ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 30

АЛГЕБРА

Тбилиси
2005

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 30

АЛГЕБРА

Посвящается семидесятилетнему юбилею профессора Виктора Николаевича Латышева
Часть 3

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика и ее приложения. Том 30 (2005). С. 3–30

УДК 512.717

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ И ПОЛУДУАЛИЗИРУЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

© 2005 г. **А. А. ГЕРКО**

Аннотация. Для конечно порожденных модулей и комплексов с конечно порожденной гомологией над локальными кольцами рассматриваются гомологические инварианты, сходные по свойствам с проективной размерностью.

Во втором разделе вводится понятие *полудуализирующего* комплекса, обобщающее известные понятия дуализирующего комплекса и *удобного* модуля. В разделе 2.1 изучаются базовые свойства таких комплексов и определенной относительно таких комплексов гомологической размерности. В разделе 2.2 изучается структура множества таких комплексов, которая тесно связана с гипотезой Аврамова—Фоксби о транзитивности G-размерности. В частности, показано, что для пары полудуализирующих комплексов X_1 и X_2, таких что $G_{X_2}\dim X_1<\infty$, имеем $X_2\simeq X_1\otimes^L_R\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X_1,X_2)$. Ограничиваясь случаем артиновых колец, мы получаем количественные результаты для артиновых колец, обладающих конфигурацией полудуализирующих модулей специального вида. Для колец с $\mathfrak{m}^3=0$ условие редуцируется к условию существования одного нетривиального полудуализирующего модуля, и в этом случае мы также получаем несколько результатов о структуре таких колец.

В третьем разделе строится расширение известного класса модулей конечной CI-размерности, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, в частности хорошим поведением в коротких точных последовательностях.

В четвертом разделе рассматривается размерность, характеризующая кольца Коэна—Маколея в том же смысле, в каком класс модулей конечной проективной размерности характеризует регулярные кольца, а CI-размерности — полные пересечения.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Гомологические методы в коммутативной алгебре являются одним из самых мощных средств в арсенале исследователя. Важная теорема о локализуемости свойства регулярности локального кольца является примером утверждения, которое достаточно легко доказывается гомологическими методами, при том, что доказательство, использующее только классические методы, не известно.

Основным моментом в доказательстве этой теоремы является утверждение о том, что проективная размерность характеризует регулярные кольца в следующем смысле: любой модуль над регулярным кольцом имеет конечную проективную размерность и, обратно, из конечности проективной размерности поля вычетов следует регулярность кольца.

ISSN 1512–1712

Общая идея М. Ауслендера, высказанная им в начале 1960-х гг., состоит в том, что модули конечной проективной размерности над кольцом (не обязательно регулярным) во многом ведут себя так же, как модули над регулярными кольцами.

Примером свойства, которое в рамках этого подхода было обобщено с модулей над регулярными кольцами на модули конечной проективной размерности (см. [34]), является следующее утверждение: если последовательность элементов кольца R регулярна относительно модуля M, то она регулярна относительно R.

Основной мотивацией для исследования гомологических размерностей, характеризующих другие типы колец, важные для алгебраической геометрии, в частности локально полные пересечения, кольца Горенштейна и кольца Коэна—Маколея, является поиск разумного описания модулей, свойства которых были бы аналогичны свойствам модулей над кольцами соответствующих типов.

Подобные классы модулей неоднократно возникали в разных задачах коммутативной алгебры.

Для колец Горенштейна соответствующий класс рассматривался М. Ауслендером и М. Бриджером [13] и задавался следующим образом. Положим $\operatorname{G-dim} M = 0$, если естественное отображение $M \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(M, R), R)$ есть изоморфизм и $\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0 = \operatorname{Ext}^i_R(M^*, R)$ при $i > 0$. Точную нижнюю грань длин резольвент модуля M, составленных из модулей P с $\operatorname{G-dim} P = 0$, будем обозначать через $\operatorname{G-dim} M$.

Для полных пересечений соответствующий класс модулей, названных модулями конечной виртуальной проективной размерности (vpd), возник в работе Л. Л. Аврамова [15] при изучении свойств чисел Бетти модулей бесконечной проективной размерности. Размерность $\operatorname{vpd}_R M$ полагается конечной, если существует сюръективный гомоморфизм колец $S \to \hat{R}$, где $\hat{R}$ — пополнение R в $\mathfrak{m}$-адической топологии, такой что ядро гомоморфизма порождено регулярной последовательностью и $\operatorname{pd}_S(M \otimes_R \hat{R}) < \infty$. Для (возможно) более широкого класса модулей конечной CI-размерности (см. определение 3.2), рассматривавшегося в [18] и также характеризующего полные пересечения, были доказаны некоторые утверждения, справедливость которых для виртуальной проективной размерности неизвестна, в частности хорошее поведение при локализации. К тому же модули конечной CI-размерности в некоторых задачах действительно демонстрируют поведение, сходное с поведением модулей над полными пересечениями. Наиболее важным примером являются асимптотические свойства свободных резольвент, являющиеся главным предметом работы [18]. Упомянем также работы [30, 12, 20], где с модулей над полными пересечениями на модули конечной CI-размерности переносится формула глубины, и работу [12], где обобщается критерий свободы Ауслендера.

Перечисленные размерности связаны цепочкой неравенств

$$\operatorname{pd}_R M \leqslant \operatorname{CI-dim}_R M \leqslant \operatorname{G-dim}_R M,$$

частным случаем которой при $M = k$ является следующее утверждение для кольца R:

$$R \text{ регулярно} \implies R \text{ является полным пересечением} \implies R \text{ горенштейново}.$$

Все необходимые предварительные сведения из коммутативной и гомологической алгебры собраны в разделе 1.

Будем говорить, что задана *обобщенная гомологическая размерность*, характеризующая класс колец Ω, если для любого кольца R заданы класс модулей H_R и отображение $\operatorname{H-dim}_R$ из H_R в $\mathbb{Z}$. Перечислим некоторые из ограничений, которые разумно наложить для получения содержательного понятия.

I. $k = R/\mathfrak{m} \in \mathrm{H}_R \iff$ для любого R-модуля $M \in \mathrm{H}_R \iff R \in \Omega$.

II. $M \in \mathrm{H}_R \implies \operatorname{H-dim}_R M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$.

III. Пусть x — R- и M-регулярный элемент. Тогда $M \in \mathrm{H}_R$ в том и только в том случае, если $M/xM \in \mathrm{H}_{R/xR}$, и при выполнении этих двух условий $\operatorname{H-dim}_R M = \operatorname{H-dim}_{R/xR} M/xM$.

IV. $M \in \mathrm{H}_R \implies M_\mathfrak{p} \in \mathrm{H}_{R\mathfrak{p}}$ и $\operatorname{H-dim}_R M \geqslant \operatorname{H-dim}_{R\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$.

V. Если в короткой точной последовательности $0 \to M \to N \to K \to 0$ два из трех модулей принадлежат H_R, то и третий тоже обладает этим свойством; если эта точная последовательность расщепляется, то из $N \in \mathrm{H}_R$ следует, что $M \in \mathrm{H}_R$ и $K \in \mathrm{H}_R$.

Заметим, что проективная размерность и G-размерность удовлетворяют всем этим свойствам, для виртуальной проективной размерности доказаны свойства I и II, а для CI-размерности — свойства I—IV.

Основным объектом изучения для нас является G-размерность. Хотя это понятие было введено почти 40 лет назад, интерес к нему особенно возрос в последнее десятилетие, когда этой теме было посвящено большое количество работ (см., например, [21]). Важный круг нерешенных проблем, связанных с G-размерностью, составляют вопросы о ее поведении при заменах колец, в частности так называемая гипотеза о транзитивности G-размерности.

Гипотеза 0.1 ([17])**.** Если $\phi\colon S \to R$ — конечный локальный гомоморфизм конечной G-размерности (т. е. $\operatorname{G-dim}_S R < \infty$), то для любого R-модуля M, такого что $\operatorname{G-dim}_R M < \infty$, имеем $\operatorname{G-dim}_S M < \infty$.

Близкий вопрос изучался в [9]. Оказывается, для гомоморфизмов ϕ конечной G-размерности специального вида, а именно сюръективных гомоморфизмов, удовлетворяющих условию $\operatorname{grade}(S/\operatorname{Ker}\phi) = \operatorname{G-dim}_S(S/\operatorname{Ker}\phi)$, над кольцом R естественным образом определяется так называемый «удобный» модуль (также независимо изучавшийся Х.-Б. Фоксби [23]), и для вводимого относительно таких модулей аналога G-размерности выполнен результат типа замены колец (см. теорему 1.54).

Тривиальными примерами «удобных» модулей являются свободный модуль ранга 1 и дуализирующий модуль, когда он существует.

Для G_K-размерности относительно «удобного» модуля K выполнены аналоги свойств I—V, причем аналогом свойства I является утверждение о равносильности конечности G_K-размерности поля вычетов и условия, что модуль K дуализирующий.

В разделе 2 рассматриваются комплексы, являющиеся одновременно обобщением дуализирующих комплексов и «удобных» (см. [9]) модулей. Эти комплексы были независимо введены автором в [5] под названием «удобных» и Л. В. Кристенсеном в [22] под названием «полудуализирующих». Поскольку последнее название представляется более удачным и уже устоялось в литературе, мы будем использовать именно его.

Комплекс называется полудуализирующим (см. определение 2.1), если его гомология конечно порождена и естественный морфизм $R \to \mathbf{R}\operatorname{Hom}(X, X)$ является изоморфизмом в производной категории. Такие комплексы возникают естественным образом при изучении локальных гомоморфизмов колец $\phi\colon S \to R$ конечной G-размерности, в такой ситуации R-комплекс $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, S)$ является полудуализирующим. Тривиальными примерами полудуализирующих комплексов являются свободный модуль ранга 1 и дуализирующий комплекс, когда он существует. Если полудуализирующий комплекс имеет только одну ненулевую гомологию, то с точностью до сдвига этот комплекс изоморфен удобному модулю как объект соответствующей производной категории.

В разделе 2.1 получены следующие результаты. Построена теория G-размерности по отношению к полудуализирующему комплексу, в которой выполнены аналоги свойств I—V. Для построенной размерности выполнен результат о замене колец, аналогичный [9, предложение 5] (теорема 2.10). Получена переформулировка гипотезы Аврамова—Фоксби в терминах полудуализирующих комплексов.

Интересным является вопрос о возможности получения любого полудуализирующего комплекса при помощи описанного выше индуцирования. Для дуализирующих комплексов соответствующий вопрос составляет содержание гипотезы Шарпа.

Гипотеза 0.2 ([36])**.** Если R — локальное кольцо, X — дуализирующий комплекс, то существуют кольцо S и сюръективный гомоморфизм $\phi\colon S \to R$, такие что $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, S) \simeq X$.

Эта гипотеза была доказана Т. Кавасаки [31]. Здесь показано, что аналогичное утверждение также верно для удобных модулей (следствие 4.8), т. е. для полудуализирующих комплексов с единственной ненулевой гомологией.

В разделе 2.2 исследуется вопрос о существовании нетривиальных полудуализирующих комплексов (отличных от свободного модуля ранга 1 и дуализирующего комплекса). Для модулей соответствующий вопрос был поставлен Е. С. Голодом [10]. Первый нетривиальный пример удобного

модуля был построен Х.-Б. Фоксби [24]. Легко показать, что тип Коэна—Маколея (см. определение 1.31) удобного модуля должен быть делителем типа Коэна—Маколея кольца. В настоящей работе для любого наперед заданного типа m строится пример кольца, над которым для любого делителя m существует соответствующий полудуализирующий модуль (пример 2.21). Для этого примера структура множества построенных полудуализирующих модулей идентична структуре множества всех подмножеств конечного множества мощности, равной количеству простых делителей m.

Гипотетически и в общем случае должна иметься похожая структура. Пусть K_I — удобный модуль, соответствующий некоторому подмножеству $I \subset \{1, \dots, n\}$. Для примера 2.21 верно следующее утверждение: $I \subset J$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{G}_{K_J}\text{-}\dim K_I < \infty$. Для последнего свойства имеется аналог и в общем случае, что позволяет ввести на множестве полудуализирующих комплексов естественное бинарное отношение. Отношение является симметричным и рефлексивным, вопрос о транзитивности открыт и непосредственно связан с вопросом о транзитивности G-размерности, сформулированным выше. Тем не менее поиск аналогов соотношений, выполненных для описанного примера, позволяет получить несколько важных следствий для общей ситуации. Наиболее интересным является аналог соотношения $I \subset J \implies K_J \simeq K_I \otimes K_{J \setminus I}$, который в общем случае приводит к построению по паре полудуализирующих комплексов X_1 и X_2, таких что $\mathrm{G}_{X_2}\text{-}\dim X_1 < \infty$, изоморфизма $X_2 \simeq X_1 \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X_1, X_2)$ в производной категории.

Далее рассматривается задача классификации полудуализирующих комплексов над кольцами Коэна—Маколея. Для таких колец любой полудуализирующий комплекс является удобным модулем в смысле соответствующей производной категории (предложение 2.32). Классификация удобных модулей над полным кольцом сводится к случаю кольца глубины 0 (предложение 2.33), в частности для колец Коэна—Маколея — к случаю артиновых колец. Для артиновых колец рассматриваются базисные системы полудуализирующих модулей, аналогичные набору $K_{\{1\}}, \dots, K_{\{n\}}$ в примере 2.21. Длина такой базисной системы имеет естественное ограничение в терминах минимальной степени максимального идеала, обращающейся в 0 (предложение 2.39), при достижении которого ряд Бетти кольца становится рациональным. Это ограничение также является строгим и выполнено как равенство для примера 2.21. Далее рассматриваются кольца, для которых это ограничение выполнено как равенство (определение 2.43). Численные инварианты (ряды Бетти и Басса поля вычетов) таких колец оказываются идентичными соответствующим численным инвариантам кольца из примера 2.21. Для случая колец с $\mathfrak{m}^3 = 0$ также имеет место козюлевость (предложение 2.57) и равенство длин кольца и нетривиальных полудуализирующих модулей (предложение 2.52).

В разделе 3 рассматриваются альтернативные, через совокупность модулей нулевой размерности, подходы к определению размерности, характеризующей полные пересечения. В результате получается расширение класса модулей конечной CI-размерности, удовлетворяющее свойству V. Кроме того, приведено более простое, чем в [1], доказательство теоремы о том, что локализация полного пересечения есть снова полное пересечение.

В разделе 4 рассматривается размерность, характеризующая кольца Коэна—Маколея, для которой выполнены свойства I—IV, а также верно следующее утверждение: класс модулей конечной CM-размерности включает в себя класс модулей конечной G_K-размерности для любого удобного модуля K. В доказательстве используется новая характеризация удобных модулей при помощи G-горенштейново связанных идеалов.

Автор выражает благодарность профессору Е. С. Голоду за внимание к работе, проявленное на всех стадиях ее подготовки, и многочисленные ценные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 02-01-00468.

1. Предварительные сведения

Все кольца предполагаются коммутативными, нетеровыми и локальными, а модули — конечно порожденными. Максимальный идеал кольца R обозначается через $\mathfrak{m}$, а поле вычетов — через $k \cong R/\mathfrak{m}$.

1.1. Основные классы локальных колец.

Определение 1.1. Элемент $x \in \mathfrak{m}$ называется *регулярным относительно модуля* M или M*-регулярным*, если для любого ненулевого $a \in M$ имеем $xa \neq 0$.

Определение 1.2. Последовательность $(\boldsymbol{x}) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{m}$ называется M*-регулярной*, если для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ элемент x_i регулярен относительно модуля $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$.

Определение 1.3. Последовательность $(\boldsymbol{x}) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{m}$ называется *максимальной* M*-регулярной*, если в $\mathfrak{m}R$ нет $M/(x_1, \dots, x_n)M$-регулярных элементов.

Определение 1.4. Длина максимальной M-регулярной последовательности определена однозначно и называется *глубиной* M (обозначение $\operatorname{depth} M$).

Определение 1.5. Кольцо R называется *регулярным*, если его максимальный идеал порожден регулярной последовательностью.

Определение 1.6. Кольцо R называется *локально полным пересечением*, если его пополнение $\hat{R}$ изоморфно фактор-кольцу регулярного кольца по регулярной последовательности.

Определение 1.7. Кольцо R называется *кольцом Коэна—Маколея*, если его глубина $\operatorname{depth} R$ равна размерности Крулля $\operatorname{Krull\,dim} R$.

Определение 1.8. Кольцо R называется *кольцом Гореншетйна*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) R — кольцо Коэна—Маколея и фактор-кольцо R по максимальной регулярной последовательности является инъективным модулем над собой;
2) инъективная размерность R как модуля над собой конечна.

Предложение 1.9. *Имеют место следующие импликации*:

кольцо R *регулярно* $\Longrightarrow$ R *является локально полным пересечением* $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ R *является кольцом Гореншетйна* $\Longrightarrow$ R *является кольцом Коэна—Маколея.*

1.2. Коммутативная алгебра комплексов.

Определение 1.10. *Комплекс* X есть набор модулей X_i и гомоморфизмов $\partial_i^X \colon X_i \to X_{i-1}$, таких что $\partial_i^X \partial_{i+1}^X = 0$. Будем называть i-й *гомологией* комплекса X модуль $\mathrm{H}_i(X) = \ker \partial_i^X / \operatorname{im} \partial_{i+1}^X$.

Гомологии всех рассматриваемых комплексов предполагаются конечно порожденными. Мы отождествляем M с комплексом X, у которого $X_i = 0$ для $i \neq 0$, а $X_0 \simeq M$.

Следующие числа отражают положение ненулевых гомологий комплекса X.

Определение 1.11. *Верхняя грань*, *нижняя грань* и *амплитуда* комплекса X определяются соответственно равенствами

$$\sup(X) = \sup\{i \mid \mathrm{H}_i(X) \neq 0\},$$
$$\inf(X) = \inf\{i \mid \mathrm{H}_i(X) \neq 0\},$$
$$\operatorname{amp}(X) = \sup(X) - \inf(X).$$

Определение 1.12. Комплекс называется *ограниченным* (*ограниченным сверху, ограниченным снизу*), если $\operatorname{amp}(X) < \infty$ (соответственно $\sup(X) < \infty$, $\inf(X) > -\infty$).

Определение 1.13. Комплекс называется *ацикличным*, если $\mathrm{H}_i(X) = 0$ для любого i.

Замечание 1.14. Для ацикличного комплекса имеем

$$\sup(X) = -\infty, \quad \inf(X) = \infty, \quad \operatorname{amp}(X) = -\infty.$$

Определение 1.15. *Морфизм комплексов* $\alpha \colon X \to Y$ есть набор отображений $\alpha_i \colon X_i \to Y_i$, таких что $\partial_i^Y \alpha_i - \alpha_{i-1} \partial_i^X = 0$. Морфизм комплексов α индуцирует отображение в гомологиях $\mathrm{H}_i(\alpha) \colon \mathrm{H}_i(X) \to \mathrm{H}_i(Y)$.

Определение 1.16. Морфизм комплексов $\alpha\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если α_i — изоморфизм для любого i. Соответствующие комплексы X и Y называются *изоморфными* (обозначение $X \cong Y$).

Определение 1.17. Морфизм комплексов $\alpha\colon X \to Y$ называется *квазиизоморфизмом*, если $\mathrm{H}_i(\alpha)$ — изоморфизм для любого i. Соответствующие комплексы X и Y называются квазиизоморфными (обозначение $X \simeq Y$).

Определение 1.18. *Сдвиг* комплекса X (обозначение ΣX) есть комплекс с $(\Sigma X)_i = X_{i-1}$ и $\partial^{\Sigma X}_{i+1} = -\partial^X_i$.

Замечание 1.19. Отображение Σ^X, посылающее $f \in X_i$ в $f \in (\Sigma X)_{i+1}$, есть изоморфизм комплексов.

Определение 1.20. *Конус* морфизма комплексов $\phi\colon X \to Y$ есть комплекс $\mathrm{cone}(\phi)$, у которого

$$\mathrm{cone}(\phi)_i = Y_i \oplus (\Sigma X)_i, \quad \partial_i^{\mathrm{cone}(\phi)} = \begin{pmatrix} \partial_i^Y & (\Sigma^Y)_i^{(-1)}\Sigma(\phi)_i \\ 0 & \partial_i^{\Sigma X} \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.21. *Следующие два условия на морфизм $\phi\colon X \to Y$ равносильны*:
1) ϕ *— квазиизоморфизм*;
2) $\mathrm{cone}(\phi)$ *ацикличен.*

Определение 1.22. Для комплексов X и Y определим комплекс $U = X \otimes Y$ следующим образом:

$$U_n = \sum_i X_i \otimes Y_{n-i}, \quad \partial^U_n(x_i \otimes y_{n-i}) = \partial^X_i(x_i) \otimes y_{n-i} + (-1)^i x_i \otimes \partial^Y_{n-i}(y_{n-i}).$$

Определение 1.23. Для комплексов X и Y определим комплекс $V = \mathrm{Hom}(X, Y)$ следующим образом:

$$V_n = \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(X_i, Y_j), \quad \partial^V_n(f)_i = \partial^Y_i f_i - (-1)^n f_{i-1}\partial^X_i.$$

Циклам в комплексе $\mathrm{Hom}(X, Y)$ отвечают морфизмы из X в Y в смысле определения 1.15.

Мы работаем с производными категориями $\mathcal{D}^f_b(R)$ ($\mathcal{D}^f_+(R)$, $\mathcal{D}^f_-(R)$), т. е. с категориями ограниченных (ограниченных снизу, ограниченных сверху) комплексов с конечно порожденными модулями гомологий, локализованными относительно класса квазиизоморфизмов (см. [28, 3]).

Через $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\cdot,\cdot)$ ($\otimes^L_R$) мы обозначаем правый (левый) производный функтор от функтора гомоморфизмов (тензорного произведения) комплексов. Согласно [37, 16] условия ограниченности на аргументы не являются необходимыми.

Определение 1.24. Для комплексов X и Y положим

$$\mathrm{Ext}^i_R(X, Y) = \mathrm{H}_{-i}(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, Y))), \quad \mathrm{Tor}^R_i(X, Y) = \mathrm{H}_i(X \otimes^L_R Y).$$

Определение 1.25. Для комплекса $X \in \mathcal{D}^f_+(R)$ определим числа Бетти X следующим образом:

$$\beta^R_i(X) = \dim_k(\mathrm{Tor}^R_i(X, k)) = \dim_k(\mathrm{Ext}^i_R(X, k)).$$

Соответствующая производящая функция имеет вид

$$\mathrm{P}^R_X(t) = \sum_i \beta^R_i(X)t^i.$$

Замечание 1.26. $\beta^R_i(X) = \operatorname{rank} P_i(X)$, где $P(X)$ — минимальная проективная резольвента X.

Определение 1.27. Для комплекса $X \in \mathcal{D}^f_-(R)$ определим числа Басса X следующим образом:

$$\mu^i_R(X) = \dim_k(\mathrm{Ext}^R_i(k, X)).$$

Соответствующая производящая функция имеет вид

$$\mathrm{I}^X_R(t) = \sum_i \mu^i_R(X)t^i.$$

Замечание 1.28. Число $\mu^i_R(X)$ равно количеству прямых слагаемых вида $\mathrm{E}(k)$ (инъективная оболочка поля вычетов) в i-й компоненте минимальной инъективной резольвенты X.

Определение 1.29. Для комплекса $X \in \mathcal{D}^f_-(R)$ определим глубину X по формуле

$$\operatorname{depth} X = \inf\{n \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, X) \neq 0\}.$$

Замечание 1.30. Для модулей определения глубины 1.4 и 1.29 равносильны.

Определение 1.31. Для комплекса $X \in \mathcal{D}^f_-(R)$ определим *тип Коэна—Маколея* как

$$\dim_k(\operatorname{Ext}^{\operatorname{depth} X}_R(k, X)).$$

Нам потребуются следующие свойства, обеспечивающие сохранение свойств конечнопорожденности гомологий под действием определенных функторов (см. [16]).

Предложение 1.32. *Если $X \in \mathcal{D}^f_+(R)$ и $Y \in \mathcal{D}^f_+(R)$, то $X \otimes^L_R Y \in \mathcal{D}^f_+(R)$.*

Предложение 1.33. *Если $X \in \mathcal{D}^f_+(R)$ и $Y \in \mathcal{D}^f_-(R)$, то $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, Y) \in \mathcal{D}^f_-(R)$.*

Поведение функторов $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\cdot,\cdot)$ и $\otimes^L_R$ при локализации описывается следующим образом.

Предложение 1.34. *Если $X \in \mathcal{D}^f(R)$ и $Y \in \mathcal{D}^f(R)$, то*

$$(X \otimes^L_R Y)_{\mathfrak{p}} \simeq (X_{\mathfrak{p}} \otimes^L_{R_{\mathfrak{p}}} Y_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}.$$

Предложение 1.35. *Если $X \in \mathcal{D}^f_+(R)$ и $Y \in \mathcal{D}^f_-(R)$, то*

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, Y)_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}}).$$

Заметим, что условия на X и Y являются существенными, поскольку для модулей, не являющихся конечно порожденными, вообще говоря, $\operatorname{Hom}_R(M, N)_{\mathfrak{p}} \ncong \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$.

Определение 1.36. Для $X \in \mathcal{D}^f_b(R)$ определим проективную размерность как

$$\operatorname{pd}_R X = \inf\{\sup(Z) \mid Z \simeq X,\ Z_i = 0 \text{ для } |i| \gg 0,\ Z_i \text{ проективен}\}.$$

Предложение 1.37 ([16, 2.10])**.** $\operatorname{pd}_R X = \sup(X \otimes^L_R k)$.

Предложение 1.38 (формула Ауслендера—Буксбаума)**.** *Если $\operatorname{pd}_R X < \infty$, то*

$$\operatorname{pd}_R X + \operatorname{depth} X = \operatorname{depth} R.$$

Определение 1.39. Для $X \in \mathcal{D}^f_b(R)$ определим инъективную размерность как

$$\operatorname{id}_R X = \inf\{-\inf(Z) \mid Z \simeq X,\ Z_i = 0 \text{ для } |i| \gg 0,\ Z_i \text{ инъективен}\}.$$

Предложение 1.40 ([16, 2.10])**.** $\operatorname{id}_R X = -\inf(\mathbf{R}\operatorname{Hom}(k, X))$.

Определение 1.41. Комплекс $X \in \mathcal{D}^f_b(R)$ называется дуализирующим, если $\operatorname{id}_R X < \infty$ и естественный морфизм комплексов $R \xrightarrow{\alpha_R} \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, X)$ является квазиизоморфизмом.

Предложение 1.42. *Если комплекс X является дуализирующим, то для любого $M \in \mathcal{D}^f_b(R)$ естественный морфизм $M \xrightarrow{\alpha_M} \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M, X), X)$ является квазиизоморфизмом.*

Предложение 1.43. *Если кольцо R горенштейново, то свободный модуль ранга* 1 *является дуализирующим комплексом.*

Предложение 1.44. *Если $R \simeq S/I$, где S — горенштейново кольцо, то R-комплекс $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, S)$ является дуализирующим.*

Предложение 1.45 ([28, V.3.4])**.** *Следующие два условия на комплекс $X \in \mathcal{D}^f_-(R)$ равносильны*:

1) $\mathrm{I}^X_R(t) = t^n$;
2) *комплекс X дуализирующий.*

1.3. Удобные модули. Перечислим, следуя [9], необходимые для дальнейшего основные факты о G_K-размерности и G_K-совершенных модулях.

Зафиксируем модуль K. Для произвольного модуля P через P^* обозначим модуль $\mathrm{Hom}_R(P,K)$. Будем называть модуль P K-рефлексивным, если канонический гомоморфизм $P \to P^{**}$ биективен.

Определение 1.46. Для K-рефлексивных модулей P над кольцом R, таких что для любых $i>0$ выполнено $\mathrm{Ext}^i_R(P,K)=0=\mathrm{Ext}^i_R(P^*,K)$, положим $\mathrm{G}_K\text{-}\dim_R P=0$;

$$\mathrm{G}_K\text{-}\dim_R M=\inf\{n \mid \text{существует точная последовательность}$$
$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\ldots\to P_0\to M\to 0,\ \text{где } \mathrm{G}_K\text{-}\dim_R P_i=0\}.$$

В случае, когда $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M$ конечна, ее можно выразить следующим образом.

Предложение 1.47. *Если* $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M<\infty$, *то* $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M=\sup\{n \mid \mathrm{Ext}^n_R(M,K)\neq 0\}$.

Если $\mathrm{G}_K\text{-}\dim_R R=0$, то модуль K называется удобным. Другими словами, K удобен в том и только в том случае, когда $\mathrm{Hom}_R(K,K)\simeq R$ и для любого $i>0$ имеем $\mathrm{Ext}^i_R(K,K)=0$. Удобными модулями являются, например, свободный модуль ранга 1 (соответствующая размерность будет совпадать с классической G-размерностью модуля M, для краткости мы будем обозначать ее $\mathrm{G}\text{-}\dim M$), а также дуализирующий модуль. Для G_K-размерности относительно удобного модуля K имеет место следующий аналог формулы Ауслендера—Буксбаума.

Предложение 1.48. *Если* $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M<\infty$, *то* $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M+\mathrm{depth}\, M=\mathrm{depth}\, R$.

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.49. *Следующие три условия равносильны*:

1) K — *дуализирующий модуль*;
2) *для любого* M *имеем* $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M<\infty$;
3) $\mathrm{G}_K\text{-}\dim k<\infty$.

Определение 1.50. $\mathrm{grade}\, M=\inf\{i \mid \mathrm{Ext}^i_R(M,R)\neq 0\}$.

Предложение 1.51. *Если* I — *идеал в* R, *то* $\mathrm{grade}\, R/I$ *равно длине максимальной* R*-регулярной последовательности в* I.

Предложение 1.52. $\mathrm{grade}\, M\leqslant \mathrm{G}_K\text{-}\dim M$.

Определение 1.53. Если $\mathrm{grade}\, M=\mathrm{G}_K\text{-}\dim M$, то модуль M называется G_K-*совершенным*. Идеал I кольца R называется G_K-*совершенным*, если R/I — G_K-совершенный модуль.

Смысл понятия «G_K-совершенный идеал» раскрывает следующая теорема, отражающая поведение G-размерности при замене колец.

Теорема 1.54 ([9, предложение 5])**.** *Пусть* I — G_K*-совершенный идеал,* K — *удобный* R*-модуль. Тогда* $\mathrm{Ext}^{\mathrm{grade}\, R/I}_R(R/I,K)$ — *удобный* R/I*-модуль и для любого* R/I*-модуля* M

$$\mathrm{G}_K\text{-}\dim_R M<\infty \iff \mathrm{G}_{K'}\text{-}\dim_{R/I} M<\infty,$$

где $K'=\mathrm{Ext}^{\mathrm{grade}\, R/I}_R(R/I,K)$. *При условии конечности эти две размерности связаны соотношением*

$$\mathrm{G}_K\text{-}\dim_R M=\mathrm{grade}\, R/I+\mathrm{G}_{K'}\text{-}\dim_{R/I} M.$$

Ниже (см. замечание 2.11) мы приведем доказательство этой теоремы, отличное от данного в [9].

Определение 1.55. Пусть в ситуации, описанной в условии теоремы 1.54, $K'\simeq R/I$. В этом случае будем называть идеал I G_K-гореншейновым. Простейшим примером является идеал, порожденный регулярной последовательностью.

Предложение 1.56. *Следующие два условия на идеал I равносильны*:

1) *идеал I является* G-*совершенным*;
2) *при $k \neq \operatorname{grade} R/I$ имеем $\operatorname{Ext}^k_R(R/I, R) = 0$; кроме того, $\operatorname{Ext}^{\operatorname{grade} R/I}_R(R/I, R)$ — удобный R/I-модуль.*

Лемма 1.57. *Если $\mathfrak{a}$ — G-гореншейнов идеал, $\mathfrak{a} \subset I$ и $\operatorname{grade} R/I = \operatorname{grade} R/\mathfrak{a}$, то*

$$\operatorname{Ext}^{i+\operatorname{grade} R/I}_R(R/I, R) \cong \operatorname{Ext}^i_{R/\mathfrak{a}}(R/I, R/\mathfrak{a})$$

для любого $i > 0$. В частности,

$$\operatorname{Ext}^{\operatorname{grade} R/I}_R(R/I, R) \cong (\mathfrak{a} : I)/\mathfrak{a}.$$

Определение 1.58. Идеалы I и J называются непосредственно G-*связанными*, если существует G-гореншейнов идеал $\mathfrak{a}$, такой что $I = (\mathfrak{a} : J)$ и $J = (\mathfrak{a} : I)$. В этом случае

$$\operatorname{grade} R/I = \operatorname{grade} R/\mathfrak{a} = R/\operatorname{grade} J.$$

Из леммы 1.57 следует, что идеалы I и J являются непосредственно G-связанными через G-гореншейнов идеал $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Ext}^{\operatorname{grade} R/J}_R(R/J, R) \cong I/\mathfrak{a}, \quad \operatorname{Ext}^{\operatorname{grade} R/I}_R(R/I, R) \cong J/\mathfrak{a}.$$

Ниже (теорема 4.3) мы получим еще одно равносильное условие, характеризующее G-совершенные идеалы.

2. Полудуализирующие комплексы и G_X-размерность

2.1. Общие сведения. В этом разделе определяются полудуализирующие комплексы и G-размерность относительно таких комплексов и описываются их основные свойства.

Определение 2.1. Комплекс $X \in \mathcal{D}^f_b(R)$ называется полудуализирующим, если естественный морфизм комплексов $R \xrightarrow{\alpha_R} \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, X)$ является квазиизоморфизмом.

Пример 2.2. Простейшими примерами полудуализирующих комплексов являются свободный модуль ранга 1 и дуализирующий комплекс, когда он существует. В дальнейшем такие полудуализирующие комплексы мы будем называть *тривиальными*.

Наличие над кольцом нетривиального полудуализирующего комплекса X налагает сильное ограничение на его числа Басса.

Предложение 2.3. *Если X — полудуализирующий комплекс над кольцом R, то*

$$\mathrm{P}^X_R(t)\,\mathrm{I}^R_X(t) = \mathrm{I}^R_R(t).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k, R) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k, \mathbf{R}\operatorname{Hom}(X, X)) \simeq$$
$$\simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k \otimes^L_R X, X) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_k(k \otimes^L_R X, \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k, X)).$$

Вычисляя размерности соответствующих векторных пространств, получаем искомое равенство. □

Для $M \in \mathcal{D}^f_b(R)$ будем для краткости обозначать $M^{**}_X = \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M, X), X)$.

Определение 2.4. Пусть $M \xrightarrow{\alpha_M} M^{**}_X$ — квазиизоморфизм. Положим

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim M = -\inf(\operatorname{Hom}(M, X)) + \inf(X).$$

Замечание 2.5. В отличие от классических гомологических размерностей модулей, введенный здесь инвариант может принимать отрицательные значения.

Выясним связь данного определения с определением 1.46.

Лемма 2.6. *Пусть в короткой точной последовательности*

$$0 \to M \to N \to K \to 0$$

два из трех модулей имеют конечную G_X*-размерность относительно полудуализирующего комплекса* X*. Тогда и третий модуль обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть I — инъективная резольвента комплекса X. Утверждение с очевидностью следует из точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Hom}(K, I) \to \operatorname{Hom}(N, I) \to \operatorname{Hom}(M, I) \to 0$$

и коммутативной точной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_M} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_N} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_K} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_X^{**} & \longrightarrow & N_X^{**} & \longrightarrow & K_X^{**} & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.7. *Пусть в короткой точной последовательности*

$$0 \to M \to N \to K \to 0$$

имеют место соотношения

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim N = 0, \quad 0 < \mathrm{G}_X\text{-}\dim K < \infty.$$

Тогда

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim M = \mathrm{G}_X\text{-}\dim K - 1.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.6.

Теорема 2.8. *Пусть полудуализирующий комплекс* X *имеет одну ненулевую гомологию в степени* 0*. Тогда* $K \simeq \mathrm{H}_0(X)$ *— удобный модуль и* $\mathrm{G}_X\text{-}\dim M = \mathrm{G}_K\text{-}\dim M$*.*

Доказательство. Если комплекс X имеет всего одну ненулевую гомологию, то условие, что $\alpha_R\colon R \to \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X, X)$ — квазиизоморфизм, сводится к следующим условиям:

1) $R \xrightarrow{\mathrm{H}_0(\alpha_R)} \operatorname{Hom}_R(\mathrm{H}_0(X), \mathrm{H}_0(X))$;
2) $\operatorname{Ext}^i_R(\mathrm{H}_0(X), \mathrm{H}_0(X)) = 0$ для $i > 0$.

Проведем индукцию по той из этих размерностей, которая конечна. Легко видеть, что $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{G}_X\text{-}\dim M = 0$. Действительно, когда одна из этих размерностей равна нулю, имеем $\operatorname{Ext}^n_R(M, K) = 0$ при $n > 0$. Поэтому $M \xrightarrow{\alpha_M} M_X^{**}$ является квазиизоморфизмом тогда и только тогда, когда канонический гомоморфизм $M \to M_K^{**}$ является изоморфизмом, что и требовалось. Пусть теперь какая-нибудь из этих размерностей модуля M конечна и больше нуля. Накроем тогда модуль M свободным модулем и применим к ядру этого накрытия предположение индукции и лемму 2.7. □

Замечание 2.9. Из леммы 2.6 следует, в частности, что если $\operatorname{pd} M < \infty$, то $\mathrm{G}_X\text{-}\dim M < \infty$ для любого полудуализирующего комплекса X.

Теорема 2.10. *Пусть* X *— полудуализирующий комплекс над* S*,* R *— конечная (конечно порожденная как* S*-модуль)* S*-алгебра,* $X' = \mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, X)$*. Тогда*

1) $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_S R < \infty$ *в том и только в том случае, если* X' *— полудуализирующий комплекс над* R*;*
2) *при условии* $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_S R < \infty$ *для* R*-комплекса* M *конечность* G_X*-размерности над кольцом* S *равносильна конечности* $\mathrm{G}_{X'}$*-размерности над кольцом* R*. Более того,*

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim_S M = \mathrm{G}_{X'}\text{-}\dim_R M + \mathrm{G}_X\text{-}\dim_S R.$$

Доказательство. Функтор

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\cdot, X') \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\cdot, \mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, X))$$

из категории $\mathcal{D}^f_+(R)$ в $\mathcal{D}^f_-(R)$ изоморфен функтору $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(\cdot, X)$. Отсюда

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X', X') \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, X), X),$$

и получаем справедливость первого утверждения теоремы. Аналогично доказывается равносильность неравенств $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_S M < \infty$ и $\mathrm{G}_{X'}\text{-}\dim_R M < \infty$.

Пусть теперь для $M \in \mathcal{D}^f_b(R)$ имеем $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_S M < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_X\text{-}\dim_S M &= -\inf(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(M, X)) + \inf(X) = \\
&= -\inf(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(M, X)) + \inf(X') - \inf(X') + \inf(X) = \\
&= -\inf(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M, X')) + \inf(X') - \inf(X') + \inf(X) = \\
&= \mathrm{G}_{X'}\text{-}\dim_R M + \mathrm{G}_X\text{-}\dim_S R.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.11. Пусть полудуализирующий комплекс X имеет всего одну ненулевую гомологию, являющуюся удобным модулем, и пусть $\mathfrak{a}$ — G_K-совершенный идеал, где $K \simeq \mathrm{H}_0(X)$. В этом случае полудуализирующий комплекс $X' \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R, X)$ также будет иметь одну ненулевую гомологию, которая является $R/\mathfrak{a}$-удобным модулем. Применив теорему 2.10, получим утверждение теоремы 1.54.

Опишем полудуализирующие комплексы X, такие что для любого R-модуля M выполнено $\mathrm{G}_X\text{-}\dim M < \infty$.

Теорема 2.12. *Пусть X — полудуализирующий комплекс над кольцом R и $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_R k < \infty$. Тогда X — дуализирующий комплекс и для любого R-комплекса $M \in \mathcal{D}^f_b(R)$ имеем*

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim_R M < \infty.$$

Доказательство. Из теоремы 2.10 получаем, что $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, X)$ — полудуализирующий комплекс над векторным пространством k, а значит, существует лишь одно значение $i = i_0$, при котором $\mu^i(\mathfrak{m}, X)$ не равно нулю. Более того, $\mu^{i_0}(\mathfrak{m}, X) = 1$. Согласно предложению 1.45 это свойство чисел Басса характеризует дуализирующие комплексы. Обратное очевидным образом вытекает из предложения 1.42. □

Далее рассмотрим поведение G_X-размерности при локализации.

Теорема 2.13. *Пусть X — полудуализирующий комплекс над кольцом R, M — R-модуль. Тогда $X_\mathfrak{p}$ — полудуализирующий комплекс над кольцом $R_\mathfrak{p}$ и из конечности $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_R M$ следует конечность $\mathrm{G}_{X_\mathfrak{p}}\text{-}\dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$.*

Доказательство. Из предложения 1.35 следует, что $R_\mathfrak{p}$-комплекс $X_\mathfrak{p}$ полудуализирующий и что локализацией квазиизоморфизма $M \to \mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M, X), X)$ можно получить необходимый нам квазиизоморфизм

$$M_\mathfrak{p} \to \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, X_\mathfrak{p}), X_\mathfrak{p}).$$

Теорема доказана. □

Докажем теперь аналог формулы Ауслендера—Буксбаума для G_X-размерности.

Теорема 2.14. *Пусть X — полудуализирующий комплекс над кольцом R и для $M \in \mathcal{D}^f_+(R)$ имеем $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_R M < \infty$. Тогда*

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim_R M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{depth} M &= -\sup(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k,M)) = \\ &= -\sup(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k,\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M,X),X))) = \\ &= -\sup(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k\otimes^L_R\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M,X),X)) = \\ &= -\sup(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_k(k\otimes^L_R\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M,X),\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k,X))) = \\ &= -(\sup(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k,X)) - \inf(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M,X))).\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\operatorname{depth} R = -(\sup(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(k,X)) - \inf(X)).$$

Тогда

$$\operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M = \inf(X) - \inf(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(M,X)) = \mathrm{G}_X\text{-}\dim M.$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.15. Заметим, что доказательство формулы Ауслендера—Буксбаума для классической G-размерности модулей, опубликованное в [13], содержит существенный пробел (см. [32]). По-видимому, первое корректное доказательство содержится в [32], и оно существенно сложнее изложенного здесь. Более простой вариант предложен в [21], но и в этом случае переход от модулей к комплексам существенно упрощает доказательство.

Рассмотрим следующую ситуацию: кольцо R является S-алгеброй, а M — R-модулем конечной R-проективной размерности. Тогда легко видеть, что проективная размерность M над S также конечна и выполнено равенство

$$\operatorname{pd}_S M = \operatorname{pd}_R M + \operatorname{pd}_S R.$$

В [17, замечание 4.8] было высказано предположение, что верен и аналог этого утверждения для G-размерности. Используя теорему 2.10, можно предложить следующую, возможно более общую, постановку.

Гипотеза 2.16. Пусть X — полудуализирующий комплекс над кольцом R. Тогда

$$\mathrm{G}_X\text{-}\dim M \leqslant \mathrm{G}\text{-}\dim M,$$

причем при условии конечности правой части достигается равенство.

Покажем, как из справедливости этой гипотезы для полудуализирующих комплексов некоторого специального вида следует нужное нам утверждение.

Следствие 2.17. *Пусть R — конечная S-алгебра, $\mathrm{G}\text{-}\dim_S R < \infty$, $M \in \mathcal{D}^f_b(R)$. Тогда в предположении справедливости для кольца R гипотезы* 2.16 *верно*

$$\mathrm{G}\text{-}\dim_R M < \infty \implies \mathrm{G}\text{-}\dim_S M < \infty,$$

и при условии конечности эти размерности связаны соотношением

$$\mathrm{G}\text{-}\dim_S M = \mathrm{G}\text{-}\dim_R M + \mathrm{G}\text{-}\dim_S R. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим комплекс $X' = \mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R,S)$. Согласно теореме 2.10 X — полудуализирующий R-комплекс, а значит, при условии справедливости гипотезы 2.16, $\mathrm{G}_X\text{-}\dim_R M < \infty$. Применив теперь теорему 2.10, получаем, что $\mathrm{G}\text{-}\dim_S M < \infty$. Равенство (1) очевидным образом следует из теоремы 2.14. □

Интересным является также следующий вопрос: верно ли, что все полудуализирующие комплексы над кольцом R исчерпываются комплексами вида $X = \mathbf{R}\operatorname{Hom}_S(R,S)$, где R есть фактор-кольцо S?

Для дуализирующих комплексов соответствующий вопрос был поставлен Р. Шарпом [36], а положительный ответ на него был получен в [31], где показано, что любое кольцо, над которым существует дуализирующий комплекс, есть фактор-кольцо кольца Горенштейна. Ниже (следствие 4.8) будет показано, что ответ на этот вопрос является положительным и в случае, когда комплекс X является полудуализирующим с единственной ненулевой гомологией.

2.2. Структура множества полудуализирующих комплексов. Мы начинаем с изложения конструкции кольца с большим количеством нетривиальных удобных модулей, являющейся основой для изучения структуры множества полудуализирующих комплексов в общем случае.

Пусть $S_1, \dots, S_n$ — конечные локальные алгебры над локальным кольцом R. Обозначим через $\mathfrak{m}_i$ максимальный идеал в S_i, а через $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца R. Рассмотрим R-алгебру $S = S_1 \otimes_R S_2 \otimes_R \dots \otimes_R S_n$.

Для любого $P \subset \{1, \dots, n\}$ положим $S_P = \bigotimes_R S_i$, где i пробегает множество P. Обозначим $\bar{P} = \{1, \dots, n\} \setminus P$.

Предложение 2.18. *Пусть для любого i алгебра S_i свободна как R-модуль, $S_i/\mathfrak{m}_i \cong R/\mathfrak{m}$. Тогда алгебра S локальна и для любого $P \subset \{1, \dots, n\}$ S-модуль $K_P = \operatorname{Hom}_{S_{\bar{P}}}(S, S_{\bar{P}})$ является удобным, при этом*

$$\operatorname{type} K_P = (\operatorname{type} R)^n \prod_{i \in \bar{P}} \dim_{S_i/\mathfrak{m}_i} \operatorname{Hom}_{S_i/\mathfrak{m}S_i}(S_i/\mathfrak{m}_i, S_i/\mathfrak{m}S_i).$$

Если к тому же ни одно из колец $S_i/\mathfrak{m}S_i$ не является гореншейновым, то модули K_P попарно неизоморфны.

Доказательство. Рассмотрим идеал, порожденный всеми $\mathfrak{m}_i$ в S. Условие предложения обеспечивает его максимальность. С другой стороны, любой другой максимальный идеал обязан пересекаться с каждым из S_i по идеалу $\mathfrak{m}_i$. Удобность модулей K_P следует из того факта, что S — свободный $S_{\bar{P}}$-модуль, и теоремы 2.10. Проверим их неизоморфность. Пусть P и Q — два разных подмножества в $\{1, \dots, n\}$. Без ограничения общности можем считать, что существует $i \in P \setminus Q$. Докажем, что K_P и K_Q неизоморфны уже как S_i-модули. Как S_i-модуль K_P изоморфен модулю $\operatorname{Hom}_R(S_i, R)^l$, а K_Q — модулю S_i^l, где $l = \operatorname{rank}_{S_i} S$. Над кольцом $S_i/\mathfrak{m}S_i$ минимальная система порождающих модуля $K_P/\mathfrak{m}K_P$ состоит из $l \cdot \dim_{S_i/\mathfrak{m}_i} \operatorname{Hom}_{S_i/\mathfrak{m}S_i}(S_i/\mathfrak{m}_i, S_i/\mathfrak{m}S_i)$ элементов (что не равно l, так как кольцо $S_i/\mathfrak{m}S_i$ не является гореншейновым), а минимальная система порождающих модуля $K_Q/\mathfrak{m}K_Q$ — из l элементов. Отсюда также вычисляется тип K_P. □

Замечание 2.19. Модуль $K_P = \operatorname{Hom}_{S_{\bar{P}}}(S, S_{\bar{P}})$ также можно представить в виде

$$\bigotimes_{i \in P} \operatorname{Hom}_R(S_i, R) \otimes \bigotimes_{i \in \bar{P}} S_i.$$

Предложение 2.20. *Тип Коэна—Маколея удобного S-модуля K является делителем типа Коэна—Маколея кольца.*

Доказательство. Согласно предложению 2.3 имеем $\mathrm{P}_S^K(t)\,\mathrm{I}_K^S(t) = \mathrm{I}_S^S(t)$. Приравнивая коэффициенты при младших степенях, получаем, что тип Коэна—Маколея кольца R есть произведение типа Коэна—Маколея модуля K и количества его порождающих. □

В [22] для любого натурального i был построен пример кольца с типом 2^{2^i} и удобными модулями всех допустимых предложением 2.20 типов.

Здесь для любого наперед заданного натурального m мы строим пример кольца S с типом Коэна—Маколея m, над которым для любого делителя m существует удобный модуль с соответствующим типом Коэна—Маколея.

Пример 2.21. В предложении 2.18 положим $R = k$. Представим натуральное число m в виде произведения простых:

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Рассмотрим кольцо

$$T_m = \bigotimes_{i=1}^{n} k \ltimes k^{p_i},$$

где k — поле. Тип кольца T_m равен m, и согласно доказанному для любого делителя a числа m найдется удобный T_m-модуль K с типом a.

Замечание 2.22. В условиях предложения 2.18 числа Бетти и числа Басса модуля K_P зависят только от набора классов изоморфизма колец S_i, $i \in P$. Поэтому если среди колец S_i имеются изоморфные, то модули K_P, вообще говоря, не разделяются этими инвариантами.

Замечание 2.23. Как показано в [35, следствие 4.9], для кольца T_m из примера 2.21 множество удобных модулей исчерпывается модулями, построенными в предложении 2.18.

Интересным является вопрос, не универсальна ли эта конструкция хотя бы для случая конечномерных алгебр над полем. Все известные автору примеры укладываются в эту схему.

Основой для дальнейшего исследования множества полудуализирующих комплексов над кольцом является следующее простое наблюдение.

Предложение 2.24. *В условиях примера* 2.21 $\mathrm{G}_{K_I}\text{-}\dim K_J < \infty$ *тогда и только тогда, когда* $J \subset I$.

Доказательство. Все необходимые утверждения следуют из изоморфизма

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom}_S\left(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n}^{R} M_i,\ \bigotimes_{0\leqslant i\leqslant n}^{R} N_i\right) \simeq \bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n}^{R} \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{S_i}(M_i, N_i).$$

Предложение доказано. □

Предложение 2.25. *В условиях примера* 2.21 $J \subset I$ *тогда и только тогда, когда*

$$K_J \otimes K_{I\setminus J} \simeq K_I.$$

Доказательство очевидным образом вытекает из замечания 2.19.

Покажем, что и в общем случае имеется аналогичное разложение.

Теорема 2.26. *Если* X_1 *и* X_2 *— полудуализирующие комплексы над* R*, такие что* $\mathrm{G}_{X_2}\text{-}\dim X_1 < \infty$*, и комплекс* $M \in \mathcal{D}^f_+(R)$ *имеет конечную* G*-размерность по отношению к* X_1 *и* X_2*, то морфизм композиции*

$$\varphi\colon \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_1) \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_2) \to \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_2)$$

является квазиизоморфизмом.

Доказательство. Достаточно показать, что комплекс $\operatorname{cone}\varphi$ ацикличен. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_1) \otimes^L_R \\ \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_2), X_2)\end{array} & \xleftarrow{\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\varphi, X_2)} & \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_2), X_2) \\
\downarrow\simeq & & \uparrow\simeq \\
\begin{array}{c}\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_1), \\ \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_2), X_2))\end{array} & & M \\
\uparrow\simeq & & \| \\
\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_1), X_1) & \xleftarrow{\simeq} & M
\end{array}$$

вытекает, что $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\varphi, X_2)$ — квазиизоморфизм. Следовательно, комплекс $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\operatorname{cone}\varphi, X_2)$ ацикличен. Так как комплексы $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_1) \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_2)$ и $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(M, X_2)$ ограничены снизу, то комплекс $\operatorname{cone}\varphi$ также ограничен снизу. Если $\mathrm{H}(\operatorname{cone}\varphi) \neq 0$, то $\inf\operatorname{cone}\varphi$ конечен. Имеем

$$\begin{aligned}
-\infty = \sup \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(k, \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(\operatorname{cone}\varphi, X_2)) = \sup \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(k \otimes^L_R \operatorname{cone}\varphi, X_2) = \\
= \sup \mathbf{R}\operatorname{Hom} k(k \otimes^L_R \operatorname{cone}\varphi, \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(k, X_2)) = \sup \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(k, X_2) - \inf\operatorname{cone}\varphi.
\end{aligned}$$

Противоречие, так как последнее выражение конечно. □

Определение 2.27. Неизоморфные полудуализирующие комплексы $X_0, X_1, \ldots, X_n$ образуют *цепочку* длины n, если $\mathrm{G}_{X_i}\text{-}\dim X_{i-1} < \infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Следствие 2.28. *Если полудуализирующие комплексы $X_0, X_1, \dots, X_n$ образуют цепочку, то имеет место квазиизоморфизм*

$$X_n \simeq X_0 \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_0, X_1) \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_2) \otimes^L_R \dots \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_{n-1}, X_n). \tag{2}$$

Доказательство. Для каждого i применим теорему 2.26 с $M = R$ к полудуализирующим комплексам X_i и X_{i-1}. □

Замечание 2.29. Если полудуализирующие комплексы $X_0, X_1, \dots, X_n \simeq X_0$ образуют цепочку, то согласно следствию 2.28 имеет место квазиизоморфизм

$$X_0 \simeq X_0 \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_0, X_1) \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_2) \otimes^L_R \dots \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_{n-1}, X_n).$$

Отсюда для любого i получаем

$$\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_i, X_{i+1}) \simeq R.$$

Дуализируя по отношению к X_{i+1}, находим, что $X_i \simeq X_{i+1}$. Для случая цепочек длины 1 с $X_0 \simeq R$ это было показано в [22, предложение 8.3, (iii) $\Rightarrow$ (ii)], а для произвольных цепочек длины 1 — в [11, теорема 5.5].

