторая модель и реализует коммутативную диаграмму.

Свяжем алгебраические множества для моделей f и f^δ. Пусть $A = T^f$, $B = T^{f^\delta}$ для некоторого $T \subset \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Тогда $A = \delta_* B$. В самом деле,

$$A = T^f = \bigcap_{u\in T} \mathrm{Val}_f(u) = \bigcap_{u\in T} \delta_* \mathrm{Val}_{f^\delta}(u) = \delta_* \left(\bigcap_{u\in T} \mathrm{Val}_{f^\delta}(u) \right) = \delta_* T^{f^\delta} = \delta_* B.$$

Заметим, что изоморфные модели геометрически эквивалентны. Это следует, например, из предложения 3. Следовательно, модели (G_1, Φ, f) и (G_2, Φ, f^δ) геометрически эквивалентны. Если $T = A^f$, то фильтр T одновременно f- и f^δ-замкнут. Для такого T имеем

$$T = A^f = (\delta_* B)^f = B^{f^\alpha} = T, \quad (\delta_* B)^f = B^{f^\delta}.$$

Теорию, рассматриваемую здесь, естественно назвать теорией Галуа—Краснера.

Алгебра $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ рассматривается вместе с ее группой автоморфизмов, представимой как $\mathrm{Aut}\, G$. Для любых $A \in \mathrm{Hal}_\Theta(G)$ и $\sigma \in \mathrm{Aut}\, G$ пишем σA вместо $\sigma_* A$. Дадим дальнейшие стандартные определения.

Пусть H — подмножество $\mathrm{Aut}\, G$. Тогда $R = H'$ есть подалгебра в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, состоящая из всех элементов A, для которых $\sigma A = A$ при всех $\sigma \in H$. Здесь $R = H'$ — на самом деле подалгебра многосортной алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ и для любого $X \in \Gamma^0$ соответствующая компонента $R(X)$ есть подалгебра кванторной X-алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), G)$. Алгебра $R(X)$ содержит все равенства типа X.

Пусть теперь R — (многосортное) подмножество $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Тогда $R' = A$ есть подгруппа в $\mathrm{Aut}(G)$, состоящая из всех $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, для которых $\sigma A = A$ при всех $A \in R$. Она на самом деле является подгруппой в $\mathrm{Aut}\, G$. Имеем соответствия Галуа и замыкания Галуа: $H'' = (H')'$ и $R'' = (R')'$. Подгруппа H замкнута, если $H'' = H$. Каждая замкнутая подалгебра R содержит все равенства в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Напомним, что равенство в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$ есть алгебраическое множество, определяемое уравнением типа $w \equiv w'$.

Теорема 9. *Для каждой модели (G, Φ, f) имеем*

$$R'_f = \mathrm{Aut}(f).$$

Доказательство. Из теоремы 8 следует, что выполнено включение $\mathrm{Aut}(f) \subset R'_f$. □

Пусть теперь $\sigma \in R'_f$. Это означает, что $\sigma A = A$ при любом $A \in R'_f$. Нужно показать, что автоморфизм σ алгебры G совместим с интерпретацией $f(\varphi)$ для произвольной $\varphi \in \Phi$.

Пусть соотношение φ n-арно. Возьмем $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и рассмотрим формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Возьмем $A = \mathrm{Val}_f(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$. Для биекции $\pi : \mathrm{Hom}(W(X), G) \to G^{(n)}$ имеем $A = \pi^{-1}(f(\varphi))$. Координация σ с $f(\varphi)$ равносильна условию $\sigma A = A$. Это условие выполняется, поскольку $A \in R_f$. Таким образом, $\sigma \in \mathrm{Aut}(f)$ и $R'_f = \mathrm{Aut}(f)$.

Нельзя утверждать, что $(\mathrm{Aut}(f))' = R_f$. В самом деле, в общем случае можно рассмотреть алгебраическое множество A, не являющееся простым, не определяемое одной формулой u и, следовательно, не принадлежащее алгебре R_f. Тем не менее, $\sigma A = A$ для всех $\sigma \in \mathrm{Aut}(f)$ согласно теореме 8. Таким образом, $R_f \subset \mathrm{Aut}(f)'$ и включение может быть строгим.

Сформулируем первую основную теорему.

Теорема 10. *Если алгебра G конечна, то каждая подгруппа в $\mathrm{Aut}(G)$ замкнута, а каждая подалгебра R в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, содержащая все равенства, также замкнута.*

Здесь имеется биекция между такими R и подгруппами в $\mathrm{Aut}(G)$. Доказательство этой теоремы будет дано в следующем пункте.

Теорема 11. *Если алгебра G конечна, то для любой модели (G, Φ, f) имеем*

$$\mathrm{Aut}(f)' = R_f.$$

Доказательство. Из теорем 9 и 10 следует, что

$$R''_f = R_f = (R'_f)' = \mathrm{Aut}(f)'.$$

Из теоремы 11 вытекает, что если алгебра G конечна, то каждое f-алгебраическое множество A для модели (G, Φ, f) есть простое алгебраическое множество.

Теперь можно установить, что алгебраические многообразия нетеровы. Это можно доказать непосредственно, если алгебра G конечна.

Рассмотрим вторую основную теорему Галуа.

Возьмем изоморфизм $\delta : G_2 \to G_1$ алгебр в Θ. Изоморфизм алгебр Халмоша

$$\delta_* : \mathrm{Hal}_\Theta(G_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$$

соответствует δ.

Группы $\mathrm{Aut}(G_1)$ и $\mathrm{Aut}(G_2)$ изоморфны. Их изоморфизм определяется с помощью $\sigma \to \delta\sigma\delta^{-1}$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G_2)$. Это дает $\mathrm{Aut}(G_2) \to \mathrm{Aut}(G_1)$.

Пусть теперь R_1 — подалгебра в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Имеем $\delta_*(R_1) = R_2$ в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$. Следовательно, R_1 и R_2 изоморфны. Непосредственно проверяется, что

$$R_1' = \delta R_2' \delta^{-1}(\delta_*(R_1))' = \delta^{-1} R_1' \delta.$$

В этом смысле подгруппы R_1' в $\mathrm{Aut}(G_1)$ и R_2' в $\mathrm{Aut}(G_2)$ сопрягаются изоморфизмом $\delta : G_2 \to G_1$. □

Теорема 12. *Если алгебры G_1 и G_2 конечны, R_1 — подалгебра в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_1)$, а R_2 — подалгебра в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$, то каждый изоморфизм $\gamma : R_1 \to R_2$ индуцируется изоморфизмом $\delta : G_2 \to G_1$. Имеем $\gamma = \delta_* : R_1 \to R_2$.*

6.3. Доказательства. Предположим, что конечная алгебра G рассматривается также как и подмножество X^0. Свободная в Θ алгебра $W(G)$ есть объект категории Θ^0. Рассмотрим аффинное пространство $\mathrm{Hom}(W(G), G)$ и кванторную G-алгебру $\mathrm{Bool}(W(G), G)$ как объект категории Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

Сделаем замечания относительно множества $\mathrm{Hom}(W(G), G)$ и алгебры $\mathrm{Bool}(W(G), G)$.

Имеем стандартную биекцию

$$\pi : \mathrm{Hom}(W(G), G) \to G^G,$$

где $\pi(\nu) : G \to G$ — сужение гомоморфизма ν на множество G.

Правая часть G^G есть полугруппа преобразований множества G. Продолжим умножение в этой полугруппе на левую часть. Если ν_1, ν_2 — два элемента $\mathrm{Hom}(W(G), G)$, то $\nu_1\nu_2 : W(G) \to G$ — гомоморфизм, определенный условием

$$\pi(\nu_1\nu_2) = \pi(\nu_1) \cdot \pi(\nu_2).$$

Тогда $\mathrm{Hom}(W(G), G)$ — полугруппа, изоморфная полугруппе G^G с помощью изоморфизма π.

Группа Σ_G есть группа всех подстановок множества G. Теперь ее можно представить как группу всех обратимых элементов в полугруппе $\mathrm{Hom}(W(G), G)$. Она есть подмножество $\mathrm{Hom}(W(G), G)$ и элемент $\mathrm{Bool}(W(G), G)$.

Пусть X — произвольное конечное множество в X^0. Рассмотрим отображение $\mu : X \to G$. Это отображение μ есть одновременно и отображение $\mu' : X \to W(G)$. Имеем гомоморфизмы $\overline{\mu} : W(X) \to G$ и $s : W(X) \to W(G)$, определенные соответственно μ и μ'. Так как на самом деле s определяется отображением $\mu : X \to G$, то пишем $s = s(\mu)$.

Применим эти обозначения к случаю, когда X совпадает с G. Рассмотрим два отображения σ_1 и $\sigma_2 : G \to G$. Имеем $\overline{\sigma_1\sigma_2} = \overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2$. Нас интересует произведение $\overline{\sigma}_1 \cdot s(\sigma_2)$. Легко видеть, что $\overline{\sigma}_1 \cdot s(\sigma_2) = \overline{\sigma_1\sigma_2}$.

Возьмем далее произвольную подалгебру R в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, содержащую равенства. Это означает, что R сохраняет операции типа s^*, сопряженные с операциями типа s_* (см. [12]).

Имеем $R(X) \subset \mathrm{Bool}(W(X), G)$ для каждого конечного $X \subset X^0$. Так как алгебра $R(X)$ конечна, то она имеет атомы. Каждый элемент из $R(X)$ есть сумма атомов и все такие атомы порождают алгебру R.

Атомы легко строятся. Пусть $\mu : W(X) \to G$ — точка пространства $\mathrm{Hom}(W(X), G)$. Это пространство есть единица в алгебре $\mathrm{Bool}(W(X), G)$ и, одновременно, единица в $R(X)$. Она содержит точку μ.

Обозначим через (μ) пересечение всех элементов алгебры $R(X)$, содержащих точку μ. Это пересечение (μ) есть атом в $R(X)$ и все атомы в $R(X)$ строятся таким образом.

Рассмотрим далее алгебру $R(G)$. Она является подалгеброй $\mathrm{Bool}(W(G), G)$. Возьмем единицу e полугруппы G^G. Точка $\overline{e} : W(G) \to G$, которая является единицей полугруппы $\mathrm{Hom}(W(G), G)$ соответствует этому e. Возьмем атом $(\overline{e})$ в $R(G)$, определенный $\overline{e}$. Обозначим $(\overline{e}) = H = H^R$.

Предложение 16. *Для каждой алгебры R подмножество H в $\mathrm{Hom}(W(G),G)$ есть подгруппа в группе Σ_G.*

Доказательство. Сделаем одно общее замечание. Пусть задан морфизм $s : W(X) \to W(Y)$. Если $A \in R(X)$, то $s_*A \subset R(Y)$ для данной алгебры R. Кроме того, известно, что если $A \in R(Y)$, то $s^*A \in R(X)$.

Возьмем теперь произвольное $\sigma : G \to G$. Имеем $\overline{\sigma} : W(G) \to G$ и $s = s(\sigma) : W(G) \to W(G)$. Возьмем далее $s^* : \mathrm{Bool}(W(G),G) \to \mathrm{Bool}(W(G),G)$. По построению, атом H есть элемент алгебры $\mathrm{Bool}(W(G),G)$. Возьмем s^*H. Он также является элементом $\mathrm{Bool}(W(G),G)$, состоящим из всех νs, $\nu \in H$. Элемент $\nu = \overline{e}$ содержится в H. Следовательно, $\overline{e}s(\sigma) = \overline{e\sigma} = \overline{\sigma} \in s^*H$.

Заметим также, что и H и s^*H принадлежат алгебре $R(G)$. Предположим, что $\overline{\sigma} \in H$. Тогда $\overline{\sigma} \in H \cap s^*H$. Это пересечение есть ненулевой элемент в $R(G)$. Так как H — атом, то $H \cap s^*H = H$, $H \subset s^*H$.

Предположим, что s^*H строго больше, чем H. Тогда имеет место нетривиальное разложение

$$s^*H = H \cup (\neg H \cap s^*H)).$$

Применим булев эндоморфизм s_*. Тогда

$$H \subset s_*(s^*H) = s_*H \cup s_*(\neg H \cap s^*H)).$$

Это дает разложение

$$H = (H \cap s_*(H)) \cup (H \cap s_*(\neg H \cap s^*H)).$$

Это разложение нетривиально (см. [12, с. 347]). Так как слагаемые лежат в $R(G)$, а H — атом, то это разложение невозможно. Следовательно, $H = s^*H$. Пусть теперь $\overline{\sigma}_1$ и $\overline{\sigma}_2$ — элементы H. Тогда

$$\overline{\sigma}_1 \cdot \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma_1\sigma_2} = \overline{s_1}s(\sigma_2) \in s^*H = H,$$

а множество H замкнуто относительно умножения. Кроме того, $\overline{e} = \overline{\sigma}_1 s(\sigma) = \overline{\sigma_1\sigma}$, так как $\overline{e} \in s^*H$. Это означает, что для каждого $\overline{\sigma} \in H$ существует обратный элемент $\overline{\sigma}_1 \in H$. Следовательно, все множество H есть подгруппа группы Σ_G. □

Предложение 17. *Пусть X — произвольное конечное множество в X^0, а A — атом булевой алгебры $R(X)$. Тогда существует отображение $\mu : X \to G$ такое, что выполнено $s^*H = A$ для $s = s(\mu) : W(X) \to W(G)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное μ с $\overline{\mu} \in A$. Рассмотрим $s = s(\mu)$ для такого μ. Проверим, что $s^*H = A$.

Рассмотрим $\overline{e} \in H$ и $\overline{e}s(\mu) = \overline{e\mu} = \overline{\mu} \in A$. Это же μ лежит также и в s^*H. Имеем $\overline{\mu} \in A \cap s^*H$. Обе компоненты лежат в $R(X)$, а $A \subset s^*H$, поскольку A — атом. Как и ранее, видим, что $A = s^*H$. □

Предложение 18. *Подгруппа H в Σ_G совпадает с подгруппой R' в $\mathrm{Aut}(G)$.*

Доказательство. Докажем, что если $\sigma : G \to G$ — подстановка, то $\overline{\sigma} \in H$ в том и только том случае, если σ есть автоморфизм алгебры G, принадлежащий подгруппе R'.

Пусть сначала $\sigma \in R'$. Возьмем точку $\overline{\sigma} : W(G) \to G$. Легко понять, что $\sigma\overline{\mu} = \overline{\sigma\mu}$ для каждого отображения $\mu : X \to G$. Если $X = G$, то

$$\sigma\overline{\mu} = \overline{\sigma\mu} = \overline{\sigma\mu}.$$

В частности $\sigma H = H$ для этого σ. Это означает, что $\sigma\nu \in H \Leftrightarrow \nu \in H$. Возьмем элемент $\overline{e}$ в H. Тогда $\sigma\overline{e} = \overline{\sigma e} = \overline{\sigma} \in H$. Таким образом, из $\sigma \in R'$ следует, что $\overline{\sigma} \in H$.

Докажем обратное. Для любых $A \subset \mathrm{Hom}(W(X),G)$ и $\sigma \in \Sigma_G$ определим $\tilde{\sigma}A$. Множество $\tilde{\sigma}A$ есть множество всех $\mu : W(X) \to G$, для которых $\tilde{\sigma}(\mu) = \nu \in A$. Здесь $\mu = \tilde{\sigma}^{-1}(\nu) \in \widetilde{\sigma^{-1}}^*A$. Если $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, то $\tilde{\sigma}A = \sigma A = (\sigma^{-1})^*A$.

Возьмем теперь $A = H$; пусть $\overline{\sigma}_1 \in H$. Проверим, что

$$\widetilde{\sigma^{-1}}(\overline{\sigma}_1) = \overline{\sigma^{-1}}\ \overline{\sigma_1} = \overline{\sigma^{-1}\sigma_1}.$$

Возьмем произвольное $g \in G$. Тогда

$$\widetilde{\sigma^{-1}}(\overline{\sigma}_1)(g) = \sigma^{-1}\sigma_1(g) = \overline{\sigma^{-1} \cdot \sigma_1}(g) = (\overline{\sigma^{-1}} \cdot \overline{\sigma}_1)(g).$$

Следовательно,

$$\widetilde{\sigma^{-1}}^* H = \overline{\sigma^{-1}} H.$$

В правой части имеем смежный класс по H с представителем $\overline{\sigma^{-1}}$. В частности, если $\overline{\sigma} \in H$, то $\widetilde{\sigma^{-1}}^* H = H = \tilde{\sigma} H$.

Покажем теперь, что $\tilde{\sigma} A = A$ для любого атома A в $R(X)$. Возьмем $\mu : X \to G$ с $\overline{\mu} \in A$; пусть $s = s(\mu)$. Тогда $A = s^* H$, $s(x) \in G$ для любого $x \in X$. Имеем

$$\tilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma^{-1}}^*(A) = \widetilde{\sigma^{-1}}^*(s^* H) = s^*(\widetilde{\sigma^{-1}}^* H) = s^*(H) = A$$

при $\sigma \in \Sigma_G$. Здесь использовалось то, что $\widetilde{\sigma^{-1}}(\nu s) = \widetilde{\sigma^{-1}}(\nu) \cdot s$ справедливо для любого $\nu \in H$. Таким образом, все атомы инвариантны относительно каждого $\tilde{\sigma}$ с $\overline{\sigma} \in H$. Но тогда все $A \in R$ также инвариантны над такими $\tilde{\sigma}$.

Покажем, что отсюда следует, что $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$.

Пусть $\omega \in \Omega$ — n-арная операция, $a_1, \ldots, a_n$ — элементы G, $\overline{\sigma} \in H$. Нужно проверить, что $(a_1 \ldots a_n \omega)^\sigma = a_1^\sigma \ldots a_n^\sigma \omega$. Возьмем переменные $\{x_1, \ldots, x_n, y\} \in X$ и начнем с равенства $x_1 \ldots x_n \omega \equiv y$. Это равенство типа X. Далее возьмем $\mu : W(X) \to G$ с условием $\mu(x_1) = a_1$, $\ldots$, $\mu(x_n) = a_n$ и $\mu(y) = b = a_1 \ldots a_n \omega$. Тогда $\mu \in \mathrm{Val}(x_1 \ldots x_n \omega = y) = A$. По условию, $A \in R(X)$, $\tilde{\sigma}(A) = A$. Таким образом, также и $\tilde{\sigma}(\mu) \in A$. Имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(\mu)(x_1 \ldots x_n \omega) &= (\tilde{\sigma}(\mu)(x_1)) \ldots (\tilde{\sigma}(\mu)(x_n))\omega \\
&= (\sigma\mu(x_1)) \ldots (\sigma\mu(x_n))\omega = (\sigma a_1) \ldots (\sigma a_n)\omega \\
&= \tilde{\sigma}(\mu)(y) = \sigma\mu(y) = \sigma b = \sigma(a_1 \ldots a_n \omega).
\end{aligned}$$

Следовательно, если $\tilde{\sigma} \in H$, то $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ и $\tilde{\sigma}(A) = \sigma(A) = A$ для любого $A \in R$, $\sigma \in R'$. □

Завершим доказательство теоремы 10.

Доказательство теоремы 10. Пусть R — подалгебра в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, содержащая равенства. Покажем, что $R'' = R$. Включение $R \subset R''$ всегда справедливо. Возьмем $H = R'$; пусть $\overline{H}$ — соответствующий атом в $R(G)$. Этот атом $\overline{H}$ порождает всю алгебру R. Имеем также, что $(R'')' = H$. Тогда алгебра R'' порождается тем же $\overline{H}$. Следовательно, $R'' = R$.

Пусть теперь H — подгруппа в $\mathrm{Aut}(G)$. Подмножество $\overline{H}$ в $\mathrm{Hom}(W(G), G)$, являющееся элементом $\mathrm{Bool}(W(G), G)$, соответствует H. Рассмотри м подалгебру R в $\mathrm{Hal}_\Theta(G)$, порожденную с помощью этого элемента. Проверяется, что $H = R' = \overline{H}'$. Отсюда следует, что $H' = R'' = R$ и $H'' = R' = H$. □

Перейдем к доказательству теоремы 12.

Доказательство теоремы 12. Пусть G_1 и G_2 — конечные алгебры в данном многообразии Θ. Предположим, что исходный универсум X^0 содержит множества G_1 и G_2, и рассмотрим алгебры Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(G_1)$ и $\mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$. Рассмотрим их вместе с группами автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G_1)$ и $\mathrm{Aut}(G_2)$. Возьмем подалгебры R_1 и R_2 в этих алгебрах соответственно, обе с равенствами. Предположим, что существует изоморфизм

$$\gamma : R_1 \to R_2.$$

Нужно построить изоморфизм $\delta : G_2 \to G_1$, индуцирующий γ. Возьмем группу $H_2 = R_2' \subset \mathrm{Aut}(G_2)$ по данному R_2. Как и ранее, рассмотрим множество $\overline{H}_2 \subset \mathrm{Hom}(W(G_2), G_2)$ в $R_2(G_2)$. Это множество — атом в $R_2(G_2)$ над единицей $\overline{e}$. Применим γ^{-1}. Тогда $A = \overline{H}_2^{\gamma^{-1}}$ является атомом в $R_1(G_2) = \mathrm{Bool}(W(G_2), G_1)$. Возьмем произвольное $\mu : W(G_2) \to G_2$ в этом непустом множестве A. Пусть $\delta : G_2 \to G_1$ — сужение μ на G_2.

Покажем, что каждый такой δ решает задачу.

Рассмотрим группу $H_1 = R_1'$ в $\mathrm{Aut}(G_1)$. Пусть $\overline{H}_1$ — соответствующий атом в $R_1(G_1)$. Имеем также атом A в $R_1(G_2)$. Как уже известно, $A = s^* \overline{H}_1 = H_2^{\gamma^{-1}}$. Возьмем $B = \overline{H}_1^{\gamma} = s_1^*(\overline{H}_2)$ по $\overline{H}_1$. Здесь $s_1 = s(\sigma)$ с $\sigma : G_1 \to G_2$ выбрано в B как δ в A.

Используя [12, с. 351], можно доказать, что $\delta : G_2 \to G_1$ есть биекция, так же как и $\sigma : G_1 \to G_2$. Доказывается также, что δ и σ — изоморфизмы алгебр [12, с. 356] и что $H_1 = \delta H_2 \delta^{-1}$ или, аналогично, $R_1' = \delta R_2' \delta^{-1}$. Это позволяет показать, что $\delta_* : \mathrm{Hal}_\Theta(G_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$ индуцирует изоморфизм $R_1 \to R_2$. Далее проверяется, что этот изоморфизм совпадает с исходным γ. Последнее достаточно проверить на множестве A, порождающем алгебру R_1. Равенство $\gamma(A) = \delta_*(A)$ следует из определения. □

7. Геометрические свойства моделей

7.1. Изоморфизмы категорий. Рассмотрим новую модель (G_1, Φ, f^δ) для данного изоморфизма $\delta : G_2 \to G_1$ и модель (G_1, Φ, f). Эта новая модель изоморфна исходной. Рассмотрим также коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) & \xrightarrow{\mathrm{Val}_f} & \mathrm{Hal}_\Theta(G_1) \\ & \searrow^{\mathrm{Val}_{f^\delta}} & \downarrow{\scriptstyle \delta_*} \\ & & \mathrm{Hal}_\Theta(G_2) \end{array}$$

Если $A = T^f$ — алгебраическое множество в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_1)$, то $\delta_* T^{f^\delta}$ — алгебраическое множество в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$. Следовательно, имеем биекцию между f-алгебраическими множествами в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_1)$ и f^δ-алгебраическими множествами в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$. Теперь можно говорить о коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) & \xrightarrow{\mathrm{Val}_f} & K_{\Phi\Theta}(f) \\ & \searrow^{\mathrm{Val}_{f^\delta}} & \downarrow{\scriptstyle \delta_*} \\ & & K_{\Phi\Theta}(f^\delta) \end{array}$$

Здесь биекция δ_* хорошо скоординирована с морфизмами категорий, а значит, является изоморфизмом категорий. Кроме того, δ_* индуцирует изоморфизм алгебр R_f и R_{f^δ}.

Нас интересует общая проблема об изоморфизме двух категорий типа $K_{\Phi\Theta}(f)$. Определим здесь *специальный* изоморфизм. Для моделей (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) это есть изоморфизм, определенный диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) & \xrightarrow{\mathrm{Val}_{f_1}} & K_{\Phi\Theta}(f_1) \\ & \searrow^{\mathrm{Val}_{f_2}} & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ & & K_{\Phi\Theta}(f_2) \end{array}$$

Здесь γ — изоморфизм категорий. Из определения следует, что тот же изоморфизм γ индуцирует изоморфизм алгебр R_{f_1} и R_{f_2}. Кроме того, $\gamma(T^{f_1}) = T^{f_2}$ для каждого $T \subset \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ определенного типа X.

Теорема 13. *Если алгебры G_1 и G_2 конечны, то категории $K_{\Phi\Theta}(f_1)$ и $K_{\Phi\Theta}(f_2)$ специально изоморфны в том и только том случае, если их модели изоморфны.*

Доказательство. Утверждение уже доказано в одну сторону. Пусть имеем специальный изоморфизм $\gamma : K_{\Phi\Theta}(f_1) \to K_{\Phi\Theta}(f_2)$. Покажем, что существует изоморфизм моделей $\delta : G_2 \to G_1, f_1 = f_2^\delta$ такой, что $\gamma = \delta_*$ на объектах категорий. Имеем изоморфизм $\gamma : R_{f_1} \to R_{f_2}$. В соответствии с теоремой 12, существует изоморфизм алгебр $\delta : G_2 \to G_1$ такой, что γ и δ_* совпадают на элементах R_{f_1}. Отсюда следует, что γ и δ_* совпадают на объектах категорий. Легко также видеть, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi) & \xrightarrow{\mathrm{Val}_{f_1}} & \mathrm{Hal}_\Theta(G_1) \\ & \searrow^{\mathrm{Val}_{f_2}} & \downarrow{\scriptstyle \delta_*} \\ & & \mathrm{Hal}_\Theta(G_2) \end{array}$$

Применяя замечания конца раздела 7, заключаем, что $f_1 = f_2^\delta$ и модели изоморфны.

Наряду со специальными изоморфизмами рассмотрим *строгие* изоморфизмы. Такой изоморфизм $\gamma : K_{\Phi_1\Theta}(f_1) \to K_{\Phi_2\Theta}(f_2)$ индуцирован изоморфизмом алгебр $R_{f_1} \to R_{f_2}$. Здесь Φ_1 и Φ_2, вообще

говоря, различны, а модели имеют вид (G_1, Φ_1, f_1) и (G_2, Φ_2, f_2). Не предполагается никаких связей с алгебрами формул. Здесь нельзя говорить об изоморфизме моделей; мы используем понятие автоморфного изоморфизма. □

Определение 3. Две модели (G_1, Φ_1, f_1) и (G_2, Φ_2, f_2) называются *автоморфно изоморфными*, если

1) алгебры G_1 и G_2 изоморфны;
2) существует изоморфизм алгебр $\delta : G_2 \to G_1$ с $\mathrm{Aut}(f_1) = \delta \,\mathrm{Aut}(f_2)\delta^{-1}$.

Здесь группы автоморфизмов моделей сопряжены.

Если, в частности, модели изоморфны, $\Phi_1 = \Phi_2$, то они автоморфно изоморфны.

Теорема 14. *Для конечных алгебр G_1 и G_2 категории $K_{\Phi_1\Theta}(f_1)$ и $K_{\Phi_1\Theta}(f_2)$ строго изоморфны в том и только том случае, если их модели автоморфно изоморфны.*

Доказательство. Пусть задан строгий изоморфизм

$$\gamma : K_{\Phi_1\Theta}(f_1) \to K_{\Phi_2\Theta}(f_2).$$

По условию, γ индуцирует изоморфизм алгебр $\gamma : R_{f_1} \to R_{f_2}$. Снова согласно теореме 12 имеем изоморфизм $\delta : G_2 \to G_1$ такой, что δ_* индуцирует γ. Здесь $R_{f_2} = \delta_*(R_{f_1})$. Это, в свою очередь, дает $R'_{f_1} = \delta R'_{f_2}\delta^{-1}$. Но из теоремы 9 вытекает, что $R'_{f_1} = \mathrm{Aut}(f_2)$, $R'_{f_2} = \mathrm{Aut}(f_2)$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(f_1)$ и $\mathrm{Aut}(f_2)$ сопряжены изоморфизмом $\delta : G_2 \to G_1$. Итак, доказано, что модели автоморфно изоморфны.

Докажем обратное. Пусть модели (G_1, Φ_1, f_1) и (G_2, Φ_2, f_2) автоморфно изоморфны с изоморфизмом алгебр $\delta : G_2 \to G_1$. Имеем изоморфизм $\delta_* : \mathrm{Hal}_\Theta(G_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$. Имеем подалгебры R_{f_1} в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_1)$ и R_{f_2} в $\mathrm{Hal}_\Theta(G_2)$. Здесь $R'_{f_1} = \mathrm{Aut}(f_1)$ и $R'_{f_2} = \mathrm{Aut}(f_2)$. По условию, имеем $R'_{f_1} = \delta R'_{f_2}\delta^{-1}$. Это означает, что $\delta_*(R_{f_1}) = R_{f_2}$. В самом деле, $(\delta_*(R_{f_1}))' = \delta^{-1}R'_{f_1}\delta = R'_{f_2}$. Следовательно, $\delta_*(R_{f_1}) = R_{f_2}$ и $\delta_*(R)' = \delta^{-1}R'\delta$. Это справедливо всегда. Далее, δ_* индуцирует изоморфизм $R_{f_1} \to R_{f_2}$.

Пусть теперь $A \in R_{f_1}$. Тогда $A = \mathrm{Val}_{f_1}(u)$ для некоторого $u \in \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1)$, $\delta_*(A) = B \in R_{f_2}$, $B = \mathrm{Val}_{f_2}(v)$, $v \in \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)$. Здесь u и v имеют один и тот же тип X. Имеем $\delta_* \mathrm{Val}_{f_1}(u) = \mathrm{Val}_{f_2}(v)$.

Пусть далее A — объект категории $K_{\Phi_1\Theta}(f_1)$, $A = T^{f_1}$, где T — набор формул в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$, а T имеет тип X. Имеем

$$A = \bigcap_{u \in T} \mathrm{Val}_{f_1}(u).$$

Кроме того,

$$\delta_*(A) = \bigcap_{u \in T} \delta_* \mathrm{Val}_{f_1}(u) = \bigcap_{v \in T^*} \mathrm{Val}_{f_2}(v).$$

Здесь T^* — набор формул v в $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)$ типа X, некоторым образом связанных с набором T. В любом случае можно утверждать, что $\delta_* A$, так же как и A, есть алгебраическое множество. Это означает, что существует биекция на объекты $K_{\Phi_1\Theta}(f_1) \to K_{\Phi_2\Theta}(f_2)$. Пусть теперь $s : A_1 \to A_2$ — морфизм в $K_{\Phi,\Theta}(f_1)$. Имеем $A_1 \subset sA_2$. Но тогда $\delta_*(A_1) \subset \delta_*(sA_2) = s\delta_* A_2$. Следовательно, этот же s дает морфизм $s : \delta_*(A_1) \to \delta_*(A_2)$. Значит, обратное тоже верно. Таким образом, имеем изоморфизм категорий $\delta_* : K_{\Phi,\Theta}(f_1) \to K_{\Phi_2\Theta}(f_2)$, причем этот изоморфизм строгий. Это завершает доказательство теоремы 14. □

7.2. Замечание о категориях $K_{\Phi\Theta}(G)$. Здесь G — произвольная алгебра в Θ. Напомним, что объекты этой категории имеют вид (X, A, f), где f — интерпретация заданного множества Φ в алгебре G.

Рассмотрим $K_{\Phi\Theta}(G_1)$ и $K_{\Phi\Theta}(G_2)$, когда задан изоморфизм $\delta : G_1 \to G_2$. Модели (G_1, Φ, f) соответствует модель (G_2, Φ, f^δ). Одновременно, объекту (X, A, f) соответствует объект $(X, \delta_*(A), f^\delta)$. Это дает изоморфизм категорий

$$K_{\Phi\Theta}(G_1) \to K_{\Phi\Theta}(G_2).$$

Далее, если $\delta : G \to G$ — автоморфизм алгебр, то автоморфизм категорий $K_{\Phi\Theta}(G)$ соответствует δ. Это приводит к представлению

$$\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(K_{\Phi\Theta}(G)),$$

которое естественным образом связано с представлением

$$\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Hal}_{\Theta}(G)).$$

7.3. Геометрические свойства.

Определение 4. Модель (G, Φ, f) называется *геометрически нетеровой*, если для каждого конечного множества X и каждого множества формул T в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$ существует конечная часть $T_0 \subset T$ с $T_0^f = T^f$. Это означает, что $T_0^{ff} = T^{ff}$.

Теорема 15. *Модель (G, Φ, f) геометрически нетерова в том и только том случае, если выполнено условие минимальности в решетке $\mathrm{Alv}_f(X)$. Соответственно, в решетке $\mathrm{Cl}_f(X)$ имеем условие максимальности.*

Пусть теперь $T_0 = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$. Тогда $T_0^f = \mathrm{Val}_f(u) = \{u\}^f$. Таким образом, можно утверждать, что если модель (G, Φ, f) геометрически нетерова, то каждое алгебраическое множество над этой моделью есть простое алгебраическое множество.

Тем не менее, соответствующий элемент $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ не обязательно принадлежит исходному множеству T. Назовем модель (G, Φ, f) *слабо геометрически нетеровой*, если каждое алгебраическое множество над ней есть простое алгебраическое множество. Слабо нетеровы модели не обязательно геометрически нетеровы.

Можно утверждать, что каждая конечная модель геометрически нетерова (ср. с теоремой 8 в теории Галуа). Можно также утверждать, что любое декартово произведение геометрически нетеровых моделей есть также геометрически нетерова модель. Подмодель геометрически нетеровой модели также геометрически нетерова.

Аналогичные свойства, вообще говоря, не верны для декартовых степеней.

Перейдем к понятию геометрической эквивалентности моделей. Пусть заданы две модели (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) с одним и тем же Φ.

Определение 5. Две модели (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) геометрически эквивалентны, если выполнено $T^{f_1 f_1} = T^{f_2 f_2}$ для каждого конечного X и каждого T из $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Если модели (G_1, Φ, f_1) и (G_2, Φ, f_2) геометрически эквивалентны, то

1) решетки $\mathrm{Cl}_{f_1}(X)$ и $\mathrm{Cl}_{f_2}(X)$ совпадают, тогда как решетки $\mathrm{Alv}_{f_1}(X)$ и $\mathrm{Alv}_{f_2}(X)$ изоморфны;
2) категории $C_{\Phi\Theta}(f_1)$ и $C_{\Phi\Theta}(f_2)$ совпадают, тогда как категории $K_{\Phi\Theta}(f_1)$ и $K_{\Phi\Theta}(f_2)$ изоморфны;
3) эти модели элементарно эквивалентны.

Из первого утверждения следует, что если модели геометрически эквивалентны и одна из них геометрически нетерова, то и вторая также геометрически нетерова.

Теорема 16. *Пусть модель (G, Φ, f) геометрически нетерова. Тогда каждая ее ультрастепень также геометрически нетерова, а все эти ультрастепени геометрически эквивалентны исходной модели (G, Φ, f).*

Все описанные понятия естественным образом связаны с логикой обобщенных (инфинитных) формул рода $(\wedge_{u \in T}) \to v$, или, что то же самое, $T \to v$. Для геометрически нетеровых формул достаточно исходить из обычных конечных формул.

Вообще говоря, из элементарной эквивалентности моделей не следует их геометрическая эквивалентность. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 17. *Если две модели элементарно эквивалентны и одна из них геометрически нетерова, то вторая также геометрически нетерова и эти модели геометрически эквивалентны.*

В связи с понятием геометрически нетеровой модели вернемся к понятию логического ядра гомоморфизма вида $\mu : W(X) \to G$. Легко видеть, что если $\mathrm{Log}_f \mathrm{Ker}(\mu)$ — такое ядро и $\mathrm{Val}_f(\mathrm{Log}_f \mathrm{Ker}(\mu))$ — его образ в алгебре $R_f(X)$, то этот образ есть главный ультрафильтр, если

модель (G, Φ, f) геометрически нетерова. Этот ультрафильтр порожден алгебраическим множеством $\{\mu\}^{ff}$.

8. Приложения к науке о знаниях

8.1. Введение. Теория знаний и базы знаний дают важный пример области, в которой весьма естественны приложения универсальной алгебры и алгебраической логики, а их взаимодействие с достаточно практическими задачами, возникающими в компьютерных науках, очень продуктивно. Другие примеры такого взаимодействия даются теорией реляционных баз данных, задаче о соблюдении ограничений [3, 7], теорией сложности и др.

Можно говорить о знании и системе знаний. Как правило, область знания или системы знаний фиксирована. При нашем подходе рассматривается только знание, допускающее формализацию в некоторой логике. Логика может быть разной; она часто ориентирована на соответствующую область знания (см. [4, 9, 18]).

В этой статье внимание будет сосредоточено на специальной ситуации элементарного знания.

Элементарное знание рассматривается как знание первого порядка, т.е. как знание, представимое с помощи логики первого порядка (ЛПП). Соответствующая прикладная область (область знания) основана на некотором многообразии алгебр Θ, которое произольно, но фиксировано. Это многообразие Θ рассматривается как тип знания. Его отражением в теории баз данных является понятие типа данных Θ.

Фиксируем также множество символов соотношений Φ. Предмет знания — это тройка (G, Φ, f), где G — алгебра в Θ, а f — интерпретация множества Φ в G. Это есть модель в обычном математическом смысле. Как правило, используем сокращение и пишем f вместо (G, Φ, f). Для данного Φ обозначим соответствующую прикладную область через $\Phi\Theta$.

Логика первого порядка также ориентирована на многообразие Θ.

Предполагается, что каждое рассматриваемое знание представляется следующими тремя компонентами.

1) *Описание знания* — синтаксическая часть знания, написанная на языке данной логики. Описание отражает, что хотим мы знать.
2) *Предмет знания*, который является объектом данной прикладной области, т.е. объектом, для которого определяется знание.
3) *Содержание знания*, его семантика.

Первые две компоненты относительно независимы, тогда как третья однозначно определяется первыми двумя. В рассматриваемой теории эта третья компонента имеет геометрическую природу. В некотором смысле она представляет собой алгебраическое множество в аффинном пространстве. Если T — описание знания, а (G, Φ, f) — его предмет, то T^f обозначает содержание знания. Содержание будет снабжаться его собственной структурой, алгебраической или геометрической, и будут рассматриваться некоторые аспекты такой структуры.

Подчеркнем, что имеются три аспекта в рассматриваемом подходе к представлению знаний: логический (для описания знаний), алгебраический (для предмета знания) и геометрический (в содержании знания). Эта геометрия имеет алгебраическую природу. Тем не менее, соответствующая алгебра наследует некоторую геометрическую интуицию.

Рассмотрим категории элементарных знаний. Язык категорий в теории знаний — хороший путь для организации и систематизации первичных элементарных знаний. Морфизмы в категории знаний устанавливают связь между знаниями. В частности, можно говорить об изоморфных знаниях. Категорный подход также позволяет использовать идеи монады и комонады [10]. Оказывается, что это приводит к некоторым общим взглядам на обогащение и вычисление знаний. Обогащение структуры можно ассоциировать с подходящей монадой над категорией, тогда как соответствующее вычисление организуется комонадой.

Сделаем еще одно замечание. В каждой хорошо описанной области знаний можно изучать категорию элементарных знаний, принадлежащих этой области. Рассмотрение таких категорий может представлять специальный интерес.

8.2. Категория знаний. Определим сначала категорию $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(f)$. Фиксируем модель (предмет знаний) (G, Φ, f). Определим категорию знаний для этой модели и обозначим ее через $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(f)$. Это есть категория знаний для данного предмета знаний. Поскольку модель фиксирована, объекты категории Knowf должны иметь вид (X, T, A). Объект знания не фиксируется в обозначении объекта, поскольку он зафиксирован в обозначении категории.

Множество X многосортное. Оно отмечает «место», в котором расположено знание. Множество X также указывает «место знаний», т.е. пространство знаний $\mathrm{Hom}(W(X), G)$, когда задан предмет знаний (G, Φ, f). Множество T есть описание знаний в алгебре $\mathrm{Hal}_\Theta(X)$, а $A = T^f$ есть содержание знаний, зависящее от T и f. Множество $T^{ff} = A^f$ есть полное описание знаний (X, T, A) и является булевым фильтром в $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$.

Теперь о морфизмах $(X, T_1, A) \to (Y, T_2, B)$. Возьмем $s : W(Y) \to W(X)$. Имеем также $s : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$ (см. п. 2.2). Это гомоморфизм булевых алгебр. Гомоморфизм s приводит к

$$\tilde{s} : \mathrm{Hom}(W(X), G) \to \mathrm{Hom}(W(Y), G).$$

Как и выше, s допусти́м для A и B, если $\tilde{s}(\nu) = \nu s \in B$ для каждой точки $\nu : W(X) \to G$ в A.

Как мы знаем, s допусти́м для A и B в том и только том случае, если $su \in A^f$ для каждого $u \in B^f$. Это выполняется для s_*, для которого также имеется гомоморфизм

$$\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^f \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f.$$

Легко доказать, что s допусти́м для A и B в том и только том случае, если $su \in A^f$ для каждого $u \in T_2$. Рассмотрим допустимый s как морфизм

$$s : (X, T_1, A) \to (Y, T_2, B),$$

в слабой категории Knowf.

Имеем $\tilde{s}(\nu) = \nu s \in B$, если $\nu \in A$ и s индуцирует отображение $[s] : A \to B$. Одновременно с этим существуют отображение $s : T_2 \to A^f$ и гомоморфизм

$$\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^f \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^f.$$

Уже говорилось (предложение 2), что $\overline{s}_1 = \overline{s}_2$ следует из $[s_1] = [s_2]$. Таким образом, можно взять морфизм вида

$$[s] : (X, T_1, A) \to (Y, T_2, B)$$

для морфизмов точной категории Knowf. Канонические функторы $\mathrm{Knowf} \to K_{\Phi\Theta}(f)$ для слабой и точной категорий задаются переходом $(X, T, A) \to (X, A)$. В этом переходе «забывается» зафиксировать описание знаний T.

Определим теперь категорию $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}$. Определим категорию элементарных знаний для всей прикладной области $\Phi\Theta$; предмет знаний (G, Φ, f) не фиксирован. Как и ранее, начнем с категории $\Phi\Theta$, морфизмы которой суть гомоморфизмы в Θ. Они игнорируют соотношения из Φ.

Объект категории знаний Know имеет вид

$$(X, T, A; (G, \Phi, f));$$

пишем $(X, T, A; G, f)$, потому что Φ фиксировано для этой категории. Здесь X отмечает место знаний. Компоненты $A = T^f$, G и f могут меняться.

Рассмотрим морфизмы

$$(X, T_1, A; G_1, f_1) \to (Y, T_2, B; G_2, f_2).$$

Применим тот же подход, что и в п. 3.2 с некоторыми модификациями.

Начнем с $s : W(Y) \to W(X)$ и $\delta : G_1 \to G_2$. Эти s и δ должны быть скоррелированы. Объясним условие корреляции. Возьмем множество $A_1 = \{\delta\nu, \nu \in A\} = \delta^* A$, а далее — $T_1^\delta = A_1^{f_2}$. Корреляция s и δ означает, что выполняется $su \in T_1^\delta$ для любого $u \in T_2$. Это же справедливо и для любого $u \in B^{f_2}$. Последнее означает также, что существует гомоморфизм

$$\overline{s} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^{f_2} \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A_1^{f_2}.$$

Первое из двух отображений $(s,\delta): A \to B$ и $s: T_2 \to T_1^\delta$ преобразует содержание знаний, тогда как второе действует на описание. Здесь T_2 и T_1^δ описывают знания, ассоциированные с тем же предметом (G_2, Φ, f_2).

Наряду с фиксированным δ существует и точное отображение $([s],\delta): A \to B$. Это приводит к слабой и сильной категориям Know. Морфизмы первой — это (s,δ), а во второй они имеют вид $([s],\delta)$ для $(X, T_1, A; G_2, f_1) \to (Y, T_2, B; G_2, f_2)$. Канонические функторы $\mathrm{Know} \to K_{\Phi\Theta}$ определяются переходом

$$(X, T, A; G, f) \to (X, A; G, f).$$

Как и выше, описание знаний опускается в обозначениях.

Для данных алгебр G in Θ рассмотрим категории $K_{\Phi\Theta}(G)$ и $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(G)$.

Алгебра $G \in \Theta$ фиксирована в категориях $K_{\Phi\Theta}(G)$ и $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(G)$. Множество символов соотношений Φ, как обычно, фиксировано, но интерпретации f для Φ в G могут меняться. Таким образом, $K_{\Phi\Theta}(G)$ — подкатегория в $K_{\Phi\Theta}$, а $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(G)$ — подкатегория в $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}$. Здесь соответствующие $\delta: G \to G$ — тождественные гомоморфизмы. Объекты этой категории $K_{\Phi\Theta}(G)$ имеют вид (X, A, f), а объекты категории $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(G)$ записываются как (X, T, A, f). Имеется канонический функтор $\mathrm{Know}_{\Phi\Theta}(G) \to K_{\Phi\Theta}(G)$. Что же касается морфизмов $(X, A, f_1) \to (Y, B, f_2)$, $(X, T_1, A, f_1) \to (Y, T_2, B, f_2)$, то заметим, что $A = A_1, A_1^{f_2} = T_1^\delta$ и $A^{f_2} = T_1^{f_1 f_2}$. Следовательно, соответствующий допустимый гомоморфизм $s: W(Y) \to W(X)$ переводит каждый $u \in T_2$ в $su \in T_1^{f_1 f_2}$ и индуцирует гомоморфизм

$$\overline{s}: \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)/B^{f_2} \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)/A^{f_2}.$$

Любой гомоморфизм s дает отображение $[s]: A \to B$. Это приводит к морфизму $(X, A, f_1) \to (Y, B, f_2)$.

8.3. Категория описания знаний (категория $L_\Theta(\Phi)$). Обозначим категорию описания знаний через $L_{\Phi\Theta}$ или $L_\Theta(\Phi)$. Ее объекты имеют вид (X, T), где X — конечное множество, а T — множество формул $\mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X)$. Определим морфизмы $(X, T_1) \to (X, T_2)$. В соответствии с описанием категории $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ начнем с функтора $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$, который ставит в соответствие отображение $s_*: \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y)$ каждому гомоморфизму $s: W(X) \to W(Y)$. Скажем, что гомоморфизм s *допустим относительно* T_1 *и* T_2, если $s_*(u) \in T_2$ для любого $u \in T_1$. Для такого допустимого s имеем отображение $s_*: T_1 \to T_2$, которое определяет

$$s_*: (X, T_1) \to (X, T_2).$$

8.4. Функтор перехода от описания знаний к содержанию знаний (функтор Ct_f). Начнем с модели (G, Φ, f) и рассмотрим функтор

$$\mathrm{Ct}_f: L_{\Phi\Theta} \to K_{\Phi\Theta}(f).$$

Здесь $K_{\Phi\Theta}(f)$ — соответствующая категория алгебраических (элементарных) множеств над данной моделью, а Ct обозначает «содержание». Функтор Ct_f — контравариантный. Каждому объекту (X, T) категории $L_{\Phi\Theta}$ он ставит в соответствие содержание $(X, T^f) = (X, A)$ — объект категории $K_{\Phi\Theta}(f)$.

Теперь нужно определить функтор Ct_f на морфизмах. Пусть задан морфизм

$$s_*: (Y, T_2) \to (X, T_1)$$

для $s: W(Y) \to W(X)$. Покажем, что s индуцирует морфизм

$$\widetilde{s_*}: (X, A) \to (Y, B),$$

где $A = T_1^f$, $B = T_2^f$.

Начнем с $\widetilde{s}: \mathrm{Hom}(W(X), G) \to \mathrm{Hom}(W(Y), G)$. Определим переход $s \to \widetilde{s}$. Проверим, во-первых, что если s допустим для T_2 и T_1, то s допустим для $A = T_1^f$ и $B = T_2^f$. Последнее означает, что $\widetilde{s}(\nu) \in B$, если $\nu \in A$. Включение $\nu \in A$ означает, что $\nu \in \mathrm{Val}_f(v)$ для каждого $v \in T_1$. Нужно проверить, что $\nu s \in B$, т.е. что $\nu s \in \mathrm{Val}_f(u)$ для любого $u \in T_2$.

Возьмем произвольный $u \in T_2$. Имеем $v = s_*(u) \in T_1$; $\nu \in \mathrm{Val}_f(v) = \mathrm{Val}_f(s_*u) = s\,\mathrm{Val}_f(u)$. Это дает $\nu s \in \mathrm{Val}_f(u)$. Здесь использован тот факт, что s и Val_f коммутируют, поскольку Val_f — гомоморфизм алгебр.

Отображение $[s] : A \to B$ соответствует гомоморфизму $s : W(Y) \to W(X)$. Это отображение рассматривается одновременно и как морфизм категории $K_{\Phi\Theta}(f)$ (см. п. 3.2):

$$[s] : (X, A) \to (Y, B).$$

Положим $\mathrm{Ct}_f(s_*) = \widetilde{s}_* = [s]$.

Проверим теперь совместимость определения Ct_f с умножением морфизмов. Для заданных $s_1 : W(X) \to W(Y)$ и $s_2 : W(Y) \to W(Z)$ имеем $s_2 s_1 : W(X) \to W(Z)$. Используя тот факт, что переход $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ является функтором, получаем $(s_2 s_1)_* = s_{2*} s_{1*}$. Здесь имеем

$$s_{1*} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y), \quad s_{2*} : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Y) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z), \quad (s_2 s_1)_* : \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(X) \to \mathrm{Hal}_{\Phi\Theta}(Z).$$

Пусть (X, T_1), (Y, T_2) и (Z, T_3) — объекты $L_\Theta(\Phi)$, а s_1, s_2 допустимы относительно T_1, T_2 и, соответственно, для T_2, T_3. В этом случае существуют морфизмы

$$s_{1*} : (X, T_1) \to (Y, T_2), \quad s_{2*} : (Y, T_2) \to (Z, T_3), \quad s_{2*} s_{1*} = (s_2 s_1)_* : (X, T_1) \to (Z, T_3).$$

Возьмем $T_1^f = A$, $T_2^f = B$, $T_3^f = C$. Имеем

$$\widetilde{s_{1*}} : (Y, B) \to (X, A), \quad \widetilde{s_{2*}} : (Z, C) \to (Y, B), \quad \widetilde{s_{2*} s_{1*}} = \widetilde{s_{1*}}\,\widetilde{s_{2*}} : (Z, C) \to (X, A).$$

Это дает совместимость функтора Ct_f с умножением морфизмов. Совместимость с тождественным морфизмом очевидна. Это завершает описание контравариантного функтора $\mathrm{Ct}_f : L_{\Phi\Theta} \to K_{\Phi\Theta}(f)$.

8.5. Гомоморфизмы алгебр Халмоша $\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ и функторы категорий $L_\Theta(\Phi)$. Для данного гомоморфизма $\beta : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)$ определим соответствующий функтор $\widetilde{\beta} : L_\Theta(\Phi_1) \to L_\Theta(\Phi_2)$. Для каждого множества формул $T \subset \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X)$ обозначим через T^β множество $T^\beta = \{u^\beta, u \in T\}$. Если (X, T) — объект в $L_\Theta(\Phi_1)$, то, полагая

$$\widetilde{\beta}(X, T) = (X, T^\beta),$$

получаем объект в $L_\Theta(\Phi_2)$.

Для определения функтора $\widetilde{\beta}$ на морфизмах сделаем одно замечание. Начнем с функторов $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1)$ и $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)$. Морфизмы

$$s_*^1 : \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X) \to \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(Y), \quad s_*^2 : \mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(X) \to \mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(Y)$$

соответствуют каждому $s : W(X) \to W(Y)$. Имеем также

$$\beta = (\beta_X, X \in \Gamma^0) : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2).$$

Тот факт, что гомоморфизм β совместим с операцией s, представляется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X) & \xrightarrow{s_*^1} & \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_X} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_Y} \\ \mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(X) & \xrightarrow{s_*^2} & \mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(Y) \end{array}$$

Поэтому для гомоморфизма $s : W(X) \to W(Y)$ имеем равенство $\beta_Y s_*^1(u) = s_*^2 \beta_X(u)$ для любого $u \in \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X)$.

Теперь можно определить действие функтора $\widetilde{\beta}$ на морфизмах. Пусть задан морфизм $s_*^1 : (X, T_1) \to (Y, T_2)$ категории $L_{\Phi_1\Theta}$ и пусть $s_*^1(u) \in T_2$, если $u \in T_1$. Тогда $s_*^2(v) \in T_2^\beta$, если $v \in T_1^\beta$.

В самом деле, пусть $v = \beta_X(u)$, $u \in T_1$, $v \in T_1^{\beta_X}$. Имеем

$$s_*^2 \beta_X(u) = s_*^2(v) = \beta_Y s_*^1(u) \in T_2^{\beta_Y},$$

поскольку $s_*^1(u) \in T_2$. Следовательно, $s_*^2(v) \in T_2^{\beta_Y}$ для любого $v = \beta_X(u) \in T_1^{\beta_X}$.

Положим $s_*^2 = \widetilde{\beta}(s_*^1) : T_1^{\beta_X} \to T_2^{\beta_Y}$. Морфизм

$$s_*^2 = \widetilde{\beta}(s_*^1) : (X, T_1^{\beta_X}) \to (Y, T_2^{\beta_Y})$$

соответствует $s^1_* : (X, T_1) \to (Y, T_2)$.