Предложение 2.30. *Если комплексы X_1, $X_1 \otimes^L_R X_2$ являются полудуализирующими над R, то*

$$\varphi\colon X_1 \to \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_2, X_1 \otimes^L_R X_2) —$$

квазиизоморфизм. Если X_2 также является полудуализирующим, то

$$\psi\colon X_2 \to \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, X_1 \otimes^L_R X_2) —$$

квазиизоморфизм. В частности, $\mathrm{G}_{X_1 \otimes^L_R X_2}\text{-}\dim X_1 < \infty$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.26 заметим, что $\operatorname{cone}\varphi$ ограничен сверху, поэтому если $\operatorname{cone}\varphi$ имеет ненулевые гомологии, то $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1, \operatorname{cone}\varphi)$ также имеет ненулевые гомологии. Противоречие. □

Замечание 2.31. На большое количество вопросов о структуре множества полудуализирующих комплексов ответы неизвестны. Перечислим наиболее интересные вопросы.

Транзитивность: если тройка полудуализирующих комплексов X_1, X_2, X_3 такова, что $\mathrm{G}_{X_3}\text{-}\dim X_2 < \infty$ и $\mathrm{G}_{X_2}\text{-}\dim X_1 < \infty$, обязательно ли $\mathrm{G}_{X_3}\text{-}\dim X_1 < \infty$?

Существование «объединения»: существует ли для пары полудуализирующих комплексов X_1, X_2 третий полудуализирующий комплекс X_3, такой что $\mathrm{G}_{X_3}\text{-}\dim X_2 < \infty$ и $\mathrm{G}_{X_3}\text{-}\dim X_1 < \infty$? (Заметим, что это выполнено тривиально, когда над кольцом имеется дуализирующий комплекс.)

Рассмотрим далее вопрос классификации полудуализирующих комплексов над кольцами Коэна—Маколея. Полудуализирующие комплексы, у которых есть больше одной ненулевой гомологии, встречаются лишь в кольцах, достаточно сильно отличающихся от регулярных. Точнее говоря, верно следующее утверждение.

Предложение 2.32. *Пусть X — полудуализирующий комплекс над R,* $\operatorname{amp}(X) > 0$. *Тогда R не является кольцом Коэна—Маколея.*

Доказательство. Допустим в условиях предложения, что R — кольцо Коэна—Маколея. Пусть I — инъективная резольвента комплекса X. Если x — R-регулярный элемент, то из точной последовательности комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(R/xR, I) \to I \xrightarrow{x} I \to 0$$

видно, что $\operatorname{amp}(\operatorname{Hom}_R(R/xR, X)) \geqslant \operatorname{amp}(X)$. Применив индукцию по глубине, можем считать R артиновым. Имеем

$$0 = \operatorname{amp}(\mathbf{R}\operatorname{Hom}(X, X)) > \operatorname{amp}(X),$$

так как $\mathrm{H}_0(\mathbf{R}\operatorname{Hom}(X, X)) \simeq R$, а

$$\mathrm{H}_{\operatorname{amp}(x)}(\mathbf{R}\operatorname{Hom}(X, X)) \simeq \operatorname{Hom}(\mathrm{H}_{\inf X}(X), \mathrm{H}_{\sup X}(X)) \neq 0,$$

поскольку над артиновым кольцом $\operatorname{Hom}(M, N) \neq 0$. □

Предложение 2.33. *Пусть R — полное локальное кольцо, x — R-регулярный элемент. Тогда можно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами классов изоморфизма удобных модулей над кольцами R и $R/(x)$.*

Доказательство. Если модуль K является удобным над R, то известно [9], что модуль $K' = K/(x)K$ является удобным над $R/(x)$. С другой стороны, из того что для удобного $R/(x)$-модуля K' по определению имеем $\operatorname{Ext}^2_{R/(x)}(K', K') = 0$, следует [14, предложение 1.7] существование такого R-модуля K, что $K' = K/(x)K$ и $\operatorname{Tor}^R_i(R/(x), K) = 0$ при $i > 0$. Его удобность проверяется непосредственно, а единственность следует из равенства $\operatorname{Ext}^1_{R/(x)}(K', K') = 0$ (см. [14, предложение 2.5]). □

Замечание 2.34. Как показывают предыдущие два предложения, классификация полудуализирующих комплексов над полными кольцами Коэна—Маколея сводится к классификации удобных модулей над артиновыми кольцами.

Далее мы рассматриваем случай артиновых колец. Есть основания полагать, что кольцо из примера 2.21 имеет в некотором смысле максимально возможные цепочки из удобных модулей. Далее мы формализуем это соображение.

Определение 2.35. Модули $K_1, K_2, \ldots, K_n$ называются *слабо* Tor-*независимыми*, если

$$\operatorname{amp}\left(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n}^{L} K_i\right) = 0.$$

Определение 2.36. Модули $K_1, K_2, \ldots, K_n$ называются *сильно* Tor-*независимыми*, если для любого подмножества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$\operatorname{amp}\left(\bigotimes_{i\in I}^{L} K_i\right) = 0.$$

Замечание 2.37. В случае $n = 2$ оба понятия эквивалентны классической Tor-независимости, т. е. условию зануления $\operatorname{Tor}^R_i(K_1, K_2)$ при $i > 0$.

Замечание 2.38. Неизвестно, влечет ли слабая Tor-независимость сильную при $n > 2$.

Теорема 2.39. *Если модули $K_1, K_2, \ldots, K_n$ не свободны и сильно* Tor-*независимы, то $\mathfrak{m}^n \neq 0$. Если при тех же предположениях $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$, то ряд Бетти k имеет вид*

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1 - d_i t)}$$

для некоторых натуральных d_i.

Доказательство. Обозначим $Y_i = \operatorname{Syz}_1(K_i)$. Заметим, что если мы выберем для каждого i модуль $X_i \in \{K_i, Y_i\}$, то модули X_i по-прежнему будут сильно Tor-независимыми. Предположим, что $\mathfrak{m}^n = 0$. Докажем по индукции, что

$$\mathfrak{m}^{n-j} \otimes \bigotimes_{1\leqslant i\leqslant j} Y_i = 0.$$

Если $j = 1$, это следует из того, что $Y_1 \subset \mathfrak{m}R^{\beta_0^R(K_1)}$. Пусть утверждение индукции доказано для $j = l$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to Y_{l+1} \to R^{\beta_0^R(K_{l+1})} \to K_{l+1} \to 0$$

и умножим ее тензорно на $\bigotimes\limits_{1\leqslant i\leqslant l} Y_i$. Используя сильную Tor-независимость, получаем, что

$$\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant l+1} Y_i \subset \mathfrak{m}\left(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant l+1} Y_i\right)^{\beta_0^R(K_{l+1})},$$

что и влечет за собой требуемое условие по предположению индукции. Используя доказанное утверждение при $j = n-1$, получаем

$$\mathfrak{m}\Big(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n-1} Y_i\Big) = 0,$$

т. е. $\bigotimes\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1} Y_i$ является векторным пространством над полем вычетов R. Так как

$$\operatorname{Tor}_1^R\Big(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n-1} Y_i, K_n\Big) = 0,$$

модуль K_n свободен. Получили противоречие, следовательно, $\mathfrak{m}^n \neq 0$.

Теперь если $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$, то аналогичное рассуждение показывает, что

$$\mathfrak{m}^2\Big(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n-1} Y_i\Big) = 0, \quad \mathfrak{m}\Big(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n} Y_i\Big) = 0.$$

Первое равенство влечет существование точной последовательности вида

$$0 \to k^{a_n} \to \bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n-1} Y_i \to k^{b_n} \to 0.$$

Умножая ее тензорно на K_n и используя равенства

$$\operatorname{Tor}_j^R\Big(\bigotimes_{1\leqslant i\leqslant n-1} Y_i, K_n\Big) = 0, \quad j > 0,$$

из длинной точной последовательности Tor'ов получаем изоморфизмы

$$\operatorname{Tor}_i^R(K_n, k)^{a_n} \simeq \operatorname{Tor}_{i+1}^R(K_n, k)^{b_n}$$

для всех $i > 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Tor}_i^R(Y_n, k)^{a_n} \simeq \operatorname{Tor}_{i+1}^R(Y_n, k)^{b_n}, \quad i \geqslant 0.$$

Таким образом, ряд Бетти Y_n имеет вид

$$\mathrm{P}_{Y_n}^R(t) = \frac{c_n}{1-(a_n/b_n)t}.$$

Аналогично получаем ряды Бетти всех модулей Y_i. Используя сильную Tor-независимость, получаем равенство

$$\mathrm{P}^R_{\bigotimes\limits_{1\leqslant i\leqslant n} Y_i}(t) = \frac{\prod\limits_{i=1}^n c_i}{\prod\limits_{i=1}^n (1-(a_i/b_i)t)}.$$

Остается заметить, что $\bigotimes\limits_{1\leqslant i\leqslant n} Y_i$ является векторным пространством над k, а $\beta_0^R(k) = 1$. □

Гипотеза 2.40. Если удобные модули $K_0, K_1, \ldots, K_n$ образуют цепочку, то $\mathfrak{m}^n \neq 0$. Если при тех же условиях $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$, то ряд Бетти k имеет вид

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n (1-d_i t)}$$

для некоторых d_i.

Замечание 2.41. По следствию 2.28 условия гипотезы влекут слабую Tor-независимость модулей

$$K_0, \operatorname{Hom}_R(K_0, K_1), \operatorname{Hom}_R(K_1, K_2), \ldots, \operatorname{Hom}_R(K_{i-1}, K_i)$$

для любого $i \leqslant n$. Это условие является промежуточным между слабой и сильной Tor-независимостью модулей

$$K_0, \operatorname{Hom}_R(K_0, K_1), \operatorname{Hom}_R(K_1, K_2), \ldots, \operatorname{Hom}_R(K_{n-1}, K_n).$$

Теорема 2.42. *Гипотеза* 2.40 *верна для* $n \leqslant 3$.

Доказательство. Сначала заметим, что если удобные модули $K_0, K_1, \ldots, K_n$ образуют цепочку, то модули $R, K_1, \ldots, K_{n-1}, D$ (где D дуализирующий) также образуют цепочку. Таким образом, можно предполагать что цепочка имеет описанный вид. Для $n = 1$ утверждение выполнено тривиально. Существование двух неизоморфных удобных модулей уже влечет $\mathfrak{m} \neq 0$, а утверждение про ряд Бетти поля вычетов выполняется для всех колец с $\mathfrak{m}^2 = 0$. Для $n = 2$ модули K_1 и $\operatorname{Hom}(K_1, D)$ являются Tor-независимым, и мы находимся в условиях теоремы 2.39. Для $n = 3$ по теореме 2.39 достаточно показать сильную Tor-независимость модулей $K_1, \operatorname{Hom}_R(K_1, K_2), \operatorname{Hom}_R(K_2, D)$. Слабая Tor-независимость следует из 2.28. Для доказательства того, что любые два из этих модулей Tor-независимы, применим теорему 2.26 к тройкам $(M, X_1, X_2) = (R, K_1, K_2)$, (K_1, K_2, D), $(\operatorname{Hom}_R(K_1, K_2), K_2, D)$. □

Определение 2.43. Артиново кольцо R называется $\mathrm{SD}(n)$-полным, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$;
2) над кольцом существуют такие сильно Tor-независимые несвободные удобные модули $K_1, K_2, \ldots, K_n$, что для любого подмножества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ модуль $\bigotimes\limits_{i \in I} K_i$ является удобным.

Замечание 2.44. Если множество удобных модулей удовлетворяет второму условию из определения 2.43, то удобные модули $X_0 = R$, $X_k = \bigotimes\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} K_i$ образуют цепочку по предложению 2.30.

Пример 2.45. Все негоренштейновы кольца с $\mathfrak{m}^2 = 0$ являются $\mathrm{SD}(1)$-полными. Кольцо с $\mathfrak{m}^3 = 0$ является $\mathrm{SD}(2)$-полным, если и только если над ним существует нетривиальный удобный модуль. Кольцо $\bigotimes\limits_{k}^{1 \leqslant i \leqslant n} k \ltimes k^{a_i}$, где $a_i > 1$, является $\mathrm{SD}(n)$-полным (см. пример 2.21).

Предложение 2.46. *Для* $\mathrm{SD}(n)$*-полного кольца* R *модуль* $\bigotimes K_i$ *является дуализирующим.*

Доказательство. Предположим, что $\bigotimes K_i$ не является дуализирующим. Покажем, что удобные модули $K_1, K_2, \ldots, K_n, \operatorname{Hom}\Big(\bigotimes_R K_i, D\Big)$ являются сильно Tor-независимыми. Полагая

$$X_1 = \bigotimes_{i \in I} K_i, \quad X_2 = \bigotimes_{i \notin I} K_i,$$

получаем следующие изоморфизмы:

$$X_1 \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1 \otimes^L_R X_2, D) \simeq$$
$$\simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_2, X_1 \otimes^L_R X_2) \otimes^L_R \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_1 \otimes^L_R X_2, D) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom} R(X_2, D).$$

Здесь предложение 2.30 дает первый изоморфизм, а теорема 2.26 — второй. Отсюда

$$\operatorname{amp}\left(\bigotimes_{i \in I}^L K_i \otimes^L \operatorname{Hom}\Big(\bigotimes_R^L K_i, D\Big)\right) = \operatorname{amp}\left(\operatorname{Hom}\left(\bigotimes_{i \notin I}^L K_i, D\right)\right) = 0,$$

что и требовалось показать. Теперь, воспользовавшись первым условием из определения $\mathrm{SD}(n)$-полного кольца, получаем противоречие с теоремой 2.39. □

Замечание 2.47. Если условия гипотезы 2.40 выполнены для кольца R, $n \leqslant 3$ и $m^{n+1} = 0$, то R является $\mathrm{SD}(n)$-полным.

Далее изучается случай $\mathrm{SD}(n)$-полных артиновых колец. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждения о модулях M, аннулируемых квадратом максимального идеала и имеющих конечную G_K-размерность по отношению к некоторому удобному модулю, не являющемуся дуализирующим.

Предложение 2.48. *Если R артиново, $\mathfrak{m}^2 M = 0$ и $\mathrm{G}_K\text{-}\dim M = 0$, то существует такое натуральное c, что для чисел Басса $\mu^i(K)$ имеем соотношения $\mu^{i+1}(K) = c\mu^i(K)$ для любого $i > 0$.*

Доказательство. Из короткой точной последовательности

$$0 \to k^a \to M \to k^b \to 0,$$

выписывая длинную точную последовательность для функтора $\mathrm{Ext}^i_R(-, K)$ и используя тот факт, что $\mathrm{Ext}^i_R(M, K) = 0$ для всех $i > 0$, получаем для всех $i > 0$ изоморфизмы $\mathrm{Ext}^i_R(k, K)^a \simeq \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_R(k, K)^b$. Так как K не является дуализирующим, имеем $\mathrm{Ext}^1_R(k, K) \neq 0$, следовательно, $(a/b)^n \dim_k(\mathrm{Ext}^1_R(k, K)) = \dim_k(\mathrm{Ext}^{n+1}_R(k, K))$ является натуральным числом для любого $n \geqslant 0$, поэтому b делит a. □

Предложение 2.49. *Если кольцо R артиново, $\mathfrak{m}^2 M = 0$ и $\mathrm{G}_K\text{-}\dim\dim M = 0$, то $\mathrm{l}(M^*_K) = \mathrm{l}(M)$ и $\mu^1(K) = \mu^0(K)^2 - 1$.*

Доказательство. Из короткой точной последовательности

$$0 \to k^a \to M \to k^b \to 0,$$

применяя функтор $\mathrm{Hom}(-, K)$ и используя тот факт, что $\mathrm{Ext}^i_R(M, K) = 0$ для всех $i > 0$, получаем короткую точную последовательность

$$0 \to k^{b\mu^0(K)} \to M^*_K \to k^{a\mu^0(K) - b\mu^1(K)} \to 0.$$

Подсчет длин дает

$$\mathrm{l}(M^*_K) = (a + b)\mu^0(K) - b\mu^1(K) = \mathrm{l}(M)\mu^0(K) - b\mu^1(K). \tag{3}$$

Аналогично, начиная с точной последовательности

$$0 \to k^{b\mu^0(K)} \to M^*_K \to k^{a\mu^0(K) - b\mu^1(K)} \to 0,$$

мы получаем равенство

$$\mathrm{l}(M^{**}_K) = \mathrm{l}(M^*_K)\mu^0(K) - (a\mu^0(K) - b\mu^1(K))\mu^1(K). \tag{4}$$

Дополнительно имеем

$$a + b = \mathrm{l}(M) = \mathrm{l}(M^{**}_K). \tag{5}$$

Исключая a и b из этих соотношений, имеем

$$\mathrm{l}(M^*_K)\mu^1(K) = \mathrm{l}(M)(\mu^0(K)^2 - 1)$$

и

$$\mathrm{l}(M)\mu^1(K) = \mathrm{l}(M^*_K)(\mu^0(K)^2 - 1),$$

откуда получаем искомые соотношения. □

Замечание 2.50. Пусть $R - \mathrm{SD}(n)$-полное кольцо, $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — соответствующее множество нетривиальных удобных модулей. Обозначая $Y_i = \mathrm{Syz}_1(K_i)$, из доказательства теоремы 2.39 выводим, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ модуль $\bigotimes\limits_{j \neq i} Y_j$ аннулируется квадратом максимального идеала и имеет конечную $\mathrm{G}_{K_{-i}}$-размерность, где $K_{-i} = \bigotimes\limits_{j \neq i} K_j$.

Следующее предложение показывает, что в общем случае числа Бетти удобных модулей над $\mathrm{SD}(n)$-полными кольцами ведут себя так же, как и в примере 2.21.

Предложение 2.51. *Пусть $R - \mathrm{SD}(n)$-полное кольцо, $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — соответствующее множество нетривиальных удобных модулей. Для каждого i ряд Басса K_{-i} имеет вид*

$$\mathrm{I}^{K_{-i}}(t) = \frac{\mu^0(K_{-i}) - t}{1 - \mu^0(K_{-i})t},$$

а ряд Бетти K_i имеет вид

$$\mathrm{P}_{K_i}(t) = \frac{\beta_0(K_i) - t}{1 - \beta_0(K_i)t}.$$

Доказательство. Используя предложения 2.48 и 2.49, получаем следующее выражения для рядов Басса K_{-i}:

$$\mathrm{I}^{K_{-i}}(t) = \frac{\mu^0(K_{-i}) - \mu^0(K_{-i})ct + \mu^0(K_{-i})^2 t - t}{1 - ct},$$

где $\mu^{j+1}(K_{-i}) = c\mu^j(K_{-i})$ для $j > 0$. Остается показать, что $c = \mu^0(K_{-i})$. По замечанию 2.50 существует R-модуль M, аннулируемый $\mathfrak{m}^2$ и имеющий конечную $\mathrm{G}_{K_{-i}}$-размерность. Дуализируя точную последовательность

$$0 \to k^a \to M \to k^b \to 0,$$

получаем точную последовательность

$$0 \to k^{b\mu^0(K_{-i})} \to M^* \to k^{a\mu^0(K_{-i}) - b\mu^1(K_{-i})} \to 0.$$

Как в доказательстве предложения 2.48, из этих двух точных последовательностей получаем следующие соотношения:

$$\frac{a}{b} = c = \frac{b\mu^0(K_{-i})}{a\mu^0(K_{-i}) - b\mu^1(K_{-i})}.$$

Подставляя $\mu^1(K_{-i}) = \mu^0(K_{-i})^2 - 1$ из 2.49 и преобразуя выражение, получаем равенство

$$(\mu^0(K_{-i})b - a)(b - \mu^0(K_{-i})a) = 0.$$

Так как a/b — натуральное число, имеем $a = \mu^0(K_{-i})b$. По предложению 2.46 модуль $K_i \otimes K_{-i}$ является дуализирующим, поэтому из изоморфизма $\mathbf{R}\operatorname{Hom} R(K_i, K_i \otimes K_{-i}) \simeq K_{-i}$ получаем, что $\mathrm{P}_{K_i}(t) = \mathrm{I}^{K_{-i}}(t)$. □

Далее мы рассматриваем случай SD(2)-полных колец, т. е. колец с $\mathfrak{m}^3 = 0$, над которыми существует нетривиальный удобный модуль K.

Предложение 2.52. *Если R — SD(2)-полное кольцо, а K — нетривиальный удобный модуль над ним, то* $\mathrm{l}(K) = \mathrm{l}(R)$.

Доказательство. Дуализируя по отношению к K точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Syz}_1(K) \to R^{\beta_0(K)} \to K \to 0,$$

мы получаем точную последовательность

$$0 \to R \to K^{\beta_0(K)} \to \operatorname{Syz}_1(K)^* \to 0.$$

Из леммы 2.49 следует, что $\mathrm{l}(\operatorname{Syz}_1(K)) = \mathrm{l}(\operatorname{Syz}_1(K)^*)$. Подсчет длин дает

$$\beta_0(K)\,\mathrm{l}(R) - \mathrm{l}(K) = \beta_0(K)\,\mathrm{l}(K) - \mathrm{l}(R),$$

откуда следует, что $\mathrm{l}(K) = \mathrm{l}(R)$. □

Гипотеза 2.53. Для любого удобного модуля K над артиновым кольцом R имеем $\mathrm{l}(K) = \mathrm{l}(R)$.

Замечание 2.54. Любая конечная алгебра с $\mathfrak{m}^3 = 0$ является естественно градуированной (см. [40, доказательство теоремы 3.1, шаг 7]). На любом R-модуле, аннулируемом $\mathfrak{m}^2$, существует структура градуированного модуля.

Лемма 2.55. *Если R — SD(2)-полное кольцо, а K — нетривиальный удобный модуль над ним, то* $\operatorname{socle} R = \mathfrak{m}^2$ *и для всех $i \geqslant 2$ имеем* $\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_i(K) = \mathfrak{m}^2 R^{\beta_{i-1}(K)}$. *В частности, на минимальной свободной резольвенте модуля* $\operatorname{Syz}_1(K)$ *имеется естественная градуировка.*

Доказательство. Применяя [29, замечание 2.4] к $M = K$, $N = \operatorname{Hom}(K, D)$, где D — дуализирующий модуль, а K — нетривиальный полудуализирующий, получаем, что $\operatorname{socle} R = \mathfrak{m}^2$. Чтобы установить второе равенство, рассуждаем как в [29, замечание 2.4]. Включение $\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_i(K) \subset \subset \mathfrak{m}^2 R^{\beta_{i-1}(K)}$ очевидно. Для доказательства обратного включения предположим, что существует $x \in \mathfrak{m}^2 R^{\beta_{i-1}(K)} \setminus \mathfrak{m}\operatorname{Syz}_i(K)$. Так как $\operatorname{Syz}_{i-1}(K)$ аннулируется $\mathfrak{m}^2$, имеем $x \in \operatorname{Syz}_i(K) \setminus \mathfrak{m}\operatorname{Syz}_i(K)$. Для $i > 0$ справедливо $\operatorname{Tor}_i^R(\operatorname{Syz}_i(K), \operatorname{Hom}(K, D)) = 0$, значит, $\operatorname{Syz}_i(K)$ не имеет k в качестве прямого слагаемого, отсюда x не аннулируется m, противоречие. □

Предложение 2.56. *Если R — $\mathrm{SD}(2)$-полное кольцо, а K — нетривиальный удобный модуль над ним, то имеют место следующие равенства*:

1) $\dim_k \mathfrak{m}^2 = \mu^0(K)\beta_0(K)$;
2) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mu^0(K) + \beta_0(K)$;
3) $\dim_k \mathfrak{m}^2 K = \mu^0(K)$.

Доказательство. Первое равенство следует из того факта, что $\operatorname{Hom}(K, K) \simeq R$ (значит, $\dim_k \operatorname{socle} K \dim_k K/\mathfrak{m}K = \dim_k \operatorname{socle} R$) и леммы 2.55. Для доказательства второго равенства рассмотрим последовательность

$$0 \to \operatorname{Syz}_2(K)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(K) \to (R/\mathfrak{m}^2 R)^{\beta_1(K)} \to \operatorname{Syz}_1(K) \to 0,$$

которая является точной по лемме 2.55. Подсчет длин дает

$$\begin{aligned}
&\dim_k \operatorname{Syz}_2(K)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(K) = \\
&\quad = \beta_1(K)(1 + \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - \dim_k \operatorname{Syz}_1(K)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_1(K) - \dim_k \mathfrak{m}\operatorname{Syz}_1(K) = \\
&\quad = \beta_1(K)(1 + \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - \beta_1(K) - \beta_1(K)\mu^0(K) = \beta_1(K)(\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - \mu^0(K)),
\end{aligned} \tag{6}$$

где во втором равенстве использован тот факт, что

$$\dim_k \mathfrak{m}\operatorname{Syz}_1(K) = \dim_k(\operatorname{Syz}_1(K)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_1(K))\mu^0(K)$$

(см. доказательство предложения 2.51). С другой стороны, из леммы 2.55 имеем

$$\dim_k \mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(K) = \beta_1(K)\dim_k \mathfrak{m}^2 = \beta_1(K)\mu^0(K)\beta_0(K). \tag{7}$$

Наконец, заметим, что модуль $\operatorname{Syz}_2(K)$ также имеет конечную G_K-размерность, откуда так же, как и в доказательстве предложения 2.51, получаем

$$\dim_k \mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(K) = \mu^0(K)\dim_k \operatorname{Syz}_2(K)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(K). \tag{8}$$

Комбинируя (6), (7) и (8), получаем

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mu^0(K) + \beta_0(K).$$

Для установления третьего равенства рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Syz}_2(L)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(L) \to (R/\mathfrak{m}^2 R)^{\beta_1(L)} \to \operatorname{Syz}_1(L) \to 0,$$

где $L \simeq \operatorname{Hom}(K, D)$ — удобный модуль, и умножим ее тензорно на K. Последовательность

$$0 \to (\operatorname{Syz}_2(L)/\mathfrak{m}\operatorname{Syz}_2(L)) \otimes K \to (K/\mathfrak{m}^2 K)^{\beta_1(L)} \to \operatorname{Syz}_1(L) \otimes K \to 0$$

также является точной по замечанию 2.41. Подсчет длин дает

$$\beta_1(L)(\mathrm{l}(K) - \mathrm{l}(\mathfrak{m}^2 K)) = \beta_2(L)\beta_0(K) + (\beta_0(L) - 1)\,\mathrm{l}(R), \tag{9}$$

где равенство

$$\mathrm{l}(\operatorname{Syz}_1(L) \otimes K) = (\beta_0(L) - 1)\,\mathrm{l}(R),$$

в свою очередь, следует из подсчета длин в точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Syz}_1(L) \otimes K \to K^{\beta_0(L)} \to D \to 0$$

и предложения 2.52.

Используя (9) и соотношения $\beta_0(L) = \mu^0(K)$, $\beta_1(L) = \mu^0(K)^2 - 1$ и $\beta_2(L) = (\mu^0(K)^2 - 1)\mu^0(K)$, следующие из предложения 2.51, а также равенство $\mathrm{l}(R) = (1 + \mu^0(K))(1 + \beta_0(K))$, мы получаем искомое равенство. □

Теорема 2.57. SD(2)-*полные кольца козюлевы, т. е.* $\operatorname{Ext}^i_R(k,k)_j = 0$ *для* $i \neq j$.

Доказательство. Для $M = \operatorname{Syz}_1(K), \operatorname{Syz}_1(\operatorname{Hom}(K,D))$ имеем $\operatorname{Ext}^i_R(M,k)_j = 0$ для $i \neq j$. Остается заметить, что модули $\operatorname{Syz}_1(K)$ и $\operatorname{Syz}_1(\operatorname{Hom}(K,D))$ являются Tor-независимыми, а их тензорное произведение аннулируется $\mathfrak{m}$. □

3. PCI-размерность

Определение 3.1 ([18])**.** *Квазидеформацией* кольца R называется диаграмма локальных гомоморфизмов $R \to R' \leftarrow Q$, где $R \to R'$ — плоское расширение, а $R' \leftarrow Q$ — *деформация*, т. е. гомоморфизм факторизации по идеалу I, порожденному регулярной последовательностью.

Определение 3.2 ([18])**.** $\text{CI-}\dim_R M = \inf\{\operatorname{pd}_Q(M \otimes_R R') - \operatorname{pd}_Q R' \mid R \to R' \leftarrow Q - \text{квазидеформация}\}$.

Определение 3.3. Рассмотрим модули M над кольцом R, такие что $\text{G-}\dim_R M = 0$ и модули обладают свойством, что их числа Бетти $\beta^R_n(M)$ ограничены некоторым полиномом от n. Для таких модулей положим $\text{PCI-}\dim_R M = 0$. Для произвольных модулей положим

$$\text{PCI-}\dim_R M = \inf\{n \mid \text{существует точная последовательность}$$
$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0, \text{ где } \text{PCI-}\dim_R P_i = 0\}.$$

Следующее утверждение хорошо известно [26], но мы приводим более простое доказательство.

Предложение 3.4. *Если* R *— полное пересечение, то для для любого* R*-модуля* M *числа* $\beta^R_n(M)$ *ограничены некоторым полиномом от* n.

Доказательство. Сведем сначала это утверждение к случаю $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$. Положим $n = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$. Обозначим $\operatorname{Syz}^R_n(M) = \operatorname{coker} \delta_{n+1}$, где $(\mathbf{F}, \delta)$ — минимальная свободная резольвента M над R. При $i \gg 0$ имеем $\beta^R_i(\operatorname{Syz}^R_n(M)) = \beta^R_{i+n}(M)$. С другой стороны, $\text{G-}\dim_R M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$, откуда $\text{G-}\dim_R \operatorname{Syz}^R_n(M) = 0$, а значит, $\operatorname{depth} \operatorname{Syz}^R_n(M) = \operatorname{depth} R$. Теперь положим $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$. Выберем R- и M-регулярную последовательность $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{\operatorname{depth} R})$. Так как в этом случае $\operatorname{Tor}^R_i(R/(x), M) = 0$, имеем $\beta^R_i(M) = \beta^{R/(x)}_i(M/(x))$. Таким образом, утверждение свелось к случаю артинова кольца. Будем доказывать его индукцией по длине модуля M. Для поля вычетов k это классическое утверждение из [38]. Индукционный переход получается очевидным образом из точной последовательности $0 \to k \to M \to M/k \to 0$. □

Предложение 3.5. *Если* R *— полное пересечение, то для любого* R*-модуля* M *справедливо* $\text{PCI-}\dim_R M < \infty$. *Обратно, если* $\text{PCI-}\dim_R k < \infty$, *то* R *— полное пересечение.*

Доказательство. Пусть R — полное пересечение. Возьмем произвольный R-модуль M и построим для него резольвенту из модулей нулевой PCI-размерности. Положим $n = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$. Обозначим $\operatorname{Syz}^R_n(M) = \operatorname{coker} \delta_{n+1}$, где $(\mathbf{F}, \delta)$ — минимальная свободная резольвента M над R. Так как $\text{G-}\dim M$ конечна из-за гореншетйновости кольца R, $\text{G-}\dim_R \operatorname{Syz}^R_n(M) = 0$. При $i \gg 0$ имеем $\beta^R_i(\operatorname{Syz}^R_n(M)) = \beta^R_{i+n}(M)$. Отсюда и из того, что числа Бетти любого модуля над полным пересечением ограничены полиномом (3.4), мы получаем, что $\text{PCI-}\dim_R \operatorname{Syz}^R_n(M) = 0$.

Если же $\text{PCI-}\dim_R k < \infty$, то $\beta^R_i(k)$ ограничены полиномом, а значит, кольцо R — полное пересечение [27]. □

Предложение 3.6. $\text{PCI-}\dim_R M \leqslant \text{CI-}\dim_R M$, *причем если* $\text{CI-}\dim_R M$ *конечна, то достигается равенство.*

Доказательство. Если $\text{CI-}\dim_R M < \infty$, то по [18, теорема 1.4] $\text{G-}\dim_R M < \infty$. Положим $n = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M$. Обозначим $\operatorname{Syz}^R_n(M) = \operatorname{coker} \delta_{n+1}$, где $(\mathbf{F}, \delta)$ — минимальная свободная резольвента M над R. Из конечности $\text{G-}\dim M$ следует $\text{G-}\dim_R \operatorname{Syz}^R_n(M) = 0$. При $i \gg 0$ имеем $\beta^R_i(\operatorname{Syz}^R_n(M)) = \beta^R_{i+n}(M)$. Отсюда и из того, что числа Бетти любого модуля конечной CI-размерности ограничены полиномом [18, лемма 1.5], мы получаем, что $\text{PCI-}\dim_R \operatorname{Syz}^R_n(M) = 0$. □

Предложение 3.7. *Если* $\operatorname{PCI-dim} M < \infty$, *то* $\operatorname{PCI-dim} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$.

Доказательство. Утверждение очевидно, так как в этих предположениях $\operatorname{PCI-dim} M = \operatorname{G-dim} M$, а для G-размерности соответствующая формула верна. □

Аналогичным способом для PCI-размерности можно доказать некоторые другие свойства, имеющие место для CI-размерности. Основным моментом здесь является факт, что если числа Бетти двух модулей в короткой точной последовательности ограничены полиномом, то это верно и для третьего модуля. Более того, из свойств G-размерности очевидно, что верно следующее утверждение.

Предложение 3.8. *Если два модуля в короткой точной последовательности имеют конечную* PCI-*размерность, то и третий обладает этим свойством.*

Однако неизвестно, обладает ли аналогичным свойством CI-размерность.

Как показывает предложение 3.6, класс модулей конечной PCI-размерности содержит класс модулей конечной CI-размерности, в связи с чем возникает такой вопрос: верно ли, что эти классы совпадают? Отрицательный ответ на него был получен О. Величе в [39]. Было показано следующее.

Предложение 3.9 ([39])**.** *Пусть* Q *— кольцо, содержащее поле,* $\operatorname{depth} Q \geqslant 4$. *Тогда существует такой совершенный идеал* $I \subset Q$, *что* $\operatorname{grade} R/I = 4$ *и над кольцом* $R = Q/I$ *существует модуль* M, *для которого* $0 = \operatorname{PCI-dim}_R M < \operatorname{CI-dim}_R M = \infty$.

Докажем теперь, что локализация модуля конечной PCI-размерности также имеет конечную PCI-размерность.

Предложение 3.10. $\beta_i^{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leqslant \beta_i^R(M)$. *В частности, если правая часть ограничена полиномом от* i, *то и левая тоже.*

Доказательство. Возьмем минимальную свободную резольвенту M над R и умножим ее тензорно на (R-плоский) модуль $R_\mathfrak{p}$. Получившийся комплекс есть комплекс свободных $R_\mathfrak{p}$-модулей, являющийся прямой суммой минимальной резольвенты $M_\mathfrak{p}$ над $R_\mathfrak{p}$ и некоторого количества комплексов вида $0 \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p} \to 0$. Так как i-е число Бетти равно рангу i-го свободного модуля в минимальной резольвенте, все доказано. □

Предложение 3.11. $\operatorname{PCI-dim}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leqslant \operatorname{PCI-dim}_R M$.

Доказательство. Утверждение с очевидностью следует из соответствующего свойства для G-размерности и предложения 3.10. □

Предложение 3.12 ([1])**.** *Если* R *— полное пересечение, то* $R_\mathfrak{p}$ *— полное пересечение.*

Доказательство. Действительно, если R — полное пересечение, то по предложению 3.4 $\beta_n^R(R/\mathfrak{p})$ ограничены полиномом. По предложению 3.10 $\beta_i^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ тоже ограничены полиномом. Но $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ — поле вычетов кольца $R_\mathfrak{p}$, и из ограниченности его чисел Бетти полиномом следует (см. [27]), что $R_\mathfrak{p}$ — полное пересечение. □

4. CM-размерность

Предпосылки. Рассмотрим следующие две группы понятий:

1) регулярное кольцо; полное пересечение; идеал, порожденный регулярной последовательностью из $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$; идеал, порожденный произвольной регулярной последовательностью; проективная размерность;
2) горенштейново кольцо; коэн-маколеево кольцо; G-горенштейнов идеал; G-совершенный идеал; G-размерность.

Для большого количества утверждений, относящихся к первой группе понятий имеются аналоги для второй группы. Приведем несколько примеров.

Фактор-кольцо регулярного кольца по некоторому идеалу является регулярным кольцом тогда и только тогда, когда идеал порожден регулярной последовательностью из $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, и, аналогично,

фактор-кольцо горенштейнова кольца по некоторому идеалу является горенштейновым кольцом тогда и только тогда, когда идеал является G-горенштейновым.

Фактор-кольцо регулярного кольца по некоторому идеалу является полным пересечением тогда и только тогда, когда идеал порожден регулярной последовательностью, и, аналогично, фактор-кольцо горенштейнова кольца по некоторому идеалу является коэн-маколеевым кольцом тогда и только тогда, когда идеал является G-совершенным.

Пусть S — кольцо, R — его фактор-кольцо по идеалу I, порожденному регулярной последовательностью из $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, M — R-модуль. Тогда верно, что $\operatorname{pd}_R M < \infty$ в том и только в том случае, если $\operatorname{pd}_S M < \infty$, и если одно из этих условий выполнено, то $\operatorname{pd}_R M + \operatorname{grade} R/I = \operatorname{pd}_S M$ (см. [33]). Аналогом этого утверждения является следующее. Пусть S — кольцо, R — его фактор-кольцо по G-горенштейнову идеалу, M — R-модуль. Тогда верно, что $\text{G-}\dim_R M < \infty$ в том и только в том случае, если $\text{G-}\dim_S M < \infty$, и если одно из этих условий выполнено, то $\text{G-}\dim_R M + \operatorname{grade} R/I = \text{G-}\dim_S M$ (см. [9]).

Дадим теперь определение CM-размерности, которое было бы аналогом определений 3.1 и 3.2 для CI-размерности.

Определение 4.1. G-*квазидеформацией* кольца R называется диаграмма локальных гомоморфизмов $R \to R' \leftarrow Q$, где $R \to R'$ — плоское расширение, а $R' \leftarrow Q$ — G-*деформация*, т. е. гомоморфизм факторизации по G-совершенному идеалу I.

Определение 4.2. $\text{CM-}\dim_R M = \inf\{\text{G-}\dim_Q(M \otimes_R R') - \text{G-}\dim_Q R' \mid R \to R' \leftarrow Q$ — G-квазидеформация$\}$.

Докажем, что из конечности G_K-размерности модуля M относительно удобного модуля K следует конечность его CM-размерности. Для этого нам потребуется новый критерий G-совершенности идеала.

Теорема 4.3. *Следующее условие на идеал I равносильно условиям* 1), 2) *из предложения* 1.56:

3) *существует такой идеал J, что идеалы I и J являются непосредственно* G-*связанными,* $\operatorname{Ext}_R^{\operatorname{grade} R/I}(R/I, R)$ — *удобный R/I-модуль и* $\operatorname{Ext}_R^{\operatorname{grade} R/J}(R/J, R)$ — *удобный R/J-модуль.*

Доказательство. Проверим, что из справедливости условия 1) следует выполнение условия 3). В качестве $\mathfrak{a}$ можно взять идеал, порожденный максимальной регулярной последовательностью в I. Положим $J = (\mathfrak{a} : I)$. Тогда

$$\operatorname{grade} R/I = \operatorname{grade} R/J$$

и

$$\text{G-}\dim_R R/J = \text{G-}\dim_{R/\mathfrak{a}} R/J + \text{G-}\dim_R R/\mathfrak{a} = \text{G-}\dim_{R/\mathfrak{a}} R/I + \text{G-}\dim_R R/\mathfrak{a} = \text{G-}\dim_R R/I.$$

Отсюда следует G-совершенность идеала J. Далее воспользуемся условием 2).

Проверим, что из справедливости условия 3) следует выполнение условия 1). Пусть $\mathfrak{a}$ — соответствующий G-горенштейнов идеал. Рассмотрим идеалы $I/\mathfrak{a}$ и $J/\mathfrak{a}$ в кольце $R/\mathfrak{a}$. G-совершенность этих идеалов равносильна G-совершенности I и J. Условие 3) по лемме 1.57 спускается на фактор-кольцо $R/\mathfrak{a}$, поэтому достаточно рассмотреть следующий случай: $\operatorname{Ann} I = J$, $\operatorname{Ann} J = I$, I — удобный R/J-модуль, J — удобный R/I-модуль. При этих условиях точные последовательности $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ и $0 \to J \to R \to R/J \to 0$ двойственны друг другу, и мы получаем при $i > 1$ следующие изоморфизмы:

$$\operatorname{Ext}_R^i(R/I, R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i-1}(I, R), \quad \operatorname{Ext}_R^i(R/J, R) \cong \operatorname{Ext}_R^{i-1}(J, R),$$

а также

$$\operatorname{Ext}_R^1(R/I, R) = 0, \quad \operatorname{Ext}_R^1(R/J, R) = 0.$$

Теперь достаточно показать, что при $i > 0$

$$\operatorname{Ext}_R^i(R/I, R) = 0 = \operatorname{Ext}_R^i(R/J, R).$$

База индукции доказана. Пусть $k \geqslant 1$ и утверждение верно при $i \leqslant k$. Рассмотрим спектральные последовательности замены колец

$$\operatorname{Ext}^i_{R/I}(J, \operatorname{Ext}^j_R(R/I, R)) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{i+j}_R(J, R)$$

и

$$\operatorname{Ext}^i_{R/J}(I, \operatorname{Ext}^j_R(R/J, R)) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{i+j}_R(I, R).$$

При $i \geqslant 0$ имеем

$$\operatorname{Ext}^i_{R/I}(J, \operatorname{Ext}^{k-i}_R(R/I, R)) = 0$$

по предположению индукции и условию удобности R/I-модуля J. Значит,

$$\operatorname{Ext}^{k+1}_R(R/J, R) \simeq \operatorname{Ext}^k_R(J, R) = 0.$$

Аналогично

$$\operatorname{Ext}^{k+1}_R(R/I, R) = 0.$$

Теорема доказана. □

Замечание 4.4. Случай, когда $\mathfrak{a} = 0$, а идеалы I и $J = \operatorname{Ann} I$ главные, впервые был рассмотрен в [1] (см. также [15]).

Перечислим несколько непосредственных следствий.

Следствие 4.5. *Если I — главный идеал, то $\operatorname{G-dim}_R R/I = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ann} I$ — удобный R/I-модуль.*

Следствие 4.6. *Если существует G-гореншейнов идеал $\mathfrak{a}$, такой что $(\mathfrak{a} : I) = I$, а $\operatorname{Ext}^{\operatorname{grade} R/I}_R(R/I, R)$ — удобный R/I-модуль, то I G-совершенен.*

Следующая конструкция в похожем контексте рассматривалась в [2] для случая, когда K — дуализирующий модуль. Пусть K — удобный модуль над кольцом R. Зададим на R-модуле $S = R \oplus K$ умножение по формуле

$$(a_1, r_1)(a_2, r_2) = (a_1 a_2, a_1 r_2 + a_2 r_1).$$

Очевидно, что таким образом на S вводится структура кольца. Заметим, что имеется сюръективный гомоморфизм колец ϕ из S в R, так что R можно рассматривать как S-модуль. Ядро этого гомоморфизма есть идеал K. Этот идеал является G-совершенным по следствию 4.6, где в качестве $\mathfrak{a}$ рассматривается нулевой идеал.

Теорема 4.7. *Пусть $\operatorname{G}_K\text{-dim}\, M < \infty$ для некоторого удобного модуля K, тогда $\operatorname{CM-dim} M < \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим G-квазидеформацию $R \to R \leftarrow S$, где в качестве S берется кольцо $R \oplus K$, рассматривавшееся выше. По теореме 1.54 $\operatorname{G}_K\text{-dim}_R M = \operatorname{G-dim}_S M$. □

Следствие 4.8. *Если K — удобный модуль над R, то существует кольцо S, такое что $R \simeq S/I$, $\operatorname{G-dim}_S R = 0$ и $\operatorname{Hom}_S(R, S) \simeq K$.*

Теперь можно дать еще одно определение CM-размерности, равносильное определению 4.2, но более удобное технически.

Определение 4.2′. $\operatorname{CM-dim}_R M = \inf\{\operatorname{G}_K\text{-dim}_{R'}(M \otimes_R R') \mid R \to R' —$ плоское расширение, $K —$ удобный R'-модуль$\}$.

В частности, теперь очевидно, что $\operatorname{CM-dim} M \geqslant 0$. Воспользуемся этим определением и докажем, что CM-размерность действительно характеризует кольца Коэна—Маколея.

Теорема 4.9. *Если $\operatorname{CM-dim}_R M < \infty$, то $\operatorname{CM-dim}_R M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$.*

Доказательство. Утверждение следует из соответствующего равенства для G-размерности:

$$\operatorname{CM-dim}_R M = \operatorname{G-dim}_Q M' - \operatorname{G-dim}_Q R' = (\operatorname{depth} Q - \operatorname{depth}_Q M') - (\operatorname{depth} Q - \operatorname{depth}_Q R') =$$
$$= \operatorname{depth}_Q R' - \operatorname{depth}_Q M' = \operatorname{depth} R' - \operatorname{depth}_{R'}(M \otimes_R R') = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M.$$

Теорема доказана. □

Теорема 4.10. *Если кольцо R является кольцом Коэна—Маколея, то для любого R-модуля M имеем* $\mathrm{CM\text{-}dim}_R M < \infty$. *Обратно, если* $\mathrm{CM\text{-}dim}_R k < \infty$, *то R — кольцо Коэна—Маколея.*

Доказательство. Если кольцо R является кольцом Коэна—Маколея, то его пополнение R' является фактор-кольцом регулярного кольца S по G-совершенному идеалу, и утверждение следует из того, что все модули над регулярным кольцом имеют конечную G- (даже проективную) размерность.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathrm{CM\text{-}dim}_R k < \infty$, $R \to R'$ — соответствующее плоское расширение, а K — удобный модуль. Пусть $(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_{\operatorname{depth} R})$ — максимальная R-регулярная последовательность. Тогда $\mathrm{CM\text{-}dim}_{R/(\boldsymbol{x})} k < \infty$. Действительно, так как $R \to R'$ — плоское расширение, то $(\boldsymbol{x})$ — R'-регулярная последовательность, $R/(\boldsymbol{x}) \to R'/(\boldsymbol{x})$ тоже плоское расширение, а удобность $R'/(\boldsymbol{x})$-модуля $K/(\boldsymbol{x})K$ и равенство

$$\mathrm{G}_{K/(\boldsymbol{x})K}\text{-}\dim_{R'/(\boldsymbol{x})}(k \otimes R'/(\boldsymbol{x})) = \mathrm{G}_K\text{-}\dim_{R'}(k \otimes R') - \operatorname{depth} R$$

следует из теоремы 1.54. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $\operatorname{depth} R = 0$. Докажем, что в этом случае R артиново. Если это не так, то для любого n идеал $\mathfrak{m}^n$ ненулевой. Для любого n имеем вложение $0 \to \operatorname{Hom}(k, \mathfrak{m}^n) \to \operatorname{Hom}(k, R)$. Так как $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$, то при $n \gg 0$ имеем $\operatorname{Hom}(k, \mathfrak{m}^n) = 0$, откуда $\operatorname{depth} \mathfrak{m}^n \neq 0$. С другой стороны, для R-модулей M конечной длины индукцией по длине с использованием леммы 2.6 показывается, что $\mathrm{G}_K\text{-}\dim_{R'} M \otimes R' < \infty$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathfrak{m}^n \otimes_R R' \to R' \to R/\mathfrak{m}^n \otimes_R R' \to 0.$$

Так как длина модуля $R/\mathfrak{m}^n$ конечна, $\mathrm{G}_K\text{-}\dim_{R'} R/\mathfrak{m}^n \otimes R' < \infty$, и из леммы 2.6 получаем $\mathrm{G}_K\text{-}\dim_{R'} \mathfrak{m}^n \otimes_R R' < \infty$, а значит, $\mathrm{CM\text{-}dim}_R \mathfrak{m}^n < \infty$. Получили противоречие с теоремой 4.9:

$$0 < \operatorname{depth} \mathfrak{m}^n + \mathrm{CM\text{-}dim}_R \mathfrak{m}^n = \operatorname{depth} R = 0.$$

Теорема доказана. □

Предложение 4.11. $\mathrm{CM\text{-}dim}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{CM\text{-}dim}_R M$.

Доказательство. Очевидно, можно считать $\mathrm{CM\text{-}dim}_R M$ конечной. Пусть $R \to R' \leftarrow Q$ — соответствующая G-квазидеформация. Так как $R \to R'$ — плоское расширение, то существует идеал $\mathfrak{p}' \subset R'$, такой что $R \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{q} \subset Q$ — прообраз $\mathfrak{p}'$. Легко видеть, что диаграмма $R_\mathfrak{p} \to R'_{\mathfrak{p}'} \leftarrow Q_\mathfrak{q}$ является G-квазидеформацией. Тогда

$$\mathrm{G}\text{-}\dim_Q M \otimes_R R' \geqslant \mathrm{G}\text{-}\dim_{Q_\mathfrak{q}} (M \otimes_R R')_\mathfrak{q} = \mathrm{G}\text{-}\dim_{Q_\mathfrak{q}} M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R'_{\mathfrak{p}'},$$
$$\mathrm{G}\text{-}\dim_Q R' = \mathrm{G}\text{-}\dim_{Q_\mathfrak{q}} R'_{\mathfrak{p}'},$$

что и требовалось. □

Замечание 4.12. Из теоремы 4.9 и предложения 4.11 получаем, что для модулей M конечной CM-размерности и для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ выполнено следующее неравенство:

$$\operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M \geqslant \operatorname{depth} R_\mathfrak{p} - \operatorname{depth} M_\mathfrak{p}.$$

Последнее условие на модуль M использовалось в [20], в частности, авторы указывают (см. [20, замечание 5]), что оно выполнено при $\mathrm{G}\text{-}\dim M < \infty$. Таким образом, мы получили некоторое расширение класса модулей, для которых заведомо выполнены условия [20, следствие 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аврамов Л. Л.* Плоские морфизмы полных пересечений // ДАН СССР. — 1975. — *225*. — С. 11—14.
2. *Аврамов Л. Л., Строгалов С. С., Тодоров А. Н.* Модули Горенштейна // Успехи мат. наук. — 1972. — *27*, № 4. — С. 199—200.
3. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. — М.: Наука, 1988.
4. *Герко А. А.* О гомологических размерностях // Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре, основанного О. Ю. Шмидтом в 1903 г. (13—16 ноября 2000). Тезисы докладов. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2000. — С. 13.

5. *Герко А. А.* О гомологических размерностях // Мат. сб. — 2001. — *192*, № 8. — С. 79—94.
6. *Герко А. А.* Об удобных модулях и G-совершенных идеалах // Успехи мат. наук. — 2001. — *56*, № 4. — С. 141—142.
7. *Герко А. А.* О структуре множества полудуализирующих комплексов // Успехи мат. наук. — 2004. — *59*, № 5. — С. 145—146.
8. *Герко А. А.* О структуре множества полудуализирующих комплексов // Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета. Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2004. — С. 36—38.
9. *Голод Е. С.* G-размерность и обобщенные совершенные идеалы // Тр. МИАН СССР. — 1984. — *165*. — С. 62—66.
10. *Голод Е. С.* Вопрос // Успехи мат. наук. — 1985. — *40*, № 1. — С. 234.
11. *Araya T., Takahashi R., Yoshino Y.* Homological invariants associated to semi-dualizing bimodules. — Preprint, 2002.
12. *Araya T., Yoshino Y.* Remarks on a depth formula, a grade inequality and a conjecture of Auslander // Comm. Algebra. — 1998. — *26*. — P. 3793—3806.
13. *Auslander M., Bridger M.* Stable module theory // Mem. Amer. Math. Soc. — 1969. — *94*.
14. *Auslander M., Ding S., Solberg Ø.* Liftings and weak liftings of modules // J. Algebra. — 1993. — *156*. — P. 273—397.
15. *Avramov L. L.* Modules of finite virtual projective dimension // Invent. Math. — 1989. — *96*. — P. 71—101.
16. *Avramov L. L., Foxby H.-B.* Homological dimensions of unbounded complexes // J. Pure Appl. Algebra. — 1991. — *71*. — P. 129—155.
17. *Avramov L. L., Foxby H.-B.* Ring homomorphisms and finite Gorenstein dimension // Proc. London Math. Soc. — 1997. — *307*. — P. 241—270.
18. *Avramov L. L., Gasharov V. N., Peeva I. V.* Complete intersection dimension // Publ. Math. I.H.E.S. — 1997. — *86*. — P. 67—114.
19. *Bass H.* On the ubiquity of Gorenstein rings // Math. Z. — 1963. — *82*. — P. 8—28.
20. *Choi S., Iyengar S.* On a depth formula for modules over local rings // Comm. Algebra. — 2001. — *29*. — P. 3135—3143.
21. *Christensen L. W.* Gorenstein Dimensions. — Berlin: Springer, 2000. — Lecture Notes in Math. Vol. 1747.
22. *Christensen L. W.* Semi-dualizing complexes and their Auslander categories // Trans. Amer. Math. Soc. — 2001. — *353*, N 5. — P. 1839—1883.
23. *Foxby H.-B.* Gorenstein modules and related modules // Math. Scand. — 1973. — *31*. — P. 267—284.
24. *Foxby H.-B.* Unpublished notes. 1987.
25. *Gerko A. A.* On the structure of the set of semidualizing complexes // Illinois J. Math. — 2004. — *48*, N 3. — P. 965—976.
26. *Gulliksen T. H.* A change of the ring theorem, with applications to Poincaré series and intersection multiplicity // Math. Scand. — 1974. — *34*. — P. 167—183.
27. *Gulliksen T. H.* A homological characterization of local complete intersections // Compositio Math. — 1973. — *23*. — P. 251—255.
28. *Hartshorne R.* Residues and Duality. — Berlin: Springer, 1971. — Lecture Notes in Math. Vol. 12.
29. *Huneke C., Sega L., Vraciu A.* Vanishing of Ext and Tor over some Cohen—Macaulay local rings // Illinois J. Math. — 2004. — *48*, N 1. — P. 295—317.
30. *Iyengar S.* Depth for complexes, and intersection theorems // Math. Z. — 1999. — *230*. — P. 545—567.
31. *Kawasaki T.* On Macaulayfication of Noetherian schemes // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — *352*, N 6. — P. 2517—2552.
32. *Maşek V.* Gorenstein Dimension of Modules. — arXiv:math.AC/9809121.
33. *Nagata M.* Local Rings. — New York: Wiley, 1962.
34. *Peskine C., Szpiro L.* Dimension projective finié et cohomologie locale // Publ. Math. I.H.E.S. — 1972. — *42*. — P. 47—119.
35. *Sather-Wagstaff S.* Semidualizing Modules and the Divisor Class Group. — Preprint, 2004.
36. *Sharp R. Y.* Dualizing complexes for commutative Noetherian rings // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *75*. — P. 369—386.
37. *Spaltenstein N.* Resolutions of unbounded complexes // Compositio Math. — 1988. — *65*. — P. 121—154.
38. *Tate J.* Homology of Noetherian rings and local rings // Illinois J. Math. — 1957. — *1*. — P. 14—25.
39. *Veliche O.* Construction of modules with finite homological dimensions // J. Algebra. — 2002. — *250*. — P. 427—449.

40. *Yoshino Y.* Modules of G-dimension zero over local rings with the cube of maximal ideal being zero // Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra (Sinaia, 2002). — Dordrecht: Kluwer, 2003. — NATO Sci. Ser., II: Math., Phys. and Chem. Vol. 115. — P. 255—273.

А. А. Герко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Современная математика и ее приложения. Том 30 (2005). С. 31–45

УДК 512.552

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ (2×2)-МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ МНОГОЧЛЕНОВ

© 2005 г. **Ф. ГРУНЕВАЛЬД, Н. К. ИЫУДУ**

Аннотация. Предлагается эффективное решение задачи сопряжения для (2×2)-матриц над кольцом многочленов от одной переменной над конечным полем.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Мы рассматриваем задачу сопряжения в кольце (2×2)-матриц $M(2, k[x])$ над кольцом многочленов $k[x]$, где k — конечное поле. Говорят, что матрицы $A, B \in M(2, k[x])$ сопряжены, если существует сопрягающая, т. е. удовлетворяющая соотношению $B = UAU^{-1}$, матрица U в группе обратимых матриц $\mathrm{GL}(k[x])$ над $k[x]$. В дальнейшем через $\deg(P)$ обозначается степень многочлена, а через $\deg(A)$ — максимальная степень компонент $A \in M(2, k[x])$.

Теорема 1.1. *Пусть k — конечное поле из q элементов, $A, B \in M(2, k[x])$. Пусть δ — максимум из $\deg(A)$ и $\deg(B)$. Если A и B сопряженные, то существует сопрягающая матрица U, для которой $\deg(U) \leqslant (1+q)\delta q^{7\delta}$.*

Для некоторых пар матриц $A, B \in M(2, k[x])$ оценка степеней компонент U может быть улучшена до линейной по δ и не зависящей от q (см. предложение 4.2). Теорема 1.1 показывает, что существует алгоритм, позволяющий определить, сопряжены или не сопряжены матрицы $A, B \in \in M(2, k[x])$, поэтому можно сформулировать следствие.

Следствие 1.2. *Пусть k — конечное поле. Тогда задача сопряжения в группе $\mathrm{GL}(2, k[x])$ эффективно разрешима.*

Следствие 1.2 следует сравнить с решением задачи сопряженности в арифметической группе. Задача сопряженности для $\mathrm{GL}(n, k)$ ($n \in \mathbb{N}$) была решена в [5]. Однако даже в случае $n = 2$ не известно никаких оценок, подобных вытекающим из теоремы 1.1. Кроме того, алгоритмы, описанные в [6] и решающие задачу сопряженности в любой арифметической группе, не дают оценок для размера сопрягающей матрицы. Метод решения, использованный в [5] для случая $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ ($n \in \mathbb{N}$), может быть обобщен (без оценок) на случай $\mathrm{GL}(n, k[x])$ ($n \in \mathbb{N}$, k — конечное поле), если

ISSN 1512–1712

характеристика поля k не делит размер n матрицы. Кроме того, предлагаемый метод связан с излишними трудностями в случае, когда поле k имеет характеристику 2. Дальнейшие особенности задачи сопряженности в $\mathrm{GL}(2,k[x])$ описаны в разделе 8.

Для заданной матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,k[x])$ определим ее централизатор как

$$\mathrm{Z}(A) := \{U \in \mathrm{GL}(2,k[x]) \mid UAU^{-1} = A\}. \tag{1}$$

В случае, когда $A \neq 1$ полупроста, хорошо известно, что $\mathrm{Z}(A)$ — либо конечная группа, либо произведение бесконечной циклической группы на конечную группу (см. раздел 7). С помощью предлагаемых методов можно получить оценку степеней компонент матрицы, порождающей бесконечную часть.

Теорема 1.3. *Пусть k — конечное поле из q элементов, $A \in \mathrm{GL}(2,k[x])$ — полупростая матрица, не равная единичной, такая что централизатор $\mathrm{Z}(A)$ бесконечен. Тогда существует матрица $U \in \mathrm{Z}(A)$, порождающая $\mathrm{Z}(A)$ с точностью до конечной группы, причем* $\deg(U) \leqslant \leqslant \deg(A)q^{2\deg(A)}$.

Метод доказательства теоремы 1.1 использует редукцию к квадратичному уравнению от двух переменных. Как специальный случай возникает уравнение Пелля

$$u^2 + Dv^2 = 1 \tag{2}$$

с $D \in k[x]$. Назовем многочлен $D \in k[x]$ положительным, если он не константа и не квадрат, имеет четную степень, а его старший коэффициент — квадрат. Решение (u,v) уравнения (2) называется тривиальным, если выполнено соотношение $u,v \in k$.

Теорема 1.4. *Пусть k — конечное поле из q элементов, $D \in k[x]$ — положительный многочлен. Тогда уравнение* (2) *имеет нетривиальное решение $(u,v) \in k^2$, причем* $\deg(u), \deg(v) \leqslant \leqslant q^{\deg(D)}$.

Уравнение Пелля (2) активно изучалось в статье Э. Артина (1924) [3]. Он исследовал уравнение Пелля с помощью представлений непрерывными дробями. Однако он вынужден был предположить, что характеристика поля k не равна 2. Результат теоремы 1.4 непосредственно следует из [3]. Затем техника Артина модифицируется для случая характеристики 2.

Следуя предлагаемой редукции, нужно проанализировать решения общих квадратичных уравнений

$$au^2 + buv + cv^2 = d, \tag{3}$$

где a, b, c, d — многочлены из $k[x]$. В случае, когда характеристика поля k не равна 2, приемлемые результаты получаются с помощью методов непрерывных дробей из [3]. В случае, когда характеристика k равна 2, используем функции степеней на некоторых кольцах квадратичных расширений $k[x]$ для отслеживания поведения разложений в непрерывные дроби.

2. Редукция к квадратичному уравнению

Пусть k — поле. Рассмотрим пары матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2,k[x]), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M(2,k[x]), \tag{4}$$

которые будем называть рационально сопряженными, если они сопрягаются элементом из $\mathrm{GL}(2,k(x))$, где $k(x)$ — поле рациональных функций над k. Свойство рациональной сопряженности эквивалентно условиям

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B), \quad \det(A) = \det(B), \tag{5}$$

где $\mathrm{Tr}(A)$ — след, а $\det(A)$ — определитель матрицы A.

Предположим, что ищется матрица

$$U = \begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,k[x]), \tag{6}$$

сопрягающая A с B. Тогда приходим к четырем линейным уравнениям, задаваемым компонентами матрицы $UA - BU$ по переменным u, p, v, q, а также к квадратичному уравнению $\det(U) \in k^* = k \setminus \{0\}$. Элементарные рассмотрения этой системы уравнений доказывают следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть матрицы $A, B \in M(2, k[x])$ удовлетворяют условию $a_{21} = b_{21} = 0$. Пусть δ — наибольшая степень компонент A и B. Тогда A и B сопряжены с помощью элемента $\mathrm{GL}(2, k[x]$ в том и только в том случае, если они сопряжены элементом $U \in \mathrm{GL}(2, k[x]$ с $\deg(U) \leqslant \delta$.*

Эта лемма доказывает теорему 1.1 в специальном случае верхнетреугольных матриц A и B.

Пусть $\operatorname{char} k = 2$. Условие сопряжения $UAU^{-1} = B$ при $U \in Gl_2(k[x])$ эквивалентно системе

$$uq + pv \in k^*, \tag{7}$$

$$UA = BU, \tag{8}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix},$$

$k^* = k \setminus \{0\}$ — мультипликативная группа поля k. Поскольку множество сопрягающих матриц устойчиво относительно умножения на ненулевую константу и существует единственный квадратный корень в рассматриваемом поле, то разрешимость системы (7), (8) эквивалентна разрешимости той же системы, в которой (7) заменено на

$$uq + pv = 1. \tag{9}$$

Квадратичное уравнение (9) с дополнительными линейными условиями (8) можно свести к одному квадратичному уравнению двумя различными способами.

Во-первых, можно использовать процедуру построения порождающей системы сизигий модуля [2] для линейной системы (8). Другой путь — непосредственная подстановка решения линейной системы (8) в рациональных функциях. В обоих случаях получается уравнение типа $au^2 + buv + cv^2 = d$, но в первом случае — с переменными, имеющими другой смысл, а во втором — с некоторыми дополнительными условиями делимости. Пойдем по второму пути. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(k[x]), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(k[x]).$$

Подставляя рациональные решения

$$p = \frac{(a_{11} + b_{11})u + b_{12}v}{a_{21}}, \quad q = \frac{b_{21}u + (a_{11} + b_{11})v}{a_{21}} \tag{10}$$

из (8) в (9), получаем уравнение

$$b_{21}u^2 + (b_{11} + b_{22})uv + b_{12}v^2 = a_{21}. \tag{11}$$

Чтобы p и q были многочленами, для решений уравнения (11) нужно проверить, что a_{21} делит $(a_{11} + b_{11})u + b_{12}v$ и a_{21} делит $b_{21}u + (a_{11} + b_{11})v$.

Можно рассмотреть отдельно достаточно простой случай, когда одна из матриц диагональна. Матрицы A и B, где B диагональна, сопряжены в том и только в том случае, если

$$\frac{a_{12}(b_{22} - b_{11})}{\text{НОД}(a_{11} - b_{11}, a_{12})\,\text{НОД}(a_{11} - b_{22}, a_{12})} \in k^*$$

(в случае, если $(a_{11} - b_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ и $(a_{11} - b_{22}, a_{12}) \neq (0, 0)$). В случае $(a_{11} - b_{11}, a_{12}) = (0, 0)$ условие немного отличается:

$$(b_{11} - a_{22})(b_{22} - a_{11}) - \frac{a_{12}a_{21}}{\text{НОД}(b_{11} - a_{22}, a_{12})\,\text{НОД}(a_{11} - b_{22}, a_{12})} \in k^*.$$

Мы ограничимся случаем $(a_{12}, a_{21}) \neq (0, 0)$ и $(b_{12}, b_{21}) \neq (0, 0)$. Так как любая матрица сопряжена своей транспонированной, то, не нарушая общности, можно считать что a_{21} и b_{21} не равны нулю.

3. Предварительные рассмотрения для решения квадратичного уравнения $au^2 + buv + cv^2 = d$

В этом разделе мы изучим уравнение $au^2 + buv + cv^2 = d$, где $a \neq 0$. Умножая уравнение на a и производя замену переменных $u_1 = au$, $v_1 = v$, получаем уравнение $u_1^2 + bau_1v_1 + cav_1^2 = da$ с монарным (старший коэффициент равен 1) многочленом в левой части. После нахождения решения нужно проверить, делит ли a многочлен u_1, и только в этом случае u_1/a дает решение исходного уравнения.

Рассмотрим следующие три случая, определенные природой корней уравнения

$$t^2 + bt + c = 0. \tag{12}$$

Случай 1. Уравнение (12) разрешимо в $k(x)$. Заметим, что на самом деле это означает, что (12) разрешимо в $k[x]$. Если F/Q — рациональное решение и НОД$(F, Q) = 1$, то из $F^2 + bFQ + cQ^2 = 0$ вытекает, что $Q \mid F^2$, следовательно, Q может быть только постоянной, и решение на самом деле полиномиально. В этом случае $d = u^2 + buv + cv^2 = (u + \Delta v)(u + (b + \Delta)v)$ есть произведение двух многочленов. Существует конечное множество разложений d на два сомножителя из $k[x]$, потому получаем конечное число линейных систем для u, v.

Отметим, что если $b = 0$, то мы получаем рациональные решения (случай 1). В самом деле, пусть $b = 0$. Уравнение приобретает вид $u^2 + cv^2 = d$. Теперь можно представить коэффициенты следующим образом: $c(x) = c_0(x^2) + xc_1(x^2)$, $d(x) = d_0(x^2) + xd_1(x^2)$. Если $u = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i x^i$, то при $\tilde{u} = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i^2 x^i$ имеем $u^2(x) = \tilde{u}(x^2)$. Отдельное рассмотрение четных и нечетных степеней x дает два линейных уравнения на $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$:

$$\begin{cases} \tilde{u} + c_0\tilde{v} = d_0, \\ c_1\tilde{v} = d_1. \end{cases}$$

Если $c_1 = d_1 = 0$, то существует бесконечно много рациональных решений: $\tilde{u} = -\frac{d_0}{c_0}\tilde{v}$. В противном случае существует не более одного рационального решения. Для любого решения $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ можно единственным образом определить u и v: $u_i = \sqrt{\tilde{u}_i}$ и $v_i = \sqrt{\tilde{v}_i}$ (ввиду существования и единственности квадратного корня в рассматриваемом поле k).

Другие два случая более существенны и составят позже предмет основного обсуждения.

Далее мы считаем, что уравнение (12) не имеет рациональных решений, в частности $b \neq 0$.

Определим *функцию степени на* $k[x]$ как обычную степень ненулевого многочлена, положим $\deg(0) = -\infty$.

Рассмотрим пополнение $k[x]$ относительно нормирования $|p| = 2^n$, где $n = \deg p$ (нормирование нуля равно 1). Это пополнение есть алгебра формальных степенных рядов

$$K = k((x)) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{d} \alpha_i x^i,\ \alpha_i \in k,\ d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Определение. Пусть $\rho = \sum\limits_{-\infty}^{d} \alpha_n x^n$ — степенной ряд. Говорят, что d — степень ρ, если $\alpha_d \neq 0$.

Случай 2. Если (12) разрешимо в $K \setminus k[x]$, то говорят о *вещественном* случае.

Случай 3. В случае, когда решение не представляется степенным рядом, говорят, что имеет место *мнимый* случай.

Рассмотрим теперь кольцо (и соответствующее поле функций) $R = k[x, t]/f_x(t)$, где $f_x(t) = t^2 + bt + c$, $b, c \in k[x]$. Очевидно, что элементы R можно единственным образом представить в виде $u + \Delta v$, где $u, v \in k[x]$ и $f_x(\Delta) = 0$. Можно определить *норму* элемента $\omega = u + \Delta v$ как $N(u + \Delta v) = F(u, v) = u^2 + buv + cv^2$. Определим *сопряженный* элемент для ω как $\omega' = u + (b + \Delta)v$.

Легко проверяются следующие свойства введенных понятий нормы и сопряженности.

Лемма 3.1.

1) $N(\omega) = \omega\omega'$;
2) $(\omega_1\omega_2)' = \omega_1'\omega_2'$;

3) $N(\omega_1\omega_2)=N(\omega_1)N(\omega_2)$;
4) $N(\omega^{-1})=N(\omega)^{-1}$.

Лемма 3.2. *Элемент ε есть единица R в том и только в том случае, если $N(\varepsilon)\in k^*$.*

Доказательство. Если существует ε^{-1}, то в силу утверждений 3) и 4) леммы 3.1

$$N(\varepsilon\varepsilon^{-1})=N(\varepsilon)N(\varepsilon^{-1})=N(\varepsilon)N(\varepsilon)^{-1}=1.$$

Следовательно, $N(\varepsilon)$ — обратимый многочлен, т. е. $N(\varepsilon)\in k^*$. □

Вещественный и мнимый случаи будут рассматриваться различными способами, а потому отделим сначала эти ситуации.

Как и ранее, уравнение имеет вид

$$u^2+buv+cv^2=d. \tag{13}$$

Предложение 3.3.

I. *Если $\deg c>2\deg b$ и $\deg c$ нечетно, то имеем мнимый случай.*
II. *Если $\deg c\geqslant 2\deg b$ и $\deg c$ четно, то существует обратимое линейное преобразование переменных, приводящее уравнение к новому виду $u^2+buv+\tilde{c}v^2=d$ с $\deg\tilde{c}<\deg c$.*
III. *Если $\deg c=2\deg b$ и уравнение $b_0^2t^2+b_0^2t+c_0=0$ ($b_0,c_0\in k$ — коэффициенты при старших членах b и c) разрешимо в k, то существует замена переменных, приводящая уравнение к новому виду $u^2+buv+\tilde{c}v^2=d$ с $\deg\tilde{c}<\deg c$. В противном случае имеет место мнимый случай.*
IV. *Если $\deg c<2\deg b$, то имеет место вещественный случай.*

Доказательство.

I. Предположим, что $\omega=\sum\limits_{-\infty}^{m}a_nt^n\in K$ — корень уравнения $\omega^2+b\omega+c=0$, $a_n\neq 0$. Для сокращения необходимо, чтобы степени двух членов в этом уравнении были равны, а степень третьего не больше их. Априори существуют три возможности.

1. $\deg\omega^2=\deg b\omega$. Тогда $\deg(\omega^2+b\omega)\leqslant 2\deg b<\deg c$, и сокращение невозможно.

2. $\deg b\omega=\deg c$. Следовательно, $\deg\omega=\deg c-\deg b$ и $\deg(b\omega+c)\leqslant\deg c<\deg\omega^2$, и сокращение снова невозможно.

3. $\deg\omega^2=\deg c$. Этот случай невозможен, потому что степень $\deg c$ должна быть нечетной.

Следовательно, ни одна возможность не может реализоваться и не существует решений (13) в виде степенных рядов.

II. Попытаемся найти нужную замену переменных в виде

$$\begin{cases} u'=u+brv,\\ v'=v. \end{cases}$$

Нужно найти такое r, что $\deg(b^2r^2+b^2r+c)<\deg c$. Старшие члены в этой сумме — это b^2r^2 и c ($\deg c>2\deg b$, следовательно, $\deg r\neq 0$). Чтобы они сократились, возьмем $\deg r=\frac{1}{2}(\deg c-2\deg b)$. Коэффициенты при старших членах также должны совпадать: $b_0^2r_0^2=c_0$. Это можно обеспечить, поскольку в рассматриваемом поле существуют квадратные корни: $r_0=\frac{\sqrt{c_0}}{b_0}$, а нужное r — это, например, $\frac{\sqrt{c_0}}{b_0}t^{\frac{1}{2}\deg c-\deg b}$.

III. В случае $\deg c=2\deg b$ снова попытаемся найти замену переменных того же типа, что и в II, такую что $\deg(b^2r^2+b^2r+c)<\deg c$. Теперь $\deg r$ должно быть нулевым, и сокращение старших членов возможно в том и только том случае, если уравнение $b_0^2r^2+b_0^2r+c_0=0$ разрешимо в k. Поэтому после соответствующей замены переменных получаем уравнение с коэффициентом c меньшей степени. Покажем, что в противном случае имеет место мнимый случай, т. е. не существует решений уравнения $\Delta^2+b\Delta+c=0$ в $k((x))$. Если допустить, что такое решение существует, то $\deg\Delta=\deg b$ и $\Delta_0^2+b_0\Delta_0+c_0=0$ ($\Delta_0\in k$ — старший коэффициент при старшей степени Δ). Однако это означает, что уравнение $b_0^2t^2+b_0^2t+c_0=0$ также разрешимо: $t=\frac{\Delta_0}{b_0}$. Поэтому имеет место мнимый случай, если это уравнение не разрешимо в k.

IV. Пусть Δ — корень (12): $\Delta^2 + b\Delta + c = 0$.

Если $\deg \Delta^2 = \deg c$, то $\deg b\Delta$ больше.

Построим теперь корень в случае $\deg b\Delta = \deg c$, т. е. $\deg \Delta = \deg c - \deg b$. Обозначим $k = \deg \Delta$, $m = \deg b$, $\Delta = a_k t^k + \ldots$. Из уравнения $\Delta^2 = b\Delta + c$ имеем $a_k t^{2k} + \ldots = a_k b_m t^{m+k} + \ldots + c_{m+k} t^{m+k} + \ldots$. Так как $2k < m + k$, то для сокращения необходимо, чтобы $a_k b_m = c_{m+k}$, т. е. $a_k = \frac{b_m}{c_{m+k}}$. Обозначим $\tilde{\Delta} = \Delta - a_k t^k$. Тогда $\tilde{\Delta}$ удовлетворяет уравнению $\tilde{\Delta}^2 = b\tilde{\Delta} + \tilde{c}$, где $\tilde{c} = a_k^2 t^{2k} + b a_k t^k + c$. Легко видеть, что $\deg \tilde{c} < \deg c$. Следовательно, нужно найти корень уравнения, удовлетворяющий условию в III, и этот корень должен иметь степень меньше k. С помощью такой индуктивной процедуры получаем искомый корень в виде степенного ряда.

В случае $\deg \Delta^2 = \deg b\Delta$ получаем сопряженный корень $b + \Delta$. □

Рассмотрение случая II с необходимостью приводит к случаям I, III или IV. Случаи I и IV — мнимый и вещественный. Рассмотрение случая III либо приводит к случаю I или IV, либо мы остаемся в мнимом случае, описанном в III.

4. Мнимый случай

Найдём решение в мнимом случае. В соответствии с предложением 3.3 можно считать, что либо (1) $\deg c > 2 \deg b$ и $\deg c$ нечетно, либо (2) $\deg c = 2 \deg b$ и уравнение $b_0^2 t^2 + b_0^2 t + c_0 = 0$ не разрешимо в поле k.

Рассмотрим случай (1).

Основным здесь является построение функции степени на R, сохраняющей умножение.

Определение. Пусть $\mathrm{Deg}\colon R \to \mathbb{Q}_+ \cup \{-\infty\}$,

$$\mathrm{Deg}(u + \Delta v) = \max\left(\deg u, \deg v + \frac{1}{2}\deg c\right),$$

где $\deg$ — функция степени на многочленах.

Теорема 4.1. *Пусть $f(t) = t^2 + bt + c$, где степень $\deg c$ нечётна, и $R = k[x,t]/t$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in R$*

$$\mathrm{Deg}(\alpha\beta) = \mathrm{Deg}\,\alpha + \mathrm{Deg}\,\beta.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = u' + \Delta v'$ и $\beta = u + \Delta v$. Рассмотрим следующие четыре различные возможности для степеней α и β:

1) $\mathrm{Deg}\,\alpha = \deg u'$, $\mathrm{Deg}\,\beta = \deg u$ (т. е. $\deg u' > \frac{1}{2}\deg c + \deg v'$ и $\deg u > \frac{1}{2}\deg c + \deg v$);
2) $\deg \alpha = \frac{1}{2}\deg c + \deg v'$, $\deg \beta = \deg u$ (т. е. $\deg u' < \frac{1}{2}\deg c + \deg v'$ и $\deg u > \frac{1}{2}\deg c + \deg v$);
3) $\deg \alpha = \deg u'$, $\deg \beta = \frac{1}{2}\deg c + \deg v$ (т. е. $\deg u' > \frac{1}{2}\deg c + \deg v'$ и $\deg u < \frac{1}{2}\deg c + \deg v$);
4) $\deg \alpha = \frac{1}{2}\deg c + \deg v'$, $\deg \beta = \frac{1}{2}\deg c + \deg v$ (т. е. $\deg u' < \frac{1}{2}\deg c + \deg v'$ и $\deg u < \frac{1}{2}\deg c + \deg v$).

Заметим, что по определению

$$\deg \alpha\beta = \max\left\{\deg(u'u + cv'v), \frac{1}{2}\deg c + \deg(u'v + v'u + bv'v)\right\}.$$

В случае 1) из неравенств

$$\deg u' > \frac{1}{2}\deg c + \deg v', \quad \deg u > \frac{1}{2}\deg c + \deg v, \quad \deg c > 2\deg b$$

получаем, что

$$\deg u'u > \deg cv'v, \quad \deg u'u > \frac{1}{2}\deg c + \deg u'v,$$

$$\deg u'u > \frac{1}{2}\deg c + \deg v'u, \quad \deg u'u > \frac{1}{2}\deg c + \deg bv'v.$$

Следовательно,

$$\deg \alpha\beta = \deg u'u = \deg u' + \deg u = \deg \alpha + \deg \beta.$$

В случае 2) аналогично получаем, что

$$\deg\alpha\beta = \frac{1}{2}\deg c + \deg u'v = \deg u' + \left(\frac{1}{2}\deg c + \deg v\right) = \deg\alpha + \deg\beta.$$

Случай 3) эквивалентен случаю 2). Можно заменить u' на u, u на u', v' на v и v на v'.

В случае 4) имеем

$$\deg\alpha\beta = \deg cv'v = \left(\frac{1}{2}\deg c + \deg v'\right) + \left(\frac{1}{2}\deg c + \deg v\right) = \deg\alpha + \deg\beta.$$

Теорема доказана. □

Существование этой функции позволяет решить уравнение $u^2 + buv + cv^2 = d$, поскольку оно эквивалентно уравнению $(u+\Delta v)(u+(b+\Delta)v) = d$, а потому степени u и v (они неотрицательны) связаны степенью d.

Найдём теперь решения в случае (2) и покажем, что их конечное число.

Предположим, что существует такое решение уравнения (13), что $\deg u > \frac{1}{2}\deg d$ или $\deg v > \frac{1}{2}(\deg d - \deg c)$. Тогда степень d не максимальна, потому что среди u^2, buv, cv существуют члены одинаковой степени. Покажем, что если степени двух из них совпадают, то и третий имеет ту же степень. Это простые вычисления в трех возможных случаях с помощью $\deg c = 2\deg b$. Следовательно, старшие члены u^2, buv, cv сокращаются и выполняется соотношение $u_0^2 + b_0u_0v_0 + c_0v_0^2 = 0$ для $u_0, v_0, b_0, c_0 \in k$ — коэффициентов старших членов многочленов u, v, b, c. Но это означает, что уравнение $b_0^2t^2 + b_0^2t + c_0 = 0$ разрешимо: $t = u_0/v_0b_0$. Поэтому получаем оценку для степеней u и v и в этом случае.

В обоих вариантах мнимого случая получаем следующую линейную оценку.

Предложение 4.2. *Оценка степени элементов сопрягающей матрицы в мнимом случае линейна*: $r_{A,B} \leqslant 2\delta$, *где, как и ранее,* δ *— максимум степеней всех компонент матриц* A *и* B.

Доказательство. Для получения оценки нужно принять во внимание, что прежде чем переходить к вещественному или мнимому случаю, нужно сделать замену переменной вида

$$\begin{cases} u' = u + qv, \\ v' = v, \end{cases}$$

где $\deg q \leqslant \frac{1}{2}\deg c$.

Тогда в мнимом случае типа I (предложение 3.3) оцениваем степени u' и v' из равенства $(u' + \Delta v')(u' + (b + \Delta)v') = d$, используя введенную выше функцию степени Deg на R. Получаем $\deg u' \leqslant \frac{\delta}{2}$, $\deg v' \leqslant \frac{\delta}{2}$ и $\deg u \leqslant \delta$, $\deg v \leqslant \delta$.

В мнимом случае типа III (предложение 3.3), как это было показано выше, имеем оценки $\deg u \leqslant \frac{1}{2}\deg d$ или $\deg v \leqslant \frac{1}{2}(\deg d - \deg c)$. Следовательно, также и $\deg u \leqslant \delta$ и $\deg v \leqslant \delta$.

Теперь, принимая во внимание (10), имеем следующую оценку для степени компонент сопрягающей матрицы: $r_{A,B} \leqslant 2\delta$. □

5. Вещественный случай

5.1. Единицы (уравнение $u^2 + buv + cv^2 = 1$). В вещественном случае ($\deg c < 2\deg b$) начнем с решения рассматриваемого уравнения с $d = 1$:

$$u^2 + buv + cv^2 = 1. \tag{14}$$

Если (u, v) — решение этого уравнения, то также говорим, что $\omega = u + \Delta v \in R$ — решение. Множество всех решений $\omega \in R$ уравнения (14) обозначим через $U(R)$. Множество $U(R)$ — группа с тем же умножением, что и в R.

Определение. Говорят, что $p \in R$ приводим, если $\deg p > 0$ и $\deg p' < 0$, где p' — сопряженный элемент (определенный в разделе 2).

Теорема 5.1. *Множество решений $U(R)$ уравнения* (14) *— бесконечная циклическая группа. Образующей $U(R)$ является элемент минимальной положительной степени. Кроме того, $R^* = U(R) \times k^*$, где R^* — группа единиц кольца R.*

Доказательство. Покажем сначала, что $R^* = U(R) \times k^*$. Так как уравнение (14) совпадает с уравнением $N(\omega) = 1$, из утверждений 3) и 4) леммы 3.1 вытекает, что $U(R)$ — подгруппа R^*. Пусть $\omega \in R^*$. Согласно лемме 3.2 $N(\omega) \in k^*$. Так как k — конечное поле характеристики 2, то существует единственный элемент $\alpha \in k^*$, такой что $N(\omega) = \alpha^2$. Поэтому $N(\frac{\omega}{\alpha}) = 1$, т. е. $\frac{\omega}{\alpha} \in U(R)$, и α однозначно определён.

Докажем теперь, что $U(R)$ — конечная циклическая группа, а ее образующая — элемент минимально возможной степени.

Лемма 5.2. *Если $\varepsilon \in R^*$ и $|\varepsilon| = 1$, то ε — ненулевая константа.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2 $|N(\varepsilon)| = 1$. Следовательно, $|\varepsilon'| = 1$, что следует из равенств $|N(\varepsilon)| = |\varepsilon\varepsilon'| = |\varepsilon||\varepsilon'| = 1$. Сравнивая соответствующие степенные ряды, видим, что из $|\varepsilon| = 1$ и $|\varepsilon'| = 1$ следует, что $bv \in k$. Тогда существуют следующие три возможности: $b = 0$, $v = 0$ или $b, v \in k^*$. Случай $b = 0$ был рассмотрен в разделе 2, $v = 0$ означает, что ε — полином и это единица, т. е. постоянная. Из $b \in k^*$ и $v \in k^*$ следует, что $c = 0$ (поскольку $\deg c < 2 \deg b$), и мы получаем случай, когда уравнение факторизуется над $k[x]$; этот случай был рассмотрен в разделе 2. □

Лемма 5.3. *Если ε_1 и ε_2 — единицы и $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2|$, то ε_1 и ε_2 равны с точностью до постоянной: $\varepsilon_1 = \alpha\varepsilon_2$, $\alpha \in k^*$.*

Доказательство. Очевидно, что $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ также единица и $|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}| = \frac{|\varepsilon_1|}{|\varepsilon_2|} = 1$. Следовательно, по лемме 5.2 $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \in k^*$. □

Пусть ε_0 — единица с минимальным нормированием $|\varepsilon| > 1$ (минимальной положительной степени).

Лемма 5.4. *Любая единица $\varepsilon \in R^*$ имеет вид $\varepsilon = \alpha\varepsilon_0^n$, $\alpha \in k^*$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|\varepsilon_0|^n < |\varepsilon| < |\varepsilon_0|^{n+1}$. Равенство невозможно, потому что если $|\varepsilon| = |\varepsilon_0|^n$, то по лемме 5.3 $\varepsilon = \alpha\varepsilon_0^n$. Умножим предыдущее неравенство на $|\varepsilon_0|^{-n}$ и получим противоречие с минимальностью $|\varepsilon_0|$: $1 < |\varepsilon_0^{-n}\varepsilon| < |\varepsilon_0|$. □

Этим заканчивается доказательство теоремы. □

Найдем образующую $U(R)$ за два шага. Сначала построим некоторый нетривиальный элемент $U(R)$.

Обозначим через $[A_0; A_1, A_2, \ldots]$, где $A_i \in k[x]$, разложение в непрерывную дробь $A_0 + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{A_2 + \ldots}}$. Будем говорить, что это разложение *чисто* периодично, если периодичность последовательности $A_0; A_1, A_2, \ldots$ начинается с A_0.

Теорема 5.5. *Пусть $\rho \in R$ — приведенный корень* (12). *Тогда разложение в непрерывную дробь $\rho = [A_0; A_1, A_2, \ldots]$, где $A_i \in k[x]$, чисто периодично с периодом $T \leqslant q^{2m}$, где $q = |k|$, $m = \deg b$.*

Доказательство. Можно представить ряд $\rho_n = [A_n; A_{n+1}, \ldots]$, возникающий в процессе построения непрерывной дроби, с помощью операций $\phi_1 \colon \rho \to u + \rho$ (вырезание полиномиальной части ряда) и $\phi_2 \colon \rho \to \frac{1}{\rho}$.

Легко видеть, что ϕ_1 и ϕ_2 действуют на множестве

$$\mathfrak{U} = \{\text{решения уравнений } \tilde{a}x^2 + bx + \tilde{c} = 0 \mid \deg \tilde{c} < \deg b,\ \deg \tilde{a} < \deg b\}.$$

В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{U}$, $y = \phi_1(x) = x + u$, где $u \in k[x]$, $\deg y < 0$. Так как $\tilde{a}x^2 + bx + \tilde{c} = 0$, то $\tilde{a}y^2 + by + c' = 0$, где $c' = au^2 + bu + \tilde{c}$. Из последнего уравнения получаем $c' = \tilde{a}y^2 + by$, и $\deg y < 0$. Поэтому для степени c' имеем неравенство $\deg c' < \deg(\tilde{a}y + b) \leqslant \deg b$. Таким образом, $y \in \mathfrak{U}$.

Пусть теперь $x\in\mathfrak{U}$ и $y=\phi_2(x)=\frac{1}{x}$. Так как $\tilde{a}x^2+bx+\tilde{c}=0$, то $\tilde{c}y^2+by+\tilde{a}=0$ и $y\in\mathfrak{U}$. Значит, $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ действуют на $\mathfrak{U}$.

Следовательно, число шагов, нужное для получения того же ρ, меньше, чем $|\mathfrak{U}|=2q^{2m}$, где $m=\deg b$, q — число элементов поля.

Положим теперь

$$\mathfrak{U}_+=\{x\in\mathfrak{U},\ \deg x\geqslant 0\}.$$

Заметим, что $\rho_{n+1}=\phi_2\phi_1(\rho_n)$. Чистая периодичность следует из того, что $\phi_2\phi_1$ — перестановка $\mathfrak{U}_+$. В самом деле, $\phi_2\phi_1(\rho_n)$ действует на $\mathfrak{U}_+$, и легко проверяется, что это инъекция.

Оценка $T<q^{2m}$ вытекает из неравенства $|\mathfrak{U}_+|=q^{2m}$. □

При $n=T$ имеем $\rho=\rho_T$ и

$$\rho=\frac{P_n\rho+P_{n-1}}{Q_n\rho+Q_{n-1}},$$

где

$$P_{n+1}=P_nA_n+P_{n-1},\quad P_0=1,\quad P_1=A_0, \tag{15}$$

$$Q_{n+1}=Q_nA_n+Q_{n-1},\quad Q_0=0,\quad Q_1=1. \tag{16}$$

Это означает, что ρ удовлетворяет квадратичному уравнению $Q_n\rho^2+(P_n+Q_{n-1})\rho+P_{n-1}=0$. Поскольку ρ также удовлетворяет уравнению $\rho^2+b\rho+c=0$ и последнее уравнение не имеет решений в рациональных функциях (этот случай был рассмотрен отдельно в разделе 2), то эти два уравнения пропорциональны. Обозначим через V коэффициент пропорциональности. Тогда $Q_n=V$, $P_{n-1}=cV$ и $P_n+Q_{n-1}=bV$. Обозначим $P_n=U$. Из известного уравнения $P_nQ_{n-1}+Q_nP_{n-1}=1$ получаем, что $\varepsilon=U+\Delta V=P_n+\Delta Q_n$ есть решение уравнения (14).

Лемма 5.6. *В вещественном случае* ($\deg c<2\deg b$) *существует обратимая линейная замена переменных, которая приводит уравнение* $u^2+buv+cv^2=d$ *к виду* $u^2+buv+\tilde{c}v^2=d$ *с* $\deg\tilde{c}<\deg b$.

Доказательство. Имеем $u^2+buv+cv^2=d$, $\deg b\leqslant\deg c<2\deg b$. Разделим c на b: $c=bq+r$, $\deg r<\deg b$, и рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases}u'=u+qv,\\ v'=v.\end{cases}$$

Теперь уравнение приобретает вид $u^2+buv+(q^2+r)v^2=d$. Обозначим $\tilde{c}=q^2+r$. Заметим, что $\deg\tilde{c}<\deg c$. В самом деле, $\deg r<\deg b\leqslant\deg c$ и $\deg q=\deg c-\deg b$, следовательно, $\deg q^2=2\deg c-2\deg b<\deg c$. Это означает, что можно делать такие замены переменных до тех пор, пока не получим, что $\deg b>\deg\tilde{c}$. □

Заметим, что суперпозиции замен переменных типа $u'=Qu$, $v'=v$ и $\deg Q\leqslant\alpha$ имеют ту же форму.

В предложении 3.3 III было доказано, что случай $\deg c<2\deg b$ вещественный по построению корня Δ уравнения (12) в виде степенного ряда. Из этого построения следует, что в случае $\deg c<\deg b$ один из корней рассматриваемого уравнения приводим. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Лемма 5.7. *Если* $\deg c<\deg b$, *то элемент* $\Delta+b$ *приводим и* $\varepsilon=P_n+\Delta Q_n$ *— нетривиальный элемент группы* $U(R)$, *где* $n=T$, *а* T *— период представления* $\Delta+b$ *непрерывной дробью.*

Лемма 5.8. *Оценка для степени элемента* ε *группы* $U(R)$ *такова*: $\deg\varepsilon\leqslant\delta q^{2\delta}$.

Доказательство. Сначала нужно оценить $\deg u'=\deg P_T$ и $\deg v'=\deg Q_T$. Здесь u' и v', как и в доказательстве предложения 4.2, — новые переменные после замены переменных того же типа. Напомним, что $\rho=[A_0;A_1,A_2,\ldots]$ — представление непрерывной дробью приведенного корня уравнения (12). Заметим, что $\deg A_n\leqslant\deg b$, потому что это положительная часть $\rho_n=[A_n;A_{n+1},\ldots]$, являющаяся элементом множества U, построенного выше при доказательстве теоремы 5.5, и $\deg\rho_n=\deg b-\deg\tilde{c}\leqslant\deg b$. Из рекуррентных формул (15) и (16) для P_n и Q_n следует, что

$\deg u' \leqslant \deg bT \leqslant \delta q^{2\delta}$ и $\deg v' \leqslant \deg b(T-1) \leqslant \delta(q^{2\delta}-1)$. Тогда получаем оценки для $\deg u$, $\deg v$ и $k = \deg \varepsilon = \deg(u + \Delta v) \leqslant \delta q^{2\delta}$. □

Теперь нужно построить образующую $U(R)$ из некоторого нетривиального элемента $U(R)$.

Лемма 5.9. *Пусть $\varepsilon_0 = x_0 + \Delta y_0$ — произвольная образующая группы $U(R)$. Тогда $y_0 =$ $=$ НОД(Y), где $Y = \{y\colon x + \Delta y \in U(R)\}$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in U(R)$, $\omega = x + \Delta y$, $\omega^n = x_n + \Delta y_n$. Достаточно проверить рекуррентную формулу $y_{n+2} = y_n + byy_{n+1}$. □

Следовательно, можно рассмотреть все делители y_i элемента y, где $\varepsilon = x + \Delta y$ — элемент $U(R)$, найденный с помощью непрерывных дробей. Затем найдем x_i для тех y_i, для которых возможно $x_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 = 1$. Из построенного конечного множества элементов $\varepsilon_i \in U(R)$ выберем элементы с минимальной положительной степенью. Это и есть ε_0.

Результаты этого раздела можно резюмировать в следующем предложении.

Предложение 5.10. *Группа $U(R)$ есть бесконечная циклическая группа, и существует алгоритм построения ее образующей.*

5.2. Общий случай $d \neq 1$. Рассмотрим теперь общее уравнение (13): $u^2 + buv + cv^2 = d$, $d \neq 1$.

Пусть ε_0 — образующая группы $U(R)$ положительной степени. Обозначим $k = \deg \varepsilon_0$.

Лемма 5.11. *Множество всех решений уравнения* (13) *имеет вид*

$$\{\omega\varepsilon_0^l\colon l \in \mathbb{Z},\ \omega \text{ — решение (13) с } \deg\omega = 0, \dots, k-1\}.$$

Доказательство. Если ω — произвольное решение (13), $N(u,v) = u^2 + buv + cv^2 = d$, то любое $\omega\varepsilon_0^l$, $l \in \mathbb{Z}$, — также решение (третье утверждение леммы 3.1). Следовательно, можно переписать множество решений (13) следующим образом:

$$\{\omega\varepsilon_0^l\colon l \in \mathbb{Z},\ \omega \text{ — решение (13) с } \deg\omega = 0, 1, \dots, k-1\}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 5.12. *Пусть $\omega = u + \Delta v$ — решение уравнения* (13) *с $\deg\omega = 0, \dots, k-1$. Тогда $\deg v \leqslant \max\{\deg d, k\} - \deg b$.*

Доказательство. Как уже говорилось в начале раздела 5.1, то, что $\omega = u + \Delta v$ — решение (13), означает, что (u,v) — решение (13), т. е. $N(\omega) = \omega\omega' = d$. С другой стороны, $\omega\omega' = \omega^2 + b\omega v$. Следовательно, решение ω удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 + (bv)\omega + d = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\deg bv \leqslant \deg d$. Тогда $\deg v \leqslant \deg d - \deg b$.

Случай 2. $\deg bv > \deg d$. Здесь априори существуют три возможности для степеней членов уравнения.

1. $\deg\omega^2 = \deg d$. Это невозможно, поскольку отсюда следовало бы, что $\deg bv > \deg\omega^2 = \deg d$, и старший член $(bv)\omega$ не сокращается.

2. $\deg\omega^2 = \deg bv\omega$. Это означает, что $\deg\omega = \deg bv$. Так как нас интересуют решения ω с $\deg\omega \leqslant k-1$, то $\deg bv \leqslant k-1$ и $\deg v \leqslant k - 1 - \deg b$, что доказывает теорему в этом случае.

3. $\deg bv\omega = \deg d$. Следовательно, $\deg\omega < 0$, что несовместимо со сделанными предположениями.

Можно теперь заключить, что для любого решения ω уравнения (13) выполнено неравенство $\deg v \leqslant \max(\deg d - \deg b, k - 1 - \deg b)$. □

Согласно теореме 5.12 все решения уравнения (13) находятся с помощью конечной процедуры.

Последний шаг состоит в выборе из множества решений $\omega\varepsilon_0^l = u_l + \Delta v_l$ тех решений, для которых b_{21} — делитель u_l, а a_{21} — делитель $(a_{11} + b_{11})u_l + b_{12}v_l$ и $b_{12}u_l + (a_{11} + b_{22})v_l$. Множество всех таких решений можно описать, принимая во внимание следующий факт.

Лемма 5.13. *Пусть $\omega\varepsilon_0^l = u_l + \Delta v_l$, P — многочлен и r_l, $\deg r_l < \deg P$, — последовательность вычетов $P_1u_l + P_2v_l$ для некоторых многочленов P_1 и P_2 относительно P. Тогда эта последовательность периодична: $r_{l+T_0} = r_l$ для некоторого периода T_0.*

Доказательство. Достаточно доказать периодичность вычетов x_n и y_n, где $\varepsilon_0 = x + \Delta y$, $\varepsilon_0^n = x_n + \Delta y_n$. Пусть $\operatorname{res}(Q, P)$ — вычет Q относительно P. Ясно, что

$$\operatorname{res}(Q(x_n, y_n), P) = \operatorname{res} Q(\operatorname{res}(x_n, P), \operatorname{res}(y_n, P)).$$

Покажем, что $\operatorname{res}(x_n, P))$ и $\operatorname{res}(y_n, P))$ периодичны с периодом T_0. Отсюда будет следовать периодичность x_n и y_n, поскольку $\omega\varepsilon_0^n = u_0x_n + cv_0y_n + \Delta(u_0y_n + v_0x_n + bv_0y_n)$, где $\omega = u_0 + \Delta v_0$. Пусть $r_n = \operatorname{res}(y_n, P)$ и $s_n = \operatorname{res}(x_n, P)$. Из $(x_n + \Delta y_n)(x + \Delta y) = x_{n+1} + \Delta y_{n+1}$ получаем следующие рекуррентные формулы:

$$x_{n+1} = x_nx + cy_ny, \quad y_{n+1} = x_ny + y_nx + by_ny.$$

Рассмотрим последовательность (r_n, s_n) пар вычетов. Она рекуррентна длины 1, потому что

$$s_{n+1} = \operatorname{res}(s_nx + cr_ny), \quad r_{n+1} = \operatorname{res}(s_ny + r_nx + br_ny).$$

Эта последовательность принадлежит конечному множеству M^2 пар многочленов степени меньше $\deg P$, а значит, она периодична с периодом $T_0 \leqslant q^{\deg P}$. □

Следовательно, получена и оценка для периода.

Предложение 5.14. *Оценка периода T_0 следующая: $T_0 \leqslant q^{2\delta}$, где δ — максимум степеней компонент исходных матриц.*

Резюмируя утверждения леммы 5.11, теоремы 5.12, а также леммы 5.13, заканчиваем построение множества $\tilde{\mathfrak{S}}_{A,B}$, описывающего множество всех сопрягающих матриц пары A, B:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{A,B} = \{\omega\varepsilon_0^{l+nT_0} \mid \deg\omega = 0,\dots,k-1,\ l = 0,\dots,T_0-1,\\ b_{21} \mid u_l,\ a_{21} \mid (a_{11}+b_{11})u_l + b_{12}v_l,\ \text{и } a_{21} \mid b_{12}u_l + (a_{11}+b_{22})v_l\}.$$

Для любого элемента $\omega \in \tilde{\mathfrak{S}}_{A,B}$ можно получить сопрягающую матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix},$$

где $\omega = u + \Delta v$, а p, q находятся из (10).

Из $\tilde{\mathfrak{S}}_{A,B}$ можно также выбрать конечное множество, характеризующее сопряженность матриц A и B.

Следствие 5.15. *Положим*

$$\mathfrak{S}_{A,B} = \{\omega\varepsilon_0^{l} \mid \deg\omega = 0,\dots,k-1,\ l = 0,\dots,T_0-1,\\ b_{21} \mid u_l,\ a_{21} \mid (a_{11}+b_{11})u_l + b_{12}v_l,\ \text{и } a_{21} \mid b_{12}u_l + (a_{11}+b_{22})v_l\}.$$

Тогда $\mathfrak{S}_{A,B} \neq \varnothing$ в том и только в том случае, если A сопряжена с B.

Предложение 5.16. *Оценка степени $r_{A,B}$ элементов сопрягающей матрицы в вещественном случае такова: $r_{A,B} \leqslant 2\delta q^{6\delta}$.*

Доказательство. Оценим сначала степень решения $\tilde{\omega} = \omega\varepsilon_0^l$, где $\deg\omega \leqslant k-1$, $l \leqslant T_0 - 1$.

Пусть $\omega\varepsilon_0^l = u_l + \Delta v_l$, $T_0 = \operatorname{НОК}(T_1, T_2, T_3)$, где T_1, T_2 и T_3 — периоды вычетов (как определено в лемме 5.13) последовательностей u_l, $(a_{11}+b_{11})u_l + b_{12}v_l$ и $b_{12}u_l + (a_{11}+b_{22})v_l$ относительно b_{12}, a_{21} и a_{21} соответственно. С помощью предложения 5.14 можно оценить $\operatorname{НОК}(T_2, T_3)$ через $q^{2\deg a_{21}}$, а T_1 через $q^{2\deg b_{12}}$. Следовательно, $T_0 \leqslant q^{4\delta}$. Тогда $\deg\tilde{\omega} = \deg\omega\varepsilon_0^l \leqslant \delta q^{6\delta} - 1$. Используя уравнение (17), можно получить, что $\deg u \leqslant \delta q^{6\delta} + \delta - 1$ и $\deg v \leqslant \delta q^{6\delta} + \delta$. (Заметим, что в вещественном случае равенство $\delta = 0$ невозможно.) □

Собирая вместе все отдельно полученные оценки, в которых одна из матриц диагональна, $b = 0$, $\Delta \in k(x)$, вещественный и мнимый случаи, получаем оценку $r_{A,B} \leqslant \delta(q^{6\delta} + 2)$ для сопрягающей матрицы в случае характеристики 2, которая приведена в теореме 1.1.

6. Замечание о случае характеристики, не равной 2

Случай положительной характеристики, не равной 2, рассмотрен в [3]. Здесь будут получена оценка, которая не всегда достигается посредством процедуры, описанной в [3]. Кроме того, мы уточним процедуру редукции задачи сопряженности к квадратичным уравнениям в этом случае.

Пусть $\operatorname{char} k \neq 2$. Условие сопряжения $U \in \mathrm{GL}_2(k[x])$ эквивалентно системе

$$uq - pv \in k^*,$$
$$UA = BU,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix},$$

$k^* = k \setminus \{0\}$ — мультипликативная группа поля k.

Для проверки разрешимости системы при произвольном коэффициенте $\alpha \in k^*$ достаточно рассмотреть только два случая: $\alpha = 1$ и α — некоторый элемент k^*, не являющийся квадратом. (Остальные решения получаются отсюда потому, что α/β — квадрат, если α и β не квадраты.) Затем получим квадратичное уравнение типа $u^2 + buv + v^2 = d$ способом, аналогичным прежнему, а так как $\operatorname{char} \neq 2$, то его можно свести к уравнению Пелля $u^2 - cv^2 = d$.

Определения вещественного и мнимого случая остаются прежними. Разделение на вещественный и мнимый случаи производится обычным способом.

Предложение 6.1. *Если* а) $\deg c$ *нечетно или* б) $\deg c$ *четно, но старший член* c_n *многочлена* c *не квадрат, то имеет место мнимый случай. Если* $\deg c$ *четно и* c_n *— квадрат, то имеет место вещественный случай.*

Для получения оценок в этих случаях рассмотрим их по отдельности.