Проверим теперь совместимость перехода $s^1_* \to s^2_*$ с умножением морфизмов. Для $s_1 : W(X) \to W(Y)$ и $s_2 : W(Y) \to W(Z)$ имеем $s_2 s_1 : W(X) \to W(Z)$. Используя еще раз тот факт, что переход $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)$ — функтор, получаем

$$(s^1_2 s^1_1)_* = s^1_{2*} s^1_{1*}, \quad (s^2_2 s^2_1)_* = s^2_{2*} s^2_{1*}.$$

Применим $\widetilde{\beta}$. Нужно проверить, что $\widetilde{\beta}(s^1_{2*} s^1_{1*}) = \widetilde{\beta}(s^1_{2*})\widetilde{\beta}(s^1_{1*})$. Имеем

$$\widetilde{\beta}(s^1_{2*} s^1_{1*}) = \widetilde{\beta}(s^1_2 s^1_1)_* = (s^2_2 s^2_1)_* = s^2_{2*} s^2_{1*} = \widetilde{\beta}(s^1_{2*})\widetilde{\beta}(s^1_{1*}).$$

Это дает совместимость с умножением, также как и с единицей. Следовательно, имеем функтор $\widetilde{\beta} : L_\Theta(\Phi_1) \to L_\Theta(\Phi_2)$.

8.6. Базы данных. Начнем с кратной модели (G, Φ, F). Кратная модель (G, Φ, F) определяет систему моделей $(G, \Phi, f,)$ где f пробегает множество F. Здесь G — алгебра в Θ, а Φ — множество соотношений. Напомним, что и алгебра $G \in \Theta$, и соотношение $f \in F$ многосортные. Множество F есть множество примеров f, где f — интерпретация множества Φ в G.

Каждой такой кратной модели соответствует база знаний $KB = KB(G, \Phi, F)$. Это определение слегка отличается от определения, данного в [16].

Определение 6. База знаний $KB = KB(G, \Phi, F)$ состоит из двух категорий. Первая есть категория описания знаний $L_\Theta(\Phi)$, а вторая — категория содержания знаний $K_{\Phi\Theta}(f)$. Эти две категории связаны функтором

$$\mathrm{Ct}_f : L_\Theta(\Phi) \to K_{\Phi\Theta}(f).$$

Этот функтор Ct_f преобразует описание знаний в содержание знаний. Не предполагается никаких связей между f_1 и f_2 в F: примеры независимы. С другой стороны, между f_1 и f_2 могут быть связи, которые нужно попытаться учесть.

Содержание знаний $\mathrm{Ct}_f(X, T) = (X, T^f)$ соответствует объекту (X, T) категории $L_\Theta(\Phi)$, который есть описание знаний. Описание T рассматривается как *обращение* к базе знаний, а $A = T^f$ — как *ответ на это обращение*.

Кроме того, если существует соотношение s_* между (X, T_1) и (Y, T_2), то должно быть соотношение $\widetilde{s} = \widetilde{s_*}$ между (X, A) и (Y, B), где $A = T^f_1$, $B = T^f_2$. Эта особенность определения естественно отражает геометрическую сущность знания.

На самом деле в этом определении базы знаний категория знаний распадается на две категории: категорию описания знаний и категорию содержания знаний, связанные функтором перехода от описания к содержанию.

9. Эквивалентность баз знаний

9.1. Определения. Пусть базы знаний $KB_1 = KB(G_1, \Phi_1, F_1)$ и $KB_2 = KB(G_2, \Phi_2, F_2)$ соответствуют данным кратным моделям (G_1, Φ_1, F_1) и (G_2, Φ_2, F_2).

Определение 7. Базы знаний KB_1 и KB_2 называются информативно эквивалентными, если существует биекция $\alpha : F_1 \to F_2$ такая, что для каждого $f \in F_1$ существуют гомоморфизмы

$$\beta_f : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2) \quad \beta'_f : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2) \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1)$$

и изоморфизм категорий

$$\widetilde{\gamma}_f : K_{\Phi_1\Theta}(f) \to K_{\Phi_2\Theta}(f^\alpha)$$

такие, что справедлива следующая диаграмма функторов и катерогий:

$$\begin{array}{ccc} L_\Theta(\Phi_1) & \xrightarrow{\widetilde{\beta}_f} & L_\Theta(\Phi_2) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ct}_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ct}_{f^\alpha}} \\ K_{\Phi_1\Theta}(f) & \xrightarrow{\widetilde{\gamma}_f} & K_{\Phi_2\Theta}(f^\alpha) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L_\Theta(\Phi_1) & \xleftarrow{\widetilde{\beta}'_f} & L_\Theta(\Phi_2) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ct}_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ct}_{f^\alpha}} \\ K_{\Phi_1\Theta}(f) & \xleftarrow{(\widetilde{\gamma}_f)^{-1}} & K_{\Phi_2\Theta}(f^\alpha) \end{array}$$

Обозначим эти диаграммы соответственно через $(*)$ и $(**)$. Перепишем коммутативные диаграммы для объекта (X,T) категории $L_\Theta(\Phi_1)$ в виде

$$(X,T^f)^{\widetilde{\gamma}_f}=(X,T^{\beta_f f^\alpha}),$$

а для объекта (X,T) категории $L_\Theta(\Phi_2)$ — в виде

$$(X,T^{f^\alpha})^{\widetilde{\gamma}_f^{-1}}=(X,T^{\beta'_f f}).$$

Отсюда следует, что

$$(X,T^f)=(X,T^{\beta_f f^\alpha})^{\widetilde{(\gamma_f)}^{-1}},\quad (X,T^{f^\alpha})=(X,T^{\beta'_f f})^{\widetilde{\gamma}_f}.$$

Последнее означает, что все, что может быть известно от KB_1, может быть также известно и от KB_2 и обратно. Аналогичное свойство справедливо для морфизмов, т.е. связей между объектами. Эквивалентность баз знаний рассматривается как тройка $(\alpha,(*),(**))$, где $\alpha:F_1\to F_2$ — биекция, тогда как $(*)$ и $(**)$ определяют соответствующие диаграммы для каждого $f\in F_1$.

Следующее предложение связано с переходом от баз знаний к базам данных. Пусть R_f — образ гомоморфизма $\mathrm{Val}_f:\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi)\to\mathrm{Hal}_\Theta(G)$.

Предложение 19. *Если биекция $\alpha:F_1\to F_2$ определяет эквивалентность баз KB_1 и KB_2, то для любого $f\in F_1$ имеем изоморфизм алгебр Халмоша $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$.*

Доказательство. Начнем с соответствующих диаграмм $(*)$ и $(**)$. Для заданного множества X, рассмотрим множество T, состоящее из одного элемента $u\in\mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X)$. В этом случае $T^f=\mathrm{Val}_f(u)$. Имеем $\mathrm{Ct}_f(X,T)=(X,\mathrm{Val}_f(u))$,

$$(X,\mathrm{Val}_f(u))^{\widetilde{\gamma}_f}=\mathrm{Ct}_{f^\alpha}(X,u^\beta)=(X,(u^\beta)^{f^\alpha})=(X,\mathrm{Val}_{f^\alpha}(u^\beta)).$$

Следовательно, $\widetilde{\gamma}_f$ переводит $\mathrm{Val}_f(u)$ в $\mathrm{Val}_{f^\alpha}(u^\beta)$ для любого u; это означает, что $\widetilde{\gamma}_f$ индуцирует отображение $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$. Оно является гомоморфизмом, поскольку Val_f и β — гомоморфизмы алгебр, а также инъекцией, так как каждая алгебра R_f — простая алгебра [12].

Пусть теперь u_1 — произвольный элемент $\mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(X)$. Тогда вторая диаграмма дает

$$(X,\mathrm{Val}_{f^\alpha}(u_1))^{\widetilde{\gamma}_f^{-1}}=(X,\mathrm{Val}_f(u_1^{\beta'_f})),$$

$$(X,\mathrm{Val}_{f^\alpha}(u_1))=(X,\mathrm{Val}_f(u_1^{\beta'_f}))^{\widetilde{\gamma}_f}=(X,\mathrm{Val}_{f^\alpha}(u))^{\widetilde{\gamma}_f},$$

где $u=u_1^{\beta'_f}$. Отсюда следует, что $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$ — сюръекция. Следовательно, имеем изоморфизм $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$. □

Начнем теперь с изоморфизма алгебр Халмоша $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$.

9.2. Случай конечных моделей. Прежде всего, ясно, что для всех конечных моделей (G,Φ,F) соответствующие базы знаний, вообще говоря, бесконечны.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 18. *Пусть данные модели конечны. Тогда базы знаний KB_1 и KB_2 эквивалентны в том и только том случае, если существует биекция $\alpha:F_1\to F_2$ такая, что для любого $f\in F_1$ существует изоморфизм $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$.*

Доказательство. В одну сторону это утверждение всегда справедливо. Пусть теперь $\gamma_f:R_f\to R_{f^\alpha}$ — изоморфизм для любого $f\in F_1$. В соответствии с предложением 3 (см. также [15]) имеем гомоморфизмы $\beta_f:\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1)\to\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)$ и $\beta'_f:\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)\to\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1)$ такие, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1) & \xrightarrow{\beta_f} & \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}_f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}_{f^\alpha}}\\ R_f & \xrightarrow{\gamma^f} & R_{f^\alpha}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1) & \xleftarrow{\beta'_f} & \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}_f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Val}_{f^\alpha}}\\ R_f & \xleftarrow{\gamma_f^{-1}} & R_{f^\alpha}\end{array}$$

коммутативны. Одновременно с этим существуют функторы

$$\widetilde{\beta}_f : L_\Theta(\Phi_1) \to L_\Theta(\Phi_2), \quad \widetilde{\beta}'_f : L_\Theta(\Phi_2) \to L_\Theta(\Phi_1).$$

Осталось определить изоморфизм категорий $\widetilde{\gamma_f} : K_{\Phi_1\Theta}(f) \to K_{\Phi_2\Theta}(f^\alpha)$ такой, что диаграммы типа $(*)$ и $(**)$ были бы коммутативны.

Определим сначала $\widetilde{\gamma}_f$ на объектах, а затем и на морфизмах. Возьмем объект (X,T) категории $L_\Theta(\Phi_1)$ для произвольного объекта (X, A) категории $K_{\Phi_1\Theta}(f)$ с $T^f = A$. Имеем $\mathrm{Ct}_f(X, T) = (X, T^f) = (X, A)$. Положим

$$(X, A)^{\widetilde{\gamma}_f} = (X, T^f)^{\widetilde{\gamma}_f} = \left(X, \bigcap_{u\in T} \gamma_f \operatorname{Val}_f(u)\right) = \left(X, \bigcap_{u\in T} \operatorname{Val}_{f^\alpha}(u^{\beta_f})\right) = (X, T^{\beta_f f^\alpha}).$$

Требуется показать, что это определение не зависит от выбора множества T с $T^f = A$. Рассмотрим сначала случай, когда $T_1^f = T_2^f = A$ и множества T_1 и T_2 конечны. Имеем $(X, T_1^f)^{\widetilde{\gamma}_f} = (X, T_1^{\beta_f f^\alpha})$ и $(X, T_2^f)^{\widetilde{\gamma}_f} = (X, T_2^{\beta_f f^\alpha})$.

Необходимо проверить, что $T_1^{\beta_f f^\alpha} = T_2^{\beta_f f^\alpha}$. В самом деле,

$$T_1^{\beta_f f^\alpha} = \bigcap_{u_1\in T_1} \operatorname{Val}_{f^\alpha}(\beta_f u_1)) = \bigcap_{u_1\in T_1} \gamma_f \operatorname{Val}_f(u_1)).$$

Так как $\gamma_f : R_f \to R_{f^\alpha}$ — изоморфизм алгебр, а T_1, T_2 — конечные множества, то можно переписать это выражение в виде

$$T_1^{\beta_f f^\alpha} = \gamma_f \left(\bigcap_{u_1\in T_1} \operatorname{Val}_f(u_1)\right) = \gamma_f \left(\bigcap_{u_2\in T_2} \operatorname{Val}_f(u_2)\right) = \bigcap_{u_2\in T_2} \gamma_f \operatorname{Val}_f(u_2) = T_2^{\beta_f f^\alpha}.$$

Переходя к общему случаю, будем исходить из конечных моделей. Каждая конечная модель геометрически нетерова, т.е. если $A = T_1^f = T_2^f$, то в T_1 и в T_2 можно найти конечные подмножества T_{01} и T_{02} с $T_{01}{}^f = T_{02}^f = A$. Здесь $T_{01}^{\beta_f f_\alpha} = T_{02}^{\beta_f f_\alpha}$. Нужно проверить, что $T_1^{\beta_f f^\alpha} = T_2^{\beta_f f^\alpha}$ и $T_{01}^{\beta_f f_\alpha} = \bigcap_{u_1\in T_1} \operatorname{Val}_{f^\alpha}(\beta_f u_1)$. Можно взять конечное подмножество T_{10} в T_1 такое, что $T_1^{\beta_f f^\alpha} = T_{10}^{\beta_f f^\alpha}$. Рассмотрим объединение множеств T_{10} и T_{01} и обозначим его через T_{001}. Тогда $T_{001}^f = A = T_1^f$, $T_1^{\beta_f f^\alpha} = T_{001}^{\beta_f f^\alpha}$. Аналогично, для T_2 рассмотрим T_{002} и $A = T_{001}^f = T_{002}^f$. Кроме того,

$$T_1^{\beta_f f^\alpha} = T_{001}^{\beta_f f^\alpha} = T_2^{\beta_f f^\alpha}.$$

Равенство $T_1^{\beta_f f^\alpha} = T_2^{\beta_f f^\alpha}$ устанавливает коммутативность диаграммы для объектов.

Аналогично строится $\widetilde{\gamma}_f^{-1}$, допускающее γ_f^{-1} и равенство $\widetilde{\gamma}_f^{-1} = \widetilde{\gamma_f^{-1}}$ holds.

Перейдем к морфизмам. Напомним прежде всего, что каждому гомоморфизму $s : W(Y) \to W(X)$ соответствуют

$$s_*^1 : \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(Y) \to \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X), \quad s_*^2 : \mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(Y) \to \mathrm{Hal}_{\Phi_2\Theta}(X).$$

Пусть заданы объекты (Y, T_2) и (X, T_1) в $L_\Theta(\Phi_1)$. Напомним, что s допустим относительно T_2 и T_1, если $s_*^1(u) \in T_1$ для каждого $u \in T_2$. Здесь $s_*^1 : (Y, T_2) \to (X, T_1)$ — морфизм. Рассуждаем далее исходя из произвольного гомоморфизма $\beta : \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_1) \to \mathrm{Hal}_\Theta(\Phi_2)$. Было доказано, что если s допустим относительно T_2 и T_1, то этот же s допустим и относительно T_2^β и T_1^β, т.е. $s_*^1(u) \in T_1^\beta$ для каждого $u \in T_2^\beta$. Следовательно, имеем морфизм

$$\widetilde{\beta}(s_*^1) = s_*^2 : (Y, T_2^\beta) \to (X, T_1^\beta).$$

Возьмем теперь $\beta = \beta_f$ и применим Ct_{f^α}:

$$\mathrm{Ct}_{f^\alpha}(s_*^2) : \mathrm{Ct}_{f^\alpha}(X, T_1^{\beta_X}) \to \mathrm{Ct}_{f^\alpha}(Y, T_2^{\beta_X}).$$

Последнее можно переписать в виде

$$\mathrm{Ct}_{f^\alpha}(s^2_*) : (X, T_1^{\beta_X f^\alpha}) \to (X, T_2^{\beta_Y f^\alpha}) \quad \text{или} \quad \mathrm{Ct}_{f^\alpha}(s^2_*) : (X, T_1^f)^{\gamma_f} \to (Y, T_2^f)^{\gamma_f}.$$

Пусть теперь $T_1^f = A$, $T_2^f = B$. Для $s^1_* : (Y, T_2) \to (X, T_1)$ имеем

$$\mathrm{Ct}_f(s^1_*) : (X, T_1^f) \to (Y, T_2^f)$$

и связанный с ним морфизм

$$\mathrm{Ct}_{f^\alpha}(s^2_*) : (X, T_1^f)^{\gamma_f} \to (Y, T_2^{f_2})^{\gamma_f}.$$

Коммутативность диаграммы на морфизмах означает, что

$$\widetilde{\gamma}_f \,\mathrm{Ct}_f(s^1_*) = \mathrm{Ct}_{f^\alpha}(\widetilde{\beta}_f(s^1_*))$$

для любого $s^1_* : (Y, T_2) \to (X, T_1)$.

Продолжим рассмотрение конечных моделей, исходя из изоморфизма $\gamma_f : R_f \to R_{f^\alpha}$ и соответствующего функтора $\widetilde{\gamma}_f : K_{\Phi_1\Theta}(f) \to K_{\Phi_2\Theta}(f^\alpha)$. Этот функтор уже определен на объектах, и мы намерены определить его на морфизмах.

Пусть $\tau : (X, A) \to (Y, B)$ — морфизм в $K_{\Phi_1\Theta}(f)$. Этот морфизм τ возникает следующим образом. Морфизм

$$s^1_* : \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(Y) \to \mathrm{Hal}_{\Phi_1\Theta}(X)$$

соответствует $s : W(Y) \to W(X)$. Если теперь $A = T_1^f$, $B = T_2^f$, а s^1_* допустим относительно T_2 и T_1, то имеем $\widetilde{s}^1_* : (X, A) \to (Y, B)$. Можно утверждать, что $\tau = \widetilde{s}^1_*$ для некоторого s^1_*.

Определим

$$\widetilde{\gamma}_f(\widetilde{s}^1_*) = \widetilde{s}^2_* : (X, T_1^f)^{\widetilde{\gamma}_f} \to (Y, T_2^f)^{\widetilde{\gamma}_f}.$$

Здесь

$$(X, T_1^f)^{\widetilde{\gamma}_f} = (X, T_1^{\beta_f f^\alpha}), \quad (Y, T_2^f)^{\widetilde{\gamma}_f} = (Y, T_2^{\beta_f f^\alpha})$$

не зависят от выбора T_1 и T_2 с $T_1^f = A$ и $T_2^f = B$. Проверим далее, что $\widetilde{\gamma}_f : K_{\Phi_1\Theta}(f) \to K_{\Phi_2\Theta}(f^\alpha)$, определенный таким образом, есть на самом деле функтор и что этот функтор дает коммутативность диаграммы на морфизмах.

Прежде всего заметим, что определение $\widetilde{\gamma}_f$ на морфизмах может быть переписано в виде

$$\widetilde{\gamma}_f(\mathrm{Ct}_f(s^1_*)) = (\mathrm{Ct}_{f^\alpha}(s^2_*)).$$

Возьмем два морфизма $\widetilde{s^1_{1*}} = \mathrm{Ct}_f(s^1_{1*})$ и $\widetilde{s^1_{2*}} = \mathrm{Ct}_f(s^1_{2*})$ и рассмотрим произведение

$$\widetilde{s^1_{1*}}\widetilde{s^1_{2*}} = \mathrm{Ct}_f(s^1_{1*})\,\mathrm{Ct}_f(s^1_{2*}) = \mathrm{Ct}_f(s^1_{2*}s^1_{1*}) = \widetilde{s^1_{2*}s^1_{1*}} = \widetilde{(s_2 s_1)^1_*}.$$

Применим $\widetilde{\gamma}_f$:

$$\widetilde{\gamma}_f(\widetilde{(s_2 s_1)^1_*}) = (\widetilde{(s_2 s_1)^2_*}) = \widetilde{s^2_{2*}s^2_{1*}} = \widetilde{s^2_{1*}}\widetilde{s^2_{2*}} = \widetilde{\gamma}_f(\widetilde{s^1_{1*}})\widetilde{\gamma}_f(\widetilde{s^1_{2*}}).$$

Проверим теперь коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_\Theta(\Phi_1) & \xrightarrow{\widetilde{\beta}_X} & L_\Theta(\Phi_2) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ct}_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ct}_{f^\alpha}} \\ K_{\Phi_1\Theta}(f) & \xrightarrow{\widetilde{\gamma}_f} & K_{\Phi_1\Theta}(f^\alpha) \end{array}$$

Возьмем морфизм $s^1_* : (Y, T_2) \to (X, T_1)$ в $L_\Theta(\Phi_1)$. Имеем

$$\widetilde{\beta_X}(s^1_*) : (Y, T_2^{\beta_X}) \to (X, T_1^{\beta_X}),$$
$$\mathrm{Ct}_{f^\alpha}\,\widetilde{\beta_X}(s^1_*) : (X, T_1^{\beta_X f^\alpha}) \to (Y, T_2^{\beta_X f^\alpha}).$$

Перепишем это в виде

$$\mathrm{Ct}_{f^\alpha}\,\widetilde{\beta_X}(s^1_*) : (X, T_1^f)^{\widetilde{\gamma}_f} \to (Y, T_2^f)^{\widetilde{\gamma}_f}.$$

Далее,

$$\mathrm{Ct}_f(s^1_*) : (X, T_1^f) \to (Y, T_2^f), \quad \widetilde{\gamma}_f\,\mathrm{Ct}_f(s^1_*) : (X, T_1^f)^{\widetilde{\gamma}_f} \to (Y, T_2^f)^{\widetilde{\gamma}_f}.$$

Проверим теперь равенство

$$\widetilde{\gamma}_f \operatorname{Ct}_f(s^1_*) = \operatorname{Ct}_{f^\alpha} \widetilde{\beta}_X(s^1_*)$$

для каждого s^1_*. Имеем

$$\widetilde{\gamma}_f \operatorname{Ct}_f(s^1_*) = \widetilde{\gamma}_f(\widetilde{s}^1_*) = \widetilde{s}^2_*, \quad \operatorname{Ct}_{f^\alpha} \widetilde{\beta}_X(s^1_*) = \operatorname{Ct}_{f^\alpha}(s^2_*) = \widetilde{s}^2_*.$$

Это дает коммутативность диаграммы $(*)$ морфизмов, т.е.

$$\widetilde{\gamma}_f \operatorname{Ct}_f = \operatorname{Ct}_{f^\alpha} \widetilde{\beta}_X.$$

Это же можно сделать и для функтора $\widetilde{\gamma_f^{-1}} = \widetilde{\gamma}_f^{-1}$ и второй коммутативной диаграммы $(**)$, что завершает доказательство теоремы. □

9.3. Основной результат. Дополнительные замечания. 1. Взглянем на определение эквивалентности с точки зрения общих перспектив теории категорий. Для данных двух функторов $\varphi_1 : C_1 \to C_1^0$ и $\varphi_2 : C_2 \to C_2^0$ можно сказать, что C_1 и C_2 эквивалентны относительно φ_1 и φ_2, если существует изоморфизм $\psi : C_1^0 \to C_2^0$ и функторы $\psi_1 : C_1 \to C_2$, $\psi_2 : C_2 \to C_1$ с коммутативными диаграммами

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_2 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ C_1^0 & \xrightarrow{\psi} & C_2^0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 & \xleftarrow{\psi_2} & C_2 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ C_1^0 & \xleftarrow{\psi^{-1}} & C_2^0 \end{array}$$

Обычная эквивалентность категорий — это эквивалентность относительно перехода к остовам категорий. В рассматриваемой ситуации можно сказать, что эквивалентность баз знаний означает, что существует эквивалентность категорий описаний относительно перехода к категориям содержания знаний.

2. Вернемся к определению баз знаний относительно кратных моделей (G_1, Φ_1, F_1) и (G_2, Φ_2, F_2); пусть биекция $\alpha : F_1 \to F_2$ определяет эквивалентность соответствующих баз знаний KB_1 и KB_2. Предположим, что два запроса f_1 и f_2 из F_1 связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi_1) & \xrightarrow{\operatorname{Val}_{f_1}} & R_{f_1} \\ & {\scriptstyle\operatorname{Val}_{f_2}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ & & R_{f_2} \end{array}$$

где γ — гомоморфизм алгебр. Оценим соотношение между f_1^α и f_2^α. Начнем с диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hal}_{\Phi_1\Theta} & \xrightarrow{\beta_f} & \operatorname{Hal}_{\Phi_2\Theta} \\ {\scriptstyle\operatorname{Val}_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\operatorname{Val}_{f^\alpha}} \\ R_f & \xrightarrow{\gamma_f} & R_{f^\alpha} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Hal}_{\Phi_1\Theta} & \xleftarrow{\beta'_f} & \operatorname{Hal}_{\Phi_2\Theta} \\ {\scriptstyle\operatorname{Val}_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\operatorname{Val}_{f^\alpha}} \\ R_f & \xleftarrow{\gamma_f^{-1}} & R_{f^\alpha} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R_{f_1} & \xrightarrow{\gamma_{f_1}} & R_{f_1^\alpha} \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma^\alpha} \\ R_{f_2} & \xrightarrow{\gamma_{f_2}} & R_{f_2^\alpha} \end{array}$$

Здесь

$$\gamma \operatorname{Val}_{f^1} = \operatorname{Val}_{f^2}, \qquad \gamma^\alpha = \gamma_{f_2} \gamma \gamma_{f_1}^{-1},$$

$$\gamma^\alpha \operatorname{Val}_{f_1^\alpha} = \gamma^\alpha \gamma_{f_1} \operatorname{Val}_{f_1} \beta'_{f_1} = \gamma_{f_2} \gamma \operatorname{Val}_{f_1} \beta'_{f_1} = \gamma_{f_2} \operatorname{Val}_{f_2} \beta'_{f_1} = \operatorname{Val}_{f_2^\alpha} \beta_{f_2} \beta'_{f_1}.$$

Следовательно,

$$\gamma^\alpha \operatorname{Val}_{f^{1\alpha}} = \operatorname{Val}_{f_2^\alpha} \beta_{f_2} \beta'_{f_1},$$

т.е. связь скручена произведением $\beta_{f_2} \beta'_{f_1}$.

Наконец, заметим, что из приведенных выше диаграмм вытекают следующие естественные тождества:

1) $\operatorname{Val}_f(u) = \operatorname{Val}_f(\beta'_f \beta_f(u))$ для любого $u \in \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi_1)$;
2) $\operatorname{Val}_{f^\alpha}(u) = \operatorname{Val}_{f^\alpha}(\beta_f \beta'_f(u)$ для любого $u \in \operatorname{Hal}_\Theta(\Phi_2)$.

3. Заметим, что условие эквивалентности двух баз знаний в случае конечных кратных моделей можно сформулировать в терминах этих кратных моделей (см. [16]).

Определение 8. Пусть заданы модели (G_1, Φ_1, f_1) и (G_2, Φ_2, f_2). Пусть $\mathrm{Aut}(f_1)$ и $\mathrm{Aut}(f_2)$ — соответствующие группы автоморфизмов. Модели (G_1, Φ_1, f_1) и (G_2, Φ_2, f_2) называются автоморфно эквивалентными, если существует изоморфизм алгебр $\delta : G_1 \to G_2$ такой, что

$$\mathrm{Aut}(f_2) = \delta\,\mathrm{Aut}(f_1)\delta^{-1}.$$

Определение 9. Пусть заданы кратные модели (G_1, Φ_1, F_1) и (G_2, Φ_2, F_2). Эти кратные модели называются автоморфно эквивалентными, если существует биекция $\alpha : F_1 \to F_2$ такая, что для каждого $f \in F_1$ модели (G_1, Φ_1, f) и (G_2, Φ_2, f^α) автоморфно эквивалентны.

Естественно определить изоморфизм кратных моделей м одним и тем же множеством соотношений Φ_1 и Φ_2. Из изоморфизма кратных моделей следует их автоморфная эквивалентность. Очевидно, что обратное утверждение не верно.

Пусть заданы базы знаний $KB_1 = KB(G_1, \Phi_1, F_1)$ и $KB_2 = KB(G_2, \Phi_2, F_2)$ с конечными кратными моделями.

Теорема 19. *Базы знаний $KB_1 = KB(G_1, \Phi_1, F_1)$ и $KB_2 = KB(G_2, \Phi_2, F_2)$ информационно эквивалентны в том и только том случае, если соответствующие модели автоморфно эквивалентны.*

Доказательство этой теоремы использует теорию Галуа—Краснера и вытекает из теорем 14 и 18. Из теоремы 19 следует алгоритм для проверки информационной эквивалентности (см. [17]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bancillon F.* On the completeness of query language for relational databases// Lect. Notes Comput. Sci. — 1978. — *64*. — С. 112–123.
2. *Beniaminov E.* Galois theory of complete relational subalgebras of algebras of relations, logical structures, symmetry// NTI, Ser. 2. — 1980. — С. 237–261.
3. *Bulatov V., Jeavons P.* An algebraic approach to multi-sorted constraints// Proc. CP'03 (to appear).
4. *Ganter B., Mineau G.* Ontology, metadata, and semiotics// Lect. Notes AI. — Springer-Verlag, 2000. — *1867*. — С. 55–81.
5. *Halmos P. R.* Algebraic Logic. — New York, 1969.
6. *Henkin L., Monk J. D., Tarski A.* Cylindric Algebras. — North-Holland, 1985.
7. *Jeavons P., Cohen D., Pearson J.* Constraints and universal algebra// Ann. Math. Artificial Intelligence. — 1999. — *24*. — С. 51–67.
8. *Krasner M.* Generalisation et anlogues de la theorie de Galois// C. R. Congr. Victorie de l'Ass. Franc. pour l'Avancem. Sci. — 1945. — С. 54–58.
9. *Lenat D.* Steps to Sharing Knowledge. — IOS Press, 1995.
10. *MacLane S.* Categories for the Working Mathematicians. — Springer-Verlag, 1971.
11. *Nikolova D., Plotkin B.* Some notes on universal algebraic geometry// Proc. Kurosh Algebraic Conference, Moscow 1998. — Walter de Gryiter, 1999.
12. *Plotkin B. I.* Universal Algebra, Algebraic Logic, and Databases. — Kluwer, 1993.
13. *Plotkin B. I.* Algebra, categories, and databases// Handbook of Algebra. — Elsevier–Springer-Verlag, 1999. — *2*. — С. 81–148.
14. *Plotkin B. I.* Seven Lectures in Universal Algebraic Geometry/ Preprint, 2002. `ArXiv:math/GM/0204245`
15. *Plotkin T.* Relational databases equivalence problem// Adv. Databases Information Systems. — Springer-Verlag, 1996. — С. 391–404.
16. *Plotkin B. I., Plotkin T.* Geometrical aspect of databases and knowledge bases// Algebra Universalis. — Basel: Birkhäuser, 2001. — *46*. — С. 131–161.
17. *Plotkin T., Knyazhansky M.* Informational Equivalence of Knowledge Bases Verification. — Scientific Israel, 2004.
18. *Sowa J.* Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations. — Pacific Grove: Brooks Cole Publishing, 2000.

Б. Плоткин
Hebrew University, Jerusalem

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 63–81

НАКРЫТИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЛУП

© 2004 г. **П. Т. НАДЬ, К. ШТРАМБАХ**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 63
2. Некоторые основные понятия теории луп 64
3. Накрытия луп, реализованные в разрешимых группах Ли 66
4. Топологические лупы, реализованные как сечения трехмерных квазипростых групп Ли 70
5. Разложение накрывающих групповых многообразий $PSL_2(\mathbb{R})$ 75
6. Сечения в накрывающих группах $PSL_2(\mathbb{R})$ 79
Список литературы 81

1. Введение

Теория накрытий топологических групп дает возможность сразу установить, для каких групп G данная группа $\widetilde{G}$ есть накрытие. Для данной связной группы Ли $\widetilde{G}$, имеющей непрерывное транзитивное сечение $\widetilde{\sigma} : \widetilde{G}/\widetilde{H} \to \widetilde{G}$ относительно связной подгруппы $\widetilde{H}$, тем не менее не ясно, в каких группах G, для которых $\widetilde{G}$ — накрывающая группа, существует точно транзитивное сечение $\sigma : G/H \to G$ такое, что лупа $\widetilde{L}$, соответствующая сечению $\widetilde{\sigma}$, есть накрытие лупы L, соответствующей σ. Одна из целей данной статьи состоит в том, чтобы показать сложность этой ситуации. Существуют группы $\widetilde{G}$ такие, что для любого сечения $\widetilde{\sigma} : \widetilde{G}/\widetilde{H} \to \widetilde{G}$ и для любой группы G с накрытием $\widetilde{G}$ в G существует сечение $\sigma : G/H \to G$ такое, что соответствующая лупа L накрывается лупой $\widetilde{L}$. Этот факт будет проиллюстрирован на примере топологических групп, имеющих трехмерную неабелеву нильпотентную группу Ли в качестве группы, топологически порожденной ее левыми сдвигами. Однако будет также показано, что ситуация меняется уже для нильпотентных групп высокой размерности. Существуют нильпотентные группы Ли G класса нильпотентности 2, универсальные накрывающие которых содержат точно транзитивные сечения, соответствующие лупам $\widetilde{L}$ таким, что G не может быть группой, топологически порожденной левыми сдвигами топологической лупы L, имеющей $\widetilde{L}$ в качестве универсального накрытия. Кроме того, возможна и другая крайняя ситуация. Существуют группы $\widetilde{G}$, допускающие дифференцируемые сечения $\widetilde{\sigma} : \widetilde{G}/\widetilde{H} \to \widetilde{G}$ такие, что образ при экспоненциальном отображении $\exp(T_1\widetilde{\sigma}(\widetilde{G}/\widetilde{H}))$ касательного пространства $T_1\widetilde{\sigma}(\widetilde{G}/\widetilde{H})$ в $1 \in \widetilde{G}$ содержится в образе $\widetilde{\sigma}(\widetilde{G}/\widetilde{H})$ сечения $\widetilde{\sigma}$, для которого не существует лупы G, накрытой $\widetilde{G}$, как группой, топологически порожденной левыми сдвигами. Примеры этих случаев дают трехмерные топологические петли, для которых прямое произведение однопараметрической подгруппы на двумерную аффинную группу есть группа, топологически порожденная их левыми сдвигами.

Следующая цель этой статьи — установить, что в некоторых случаях не существует собственного накрытия локально компактной группы, топологически порожденной левыми сдвигами топологической лупы. Это обстоятельство будет проиллюстрировано для группы $G = PSL_2(R)$ сохраняющих ориентацию гиперболических движений: будет показано, что только компактная однопараметрическая подгруппа G может быть стабилизатором единицы двумерной топологической лупы.

В последней части статьи будет показана роль экспоненциального отображения для выяснения геометрической структуры сечения $\sigma : G/H \to G$ для группы Ли G и связной подгруппы H.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

Она будет проиллюстрирована на примере экспоненциального отображения для накрытий группы $PSL_2(R)$. Путем модификации процедуры из [4, 5] для описания четных накрытий группы $PSL_2(R)$ будет получена геометрическая структура для всех накрытий $PSL_2(R)$. Полученные результаты используются для альтернативного доказательства того, что никакое собственное накрытие группы $PSL_2(R)$ не может быть группой, топологически порожденной левыми сдвигами двумерной дифференцируемой лупы.

2. Некоторые основные понятия теории луп

Множество L с бинарной операцией $(x, y) \mapsto x \circ y : L \times L \to L$ и элементом e таким, что $e \circ x = x \circ e = x$ для всех $x \in L$, называется лупой, если для любых $a, b \in L$ уравнения $a \circ y = b$ и $x \circ a = b$ имеют единственные решения, обозначаемые через $y = a\backslash b$ и $x = b/a$. Левый сдвиг $\lambda_a : y \mapsto x \circ y : L \to L$ и правый сдвиг $\varrho_x : y \to y \circ x : L \to L$ являются биекциями L: $(x, y) \mapsto x\backslash y = \lambda_x^{-1}(y)$ и $(x, y) \to y/x = \varrho_x^{-1}(y)$ соответственно.

Ядро гомоморфизма $\alpha : (L_1) \to (L, *)$ лупы L в лупу L' есть нормальная подгруппа N в L, т.е. подлупа L такая, что $x \circ N = N \circ x$, $(x \circ N) \circ y = x \circ (N \circ y)$ и $x \circ (y \circ N) = (x \circ y) \circ N$.

Левое, правое и *среднее* ядро лупы L — это, соответственно, подгруппы L, которые определяются следующим образом:

$$N_l = \{u \in L;\ ux \cdot y = u \cdot xy \text{ при всех } x, y \in L\},$$
$$N_r = \{w \in L;\ x \cdot yw = xy \cdot w \text{ при всех } x, y \in L\},$$
$$N_m = \{v \in L;\ xv \cdot y = x \cdot vy, \text{ при всех } x, y \in L\}.$$

Пересечение $N = N_l \cap N_r \cap N_m$ называется *ядром* лупы L.

Центр Z лупы L — это наибольшая подгруппа ядра N лупы L такая, что $zx = xz$ при всех $x \in L$, $z \in Z$. Любая подгруппа Z — нормальная подгруппа L, называемая *центральной подгруппой* L.

Пусть $\mathcal{C}$ — категория топологических пространств, или $\mathcal{C}^r$-дифференцируемых ($1 \leqslant r \leqslant \infty$) многообразий, или аналитических многообразий. Лупа L называется $\mathcal{C}$-лупой, если L — объект категории $\mathcal{C}$, а отображения $(x, y) \mapsto x \circ y$, $(x, y) \mapsto x\backslash y$, $(x, y) \mapsto y/x : L \times L \to L$ есть $\mathcal{C}$-морфизмы.

Пусть G — группа, H — подгруппа G, а $\pi : G \to G/H$ — естественное отображение $x \to xH$. Отображение $\sigma : G/H \to G$ называется сечением, если суперпозиция $\pi \circ \sigma : G/H \to G/H$ является тождественным отображением. Образ $\sigma(G/H)$ образует систему представителей левого смежного класса H в G.

Каждую лупу L можно восстановить по множеству $\Lambda = \{\lambda_x, x \in L\}$ ее левых сдвигов; кроме того, Λ есть образ сечения $\sigma : G/G_e \to G$ в группе преобразований G, порожденной левыми сдвигами, где G_e — стабилизатор единицы $e \in L$ в G. А именно, пусть G — группа, H — подгруппа G, не содержащая нетривиальной нормальной подгруппы G, а $\varrho : G/H \to G$ — сечение, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) $\sigma(H) = 1$ и $\sigma(G/H)$ порождают G;
(b) $\sigma(G/H)$ действует точно транзитивно на G/H; это означает, что для любых xH и yH существует в точности один $z \in \sigma(G/H)$ такой, что $zxH = yH$.

Тогда произведение, определенное как $x * y = \sigma(xyH)$ на образе $\sigma(G/H)$ отображения σ или как $(xH) * (yH) = \sigma(xH)yH$ на факторпространстве G/H, дает лупу $L_{(\sigma)}$. В самом деле, из условия $\sigma(H) = 1 \in G$ следует, что $L_{(\sigma)}$ имеет единичный элемент. Уравнение $p * v = r$ для данных $p, r \in L_{(\sigma)}$ имеет единственное решение $v \in L_{(\sigma)}$, поскольку σ — сечение; уравнение $u * q = r$ для данных $q, r \in L_{(\sigma)}$ имеет единственное решение $u \in L_{(\sigma)}$, потому что $\sigma(G/H)$ действует точно транзитивно.

Определение 2.1. *Сечение $\sigma : G/H \to G$, где H — подгруппа G, не содержащая никакой нетривиальной нормальной подгруппы G, называется точно транзитивным, если образ $\sigma(G/H)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям (a) и (b).*

Предложение 2.2. *Пусть $\sigma : G/H \to G$ — точно транзитивное сечение группы G, соответствующее луповому умножению на G/H, заданному как $(xH) * (yH) = \sigma(xH)yH$. Тогда лупа*

$(G/H, *)$ изоморфна лупе $(\sigma(G/H), \circ)$, определенной на $\sigma(G/H)$ как $x \circ y = \sigma(xyH)$ относительно изоморфизма $\sigma : (G/H) \to \sigma(G/H)$.

Баером [2] (см. также [8, p. 18]) была дана следующая характеризация сечений $\sigma : G/H \to G$, транзитивно действующих на G/H.

Предложение 2.3. *Пусть $\sigma : G/H \to G$ — сечение, $\sigma(H) = 1 \in G$. Тогда $\sigma(G/H)$ действует точно транзитивно на G/H в том и только том случае, если $\sigma(G/H)$ образует систему представителей в G для смежных классов каждой сопряженной подгруппы $H^{g^{-1}} = gHg^{-1}$, $g \in G$.*

Если L — локально компактная топологическая лупа, то группу G, порожденную левыми сдвигами L, можно снабдить естественной топологией, называемой топологией Аренса (см. [3, Sec. 6], [7, IX.2]). Тогда G становится топологической группой преобразований на L такой, что стабилизатор G_e для $e \in L$ в G есть замкнутая подгруппа и сечение $\sigma : G/G_e \to G$ непрерывно. Топологическое замыкание $\widehat{G}$ группы G в группе всех гомоморфизмов L в себя относительно его естественной топологии (Аренса) есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами. Если L компактна или локально компактна и локально связна, то топология Аренса группы гомоморфизмов Θ лупы L (а, следовательно, топология любой подгруппы Θ) совпадает с компактно-открытой топологией (см. [1]).

Для каждой топологической лупы L, для которой локально компактная группа G есть подгруппа, (топологически) порожденная ее левыми сдвигами, существует непрерывное сечение $\sigma : G/H \to G$, где H — стабилизатор $1 \in L$ в G такой, что σ и замкнутая подгруппа H в G удовлетворяет условиям (a) и (b) сечения лупы.

Обратно, если G — локально компактная связная подгруппа, H — связная подгруппа, не содержащая никакой нетривиальной нормальной подгруппы G, а $\sigma : G/H \to G$ — непрерывное точно транзитивное сечение, то умножение $(xH, yH) \mapsto \sigma(xH)yH = xH \cdot yH$ определяет в G/H лупу $(L, \cdot)$ такую, что это умножение «$\cdot$» и левое деление $(xH, yH) \mapsto \lambda_{xH}^{-1} yH = \sigma(xH)^{-1} yH$ непрерывны. Кроме того, $(L, \cdot)$ — топологическая лупа в том и только том случае, если для всех (xH, yH) отображение $(xH, yH) \mapsto yH/xH$, определенное как $(yH/xH) \cdot xH = yH$, непрерывно.

Пусть G — связная группа Ли, H — связная подгруппа. Тогда лупа, определенная на $\sigma(G/H)$, есть топологическая лупа (см. [8, следствие 1.22]).

Предложение 2.4 (см. [8, Лемма 1.23])**.** *Пусть L — локально компактная связная топологическая лупа такая, что группа G, топологически порожденная множеством $\Lambda = \{\lambda_x, x \in L\}$ левых сдвигов, есть группа Ли. Тогда G гомеоморфна топологическому произведению $L \times H$, а также $\Lambda \times H$, где H — стабилизатор $e \in L$ в G. Кроме того, группы G и H связны, а локально компактное связное подпространство Λ замкнуто в G.*

Связная топологическая лупа L, определенная на дифференцируемом многообразии, называется *почти дифференцируемой* (класса C^r, $r \in \{1, \ldots, \infty, \omega\}$), если умножение $(x, y) \mapsto x \cdot y$ и левое деление $(x, y) \mapsto x \backslash y$ в лупе L дифференцируемы (класса C^r).

Предложение 2.5 ([8, Лемма 1.27])**.** *Пусть L — связная почти дифференцируемая лупа такая, что группа G, топологически порожденная ее левыми сдвигами, есть группа Ли. Тогда отображение $\sigma : x \mapsto \lambda_x : L \to G$ есть дифференцируемое вложение, т.е. образ $\sigma(L) = \{\lambda_x,\ x \in L\}$ сечения σ — вложенное дифференцируемое подмногообразие в G.*

Существует биекция между почти дифференцируемыми лупами, для которых группа, топологически порожденная левыми сдвигами, есть группа Ли, и тройками (G, H, σ), где G — связная группа Ли, H — замкнутая подгруппа, не содержащая нетривиальных нормальных подгрупп G, а $\sigma : G/H \to G$ — дифференцируемое точно транзитивное сечение такое, что подмногообразие $\sigma(G/H)$ топологически порождает группу G.

Пусть L — почти дифференцируемая лупа, определенная на факторпространстве G/H относительно точно транзитивного дифференцируемого сечения $\sigma : G/H \to G$ в связной группе Ли G, топологически порожденной левыми сдвигами. Ясно, что L — дифференцируемая лупа в том и

только том случае, если отображение $(xH, yH) \mapsto z : G/H \times G/H \to \sigma(G/H)$, определенное как $zxH = yH$, дифференцируемо.

Определение 2.6. *Связная топологическая лупа $(L, \cdot)$ называется сильно левоальтернативной, если она обладает следующими свойствами:*

(1) *существует окрестность единичного элемента e лупы L, которая накрывается однопараметрическими подгруппами;*
(2) $x^t \cdot (x^s \cdot y) = x^{t+s} \cdot y$ *при всех $x, y \in L$ и всех однопараметрическмих подгрупп L.*

Известно, что для любой топологической лупы L, гомеоморфной связному топологическому многообразию, существует универсальная накрывающая лупа $\widetilde{L}$ такая, что накрывающее отображение $p : \widetilde{L} \to L$ есть эпиморфизм. Прообраз $p^{-1}(e) = \mathrm{Ker}(p)$ единичного элемента e лупы L есть центральная дискретная подгруппа Z в $\widetilde{L}$, естественно изоморфная фундаментальной группе L. Если Z' — подгруппа Z, то факторлупа $\widetilde{L}/Z'$ есть накрывающая лупа L, и любая накрывающая лупа L изоморфна факторлупе $\widetilde{L}/Z'$ для некоторой подгруппы Z' (см. [6]).

Пусть L' — накрывающая лупа для L. Следующая лемма проясняет связь между группой, топологически порожденной левыми сдвигами L', и группой, топологически порожденной левыми сдвигами L.

Лемма 2.7 (см. [8, лемма 1.34])**.** *Пусть L — топологическая лупа, гомеоморфная связному топологическому многообразию, а группа G, топологически порожденная левыми сдвигами λ_a, $a \in L$, лупы L — связная группа Ли. Пусть $\widetilde{L}$ — универсальная накрывающая L, а $Z \subseteq \widetilde{L}$ — фундаментальная группа L. Тогда группа $\widetilde{G}$, топологически порожденная левыми сдвигами $\widetilde{\lambda}_u$, $u \in \widetilde{L}$, накрытия $\widetilde{L}$ есть накрывающая группа G такая, что ядро накрывающего отображения $\varphi : \widetilde{G} \to G$ есть $Z^* = \{\widetilde{\lambda}_z, z \in Z\}$, а Z^* изоморфна Z. Если отождествить $\widetilde{L}$ и L с однородным пространством $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ и G/H, где H или $\widetilde{H}$ — стабилизатор единицы $e \in L$ в G или в $\widetilde{G}$ соответственно, то $\varphi(\widetilde{H}) = H$, $\widetilde{H} \cap Z^* = \{1\}$, а $\widetilde{H}$ изоморфна H.*

3. Накрытия луп, реализованные в разрешимых группах Ли

Пусть r — фиксированное вещественное число, а G_r — трехмерная неабелева нильпотентная группа, гомеоморфная цилиндру $\mathbb{R}^2 \times S^1$, в которой умножение G_r задано как

$$(u_1, v_1, z_1 + r\mathbb{Z})(u_2, v_2, z_2 + r\mathbb{Z}) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(u_1 v_2 - u_2 v_1) + r\mathbb{Z}),$$

где $u_i, v_i, z_i \in \mathbb{R}$. Ясно, что универсальное накрытие $\widetilde{G}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$, а умножение в нем задано как

$$(u_1, v_1, z_1)(u_2, v_2, z_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(u_1 v_2 - u_2 v_1)).$$

В соответствии с [8, теорема 23.12], любое непрерывное точно транзитивное сечение $\sigma : \widetilde{G}/\widetilde{H} \to \widetilde{G}$ такое, что $\sigma(\widetilde{G}/\widetilde{H})$ порождает $\widetilde{G}$, может быть задано в виде

$$\sigma : (u, 0, z)\widetilde{H} \mapsto (u, 0, z)(0, v(u), 0), \tag{1}$$

где $\widetilde{H}$ можно взять в виде $\{(0, t, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$, а $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непостоянная непрерывная вещественная функция, $v(0) = 0$. Соответствующие топологические лупы $\widetilde{L}_v$ гомеоморфны $\mathbb{R}^2$.

Предложение 3.1. *Лупа $\widetilde{L}_v$ изоморфна лупе $\widetilde{L}^{(v)}$, реализованной на $\mathbb{R}^2$ с помощью умножения*

$$(u_1, z_1) \circ (u_2, z_2) = (u_1 + u_2, z_1 + z_2 - v(u_1)u_2), \quad (u_i, z_i) \in \mathbb{R}^2.$$

Центр $\widetilde{L}^{(v)}$ есть подгруппа $\{(0, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство. Отождествим пару $(u,z)\in\mathbb{R}^2$ со смежным классом $(u,0,z)\circ\widetilde{H}$. Тогда

$$(u_1,0,z_1)\widetilde{H}\circ(u_2,0,z_2)\widetilde{H}=\sigma((u_1,0,z_1)\widetilde{H})(u_2,0,z_2)\widetilde{H}$$
$$=(u_1,0,z_1)(0,v(u_1),0)(u_2,0,z_2)\widetilde{H}=(u_1+u_2,v(u_1),z_1+z_2+\frac{1}{2}(u_1-u_2)v(u_1))\widetilde{H}$$
$$=(u_1+u_2,0,z_1+z_2-u_2v(u_1))\widetilde{H},$$

что и доказывает первое утверждение.

Простое вычисление показывает, что подгруппа $Z=\{(0,z),z\in\mathbb{R}\}$ содержится в ядре $\widetilde{L}^{(v)}$. Поэтому подгруппа Z является центром $\widetilde{L}^{(v)}$. □

Пусть L — топологическая лупа такая, что G_r — группа, порожденная левыми сдвигами L. С точностью до автоморфизма группы G_r можно считать, что стабилизатор H единицы e лупы L в G_r есть группа $\{(0,t,0),\ t\in\mathbb{R}\}$ (см. [8, с. 309]). Тогда L гомеоморфна G_r/H — цилиндру $\mathbb{R}\times S^1$. Пусть $\widetilde{L}$ — универсальное накрытие L. Так как $\widetilde{L}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$, то лупа $\widetilde{L}$ содержит центральную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$. Группа $\widehat{G}$, топологически порожденная левыми сдвигами $\widetilde{L}$, есть накрытие G_r такое, что факторпространство $\widehat{G}/\widehat{H}$, где $\widehat{H}$ — прообраз $p^{-1}(H)$ стабилизатора H при накрывающем отображении $p:\widehat{G}\to G_r$, гомеоморфно $\mathbb{R}^2$. Так как любое накрытие $\widehat{H}$ стабилизатора H есть группа $\{(0,t,0),\ t\in\mathbb{R}\}$, то факторпространство $\widehat{G}/\widehat{H}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ в том и только том случае, если $\widehat{G}$ есть универсальная накрывающая группа $\widetilde{G}$. Левые сдвиги элементами прообраза $p^{-1}(e)$ единичного элемента $e\in L$ образуют центральную циклическую подгруппу $Z^*\subset\widetilde{G}$, изоморфную $\mathbb{Z}$. Так как центр группы $\widetilde{G}$ состоит из элементов $\{(0,0,z),\ z\in\mathbb{R}\}$, то $Z^*=(0,0,k\mathbb{Z})\subset\sigma(\widetilde{G}/H)$ с фиксированным $k\in\mathbb{R}$.

Из этих рассмотрений получаем следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Пусть $r\in\mathbb{R}$ фиксировано. Тогда каждая лупа $\widetilde{L}^{(v)}$ есть универсальное накрытие лупы L, для которой G_r — группа, топологически порожденная левыми сдвигами L.*

Другие примеры такого рода — это лупы $\widetilde{L}(a,ql)$. Пусть V и W — вещественные векторные пространства размерности m и n. Пусть $a:V\times V\to W$ — симметричное билинейное отображение, $q:V\times V\to\mathbb{R}$ — симметричная билинейная форма, а $l:V\to W$ — линейное отображение такое, что $ql\neq 0$, и не существует $0\neq x\in V$, одновременно удовлетворяющего соотношениям $q(x,x)=0$ и $l(x)=0$. Собственная топологическая лупа $\widetilde{L}(a,ql)$ определяется на $V\oplus W$ как

$$(x,\xi)\circ(y,\eta)=(x+y,\xi+\eta+a(x,y)+q(x,x)l(y))$$

(см. [8, пример 17.5, с. 210–215]). Элемент (x_0,ξ_0) коммутирует со всеми элементами (y,η) лупы $\widetilde{L}(a,ql)$ в том и только том случае, если справедливо равенство $q(x_0,x_0)l(y)=q(y,y)l(x_0)$. Так как левая часть этого тождества линейна, а правая часть квадратична по $y\in V$, то это условие эквивалентно условиям $q(x_0,x_0)=0$ и $l(x_0)=0$. Непосредственное вычисление дает, что подгруппа $\widetilde{Z}=\{(0,\xi),\ \xi\in W\}$ является центром лупы $\widetilde{L}(a,ql)$. Левые сдвиги $\widetilde{\lambda}_{(x,\xi)}$ лупы $\widetilde{L}(a,ql)$ определяются как

$$\widetilde{\lambda}_{(x,\xi)}:(y,\eta)\longmapsto(x+y,\xi+\eta+a(x,y)+g(x,x)l(y)).$$

Группа $\widetilde{G}$, топологически порожденная левыми сдвигами $\widetilde{L}(a,ql)$ представляет собой полупрямое произведение нормальной подгруппы N, состоящей из отображений

$$\Big\{g_{(t,\tau)}:(y,\eta)\mapsto(t+y,\tau+\eta+a(t,y)):V\oplus W\to V\oplus W,\ t\in V,\ \tau\in W\Big\},$$

и абелевой группы S, порожденной множеством отображений

$$\Big\{s_{(u,v)}:(y,\eta)\mapsto(y,\eta+q(u,v)l(y)):V\oplus W\to V\oplus W,\ u,v\in V\Big\}.$$

Так как подгруппа S абелева, то для любого элемента n_0s_0 центра Z^* группы $\widetilde{G}=NS$ имеем $sn_0=n_0s$ для всех $s\in S$ и $ns_0=s_0n$ и всех $n\in N$. Соотношение $s_{(u,v)}g_{(t_0,\tau_0)}=g_{(t_0,\tau_0)}s_{(u,v)}$ при

всех $u, v \in V$ эквивалентно соотношению $q(u,v)l(t_0+y) = q(u,v)l(y)$ при всех $y, u, v \in V$. Так как l — линейное отображение, то $q(u,v)l(t_0) = 0$ при всех $u, v \in V$ или, эквивалентно, $t_0 \in \operatorname{Ker} l$.