В мнимых случаях а) и б) старший член c не является квадратом монома (с коэффициентом). Если предположить, что существует решение с $\deg u^2 > \deg d$ или $\deg cv^2 > \deg d$, то старшие члены u^2 и cv^2 должны сократиться, но это будет означать, что старший член c — квадрат монома (с коэффициентом). Поэтому для любого решения $\deg u < \frac{1}{2}\deg d$ и $\deg v < \frac{1}{2}(\deg d - \deg c)$. Получаем следующую оценку.

Теорема 6.2. *В мнимом случае всегда существует только конечное число решений, а оценка степени элементов сопрягающей матрицы линейна*: $r_{A,B} \leqslant 2\delta$, *где* δ *— максимум степеней компонент матриц* A *и* B.

Рассмотрим теперь вещественный случай. В [3] доказано, что существует приведенный корень ρ (с $\deg \rho > 0$, $\deg \rho' < 0$) уравнения $t^2 + bt + c = 0$, а представление непрерывной дробью этого приведенного корня чисто периодично. Кроме того, доказано, что если представление непрерывной дробью чисто периодично, то можно построить некоторую единицу. Однако период не оценивался. Дадим здесь оценку периода представления непрерывной дробью любого корня уравнения $at^2 + bt + c = 0$ для конечного поля произвольной характеристики.

Лемма 6.3. *Пусть* $\rho \in R$ *— приведенный корень уравнения* $at^2 + bt + c = 0$ *с условиями* $\deg a \leqslant \gamma$, $\deg b \leqslant \gamma$ *и* $\deg c \leqslant \gamma$, *где, как и ранее,* γ *— максимум степеней элементов исходных матриц* A *и* B. *Тогда представление непрерывной дробью* $\rho = [A_0; A_1, A_2, \ldots]$ ($A_i \in k[x]$) *периодично с периодом* $T \leqslant q^{3\gamma}$.

Доказательство. Можно представить ряд $\rho_n = [A_n; A_{n+1}, \ldots]$, возникающий в процессе представления непрерывной дробью, как результат операций $\phi_1 \colon \rho \to \rho - p$ (вырезание полиномиальной части из ряда) и $\phi_2 \colon \rho \to \frac{1}{\rho}$.

Покажем, что ϕ_1 и ϕ_2 действуют на множестве $\mathfrak{U}_\mathrm{r}$ приведенных корней следующих уравнений:

$$\mathfrak{U}_\mathrm{r} = \{\text{приведенные корни уравнений } at^2 + bt + c = 0 \mid \deg a \leqslant \gamma,\ \deg b \leqslant \gamma,\ \deg c \leqslant \gamma\}.$$

Однако корень приведен, только если $\deg b - \deg a < 0$ и $\deg c - \deg b < 0$, а потому на самом деле

$$\mathfrak{U}_\mathrm{r} = \{\text{приведенные корни уравнений } at^2 + bt + c = 0 \mid \deg a < \gamma,\ \deg b \leqslant \gamma,\ \deg c < \gamma\}.$$

Известно [3], что если в процессе представления непрерывной дробью мы получаем приведенный корень ρ_n, то ρ_{n+k} при всех $k\in\mathbb{Z}$ также приведенные корни.

Поэтому нужно доказать только то, что если взять $\rho\in\mathfrak{U}_{\mathrm{r}}$, то $\phi_1(\rho),\phi_2(\rho)\in\mathfrak{U}$, здесь

$$\mathfrak{U}=\{\text{решения уравнений } at^2+bt+c=0 \mid \deg a\leqslant\gamma,\ \deg b\leqslant\gamma,\ \deg c\leqslant\gamma\}.$$

Это очевидно для ϕ_2. Пусть $\rho\in\mathfrak{U}$ и $y=\phi_2(\rho)=\frac{1}{\rho}$. Так как $a\rho^2+b\rho+c=0$, то $cy^2+by+a=0$ и $y\in\mathfrak{U}$.

Для доказательства этого свойства для ϕ_1 заметим сначала, что уравнение изменяется следующим образом: если $\phi_1(\rho)=\rho-p=y$, то для y имеем $ay^2+(2ap+b)y+(ap^2+bp+c)=0$. Заметим также, что при $\rho\in\mathfrak{U}_{\mathrm{r}}$ справедливо $\deg b>\frac{1}{2}\deg c+\frac{1}{2}\deg a$ для $\rho\in\mathfrak{U}_{\mathrm{r}}$. Априори существуют три возможности:

1) $\deg a\rho^2=\deg c>\deg b\rho$,
2) $\deg a\rho^2=\deg b\rho>\deg c$,
3) $\deg b\rho=\deg c>\deg a\rho^2$,

но только вторая реализуется. В этом случае $\deg(2ap+b)=\deg b$ и $\deg(ap^2+bp+c)\leqslant\gamma$. Последнее вытекает из равенства

$$ap^2+bp+c=a(\rho-y)^2+b(\rho-y)+c=a\rho^2+b\rho+c+2a\rho y-by+ay^2$$

и из того, что $\deg y<0$. Следовательно, имеем также уравнение на y того же типа и $y\in\mathfrak{U}$.

Отметим, что старшие члены b (средний коэффициент) одинаковы для всех элементов $\mathfrak{U}_{\mathrm{r}}$. Поэтому можно оценить число элементов $\mathfrak{U}_{\mathrm{r}}$ следующим образом: $|\mathfrak{U}_{\mathrm{r}}|\leqslant q^{3\gamma}$. Это и есть оценка периода разложения в непрерывную дробь. □

Получим теперь окончательную оценку в случае $\operatorname{char}\neq 2$, основанную на оценке периода.

Теорема 6.4. *В вещественном случае оценка степени компонент сопрягающей матрицы такова*: $r_{A,B}\leqslant\delta(q^{7\delta+1}+2\delta q^{4\delta}+\delta)$ $(\leqslant(q+1)\delta q^{7\delta})$*, где* δ *— максимум степеней компонент заданных матриц* A *и* B.

Доказательство. Рассмотрим сначала корень Δ уравнения $t^2=c$. Его можно построить как степенной ряд с помощью обычной рекуррентной процедуры. Этот корень не приведенный (здесь $\deg\Delta=\deg\Delta'$). Заметим, что он отличается от случая $\operatorname{char}=2$, где один из двух корней исходного уравнения должен быть приведен. Однако в процессе представления непрерывной дробью $\Delta=[A_0;A_1,\ldots]$ на некотором шаге $\Delta_n=[A_n;A_{n+1},\ldots]$ должен появиться приведенный корень [3]. Для этого корня $\rho=\Delta_{n_0}$ будем иметь $\rho=\frac{P_n\rho+P_{n-1}}{Q_n\rho+Q_{n-1}}$. Пусть ρ удовлетворяет уравнению $A\rho^2+B\rho+C=0$. Тогда из пропорциональности двух квадратичных уравнений (которые не могут иметь рациональных решений) для приведенного корня получаем формулы для нетривиальной единицы $X+\Delta Y$: $P_n+Q_{n-1}=2X$, $P_n-Q_{n-1}=2Yb$ при $n=T$, где T — период представления ρ непрерывной дробью. Следовательно, можно оценить степени X и Y как $\deg X\leqslant\deg BT$, $\deg Y\leqslant\deg BT$. Убедимся в том, что $\deg B\leqslant\delta$ и $T\leqslant q^{3\delta+1}$, где, как и ранее, δ — максимальная степень компонент данных матриц. Это будет вытекать из леммы 6.3. Однако нужно заметить следующее: если начать процесс представления непрерывной дробью с Δ, корня $t^2=c$, $\deg c\leqslant 2\delta$, то уже на первом шаге получим уравнение $\Delta_1^2-2p\Delta_1-c+p^2=0$ с $\deg(c-p^2)\leqslant\delta$, $\deg(2p)\leqslant\delta$. На следующих шагах степени коэффициентов уравнения не могут увеличиться.

Поэтому можно оценить $\deg X$ и $\deg Y$ с помощью $\delta q^{3\delta+1}$. Если принять во внимание замену переменных, то получим $\delta q^{3\delta+1}+\delta$.

Тогда оценка для $k=\deg\varepsilon_0$, $\varepsilon_0=X+\Delta Y$, есть $k\leqslant\delta q^{3\delta+1}+2\delta$.

Пусть $\omega\varepsilon_0^l=u_l+\Delta v_l$, $T_0=\mathrm{НОК}(T_1,T_2,T_3)$, где T_1, T_2 и T_3 — периоды вычетов (как определено в лемме 5.13) последовательностей u_l, $(a_{11}+b_{11})u_l+b_{12}v_l$ и $b_{12}u_l+(a_{11}+b_{22})v_l$ относительно b_{12}, a_{21} и a_{21} соответственно. По предложению 5.14 $T_0\leqslant q^{4\delta}$.

Рассмотрим произвольный корень $\tilde\omega=\omega\varepsilon_0^l=u+\Delta v$ степени $\leqslant k-1$ для $u^2+cv^2=d$. Оценим сначала $\deg\tilde\omega$, рассматривая $\tilde\omega$ как ряд. После проверки делимости получаем

$$\deg\tilde\omega=\omega\varepsilon_0^l\leqslant k-1+k(T_0-1)=kT_0-1=\delta q^{7\delta+1}+2\delta q^{4\delta}.$$

Теперь, используя эту оценку, можно получить оценку для u и v, она будет той же и, следовательно, $r_{A,B} \leqslant \delta q^{7\delta+1} + 2\delta q^{4\delta} + \delta$. Так как $q \leqslant 3$, то последнее можно оценить как $\leqslant (q+1)\delta q^{7\delta}$. □

7. Централизаторы матриц

Ниже используется следующее обозначение для величины, которая будет оцениваться в теореме:

$$r_{A,B} = \min_{U \in \mathrm{GL}_2 :\, UAU^{-1}=B} \max_{i,j} \{\deg u_{i,j} \mid U = (u_{i,j})\}.$$

Теорема 7.1. *В вещественном случае централизатор* $\mathrm{Z}(A)$ *есть бесконечная циклическая группа. В мнимом случае централизатор — тривиальная группа, состоящая только из единицы, если* $a_{12} \neq 0$ *или* $a_{21} \neq 0$. *В случае* $a_{12} = a_{21} = 0$ *он может быть конечной группой* $k^* \times k^*$ (*если* $a_{11} \neq a_{22}$) *или* $\mathrm{GL}_2(k[x])$ (*если* $a_{11} \neq a_{22}$). *Оценка степени образующей* $\mathrm{Z}(A)$ *в существенном случае, когда централизатор — бесконечная циклическая группа, есть* $\delta q^{2\delta}$.

8. Проблема сопряженности в GL(2) над кольцом многочленов

В этом разделе отметим, что хотя $\mathrm{GL}_2(k[x])$ — сопряженно отделимая группа, это не приводит сразу ни к какому алгоритму распознавания сопряженности в $\mathrm{GL}_2(k[x])$, поскольку она не является конечно порожденной (см., например, [8]) и конечные образы с гомоморфизмами на них не могут быть построены. Имеется в виду алгоритм Мальцева [1] для решения задачи сопряженности для конечно представимых отделимых групп. Заметим, что этот алгоритм не позволяет получить никаких оценок.

Теорема 8.1. $\mathrm{GL}_2(k[x])$ *есть сопряженно сепарабельная группа.*

Доказательство. Согласно Серру [8] и Нагао [7] $\mathrm{GL}_2(k[x]) = T(k[x]) \times_{T(k)} \mathrm{GL}_2(k)$ — амальгамированное свободное произведение подгруппы верхнетреугольных матриц $T(k[x])$ и $\mathrm{GL}_2(k)$ через верхнетреугольные матрицы над k.

В [4] доказано, что сопряженно отделимые группы, амальгамированные вдоль конечной подгруппы, являются сопряженно отделимыми.

Нужно только проверить, что подгруппа $T(k[x])$ верхнетреугольных матриц в $\mathrm{GL}_2(k[x])$ сопряженно отделима.

Лемма 8.2. *Два элемента*

$$e_1 = \begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \alpha' & c' \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$$

из $T(k[x])$ *не сопряжены в том и только в том случае, если*

1) $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$ *или*
2) $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$, $\alpha = \beta$, *а* c *и* c' *не пропорциональны.*

Покажем, что для любой пары $e_1 \not\sim e_2$, $e_1, e_2 \in T(k[x])$, можно найти нормальную подгруппу $H_{(e_1,e_2)} \lhd T(k[x])$, такую что $\bar{e}_1 \not\sim \bar{e}_2$, где $\bar{e}_i$ — образ e_i в конечном факторе $T(k[x])/H_{(e_1,e_2)}$.

Заметим сначала, что подгруппы типа

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a = \alpha x^n + \ldots,\ \alpha \in k^* \right\}$$

нормальны в $T(k[x])$.

В самом деле,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\beta} a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$e = \begin{pmatrix} \alpha & d \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Для отделения несопряженных элементов типа 1) достаточно взять подгруппу H_0. Фиксируем два несопряженных элемента типа 2):

$$h_1 = \begin{pmatrix} \gamma & c \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} \gamma & c' \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} \gamma & c \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \gamma & c' \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в том и только в том случае, если $\frac{\alpha}{\beta}c + c' = \gamma f$. Следовательно, если взять $H_{(h_1,h_2)} = H_n$ с $n > \max\{\deg c, \deg c'\}$, то несопряженные h_1 и h_2 в факторе $T(k[x])/H_{(h_1,h_2)}$ остаются несопряженными. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановского пед. ин-та. — 1958. — *18*, № 5. — С. 49—60.
2. *Adams W., Loustaunau P.* An Introduction to Gröbner Bases. — 1994. — Graduate Studies in Math., Vol. 3.
3. *Artin E.* Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen. I // Math. Z. — 1924. — *19*. — P. 153—206.
4. *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN-extensions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1980. — *29*, N 1. — P. 35–51.
5. *Grunewald F.* Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups // Word Problems. II / Adian, Boone and Higman, eds. — Amsterdam: North-Holland, 1980. — P. 101—139.
6. *Grunewald F., Segal D.* Some general algorithms 1: Arithmetic groups // Ann. of Math. — 1980. — *112*. — P. 531—583.
7. *Nagao H.* On $\mathrm{Gl}(2, k[x])$ // J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., Ser. A. — 1959. — *10*. — P. 117—121.
8. *Serre J. P.* Trees. — Springer, 1980.

Ф. Груневальд
Университет Г. Гейне, Математический институт, Дюссельдорф
E-mail: fritz@math.uni-duesseldorf.de

Н. К. Иыуду
Московский государственный университет
E-mail: ioudu@mech.math.msu.su, ioudu@mail.ru

Современная математика и ее приложения. Том 30 (2005). С. 46–64

УДК 519.68+512.714

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСОВ ГРЕБНЕРА

© 2005 г. **В. А. МИТЮНИН, Е. В. ПАНКРАТЬЕВ**

Аннотация. Задача построения базисов Гребнера важна как с теоретической, так и с практической точек зрения. В качестве примеров применения базисов Гребнера можно привести такие задачи, как исследование систем нелинейных алгебраических уравнений на совместность, нахождение количества решений систем нелинейных алгебраических уравнений; базисы Гребнера широко применяются в конструктивной теории полиномиальных идеалов и на предварительном этапе численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений. К сожалению, для многих реальных примеров вычислительная сложность известных алгоритмов вычисления базисов Гребнера достаточно велика. Тем не менее на практике можно достигнуть значительного увеличения эффективности алгоритмов построения стандартных базисов. В статье проведен анализ известных алгоритмов построения базисов Гребнера. Рассмотрен ряд путей к увеличению их эффективности. Дано описание методики оценки эффективности распараллеливания алгоритмов и приведены результаты для некоторых из них.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В последнее время достигнут значительный прогресс в области систем компьютерной алгебры. Лучшие из таких систем находят применение при решении задач, возникающих в различных областях науки. Во многом этот процесс обусловлен ростом производительности вычислительной техники, но он был бы невозможен без значительного улучшения классических алгоритмов. Большу́ю практическую ценность имеют задачи, связанные с факторизацией больших чисел. Значительный прогресс в увеличении скорости вычислений дало применение быстрых алгоритмов умножения.

Одной из важных задач компьютерной алгебры является решение систем нелинейных алгебраических уравнений. На практике часто возникает необходимость решать системы нелинейных алгебраических уравнений с целочисленными (или рациональными) коэффициентами. Одним из применяемых методов является построение базисов Гребнера. Первоначальный вариант алгоритма построения базисов Гребнера, предложенный Б. Бухбергером, известен как алгоритм пополнения. Теоретическая сложность этого алгоритма, впрочем, такова, что вряд ли можно ожидать успешного решения систем, возникающих на практике. До недавнего времени это действительно было так, и алгоритм применялся главным образом в теоретических рассуждениях. Однако за последние годы был достигнут значительный прогресс в увеличении производительности классического алгоритма Бухбергера, что позволило успешно обрабатывать системы большого объема. Следует подчеркнуть, что прогресс в этой области был достигнут в гораздо большей степени благодаря улучшению алгоритмов, а не увеличению быстродействия компьютеров. Несмотря на наличие в теории систем уравнений, на которых достигается наихудшая граница сложности алгоритма Бухбергера, на практике для реальных систем его производительность существенно выше.

В качестве примеров применения базисов Гребнера можно привести такие задачи, как исследование систем нелинейных алгебраических уравнений на совместность, нахождение количества решений систем нелинейных алгебраических уравнений. Нахождение базисов Гребнера является

ISSN 1512–1712

составной частью большого количества алгоритмов в конструктивной теории полиномиальных колец, а также предварительным этапом численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

В последнее время вызывает живой интерес альтернативный алгоритм вычисления нередуцированного стандартного базиса, получивший название инволютивного. Полученный инволютивный базис может быть использован при решении систем нелинейных алгебраических уравнений и для их исследования аналогично авторедуцированному базису Гребнера. Основное отличие инволютивного алгоритма вычисления базиса Гребнера от классического алгоритма Бухбергера состоит в модифицированном алгоритме вычисления нормальной формы, который ограничивает набор возможных редукций. Инволютивный алгоритм вычисления стандартного базиса пришел в коммутативную алгебру из дифференциальной алгебры. На данный момент остается открытым вопрос о наиболее эффективном подходе к вычислению стандартных базисов. Существует мнение, что инволютивный алгоритм вычисления базисов Гребнера значительно эффективнее классического для достаточно больших систем уравнений.

Дальнейший путь к увеличению эффективности алгоритмов — распараллеливание — связан с прогрессом в развитии вычислительной техники, позволяющим использовать одновременно большое количество процессоров. Для ряда алгоритмов с помощью данного подхода удается существенно улучшить время работы. К сожалению, большинство алгоритмов компьютерной алгебры распараллеливаются со сравнительно небольшим коэффициентом эффективности. Алгоритм вычисления базисов Гребнера не является исключением. Тем не менее грамотная реализация алгоритма вычисления на кластере наиболее доступного в данное время типа (сеть рабочих станций) позволяет для ряда примеров увеличить производительность алгоритма на порядок.

Основная проблема, с которой достаточно трудно справиться, состоит в том, что в процессе вычислений начинается взрывной рост целочисленных коэффициентов. Это приводит к очень большим затратам как по процессорному времени, так и по памяти при вычислении базисов для реальных систем. Бороться с этой проблемой можно двумя путями: улучшать алгоритм построения базисов или создавать параллельные версии известных алгоритмов. На первом пути на данном этапе основные продвижения осуществляются с помощью введения новых эвристик, появляющихся в результате накопления опыта построения базисов. Вторая область исследована явно недостаточно. К счастью, эти два пути нисколько не противоречат друг другу: большинство улучшений, достигнутых в последовательных алгоритмах, могут быть так или иначе перенесены на параллельные версии. На данный момент мы достигли уровня, когда увеличение мощности компьютеров, с одной стороны, и улучшение алгоритмов, с другой, могут позволить обрабатывать реальные системы алгебраических уравнений.

Пример. Рассмотрим семейство систем уравнений cyclic — одно из классических в теории базисов Гребнера. Система cyclic с четырьмя неизвестными имеет вид

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a + b + c + d,\\
f_2 &= ab + ad + bc + cd,\\
f_3 &= abc + abd + acd + bcd,\\
f_4 &= abcd - 1.
\end{aligned}
$$

Базис Гребнера для этой системы имеет вид

$$
\begin{aligned}
g_1 &= c^2d^6 - c^2d^2 - d^4 + 1,\\
g_2 &= c^3d^2 + c^2d^3 - c - d,\\
g_3 &= bd^4 - b + d^5 - d,\\
g_4 &= bc - bd^5 + c^2d^4 + cd - d^6 - d^2,\\
g_5 &= b^2 + 2bd + d^2,\\
g_6 &= a + b + c + d.
\end{aligned}
$$

Для системы уравнений cyclic с пятью неизвестными базис Гребнера состоит из 11 уравнений

$$
\begin{aligned}
g_1 &= e^{15} + 122e^{10} - 122e^5 - 1,\\
g_2 &= 55d^2e^5 - 55d^2 - 2de^{11} - 231de^6 + 233de - 8e^{12} - 979e^7 + 987e^2,\\
g_3 &= 6d^7 + 57d^6e^6 - 39d^6e + 25d^5e^7 - 19d^5e^2 - 5d^4e^8 + 5d^4e^3 - 8d^3e^9 +\\
&\quad + 8d^3e^4 - 2d^2e^{10} + 14d^2e^5 - 18d^2 - 18de^6 - 6e^7,\\
g_4 &= 360150ce^5 - 360150c + 71540d^9e^2 - 110722d^8e^3 - 1744327d^7e^4 - 3078595d^6e^5 + 233730d^6 +\\
&\quad + 219158d^5e^6 - 1058999d^5e + 2366210d^4e^7 - 2437750d^4e^2 + 1281458d^3e^8 - 1170736d^3e^3 +\\
&\quad + 200573d^2e^9 + 1543754d^2e^4 + 2844865de^5 + 839841e^6,\\
g_5 &= 360150cd - 360150ce^6 - 71540d^{10}e^2 + 110722d^9e^3 + 1744327d^8e^4 + 3064189d^7e^5 - 233730d^7 +\\
&\quad + 313864d^6e^6 + 1058999d^6e - 795956d^5e^7 + 2437750d^5e^2 - 1403909d^4e^8 + 1293187d^4e^3 -\\
&\quad - 1360256d^3e^9 - 744221d^3e^4 - 410571d^2e^{10} - 2059738d^2e^5 - 1372863de^6 - 1570254e^7
\end{aligned}
$$

и т. д. Для системы уравнений cyclic с шестью неизвестными базис Гребнера состоит из 17 уравнений, длина коэффициентов которых превышает 100 десятичных цифр.

Увеличения эффективности алгоритма вычисления стандартного базиса можно достичь при движении по нескольким направлениям. К первому из них следует отнести исследования (имеющие, по крайней мере с точки зрения теории стандартных базисов, достаточно низкий теоретический интерес) по оптимизации элементарных операций, таких как арифметика коэффициентов или сравнение мономов. Вторым методом является улучшение применяемых стратегий для выбора и отбрасывания S-элементов. Третьим методом увеличения эффективности алгоритма вычисления базисов Гребнера является их распараллеливание.

Рассмотрим эти три направления более детально. Оптимизация элементарных операций — сравнения мономов и арифметики коэффициентов — не позволяет улучшить асимптотическую сложность алгоритма, тем не менее может увеличить скорость работы в несколько раз. Роль оптимизаций первого типа более заметна при вычислении стандартных базисов в кольцах полиномов с коэффициентами из конечного поля, в то время как оптимизации второго типа оказывают большее влияние при вычислениях в кольцах полиномов с целочисленными коэффициентами.

Как правило, в свободно распространяемых реализациях алгоритмов построения стандартных базисов (в виде отдельных модулей или встроенных процедур систем компьютерной алгебры) используется библиотека целочисленной арифметики произвольной точности GMP (Gnu Multiple Precision). Основными преимуществами данной библиотеки являются ее доступность на большинстве систем и достаточно высокая эффективность. Тем не менее для некоторых специфических задач, таких как вычисление стандартных базисов (где наряду с арифметическими операциями очень важно эффективное вычисление наибольшего общего делителя, активно используемое при вычислениях содержания многочленов), возможна модификация данной библиотеки с целью повышения скорости вычислений без изменения алгоритмической части. В частности, в системе компьютерной алгебры Magma была проведена оптимизация процедур этой библиотеки.

Наиболее интересной работой, направленной на оптимизацию сравнения мономов, является, по-видимому, интернет-публикация одного из создателей системы компьютерной алгебры Singular Олафа Бахмана (Olaf Bachmann) [4].

В силу особенностей алгоритма построения базиса Гребнера элементарные операции над мономами являются наиболее частыми примитивными операциями. Например, сравнения мономов осуществляются более часто, а сложения по крайней мере не реже, чем арифметические операции в области коэффициентов. Количество проверок делимости достаточно сильно зависит от конкретной системы уравнений, но, как правило, достаточно велико.

Тем не менее суммарный вклад элементарных операций над мономами в полное время работы алгоритма существенно зависит от области коэффициентов. Для вычислений стандартных базисов над конечными полями их доля достаточно велика, в то время как для систем с целочисленными коэффициентами этими временами, как правило, можно пренебречь.

Для увеличения эффективности элементарных операций над мономами можно воспользоваться их векторизацией. В предположении, что размер машинного слова кратен размеру степени, операции производятся над машинными словами, а не непосредственно со степенями по отдельным переменным. Таким образом, вектор степеней будет обработан одной машинной инструкцией, что уменьшает длину внутренних циклов.

Альтернативным способом представления мономов является представление, основанное на ранге. Первоначально оно было разработано и использовано в системе компьютерной алгебры Macaulay. Данное представление основывается на возможности биективного отображения мономов на целые числа, которые мы будем называть рангами мономов. Точный вид изоморфизма зависит от выбранного отношения порядка.

Благодаря использованию представления, основанного на ранге, сравнения мономов могут быть реализованы как сравнения их рангов. Кроме того, представление полиномов с использованием рангов является достаточно компактным, поэтому затраты памяти минимальны. Тем не менее это представление имеет ряд недостатков.

Вторым упомянутым методом увеличения эффективности алгоритмов построения стандартных базисов является улучшение применяемых стратегий для выбора и отбрасывания S-элементов. В качестве одной из наиболее интересных работ в данном направлении следует упомянуть работу [11], основная идея которой состоит в том, что с каждым полиномом может быть ассоциирован однородный полином степени, равной соответствующей фиктивной степени, при условии гомогенизирования с помощью дополнительной переменной. Стратегия выбора критических пар при использовании фиктивной однородной степени заключается в следующем. Первоначальный отбор происходит путем сравнения фиктивных степеней, а в случае их равенства для нескольких полиномов используется нормальная стратегия выбора по лидирующим термам.

Возможно также использование модифицированных версий данной стратегии. Например, в процессе редукции имеется определенная свобода выбора элемента, по которому осуществляется редукция. Некоторые аспекты не вызывают сомнения: если старший терм полинома может быть редуцирован, необходимо произвести его редукцию, так как любые другие действия, очевидно, приведут только к потере времени. Как правило, также более выгодно использовать для редукции полином, который был добавлен к промежуточному базису раньше других. Предлагаемая стратегия заключается в следующем: помимо перечисленных критериев, анализируется фиктивная однородная степень полинома, редукция осуществляется только в том случае, если она не приводит к повышению фиктивной однородной степени.

Впервые стратегия вычисления фиктивной однородной степени полиномов была реализована в системе компьютерной алгебры CoCoA и зарекомендовала себя как достаточно эффективная.

Первоначально система критериев, используемых в алгоритме построения минимального инволютивного базиса, была построена В. П. Гердтом [8, 9] как обобщение критериев Бухбергера на инволютивный случай. В последнее время были получены интересные результаты, касающиеся улучшения критериев, применяемых в процессе вычисления минимального инволютивного базиса (см. [1]). На данный момент существует гипотеза, что все критерии, применяемые при построении минимального инволютивного базиса, можно обобщить с использованием базиса сизигий, аналогично идеям из [12], но этот факт еще не доказан. Критерии, которые используются в большинстве эффективных реализаций алгоритма Бухбергера на данный момент, основаны на идеях из [7].

Рассмотрим третий метод увеличения эффективности алгоритма вычисления базисов Гребнера — распараллеливание. Основная трудность, с которой приходится столкнуться в процессе распараллеливания алгоритма построения стандартных базисов, — это сильное влияние выбора стратегии на ход вычислений, что существенно затрудняет перенесение эвристик, найденных в процессе исследования последовательного алгоритма, на параллельную версию. Надо отметить также, что алгоритм Бухбергера и практически все его известные интерпретации являются существенно последовательными (точное определение этого термина и демонстрация этого факта будут приведены ниже).

Важность сохранения стратегии, выбранной в процессе работы с последовательным алгоритмом, подчеркнута в работе [2].

Очень интересные работы, посвященные распараллеливанию алгоритма построения базисов Гребнера, принадлежат Ж. К. Фожеру (J. C. Faugère). В последнее время он работает над серией алгоритмов F, допускающих эффективное распараллеливание. Существует теория, что алгоритм F не может быть смоделирован последовательным алгоритмом построения базисов Гребнера ни для какого выбора стратегии вычислений. К сожалению, работы в этом направлении не являются свободно доступными.

Задача построения базиса Гребнера для полиномиальной системы сводится в этом алгоритме к задаче решения (сильно) разреженных систем линейных уравнений, которая может быть эффективно решена с использованием большого числа процессоров. Для достаточно больших задач возникает необходимость в сжатии матриц, что может быть осуществлено рядом известных алгоритмов, вплоть до использования стандартных утилит архивирования, таких как gzip.

Немаловажной задачей является подбор тестовых примеров для проверки эффективности работы реализации алгоритма построения базисов Гребнера. Эта проблема достаточно остро заявила о себе в последнее время, в результате чего было предпринято несколько попыток предложить ее комплексное решение. Несколько проектов было направлено на создание общедоступного глобального банка данных полиномиальных систем (см., например, [3, 5]).

Параллельные алгоритмы вычисления базисов Гребнера

Существует достаточно большое количество работ, посвященных распараллеливанию алгоритма Бухбергера, например [2, 6, 13, 14], но ни в одной из них достигнутые результаты не были достаточно хорошими. Ж. К. Фожер показал, что алгоритм вычисления базиса Гребнера является очень сложно распараллеливаемым по своей сути. Основная причина этого состоит в том, что результат редукции полинома, как правило, сильно зависит от полученных ранее полиномов, в частности от последнего полученного полинома базиса. Тем не менее, применяя определенные методы для модификации стратегии редукции, на практике можно достичь достаточно значительного ускорения.

Рассматриваются два основных подхода. Пусть на данном шаге алгоритма необходимо редуцировать полином p. Обозначим через P список редуцированных ранее (и добавленных к промежуточному базису) полиномов. Последовательная версия на данном шаге алгоритма редуцирует полином p по множеству полиномов P, и в случае получения ненулевого результата добавляет его в P.

Первый подход состоит в том, что множество полиномов P разбивается на несколько подмножеств, которые распределяются по доступным рабочим станциям. Обозначим это разбиение как $P_1, \ldots, P_n$. Полином p редуцируется на первой рабочей станции по подмножеству P_1. Результат редукции отправляется на следующую рабочую станцию, которая содержит подмножество базиса P_2. В этот же момент следующий ожидающий редукции полином q отсылается для редукции по подмножеству P_1 на первую рабочую станцию. В этом состоит основная идея алгоритма Pipeline.

Второй подход строго противоположен. Множество P распределяется по всем рабочим станциям так, что каждая из них содержит его копию, и затем осуществляется одновременная редукция набора полиномов $p_1, \ldots, p_n$ по промежуточному базису P. Эта стратегия получила название Conveyor.

Эксперименты показали, что производительность алгоритма Conveyor значительно превышает производительность алгоритма Pipeline.

Алгоритм Pipeline. Как уже было сказано, вместо полной редукции одного полинома осуществляется посылка полиномов в цепочку редукции одного за другим и редуцирование по подмножествам промежуточного базиса. Таким образом, $P = P_1 \cup \ldots \cup P_n$.

Рассмотрим $n + 1$ рабочих станций, соединенных в кольцо (см. рис. 1). Рабочая станция под номером 0 является выделенной и будет называться `Master`, остальные рабочие станции будут иметь имена $\texttt{Slave}_1, \ldots, \texttt{Slave}_n$ (аналогичная конструкция была названа pipeline в [14]).

В процессе редукции полинома подмножества промежуточного базиса $P_1, \ldots, P_n$ хранятся на соответствующих рабочих станциях `Slave`. По этим подмножествам производится редукция новых S-полиномов, полученных в ходе работы алгоритма.

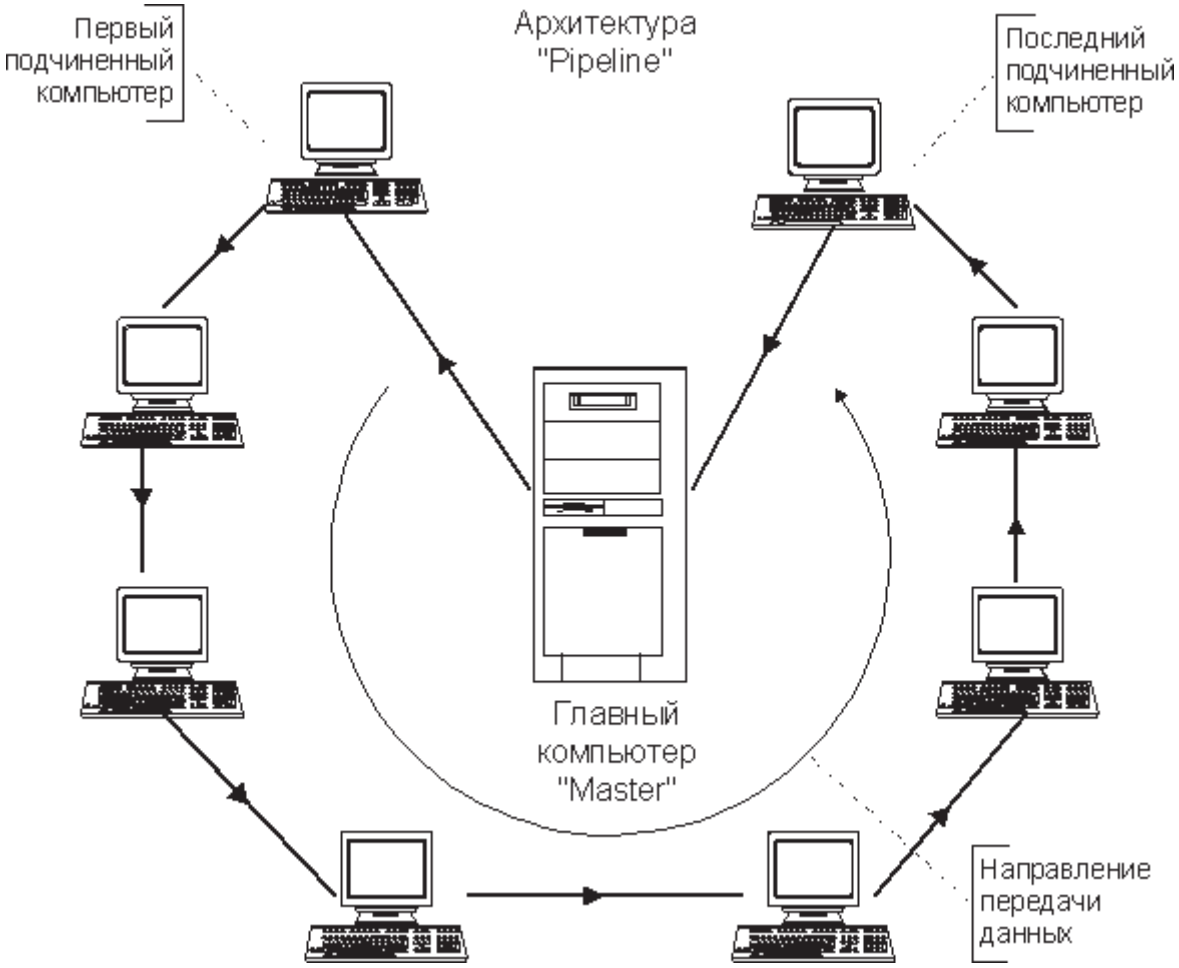

Рис. 1. Топология кластера pipeline

Требуемая редукция S-полинома f по промежуточному базису P преобразуется в цепь редукций вида

$$f \longrightarrow \mathrm{NF}(f, P_1) \longrightarrow \mathrm{NF}(\mathrm{NF}(f, P_1), P_2) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{NF}(\mathrm{NF}(\mathrm{NF}(\ldots), P_{n-1}), P_n) = f',$$

которую можно считать первым приближением к искомой нормальной форме $\mathrm{NF}(f, P)$. Основным преимуществом данного подхода по сравнению с последовательной версией алгоритма является то, что, как показано ниже, данные цепи могут вычисляться одновременно.

	$\texttt{Slave}_1$	$\texttt{Slave}_2$	$\texttt{Slave}_3$
Шаг 1	$\mathrm{NF}(f_1, P_1)$	0	0
Шаг 2	$\mathrm{NF}(f_2, P_1)$	$\mathrm{NF}(\mathrm{NF}(f_1, P_1), P_2)$	0
Шаг 3	$\mathrm{NF}(f_3, P_1)$	$\mathrm{NF}(\mathrm{NF}(f_2, P_1), P_2)$	$\mathrm{NF}(\mathrm{NF}(\mathrm{NF}(f_1, P_1), P_2), P_3)$

Однако, как было упомянуто, приведенная цепь является только первой аппроксимацией искомой нормальной формы $\mathrm{NF}(f, P)$. Использование данного приближения не гарантирует корректности алгоритма. Если полином f' не находится в нормальной форме относительно одного из подмножеств P_i, полученный результат не является нормальной формой относительно промежуточного базиса. Таким образом, в случае, если $f' \neq \mathrm{NF}(f, P_i)$, необходимо осуществить повторный прогон f' через цепочку редукций. Данный процесс необходимо продолжать до стабилизации результата. В этой реализации частично редуцированные полиномы накапливаются в списке `pendinglist`.

Полученные нормальные формы полиномов распределяются по рабочим станциям. Стратегия выбора очередной рабочей станции может различаться. Например, можно использовать генератор случайных чисел.

Описанная логика реализована в виде процедуры `Processpipeline()`.

Алгоритм **Processpipeline**

Вход: GB — список полиномов, B — множество критических пар
Выход: модифицированные GB и B
begin
  $h \longleftarrow$ получить полином из цепочки редукции
  if $h \neq 0$ **then**
    if h был изменен в процессе редукции **then**
      добавить h в список `pendinglist`
    else
      $GB \longleftarrow GB \cup \{h\}$
      $B \longleftarrow \mathtt{syzbasis}(h, B)$
      выбрать следующий вспомогательный компьютер и отправить на него h
        в качестве нового элемента базиса
    end if
  end if
  return (GB, B)
end

Существует также вероятность, что на некоторых шагах алгоритма S-пара, соответствующая частично редуцированному полиному, окажется отброшенной в процессе анализа базиса сизигий после добавления очередного полинома к промежуточному базису. В таком случае этот частично редуцированный полином будет удален из списка `pendinglist`.

Построенный алгоритм использует стратегию `sugar`, реализованную следующим образом. Распараллеливание производится только для вычисления подмножеств, имеющих одинаковую фиктивную однородную степень.

При использовании процедуры `Processpipeline()` для обработки полиномов, полученных из цепи редукции, алгоритм может быть сформулирован следующим образом.

Алгоритм **Pipeline GröbnerBasis**

Вход: G, $\prec$ — допустимое отношение порядка
Выход: GB, базис Гребнера $[G]$
begin
  $G \longleftarrow \mathtt{autoreduce}(G)$
  $g \longleftarrow$ выбрать минимальный элемент из G по отношению к `sugar`
  `currentdegree` $\longleftarrow \mathtt{sugar}(g)$
  $G \longleftarrow G \setminus \{g\}$
  $GB \longleftarrow g$
  выбрать первый подчиненный компьютер и отправить g на него
    в качестве нового элемента базиса
  `pendinglist` $\longleftarrow \{\}$
  while $B \neq \varnothing$ **and** $G \neq \varnothing$ **do**
    $(f, g) \longleftarrow$ выбрать элемент из B с минимальным `sugar` из $\mathtt{spoly}(f, g)$
    $s \longleftarrow \mathtt{spoly}(f, g)$
    while $\mathtt{sugar}(s)$ равен `currentdegree` и список `pendinglist` не пуст **do**
      if `pendinglist` не пуст **then**
        выбрать элемент из списка `pendinglist` и отправить его в цепочку редукций

else
отправить s в цепочку редукций
end if
$(GB, B) \longleftarrow$ `Processpipeline`(GB, B)
$(f, g) \longleftarrow$ выбрать элемент из B с минимальным `sugar` из `rcm`(f, g)
$s \longleftarrow$ `spoly`(f, g)
end while
$f \longleftarrow$ выбрать минимальный элемент из G по отношению к `sugar`
$G \longleftarrow G \setminus \{f\}$
while `sugar`(f) равен `currentdegree` и список `pendinglist` не пуст **do**
if `pendinglist` не пуст **then**
выбрать элемент из списка `pendinglist` и отправить его в цепочку редукций
else
отправить f в цепочку редукций
end if
$(GB, B) \longleftarrow$ `Processpipeline`(GB, B)
$f \longleftarrow$ выбрать минимальный элемент из G по отношению к `sugar`
$G \longleftarrow G \setminus \{f\}$
end while
`currentdegree` $\longleftarrow$ `currentdegree` $+ 1$
end while
$(GB) \longleftarrow$ `finalreduce`(GB)
return (GB)
end

Алгоритм Conveyor. Данный алгоритм построен на противоположной идее. В процессе изложения будет использоваться терминология предыдущей части.

Рассмотрим $n + 1$ рабочих станций, соединенных по топологии «звезда» (см. рис. 2). Рабочая станция под номером 0 является выделенной и будет называться `Master`, остальные рабочие станции будут иметь имена $\texttt{Slave}_1, \ldots, \texttt{Slave}_n$.

В данном случае каждая рабочая станция $\texttt{Slave}_i$ содержит копию всего промежуточного базиса P. Полиномы из подмножеств промежуточного базиса $p_1, \ldots, p_n$ редуцируются на соответствующих рабочих станциях $\texttt{Slave}_i$ одновременно. Ниже представлена схема вычислений.

	$\texttt{Slave}_1$	$\texttt{Slave}_2$	$\texttt{Slave}_3$	$\texttt{Slave}_4$
Шаг 1	$\mathrm{NF}(f_1, P)$	$\mathrm{NF}(f_2, P)$	$\mathrm{NF}(f_3, P)$	$\mathrm{NF}(f_4, P)$

Что касается корректности, очевидно, что проведенных на данном этапе редукций недостаточно, так как полином $\mathrm{NF}(p_i, P)$ может оказаться редуцируемым по полиному $\mathrm{NF}(p_j, P)$, $i \neq j$. Пусть полиномы $p_1, \ldots, p_n$ — это результаты первого этапа редукции по промежуточному базису P. Производится дополнительная редукция: для каждого p_i вычисляется нормальная форма p'_i относительно $\{p_1, \ldots, p_{i-1}\}$ и далее, в случае, если $p'_i \neq p_i$, осуществляется повторная редукция множества $P \cup \{p_1, \ldots, p_{i-1}\}$ по полиному p'_i на рабочей станции `Master`. Как показывает практика, необходимость в такой промежуточной авторедукции возникает достаточно редко.

Аналогично алгоритму Pipeline, распараллеливание осуществляется только в пределах подмножеств полиномов с одинаковой фиктивной однородной степенью.

Изложенные выше идеи можно сформулировать в виде алгоритма следующим образом.

Алгоритм **Conveyor GröbnerBasis**

Вход: G, $\prec$ — допустимое отношение порядка
Выход: GB, базис Гребнера [G]
begin
$G \longleftarrow$ `autoreduce`(G)
$g \longleftarrow$ выбрать минимальный элемент из G по отношению к `sugar`

```
currentdegree ⟵ sugar(g)
G ⟵ G \ {g}
GQ ⟵ g
pendinglist ⟵ {}
разослать g по подчиненным компьютерам в качестве нового элемента базиса
while B ≠ ∅ and G ≠ ∅ do
  (f, g) ⟵ выбрать элемент из B с минимальным sugar из spoly(f, g)
  s ⟵ spoly(f, g)
  while sugar(s) равен currentdegree и список pendinglist не пуст do
    отправить следующие S-полиномы с degree(НОК(f, g)) = currentdegree
      по подчиненным компьютерам
    R ⟵ получить редуцированные S-полиномы с подчиненных компьютеров
    while R ≠ ∅ do
      h ⟵ выбрать элемент из R с минимальным sugar
      R ⟵ R \ {h}
      if h ≠ 0 then
        B ⟵ syzbasis(h, B) и разослать h по подчиненным компьютерам
          в качестве нового элемента базиса
      end if
    end while
    (f, g) ⟵ выбрать элемент из B с минимальным sugar из spoly(f, g)
    s ⟵ spoly(f, g)
  end while
  f ⟵ выбрать минимальный элемент из G по отношению к sugar, G ⟵ G \ {f}
  while sugar(f) равен currentdegree и список pendinglist не пуст do
    разослать полиномы из G с degree(f) = currentdegree
      по подчиненным компьютерам
    R ⟵ получить редуцированные полиномы с подчиненных компьютеров
    while R ≠ ∅ do
      h ⟵ выбрать элемент из R с минимальным sugar
      R ⟵ R \ {h}
      if h ≠ 0 then
        U ⟵ syzbasis(h, B) разослать h по подчиненным компьютерам
          в качестве нового элемента базиса
      end if
    end while
    f ⟵ выбрать минимальный элемент из G по отношению к sugar, G ⟵ G \ {x}
  end while
  currentdegree ⟵ currentdegree + 2
end while
(GB) ⟵ finalreduce(GB)
return (GP)
```

Алгоритм с использованием графа редукций. Помимо распараллеливания алгоритма Бухбергера как такового, существуют и другие эффективные подходы. Один из интересных методов предложен в [6].

Детальный анализ показывает, что основное время в алгоритме вычисления базиса Гребнера занимает редуцирование избыточных S-пар, т. е. таких, нормальной формой которых является нуль. Единственным способом устранить такие редукции является использование критериев, описанных выше. Но это решит только часть задачи. Достаточно большое количество избыточных S-пар не будет отброшено критериями. Для вычислений в кольцах полиномов с целочисленными коэффициентами стоимость редукции достаточно велика, и устранение таких S-пар является очень важной задачей.

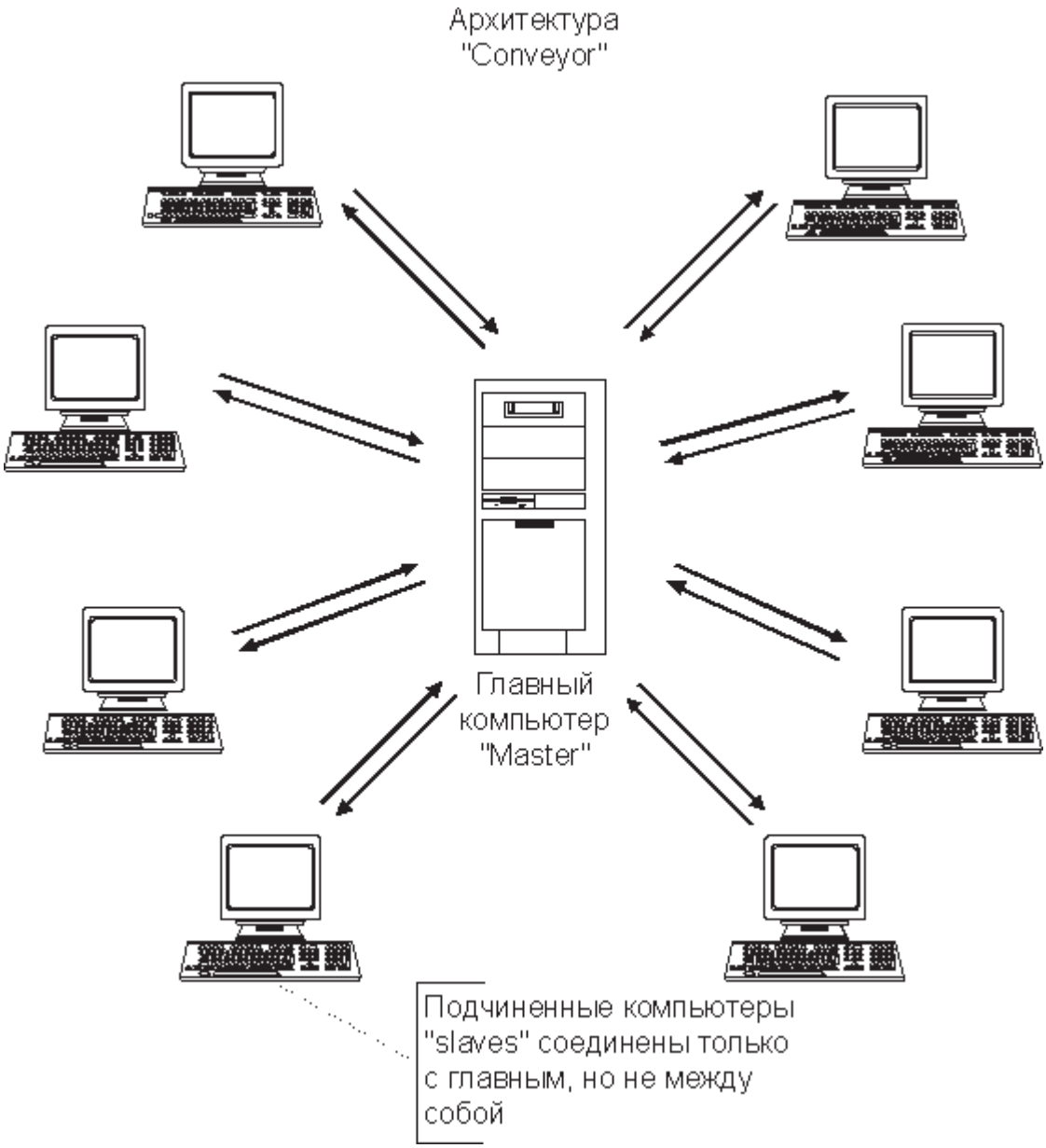

Рис. 2. Топология кластера conveyor

В вычислениях с целыми числами важную роль играют вероятностные алгоритмы. Слово «вероятностный» в данном случае будет означать, что после завершения работы алгоритма необходимо будет осуществить проверку результата: является ли полученная система полиномов базисом Гребнера заданного идеала. В случае ошибки возможен запуск детерминированного алгоритма или повтор вычислений с помощью вероятностного алгоритма для других случайных параметров. В качестве стартовой системы можно взять вычисленное приближение. Практика показывает, что в таком случае алгоритм Бухбергера завершает свою работу достаточно быстро.

Пусть I является начальным идеалом, порожденным системой полиномов с целочисленными коэффициентами, и Ip его модулярной проекцией. Алгоритм состоит из трех шагов.

1. Последовательное вычисление базиса Гребнера идеала Ip и сохранение всех ненулевых редукций в списке RL.
2. Параллельное вычисление редукций из списка RL на первоначальной системе в идеале I, результатом которой является система полиномов $RL(I)$ с целочисленными коэффициентами.
3. Параллельная проверка, является ли $RL(I)$ базисом Гребнера идеала I.

Редукции сохраняются в следующем виде. Пусть к базису было добавлено $n-1$ полиномов. Идет обработка полинома с индексом n. Первоначально этот полином мог быть получен как S-полином пары с индексами k, l или являться одним из начальных порождающих. Пусть далее проводится редукция данного полинома по полиномам с индексами $n_1, \ldots, n_k$ к ненулевой нормальной форме. Тогда будем называть протоколом его редукции список $[\texttt{SPair}, k, l, n_1, \ldots, n_k]$ в случае S-пары и список $[\texttt{FromInitialSet}, n_1, \ldots, n_k]$ в противном случае, где `SPair` и `FromInitialSet` являются индикаторами источника данного полинома.

Опишем следующий шаг алгоритма. Условимся называть пару (полином, протокол) схемой редукции. Один шаг трансформации схемы редукции является операцией, определенной следующим образом:

$$\{0, [\texttt{SPair}, k, l, n_1, \ldots, n_k]\} \longrightarrow \{\texttt{SPolynomial}(k, l), [n_1, \ldots, n_k]\}, \tag{1}$$

$$\{0, [\texttt{FromInitialSet}, n_1, \ldots, n_k]\} \longrightarrow \{\texttt{NextFromInitialList}, [n_1, \ldots, n_k]\}, \tag{2}$$

$$\{p, [n_i, \ldots, n_k]\} \longrightarrow \{\texttt{reduce}(p, n_i), [n_{i+1}, \ldots, n_k]\}. \tag{3}$$

Преобразование (2) может быть осуществлено в любом случае. Преобразования (1) и (3) могут быть осуществлены только в случае, если полиномы с индексами k, l или n_i уже были вычислены до данного шага алгоритма. В противном случае условимся называть схему редукции тупиковой. Схема редукции $\{p, [\,]\}$, где p — произвольный полином, называется терминальной.

Пусть в наличии имеется одна выделенная рабочая станция, которую условимся называть `Master`, и N рабочих станций $\texttt{Slave}_i$. На каждом шаге рабочие станции $\texttt{Slave}_i$ содержат весь посчитанный на данный момент промежуточный базис. На каждом шаге `Master` читает протокол редукций RL и распределяет схемы редукции вида

$$\{0, [\texttt{SPair}, k, l, n_1, \ldots, n_k]\} \quad \text{или} \quad \{\text{полином из начального списка}, [n_1, \ldots, n_k]\}$$

по рабочим станциям $\texttt{Slave}_i$. Каждая из них осуществляет преобразование (редукцию) выделенных схем редукции, которые не являются тупиковыми, и отправляет полиномы из терминальных схем редукции обратно на `Master`. Время от времени $\texttt{Slave}_i$ прерывает работу для получения с рабочей станции `Master` новых вычисленных полиномов базиса и новые схемы редукции. Далее некоторые из тупиковых пар перестают быть таковыми, и их редукция может быть продолжена.

После завершения работы алгоритма `Master` (и все $\texttt{Slave}_i$) будут содержать систему, с некоторой вероятностью являющуюся базисом Гребнера исходного идеала. Далее необходимо осуществить ее проверку.

Проверка осуществляется следующим образом. Создается список S-пар полиномов из списка $RL(I)$ и распределяется по рабочим станциям $\texttt{Slave}_i$. В силу того что каждая из рабочих станций содержит весь вычисленный базис, редукция может быть осуществлена независимо. В случае, если какая-либо из S-пар имеет ненулевую нормальную форму, найдена ошибка и вычисления необходимо повторить, как это описано выше. В противном случае найденное множество полиномов является базисом Гребнера первоначального идеала. Легко видеть, что с увеличением количества рабочих станций скорость фазы проверки возрастает практически линейно для достаточно большого количества полиномов.

Оценка качества распараллеливания алгоритмов вычисления базисов Гребнера

При моделировании параллельного алгоритма принимаются следующие допущения:

- в наличии имеется неограниченное число процессоров (на практике необходимое их число не так уж велико, так что это требование сделано исключительно для простоты);
- временами на пересылку сообщений можно пренебречь;
- все элементарные операции над полиномами, такие как шаг редукции (не полная редукция!) и вычисление S-полинома, выполняются за постоянное время.

Условимся называть полином f_i *независимым*, если полином f_{i-1} не был использован в процессе вычисления f_i. Условимся называть полином f_i *почти независимым*, если «почти весь» полином f_i

может быть вычислен без непосредственного вычисления f_{i-1}. Поясним значение фразы «почти весь». Определим величину p для полинома f_i следующим образом:

$$p = \begin{cases} 0, & \text{если } f_i \text{ — это } S\text{-полином полинома } f_{i-1} \text{ и некоторого другого полинома,} \\ 1, & \text{если индекс } i-1 \text{ не присутствует в списке } S_i, \\ \frac{j_0}{\operatorname{length}(S_i)+1} & \text{иначе, где } j_0 = \min\{j \leqslant \operatorname{length}(S_i) \mid j = i-1\}, \end{cases}$$

где S_i — список индексов полиномов, использованных в процессе редукции полинома f_i в порядке возникновения, и первые два элемента списка S_i являются индексами образующих S-полинома, если полином f_i является S-полиномом. Выберем величину 0,66 как граничное значение для p и условимся называть полиномы с $p > 0{,}66$ *почти независимыми*.

Далее, обозначим N_{all} полное число полиномов, вычисленных в процессе нахождения базиса Гребнера, обозначим N_{ind} число *независимых* полиномов и N_{almost} число *почти независимых* полиномов. Пусть

$$T_{\text{seq}} = N_{\text{all}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{all}}} \operatorname{length}(S_i).$$

Это в точности число элементарных полиномиальных операций в процессе работы алгоритма. В параллельной версии алгоритма список S_i является стеком полиномов, которые необходимо вычислить, для того чтобы вычисление полинома f_i стало возможным. Допуская, что каждый полином базиса будет вычисляться на выделенном процессоре (для этого потребуется N_{all} процессоров), можно найти число элементарных полиномиальных операций в процессе работы параллельного алгоритма. Данное число обозначим T_{par}. Обозначим $P_{\max}$ максимальное количество процессоров, используемых одновременно в процессе работы алгоритма, и T_{average} — среднее количество используемых процессоров.

Результаты анализа алгоритмов этим методом показывают, что в процессе вычисления базиса Гребнера эффективно может быть использовано только сравнительно небольшое количество процессоров. Как правило, увеличение эффективности невозможно при использовании более пяти процессоров. Тем не менее максимальное число процессоров, использованных в процессе вычисления, достаточно велико — до 194 в задаче ilias12. Увеличение скорости работы алгоритма в среднем не очень велико, тем не менее оно существенно. С использованием данного подхода вычисления в некоторых задачах могут быть ускорены на порядок. Интересно сравнить приведенную ниже таблицу с результатами, полученными для алгоритма Conveyor. Результаты достаточно хорошо согласуются, поэтому можно заключить, что данный алгоритм является очень эффективным и в то же время достаточно простым в реализации.

Данный подход может быть использован в процессе вычисления инволютивных базисов. След модулярных вычислений может быть использован в процессе вычисления над целыми числами при условии проверки базиса после завершения вычислений. В качестве примера можно использовать версию алгоритма вычисления минимального инволютивного базиса, представленную в работе [10] В. П. Гердта и модифицировать ее с использованием изложенного метода.

Оценка качества распараллеливания для алгоритма с использованием графа редукций приведена в таблице 1, для алгоритма Pipeline в таблице 2 и для алгоритма Conveyor в таблице 3 соответственно.

В качестве иллюстрации того, что алгоритм Бухбергера «очень последовательный» (что является основным объяснением низкого качества распараллеливания в [6]), можно продемонстрировать граф зависимостей (см. рис. 3). Этот граф получен при вычислении базиса с коэффициентами из конечного поля и может быть использован далее в вычислениях в кольце полиномов с целочисленными коэффициентами. Чем больше в графе ребер относительно количества вершин, тем ниже потенциальное качество распараллеливания. Естественно, система, представленная на графе, очень мала. Для реальных примеров число вершин и ребер в подобных графах очень велико.

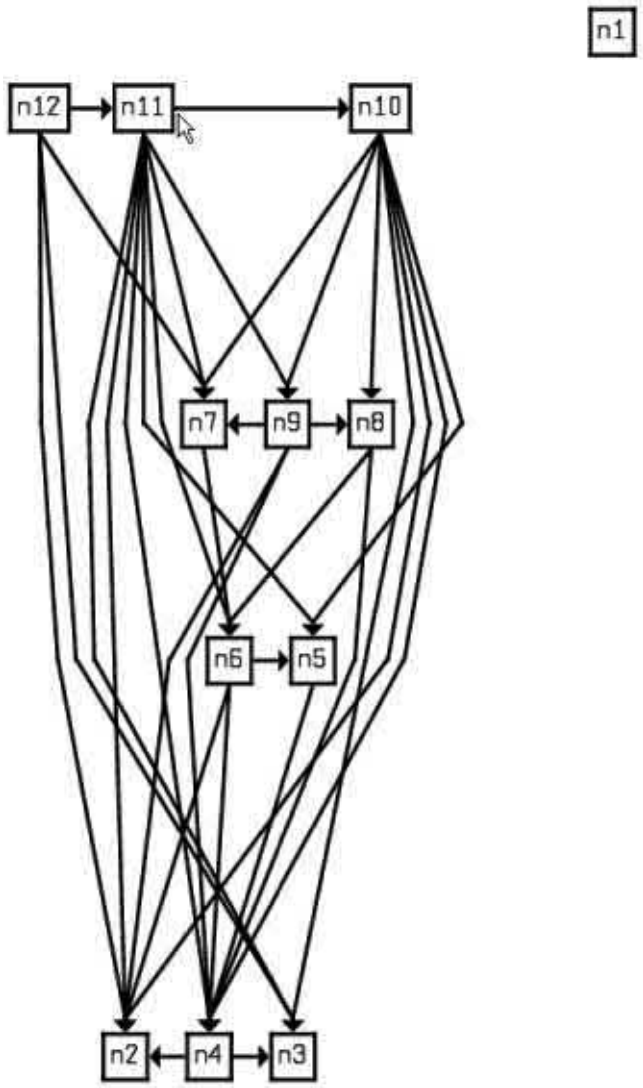

Рис. 3. Граф зависимостей для системы уравнений eco5

Таблица 1. Оценка качества распараллеливания для алгоритма с использованием графа редукций

система	размер базиса	$\frac{N_{\text{ind}}}{N_{\text{all}}}$	$\frac{N_{\text{almost}}}{N_{\text{all}}}$	T_{seq}	T_{par}	$\frac{T_{\text{seq}}}{T_{\text{par}}}$	$P_{\max}$	P_{average}
butcher8	54	41,89	67,57	10025	2090	4,80	56	4,86
assur44	87	29,71	60,14	17906	4654	3,85	63	3,87
boon	9	72,92	91,67	253	55	4,60	19	5,25
butcher	27	50,00	73,68	1947	355	5,48	35	5,66
camera1s	26	70,00	73,33	409	138	2,96	17	3,09
caprasse4	23	60,87	69,57	235	75	3,13	13	3,33
cassou	8	33,33	79,17	540	110	4,91	15	5,27
chandra6	39	44,23	50,00	531	195	2,72	30	2,93
cohn2	23	40,48	52,38	1173	550	2,13	20	2,19
cohn3	92	25,62	63,75	16347	5064	3,23	41	3,26
comb3000	20	76,19	80,95	120	52	2,31	9	2,33

система	размер базиса	$\frac{N_{\text{ind}}}{N_{\text{all}}}$	$\frac{N_{\text{almost}}}{N_{\text{all}}}$	T_{seq}	T_{par}	$\frac{T_{\text{seq}}}{T_{\text{par}}}$	$P_{\max}$	P_{average}
conform1	10	47,06	82,35	47	18	2,61	9	3,22
cpdm5	77	18,82	20,00	6792	4548	1,49	22	1,51
cyclic4	7	71,43	71,43	12	6	2,00	3	1,83
cyclic5	20	26,32	71,05	295	91	3,24	13	3,55
cyclic6	45	19,42	78,64	2628	594	4,42	29	4,58
cyclic7	209	12,09	61,61	99414	20720	4,80	121	4,82
d1	86	80,54	87,92	3626	683	5,31	49	5,49
des18_3	39	45,00	45,00	1480	795	1,86	14	1,89
des22_24	45	43,48	50,00	1787	1212	1,47	21	1,50
discret3	147	22,69	30,09	14329	4215	3,40	62	3,45
dl	323	77,86	81,68	138951	27528	5,05	151	5,07
eco6	18	50,00	54,55	242	115	2,10	8	2,19
eco7	32	55,00	62,50	1246	683	1,82	13	1,86
eco8	59	53,95	57,89	6348	2715	2,34	21	2,36
extcyc5	70	19,51	26,83	14607	10059	1,45	23	1,46
extcyc6	86	17,93	58,96	37969	10704	3,55	70	3,57
f744	87	64,19	79,05	8810	1947	4,52	77	4,59
f855	148	51,20	71,77	81175	18792	4,32	184	4,34
geneig	16	37,50	70,83	322	99	3,25	15	3,37
hcyclic6	99	16,16	73,74	2299	576	3,99	28	4,14
hcyclic7	443	10,16	61,85	57445	17912	3,21	84	3,23
heart	9	60,00	70,00	89	32	2,78	9	2,91
i1	118	76,92	88,17	7950	1452	5,48	61	5,58
ilias_k_2	125	37,17	68,75	71478	19450	3,67	54	3,69
ilias_k_3	140	34,60	61,59	71726	20560	3,49	48	3,50
ilias12	231	20,12	38,09	346347	122345	2,83	194	2,83
ilias13	246	54,42	67,88	166591	37257	4,47	168	4,48
katsura6	41	29,27	29,27	1301	628	2,07	11	2,11
katsura7	74	22,97	22,97	4747	1856	2,56	13	2,59
katsura8	143	19,58	20,98	19907	6165	3,23	19	3,25
kin1	93	62,78	83,89	3940	637	6,19	63	6,43
kinema	39	31,91	48,94	1947	774	2,52	18	2,55
kotsireas	68	36,09	51,88	15974	5698	2,80	37	2,82
ku10	10	92,31	94,23	151	17	8,88	35	10,76
lorentz	12	83,33	91,67	55	23	2,39	7	2,57
noon3	11	81,82	81,82	24	10	2,40	5	2,90
noon4	28	92,86	92,86	159	59	2,69	16	3,03
noon5	72	90,28	90,28	1183	321	3,69	43	3,88
quadfor2	4	80,00	80,00	6	3	2,00	1	1,00
quadgrid	8	55,56	55,56	39	25	1,56	4	1,52
rabmo	20	62,99	84,25	10167	1686	6,03	34	6,09

система	размер базиса	$\frac{N_{\text{ind}}}{N_{\text{all}}}$	$\frac{N_{\text{almost}}}{N_{\text{all}}}$	T_{seq}	T_{par}	$\frac{T_{\text{seq}}}{T_{\text{par}}}$	$P_{\max}$	P_{average}
rbpl24	54	35,79	53,68	7330	2705	2,71	38	2,74
redcyc6	21	14,95	54,21	3262	1088	3,00	28	3,09
redcyc7	78	8,13	51,43	99785	44878	2,22	116	2,23
redeco5	9	66,67	77,78	28	15	1,87	4	1,80
redeco6	17	52,94	52,94	97	45	2,16	8	2,27
redeco7	33	48,48	48,48	334	134	2,49	15	2,63
reimer4	17	39,13	52,17	461	149	3,09	15	3,35
reimer5	38	40,46	48,85	6321	2016	3,14	27	3,20
reimer6	95	36,50	42,93	325049	73480	4,42	95	4,43
s9_1	15	62,50	75,00	74	30	2,47	7	2,47
sendra	6	28,57	28,57	42	37	1,14	3	1,22
solotarev	10	80,00	90,00	29	14	2,07	5	2,21
speer	68	45,00	52,00	6552	1845	3,55	19	3,60
trink	13	38,46	46,15	89	55	1,62	5	1,64
utbikker	17	17,65	17,65	297	214	1,39	6	1,43
virasoro	128	32,81	34,38	15189	6201	2,45	31	2,47

Таблица 2. Оценка качества распараллеливания для алгоритма Pipeline

система	размер базиса	$T_{\text{seq}} = T_1$	T_2	T_4	T_{16}	T_{32}	T_{64}	T_{128}	макс. ускор.
assur44	87	17898	13077	12154	14358	15174	15913	16834	1,4
boon	9	247	188	176	197	213	225	239	1,4
butcher	27	1940	1406	1283	1484	1678	1784	1873	1,5
butcher8	54	10017	7245	6400	7151	7976	8733	9402	1,5
camera1s	26	403	302	292	355	370	387	389	1,3
caprasse4	23	231	183	157	199	216	225	226	1,4
cassou	8	536	382	342	379	467	512	515	1,5
chandra6	39	525	393	391	452	491	501	513	1,3
cohn2	23	1169	952	925	1049	1094	1146	1162	1,2
cohn3	92	16343	10969	10661	12408	13077	14053	14855	1,5
cpdm5	77	6787	5463	5805	6293	6449	6575	6711	1,1
cyclic6	45	2622	1837	1572	1882	2131	2395	2469	1,6
cyclic7	209	99407	69938	58465	66290	69957	76815	82367	1,7
d1	86	3614	2605	2369	2637	3031	3224	3379	1,5
dl	323	138940	96411	90949	105215	118000	125421	130980	1,5
discret3	147	14321	10418	10049	11002	12107	12921	13474	1,4
eco8	59	6340	5135	5114	5755	6027	6174	6214	1,2
eco9	106	32305	26492	26830	29607	30723	31368	31862	1,2
eco10	203	162319	134287	133840	148072	154535	157868	159740	1,2
hcyclic6	99	2293	1580	1336	1673	1913	2118	2198	1,7

система	размер базиса	$T_{\text{seq}} = T_1$	T_2	T_4	T_{16}	T_{32}	T_{64}	T_{128}	макс. ускор.
hcyclic7	443	57438	39379	33994	39804	42497	46094	49434	1,6
hcyclic8	1182	614540	450382	387492	449580	480240	510290	521370	1,5
i1	118	7940	5522	5142	5615	6400	7023	7345	1,5
katsura6	41	1294	1076	1016	1204	1259	1271	1277	1,2
katsura7	74	4739	3914	3820	4283	4526	4605	4657	1,2
katsura8	143	19898	16987	16280	17402	18720	19206	19475	1,2
katsura9	272	75854	63766	63201	67379	69244	72357	74009	1,2
katsura10	537	356662	302560	301618	321932	328385	335249	345077	1,1
reimer4	17	457	360	330	396	434	439	450	1,3
reimer5	38	6316	4718	4545	5331	5679	5966	6142	1,3
des18-3	39	1472	1148	1249	1377	1388	1389	1397	1,1
des22-24	45	1777	1537	1573	1713	1727	1741	1743	1,1
extcyc5	70	14602	12118	12497	13550	13829	13977	14294	1,1
extcyc6	86	37963	27133	23627	27313	29369	30933	33222	1,6
f744	87	8799	6439	6079	6956	7680	8048	8381	1,4
f855	148	81162	58026	55665	64369	69547	71457	75185	1,4
ilias-k-2	125	71470	50140	47096	55366	58985	62357	65098	1,5
ilias-k-3	140	71718	51071	49020	57141	61174	64194	66459	1,4
ilias12	231	346336	346336	265629	279493	294721	307062	315041	1,3
ilias13	246	166581	115723	111127	132242	143447	151600	156271	1,4
noon4	28	155	116	100	132	138	140	142	1,55
noon5	72	1178	849	783	957	1011	1017	1030	1,5
rabmo	20	10158	7621	7200	7850	8708	9295	9647	1,4
rbpl24	54	7321	5124	5101	6005	6292	6656	6887	1,4
solotarev	10	25	21	20	25	25	25	25	1,25
virasoro	128	15181	11177	11216	13200	13727	14226	14691	1,3

ТАБЛИЦА 3. Оценка качества распараллеливания для алгоритма Conveyor

система	размер базиса	T_{seq}	T_{master}	T_{slaves}	$P_{\max}$	P_{average}
assur44	87	17898	0	2279	35	7,85
boon	9	247	0	75	8	3,29
butcher	27	1940	0	439	17	4,42
butcher8	54	10017	0	1192	40	8,40
camera1s	26	403	0	116	11	3,47
caprasse4	23	231	0	95	6	2,43
cassou	8	536	0	169	14	3,17
chandra6	39	525	0	218	17	2,41
cohn2	23	1169	0	467	12	2,50
cohn3	92	16343	0	1620	32	10,09
comb3000	20	110	0	34	7	3,24

система	размер базиса	T_{seq}	T_{master}	T_{slaves}	$P_{\max}$	P_{average}
conform1	10	44	0	25	4	1,76
cpdm5	77	6787	0	1171	18	5,80
cyclic4	7	8	0	6	2	1,33
cyclic5	20	290	0	99	6	2,93
cyclic6	45	2622	0	565	19	4,64
cyclic7	209	99407	0	8211	73	12,11
cyclic8	372	2053818	0	281805	244	7,29
d1	86	3614	0	673	29	5,37
des18 3	39	1472	0	252	11	5,84
des22 24	45	1777	0	440	10	4,04
discret3	147	14321	0	1564	41	9,16
dl	323	138940	0	12584	107	11,04
eco6	18	236	0	140	6	1,69
eco7	32	1239	0	558	9	2,22
eco8	59	6340	0	2119	20	2,99
eco9	106	32305	0	7926	37	4,08
eco10	203	162319	0	24351	60	6,67
eco11	389	1066829	0	148047	92	7,21
extcyc5	70	14602	0	4197	13	3,48
extcyc6	86	37963	0	4670	52	8,13
f744	87	8799	0	1196	50	7,36
f855	148	81162	0	9851	99	8,24
geneig	16	316	0	60	10	5,27
hcyclic6	99	2293	0	388	17	5,91
hcyclic7	443	57438	0	2967	71	19,36
hcyclic8	1182	614540	0	26246	223	23,41
heart	9	81	0	25	7	3,24
i1	118	7940	0	998	49	7,96
ilias k 2	125	71470	0	5267	35	13,57
ilias k 3	140	71718	0	5989	39	11,97
ilias12	231	346336	0	20547	95	16,86
ilias13	246	166581	0	8172	92	20,38
katsura6	41	1294	0	306	11	4,23
katsura7	74	4739	0	729	20	6,50
katsura8	143	19898	0	1832	36	10,86
katsura9	272	75854	0	4959	70	15,30
katsura10	537	356662	0	13680	127	26,07
kin1	93	3928	0	626	24	6,27
kinema	39	1938	0	329	13	5,89
kotsireas	68	15968	0	2571	23	6,21
ku10	10	141	0	15	20	9,40

система	размер базиса	T_{seq}	T_{master}	T_{slaves}	$P_{\max}$	P_{average}
lorentz	12	51	0	28	4	1,82
noon3	11	21	0	14	3	1,50
noon4	28	155	0	73	6	2,12
noon5	72	1178	0	366	15	3,22
quadfor2	4	2	0	2	2	1,00
quadgrid	8	34	0	26	2	1,31
rabmo	20	10158	0	2412	23	4,21
rbpl24	54	7321	0	1057	39	6,93
redcyc6	21	3256	0	792	19	4,11
redcyc7	78	99778	0	17394	98	5,74
redeco5	9	23	0	15	3	1,53
redeco6	17	91	0	40	6	2,28
redeco7	33	327	0	95	10	3,44
reimer4	17	457	0	174	9	2,63
reimer5	38	6316	0	1310	26	4,82
reimer6	95	325043	0	27881	84	11,66
s9 1	15	66	0	21	4	3,14
sendra	6	40	0	40	1	1,00
solotarev	10	25	0	15	3	1,67
speer	68	6548	0	1356	18	4,83
trink	13	83	0	38	3	2,18
utbikker	17	293	0	136	4	2,15
virasoro	128	15181	0	1367	28	11,11

Заключение

Можно отметить, что распараллеливание алгоритмов построения базисов Гребнера и инволютивных базисов не позволяет линейно наращивать эффективность с ростом количества используемых процессоров и максимальное число эффективно используемых процессоров индивидуально для каждой полиномиальной системы. В то же время метод позволяет существенно (до десяти и более раз в проведенных экспериментах) увеличить производительность алгоритмов вычисления базисов Гребнера. Достаточно интересным направлением для изучения является также серия алгоритмов F.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 02-01-01033 и 05-01-00671.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Apel J., Hemmecke R.* Detecting Unnecessary Reductions in an Involutive Basis Computation. — RISC Linz Report Series 02-22. — Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler Universität, Linz, 2002.
2. *Attardi G., Traverso C.* A strategy-accurate Buchberger algorithm. Parallel symbolic computation // J. Symbolic Comput. — 1996. — *21*, Nos. 4—6. — P. 411—425.
3. *Bachmann O., Grabe H.* The SymbolicData Project. — Reports on Computer Algebra. N 27. — Univ. Kaiserslautern, 2000.
4. *Bachmann O., Schönemann H.* Monomial Representations for Gröbner Bases Computations. — `http://www.mathematik.uni-kl.de/~zca/Reports_on_ca/18/paper_html/paper.html`.
5. *Bini D. A., Mourrain B.* Polynomial Test Suite. — `http://www-sop.inria.fr/saga/POL/`.

6. *Faugère J. C.* Parallelization of Gröbner Basis // Proceedings of PASCO 1994. — World Scientific Publ. Comp., 1994.
7. *Gebauer R., Möller H. M.* On an installation of Buchberger's algorithm // J. Symbolic Comput. — 1988. — N 6. — P. 275—286.
8. *Gerdt V. P.* Groebner bases and involutive methods for algebraic and differential equations // Math. Comput. Modelling. — 1997. — *25*, N 8/9. — P. 75—90.
9. *Gerdt V. P.* Involutive division technique: some generalizations and optimizations // J. Math. Sci. — 2002. — *108*, N 6. — P. 1034—1051.
10. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Yanovich D. A.* Computation of Janet bases. II. Polynomial bases // Computer Algebra in Scientific Computing / CASC 2001 / eds. V. G. Ganzha, E. W. Mayr, and E. V. Vorozhtsov. — Berlin: Springer, 2001. — P. 249—263.
11. *Giovanni A., Mora T., Niesi G., Robbiano L., Traverso C.* One sugar cube, please or Selection strategies in Buchberger algorithm // Proceedings of ISSAC 1991. — ACM, 1991. — P. 49—54.
12. *Moller H. M., Mora T., Traverso C.* Gröbner bases computation using syzygies // Proceedings of ISSAC 1992. — ACM, 1992.
13. *Reeves A. A.* A parallel implementation of Buchberger's algorithm over Z_p for $p \leqslant 31991$ // J. Symbolic Comput. — 1998. — P. 229—244.
14. *Siegl K.* A parallel factorization tree Gröbner basis algorithm // Proceedings of PASCO 1994. — World Scientific Publ. Comp., 1994.

В. А. Митюнин
Московский государственный университет, механико-математический факультет
E-mail: mit@shade.msu.ru

Е. В. Панкратьев
Московский государственный университет, механико-математический факультет
E-mail: pankrat@shade.msu.ru

Современная математика и ее приложения. Том 30 (2005). С. 65–100

УДК 512.55

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ГРАДУИРОВАННЫЕ РАСШИРЕНИЯ

© 2005 г. **Д. И. ПИОНТКОВСКИЙ**

Аннотация. В обзоре рассматривается следующая ситуация. Пусть A — градуированная алгебра или дифференциально градуированная алгебра. Присоединяя множество x свободных (в каком-нибудь смысле) переменных, построим новую дифференциально градуированную алгебру $A\langle x\rangle$, задав значения дифференциала $d\colon x \to A$ на x. Такая конструкция в общем случае называется комплексом Шафаревича. Начав с классических примеров, таких как бар-комплекс, комплекс Козюля и резольвента Тэйта, мы обсуждаем затем некоммутативные (и даже неассоциативные) версии этой конструкции. Их сопоставление с комплексом Козюля приводит к некоммутативным регулярным последовательностям и полным пересечениям. Процесс убивания циклов, как у Тэйта, дает некоммутативные дифференциально градуированные резольвенты и минимальные модели. Приложения включают теорему Голода—Шафаревича, меру роста градуированных алгебр, характеризацию алгебр малой гомологической размерности и гомологическое описание базисов Гребнера. Аналогичная конструкция для категорий алгебр с тождествами (как алгебры Ли и йордановы алгебры) позволяет получить гомологическое описание расширений и деформаций PI-алгебр.

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 1512–1712

1. Введение

В этом обзоре рассматриваются дифференциально градуированные алгебры с дифференциалом отрицательной степени над фиксированным полем k. Вообще говоря, рассматриваются как коммутативные, так и некоммутативные, и даже неассоциативные, алгебры, однако главный наш предмет — ассоциативные алгебры.

Пусть A — алгебра, градуированная[1] или дифференциально градуированная (градуированная алгебра также может рассматриваться как дифференциально градуированная с нулевым дифференциалом). Присоединим новую свободную переменную x (или множество свободных переменных $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$) и рассмотрим расширение $B = A\langle x\rangle$. Определив образ дифференциала на новых переменных как $\mathrm{d}\, x_i = y_i \in \mathrm{Z}(A)$, можно рассматривать алгебру гомологий $H = \mathrm{H}(B)$. Какие алгебраические свойства исходной алгебры A отражаются в H? Какие алгебры H возникают в случае «свободной» (в каком-нибудь смысле) алгебры A? Когда комплекс B ацикличен, и когда он становится (свободной) резольвентой какого-либо A-модуля?

1.1. Классические примеры.

Пример 1. Бар-конструкция. Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. Рассмотрим новую алгебру $B = A\langle|\rangle := A * k\langle|\rangle$, где «|» обозначает свободную переменную, а звездочка — свободное произведение ассоциативных алгебр. Определим дифференциал как $\mathrm{d}\, a = 0$ при $a \in A$, $\mathrm{d}\,| = 1$ и продолжим его по формуле Лейбница

$$\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)b + (-1)^{h(a)} a\, \mathrm{d}(b),$$

где $h(a)$ обозначает гомологическую степень, т. е. $h(a) = 0$ при $a \in A$, $h(|) = 1$. Тогда дифференциальная алгебра B становится комплексом, т. е. градуированным дифференциальным A-модулем относительно градуировки $h(\cdot)$.

Комплекс B называется (*неаугментированной*) *бар-конструкцией* или стандартной резольвентой [42]. Он свободен и ацикличен. Для каждого левого A-модуля M, комплекс $B \underset{A}{\otimes} M$ составляет свободную резольвенту M.

Пример 2а). Комплекс Козюля для коммутативных алгебр. Пусть A — градуированная[2] связная (т. е. $A_0 = k$) коммутативная алгебра, и пусть $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — конечное множество ее однородных элементов положительной степени. Пусть $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество переменных. Рассмотрим внешнюю алгебру $B = \Lambda^A(x)$ с дифференциалом d, определённым как $\mathrm{d}(A) = 0$, $\mathrm{d}(x_i) = y_i$ и продолженным по правилу Лейбница

$$\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)b + (-1)^{h(a)} a\, \mathrm{d}\, b,$$

где гомологическая степень определяется так же, как в бар-конструкции: $h(a) = 0$ для $a \in A$ и $h(x_i) = 1$. Получившаяся дифференциально градуированная алгебра называется комплексом Козюля и обозначается $\mathrm{K}(y, A)$.

Для некоторых множеств y комплекс Козюля становится ацикличным в положительных степенях (и, следовательно, составляет минимальную свободную резольвенту модуля $A/\operatorname{id}(y)$); это утверждение называется *критерием полных пересечений* [42]. Такие множества y — в точности *регулярные последовательности*: по определению это означает, что y_1 не делитель нуля в A, а каждый y_{i+1} не делитель нуля по модулю $y_1, \ldots, y_i$. Фактор-алгебра кольца многочленов по регулярной последовательности называется *полным пересечением*.

Пример 2б). Комплекс Козюля для косокоммутативных алгебр [51, 69]. Конструкция комплекса Козюля кажется не слишком естественной, поскольку мы добавляем не свободные коммутативные, а антикоммутирующие переменные. Причина состоит в том, что на самом деле это лишь частный случай более общей конструкции.

---

[1] Под *градуированной* подразумевается связная неотрицательно градуированная алгебра с конечномерными компонентами.

[2] Локальная версия этой конструкции более популярна, однако здесь нас интересует именно градуированный случай.

А именно, пусть A — *косо*коммутативная градуированная алгебра (т. е. A биградуированная и вторая градуировка, называемая четностью, такова, что элементы нечетной степени относительно нее коммутируют со всеми остальными, а четной — антикоммутируют между собой). Элемент a, имеющий четность, называется неделителем нуля в A, если из $ab = 0$ следует, что либо $b = 0$, либо a четный и $b = ac$ для некоторого c [69]. Это позволяет определить регулярную последовательность так же, как и выше.

Определим теперь комплекс Козюля $\mathrm{K}(y, A)$ для данного множества $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ биоднородных элементов. Для каждого элемента y_i мы присоединяем к алгебре A некоторое множество новых переменных. Если элемент y_i четный, просто добавим одну новую нечетную переменную T_i:

$$\mathrm{d}\, T_i = y_i, \quad \deg T_i = \deg y_i.$$

Если же элемент y_i нечетный, то добавляется семейство $S_i = S_i^{(1)}, S_i^{(2)}, \dots$ четных переменных с соотношениями

$$S_i^{(s)} \cdot S_i^{(t)} = \frac{(s+t)!}{s!\, t!} S_i^{(s+t)}$$

и дифференциалом $\mathrm{d}(S_i) = y_i$, $\mathrm{d}(S_i^{(t)}) = y_i S_i^{(t-1)}$. (Эта конструкция носит название *алгебры с разделенными степенями*.) Здесь мы полагаем $\deg S_i^{(t)} = t \deg y_i$, и потому получившаяся конструкция — это дифференциально градуированная алгебра с однородным дифференциалом (с гомологической степенью, определенной как $h(A) = 0$, $h(T_i) = 1$, $h(S_i^{(t)}) = t$). Эта конструкция также называется комплексом Козюля [53]. Согласно критерию полных пересечений он ацикличен в положительных степенях тогда и только тогда, когда y — регулярная последовательность.

Если характеристика поля k нулевая, для четных переменных $S_i^{(t)}$ имеем просто $S_i^{(t)} = S_i^t/(t!)$. Таким образом, в этом случае комплекс Козюля — это та же алгебра A с добавленными свободными переменными.

Пример 2в). Резольвента Тэйта. Если множество $y \in A$ порождает всю алгебру A, комплекс Козюля всегда может быть расширен до минимальной свободной резольвенты модуля $A/\operatorname{id}(y) = k$. Эта конструкция была разработана в [47, 69] для локальных колец и адаптирована к градуированному случаю в [51–53].

Итак, пусть B — дифференциально градуированная косокоммутативная алгебра (т. е. она является три-градуированной относительно обычной градуировки, четности и гомологической градуировки). Если $y \in B$ — множество три-однородных циклов, определим комплекс Козюля $\mathrm{K}(y, B)$ как и выше, положив для добавляемых переменных T_i и S_i гомологическую степень равной $h(y_i) + 1$.

Пусть теперь A — косокоммутативная алгебра, порожденная множеством однородных элементов $y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Первый шаг конструкции — дифференциально градуированная алгебра $\mathrm{K}(y, A)$. Если она ациклична в положительных степенях, то резольвента построена. Это означает, что алгебра A свободная (т. е. $A = S(V) \otimes \Lambda(W)$ для некоторых градуированных векторных пространств V, W). Если это не так, пусть $A_1 = \mathrm{K}(y, A)$ и $x \in A_1$ — не гомологичный нулю цикл минимальной возможной положительной гомологической степени. Тогда следующий шаг конструкции — это $A_2 = \mathrm{K}(\{x\}, A_1)$. Продолжая такой процесс «убивания циклов», после счетного множества шагов получим минимальную свободную резольвенту тривиального модуля k.

1.2. Современные исследования. При рассмотрении перечисленных классических примеров возникают следующие вопросы.

1. Почему алгебры коммутативные? Другими словами, возможна ли теория комплексов Козюля (и полных пересечений) для некоммутативных ассоциативных алгебр, включающая бар-конструкцию как частный случай?
2. Существует ли общая конструкция, покрывающая и комплексы Козюля, и бар-конструкцию?
3. Существует ли аналогичная конструкция в других классах алгебр, таких как алгебры Ли и т. п.?

В этом обзоре рассматриваются современные ответы на эти три вопроса. Некоммутативная версия комплекса Козюля (для ассоциативных алгебр) известна с 1964 г. [16] под названием *комплекса Шафаревича* (часто его называют также *комплексом Голода—Шафаревича*). Вместо внешней

алгебры или косокоммутативной алгебры в этой конструкции появляется свободная ассоциативная (тензорная алгебра). Имеются некоммутативные версии критерия полных пересечений, резольвенты Тэйта и других коммутативных результатов Тэйта и Ассмуса [38, 69]. Комплекс Шафаревича тесно связан со знаменитой теоремой Голода—Шафаревича и с вопросами роста градуированных алгебр. Одно из его применений — описание алгебр малой гомологической размерности.

Оба рассмотренных класса алгебр, т. е. классы ассоциативных и коммутативных алгебр, представляют собой многообразия алгебр с полиномиальными тождествами (а именно, с тождествами $(xy)z \equiv x(yz)$ и $xy \equiv yx$). Мы опишем здесь конструкцию комплекса Шафаревича для произвольного такого многообразия (не)ассоциативных алгебр. Частными случаями этой конструкции будут упомянутые классический комплекс Козюля для (косо)коммутативных алгебр и комплекс Шафаревича. Будут описаны многообразия, для которых такой комплекс конечен, и дана соответствующая общая версия критерия полных пересечений. В качестве приложений получены формулы, связывающие ряды Гильберта различных относительно свободных супералгебр для произвольного многообразия алгебр и для квазимногообразия специальных йордановых алгебр.

Кроме того, для многообразии алгебр Ли доказаны некоторые дополнительные результаты, показывающие, что в этом случае теория комплексов Шафаревича столь же богата, как и в случае многообразий всех коммутативных или всех ассоциативных алгебр.

К сожалению, эти конструкции в случае произвольного многообразия работаю только над полем нулевой характеристики. Остается открытым вопрос, как построить алгебру разделенных степеней для произвольного многообразия PI-алгебр (и получить тем самым аналог комплекса Шафаревича над полем положительной характеристики).

1.3. Библиографические замечания. Комплекс Шафаревича — очень естественная конструкция, и поэтому трудно проследить, когда она появилась впервые. Давайте будем считать, что это произошло в неопубликованной работе Н. Бурбаки начала 1950-х годов. Систематическое алгебраическое изучение этого комплекса началось со статьи Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича [16] (поэтому его часто называют также комплексом Голода—Шафаревича). Термин «комплекс Шафаревича» был введен Е. С. Голодом [46].

Версия комплекса Шафаревича для алгебр Ли широко используется в рациональной теории гомотопий (поскольку минимальная свободная модель для дифференциально градуированной алгебры Ли — это итерированный комплекс Шафаревича). С основаниями этой теории читатель может познакомиться по классической статье Д. Квиллена [62], а с современным ее состоянием — по книге [45].

Сильно свободные множества и некоммутативные полные пересечения (т. е. алгебры глобальной размерности 2) появляются, будучи часто неузнанными, в множестве алгебраических вопросов (см., например, [27], где изучаются алгоритмические проблемы, связанные с подалгебрами свободной алгебры). Некоторые из таких явлений описаны В. А. Уфнаровским [28].

В остальных вопросах наше изложение основывается на оригинальных статьях, процитированных в тексте.

1.4. Благодарности. Я рад выразить благодарность моему учителю Евгению Соломоновичу Голоду, чья поддержка помогала как при подготовке этого текста, так и в моих исследованиях. Я благодарен также Бернарду Келлеру и Михаилу Мовшеву за полезные замечания. Наконец, я хочу поблагодарить за гостеприимство Институт Миттаг-Леффлера, где была написана значительная часть этой статьи.

2. Комплекс Шафаревича для ассоциативных алгебр

2.1. Договоренности и обозначения. В этом разделе не накладывается никаких ограничений на основное поле k. Будем называть просто *градуированными* $\mathbb{Z}_+$-градуированные векторное пространство над k, ассоциативную k-алгебру или модуль над ней. Далее предполагается, что все алгебры содержат единицу и являются градуированными (возможно, с тривиальной градуировкой). Градуированная алгебра $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ называется *связной*, если ее нулевая компонента A_0 изоморфна k. Градуированное векторное пространство (алгебра, модуль) называется *конечно гра-*

дуированным (или *локально конечным*), если каждая компонента конечномерна. Наконец, *стандартной* называется связная конечно градуированная алгебра, порожденная своими элементами первой степени.

Мы обозначаем через $H_i(A)$ i-ю группу гомологий алгебры A, т. е. градуированное пространство

$$\operatorname{Tor}_i^A(k,k) \approx \operatorname{Ext}_A^i(k,k).$$

Например, векторное пространство H_1A изоморфно линейной оболочке минимального множества однородных порождающих алгебры A, а H_2A — линейной оболочке минимального множества ее однородных соотношений.

Если $a \in A$ — однородный элемент, то через $\tilde{a}$ обозначается свободная переменная той же степени. Для множества однородных элементов $\alpha = \{\alpha_i\}$ положим $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_i\}$. Через $A * B$ обозначается свободное произведение алгебр A и B. Свободная ассоциативная A-алгебра с множеством порождающих x обозначается $A\langle x\rangle$, так что $A\langle x\rangle = k\langle x\rangle * A$. Если V — векторное пространство, натянутое на x, то такая алгебра также может обозначаться $A\langle V\rangle$.

Пусть V — конечно градуированное векторное пространство (в частности, V может быть алгеброй или модулем). Через $V(z)$ мы обозначаем его ряд Гильберта

$$\sum_{i\geqslant 0} \dim V_i z^i.$$

Если $\alpha \subset V$ — множество однородных элементов, то через $\alpha(z)$ обозначается соответствующая производящая функция: если α содержит ровно d_i элементов степени i, то

$$\alpha(z) = \sum_{i\geqslant 0} d_i z^i.$$

Неравенства между рядами Гильберта понимаются покоэффициентно, т. е.

$$\sum_i a_i z^i \geqslant \sum_i b_i z^i$$

тогда и только тогда, когда $a_i \geqslant b_i$ для всех $i \geqslant 0$.

2.2. Комплекс Шафаревича для градуированных алгебр. Понятие комплекса Шафаревича введено в [16].

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\} \subset A$ — однородное подмножество алгебры A. Наделим алгебру $A\langle\tilde{\alpha}\rangle$ дополнительной градуировкой («гомологической градуировкой»), положив $|\tilde{\alpha}_i| = 1$, $|A| = 0$. Дифференцирование d,

$$\mathrm{d}\,\tilde{\alpha}_i = \alpha_i, \quad \mathrm{d}\,A = 0, \quad \mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)b + (-1)^{|a|}a\,\mathrm{d}(b)$$

(где элементы a и b однородны относительно обеих градуировок), превращает $A\langle\tilde{\alpha}\rangle$ в дифференциально градуированную алгебру, называемую *комплексом Шафаревича* и обозначаемую $\operatorname{Sh}(\alpha, A)$. Ее группы гомологий, вычисляемые относительно градуировки $|\cdot|$, обозначаются $H_i(\alpha, A)$ [13, 14, 16].

Заметим, что это определение работает для произвольного ассоциативного кольца A (т. е. для алгебры над произвольным коммутативным кольцом), однако мы в основном сконцентрируемся на случае алгебры над полем.

Например, простейший комплекс Шафаревича $\operatorname{Sh}(1, A)$ — это бар-конструкция $B(A)$ алгебры A. Она ациклична во всех степенях. С другой стороны, комплекс $\operatorname{Sh}(0, A)$ имеет нулевой дифференциал, так что

$$H_*(0, A) = \operatorname{Sh}(0, A) \simeq A\langle x \mid \deg x = 0\rangle.$$

В общем случае всегда $H_0(\alpha, A) = A/\operatorname{id}(\alpha)$, так что A-алгебра $H_*(\alpha, A)$ является на самом деле алгеброй над $A/\operatorname{id}(\alpha)$.

При изучении гомологий комплексов Шафаревича достаточно рассматривать случай, когда множество α является минимальным множеством порождающих для некоторого идеала I в A, как показывает следующее утверждение.

Предложение 2.1 ([13]). *Пусть $\beta = \alpha \sqcup \{x\}$ — однородное подмножество в градуированной алгебре A, где элемент x лежит в идеале I, порожденном множеством α. Тогда*

$$H_*(\beta, A) \simeq H_*(\alpha, A)\langle\tilde{x}\rangle,$$

где $\deg \tilde{x} = 0$, $h(\tilde{x}) = 1$.

Для доказательства заметим, что $H_*(\beta, A) \simeq H_*(\alpha \sqcup \{0\}, A)$ (поскольку гомологический класс элемента x в нашей дифференциально градуированной алгебре нулевой). Теперь осталось только применить к комплексу $\mathrm{Sh}(\alpha \sqcup \{0\}, A) = \mathrm{Sh}(\alpha, A) * \mathrm{Sh}(0, A)$ следующую версию формулы Кюннета для дифференциально градуированных алгебр.

Лемма 2.2. *Пусть A — произвольная дифференциально градуированная алгебра, а B — связная дифференциально градуированная алгебра (т. е. $B \simeq k \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots$, где $B_+ = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots$ — дифференциально градуированная подалгебра). Тогда*

$$H(A * B) = H(A) * H(B),$$

где звездочка обозначает свободное произведение.

Рассмотрим случай $1 \in \mathrm{id}(\alpha)$. Можно считать, что $1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ при $1 \notin \mathrm{id}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Тогда

$$\mathrm{Sh}(\alpha, A) \simeq \mathrm{Sh}(\{1\} \sqcup \{\alpha_i \mid i \geqslant 2\}, A),$$

и потому

$$H_*(\alpha, A) = H_*(0, A)\langle\{\alpha_i \mid i \geqslant 2\}\rangle = 0.$$

Если $1 \in \mathrm{id}(\alpha)$, то комплекс $\mathrm{Sh}(\alpha, A)$ ацикличен во всех степенях. Чтобы рассматривать только нетривиальный случай, мы будем считать всегда, что $1 \notin \mathrm{id}(\alpha)$. Более того, мы часто будем предполагать, что все элементы из α имеют положительные степени.

2.3. Некоммутативные регулярные последовательности: сильно свободные множества. В этом разделе мы рассмотрим условия ацикличности комплекса Шафаревича. Основная идея здесь принадлежит Д. Анику [29].

Однородное подмножество α в градуированной алгебре A называется *сильно свободным* [29] или *инертным* [49], если α состоит из элементов положительной степени и

$$H_i(\alpha, A) = 0 \text{ для всех } i > 0.$$

Это означает, что сильно свободное множество можно рассматривать как некоммутативный аналог регулярной последовательности (поскольку комплекс Шафаревича — аналог комплекса Козюля). Поэтому свойства таких множеств близки к свойствам коммутативных регулярных последовательностей.

Сильно свободное множество $\alpha \subset A$ всегда является минимальным множеством порождающих для некоторого идеала I в A, как следует из предложения 2.1.

Легко видеть, что переменная x составляет сильно свободное множество в свободной алгебре $k\langle x\rangle$, где $\deg x = d > 0$. По формуле Кюннета (лемма 2.2) получаем следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть x — множество (конечное или счетное) переменных положительных степеней, а R — алгебра. Тогда множество x сильно свободно в алгебре $A = R\langle x\rangle$.*

Пусть теперь $\alpha \subset A$ — множество однородных элементов положительных степеней, минимальным образом порождающее некоторый идеал I. Пусть $R = A/I$, $\tau\colon A \to R$ — естественное отображение, а $\sigma\colon R \to A$ — произвольное обратное отображение векторных пространств, $\tau\sigma = \mathrm{id}$. Рассмотрим k-линейное отображение $\gamma\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to A$, такое что

$$\gamma(a_0\tilde{\alpha}_{i_1} \ldots \tilde{\alpha}_{i_n})a_n = \sigma(a_0)\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_n}\sigma(a_n).$$

Это отображение всегда сюръективно, и (как как отображение градуированных векторных пространств) оно совпадает с гомоморфизмом алгебр $\rho\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to \mathbf{gr}\, A$, где $\mathbf{gr}\, A = A/I \oplus I/I^2 \oplus \ldots$ — алгебра, ассоциированная с I-адической фильтрацией на A.

Теорема 2.4 (некоммутативный критерий полных пересечений)**.** *Пусть $\alpha \subset A$ — однородное подмножество, состоящее из элементов положительных степеней и минимально порождающее некоторый идеал $I \lhd A$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *α сильно свободно, т. е. $H_i(\alpha, A) = 0$ для всех $i > 0$;*
2) *$H_1(\alpha, A) = 0$;*
3) *отображение $\gamma\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to A$ является изоморфизмом градуированных векторных пространств*;
4) *отображение $\rho\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to \mathbf{gr}\, A$ является изоморфизмом алгебр.*

Идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть морфизм комплексов

$$\mathrm{Sh}(\tilde{\alpha}, R\langle\tilde{\alpha}\rangle) \to \mathrm{Sh}(\alpha, A),$$

индуцированный γ. Он будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда α сильно свободно. Детали читатель найдет в [29] или (в несколько более общей формулировке) в [13]. □

Отсюда нетрудно вывести [29], что непустое подмножество сильно свободного множества всегда сильно свободно.

Другой критерий дан Е. С. Голодом [13]. Пусть x — такое множество однородных элементов в A, что $\alpha \subset \mathrm{id}(x)$ (например, x может быть множеством порождающих алгебры A), и пусть $\bar{x}$ — его образ в R. Для любого α_j зафиксируем одно представление

$$\alpha_j = \sum_t a_{tj} x_{i_t} b_{tj}.$$

Рассмотрим сюръективный морфизм

$$\rho\colon H(x, A)\langle\tilde{\alpha}\rangle \to H(\bar{x}, R),$$

совпадающий с естественным отображением $\mathrm{Sh}(\tau)$ на $H(x, A)$ и отображающий $\tilde{\alpha}_j$ в образ элемента $\sum\limits_t a_{tj}\tilde{x}_{i_t} b_{tj}$.

Теорема 2.5. *В описанных обозначениях рассмотрим следующие условия*:

1) *множество α сильно свободно в A*;
2) *отображение ρ биективно*;
3) *отображение ρ инъективно на пространстве элементов гомологической степени* 1 *и сюръективно на пространстве элементов гомологической степени* 2.

Выполняются следующие импликации: (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3). *Если все элементы множества x имеют положительную степень, то все эти условия эквивалентны.*

Если алгебра A связна и локально конечна, то есть и другие критерии сильно свободных множеств, связанные с рядами Гильберта и гомологиями [29]. По формуле для ряда Гильберта свободного произведения связных алгебр

$$(P * Q)(z)^{-1} = P(z)^{-1} + Q(z)^{-1} - 1$$

имеем

$$R\langle\tilde{\alpha}\rangle(z)^{-1} = R(z)^{-1} + \alpha(z).$$

Поэтому отображение $\gamma\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to A$ дает следующее неравенство для рядов Гильберта:

$$(R(z)^{-1} + \alpha(z))^{-1} \geqslant A(z),$$

где равенство достигается в том и только в том случае, когда γ является изоморфизмом. Получаем следующую теорему.

Теорема 2.6. *Пусть α — подмножество элементов положительной степени в связной конечно градуированной алгебре A, и пусть R, I те же, что и выше. Тогда*

$$A(z) \leqslant \frac{R(z)}{1 + R(z)\alpha(z)},$$

причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда α сильно свободно.

Подобный критерий хорошо известен в коммутативной алгебре. А именно, если A — коммутативная связная локально конечная алгебра и $\alpha(z) = \sum\limits_{i\geqslant 0} a_i z^i$, то

$$A(z) \leqslant R(z) \prod_{i\geqslant 0} (1 - z^{a_i})^{-1},$$

причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда последовательность $\alpha \subset A$ регулярна [66].

Другой критерий формулируется в терминах обычных гомологий алгебр. Он состоит в том, что морфизм факторизации по сильно свободному множеству имеет «глобальную размерность» не больше двух. Этот факт не имеет аналогии в коммутативном случае.

Теорема 2.7. *Пусть A, α те же, что и выше, и пусть $R = A/I$, где идеал I минимальным образом порожден множеством α. Тогда α сильно свободно тогда и только тогда, когда естественное отображение $\tau\colon A \to R$ индуцирует изоморфизмы $H_i(A) \to H_i(R)$, где $i \geqslant 3$.*

Докажем импликацию «только тогда» (доказательство другой импликации можно найти в [29], оно состоит в прямом конструировании резольвенты модуля k_A). После возможной линейной замены порождающих и элементов α последние можно разделить на две части: множество α_1 соотношений алгебры R (они лежат в $(A_+)^2$) и множество α_2 порождающих алгебры A (они сохраняются при отображении $A \to A/(A_+)^2$).

Пусть A порождается однородным множеством $X = X_1 \sqcup \alpha_2$ и задается минимальным множеством однородных соотношений Y. Рассмотрим начальные сегменты минимальных свободных резольвент тривиального модуля k над двумя алгебрами A и R:

$$0 \longleftarrow k_A \longleftarrow A \longleftarrow kX \otimes A \longleftarrow kY \otimes A \longleftarrow H_3(A) \otimes A \longleftarrow \dots,$$
$$0 \longleftarrow k_R \longleftarrow R \longleftarrow kX_1 \otimes R \longleftarrow k(Y \sqcup \alpha_1) \otimes R \longleftarrow H_3(R) \otimes R \longleftarrow \dots.$$

Пусть

$$\chi(z) = H_3(A)(z) - H_4(A)(z) + H_5(A)(z) - \dots.$$

Поскольку $H_i(A) = H_i(R)$ при $i \geqslant 3$, из эйлеровой характеристики получаем две формулы для $\chi(z)$:

$$\chi(z)A(z) = 1 - A(z)(1 - (X_1(z) + \alpha_2(z)) + Y(z))$$

и

$$\chi(z)R(z) = 1 - R(z)(1 - X_1(z) + (Y(z) + \alpha_1(z))).$$

В результате получаем равенство

$$A(z)^{-1} - 1 + (X_1(z) + \alpha_2(z)) - Y(z) = R(z)^{-1} - 1 + X_1(z) - (Y(z) + \alpha_1(z)),$$

эквивалентное условию теоремы 2.6. □

Следствие 2.8. *Пусть $\alpha \subset (A_+)^2$ — сильно свободное множество в связной конечно градуированной алгебре A, и пусть $R = A/\operatorname{id}(\alpha)$. Тогда*

$$H_i(R) = \begin{cases} H_2(A) \oplus k\alpha, & i = 2, \\ H_i(A) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующие две леммы показывают, при каких условиях свойство множества быть сильно свободным сохраняется при переходе к фактор-алгебре или к подалгебре [24].