Пусть s_0 — отображение $s_0 : (y, \eta) \mapsto (y, \eta + K_0(y))$, где K_0 — элемент $\operatorname{Hom}(V, W)$, принадлежащий образу линейного отображения

$$u \otimes v \mapsto q(u,v)l : V \otimes V \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W).$$

Соотношение $s_0 g_{(t,\tau)} = g_{(t,\tau)} s_0$ при всех $(t, \tau) \in V \otimes W$ эквивалентно условию $K_0(y) = K_0(y+t)$ при всех $y, t \in V$. Так как K_0 — линейное отображение, то $K_0(t) = 0$ при всех $t \in V$ или $K_0 = 0$. Получается, что центр Z^* группы $\widetilde{G}$ состоит из отображений $\{g_{(t,\tau)},\ t \in \operatorname{Ker} l,\ \tau \in W\}$. Группа Z^* изоморфна $\mathbb{R}^{n+d}$, где $d = \dim \operatorname{Ker} l$. Левые сдвиги, соответствующие центральным элементам лупы $\widetilde{L}(a, ql)$, образуют подгруппу $\{g_{(0,\tau)},\ \tau \in W\}$ в Z^*. Группа $K = \{(x, 0),\ x \in \operatorname{Ker} l\}$ лупы $\widetilde{L}(a, ql)$ не есть нормальная подгруппа лупы $\widetilde{L}(a, ql)$, потому что равенство $K \circ (x, \xi) = (x, \xi) \circ K$ не выполняется при $x \notin \operatorname{Ker} l$. Из всего вышесказанного вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Пусть D — дискретная подгруппа Z^*, изоморфная $\mathbb{Z}^k$, $1 \leqslant k \leqslant n+d$. Тогда факторгруппа $\widetilde{G}/D$ есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами лупы L_D, для которой $\widetilde{L}(a, ql)$ — универсальная накрывающая в том и только том случае, если подгруппа D содержится в N.*

Пусть $\overline{D}$ — центральная подгруппа $\widetilde{L}(a, ql)$, определенная как $\{(0, \delta),\ \lambda_{(0,\delta)} = g_{(0,\delta)} \in D\}$.

Замечание 3.4. *Умножение в лупе L_D можно записать в виде*

$$(x, \xi + \overline{D}) \circ (y, \eta + \overline{D}) = \big(x + y, \xi + \eta + a(x,y) + q(x,x)l(y) + \overline{D}\big).$$

Пусть $r \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, а G_r — группа Ли, определенная на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ как

$$(u_1, v_1, z_1 + r\mathbb{Z}) \cdot (u_2, v_2, z_2 + r\mathbb{Z}) = (u_1 + u_2,\ e^{u_2} v_1 + v_2,\ z_1 + z_2 + r\mathbb{Z}).$$

Ясно, что универсальная накрывающая $\widetilde{G}$ представляет собой прямое произведение $\mathbb{R}$ на двумерную аффинную группу $\mathcal{L}_2 = \{x \mapsto ax + b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ и, следовательно, гомеоморфна $\mathbb{R}^3$. Умножение в ней задается соотношением

$$(u_1, v_1, z_1) \cdot (u_2, v_2, z_2) = (u_1 + u_2,\ e^{u_2} v_1 + v_2,\ z_1 + z_2).$$

Стабилизатор $\widetilde{H}$ единицы топологической группы $\widetilde{L}$, для которой группа $\widetilde{G}$ — группа, топологически порожденная левыми сдвигами $\widetilde{L}$, имеет, с точностью до автоморфизма $\widetilde{G}$, одну из следующих форм:

(i) $\{(t, 0, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$,
(ii) $\{(0, t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$

(см. [8, теорема 23.7]). Любая топологическая лупа $\widetilde{L}$ такая, что ее стабилизатор имеет вид (i), соответствует сечению вида $\sigma : (0, v, z)\widetilde{H} \mapsto (t(z), e^{t(z)} v, z) : \widetilde{G}/\widetilde{H} \to \widetilde{G}$, где $t(z)$ Э— непрерывная функция, $t(0) = 0$. Соответствующие топологические лупы $\widetilde{L}_{(t)}$ гомеоморфны $\mathbb{R}^2$. Если отождествить $(v, z) \in \mathbb{R}^2$ со смежным классом $(0, v, z)\widetilde{H}$, то умножение в $\widetilde{L}_{(t)}$ можно выразить как

$$(v_1, z_1) \circ (v_2, z_2) = \sigma((0, v_1, z_1)\widetilde{H})(0, v_2, z_2)\widetilde{H} = (t(z_1), e^{t(z_1)} v_1, z_1)(0, v_2, z_2)\widetilde{H}$$
$$= (t(z_1), e^{t(z_1)} v_1 + v_2, z_1 + z_2)\widetilde{H} = (0, v_1 + e^{-t(z_1)} v_2, z_1 + z_2)\widetilde{H} = (v_1 + e^{-t(z_1)} v_2, z_1 + z_2).$$

Если (z_1, v_1) Э— центральный элемент лупы $\widetilde{L}_{(t)}$, то должно быть

$$(v_1, z_1) \circ (v, z) = (v_1 + e^{-t(z_1)} v, z_1 + z) = (v, z) \circ (v_1, z_1) = (v + e^{-t(z)} v_1, z + z_1)$$

при всех $(v, z) \in \mathbb{R}^2$. Получается, что $v_1(1 - e^{-t(z)}) = v(1 - e^{-t(z_1)})$ для всех $(v, z) \in \mathbb{R}^2$. Это приводит к соотношению $(v_1, z_1) = (0, 0)$, которое означает, что центр Z лупы $\widetilde{L}_{(t)}$ содержится в подмножестве $\{(0, z),\ z \in \mathbb{R},\ t(z) = 0\}$. Так как левые сдвиги лупы $\widetilde{L}_{(t)}$ порождают $\widetilde{G}$, а, следовательно, $\widetilde{L}_{(t)}$ — собственная лупа, то функция $t(z)$ не может быть тождественно равной нулю. Получается, что центр Z есть циклическая нормальная подгруппа $\{(0, kr),\ k \in \mathbb{Z}\}$ of $\widetilde{L}_{(t)}$

при некотором r, для которого $t(kr) = 0$ при любом $k \in \mathbb{Z}$. Так как центр Z должен лежать в среднем ядре N_m лупы $\widetilde{L}_{(t)}$, то равенство

$$(v_1, z_1) \circ ((0, kr) \circ (v_2, z_2)) = (v_1 + e^{-t(z_1)}v_2,\ kr + z_1 + z_2) =$$
$$= ((v_1, z_1) \circ (0, kr)) \circ (v_2, z_2) = (v_1 + e^{-t(z_1+kr)}v_2,\ kr + z_1 + z_2)$$

справедливо при всех (v_i, z_i), $i = 1, 2$, и $k \in \mathbb{Z}$. Это условие эквивалентно свойству: $t(z) = t(z + kr)$ для любых $z \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$, которое означает, что функция $t(z)$ есть непостоянная периодическая функция с периодом r. С другой стороны, если функция $t(z)$ — непостоянная периодическая функция с периодом r, удовлетворяющая условиям $t(0) = t(kr) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то ясно, что отображение $(v, z) \mapsto (v, z + r\mathbb{Z})$ есть гомоморфизм луп и ядро этого гомоморфизма есть нормальная подгруппа $\{(0, z),\ z \in r\mathbb{Z}\}$. Получаем, что эта подгруппа содержится в центре Z лупы $\widetilde{L}_{(t)}$. Следовательно, Z — наибольшая подгруппа $\widetilde{L}_{(t)}$ вида $\{(0, z),\ z \in r\mathbb{Z}\}$, где r — период функции t.

Рассмотрим теперь случай, когда стабилизатор H единицы топологической лупы в $\widetilde{G}$ имеет вид (ii). В соответствии с [8, теорема 23.7(ii)], любая лупа $\widetilde{L} = \widetilde{L}_{(f)}$ такого типа может быть реализована на $\mathbb{R}^2$ умножением

$$(u_1, z_1) * (u_2, z_2) = (u_1 + u_2,\ z_1 + z_2 + f(u_1, z_1)(1 - e^{u_2}))$$

таким, что $f(u, z)$ — непрерывная функция, $f(0, 0) = 0$, удовлетворяющая следующим условиям:

(α) тождества $f(0, z) = 0$ и $f(u, 0) = C(e^u - 1)$ не выполняются одновременно;

(β) для всех пар $(u_1, z_1), (u_2, z_2) \in \mathbb{R}^2$ существует единственное $z \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее уравнению

$$z + f(u_2 - u_1, z)(1 - e^{u_1}) = z_2 - z_1.$$

Отображение $\sigma : \widetilde{L}_{(f)} \to G : (u, z) \mapsto (u, f(u, z), z + f(u, z))$ отображает элементы лупы $\widetilde{L}_{(f)}$ на соответствующие левые сдвиги в группе G. Элемент (u_1, z_1) коммутирует с каждым элементом лупы $\widetilde{L}_{(f)}$ в том и только том случае, если

$$(u_1, z_1) * (u, z) = (u_1 + u,\ z_1 + z + f(u_1, z_1)(1 - e^u)) =$$
$$= (u, z) * (u_1, z_1) = (u + u_1,\ z + z_1 + f(u, z)(1 - e^{u_1}))$$

при всех $(u, z) \in \mathbb{R}^2$. Это эквивалентно тому, что $f(u_1, z_1)(1-e^u) = f(u, z)(1-e^{u_1})$, а следовательно, $0 = f(0, z)(1 - e^{u_1})$ при всех $z \in \mathbb{R}$. Если $u_1 \neq 0$, то

$$\frac{f(u_1, z_1)}{1 - e^{u_1}} = \frac{f(u, z)}{1 - e^u};$$

это равно постоянной C, а $f(u, z)$ одновременно удовлетворяет соотношениям $f(0, z) = 0$ и $f(u, 0) = C(1-e^u)$, что противоречит (α). Если $u_1 = 0$, то $(0, z_1)$ коммутирует с каждым элементом $\widetilde{L}_{(f)}$ в том и только том случае, если $f(0, z_1) = 0$. Следовательно, левые сдвиги, соответствующие элементу, коммутирующему со всеми элементами $\widetilde{L}_{(f)}$, имеют вид $(0, 0, z)$.

Определим теперь элементы подгруппы $W = \{(0, z),\ z \in \mathbb{R}\}$, коммутирующие с каждым элементом $\widetilde{L}_{(f)}$ и лежащие в ядре $\widetilde{L}_{(f)}$. Простое вычисление показывает, что W содержится в правом ядре N_r лупы $\widetilde{L}_{(f)}$. Элемент $(0, z) \in W$ с $f(0, z) = 0$ содержится в среднем ядре N_m лупы $\widetilde{L}_{(f)}$ в том и только том случае, если выполнено

$$(u_1, z_1) * ((0, z) * (u_2, z_2)) = (u_1 + u_2,\ z + z_1 + z_2 + f(u_1, z_1)(1 - e^{u_2}))$$
$$= ((u_1, z_1) * (0, z)) * (u_2, z_2) = (u_1 + u_2,\ z + z_1 + z_2 + f(u_1, z_1 + z)(1 - e^{u_2}))$$

при всех (u_i, z_i), $i = 1, 2$. Это условие эквивалентно свойству: $f(u_1, z_1) = f(u_1, z_1 + kz)$, $k \in \mathbb{Z}$ для любого $(u_1, z_1) \in \mathbb{R}^2$. Аналогичное вычисление показывает, что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы элемент $(0, z)$, коммутирующий с каждым элементом $\widetilde{L}_{(f)}$, содержался бы в левом ядре N_l. Центр Z лупы $\widetilde{L}_{(f)}$ есть наибольшая замкнутая подгруппа ядра $N = N_l \cap N_m \cap N_r$, состоящая из элементов, коммутирующих с каждым элементом $\widetilde{L}_{(f)}$. Следовательно, центр Z есть циклическая подгруппа $\{(0, kz_0),\ k \in \mathbb{Z}\}$ в том и только том случае, если для любого $u \in \mathbb{R}$

функция одной переменной $z \mapsto f(u,z)$ есть непостоянная периодическая функция с периодом z_0. Подгруппа W есть центр $\widetilde{L}_{(f)}$ в том и только том случае, если для любого $u \in \mathbb{R}$ функция $z \mapsto f(u,z)$ постоянна, или, эквивалентно, $f(u,z) = f(u)$.

Если $\widetilde{L}_{(f)}$ — почти дифференцируемая сильно лево-альтернативная лупа (см. определение 2.6), то левые сдвиги образуют множество

$$\left\{ \left(x,\ \big(\alpha x + (1+\beta)y\big)\frac{e^x - 1}{x},\ \alpha x + \beta y \right),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $-1 < \beta < 0$ (см. [8, с. 299, 305]). Левый сдвиг, соответствующий элементу $\widetilde{L}_{(f)}$, коммутирующему с каждым элементом $\widetilde{L}_{(f)}$, имеет вид $(0,0,z)$, а потому центр $\widetilde{L}_{(f)}$ в этом случае тривиален.

Предложение 3.5. *Пусть $\widetilde{L}$ — топологическая лупа, для которой группа $\widetilde{G}$, являющаяся прямым произведением $\mathbb{R}$ и 2-мерной аффинной группы, есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами. Тогда лупа $\widetilde{L}$ есть универсальное накрытие лупы, для которой группа G_r есть группа, порожденная левыми сдвигами, в том и только том случае, если $\widetilde{L}$ — либо лупа $\widetilde{L}_{(t)}$, в которой непрерывная функция $t(z)$ удовлетворяет условию $t(z) = t(z + r\mathbb{Z})$, либо $\widetilde{L}$ лупа $\widetilde{L}_{(f)}$, в которой функция $f(u,z)$ удовлетворяет условию $f(u,z) = f(u, z + r\mathbb{Z})$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$.*

Группа G_r не может быть группой, топологически порожденной левыми сдвигами почти дифференцируемой лево-альтернативной лупы.

4. Топологические лупы, реализованные как сечения трехмерных квазипростых групп Ли

Любая трехмерная связная квазипростая группа Ли G есть накрытие ортогональной группы $SO_3(\mathbb{R})$ или связная компонента $PSL_2(\mathbb{R})$ группы гиперболических движений.

Если G компактна, то любая связная подгруппа H изоморфна одномерной ортогональной группе $SO_2(\mathbb{R})$ и содержит центр G. Тогда факторгруппа G/H гомеоморфна проективной плоскости. Собственная топологическая лупа не может быть гомеоморфна G/H, поскольку проективная плоскость — неориентрируемое многообразие (см. [8, Corollary 1.15]).

Пусть теперь G локально изоморфна группе $PSL_2(\mathbb{R})$. Тогда G содержит в точности один класс сопряженности двумерных подгрупп; каждая из этих подгрупп в этом классе изоморфна аффинной группе $\mathcal{L}_2 = \{x \mapsto ax + b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ и тривиально пересекает центр.

Группа G содержит три класса сопряженности однопараметрических подгрупп. Один из этих классов сопряженности состоит из параболических однопараметрических подгрупп; они являются подгруппами, содержащимися в двумерных подгруппах как нормальные подгруппы. Другой класс сопряженности состоит из гиперболических однопараметрических подгрупп, являющимися непараболическими подгруппами двумерных подгрупп. Третий класс сопряженности состоит из эллиптических однопараметрических подгрупп. Эти подгруппы либо компактны, либо содержат центр G (см. [9]).

Если L — топологическая собственная лупа на связном многообразии такая, что группа G, топологически порожденная левыми сдвигами, локально компактна, то G локально изоморфна $PSL_2(\mathbb{R})$, а H изоморфна группе $\mathcal{L}_2$. Топологические одномерные лупы, для которых группа $PSL_2(\mathbb{R})$ есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами, определены в [8, Sec. 18]. Пусть $\tilde{L}$ — универсальное накрытие связной одномерной топологической лупы L, для которой $PSL_2(\mathbb{R})$ есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами. Центр Z универсального накрытия $\tilde{L}$ есть бесконечная циклическая группа, а универсальное накрытие $\widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$ есть группа, топологически порожденная порожденная левыми сдвигами $\tilde{L}$. n-Кратное накрытие $L_{(n)}$ лупы L есть факторлупа $\tilde{L}/n\mathbb{Z}$. Так как стабилизатор $H_{(n)}$ единицы $L_{(n)}$ в группе $G_{(n)}$, топологически порожденной левыми сдвигами $L_{(n)}$, изоморфен группе $\mathcal{L}_2$, то группа $G_{(n)}$ есть n-кратное накрытие $PSL_2(\mathbb{R})$ (см. раздел 2).

Рассмотрим теперь двойное накрытие $L_{(2)}$ лупы L. Левые сдвиги $L_{(2)}$ можно представить матрицами

$$\lambda_t = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & a(t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant u < 2\pi, \right\}, \tag{2}$$

где $a(t) \geqslant 0$, $a(0) = a(2\pi) = 1$, $b(0) = b(2\pi) = 0$. Центр $L_{(2)}$ имеет порядок 2, а соответствующие левые сдвиги образуют группу

$$\left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \epsilon \in \{1, -1\} \right\}.$$

В рассматриваемой параметризации лупа $L_{(2)}$ реализуется на интервале $[0, 2\pi)$, а потому центральные элементы $L_{(2)}$ суть 0 и π. Так как центральные элементы $L_{(2)}$ содержатся в ядре $L_{(2)}$, то $\lambda_\pi \lambda_t = \lambda_{\pi+t}$, или, эквивалентно,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & a(t)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\pi + t) & \sin(\pi + t) \\ -\sin(\pi + t) & \cos(\pi + t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\pi + t) & 0 \\ b(\pi + t) & a(\pi + t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a(t) = a(t + \pi) \quad \text{и} \quad b(t) = b(t + \pi) \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi. \tag{3}$$

Обратно, если $\hat{L}$ — топологическая лупа, для которой группа $SL_2(\mathbb{R})$ представляет собой группу, топологически порожденную ее левыми сдвигами, и такая, что функции $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию (3), то $\hat{L}$ — двойное накрытие лупы L такое, что $PSL_2(\mathbb{R})$ — группа, порожденная ее левыми сдвигами. В [8, предложение 18.3] было доказано, что сечение $\sigma : L = [0, \pi) \to G$, определяемое дифференцируемыми функциями $a(t) \geqslant 0$, $b(t)$ с $a(0) = a(\pi) = 1$, $b(0) = b(\pi) = 0$, соответствует почти C^1-дифференцируемой лупе L в том и только том случае, если для функции $d(t) = \dot{a}^2 + \dot{a}b + a\dot{b} - a^2$, где $\dot{a}$, $\dot{b}$ — производные a и b, выполнено неравенство $d(t) \leqslant 0$ при всех $t \in [0, \pi)$ и множества

$$Z_c = \{t \in [0, \pi) : d(t) = 0 \ \text{ и } \ a(t)[b(t) + \dot{a}(t)] = c\}$$

вполне несвязны для каждого $c \in \mathbb{R}$.

Изучим теперь условия на функции $a(t)$ и $b(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, при которых множество (2) есть образ дифференцируемого сечения $\sigma : \hat{L} \to G$, состоящего из множества левых сдвигов почти C^1-дифференцируемой лупы $\hat{L}$, для которой группа $G = SL_2(\mathbb{R})$ есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами. Имеем

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin x(a \cos t + b \sin t) & + & \cos x a^{-1} \sin t \\ \sin x(-a \sin t + b \cos t) & + & \cos x a^{-1} \cos t \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \sin \tilde{x} \\ \cos \tilde{x} \end{pmatrix}$$

с некоторым $0 \leqslant \mu \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\phi_{(x)}(t) := \frac{\sin \tilde{x}}{\cos \tilde{x}}(t) = \frac{\sin x(a \cos t + b \sin t) + \cos x a^{-1} \sin t}{\sin x(-a \sin t + b \cos t) + \cos x a^{-1} \cos t}$$
$$= \frac{\sin x(A \cos t + B \sin t) + \cos x \sin t}{\sin x(-A \sin t + B \cos t) + \cos x \cos t},$$

где $A = a^2$ и $B = ab$. Отображение $\sigma : \hat{L} \to G$ есть сечение, принадлежащее топологической лупе $\hat{L}$, реализованной на 1-сфере $\mathbb{R} \mod 2\pi$, в том и только том случае, если отображение $\arctan \phi_{(x)} : [0, 2\pi)) \to [0, \pi))$ строго монотонно. В самом деле, в соответствии с определением $\phi_{(x)}(t)$, имеем $\arctan \phi_{(x)}(t) = \lambda_t(x) \mod \pi$. Множество $\{\lambda_t, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$ точно транзитивно на $\mathbb{R} \mod 2\pi$ в том и только том случае, если для любого x непрерывная функция $\arctan \phi_{(x)}$, а

значит, и $\phi_{(x)}$ строго монотонны $\bmod 2\pi$. Функция $\phi_{(0)}(t) = \operatorname{tg} t$ строго монотонно возрастает на $[0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ и

$$\lim_{\substack{t<\frac{\pi}{2}\\ t\to\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = \lim_{\substack{t<\frac{3\pi}{2}\\ t\to\frac{3\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = \infty, \quad \lim_{\substack{t>\frac{\pi}{2}\\ t\to\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = \lim_{\substack{t>\frac{3\pi}{2}\\ t\to\frac{3\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = -\infty.$$

Так как отображение $x \mapsto \phi_{(x)}(t)$ — непрерывное отображение 1-сферы S^1 в пространство непрерывных отображений $S^1 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ в компактно выпуклой топологии и все функции $\phi_{(x)}(t)$ строго монотонны, то все функции $\phi_{(x)}(t)$ строго монотонно возрастают. Это означает также, что для каждого $x \in [0, 2\pi)$ существуют точки $q_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2$, такие, что соответствующая функция $\phi_{(x)}(t)$ монотонно возрастает в $[0, 2\pi) \setminus \{q_1, q_2\}$ и

$$\lim_{\substack{t<q_i\\ t\to q_i}} \phi_{(x)}(t) = \infty, \quad \lim_{\substack{t>q_i\\ t\to q_i}} \phi_{(x)}(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 2\pi} \phi(t).$$

Если лупа $\hat{L}$ почти дифференцируема, то функции $a(t)$ и $b(t)$ дифференцируемы. Так как функции $A(t)$ и $B(t)$ дифференцируемы, то функция $\phi(t)$ также дифференцируема. Следовательно, нужно рассматривать функцию $\phi(t) = \phi_{(x)}(t)$ для которой $\dfrac{d\phi}{dt} > 0$ при всех $t \in [0, 2\pi)$. Это в точности случай, когда выражение

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{dt}\big(\sin x(A\cos t + B\sin t) + \cos x \sin t\big)\right]\big(\sin x(-A\sin t + B\cos t) + \cos x\cos t\big)\\ &-\big(\sin x(A\cos t + B\sin t) + \cos x\sin t\big)\left[\frac{d}{dt}\big(\sin x(-A\sin t + B\cos t) + \cos x\cos t\big)\right]\end{aligned}$$

положительно при всех $t \in [0, 2\pi)$. Это выражение равно

$$\begin{aligned}Q_t(\sin x, \cos x) &= [A^2 + B^2]\sin^2 x + \cos^2 x + 2B\sin x\cos x + [-\dot{B}A + \dot{A}B]\sin^2 x + \dot{A}\sin x\cos x\\ &= a^2[a^2 + b^2 + \dot{a}b - a\dot{b}]\sin^2 x + 2a[b + \dot{a}]\sin x\cos x + \cos^2 x,\end{aligned} \tag{4}$$

где $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{a}$, $\dot{b}$ — производные A, B, a, b соответственно.

Квадратичная форма (4) от переменных $\sin x$ и $\cos x$ знакоопределена в том и только том случае, если дискриминант

$$a^2[(b + \dot{a})^2 - (a^2 + b^2 + \dot{a}b - a\dot{b})] = a^2[\dot{a}^2 + \dot{a}b + a\dot{b} - a^2]$$

всегда неотрицателен. Это эквивалентно условию

$$d(t) = \dot{a}^2 + \dot{a}b + a\dot{b} - a^2 < 0 \tag{5}$$

для всех $t \in [0, 2\pi)$.

Для любого x функции $\phi(t)$ строго монотонно возрастают в том и только том случае, если $\dfrac{d\phi}{dt}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in [0, \pi)$, а множества нулей $\zeta(x) = \left\{t_0 : \dfrac{d\phi}{dt}(t_0) = 0\right\}$ вполне несвязны.

Множество $\zeta(x)$ состоит из тех значений $t \in [0, 2\pi)$, для которых $Q_t(\sin x, \cos x) = 0$ и $d(t) = 0$. Поскольку для t, $d(t) = 0$, справедливо соотношение

$$Q_t(\xi, \eta) = \left[a(t)\left(b(t) + \dot{a}(t)\right)\xi + \eta\right]^2,$$

то $Q_t(\sin x, \cos x) = 0$ в том и только том случае, если $\cos x = -a(t)\big(b(t) + \dot{a}(t)\big)\sin x$. Следовательно, множество $\zeta(x)$ состоит из тех значений $t \in [0, 2\pi)$, для которых $d(t) = 0$ и $\cos x = -a(t)\big(b(t) + \dot{a}(t)\big)\sin x$.

Следовательно, множества $\zeta(x)$ вполне несвязны в том и только том случае, если множества

$$Z_c = \{t \in \mathbb{R} : d(t) = 0 \ \text{ и } \ a(t)[b(t) + \dot{a}(t)] = c\}$$

вполне несвязны для каждого $-\operatorname{ctg} x = c \in \mathbb{R}$.

Лупа L C^1-дифференцируема, если обратное каждого отображения $t \mapsto \phi(t)$ C^1-дифференцируемо для каждого x. Это условие эквивалентно соотношению (5).

Суммируя сказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Дифференцируемое сечение $\sigma : L = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to G$ определяет почти C^1-дифференцируемую лупу L в том и только том случае, если для функции $d(t)$ выполнено неравенство $d(t) \leqslant 0$ при всех $t \in [0, 2\pi)$ и множества*

$$Z_c = \{t \in [0, 2\pi) : d(t) = 0 \ \ и \ \ a(t)[b(t) + \dot{a}(t)] = c\}$$

вполне разрывны для всякого $c \in \mathbb{R}$. Лупа L C^1-дифференцируема в том и только том случае, если $d(t) < 0$ для всех $t \in [0, \pi)$.

Условия на дифференцируемые функции $a(t)$ и $b(t)$ вполне аналогичны условиям на соответствующие функции для существования дифференцируемых одномерных луп, для которых группа $PSL_2(\mathbb{R})$ есть группа, порожденная левыми сдвигами (см. [8, предложение 18.3, с. 236–238]).

Кроме того, условия, гарантирующие, что два дифференцируемых точно транзитивных сечения в $SL_2(\mathbb{R})$ соответствуют изоморфным лупам, вполне те же, что и условия, при которых два дифференцируемых точно транзитивных сечения в $PSL_2(\mathbb{R})$ дают изоморфные одномерные лупы. Нужно только в [8, теорема 18.5] заменить интервал $[0, \pi)$ на $[0, 2\pi)$.

Если L — связная двумерная топологическая лупа, для которой трехмерная квазипростая группа Ли G есть группа, топологически порожденная левыми сдвигами, то G локально изоморфно группе $PSL_2(\mathbb{R})$, а стабилизатор единицы L в G есть однопараметрическая подгруппа G.

Покажем теперь, что никакое собственное накрытие $PSL_2(\mathbb{R})$ не может быть группой, топологически порожденной левыми сдвигами двумерной связной топологической лупы. Начнем со следующего утверждения.

Предложение 4.2. *Не существует никакой связной двумерной топологической лупы L такой, что группа G, (топологически) порожденная левыми сдвигами L, изоморфна накрывающей группе $SL_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Так как L связна, то стабилизатор H — связная одномерная подгруппа G. Если H изоморфна накрытию $SO_2(\mathbb{R})$, то H содержит центральные элементы G, а G не может действовать эффективно на G/H. Так как G — накрывающая группа $SL_2(\mathbb{R})$, то имеем накрывающий гомоморфизм $\pi : G \to SL_2(\mathbb{R})$. Элемент g группы G называется эллиптическим, параболическим или гиперболическим, в соответствии с тем является ли элемент $\pi(g)$ эллиптическим, параболическим или гиперболическим в $SL_2(\mathbb{R})$; абсолютное значение следа эллиптического элемента меньше 2, для параболического элемента оно равно 2, а для гиперболического — больше 2. Если стабилизатор H не изоморфен $SO_2(\mathbb{R})$, то он состоит из параболических элементов, или или все элементы H $setminus\{1\}$ гиперболические.

Сначала рассмотрим случай, когда H состоит из параболических элементов. Так как все такие подгруппы топологически сопряжены в GБ то можно считать, что

$$\pi(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Рассмотрим разложение Ивасавы $G = K \cdot M \cdot H$, где K — максимальная компактная подгруппа G такая, что

$$\pi(K) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\},$$

а M — однопараметрическая подгруппа такая, что $M \setminus \{1\}$ состоит из гиперболических элементов и

$$\pi(M) = \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad 0 < s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Проекция π биективна на подгруппах M и H. Произведение $\pi(K) \cdot \pi(M) \cdot \pi(H)$ есть разложение Ивасавы группы $SL_2(\mathbb{R})$. Из разложения Ивасавы группы G следует, что многообразие $K \times M$ параметризует лупу L, а лупа $\pi(L)$ параметризована множеством матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \ s > 0 \right\}.$$

Левые сдвиги L дают сечение $\sigma(k,m) = k \cdot m \cdot f(k,m)$, $k \in K$, $m \in M$, с некоторой функцией $f : K \times M \to H$. Проекция $\sigma(k,m)$ при отображении π имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u(k,m) & 1 \end{pmatrix}.$$

Так все параболические элементы G со следом 2 содержатся в стабилизаторе некоторого элемента L, то образ сечения σ не содержит параболических элементов, имеющих след 2, отличных от единицы. След единичной матрицы равен 2, а функция $u(k,m)$ непрерывна. Имеем

$$\operatorname{Trace}\left[\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u(k_0,s) & 1 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{Trace}\begin{pmatrix} \epsilon s & 0 \\ 0 & \epsilon s^{-1} \end{pmatrix} = \epsilon(s + s^{-1}),$$

где

$$\pi(k_0) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \epsilon \in \{\pm 1\}.$$

Так как $\pi\sigma(L) \setminus \{1\}$ содержит элементы следа >2, а также элементы следа <2, то существует элемент в $\pi\sigma(L) \setminus \{1\}$ со следом 2, и мы приходим к противоречию.

Если $H \setminus \{1\}$ состоит из гиперболических элементов, то H можно выбрать таким образом, что

$$\pi(H) = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, \quad 0 < u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Рассмотрим разложение $G = K \cdot P \cdot H$ с той же максимальной компактной подгруппой K, что и выше, и однопараметрической подгруппой P такой, что

$$\pi(P) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Лупа L предполагается параметризованной $K \times P$, а $\pi(L)$ — множеством матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Левые сдвиги L дают сечение $\sigma(k,p) = k \cdot p \cdot f(k,p)$, $k \in K, p \in P$ с некоторой функцией $f : K \times P \to H$. Проекция $\sigma(k,p)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k,p) & 0 \\ 0 & u(k,p)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Так как все гиперболические элементы G со следом >2 содержатся в стабилизаторе некоторого элемента L, то образ $\sigma(L)$ сечения σ не содержит гиперболических элементов со следом >2. Следовательно, след любого элемента $\pi\sigma(L)$ содержится в полуоткрытом интервале $(-\infty, 2]$. Имеем

$$\operatorname{Trace}\left[\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & u(8,8)^{-1} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \operatorname{Trace}\left[\begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\left(\frac{\pi}{4},8\right) & 0 \\ 0 & u\left(\frac{\pi}{4},8\right)^{-1} \end{pmatrix}\right] = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}u_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_0^{-1}\right) \in (-\infty, 2], \qquad u_0 = u\left(\frac{\pi}{4},8\right).$$

Однако неравенство

$$0 < \frac{9}{\sqrt{2}}u_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_0^{-1} \leqslant 2$$

не имеет решений при положительных u, потому что

$$\frac{9\sqrt{2}u + \sqrt{2}u^{-1}}{2} \geqslant \sqrt{18} > 2.$$

□

Теорема 4.3. *Пусть L — двумерная связная топологическая лупа такая, что группа G, топологически порожденная левыми сдвигами L, локально изоморфна группе $PSL_2(\mathbb{R})$. Тогда G изоморфна $PSL_2(\mathbb{R})$, стабилизатор H единицы $1 \in L$ в G изоморфен $SO_2(\mathbb{R})$, а L гомеоморфна $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $H \setminus \{1\}$ состоит либо из гиперболических, либо параболических элементов. Далее можно считать, что L односвязна; в противном случае можно рассмотреть универсальное накрытие L. Так как L гомеоморфно G/H и для любого конечного накрытия G группы $PSL_2(\mathbb{R})$ факторпространство G/H является цилиндром, то L гомеоморфна $\mathbb{R}^2$, а G — универсальное накрытие $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ группы $PSL_2(\mathbb{R})$. Универсальное накрытие $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ есть также и накрытие $SL_2(\mathbb{R})$, что приводит к противоречию с предыдущим предложением.

Если H — накрытие максимальной компактной подгруппы $PSL_2(\mathbb{R})$, то G должна иметь тривиальный центр; иначе H должна содержать нетривиальный центр G. Отсюда следует, что G гомеоморфна $PSL_2(\mathbb{R})$, а L гомеоморфна $\mathbb{R}^2$. □

Доказательство предложения 4.2 является небольшой модификацией доказательства [8, предложение 19.3]. Эта модификация связана с тем, что стабилизатор H связен и не содержит матриц с отрицательным следом.

Лупы $(L, \circ)$ и $(L', *)$ изоморфны, если существуют биекции $\alpha, \beta, \gamma : L \longrightarrow L'$ такие, что выполнено $\alpha(x) * \beta(y) = y(x \circ y)$ при всех $x, y \in L$.

В [8, Sec. 22] доказано, что любая двумерная почти дифференцируемая лупа, соответствующая сечению $\sigma : G/H \longrightarrow G$, такая, что G — группа Ли с простой алгеброй Ли, а образ $\exp(T_1(\sigma/G/H))$ касательного пространства $T_1(\sigma(G/H))$ в точке $1 \in G$ при экспоненциальном отображении содержится в $\sigma(G/H)$, изотопна гиперболической плоскости, реализованной на единичной окружности в $\mathbb{C}$ умножением

$$z_1 \circ z_2 = \frac{z_1 + z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2}$$

при всех $z_i \in \mathbb{C}$ with $|z_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2$.

5. Разложение накрывающих групповых многообразий $PSL_2(\mathbb{R})$

Экспоненциальное отображение — единственное работоспособное средство для конкретного описания таких накрытий групп Ли, которые не допускают линейного представления. Хотя экспоненциальное отображение, вообще говоря, не инъективно и не сюръективно, во многих случаях его достаточно для явного определения геометрии накрывающих групп. Продемонстрируем это обстоятельство на примере накрывающей группы $PSL_2(\mathbb{R})$.

5.1. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра вещественных (2×2)-матриц. Матрицы

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{T}^2 = -\mathbf{U}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{HT} = -\mathbf{TH} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{UT} = -\mathbf{TU} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{HU} = -\mathbf{UH} = \mathbf{T},$$

образуют базис векторного пространства $\mathcal{A}$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ группы $SL_2(\mathbb{R})$ задается подпространством $\{A \in \mathcal{A},\ \operatorname{Trace} A = 0\}$, порожденным базисом $\{\mathbf{H}, \mathbf{T}, \mathbf{U}\}$. Обозначим через $\tau = \frac{1}{2}\operatorname{Trace} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ нормализованную функцию следа, а через $\kappa : X \mapsto \tau(X^2) : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — форму Картана—Киллинга на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющую соотношению

$$\kappa(h\mathbf{H} + t\mathbf{T} + u\mathbf{U}) = h^2 + t^2 - u^2.$$

Определитель матрицы $X = \xi\mathbf{1} + h\mathbf{H} + t\mathbf{T} + u\mathbf{U} \in \mathcal{A}$ равен $\det(X) = \xi^2 - h^2 - t^2 + u^2$. Так как $X^2 = \kappa(X)\mathbf{1}$ для любого $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, то $X = \xi\mathbf{1} + \mathbf{X}$, $\xi \in \mathbb{R}$, и $\mathbf{X} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ принадлежит $SL_2(\mathbb{R})$ в том и только том случае, если $1 = \xi^2 - \kappa(\mathbf{X})$. Следовательно, любой элемент $X \in SL_2(\mathbb{R})$ вида $X = \xi\mathbf{1} + \mathbf{X}$ с $\xi \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{X} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ имеет одно из следующих представлений:

(a) $X = \cos t\,\mathbf{1} + \sin t\,\mathbf{X_0}$, где $\kappa(\mathbf{X_0}) = -1$, если $\kappa(\mathbf{X}) < 0$,
(b) $X = \epsilon(\operatorname{ch} t\,\mathbf{1} + \operatorname{sh} t\,\mathbf{X_0})$ с $\epsilon \in \{\pm 1\}$, $\kappa(\mathbf{X_0}) = 1$, если $\kappa(\mathbf{X}) > 0$,
(c) $X = \epsilon\mathbf{1} + \mathbf{X}$, где $\epsilon \in \{\pm 1\}$, если $\kappa(\mathbf{X}) = 0$.

Обозначим двумерное подпространство $\mathbb{R}\mathbf{H}+\mathbb{R}\mathbf{T}$ в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ через $\mathcal{E}$ и назовем его горизонтальным подпространством $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Любой элемент алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ можно записать в виде $\mathbf{E}+u\mathbf{U}$, $u\in\mathbb{R}$, $\mathbf{E}\in\mathcal{E}$.

Стандартный двойной конус задается связным множеством $\mathcal{N}=\{\mathbf{X}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\ \kappa(\mathbf{X})=0\}$. *Внутренность* $\mathcal{K}=\{\mathbf{X}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\ \kappa(\mathbf{X})<0\}$ *стандартного двойного конуса* $\mathcal{N}$ распадается на две компоненты связности $\mathcal{K}=\mathcal{K}^{(+)}\cup\mathcal{K}^{(-)}$, где

$$\mathcal{K}^{(+)}=\Big\{\mathbf{E}+u\mathbf{U}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\ u\in\mathbb{R},\ \mathbf{E}\in\mathcal{E},\ \sqrt{\kappa(\mathbf{E})}<u\Big\},$$
$$\mathcal{K}^{(-)}=\Big\{\mathbf{E}+u\mathbf{U}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\ u\in\mathbb{R},\ \mathbf{E}\in\mathcal{E},\ -\sqrt{\kappa(\mathbf{E})}>u\Big\}.$$

Внешность стандартного двойного конуса есть связное множество

$$\hat{\mathcal{K}}=\Big\{\mathbf{E}+u\mathbf{U}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\ u\in\mathbb{R},\ \mathbf{E}\in\mathcal{E},\ \sqrt{\kappa(\mathbf{E})}>|u|\Big\}.$$

Ясно, что множества $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}^{(+)}$, $\mathcal{K}^{(-)}$ и $\hat{\mathcal{K}}$ инвариантны относительно внутренних автоморфизмов $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Используя уравнение $X^2=\kappa(X)\mathbf{1}$, для любого $X\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ получаем, что параметризованные множества

$$\Big\{X(t)=\cos t\,\mathbf{1}+\sin t\,\mathbf{X_0},\ t\in\mathbb{R}\Big\},\quad \kappa(\mathbf{X_0})=-1,$$
$$\Big\{X(t)=\operatorname{ch} t\,\mathbf{1}+\operatorname{sh} t\,\mathbf{X_0},\ t\in\mathbb{R}\Big\},\quad \kappa(\mathbf{X_0})=1,$$
$$\Big\{X(t)=\mathbf{1}+t\mathbf{X_0},\ t\in\mathbb{R}\Big\},\quad \kappa(\mathbf{X_0})=0$$

являются однопараметрическими подгруппами $SL_2(\mathbb{R})$. Экспоненциальное отображение $\exp:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to SL_2(\mathbb{R})$ допускает представления

$$\exp(\mathbf{X})=\cos\sqrt{-\kappa(\mathbf{X})}\mathbf{1}+\frac{\sin\sqrt{-\kappa(\mathbf{X})}}{\sqrt{-\kappa(\mathbf{X})}}\mathbf{X},\quad \text{если}\ \ \kappa(\mathbf{X})<0,$$
$$\exp(\mathbf{X})=\operatorname{ch}\sqrt{\kappa(\mathbf{X})}\mathbf{1}+\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\kappa(\mathbf{X})}}{\sqrt{\kappa(\mathbf{X})}}\mathbf{X},\quad \text{если}\ \ \kappa(\mathbf{X})>0,$$
$$\exp(\mathbf{X})=\mathbf{1}+\mathbf{X},\quad \text{если}\ \ \kappa(\mathbf{X})=0$$

(см. [4, 1.8, с. 24]).

5.2. Экспоненциальные отображения для накрытий $PSL_2(\mathbb{R})$. Введем теперь групповое умножение $\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}$ на алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, которое определит структуру группы на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, изоморфной универсальной накрывающей группе $\widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$. Определим умножение $\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}$ таким образом, чтобы отображение $\phi:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to SL_2(\mathbb{R})$, заданное как

$$\phi(u\mathbf{U}+\mathbf{E})=\big(\cos u\,\mathbf{1}+\sin u\,\mathbf{U}\big)\Big(\sqrt{1+\kappa(\mathbf{E})}\,\mathbf{1}+\mathbf{E}\Big)=\exp(u\mathbf{U})\Big(\sqrt{1+\kappa(\mathbf{E})}\,\mathbf{1}+\mathbf{E}\Big),$$

с $u\in\mathbb{R}$, $\mathbf{E}\in\mathcal{E}$, было бы накрывающим морфизмом. Отображение ϕ — небольшая модификация отображения f, данного в [4, определение 2.2].

Предложение 5.1. *Существует групповое умножение* $\mathbf{X},\mathbf{Y})\mapsto\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}$ *с единичным элементом* $\mathbf{0}$ *на алгебре Ли* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ *такое, что отображение* $\phi:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to SL_2(\mathbb{R})$ *есть универсальный накрывающий морфизм, обладающий следующими свойствами*:

(a) $\phi(u\mathbf{U}+\mathbf{E})=(\cos u\,\mathbf{1}+\sin u\,\mathbf{U})(\sqrt{1+\kappa(\mathbf{E})}\mathbf{1}+\mathbf{E})=\phi(u\mathbf{U})\phi(\mathbf{E})$;
(b) $\phi(u\mathbf{U})=\exp(u\mathbf{U})$;
(c) $\phi(\operatorname{sh} t\,\mathbf{E_0})=\operatorname{ch} t\,\mathbf{1}+\operatorname{sh} t\,\mathbf{E_0}$;
(d) $\phi(u\mathbf{U}+\operatorname{tg} u(\cos u\,\mathbf{E_0}-\sin u\,\mathbf{U}\mathbf{E_0}))=\mathbf{1}+\operatorname{tg} u(\mathbf{U}+\mathbf{E_0})$,

где $u,t\in\mathbb{R}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E_0}\in\mathcal{E}$, $\kappa(\mathbf{E_0})=1$.

Доказательство. Ясно, что матричная группа $SL_2(\mathbb{R})$ содержит значение

$$\phi(u\mathbf{U}+\mathbf{E}) = \sqrt{1+\kappa(\mathbf{E})}(\cos u\mathbf{1}+\sin u\mathbf{U})+\exp(u\mathbf{U})\mathbf{E}$$

для любых $u\in\mathbb{R}$ и $\mathbf{E}\in\mathcal{E}$. Кроме того, отображение $\phi:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to SL_2(\mathbb{R})$ есть аналитическое накрывающее отображение, индуцирующее биективное отображение $\phi|_{\mathcal{E}}:\mathcal{E}\to\phi(\mathcal{E})$ на подпространстве $\mathcal{E}$.Так как векторное пространство $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ диффеоморфно универсальному накрывающему многообразию $SL_2(\mathbb{R})$, то отображение $\phi:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to SL_2(\mathbb{R})$ можно рассматривать как универсальное накрывающее отображение. Следовательно, можно единственным образом определить умножение в универсальной накрывающей группе: $(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mapsto\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}$ на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Это умножение обладает тем свойством, что если $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ — дифференцируемые кривые, $\mathbf{X}(0)=\mathbf{0}$, $\mathbf{X}(1)=\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}(0)=\mathbf{0}$, $\mathbf{Y}(1)=\mathbf{Y}$, то $\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}=\mathbf{Z}(1)$, где $\mathbf{Z}(t)$ — единственный лифт кривой $\phi(\mathbf{X}(t))\phi(\mathbf{Y}(t))$, $\mathbf{0}=\mathbf{Z}(0)$.

Свойства (a), (b), (c) являются следствиями определения отображения ϕ. Так как

$$\begin{aligned}&\phi(u\mathbf{U}+\operatorname{tg}u(\cos u\,\mathbf{E_0}-\sin u\,\mathbf{UE_0}))\\ &=\exp(u\mathbf{U})(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}\mathbf{1}+\operatorname{tg}u(\cos u\,\mathbf{E_0}-\sin u\,\mathbf{UE_0}))\\ &=\exp(u\mathbf{U})(\cos^{-1}u\mathbf{1}+\operatorname{tg}u\,\exp(-u\mathbf{U})\,\mathbf{E_0})=\mathbf{1}+\operatorname{tg}u(\mathbf{U}+\mathbf{E_0}),\end{aligned}$$

то получаем соотношение (d). □

Следующее предложение — модификация [4, теорема 2.6] для отображения ϕ.

Предложение 5.2. *Групповое умножение* $(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mapsto\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}$ *на алгебре Ли* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет следующим тождествам*:

(a) $(s\mathbf{U})\circ(t\mathbf{U})=(s+t)\mathbf{U}$;
(b) $(\operatorname{sh}s\,\mathbf{E_0})\circ(\operatorname{sh}t\,\mathbf{E_0})=\operatorname{sh}(s+t)\,\mathbf{E_0}$;
(c) $u\mathbf{U}+\mathbf{E}=(u\mathbf{U})\circ\mathbf{E}$;
(d) $\mathbf{E}\circ(u\mathbf{U})=u\mathbf{U}+\exp(-2u\mathbf{U})\,\mathbf{E}=(u\mathbf{U})\circ(\exp(-2u\mathbf{U})\,\mathbf{E}$,

где $u,s,t\in\mathbb{R}$, $\mathbf{E},\mathbf{E_0}\in\mathcal{E}$, $\kappa(\mathbf{E_0})=1$.

Доказательство. Уравнение (a) следует из соотношения

$$\phi((s\mathbf{U})\circ(t\mathbf{U}))=\exp(s\mathbf{U})\exp(t\mathbf{U})=\exp((s+t)\mathbf{U})=\phi(((s+t)\mathbf{U}).$$

Аналогично, уравнение (b) следует из соотношения

$$\begin{aligned}\phi((\operatorname{sh}s\,\mathbf{E})\circ(\operatorname{sh}t\,\mathbf{E}))&=(\operatorname{ch}s\,\mathbf{1}+\operatorname{sh}s\,\mathbf{E})(\operatorname{ch}t\,\mathbf{1}+\operatorname{sh}t\,\mathbf{E})\\ &=\operatorname{ch}(s+t)\,\mathbf{1}+\operatorname{sh}(s+t)\,\mathbf{E}=\phi(\operatorname{sh}(s+t)\,\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Уравнение (c) есть прямое следствие соотношения (a) предыдущего предложения. Последнее уравнение (d) следует из соотношения

$$\begin{aligned}\phi((\operatorname{sh}t\,\mathbf{E_0})\circ(u\mathbf{U}))&=(\operatorname{ch}t\,\mathbf{1}+\operatorname{sh}t\,\mathbf{E_0})(\cos u\,\mathbf{1}+\sin u\,\mathbf{U})\\ &=\operatorname{ch}t(\cos u\,\mathbf{1}+\sin u\,\mathbf{U})+\operatorname{sh}t(\cos u\,\mathbf{E_0}+\sin u\,\mathbf{E_0U})\\ &=\operatorname{ch}t(\cos u\,\mathbf{1}+\sin u\,\mathbf{U})+\operatorname{sh}t(\cos u\,\mathbf{E_0}-\sin u\,\mathbf{UE_0})\\ =(\cos u\,\mathbf{1}+\sin u\,\mathbf{U})&\Big[\operatorname{ch}t\,\mathbf{1}+\operatorname{sh}t\,(\cos(-2u)\,\mathbf{E_0}+\sin(-2u)\,\mathbf{U})\,\mathbf{E_0}\Big]\\ &=\phi((u\mathbf{U})\circ(\operatorname{sh}t\,\exp(-2u\mathbf{U})\,\mathbf{E_0}),\end{aligned}$$

где $\kappa(\mathbf{E_0})=1$. □

В дальнейшем группа $\{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}),\circ,\mathbf{0}\}$ будет отождествляться с универсальной накрывающей группой $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ группы $PSL_2(\mathbb{R})$. *Экспоненциальное отображение* группы $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ будет обозначаться через $\exp^{(0)}:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Следствие 5.3. *Экспоненциальное отображение* $\exp^{(0)}$ *обладает следующими свойствами*:

(a) $\exp^{(0)}(t\mathbf{U})=t\mathbf{U}$ *и* $\exp^{(0)}(t\mathbf{E_0})=\operatorname{sh}t\,\mathbf{E_0}$, *где* $t\in\mathbb{R}$, $\mathbf{E_0}\in\mathcal{E}$, *а* $\kappa(\mathbf{E_0})=1$;

(b) *точечное множество однопараметрической подгруппы* $\{\exp^{(0)} t(\mathbf{U}+\mathbf{E_0}),\ t\in\mathbb{R})\}$ *совпадает с множеством*

$$\left\{u\mathbf{U}+\operatorname{tg}u(\cos u\,\mathbf{E_0}-\sin u\,\mathbf{U}\mathbf{E_0}),\ u\in\mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right\},$$

где $\mathbf{E_0}\in\mathcal{E}$ *и* $\kappa(\mathbf{E_0})=1$;

(c) *образ* $\exp^{(0)}(\mathcal{N})\subset\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ *стандартного двойного конуса* $\mathcal{N}$ *в алгебре Ли* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ *при экспоненциальном отображении есть множество*

$$\left\{u\mathbf{U}+\operatorname{tg}u\,\mathbf{E_0},\ u\in\mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ \mathbf{E_0}\in\mathcal{E},\ \kappa(\mathbf{E_0})=1\right\};$$

(d) *образ* $\exp^{(0)}(\hat{\mathcal{K}})\subset\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ *внешности* $\hat{\mathcal{K}}$ *стандартного двойного конуса при экспоненциальном отображении есть множество*

$$\left\{u\mathbf{U}+t\mathbf{E_0};\ t,u\in\mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ |t|>|\operatorname{tg}u|,\ \mathbf{E_0}\in\mathcal{E},\ \kappa(\mathbf{E_0})=1\right\};$$

(e) *образ* $\exp^{(0)}(\mathcal{K})\subset\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ *внутренности* $\mathcal{K}$ *стандартного двойного конуса при экспоненциальном отображении содержит векторы* $\{k\pi\mathbf{U},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{\mathbf{0}\}\}$, *плоскости* $\{(k+\frac{1}{2})\pi\mathbf{U}+\mathcal{E},\ k\in\mathbb{Z}\}$, *а также множества* $\{k\pi\mathbf{U}+\mathcal{K}_0,\ k\in\mathbb{Z}\}$, *где* $\mathcal{K}_0$ *задается множеством*

$$\left\{u\mathbf{U}+t\mathbf{E_0},\ t,u\in\mathbb{R},-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ |t|<|\operatorname{tg}u|,\ \mathbf{E_0}\in\mathcal{E},\ \kappa(\mathbf{E_0})=1\right\}.$$

Доказательство. Утверждения (a) — следствия уравнений (a) и (b) предыдущего предложения. Равенство множеств (b) следует из (d). Утверждения (c), (d) и (e) следуют из того, что образы $\exp^{(0)}(\mathcal{N})$, $\exp^{(0)}(\hat{\mathcal{K}})$ и $\exp^{(0)}(\mathcal{K})$ при экспоненциальном отображении, содержащиеся в $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$, инвариантны относительно сопряжения с помощью $\exp(t\mathbb{R})$ для любого $t\in\mathbb{R}$. □

Предыдущее следствие показывает, что образ стандартного двойного конуса при экспоненциальном отображении есть поверхность вращения касательной функции. Простое вычисление показывает, что $\phi(\mathbf{X})=\pm\phi(\mathbf{X}')$ в том и только том случае, если $\mathbf{X}'=\mathbf{X}+k\pi\mathbf{U}$, $k\in\mathbb{Z}$. Следовательно, центр $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ — это подгруппа $\Gamma_{(1)}=\{k\pi\mathbf{U},\ k\in\mathbb{Z}\}$, а любая накрывающая группа $PSL_2(\mathbb{R})$ изоморфна факторгруппе $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$, где $\Gamma_{(n)}=\{kn\pi\mathbf{U},\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Обозначим через $\exp^{(n)}:\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\to\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$ *экспоненциальное отображение* группы $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$. Элементы группы $PSL_2(\mathbb{R})=SL_2(\mathbb{R})/\{1,-1\}$ можно представить в виде $\pm X$, где $X\in SL_2(\mathbb{R})$. Отображение $\phi^{(0)}$, определенное как $\phi^{(0)}=\pm\phi$, есть *универсальное накрывающее отображение* $\phi^{(0)}:\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})\to PSL_2(\mathbb{R})$; оно может быть пропущено через факторпространство $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$. Следовательно, оно определяет накрывающее отображение факторгруппы $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$ на группу $PSL_2(\mathbb{R})$. Будем обозначать это *накрывающее отображение* через $\phi^{(n)}:\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}\to PSL_2(\mathbb{R})$.