Лемма 2.9. *Пусть $\alpha \subset (H_+)^2$ — сильно свободное множество в связной алгебре, $\bar\alpha$ — его образ в некоторой фактор-алгебре $R = H/I$, а $J \lhd H$ — порожденный им идеал. Тогда существует изоморфизм R-бимодулей*

$$H_1(\bar\alpha, R) \simeq J \cap I/(IJ + JI).$$

В частности, множество $\bar\alpha \subset R$ сильно свободно тогда и только тогда, когда $J \cap I = IJ + JI$.

Лемма 2.10. *Пусть $\alpha \subset H$ — сильно свободное множество в связной алгебре, $E \subset H$ — однородная подалгебра, содержащая α, и пусть $\operatorname{id}_H \alpha \cap E = \operatorname{id}_E \alpha$. Тогда α сильно свободно в E.*

2.4. Базисы Гребнера и гомологии. Этот раздел основан на трех работах Е. С. Голода [12, 15, 46]. Здесь описывается связь между первой группой гомологий комплекса Шафаревича и (не)коммутативными базисами Гребнера. В частности, это дает возможность вычислять $H_1(x, R)$. В цитируемых работах можно найти аналогичные результаты о первой группе гомологий комплекса Козюля. На самом деле эти конструкции работают даже в более общей ситуации *стандартных* базисов, описанных ниже.

Пусть R — ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом C с единицей. Предположим, что алгебра R фильтрована упорядоченной полугруппой Γ, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей, $R = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma R$. Обозначим через $\bar{R}$ ассоциированное Γ-градуированное кольцо

$$\bar{R} = \mathbf{gr}\, R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \bar{R}_\gamma,$$

где

$$\bar{R}_\gamma = F_\gamma / \bigcup_{\gamma'<\gamma} F_{\gamma'} R.$$

Для каждого $a \in R$ положим $\deg a = \min\{\gamma \in \Gamma \mid a \in F_\gamma R\}$. Если $\deg(a) = \gamma$, то $\omega(a)$ обозначает образ элемента a в $\bar{R}_\gamma$ («старший член» a).

Пусть $x = \{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq R$, и пусть I — идеал в R, порожденный множеством x. Далее, пусть $\bar{I} = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} \bar{I}_\gamma$ — однородный идеал в $\bar{R}$, порожденный множеством $\{\omega(a) \mid a \in I\}$, а $\tilde{I} = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} \tilde{I}_\gamma$ — идеал, порожденный $\{\omega(x_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Следуя [46], назовем множество x порождающих идеала I *стандартным базисом* этого идеала, если $\bar{I} = \tilde{I}$. Это понятие обобщает и коммутативные, и некоммутативные базисы Гребнера.

Рассмотрим два комплекса Шафаревича: $\mathrm{Sh}(x, R)$ и $\mathrm{Sh}(y, \bar{R})$, где $y = \{\omega(x_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Пусть $\{\bar{z}_\beta \mid \beta \in B\}$ — некоторое множество циклов в $\mathrm{Sh}_1(y, R)$, гомологические классы которых порождают $\bar{R}$-бимодуль $H_1(y, R)$.

Предположим, что основное кольцо C удовлетворяет следующему условию: модуль сизигий $\Omega(x)$ для любого подмножества $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset C$ порождается биномами вида $(0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots)$. Например, для поля $C = k$ это условие всегда выполняется. Согласно [15] это условие означает, что C — арифметическое кольцо (например, дедекиндово кольцо).

Предложение 2.11. *Предположим, что основное коммутативное кольцо C арифметическое. В тех же обозначениях, что и раньше, эквивалентны следующие условия*:

1) *x — стандартный базис идеала I;*
2) *каждый $\bar{z}_\beta$ может быть поднят до цикла $z_\beta \in \mathrm{Sh}_1(x, R)$;*
3) *классы циклов z_β ($\beta \in B$) порождают R-бимодуль $H_1(x, R)$.*

Мы докажем это в очень частном случае свободной ассоциативной алгебры R над полем в лемме 2.14. □

Пусть теперь $C = k$ — поле.

Пусть $\{x_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ — подмножество в I, т. е. для любого $\delta \in \Delta$ существует представление

$$x_\delta = \sum_i a_{i\delta} x_{\alpha_{i,\delta}} b_{i\delta}, \quad \text{где} \quad \alpha_{i,\delta} \in A.$$

Тогда комплекс $\mathrm{Sh}(x, R)$ изоморфен прямому слагаемому $K = \mathrm{Sh}(\{x_\delta \mid \delta \in \Delta \cup A\}, R)$ и существует сюръективное отображение

$$\pi_* \colon H_*(\{x_\delta \mid \delta \in \Delta \cup A\}, R) \to H_*(x, R),$$

индуцированное ретракцией $\pi \colon K \to \mathrm{Sh}(x, R)$, такой что $\pi(\tilde{x}_\delta) = \sum\limits_i a_{i\delta} \tilde{x}_{\alpha_{i,\delta}} b_{i\delta}$.

Предположим, что $\{x_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ — стандартный базис идеала I, полученный из x с помощью алгоритма Бухбергера (возможно, за бесконечное число шагов). Тогда $A \subseteq \Delta$. Каждый шаг алгоритма Бухбергера можно описать следующим образом.

Предположим, что некоторая часть стандартного базиса $\{x_\alpha \mid \alpha \in A'\}$, где $A \subset A' \subset \Delta$, уже построена. Рассмотрим однородный (скажем, степени γ) цикл

$$\bar{z}_\beta = \omega(a_{i\beta})\tilde{x}_{\alpha_{i\beta}}\omega(b_{i\beta}) \in \mathrm{Sh}_i(y', \bar{R}),$$

где $\alpha_{i\beta} \in A'$, $y' = \{\omega(x_\alpha) \mid \alpha \in A'\}$. Тогда цикл $\bar{z}_\beta$ либо поднимается до цикла z_β в $\mathrm{Sh}(\{x_\alpha \mid \alpha \in A'\}, R)$ (множество таких β будет обозначаться через B), либо дает новый элемент стандартного базиса $x_\beta = a_{i\beta}x_{\alpha_{i\beta}}b_{i\beta}$ степени, меньшей чем γ; в последнем случае цикл $\bar{z}_\beta$ поднимается до цикла $z'_\beta = a_{i\beta}\tilde{x}_{\alpha_{i\beta}}b_{i\beta} - \tilde{x}_\beta$ в $\mathrm{Sh}(\{x_\alpha \mid \alpha \in A' \cup \beta\}, R)$. Поскольку $\pi(z'_\beta) = 0$, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.12. *Образы при π_* классов циклов z_β ($\beta \in B$) порождают R-бимодуль $H_1(x, R)$.*

2.5. Комплекс Шафаревича свободной алгебры. Пусть F — свободная ассоциативная алгебра, порожденная множеством переменных $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, т. е. $F = k\langle x\rangle = T(kx)$. Пусть $\alpha \subset F$ — множество порождающих идеала $I \lhd F$. Тогда комплекс Шафаревича $\mathrm{Sh}(\alpha, F)$ становится гомологическим инвариантом фактор-алгебры $A = F/I$.

Займемся изучением алгебры гомологий $H_*(\alpha, F)$. Основной результат здесь получен Е. С. Голодом [14].

Теорема 2.13. *В обозначениях, приведённых выше, алгебра $H_*(\alpha, F)$ порождается своими подпространствами $H_0(\alpha, F) \simeq A$ и $H_1(\alpha, F)$.*

Другими словами, A-алгебра $H_*(\alpha, F)$ порождается своим A-подмодулем $H_1(\alpha, F)$. Отметим, что это свойство не имеет аналогий для комплекса Козюля.

Идея доказательства. Сначала теорема доказывается для мономиальной алгебры A. Это делается комбинаторными методами [14].

Для произвольной A по предложению 2.1 α можно заменить на произвольное множество порождающих того же идеала $I = \mathrm{id}\,\alpha$. В частности, можно считать, что α составляет стандартный базис (например, базис Гребнера) этого идеала (с теорией некоммутативных базисов Гребнера можно познакомиться по [28]).

Пусть $\beta = \{\beta_i\}$ — множество старших мономов элементов из α, т. е. $\beta_i = \mathrm{lm}\,\alpha_i$, и пусть $\bar{A} = F/\mathrm{id}(\beta)$.

Мы можем теперь применить один частный случай конструкций из раздела 2.4. А именно, пусть Γ — свободная полугруппа мономов от X. Алгебра A и комплекс $\mathrm{Sh}(\alpha, F)$ являются Γ-фильтрованными, значит, можно рассмотреть комплекс $\mathbf{gr}\,\mathrm{Sh}(\alpha, F)$, алгебра гомологий которого является алгеброй над $\mathbf{gr}\,A = \bar{A}$. Рассмотрим два естественных морфизма $\phi\colon \mathrm{Sh}(\beta, F) \to \mathbf{gr}\,\mathrm{Sh}(\alpha, F)$ и $\psi\colon \mathrm{Sh}(\alpha, F) \to \mathbf{gr}\,\mathrm{Sh}(\alpha, F)$.

Лемма 2.14 ([12, 46])**.** *Предположим, что множество α — минимальный базис Гребнера идеала I. Пусть $z = \{z_j\}$ — множество таких циклов, гомологические классы которых порождают $\bar{A}$-бимодуль $H_1(\beta, F)$. Тогда любой прообраз множества $\phi(z)$ при отображении ψ порождает A-бимодуль $H_1(\alpha, F)$.*

Пусть теперь s — цикл в $\mathrm{Sh}_t(\alpha, F)$, $t \geqslant 2$. Его старшая Γ-однородная компонента s^* является циклом в $\mathrm{Sh}_t(\beta, F)$, поэтому $s^* = \mathrm{d}^*\, w + Q(\{z_j\})$, где некоммутативный многочлен Q является линейной комбинацией произведений z_j, а d^* обозначает дифференцирование в $\mathrm{Sh}_t(\beta, F)$. В лемме 2.14 можно выбрать $z'_j = \psi^{-1}\phi(z_j)$ так, что $\mathrm{lt}(z'_j) = z_j$ (где lt обозначает старший член в Γ-градуировке). Кроме того, имеем $\mathrm{lt}(\mathrm{d}\, w) = \mathrm{d}^*\, w$. Поэтому цикл $s_0 = s - Q(\{z'_j\}) - \mathrm{d}\, w$ имеет Γ-степень, меньшую чем степень s, и можно применить индукцию. □

Чтобы описать порождающие алгебры $H_*(\alpha, F)$, достаточно теперь описать A-бимодуль $H_1(\alpha, F)$. Общий способ сделать это дает лемма 2.14. Кроме того, для связной алгебры A есть и другие пути.

Пусть α состоит из однородных элементов и не содержит порождающих алгебры F, т. е. $\alpha \subset (F_+)^2$. Рассмотрим первые члены минимальной свободной резольвенты тривиального A-модуля k_A

$$0 \longleftarrow k \xleftarrow{d_0} A \xleftarrow{d_1} \tilde{x}k \otimes A \xleftarrow{d_2} \tilde{\alpha}k \otimes A \xleftarrow{d_3} \Omega^3(k_A) \longleftarrow 0, \tag{2.1}$$

где $\Omega^3(k_A)$ — соответствующий модуль сизигий. Пусть ϕ — произвольный k-базис векторного пространства $H_3(A)$, которое порождает $\Omega^3(k_A)$. Его можно рассматривать как подмножество в A-модуле $\alpha k \otimes A \subset A\langle\alpha\rangle$. Пусть ϕ' — произвольный прообраз множества ϕ при отображении $\mathrm{Sh}(\alpha, F) = F\langle\alpha\rangle \to A\langle\alpha\rangle$. Множество ϕ' можно выбрать состоящим из циклов комплекса $\mathrm{Sh}(\alpha, F)$, причем его образ $h\phi$ в гомологиях определяется однозначно [24].

Теорема 2.15. *Пусть $\alpha \subset (F_+)^2$ — однородное подмножество в связной свободной алгебре F, и пусть $A = F/\operatorname{id}(\alpha)$.*

1. *$H_1(f, F)/A_+H_1(f, F) \simeq \Omega_3(k_A)$.*
2. *A-алгебра $H_*(f, F)$ порождается множеством $h\phi$.*
3. *Существует сюръективное отображение из алгебры $H_*(f, F)$ на A-подалгебру $A\langle\tilde{f}\rangle$, порожденную множеством ϕ.*

Доказательство. Рассмотрим следующую точную последовательность комплексов правых A-модулей [16]:

$$0 \longrightarrow \tilde{x}\,\mathrm{Sh}(\alpha, F) \xrightarrow{\lambda} \overline{\mathrm{Sh}(\alpha, F)} \xrightarrow{\nu} \tilde{\alpha}\,\mathrm{Sh}(\alpha, F) \longrightarrow 0, \tag{2.2}$$

где черта сверху обозначает идеал аугментации, λ переводит $\tilde{x}$ в x, а номер гомологий в последнем члене сдвинут на -1. Из точной последовательности гомологий получаем

$$\tilde{x}H_1(\alpha, F) \xrightarrow{\lambda_*} H_1(\alpha, F) \xrightarrow{d_*} \tilde{\alpha}H_0(\alpha, F) \longrightarrow \tilde{x}H_0(\alpha, F) \longrightarrow H_0(\alpha, F) \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

где $H_0(\alpha, F) = A$, и потому четыре последних члена составляют начало минимальной свободной резольвенты модуля k_A. Поэтому получаем точную последовательность

$$\tilde{x}H_1(\alpha, F) \xrightarrow{\lambda_*} H_1(\alpha, F) \xrightarrow{d_*} \Omega_3(k_A) \longrightarrow 0,$$

откуда $H_1(f, F)/xH_1(f, F) \simeq \Omega_3(k_A)$, что завершает доказательство первой части.

Поскольку $\Omega_3(k_A)$ порождается множеством ϕ, в качестве прообраза которого при d_* можно выбрать $h\phi$, получаем, что A-бимодуль $H_1(\alpha, F)$ порождается множеством $h\phi$. По теореме 2.13 это влечет второе утверждение.

Для доказательства третьего утверждения рассмотрим идеал $\tilde{I}$, порожденный подмножеством α в алгебре $F\langle\tilde{\alpha}\rangle$. Рассматривая его как подкомплекс в $\mathrm{Sh}(\alpha, F)$, получаем точную последовательность дифференциально градуированных алгебр

$$0 \longrightarrow \tilde{I} \xrightarrow{i} \mathrm{Sh}(\alpha, F) \xrightarrow{\mu} A\langle\tilde{\alpha}\rangle \longrightarrow 0,$$

где дифференцирование на $A\langle\tilde{\alpha}\rangle$ тривиально. Ее точный гомологический треугольник имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & & H_*\tilde{I} \\ & \overset{d_*}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle i_*} \\ A\langle\tilde{\alpha}\rangle & \xleftarrow{\mu_*} & H_*(\alpha, F) \end{array}$$

Здесь отображение μ_* индуцировано естественным гомоморфизмом $\mu\colon F\langle\tilde{\alpha}\rangle \to A\langle\tilde{\alpha}\rangle$. Поэтому μ_0 — тождественное отображение $A \to A$. Поскольку A-алгебра $H_*(\alpha, F)$ порождается множеством $h\phi$, образом отображения μ_* является A-подалгебра E в $A\langle\tilde{0}\alpha\rangle$, порожденная ϕ. □

Есть различные пути вычисления множества порождающих ϕ векторного пространства $H_3(A)$ (и нахождения таким образом множества $h\phi$ порождающих бимодуля $H_1(f, F)$). Во-первых, можно воспользоваться формулой В. Е. Говорова [10]

$$H_3(A) \approx F_+I \cap IF_+/F_+IF_+ + I^2.$$

Во-вторых, можно рассмотреть алгебру $\bar{F} = \mathbf{gr}\,F = F/I \oplus I/I^2 \oplus \ldots$, ассоциированную с I-адической фильтрацией на F. Следующая теорема описывает ее умножение, гомологии и связь с введенным выше множеством ϕ.

Теорема 2.16 ([24]). *Предположим, что свободная алгебра F является связной и конечно порожденной, и пусть A, I те же, что и выше. Определим на $\bar{F}$ вторую (I-адическую) градуировку по формуле $\bar{F}_{(i)} = I^i/I^{i+1}$.*

1. *Ядро Δ естественного отображения $\chi\colon A\langle\alpha\rangle \to \bar{F}$ порождается множеством ϕ, т. е.*
$$\bar{F} \simeq A\langle\tilde{\alpha}\rangle/\operatorname{id}(\phi).$$
2. *Для любых $i, j \geqslant 0$ умножение в $\bar{F}$ индуцирует изоморфизм A-бимодулей*
$$\bar{F}_{(i)} \underset{A}{\otimes} \bar{F}_{(j)} \to \bar{F}_{(i+j)}.$$
3. *Имеют место изоморфизмы градуированных векторных пространств*
$$H_0(\bar{F}) = k, \quad H_i(\bar{F}) \approx H_i(A) \oplus H_{i+1}(A) \quad \textit{при} \quad i \geqslant 1.$$
В частности, $\operatorname{gl.dim} \bar{F} = \operatorname{gl.dim} A$.

Таким образом, множество ϕ — это часть соотношений градуированной алгебры $\bar{F}$.

Еще один подход к вычислению порождающих $H_1(\alpha, F)$ основывается на мономиальных алгебрах [46]. По предложению 2.1 «практически достаточно» вычислить $H_1(\mu, F)$ для *какого-нибудь* множества μ порождающих идеала $I = \operatorname{id}\alpha$: например, μ может быть его базисом Гребнера. По лемме 2.14 если базис Гребнера построен, то достаточно найти порождающие модуля $H_1(\beta, F)$, где множество β состоит из мономов (а именно, старших мономов элементов базиса Гребнера). Для таких множеств существует простой способ вычисления $H_1(\beta, F)$, основанный на результатах раздела 2.4.

Предположим, что подмножество β свободной алгебры F состоит из нетривиальных мономов от порождающих. *Зацепление* двух нетривиальных мономов a, b — эта одна из следующих двух ситуаций:

1) $a = pq$ и $b = qr$, где моном q нетривиален;
2) $a = sbt$, где по крайней мере один из двух мономов s, t нетривиален.

Для каждого зацепления π двух мономов $a, b \in \beta$ определим элемент $z_\pi \in F\langle\tilde{\beta}\rangle$, положив $z_\pi = \tilde{a}r - p\tilde{b}$ в случае 1) и $z_\pi = \tilde{a} - s\tilde{b}t$ в случае 2).

Теорема 2.17 ([46]). *Элементы z_π являются циклами в $\operatorname{Sh}(\beta, F)$, а их гомологические классы порождают $F/\operatorname{id}(\beta)$-бимодуль $H_1(\beta, F)$.*

Доказательство этой теоремы и аналогичного утверждения для комплексов Козюля можно найти в [46].

2.6. Некоммутативные полные пересечения: алгебры глобальной размерности 2.

Определение 2.18. Алгебра R называется некоммутативным полным пересечением, если существует представление $R = F/I$, где F — свободная алгебра, а идеал I порождается сильно свободным множеством.

Пусть $R = F/I$, где I минимальным образом порожден каким-то непустым однородным множеством α, состоящим из элементов положительной степени. Пусть F порождается множеством переменных x, и пусть алгебра A минимально порождается их образами (т. е. $\alpha \subset (F_+)^2$).

Учитывая результаты разделов 2.3 и 2.5, имеем следующую теорему.

Теорема 2.19. *В описанной ситуации эквивалентны следующие условия*:

1) *множество $\alpha \subset F$ сильно свободно, т. е. R — некоммутативное полное пересечение*;
2) $H_1(\alpha, F) = 0$;
3) *отображение $\gamma\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to F$ является изоморфизмом градуированных векторных пространств*;
4) *отображение $\rho\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to \mathbf{gr}\, F$ является изоморфизмом алгебр.*

Если алгебра F связна (и потому A также связна), то перечисленные условия эквивалентны также следующим утверждениям:

5) *существует такое* $i > 0$, *что* $H_i(\alpha, F) = 0$;
6) $H(x, R) \simeq k\langle\tilde{\alpha}\rangle$;
7) $H_2(x, R) = H_1(x, R)^2$;
8) $\operatorname{gl.dim} R = 2$.

Если, кроме того, алгебра F *локально конечна* (*эквивалентно, множество* x *локально конечно*), *то все эти утверждения эквивалентны следующему равенству*:

9) $R(z) = (1 - x(z) + \alpha(z))^{-1}$.

Эквивалентность 5) $\iff$ 1) доказана в [24] с помощью свойства 3 из теоремы 2.15. Остальные эквивалентности следуют из разобранных ранее результатов. □

Рассмотрим несколько примеров. До конца раздела мы будем предполагать, что алгебра F связна.

Сначала приведем критерий для сильной свободности множества из одного элемента (будем также называть такой элемент сильно свободным). Такой элемент аналогичен регулярному элементу в коммутативном кольце многочленов.

Предложение 2.20 ([43, 49]). *Однородный элемент* $r \in (F_+)^2$ *является сильно свободным тогда и только тогда, когда не существует таких однородных элементов* $a \in F_+$, $b \in F$, *что*

$$r = aba.$$

Следующий пример наиболее важный в некоммутативной проективной геометрии. Напомним, что связная алгебра R называется *гореншmейновой*, если существует такое $d > 0$, что

$$\operatorname{Ext}^i_R(k, R) \simeq \begin{cases} k, & i = d, \\ 0, & i \neq d, \end{cases}$$

где изоморфизм понимается в неградуированном смысле. Если R к тому же имеет конечную глобальную размерность, то $\mathrm{d} = \operatorname{gl.dim} R$.

Теорема 2.21 ([70]). *Связная алгебра* R *является гореншmейновой глобальной размерности* 2 *тогда и только тогда, когда она имеет вид* $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / \operatorname{id}(b)$, *где* $n \geqslant 2$, *степени порождающих удовлетворяют условиям* $1 \leqslant \deg x_1 \leqslant \ldots \leqslant \deg x_n$, *причем число* $\deg x_i + \deg x_{n+1-i}$ *постоянно для всех* i, *и существует такой однородный автоморфизм* σ *алгебры* $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, *что*

$$b = \sum_1^n x_i \sigma(x_{n+1-i}).$$

Для мономиальных алгебр существует простой критерий проверки того, являются ли они некоммутативными полными пересечениями.

Последовательность (конечная или бесконечная) $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\} \in F$ нетривиальных мономов от порождающих называется *комбинаторно свободной*, если между ее элементами не существует зацеплений (в смысле теоремы 2.17). Другими словами, эти мономы не включают друг друга как подслова и не пересекаются друг с другом.

Объединяя теорему 2.17 и лемму 2.14, получаем следующую теорему.

Теорема 2.22 ([29]). *Пусть* F *— связная свободная алгебра.*

1. *Последовательность* $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\} \subset F$ *различных нетривиальных мономов от порождающих сильно свободна тогда и только тогда, когда она комбинаторно свободна.*
2. *Пусть* $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\} \subset F$ *— последовательность старших членов элементов однородного подмножества множества* $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \subset (F_+)^2$. *Если* β *комбинаторно свободна, то* α *сильно свободно.*

Обратная импликация неверна (например, алгебра $k\langle x, y\rangle / \operatorname{id}(x^2 + y^2)$ гореншmейнова глобальной размерности 2, но ее соотношение $x^2 + y^2$ не является комбинаторно свободным ни для какого порядка на мономах). Более того, в общем случае не существует алгоритма, определяющего, является ли данное конечное подмножество $\alpha \subset F$ сильно свободным (и значит, определяющего,

равна ли $\operatorname{gl.dim} R$ двум или больше), даже в случае стандартной конечно порожденной свободной алгебры F.

Теорема 2.23 ([31]). *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char} k = 0$. Для данной пары натуральных чисел p, q пусть F — свободная алгебра с p порождающими первой степени, а α — однородное подмножество, состоящее из q квадратичных форм. Тогда для некоторых p, q не существует алгоритма, определяющего, является ли множество α сильно свободным.*

2.7. Теорема Голода—Шафаревича. Первым приложением комплекса Шафаревича была знаменитая теорема Голода—Шафаревича. Мы выведем ее другим способом [28].

Пусть F — связная связная свободная алгебра, порожденная локально конечным множеством X, и пусть R — ее фактор-алгебра по однородному идеалу I, минимальным образом порожденному однородным подмножеством $\alpha \subset (F_+)^2$. Тогда неравенство из теоремы 2.6 перепишется так:

$$R(z)(1 - x(z) + \alpha(z)) \geqslant 1.$$

Если формальный степенной ряд $f(z)^{-1}$, где $f(z) = 1 - x(z) + \alpha(z)$, имеет неотрицательные коэффициенты, получается следующая оценка на ряд Гильберта $R(z)$:

$$R(z) \geqslant (1 - x(z) + \alpha(z))^{-1}.$$

Формальный степенной ряд в правой части всегда бесконечен, поэтому алгебра R в этом случае бесконечномерна. Это достаточное условие, гарантирующее бесконечномерность алгебры R, впервые получено в [16] и называется теоремой Голода—Шафаревича. Заметим, что равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда множество α сильно свободно.

По крайней мере в случае стандартной (т. е. порожденной в первой степени) алгебры F условие о том, что коэффициенты ряда $f(z)^{-1}$ неотрицательны, проверить легко.

Лемма 2.24[1]. *Если F — n-порожденная стандартная свободная алгебра, то следующие условия эквивалентны*:

1) *формальный степенной ряд $R_0(z) = f(z)^{-1}$ имеет неотрицательные коэффициенты*;
2) *аналитическая функция $f(z)$ имеет некоторый положительный корень z_0.*

В этом случае ряд $f(z)^{-1}$ бесконечен. Если, кроме того, $n > 2$ или $\alpha(z) \neq z^2$, то $z_0 \in (0,1)$ и коэффициенты ряда $f(z)^{-1}$ имеют экспоненциальный рост, а именно i-й коэффициент не меньше z_0^{-i}.

Неградуированная версия теоремы Голода—Шафаревича была получена Е. Б. Винбергом [8]. В этой теореме степенью элемента a в конечно порожденной свободной ассоциативной алгебре F называется степень его младшей однородной компоненты в стандартной градуировке на F.

Теорема 2.25. *Пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, $\alpha = \{\alpha_i\}$ — множество (не)однородных элементов степени не меньше 2 и $R = F/\operatorname{id}(\alpha)$. Обозначим $\alpha(z) = \sum\limits_i z^{\deg \alpha_i}$. Если формальный степенной ряд*

$$g(z) = (1 - z)(1 - nz + \alpha(z))^{-1}$$

имеет неотрицательные коэффициенты, то алгебра R бесконечномерна.

Следующее *доказательство* принадлежит И. Р. Шафаревичу. Это модификация оригинального доказательства градуированного случая, данного в работе Голода и Шафаревича.

Введенные в условии теоремы степени неоднородных элементов индуцируют убывающую фильтрацию $\{\mathcal{F}_i\}$ на R, согласованную со стандартной градуировкой на F. Задав $\deg \tilde{\alpha}_i := \deg \alpha_i$, продолжим эту фильтрацию на комплекс Шафаревича $\operatorname{Sh}(\alpha, R)$.

Вспомним короткую точную последовательность (2.2). Начало ее точной последовательности гомологий выглядит так:

$$0 \to K \xrightarrow{d_*} \tilde{\alpha}H_0(\alpha, F) \longrightarrow \tilde{x}H_0(\alpha, F) \longrightarrow H_0(\alpha, F) \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

[1] Единственное доказательство, известное автору, было опубликовано в [20]. Тем не менее это утверждение упоминалось задолго до того, например в [34].

где K — ядро и $H_0(\alpha, F) = R$. Для любого $d \geqslant 0$ соответствующий элемент фильтрации $\mathcal{F}_{d+1}$ имеет вид

$$0 \to \mathcal{F}_{d+1}K \longrightarrow \sum_{p+q=d+1} \mathcal{F}_p\tilde{\alpha}\mathcal{F}_qR \longrightarrow \mathcal{F}_dR \longrightarrow \mathcal{F}_{d+1}R \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Пусть $\tilde{\alpha}^d$ — подмножество в $\tilde{\alpha}$, состоящее из элементов степени d. Положив $V_{\leqslant d} = V/\mathcal{F}_{d+1}V$ для каждого векторного пространства с убывающей фильтрацией, из эйлеровой характеристики получаем следующую формулу для размерностей:

$$\dim \sum_{p+q=d} \tilde{\alpha}^p R_{\leqslant q} = \dim K_{\leqslant d} + n \dim R_{\leqslant d-1} - \dim R_{\leqslant d} + 1.$$

Пусть $a_j = \dim \mathcal{F}_jA/\mathcal{F}_{j-1}A$, $b_j = \dim \mathcal{F}_jA$ и $c_j = \dim \alpha^j$. Имеем

$$\sum_{p+q=d} c_pb_q \geqslant \dim \sum_{p+q=d} \tilde{\alpha}^p R_{\leqslant q} \geqslant 1 - b_d + nb_{d-1}.$$

Положим $R(z) = \sum\limits_{i\geqslant 0} a_iz^i$ и $B(z) = \sum\limits_{i\geqslant 0} b_iz^i$. Получаем неравенство

$$B(z)\alpha(z) \geqslant znB(z) - B(z) + \sum_{i\geqslant 0} z^i,$$

или

$$B(z)(1 - nz + \alpha(z)) \geqslant (1 - z)^{-1}.$$

Поскольку $B(z) = R(z)/(1 - z)$, имеем

$$R(z)g(z)^{-1} \geqslant (1 - z)^{-1}.$$

Если степенной ряд $g(z)$ имеет неотрицательные коэффициенты, то мы имеем право умножить последнее неравенство на $g(z)$ и получим

$$R(z) \geqslant (1 - nz + \alpha(z))^{-1}.$$

Здесь степенной ряд в правой части равен $g(z)(1 + z + z^2 + \ldots)$, так что он также имеет неотрицательные коэффициенты. Следовательно, по лемме 2.7 этот степенной ряд бесконечен, а потому и $R(z)$ бесконечен. Более того, мы получаем, что в нетривиальных случаях алгебра R имеет экспоненциальный рост. □

Теорема Голода—Шафаревича показывает, что если количество соотношений алгебры R в каждой степени достаточно мало, то алгебра бесконечномерна. С ее помощью Е. С. Голод построил [11] первые примеры конечно порожденных бесконечных ниль-алгебр и конечно порожденных бесконечных групп, все элементы которых имеют конечный порядок.

Эта конструкции основывается на следующей идее. Предположим, что поле k не более чем счетно. Тогда свободная алгебра $F = k\langle x_1, x_2\rangle$ также счетна, как и ее идеал аугментации F_+, т. е. $F_+ = \{f_1, f_2, \ldots\}$. Построим множество α, сопоставляя каждому элементу f_i достаточно большой порядок p_i и добавляя в α все однородные компоненты элементов $f_i^{p_i}$. Если последовательность $\{p_i\}$ растет достаточно быстро, то для любой степени d в α содержится не больше одного элемента этой степени, поэтому функция $f(z)$ имеет положительный корень, так что алгебра $R = F/\operatorname{id}(\alpha)$ бесконечномерна. В частности, R_+ будет бесконечномерной ниль-алгеброй.

Если $\operatorname{char} k = p > 0$, то подполугруппа в R_+, порожденная двумя элементами $1 + x_1$ и $1 + x_2$, является бесконечной p-группой.

С помощью модификаций этого метода сейчас построены и другие интересные примеры ниль-алгебр, например ниль-алгебра, над которой алгебра многочленов от одной переменной не является ниль-алгеброй (см. [65]). Тем не менее некоторые естественные вопросы о ниль-алгебрах до сих пор открыты, как, например, следующие два вопроса В. Н. Латышева: существуют ли конечно представимые ниль-алгебры и ниль-алгебры полиномиального роста?

2.8. Некоммутативные полные пересечения и общие алгебры. Предположим, что свободная алгебра F является связной и порожденной конечным множеством переменных $x = \{x_1, \dots, x_g\}$, и пусть $\alpha \subset (F_+)^2$ — ее конечное подмножество, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Зафиксируем степени $\{\deg x_i\}$, $\{\deg \alpha_i\}$, т. е. зафиксируем два целочисленных многочлена $(x(z), \alpha(z))$. Можно ли выбрать множество α сильно свободным?

Этот вопрос интересен и из-за его тесной связи с общими алгебрами (т. е. алгебрами, соотношения которых — общие формы соответствующих степеней). Если α, γ — такие подмножества в F, что $\alpha(z) = \gamma(z)$, а γ общее, то $F/\operatorname{id}(\gamma)(z) \leqslant F/\operatorname{id}(\alpha)(z)$. По теореме Голода—Шафаревича если α сильно свободно, то $f(z)^{-1} = F/\operatorname{id}(\alpha)(z) > 0$ и ряд Гильберта общей алгебры равен $F/\operatorname{id}(\alpha)(z) = (1 - x(z) + \alpha(z))^{-1}$.

Для стандартной градуированной алгебры (когда $x(z) = gz$) некоторое ограничение задается леммой 2.7. Действительно, для сильно свободного множества α в теореме Голода—Шафаревича достигается равенство, поэтому многочлен $f(z) = 1 - x(z) + \alpha(z)$ должен иметь положительный корень (лежащий в интервале $(0, 1]$). В общем случае имеет место следующая теорема [34].

Теорема 2.26. *Пусть $x(z)$, $\alpha(z)$ — два многочлена с неотрицательными целыми коэффициентами без свободных членов, и пусть $f(z) = 1 - x(z) + \alpha(z)$. Пусть $G_{x(z),\alpha(z)}$ — класс связных k-алгебр, множество порождающих которых имеют вектор степеней $x(z)$, а множество соотношений — $\alpha(z)$. Рассмотрим следующие утверждения*:

1) *существуют два многочлена $S(z)$ и $T(z)$ с неотрицательными целыми коэффициентами и нулевыми свободными членами, такие что*
$$(1 - S(z))(1 - T(z)) \geqslant f(z);$$
2) *существует мономиальная алгебра $M \in G_{x(z),\alpha(z)}$, для которой $M(z) = f(z)^{-1}$, т. е. существует комбинаторно свободное множество $\alpha \subset F$;*
3) *существует алгебра $A \in G_{x(z),\alpha(z)}$, для которой $A(z) = f(z)^{-1}$, т. е. существует сильно свободное множество $\alpha \subset F$;*
4) *$f(z)^{-1} > 0$;*
5) *многочлен $f(z)$ имеет действительный корень $z_0 \in (0, 1]$.*

Тогда выполняются импликации
$$1) \iff 2) \implies 3) \implies 4) \implies 5),$$
но в общем случае
$$2) \not\Longleftarrow 3) \not\Longleftarrow 4) \not\Longleftarrow 5).$$

Импликация $3) \implies 4)$ здесь уже обсуждалась, а импликация $4) \implies 5)$ следует из того факта, что z_0 равен радиусу сходимости ряда $f(z)^{-1}$ (об этом см. следующий раздел). Что касается равносильности $1) \iff 2)$, то здесь мы отсылаем читателя к [34].

Рассмотрим контрпримеры. Пусть $x(z) = 3z + z^4$ и $\alpha(z) = 3z^2$. Тогда $f(z)$ имеет действительный корень, равный 1, но $f(z)^{-1} = 1 + 3z + 6z^2 + 9z^3 + 10z^4 + 6z^5 - 6z^6 + o(z^6)$. Значит, $4) \not\Longleftarrow 5)$.

Чтобы убедиться, что $3) \not\Longleftarrow 4)$, заметим, что в алгебре $F = k\langle u, v, w \mid \deg u = 2,\ \deg v = \deg w = 3\rangle$ нет сильно свободных элементов степени 4 (поскольку каждый элемент $a \in F_4$ имеет вид $a = \lambda u^2$ и не является поэтому сильно свободным). Тем не менее, как нетрудно убедиться, при $x(z) = z^2 + 2z^3$ и $\alpha(z) = z^4$ получается $f(z)^{-1} > 0$.

Отметим, что для стандартных алгебр вопрос о том, следует ли 3) из 4), остается открытым.

Осталось проверить, что $2) \not\Longleftarrow 3)$. Пусть $x(z) = 2z$ и $\alpha(z) = z^3 + z^8$. Тогда множество $\alpha = \{uw - wu, w^2vwv\}$ в $F = k\langle u, v \mid \deg u = \deg v = 1\rangle$, где $w = uv - v^2$, является сильно свободным (это можно проверить с помощью прямого вычисления рядов Гильберта по методу из [32]). Тем не менее комбинаторно свободных множеств α не существует по следующему утверждению [12].

Предложение 2.27. *Пусть α_1 — моном степени 3 в $F = k\langle u, v \mid \deg u = \deg v = 1\rangle$. Любое множество α, содержащее α_1 и еще хотя бы один элемент, не является сильно свободным.*

Доказательство. Поскольку любое подмножество сильно свободного множества снова сильно свободно, мы можем предполагать, что α состоит из двух элементов $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Согласно условию 5) имеем $d = \deg \alpha_2 \geqslant 8$. С точностью до замены переменных можно считать, что $\alpha_1 = u^2 v$ (поскольку элемент α_1 предполагается комбинаторно свободным) и $\alpha_2 = u^n + uvf + vg$ (это общая форма по модулю $\mathrm{id}(\alpha_1)$), где f, g — общие формы. Рассмотрим цикл

$$z = u^2\tilde{\alpha}_2 v - u^n\tilde{\alpha}_1 - u\tilde{\alpha}_1 f v - \tilde{\alpha}_1 g v$$

в $\mathrm{Sh}_1(\alpha, F)$. Его гомологический класс ненулевой, поскольку $B_1 \mathrm{Sh}(\alpha, F)_3$ есть линейная оболочка элементов $\mathrm{d}(\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2)$, $\mathrm{d}(\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_1)$ и $\mathrm{d}(a\tilde{\alpha}_1 b\tilde{\alpha}_1 c)$ для произвольных мономов a, b, c, однако все эти многочлены не содержат монома $u^2\tilde{\alpha}_2 v$. □

Для квадратичных стандартных алгебр с g порождающими и r соотношениями все условия 1)—5) эквивалентны неравенству $4r^2 \leqslant g$. Для d-однородных алгебр (т. е. стандартных алгебр, все соотношения которых сосредоточены в степени d) условия 4), 5) переписываются в виде

$$r \leqslant \frac{g^d (d-1)^{d-1}}{d^d},$$

однако неизвестно, влечет ли условие 4) в этом классе условие 3).

Если условие 4) не выполняется, теорема Голода—Шафаревича дает другую оценку для ряда Гильберта общей алгебры. Для произвольного формального степенного ряда $P(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ обозначим через $|P(z)|$ ряд (или многочлен), полученный из $P(z)$ путем обнуления всех его коэффициентов начиная с первого отрицательного. Тогда неравенство

$$R(z) f(z) \geqslant 1$$

влечет оценку

$$R(z) \geqslant |f(z)^{-1}|.$$

Если существует такая алгебра R, для которой это неравенство выполняется, то соответствующая общая алгебра $G \in G_{x(z),\alpha(z)}$ имеет тот же ряд Гильберта $|f(z)^{-1}|$. Вообще говоря, общая алгебра не обязана иметь такой ряд Гильберта, например, в классе 2-порожденных стандартных алгебр при $\alpha(z) = z^2 + z^n$ для любого $n \geqslant 7$ [34]. Тем не менее для квадратичных алгебр остается следующая гипотеза.

Гипотеза 2.28 ([34])**.** Предположим, что $x(z) = gz$ и $\alpha(z) = rz^2$. Тогда общая алгебра $G \in G_{x(z),\alpha(z)}$ имеет ряд Гильберта $|f(z)^{-1}|$ при $f(z) = 1 - gz + rz^2$.

В [34] гипотеза 2.28 доказана для случаев $r \leqslant g^2/4$ и $r \geqslant g^2/2$.

Можно переформулировать эту гипотезу в терминах свойства козюлевости. Напомним, что стандартная конечно порожденная алгебра A называется козюлевой[1], если тривиальный модуль k_A обладает линейной свободной резольвентой, т. е. $H_i(A)_j = 0$ при $j \neq i$ [61]. Любая козюлева алгебра квадратична, ее алгебра Йонеды $\mathrm{Ext}^*_A(k,k)$ также квадратична и изоморфна двойственной алгебре $A^! = k\langle x^*\rangle / R^\perp\rangle = \bigoplus\limits_i \mathrm{Ext}^i_A(k,k)_i$, где $R^\perp$ — аннулятор пространства $R = k\alpha$ в $kx^* \otimes kx^*$. Например, любое квадратичное (не)коммутативное полное пересечение козюлево. Квадратичная алгебра с общими соотношениями козюлева тогда и только тогда, когда она либо является некоммутативным полным пересечением, либо двойственной к нему алгеброй [39, 57, 61].

Алгебра A называется n-козюлевой, если условие $\mathrm{Ext}^{i,j}_A(k,k) = 0$ при $i \neq j$ выполняется для всех $j \leqslant n$ [26]. Например, любая квадратичная алгебра 3-козюлева, любая козюлева алгебра n-козюлева для всех n, а любая некозюлева алгебра не является n-козюлевой для всех достаточно больших n.

В этой терминологии гипотеза 2.28 эквивалентна следующему утверждению.

Гипотеза 2.29. Пусть G — общая квадратичная алгебра. Тогда для любого $n > 0$ либо $G_n = 0$, либо G n-козюлева.

[1]В русской литературе употребляется также термин *кошулева алгебра*, происходящий от другой транскрипции фамилии французского математика Козюля (Koszul).

В частности, из гипотез 2.28 или 2.29 следовало бы, что общая квадратичная алгебра либо конечномерна, либо является некоммутативным полным пересечением.

Для доказательства эквивалентности гипотез 2.28 и 2.29 заметим сначала, что если $r \leqslant g^2/4$ или $r \geqslant g^2/2$, то гипотеза 2.29 очевидным образом верна, как и гипотеза 2.28. Осталось рассмотреть случай $g^2/2 > r > g^2/4$. В этом случае $G_3^! = 0$, так что можно применить следующее утверждение.

Предложение 2.30. *Пусть G — квадратичная алгебра с g порождающими и r соотношениями, такая что $G_3^! = 0$. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1) $G(z) = |f(z)^{-1}|$ *при* $f(z) = 1 - gz + rz^2$;
2) *для любого $n > 0$ либо $G_n = 0$, либо G является n-козюлевой.*

Доказательство. Имеем $H_i(G)_i = G_i^! = 0$ при $i \geqslant 3$. Если $H_3(G) = 0$, то G имеет глобальную размерность 2, так что оба условия выполняются. Предположим, что $H_3(G) \neq 0$, и обозначим $t = \min\{j \mid H_3(G)_j \neq 0\}$. Тогда модуль сизигий $\Omega^3(k)$ порождается в степени t, поэтому векторное пространство $H_{i+3}(G)_j = H_{i+3}(k)_j = H_i(\Omega^3(k))_j$ нулевое для всех $j < i + t$. Следовательно, G является $(t-1)$-козюлевой, но не t-козюлевой. Таким образом, условие 2) эквивалентно равенству $G_t = 0$.

Пусть $q = \dim H_3(G)_t$. Имеем

$$G(z)^{-1} = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i H_i(z) = 1 - gz + rz^2 - qz^t + o(z^t),$$

т. е. $G(z)f(z) = 1 + qz^t + o(z^t)$.

Предположим, что выполняется условие 1). Имеем

$$|f(z)^{-1}| = G(z) = f(z)^{-1} + qz^t + o(z^t),$$

поэтому $G_t = 0$, и 2) также выполняется.

Допустим, что выполняется 2). Тогда

$$f(z)^{-1} = G(z)/(1 + qz^t + o(z^t)) = G(z) - qz^t + o(z^t).$$

Поскольку $G_t = 0$, условие 1) также выполнено. □

2.9. Алгебры экспоненциального роста. Факторизация коммутативного кольца R по идеалу, порожденному регулярной последовательностью, уменьшает обе размерности кольца, Крулля и Гельфанда—Кириллова. Выполняется ли аналог этого свойства для сильно свободных множеств в некоммутативных кольцах?

Из леммы 2.7 и теоремы Голода—Шафаревича сразу следует, что нетривиальное некоммутативное полное пересечение имеет экспоненциальный рост, так что его размерность Гельфанда—Кириллова бесконечна. Для алгебр экспоненциального роста следующее понятие играет роль, аналогичную роли размерности Гельфанда—Кириллова.

Пусть A — локально конечное градуированное векторное пространство (в частности, оно может быть алгеброй или модулем) с рядом Гильберта $A(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i$. Под его *экспонентой роста* [23], или *энтропией* [59], понимается величина, обратная к радиусу сходимости $r(A)$ ряда $A(z)$, т. е.

$$h(A) = r(A)^{-1} = \inf\{q > 0 \mid \exists c > 0\ \forall n \geqslant 0\ a_n \leqslant cq^n\} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Например, для d-порожденной стандартной свободной ассоциативной или лиевой алгебры F_d имеем $h(F_d) = d$ (ср. GK-dim $k[x_1, \ldots, x_n] = n$), а для любой конечно порожденной бесконечной коммутативной алгебры C имеем $h(C) = 1$. Для d-порожденной стандартной свободной неассоциативной алгебры $\mathcal{F}_d$ получаем $h(\mathcal{F}_d) = 4d$ [59], так что любая конечно порожденная (не)ассоциативная алгебра имеет конечную энтропию.

До конца этого раздела все алгебры предполагаются ассоциативными и локально конечными.

Энтропия $h(A) = r(A)^{-1}$ обладает следующими основными свойствами.

Предложение 2.31. *Пусть A — градуированная алгебра.*

1. $h(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда A конечномерна.*

2. *Если A является конечно порожденной, то $h(A) < \infty$.*
3. *$h(A) = 1$ тогда и только тогда, когда A бесконечномерна и имеет субэкспоненциальный рост.*
4. *Если ряд Гильберта является рациональной функцией $A(z) = p(z)/q(z)$, где числитель и знаменатель не имеют общих делителей, то величина $r(A) = h(A)^{-1}$ равна наименьшему положительному корню многочлена $q(z)$.*
5. *Если B — подалгебра или фактор-алгебра алгебры A с индуцированной градуировкой, то $h(B) \leqslant h(A)$.*
6. *Предположим, что A является связной и конечно порожденной. Тогда $\lim\limits_{t \to r(A)-} A(t) = \infty$, поэтому функция $f(t) = A(t)^{-1}$ непрерывна на $[0, r(A)]$, причем $f(0) = 1$, $f(r(A)) = 0$.*

Здесь свойства 1), 3), 4) и 5) следуют из хорошо известных свойств радиусов сходимости формальных степенных рядов (например, в свойстве 5) имеем $0 \leqslant B(z) \leqslant A(z)$). Свойство 2) следует из 4), 5) и из того факта, что любая алгебра A, порожденная однородным множеством x, является фактор-алгеброй свободной алгебры $k\langle\tilde{x}\rangle$ с рядом Гильберта $(1 - x(z))^{-1}$. Свойство 6) доказано в [30]. □

Заметим, что свойство 6) не выполняется, вообще говоря, для бесконечно порожденных связных алгебр. Рассмотрим следующий пример, предложенный С. Гальпериным (цитируется по [55]). Пусть A — алгебра (с нулевым умножением в положительных степенях) с рядом Гильберта

$$A(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2^k - 2k} z^{2^k}.$$

Тогда $h(A) = 2$ и $r = r(A) = 1/2$, но $\lim\limits_{z \to r-} A(z) = 4/3$. Чтобы сделать этот пример более естественным, можно рассмотреть букет сфер $X = \bigvee\limits_{n=2}^{\infty} \bigvee\limits_{j=1}^{a_n} S^n$. Тогда алгебра $B = H_*(\Omega X, \mathbb{Q})$ имеет ряд Гильберта $B(z) = z(1 + z - P(z))^{-1}$ и энтропию $h(B) = 2$, но $B(1/2) = 3 < \infty$.

Следствие 2.32 ([59]). *Для стандартной алгебры A с g порождающими и r соотношениями имеем $h(A) \geqslant g - r$.*

Доказательство. Предположим, что соотношения A имеют степени $d_1, \ldots, d_r$ при $d_i \geqslant 2$ и что $g > r$. Положим $f(z) = 1 - gz + z^{d_1} + \ldots + z^{d_r}$. По лемме 2.7 достаточно доказать, что $f(z_0) \leqslant 0$ для $z_0 = 1/(g - r)$. Действительно, имеем

$$f(z_0) \leqslant 1 - gz_0 + rz_0^2 = -r\frac{g - r + 1}{(g - r)^2} \leqslant 0.$$

Следствие доказано. □

Существует также неградуированная версия следствия 2.32.

Теорема 2.33 ([41]). *Пусть F — свободная алгебра с порождающими $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $A = F/I$, где идеал $I \subset \mathrm{id}(x_1, \ldots, x_n)$ порождается $m \leqslant n - 2$ элементами. Тогда A имеет экспоненциальный рост.*

Поговорим теперь о таких алгебрах, что любая их нетривиальная факторизация строго уменьшает энтропию. Это приведет нас к характеризации сильно свободных множеств в терминах энтропии.

Локально конечная алгебра A называется *экстремальной*, если любая ее собственная фактор-алгебра $B = A/I$ имеет строго меньшую энтропию, $h(B) < h(A)$. Например, как доказано В. Е. Говоровым [10], любая стандартная свободная алгебра экстремальна.

Предложение 2.34 ([23]). *Пусть A — связная экстремальная алгебра. Тогда*

1) $0 < h(A) < \infty$;
2) *A первична.*

Следующая теорема дает несколько классов примеров экстремальных алгебр.

Теорема 2.35 ([23]). *Пусть A, B — конечно порожденные*[1] *нетривиальные связные алгебры.*

1. *Свободное произведение $A * B$ — экстремальная алгебра.*
2. *Если алгебра A содержит сильно свободное множество, то она экстремальна.*
3. *Любая локально конечная алгебра с единственным определяющим соотношением и с не меньше чем тремя порождающими экстремальна.*

В частности, часть 2 показывает, что любая факторизация по сильно свободному множеству уменьшает энтропию, это аналогично свойству коммутативных регулярных последовательностей. Часть 3 показывает, в частности, что горенштейновы алгебры глобальной размерности 2 (описанные в теореме 2.21) с n порождающими экстремальны тогда и только тогда, когда $n \geqslant 3$.

Локально конечная алгебра A называется *почти простой* [2], если любая ее собственная фактор-алгебра $B = A/I$ конечномерна. В частности, любая бесконечномерная почти простая алгебра экстремальна, а каждая экстремальная алгебра субэкспоненциального роста почти проста. Тем не менее существуют почти простые алгебры экспоненциального роста [2]. Почти простые алгебры также называют *проективно простыми* или *почти бесконечными*, они изучались в [44, 60, 63].

Следующее предложение (Л. В. Смолл [60]) показывает, что бесконечномерная почти простая алгебра может быть нетеровой, PI, ниль и т. п.

Предложение 2.36. *Любая локально конечная алгебра A имеет почти простую* (*в частности, экстремальную*) *фактор-алгебру R.*

Доказательство. Пусть $A = A^0$ не почти простая алгебра. Мы построим последовательность $A = A^0, A^1, A^2, \ldots$ ее фактор-алгебр, «пределом» которой будет почти простая фактор-алгебра. Чтобы построить A^{i+1} по A^i, предположим, что A^i не почти проста (иначе доказывать нечего). Тогда существует ненулевой однородный элемент y_i в A^i, имеющий минимальную степень из таких элементов, что алгебра $A^i/\operatorname{id}(y_i)$ бесконечномерна. Положим тогда $A^{i+1} = A^i/\operatorname{id}(y_i)$.

Пусть теперь для каждого $i \geqslant 0$ элемент x_i — какой-нибудь однородный прообраз элемента y_i в A. Тогда алгебра $A^\infty = A/\operatorname{id}(x_0, x_1, \ldots)$ бесконечномерна и почти проста. □

Теорема 2.37 ([23]). *Пусть A — связная конечно порожденная алгебра, пусть I — ее идеал, минимальным образом порожденный однородным множеством α, $R = A/I$ и $C = R\langle\tilde{\alpha}\rangle$. Пусть $r_A = h(A)^{-1}$ и $r_C = h(C)^{-1}$ — радиусы сходимости рядов Гильберта. Тогда имеют место числовые неравенства*

$$h(A) \leqslant h(C) \tag{2.3}$$

и

$$R(r_A)\alpha(r_A) \geqslant 1, \quad \textit{где} \quad \infty > 1. \tag{2.4}$$

При этом следующие условия эквивалентны:

1) *множество $\alpha \subset A$ сильно свободно*;
2) *неравенство* (2.3) *обращается в равенство*;
3) *неравенство* (2.4) *обращается в равенство.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{gr}\, A = A/I \oplus I/I^2 \oplus \ldots$. Заметим, что $\mathbf{gr}\, A(z) = A(z)$, так что $h(\mathbf{gr}\, A) = h(A)$. Сюръекция $\rho\colon R\langle\tilde{\alpha}\rangle \to \mathbf{gr}\, A$ из раздела 2.3 дает неравенства $C(z) \geqslant A(z)$ и $h(C) \geqslant h(A)$. Поскольку C содержит сильно свободное множество $\tilde{\alpha}$, эта алгебра экстремальна по утверждению 2 теоремы 2.35, так что равенство выполняется тогда и только тогда, когда ρ является изоморфизмом, т. е. α сильно свободно.