Предложение 5.4. *Многообразие* $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$ *распадается в дизъюнктное объединение*

$$\left(\exp^{(n)}\mathcal{K}\setminus\{\mathbf{1}_{(i)},\ i=0,\dots,n-1\}\right)\cup\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\mathcal{N}\right)\cup\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\hat{\mathcal{K}}\right),$$

где $\{\mathbf{1}_{(i)}=i\pi\mathbf{U}\circ\Gamma_{(n)},\ i=0,\dots,n-1\}$ — *центральные элементы группы* $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$. *Тогда* $\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\mathcal{N}=\partial(\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\hat{\mathcal{K}})$. *Кроме того,* $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}(\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\mathcal{N})=\partial\exp^{(n)}\mathcal{K}$ *при всех* $i=0,\dots,n-1$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$(\phi^{(n)})^{-1}(\pm\mathbf{1})=\{\mathbf{1}_{(i)},\ i=0,\dots,n-1\},$$

где $\pm\mathbf{1}$ — единица $PSL_2(\mathbb{R})$. Кроме того, отображение $\phi^{(n)}$ биективно на открытых множествах

$$\left\{(u\mathbf{U}+t\mathbf{E_0})\circ\Gamma_{(n)},\ t,u\in\mathbb{R},\ i\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant u<i\pi+\frac{\pi}{2},\ \mathbf{E_0}\in\mathcal{E},\ \kappa(\mathbf{E_0})=1\right\},$$

где $i=0,\dots,n-1$. Относительно умножения в группе $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$ на центральные элементы $\mathbf{1}_{(i)}=i\pi\mathbf{U}$, $i=0,\dots,n-1$, множества

$$\exp^{(n)}\mathcal{K},\quad \bigcup_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\mathcal{N},\quad \bigcup_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\hat{\mathcal{K}}$$

инвариантны и, следовательно, утверждение следует из предыдущего предложения. □

Замечание 5.5. *Предыдущее утверждение также справедливо, если $n=0$. Поскольку $\Gamma_{(0)}=\{\mathbf{0}\}$, то в этом случае $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(0)}=\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$, а индекс i пробегает множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Так как $\Gamma_{(1)}=\mathbb{Z}\pi\mathbf{U}$ то получаем, что группа $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(1)}$ изоморфна $PSL_2(\mathbb{R})$. Аналогично, $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(2)}$ изоморфна $SL_2(\mathbb{R})$.*

Следствие 5.6. *Дизъюнктные объединения*

$$\bigcup_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\mathcal{N},\quad \bigcup_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{(i)}\circ\exp^{(n)}\hat{\mathcal{K}}$$

дают разложение множеств

$$(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)}\mathcal{N}),\quad (\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)}\hat{\mathcal{K}})$$

на n компонент связности в группе Ли $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$.

6. Сечения в накрывающих группах $PSL_2(\mathbb{R})$

В этом разделе описанное выше разложение $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$ будет применено для альтернативного доказательства теоремы 4.3 для точно транзитивных дифференцируемых сечений.

Теорема 6.1. *Пусть G — связная группа Ли , локально изоморфная $PSL_2(\mathbb{R})$, а H — связная однопараметрическая подгруппа G. Существует непрерывное сечение, точно транзитивно действующее на факторпространстве G/H в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ группы H порождена вектором $\mathbf{X}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющим неравенству $\kappa(\mathbf{X})<0$.*

Доказательство. Докажем, во-первых, что для любой накрывающей группы G группы $PSL_2(\mathbb{R})$ существует непрерывное сечение, точно транзитивно действующее на факторпространстве G/H, если H порождается вектором $\mathbf{X}$, где $kappa(\mathbf{X})<0$.

Так как центр любого собственного накрытия $PSL_2(\mathbb{R})$ содержится в H, то достаточно доказать существование точно транзитивного сечения в случае, когда G изоморфна $PSL_2(\mathbb{R})$. Однако точно транзитивное сечение, соответствующее гиперболической плоской лупе, обладает этим свойством. Напомним теперь, что любое сечение $\sigma: G/H\to G$ удовлетворяет условию $\pi\circ\sigma(gH)=gH$, а, следовательно, $\sigma(gH)\in gH$. Значит, если $\sigma(gH)\in H$, то необходимо $g\in H$. Кроме того, если $\sigma(gH)\in kHk^{-1}$ для некоторого $k\in G$, то $\sigma(gH)kH=kH$. Если σ — сечение, действующее точно транзитивно, то уравнение $\sigma(gH)kH=kH$ имеет единственное решение $\sigma(gH)=1$, а потому из $\sigma(gH)\in kHk^{-1}$, $k\in G$, следует, что $\sigma(gH)=1$ и $g\in H$. Получаем, что $\sigma(G/H)\cap kHk^{-1}=\{1\}$ при всех $k\in G$.

Лемма 6.2. *Пусть G — собственная накрывающая группа $PSL_2(\mathbb{R})$. Не существует непрерывного сечения, точно транзитивно действующего на факторпространстве G/H, если алгебра Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы H порождена вектором $\mathbf{X}\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющим неравенству $\kappa(\mathbf{X})\geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть G — собственная накрывающая группа $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)}$ группы $PSL_2(\mathbb{R})$; это означает, что $n = 0$ или $n > 1$. Предположим, что существует непрерывное сечение $\sigma : G/H \to G$, действующее точно транзитивно, где подгруппа H имеет вид $H = \{\exp^{(n)}(t\mathbf{X}),\ t \in \mathbb{R}\}$ с $\kappa(\mathbf{X}) = 0$. Так как все такие подгруппы сопряжены в G, то можно считать, что

$$H = \left\{u\mathbf{U} + \operatorname{tg} u(\cos u\,\mathbf{E_0} - \sin u\,\mathbf{UE_0}) \circ \Gamma_{(n)};\ u \in \mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right\},$$

где $\mathbf{E_0} \in \mathcal{E}$ и $\kappa(\mathbf{E_0}) = 1$ (см. следствие 5.3, (b)).

Рассмотрим смежные классы $(\mathbf{1}_{(j)} \circ \exp^{(n)} s(\mathbf{UE_0})) \circ H$, где $0 < s \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n-1$. Их элементы можно записать в виде

$$\mathbf{X}(s,u) = (j\pi\mathbf{U}) \circ (\operatorname{sh} s\,\mathbf{UE_0}) \circ (u\mathbf{U} + \operatorname{tg} u(\cos u\,\mathbf{E_0} - \sin u\,\mathbf{UE_0})) \circ \Gamma_{(n)}$$

с некоторыми $s, u \in \mathbb{R}$, удовлетворяющими неравенствам $0 < s$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$. Накрывающий гомоморфизм $\phi^{(n)} : \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma_{(n)} \to PSL_2(\mathbb{R})$ отображает этот элемент на

$$\begin{aligned} X(s,u) &= \pm(\operatorname{ch} s\,\mathbf{1} + \operatorname{sh} s\,\mathbf{UE_0})(\mathbf{1} + \operatorname{tg} u(\mathbf{U} + \mathbf{E_0})) \\ &= \pm(\operatorname{ch} s\,\mathbf{1} + \operatorname{sh} s\,\mathbf{UE_0} + e^s \operatorname{tg} u(\mathbf{U} + \mathbf{E_0})) \end{aligned}$$

в соответствии с предложением 5.1, (d) и (c). Так как $|\tau(X(s,u))| = \operatorname{ch} s > 1$, то элемент $X(s,u)$ гиперболичен, т.е. он принадлежит множеству $\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}} \subset PSL_2(\mathbb{R})$ для любых $s, u \in \mathbb{R}$. Следовательно, все элементы $\mathbf{1}_{(j)} \circ \exp^{(n)} t(\mathbf{UE_0}) \circ \Gamma_{(n)} \circ H$ содержатся в $(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}})$. Если параметр u непрерывно изменяется на интервале $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, то элемент

$$\mathbf{X}(s,u) = (j\pi\mathbf{U}) \circ (\operatorname{sh} s\,\mathbf{UE_0}) \circ (u\mathbf{U} + \operatorname{tg} u(\cos u\,\mathbf{E_0} - \sin u\,\mathbf{UE_0})) \circ \Gamma_{(n)}$$

также непрерывно изменяется в компоненте связности $(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}})$. Следовательно, $\mathbf{X}(s,u)$ принадлежит той же компоненте связности множества $(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}})$, что и элемент $(j\pi\mathbf{U}) \circ (\operatorname{sh} s\,\mathbf{UE_0}) \circ \Gamma_{(n)}$. Тогда $\mathbf{1}_{(j)} \circ \exp^{(n)} s(\mathbf{UE_0}) \circ \Gamma_{(n)} \circ H$ содержится в множестве $\mathbf{1}_{(j)} \circ \exp^{(n)} \hat{\mathcal{K}}$, если $0 < s \in \mathbb{R}$. Связное множество $\sigma(G/H)$ пересекается с множествами $\exp^{(n)} \hat{\mathcal{K}}$ и $\mathbf{1}_{(1)} \circ \exp^{(n)} \hat{\mathcal{K}}$. Но эти множества разделяются образом $\exp^{(n)} \mathcal{N}$ стандартного двойного конуса при экспоненциальном отображении, а потому $\sigma(G/H)$ пересекается с $\exp^{(n)} \mathcal{N}$ в точке $x \neq 1 \in G$. Все однопараметрические подгруппы, содержащиеся в $\exp^{(n)} \mathcal{N}$, сопряжены в G некоторым элементом вида $\exp^{(n)}(r\mathbf{U})$, а значит, эта точка x в $\sigma(G/H)$ содержится в kHk^{-1} с некоторым $k \in G$. что приводит к противоречию.

Предположим, что существует непрерывное сечение $\sigma : G/H \to G$, действующее точно транзитивно относительно подгруппы $H = \{\exp^{(n)}(t\mathbf{X}),\ t \in \mathbb{R}\}$ с $\kappa(\mathbf{X}) > 0$. Так как все такие подгруппы сопряжены в G, то можно считать, что подгруппа H записывается в виде $\{(\operatorname{sh} t\,\mathbf{E_0}) \circ \Gamma_{(n)},\ t \in \mathbb{R}\}$, где $\mathbf{E_0} \in \mathcal{E}$ и $\kappa(\mathbf{E_0}) = 1$ (см. следствие 5.3, (a)). Рассмотрим смежные классы $\exp^{(n)} s(\mathbf{E_0U}) \circ H$, где $0 < s \in \mathbb{R}$. Их элементы имеют вид $\mathbf{Y}(s,t) = (\operatorname{sh} s\,\mathbf{E_0U}) \circ (\operatorname{sh} t\,\mathbf{E_0}) \circ \Gamma_{(n)}$ м некоторыми $s, t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющими неравенству $0 < s$. Накрывающий гомоморфизм $\phi^{(n)}$ отображает этот элемент на

$$\begin{aligned} Y(s,t) &= \pm(\operatorname{ch} s\,\mathbf{1} + \operatorname{sh} s\,\mathbf{E_0U})(\operatorname{ch} t\,\mathbf{1} + \operatorname{sh} t\,\mathbf{E_0})) \\ &= \pm(\operatorname{ch} s \operatorname{ch} t\,\mathbf{1} - \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t\,\mathbf{U} + \operatorname{sh} s \operatorname{ch} t\,\mathbf{E_0U} + \operatorname{ch} s \operatorname{sh} t\,\mathbf{E_0}). \end{aligned}$$

Так как $|\tau(Y(s,t))| = \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t > 1$, то элемент $Y(s,t)$ гиперболичен, т.е. принадлежит множеству $\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}} \subset PSL_2(\mathbb{R})$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$ с $0 < s$. Следовательно, все элементы $\exp^{(n)} s(\mathbf{E_0U}) \circ \Gamma_{(n)} \circ H$ содержатся в $(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}})$. Если параметр t непрерывно изменяется в $\mathbb{R}$, то элемент $\mathbf{Y}(s,t)$ также непрерывно изменяется в компоненте связности $(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}})$. Следовательно, элемент $\mathbf{Y}(s,t)$ принадлежит той же компоненте связности множества $(\phi^{(n)})^{-1}(\exp^{(1)} \hat{\mathcal{K}})$, что и элемент $(\operatorname{sh} s\,\mathbf{E_0U}) \circ \Gamma_{(n)}$. Тогда $\exp^{(n)} t(\mathbf{E_0U}) \circ \Gamma_{(n)} \circ H$ содержится в множестве $\exp^{(n)} \hat{\mathcal{K}}$, если $0 < s \in \mathbb{R}$. Но все однопараметрические подгруппы, содержащиеся в $\exp^{(n)} \hat{\mathcal{K}}$, сопряжены в G, а следовательно, точка $\mathbf{Y}(s,t)$ из $\sigma(G/H)$ содержится в kHk^{-1} с некоторым $k \in G$, противоречие. □

Если G — группа $PSL_2(\mathbb{R})$ и подгруппа H порождена вектором $\mathbf{X} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющим неравенству $\kappa(\mathbf{X}) \geqslant 0$, то факторпространство G/H есть цилиндр и любое сечение $\sigma : G/H \to G$, действующее точно транзитивно на G/H, может быть поднято до сечения, действующего точно транзитивно на $\hat{G}/\hat{H}$ для любого собственного накрытия $PSL_2(\mathbb{R})$. Но предыдущая лемма показывает, что для собственных накрытий ($PSL_2(\mathbb{R})$ не существует никакого сечения, точно транзитивно действующего на $\hat{G}/\hat{H}$. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arens R.* Topologies for homeomorphism groups// Amer. J. Math. — 1946. — *68*. — С. 593–610.
2. *Baer R.* Nets and groups// Trans. Amer. Math. Soc. — 1939. — *46*/ — С. 110–141.
3. *Barlotti A., Strambach K.* The geometry of binary systems// Adv. Math. — 1983. — *49*. — С. 1–105.
4. *Hilgert J., Hofmann K. H.* Old and new on $Sl(2)$// Manuscr. Math. — 1985. — *54*. — С. 17–52.
5. *Hilgert J., Hofmann K. H., Lawson J. D.* Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups. — Oxford–New York: Oxford Univ. Press, 1989.
6. *Hofmann K. H.* Topologische Lops// Math. Z. — 1958. — *70*. — С. 13–37.
7. *Hofmann K. H., Strambach K.* Topological and analytical loops// Quasigroups and Loops: Theory and Applications (Chein O., Pflugfelder H. O., Smith J. D. H., Eds.). — Berlin: Heldermann-Verlag, 1990. — С. 205–262.
8. *Nagy P. T., Strambach K.* Loops in Group Theory and Lie Theory/ Expos. Math. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2002. — *35*.
9. *Salzmann H.* Kompakte Ebenen mit einfacher Kollineationsgruppe// Arch. Math. — 1962. — *13*. — С. 98–109.

P. T. Nagy
Institute of Mathematics, University of Debrecen, Hungary
E-mail: nagypeti@math.klte.hu

K. Strambach
Mathematisches Institut der Universität Erlangen–Nürnberg, Germany
E-mail: strambach@mi.uni-erlangen.de

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 82–101

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА КОМПЛЕКСНОМ ГРАССМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ. ГОЛОНОМИЯ И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

© 2004 г. **З. ГИУНАШВИЛИ**

Аннотация. Исследуются дифференциально-геометрические структуры, такие как главное расслоение для канонического векторного расслоения на комплексном многообразии Грассмана, каноническая форма связности на этом расслоении и соответствующие динамические системы. Многообразие Грассмана рассматривается как орбита коприсоединенного действия, а симплектическая форма описывается как сужение канонической пуассоновой структуры на коалгебру Ли. Изучаются голономия связности на главном расслоении над грассманианом и ее связь с фазой Берри для интегральных кривых гамильтоновых динамических систем.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 82
2. Дифференциальная структура и системы координат на комплексном многообразии Грассмана 83
3. О некоторых операциях над связностями на векторных расслоениях 85
4. Геометрия канонического векторного расслоения на многообразии Грассмана 87
5. Многообразие Грассмана как орбита (ко)присоединенного представления и соответствующая симплектическая структура 90
6. Каноническое главное расслоение на грассмановом многообразии и каноническая связность 91
7. Геометрическая теория управления и алгебра голономии формы связности $\varphi^* d\varphi$ 95
8. Действие группы $U(\mathcal{H})$ на главном расслоении $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$. Уравнение Шредингера и фаза Берри 98
Список литературы 100

1. Введение

Основными задачами статьи являются:

1) обзор всех *канонических* дифференциально-геометрических структур на многообразии Грассмана конечномерных комплексных подпространств комплексного гильбертова пространства;
2) исследование канонической симплектической структуры, соответствующих динамических систем и голономий интегральных кривых этих динамических систем для комплексных многообразий Грассмана.

Сначала рассматривается дифференциальная структура на комплексном многообразии Грассмана, а затем исследуется связность на каноническом главном расслоении и ее голономии. Оказывается, что каноническая связность на главном расслоении и ее голономии играют важную роль в теории геометрических квантовых вычислений (см. [3–5, 10–12]), что показывает универсальность многообразия Грассмана не только в теории расслоений, но также и в теории геометрических квантовых вычислений. Центральное место здесь занимает чисто геометрический факт, состоящий в том, что унитарное преобразование слоя канонического расслоения над комплексным многообразием Грассмана может быть получено как голономия замкнутой кривой. Однако по физическим соображениям не нужна никакая замкнутая кривая на грассмановом многообразии; нужны только

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

«физические» кривые, т.е. кривые, являющиеся интегральными кривыми гамильтоновой динамической системы. Для интегральной кривой гамильтоновой системы на многообразии Грассмана соответствующая кривая в тотальном пространстве канонического расслоения есть решение соответствующего уравнения Шредингера. Однако эта кривая, вообще говоря, не является горизонтальной кривой — поднятием кривой на базовом многообразии. Она «становится» горизонтальной в *адиабатическом пределе*. Исследуется геометрия таких кривых и их связь с фазой Берри.

2. Дифференциальная структура и системы координат на комплексном многообразии Грассмана

Пусть $\mathcal{H}$ — конечномерное или бесконечномерное комплексное гильбертово пространство. Для любого положительного целого m обозначим через $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ множество всех m-мерных комплексных подпространств пространства $\mathcal{H}$. Ясно, что m-мерное подпространство X гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно единственным образом определить с помощью соответствующего оператора ортогонального проектирования $\mathcal{P}(X) : \mathcal{H} \to X \subset \mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{P}(X)$ характеризуется свойствами $\mathcal{P}(X)^* = \mathcal{P}(X)$ и $\mathrm{trace}(\mathcal{P}(X)) = \dim(X)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ множество

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{H}) = \left\{ P : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid P^2 = P,\ P^* = P,\ \mathrm{trace}(P) = m \right\}. \tag{1}$$

Отображение $\mathcal{P} : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ биективно (см. [4–6]) и определяет инъективное отображение множества $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ в векторном пространстве эрмитовых операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Это инъективное отображение индуцирует топологию и дифференциальную структуру на множестве $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$. Множество $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ вместе с дифференциальной структурой известно как *многообразие Грассмана* m-мерных комплексных подпространств гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Как следует из изложенного выше, в дальнейшем можно отождествлять два объекта $\mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ и $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$.

Любой фиксированный элемент $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ определяет отображение

$$\Gamma_X : \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}),$$

где

$$\Gamma_X(\varphi) = \{ x + \varphi(x) \mid x \in X \} \ \text{ при } \varphi \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp).$$

Другими словами, подпространство, соответствующее линейному отображению $X \xrightarrow{\varphi} X^\perp$, есть график отображения φ. В некоторых случаях нижний индекс $_X$ в выражении будем опускать и записывать Γ_X просто как Γ. Это отображение — инъективное отображение векторного пространства $\mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ на множество $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, а его образ есть подмножество

$$\left\{ Y \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \mid Y \cap X^\perp = \{0\} \right\} \equiv \mathcal{W}_X.$$

Меняя элемент $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, можно покрыть многообразие Грассмана открытыми подмножествами $\mathcal{W}_X$. На самом деле достаточно взять только конечное число элементов $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ для того, чтобы покрыть тотальное многообразие множествами типа $\mathcal{W}_X$.

Следовательно, можно утверждать, что пара $(\mathrm{Hom}(X, X^\perp), \Gamma_X)$ для $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ определяет систему локальных координат в окрестности точки X (см. [8]).

Найдем теперь выражение для диффеоморфизма

$$\mathcal{P} : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}_m(\mathcal{H})$$

в этой локальной системе координат. Другими словами, задача состоит в нахождении координатного представления следующей суперпозиции отображений

$$\Phi_X : \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \xrightarrow{\Gamma_X} \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{P}_m(\mathcal{H}).$$

Для любого $f \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ график оператора $-f^* \in \mathrm{Hom}(X^*, X)$ есть ортогональное подпространство к пространству $\Gamma_X(f)$. В самом деле, при $x \in X$ и $u \in X^\perp$ имеем

$$\langle x + f(x), u - f^*(u) \rangle = \underbrace{\langle x, u \rangle}_{0} - \langle x, f^*(u) \rangle + \langle f(x), u \rangle - \underbrace{\langle f(x), f^*(u) \rangle}_{0} = \langle f(x), u \rangle - \langle x, f^*(u) \rangle = 0$$

(по определению сопряженного оператора). Для $f \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ рассмотрим следующий оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\widetilde{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -f^* \\ f & \mathbf{1} \end{bmatrix} : X \oplus X^\perp \to X \oplus X^\perp.$$

Этот оператор является автоморфизмом; легко проверить, что $\widetilde{f}(X) = \Gamma(f)$ и $\widetilde{f}(X^\perp) = \Gamma(-f^*) = \Gamma(f)^\perp$. Ясно, что если P_U — проектор на подпространство $U \subset W$, соответствующий разложению векторного пространства $W = U \oplus V$ и если $A : W \to W$ — автоморфизм, то проектор на подпространство $A(U)$, соответствующий разложению $W = A(U) \oplus A(V)$, есть $P_{A(U)} = AP_UA^{-1}$. Следовательно, проектор, соответствующий разложению $\mathcal{H} = \Gamma(f) \oplus \Gamma(f)^\perp = \widetilde{f}(X) \oplus \widetilde{f}(X^\perp)$, есть $\mathcal{P}(\Gamma(f)) = \widetilde{f}\mathcal{P}(X)\widetilde{f}^{-1}$. Явное выражение для оператора $\widetilde{f}^{-1}$ при разложении $\mathcal{H} = X \oplus X^\perp$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -f^* \\ f & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (1+f^*f)^{-1} & f^*(1+ff^*)^{-1} \\ -f(1+f^*f)^{-1} & (1+ff^*)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Замечание 1. Оператор $1 + f^*f : X \to X$ обратим, потому что

$$(1+f^*f)(x) = 0 \;\Rightarrow\; (f^*f)(x) = -x \;\Rightarrow\; \langle (f^*f)(x), x\rangle = -\|x\|^2 \;\Rightarrow\; \|f(x)\|^2 = -\|x\|^2 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Это же верно и для оператора $1 + ff^* : X^\perp \to X^\perp$.

Следовательно, явное выражение для проектора $\mathcal{P}(\Gamma(f))$, соответствующего разложению $\mathcal{H} = X \oplus X^\perp$, имеет вид

$$\mathcal{P}(\Gamma(f)) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -f^* \\ f & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+f^*f)^{-1} & f^*(1+ff^*)^{-1} \\ -f(1+f^*f)^{-1} & (1+ff^*)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+f^*f)^{-1} & f^*(1+ff^*)^{-1} \\ f(1+f^*f)^{-1} & ff^*(1+ff^*)^{-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Действие группы $U(\mathcal{H})$ (группы унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}$) индуцирует действие этой группы на многообразии Грассмана. Это действие транзитивно и для любой точки $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ соответствующий стабилизатор есть $U(X) \times U(X^\perp)$. Следовательно, многообразие $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ можно рассматривать как однородное пространство

$$\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \cong \frac{U(\mathcal{H})}{U(X) \times U(X^\perp)}$$

(см., например, [4–6]). Для унитарного преобразования $u : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, соответствующий диффеоморфизм многообразия Грассмана $gr(u) : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ индуцирует преобразование локальных систем координат

$$\widetilde{u} : \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \to \mathrm{Hom}(Y, Y^\perp),$$

где $Y = u(X)$ (а потому $Y^\perp = u(X^\perp)$). Это преобразование определяется условием $\Gamma(\widetilde{u}(f)) = u(\Gamma(f))$. Имеем

$$u(\Gamma(f)) = \{ux + uf(x) \,|\, x \in X\} = \left\{y + uf(u^{-1}y) \mid y \in u(X) \equiv Y\right\},$$

откуда следует, что $u(\Gamma(f)) = \Gamma(ufu^{-1})$. Следовательно, преобразование локальной системы координат имеет вид

$$\widetilde{u} : \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \to \mathrm{Hom}(u(X), u(X^\perp)), \quad \widetilde{u}(f) = ufu^{-1}. \tag{3}$$

Касательное пространство к многообразию $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ в точке $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ можно отождествить с векторным пространством $\mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ (см. [8]). Отождествление многообразия $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ с многообразием проекторов $\mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ дает другое представление касательного пространства $T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}))$, которое следует из (1):

$$T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})) \cong \left\{\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \;\middle|\; \Phi \text{ линейно},\ \mathcal{P}(X) \circ \Phi + \Phi \circ \mathcal{P}(X) = \Phi,\ \Phi^* = \Phi,\ \mathrm{trace}(\Phi) = 0\right\}. \tag{4}$$

Это в точности множество таких операторов $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, что разложение Φ, соответствующее разложению гильбертова пространства $\mathcal{H} = X \oplus X^\perp$ имеет вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Дифференциал отображения $f \mapsto \mathcal{P}(\Gamma(f))$ (см. (2)) в точке $0 \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ дает изоморфизм между двумя представлениями касательного пространства $T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}))$:

$$\mathrm{Hom}(X, X^\perp) \ni \varphi \mapsto \mathcal{P}'_X(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Напомним, что действие группы Ли G на гладком многообразии M приводит к гомоморфизму алгебры Ли группы G в алгебру Ли векторных полей на многообразии M: для $v \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ обозначает алгебру Ли группы Ли G, соответствующее векторное поле $\widetilde{v}$, индуцированное действием группы on M, есть (см. [9])

$$\widetilde{v}(x) = \frac{\partial F}{\partial G}(1, x)(v),$$

где $F : G \times M \to M$ — отображение, соответствующее действию группы G на многообразии M.

Таким образом, действие группы $U(\mathcal{H})$ на многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ приводит к гомоморфизму алгебры Ли $U(\mathcal{H})$ в алгебру Ли векторных полей на многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$. Для описания этого гомоморфизма напомним, что если $\mathcal{P}(X)$ — ортогональный проектор, соответствующий элементу $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, то для любого ортогонального преобразования $g \in U(\mathcal{H})$ ортогональный проектор, соответствующий $g(X)$, есть $\mathcal{P}(g(X)) = g\mathcal{P}(X)g^{-1}$. Поэтому для любой фиксированной точки $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ имеем отображение

$$U(\mathcal{H}) \ni g \mapsto g\mathcal{P}(X)g^{-1} \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}).$$

Отсюда следует, что касательный вектор, соответствующий элементу $u \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$ алгебры Ли группы $U(\mathcal{H})$ в точке $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, есть $\widetilde{u}_X = [u, \mathcal{P}(X)]$, где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор операторов. Если разложение линейного оператора $u : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, соответствующее разложению $\mathcal{H} = X \oplus X^\perp$, есть

$$u = \begin{bmatrix} U_{XX} & -U^*_{XX^\perp} \\ U_{XX^\perp} & U_{X^\perp X^\perp} \end{bmatrix},$$

то ясно, что

$$\widetilde{u}_X = [u, \mathcal{P}(X)] = \begin{bmatrix} 0 & U^*_{XX^\perp} \\ U_{XX^\perp} & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из формулы (5) следует, что векторное поле, соответствующее элементу $u \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$ алгебры Ли при действии группы $U(\mathcal{H})$ на $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, есть

$$\widetilde{u}_X = U_{XX^\perp} = (1 - \mathcal{P}(X)) \circ u \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \cong T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})). \tag{6}$$

3. О некоторых операциях над связностями на векторных расслоениях

В этом разделе дается обзор некоторых фактов из теории векторных расслоений и связностей в контексте данной статьи.

Для любого векторного расслоения $\pi : E \to M$ обозначим через $S(E)$ пространство гладких сечений этого векторного расслоения.

Пусть $V \xrightarrow{p} M$ и $W \xrightarrow{q} M$ — векторные расслоения над гладким многообразием M. Пусть $S(V) \xrightarrow{\nabla^V} S(T^*(M) \otimes V)$ и $S(W) \xrightarrow{\nabla^W} S(T^*(M) \otimes W)$ — связности (ковариантные дифференцирования) на них. Определим следующие операции над этими связностями:

Прямая сумма (или сумма Уитни) связностей. Определим связность $\nabla = \nabla^V \oplus \nabla^W$ на сумме Уитни векторных расслоений (V, M, p) и (W, M, q) следующим образом: для векторного поля field ξ на многообразии M и сечения $s = s_1 \oplus s_2$ векторного расслоения $V \oplus W$ пусть

$$\nabla_\xi(s) = \nabla^V_\xi(s_1) + \nabla^W_\xi(s_2). \tag{7}$$

Тензорное произведение связностей. Определим связность $\nabla = \nabla^V \otimes \nabla^W$ на тензорном произведении векторных расслоений (V, M, p) и (W, M, q) как

$$\nabla_\xi(s_1 \otimes s_2) = \nabla^V_\xi(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^W_\xi(s_2). \tag{8}$$

Связность на двойственном векторном расслоении. Определим связность ∇^{V^*} на векторном расслоении $p_* : V^* \to M$, слой которого над точкой $x \in M$ есть двойственное пространство к векторному пространству $p^{-1}(x)$:

$$\xi\langle s, \tau\rangle = \langle \nabla^V_\xi(s), \tau\rangle + \langle s, \nabla^{V^*}_\xi(\tau)\rangle, \tag{9}$$

где s — сечение векторного расслоения V, τ — сечение двойственного векторного расслоения V^*, а $\langle s, \tau\rangle$ — функция на многообразии M, получаемая путем спаривания сечений s и τ.

Связность на расслоении гомоморфизмов. Пусть

$$\mathrm{Hom}(V, W) \xrightarrow{h} M$$

— расслоение, слой которого над точкой $x \in M$ есть пространство гомоморфизмов векторного пространства $p^{-1}(x)$ в векторное пространство $q^{-1}(x)$. В случае, когда слои конечномерны, это расслоение канонически изоморфно расслоению $h : V^* \otimes W \to M$. Связности на двойственном расслоении и тензорном расслоении также определены, а потому ковариантное дифференцирование $\nabla = \mathrm{Hom}(\nabla^V, \nabla^W) = \nabla^{V^*} \otimes \nabla^W$ на пространстве сечений $S(\mathrm{Hom}(V, V))$ можно определить как

$$\nabla_\xi(\tau \otimes s) = \nabla^{V^*}_\xi(\tau) \otimes s + \tau \otimes \nabla^W_\xi(s)$$

при $\tau \in S(V^*)$ и $s \in S(W)$. Отсюда следует, что при $t \in S(V)$

$$\begin{aligned}\nabla_\xi(\tau \otimes s)(t) &= \langle \nabla^{V^*}_\xi(\tau), t\rangle \cdot s + \tau(t) \cdot \nabla^W_\xi(s) \\ &= \xi(\tau(t)) \cdot s + \tau(t) \cdot \nabla^W_\xi(s) - \langle \tau, \nabla^V_\xi(t)\rangle \cdot s = \nabla^W_\xi(\tau(t) \cdot s) - \langle \tau, \nabla^V_\xi(t)\rangle \cdot s.\end{aligned}$$

Это подсказывает следующее, более элегантное определение ковариантного дифференцирования $\nabla = \mathrm{Hom}(\nabla^V, \nabla^W)$ на пространстве сечений $S(\mathrm{Hom}(V, W))$:

$$\text{для } \ f \in S(\mathrm{Hom}(V, W)) \ \text{ и } \ t \in S(V), \ \text{ пусть } \ \nabla_\xi(f)(t) = \nabla^W_\xi(f(t)) - f(\nabla^V_\xi(t)). \tag{10}$$

Легко проверить, что результаты определенных выше операций удовлетворяют условиям ковариантного дифференцирования на векторных расслоениях.

Пусть $p : V \to M$ и $q : W \to M$ — такие векторные расслоения над гладким многообразием M, что их сумма Уитни есть тривиальное векторное расслоение: $V \oplus W \cong M \times H$. Эта ситуация приводит к следующей связности на векторных расслоениях (V, M, p) и (W, M, q). Любое сечение векторного расслоения V можно рассматривать как функцию $\widetilde{s} : M \to H$ на M со значениями в векторном пространстве H. Для векторного поля ξ на многообразии M определим ковариантную производную сечения s как $\nabla_\xi(s)(x) = P_{V_x}(\widetilde{s}'_x(\xi_x))$ для всех $x \in M$. Здесь P_{V_x} — оператор проектирования $P_{V_x} : H \to V_x$, соответствующий разложению $H = V_x \oplus W_x$. Ковариантная производная на сечениях векторного расслоения W может быть определена аналогичным образом. Можно непосредственно проверить, что определенная выше операция удовлетворяет условиям ковариантного дифференцирования.

Замечание 2. Если V_1, V_2, W_1 и W_2 — векторные расслоения над многообразием M такие, что $V_1 \oplus W_1 \cong M \times H_1$ и $V_2 \oplus W_2 \cong M \times H_2$, а ∇^1 и ∇^2 — связности на V_1 и V_2 соответственно, определенные, как и выше, то ковариантное дифференцирование на векторном расслоении $V_1 \otimes V_2$, индуцированное разложением

$$\Big(V_1 \otimes V_2\Big) \oplus \Big((V_1 \otimes W_2) \oplus (W_1 \otimes V_2) \oplus (W_1 \otimes W_2)\Big) \cong M \times \Big(H_1 \otimes H_2\Big),$$

— то же, что и $\nabla = \nabla^1 \otimes \nabla^2$ (см. формулу (8)).

Определение 1. Пусть $\pi : T(M) \to M$ — касательное расслоение гладкого многообразия M, а $p : V \to M$ — такое векторное расслоение, что сумма Уитни $T(M) \oplus V$ есть тривиальное расслоение $M \times H$. Назовем разложение $M \times H = T(M) \oplus V$ тривиального расслоения *интегрируемым*, если индуцированная ковариантная производная ∇ на сечениях касательного расслоения (т.е. векторных полях на M) удовлетворяет условию

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y] \tag{11}$$

для любых векторных полей X и Y на многообразии M.

Если векторное пространство H, являющееся слоем суммы Уитни, есть гильбертово пространство, а для каждой точки $x \in M$ векторное пространство V_x (слой векторного расслоения V в точке x) есть ортогональное дополнение подпространства $T_x(M) \subset H$, то ковариантная производная ∇ удовлетворяет условию

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X(Y), Z\rangle + \langle Y, \nabla_X(Z)\rangle.$$

Следовательно, можно утверждать, что связность ∇, индуцированная разложением $M \times H = T(M) \oplus V$, есть ковариантное дифференцирование, соответствующее связности Леви-Чивита на многообразии M для метрики, индуцированной вложением $T(M) \subset M \times H$.

Замечание 3. Если $\Phi : M \to H$ — гладкое отображение такое, что для каждой точки $x \in M$ линейное отображение $\Phi'_x : T_x(M) \to H$ есть мономорфизм, то векторное расслоение $p : \Phi^{\perp}(H) \to M$, где $p^{-1}(x) = \mathrm{Im}(\Phi'_x)^{\perp}$, таково, что сумма Уитни $T(M) \oplus \Phi^{\perp}(H)$ тривиальна: $M \times H$; связность (ковариантное дифференцирование), индуцированная разложением $M \times H = T(M) \oplus \Phi^{\perp}(H)$, есть связность Леви-Чивита на $T(M)$.

Пусть $\pi : P \to M$ — главное расслоение со структурной группой G, действующей справа на тотальном пространстве расслоения P. Пусть F — векторное пространство, на котором группа Ли G действует слева. Ассоциированное векторное расслоение над многообразием M определяется как векторное расслоение с тотальным пространством $(P \times V)/G \equiv P_V$, где фактор берется по правому действию группы G на многообразии $P \times V$: $(p, v) \mapsto (pg, g^{-1}v)$ для любых $(p, v) \in P \times G$ и $g \in G$ (см. [9]). Проекция $\pi^V : P_V \to M$ для этого векторного расслоения определяется как

$$\pi^V([p, v]) = \pi(p), \quad \forall\, [p, v] \in (P \times V)/G.$$

Из определения следует, что любое сечение ассоциированного векторного расслоения можно рассматривать как функцию $\varphi : P \to V$ такую, что $\varphi(pg) = g^{-1}\varphi(p)$ для всех $p \in P$ и $g \in G$. Обозначим пространство таких функций на тотальном пространстве P через $C^{\infty}(P, V)_G$.

Форма связности A на главном расслоении (P, M, π) есть дифференциальная 1-форма со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G такая, что имеем $R_g^*(A) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(A)$ для любого $g \in G$ и $A(\widetilde{u}) = u$ а для любого $u \in \mathfrak{g}$, где $\widetilde{u}$ обозначает касательный вектор

$$\widetilde{u} \in T_p(P), \quad \widetilde{u} = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(t \cdot u)).$$

Форма связности A определяет распределение горизонтальных подпространств на тотальном пространстве P:

$$H_p = \ker(A_p) \subset T_p(P), \quad \forall\, p \in P.$$

Это распределение вносится на тотальное пространство ассоциированного расслоения с помощью факторотображения: $P \times V \to P_V = (P \times V)/G$.

Векторное поле X на многообразии M может быть поднято до «горизонтального» векторного поля $\widetilde{X}$ на тотальном пространстве P, которое единственным образом определяется следующими условиями:

$$\widetilde{X}_p \in \ker(A_p) \quad \forall\, p \in P, \qquad \pi'(\widetilde{X}) = X.$$

Как уже отмечалось, сечение ассоциированного векторного расслоения $s \in \Gamma(P_V)$ можно отождествить с элементом $\varphi_s \in C^{\infty}(P, V)_G$. Ковариантная производная сечения s есть сечение векторного расслоения (P_V, M, π_V), соответствующего функции $\varphi'_s(\widetilde{X}) \in C^{\infty}(P, V)_G$.

4. Геометрия канонического векторного расслоения на многообразии Грассмана

Рассмотрим множество $\Pi_m(\mathcal{H}) = \{(X, x) \mid X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}),\ x \in X\}$, являющееся подмножеством $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$. Множество $\Pi_m(\mathcal{H})$ вместе с дифференциальной структурой, индуцированной из $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$, есть дифференцируемое многообразие. Отображение

$$p : \Pi_m(\mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}), \quad p(X, x) = X$$

есть векторное расслоение над многообразием Грассмана $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$. Слой над точкой $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ есть векторное пространство $X \subset \mathcal{H}$. Это векторное расслоение известно под названием *канонического векторного расслоения* над многообразием Грассмана $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$. Для любой точки $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ локальная тривиализация этого векторного расслоения в окрестности точки X возникает естественным образом из системы координат:

$$\Phi_X : \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times X \to \Pi_m(\mathcal{H}), \quad \Phi_X(\varphi, x) = (\Gamma(\varphi), x + \varphi(x)).$$

Если рассмотреть многообразие $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ как многообразие ортонормированных проекций $\mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ (см. (1)), то можно описать тотальное пространство $\Pi_m(\mathcal{H})$ как подмногообразие $\mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$, определенное уравнением $P(x) = x$, $(P, x) \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$. Из него следует, что касательное пространство многообразия $\Pi_m(\mathcal{H})$ определяется уравнением $dP(x) + P(dx) = dx$. Более точно, для любой точки $Q = (P, x) \in \Pi_m(\mathcal{H})$, где $P \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ — проектор и $x \in \mathrm{Im}(P) = X$, касательное пространство $T_Q(\Pi_m(\mathcal{H}))$ есть подпространство пространства $\mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H}$, определенное линейным уравнением $\varphi(x) = (1 - P)u$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$, $u \in \mathcal{H}$, т.е.

$$T_{(X,x)}(\Pi_m(\mathcal{H})) = \left\{ (\varphi, u) \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H} \mid \varphi(x) = \mathcal{P}(X^\perp)(u) \right\}. \tag{12}$$

Из этого описания касательного пространства тотального пространства канонического векторного расслоения легко следует, что вертикальное касательное пространство в точке $(X, x) \in \Pi_m(\mathcal{H})$ есть

$$\mathrm{Vert}(X, x) = \left\{ (0, u) \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H} \mid u \in X \right\}.$$

Естественно выбрать горизонтальное пополнение вертикального пространства в виде

$$\mathrm{Hor}(X, x) = \left\{ (\varphi, \varphi(x)) \mid \varphi \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \right\}.$$

Проектор на вертикальное пространство вдоль касательного подпространства есть

$$P_{\mathrm{Vert}} : T_{(X,x)}(\Pi_m(\mathcal{H})) \to \mathrm{Vert}(X, x), \quad P_{\mathrm{Vert}}(\varphi, w) = (0, w - \varphi(x)). \tag{13}$$

Предложение 1. *Распределение горизонтальных подпространств*

$$\mathrm{Hor}(X, x) \subset T_{(X,x)}(\Pi_m(\mathcal{H})), \quad (X, x) \in \Pi_m(\mathcal{H}),$$

есть связность на каноническом векторном расслоении $\Pi_m(\mathcal{H})$. *Соответствующее ковариантное дифференцирование действует на пространстве сечений* $\Pi_m(\mathcal{H})$ *следующим образом*: *любое сечение* $s \in S(\Pi_m(\mathcal{H}))$ *можно рассматривать как функцию* $s : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$; *для любого касательного вектора* $\varphi \in T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})) \cong \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ *ковариантная производная* s *по* φ *есть*

$$\nabla_\varphi(s) = \mathcal{P}(X)(s'_X(\varphi)) = s'_X(\varphi) - \varphi(s(X)).$$

Доказательство. Из формулы для проекции на вертикальное касательное пространство (см. (13)) следует, что действие дифференциала функции s на касательный вектор φ, а затем на его проекцию на вертикальное касательное пространство есть $s'_X(\varphi) - \varphi(s(X))$. Из определения касательного пространства $\Pi_m(\mathcal{H})$ (см. (12)) следует, что это то же самое, что проекция $s'_X(\varphi)$ на подпространство X вдоль его ортогонального дополнения $X^\perp$. Непосредственным вычислением можно проверить, что операция $\nabla_\varphi(s) = S'(\varphi) - \varphi \circ s$ обладает свойствами ковариантного дифференцирования. □

Рассмотрим теперь векторное расслоение $q : \Pi_m^\perp(\mathcal{H}) \to M$, слой которого над точкой $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ есть $X^\perp$, ортогональное дополнение X. Ясно, что сумма Уитни векторных расслоений $\Pi_m(\mathcal{H}) \oplus \Pi_m^\perp(\mathcal{H})$ есть тривиальное векторное расслоение: $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$. Как и в случае $\Pi_m(\mathcal{H})$, можно описать его тотальное пространство $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$ как подмногообразие в $\mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$:

$$\Pi_m^\perp(\mathcal{H}) = \{ (P, y) \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \mid P(y) = 0 \}.$$

Дифференцируя уравнение $P(y) = 0$, получаем уравнение для касательного пространства к $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$: $dP(y) + P(dy) = 0$. Отсюда следует, что касательное пространство к $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$ в точке (X, y), $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, $y \in X^\perp$, есть подпространство $\mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H}$:

$$T_{(X,y)}(\Pi_m^\perp(\mathcal{H})) = \left\{ (\varphi, u) \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H} \mid \varphi^*(y) + \mathcal{P}(X)(u) = 0 \right\}. \tag{14}$$

Из описания касательного пространства к $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$ следует, что вертикальное касательное подпространство к расслоению $q : \Pi_m^\perp(\mathcal{H}) \to M$ в точке (X, y) есть

$$\mathrm{Vert}(X, y) = \left\{(0, u) \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H} \mid u \in X^\perp\right\}. \tag{15}$$

Можно выбрать дополняющее («горизонтальное») подпространство как

$$\mathrm{Hor}(X, y) = \left\{(\varphi, -\varphi^*(y)) \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \times \mathcal{H}\right\}.$$

Рассуждение, аналогичное рассуждению при доказательстве предложения 1, показывает, что ковариантное дифференцирование, соответствующее этому распределению горизонтальных подпространств есть

$$\nabla^\perp_\varphi(s) = s'_X(\varphi) + \varphi^*(s(X)) = \mathcal{P}(X^\perp)(s'_X(\varphi)))$$

при $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \cong T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}))$, а s есть сечение векторного расслоения $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$ (в этом случае оно рассматривается как функция $s : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$).

Ясно, что $\Pi_m(\mathcal{H}) \oplus \Pi_m^\perp(\mathcal{H}) = M \times \mathcal{H}$. Используя определение ковариантного дифференцирования на сумме двух векторных расслоений (см. (7)), получаем ковариантное дифференцирование $\nabla^{\mathcal{H}} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ на тривиальном векторном расслоении $M \times \mathcal{H}$:

$$\nabla^{\mathcal{H}}_\varphi(s) = s'_X(\varphi) - \varphi(s_1(X)) + \varphi^*(s_2(X)), \tag{16}$$

где $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \cong T_X \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, s_1 — сечение $\Pi_m(\mathcal{H})$, s_2 — сечение $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$, а $s = s_1 + s_2$ — сечение $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$ (т.е. функция $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$).

Из формулы (16) для ковариантного дифференцирования на $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$ следует, что соответствующая форма связности $\mathcal{F}$ есть 1-форма на многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ со значениями в алгебре Ли группы унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (алгебра Ли антисимметрических операторов на $\mathcal{H}$):

$$\mathcal{F}_X(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}) \quad \text{при } X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \text{ и } \varphi \in T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})) \cong \mathrm{Hom}(X, X^\perp).$$

Как уже говорилось (см. (5)), проективное представление многообразия Грассмана приводит к 1-форме со значениями в множестве симметрических операторов:

$$d\mathcal{P}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi \in T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})) \cong \mathrm{Hom}(X, X^\perp).$$

С помощью этой формы форму связности $\mathcal{F}$ можно записать как 1-форму на $\mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}d\mathcal{P} + (\mathcal{P} - 1)d\mathcal{P} = 2\mathcal{P}d\mathcal{P} - d\mathcal{P}. \tag{17}$$

Ее дифференциал (форма кривизны) есть 2-форма $d\mathcal{F} = 2d\mathcal{P}d\mathcal{P}$ со значениями в алгебре Ли антисимметрических операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$(d\mathcal{F})(\varphi, \psi) = 2\begin{bmatrix} \varphi^*\psi - \psi^*\varphi & 0 \\ 0 & \varphi\psi^* - \psi\varphi^* \end{bmatrix}, \quad \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp).$$

Обозначим через $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ пространство симметрических операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Вложение $\mathcal{P} : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ многообразия Грассмана как множества проекторов индуцирует отображение $\mathcal{P}' : T(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{S}(\mathcal{H})$,

$$\mathcal{P}'_X(\varphi) = (\mathcal{P}(X), \widetilde{\varphi}),$$

где

$$\widetilde{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с замечанием 3 это отображение индуцирует связность на касательном расслоении $T(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}))$, совпадающую со связностью $\nabla^* \otimes \nabla^\perp$, где ∇ — связность на каноническом векторном расслоении $\Pi_m(\mathcal{H})$, а $\nabla^\perp$ — связность на $\Pi_m^\perp(\mathcal{H})$.

5. Многообразие Грассмана как орбита (ко)присоединенного представления и соответствующая симплектическая структура

Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем комплексных или вещественных чисел, а L^* — ее двойственное линейное пространство. Линейное отображение

$$B : L \wedge L \to L, \quad B(x \wedge y) = [x, y],$$

индуцирует двойственное отображение двойственных пространств

$$B^* : L^* \to L^* \wedge L^*, \quad B^*(\varphi)(x \wedge y) = \varphi([x, y]).$$

Последнее можно рассматривать как как антисимметрическое ковариантное тензорное поле на линейном пространстве L^*. Такое поле определяет скобку на алгебре гладких функций $C^\infty(L^*)$:

$$\{f, g\}(\varphi) = (df|_\varphi \wedge dg|_\varphi)(B^*(\varphi)) = \varphi([df|_\varphi, dg|_\varphi]),$$

где элементы $df|_\varphi$ и $dg|_\varphi$ пространства L^{**} рассматриваются как элементы пространства L, канонически изоморфного L^{**}. Алгебра $C^\infty(L^*)$ вместе со скобкой, определенной выше, есть алгебра Пуассона. В частности, любые два элемента $x, y \in L$ можно рассматривать как линейные функционалы на векторном пространстве L^*: $x(\varphi) = \varphi(x)$ для всех $\varphi \in L^*$; скобка Пуассона этих двух линейных функционалов есть $\{x, y\} = [x, y]$.

Если векторное пространство L снабжено скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, то можно перенести пуассонову структуру с пространства L^* на L с помощью линейного отображения $u \mapsto \langle u, \cdot \rangle : L \to L^*$. При этом условии элемент $x \in L$ можно рассматривать как линейную функцию на векторном пространстве L: $\widetilde{x}(u) = \langle x, u \rangle$ для всех $u \in L$. Скобка Пуассона таких двух функций равна

$$\{\widetilde{x}, \widetilde{y}\}(u) = \langle [x, y], u \rangle = \widetilde{[x, y]}(u), \quad \forall\, u \in L.$$

Предположим теперь, что L — алгебра Ли группы G, а скалярное произведение на векторном пространстве L инвариантно относительно сопряженного действия группы G:

$$\langle gug^{-1}, gvg^{-1} \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall\, u, v \in L,\ \forall\, g \in G. \tag{18}$$

Допустим, что $g = \exp(tw)$, $w \in L$, $t \in \mathbb{R}$ — однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом w. Дифференцируя равенство (18) по параметру t в точке $t = 0$, получаем следующую инфинитезимальную версию этого равенства:

$$\langle [w, u], v \rangle + \langle u, [w, v] \rangle = 0. \tag{19}$$

Для любой функции $f \in C^\infty(L)$ обозначим через $\mathrm{ham}(f)$ гамильтоново векторное поле, соответствующее функции f для пуассоновой структуры, определенной $\langle\ ,\ \rangle$. Для любого элемента $x \in L$ и соответствующей линейной функции $\widetilde{x} = \langle x\,, \cdot \rangle$ на L имеем

$$d\widetilde{y}(\mathrm{ham}(\widetilde{x})) = \{\widetilde{x}, \widetilde{y}\} = \widetilde{[x, y]} \ \Rightarrow\ \forall u \in L : \widetilde{y}(\mathrm{ham}(\widetilde{x}_u)) = \widetilde{[x, y]}(u) = \langle [x, y], u \rangle.$$

Имея в виду равенство (19), получаем

$$\mathrm{ham}(\widetilde{x})_u = [x, u], \quad \forall\, u \in L,$$

т.е. для пуассоновой структуры, определенной сопряженно-инвариантной метрикой на алгебре Ли L, гамильтоново векторное поле, соответствующее линейной функции $\widetilde{x} = \langle x, \cdot \rangle$, $x \in L$, есть $\mathrm{ham}(\widetilde{x})_u = [x, u]$ для всех $u \in L$. Следовательно, получаем, что для любой точки $u \in L$, подпространство касательного пространства $T(L) \cong L$, порожденного гамильтоновыми векторными полями в точке u, есть

$$\mathrm{Ham}_u = \{[x, u] \mid x \in L\}.$$

Распределение $u \mapsto \mathrm{Ham}_u$, $u \in L$, подпространств касательных пространств интегрируемо и интегральные многообразия этого распределения есть орбиты сопряженного действия соответствующей группы Ли G. Эти орбиты суть в точности симплектические слои пуассоновой структуры, и сужение пуассоновой структуры на каждую из них не вырождено. Соответствующая симплектическая форма на любой орбите сопряженного действия есть

$$\omega(x; u, v) = \langle x, [u, v] \rangle, \quad x, u, v \in L. \tag{20}$$

Любую кривую $u : \mathbb{R} \to L$ можно рассматривать как зависящий от времени гамильтониан $\widetilde{u}_t(x) = \langle u(t), x\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in L$; соответствующее уравнение Гамильтона имеет вид $\dot{x}(t) = [u(t), x(t)]$. Поскольку симплектические слои пуассоновой структуры суть орбиты сопряженного действия, то любое решение уравнения Гамильтона лежит в некоторой орбите сопряженного действия.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда алгебра Ли L есть алгебра Ли антисимметрических операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Эта алгебра Ли та же, что алгебра Ли группы Ли $U(\mathcal{H})$ унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H}$; обозначим ее через $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$. Отображение $\mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \to \mathfrak{u}(\mathcal{H})$, $P \mapsto -iP$ есть инъективное отображение многообразия Грассмана в алгебру Ли $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$. Из равенства $\mathcal{P}(g(X)) = g\mathcal{P}(X)g^{-1}$, $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, $g \in U(\mathcal{H})$, следует, что образ $i\mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ этого отображения есть орбита сопряженного действия группы Ли $U(\mathcal{H})$ на ее алгебре Ли $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$. Поэтому многообразие Грассмана можно рассматривать как орбиту коприсоединенного действия группы Ли на ее алгебре Ли.

Рассмотрим следующее скалярное произведение на векторном пространстве $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$:

$$\langle u, v\rangle = \mathrm{trace}(u^* \circ v), \quad u, v \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}).$$

Для любого унитарного преобразования $g \in U(\mathcal{H})$ имеем

$$\langle gug^{-1}, gvg^{-1}\rangle = \mathrm{trace}(gu^*vg^{-1}) = \mathrm{trace}(u^*v) = \langle u, v\rangle, \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}),$$

откуда следует, что скалярное произведение на пространстве $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ инвариантно относительно сопряженного действия группы $U(\mathcal{H})$. Следовательно, получаем симплектическую форму на любой орбите сопряженного действия, определенную по формуле (20). В частности, для вложенного многообразия Грассмана в $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ имеем

$$\omega(iP; \Phi, \Psi) = \mathrm{trace}(iP \circ [\Phi, \Psi]). \tag{21}$$

Для получения более явного представления дифференциальной 2-формы ω в точке $P \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ рассмотрим разложения операторов Φ и Ψ, соответствующие разложению $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)^\perp$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & i\varphi^* \\ i\varphi & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & i\psi^* \\ i\psi & 0 \end{bmatrix},$$

где $\varphi, \psi : \mathrm{Im}(P) \to \mathrm{Im}(P)^\perp$. Из формулы (21) легко следует следующее выражение для симплектической формы:

$$\omega(X; \varphi, \psi) = i \cdot \mathrm{trace}(\varphi^*\psi + \psi^*\varphi)), \quad X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \text{ и } \varphi, \psi \in T_X(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})) \cong \mathrm{Hom}(X, X^\perp), \tag{22}$$

которое можно записать как $w = i\,\mathrm{trace}(P \cdot dP \wedge dP)$.

Как уже упоминалось, для случая общей алгебры Ли любой элемент $u \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$ можно рассматривать как функцию $\widetilde{u} : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{u}(P) = i \cdot \mathrm{trace}(u^* \circ P) = -i \cdot \mathrm{trace}(u \circ P), \quad P \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H});$$

соответствующее гамильтоново векторное поле на многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ есть

$$\mathrm{ham}(\widetilde{u})_P = [u, P], \quad P \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}). \tag{23}$$

Это векторное поле то же, что и поле, порожденное действием группы $U(\mathcal{H})$.

6. Каноническое главное расслоение на грассмановом многообразии и каноническая связность

Рассмотрим множество всех ортонормированных m-реперов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Это множество известно под названием многообразия Штифеля (см. [8]) для комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Ясно, что многообразие Штифеля ортонормированных m-реперов можно отождествить с множеством всех изометрических отображений комплексного векторного пространства $\mathbb{C}$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Обозначим это множество всех изометрических отображений $\mathbb{C}$ в $\mathcal{H}$ через $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$. Это множество, снабженное топологией и дифференциальной структурой подмножества векторного пространства $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$, есть многообразие, допускающее следующее описание:

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \mid \varphi^*\varphi = 1\}.$$

Существует естественное отображение многообразия $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ в многообразие $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, определенное как

$$\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}), \quad \pi(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi).$$

Напомним, что для любого $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ символ $\mathcal{P}(X)$ обозначает оператор ортогонального проектирования гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на подпространство X.

Лемма 1. *Для любого $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ справедливо соотношение*

$$\mathcal{P}(\mathrm{Im}(\varphi)) = \varphi \circ \varphi^*$$

(см. [4–6]).

Доказательство. Доказательство состоит из следующих двух шагов: сначала проверяется, что $(\varphi\varphi^*)(x) = x$ для любого $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$, а затем то, что $(\varphi\varphi^*)(y) = 0$ для любого $y \in \mathrm{Im}(\varphi)^\perp$.

При $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$ имеем

$$x = \varphi(u) \;\Rightarrow\; (\varphi\varphi^*)(x) = (\varphi \underbrace{\varphi^*\varphi}_{1})(u) = \varphi(u) = x.$$

При $y \in \mathrm{Im}(\varphi)^\perp$ имеем

$$\forall u \in \mathcal{H}: \; \langle (\varphi\varphi^*)(y), u\rangle = \langle \varphi^*(y), \varphi^*(u)\rangle = \langle y, \underbrace{(\varphi\varphi^*)(y)}_{\in \mathrm{Im}(\varphi)}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; (\varphi\varphi^*)(y) = 0.$$

Лемма доказана. □

Так как многообразие $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ отождествляется с пространством проекторов $\mathcal{P}_m(\mathcal{H})$, то отсюда следует, что можно заменить отображение

$$\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$$

на отображение

$$\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathcal{P}_m(\mathcal{H}), \quad \varphi \mapsto \varphi\varphi^*.$$

Обозначим последнее отображение также через π.

Для любого $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ рассмотрим изометрическое отображение $\varphi : \mathbb{C}^m \to X$. Ясно, что $\pi(\varphi) = X$. Следовательно, отображение π сюръективно и для каждого $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$

$$\pi^{-1}(X) = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \mid \mathrm{Im}(\varphi) = X\}.$$

Лемма 2. *Пусть $\{u_1, \cdots, u_m\}$ — произвольный базис эрмитова векторного пространства X. Существует один и только один ортогональный базис $\{e_1, \cdots, e_m\}$ пространства X такой, что для любых $i = 1, \ldots, m$ имеем* $\mathrm{Span}\langle e_1, \ldots, e_i\rangle = \mathrm{Span}\langle u_1, \ldots, u_i\rangle$ *и $e_1 \wedge \cdots \wedge e_i = k \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_i$, где $k > 0$ (т.е. совпадают ориентации реперов $\{e_1, \ldots, e_i\}$ и $\{u_1, \ldots, u_i\}$).*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. При $m = 1$ ясно, что базисом e_1 должен быть $u_1/\|u_1\|$. Если утверждение верно для $m-1$, то рассмотрим вектор вида $e' = x_1e_1 + \cdots + x_{m-1}e_{m-1} + u_m$. Система уравнений $\langle e', e_i\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, дает значения чисел $x_1, \ldots, x_{m-1}$. После этого можно получить вектор e_m нормализацией вектора e': $e_m = c \cdot e'$; поэтому $\|e_m\| = 1$, ориентация репера $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — та же, что и ориентация $\{u_1, \ldots, u_m\}$, и ясно, что это можно сделать единственным образом. □

Из утверждения леммы следует, что для изоморфизма $f : \mathbb{C}^m \to X$ существует единственное линейное преобразование $I(f) : X \to X$ такое, что $\Phi(f) = I(f) \circ f : \mathbb{C}^m \to X$ — изометрическое отображение и

$$\mathrm{Span}\langle \Phi(f)(e_1), \ldots, \Phi(f)(e_i)\rangle = \mathrm{Span}\langle f(e_1), \ldots, f(e_i)\rangle,$$

а ориентации реперов $\{\Phi(f)(e_1), \ldots, \Phi(f)(e_i)\}$ и $\{f(e_1), \ldots, f(e_i)\}$ совпадают при $i = 1, \ldots, m$, где $e_1, \ldots, e_m$ — естественный базис комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^m$. Назовем отображение $\Phi(f)$ *изометризацией* изоморфизма f.

С помощью этой конструкции можно следующим образом определить локальную тривиализацию $\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$: для любой точки $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ рассмотрим отображение

$$\Phi_X : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, X) \times \mathrm{Hom}(X, X^\perp) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}), \quad \Phi_X(\varphi, f) = \Phi((1+f)\varphi).$$

Ясно, что отображение $(1+f)\varphi$ есть мономорфизм, образ которого есть подпространство $\Gamma(f) \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, а $\Phi((1+f)\varphi)$ — изометризация отображения $(1+f)\varphi$.

Следовательно, получаем, что $\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ есть локально тривиальное расслоение.

Рассмотрим следующее правое действие группы $U(m)$ унитарных преобразований $\mathbb{C}^m$ на пространстве $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$:

$$\forall\, g \in U(m) \text{ и } \forall\, \varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \text{ пусть } \varphi \mapsto \varphi \circ g.$$

Ясно, что $\pi(\varphi g) = \pi(\varphi)$.

Если φ и ψ лежат в одном и том же слое $\pi^{-1}(X)$ для $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, то $\varphi\varphi^* = \psi\psi^*$, откуда следует, что $\varphi = \psi \underbrace{\psi^*\varphi}_{g} = \psi g$. При $g = \psi^*\varphi$ имеем $g^*g = \varphi^* \underbrace{\psi\psi^*}_{1} \varphi = \varphi^*\varphi = 1$, откуда следует, что g есть элемент унитарной группы $U(m)$. Получаем, что правое действие группы $U(m)$ на слое расслоения $\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ транзитивно и эффективно. Другими словами, это расслоение есть главное расслоение со структурной группой $U(m)$. Ассоциированное векторное расслоение $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \times \mathbb{C}^m)/U(m)$, где

$$(\varphi, x) \sim (\varphi \circ g, g^{-1}(x)), \quad \forall\, (\varphi, x) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \times \mathbb{C}^m \ \text{ и } \ \forall\, g \in U(m),$$

изоморфно каноническому векторному расслоению $\Pi_m(\mathcal{H})$ с помощью отображения

$$[\varphi, x] \mapsto \varphi(x).$$

Подмножество $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ пространства $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ определяется уравнением $\varphi^*\varphi = 1$, откуда следует, что касательное пространство $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ можно описать уравнением

$$d\varphi^*\varphi + \varphi^* d\varphi = 0. \tag{24}$$

Иначе

$$T_\varphi(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})) = \{u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \mid u^*\varphi + \varphi^* u = 0\}. \tag{25}$$

Дифференцируя отображение $\pi(\varphi) = \varphi\varphi^*$ из $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ в $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, получаем

$$d\pi = d\varphi\varphi^* + \varphi d\varphi^*. \tag{26}$$

Предложение 2. *Вертикальное пространство расслоения*

$$\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$$

в точке $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ *есть подпространство касательного пространства* T_φ*, состоящее из тех* $v : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}$*, для которых* $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.

Доказательство. По определению, вертикальное касательное пространство в точке $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ есть ядро отображения $\pi'(\varphi)$. Следовательно, оно описывается следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} v^*\varphi + \varphi^* v = 0 & \text{— касательное,} \\ v\varphi^* + \varphi v^* = 0 & \text{— вертикальное.} \end{cases}$$

Умножение справа второго уравнения системы на φ дает $v + \varphi v^*\varphi = 0$. Подстановка члена $v^*\varphi$ вместо $-\varphi^* v$ из первого уравнения дает уравнение $v - \varphi\varphi^* v = 0$, или, эквивалентно, $(1 - \mathcal{P}(\mathrm{Im}(\varphi)))v = 0$. Однако ясно, что оператор $(1 - \mathcal{P}(\mathrm{Im}(\varphi)))$ есть оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathrm{Im}(\varphi)^\perp$. Отсюда следует, что $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$. □

Для данного подпространства $X \subset \mathcal{H}$ любое линейное отображение $w : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}$ единственным образом разлагается в прямую сумму $w = v + u$ с $\mathbb{C}^m \xrightarrow{v} X$ и $\mathbb{C}^m \xrightarrow{u} X^\perp$. Это описание вертикального касательного пространства в точке $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ подсказывает следующий естественный выбор дополнительного (горизонтального) подпространства:

$$\mathrm{Hor}_X = \left\{ u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \mid \mathrm{Im}(u) \subset X^\perp \right\}.$$

Для любого $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ с $\mathrm{Im}(\varphi) = X$ имеем $\ker(\varphi) = X^\perp$; поэтому $\varphi^* u = 0$, откуда следует, что $(\varphi^* u)^* = 0$ и, окончательно, $u^*\varphi + \varphi^* u = 0$. Поэтому пространство Hor_X автоматически является подпространством касательного пространства $T_\varphi(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}))$.

Распределение $\varphi \mapsto \mathrm{Hor}_\varphi$ горизонтальных подпространств можно описать уравнением $\varphi^* d\varphi = 0$. Рассмотрим дифференциальную форму $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ на многообразии $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$.

Предложение 3. *Дифференциальная форма $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ принимает значения в алгебре Ли группы $U(m)$ и является формой связности на тотальном пространстве $U(m)$-главного расслоения $\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Из уравнения $\varphi^* d\varphi + d\varphi^* \varphi = 0$ для касательного пространства $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ следует, что дифференциальная форма $\mathcal{A}$ принимает значения в алгебре Ли антисимметрических матриц $\mathcal{A}^* = d\varphi^* \varphi = -\varphi^* d\varphi = -\mathcal{A}$.

Следующий шаг состоит в проверке правила преобразования для дифференциальной формы $\mathcal{A}$ при правом действии унитарной группы $U(m)$. Для любого $g \in U(m)$ имеем

$$R_g(\varphi) = \varphi g \;\Rightarrow\; R_g^*(\mathcal{A}) = g^* \varphi^* d(\varphi g) = g^{-1} \varphi^* d\varphi g = g^{-1} \mathcal{A} g = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\mathcal{A}),$$

что показывает, что правило преобразования дифференциальной формы $\mathcal{A}$ соответствует требованию для форм связности.

Для любой фиксированной точки $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ рассмотрим отображение

$$m_\varphi : U(m) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}), \qquad m_\varphi(g) = \varphi g, \quad \forall\, g \in U(m).$$

Его дифференциал в точке $g = 1$ есть линейное отображение из алгебры Ли $\mathfrak{u}(m)$ в касательное пространство $T_\varphi(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}))$: $m'_\varphi(1)(u) = \varphi u$ для всех $u \in \mathfrak{u}(m)$. Рассмотрим значение дифференциальной формы $\mathcal{A}$ на вертикальном касательном векторе $m'_\varphi(1)(u) = \varphi u$. Получим $\mathcal{A}(\varphi u) = \underbrace{\varphi^* \varphi}_{1} u = u$. Последнее равенство также находится в соответствии с требованием для форм связности. □

Пусть $\xi \in T_\varphi(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}))$ — горизонтальный касательный вектор, т.е. $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ и $\mathrm{Im}(\xi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)^\perp$. Его образ в $T_{\pi(\varphi)} \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ относительно дифференциала проекции π есть

$$\pi'(\varphi)(\xi) = \xi\varphi^* + \varphi\xi^* = \begin{bmatrix} 0 & \varphi\xi^* \\ \xi\varphi^* & 0 \end{bmatrix} : \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)^\perp \to \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)^\perp.$$

Иначе можно рассмотреть ξ как линейное отображение из $\mathbb{C}^m$ в $\mathrm{Im}(\varphi)^\perp$, φ как линейное отображение из $\mathbb{C}^m$ в $\mathrm{Im}(\varphi)$, а $\pi'(\varphi)(\xi)$ Э— как суперпозицию

$$\xi \circ \varphi^* : \mathrm{Im}(\varphi) \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\xi} \mathrm{Im}(\varphi)^\perp,$$

которая есть элемент $\mathrm{Hom}(\mathrm{Im}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi)^\perp) \cong T_{\mathrm{Im}(\varphi)}(\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}))$. Обратно, каждый касательный вектор $\mu \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ в точке $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ можно поднять на соответствующее горизонтальное пространство в точке $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ как отображение $\widetilde{mu} = \mu\varphi$ пространства $\mathbb{C}^m$ в $X^\perp$ (т.е. элемент горизонтального подпространства в $T_\varphi(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}))$). Ясно, что $\widetilde{\xi\varphi^*} = \xi \underbrace{\varphi^*\varphi}_{1} = \xi$.

7. Геометрическая теория управления и алгебра голономии формы связности $\varphi^* d\varphi$

Напомним следующий хорошо известный результат из теории связностей и их голономий на главных расслоениях.

Теорема 1 (Амброуз, Зингер)**.** *Пусть A — форма связности на главном расслоении $\pi : P \to M$. Для любой точки $p \in P$ алгебра голономии Φ_p в точке p есть алгебра, порожденная множеством элементов вида $\Omega(X, Y)$, где Ω — форма кривизны для формы связности A, а X и Y — горизонтальные касательные векторы P в точках q, которые могут быть соединены с точкой p горизонтальной кривой.*

Воспользуемся утверждением этой теоремы для исследования алгебры голономии формы связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ на каноническом главном расслоении над многообразием Грассмана.

Предложение 4. *Для любой точки $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ алгебра голономии связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ в этой точке совпадает с алгеброй Ли группы Ли $U(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Как было показано выше, горизонтальное подпространство, соответствующее форме связности $\mathcal{A}$, в точке $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ есть

$$\mathrm{Hor}(\varphi) = \left\{ u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \mid \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(\varphi)^\perp \right\},$$

а значение формы кривизны на паре горизонтальных векторов (u, v) в точке φ равно

$$\Omega(u, v) = (d\mathcal{A})(u, v) = \frac{1}{2}(u^* v - v^* u).$$

Покажем, что для любого антисимметричного оператора $w : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ можно найти такую пару линейных отображений $u, v : \mathbb{C}^m \to \mathrm{Im}(\varphi)^\perp$, что $w = \frac{1}{2}(u^* v - v^* u)$. В этом случае считаем, что гильбертово пространство бесконечномерно (или, по крайней мере, его размерность такая, какая нам нужна). Поэтому можно выбрать m-мерное комплексное подпространство в $\mathrm{Im}(\varphi)^\perp$. Фиксируем произвольный базис в X, после чего отождествим X с $\mathbb{C}^m$. Если взять $u = 1 : \mathbb{C}^m \to X \cong \mathbb{C}^m$, то из уравнения $w = \frac{1}{2}(v - v^*)$ легко получим, что $v = w$. □

Следовательно, для многообразия Грассмана бесконечномерного гильбертова пространства не обязательно использовать в полном объеме теорему 1, потому что $\mathrm{Im}(\Omega)$ только в одной точке тотального пространства $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ накрывает всю алгебру Ли $\mathfrak{u}(m)$ даже без взятия линейной оболочки. Это же верно и в конечномерном случае, но при $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)^\perp) \geqslant m$. В случае, когда гильбертово пространство конечномерно, а $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)^\perp) < m$, все не так просто.

Предложение 5. *Для любого целого $n > m$ и для любого $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ алгебра голономии формы связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ в точке ψ совпадает со всей алгеброй Ли $\mathfrak{u}(m)$.*

Доказательство. Предположим, что антисимметричный оператор $w : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ диагонален:

$$w = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a_i \in \mathbf{i} \cdot \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $n = m + 1$. Имеем $w = \sum_{i=1}^{m} w_i$, где

$$w_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \ldots \quad a_i \quad \ldots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для каждого w_i рассмотрим пару линейных отображений $u_i, v_i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, где $u_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ и $v_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, a_i, 0, \ldots, 0)$. Для этих отображений имеем $w_i = \frac{1}{2}(u_i^* v_i - v_i^* u_i)$. Следовательно, получаем, что любая диагональная матрица w может быть представлена в виде

$w = \sum\limits_i \Omega(u_i, v_i)$, где $u_i, v_i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$. Напомним теперь, что для любого антисимметричного оператора $w : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ существует унитарное преобразование $\tau : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ такое, что $\tau w \tau^{-1}$ диагональна. Если $\tau w \tau^{-1} = \sum\limits_i \Omega(u_i, v_i)$, то рассмотрим операторы $\widetilde{u_i} = u_i \tau$ и $\widetilde{v_i} = v_i \tau$. Имеем $w = \sum\limits_i \Omega(\widetilde{u_i}, \widetilde{v_i})$. □

Рассмотрим голономию связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ с точки зрения геометрической теории управления. Прежде всего напомним некоторые определения и факты геометрической теории управления (см. [7]).

Определение 2 (управляющая группа)**.** Пусть I — непустое множество. Рассмотрим множество конечных последовательностей вида $((t_1, i_1)(t_2, i_2), \ldots, (t_p, i_p))$ с компонентами из множества $\mathbb{R} \times I$. Введем следующие правила редукции:

- в любой такой последовательности члены вида $(0, k)$ удаляются;
- если $i_k = i_{k+1}$, то отрезок $(t_k, i_k)(t_{k+1}, i_{k+1})$ заменяется на $(t_k + t_{k+1}, i_k)$.

Применяя эти процедуры редукции, для любой последовательности получаем неприводимую последовательность после конечного числа шагов. Множество неприводимых последовательностей элементов множества $\mathbb{R} \times I$ называется *управляющим множеством*, соответствующим множеству I. Обозначим множество таких последовательностей через $C(I)$. Элементы множества $C(I)$ называются *управлениями*.

Из любых двух элементов s_1 и s_2 множества управлений $C(I)$ можно построить новое управление сшиванием $s_1 s_2$, а затем редукцией результата $\mathrm{Red}(s_1 s_2)$. Отображение множества $C(I) \times C(I)$ в $C(I)$:

$$(s_1, s_2) \mapsto \mathrm{Red}(s_1 s_2)$$

определяет групповую структуру на множестве управлений $C(I)$. Единичным элементом этой группы является *пустая* последовательность. Далее обозначим произведение элементов s_1 и s_2 через $s_1 s_2$ или $s_1 \cdot s_2$.

Для любых управления $s = ((t_1, i_1), \ldots, (t_n, i_n)) \in C(I)$ и вещественного числа $a \in \mathbb{R}$ определим управление $a \cdot s$ как

$$a \cdot s = ((at_1, i_1), \ldots, (at_n, i_n)).$$

Любое множество управлений $\{s_1, s_2, \ldots, s_p\} \subset C(I)$ определяет отображение

$$\phi_{s_1 s_2 \ldots s_p} : \mathbb{R}^p \to C(I)$$

как

$$(a_1, \ldots, a_p) \mapsto (a_1 \cdot s_1, \ldots, a_p \cdot s_p), \quad \forall\, (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Определим топологию на множестве $C(I)$ как сильнейшую топологию, в которой непрерывны все отображения $\{\phi_{s_1 \cdots s_p} \mid p \in \mathbb{N},\ s_i \in C(I),\ i = 1, \ldots, p\}$.

Дифференциальная структура на топологическом пространстве $C(I)$ определяется следующим образом: отображение $f : C(I) \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в том и только том случае, если все отображения $f \circ \phi_{s_1 \cdots s_p} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ дифференцируемы.

Определение 3. *Динамической полисистемой* на гладком многообразии M, управляемой группой управлений $C(I)$, называется гладкое левое действие группы $C(I)$ на многообразии M. Для любой точки $x \in M$ множество $C(I)x = \{sx \mid s \in C(I)\}$ называется орбитой точки x.

Любой элемент $i \in I$ определяет однопараметрическую группу диффеоморфизмов

$$\varphi_t^i : M \to M, \quad \varphi_t^i(x) = (t, i)x,$$

которая порождает векторное поле X^i на многообразии M. Семейство векторных полей $\{X_i \mid i \in I\}$ называется *инфинитезимальными преобразованиями* динамической полисистемы $(M, C(I))$.

Обратно, для любого семейства векторных полей $\{X_i \mid i \in I\}$ на гладком многообразии M формула

$$(t_1, i_1) \cdots (t_1, i_1)x = (\varphi_{t_1}^{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_n}^{i_n})(x),$$

где $\varphi_{t_1}^{i_1}, \dots \varphi_{t_n}^{i_n}$ — элементы однопараметрических групп диффеоморфизмов, соответствующих векторным полям $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$, определяют динамическую полисистему, управляемую группой $C(I)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что существует взаимно однозначное соответствие между динамическими полисистемами и семействами векторных полей.

Далее, для любого подмножества векторных полей X на гладком многообразии M динамическая полисистема, управляемая группой $C(X)$ будет также обозначаться через $C(X)$.

Одной из задач геометрической теории управления является исследование задачи достижимости: для данной динамической полисистемы $C(X)$, соответствующей семейству векторных полей X, требуется найти орбиту $C(X)m$ точки $m \in M$. Сформулируем следующие две фундаментальные теоремы о структуре орбиты динамической полисистемы, соответствующей семейству векторных полей.

Теорема 2 (теорема об орбите; Нагано, Суссман)**.** *Пусть X — семейство векторных полей на гладком многообразии M, а m — точка M. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *орбита $C(X)m$ есть иммерсированное подмногообразие многообразия M;*
2) *касательное пространство $T_x(C(X)m)$ в точке $x \in C(X)m$ есть векторное пространство, порожденное множеством векторов $\{\mathrm{Ad}(s)(u_x) \mid s \in C(X),\ u \in X\}$.*

Для любого семейства X векторных полей обозначим через $\mathrm{Lie}(X)$ минимальный подмодуль $C^\infty(M)$-модуля векторных полей на многообразии M, содержащий семейство X и замкнутый относительно операции взятия скобки Ли.

Определение 4. Семейство векторных полей X называется *вполне неголономным*, или *скобко-порожденным*, если $\mathrm{Lie}(X)_m = T_m(M)$ для каждой точки $m \in M$.

Следующая фундаментальная теорема геометрической теории управления практически есть следствие предыдущей теоремы.

Теорема 3 (Рашевский, Чоу)**.** *Пусть M — связное гладкое многообразие, а X — семейство векторных полей на многообразии M. Если семейство X вполне неголономно (т.е. $\mathrm{Lie}(X)_m = T_m(M)$ для всех $m \in M$), то орбита $C(X)m$ совпадает со всем многообразием M для каждой точки $m \in M$.*

Пусть V — комплексное подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Как и ранее, $U(\mathcal{H})$ — группа унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H}$, а $\mathfrak{u}(V)$ — алгебра и группы Ли унитарных преобразований подпространства V. Рассмотрим следующую $\mathfrak{u}(V)$-значную 1-форму на группе Ли $U(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{B} = \imath^*(g^* dg)\imath,$$

где $\imath$ — естественная иммерсия $\imath : V \hookrightarrow \mathcal{H}$, а $\imath^*$ — ее двойственное отображение $\imath^* : \mathcal{H} \to V$. Значение формы $\mathcal{B}$ можно интерпретировать как $(g^{-1}dg)_{VV}$-компоненту оператора $g^{-1}dg \in \mathfrak{u}(\mathcal{H})$ в разложении

$$g^{-1}dg = \begin{bmatrix} (g^{-1}dg)_{VV} & (g^{-1}dg)_{V^\perp V} \\ (g^{-1}dg)_{VV^\perp} & (g^{-1}dg)_{V^\perp V^\perp}, \end{bmatrix}$$

соответствующем разложению гильбертова пространства $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$. Дифференциальная форма $\mathcal{B}$ лево-инвариантна: для любого $a \in U(\mathcal{H})$ имеем

$$L_a^*(\mathcal{B}) = \imath^*(g^* a^* a dg)\imath = \imath^*(g^* dg)\imath = \mathcal{B}.$$

Рассмотрим распределение касательных подпространств на многообразии $U(\mathcal{H})$, определенное уравнением $\mathcal{B} = 0$, т.е. подпространство касательного пространства в точке $u \in U(\mathcal{H})$, являющееся ядром 1-формы $\mathcal{B}$ в точке u. Так как дифференциальная форма $\mathcal{B}$ левоинвариантна, то распределение X также левоинвариантно: $X_{gu} = L'_g(X_u)$. Следовательно, распределение X имеет постоянный ранг. Однако X — не инволютивное распределение. Из определения формы $\mathcal{B}$ следует, что подмножество касательного пространства $X_1 \in T_1(U(\mathcal{H}))$ состоит из операторов вида

$$f = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi^* \\ \varphi & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{H} = V \oplus V^\perp \to \mathcal{H} = V \oplus V^\perp.$$

Для двух таких операторов

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_1^* \\ \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_2^* \\ \varphi_2 & 0 \end{bmatrix}$$

и для левоинвариантных векторных полей $u_1, u_2 \in X$, порожденных $U(\mathcal{H})$ операторами f_1 и f_2, соответственно, имеем

$$[u_1, u_2]_1 = [f_1, f_2] = \begin{bmatrix} \varphi_2^*\varphi_1 - \varphi_1^*\varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_2\varphi_1^* - \varphi_1\varphi_2^* \end{bmatrix}.$$

Обозначим семейство векторных полей, определенных распределением X, также через X и предположим, что подпространство V в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ конечномерно.

Предложение 6. *Семейство векторных полей X на многообразии $U(\mathcal{H})$ вполне неголономно.*

Доказательство. Пусть u_0 и u_1 — любые два элемента $U(\mathcal{H})$. Нужно доказать, что существует такое управление $(t_1, X_1)\cdots(t_n, X_n)$, $t_i \in \mathbb{R}$, $X_i \in X$, что $\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n)u_0 = u_1$.

Так как распределение X левоинвариантно, то можно считать, что $u_0 = 1$. Рассмотрим расслоение $\pi : \mathrm{Isom}(V, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, где $m = \dim(V)$, и форму связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ на нем. Из теоремы об алгебре голономии связности $\mathcal{A}$ следует, что для любые две точки $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{Isom}(V, \mathcal{H})$ можно соединить кусочно-гладкой кривой

$$\Phi : [0,1] \to \mathrm{Isom}(V, \mathcal{H}), \quad \Phi(0) = \varphi_0,\ \Phi(1) = \varphi_1.$$

Предположим, что φ_0 и φ_1 таковы, что $\varphi_0(v) = v$ и $\varphi_1(v) = u_1(v)$ для всех $v \in V$. Рассмотрим расслоение $\pi^\perp : \mathrm{Isom}(V^\perp, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, слой которого над точкой $W \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ есть $\mathrm{Isom}(V^\perp, W^\perp)$. Рассмотрим две точки $\varphi_0^\perp, \varphi_1^\perp \in \mathrm{Isom}(V^\perp, \mathcal{H})$ такие, что $\varphi_0^\perp(x) = x$ и $\varphi_1^\perp(x) = u_1(x)$ для всех $x \in V^\perp$. Ясно, что $\varphi_0 \oplus \varphi_0^\perp = \mathbf{1}$ и $\varphi_1 \oplus \varphi_1^\perp = u_1$. На многообразии $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ имеем кривую $\alpha : [0,1] \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, $\alpha = \pi\Phi$, для которой $\alpha(0) = V$ и $\alpha(1) = u_1(V)$. Пусть $\Phi^\perp : [0,1] \to \mathrm{Isom}(V^\perp, \mathcal{H})$ — такое поднятие кривой α, что $\Phi^\perp(0) = \varphi_0^\perp$ и $\Phi^\perp(1) = \varphi_1^\perp$. Ясно, что $\left\{u(t) = (\Phi + \Phi^\perp)(t) \mid t \in [0,1]\right\}$ — кусочно-гладкое семейство унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H}$ такое, что $u(t)\varphi_0 = \Phi(t)$, $u(0) = 1$, $u(1) = u_1$, $t \in [0,1]$. Так как кривая Φ горизонтальна, получаем, что $\varphi_0^* u^* \dot{u} \varphi_0 = 0$. Следовательно, получаем, что кусочно-гладкая кривая е $u(t)$, $t \in [0,1]$, соединяет точки $u_0 = 1$ и u_1 в $U(\mathcal{H})$ и в то же время есть интегральная кривая динамической полисистемы X на группе Ли $U(\mathcal{H})$. □

.

8. Действие группы $U(\mathcal{H})$ на главном расслоении $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$. Уравнение Шредингера и фаза Берри

Любой элемент g унитарной группы $U(\mathcal{H})$ действует на тотальном пространстве $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ как $\varphi \mapsto g\varphi$, а на базе $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ — как $X \mapsto g(X)$ (или на языке проекторов $P \mapsto gPg^{-1}$). Эти два действия коррелированы:

$$\pi(g\varphi) = g\pi(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}),\ \forall\, g \in U(\mathcal{H}).$$

Другими словами, унитарное преобразование гильбертова пространства $\mathcal{H}$ определяет автоморфизм главного расслоения $\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H}) \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$. Форма связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$ инвариантна относительно действия такого автоморфизма:

$$(g\varphi)^* d(g\varphi) = \varphi^* g^{-1} g d\varphi = \varphi^* d\varphi.$$

Для любого элемента u алгебры Ли $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ имеем однопараметрическую подгруппу $\{\exp(tu),\ t \in \mathbb{R}\}$ группы $U(\mathcal{H})$Б порожденную u. Действие этой группы на тотальном пространстве $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ определяет векторное поле $\widehat{u}$, которое можно описать как $\widehat{u}_\varphi = u \circ \varphi$ для всех $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$. Действие этой группы на базе $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ определяет векторное поле $\check{u}_P = [u, P]$ для всех $P \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, являющееся гамильтоновым векторным полем, соответствующим функции $\widetilde{u} : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$, определенной соотношением $\widetilde{u}(P) = \mathbf{i} \cdot \mathrm{trace}(u^* \circ P)$ (см. (23)). Касательный вектор

$\check{u}$ в точке $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ можно описать как $\check{u}_X = u_{XX^\perp}$, где $u_{XX^\perp} \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ — компонента в разложении

$$u = \begin{bmatrix} u_{XX} & -u^*_{XX^\perp} \\ u_{XX^\perp} & u_{X^\perp X^\perp} \end{bmatrix} : \mathcal{H} = X \oplus X^\perp \to \mathcal{H} = X \oplus X^\perp.$$

Так как действие группы $U(\mathcal{H})$ на тотальном пространстве и на базе совместимы, то $\pi'(\hat{u}) = \check{u}$.

Замечание 4. Это проверяется непосредственно:

$$\pi(\varphi) = \varphi\varphi^* \;\Rightarrow\; d\pi = d\varphi\varphi^* + \varphi d\varphi^* \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; d\pi(\hat{u}) = u\varphi\varphi^* + \varphi(u\varphi)^* = u\underbrace{\varphi\,\varphi^*}_{\pi(\varphi)} - \underbrace{\varphi\,\varphi^*}_{\pi(\varphi)}u = [u, \pi(\varphi)].$$

Так как действие группы $U(\mathcal{H})$ сохраняет форму связности $\mathcal{A}$, то $L_{\hat{u}}(\mathcal{A}) = 0$, где $L_{\hat{u}}$ — дифференцирование Ли по направлению векторного поля $\hat{u}$.

Замечание 5. Это можно проверить непосредственно:

$$\begin{aligned} L_{\hat{u}}(\mathcal{A}) &= d(\mathcal{A}(\hat{u})) + (d\mathcal{A})(\hat{u}, \cdot) \\ &= d(\varphi^* u\varphi) + (u\varphi)^* d\varphi - d\varphi^*(u\varphi) = d\varphi^* u\varphi + \varphi^* u d\varphi - \varphi^* u d\varphi - d\varphi^* u\varphi = 0. \end{aligned}$$

Вертикальная компонента векторного поля $\hat{u}$ измеряется формой связности $\mathcal{A}$ и равна

$$\varphi\mathcal{A}(\hat{u}) = \varphi\varphi^* u\varphi = \pi(\varphi)u\varphi. \tag{27}$$

Поэтому горизонтальная компонента векторного поля $\hat{u}$ в точке $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ есть

$$u\varphi - \pi(\varphi)u\varphi = (1 - \pi(\varphi))u\varphi. \tag{28}$$

Ясно, что в выражении (27) член $\pi(\varphi)$ есть проекционный оператор на подпространство $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathcal{H}$, а член $1 - \pi(\varphi)$ в выражении (28) есть проекционный оператор на подпространство $\mathrm{Im}(\varphi)^\perp \subset \mathcal{H}$. Опишем более явно вертикальную и горизонтальную составляющие касательного вектора $u\varphi$. Для любой точки $\varphi \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ пусть

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & -u^*_{21} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

— разложение оператора $u \in U(\mathcal{H})$, соответствующее разложению гильбертова пространства $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)^\perp$. Из формул (27) и (28) следует, что вертикальная компонента вектора $u \circ \varphi$ есть

$$u_{11} \circ \varphi : \mathbb{C}^m \to \mathrm{Im}(\varphi),$$

а горизонтальная —

$$u_{21} \circ \varphi : \mathbb{C}^m \to \mathrm{Im}(\varphi)^\perp.$$

Пусть $H(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, — зависящий от времени гамильтониан, т.е. для любого $t \in [0, T]$, $H(t)$ — антисимметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Его можно рассматривать как зависящую от времени C^∞-функцию (гамильтониан)

$$\tilde{H(t)} : \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \cong \mathcal{P}_m(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}, \quad \tilde{H(t)}(P) = \mathbf{i} \cdot \mathrm{trace}(H(t)^* \circ P),$$

которая вместе с симплектической формой (см. (22)) $\omega(X; \varphi, \psi) = i \cdot \mathrm{trace}(\varphi^*\psi + \psi^*\varphi))$ определяет зависящее от времени гамильтоново векторное поле на многообразии Грассмана $\mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$: $ham(\tilde{H(t)})_P = [H(t), P]$ для всех $P \in \mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ (или, эквивалентно, $ham(\tilde{H(t)})_X = H(t)_{XX^\perp} \in \mathrm{Hom}(X, X^\perp)$ для всех $X \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$), и соответствующее зависящее от времени векторное поле $\check{H(t)}$ на тотальном пространстве $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$: $\check{H(t)}_\varphi = H(t) \circ \varphi$ для всех $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$. Соответствующее дифференциальное уравнение на пространстве $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$ имеет вид

$$\dot{\varphi}(t) = H(t) \circ \varphi(t), \quad t \in [0, T], \tag{29}$$

а дифференциальное уравнение (уравнение Гамильтона (или Шредингера)) на многообразии Грассмана есть

$$\dot{P}(t) = [H(t), P(t)], \quad t \in [0, T]. \tag{30}$$

Пусть $P(t)$, $t \in [0,T]$, $P(0) \equiv P_0$, — решение уравнения (30), а $\varphi(t)$, $t \in [0,T]$, $\varphi(0) \cong \varphi_0 \in \pi^{-1}(P_0)$ — соответствующее решение уравнения (29) в тотальном пространстве $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$. Ясно, что $\pi(\varphi(t)) = P(t)$ для всех $t \in [0,T]$, однако кривая $\varphi(t)$, вообще говоря, не является горизонтальным поднятием кривой $P(t)$, определенной формой связности $\mathcal{A} = \varphi^* d\varphi$, потому что касательный вектор $\dot{\varphi}(t)$ имеет вертикальную компоненту $H(t)_{11} \circ \varphi(t)$, которая в общем случае отлична от нуля. Этот чисто геометрический факт тесно связан с явлением, известным в физике как *фаза Берри*. Интегральная кривая $P(t)$, $t \in [0,T]$, на многообразии Грассмана определяет изоморфизм слоев $\pi^{-1}(P_0)$ и $\pi^{-1}(P(T) \equiv P_1)$:

1) для точки $\sigma \in \pi^{-1}(P_0)$ пусть $\psi_\sigma(t)$, $t \in [0,T]$, — горизонтальная кривая такая, что $\psi_\sigma(0) = \sigma$ и $\pi(\psi_\sigma(t)) = P(t)$, $t \in [0,T]$. Определим изоморфизм $\mathfrak{B}_1 : \pi^{-1}(P_0) \to \pi^{-1}(P_1)$ как $\mathfrak{B}_1(\sigma) = \psi_\sigma(T)$;
2) для точки $\sigma \in \pi^{-1}(P_0)$ пусть $\varphi_\sigma(t)$, $t \in [0,T]$, — решение уравнения (29) такое, что $\varphi_\sigma(0) = \sigma$. Определим отображение $\mathfrak{B} : \pi^{-1}(P_0) \to \pi^{-1}(P_1)$ как $\mathfrak{B}(\sigma) = \varphi_\sigma(T)$.

В случае, если гамильтонова кривая $P(t)$ на многообразии Грассмана замкнута, $P(0) = P(T)$, изоморфизм $\mathfrak{B} : \pi^{-1}(P_0) \to \pi^{-1}(P_0)$ известен как *фаза Берри*, а изоморфизм $\mathfrak{B}_1 : \pi^{-1}(P_0) \to \pi^{-1}(P_0)$ — как *геометрическая фаза Берри*.

Назовем гамильтонову кривую $P(t) \in \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$, $t \in [0,T]$, *геометрической*, если соответствующая кривая $\varphi(t) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^m, \mathcal{H})$, $t \in [0,T]$, в тотальном пространстве, являющаяся решением уравнения (29), горизонтальна, т.е. для каждого $t \in [0,T]$ касательный вектор $H(t) \circ \varphi(t)$ горизонтален. Поскольку вертикальная компонента этого касательного вектора есть $H(t)_{11} \circ \varphi$, то кривая $P(t)$ — геометрическая кривая в том и только том случае, если $H(t)_{11} = 0$ для каждого $t \in [0,T]$, где $H(t)_{11} : X(t) \to X(t)$ — верхняя левая компонента в разложении

$$H(t) = \begin{bmatrix} H(t)_{11} & -H(t)_{12}^* \\ H(t)_{12} & H(t)_{22} \end{bmatrix} : \mathcal{H} = X(t) \oplus X(t)^\perp \to \mathcal{H} = X(t) \oplus X(t)^\perp.$$

Предложение 7. *Для любой кривой $Q : [0,T] \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H})$ существует такой зависящий от времени гамильтониан $H^Q(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in [0,T]$, что кривая Q является гамильтоновой кривой для $H^Q(t)$ и геометрической кривой.*

Доказательство. Касательный вектор $\dot{Q}(t)$ для любого $t \in [0,T]$ есть элемент касательного пространства грассманиана: $\dot{Q}(t) \in \mathrm{Hom}(Q(t), Q(t)^\perp)$. Рассмотрим зависящий от времени гамильтониан

$$H^Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{Q}(t)^* \\ \dot{Q}(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,T].$$

Ясно, что кривая $Q : [0,T] \to \mathrm{Gr}_m(\mathcal{H}) \cong \mathcal{P}_m(\mathcal{H})$ удовлетворяет уравнению Гамильтона (Шредингера) $\dot{Q}(t) = [H^Q(t), Q(t)]$. Отсюда следует, что кривая $Q(t)$ — гамильтонова кривая. В то же время для любого $t \in [0,T]$ компонента H^Q_{11} автоматически равна нулю. Поэтому касательные векторы $H^Q \circ \varphi(t)$ для точек $\varphi(t) \in \pi^{-1}(Q(t))$, $t \in [0,T]$, «чисто горизонтальны». □

Ясно, что для геометрических кривых на базовом многообразии отображения $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ совпадают. Другими словами, для геометрических кривых геометрическая фаза Берри и фаза Берри совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Lectures on geometric control theory. — SISSA Ref. 38/2001/M, 2001.
2. *Ambrose W., Singer I. M.* A theorem on holonomy// Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — *75*. — С. 428–443.
3. *Fujii K.* Note on coherent states and adiabatic connections, curvatures/ e-print `quant-ph/9910069`.
4. *Fujii K.* Mathematical foundations of holonomic quantum computer/ e-print `quant-ph/0004102`.
5. *Fujii K.* Mathematical foundations of holonomic quantum computer, II// e-print `quant-ph/0101102`.
6. *Fujii K.* Introduction to Grassmann manifolds and quantum computations/ e-print `quant-ph/0103011`.
7. *Lorby C.* Dynamical polysystems and control theory. Geometric methods in system theory// Proc. NATO Adv. Stud. Inst. — 1973. — С. 1–42.
8. *Milnor J., Stasheff I. D.* Characteristic classes. — Princeton, N.T.: Princeton University Press, 1974.

9. *Nomizu K.* Lie groups and differential geometry. — Math. Soc. Japan, 1956.
10. *Pachos J., Zanardi P., Rasetti M.* Non-Abelian Berry connections for quantum computation/ e-print quant-ph/9907103.
11. *Pachos J., Zanardi P.* Quantum holonomies for quantum computing/ e-print quant-ph/0007110.
12. *Zanardi P., Rasetti M.* Holonomic quantum computation/ e-print quant-ph/9904011.

З. Гиунашвили
Отдел теоретической физики, Институт математики, Академия наук Грузии, Тбилиси

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 102–125

О ПОДФАКТОРАХ С УНИТАРНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ БАЗИСОМ

© 2004 г. **Т. ЧЕККЕРИНИ-ЗИЛЬБЕРШТЕЙН**

Аннотация. Изучаются подфакторы, обладающие базисом Пимснера—Попа, образованного унитарными элементами. Обсуждаются несколько примеров и контрпримеров. Дана характеризация этого свойства в терминах проекторов Джонса. В случае конечного индекса полная классификация дана в терминах *-алгебр Хопфа.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 102
2. Предварительные сведения 103
3. Подфакторы с унитарным базисом Пимснера—Попа 111
4. Алгебры Хопфа и регулярные подфакторы 120
Список литературы 124

1. Введение

Подфактор $N \subset M$ обладает унитарным свойством (или, кратко, U-свойством), если существует базис Пимснера—Попа $\{m_j\}_{j\in J}$ алгебры M над N (см. [18]), образованный унитарными элементами. В этом случае $[M : N] \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, т.е. если индекс Джонса конечен, то он обязательно является целым числом. Вводится также инвариант $u(N \subset M)$ — максимальное число унитарных элементов в ортонормированном базисе M над N; таким образом, $N \subset M$ обладает U-свойством в том и только том случае, если $[M : N] = u(N \subset M)$.

Дается и следующая характеризация U-свойства в терминах проекторов Джонса: $N \subset M$ обладает U-свойством в том и только том случае, если существует разбиение единицы, образованное проекторами Джонса в $M_1 = \langle M, N\rangle$.

Рассматриваются несколько примеров. Например, если N — любой фактор типа II_1, то следующие включения обладают U-свойством:

1) $N \subset N \otimes M(n, \mathbb{C})$, где $M(n, \mathbb{C})$ — алгебра $(n \times n)$-матриц над $\mathbb{C}$;
2) $N \subset N \rtimes_\alpha G$, где $N \rtimes_\alpha G$ — скрещенное произведение N на внешнее действие $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ группы G на N;
3) $N^\theta \subset M^\theta$, где $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\theta_i \in \mathrm{Int}(N)$, $\theta_0 = \mathrm{id}_N$, а $M^\theta = N \otimes M(n+1, \mathbb{C})$, $N^\theta = \{\mathrm{diag}(x, \theta_1(x), \ldots, \theta_n(x)) \in M^\theta;\ x \in N\}$;
4) $N \subset M$, где $[M : N] = 2, 3$ (теорема (типа) Гольдмана).

С другой стороны, с помощью результатов Попа об относительных размерностях фактора относительно подфактора можно показать, что для локально тривиальных подфакторов $N \subset M$ индекса $[M : N] > 4$ имеет место соотношение $u(N \subset M) = 1$, так что, в частности, $N \subset M$ не обладает U-свойством. Также обсуждаются и другие примеры.

Показано, что U-свойство обобщается на все включения $M_j \subset M_i$, $j < i$, происходящие из башни Джонса $N \subset M \subset M_1 \subset \cdots$, и приводится частичный результат, касающийся тоннеля.

Наконец, устанавливается, что регулярные подфакторы обладают U-свойством, и с помощью теоремы Окнеану—Шимански доказывается, что если $N \subset M$ обладает U-свойством и $[M : N] < \infty$, то существует *-алгебра Хопфа B, действующая на M_1, такая, что соответствующее скрещенное произведение изоморфно M_2. В качестве следствия дается характеризация подфакторов $N \subset M$ с алгеброй Картана $A \subset N \subset M$.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

2. Предварительные сведения

2.1. Обозначения. Для (сепарабельного) гильбертова пространства H обозначим через

$$\mathcal{B}(H) = \{T : H \to H : \|T\| = \sup_{h\in H,\ \|h\|\leqslant 1} \|Th\| < \infty\}$$

C^*-алгебру всех *ограниченных* (=непрерывных) линейных операторов в H, через

$$\mathcal{U}(H) = \{U \in \mathcal{B}(H) : U^*U = UU^* = I\}$$

унитарную группу H, состоящую из всех *унитарных операторов* в H, а через

$$\mathcal{P}(H) = \{P \in \mathcal{B}(H) : P = P^* = P^2\}$$

множество *проекторов* в $\mathcal{B}(H)$.

2.2. Стандартное представление конечных алгебр фон Неймана. Пусть M — *конечная* алгебра фон Неймана с нормализованным точным следом τ; с помощью *конструкции Гельфанда—Неймарка—Сегала* относительно пары (M,τ) получается гильбертово пространство $L^2(M,\tau)$ — пополнение M относительно следовой нормы $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}$, $x \in M$, и *стандартное представление* M как алгебры (ограниченных) операторов умножения слева на элементы M.

Элемент $x \in M$, рассматриваемый как вектор из $L^2(M,\tau)$, обозначается через $\hat{x}$.

Каноническим сопряжением называется антиунитарный и инволютивный оператор $J_M : L^2(M,\tau) \to L^2(M,\tau)$, определенный соотношением $J_M(\hat{x}) = \widehat{x^*}$. Тогда $J_M M J_M = M' \cap \mathcal{B}(L^2(M,\tau))$ — *коммутант* M, который может быть отождествлен с представлением M как алгебры операторов *правого* умножения на элементы M.

2.3. Включения конечных алгебр фон Неймана. Пусть $N \subset M$ — *унитальное* включение конечных алгебр фон Неймана. Тогда существует нормальное, точное и сохраняющее след условное ожидание E_N из M на N; именно, если $e_N : L^2(M,\tau) \to L^2(N,\tau)$ — ортогональный проектор $L^2(M,\tau)$ на замыкание $L^2(N,\tau)$ алгебры N по следовой норме, то $e_N(\hat{x}) = \widehat{E_N(x)}$ и справедливы следующие соотношения:

(a) $e_N x e_N = E_N(x) e_N$, $x \in M$;
(b) $N = \{e_N\}' \cap M$;
(c) $N \ni b \mapsto be_N \in Ne_N$ — изоморфизм;
(d) $[J_M, e_N] = 0$.

2.4. Основная конструкция. Алгебра фон Неймана, порожденная M и e_N в $\mathcal{B}(L^2(M,\tau))$ и обозначаемая через $\langle M,N\rangle$ или $\langle M,e_N\rangle$, называется *расширением* M с помощью N; кроме того, последовательность включений $N \subset M \subset^{e_N} \langle M,N\rangle$ называется *основной конструкцией* для включения $N \subset M$. Имеют место следующие важные свойства:

(a) $\langle M,N\rangle = \overline{\operatorname{span}}\{xe_Ny : x,y \in M\} = J_M N' J_M$. В частности, $\langle M,N\rangle$ — полуконечная алгебра фон Неймана;
(b) $e_N \langle M,N\rangle e_N = Ne_N$;
(c) существует точный нормальный (возможно, бесконечный) след $\operatorname{Tr}_{\langle M,N\rangle}$ на $\langle M,N\rangle$ такой, что $\operatorname{Tr}_{\langle M,N\rangle}(xe_N) = \tau(x)$, $x \in M$.

2.5. Вероятностный индекс. Пусть $N \subset^E M$ — включение алгебры фон Неймана с точным нормальным условным ожиданием $E : M \to N$ алгебры M на N. По определению, *индекс Пимснера—Попа* (*вероятностный индекс*) этого включения (см. [18]) есть число (возможно, бесконечное)

$$\operatorname{Ind}(E) = \left(\sup\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : E(x) \geqslant \lambda x, \forall x \in M_+\right\}\right)^{-1}.$$

Для включения $N \subset M$ конечных алгебр фон Неймана этот индекс обозначается просто через $\operatorname{Ind}(M,N) := \operatorname{Ind}(E_N)$.

2.6. Ортонормированные базисы. Пусть $N \subset M$ — включение конечных алгебр фон Неймана с конечным вероятностным индексом ($\mathrm{Ind}(M,N) < \infty$); тогда существует конечное семейство $\{m_j\}_{j\in J} \subset M$ элементов M такое, что:

(a) $E_N(m_j^* m_k) = \delta_{jk} f_j \in \mathcal{P}(N)$ (ортогональность);

(b) $L^2(M,\tau) = \bigoplus_j m_j L^2(N,\tau)$ and $x = \sum_j m_j E_N(m_j^* x)\ \forall x \in M$ (полнота).

Кроме того, если $\{m'_k\}_{k\in K} \subset M$ — еще одно семейство, обладающее этими свойствами, то элемент $u := (E_N(m_j^* m'_k))_{j\in J, k\in K}$ есть унитарный элемент в $\mathcal{B}(L^2(N,\tau)^\alpha)$, $\alpha = \mathrm{Ind}(M,N)$, рассматриваемый как оператор из $\bigoplus_k f'_k L^2(N\tau)$ на $\bigoplus_j f_j L^2(N,\tau)$, где $L^2(N,\tau)^\alpha$ — *α-усиление* $L^2(N,\tau)$, т.е. гильбертово пространство $\mathcal{H}$ (единственное с точностью до унитарной эквивалентности) такое, что *постоянная спаривания Мюррея—фон Неймана* $\dim_N \mathcal{H} = \alpha$.

Кроме того, имеем

$$\sum_j m_j e_N m_j^* = I_{\langle M,N\rangle}, \quad \sum_j m_j m_j^* \in \mathcal{Z}(M) := M' \cap M,$$

где $\mathcal{Z}(M)$ — центр M.

Такое семейство называется *базисом Пимснера—Попа* или *ортонормированным базисом M над N* (см. [18]).

2.7. Марковские включения. Для данного включения $N \subset M$ конечных алгебр фон Неймана пусть $\tau_{\langle M,N\rangle} := \mathrm{Tr}_{\langle M,N\rangle} / \mathrm{Tr}_{\langle M,N\rangle}(I)$ — *нормализованный* след на $\langle M,N\rangle$, а E_M — условное ожидание $\langle M,N\rangle$ на M, определенное как

$$E_M\Big(\sum_i x_i e_N y_i\Big) = \Big(\sum_j m_j m_j^*\Big)^{-1} \sum_i x_i y_i$$

(заметим, что $\sum_j m_j m_j^* \geqslant I$, а потому оно обратимо). Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) $\tau_{\langle M,N\rangle}|_M = \tau$;

(b) $E_M(e_N) \in \mathbb{C}I$;

(c) существует ортонормированный базис $\{m_j\}_{j\in J}$ алгебры M над N такой, что $\sum_j m_j m_j^* \in \mathbb{C}I$.