По формуле для рядов Гильберта свободных произведений имеем

$$C(z)^{-1} = R(z)^{-1} - \alpha(z).$$

Поскольку C экстремальна, ряды $R(z)$ и $\alpha(z)$ сходятся при $z \in [0, r(C)]$, поэтому

$$R(r_C)^{-1} - \alpha(r_C) = 0,$$

[1] Предположение о конечной порожденности алгебр A, B было ошибочно опущено в [23]. Та же ошибка была допущена и относительно теоремы 2.37 далее.

или

$$R(r_C)\alpha(r_C) = 1.$$

Поскольку $r_A \geqslant r_C$, имеем

$$R(r_A)\alpha(r_C) \geqslant 1,$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $r_A = r_C$. □

Например, если α состоит из t элементов степени d, получаем оценку

$$t \geqslant \frac{h(A)^d}{R(r_A)},$$

где равенство достигается в точности для сильно свободных α. В случае g-порожденной стандартной свободной алгебры $A = F$ (т. е. d-однородной алгебры R) имеем

$$t \geqslant \frac{g^d}{R(g^{-1})}.$$

Последнее неравенство было первоначально доказано В. Е. Говоровым [10].

Следствие 2.38. *Пусть A — конечно порожденная алгебра субэкспоненциального роста. Если $A \neq k[x]$, то в A нет сильно свободных элементов.*

Доказательство. Пусть $x \in A$ — сильно свободный элемент степени d, пусть $I = \mathrm{id}(x)$, и пусть $R = A/I$. Поскольку $h(A) = 1$, случай равенства в теореме 2.37 дает

$$R(1)1^d = 1.$$

Это означает, что $R(1) = 1$, $R = k$ и $A = k[x]$. □

Теорема Голода—Шафаревича имеет следующий асимптотический вариант.

Предложение 2.39. *Пусть R — связная алгебра, порожденная конечным множеством x, с минимальным множеством однородных соотношений $\alpha \subset k\langle\tilde{x}\rangle$. Если z_0 — положительный корень функции $f(z) = 1 - x(z) + \alpha(z)$, то*

$$h(R) \geqslant z_0^{-1}.$$

Если α сильно свободно, то достигается равенство.

Действительно, поскольку $R(z)f(z) \geqslant 1$, получаем, что ряд $R(z)$ расходится при $z = z_0$. □

Следующая естественная гипотеза могла бы дать (вместе с предложением 2.39) асимптотическую характеризацию некоммутативных полных пересечений.

Гипотеза 2.40. Если $h(R) = z_0^{-1}$, то α сильно свободно, т. е. R — некоммутативное полное пересечение.

Предложение 2.41. *Гипотеза* 2.40 *верна для алгебры R, если выполняется хотя бы одно из следующих трех условий*:

1) $\mathrm{gl.dim}\, R \leqslant 3$;
2) *R представима в виде свободного произведения нетривиальных связных алгебр*;
3) *R содержит сильно свободное множество.*

Доказательство. В случае 1) утверждение следует из эйлеровой характеристики минимальной резольвенты модуля k_R, т. е. из равенства

$$R(z)^{-1} = f(z) - H_3(R)(z).$$

В случае 2) предположим, что алгебра R равна свободному произведению двух алгебр A_1 и A_2 с множествами порождающих X_1 и X_2 и множествами соотношений Y_1 и Y_2. Предположим, что по крайней мере одна из алгебр A_1 и A_2 не является полным пересечением. Поскольку R экстремальна, ряды Гильберта ее фактор-алгебр A_1, A_2 сходятся при $z = r := r(R)$ и $A_i(r)^{-1} \leqslant f_i(r)^{-1}$,

$i = 1, 2$, где $f_i(z) = 1 - X_i(z) + Y_i(z)$. Заметим, что по крайней мере одно из этих двух неравенств строгое. Поскольку

$$R(z)^{-1} = A_1(z)^{-1} + A(z)^{-1} - 1$$

по формуле рядов Гильберта свободного произведения, имеем

$$0 = R(r)^{-1} < f_1(r) + f_2(r) - 1 = f(r).$$

В случае 3) пусть R' — фактор-алгебра R по идеалу, порожденному одним сильно свободным элементом f степени $d > 0$. Тогда

$$R'(z)^{-1} = R(z)^{-1} + z^d,$$

и $R'(z)$ сходится при $z = r := r(R)$. Предположим, что R не является некоммутативным полным пересечением, тогда и R' не является им. Следовательно,

$$R'(z)(1 - x(z) + \alpha(z) + z^d) > 1,$$

так что

$$1 < (R(r)^{-1} + r^d)^{-1}(f(r) + r^d) = \frac{f(r)}{r^d} + 1.$$

Получаем, что $f(r) > 0$. □

Для стандартной (т. е. связной и конечно порожденной элементами первой степени) алгебры A с рядом Гильберта $A(z) = \sum\limits_i a_i z^i$ определение энтропии упрощается. Поскольку $A_m A_n = A_{m+n}$, имеем $a_m a_n \geqslant a_{m+n}$. Отсюда легко вывести [64] следующее свойство.

Лемма 2.42. *Если A — стандартная алгебра, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = h(A)$. Он ограничен сверху каждым $\sqrt[n]{a_n}$, т. е. $\dim A_n \geqslant h(A)^n$ для любого $n \geqslant 1$.*

Следующая теорема дает характеризацию свободных алгебр.

Теорема 2.43 ([59])**.** *Пусть A и B — две бесконечномерные стандартные алгебры. Тогда*

$$h(A * B) \geqslant h(A) + h(B),$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда обе алгебры A и B свободны.

Доказательство. Положим $C = A * B$. Пусть V_i — мономиальный базис в A_i, а W_i — мономиальный базис в B_i. Тогда мономиальный базис в C_n — это множество U_n слов $v_{i_1} w_{j_1} \dots v_{i_q} w_{j_q}$, где $v_t \in V_t$, $w_t \in W_t$, и $i_1 + \ldots + i_q + j_1 + \ldots + j_q = n$ при $j_1, i_2, \ldots, i_q > 0$ и $i_1, j_q \geqslant 0$. Обозначив $a_t = \dim A_t$ и $b_t = \dim B_t$, видим, что для любого вектора $[i_1, j_1, \ldots, i_q, j_q]$ количество таких базисных векторов не меньше $a_{i_1} b_{j_1} \dots a_{i_q} b_{j_q} \geqslant h(A)^s h(B)^{n-s}$, где $s = i_1 + \ldots + i_q$. Просуммировав по всем таким векторам степеней, получаем

$$\dim C_n \geqslant \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} h(A)^s h(B)^{n-s} \geqslant (h(A) + h(B))^n.$$

Поэтому $h(C) \geqslant h(A) + h(B)$.

Если A — m-порожденная свободная алгебра, а B — n-порожденная свободная алгебра, то $h(C) = m + n = h(A) + h(B)$. Осталось доказать, что, если одна из алгебр (скажем, B) не свободна, то неравенство становится строгим.

Пусть $B = F/\operatorname{id}(\alpha)$, где F — свободная алгебра, а $\alpha \subset (F_+)^2$ — непустое множество соотношений. Предположим, что $h(C) = h(A) + h(B)$. Пусть $f \in \alpha$ — произвольное соотношение степени d. Рассмотрим множество $\alpha' \subset F$, включающее все элементы из α, кроме f, и все элементы степеней $\geqslant d + 1$ из идеала $\operatorname{id}(f) \lhd F$. Тогда алгебра $B' = F/\operatorname{id}(\alpha')$ имеет ряд Гильберта $B(z) - z^d$, поэтому $h(B') = h(B)$. Алгебра $C' = A * B'$ является фактором алгебры C. Ввиду экстремальности C (первое утверждение теоремы 2.35) $h(C) > h(C')$, где $h(C) = h(A) + h(B)$, в то время как $h(C') \geqslant h(A) + h(B') = h(A) + h(B)$. Это противоречие завершает доказательство. □

В завершение этого раздела заметим, что для некоторой тройки натуральных чисел (s,t,q) не существует алгоритма, определяющего, равна ли энтропия данной s-порожденной стандартной алгебры R с t квадратичными соотношениями числу q. Это доказано в [23] с помощью теоремы 2.23.

2.10. Алгебры глобальной размерности 3. Пусть A — фактор-алгебра связной локально конечной свободной алгебры $F=\langle x\rangle$ по идеалу I, порожденному однородным подмножеством α.

В разделе 2.6 мы рассматривали характеризацию таких алгебр A глобальной размерности 2 в терминах комплекса Шафаревича. В частности, обнаружилось, что алгебра гомологий комплекса $\mathrm{Sh}(\alpha,F)$ в этом случай настолько мала, насколько это возможно, т. е. $H_*(\alpha,F)=A$. Когда эта алгебра настолько *велика*, насколько это возможно? Ответ таков: когда $\operatorname{gl.dim} A=3$.

В следующей теореме множество $\phi\subset k\tilde{\alpha}\otimes A$ порождающих пространства $H_3(A)$, а также его прообраз $\phi'\subset k\tilde{\alpha}\otimes F\subset\mathrm{Sh}(\alpha,F)$ те же, что и в теореме 2.15. Напомним, что ϕ — это базис векторного пространства $H_3(A)$, а его образ в гомологиях Шафаревича $h(\phi)=H(\phi')$ минимальным образом порождает A-бимодуль $H_1(\alpha,F)$.

Теорема 2.44 ([24])**.** *Предположим, что* $\operatorname{gl.dim} A\geqslant 3$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\operatorname{gl.dim} A=3$;
2) $\operatorname{gl.dim}\mathbf{gr}\,F=3$, *где* $\mathbf{gr}\,F$ — *градуированная алгебра, ассоциированная с* I*-адической фильтрацией на* F;
3) *множество* $\phi\in A\langle\tilde{\alpha}\rangle$ *сильно свободно*;
4) *для идеалов* $\tilde{I}$ *и* $\tilde{J}$, *порожденных множествами* α *и* ϕ' *в* $F\langle\tilde{\alpha}\rangle$, *имеем* $\tilde{I}\cap\tilde{J}=\tilde{I}\tilde{J}+\tilde{J}\tilde{I}$;
5) $H_*(\alpha,F)\simeq A\langle H_3(A)\rangle$;
6) A*-алгебра* $H_*(\alpha,F)$ *свободна*;
7) A*-модуль* $H_1(\alpha,F)/A_+H_1(\alpha,F)$ *свободен*.

Эквивалентность условий 1), 2) и 3) здесь следует из теоремы 2.16, а эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 7) следует из первого утверждения теоремы 2.15. Импликации 1) $\Longleftarrow$ 5) и 3) $\Longleftrightarrow$ 4) доказываются с помощью лемм 2.9 и 2.10. □

Для иллюстрации покажем, например, что связная алгебра глобальной размерности 3 имеет по крайней мере два соотношения. Действительно, пусть α состоит из единственного элемента f степени d. Как следует из предложения 2.20, он должен иметь вид $f=pq=qr$ для некоторых p, q, r, где $\deg q\geqslant 1$. Зафиксируем одно такое представление, для которого степень q максимальная из возможных. Тогда элемент $z=\tilde{f}r-p\tilde{f}\in\mathrm{Sh}_1(f,F)$ является циклом. Поскольку $\mathrm{Sh}_2(f,F)$ сосредоточен в степенях $\geqslant 2d$, образ hz этого элемента в гомологиях ненулевой. Из максимальности $\deg q$ следует, что можно считать $z\in\phi'$ для соответствующего элемента $\tilde{f}\otimes r$ в ϕ (более того, из теоремы 2.17 и леммы 2.14 можно вывести, что $\tilde{f}\otimes r$ — элемент множества ϕ минимальной возможной степени). Однако A-подмодуль M в $H_1(f,F)/A_+H_1(f,F)$, порожденный элементом hz, не свободен, что противоречит условию 7). Действительно, если $\deg q\leqslant d/2$, то $p=qb$ и $r=bq$ для некоторого b, поэтому $zbq+qbz=\mathrm{d}(\tilde{f}b\tilde{f})$, и $zbq=0$ в M. Иначе $p=ma$ и $r=am$ для некоторых a, m при $\deg m>0$, поэтому $z(am)^2+(ma)^2z-mazma=-\mathrm{d}(\tilde{f}a\tilde{f})$, следовательно, $z(am)^2=0$ в M.

Классификация горенштейновых алгебр глобальной размерности 3 остается открытым вопросом (определение некоммутативных горенштейновых алгебр см. в разделе 2.6). Тем не менее существует знаменитая классификация регулярных по Артину—Шелтеру алгебр (т. е. горенштейновых алгебр конечной глобальной размерности и полиномиального роста) глобальной размерности 3 [35–37, 67]. Такие алгебры всегда нетеровы и имеют не более трех порождающих и не более трех соотношений. Нетеровы связные алгебры глобальной размерности 3 изучались в [68]. Например, если все соотношения такой алгебры A имеют одну и ту же степень или A порождается двумя элементами, то A регулярна по Артину—Шелтеру.

2.11. Комплекс Шафаревича для дифференциально градуированных алгебр. Некоммутативная резольвента Тэйта. Этот раздел основан на статье [13].

Пусть A — дифференциально градуированная алгебра. Мы подразумеваем при этом, что A биградуированная (тогда первая градуировка $\deg(\cdot)$ называется *степенью*, а вторая градуировка

$h(\cdot)$ — *гомологической степенью*), а дифференциал d, такой что $\mathrm{d}^2 = 0$ (степени 0 относительно $\deg(\cdot)$ и нечетной степени относительно $h(\cdot)$), удовлетворяет правилу Лейбница

$$\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)b + (-1)^{h(a)} a\,\mathrm{d}\,b$$

для биоднородных a, b. Если $\alpha \subset A$ — множество биоднородных циклов, то комплекс Шафаревича $\mathrm{Sh}(\alpha, A)$ можно определить практически так же, как это было сделано для градуированных алгебр в разделе 2.2. Единственное различие состоит в том, что гомологические степени присоединенных переменных определяются как $h(\tilde{\alpha}_i) := h(\alpha_i) + 1$. Обычный комплекс Шафаревича является частным случаем этой общей конструкции для алгебр с нулевым дифференциалом и тривиальной гомологической градуировкой.

Предложение 2.45. *Пусть α — биоднородное множество циклов в дифференциально градуированной алгебре A.*

1. *Дифференциально градуированная алгебра $\mathrm{Sh}(\alpha, A)$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется множеством гомологических классов $H(\alpha)$.*
2. *Если $\alpha \subset \operatorname{im}\mathrm{d}$, то $H_*(\alpha, A) \simeq H(A)\langle\tilde{\alpha}\rangle$.*

С помощью такого комплекса можно построить некоммутативный аналог резольвенты Тэйта. Конструкция стартует со связной градуированной алгебры R (не дифференциально градуированной алгебры!), минимально порожденной однородным множеством x. На первом шаге рассмотрим дифференциально градуированную алгебру $R_1 = \mathrm{Sh}(x, R)$. Если S_1 — множество циклов минимальной возможной степени, то «убьем» все эти циклы с помощью новых порождающих, взяв $R_2 = \mathrm{Sh}(S_1, R_1)$. Продолжая тот же процесс, получим после (бес)конечного количества шагов дифференциально градуированную алгебру R_∞, которая будет свободной резольвентой тривиального R-(би)модуля k.

Закончится ли этот процесс после конечного ряда шагов? В коммутативном случае аналогичный процесс для резольвенты Тэйта заканчивается после конечного числа шагов тогда и только тогда, когда R является полным пересечением [48, 69].

Импликация «только тогда» в некоммутативном случае остается пока открытым вопросом. Прямую импликацию доказывает следующая теорема.

Теорема 2.46. *Пусть R — связная градуированная алгебра, порожденная однородным множеством x. Пусть S — множество циклов в $\mathrm{Sh}(x, R)$, гомологические классы которых составляют базис векторного пространства $H_1(x, R)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *R — некоммутативное полное пересечение, т. е.* $\mathrm{gl.dim}\, R = 2$;
2) $H_*(z, \mathrm{Sh}(x, R)) = k$.

Что касается упомянутой импликации «только тогда», то здесь понятно только, что последним шагом (если он совершится) должно быть «убивание» множества циклов, сильно свободного в алгебре гомологий. В следующей теореме оба отображения индуцированы включением $A \to \mathrm{Sh}(\alpha, A)$.

Теорема 2.47. *Пусть A — дифференциально градуированная алгебра, пусть $\alpha \subset A$ — множество однородных циклов положительных степеней, и пусть $J \lhd H(A)$ — идеал, порожденный $H(\alpha)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *подмножество $H(\alpha) \in H(A)$ сильно свободно*;
2) *отображение $H(A)/J \to H_*(\alpha, A)$ биективно*;
3) *отображение $H(A) \to H_*(\alpha, A)$ сюръективно.*

Ввиду теоремы 2.44 имеет место следующий критерий для алгебр глобальной размерности 3, аналогичный критерию некоммутативных полных пересечений из теоремы 2.46.

Теорема 2.48. *Пусть R — градуированная фактор-алгебра свободной алгебры F по идеалу, минимально порожденному однородным подмножеством $f \subset F_+^2$. Пусть ϕ — любое множество циклов в $\mathrm{Sh}(f, F)$, гомологические классы которых минимально порождают R-бимодуль $H_1(f, F)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathrm{gl.dim}\, R = 3$;
2) $H_*(\phi, \mathrm{Sh}(f, F)) = R$.

2.12. Минимальные модели. Пусть A — дифференциально градуированная алгебра. Свободная дифференциально градуированная алгебра $M = (k\langle X\rangle, d)$ вместе с квазиизоморфизмом $\phi\colon M \to A$ называется *свободной моделью* алгебры A. Такая модель называется *минимальной*, если $dM \subset XM$. Минимальная модель всегда существует, и она единственна с точностью до изоморфизма [40].

В случае, когда A связна (и, для простоты, локально конечна), ее минимальную свободную модель можно построить следующим способом. Пусть дифференциально градуированный A-модуль $P = P_A$ — свободное накрытие тривиального модуля k_A, т. е. $P = Y \otimes A$ — свободный модуль над алгеброй A с дифференциалом d_P, задающим структуру дифференциально градуированного модуля и квазиизоморфизмом дифференциально градуированных модулей $\chi\colon P_A \to k_A$. Тогда дифференцирование d_P можно продолжить до дифференцирования d свободной алгебры $M = T(H_*(P_A \underset{A}{\otimes} k))$, а отображение χ — до сюръективного квазиизоморфизма $\phi\colon M \to A$, такого что (M, ϕ) — минимальная модель алгебры A [50]. В частности, эта конструкция не зависит от выбора P. Для алгебр с тривиальным дифференциалом мы получаем следующее утверждение.

Предложение 2.49. *Пусть A — связная градуированная алгебра* (*без дифференциала*). *Тогда ее минимальная свободная модель изоморфна* (*как алгебра*) *тензорной алгебре* $T\Big(\bigoplus\limits_{i\geqslant 0} \operatorname{Tor}_i^A(k,k)\Big)$.

Мы фактически уже доказали это утверждение для алгебр глобальных размерностей 2 и 3 в теоремах 2.19 и 2.48.

Другой способ построить минимальную модель для алгебры без дифференциала — это итерированная конструкция комплекса Шафаревича. Действительно, пусть $A = T(X)/\operatorname{id}(f)$ — фактор-алгебра локально конечной свободной алгебры по однородному идеалу. На первом шаге конструкции рассмотрим $M_1 = \operatorname{Sh}(f, T(X))$. Если эта алгебра ациклична в положительной гомологической степени, она и будет минимальной моделью; этот случай описан в теоремах 2.19 и 2.47. В противном случае пусть z — невырожденный цикл наименьшей положительной гомологической степени в M_i, $i \geqslant 1$. Положим тогда $M_{i+1} = \operatorname{Sh}(z, M_i)$. Тогда предел M_∞ и будет минимальной моделью алгебры A.

Такая итерационная конструкция носит название *убивание циклов* [69]. Она работает также, например, для коммутативных минимальных моделей с дифференцированием положительной степени (см. [9]) и для супералгебр Ли с отрицательным дифференциалом (см. [45]). Изучение таких конструкций называется *autopsie d'un meurtre* (*анатомией убийства*) [49, 56].

Чтобы построить минимальную модель для дифференциально градуированной алгебры с нетривиальным дифференциалом, убивания циклов недостаточно: требуется еще «порождение границ». В случаях коммутативных и лиевых алгебр этот процесс описан в [9, 45]. Ассоциативные минимальные модели могут быть построены и в более общей ситуации, например для алгебр над локальными кольцами [50] и для градуированных [54] и полных аугментированных [58] A_∞ алгебр над полями.

3. Комплекс Шафаревича в многообразиях алгебр

В этом разделе мы всегда (кроме части раздела 3.7) предполагаем, что основное поле k имеет нулевую характеристику. Основной объект изучения здесь — многообразия алгебр (вообще говоря, неассоциативных). Следующие обозначения будут использоваться для наиболее употребительных многообразий:

$\mathcal{C}om$ — коммутативные алгебры,
$\mathcal{A}ss$ — ассоциативные алгебры,
$\mathcal{L}ie$ — алгебры Ли,
$\mathcal{A}ll$ — все алгебры.

Когда вычисляют что-либо в классическом комплексе Козюля, то работают тем самым в классе косокоммутативных алгебр, т. е. коммутативных супералгебр. Если мы собираемся построить

аналогичный комплекс для произвольного многообразия алгебр, сначала следовало бы обсудить понятие PI-супералгебры. Этим мы займемся в разделе 3.1.

Затем мы определяем комплекс Шафаревича для PI-алгебр и задаемся следующим вопросом. Такой комплекс для $\mathcal{C}om$ (т. е. комплекс Козюля) конечен, в то время как комплекс для $\mathcal{A}ss$ (т. е. комплекс Шафаревича, который обсуждался в предыдущем разделе) бесконечен. Где же граница между этими случаями?

Затем мы доказываем критерий полных пересечений для любого многообразия и приводим его приложения к рядам Гильберта. Тем не менее для произвольных многообразий ассоциативных PI-алгебр эти приложения не столь обширны, как для многообразия $\mathcal{A}ss$, из-за, в частности, принципиального отсутствия адекватной версии формулы Кюннета и даже формулы для рядов Гильберта свободных произведений.

На случай алгебр Ли, напротив, описанная выше теория некоммутативных полных пересечений переносится почти целиком. Получившаяся теория имеет ряд приложении к топологии и теории групп [33, 49].

3.1. Многообразия PI-алгебр и супералгебр. В этом разделе определяются многообразия супералгебр. В изложении мы следуем [21].

С каждым многообразием W связана категория связно градуированных (т. е. конечно градуированных в положительных степенях) алгебр из W[1]. В такой категории есть свободные алгебры, свободные произведения (копроизведения) и т. п.

Обозначим через $F^W(X)$ свободную алгебру многообразия W с множеством порождающих X.

С каждым многообразием W связано многообразие супералгебр, которые называются *W-супералгебрами*. В отличие от [19], мы предполагаем, что пересечение четной и нечетной части в супералгебрах тривиально.

Определение 3.1 ([19])**.** Пусть $A = A_0 \oplus A_1$, где $A_iA_j \in A_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$, — супералгебра, W — многообразие. Алгебра A называется W-супералгеброй, если ее грассманова оболочка

$$G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$$

принадлежит W, где G_0 и G_1 — четная и нечетная части счетно порожденной алгебры Грассмана G.

Нам потребуются явные конструкции свободных супералгебр многообразий, которые обобщают ассоциативные конструкции А. А. Бояркина и А. Р. Кемера.

Пусть $X = Y \sqcup Z$, где Y и Z — счетные множества, элементы которых мы будем называть соответственно четными и нечетными переменными. Рассмотрим I_W — T-идеал в $F^{\mathcal{A}ll}(X)$, соответствующий некоторому многообразию W.

Если

$$f(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{u=(u_1,\dots,u_{n+1}),\\ u_j \text{ не зависят от } z_1,\dots,z_n}} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_i \alpha^i_{\sigma,u} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 \dots z_{\sigma(n)} u_{n+1} - \tag{3.1}$$

полилинейный неассоциативный многочлен из I_W (здесь $y_1, \dots, y_m \in Y$, $z_1, \dots, z_n \in Z$ и слагаемые в последней сумме могут различаться коэффициентами и расстановкой скобок), то через

$$f^*(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n)$$

обозначим (ср. [18]) полилинейный многочлен

$$f^* = \sum_u \sum_{\sigma\in S_n} \sum_i (-1)^\sigma \alpha^i_{\sigma,u} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 \dots z_{\sigma(n)} u_{n+1}, \tag{3.2}$$

где расстановка скобок в слагаемых внутренней суммы та же, что и в соответствующих слагаемых в (3.1)[2].

[1] С некоторыми многообразиями, такими как $\mathcal{C}om$ и $\mathcal{A}ss$, можно связать и категорию связно градуированных унитарных алгебр. При этом все наши результаты, по существу, не изменятся, лишь к алгебрам добавятся единицы, а к их рядам Гильберта — единичные свободные члены.

[2] Другое определение неассоциативного многочлена f^* дано А. А. Бояркиным (см. [4, определение 3.2.1] или [21]).

Если $\mathcal{P}$ — множество полилинейных неассоциативных многочленов от элементов X, то пусть $I_{W^-} := I_W^*$ — идеал в $F^{\mathcal{A}ll}(X)$, порожденный элементами из $(I_W \cap \mathcal{P})^*$, в которые в качестве аргументов подставлены всевозможные элементы соответствующих четностей. Тогда счетно порожденная *свободная W-супералгебра* определяется как

$$F^{W^-}(X) = F^{\mathcal{A}ll}(X)/I_{W^-}$$

(А. А. Бояркин [4] назвал такие алгебры *кососвободными*; видимо, более естественно выражение *относительно свободные супералгебры*). Соответствие такого описания определению 3.1 следует из результатов А. Р. Кемера [18, § 2], его рассуждения легко переносятся на неассоциативный случай.

Множество всех гомоморфных образов (при гомоморфизмах, сохраняющих $\mathbb{Z}_2$-градуировку) такой алгебры мы будем называть многообразием W-супералгебр и обозначать через W^-. Если мы присвоим каждому элементу множества X натуральную степень, то алгебра $F^{W^-}(X)$ станет $\mathbb{Z}$-градуированной, ее гомоморфные образы при $\mathbb{Z}$-градуированных (и по четным, и по нечетным переменным) гомоморфизмах нулевой степени назовем градуированными W-супералгебрами. Если на некоторой алгебре A имеется такая градуировка, что четные (нечетные) переменные имеют четные (нечетные) степени, то будем называть такую градуировку W^--градуировкой, или просто *суперградуировкой*.

Заметим, что $\mathcal{A}ll^- = \mathcal{A}ll$, $\mathcal{A}ss^- = \mathcal{A}ss$ и всегда существует естественное вложение $W \subset W^-$, ставящее в соответствие каждой W-алгебре алгебру с тривиальной нечетной частью.

Для двух W-супералгебр A и B естественным образом определяется свободное произведение $A \overset{W^-}{*} B$ в W^-. А именно, пусть $A = F_1/I_1$ и $B = F_2/I_2$, где F_1, F_2 — копии относительно свободной супералгебры $F^{W^-}(X)$ с порождающими $X_1 = Y_1 \sqcup Z_1$ и $X_2 = Y_2 \sqcup Z_2$ соответственно. Положим тогда $Y = Y_1 \sqcup Y_2$, $Z = Z_1 \sqcup Z_2$, $X = Y \sqcup Z$ и

$$A \overset{W^-}{*} B = F^{W^-}(X)/J,$$

где J — идеал в $F^{W^-}(X)$, порожденный множеством $I_1 \cup I_2$. Отметим, что если $A, B \in W$, то это свободное произведение совпадает с обычным свободным произведением в многообразии W.

3.2. Комплекс Шафаревича в многообразиях супералгебр. Пусть W — многообразие, а A — градуированная W-супералгебра. Пусть $\rho = \{\rho_i\}_{i\in I}$ — набор однородных элементов из A с вектором степеней $d = \{d_i\}_{i\in I}$, $d_i \geqslant 0$. Рассмотрим биградуированную W-супералгебру

$$K^W(A, \rho) = A \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\tilde{\rho}),$$

где $\deg \tilde{\rho}_i = d_i + 1$. Вторая $\mathbb{Z}$-градуировка на этой алгебре задается условиями

$$|a| = 0, \quad a \in A,$$
$$|\tilde{\rho}_i| = 1.$$

В этом случае тотальная градуировка на $K^W(A, \rho)$ связна, если только A связна.

Пусть на A задано однородное дифференцирование ∂_A степени -1, действующее по формуле Лейбница

$$\partial_A(uv) = \partial_A u \cdot v + (-1)^{\deg u} u \cdot \partial_A v,$$

где $u, v \in A$ — однородные элементы.

Предложение 3.2 ([21]). *Существует однородное дифференцирование ∂ на $K^W(A, \rho)$, имеющее степень -1 по обеим градуировкам, совпадающее с ∂_A на A и такое, что $\partial\tilde{\rho}_i = \rho_i$.*

Таким образом, алгебра $K^W(A, \rho)$ становится дифференциально градуированной, и мы будем называть ее *комплексом Шафаревича*. Мы в основном будем использовать ее в случае, когда A — обычная градуированная алгебра, т. е. $\partial_A = 0$. Мы будем обозначать ее группы гомологий (относительно гомологической градуировки) через $H^W_{\cdot}(A, \rho)$.

Алгебра $K^{\mathcal{C}om}(A, \rho)$ для $A \in \mathcal{C}om$ — это обычный комплекс Козюля, а для $A \in \mathcal{C}om^-$ — комплекс Козюля для косокоммутативных алгебр. Алгебра $K^{\mathcal{A}ss}(A, \rho)$ — это комплекс Шафаревича

$\mathrm{Sh}(A,\rho)$. Для $W \subset \mathcal{A}ss$ алгебра $K^W(F^W(X),\rho)$ рассматривалась А. А. Бояркиным под названием *обобщенный комплекс Козюля* [3,4,6].

Приведем теперь условия конечности комплекса Шафаревича. Говорят, что в многообразии W выполняется *система тождеств Капелли* некоторого порядка n, если для всякого полилинейного неассоциативного многочлена $f = f(x_1,\dots,x_n;y_1,y_2,\dots)$, кососимметрического по переменным $x_1,\dots,x_n$, в W выполняется тождество $f \equiv 0$.

Предложение 3.3 ([21]). *Следующие условия на многообразие W эквивалентны*:

1) *в W выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка $n+1$;*
2) *для любой градуированной алгебры A из W и любого конечного множества однородных элементов $\rho \subset A$ комплекс Шафаревича $K^W(A,\rho)$ конечен*;
3) *для любой градуированной супералгебры A из W^- и любого конечного множества четных однородных элементов $\rho \subset A$ комплекс Шафаревича $K^W(A,\rho)$ конечен.*

В этом случае длина комплекса $K^W(A,\rho)$ не превосходит $n \cdot \operatorname{Card}\rho$.

Если $W \subset \mathcal{A}ss$ — многообразие ассоциативных алгебр, то условия 1), 2), 3) *эквивалентны следующим условиям*:

4) *в W выполняется стандартное тождество некоторого порядка*;
5) *для некоторой градуированной алгебры A из W найдется такое множество однородных элементов $\rho \subset A$, что комплекс Шафаревича $K^W(A,\rho)$ конечен*;
6) *для некоторой градуированной супералгебры A из W^- найдется такое множество четных однородных элементов $\rho \subset A$, что комплекс Шафаревича $K^W(A,\rho)$ конечен*;
7) *«внешняя» алгебра ранга* 1 (*т. е. свободная W-супералгебра, порожденная единственной нечетной переменной*) *конечномерна.*

3.3. Критерий полных пересечений для многообразий. Пусть $A \in W^-$ — связная градуированная супералгебра, $\rho = \{\rho_1,\rho_2,\dots\} \subset A$ — множество однородных элементов с вектором степеней $d = \{d_1,d_2,\dots\}$, $d_i \geqslant 1$, порождающее минимальным образом двусторонний идеал $J \lhd A$. Рассмотрим биградуированную алгебру $\mathbf{gr}\,A$:

$$\mathbf{gr}\,A_{p,q} = (J^p/J^{p+1})_{p+q}, \quad p \geqslant 0,$$

где $J^0 = A$, J^p порожден всевозможными произведениями p элементов J при $p > 0$. Пусть $Q = J/(A_+J + JA_+)$ — векторное пространство, порожденное ρ, и $\pi\colon J/J^2 \to Q$ — каноническая проекция. Если $\lambda\colon Q \to J/J^2$ — какой-нибудь гомоморфизм градуированных векторных пространств, обратный справа к π, то индуцированное им отображение

$$\chi\colon A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho) \to A$$

является сюръекцией биградуированных алгебр.

Если A является конечно градуированной, то, поскольку $\mathbf{gr}\,A$ с тотальной градуировкой изоморфна A как градуированное векторное пространство, для рядов Гильберта справедливо покоэффициентное неравенство

$$\Big(A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho)\Big)(t) \geqslant A(t). \tag{3.3}$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда χ — изоморфизм.

Теорема 3.4 ([21]). *Пусть W — произвольное многообразие и $A \in W^-$ — связная конечно градуированная супералгебра. Тогда следующие условия на множество ρ эквивалентны*:

1) $H_1^W(\mathbf{gr}\,A,\rho) = 0$;
2) $H_0^W(\mathbf{gr}\,A,\rho) = A/J$ *и* $H_i^W(\mathbf{gr}\,A,\rho) = 0$ *при* $i > 0$;
3) *отображение χ является изоморфизмом, т. е. неравенство* (3.3) *обращается в равенство*:

$$\Big(A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho)\Big)(t) = A(t).$$

Мы будем называть множества ρ, для которых выполняются условия этой теоремы, W-регулярными. Частными их случаями являются сильно свободные множества (они $\mathcal{A}ss$-регулярны) и регулярные последовательности (они $\mathcal{C}om$-регулярны).

Например, если конечная последовательность $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ W-регулярна в конечно порожденной алгебре A, то и общая последовательность элементов тех же степеней и четностей W-регулярна.

Простейший пример W-регулярного множества — это произвольное подмножество минимального множества порождающих относительно свободной W-супералгебры. Мы воспользуемся этим фактом для вычисления рядов Гильберта четной и нечетной частей относительно свободных W-супералгебр.

Обозначим через $F^W_{m,n}$ свободную W-супералгебру с m четными и n нечетными порождающими. Например, $F^W_{m,0} = F^W_m$ — это свободная алгебра многообразия W.

Всякая алгебра $F = F^W_{m,n}$ разлагается в прямую сумму градуированных подпространств четных и нечетных элементов: $F = F^0 \oplus F^1$. При этом четная часть F^0 является градуированной подалгеброй F и принадлежит W, а нечетная часть F^1 представляет собой градуированный модуль над четной.

Присвоив порождающим степень 1, можно задать стандартную градуировку на F и рассматривать ее ряд Гильберта, а также ряды Гильберта ее градуированных подпространств.

Теорема 3.5. *При $m \geqslant n$ ряды Гильберта градуированных пространств F^0 и F^1 связаны соотношением*

$$F^0(t) - F^1(t) = F_{m-n,0}(t)$$

(*здесь* $F_{0,0}(t) = 0$).

Идея доказательства. Пусть $X = Y \sqcup Z$ — множество порождающих алгебры F, где $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество нечетных переменных, а $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — четных. Пусть $m > n$ (при $m = n$ доказательство аналогично).

Положим $A = F^W(Y) = F_m$ и рассмотрим двусторонний идеал $J \lhd A$, порожденный множеством элементов $\rho = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Поскольку $A/J \simeq F^W(\{y_{n+1}, \ldots, y_m\}) \simeq F_{m-n}$, то $A \simeq \mathbf{gr}\, A$ и $K^W(\mathbf{gr}\, A, \rho) \simeq K^W(A, \rho) \simeq F_{m,n} = F$. Согласно теореме 3.4 такой комплекс является резольвентой алгебры $A/J \simeq F_{m-n}$:

$$0 \longleftarrow F_{m-n} \longleftarrow F_{(0)} \longleftarrow F_{(1)} \longleftarrow \ldots$$

(нижний индекс в скобках обозначает компоненту в гомологической градуировке). Рассмотрим k-ю компоненту в стандартной градуировке:

$$0 \longleftarrow F^{(k)}_{m-n} \longleftarrow F^{(k)}_{(0)} \longleftarrow F^{(k)}_{(1)} \longleftarrow \ldots.$$

По формуле Эйлера получаем $\dim F^{(k)}_{m-n} = \dim F^{0,(k)} - \dim F^{0,(k)}$, откуда немедленно следует требуемое равенство для рядов Гильберта. □

Следствие 3.6. *При $m \geqslant n$ ряды Гильберта четной и нечетной частей алгебры $F = F^W_{m,n}$ вычисляются через ряды Гильберта относительно свободных W-супералгебр по формулам*

$$F^0(t) = \frac{F(t) + F_{m-n,0}(t)}{2}, \quad F^1(t) = \frac{F(t) - F_{m-n,0}(t)}{2}.$$

Если $W \subset \mathcal{A}ss$, то ряды Гильберта всех относительно свободных супералгебр из W рациональны (А. Я. Белов, [1] и устное сообщение). Как следствие получаем, что и ряды Гильберта их четных и нечетных частей также рациональны.

Другой вариант приведенных формул для рядов Гильберта касается так называемых *специальных йордановых супералгебр*. Специальной йордановой алгеброй называется подалгебра ассоциативной алгебры относительно йорданова умножения $a \circ b := (ab + ba)/2$. В ассоциативной супералгебре имеется также структура специальной йордановой супералгебры, заданной умножением $a \circ b := (ab + (-1)^{|a|\,|b|}ba)/2$, где $|a|$, $|b|$ — четности однородных элементов a, b. Свободная специальная йорданова супералгебра $\mathrm{SJ}_{m,n}$ — это йорданова подсупералгебра в $F^{\mathcal{A}ss}_{m,n} = F^{\mathcal{A}ss}(X)$,

порожденная тем же множеством X. Класс специальных йордановых алгебр не образует многообразия, но является квазимногообразием [19].

Как показано в [21], теорема 3.5 и следствие 3.6 верны и для алгебр $\mathrm{SJ}_{m,n}$ благодаря конструкции комплекса Шафаревича для свободной специальной йордановой супералгебры. Он является дифференциально градуированной йордановой подсупералгеброй в $\mathrm{Sh}(X, F_{m,n}^{\mathcal{A}ss})$. Можно надеяться, что эта конструкция поможет в описании линейных базисов и рядов Гильберта свободных специальных йордановых супералгебр.

3.4. Ряды Гильберта свободных произведений в многообразиях ассоциативных алгебр. В этом разделе рассматриваются только многообразия ассоциативных алгебр. Как и выше, мы рассматриваем алгебры без единицы.

Как можно заметить по предыдущему разделу, теория регулярных множеств и полных пересечений в произвольных многообразиях далеко не настолько развита, как в многообразии всех ассоциативных алгебр. В частности, характеризация регулярных множеств в алгебре $A \in W$ (теорема 3.4) через ряды Гильберта формулируется не только в терминах ряда Гильберта фактор-алгебры $R = A/\operatorname{id}(f)$ (подобно теореме 2.5), но включает также ряд Гильберта ее свободного произведения со свободной алгеброй. В случае $W = \mathcal{A}ss$ мы можем просто применить к неравенству (3.3) формулу для рядов Гильберта свободных произведений и получить критерий из теоремы 2.5. Чтобы проделать то же самое для произвольного многообразия W, осталось лишь отыскать соответствующую формулу для ряда Гильберта $\left(A \overset{W}{*} B\right)(t) = f_W(A(t), B(t))$, где $A, B \in W$. Но существует ли такая функция f_W?

По крайней мере для трех классических многообразий W ассоциативных алгебр такая функция f_W существует и имеет очень простой вид. Вот эти три многообразия: $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{C}om$ и многообразие $\mathcal{V}ect$ векторных пространств, т. е. алгебр с нулевым умножением. Точнее, если $a(t) = A(t) + 1$, $b(t) = B(t) + 1$ и $c(t) = \left(A \overset{W}{*} B\right)(t) + 1$, то

$$A \overset{\mathcal{V}ect}{*} B = A \oplus B, \quad c(t) = a(t) + b(t) - 1,$$
$$A \overset{\mathcal{C}om}{*} B = A \otimes B, \quad c(t) = a(t)b(t),$$
$$A \overset{\mathcal{A}ss}{*} B = A * B, \quad \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{a(t)} + \frac{1}{b(t)} - 1.$$

В любом многообразии W ряд Гильберта любой относительно свободной алгебры F_W является рациональной функцией [1]. Поскольку n-порожденная относительно свободная алгебра является свободным произведением n 1-порожденных, такая функция $f_W(A(t), B(t))$ (если она существует) должна быть рациональной.

К сожалению, ситуация оказывается настолько плохой, насколько это возможно, т. е. все многообразия, в которых такая функция $f_W(A(t), B(t))$ существует — это три вышеперечисленных. Для градуированной алгебры $A \in W$ пусть A_C обозначает ее «W-полиномиальное кольцо», т. е.

$$A_C = A \overset{W}{*} k\langle x \mid \deg x = 1\rangle.$$

Теорема 3.7 ([22]). *Пусть W — многообразие ассоциативных алгебр, не совпадающее с $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{C}om$ и $\mathcal{V}ect$. Тогда существуют две такие связные градуированные алгебры $A, B \in W$, что $A(z) = B(z)$, но $A_C(z) \neq B_C(z)$.*

Соответствующая система примеров построена в [22].

Тем не менее для многообразий неассоциативных алгебр ситуация несколько лучше. Например, для многообразия (супер)алгебр Ли функция $f_{\mathcal{L}ie}(A(t), B(t))$ хорошо известна: формула для ее вычисления непосредственно следует из теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта и соответствующей формулы для ассоциативных алгебр (см., например, [28]).

3.5. Деформации и расширения. В этом разделе дано краткое описание результатов А. А. Бояркина, связывающих гомологии комплекса Шафаревича для PI-алгебр и их деформации. За по-

дробностями, включающими вычисление вторых когомологий Хохшильда и Харрисона, мы отсылаем читателя к оригинальным работам [3–7].

Зафиксируем многообразие W. Под *расширениями* и *деформациями* PI-алгебр из W мы будем понимать их расширения и деформации Герстенхабера, которые также принадлежат W.

С любой PI-алгеброй A из W можно связать категорию PI-A-бимодулей из W, т. е. A-бимодулей, удовлетворяющих всем полилинейным тождествам из W (назовем их W-*бимодулями*). Поскольку мы рассматриваем только PI-алгебры (не супералгебры!), мы можем считать, что все градуировки тривиальны, т. е. что любая алгебра и любой бимодуль сосредоточены в нулевой степени. Для простоты будем считать, что все алгебры ассоциативны и что все алгебры и бимодули являются конечно порожденными.

Пусть $F = F^W(X)$, и пусть $A = F/I$ — минимальное представление, где идеал I минимально порожден множеством $f = \{f_1, \dots, f_m\}$.

Пусть M — W-бимодуль над A. Обозначив $K = K^W(F, f)$, получаем, что каждый элемент из $z \in K_1$ можно рассматривать как отображение $z\colon M^m \to M$, для которого $z(\tilde{f}_i)(a_1, \dots, a_m) = a_i$.

Напомним, что кольцо E называется сингулярным расширением кольца A (вдоль Q), если существует точная последовательность $0 \to Q \to E \to A \to 0$ с тривиальным умножением в Q. В таком случае Q наделяется структурой A-модуля.

Следующая теорема [6] описывает те тривиальные расширения, которые лежат в W.

Теорема 3.8. *Пусть A, F, M те же, что и выше.*

1. *Пусть $B \in W$ — сингулярное расширение A вдоль M. Тогда существуют единственные $g_1, \dots, g_m \in F$, такие что $B = (F \oplus M)/J$, где $F \oplus M$ — тривиальное расширение, а идеал J порождается элементами (f_i, g_i).*
2. *Пусть $J \subset F \oplus M$ — идеал, порожденный элементами (f_i, g_i) для некоторых $g_1, \dots, g_m \in F$. Алгебра $B = (F \oplus M)/J$ является сингулярным расширением алгебры A вдоль M тогда и только тогда, когда для любого $z \in K_1$, такого что $z(f_1, \dots, f_m) = 0$, имеем $z(g_1, \dots, g_m) = 0$.*

С описанием сингулярных расширений в терминах обобщенных когомологий Шафаревича можно ознакомиться по [3].

Деформация Герстенхабера D алгебры A тривиальна тогда и только тогда, когда расширение $D \to A$ расщепляется [3]. Любая деформация D представима как $F[[t]]/J$, где J — двусторонний идеал в алгебре формальных степенных рядов $F[[t]]$, порожденный элементами вида $f_j + tg_{1j} + t^2 g_{2j} + \dots$, где $g_{ij} \in F$ [6]. В случае ацикличности (в первой степени) комплекса Шафаревича, частичное обратное утверждение дает следующая теорема.

Теорема 3.9 ([6])**.** *Предположим, что $H_1^W(F, f) = 0$.*

1. *Пусть $g = \{g_1, \dots, g_m\} \subset F$, и пусть J — полный двусторонний идеал в $F[[t]]$, порожденный элементами $f_i + tg_i$. Тогда алгебра $B = F[[t]]/J$ является деформацией Герстенхабера алгебры A.*
2. *Любое сингулярное расширение E алгебры A вдоль себя расширяется до деформации Герстенхабера алгебры A, лежащей в W.*

3.6. Комплекс Шафаревича для алгебр Ли. В этом разделе описывается теория комплексов Шафаревича для (дифференциально) градуированных супералгебр Ли. Почти все общие результаты о стандартном комплексе Шафаревича переносятся на этот случай с помощью функтора U взятия универсальной обертывающей, как было анонсировано в [25].

Снова предполагается, что основное поле k имеет нулевую характеристику. Мы будем рассматривать дифференциально градуированные супералгебры Ли, т. е. супералгебры Ли с $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой, где $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка означает четность (она обозначается $|\cdot|$; дифференциал меняет четность), первая $\mathbb{N}$-градуировка гомологическая (дифференциал уменьшает ее на единицу), а последняя $\mathbb{N}$-градуировка такова, что дифференцирование ее сохраняет. Некоторые (или все) из этих градуировок могут быть тривиальными, и, вообще говоря, четность может не быть индуцированной гомологической градуировкой.

В этом разделе мы будем обозначать комплекс Шафаревича $K^{\mathcal{L}ie}(L,\rho)$ просто через $\mathrm{Sh}(L,\rho)$. Если x — однородный элемент в дифференциально градуированном векторном пространстве (алгебре, модуле), то через $\tilde{x}$ мы будем обозначать свободную переменную той же основной степени, что и x, у которой четность противоположна четности x, а гомологическая степень увеличена на единицу. Для множества $X=\{x_i\}$ таких элементов положим $\tilde{X}=\{\tilde{x}_i\}$. Через $\mathbf{L}(X)$ будем обозначать свободную супералгебру Ли, порожденную множеством X, и для лиевой дифференциально градуированной алгебры A мы обозначаем через $A\langle X\rangle$ свободное произведение $A \overset{\mathcal{L}ie^-}{*} \mathbf{L}(X)$. Например, алгебраическая структура на комплексе Шафаревича задается по формуле $\mathrm{Sh}(L,\rho)=L\langle\tilde{\rho}\rangle$.

По классическим результатам Квиллена [62], функтор взятия универсальной обертывающей коммутирует с функтором гомологий и с копроизведением. Применяя это к комплексу Шафаревича, имеем следующее основное утверждение.

Лемма 3.10. *Пусть L — дифференциально градуированная алгебра Ли, и пусть z — множество однородных циклов в ней. Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

$$U\,\mathrm{Sh}(L,z)=\mathrm{Sh}(UL,z)$$

и

$$UH(L,z)=H(UL,z).$$

В частности, градуированные векторные пространства, минимальным образом порождающие алгебры $H_L=H(L,z)$ и $H_{UL}=H(UL,z)$, естественным образом изоморфны, и эти алгебры свободны одновременно.

Лемма 3.10 позволяет переносить «ассоциативные» свойства комплекса Шафаревича на наш случай алгебр Ли. Например, из предложения 2.1 получается следующее утверждение.

Предложение 3.11. *Пусть $\beta=\alpha\sqcup\{x\}$ — однородное подмножество градуированной супералгебры Ли L, где элемент x лежит в идеале I, порожденном множеством α. Тогда*

$$H_*(\beta,L)\simeq H_*(\alpha,L)\langle\tilde{x}\rangle,$$

где $\deg\tilde{x}=0$, $h(\tilde{x})=1$.

Доказательство. По предложению 2.1 и лемме 3.10 имеем изоморфизм

$$UH_*(\beta,L)\simeq UH_*(\alpha,L)\langle\tilde{x}\rangle.$$

Он является изоморфизмом алгебр Хопфа, поэтому искомое отображение будет ограничением изоморфизмом на множество примитивных элементов. □

Следующее утверждение получается из соответствующего утверждения об ассоциативных алгебрах [13].

Предложение 3.12. *Пусть $f\colon A\to B$ — морфизм дифференциально градуированной алгебры Ли, и пусть $z\subset ZA$ — однородное множество циклов. Если f — квазиизоморфизм, то индуцированное им отображение*

$$\mathrm{Sh}\,f\colon\ \mathrm{Sh}(z,A)\to\mathrm{Sh}(f(z),B)$$

также является изоморфизмом.

Ассоциативная версия следующего утверждения также содержится в [13].

Предложение 3.13. *Пусть снова $f\colon A\to B$ — морфизм дифференциально градуированной алгебры Ли, а $z\subset ZB$ — однородное множество циклов. Предположим, что f индуцирует изоморфизм*

$$HA\simeq H(z,B).$$

Тогда продолжение морфизма Hf

$$\phi\colon HA\langle x\rangle\to HB$$

также является изоморфизмом.

Доказательство. Первое утверждение означает, что Uf индуцирует изоморфизм

$$HUA \simeq H(z, UB).$$

Поэтому ассоциативная версия предложения 3.13 дает изоморфизм

$$U\phi\colon UHA\langle x\rangle \to UHB.$$

Осталось применить функтор $\mathcal{P}$, т. е. рассмотреть ограничение отображения ϕ на множество примитивных элементов. □

Дадим теперь описание алгебры гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры Ли.

Предложение 3.14.

1. *Пусть α — однородное подмножество в свободной алгебре Ли $A = \mathbf{L}(x)$, пусть $I = \mathrm{id}(\alpha)$, и пусть $L = A/I$ — фактор-алгебра. Тогда алгебра $H(\alpha, A)$ порождается подалгеброй $L = H_0(\alpha, A)$ и L-подмодулем $H_1(\alpha, A)$.*
2. *Предположим, что множество α порождающих идеала I минимально и что $\mathbb{N}$-градуировка на L локально конечна. Тогда градуированное векторное пространство V, минимально порождающее L-модуль $H_1(\alpha, A)$, изоморфно $H_3(L) = \mathrm{Tor}_3^{UL}(k, k)$.*

Доказательство.

1. Положим $H = H(\alpha, A)$. Поскольку алгебра UH порождается нулевой и единичной компонентой в гомологической градуировке (теорема 2.13), то она порождается своими подмножествами $H_0(\alpha, A)$ и $H_1(\alpha, A)$, так что H тоже порождается ими.

2. Заметим, что минимальное градуированное векторное пространство порождающих супералгебры Ли $H = H(\alpha, A)$ изоморфно $kx \oplus V \simeq H/[H, H] \simeq UH/(UH_+)$. По теореме 2.15 имеем $kx \oplus V \simeq kx \oplus \mathrm{Tor}_3^{UL}(k, k)$. □

3.7. Сильно свободные (инертные) множества в алгебрах Ли и рациональные гомотопии. В этом разделе излагаются результаты работы [49], где впервые было введено и исследовано понятие сильно свободных (инертных) множеств для алгебр Ли.

Определение 3.15. Однородное подмножество α в супералгебре Ли g называется инертным, если оно сильно свободно в Ug.

Теорема 3.16. *Пусть g — супералгебра Ли, и пусть α — ее однородное подмножество. Следующие условия эквивалентны*:

1) *множество α инертно*;
2) *множество α является $\mathcal{L}ie$-регулярным, т. е. $H_*(g, \alpha) = g/\mathrm{id}(\alpha)$*;
3) *$H_i(g, \alpha) = 0$ для всех $i > 0$*;
4) *$H_1(g, \alpha) = 0$.*

Следующая теорема дает еще один критерий.

Теорема 3.17. *Пусть I — идеал в супералгебре Ли g, минимально порожденный однородным множеством α. Тогда α инертно в том и только том случае, когда выполняются следующие два условия*:

1) *I — свободная супералгебра Ли*;
2) *$U(L/I)$-модуль $I/[I, I]$ относительно присоединенного действия алгебры L свободен.*

Несколько свойств инертных множеств в алгебрах Ли выглядят похоже на соответствующие свойства сильно свободных множеств в ассоциативных алгебрах. Например, лемма 2.10 в лиевом случае выглядит так.