Кроме того, если выполнены такие условия и $E_M(e_N) = \lambda_1 I$ and $\sum_j m_j m_j^* = \lambda_2 I$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \mathrm{Ind}(M,N)^{-1} =: \lambda$, условное ожидание E_M является $\tau_{\langle M,N\rangle}$-сохраняющим, и тогда говорят, что $N \subset M$ есть *λ-марковское включение* и $\tau\langle M,N\rangle$ — *λ-марковский след*.

В соответствии с [19], если $\{m_j\}_{j\in J}$ — ортонормированный базис M над N, то множество $\{\lambda^{\frac{1}{2}} m_j e_N\}_{j\in J}$ есть ортонормированный базис $\langle M,N\rangle$ над M; поэтому, если $N \subset M$ — λ-марковское, то таково и включение $M \subset \langle M,N\rangle$.

2.8. Факториальные включения и индекс Джонса. Пусть $N \subset M$ — факторы типа II_1, а τ — единственный нормализованный точный след на M. По определению, *индекс Джонса M* над N есть константа спаривания Мюррея—фон Неймана $\dim_N L^2(M,\tau)$ фактора N при его действии на гильбертовом пространстве $L^2(M,\tau)$; обозначение $[M:N]$.

Одна из теорем Джонса [9] утверждает, что для этого индекса

$$[M,N] \in \left\{ 4\cos^2 \frac{2\pi}{n+2} : n \geqslant 1 \right\} \cup [4,+\infty]$$

и, конечно, все его возможные значения достигаются в случае, когда M — *гиперконечный* II_1 фактор $\mathcal{R}$ Мюррея—фон Неймана, а N меняется между своими подфакторами (также гиперконечными в силу одной из теорем Конна [3,4]).

Кроме того, следующие условия эквивалентны:

(a) $[M:N] < \infty$;

(b) $\langle M,N\rangle = \mathrm{span}\{xe_N y : x,y \in M\}$;

(c) $\mathrm{Tr}_{\langle M,N\rangle}$ конечен;
(d) $\langle M,N\rangle$ есть II_1 фактор.

Если $\{m_j\}_{j\in J}$ — ортонормированный базис M над N, то $\sum\limits_j m_j m_j^* \in \mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}I$, т.е. факториальное включение $N \subset M$ является $[M:N]^{-1}$-марковским. В самом деле,

$$[M:N] = \mathrm{Ind}(M,N) = \mathrm{Tr}_{\langle M,N\rangle}(I) = \lambda^{-1},$$

где $\sum\limits_j m_j m_j^* = \lambda I$. Кроме того, это семейство можно выбрать так, что $E_N(m_j^* m_j) = I$ при всех j's, кроме, быть может, одного; в этом случае $|J| - 1 < [M:N] \leqslant |J|$.

2.9. Башня Джонса. Пусть $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 конечного индекса Джонса $[M:N]$.

Положим $M_1 = \langle M,N\rangle$, $e_1 := e_N$ и будем обозначать также через τ продолжение $\tau_{\langle M,N\rangle}$ следа на M_1. Имеем $[M_1:M] = [M:N]$, и тогда можно провести стандартную конструкцию для $M \subset M_1$; получим $M_2 := \langle M_1, M\rangle = \langle M_1, e_2\rangle$, где $e_2 := e_M : L^2(M_1,\tau) \to L^2(M,\tau)$ — ортогональный проектор в $\mathcal{B}(L^2(M_1,\tau))$. Более общо, итерируя этот процесс, получаем всю *башню* факторов типа II_1 — так называемую *башню Джонса* [9]:

$$N \subset M \subset^{e_1} M_1 \subset^{e_2} M_2 \subset^{e_3} \cdots \subset^{e_n} M_n \subset^{e_{n+1}} M_{n+1} \subset^{e_{n+2}} \cdots$$

с проекторами $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$, где $e_i := e_{M_{i-2}}$ и

$$M_i = \langle M_{i-1}, M_{i-2}\rangle = \langle M_{i-1}, e_{i-2}\rangle = \{e_{i+2}\}' \cap M_{i+1} = \mathrm{span}\{xe_iy : x,y \in M_{i-1}\}.$$

кроме того,

(a) $[M_i : M_j] = [M:N]^{i-j}$, $j \leqslant i$;
(b) $\tau(xe_i) = [M:N]^{-1}\tau(x)$, $x \in M_{i-1}$;
(c) $e_{i+1}xe_{i+1} = E_{M_{i+1}}(x)e_{i+1}$, $x \in M_i$;
(d) $e_ie_{i\pm1}e_i = [M:N]^{-1}e_i$;
(e) $[e_i, e_j] = 0$ if $|i-j| \geqslant 2$.

2.10. Опускающая основная конструкция и тоннель. Проектор $e_0 \in M$ такой, что $E_N(e_0) = [M:N]^{-1}I$, называется *проектором Джонса*; в [9] установлено, что если $[M:N] < \infty$, то такие проекторы существуют. Кроме того, справедливо следующее замечательное свойство: полагая $N_1 := \{e_0\}' \cap N$, имеем, что $N_1 \subset N \subset^{e_0} M$ изоморфна основной конструкции для $N_1 \subset N$ в том смысле, что

(a) $e_0xe_0 = E_{N_1}(x)e_0$, $x \in N$;
(b) $M = \mathrm{span}\{xe_0y : x,y \in N\}$;
(c) существует единственный сохраняющий след *-изоморфизм θ из $\langle N, N_1\rangle$ на M такой, что $\theta|_N = \mathrm{id}_N$ и $\theta(e_{N_1}) = e_0$.

Кроме того, проектор e_0 определен единственным образом с точностью до сопряжения с унитарным элементом N, т.е. если e_0^0 — еще один проектор Джонса и $N_1^0 = \{e_0^0\}' \cap N$, то существует $u \in \mathcal{U}(N)$ такой, что $ue_0^0u^* = e_0$ и $uN_1^0u^* = N_1$ (см. [18]). Приведенная выше конструкция подфактора $N_1 \subset^{e_0} N$ называется *опускающей основной конструкцией* для $N \subset M$.

Итерируя опускающую основную конструкцию, получаем *тоннель* подфакторов

$$M \supset^{e_0} N \supset^{e_{-1}} N_1 \supset^{e_{-2}} N_2 \supset^{e_{-3}} \cdots \supset^{e_{-n}} N_n \supset^{e_{-n-1}} N_{n+1} \supset^{e_{-n-2}} \cdots$$

с проекторами $e_0, e_{-1}, e_{-2}, \ldots$, где $N_i = \{e_{-i+1}\}' \cap N_{i-1}$, $i \geqslant 1$ ($N_0 = N$), и

(a) $[N_j : N_i] = [M:N]^{i-j}$, $j \leqslant i$;
(b) $\tau(xe_{-i}) = [M:N]^{-1}\tau(x)$, $x \in N_i$;
(c) $e_{-i}xe_{-i} = E_{N_{i+1}}(x)e_{-i}$, $x \in N_i$;
(d) $e_{-i}e_{-i\pm1}e_{-i} = [M:N]^{-1}e_{-i}$;
(e) $[e_{-i}, e_{-j}] = 0$, если $|i-j| \geqslant 2$.

Заметим также, что поскольку основная конструкция (и башня Джонса) — канонические, то опускающая основная конструкция единственна с точностью до сопряжения с унитарными элементами N; в частности, если

$$M \supset N \supset N_1 \supset \cdots \supset N_m \supset N_{m+1} \supset \cdots, \quad M \supset N \supset N_1 \supset \cdots \supset N_m \supset N^0_{m+1} \supset \cdots$$

— тоннели для $N \subset M$, совпадающие до m-го шага, то для любого $\ell \geqslant 0$ существует унитарный элемент $u_\ell \in N_m$ такой, что $u_\ell N_{m+k} u_\ell^* = N^0_{m+k}$ для всех k таких, что $1 \leqslant k \leqslant \ell$ (см. [18]).

2.11. Однородные марковские включения. Включение $N \subset M$ алгебр фон Неймана называется *однородным марковским*, кратко *h-марковским* [29], если оно марковское и проектор e_N имеет скалярный центральный след в $\langle M, N\rangle$, т.е. $C_{\mathrm{Tr},\langle M,N\rangle}(e_N) \in \mathbb{C}I$.

Как и для общих марковских включений, ясно, что $M \subset \langle M, N\rangle$ есть также h-марковское и, как и в факториальном случае, получаем башню алгебр с помощью итераций основной конструкции.

Кроме того, если $N \subset M$ — алгебры фон Неймана типа II_1, то проектор $e_0 \in M$ такой, что $E_N(e_0) = \lambda I$ и $C_{\mathrm{Tr},M}(e_0) = \lambda I$, $\lambda = [M : N]^{-1}$, называемый *проектором Джона*, существует в том и только том случае, если $N \subset M$ — h-марковское включение. В этом случае, полагая $N_1 := \{e_0\}' \cap M$, получаем, что $N_1 \subset N \subset M$ есть основная конструкция для $N_1 \subset N$. Кроме того, $N_1 \subset N$ — также h-марковское; итерируя эту процедуру, получаем весь тоннель, имеющий те же свойства, что и в факториальном случае.

Наконец, имеем единственность в опускающей конструкции, которая понимается в следующем смысле. Пусть e_0 и e_0^0 — проекторы в $\mathcal{P}(M)$ такие, что $E_N(e_0) = E_N(e_0^0) = C_{\mathrm{Tr},M}(e_0) = C_{\mathrm{Tr},M}(e_0^0) = \lambda I$. Тогда существует унитарный элемент $u \in M$ такой, что $ue_0u^* = e_0^0$ и $uN_1u^* = N_1^0 := \{e_0^0\}' \cap M$.

Ясно, что факториальные включения автоматически являются h-марковскими.

2.12. Двойственность. Существует изоморфизм из $[M : N]$-усиления M на M_2, переводящий $N \subset M$ на $M_1 \subset M_2$. Тогда

$$N'_{k+2} \cap M \cong N'_k \cap M_2, \quad M' \cap M_l \cong M'_2 \cap M_{l+2}$$

для всех $k, \ell \geqslant 0$ как конечномерные алгебры. Если $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(N)$ — *внешнее* действие конечной группы G на II_1 факторе N и $N^G := \{x \in N : \sigma_g(x) = x \ \forall g \in G\}$ — подфактор неподвижных относительно этого действия точек, то $N_G \subset N \subset N \rtimes_\sigma G$ есть основная конструкция для $N^G \subset N$ и

$$N \rtimes_\sigma G \cong N^G \otimes \mathcal{B}(l^2(G)) = N^G \otimes M_{|G|}(\mathbb{C}),$$

что сводится к хорошо известной *двойственности Такесаки* действий групп [32].

2.13. Высшие относительные коммутанты и граф Джонса. Так как $[M_i : M_j] < \infty$, $i, j \in \mathbb{Z}$ ($M_{-|k|} := N_{|k|-1}$), то все относительные коммутанты $M'_j \cap M_i$ являются конечномерными алгебрами [9].

Решетка всех высших относительных коммутантов

$$\{M'_j \cap M_i \subset M'_k \cap M_l : \ j \leqslant k, \ i \leqslant l; \ i, j, k, l \in \mathbb{Z}\}$$

называется *стандартно инвариантной* [27] для включения $N \subset M$ и обозначается через $\mathcal{G}_{N,M}$. Как абстрактный объект она эквивалентно объекту группового типа, аксиоматизированного Окнеану [16] и называемого *парагруппой* включения $N \subset M$. Недавно в [30] было приведено полное описание таких объектов.

В частности (см. [10]), последовательность включений высших относительных коммутантов M

$$\mathbb{C}I = M' \cap M \subset M' \cap M_1 \subset M' \cap M_2 \subset \cdots \subset M' \cap M_n \subset M' \cap M_{n+1} \subset \cdots$$

полностью определяется *отмеченной матрицей* над $\mathbb{Z}$, называемой *стандартной матрицей* для $N \subset M$ и обозначаемой через $\Gamma_{N,M} = (a_{k\ell})_{k\in K, \ell \in L}$, $k_0 \in K$, или, эквивалентно, отмеченным *двудольным графом*, также обозначаемым через $\Gamma_{N,M}$ (называемым *стандартным графом* или *графом Джонса*) с точками в множестве K как четными вершинами и с точками в множестве L — как нечетными и $a_{k\ell}$ ребрами между вершинами k и ℓ.

Как граф $\Gamma_{N,M}$ связно. Пусть $K_0 := \{k_0\}$ и для $i \geqslant 1$ пусть

$$L_i := \{l \in L : a_{kl} \neq 0 \text{ для некоторого } k \in K_{i-1}\}, \quad K_i := \{k \in K : a_{kl} \neq 0 \text{ для некоторого } l \in L_i\},$$

тогда

$$\bigcup_i K_i = K, \quad \bigcup_i L_i = L,$$

и множество неприводимых компонент $M' \cap M_{2i}$ (соответственно $M' \cap M_{2i+1}$) отождествляется с K_i (соответственно с L_i); кроме того, вложения $K_i \hookrightarrow K_{i+1}$ отождествляются с помощью мономорфизмов

$$\mathcal{Z}(M' \cap M_{2i}) \ni z \longmapsto \text{ единственная } z_1 \in \mathcal{Z}(M' \cap M_{2i+2}) \text{ такая, что } e_{2i+2}z_1 = e_{2i+2}z$$

из центра $M' \cap M_{2i}$ в центр $M' \cap M_{2i+2}$; аналогично для $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$, $i \geqslant 1$.

При этих соглашениях матрица вложения для $M' \cap M_{2i} \subset M' \cap M_{2i+1}$ есть $\Gamma_{N,M}|_{K_i}$, а для $M' \cap M_{2i+1} \subset M' \cap M_{2i+2}$ — $\Gamma^t_{N,M}|_{L_i}$.

Заметим, что в силу двойственности $\Gamma_{N,M} = \Gamma_{M_{2i-1},M_{2i}} = \Gamma_{N_{2i},N_{2i-1}}$, но, вообще говоря, $\Gamma_{N,M}$ может отличаться от $\Gamma_{N_1,N}$. Имеем также следующую характеризацию *спектрального радиуса* $\Gamma_{N,M}$ (он может рассматриваться также как и *норма* соответствующего оператора из $\ell^2(K)$ в $\ell^2(L)$ в терминах размерностей высших относительных коммутантов, см. [27]):

$$\|\Gamma_{N,M}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \dim(M' \cap M_n)^{\frac{1}{n}} = \|\Gamma_{M,M_1}\|^2 \leqslant [M : N].$$

2.14. Стандартные собственные векторы. Если $k \in K$ (соответственно, $\ell \in L$), то для любого i, для которого $k \in K_i$ (соответственно, $\ell \in L_i$) и любого минимального проектора p в k-м слагаемом в $M' \cap M_{2i}$ или в $N'_{2i-1} \cap M$ (соответственно, для любого q в ℓ-м слагаемом в $M' \cap M_{2i+1}$ или в $N'_{2i} \cap M$) векторы $\mathbf{v} := (v_k)_{k\in K}$ и $\mathbf{u} := (u_\ell)_{\ell\in L}$, определенные как

$$v_k := [pM_{2i}p : M_p]^{\frac{1}{2}}, \quad u_l := [qM_{2i+1}q : M_q]^{\frac{1}{2}}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\Gamma_{N,M}\mathbf{u} = \sqrt{\alpha}\mathbf{v}, \quad \Gamma^t_{n,M}\mathbf{u} = \sqrt{\alpha}\mathbf{u};$$

так что, в частности,

$$\Gamma^t_{N,M}\Gamma_{N,M}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}, \quad \Gamma_{N,M}\Gamma^t_{N,M}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v},$$

где $\alpha := \left(\sum_\ell a_{k\ell}u_l\right)^2 \leqslant [M : N]$ совпадают с *минимальным индексом* Хьяо $\mathrm{Ind}_{\min}(M, N)$ (см. [8]).

Вообще говоря, $\|\Gamma_{N,M}\|^2 \leqslant \alpha$, однако если граф $\Gamma_{N,M}$ конечен, т.е., в современной терминологии, $N \subset M$ имеет *конечную глубину*, то, разумеется, справедливо равенство $\|\Gamma_{N,M}\| = [M : N]$ и, с точностью до ренормализации, векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — *собственные векторы Перрона—Фробениуса* (положительных) матриц $\Gamma_{N,M}\Gamma^t_{N,M}$ и $\Gamma^t_{N,M}\Gamma_{N,M}$ соответственно. Эти векторы также обладают следующим замечательным свойством: $[M : N]^{-i}v_k^{\frac{1}{2}}$ (соответственно, $[M : N]^{-i}u_\ell^{\frac{1}{2}}$) есть след минимального проектора в k-м слагаемом в $M' \cap M_{2i}$ или в $N'_{2i-1} \cap M$ (соответственно, в ℓ-м слагаемом в $M' \cap M_{2i+1}$ или в $N'_{2i} \cap M$).

Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ называются *стандартными (собственными) векторами* четного (соответственно, нечетного) локальных индексов.

2.15. Стандартная модель для включений и их автоморфизмов. Пусть $N \subset M$ — включение факторов типа II_1. В силу единственности (с точностью до унитарной эквивалентности, см. раздел 2.10) опускающей конструкции, класс изоморфности $N^{st} := \overline{\bigcup_k N'_k \cap N}$ и $M^{st} := \overline{\bigcup_k N'_k \cap M}$, а, следовательно, и $N^{st} \subset M^{st}$ не зависит от выбора тоннеля $M \supset N \supset N_1 \supset \cdots$.

Включение типа II_1 гиперконечных алгебр фон Неймана $N^{st} \subset M^{st}$ называется *стандартной моделью* для $N \subset M$. $\Gamma_{N,M}$ называется *эргодическим*, если M^{st} (следовательно, эквивалентно, N^{st}) — фактор. Упомянем, что классификационные теоремы Попа для подфакторов конечной глубины [24] и, более общо, для *сильно аменабельных* подфакторов [27] утверждают,что

$(N \subset M) \cong (N^{st} \subset M^{st})$, т.е. стандартный инвариант — это полный инвариант для таких включений.

Обозначим через $\mathrm{Aut}(M,N) := \{\theta \in \mathrm{Aut}(M) : \theta(N) = N\}$ подгруппу автоморфизмов M, оставляющих N глобально инвариантной. Предположим теперь, что $\theta \in \mathrm{Aut}(M,N)$. В [12] доказаны следующие утверждения.

(a) Для любого выбора тоннеля $M \supset^{e_0} N \supset^{e_{-1}} N_1 \supset \cdots$ существуют унитарные элементы $u_k \in N_k$, $k \geqslant 0$, такие, что $\mathrm{Ad}(U_k \cdots u_1 u_0)\theta(e_k) = e_k$ (результат, неявно присутствующий в [18]).

(b) Для $x \in \bigcup\limits_k (N_k' \cap M)$ определим

$$\theta^{st}(x) := \mathrm{Ad}(\cdots u_k \cdots u_1 u_0)\theta(x).$$

Тогда

$$\theta^{st}(N_k' \cap M) = N_k' \cap M, \quad \theta^{st}(N_k' \cap N) = N_k' \cap N, \quad \theta^{st}(e_{-k}) = e_{-k}, \quad \forall k \geqslant 0,$$

т.е. θ^{st} реализует сохраняющий след автоморфизм на $\bigcup\limits_k N_k' \cap M$, оставляющий глобально инвариантными $\bigcup\limits_k N_k' \cap N$ и одни конечномерные подалгебры $N_k' \cap M$ и $N_k' \cap N$ и оставляющий неподвижными все проекторы Джонса.

(c) θ^{st} не зависит от выбора тоннеля $M \supset^{e_0} N \supset^{e_{-1}} N_1 \supset \cdots$, выбора унитарных элементов $u_k \in N_k$ и возмущения θ внутренними автоморфизмами N, т.е. $(\mathrm{ad}(u) \circ \theta)^{st} = \theta^{st}$, если $u \in \mathcal{U}(N)$.

(d) θ^{st} продолжается до автоморфизма M^{st}, также обозначаемого через θ^{st}, оставляющего глобально неподвижным N^{st}; в частности, отображение $\mathrm{Out}(M,N) := \mathrm{Aut}(M,N)/\mathrm{Int}(N) \ni \theta \mapsto \theta^{st} \in \mathrm{Aut}(M^{st}, N^{st})$ — гомоморфизм групп.

Автоморфизм θ^{st} называется *стандартной частью* автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}(M,N)$. Кроме того, в [25, 27] доказаны следующие утверждения.

(a) Если $\theta^{st}|_{N_k' \cap M}$ — внутренний для всех k и $\Gamma_{n,M}$ — дерево, то $\theta^{st} = \mathrm{id}_{M^{st}}$.

(b) Если $\sup\limits_k \dim \mathcal{Z}(N_k' \cap M)^\theta) < \infty$, то θ^{st} *периодичен*, т.е. существует $n = n(\theta) \in \mathbb{N}$ такое, что $(\theta^{st})^k$ — собственно внутрений при $1 \leqslant k < n$ и $(\theta^{st})^n = \mathrm{id}_{M^{st}}$.

Если $(\theta^{st}) = \mathrm{id}_{M^{st}}$, то говорят, что θ имеет *тривиальную стандартную часть*.

2.16. Собственно внешние действия на подфакторах. Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}(M)$ называется *собственно внешним* на $N \subset M$ (см. [25, 27]), если $\theta \in \mathrm{Aut}(M,N)$ и при любом выборе тоннеля $M \supset N \supset N_1 \supset \cdots$ и для любого $k \geqslant 0$ из того, что $a \in M$, $ax = \theta(x)a$ при всех $x \in N_k$, следует, что $a = 0$.

Отметим, что это понятие не зависит от класса внешней сопряженности для θ, т.е. если θ — собственно внешний на $N \subset M$ и $u \in \mathcal{U}(N)$, то $\mathrm{Ad}(u) \circ \theta$ также собственно внешний на $N \subset M$.

Действие $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(M)$ дискретной группы G является собственно внешним на $N \subset M$, если σ_g — собственно внешний на $N \subset M$ при всех $g \in G \setminus \{e\}$. Следующие условия эквивалентны [25, 27]:

(a) σ — собственно внешний на $N \subset M$;

(b) существует тоннель $M \supset N \supset N_1 \supset \cdots$ такой, что для всех $k \geqslant 0$ имеем $N_k' \cap (M \rtimes_\sigma G) = N_k' \cap M$;

(c) для любого тоннеля $M \supset N \supset N_1 \supset \cdots$ и для всех $k \geqslant 0$ имеем $N_k' \cap (M \rtimes_\sigma G) = N_k' \cap M$;

(d) $M' \cap (M_k \rtimes_\sigma G) = M' \cap M_k$ для всех $k \geqslant 0$.

Кроме того, если $N \subset M$ имеет конечную глубину, G не имеет кручения и σ — собственно внешнее действие G на M, то σ также является собственно внешним на $N \subset M$ (см. [27]).

2.17. Условие Фолнера и сильная аменабельность. Следуя [26], будем говорить, что весовой граф $(\Gamma_{N,M}, \mathbf{v})$, или просто $\Gamma_{N,M}$, удовлетворяет *условию Фолнера*, если для любого $\varepsilon > 0$, любого конечного подмножества $F \subset K$ и

$$(\Gamma_{N,M}\Gamma_{N,M}^t)(F) := \left\{ k \in K : \exists k' \in F \ \text{ такого, что } \ \sum_{l \in L} a_{kl}a_{k'l} \neq 0 \right\}, \quad \partial F := (\Gamma_{N,M}\Gamma_{N,M}^t)(F) \setminus F,$$

имеем

$$\sum_{k \in (\Gamma_{N,M}\Gamma_{N,M}^t)(F)} v_k^2 < (1+\varepsilon) \sum_{k' \in F} v_{k'}^2$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{k \in \partial F} v_k^2 < \varepsilon \sum_{k' \in F} v_{k'}^2.$$

Заметим, что если $N \subset M$ имеет конечную глубину, то $\Gamma_{N,M}$ автоматически удовлетворяет условию Фолнера. Кроме того, если $\Gamma_{N,M}$ удовлетворяет условию Фолнера, то $\|\Gamma_{N,M}\|^2 = \mathrm{Ind}_{\min}(M,N)$.

Наконец, $\Gamma_{N,M}$ называется *сильно аменабельной* (см. [26, 27, 29]), если $\Gamma_{N,M}$ удовлетворяет условию Фолнера и эргодична.

2.18. Коммутивные квадраты. Пусть $N \subset M$ и $Q \subset P$ — включения алгебр фон Неймана такие, что $Q \subset N$ и $P \subset N$; $\begin{pmatrix} N & \subset & M \\ \cup & & \cup \\ Q & \subset & P \end{pmatrix}$ называется *коммутативным квадратом* (см. [21]), если $E_N E_P = E_Q = E_P E_N$.

Коммутативный квадрат $\begin{pmatrix} N & \subset & M \\ \cup & & \cup \\ Q & \subset & P \end{pmatrix}$ называется *невырожденным* (см. [27]), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(a) $\mathrm{supp}\{xe_N y : x, y \in P\} \equiv \bigvee\{ue_N u^* : u \in \mathcal{U}(P)\} = I$;
(b) $\bigvee\{ve_P v^* : v \in \mathcal{U}(N)\} = I$;
(c) если $\{p_j\}_j$ — ортонормированный базис P над Q, то он является ортонормированным базисом M над N;
(d) если $\{n_j\}_j$ — ортонормированный базис N над Q, то он является ортонормированным базисом M над P;
(e) $\overline{\mathrm{span}}PN = M$;
(f) $\overline{\mathrm{span}}NP = M$;
(g) $[M:N] = [P:Q]$;
(h) $[M:P] = [N:Q]$.

Важно отметить следующий факт. Допустим, что $\begin{pmatrix} N & \subset & M & \subset & R \\ \cup & & \cup & & \cup \\ Q & \subset & P & \subset & S \end{pmatrix}$ — коммутативные квадраты; тогда коммутативные квадраты $\begin{pmatrix} N & \subset & M \\ \cup & & \cup \\ Q & \subset & P \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} M & \subset & R \\ \cup & & \cup \\ P & \subset & S \end{pmatrix}$ невырождены в том и только том случае, если $\begin{pmatrix} N & \subset & R \\ \cup & & \cup \\ Q & \subset & S \end{pmatrix}$ невырожден.

Предположим теперь, что $\begin{pmatrix} N & \subset & M \\ \cup & & \cup \\ Q & \subset & P \end{pmatrix}$ невырожден. Пусть $N \subset M \subset^{e_N^M} \langle M, N\rangle = \langle M, e_N^M\rangle$ и $Q \subset P \subset^{e_Q^P} \langle P, Q\rangle = \left\langle P, e_Q^P \right\rangle$ — основные конструкции для горизонтальных включений. Если $\langle P, e_N^M\rangle$ — алгебра фон Неймана, порожденная P и e_N^M в $\mathcal{B}(L^2(M,\tau))$, то существует единственный изоморфизм θ из $\langle P, e_N^M\rangle$ на $\langle P, Q\rangle = \left\langle P, e_Q^P \right\rangle$ такой, что $\theta|_N = \mathrm{id}_N$, $\theta(e_N^M) = e_Q^P$; кроме того, он сохраняет след, т.е. $\mathrm{Tr}_{\langle P,Q\rangle} \circ \theta = \mathrm{Tr}_{\langle M,N\rangle}|_{\langle P, e_N^M\rangle}$.

Кроме того, если $E_{\langle P, e_N^M\rangle}^{\langle M,N\rangle}$ — единственное сохраняющее след условное ожидание $\langle M, N\rangle$ на его подалгебре $\langle P, e_N^M\rangle$, то $E_{\langle P,Q\rangle}^{\langle M,N\rangle} = \theta \circ E_{\langle P, e_N^M\rangle}^{\langle M,N\rangle}$ — нормальное точное условное ожидание, сохраняющее след.

Тогда коммутативный квадрат $\begin{pmatrix} M \subset \langle M, e_N^M \rangle \\ \cup \quad\quad \cup \\ P \subset \langle P, e_N^M \rangle \end{pmatrix}$ также невырожден, а последовательность коммутативных квадратов $\begin{pmatrix} N \subset M \subset \langle M, N \rangle \\ \cup \quad \cup \quad\quad \cup \\ Q \subset P \subset \langle P, e_N^M \rangle \end{pmatrix}$ называется *основной конструкцией* для коммутативного квадрата $\begin{pmatrix} N \subset M \\ \cup \quad \cup \\ Q \subset P \end{pmatrix}$. Так же, как и для простых включений, можно итерировать эту процедуру и получить целую *башню* коммутативных квадратов

$$\begin{pmatrix} N & \subset & M & \subset & M_1 := \langle M, e_N^M \rangle & \subset & M_2 := \left\langle M_1, e_M^{M_1} \right\rangle & \subset & \cdots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ Q & \subset & P & \subset & P_1 := \langle P, e_N^M \rangle & \subset & P_2 := \left\langle P_1, e_M^{M_1} \right\rangle & \subset & \cdots \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, для данного невырожденного коммутативного квадрата $\begin{pmatrix} N \subset M \\ \cup \quad \cup \\ Q \subset P \end{pmatrix}$ при любом выборе тоннеля $P \supset Q \supset Q_1 \supset \cdots$ для нижнего горизонтального включения существует единственный тоннель $M \supset N \supset N_1 \supset \cdots$ для верхнего горизонтального включения такой, что квадрат $\begin{pmatrix} N_i \subset N_j \\ \cup \quad \cup \\ Q_i \subset Q_j \end{pmatrix}$ коммутативен и невырожден, $0 \leqslant j < i$, и при $i \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} N_{i+1} \subset N_i \subset N_{i-1} \\ \cup \quad\quad \cup \quad\quad \cup \\ Q_{i+1} \subset Q_i \subset Q_{i-1} \end{pmatrix}$ является основной конструкцией для $\begin{pmatrix} N_{i+1} \subset N_i \\ \cup \quad\quad \cup \\ Q_{i+1} \subset Q_i \end{pmatrix}$.

Наконец, $\begin{pmatrix} N \subset M \\ \cup \quad \cup \\ Q \subset P \end{pmatrix}$ называется *гладким* (см. [27]), если $N' \cap M_k \supset Q' \cap P_k$ при всех $k \geqslant 0$ (или, эквивалентно, в том и только том случае, если $N' \cap P_k = Q' \cap P_k$ при всех $k \geqslant 0$). Заметим, что в этом случае $M_i' \cap M_k \supset P_i' \cap P_j$ и, на самом деле, $M_i' \cap M_k = P_i' \cap P_j$ при всех $i \leqslant j$.

2.19. Алгебры ультрастепеней. Пусть (M, τ) — фактор типа II_1 с нормализованным точным следом τ, а ω — свободный ультрафильтр на натуральных числах $\mathbb{N}$. Рассмотрим алгебру фон Неймана

$$l^\infty(\mathbb{N}, M) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in M, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \right\}$$

и определим $\tau_\omega((x_n)_n) = \lim\limits_{n \to \omega} \tau(x_n)$. Легко проверить, что τ_ω — след на $l^\infty(\mathbb{N}, M)$. Определим

$$\mathcal{I}_\omega := \left\{ x = (x_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}, M) : \lim_{n \to \omega} \|x_n\|_2 = 0 \right\}.$$

и для $y = (y_n)_n$, $z = (z_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}, M)$ определим отношение $y \sim_\omega z$ в том и и только том случае, если $\lim\limits_{n \to \omega} \|y_n - z_n\|_2 = 0$. Тогда $\sim_\omega$ — отношение эквивалентности и $\mathcal{I}_\omega$ его двусторонний w-замкнутый идеал; алгебра фон Неймана

$$M^\omega := l^\infty(\mathbb{N}, M)/\sim_\omega = l^\infty(\mathbb{N}, M)/\mathcal{I}_\omega$$

оказывается II_1 фактором с точным нормальным следом τ_ω (см. [14]).

Алгебра M^ω не сепарабельна (II_1-фактор (M, τ) сепарабелен в том и только том случае, если $L^2(M, \tau)$ сепарабельно как гильбертово пространство). M включается в M^ω с помощью отождествления $x \in M$ с $(x_n)_n + \mathcal{I}_\omega \in M^\omega$, где $x_n = x$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что такое включение $M \subset M^\omega$ имеет бесконечный индекс Джонса.

Если $N \subset M$ — включение II_1-факторов с конечным индексом Джонса $[M : N]$, то $N^\omega \subset M^\omega$ имеет тот же индекс, $[M^\omega : N^\omega] = [M : N]$, а если $E_{N^\omega}^{M^\omega}$ — единственное τ_ω-сохраняющее условное ожидание из M^ω на N^ω, то

$$E_{N^\omega}^{M^\omega}((x_n)_n + \mathcal{I}_\omega) = (E_N^M(x_n))_n + \mathcal{I}_\omega.$$

Кроме того, производя основную конструкцию, получаем отождествления

$$\langle M^\omega, e_{N^\omega} \rangle = \langle M^\omega, N^\omega \rangle \cong \langle M, N \rangle^\omega = \langle M, e_N \rangle^\omega$$

и $e_{N^\omega} = e_N + \mathcal{I}_\omega$.

В дальнейшем будем просто писать $x = (x_n)_n$ для элемента из M^ω вместо $(x_n)_n + \mathcal{I}_\omega$.

3. Подфакторы с унитарным базисом Пимснера—Попа

3.1. Определения и первые свойства.

Определение 3.1. Включение $N \subset M$ факторов типа II_1 обладает *свойством унитарности*, кратко U*-свойством*, если существует базис Пимснера—Попа $\{m_j\}_{j=1}^n$ фактора M над N, состоящий из унитарных элементов M, а именно, $m_j \in \mathcal{U}(M)$ для всех $j = 1, \dots, n$. Будем называть такой ортонормированный базис *унитарным ортонормированным базисом* или кратко U*-ортонормированным базисом*.

Замечание 3.2. Пусть $\{m_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис (соответственно, U-ортонормированный базис) M над N; без ограничения общности можно считать, что $m_1 = \mathrm{I}$. В самом деле, при $n_j = m_1^* m_j$ семейство $\{n_j\}_{j=1}^n$, как проверяется непосредственно, остается ортонормированным базисом и, очевидно, $n_1 = \mathrm{I}$; если, кроме того, базис $\{m_j\}_{j=1}^n$ унитарен, то базис $\{n_j\}_{j=1}^n$ также унитарен.

Замечание 3.3. Если $N \subset M$ обладает U-свойством, то индекс является (возможно, бесконечным) целым числом $[M : N] \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; в самом деле, в силу п. 2.6,

$$n\mathrm{I} = \sum_{j=1}^{n} m_j m_j^* = [M : N]\mathrm{I},$$

где $\{m_j\}_{j=1}^n$ — любой U-ортонормированный базис M над N, а n — его мощность.

Определение 3.4. Для данного включения $N \subset M$ определим (возможно, бесконечное) число $u(N \subset M) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ как максимальное число унитарных элементов в ортонормированном базисе M над N.

Ясно, что

$$1 \leqslant u(N \subset M) \leqslant [M : N] \tag{3.1}$$

и равенство в правой части соответствует U-свойству включения $N \subset M$.

Следующий результат, неявно содержащийся в [18], дает уточнение правого неравенства в (3.1) для подфакторов нецелого индекса.

Теорема 3.5. *Если $[M : N] \notin \mathbb{N}$, скажем, $[M : N] = n + \varepsilon$ с $0 < \varepsilon < 1$, то $u(N \subset M) < n$. Другими словами, не существует базиса Пимснера—Попа из n унитарных элементов плюс остаток.*

Доказательство. Предположим, что $\{m_j\}_{j=1}^{n+1}$ — ортонормированный базис M над N с $\{m_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{U}(M)$. Тогда

$$m_{n+1} m_{n+1}^* = \sum_{j=1}^{n+1} m_j m_j^* - \sum_{j=1}^{n} m_j m_j^* = [M : N]\mathrm{I} - n\mathrm{I} = \varepsilon\mathrm{I}.$$

Поэтому $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} m_{n+1} \in \mathcal{U}(M)$, а значит,

$$E_N(m_{n+1}^* m_{n+1}) = \varepsilon E_N\left((\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} m_{n+1})^* \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} m_{n+1}\right) = \varepsilon E_N(\mathrm{I}) = \varepsilon\mathrm{I},$$

что не является проектором вопреки определению ортонормированного базиса.

Более общо, нельзя даже получить ортонормированного базиса $\{m_j\}_{j=1}^{n+k}$ с $1 \leqslant k \leqslant \infty$ и $\{m_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{U}(M)$; в самом деле, пусть v_i, $i = 1, 2, \dots, k$ — частичные изометрии такие, что $v_i v_i^* = E_N(m_{n+i}^* m_{n+i})$ и $v_i^* v_i \perp v_j^* v_j$ при $i \neq j$ (так как $\sum_{i=1}^{k} \tau(E_N(m_{n+i}^* m_{n+i})) < 1$); тогда полагая $m_i' = m_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и $m_{n+1}' = \sum_{i=1}^{k} m_{n+i} v_i$, получаем, что $\{m_j'\}_{j=1}^{n+1}$ — ортонормированный базис M над N такой, что $\{m_j'\}_{j=1}^n \subset \mathcal{U}(M)$; противоречие с предыдущей частью. □

Замечание 3.6. Пусть $\{m_1, \dots, m_n\}$ — U-ортонормированный базис M над N. Пусть f_1 и $f_2 \in \mathcal{P}(M)$ — два проектора с $f_1 + f_2 = I$. Определим $m'_i = m_i$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, $m'_n = m_n f_1$ и $m'_{n+1} = m_n f_2$. Тогда $\{m'_i\}$ — ортонормированный базис M над N с $\{m'_i\}_{i=1}^{n-1} \subset \mathcal{U}(M)$.

Следующая теорема дает характеризацию подфакторов с U-свойством в терминах проекторов Джонса.

Теорема 3.7. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\exists \{m_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{U}(M)$ — *U-ортонормированный базис M над N (т.е. $N \subset M$ обладает U-свойством)*;

(ii) $\exists \{e_j\}_{j=1}^n \subset J(M_1, M)$ — *разбиение единицы в M_1, образованное проекторами Джонса.*

Кроме того, для подфактора $N \subset M$ существует взаимно однозначное соответствие между множествами U-ортонормированных базисов M над N и множеством разбиений единицы в $J(M_1, M)$.

Доказательство. (i)⇒(ii) Предположим, что $\{m_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{U}(M)$ — U-ортонормированный базис M над N и для всех $j = 1, \dots, n$ положим

$$e^j = m_j e_N^M m_j^*.$$

Тогда

$$E_M(e^j) = E_M(m_j e_N^M m_j^*) = m_j E_M(e_N^M) m_j^* = [M:N]^{-1} m_j m_j^* = [M:N]^{-1}\mathrm{I},$$
$$e^j e^i = m_j e_N^M m_j^* m_i e_N^M m_i^* = m_j E_N(m_j^* m_i) e_N^M m_i^* = \delta_{i,j} m_j e_N^M m_i^* = \delta_{i,j} e^j.$$

Это показывает, что $e^i \perp e^j$ при $i \neq j$, а значит, $\sum\limits_{j=1}^n e^i \leqslant I$; с другой стороны, поскольку

$$\tau(e^j) = \tau(e^i) = [M:N]^{-1} = \frac{1}{n},$$

с необходимостью получаем, что

$$\sum_{j=1}^n e^i = I.$$

(ii)⇒(i) Обратно, пусть $\{e^j\}_{j=1}^n \subset J(M_1, M)$ — разбиение единицы, порожденное проекторами Джонса в M_1. В силу п. 2.10 (или, эквивалентно, следствия 1.8 в [18]), существуют единственные унитарные элементы $\{m_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{U}(M)$ такие, что

$$m_j e_N^M m_j^* = e^j \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$E_N(m_j^* m_i) e_N^M = e_N^M m_j^* m_i e_N^M = m_j^*(e^j e^i) m_i = \delta_{i,j} m_j^* e^j m_i = \delta_{i,j} e_N^M,$$

а так как отображение $N \ni x \longmapsto x e_N^M \in M_1$ инъективно (см. п. 2.3(c) или [18, лемма 1.2]), то

$$E_N(m_j^* m_i) = \delta_{i,j} I;$$

что показывает, что $\{m_j\}_{j=1}^n$ — U-ортонормированный базис.

Теперь оставшаяся часть утверждения очевидна, поскольку отображения

$$\{m_j\}_{j=1}^n \mapsto \{e^j\}_{j=1}^n \qquad \text{с } e^j = m_j e_N^M m_j^*,$$
$$\{e^j\}_{j=1}^n \mapsto \{m_j\}_{j=1}^n \qquad \text{с } m_j e_N^M m_j^* = e^j$$

взаимно обратны. □

Замечание 3.8. Предположим, что $\{m_j\}_{j=1}^n$ — U-ортонормированный базис M над N; на уровне $L^2(M, \tau)$ он допускает разложение

$$L^2(M, \tau) = \bigoplus_{j=1}^n m_j L^2(N, \tau).$$

Если $e^j : L^2(M,\tau) \longrightarrow m_j L^2(N,\tau)$ — ортогональная проекция $L^2(M,\tau)$ на его подпространство $m_j L^2(N,\tau)$, то $\{e^j\}_{j=1}^n \subset J(M_1, M)$ — разбиение единицы, порожденное проекторами Джонса, соответствующими (в силу биекции, установленной в предыдущей теореме) U-ортонормированному базису $\{m_j\}_{j=1}^n$.

Из результатов п. 2.18(c) вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.9. *Пусть* $\begin{pmatrix} N \subset M \\ \cup \quad \cup \\ Q \subset P \end{pmatrix}$ *— коммутативный квадрат факторов типа* II_1. *Тогда*

$$u(Q \subset P) \leqslant u(N \subset M).$$

В частности, если $Q \subset P$ обладает U-свойством, то $N \subset M$ также обладает U-свойством.

3.2. Примеры.

Пример 3.10. Пусть N — фактор типа II_1. Положим $M = N \otimes M(n, \mathbf{C})$ и обозначим через I_N единицу в N, а через I_n — единицу в $M(n, \mathbf{C})$, так что единица в M есть $\mathrm{I} = \mathrm{I}_N \otimes \mathrm{I}_n$; напомним, что условное ожидание E_N из M на его подфакторе N задается как

$$E_N = \mathrm{id}_N \otimes \tau(\cdot)\mathrm{I}_n,$$

где $\mathrm{id}_N : N \ni x \longmapsto x \in N$ — тождественное отображение N, а $\tau : M(n, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ — нормализованный след на $M(n, \mathbf{C})$, а именно $\tau = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}_n$, где Tr_n — обычный след на $(n \times n)$-матрицах. Другими словами, для любого $x = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \in M$

$$E_N(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,i}\right) \otimes \mathrm{I} = \sum_{i,j=1}^{n} x_{i,i} \oplus e_{j,j}.$$

Легко проверить, что семейство $\{\sqrt{n}\ \mathrm{I}_N \otimes e_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ есть ортонормированный базис M над N, но ни один из его элементов не унитарен.

Далее, пусть ω — простой корень степени n из единицы; положим

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^i e_{i,i}, \quad u = \sum_{i=0}^{n-1} e_{i,i+1} \in M(n, \mathbf{C}),$$

а именно,

$$v = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & 0 \\ & & & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, полагая $m_{i,j} = \mathrm{I}_N \otimes v^i u^j$, получаем, что $\{m_{i,j}\}_{i,j}$ — U-ортонормированный базис M над N, что проверяется непосредственно (напомним, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega^k = 0$, если $0 < k < n$). Заметим, что $\{m_{i,j}\}_{i,j} \subset \mathrm{I}_N \otimes M(n, \mathbf{C}) = N' \cap M$.

Кроме того, $M_1 = N \otimes M(n, \mathbf{C}) \otimes M(n, \mathbf{C})$ и

$$e_N^M = \left(\sum_{k=1}^{n} e_{i,k} \otimes e_{k,j}\right)_{i,j}$$

разбиение единицы в $J(M_1, M)$, соответствующее U-ортонормированному базису $\{m_{i,j}\}_{i,j}$ задается как

$$e^j = \left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{kj} e_{i,k} \otimes e_{k,j}\right)_{i,j}.$$

Пример 3.11. Пусть N — II_1 фактор, а G — конечная группа, действующая внешними автоморфизмами на N; другими словами, задан гомоморфизм

$$\sigma : G \to \mathrm{Out}(N) = \mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Int}(N), \quad g \mapsto \sigma_g$$

группы G в группу $\mathrm{Out}(N)$ внешних автоморфизмов.

Пусть, далее, $M = N \rtimes_\sigma G$ — скрещенное произведение N на действие σ; обозначим через u_g унитарный элемент в M, реализующий автоморфизм σ_g, а именно,

$$u_g x u_g^* = \sigma_g(x) \quad \forall x \in N.$$

Тогда $\{u_g\}_{g\in G}$ — U-ортонормированный базис M над N. В самом деле, для $\sum\limits_{g\in G} u_g x_g$ с $x_g \in N$, $g \in G$ — элемент общего положения в M, то условное ожидание E_N задается как

$$E_N\left(\sum_{g\in G} u_g x_g\right) = x_e.$$

Пусть теперь группа G абелева; обозначим через $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$ ее двойственную, а через $\widehat{\sigma}$ — двойственное действие $\widehat{G}$ на M, определенное как

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{\hat{h}}(x) &= x, && \hat{h} \in \widehat{G},\ x \in N, \\ \widehat{\sigma}_{\hat{h}}(u_g) &= \hat{h}(g) u_g, && \hat{h} \in \widehat{G},\ g \in G. \end{aligned}$$

Тогда легко проверить (см., например, [7]), что скрещенное произведение $M_1 = M \rtimes_{\hat{\sigma}} \widehat{G}$ этого произведения M на двойственное действие $\hat{\sigma}$ есть основная конструкция $\langle M, N\rangle$ для включения $N \subset M$. Кроме того, обозначая через $v_{\hat{h}}$ унитарный элемент в M_1, реализующий двойственный автоморфизм $\widehat{\sigma}_{\hat{h}}$, а именно,

$$v_{\hat{h}} x v_{\hat{h}}^* = \widehat{\sigma}_{\hat{h}}(x) \quad \forall x \in M,$$

а затем полагая

$$e^g = \sum_{\hat{h}\in\widehat{G}} \hat{h}(g) v_{\hat{h}},$$

получаем, что $\{e^g\}_{g\in G}$ — разбиение единицы в $J(M_1, M)$ с единичным элементом $1 \in G$ группы G, $e^1 = e_N^M$, как это легко проверить. Заметим, что $\mathrm{Alg}\{u_g, v_{\hat{h}};\ g \in G,\ \hat{h} \in \widehat{G}\}$ изоморфна $M(|G|, \mathbf{C})$, что можно интерпретировать как двойственность Такесаки (см. п. 2.12).

Пример 3.12. Пусть $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 с U-свойством, а ω — свободный ультрафильтр на натуральных числах $\mathbb{N}$. Тогда соответствующие алгебры ультрастепеней включения $N^\omega \subset M^\omega$ также обладают U-свойством.

В самом деле, если $\{m_j\}_{j=1}^n$ — U-ортонормированный базис M над N, то, полагая $m_j^{(k)} = m_j$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, n$ и $m_j^\omega = (m_j^{(k)})_k$, получаем, что семейство $\{m_j^\omega\}_{j=1}^n$ — U-ортонормированный базис M^ω над N^ω.

Пример 3.13. Пусть N — II_1-фактор, а $\{\theta_i\}_{i=1}^n \in \mathrm{Int}(N)$ с $\theta_0 = \mathrm{id}_N$ — некоторые внутренние автоморфизмы. Положим $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ и определим $M^\theta = M \otimes M(n+1, \mathbf{C})$ и

$$N^\theta = \left\{ \begin{pmatrix} x & & & \\ & \theta_1(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_n(x) \end{pmatrix} \in M^\theta : x \in N \right\},$$

а именно,

$$N^\theta = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i(x) \otimes e_{i,i} : x \in N \right\},$$

где $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{n+1}$ — система матричных единиц в $M(n+1, \mathbf{C})$.

Если $n_j \in \mathcal{U}(N)$ — унитарный элемент, реализующий внутренний автоморфизм θ_j, а именно,

$$\theta_j(x) = \mathrm{Ad}(n_j)(x) = n_j x n_j^*, \quad x \in N,$$

то для u и v из $\mathcal{U}(M(n+1, \mathbf{C}))$, как в примере 3.10, семейство $\{I_N \otimes u^i v^j\}_{i,j=1}^{n+1}$ — U-ортонормированный базис M^θ над N^θ. Кроме того, если положить

$$m'_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ki} n_i n_j^* \oplus e_{k,k+j},$$

то $\{m'_{i,j}\}_{i,j=0}^{n-1}$ — U-ортонормированный базис M^θ над N^θ в $(N^\theta)' \cap M^\theta$.

Более общо, если автоморфизмы $\{\theta_i\}_{i=1}^n \in \overline{\mathrm{Int}}(N)$ — аппроксимативно внутренние и $\theta_i = \lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Ad}(n_{i,k})$, где $n_{i,k} \in \mathcal{U}(N)$, то, полагая $n_i^\omega = (n_{i,k})_k \in N^\omega$, получаем, что семейство $\{\sqrt{n} n_i^\omega n_j^\omega \otimes u^i v^j\}_{i,j=1}^{n+1}$ есть U-ортонормированный базис $(M^\theta)^\omega$ над $(N^\theta)^\omega$.

Пример 3.14. Пусть G — i.c.c. группа такая, что алгебра фон Неймана $M = \mathcal{L}(G)$ есть фактор. Пусть $H \leqslant G$ — подгруппа конечного индекса $[G : H] = n$. Если N — подфактор $\mathcal{L}(H)$, то $N \subset M$ обладает U-свойством. В самом деле, пусть $\{g_j\}_{j=1}^n$ — множество представлений левого смежного класса G/H с $g_1 = e$, а именно, $\bigcup\limits_{j=1}^n g_j H = G$. Полагая $m_j = \lambda(g_j)$, где $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{U}(l^2(G))$ — левое регулярное представление G, так что $M = \{\lambda(G)\}''$, получаем, что $\{m_j\}_{j=1}^n$ есть U-ортонормированный базис M над N. В самом деле, заметим, что в этой ситуации

$$L^2(M, \tau) = l^2(G) = \bigoplus_{j=1}^n l^2(g_j H) = \bigoplus_{j=1}^n m_j L^2(N, \tau),$$

а если $h \in N$, то $E_N(\lambda(g_j h)) = \delta_{j,1}(h)$.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 3.15 (Гольдман [6]). *Пусть $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 индекса $[M : N] = 2$. Тогда существует внешнее действие σ группы $\mathbf{Z}_2$ на N такое, что $(N \subset M) \cong (N \subset N \rtimes_\sigma \boldsymbol{Z}_2)$.*

Доказательство. Пусть e_N^M — проектор Джонса в M_1, реализующий условное ожидание E_N. Тогда $e_N^M(1) = \mathrm{I} - e_N^M$ все еще принадлежит $J(M_1, M)$ и $e_N^M + e_N^M(1) = \mathrm{I}$. Отсюда следует U-свойство для $N \subset M$. С другой стороны, если $\{\mathrm{I}, U\}$ — U-ортонормированный базис M над N, соответствующий разбиению единицы $\{e_N^M, e_N^M(1)\}$ в $J(M_1, M)$, то для каждого $x \in N$ имеем $U^* x U \in N$; в самом деле, это доказывается таким же образом, и индекс двух подгрупп нормален. Записывая $xU = x_1 + U x_2$ с $x_i \in N$, имеем $0 = E_N(xU) = x_1$ и $U^* x U = x_2 \in N$. Наконец, $U^2 = I$, или, эквивалентно, $U = U^*$; в противном случае множество $\{\mathrm{I}, U, U^2\}$ будет ортонормированным в M относительно E_N вопреки предположению, что $[M : N] = 2$. Таким образом, отображение $\sigma : N \ni x \longmapsto \sigma(x) = UxU^* \in N$ есть внешний автоморфизм N и отсюда следует изоморфизм утверждения. □

Из примера 3.11 и теоремы Гольдмана вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.16. *Предположим, что $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 индекса $[M : N] = 2$. Тогда $N \subset M$ обладает U-свойством.*

Замечание 3.17. Как отмечено в [18], естественно ожидать, что если $N \subset M$ — II_1-факторы конечного (в частности, целого) индекса $[M : N]$, то M и N имеют много общих свойств или даже изоморфны. Например, согласно фундаментальной теореме Конна (см. [3–5]) M гиперконечен в том и только том случае, если N обладает этим свойством. С другой стороны, Конн доказал существование фактора N типа II_1 с автоморфизмом σ периода 2 такого, что если $M = N \rtimes_\sigma \mathbf{Z}_2$, то $\chi(M) \neq \chi(N)$, где χ — инвариант Конна. Таким образом, $N \subset M$ обладает U-свойством, но $M \not\cong N$.

Следующий пример — обобщение примеров 3.11 и 3.14.

Пример 3.18. Пусть P — II_1-фактор, а G — конечная группа, действующая внешними автоморфизмами P. Пусть $H \leqslant G$ — подгруппа, $M = P \rtimes G$ и $N = P \rtimes H$ — соответствующие факторы скрещенного произведения. Тогда $N \subset M$ обладает U-свойством. Напомним, что $[M : N] = [G : H]$.

Следствие 3.19. *Предположим, что $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 индекса $[M : N] = 3$. Тогда $N \subset M$ обладает U-свойством и существует внешнее действие σ группы $\mathbf{Z}_3$ на N такое, что*

$$(N \subset M) \cong (N \subset N \rtimes_\sigma \mathbf{Z}_3).$$

В заключение этого пункта приведем примеры подфакторов, *не* обладающих U-свойством.

С этой целью напомним сначала (см. [9, 23]), что если M — фактор типа II_1 с проекцией $f \in \mathcal{P}(M)$ такой, что $0 < \tau(f) \leqslant \frac{1}{2}$, и если существует изоморфизм $\theta : fMf \longrightarrow (\mathrm{I} - f)M(\mathrm{I} - f)$ (эквивалентно, $\frac{1-\tau(f)}{\tau(f)}$ принадлежит фундаментальной группе $\mathcal{F}(M)$ фактора M), то, обозначая через $N = \{x \oplus \theta(x) : x \in fMf\}$, назовем подфактор $N \subset M$ *локально тривиальным*. Заметим, что в силу формулы Джонса (см. [9])

$$[M : N] = \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{[M_{p_i} : N_{p_i}]}{\tau(p_i)}$$

для любого разбиения единицы $\{p_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ из проекторов в N, так что если $\tau(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-4}{n}}$, то $[M : N] = n$.

С другой стороны, в [23] введено множество

$$\Lambda(M, N) = \{\alpha \in R_+ : \exists p \in \mathcal{P}(M) \text{ s.t. } E_N(p) = \alpha \mathrm{I}\}$$

относительных размерностей проекторов M относительно подфактора N и показано, что для локально тривиального подфактора $N \subset M$ справедливо тождество

$$\Lambda(M, N) = \{0\} \cup \Big\{P_{k-1}([M : N]^{-1})/[M : N]P_k([M : N]^{-1}) : k \geqslant 0\Big\}$$
$$\cup \Big\{t, 1 - t\Big\} \cup \Big\{P_k([M : N]^{-1})/P_{k-1}([M : N]^{-1}) : k \geqslant 0\Big\},$$

где P_n, $n \geqslant -1$, — полиномы Джонса, рекуррентно определенные как $P_{-1} \equiv 1$, $P_0 \equiv 1$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) - xP_{n-1}(x)$ для всех $n > 0$. В частности,

$$\Lambda(M, N) \cap]t, 1 - t[= \emptyset.$$

Если теперь $[M : N] > 4$, а значит $t < \frac{1}{2}$, то $t < 2\frac{1}{[M:N]} = 2\tau(e_N^M) < 1 - t$.

Теорема 3.20. *Для локально тривиального подфактора $N \subset M$ индекса $[M : N] > 4$ имеем $u(N \subset M) = 1$. В частности, $N \subset M$ не обладает U-свойством.*

Следствие 3.21. *Пусть $N \subset M$ — II_1-факторы целого индекса $[M : N] > 4$. Пусть $N \subset M \subset^{e_1} M_1 \subset \ldots$ — ассоциированная башня факторов Джонса. Предположим, что $N' \cap M_k = \mathrm{Alg}\{I, e_1, \ldots, e_k\}$ при всех $k \geqslant 0$, т.е. $N \subset M$ имеет стандартный граф $\Gamma_{M,N} = A_\infty$. Тогда $N \subset M$ не обладает U-свойством.*

Доказательство. Обозначая через $M_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ обертывающую алгебру включения $N \subset M$, имеем

$$\mathrm{vN}(e_i)_{i \geqslant 1} = N' \cap M_\infty, \quad \mathrm{vN}(e_i)_{i \geqslant 2} = M' \cap M_\infty;$$

кроме того, полагая

$$\widetilde{N} = (N' \cap M_\infty)' \cap M_\infty, \quad \widetilde{M} = (M' \cap M_\infty)' \cap M_\infty,$$

получаем включение факторов типа II_1 индекса Джонса $[\widetilde{M} : \widetilde{N}] = [M : N]$ такое, что

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \subset & \widetilde{M} \\ \cup & & \cup \\ N & \subset & M \end{array}$$

— невырожденный коммутативный квадрат. Но в силу [28, 7.7] включение $\widetilde{N} \subset \widetilde{M}$ локально тривиально и $u(\widetilde{N} \subset \widetilde{M}) = 1$. Поскольку $1 \leqslant u(N \subset M) \leqslant u(\widetilde{N} \subset \widetilde{M})$, то также получаем $u(N \subset M) = 1$, и $N \subset M$ не обладает U-свойством. □

Следующий пример — пример неприводимого целого включения $N \subset M$ без U-свойства.

Пример 3.22. Пусть $N^s \subset M^s$, $s \in \{4\cos^2(\frac{\pi}{n} : n \geqslant 4\} \cup [4, \infty)$ — неприводимые подфакторы индекса Джонса $[M^s : N^s] = s$, построенные в [28] с помощью марковских следов на некоторых универсальных алгебрах, ассоциированных с некоторой алгеброй Q (например, $Q = L^\infty(T)$ или $\mathcal{L}(F_\infty)$ — II_1-фактор свободной группы бесконечного ранга) и с проекторами Джонса. Тогда для целого индекса $s \geqslant 5$ включение $N^s \subset M^s$ не обладает U-свойством. В самом деле, при $s \geqslant 5$ имеем $\Gamma_{M^s,N^s} = A_\infty$, и утверждение следует из предыдущего следствия.

3.3. Дальнейшие свойства.

Предложение 3.23. *Предположим, что $P \subset N$ и $N \subset M$ — включения факторов типа II_1, обладающих U-свойством. Тогда подфактор $P \subset M$ также обладает U-свойством.*

Доказательство. Пусть $\{n_j\}_{j=1}^n$ и $\{m_i\}_{i=1}^m$ — U-ортормированные базисы N над P и M над N соответственно. Заметим, что $n = [N : P]$ и $m = [M : N]$. Тогда $\{m_i n_j\}_{i,j=1}^{m,n}$ — U-ортонормированный базис M над N. В самом деле, очевидно, что $m_i n_j \in \mathcal{U}(M)$; с другой стороны,

$$E_P\left((m_i n_j)^* m_{i'} n_{j'}\right) = E_P E_N(n_j^* m_i^* m_{i'} n_{j'}) = E_P(n_j^* E_N(m_i^* m_{i'}) n_{j'}) = \delta_{i,i'} E_P(n_j^* n_{j'}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}\mathrm{I}.$$

Предложение доказано. □

Предложение 3.24. *Пусть $N \subset M$ обладает U-свойством. Тогда $M \subset M_1$ также обладает U-свойством.*

Доказательство. Пусть $\{e^j\}_{j=0}^{n-1}$ — разбиение единицы в $J(M_1, M)$, а ω — простой корень степени n из единицы. Рассмотрим элементы

$$m_j^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk} e^k, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$(m_j^1)^* m_{j'}^1 = \sum_{k,k'=0}^{n-1} \overline{\omega^{jk}}\omega^{j'k'} e^k e^{k'} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j'-j)k} e^k,$$

так что, с одной стороны,

$$(m_j^1)^* m_j^1 = \sum_{k=0}^{n-1} e^k = \mathrm{I}$$

и $\{m_j^1\}_{j=0}^{n-1} \subset \mathcal{U}(M_1)$, но с другой стороны, при $j \neq j'$

$$E_M\left((m_j^1)^* m_{j'}^1\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j'-j)k} E_M(e^k) = [M : N]^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j'-j)k} = 0$$

и $N \subset M$ обладает U-свойством. □

Из этих двух предложений получаем следующее утверждение.

Следствие 3.25. *Если $N \subset M$ обладает U-свойством, то включения $M_i \subset M_j$ с $-1 \leqslant i < j$ также обладают U-свойством.*

Замечание 3.26. U-ортонормированный базис M_1 над M, построенный в доказательстве предыдущего предложения, отличается от базиса, описанного Пимснером и Попа в [19], а именно, $\{m_j e_N\}_{j=1} n$, где $\{m_j\}_{j=1}^n$ — произвольный U-ортонормированный базис M над N. Это же относится и к включениям $M_i \subset M_j$, как и в предыдущем следствии.

Вообще говоря, пока мы не в состоянии доказать свойство наследственности для тоннеля. Конечно, если $[M:N]$ принадлежит фундаментальной группе $F(N\subset M)$ или включение стабильно, а именно, $(N\subset M)\otimes R\cong(N\subset M)$, где R — гиперконечный II_1-фактор, то если $N\subset M$ обладает U-свойством, то $N_1\subset M$ также обладает U-свойством, что вытекает из двойственности Такесаки. Тем не менее, не ясно как строить U-ортонормированный базис для $N_1\subset N$ (или, эквивалентно, разбиение единицы в $J(M,N)$) исходя из U-ортонормированного базиса для $N\subset M$. Поэтому поставим следующую задачу.

Проблема 3.27. Пусть $N\subset M$ обладает U-свойством. Фиксируем $e\in J(M,N)$ и положим $N_1=\{e\}'\cap N$, так что $N_1\subset N\subset M$ Э— первый шаг при выборе тоннеля. Доказать, что включение $N_1\subset N$ также обладает U-свойством.

В качестве частного результата в решение поставленной задачи приведем следующее предложение.

Предложение 3.28. *Пусть $N\subset M$ — целое включение и существует $p\in\mathcal{P}(N)$ такой, что $\frac{1}{\tau(p)}\in\mathbb{N}$ и $N_p\subset M_p$ обладает U-свойством. Тогда $N\subset M$ обладает U-свойством.*

Доказательство. Пусть $p_1=p,\dots,p_n$, где $n=\frac{1}{\tau(p)}$, — взаимно ортогональные проекторы в N такие, что $\tau(p_i)=\tau(p)$, $i=1,2,\dots,n$. Пусть $\{u_j\}_{j=1}^k\subset\mathcal{U}(M_p)$ (с $k=[M:N]$) — U-ортонормированный базис M_p над N_p, а $\{v_i\}_{i=1}^n$ — частичные изометрии такие, что $v_iv_i^*=p_1$ и $v_i^*v_i=p_i$ для всех i. Тогда, полагая $U_j=\sum\limits_{i=0}^{n}v_i^*u_jv_i$, легко проверяем, что $\{U_j\}_{j=1}^k$ — U-ортонормированный базис M над N. □

3.4. Итерирование основной конструкции и цикличность.

Определение 3.29. U-ортонормированный базис $\{m_j\}_{j=0}^{n-1}$ фактора M над N с $m_0=\mathrm{I}$ называется *циклическим* (является *CU-ортогональным базисом*), если существует унитарный элемент $u\in\mathcal{U}(M)$ такой, что $u^n=\mathrm{I}$ и $m_j=u^j$ при всех $j=0,\dots,n-1$. В этом случае говорят, что $N\subset M$ обладает *CU-свойство*.

Определение 3.30. Разбиение единицы $\{e^k\}_{k=0}^{n-1}$ в $J(M,N)$ называется *циклическим*, если существуют унитарные элементы $u\in\mathcal{U}(N)$ такие, что $u^n=\mathrm{I}$ и $e^k=u^ke_0u^{-k}$.

Существует аналог теоремы 3.7, который приведем здесь без доказательства.

Теорема 3.31. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\exists\{m_j\}_{j=1}^n\subset\mathcal{U}(M)$ — *CU-ортонормированный базис M над N* (*т.е. $N\subset M$ обладает CU-свойством*).

(ii) $\exists\{e_j\}_{j=1}^n\subset J(M_1,M)$ — *циклическое разбиение единицы в M_1, образованное проекторами Джонса.*

Кроме того, для подфактора $N\subset M$ существует взаимно однозначное соответствие между множеством CU-ортонормированных базисов M над N и множеством циклических разбиений единицы в $J(M_1,M)$.

Следующий результат является в некотором смысле неожиданным: он утверждает, что с точностью до двойственности Такесаки U-свойство эквивалентно CU-свойству. Он будет рассмотрен в следующем разделе. Тем не менее, отметим, что его доказательство неявно содержится в доказательстве теоремы 3.7, поэтому оно не будет проводиться.

Предложение 3.32. *Предположим, что $N\subset M$ обладает U-свойством. Тогда $M\subset M_1$ обладает CU-свойством. Более общо, $M_i\subset M_j$ обладает CU-свойством при всех $0\leqslant i<j$.*

Определение 3.33. Два разбиения единицы $\{e^k\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{f^k\}_{k=0}^{n-1}$ в $J(M,N)$ называются сопряженными (соответственно, N-сопряженными), если существуют унитарные элементы $u\in\mathcal{U}(M)$ (соответственно, $\mathcal{U}(N)$) такие, что с точностью до перестановки индексов

$$ue^iu^*=f^i\quad\text{при } i=0,1,\dots,n-1.$$

Предложение 3.34. *Пусть $N \subset M$ обладает CU-свойством и $\{u^i\}_{i=0}^{n-1}$ — CU-ортонормированный базис. Пусть $A = \mathrm{Alg}(u)$ и $B = \mathrm{Alg}(u, e_1)$, e_1 — проектор Джонса e_N^M в M_1. Тогда $B \cong M(n, \mathbf{C})$ и*

$$\begin{pmatrix} M & \subset & M_1 \\ \cup & & \cup \\ A & \subset & B \end{pmatrix}$$

— коммутативный квадрат. Кроме того, если $x \in B$ ортогонален A относительно следа, то он также ортогонален всему M.

Доказательство. Множество $\{e_{i,j} = u^i e_1 u^j\}_{i,j=0}^{n-1}$, как это непосредственно проверяется, есть система матричных единиц в M_1, а следовательно оно порождает *-подалгебру $\widehat{B}$ в M_1, изоморфную $M(n, \mathbf{C})$. Так как $e_{0,0} = e_1$ и $\sum\limits_{i=0}^{n-1} e_{i+1,i} = u\mathrm{I} = u$, то на самом деле $\widehat{B} = B$.

Для того, чтобы показать, что эти четыре алгебры образуют коммутативный квадрат, проверим, что $E_M(B) = A$. Однако

$$E_M(e_{i,j}) = E_M(u^i e_1 u^j) = u^i E_M(e_1) u^j = \frac{1}{n} u^{i-j} \in A;$$

поскольку на самом деле $A = \mathrm{span}_{\mathbf{C}} \langle u^i : i = 0, \ldots, n-1 \rangle$, то отсюда получаем утверждение.

Наконец, предположим, что $x \in B$ ортогонален A относительно следа, т.е. $\tau(xu^i) = 0$ при всех $i = 0, \ldots, n-1$. Для того чтобы показать, что x ортогонален M, нужно доказать, что $\tau(xm) = 0$ при всех $m \in M$. Пусть m — элемент M. Так как $\{u^k\}_{k=0}^{n-1}$ — ортогональный базис в M над N, то существуют (единственные) элементы $n_k \in N$ (а именно, $E_N(u^k m)$) такие, что $m = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k n_k$. Поэтому

$$\tau(xm) = \tau\left(x \sum_{k=0}^{n-1} u^k n_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau(xu^k)\tau(n_k) = 0,$$

где на предпоследнем шаге использовалась характеризация коммутативных квадратов (см. [7, 27]). □

Следствие 3.35. *При выполнении предыдущих условий и при тех же обозначениях пусть A_1 — максимальная абелева подалгебра в B такая, что*

$$\begin{pmatrix} A & \subset & B \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{C}\mathrm{I} & \subset & A_1 \end{pmatrix}$$

— коммутативный квадрат, т.е. A_1 ортогональна A. Пусть $\{f_j\}_{j=0}^{n-1}$ — разбиение единицы в A_1, образованное эквивалентными проекторами, а ω — корень степени n из единицы. Тогда, полагая $v = \sum\limits_{j=0}^{n-1}$, получаем, что семейство $\{v^j\}_{j=o}^{n-1}$ является U-ортонормированным базисом M_1 над M.

3.5. Устойчивость. Пусть $N \subset M$ — включение факторов типа II_1. Пусть задано конечное семейство $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathcal{P}(M)$ взаимно ортогональных проекторов в M, которые «почти» являются проекторами Джонса (в том смысле, что их условное ожидание $E_N(e_j)$ близко к скалярному, а именно, обратное к индексу $[M : N]$). Спрашивается, можно ли отсюда вывести, что тогда существует семейство взаимно ортогональных проекторов Джонса той же мощности или, эквивалентно, что $u(N \subset M) \geqslant n$?

Это представляется правдоподобным; поэтому сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза 3.36. Пусть $s \in \mathbf{R}^+$. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(s)$ такое, что если $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 конечного индекса $[M : N] = s$ с взаимно ортогональными проекторами $e^1, e^2, \ldots, e^k \in M$ такое, что $\|E_N(e^i) - s^{-1}\mathrm{I}\|_2 < \varepsilon$ при всех i, то существуют взаимно ортогональные проекторы $e_0^1, e_0^2, \ldots, e_0^k \in M$ такие, что $E_N(e_0^i) = s^{-1}\mathrm{I}$, т.е. $e_0^i \in J(M, N)$ при всех i. Кроме

того, существует $f(\varepsilon, s)$ такой, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon, s) = 0$ и такой, что эти проекторы Джонса близки к исходным: $\|e_0^i - e^i\|_2 \leqslant f(\varepsilon, s)$.

Мы можем доказать ее в специальном случае, соответствующему случаю $n = 1$ (т.е. с одним проектором).

Лемма 3.37. *Пусть $N \subset M$ — включение факторов типа II_1 конечного индекса $[M : N] = s$ и пусть $e \in \mathcal{P}(M)$ — проектор в M такой, что $\|E_N(e) - s^{-1}\mathrm{I}\|_2 < \varepsilon$. Тогда существует проектор Джонса $e^0 \in \mathcal{P}(M)$, т.е. $E_N(e^0) = s^{-1}\mathrm{I}$, такой, что $\|e - e^0\|_2 < \sqrt{\varepsilon} + s(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$|\tau(e) - s^{-1}| = |\tau(E_N(e)) - s^{-1}| = \|E_N(e) - s^{-1}\mathrm{I}\|_1 \leqslant \|E_N(e) - s^{-1}\mathrm{I}\|_2 < \varepsilon.$$

Если $\tau(e) \geqslant s^{-1}$ (соответственно, $\tau(e) \leqslant s^{-1}$), то существует проектор $e' \leqslant e$ (соответственно, $e' \geqslant e$) такой, что $\tau(e') = s^{-1}$. Пусть $e_0 \in J(M, N)$ — проектор Джонса. Тогда $e' \sim e_0$ в M и существует частичная изометрия $v \in M$ такая, что $vv^* = e'$ и $v^*v = e_0$. Определим $m = sE_N(v)$; тогда $me_0 = v$ и $me_0m^* = vv^* = e'$. Применяя E_N, получаем таким образом, что $s^{-1}mm^* = E_N(e')$.

Теперь

$$\|E_N(e') - E_N(e)\|_2 \leqslant \|e' - e\|_2 = |\tau(e') - \tau(e)|^{\frac{1}{2}} = |\tau(e') - s^{-1}|^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^{\frac{1}{2}};$$

тогда

$$\|mm^* - \mathrm{I}\|_2 = s\|s^{-1}mm^* - s^{-1}\mathrm{I}\|_2 = s\|E_N(e') - s^{-1}\mathrm{I}\|_2 \leqslant s\|E_N(e') - E_N(e) + E_N(e) - s^{-1}\mathrm{I}\|_2$$
$$\leqslant s\left(\|E_N(e') - E_N(e)\|_2 + \|E_N(e) - s^{-1}\mathrm{I}\|_2\right) \leqslant s(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon).$$

Пусть теперь $m = v'|m|$ — полярное разложение m. Продолжим v' до унитарного элемента в M, также обозначаемого через v', и определим $e^0 = v'e_0v'^*$. Тогда e^0 — проектор Джонса в M и

$$\|e^0 - e'\|_2 = \|v'e_0v'^* - me_0m^*\|_2 = \|v'e_0v'^* - v'|m|e_0|m|v'^*\|_2 = \|v'e_0v'^* - v'e_0m^*mv'^*\|_2$$
$$= \|v'e_0(\mathrm{I} - m^*m)v'^*\|_2 \leqslant \|\mathrm{I} - m^*m\| \leqslant \|\mathrm{I} - mm^*\| \leqslant s(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon),$$
$$\|e - e^0\|_2 \leqslant \|e - e'\|_2 + \|e' - e^0\|_2 \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}} + s(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon).$$

Лемма доказана. □

4. Алгебры Хопфа и регулярные подфакторы

Напомним, что конечномерная *-алгебра Хопфа H — это конечномерная C^*-алгебра, снабженная линейными отображениями

(a) $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$ (коумножение),
(b) $\varepsilon : H \longrightarrow \mathbb{C}$ (коединица),
(c) $S : H \longrightarrow H$ (антипод),

где Δ и ε — гомоморфизмы C^*-алгебр, S — *-сохраняющая антимультипликативная инволюция, удовлетворяющая следующим тождествам:

(a) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_H)\Delta = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)\Delta$,
(b) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H)\Delta = \mathrm{id}_H = (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon)\Delta$,
(c) $m(S \otimes \mathrm{id}_H)\Delta = \varepsilon = m(\mathrm{id}_H \otimes S)$,

где $m : H \otimes H \longrightarrow H$ — умножение.

Простейшим примером является групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ конечной группы G с $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$.

Пусть H^0 — пространство линейных функционалов на H. Тогда H^0 снабжается структурой *-алгебры Хопфа следующим образом:

(a) $(\phi\psi)(h) = (\phi \otimes \psi)\Delta(h)$,
(b) $\phi^*(h) = \overline{\phi(S(h^*))}$,
(c) $\Delta^0(\phi)(h \otimes k) = \phi(hk)$,
(d) $\varepsilon^0(\phi) = \phi(I)$,

(e) $S^0(\phi)(h) = \phi(S(h))$.

Действие *-алгебры Хопфа H на II_1-факторе N — это билинейное отображение $\cdot : H \times N \longrightarrow N$ такое, что

(a) $h \cdot I_N = \varepsilon(h)$,
(b) $I \cdot x = x$,
(c) $hg \cdot x = h \cdot ((g \cdot x)$,
(d) $h \cdot xy = \sum_i (h_i^L \cdot x)(h_i^R \cdot y)$,
(e) $(h \cdot x)^* = S(h^*) \cdot x^*$

при всех $h, g \in H$ и $x, y \in N$, где $\Delta(h) = \sum\limits_i h_i^L \otimes h_i^R$. Для такого действия скрещенное произведение $N \rtimes H$ — это унитальная *-алгебра такая, что как векторное пространство она есть $N \otimes H$ и снабжена умножением и *-операцией, определенными следующим образом:

(a) $(x \otimes h)(y \otimes k) = \sum\limits_i x(h_i^L \cdot y) \otimes h_i^R g$;
(b) $(x \otimes h)^* = \sum_i (h_i^L)^* \cdot x^* \otimes (h_i^R)^*$.

Дуальное действие H^0 на скрещенном произведении определяется как

$$\phi \cdot (x \otimes h) = x \otimes (\mathrm{id}_H \otimes \phi)(\Delta(h)).$$

Шимански [31] доказал следующий факт, впервые анонсированный Окнеану [16].

Теорема 4.1. *Предположим, что $N \subset M$ — II_1-факторы конечного индекса Джонса $[M : N]$ такие, что $N' \cap M = \mathbf{C}$I, и $N' \cap M_2$ простой. Тогда $M' \cap M_2$ допускает естественную структуру *-алгебры Хопфа и действует на M_1 таким образом, что получающееся скрещенное произведение естественно изоморфно M_2.*

Напомним теперь понятия *регулярного подфактора* и *алгебры Картана* (см., например, [20, 22].

Определение 4.2. Для включения $N \subset M$ факторов типа II_1 фактор N называется *регулярным* подфактором M, если *нормализатор* N в M

$$\mathcal{N}_M(N) = \{u \in \mathcal{U}(M) : uNn^* = N\}$$

порождает M как алгебру фон Неймана, т.е. $\mathcal{N}_M(N)'' = M$.

Кроме того, пусть

$$\mathcal{G}N_M(N) = \{v \in M : v \text{ — частичная изометрия, } vv^*, v^*v \in N, vNv^* = Nv^*v\}$$

— нормализующий группоид N в M.

Замечание 4.3. Так как M конечен, то $v \in \mathcal{G}N_M(N)$ в том и только том случае, если существуют унитарный элемент $u \in \mathcal{N}_M(N)$ и проектор $p \in N$ такие, что $v = up$ (см., например, [9]).

Определение 4.4. Максимальная абелева *-подалгебра A II_1-фактора M называется *подалгеброй Картана*, если нормализатор

$$\mathcal{N}_M(A) = \{u \in \mathcal{U}(M) : uAu^* = A\}$$

A в M порождает M как алгебру фон Неймана, а именно, $\mathcal{N}_M(A)'' = M$, или, эквивалентно, $\mathcal{N}_M(A)$ $\|\cdot\|_2$-плотно в M.

Теорема 4.5. *Предположим, что N — регулярный подфактор II_1-фактора M. Тогда $N \subset M$ обладает U-свойством. В частности, индекс Джонса — либо целый, либо бесконечный*: $[M : N] \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Доказательство. Пусть $\{m_j\}_{j \in J}$ — максимальное семейство унитарных элементов в $\mathcal{N}_M(N)$ такое, что $\{Nm_j\}_{j \in J}$ взаимно ортогональны относительно следа. Если $\sum\limits_{j \in J}^{\oplus} Nm_j = M$, то все доказано. В противном случае, в силу [23], существует частичная изометрия $v \in \mathcal{G}N_M(N)$, ортогональная

$\sum\limits_{j\in J}^{\oplus} Nm_j$. Положим

$$W = \left\{ w \in \mathcal{G}N_M(N) : w \text{ ортогонален } \sum_{j\in J}^{\oplus} Nm_j,\ wv^*v = v \right\}.$$

Тогда для данных $w_1, w_2 \in W$ пишем $w_1 \leqslant w_2$ если $w_2 w_1^* w_1 = w_1$, т.е. если w_2 — продолжение w_1. Тогда, очевидно, $(W, \leqslant)$ индуктивно упорядочено, так что можно выбрать максимальный элемент в $w \in W$. В силу максимальности семейства $\{m_j\}_{j\in J}$ получаем, что w не унитарен. Пусть, далее, $p \in \mathcal{P}(N)$ — проектор такой, что $p \leqslant I - w^*w$ и $\tau(p)^{-1} \in N$. Рассмотрим включение $N_p \subset M_p$. Утверждается, что существует U-ортонормированный базис $\{n_j\}_{j\in J}$ в M_p над N_p. В самом деле, в силу регулярности, $m_j p m_j^*$ принадлежит $\mathcal{P}(N)$ и $m_j p m_j^* \sim p$. Таким образом, существуют $w_j \in \mathcal{U}(N)$ такие, что $w_j(m_j p m_j^*)w_j^* = w_j w_j^* = p$. Тогда элементы $n_j := w_j m_j$ принадлежат $\mathcal{G}N_M(N)$ и унитарны как элементы M_p. Также легко видеть, что $\{N_p n_j\}_{j\in J}$ взаимно ортогональны в M_p. Если $\sum\limits_{j\in J}^{\oplus} N_p n_j \neq M_p$, то пусть $w_0 \in \mathcal{G}N_{M_p}(N_p)$ — ненулевая частичная изометрия, ортогональная всем $N_p n_j$. Если v_0 — частичная изометрия в $\mathcal{G}N_M(N)$ такая, что $v_0^* v_0 = w_0 w_0^*$ и $v_0 v_0^* \leqslant I - ww^*$ (это возможно, поскольку $\tau(w_0 w_0^*) \leqslant \tau(p) \leqslant \tau(I - w^*w) = \tau(I - ww^*)$), то $w + v_0 w_0$ принадлежит W и мажорирует w вопреки максимальности w.

Предположим, что $\tau(p)^{-1} = n$. Пусть $p_1 = p, \ldots, p_n$ — попарно ортогональные проекторы в N такие, что $\tau(p_i) = \tau(p)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\{v_i\}_{i=1}^n$ — частичные изометрии такие, что $v_i v_i^* = p_1$ и $v_i^* v_i = p_i$ при всех i. Тогда, полагая $U_j = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i^* n_j v_i$, легко проверяем, что $\{U_j\}_{j\in J}$ есть U-ортонормированный базис в M над N. Наконец, тот факт, что $[M : N] = \operatorname{card}(J)$, следует из $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. □

Теорема 4.6. *Пусть N — регулярный подфактор II_1-фактора M и пусть $[M : N] = n$ конечен. Тогда существует *-алгебра Хопфа H, действующая на N внешними автоморфизмами, такая, что $(N \subset M) \cong (N \subset N \rtimes H)$.*

Доказательство. Пусть $N \subset M \subset^{e_N^M} M_1 \subset \ldots$ — башня Джонса, ассоциированная с включением $N \subset M$. Так как N регулярен, то

$$N' \cap M_1 = \operatorname{Alg}\left\{e_N^M(1) = e_N^M, e_N^M(2), \ldots, e_N^M(n)\right\} = \operatorname{span}\left\{e_N^M(1) = e_N^M, e_N^M(2), \ldots, e_N^M(n)\right\},$$

где $e_N^M(i) = m_j e_N^M m_j^*$. С другой стороны,

$$N' \cap M_2 = \operatorname{Alg}\left\{e_N^M(i), e_M^{M_1}(j) : 1 \leqslant i, j \leqslant n\right\} \cong M(n, C),$$

где

$$e_M^{M_1}(j) = v_j e_M^{M_1} v_j^*, \quad v_j = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kj} e_N^M(k).$$

Значит, $N' \cap M_2$ — простой и по теореме Шимански (теорема 4.1) $M' \cap M_2$ допускает структуру *-алгебры Хопфа и действует на M_1 таким образом, что получающееся скрещенное произведение естественно изоморфно M_2. Так как

$$(M_1 \subset M_2) \cong (N \subset M) \otimes M(n, C),$$

то получаем утверждение теоремы. □

Теорема 4.7. *Пусть $N \subset M$ обладает U-свойством и пусть $[M : N] = n$. Тогда, обозначая через $N \subset M \subset^{e_N^M} M_1 \subset^{e_M^{M_1}} M_2$ башню Джонса вплоть до M_2 и полагая $B = \operatorname{Alg}\left\langle e_M^{M_1}(j),\ j = 1, 2, \ldots, n\right\rangle$, получаем, что B допускает естественную структуру *-алгебры Хопфа и действует на M_1 таким образом, что соответствующее скрещенное произведение изоморфно M_2.*

Доказательство. Обозначим через

$$A = \mathrm{Alg}\left\langle e_N^M(i) : i = 1, 2, \ldots, n\right\rangle = \bigoplus_{i=1}^{n} Ce_N^M(i),$$

$$B = \mathrm{Alg}\left\langle e_M^{M_1}(j) : j = 1, 2, \ldots, n\right\rangle = \bigoplus_{j=1}^{n} Ce_M^{M_1}(j)$$

алгебры, порожденные проекторами Джонса в M_1, а именно, $e_N^M(i) = m_i^* e_N^M m_i$ (где $\{m_i\}_{i=1}^n$ — U-ортогональный базис M над N), и в M_2, а именно, $e_M^{M_1}(j) = v^j e_M^{M_1}(v^j)^*$ (где $v^j = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{jk} e_N^M(k)$, ω — простой корень степени n из единицы).

Определим билиненую форму $\langle\ ,\ \rangle : A \times B \longrightarrow \mathbf{C}$ как

$$\langle a, b\rangle = n^2\tau(ae_M^{M_1}e_N^M b), \quad a \in A,\ b \in B.$$

Тогда $\langle\ ,\ \rangle$ устанавливает двойственность между A и B; в самом деле,

$$\begin{aligned}
\left\langle e_N^M(i), e_M^{M_1}(j)\right\rangle &= n^2\tau(e_N^M(i)e_M^{M_1}e_N^M e_M^{M_1}(j)) = n^2\tau(e_N^M(i)e_M^{M_1}e_N^M v^j e_M^{M_1}(v^j)^*)\\
&= n^2\sum_{t,t'}\omega^{j(t-t')}\tau(e_N^M(i)e_M^{M_1}e_N^M e_N^M(t)e_M^{M_1}e_N^M(t'))\\
&= n^2\sum_{t,t'}\omega^{j(t-t')}\delta_{i,t'}\delta_{t,0}\tau(e_N^M(i)e_M^{M_1}e_N^M e_N^M(t)e_M^{M_1}e_N^M(t'))\\
&= n^2\omega^{-ji}\tau(e_N^M(i)e_M^{M_1}e_N^M e_M^{M_1}) = n\omega^{-ji}\tau(e_N^M(i)e_M^{M_1}) = n\omega^{-ji}\tau(m^i e_N^M(m^i)^* e_M^{M_1})\\
&= n\omega^{-ji}\tau(e_N^M e_M^{M_1}) = n\omega^{-ji}\tau(e_N^M e_M^{M_1}e_N^M) = \omega^{-ji}\tau(e_N^M) = \frac{1}{n}\omega^{-ji}.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\{w^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ базис B, двойственный к $\{e_N^M(i)\}_{i=1}^n$ относительно $\langle\ ,\ \rangle$, т.е. $\left\langle e_N^M(i), w^\alpha\right\rangle = \delta_{i,\alpha}$; тогда

$$w^\alpha = \sum_{j=1}^{n}\omega^{\alpha j}e_M^{M_1}(j).$$

Теперь можно определить структуру *-алгебры Хопфа на B. Определим коумножение $\Delta : B \longrightarrow B \otimes B$, коединицу $\varepsilon : B \longrightarrow \mathbf{C}$ и антипод $S : B \longrightarrow B$ как линейные отображения, определенные следующим образом:

(a) $\Delta(w^\alpha) = w^\alpha \otimes w^\alpha$,
(b) $\varepsilon(e_M^{M_1}(j)) = \delta_{j,0}$,
(c) $S(e_M^{M_1}(j)) = e_M^{M_1}(j)$.

Тогда B, снабженная ее структурой *-алгебры, коумножением Δ, коединицей ε и антиподом S, есть (конечномерная) *-алгебра Хопфа.

Как следствие, A с ее естественной структурой *-алгебры, коумножением, коединицей и антиподом, определенными как дуальные к умножению, единице и антиподу в B относительно двойственности $\langle\ ,\ \rangle$, имеет структуру *-алгебры Хопфа, двойственной к B.

Определим теперь билинейное отображение

$$B \times M_1 \ni (b, x) \to b \cdot x = nE_{M_1}(bxe_M^{M_1}).$$

Тогда $w^\alpha x = (w^\alpha \cdot x)w^\alpha$; это легко проверяется сначала для $x = e_N^M$, а затем заметить, что любой $x \in M_1$ имеет вид $x = \sum\limits_l y_l e_N^M z_l$ при некоторых $y_l, z_l \in M$. Кроме того, это отображение есть левое действие B на M_1. Тогда, обозначая через $M_1 \rtimes B$ соответствующее скрещенное произведение, легко проверить, что отображение

$$\phi : M_1 \rtimes B \ni x \otimes b \to xb \in M_2$$

есть *-автоморфизм; это доказывает утверждение. □

Замечание 4.8. Если $A \subset N \subset M$ — подалгебра Картана в M, то она также является подалгеброй Картана в N (см. [23]) и $N \subset M$ обладает U-свойством. В частности, $[M : N] \in \mathbb{N}$. Заметим, что на самом деле такой базис может быть в $\mathcal{N}_M(A)$. Кроме того, $N \subset M$ неприводимо. В самом деле,

$$N' \cap M \subset A' \cap M = A \subset N$$

а потому $N' \cap M \subset N' \cap N = \mathbb{C}I$.

Следствие 4.9. *Пусть задано включение $N \subset M$ факторов типа II_1 конечного индекса Джонса $[M : N] = n$. Предположим, что либо существует общая подалгебра Картана $A \subset N \subset M$, либо N Э— регулярный подфактор. Тогда*

$$N \subset M \cong N \subset N \rtimes B,$$

*где $N \rtimes B$ — скрещенное произведение N на конечномерную *-алгебру Хопфа B с $\dim(B) = n$, действующей на N.*

Благодарности. Автор благодарен С. Попа за множество ценных замечаний и предложений, а также Л. Вайнерману за проявленный к работе интерес и плодотворные обсуждения предмета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bisch D.* A note on intermediate subfactors// Pac. J. Math. — 1994. — *163*, № 2. — С. 201–216.
2. *Bisch D., Haagerup U.* Composition of subfactors: new examples of infinite depth subfactors// Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1996. — *29*, № 3. — С. 329–383.
3. *Connes A.* Classification of injective factors// Ann. Math. — 1976. — *104*. — С. 73–115.
4. *Connes A.* Classification des facteurs// Proc. Symp. Pure Math. — 1982. — *38*, part 2. — С. 43–109.
5. *Connes A.* Noncommutative geometry. — San Diego, CA: Academic Press, 1994.
6. *Goldman M.* On subfactors of type II_1// Mich. Math. J. — 1959. — *6*. — С. 167–172.
7. *Goodman F., de la Harpe P., Jones V. F. R.* Coxeter graphs and tower of algebras/ MSRI publ. 14. — Springer-Verlag, 1989.
8. *Hiai F.* Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor// Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1988. — *24*, № 4. — С. 673–678.
9. *Jones V. F. R.* Index for subfactors// Invent. Math. — 1983. — *72*. — С. 1–25.
10. *Jones V. F. R.* Subfactors of II_1 factors and related topics// Proc ICM. — Berkeley, 1986. — С. 939–947.
11. *Kawahigashi Y.* Centrally trivial automorphisms and an analogue of Connes' $\chi(M)$ for subfactors// Duke Math. J. — 1993. — *71*. — С. 93–118.
12. *Loi P.* Remarks on automorphisms of subfactors// Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — *121*, № 2. — С. 523–531.
13. *Loi P.* On automorphisms of subfactors// J. Funct. Anal. — 1996. — *141*, № 2. — С. 275–293.
14. *McDuff D.* Central sequences and the hyperfinite factor// Proc. London Math. Soc. — 1970. — *21*. — С. 443–461.
15. *Murray F., von Neumann J.* On rings of operators, IV// Ann. Math. — 1943. — *44*. — С. 716–808.
16. *Ocneanu A.* Quantized group string algebras and Galois theory for algebras// Operator algebras and applications. Vol. 2. — London Math. Soc., 1989. — Lect. Notes Series, *136*. — С. 119–172.
17. Neumann algebras/ Springer Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York, 1985. — *1138*.
18. *Pimsner M., Popa S.* Entropy and index for subfactors// Ann. Ec. Norm. Sup. — 1986. — *19*. — С. 57–106.
19. *Pimsner M., Popa S.* Iterating the basic construction// Trans. Amer. Math. Soc. — 1988. — *310*. — С. 127–133.
20. *Popa S.* Singular maximal abelian *-subalgebras in continuous von Neumann algebras// J. Funct. Anal. — 1983. — *50*. — С. 151–166.
21. *Popa S.* Maximal injective subalgebras in factors associated with free groups// Adv. Math. — 1983. — *50*. — С. 27–48.
22. *Popa S.* Notes on Cartan subalgebras in type II_1 factors// Math. Scand. — 1985. — *57*, № 1. — С. 171–188.
23. *Popa S.* Relative dimension, towers of projections and commuting squares// Pac. J. Math. — 1989. — *137*. — С. 181–207.
24. *Popa S.* Classification of subfactors: the reduction to commuting squares// Invent. Math. — 1990. — *101*, № 1. — С. 19–43.
25. *Popa S.* On the classification of actions of amenable groups on subfactors// C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. — 1992. — *315*. — С. 295-299.

26. *Popa S.* Approximate innerness and central freenes for subfactors: A classification result// Subfactors. — Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1994. — C. 274–293.
27. *Popa S.* Classification of amenable subfactors of type II// Acta Math. — 1994. — *72*, № 2. — C. 352–445.
28. *Popa S.* Markov traces on universal Jones algebras and subfactors of finite index// Invent. Math. — 1993. — *111*, № 2. — C. 375–405.
29. *Popa S.* Classification of subfactors and their endomorphisms/ CBMS Regional Conference Series in Mathematics, *86*. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1995.
30. *Popa S.* An axiomatization of the lattice of higher relative commutants of a subfactor// Invent. Math. — 1995. — *120*, № 3. — C. 427–445.
31. *Szymański W.* Finite index subfactors and Hopf algebra crossed products// Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — *120*, № 2. — C. 519–528.
32. *Takesaki M.* Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III// Acta Math. — 1973. — *131*. — C. 249–310.

T. Ceccherini-Silberstein
Dipartimento di Matematica «G. Castelnuovo»,
Università di Roma «La Sapienza», Roma, Italy
E-mail: tceccher@mat.uniroma1.it

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 126–138

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦОМ С ИНВАРИАНТНЫМ БАЗИСНЫМ ЧИСЛОМ

© 2004 г. **А. А. ЛАШХИ, Т. Г. КВИРИКАШВИЛИ**

Аннотация. Целью данной работы является проверка справедливости основной теоремы аффинной геометрии над кольцами с инвариантным базисным числом.

СОДЕРЖАНИЕ

1. О кольцах с инвариантным базисным числом 126
2. Аффинная геометрия модулей 128
3. Коллинеации и решеточные изоморфизмы 131
Список литературы 137

Целью данной работы является проверка справедливости основной теоремы аффинной геометрии над кольцами с инвариантным базисным числом. Классический вариант основной теоремы аффинной геометрии можно найти в [4,23]. Первые обобщения были сделаны в [24,26]. Дальнейшие результаты были получены в [1,5–10,12–15,18,21,22,25,28,29].

1. О кольцах с инвариантным базисным числом

Свободный R-модуль ${}_RM$ имеет ранг (размерность) n, если ${}_RM \cong R^n$. Этот факт будем обозначать через $\dim_R M = n$. В общем случае ранг (размерность) не определяется однозначно (см. [11,16,20,30]. Известно, что бесконечный ранг определяется однозначно (см. [11]); это наводит на последовательность следующих ограничений на R (см. [10,11,16,17]):

(c_1) ранг любого свободного R-модуля определяется однозначно;
(c_2) свободный R-модуль конечного ранга n не может быть порожден менее чем n элементами;
(c_3) в свободном R-модуле ранга $n < \infty$ каждое порождающее множество из n элементов является базисом.

Ясно, что справедливы импликации

$$(c_3) \Longrightarrow (c_2) \Longrightarrow (c_1).$$

Условие (c_1) известно как условие инвариантности базисного числа. Кольца, удовлетворяющие условию (c_1), называются IBN-кольцами (invariant basis number). Обозначим через [IBN] класс колец со свойством (c_1), через [IB] — класс колец со свойством (c_2), через [IN] — класс колец со свойством (c_3). Тогда

$$[\mathrm{IB}] \subset [\mathrm{IN}] \subset [\mathrm{IBN}],$$

причем включения строгие (см. [2,27]).

Перефразируем теперь условия (c_1)–(c_3) следующим образом: если свободный модуль F_n ранга n имеет также m образующих, то имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow {}_RM \longrightarrow F_m \longrightarrow F_n \longrightarrow 0,$$

так как F_m — свободный модуль, $F_m \cong F_n \oplus {}_RM$. Следовательно, условия (c_1)–(c_3) можно переписать так:

$(\widetilde{c}_1)$ для всех m, n, если $F_m \cong F_n$, то $m = n$;

Работа выполнена при поддержке грантов NATO C.N.R. 220341 и Short Mobility C.N.R. 140.4.

$(\widetilde{c}_2)$ для всех m, n, если $F_m \cong F_n \oplus {}_RM$, то $m \geqslant n$;
$(\widetilde{c}_3)$ для всех n, если $F_n \cong F_n \oplus {}_RM$, то ${}_RM = 0$.

Другую возможность дает матричный язык. Для $(m \times n)$-матрицы примем обозначения $A_{m\times n}$, т.е. условия:

$(\alpha_{m,n})$ существуют матрицы $A_{m,n}$, $B_{n,m}$, для которых $A_{m,n} \cdot B_{n,m} = B_{n,m} \cdot A_{m,n} = E$;
$(\beta_{m,n})$ существуют матрицы $A_{m,n}$, $B_{n,m}$, для которых $A_{m,n} \cdot B_{n,m} = E$;
(γ_n) существуют матрицы $A_{n,n}$, $B_{n,n}$, для которых $A_{n,n} \cdot B_{n,n} = E$, $B_{n,n} \cdot A_{n,n} \neq E$.

Рассматривая эти матрицы как матрицы перехода от одного базиса к другому, находим:

$(c_1) \Longleftrightarrow$ из $(\alpha_{m,n})$ следует $m = n$;
$(c_2) \Longleftrightarrow$ из $(\beta_{m,n})$ следует $m \leqslant n$;
$(c_3) \Longleftrightarrow$ (γ_n) не имеет места ни для какого $n \geqslant 1$.

Для полноты изложения приведем некоторые известные факты (см., например, [10, 27]).

(1) Нетерово кольцо удовлетворяет условию (c_3) (и (c_2), (c_1)).
(2) Классы колец [IB], [IN], [IBN] замкнуты относительно прямого и обратного предела.
(3) Классы колец [IB] и [IN] замкнуты относительно гомоморфизмов.
(4) Утверждение, аналогичное (3), не верно для класса [IBN].
(5) Если кольцо принадлежит одному из классов [IB], [IN], [IBN], то любое его ненулевое подкольцо также принадлежит этому классу.
(6) Класс коммутативных колец [C] $\subset$ [IB].

Следуя П. Кону, назовем кольцо R стабильно свободным, если существуют свободные модули F и F_1, для которых $F \cong F_1 \oplus {}_RM$.

(7) Если кольцо R $(\neq 0)$ таково, что каждый стабильно свободный модуль свободен, то условия (c_1), (c_2), (c_3) совпадают.
(8) Групповая алгебра любой группы над полем характеристики нуль удовлетворяет условию (c_3).

Проводимые выше рассуждения наводят на следующую известную задачу: для каких колец $uv = 1 \Longleftrightarrow vu = 1$. Ненулевое кольцо R назовем DF-кольцом, если для любых $u, v \in R$ имеем $uv = 1 \Longrightarrow vu = 1$. Обозначим класс DF-колец через [DF].

В историческом плане отметим работу Ж. Шепердсона [30]. Отвечая на вопрос, существует ли такое кольцо R, что в R нет делителей нуля, а в кольце квадратных матриц $M_2(R)$ имеются элементы A, B, X такие, что $AB = E$, $AX = 0$, Ж. Шепердсон построил кольцо $R \in$ [DF] и нашел элементы $A, B \in M_2(R)$, для которых $AB = E$, $BA \neq E$, т.е. $M_2(R) \notin$ [DF]. Отсюда, положив $X = BA - E$, находим $A(BA - E) = 0$.

Этот пример наводит на следующее определение. Кольцо R назовем D-кольцом, если кольцо $(n \times n)$-матриц $M_n(R) \in$ [DF] для любого $n \in N$. Класс D-колец обозначим через [D]. Примем обозначение [BN] := [D] $\cap$ [IBN].

В дальнейшем E_n — единичная $(n\times n)$-матрица, $O_{k,e}$ — нулевая $(k\times l)$-матрица. Если ${}_RM = F_n$ — свободный модуль, $e_1, \ldots, e_n$ — базис F_n, $u_1, \ldots, u_k \in F_n$ — произвольные элементы, $u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$, то $(k \times n)$-матрица $A_{k,n} = (a_{ij},\ j = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, k)$ является матрицей представления элементов u_i, $i = 1, \ldots, k$.

Предложение 1. *Пусть F_n — свободный R-модуль ранга n, $R \in$ [D]. Если $u_1, \ldots, u_k$ — порождающее множество, то $k \geqslant n$. Если $k = n$, то $u_1, \ldots, u_k$ — базис.*

Доказательство. Пусть $k < n$ и $A_{k,n} = (a_{ij})$ — матрица представления элементов $u_1, \ldots, u_k$. С другой стороны, если $e_\mu = \sum\limits_{\gamma=1}^{k} \beta_{\mu\gamma}u_\gamma$, то неоднозначно определяется $(n \times k)$-матрица $B_{n,k} = (b_{\mu\gamma},\ 1 \leqslant \mu \leqslant n,\ 1 \leqslant \gamma \leqslant k)$. Следовательно, BA — матрица представления $e_1, \ldots, e_n$ относительно

того же базиса:

$$e_\mu = \sum_{i=1}^{k} \beta_{\mu_i} u_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_{\mu_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} \beta_{\mu_i} a_{ij} \Big) e_j \quad \Longrightarrow \quad BA = E_n.$$

Примем обозначения

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11},\, a_{12},\, \ldots,\, a_{1n} \\ a_{21},\, a_{22},\, \ldots,\, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1},\, a_{k2},\, \ldots,\, a_{kn} \\ O_{n-k,n} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11},\, b_{12},\, \ldots,\, b_{1n} & \\ b_{21},\, b_{22},\, \ldots,\, b_{2n} & O_{n,n-k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_{k1},\, b_{k2},\, \ldots,\, b_{kn} & \end{pmatrix}.$$

Тогда $A_1, B_1 \in M_n(R)$, $B_1 A_1 = BA = E_n \Longrightarrow A_1 B_1 = E$. Имеем

$$A_1 B_1 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & O_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \neq E.$$

Следовательно, $k \geqslant n$. Предположим теперь, что $k = n$. Так как $A, B \in M_n(R)$, $BA = E_n$ и $M_n(R) \in [\mathrm{DF}]$, имеем $BA = E$. Поэтому $B = A^{-1}$, т.е. элементы $u_1, \ldots, u_n$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ имеют матрицей представления обратимую матрицу и, следовательно, $u_1, \ldots, u_n$ — базис для F_n. Предложение доказано. □

Таким образом, имеем

$$\begin{array}{ccccccc} & & [\mathrm{IN}] & \subset & [\mathrm{IBN}] & & \\ & & \cup & & \cup & & \\ [\mathrm{C}] & \subset & [\mathrm{IB}] & \subset & [\mathrm{BN}] & = & [\mathrm{D}] \cap [\mathrm{IBN}] \\ & & & & \cap & & \\ & & & & [\mathrm{D}] & \subset & [\mathrm{DF}] \end{array}$$

2. Аффинная геометрия модулей

Классическая проективная геометрия $\mathrm{PG}({}_F M)$ над полем F реализуется как модулярная решетка подпространств, а аффинная геометрия $\mathrm{AG}({}_F M)$ — как полумодулярная решетка смежных классов.

Пусть A — линейная алгебра над (ассоциаттивным) кольцом R. Рассмотрим множество $\mathrm{CL}(A)$, состоящее из всех смежных классов по всем подалгебрам и пустого множества $\varnothing$. На $\mathrm{CL}(A)$ введем частичный порядок:

$$X_1 \leqslant X_2 \Longleftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathrm{CL}(A).$$

Предложение 2 (см. [13]). $\mathrm{CL}(A)$ *является полной решеткой относительно следующих операций*:

(i) $\bigcap\limits_{\alpha} U_\alpha$ — *теоретико-множественное пересечение*;

(ii) $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = a_\beta + \langle A_\alpha,\, a_\beta - a_\alpha,\, \alpha \in J \rangle$,

где $U_\alpha = a_\alpha + A_\alpha$ *и* A_α — *подалгебра* A. *Решетка подалгебр* $L(A)$ *есть подрешетка в* $\mathrm{CL}(A)$ *и* $L(A) \cong [\varnothing, A]$.

Ясно, что решеточный изоморфизм $\varphi : \mathrm{CL}({}_R M) \to \mathrm{CL}({}_{R_1} M_1)$ устанавливает биекцию между модулями $\varphi : {}_R M \to {}_{R_1} M_1$. Из всевозможных изоморфизмов естественно выделить те, для которых $\varphi(0) = 0$. Назовем их A-изоморфизмами. Ясно, что отображение $\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ будет A-изоморфизмом. Естественно возникает вопрос: когда ограничение A-изоморфизма на ${}_R M$ будет полулинейным изоморфизмом относительно некоторого изоморфизма $\sigma : R \to R_1$? В случае, когда $R = F$ — тело, это означает наличие основной теоремы аффинной геометрии. Напомним, что полулинейный изоморфизм модулей $f : {}_R M \to {}_{R_1} M_1$ относительно изоморфизма $\sigma : R \to R_1$ (σ — полулинейный изоморфизм) определяется следующим образом:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \sigma(\alpha_1) f(x_1) + \sigma(\alpha_2) f(x_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R, \quad x_1,\, x_2 \in {}_R M.$$

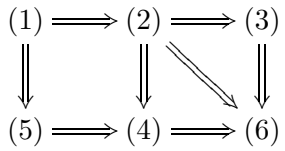
Сформулируем основную теорему аффинной геометрии для классического случая, т.е. для пространств над телами.

Теорема (основная теорема аффинной геометрии, [4, 23]). *Пусть* ${}_FM$ *и* ${}_{F_1}M_1$ *— векторные пространства над телами* F *и* F_1, $\dim {}_FM = \dim {}_{F_1}M_1 \geqslant 2$ *и* $f : \mathrm{CL}({}_FM) \to \mathrm{CL}({}_{F_1}M_1)$ *— отображение, при котором* $f(0) = 0$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) f *— решеточный изоморфизм*;
(2) f *— решеточный гомоморфизм*;
(3) *если* $A \subseteq B$, *то* $f(A) \subseteq f(B)$ *для любых* $A, B \in \mathrm{CL}({}_FM)$;
(4) *ограничение* f *на* ${}_FM$ *является биекцией и коллинеацией*;
(5) *ограничение* f *на* ${}_FM$ *является биекцией, а* f *и* f^{-1} *— коллинеациями*;
(6) *ограничение* f *на* ${}_FM$ *является нетривиальной коллинеацией*;
(7) f *— полулинейный изоморфизм относительно изоморфизма* $\sigma : F \to F_1$.

Эквивалентность условий (1)–(6) проверяется непосредственно. Дополнительных рассуждений требует лишь проверка отсутствия нетривиальных гомоморфизмов, что достигается аналогично проективному случаю [19]. Доказать справедливость теоремы означает вывести (7) из наличия одного из условий (1)–(6). Таким образом, в условиях теоремы фигурируют f, F, аффинная геометрия (решетка) $\mathrm{AG}({}_FM) = \mathrm{CL}({}_FM)$, аффинное пространство $\mathrm{Aff}({}_FM) := {}_FM$ — множество точек геометрии.

Естественно, при переходе к общим основным кольцам условия (1)–(6) перестают быть эквивалентными, и между ними имеется схема зависимостей



При построении (любой) геометрии первоначальной задачей является задание системы точек, в нашем случае — аффинного пространства. Для свободного R-модуля аффинное пространство ${}_RM$ можно трактовать по-разному:

(i) аффинное пространство $\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$ — множество всех унимодулярных элементов ${}_RM$;
(ii) аффинное пространство $\mathrm{Aff}({}_RM)$ — множество всех $e \in {}_RM$, для которых Re — свободный одномерный модуль;
(iii) множество ${}_RM$ можно также трактовать как аффинное пространство, на котором построена аффинная геометрия $\mathrm{CL}({}_RM)$ — полная полумодулярная решетка смежных классов.

Аффинным пространствам $\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$ и $\mathrm{Aff}({}_RM)$ будут также соответствовать аффинные геометрии $\widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM)$ и $\mathrm{AG}({}_RM)$ как подрешетки $\mathrm{CL}({}_RM)$, натянутые на $\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$ и $\mathrm{Aff}({}_RM)$.

Напомним, что элемент $e \in {}_RM$ свободного R-модуля ($1 \in R$) называется унимодулярным, если существует линейная форма $g : {}_RM \to R$, такая, что $g(e) = 1$.

Пусть теперь ${}_{R_1}M_1$ — свободный R_1-модуль; f_1, f_2, f_3 — коллинеации между (соответствующими) аффинными пространствами: $(f_i(x) \in f_i(y) \cup f_i(x) \iff x \in y \cup z)$; φ_1, φ_2, φ_3 — решеточные изоморфизмы между соответствующими аффинными геометриями:

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_{R_1}M_1) & \subset & \mathrm{Aff}({}_{R_1}M_1) & \subset & {}_{R_1}M_1 \\
\big\downarrow f_1 & & \big\downarrow f_2 & & \big\downarrow f_3 \\
\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_{R}M) & \subset & \mathrm{Aff}({}_{R}M) & \subset & {}_{R}M \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\widetilde{\mathrm{AG}}({}_{R}M) & \hookrightarrow & \mathrm{AG}({}_{R}M) & \hookrightarrow & \mathrm{CL}({}_{R}M) \\
\big\downarrow \varphi_1 & & \big\downarrow \varphi_2 & & \big\downarrow \varphi_3 \\
\widetilde{\mathrm{AG}}({}_{R_1}M_1) & \hookrightarrow & \mathrm{AG}({}_{R_1}M_1) & \hookrightarrow & \mathrm{CL}({}_{R_1}M_1)
\end{array}$$

Наличие различных вариантов основной теоремы аффинной геометрии означает, что соответствующие f_i, φ_i, $i = 1, 2, 3$, оказываются полулинейными изоморфизмами.

Определение. Если $x, y \in {}_RM$, то смежный класс $x \cup y = x + R(x - y)$ назовем прямой, проходящей через x, y. Прямые $\ell_1 = x_1 + Ry_1$, $\ell_2 = x_2 + Ry_2$ назовем параллельными (обозначение $\ell_1 \parallel \ell_2$), если существует свободный подмодуль Re ранга 1, такой что

$$Ry_1 \subseteq Re, \quad Ry_2 \subseteq Re.$$

Замечание 1. Параллельность не является транзитивным свойством. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — базис ${}_RM$. Элемент $e = \alpha e_1 + e_2$ унимодулярен, где α — делитель нуля ($q\alpha = 0$, $q \neq 0$, $\alpha \neq 0$). Если $y = qe$, то $Ry \subset Re$. С другой стороны,

$$qe = q(\alpha_1 + e_2) = qe_2 = y, \quad Ry \subseteq Re_2, \quad Re \neq Re_2,$$
$$Re \parallel Ry, \quad Ry \parallel Re_2, \quad Re \nparallel Re_2.$$

Предложение 3. *Если в кольце R для некоторого обратимого α элемент $\alpha - 1$ обратим, то* $\widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM) = \mathrm{CL}({}_RM)$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ — произвольный элемент. Тогда

$$\left.\begin{array}{r}
\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \cdots + \mu_n e_n, \\
\mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \cdots + \mu_n e_n, \\
(\alpha - 1)e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n, \\
\alpha e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n
\end{array}\right\} \in \widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM).$$

Имеем

$$x \in \mu_1 e_1 + \mu_3 e_3 + \cdots + \mu_n e_n + Re_2 = \mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \mu_3 e_3 + \cdots + \mu_n e_n + Re_2 =$$
$$= \big[\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \cdots + \mu_n e_n\big] \cup \big[\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \cdots + \mu_n e_n\big];$$
$$x \in \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i + Re_1 = \alpha e_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i + Re_1 = \Big(\alpha e_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i\Big) \cup \Big[(\alpha - 1)e_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i\Big].$$

Следовательно,

$$x = \Big[\Big(\mu_1 e_1 + (\alpha - 1)e_2 + \sum_{i=3}^{n} \mu_i e_i\Big) \cup \Big(\mu_1 e_1 + \alpha e_2 + \sum_{i=3}^{n} \mu_i e_i\Big)\Big] \cap$$
$$\cap \Big[\Big((\alpha - 1)e_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i\Big) \cup \Big(\alpha e_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i e_i\Big)\Big] \Longrightarrow x \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM).$$

Предложение доказано. □

Пример. Любое одномерное пространство над полем Z_p допускает ровно $(p-1)!$ A-автоморфизмов, в то время как группа внутренних автоморфизмов имеет порядок $p-1$. Следовательно, одномерное пространство над Z_p допускает A-автоморфизмы, отличные от обычных.

3. Коллинеации и решеточные изоморфизмы

Теорема 1. *Пусть ${}_RM$, ${}_{R_1}M_1$ — свободные модули, $R, R_1 \in [\mathrm{BN}]$, $\dim {}_RM \geqslant 2$. Если $\varphi : {}_RM \to {}_{R_1}M_1$, $\varphi(0) = 0$ — сохраняющая параллельность коллинеация, то существует изоморфизм $\sigma : R \to R_1$ такой, что φ будет σ-полулинейным изоморфизмом.*

Доказательство. Напомним определение коллинеации: $x \in y \cup z \iff f(x) \in f(y) \cup f(x)$. Для произвольного $x \in {}_RM$ имеем $Rx = 0 \cup x$, $f(rx) = R_1 f(x)$. Пусть y — унимодулярный элемент, а x — произвольный элемент из ${}_RM$. Тогда $R_1 f(y)$ — максимальный подмодуль ранга 1. Имеем

$$x + Ry = x \cup (x + y), \quad f(x + Ry) = f(x) + f(x) + R\big[f(x + y) - f(x)\big].$$

Так как $x + Ry \| Ry$, имеем

$$f(x) + R_1\big[f(x + y) - f(x)\big] \parallel R_1 f(y).$$

Из того, что $R_1 f(y)$ — максимальный подмодуль ранга 1, имеем

$$f(x + Ry) \subseteq f(x) + R_1 f(y).$$

Если рассмотреть f^{-1}, то получим обратное включение и, следовательно, $f(x+Ry) = f(x)+R_1 f(y)$.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис ${}_RM$, то $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ будет базисом в ${}_{R_1}M_1$. Действительно, для произвольного $x_1 \in {}_{R_1}M_1$ имеем

$$f^{-1}(x_1) = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1} + Re_n,$$
$$x_1 \in f(a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1}) + R_1 f(e_n) = f(a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1}) + \overline{a}_n e_n.$$

Применяя индукцию, находим

$$x_1 = \overline{a}_1 f(e_1) + \cdots + \overline{a}_{n-1} f(e_{n-1}) + \overline{a}_n f(e_n).$$

Тем самым показано, что $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ — порождающее множество. Так как $R, R_1 \in [\mathrm{BN}]$ и f^{-1} — коллинеация, то получаем, что $\dim {}_{R_1}M_1 = \dim {}_RM$. Следовательно, $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ является базисом ${}_{R_1}M_1$.

Далее, для любых двух базисных элементов e_1, $e_2 \in {}_RM$ имеем

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1 + e_2) \in f(e_1) + R_1 f(e_2), \\ f(e_1 + e_2) \in f(e_2) + R_1 f(e_1) \end{array}\right] \Longrightarrow f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2).$$

Так как образ унимодулярного элемента есть унимодулярный элемент, то для любого $a \in R$ находим

$$ae \in Re \Longrightarrow f(ae) \in R_1 f(e) \quad \Longrightarrow \quad f(ae) = \overline{a} f(e), \quad \overline{a} \in R_1.$$

Таким образом, строится отображение $\sigma : R \to R_1$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, которое, в общем, зависит от базисного элемента e, т.е. $\sigma = \sigma_e$. Далее, так как

$$f(e_1 + ae_2) = f(e_1) + \sigma_{e_2}(a) f(e_2),$$

то

$$f(a_1e_1 + a_2e_2) = f(a_1e_1) + \overline{a}_2 f(e_2) = \sigma_{e_1}(a_1) f(e_1) + \overline{a}_2 f(e_2) =$$
$$= f(a_2e_2) + \overline{a}_1 f(e_1) = \sigma_{e_2}(a_2) f(e_2) + \overline{a}_1 f(e_1) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad f(a_1e_1) + a_2e_2) = \sigma_{e_1}(a_1) f(e_1) + \sigma_{e_2}(a_2) f(e_2),$$
$$f[a(e_1 + e_2)] = \sigma_{e_1+e_2}(a_1)\big[f(e_1) + f(e_2)\big] = \sigma_{e_1+e_2}(a) f(e_1) + \sigma_{e_1+e_2}(a) f(e_1) =$$
$$= f(ae_1 + ae_2) = f(ae_1) + f(ae_2) = \sigma_{e_1}(a) f(e_1) + \sigma_{e_2}(a) f(e_2).$$

Следовательно,

$$\sigma_{e_1}(a) = \sigma_{e_1+e_2}(a) = \sigma_{e_2}(a) \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{e_1} = \sigma_{e_2} = \cdots = \sigma_{e_n} = \sigma_{e_i+e_j} = \sigma.$$

Так как пары $\{e_1, ae_1+e_2\}$, $\{e_2, e_1+ae_2\}$ составляют части некоторого базиса, находим

$$\sigma_{ae_1+e_2} = \sigma_{e_1} = \sigma_{e_2} = \sigma_{e_1+ae_2} = \sigma.$$

Далее имеем

$$f\big[(e_1+a_1e_2)+a_2e_2\big] = f(e_1)+\sigma(a_1)f(e_2)+\sigma(a_2)f(e_2) =$$
$$= f\big[e_1+(a_1+a_2)e_2\big] = f(e_1)+\sigma(a_1+a_2)f(e_2) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \sigma(a_1+a_2) = \sigma(a_1)+\sigma(a_2);$$
$$f\big[a_1(e_1+a_2e_2)\big] = \sigma(a_1)f(e_1+a_2e_2) = \sigma(a_1)f(e_1)+\sigma(a_1)\sigma(a_2)f(e_2) =$$
$$= f(a_1e_1+a_2e_2) = \sigma(a_1)f(e_1)+\sigma(a_1a_2)f(e_2) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(a_1a_2) = \sigma(a_1)\sigma(a_2).$$

Таким образом, σ — изоморфизм и

$$f(a_1e_1+a_2e_2) = \sigma(a_1)f(e_1)+\sigma(a_2)f(e_2).$$

Применяя индукцию, находим

$$f\Big[\sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i + a_ne_n\Big] = \sum_{i=1}^{n}\sigma(a_i)f(e_i).$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть* ${}_RM$ *и* ${}_{R_1}M_1$ *— свободные модули,* $R, R_1 \in [\mathrm{BN}]$, $\dim {}_RM \geqslant 3$. *Если* $f : \widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM) \to \widetilde{\mathrm{Aff}}({}_{R_1}M_1)$ *— сохраняющая параллельность коллинеация, то существует изоморфизм* $\sigma : R \to R_1$ *такой, что для любого унимодулярного элемента* $e = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$, *где* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *— базис* ${}_RM$, *справедливо равенство*

$$f(e) = \sigma(a_1)f(e_1)+\cdots+\sigma(a_n)f(e_n).$$

Доказательство. Пусть $e \in \widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$. Так как f — коллинеация, имеем

$$f(Re) = f(e\cup 0) = f(0)\cup f(e) = R_1f(e).$$

Далее, $e_1+e_2 \in \widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$ и

$$e_1\cup(e_1+e_2) = e_1+Re_2; \quad f\big(e_1\cup(e_1+e_2)\big) = f(e_1)+R_1\big[f(e_1+e_2)-f(e_2)\big].$$

Так как $(e_1+Re_2)\|Re_2$, имеем

$$f(e_1)+R_1[f(e_1+e_2)-f(e_1)]\|R_1f(e_2).$$

Далее, так как $R_1f(e_2)$ — максимальный подмодуль ранга 1, получаем

$$R_1\big[f(e_1+e_2)-f(e_1)\big] \subseteq R_1f(e_2), \quad f(e_1+Re_2) \subseteq f(e_1)+R_1f(e_2).$$

Следовательно,

$$f(e_1+e_2) = f(e_1)+\overline{a}f(e_2) = \overline{b}f(e_1)+f(e_2).$$

Покажем, что $f(e_1),\ldots,f(e_n)$ — независимая система, более того, базис ${}_{R_1}M_1$. Пусть

$$e = a_1e_1+a_2e_2 \in \widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM), \quad e = \big[e_1+(a_2-1)e_2\big]+\big[(a_1-1)e_1+e_2\big]\overline{e}_1+\overline{e}_2.$$

Если относительно $R_1[f(e_1+e_2)-f(e_1)] \subseteq R_1f(e_2)$ применим f^{-1}, то находим

$$R_1[f(e_1+e_2)-f(e_1)] \subseteq R_1f(e_2).$$

Поэтому

$$f(\overline{e}_1+R\overline{e}_2) = f(\overline{e}_1)+R_1f(\overline{e}_2),$$
$$f(a_1e_1+a_2e_2) = f(\overline{e}_1+\overline{e}_2) = f(\overline{e}_1)+k_1f(\overline{e}_2) =$$
$$= f\big(e_1+(a_2-1)e_2\big)+k_1f\big[(a_1-1)e_1+e_2\big] =$$
$$= f(e_1)+a_2'f(e_2)+k_1a_1'f(e_1)+k_1f(e_2), \quad a_1',\ a_2',\ k_1 \in R_1.$$

Предположим справедливость равенств

$$f\Big(e_1+\sum_{i=2}^{n-1}a_ie_i\Big)=f(e_1)+\sum_{i=2}^{n-1}k_if(e_i),\quad f\Big(\sum_{i=1}^{n-1}a_ie_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}k_if(e_i)$$

и покажем справедливость аналогичных равенств для сумм от n слагаемых. Имеем:

$$f\Big(e_1+\sum_{i=2}^{n-1}a_ie_i\Big)\in f\Big(e_1+\sum_{i=2}^{n-1}a_ie_i+Re_n\Big),$$
$$f\Big(e_1\sum_{i=2}^{n-1}a_ie_i\Big)=f\Big(e_1+\sum_{i=2}^{n-1}a_ie_i\Big)+kf(e_n)=f(e_1)+\sum_{i=2}^{n-1}k_if(e_i)+kf(e_n).$$

Если теперь унимодулярный элемент представим в виде суммы двух унимодулярных элементов

$$e=\overline{e}_1+\overline{e}_2,\quad \overline{e}_1=e_1+(a_2-1)e_2+a_3e_3+\cdots+a_ne_n,\quad \overline{e}_2=(a_1-1)e_1+e_2,$$

то имеем

$$\overline{e}_1\cup e=\overline{e}_1+R\overline{e}_2,\quad f(\overline{e}_1+R\overline{e}_2)=f(\overline{e}_1)+R_1f(\overline{e}_2),$$
$$f(e)=f(\overline{e}_1+\overline{e}_2)+f(\overline{e}_1)+kf(e_2)=f\big(e_1(a_2-1)e_2)+\cdots+a_ne_n\big)+kf\big[(a_1-1)e_1+e_2\big]=$$
$$=k_1f(e_1)+\cdots+k_nf(e_n),\quad k,\ k_1,\ \ldots,\ k_n\in R_1.$$

Если теперь считать, что e — прообраз унимодулярного элемента из $\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_{R_1}M_1)$, то получим, что $f(e_i)$, $i=1,\ldots,n$, — порождающее множество свободного R_1-модуля ${}_{R_1}M_1$. Так как $R,R_1\in[\mathrm{BN}]$, получаем, что $\dim{}_{R_1}M_1\leqslant n=\dim{}_RM$. Если учесть, что f^{-1} имеет те же свойства что f, то получим $\dim{}_{R_1}M_1=\dim{}_RM=n>2$. Так как каждое порождающее множество из n элементов будет базисом в ${}_{R_1}M_1$, заключаем, что $f(e_1),\ldots,f(e_n)$ — базис в ${}_{R_1}M_1$.

Таким образом, имеем $R_1f(e_1)\cap R_1f(e_2)=0$ и

$$f(e_1+e_2)=f(e_1)+af(e_2)=bf(e_1)+f(e_2)\quad\Longrightarrow\quad a=b=1,$$

т.е.

$$f(e_1+e_2)=f(e_1)+f(e_2),\quad f(e_1+Re_2)=f(e_1)+Rf(e_2).$$

Более того, мы показали справедливость последних равенств для унимодулярных элементов e_1, e_2, для которых $Re_1\cap Re_2=0$. Для произвольного $a\in R$ имеем

$$f(e_1+ae_2)=f(e_1)+a'f(e_2).$$

Следовательно, строится биекция

$$\sigma:R\to R_1,\quad \sigma(a)=a',\quad \sigma(0)=0,\quad \sigma(1)=1.$$

Покажем, что σ — изоморфизм. Рассмотрим элементы базиса a_1, e_i, $i\neq2$; имеем

$$f(a_1+ae_i)=f(e_1)+\sigma_i(a)f(e_i).$$

Так как $R(e_1+ae_2)\cap Re_i=0$, $e_1+ae_2+be_i\in\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$, получаем

$$f(e_1+ae_2+be_i)=f(e_1+ae_2)+b'f(e_i)=f(e_1)+\sigma(a)f(e_2)+b'f(e_i)=$$
$$=f(e_1+be_i+ae_2)=f(e_1)+\sigma_i(b)f(e_i)+a'f(e_2).$$

Поэтому $a'=\sigma(a)$, $b'=\sigma_i(b)$ и

$$f(e_1+ae_2+be_i)=f(e_1)+\sigma(a)f(e_2)+\sigma_i(b)f(e_i).$$

Далее, находим

$$ae_2+e_i=e_1+ae_2+e_i-e_1\in e_1+ae_2+e_i+Re_1\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad f(ae_2+e_i)+f(e_1)+\sigma(a)f(e_2)+b'f(e_1).$$

С другой стороны,

$$f(ae_2+e_i)=f(e_i)+a'f(e_2) \quad\Longrightarrow\quad \sigma(a)=a', \quad b'=-1,$$
$$f(e_i+ae_2)=f(e_i)+\sigma(a)f(e_2).$$

Имеем $R(e_1+ae_2)\cap R(be_2+e_i)=0$. Поэтому

$$f\big[\big(e_1+(a+b)e_2\big)+e_i\big]=f\big(e_1+(a+b)e_2\big)+f(e_i)=f(e_1)+\sigma(a+b)f(e_2)+f(e_i)=$$
$$=f\big[(e_1+ae_2)+(be_2+e_i)\big]=f(e_1+ae_2)+f(be_2+e_i)=f(e)\sigma(a)f(e_2)+\sigma(b)f(e_2)+f(e_i) \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b).$$

Учитывая теперь, что $Re_1\cap R(be_2+e_i)=0$, находим

$$f(e_1+abe_2+ae_i)=f(e_1)+\sigma(ab)f(e_2)+\sigma_i(a)f(e_i)=f\big[e_1+a(be_2+e_i)\big]=$$
$$=f(e_1)+a'f(be_2+e_i)=f(e_1)+a'\big[\sigma(b)f(e_2)+f(e_i)\big] \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \sigma(ab)=a'\sigma(b), \quad a'=\sigma_i(b).$$

Положив $b=1$, получаем $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$. Следовательно, σ — изоморфизм.

Используя равенство $R(e_1+a_2e_2+\cdots+a_{n-1}e_{n-1})\cap Re_n=0$ и предполагая, что справедливо равенство

$$f\Big(e_1+\sum_{i=2}^{n-1}a_ie_i\Big)=f(e_1)+\sum_{i=2}^{n-1}\sigma(a_i)f(e_i),$$

получаем

$$f(e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)=f(e_1+a_2e_2+\cdots+a_{n-1}e_{n-1})+a'f(e_n)=$$
$$=f(e_1)+\sigma(a_2)f(e_2)+\cdots+\sigma(a_{n-1})f(e_{n-1})+a'f(e_n)=$$
$$=f\big(e_1+a_2e_2+\cdots+a_{n-2}e_{n-2}+a_ne_n\big)+b'f(e_{n-1})=$$
$$=f(e_1)+\sigma(a_2)f(e_2)+\cdots+\sigma(a_{n-2})f(e_{n-2})+\sigma(a_n)f(e_n)+b'f(e_{n-1})=$$
$$=f\big(e_1\big)+\sigma(a_2)f(e_2)+\cdots+\sigma(a_{n-1})f(e_{n-1})+\sigma(a_n)f(e_n).$$

Рассмотрим теперь другую пару базисных элементов e_i, e_j, отличную от e_1, e_2; это возможно, так как $n>2$. В этом случае имеем

$$f(e_i+e_j)=f(e_i)+f(e_j), \quad f(e_i+ae_j)=f(e_i)+\tau(a)f(e_j),$$
$$f(e_i+a_1e_1+\cdots+a_ne_n)=f(e_i)+\tau(a_1)f(e_1)+\cdots+\tau(a_n)f(e_n)$$

для некоторого изоморфизма $\tau: R\to R_1$. Сравнивая с предыдущим равенством при $a_1=1$, получаем $\sigma=\tau$.

Пусть теперь $e=a_1e_1+\cdots+a_ne_n\in\widetilde{\mathrm{Aff}}({}_RM)$. В этом случае хотя бы один из коэффициентов a_i, $i=1,\dots,n$, не является делителем нуля. Пусть a_n. Представим e в виде суммы двух унимодулярных элементов

$$\overline{e}_1=e_1+(a_2-1)e_2+\cdots+a_ne_n \quad\text{и}\quad (a_1-1)e_1+e_2.$$

Так как a_n не является делителем нуля, то

$$R\big[e_1+(a_2-1)e_2+\cdots+a_ne_n\big]\cap R\big[(a_1-1)e_1+e_2\big]=0$$

и получаем

$$f(a_1e_1+\cdots+a_ne_n)=f\big[e_1+(a_2-1)e_2+\cdots+a_ne_n\big]+f\big[(a_1-1)e_1+e_2\big]=$$
$$=f(e_1)+\big(\sigma(a_2)-1\big)f(e_2)+\cdots+\sigma(a_n)f(e_n)+\big(\sigma(a_1)-1\big)f(e_1)+f(e_2).$$

Следовательно, для произвольного унимодулярного элемента $e=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$ имеем

$$f(e)=\sum_{i=1}^{n}\sigma(a_i)f(e_i).$$

Теорема доказана. □

Замечание 2. Аффинная геометрия $\widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM)$ в общем случае может не содержать нулевого подмодуля; однако если $\dim {}_RM \geqslant 3$, то $0 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM)$,

$$e_1 \cup e_2 \cup (e_1+e_2) = e_1 + \big[Re_1 \oplus Re_2\big] = Re_1 \oplus Re_2 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM),$$
$$e_1 \cup e_3 \cup (e_1+e_3) = e_1 + \big[Re_1 \oplus Re_3\big] = Re_1 \oplus Re_3 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM),$$
$$e_2 \cup e_3 \cup (e_2+e_3) = e_2 + \big[Re_2 \oplus Re_3\big] = Re_2 \oplus Re_3 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM),$$
$$\big[(Re_1 \oplus Re_2) \cap (Re_1 \oplus Re_3)\big] \cap (Re_2 \oplus Re_3) = 0 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM).$$

Отметим, что существенным моментом в доказательстве теорем 1 и 2 был тот факт, что коллинеация f базису ставит в соответствие базис, что достигалось наложением ограничений на основные кольца: $R, R_1 \in [\mathrm{BN}]$. Если теперь R и R_1 — произвольные кольца и $0 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM)$, то при решеточном изоморфизме $\varphi : \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM) \to \widetilde{\mathrm{AG}}({}_{R_1}M_1)$ базис отображается в базис, поскольку $e_1, \ldots, e_n$ тогда и только тогда является базисом, когда

$${}_RM = \bigcup_{i=1}^{n} e_i \cup 0, \quad (e_i \cup 0) \cap \Big(\bigcup_{i \neq j = 1}^{n} e_j \cup 0 \Big) = 0.$$

Если же $0 \notin \mathrm{AG}({}_RM)$, то линейную независимость можно определить и так: система $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\big[e_i \cup (e_i+e_j)\big] \cap \Big[\bigcup_{i \neq j = 1}^{n} \big(e_j \cup (e_i+e_j)\big)\Big] = e_i + e_j.$$

Следовательно, если $e_1, e_2 \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM)$ — линейно независимая пара и φ — решеточный изоморфизм, при котором образы параллельных прямых параллельны, то имеем

$$\varphi\big[e_1 \cup (e_1+e_2)\big] = \varphi(e_1) + R_1\big[\varphi(e_1+e_2) - \varphi(e_1)\big],$$
$$R_1\big[\varphi(e_1+e_2) - \varphi(e_2)\big] \subseteq R_1\varphi(e_2), \quad \varphi(e_1+Re_2) \subseteq \varphi(e_1) + R_1\varphi(e_2).$$

Применяя φ^{-1}, находим $R_1[\varphi(e_1+e_2) - \varphi(e_1)] = R_1\varphi(e_2)$. Таким образом, имеем

$$\varphi\Big[\big(e_1 \cup (e_1+e_2)\big) \cap \big(e_2 \cup (e_1+e_2)\big)\Big] = \varphi(e_1+e_2) =$$
$$= \varphi(e_1+Re_2) \cap \varphi(e_2+Re_1) = \big[\varphi(e_1)+R_1\varphi(e_2)\big] \cap \big[\varphi(e_2)+R_1\varphi(e_1)\big] =$$
$$= \Big[\varphi(e_1) \cup \big(\varphi(e_1)+\varphi(e_2)\big)\Big] \cap \Big[\varphi(e_2) \cup \big(\varphi(e_1)+\varphi(e_2)\big)\Big] = \varphi(e_1)+\varphi(e_2).$$

Следовательно, $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in \widetilde{\mathrm{AG}}({}_{R_1}M_1)$ — линейно независимая пара. Те же самые соображения позволяют заключить, что если $e_1, \ldots, e_n$ — базис (так как R (и R_1) $\notin [\mathrm{BN}]$, число n может не определяться однозначно), то $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ будет базисом для ${}_{R_1}M_1$. Повторяя теперь доказательство теоремы 2, заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть ${}_RM$ и ${}_{R_1}M_1$ — свободные модули над (произвольными) кольцами R и R_1, $\dim {}_RM \geqslant 3$. Если $\varphi : \widetilde{\mathrm{AG}}({}_RM) \to \widetilde{\mathrm{AG}}({}_{R_1}M_1)$ — решеточный изоморфизм, то существует изоморфизм $\sigma : R \to R_1$ такой, что для любого унимодулярного элемента $e = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ie_i$ имеем*

$$\varphi(e) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(a_i)\varphi(e_i).$$

По тем же соображениям заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $\varphi : \mathrm{CL}({}_RM) \to \mathrm{CL}({}_{R_1}M_1)$ — решеточный изоморфизм, где ${}_RM$, ${}_{R_1}M_1$ — свободные модули над кольцами R и R_1, $\dim {}_RM \geqslant 2$, то существует изоморфизм $\sigma : R \to R_1$ такой, что ограничение φ на ${}_RM$ является σ-полулинейным изоморфизмом.*

Простейшими подгруппами группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)]$ являются группа полулинейных автоморфизмов $\mathrm{SL}({}_RM)$ и группа сдвигов — отображений вида $\sigma_a : {}_RM \to {}_RM$, $\sigma_a(x) = x + a$, где $a \in {}_RM$ — фиксированный элемент. Если $\varphi \in \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)]$, $\varphi(0) = 0$, то $\varphi \in SL({}_RM)$. Для любого $\Psi \in \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)]$ построим автоморфизм $\varphi(x) = \Psi(x) - \Psi(0)$, $\varphi(0) = 0$. Следовательно, $\Psi(x) = \varphi(x) - \Psi(0)$. Таким образом, $\mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)] = \mathrm{SL}({}_RM) \oplus {}_RM$, здесь группа сдвигов отождествлена с ${}_RM$. Имеем точные последовательности

$$1 \longrightarrow {}_RM \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)] \xrightarrow{\Omega} \mathrm{SL}({}_RM) \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}({}_RM) \xrightarrow{\mathrm{inj}} \mathrm{SL}({}_RM) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(R) \longrightarrow 1,$$

где ρ ставит в соответствие каждому $x \in \mathrm{SL}({}_RM)$ соответствующий элемент из $\mathrm{Aut}[R]$. Если $\mathrm{AGL}({}_RM) = {}_RM \oplus \mathrm{GL}({}_RM)$, то имеем точную последовательность

$$1 \longrightarrow {}_RM \xrightarrow{\sigma} \mathrm{AGL}({}_RM) \xrightarrow{\Omega} \mathrm{GL}(R) \longrightarrow 1.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\rho^* : \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)] \to \mathrm{Aut}(R)$, $\rho_1^* = \rho \circ \Omega$, $\ker \rho_1^* = \mathrm{AGL}({}_RM)$. Тогда последовательность

$$1 \longrightarrow \mathrm{AGL}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)] \longrightarrow \mathrm{Aut}(R) \longrightarrow 1$$

точна, и мы получаем следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & RM & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{AGL}({}_RM) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{GL}({}_RM) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \\
1 & \longrightarrow & RM & \longrightarrow & \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)] & \longrightarrow & \mathrm{SL}({}_RM) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\
 & & 1 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(R) & \xrightarrow{id} & \mathrm{Aut}(R) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Если для ${}_RM$ верна основная теорема проективной геометрии, то можно также построить коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами (ср. [1]):

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & Z(R^*) & \xrightarrow{i} & \mathrm{GL}({}_RM) & \xrightarrow{j} & \mathrm{PGL}({}_RM) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \\
1 & \longrightarrow & R^* & \xrightarrow{i} & \mathrm{SLG}({}_RM) & \xrightarrow{j} & \mathrm{SP}({}_RM) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \rho_0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\
1 & \longrightarrow & I(R^*) & \xrightarrow{inj} & \mathrm{Aut}(R^*) & \xrightarrow{can} & \mathrm{Aut}(R^*)/Z(R^*) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

где $\mathrm{SLG}(X_RM)$ — группа обратимых полулинейных изоморфизмов, $\mathrm{SP}({}_RM)$ — группа коллинеаций, R^* — группа обратимых элементов R, $Z(R^*)$ и $I(R^*)$ — центр и группа внутренних автоморфизмов R^*, $\mathrm{PGL}({}_RM) = \mathrm{GL}({}_RM)/Z(R^*)$. С учетом двух последних диаграмм получаем еще одну коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & {}_R \oplus Z(R^*) & \xrightarrow{i} & \mathrm{AGL}({}_RM) & \xrightarrow{j} & \mathrm{GL}({}_RM) & \longrightarrow & !1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \\
1 & \longrightarrow & {}_RM \oplus R^* & \longrightarrow & \mathrm{Aut}[\mathrm{CL}({}_RM)] & \longrightarrow & \mathrm{SP}({}_RM) & \longrightarrow & !1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \rho_0 \circ \Omega} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho'} & & \\
1 & \longrightarrow & I(R^*) & \xrightarrow{inj} & \mathrm{Aut}(R^*) & \xrightarrow{can} & \mathrm{Aut}(R^*)/Z(R^*) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Интересная идея предложена в [29], где с другой точки зрения обобщена основная теорема аффинной геометрии в случае, когда R-модуль M можно представить как прямую сумму двух ненулевых подмодулей M_1 и M_2.

Имеется серия работ, изучающих изоморфизмы $\mathrm{CL}(G)$, когда G абелева группа, т.е. Z-модуль (см., например, [27]). В этом случае теорема верна и для свободных абелевых групп ранга 1 (см. [27]).

Можно рассмотреть и ситуацию, когда на ${}_RM$ введена дополнительная структура, в частности, лиево уможение. Тогда теорема верна для локально нильпотентных, свободных и свободных полинильпотентных алгебр Ли (см. [13]).

В [2] изучаются аффинная прямая над кольцом, гармонические четверки и отображения, сохраняющие гармоничность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artin E.* Geometric algebra. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ., 1957.
2. *Bach A. K.* Teilverhältnise in affine Räumen über modulen/ Preprint. — Univ. Minz., 1997.
3. *Benz W.* Vorlesungen uber Geometrie der Algebren. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1973.
4. *Berger M.* Geometrie. Vols. 1–2. — Paris: CEDIC, 1977.
5. *Brezuleanu A., Rădulescu D.-C.* About full injective lineations// J. Geom. — 1984. — *23*. — C. 85–60.
6. *Brezuleanu A., Rădulescu D.-C.* About the collineations on open subsets of R^m and $p^m(R)$/ Preprint № 71/1981. — Bucharest: INCREST, 1981.
7. *Brezuleanu A., Rădulescu D.-C.* Characterizing lineations on open subsets of projective spaces/ Preprint № 58/1982. — Bucharest: INCREST, 1982.
8. *Buekenhiat F.* Hanbook of incidence geometry. — Elsevier, North–Holland, 1995.
9. *Carter D. S., Vogt A.* Collinearity-preserving functions between Desarguesian planes// Mem. Amer. Math. Soc. — 1980. — *27*. № 235. — C. 1–46.
10. *Cohn P. M.* Some remarks on the invariant basis property// Topology. — 1966. — *5*. — C. 215–228.
11. *Cohn P. M.* Free rings and their relations. — London: Academic Press, 1977.
12. *Faure C.-A.* The fundamental theorem of affine geometry// J. Geom.
13. *Gelashvili T. M., Lashkhi A. A.* Coset lattices and the fundamental theorem of affine geometry for Lie algebras// Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 1999. — *119*. — C. 43–58.
14. *Greferath M.* Global-affine morphisms of projective lattice geometries// Results Math. — 1993. — *24*, № 1–2. — C. 76–83.
15. *Havlichek H.* A generalization of Brauer's theorem on linear mapping// Mitt. Math. Sem. Gieben. — 1994. — *217*. — C. 27–41.
16. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules// Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — *66*. — C. 464–491.
17. *Lambek K. J.* Rings and modules. — Massachusetts: Waltham; Toronto: Blaisdell Publ. Co., 1966.
18. *Lashkhi A. A.* The fundamental theorem of projective geometry for modules and Lie algebras// J. Sov. Math. — 1988. — *42*, № 5. — C. 1992–2008.
19. *Lashkhi A. A.* General geometric lattices and projective geometry of modules// J. Math. Sci. — 1995. — *74*, № 3. — C. 1044–1077.
20. *Leavitt W. G.* The module type of a ring// Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — *103*. — C. 113–130.
21. *Leissner W.* Affine Barbelian-benenm, I// J. Geom. — 1975. — *6*. — C. 31–75.
22. *Leissner W.* Affine Barbelian-benenm, II// J. Geom. — 1975. — *6*. — C. 105–129.
23. *Lelong-Ferrand*, Les fondements de la gGéometrie. — Press. Univ. de France, 1985.
24. *Lipman J.* Definition of affine geometry by a group of transformations// Can. Math. Bull. — 1961. — *4*. — C. 265–278.
25. *Perelli C. C.* Images of affine parallel structures by semi-collineations// Rend. Sem. Math. Brescia. — 1984. — *8*. — C. 97–109.
26. *Scherk P.* On the fundamental theorem of affine geometry// Can. Math. Bull. — 1962. — *5*. — C. 67–69.
27. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups/ Expos. Math. — Berlin: Walter de Gruyter, 1994. — *14*.
28. *Schmidt S. E.* Grundlegungen zu einer allgemeinen affinen Geometrie. — Basel: Birkhäuser-Verlag, 1995.
29. *Schmidt S. E., Weller S.* Fundamentalsatz für affine Räume über Moduln// Res. Math. — 1996. — *30*, № 1–2. — C. 151–159.

30. *Shepherdson J. C.* Inverses and zero divisors in matrix rings// Proc. London Math. Soc. (3). — 1951. — *1*. — С. 71–85.
31. *Zich Z.* Lineare abbildungen in reelen vektoräumen// Math. Phys. Sem. Ber. — 1983. — *30*. — С. 167–176.

А. А. Лашхи, Т. Г. Квирикашвили
Грузинский технический университет,
ул. Костава 77, Тбилиси 0175, Грузия
E-mail: lashkhi@gtu.edu.ge

Современная математика и ее приложения. Том 22 (2004). С. 139–142

О ГЕОМЕТРИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ОБЩИМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ

© 2004 г. **С. Г. КЕМКАДЗЕ, В. СЕСАДЗЕ**

Терминология и обозначения, которые будут использованы здесь, хорошо известны (их можно найти в [1–5]).

Обычно геометрия понимается как набор множеств, называемых подпространствами или плоскостями, которые удовлетворяют некоторым основным условиям. В [3] уже описаны общие геометрические, или D-геометрические решетки. Здесь будет дано аксиоматическое описание тех геометрий, которые ассоциированы с D-геометрическими решетками.

Рассмотрим пару $\langle A, {}^{-}\rangle$, состоящую из непустого множества A и отображения $X \mapsto \overline{X}$, $X, \overline{X} \in P(A)$, где $P(A)$ — множество всех подмножеств множества A, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

(i) из $X \subseteq \overline{X}$, $X \subseteq Y$ следует, что $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$; $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $X, Y, \overline{X}, \overline{Y} \in P(A)$;
(ii) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; $\{\overline{x}\} = \{x\}$ для любого $x \in A$.

Определим отношение частичного порядка на множестве следующим образом A:

для любых элементов x и y of A пишем $x \leqslant y$ в том и только том случае, если существует элемент $U \in P(A)$ такой, что $\overline{x \cup U} \subseteq \overline{y \cup U}$.

Легко проверить, что это отношение корректно определено. Следовательно, можно говорить о всех тех понятиях, которые связаны с этим отношением в решетках.

Пусть x — элемент A. Рассмотрим множество всех элементов, меньших, чем x. Очевидно, что оно есть частично упорядоченное множество. Более того, это множество — решетка.

Сформулируем теперь аксиоматики общих геометрий, т.е. геометрий, связанных с D-геометрическими решетками.

Определение 1. Общей геометрией называется пара $\langle A, {}^{-}\rangle$, состоящая из непустого множества A и отображения $X \mapsto \overline{X}$, $X, \overline{X} \in P(A)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

(i) из $X \subseteq \overline{X}$, $X \subseteq Y$ следует, что $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$;
(ii) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; $\{\overline{x}\} = \{x\}$ для любого $x \in A$;
(iii) если $x \in \overline{X \cup \{y\}}$ и $x \notin \overline{X}$, то существует элемент $y_1 \in A$, $y_1 \leqslant y$, такой, что интервал $[y_1, y]$ конечен и $y_1 \in \overline{X \cup \{x\}}$;
(iv) если $x \in \overline{X}$, то существует конечное подмножество $X_1 \subseteq X$ такое, что $x \in \overline{X}_1$.
(v) для любого элемента x множества A множество всех элементов, меньших x, есть бесконечная дистрибутивная решетка с условием максимальности.

Пара $\langle A, {}^{-}\rangle$, которая удовлетворяет только условию (i), называется пространством с замыканием. Подмножество X пространства с замыканием называется замкнутым, если $\overline{X} = X$. Из условия (i) следует, что $\overline{X}$ — минимальное замкнутое множество, содержащее X.

Лемма 1 (см. [2]). *Пусть $\langle A, {}^{-}\rangle$ — пространство с замыканием. Тогда множество*

$$\Re\langle A, {}^{-}\rangle = \{\overline{X} : X \subseteq A\}$$

всех замкнутых подмножеств множества $\langle A, {}^{-}\rangle$ есть полная решетка, если в качестве решеточного включения взять отношение порядка множеств и $\wedge Y = \cap Y$ для любого $Y \in \Re\langle A, {}^{-}\rangle$.

Обратно, если подмножество $\Re \subseteq P(A)$ замкнуто относительно произвольных пересечений, то отображение

$$X \mapsto \overline{X} = \bigcap (Y : Y \supseteq X,\ Y \in \Re)$$

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004

определяет пространство с замыканием $\langle A, {}^{-}\rangle$. Замкнутыми множествами этого пространства являются элементы $\Re$ и только они.

Доказательство. Пусть $Y \subseteq \Re\langle A, {}^{-}\rangle$ и $Z = \cap Y$. Тогда $Z \subseteq Y$, откуда $\overline{Z} \subseteq \overline{X} = X$. Следовательно, $\overline{Z} \subseteq \cap Y = Z$. Так как $Z \subseteq \overline{Z}$ всегда выполнено, то получаем, что $Z = \overline{Z}$. Остальные шаги доказательства леммы тривиальны. □

Следовательно, пространство с замыканием можно определить с помощью решетки $\Re$ замкнутых множеств. Равенство $\{\overline{x}\} = \{x\}$ вместе с условием (v) (определение 1) утверждает, что элементы этой геометрии можно отождествить с D-точками решетки $\Re$. А потому решетка $\Re$ определяет геометрию и даже с точностью до изоморфизма.

Замкнутое множество называется подпространством в геометрии. Множество $\overline{X}$ называется подпространством, натянутым на множество X. Тогда условие (ii) означает, что $\varnothing$ и одноточечные множества суть подпространства.

Пространство с замыканием, удовлетворяющее условию (iv), называется алгебраическим пространством.

Следующее предложение — одна из наиболее важных характеризаций алгебраических решеток.

Предложение 1 (см. [2]). *Решетка $\Re$ алгебраична в том и только том случае, если $\Re$ изоморфна решетке всех замкнутых множеств некоторого алгебраического пространства с замыканием.*

Доказательство. Пусть $\Re$ — алгебраическая решетка. Имеем изоморфизм $\Re \cong \Im(F)$, где F — верхняя полурешетка с нулевым элементом 0.

Положим $A = F$. Пусть $\overline{X} = (X]$ для любого $X \subseteq A$, где $(X]$ — главный идеал. Справедливость условий (i) и (iv) определения 1 доказана для A. Тогда $\Im(F)$ — семейство замкнутых множеств этого пространства и $\Re \cong \Im(F)$.

Обратно, пусть $\langle A, {}^{-}\rangle$ — алгебраическое пространство с замыканием и $\Re$ — решетка замкнутых множеств. Легко проверить, что множество $X \in \Re$ компактно в том и только том случае, если $X = \overline{X}_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$. Отсюда следует, что $\Re$ алгебраична. □

Теорема 1. *Пусть $\langle A, {}^{-}\rangle$ — общая геометрия. Тогда решетка замкнутых множеств $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ D-геометрична.*

Обратно, пусть $\Re$ — D-геометрическая решетка, A — множество всех D-точек решетки $\Re$. Для каждого подмножества $X \subseteq A$ определим $\overline{X}$ как множество D-точек, натянутых на множество X. Тогда $\langle A, {}^{-}\rangle$ — общая геометрия и $\Re \cong \Re\langle A, {}^{-}\rangle$.

Доказательство. Пусть $\langle A, {}^{-}\rangle$ — общая геометрия. Тогда в соответствии с леммой 1, решетка всех замкнутых множеств $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ алгебраична. Так как множество X компактно в том и только том случае, если $X = \overline{X}_1$ для любого подмножества $X_1 \subseteq X$, то компактными элементами $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ будут конечные объединения D-точек и только они.

Покажем теперь, что решетка $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ D-полумодулярна.

Пусть $X, Y \in \Re\langle A, {}^{-}\rangle$, $Y = \overline{X \cup \{x\}}$ и $x \notin X = \overline{X}$. Покажем, что $X \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow\!\!\!\!<} Y$. Это эквивалентно следующим двум условиям (см. [3]):

1) интервал $[X, Y]$ есть бесконечная дистрибутивная решетка с условием максимальности;
2) для каждого элемента Z решетки $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ с $X \subset Z \subseteq Y$ один и только один из интервалов $[X, Z]$ и $[Z, Y]$ есть решетка без кручения.

Уже показано, что $\{x\}$ есть D-точка в решетке замкнутых множеств $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ и что $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ алгебраична. Тогда интервал $[X, \overline{X \cup \{x\}}]$, $x \notin \overline{X}$, изоморфен D-точке.

Пусть $Z \in \Re$, $X \subset Z \subseteq Y$. Тогда существует элемент $z \in Z \setminus X$, т.е. $z \in Z \subseteq Y = \overline{X \cup \{x\}}$ и $z \in \overline{X}$. Тогда в силу (iii) существует элемент $x_1 \leqslant x$ такой, что $[x_1, x]$ — конечный интервал и $x_1 \in \overline{X \cup \{z\}} \subseteq Z$. Поэтому $x_1 \in Z \subseteq \overline{X \cup \{x\}}$. Последнее включение означает, что $[Z, Y]$ — конечный интервал.

Пусть теперь $U \in \Re$. Тогда

$$y \vee U = \overline{Y \cup U} = \overline{X \cup U \cup \{x\}}, \quad X \vee U = \overline{X \cup U}.$$

Тогда либо $x \in \overline{X \cup U}$, а значит $X \vee U = Y \vee U$, либо $x \notin X \cup U$ и $X \vee U \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} Y \vee U$. Это завершает доказательство того, что $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ — D-полумодулярная решетка.

Обратно, пусть $\Re$ — D-геометрическая решетка и A — множество всех D-точек решетки $\Re$. Определим $\overline{X}$ как множество D-точек, натянутых на множество X. Тогда, очевидно, $\langle A, {}^{-}\rangle$ — пространство с замыканием. Справедливость условий (ii) и (iv) (определение 1) сразу следует из определения $\overline{X}$. Проверим справедливость условия (iii) определения 1.

Пусть $x \in \overline{X \cup \{y\}}$, $x \notin \overline{X}$. В силу D-полумодулярности $\Re$ имеем

$$\overline{X \cup \{y\}} = \overline{X} \cup \{y\} \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} X.$$

Следовательно, из

$$X \subset \overline{X \cup \{x\}} \subseteq \overline{X \cup \{y\}}$$

вытекает, что $[\overline{X \cup \{x\}}, \overline{x \cup \{y\}}\,]$ — конечный интервал. Но тогда существует такой элемент $y_1 \leqslant y$, что $[y_1, y]$ — конечный интервал и $y_1 \in \overline{X \cup \{x\}}$.

Теперь осталось показать, что $\Re \cong \Re\langle A, {}^{-}\rangle$. Рассмотрим отображение $\varphi : X \mapsto \vee X$, $X \subseteq A$, $X \in \Re\langle A, {}^{-}\rangle$. Ясно, что φ отображает $\Re\langle A, {}^{-}\rangle$ в $\Re$. Каждый элемент $\Re$ есть конечное объединение D-точек. Поэтому включение $X \subseteq Y$ эквивалентно неравенству $\vee X \leqslant \vee Y$. Следовательно, φ — взаимно однозначная сюръекция и оба φ и φ^{-1} — монотонные отображения. Это означает, что φ — изоморфизм. □

Предложение 2. *Пусть $\Re$ — модулярная D-геометрическая решетка и $\langle A, {}^{-}\rangle$ — общая геометрия, ассоциированная с $\Re$. Тогда подмножество $X \subseteq A$ является подпространством пространства $\langle A, {}^{-}\rangle$ в том и только том случае, если для любых двух элементов p и q множества X и элемента r из A из $r \leqslant p \vee q$ следует, что $r \in X$.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq A$ и пусть для любых элементов $p, q \in X$ и $r \in A$ из $r \leqslant p \vee q$ следует $r \in X$. С помощью индукции по n докажем следующее:

$$\text{если } r \in A,\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in X, \text{ и } r \leqslant p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n, \text{ то } r \in X. \tag{1}$$

При $n = 1$ справедливость (1) очевидным образом следует из условий предложения. Пусть (1) выполнено при $n - 1$.

Пусть теперь

$$r \in A,\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in X \text{ и } r \leqslant p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n.$$

Можно считать, что $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — независимое множество; в противном случае $r \leqslant p_{i_1} \vee \cdots \vee p_{i_k}$ для некоторого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, а значит, согласно индуктивному предположению $r \in X$. Положим $\alpha = p_2 \vee \cdots \vee p_n$. Тогда $r \vee \alpha \leqslant p_1 \vee \alpha$ и

$$h[r \vee \alpha] = h[p_1 \vee \alpha] = n,$$

откуда $r \vee \alpha = p_1 \vee \alpha$.

Если $r \leqslant \alpha$, то согласно предположению $r \in X$. Значит, можно считать, что $r \nleqslant \alpha$. Тогда $r \wedge \alpha = p_1 \wedge \alpha = 0$. Положим $t = (p_1 \vee r) \wedge \alpha$. Тогда t — D-точка и в силу модулярности $\Re$ и включения $p_1 \leqslant p \vee r$ имеем

$$p_1 \vee t = p_1 \vee ((p_1 \vee r) \wedge \alpha) = (p_1 \vee \alpha) \wedge (p_1 \vee r) = p_1 \vee r.$$

Аналогично получаем, что $r \vee t = p_1 \vee r$.

Очевидно, что $p_1 \wedge t = r \wedge t = 0$, а значит,

$$h[t] = h[p_1 \vee r] + h[0] - h[p_1] = 1.$$

Следовательно, t — D-точка в $\Re$. Кроме того, по предположению индукции, $t \in X$. Так как $t, p_1 \in X$ и $r \leqslant t \vee p_1$, то $r \in X$. Это завершает доказательство достаточности в предложении. Необходимость условия (1) тривиальна. □

Определение 2. Пусть $\langle A, {}^{-}\rangle$ и пусть $\langle B, {}^{-}\rangle$ — общие геометрии. Скажем, что отображение $\varphi : A \mapsto B$ является изоморфизмом общих геометрий, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\varphi : A \to B$ — биекция;

(ii) если $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ в A, то $\varphi(\alpha_1) \leqslant \varphi(\alpha_2)$ в B;
(iii) $\varphi(\overline{X}) = \widetilde{\varphi(X)}$ для каждого $X \subseteq A$.

Теорема 2. *Две общие геометрии изоморфны в том и только том случае, если ассоциированные с ними D-геометрические решетки изоморфны.*

Доказательство. Необходимость в теореме тривиальна.

Пусть $\Re$ и $\Im$ — две D-геометрические решетки и пусть $\varphi : \Re \to \Im$ — изоморфизм решеток. Пусть $\langle A, {}^{-} \rangle$ и пусть $\langle B, {}^{\sim} \rangle$ — ассоциированные с решетками $\Re$ и $\Im$ соответственно общие геометрии. Определим изоморфизм общих геометрий с помощью φ.

Согласно теореме 1, A (соответственно, B) — множество всех D-точек решетки $\Re$ (соответственно, $\Im$). Ясно, что образ и прообраз D-точки при изоморфизме также являются D-точками в D-геометрических решетках. Следовательно, $\varphi(A) = B$, а так как $\varphi : \Re \to \Im$ — изоморфизм решеток, то $\varphi : A \to B$ — биекция.

Теперь нужно доказать, что выполнены условия определения 2.

Условие (ii) справедливо, поскольку φ — также монотонное отображение.

Согласно теореме 1, $\overline{X}$ определяется как множество всех D-точек, натянутых на множество X. Это означает, что для каждого элемента $x \in \overline{X}$ существует конечное число элементов $p_1, \ldots, p_n \in X$ таких, что $x \leqslant p_1 \vee \cdots \vee p_n$ [3]. Так как φ — изоморфизм решеток, то справедливо следующее утверждение.

Для каждого элемента $\varphi(x) \in \varphi(\overline{X})$ существует конечное число элементов $\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n) \in \varphi(X)$ с $\varphi(x) \leqslant \varphi(p_1) \vee \cdots \vee \varphi(p_n)$, откуда получаем, что $\varphi(\overline{X})$ натянуто на $\varphi(X)$. С другой стороны, $\varphi(X) \subseteq B$, а потому $\varphi(\overline{X}) = \widetilde{\varphi(X)}$. Это доказывает, что выполнено условие (iii) определения 2. □

Все, что сказано выше, является геометрической интерпретацией D-геометрических решеток. Представляется достаточно легким то, что D-геометрическая решетка есть естественное обобщение геометрических решеток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dubreil-Jacotin M. L., Lesieur L., Croisot R.* Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. — Paris: Gauthier-Villars, 1953.
2. *Grätzer G.* General lattice theory/ Pure Appl. Math. New York–London: Academic Press, 1978. — *75.*
3. *Lashkhi A. A.* General geometric lattices and projective geometry of modules// J. Math. Sci. — 1995. — *74*, № 3. — С. 1044–1077.
4. *Maeda F., Maeda S.* Theory of symmetric lattices/ Grund. math. Wiss. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1970. — *173.*
5. *von Neumann J.* Continuous geometry/ Princeton Math. Ser. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1960. — *25.*

С. Г. Кемкадзе, В. Сесадзе
Грузинский технический университет,
ул. Костава 77, Тбилиси 0175, Грузия