Лемма 3.18. *Пусть E — однородная подалгебра в супералгебре Ли g, и пусть α — однородное подмножество в E. Если α инертно в g, то оно инертно и в E.*

Следующий результат описывает свойство идеала, порожденного инертным множеством, в обычной алгебре Ли.

Теорема 3.19. *Пусть I — однородный идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (т. е. супералгебре Ли, состоящей из четных элементов), и пусть I порождается инертным множеством. Тогда любой ненулевой однородный элемент $r \in I$ инертен.*

Описание инертных элементов в свободной супералгебре Ли дает следующая теорема.

Теорема 3.20. *Однородный элемент $r \in \mathbf{L}(x)$ инертен тогда и только тогда, когда не существует элементов $u \in \mathbf{L}(x)$, $\lambda \in k$, таких что $r = \lambda[u, u]$.*

В частности, любой ненулевой однородный элемент в свободной алгебре Ли (в которой все элементы четные) инертен.

В [49] инертные множества появились для нужд рациональной теории гомотопий. Пусть X — односвязный CW-комплекс конечного типа, и пусть ϕ — элемент гомотопической группы $\pi_{n+1}(X)$. Он индуцирует вложение (приклеивание клетки) $X \xrightarrow{j} X \cup_\varphi e^{n+1}$. Что происходит с рациональными гомотопиями пространства X при таком приклеивании? Наилучший случай (эти гомотопии уменьшаются настолько, насколько это возможно) описывается следующей теоремой.

Теорема 3.21. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *отображение $\pi_*(j) \otimes \mathbb{Q}\colon \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(X \cup_\varphi e^{n+1}) \otimes \mathbb{Q}$ сюръективно*;
2) *элемент ϕ инертен в супералгебре Ли $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$*;
3) *рациональный гомотопический тип гомотопического слоя включения j — букет не меньше чем двух сфер.*

Следствие 3.22. *Пусть V — замкнутое компактное односвязное многообразие, и пусть v — произвольная точка на V. Если алгебра рациональных когомологий $H^*(V, \mathbb{Q})$ не порождается единственным элементом, то включение $V \setminus \{v\} \to V$ индуцирует сюръективное отображение рациональных гомотопических групп.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00468.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов А. Я.* Рациональность рядов Гильберта относительно свободных алгебр // Успехи мат. наук. — 1997. — *52*, № 2 (314). — С. 153–154.
2. *Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н.* Мономиальные алгебры // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и прил. Тематические обзоры. Т. 26. Алгебра-4. — М.: ВИНИТИ, 1995. — С. 35—214.
3. *Бояркин А. А.* Деформации в многообразиях ассоциативных алгебр // Мат. исследования. — 1973. — *8*, № 3 (29). — С. 3—13.
4. *Бояркин А. А.* Деформации и когомологии в многообразиях алгебр. — Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Москва, МГУ, 1977.
5. *Бояркин А. А.* Алгебры, которые деформируются в свободные // Успехи мат. наук. — 1978. — *33*, № 4 (202). — С. 207—208.
6. *Бояркин А. А.* Расширения PI-алгебр // Мат. заметки. — 1986. — *40*. — С. 705—712.
7. *Бояркин А. А.* Соотношения расширений в многообразиях алгебр // Успехи мат. наук. — 1987. — *42*, № 6 (258). — С. 185—186.
8. *Винберг Е. Б.* К теореме о бесконечномерности ассоциативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — *29*. — С. 209—214.
9. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. 1. Введение в теорию когомологий и производные категории. — М.: Наука, 1988.
10. *Говоров В. Е.* О градуированных алгебрах // Мат. заметки. — 1972. — *12*, № 2. — С. 197—204.
11. *Голод Е. С.* О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — *28*, № 2. — С. 479—482.
12. *Голод Е. С.* Стандартные базисы и гомологии. II // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 1995. — *208*. — С. 106—110.
13. *Голод Е. С.* Гомологии комплекса Шафаревича и некоммутативные полные пересечения // Фундам. и прикл. мат. — 1999. — *5*, вып. 1. — С. 85—95.

14. *Голод Е. С.* О гомологиях комплекса Шафаревича свободной алгебры // Фундам. и прикл. мат. — 1999. — *5*, вып. 1. — С. 97—100.
15. *Голод Е. С.* Арифметические кольца, биэндоморфизмы и базисы Гребнера // Успехи мат. наук. — В печати.
16. *Голод Е. С., Шафаревич И. Р.* О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — *28*, № 2. — С. 261—272.
17. *Кемер А. Р.* Замечание о стандартном тождестве // Мат. заметки. — 1978. — *23*, № 5. — С. 753—757.
18. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbf{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — *48*. — С. 1042—1059.
19. *Кузьмин Е. Н., Шестаков И. Р.* Неассоциативные структуры // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 57. Алгебра-6. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 179—266.
20. *Пионтковский Д. И.* О росте градуированных алгебр с небольшим числом определяющих соотношений // Успехи мат. наук. — 1993. — *48*, № 3. — С. 189—190.
21. *Пионтковский Д. И.* О рядах Гильберта и гомологиях PI-алгебр // Мат. сб. — 1998. — *189*, № 11. — С. 103—120.
22. *Пионтковский Д. И.* О свободных произведениях в многообразиях ассоциативных алгебр // Мат. заметки. — 1999. — *65*, № 5. — С. 693—702.
23. *Пионтковский Д. И.* Ряды Гильберта и соотношения в алгебрах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2000. — *64*, № 6. — С. 1297—1311.
24. *Пионтковский Д. И.* О градуированных алгебрах глобальной размерности 3 // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — *65*, № 3. — С. 557—568.
25. *Пионтковский Д. И.* О дифференциально градуированных алгебрах Ли // Успехи мат. наук. — 2003. — *58*, № 1. — С. 193—194.
26. *Посицельский Л. Е.* Соотношение между рядами Гильберта двойственных квадратичных алгебр не влечет их кошулевости // Функцион. анализ и его прил. — 1995. — *29*, № 3. — С. 83—87.
27. *Умирбаев У. У.* Некоторые алгоритмические вопросы в ассоциативных алгебрах // Алгебра и логика. — 1993. — *32*, № 4. — С. 450—470, 474.
28. *В. А. Уфнаровский* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 57. Алгебра-6. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 5—177.
29. *Anick D.* Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // J. Algebra. — 1982. — *78*. — P. 120—140.
30. *Anick D.* The smallest singularity of a Hilbert series // Math. Scand. — 1982. — *51*. — P. 35—44.
31. *Anick D.* Diophantine equations, Hilbert series, and undecidable spaces // Ann. Math. — 1985. — *122*. — P. 87—112.
32. *Anick D.* On the homology of associative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — *296*, N 2. — P. 641—659.
33. *Anick D.* Inert sets and the Lie algebra associated to a group // J. Algebra. — 1987. — *111*. — P. 154—165.
34. *Anick D.* Generic algebras and CW-complexes // Proc. 1983 Conf. on Algebra, Topology and K-Theory in Honor of John Moore. — Princeton Univ., 1988. — P. 247—331.
35. *Artin M., Shelter W.* Graded algebras of global dimension 3 // Adv. Math. — 1987. — *66*. — P. 171—216.
36. *Artin M., Tate J., van den Bergh M.* Some algebras related to automorphisms of elliptic curves // The Grothendieck Festschrift. Vol. 1. — Boston: Birkhäuser, 1990. — P. 33—85.
37. *Artin M., Tate J., van den Bergh M.* Modules over regular algebras of dimension 3 // Invent. Math. — 1991. — *106*. — P. 335—388.
38. *Assmus E. F.* On the homology of the local rings // Illinois J. Math. — 1959. — *3*. — P. 187—199.
39. *Backelin J.* A distributiveness property of augmented algebras, and some related homological results. — PhD Thesis. — Stockholm, 1982.
40. *Baues H. J., Lemaire J.-M.* Minimal models in homotopy theory // Math. Ann. — 1977. — *225*, N 3. — P. 219—242.
41. *Bell J. P.* Growth of finitely presented groups and algebras. — Preprint. — 2004.
42. *Burbaki N.* Algèbre, Ch. 10. Algèbre homologique. — Paris: Masson, 1980.
43. *Dicks W.* On the cohomology of one-relator associative algebras // J. Algebra. — 1985. — *97*. — P. 79—100.
44. *Farkas D. R., Small L .W.* Algebras which are nearly finite dimensional and their identities // Israel J. Math. — 2002. — *127*. — P. 245—251.
45. *Felix Y., Halperin S., Thomas J.-C.* Rational Homotopy Theory. — New York: Springer, 2001. — Graduate Texts in Mathematics. Vol. 205.

46. *Golod E. S.* Standard bases and homology // Lect. Notes Math. Vol. 1352. — Berlin: Springer, 1988. — P. 88—95.
47. *Gulliksen T. H.* A proof of the existence of minimal R-algebra resolutions // Acta Math. — 1968. — *120*. — P. 53—58.
48. *Gulliksen T. H.* A homological characterization of local complete intersections // Compositio Math. — 1971. — *23*, N 3. — P. 251—255.
49. *Halperin S., Lemaire J.-M.* Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées («Autopsie d'un meurtre. II») // Math. Scand. — 1987. — *61*, N 1. — P. 39—67.
50. *Huebschmann J., Kadeishvili T.* Small models for chain algebras // Math. Z. — 1991. — *207*, N 2. — P. 245—280.
51. *Jósefiak T.* Tate resolutions for commutative graded algebras over a local ring // Fund. Math. — 1972. — *74*. — P. 209—231.
52. *Jósefiak T.* A homological characterisation of graded complete intersections. I // J. Pure Appl. Algebra. — 1976. — *8*. — P. 143—148.
53. *Jósefiak T.* A homological characterisation of graded complete intersections. II // Fund. Math. — 1976. — *93*. — P. 109—114.
54. *Keller B.* Notes on minimal models. — Preprint. — 2003.
55. *Lambrechts P.* On the ranks of homotopy groups of two-cones. — Preprint. — 2000.
56. *Lemaire J.-M.* «Autopsie d'un meurtre» dans l'homologie d'une algèbre de chaines // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). — 1978. — *11*, N 1. — P. 93—100.
57. *Löfwall C.* On the subagebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra // Algebra, algebraic topology and their interactions (Stockholm, 1983), Lect. Notes Math. Vol. 1183. — 1986. — P. 291—338.
58. *Movshev M.* Bar duality for A_∞-algebras. — In preparation.
59. *Newman M. F., Schneider C., Shalev A.* The entropy of graded algebras // J. Algebra. — 2000. — *223*. — P. 85—100.
60. *Passman D. S., Temple W. V.* Representations of the Gupta—Sidki group // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — *124*, N 5. — P. 1403—1410.
61. *Priddy S. B.* Koszul resolutions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — *152,* N 1. — P. 39—60.
62. *Quillen D.* Rational homotopy theory // Ann. Math. Ser. 2. — 1969. — *90*, N 2. — P. 205—295.
63. *Reichstein Z., Rogalski D., Zhang J. J.* Projectively simple rings. — Preprint arXiv:math.RA/0401098. — 2004.
64. *Smith M. K.* Universal enveloping algebras with subexponential but not polynomially bounded growth // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — *60*. — P. 22—24.
65. *Smoktunowicz A.* Polynomial ring over nil ring need not be nil // J. Algebra. — 2000. — *233*. — P. 427—436.
66. *Stanley R. P.* Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math. — 1978. — *28*. — P. 57—83.
67. *Stephenson D. R.* Artin—Shelter regular algebras of global dimension three // J. Algebra. — 1996. — *183*, N 1. — P. 55—73.
68. *Stephenson D. R., Zhang J. J.* Noetherian connected graded algebras of global dimension 3 // J. Algebra. — 2000. — *230*, N 2. — P. 474—495.
69. *Tate J.* Homology of Noetherian rings and local rings // Illinois J. Math. — 1957. — *1*. — P. 14—25.
70. *Zhang J. J.* Non-Noetherian regular rings of dimension 2 // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — *126*, N 6. — P. 1645—1653.

Д. И. Пионтковский
Центральный экономико-математический институт, 117418 Москва, Нахимовский проспект, 47
E-mail: piont@mccme.ru

Современная математика и ее приложения. Том 30 (2005). С. 101–165

УДК 512.5

МОНОМИАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ

© 2005 г. **Д. А. ШАКИН**

Аннотация. В работе изучаются численные характеристики (функция Гильберта, градуированные числа Бетти) мономиальных идеалов в кольце коммутативных многочленов и во внешней алгебре над полем.

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 1512–1712

Введение

Современные методы теории базисов Гребнера позволяют сводить многие вопросы об идеалах в кольце многочленов к изучению мономиальных идеалов, которые имеют гораздо более простую структуру. В связи с этим особую важность приобретает исследование свойств мономиальных идеалов, в частности их численные характеристики — функции Гильберта и градуированные числа Бетти.

В 1927 г. Маколей [29] описал функции Гильберта всех однородных идеалов в кольце коммутативных многочленов $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ над полем k. Он рассмотрел так называемые лекссегментные идеалы, т. е. мономиальные идеалы, однородные компоненты которых порождаются (как векторные пространства) старшими по лексикографическому порядку мономами соответствующей степени, и показал, что для всякого однородного идеала существует лекссегментный идеал с такой же функцией Гильберта.

Результат Маколея оказался полезен не только с алгебраической, но и с комбинаторной точки зрения: лекссегментные идеалы имеют достаточно простое строение, что позволяет явно выписать численные ограничения, которым должна удовлетворять функция Гильберта однородного идеала. Дальнейшее развитие, особенно в теории графов, комбинаторная интерпретация результатов Маколея получила в работах Клементса, Линдстрема, Лека (см. также работу Стенли [31]).

Оказалось, что лекссегментные идеалы обладают также интересными экстремальными свойствами. Например, теорему Маколея можно переформулировать следующим образом: если V — векторное пространство с базисом из однородных многочленов степени d и L — векторное пространство с базисом из старших по лексикографическому порядку мономов степени d (лекссегментное пространство) такой же размерности, то размерность пространства $\mathrm{x}V$ ($\mathrm{x}V$ порождено многочленами вида $x_i f$, где $f \in V$) не меньше размерности пространства $\mathrm{x}L$, т. е. $\dim \mathrm{x}V \geqslant \dim \mathrm{x}L$. Г. Гоцман [20] исследовал пространства, для которых в предыдущем неравенстве достигается равенство (теперь такие пространства называются гоцмановыми). Он показал, в частности, что если V — гоцманово пространство, то $\mathrm{x}V$ тоже гоцманово (теорема Гоцмана об устойчивости).

Другое следствие теоремы Маколея состоит в следующем: лекссегментный идеал имеет наибольшее число минимальных порождающих в каждой степени среди всех однородных идеалов с фиксированной функцией Гильберта. Иными словами, лекссегментный идеал имеет максимальные числа Бетти β_{0i}^A для всех i. Обобщение этого результата было получено в [11, 25] (случай $\operatorname{char} k = 0$), а также в [30] (случай $\operatorname{char} k > 0$), где было показано, что лекссегментный идеал обладает максимальными градуированными числами Бетти среди всех однородных идеалов в кольце многочленов, имеющих такую же функцию Гильберта.

Параллельно с изучением свойств экстремальности лекссегментных идеалов возник вопрос о возможности описания функций Гильберта однородных идеалов в фактор-кольцах кольца многочленов по мономиальным идеалам с помощью различных модификаций понятия лекссегментного идеала. Одними из первых результатов в этой области были работы Крушкаля [28] и Катоны [27], которые описали с помощью лекссегментных (т. е. таких мономиальных идеалов во внешней алгебре, однородные компоненты которых порождаются (как векторные пространства) старшими по лексикографическому порядку мономами во внешней алгебре соответствующей степени) идеалов функции Гильберта однородных идеалов во внешней алгебре[1] $E = k\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$. Эти результаты имели важные геометрические приложения, так как позволяли описывать f-векторы (т. е. количество граней каждой размерности) симплициальных комплексов.

Обобщение результатов Маколея на более широкий класс идеалов было получено в [12], где были описаны функции Гильберта идеалов в фактор-алгебрах вида $A/(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n})$, где $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n \leqslant \infty$. Этот результат обобщал как теорему Маколея ($d_1 = \ldots = d_n = \infty$), так и теорему Крушкаля—Катоны ($d_1 = \ldots = d_n = 2$).

Результаты работ [11, 25, 27, 28], наряду с развитием техник для изучения чисел Бетти [2, 5, 15], привели к появлению большого количества новых результатов в этой области.

[1] Рассмотрение функций Гильберта однородных идеалов во внешней алгебре равносильно рассмотрению функций Гильберта однородных идеалов в фактор-алгебре $A/(x_1^2, \ldots, x_n^2)$.

Так, М. Грин [21] изучал свойства экстремальности лекссегментных пространств при факторизации по общим линейным формам. Впоследствии его результаты были обобщены на случай общих однородных форм в [18, 24].

Целый цикл работ был посвящен обобщению неравенств для чисел Бетти, а также результатов Гоцмана на случай внешней алгебры. В частности, в [4] доказано неравенство, аналогичное полученному в [11, 25] для чисел Бетти над внешней алгеброй, а в [6, 8] — для бесквадратных идеалов в кольце многочленов. Обобщение теоремы Гоцмана об устойчивости на случай внешней алгебры получено в [4].

Связь между результатами Гоцмана и Грина исследовалась в [16], где было показано, что всякое гоцманово пространство является экстремальным в смысле теоремы Грина.

Наконец, частичное обобщение результатов Грина и Гоцмана на случай идеалов в фактор-кольце вида $A/(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n})$ было получено в [17].

Целью данной работы является изучение численных характеристик (функция Гильберта, градуированные числа Бетти) мономиальных идеалов в кольце коммутативных многочленов и во внешней алгебре над полем.

Глава 1 носит вводный характер. В ней собраны сведения, необходимые для изложения материала остальных глав.

Глава 2 посвящена обобщению теоремы Маколея на случай фактор-колец кольца многочленов и внешней алгебры. В частности, доказываются две эквивалентные формулировки теоремы Маколея, а также некоторые необходимые условия. Также приводятся новые примеры идеалов, в фактор-кольцах по которым выполняется теорема Маколея.

В разделе 2.5 главы 2 показывается, что теорема Маколея продолжает выполняться, если кольцо многочленов расширяется с помощью новых переменных. Аналог этого результата для внешней алгебры доказывается в разделе 2.6. Наконец, в разделе 2.8 этой главы полностью описываются условия, при которых теорема Маколея выполняется в фактор-кольце кольца многочленов от двух переменных.

Главы 3 и 4 посвящены изучению кусочно лекссегментных идеалов в кольце многочленов и внешней алгебре соответственно. Показывается, что в классе сильно устойчивых идеалов обобщение теоремы Маколея возможно тогда и только тогда, когда идеал является кусочно лекссегментным. Оказывается, что многие экстремальные свойства лекссегментных идеалов в кольце многочленов и во внешней алгебре можно обобщить на случай фактор-колец по кусочно лекссегментным идеалам. В частности, доказываются неравенства для градуированных чисел Бетти, а также обобщения теоремы Гоцмана об устойчивости и некоторых результатов Грина, Херцога, Рореску и Гашарова о факторизации по общим формам.

В главе 5 изучаются так называемые I-устойчивые идеалы, которые являются естественным обобщением устойчивых идеалов и бесквадратных устойчивых идеалов в кольце многочленов. Подробно изучается случай, когда $I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n})$. Для этого случая строятся минимальные свободные резольвенты I-устойчивых идеалов. Показывается также, что фактор-кольца по I-устойчивым идеалам являются кольцами Голода. Для доказательства этого факта строится тривиальная операция Масси на комплексе Козюля фактор-кольца. В разделе 5.4 этой главы рассматриваются условия, при которых фактор-кольцо по I-устойчивому идеалу является горенштейновым и коэн-маколеевым. В частности, показывается, что такое кольцо является горенштейновым тогда и только тогда, когда идеал является главным. В разделах 5.5 и 5.6 изучаются сильно и слабо I-устойчивые идеалы. Для сильно I-устойчивого идеала $J \subseteq A$ доказывается формула для градуированных чисел Бетти модуля $A/(J + I)$. Для слабо I-устойчивых идеалов получены некоторые результаты о структуре их минимальных резольвент. Некоторые из результатов, приводимых в этой главе, были независимо получены в [19].

Автор выражает свою глубокую признательность профессору Е. С. Голоду за постановку задач и плодотворные обсуждения полученных результатов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 02-01-00468.

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе излагаются сведения из теории базисов Гребнера, коммутативной и гомологической алгебры, необходимые для доказательства основных результатов.

1.1. Обозначения

Через $A[1:n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ будет обозначаться кольцо коммутативных многочленов от n переменных над полем k. Однородная компонента кольца $A[1:n]$ (идеала $I \subseteq A[1:n]$) степени d будет обозначаться через $A[1:n]_d$ (I_d).

Если $V \subseteq A[1:n]$, то через $\mathcal{M}(V)$ обозначается множество мономов, содержащихся в V. Кроме того, через $\mathrm{x}V$ обозначается векторное пространство, порожденное элементами вида $x_i f$, где $f \in V$. Если $M \subseteq A[1:n]$ — некоторое множество, то через $\langle M \rangle$ обозначается векторное пространство, порожденное M, а через (M) — идеал в $A[1:n]$, порожденный M.

Если $M \subseteq \mathcal{M}(A[1:n])$ — конечное множество, то через $|M|$ обозначается количество его элементов. Если $V \subseteq A[1:n]$ — векторное пространство, то через $\dim V$ обозначается его размерность над k.

Если $u \in \mathcal{M}(A[1:n])$, то положим

$$\max(u) = \max\{i\colon x_i \text{ делит } u\}, \quad \min(u) = \min\{i\colon x_i \text{ делит } u\}.$$

При этом $\min(1) = +\infty$, $\max(1) = -\infty$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(A[1:n])$ — некоторое множество, то положим

$$m_i(M) = |\{u \in M\colon \max(u) = i\}|, \quad M_i(M) = |\{u \in M\colon \max(u) \leqslant i\}|.$$

Кроме того, если $V \subseteq A[1:n]$, то пусть $m_i(V) = m_i(\mathcal{M}(V))$ и $M_i(V) = M_i(\mathcal{M}(V))$.

Моном $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ будет для сокращения записываться как x^a, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Наряду с $\mathbb{Z}$-градуировкой на $A[1:n]$ (по степени) будем рассматривать $\mathbb{Z}^n$-градуировку: $\deg_n x^a = a$. Для удобства положим $\varepsilon_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте).

Если $I \subseteq A[1:n]$ — однородный идеал, то через H_I обозначается его функция Гильберта, т. е. $H_I(d) = \dim I_d$. Если I — мономиальный идеал, то через $G(I)$ обозначим его минимальное порождающее множество, состоящее из мономов. Степень максимального элемента множества $G(I)$ обозначим через $\delta(I)$.

Через $E[1:n] = k\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ будет обозначаться внешняя алгебра от n переменных над полем k. Для нее будут использоваться обозначения, аналогичные введенным выше. В частности, $E[1:n]_d$ будет обозначать однородную компоненту степени d и т. д. Мономы во внешней алгебре будут записываться как $e_\sigma = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$, где $\sigma = \{i_1, \ldots, i_s\}$ и $i_1 < \ldots < i_s$.

1.2. Устойчивые идеалы и множества

Определение 1.2.1. Множество $M \subseteq \mathcal{M}(A[1:n])$ называется *устойчивым*, если для всякого монома $u \in M$ и для всякого $i < \max(u)$ выполнено $ux_i/\max(u) \in M$. Множество M называется *сильно устойчивым*, если для всякого монома $u \in M$ и для всяких i, j, удовлетворяющих условиям $i < j$ и x_j делит u, выполнено $ux_i/x_j \in M$. Множество M называется *обратно сильно устойчивым*, если для всякого монома $u \in M$ и для всяких i, j, удовлетворяющих условиям $i > j$ и x_j делит u, выполнено $ux_i/x_j \in M$.

Мономиальное (т. е. имеющее базис, состоящий из мономов) векторное пространство $V \subseteq A[1:n]$ называется *устойчивым* (*сильно устойчивым*), если множество $\mathcal{M}(V)$ является устойчивым (сильно устойчивым).

Мономиальный идеал $I \subseteq A[1:n]$ называется *устойчивым* (*сильно устойчивым*), если множество $\mathcal{M}(I_d)$ является устойчивым (сильно устойчивым) для всех d.

Ясно, что всякий сильно устойчивый идеал является устойчивым. Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в [15].

Предложение 1.2.2. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — мономиальный идеал. Этот идеал является устойчивым (сильно устойчивым) тогда и только тогда, когда для всякого монома $u \in G(I)$ и для всякого $i < \max(u)$ выполнено $ux_i/\max(u) \in I$ (для всякого монома $u \in G(I)$ и для всяких i, j, удовлетворяющих условиям $i < j$ и x_j делит u, выполнено $ux_i/x_j \in I$).*

Таким образом, свойство устойчивости (сильной устойчивости) достаточно проверять только для минимальных порождающих идеала.

Устойчивые идеалы достаточно хорошо изучены. В частности, для них известна явная конструкция минимальной свободной резольвенты. Здесь нам понадобится следующая формула для градуированных чисел Бетти.

Теорема 1.2.3 (Эльяу, Кервер [15])**.** *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — сильно устойчивый идеал. Тогда*

$$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(I) = \sum_{l=1}^{n} \binom{l-1}{i} (m_l(J_j) - M_l(J_{j-1})). \tag{1}$$

Аналогичные определения и результаты справедливы для идеалов во внешней алгебре.

Определение 1.2.4. Множество $M \subseteq \mathcal{M}(E[1:n])$ называется *устойчивым*, если для всякого монома $e_\sigma \in M$ и для всякого $i < \max\sigma$, $i \notin \sigma$, выполнено $e_{(\sigma\cup\{i\})\setminus\{\max\sigma\}} \in M$. Множество M называется *сильно устойчивым*, если для всякого монома $e_\sigma \in M$ и для всяких i, j, удовлетворяющих условиям $i < j$, $i \notin \sigma$ и $j \in \sigma$, выполнено $e_{(\sigma\cup\{i\})\setminus\{j\}} \in M$. Множество M называется *обратно сильно устойчивым*, если для всякого монома $e_\sigma \in M$ и для всяких i, j, удовлетворяющих условиям $i > j$, $i \notin \sigma$ и $j \in \sigma$, выполнено $e_{(\sigma\cup\{i\})\setminus\{j\}} \in M$.

Мономиальный идеал $I \subseteq E[1:n]$ называется *устойчивым* (*сильно устойчивым*), если множество $\mathcal{M}(I_d)$ является устойчивым (сильно устойчивым) для всех d.

Аналогично, всякий сильно устойчивый идеал является устойчивым. Доказательство следующего утверждения аналогично случаю кольца многочленов.

Предложение 1.2.5. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — мономиальный идеал. Этот идеал является устойчивым (сильно устойчивым) тогда и только тогда, когда для всякого монома $e_\sigma \in G(I)$ и для всякого $i < \max\sigma$, $i \notin \sigma$, выполнено $e_{(\sigma\cup\{i\})\setminus\{\max\sigma\}} \in I$ (для всякого монома $e_\sigma \in G(I)$ и для всяких i, j, удовлетворяющих условиям $i < j$, $i \notin \sigma$ и $j \in \sigma$, выполнено $e_{(\sigma\cup\{i\})\setminus\{j\}} \in I$).*

Устойчивые идеалы во внешней алгебре хорошо изучены. В частности, известна явная конструкция минимальной свободной резольвенты. Здесь нам понадобится следующая формула для градуированных чисел Бетти (см. [4]).

Теорема 1.2.6. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — сильно устойчивый идеал. Тогда*

$$\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(J) = \sum_{l=1}^{n} \binom{l+i-1}{l-1} (m_l(J_j) - M_{l-1}(J_{j-1})). \tag{2}$$

1.3. Мономиальные порядки и идеалы старших членов

Определение 1.3.1. Полный порядок $>$ на множестве мономов $\mathcal{M}(A[1:n])$ называется *мономиальным*, если для любых двух мономов m_1 и m_2, удовлетворяющих условию $m_1 > m_2$, и любого монома $n \neq 1$ выполнены неравенства

$$nm_1 > nm_2 > m_2.$$

Если $f \in A[1:n]$ — некоторый многочлен, то через $\mathrm{Lm}_>(f)$ обозначается старший моном многочлена f относительно порядка $>$.

В главах 1—4 будут рассматриваться только мономиальные порядки $>$, удовлетворяющие условию $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. В частности, мы будем рассматривать следующие два порядка.

Определение 1.3.2. Моном x^a больше монома x^b по *лексикографическому* порядку (обозначение $x^a >_{\mathrm{lex}} x^b$), если если первая ненулевая компонента вектора $a-b$ положительна.

Моном x^a больше монома x^b по *обратному лексикографическому* порядку (обозначение $x^a >_{\mathrm{rlex}} x^b$), если либо $\deg x^a > \deg x^b$, либо $\deg x^a = \deg x^b$ и последняя ненулевая компонента вектора $a-b$ отрицательна.

Теорема 1.3.3. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — однородный идеал, $>$ — некоторый мономиальный порядок. Тогда*

1) $H_I = H_{\mathrm{In}_>(I)}$;
2) *для всех i и j выполнено неравенство*

$$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(I) \leqslant \beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(\mathrm{In}_>(I)).$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [22]. Аналогичные определения и результаты можно сформулировать для внешней алгебры. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.4. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — однородный идеал, $>$ — некоторый мономиальный порядок. Тогда*

1) $H_I = H_{\mathrm{In}_>(I)}$;
2) *для всех i и j выполнено неравенство*

$$\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(I) \leqslant \beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(\mathrm{In}_>(I)).$$

1.4. Общие идеалы старших членов

Для всякого линейного преобразования $\varphi \in \mathrm{GL}(n)$, заданного матрицей (a_{ij}), и всякого многочлена $f(x_1,\dots,x_n) \in A[1:n]$ построим многочлен

$$\varphi(f(x_1,\dots,x_n)) = f\Big(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{in}x_i\Big).$$

Кроме того, для всякого идеала $I \subseteq A[1:n]$ положим $\varphi(I) = \{\varphi(f)\colon f \in I\}$. Через $\mathcal{B}(n)$ обозначим подгруппу верхнетреугольных матриц в $\mathrm{GL}(n)$.

Теорема 1.4.1. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — однородный идеал. Тогда существует такое непустое открытое по Зарискому множество $U \subseteq \mathrm{GL}(n)$, что $\mathrm{In}_>(\varphi_1(I)) = \mathrm{In}_>(\varphi_2(I))$ для всех $\varphi_1,\varphi_2 \in U$. Кроме того, множество U можно выбрать так, что оно имеет непустое пересечение с подгруппой $\mathcal{B}(n)$.*

Определение 1.4.2. Рассмотрим U из предыдущей теоремы. Если $\varphi \in U$, то мономиальный идеал $\mathrm{In}_>(\varphi(I))$ называется *общим идеалом старших членов относительно порядка* $>$ и обозначается $\mathrm{Gin}_>(I)$.

Определение 1.4.3. Идеал $I \subseteq A[1:n]$ называется *борелевским*, если $\varphi(I) = I$ для всякого $\varphi \in \mathcal{B}(n)$.

Теорема 1.4.4. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — однородный идеал и $>$ — некоторый мономиальный порядок. Тогда идеал $\mathrm{Gin}_>(I)$ является борелевским.*

Теорема 1.4.5. *Пусть $\operatorname{char} k = 0$. Однородный идеал $I \subseteq A[1:n]$ является борелевским тогда и только тогда, когда он сильно устойчив.*

Доказательство этих теорем можно найти в [22].

Из теорем 1.3.3, 1.4.4, 1.4.5, а также из простого наблюдения, что при линейной замене переменных ни функция Гильберта, ни числа Бетти не меняются, вытекает следующая теорема.

Теорема 1.4.6. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — однородный идеал, $>$ — некоторый мономиальный порядок. Если $\operatorname{char} k = 0$, то*

1) *идеал $\mathrm{Gin}_>(I)$ является сильно устойчивым*;
2) $H_I = H_{\mathrm{Gin}_>(I)}$;

3) *для всех i и j выполнено неравенство*

$$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(I) \leqslant \beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(\mathrm{Gin}_{>}(I)).$$

Аналогичные определения и результаты справедливы и для внешней алгебры (см., например, [4]). В частности, для общих идеалов старших членов во внешней алгебре справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.7. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — однородный идеал, $>$ — некоторый мономиальный порядок. Если* $\operatorname{char} k = 0$*, то*

1) *идеал $\mathrm{Gin}_{>}(I)$ является сильно устойчивым*;
2) $H_I = H_{\mathrm{Gin}_{>}(I)}$;
3) *для всех i и j выполнено неравенство*

$$\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(I) \leqslant \beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(\mathrm{Gin}_{>}(I)).$$

1.5. Комплекс Козюля

Напомним определение и простейшие свойства комплекса Козюля конечно порожденного $A[1:n]$-модуля M. Пусть $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_r\}$ — некоторый набор элементов кольца $A[1:n]$. По определению комплекс Козюля $K(M) = K(\mathbf{y}; M)$ состоит из модулей $K_q(\mathbf{y}; M) = M \otimes_{A[1:n]} A'_q$, где A'_q — свободный $A[1:n]$-модуль с образующими $e_\sigma = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}$, $\sigma = \{i_1, \ldots, i_q\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant r$, а дифференциал ∂ имеет вид

$$\partial_q(e_\sigma) = \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma,s)} y_s e_{\sigma_s},$$

где $\alpha(\sigma, s) = |\{i \in \sigma \colon i < s\}|$ и $\sigma_s = \sigma \setminus \{s\}$. Если $y_i \in \mathcal{M}(A[1:n])$ для всех i, то на модулях $K_q(\mathbf{y}; M)$ можно ввести $\mathbb{Z}^n$-градуировку:

$$\deg_n x^a \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} = a + \sum_{j=1}^{q} \deg_n y_{i_j}.$$

В этом случае все гомоморфизмы ∂_q являются однородными. Если $\mathbf{y} = \{x_1, \ldots x_n\}$, то будем писать $K(M)$ вместо $K(\mathbf{y}; M)$. Гомологии комплекса $K(M)$ будем обозначать через $H_i(M)$, а класс гомологий цикла $z \in K_q(M)$ — через $[z]$. Отметим следующее свойство комплекса Козюля $K(\mathbf{y}; M)$:

$$\sup\{i \colon H_i(K(\mathbf{y}; M)) \neq 0\} = r - \operatorname{depth}(\mathbf{y}, M),$$

где $\operatorname{depth}(\mathbf{y}, M)$ — длина максимальной M-регулярной последовательности, содержащейся в идеале $(\mathbf{y}) \subseteq A[1:n]$. В частности, комплекс $K(A[1:n])$ ацикличен и является минимальной свободной резольвентой для поля k, следовательно, $\operatorname{Tor}_i^{A[1:n]}(k, M) \cong H_i(M)$.

Глава 2

ТЕОРЕМА МАКОЛЕЯ ДЛЯ ФАКТОР-КОЛЕЦ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ

В этой главе исследуется вопрос, для каких мономиальных идеалов $I \subseteq A[1:]$ возможно получить описание функций Гильберта идеалов в фактор-кольце $R = A[1:n]/I$, аналогичное полученному Маколеем.

2.1. Теорема Маколея для фактор-кольца по мономиальному идеалу и M-идеалы

Пусть I — некоторый мономиальный идеал в $A[1:n]$, $R = A[1:n]/I$ и $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$. Через $D^R M$ обозначим подмножество в $\mathcal{M}(R_d)$, состоящее из старших по лексикографическому порядку мономов и удовлетворяющее условию $|M| = |D^R M|$. Аналогично, через $C^R M$ обозначим подмножество в $\mathcal{M}(R_d)$, состоящее из младших по лексикографическому порядку мономов и удовлетворяющее

условию $|M| = |C^R M|$. Если $D^R M = M$, то множество M называется D^R-*сжатым* или *лекссегментным*, а если $C^R M = M$, то множество M называется C^R-*сжатым*. Кроме того, положим

$$\Delta^R(M) = \{mx_i \in \mathcal{M}(R_{d+1}) \colon m \in M\},$$
$$\Gamma^R(M) = \{m \in \mathcal{M}(R_{d-1}) \colon mx_i \in M \text{ для некоторого } i\}.$$

Определение 2.1.1. Множество $M \subset \mathcal{M}(A[1:n]_d)$ называется *лекссегментным*, если оно $D^{A[1:n]}$-сжато. Мономиальное векторное пространство $V \subseteq A[1:n]_d$ называется *лекссегментным*, если множество $\mathcal{M}(V)$ является лекссегментным. Мономиальный идеал I в кольце $A[1:n]$ называется *лекссегментным*, если множество $\mathcal{M}(I_d)$ является лекссегментным для всякого d.

Определение 2.1.2. Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — некоторый мономиальный идеал. Мономиальный идеал $L \subseteq A[1:n]$ называется I-*лекссегментным*, если его можно представить в виде $L = L' + I$, где $L' \subseteq A[1:n]$ — некоторый лекссегментный идеал. Мономиальное векторное пространство $V \subseteq A[1:n]_d$ называется I-лекссегментным, если $V = I_d + L_d$, где L_d — некоторое лекссегментное пространство.

Понятие I-лекссегментного идеала является естественным обобщением понятия лекссегментного идеала: если рассматривать фактор-кольцо $A[1:n]/I$, то образы однородных компонент I-лекссегментных идеалов будут порождаться старшими мономами по лексикографическому порядку в каждой степени.

Замечание 2.1.3. Ясно, что идеал L является I-лекссегментным тогда и только тогда, когда все множества $\mathcal{M}(L_d) \setminus \mathcal{M}(I_d) \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, где $R = A[1:n]/I$, являются D^R-сжатыми.

Определение 2.1.4. Мономиальный идеал I в кольце многочленов $A[1:n]$ называется M-*идеалом*, если для всякого однородного идеала $J \subseteq A[1:n]$, содержащего I, существует I-лекссегментный идеал $L^I(J)$, удовлетворяющий условию $H_J = H_{L^I(J)}$.

M-идеалы являются как раз теми мономиальными идеалами, для которых в фактор-кольце возможно описание функций Гильберта, аналогичное предложенному Маколеем. Действительно, если $J \subseteq A[1:n]/I$ — однородный идеал (I — некоторый M-идеал), то идеал $L^I(J+I)/I$ имеет такую же функцию Гильберта, что и J. По этой причине, если I является M-идеалом, мы будем говорить, что *в* $A[1:n]/I$ *выполняется теорема Маколея*.

Стоит также отметить, что идеал $L^I(J)$ определен единственным образом: если два I-лекссегментных идеала имеют одинаковые функции Гильберта, то они совпадают.

Введем также следующее обозначение: если $V \subseteq A[1:n]_d$ — некоторое векторное пространство, то через $L^I(V)$ обозначим I-лекссегментное пространство такой же размерности, что и V.

Определение M-идеала является не очень удобным для практических приложений. Однако теория базисов Гребнера позволяет свести рассмотрение однородных идеалов к мономиальным (по крайней мере с точки зрения функций Гильберта). Для того чтобы доказать более удобную форму теоремы Маколея, потребуются следующие два простых утверждения.

Лемма 2.1.5. *Пусть* $u, v \in \mathcal{M}(A[1:n]_d)$, *причем* $u \geqslant_{\text{lex}} v$. *Тогда* $u/x_{\max(u)} \geqslant_{\text{lex}} v/x_{\max(v)}$.

Доказательство очевидно.

Предложение 2.1.6. *Пусть* $I \subseteq A[1:n]$ — *некоторый мономиальный идеал и* $R = A[1:n]/I$. *Если множество* $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ D^R-*сжато, то* $\Delta^R(M)$ *тоже* D^R-*сжато.*

Доказательство. Пусть $u = \min \Delta^R(M)$, $v = \max(\mathcal{M}(R_{d+1}) \setminus \Delta^R(M))$. Предположим, что $v >_{\text{lex}} u$. По лемме 2.1.5 имеем $u/x_{\max(u)} \leqslant_{\text{lex}} v/x_{\max(v)}$. Так как $u/x_{\max(u)} \in M$, то $v/x_{\max(v)} \in M$ (множество M D^R-сжато). Следовательно, $v \in M$ — противоречие. □

Сформулированная ниже теорема является основным результатом этого раздела, она позволяет проверить, выполняется ли в фактор-кольце теорема Маколея, рассматривая только мономиальные множества.

Теорема 2.1.7. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — некоторый мономиальный идеал. Следующие условия равносильны*:

1) *идеал I является M-идеалом*;
2) *пусть $R = A[1:n]/I$. Для всякого $d \geqslant 1$ и всякого $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ выполнено*

$$|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)|.$$

Доказательство. Проверим импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$. Рассмотрим идеал $J = I + (M)$ в $A[1:n]$. Так как $I - M$-идеал, то существует такой I-лекссегментный идеал L, что $H_J = H_L$. Так как $\mathcal{M}(L_d) = \mathcal{M}(I_d) \cup D^R(M)$, то

$$|\mathcal{M}(L_{d+1})| \geqslant |\mathcal{M}(I_{d+1})| + |\Delta^R(D^R M)|.$$

С другой стороны,

$$|\mathcal{M}(L_{d+1})| = |\mathcal{M}(J_{d+1})| = |\mathcal{M}(I_{d+1})| + |\Delta^R(M)|,$$

следовательно, $|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)|$.

Проверим импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $J \subseteq A[1:n]$ — некоторый однородный идеал, содержащий I. Рассмотрим его идеал старших членов J' относительно некоторого мономиального порядка. Идеалы J и J' имеют одинаковые функции Гильберта (см. теорему 1.3.3). Кроме того, идеал J' содержит I, так как идеал I является мономиальным. Пусть

$$L = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (\langle D^R \mathcal{M}(J'_d)\rangle + I_d).$$

Покажем, что L — идеал в $A[1:n]$. Для этого достаточно показать, что $\mathrm{x}L_d \subseteq L_{d+1}$. Ясно, что $\mathrm{x}I_d \subseteq I_{d+1} \subseteq L_{d+1}$. Пусть $M = \mathcal{M}(J'_d)$, $M' = \mathcal{M}(J'_{d+1})$. Так как

$$|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)| \leqslant |M'|$$

и по лемме 2.1.6 множество $\Delta^R(D^R M)$ D^R-сжато, то $\Delta^R(D^R M) \subseteq D^R M'$. Следовательно, $\mathrm{x}\langle D^R \mathcal{M}(J'_d)\rangle \subseteq \langle D^R \mathcal{M}(J'_{d+1})\rangle + I_{d+1}$. Таким образом, $\mathrm{x}L_d \subseteq L_{d+1}$, т. е. L — идеал.

Очевидно, что $I \subseteq L$, кроме того, идеал L является I-лекссегментным (см. замечание 2.1.3). По построению $H_L = H_{J'} = H_J$. Теорема доказана. □

2.2. Необходимые условия для выполнения теоремы Маколея

В данном разделе приводятся условия, необходимые для выполнения теоремы Маколея в фактор-кольце.

Теорема 2.2.1. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — некоторый мономиальный идеал, $R = A[1:n]/I$. Следующие условия равносильны*:

1) *для всякого C^R-сжатого множества M множество $\Gamma^R(M)$ тоже C^R-сжато*;
2) *для всякого $d > 0$ и для всяких мономов $u \in R_{d+1}$, $v \in R_d$, удовлетворяющих условиям*
   (a) $vx_n <_{\mathrm{lex}} u$,
   (b) *если $vx_j <_{\mathrm{lex}} u$, то $vx_j \in I_{d+1}$,*
   существует такое l, что $u = vx_l$.

Доказательство. Проверим импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим, что существуют мономы $u \in A[1:n]_{d+1}$ и $v \in R_d$, удовлетворяющие условиям (a) и (b), но пусть $u \neq vx_l$ для всех l. Рассмотрим множество $M = \{w \in R_{d+1} \colon w \leqslant_{\mathrm{lex}} u\}$. Это множество, очевидно, C^R-сжато. Так как $u >_{\mathrm{lex}} vx_n$, то по лемме 2.1.5 имеем, что $u/x_{\max(u)} \geqslant_{\mathrm{lex}} v$. Равенство невозможно, так как в этом случае $u = vx_{\max(u)}$. Следовательно, $u/x_{\max(u)} >_{\mathrm{lex}} v$. Так как множество $\Gamma^R(M)$ C^R-сжато, то $vx_l \in M$ для некоторого l. Однако если $vx_l \in M$, то $vx_l <_{\mathrm{lex}} u$ (мы учли, что v не делит u), а это невозможно по условию, так как в этом случае $vx_l \in I$ — противоречие.

Проверим импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что существует такое C^R-сжатое множество $M \subseteq \mathcal{M}(R_{d+1})$, что $M' = \Gamma^R(M)$ не C^R-сжато. Иначе говоря, существует такой моном $v \in$ $\in \mathcal{M}(R_d) \setminus M'$, что $v <_{\mathrm{lex}} \max M'$. Пусть $u = \max M$, тогда $u/x_{\max(u)} >_{\mathrm{lex}} v$, следовательно,

$vx_n <_{\text{lex}} u$. Кроме того, так как $v \notin M'$, то либо $vx_i \in I$, либо $vx_i >_{\text{lex}} u$ для всех i. Таким образом, мономы u и v удовлетворяют условиям (a) и (b). Поэтому $u = vx_l$ — противоречие. □

Следствие 2.2.2. *Если $I \subseteq A[1:n]$ — мономиальный идеал, не имеющий порождающих, делящихся на x_n, то для $R = A[1:n]/I$ выполняются эквивалентные условия* 1) *и* 2) *теоремы* 2.2.1.

В отличие от отображения Δ^R, которое переводит D^R-сжатые множества в D^R-сжатые вне зависимости от R, отображение Γ^R ведет себя более сложно. Первое необходимое условие показывает связь между выполнением теоремы Маколея и свойствами отображения Γ^R.

Теорема 2.2.3. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — M-идеал, $R = A[1:n]/I$, и пусть множество $M \subseteq \mathcal{M}(R_{d+1})$ C^R-сжато. Тогда множество $\Gamma^R(M)$ тоже C^R-сжато.*

Доказательство. Пусть множество $M' = \Gamma^R(M)$ не является C^R-сжатым. Рассмотрим множество $N = \mathcal{M}(R_d) \setminus M'$. Заметим, что $\Delta^R(N) \subseteq \mathcal{M}(R_{d+1}) \setminus M$. Так как I — M-идеал, то по теореме 2.1.7 имеем, что $|\Delta^R(N)| \geqslant |\Delta^R(D^R N)|$. Кроме того, множество $\Delta^R(D^R N)$ D^R-сжато (см. предложение 2.1.6), следовательно, $\Delta^R(D^R N) \cap M = \varnothing$.

С другой стороны, так как M' не является C^R-сжатым, то $D^R N \cap M'$ непусто, следовательно, $\Delta^R(D^R N) \cap M \neq \varnothing$ — противоречие. □

Так, например, идеал, порожденный мономами $x_1 x_n^s, x_2 x^s, \ldots, x_n^{s+1}$, не является M-идеалом при $s > 0$.

Следующая теорема дает еще одно условие, необходимое для выполнения теоремы Маколея.

Теорема 2.2.4. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — M-идеал. Если d — минимальная степень порождающих идеала I, то существует такое i, что $x_1^{d-1} x_i \in I$.*

Доказательство. Пусть $R = A[1:n]/I$. Предположим обратное, т. е. что $x_1^{d-1} x_i \notin I$ при всех i. Пусть $m \in \mathcal{M}(I_d)$ и x_l делит m. Положим $M = \{m/x_l\}$. Ясно, что $D^R M = \{x_1^{d-1}\}$. Получаем

$$|\Delta^R(D^R M)| = n > n - 1 \geqslant |\Delta^R(M)|,$$

противоречие. □

Например, идеал, порожденный мономом x_2^s, не является M-идеалом при $s > 1$.

2.3. Эквивалентная формулировка теоремы Маколея

В этом разделе рассматривается еще одна формулировка теоремы Маколея, зачастую более полезная, чем две, приведенные выше.

Теорема 2.3.1. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — некоторый мономиальный идеал. Следующие условия равносильны*:

1) *идеал I является M-идеалом*;
2) *пусть $R = A[1:n]/I$. Для всякого $d \geqslant 2$ и всякого $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ выполнено*

$$\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M)).$$

Доказательство. Проверим импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим обратное, т. е. что существует такое множество $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, для которого

$$\Gamma^R(C^R M) \nsubseteq C^R(\Gamma^R(M)).$$

Рассмотрим множество $M' = \mathcal{M}(R_{d-1}) \setminus \Gamma^R(M)$. По теореме 2.1.7 имеем, что $|\Delta^R(M')| \geqslant |\Delta^R(D^R M')|$. Так как $\Delta^R(M') \cap M = \varnothing$ по построению, то $\Delta^R(D^R M') \cap C^R M = \varnothing$ ($\Delta^R(D^R M')$ D^R-сжато по предложению 2.1.6). С другой стороны, $D^R M' \cap \Gamma^R(C^R M) \neq \varnothing$ ($\Gamma^R(C^R M)$ C^R-сжато по теореме 2.2.3). Поэтому $\Delta^R(D^R M') \cap C^R M \neq \varnothing$ — противоречие.

Проверим импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). В силу теоремы 2.1.7 достаточно показать, что

$$|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)|$$

для всякого $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$. Предположим обратное. Рассмотрим множество $M' = \mathcal{M}(R_{d+1}) \backslash \Delta^R(M)$. По условию

$$\Gamma^R(C^R M') \subseteq C^R(\Gamma^R(M')).$$

По построению $\Gamma^R(M') \cap M = \varnothing$, следовательно, $C^R(\Gamma^R(M')) \cap D^R M = \varnothing$. Поэтому $\Gamma^R(C^R M') \cap \cap D^R M = \varnothing$. С другой стороны, $C^R M' \cap \Delta^R(D^R M) \neq \varnothing$, поэтому $\Gamma^R(C^R M') \cap D^R M \neq \varnothing$ — противоречие. □

Достоинство этой формулировки теоремы Маколея заключается в том, что при рассмотрении отображения Γ^R образ каждого монома не зависит от конкретного R, в то время как при рассмотрении отображения Δ^R требуется знать, какие элементы идеала I делятся на этот моном. К сожалению, из-за более сложного строения отображения Γ^R требуется не просто сравнение числа элементов в образах рассматриваемых множеств (как это делается при рассмотрении отображения Δ^R, см. теорему 2.1.7), но включение множеств. С другой стороны, эту проблему удается обойти, если сначала доказать выполнение необходимого условия из теоремы 2.2.3.

Следствие 2.3.2. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — мономиальный идеал, $R = A[1:n]/I$. Если для всякого $d \geqslant 2$ и для всякого C^R-сжатого множества $M \subseteq R_d$ множество $\Gamma^R(M)$ тоже C^R-сжато, то следующие условия равносильны*:

1) *идеал I является M-идеалом*;
2) *для всякого $d \geqslant 2$ и для всякого $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ выполнено неравенство*

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|.$$

Ситуации, в которых удается проверить необходимое условие из теоремы 2.2.3, не так уж редки: например, оно всегда выполняется, когда у идеала I нет порождающих, делящихся на x_n (см. следствие 2.2.2). Кроме того, для его проверки есть удобный аппарат — теорема 2.2.1.

2.4. Теорема Маколея для внешней алгебры

Рассмотрение функций Гильберта однородных идеалов в фактор-алгебрах внешней алгебры можно легко свести к рассмотрению функций Гильберта однородных идеалов в фактор-алгебрах алгебры коммутативных многочленов, поэтому здесь приводятся только основные определения. Изложенные выше результаты распространяются на этот случай очевидным образом.

Пусть e_σ — моном во внешней алгебре $E[1:n]$. Поставим ему в соответствие моном $\mathrm{S}(e_\sigma) = x_{i_1} \dots x_{i_s} \in A[1:n]$, где $\sigma = \{i_1, \dots, i_s\}$, такие мономы будем называть *бесквадратными*. Аналогично, каждому многочлену $f \in E[1:n]$ поставим в соответствие бесквадратный многочлен $\mathrm{S}(f) \in A[1:n]$. Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — идеал во внешней алгебре $E[1:n]$. Через $\mathrm{S}(I)$ обозначим идеал в $A[1:n]$, порожденный бесквадратными многочленами $\mathrm{S}(f)$ для всех $f \in I$. Такие идеалы будем называть *бесквадратными*. Через $\mathrm{Sq}(I)$ обозначим идеал в $A[1:n]$, равный $\mathrm{S}(I) + (x_1^2, \dots, x_n^2)$.

Определение 2.4.1. Идеал $L \subseteq E[1:n]$ называется *лекссегментным*, если $\mathrm{Sq}(I)$ является $(x_1^2, \dots, x_n^2)$-лекссегментным. Пусть I — некоторый мономиальный идеал в $E[1:n]$. Идеал $J \subseteq \subseteq E[1:n]$ называется *I-лекссегментным*, если $\mathrm{Sq}(J)$ является $\mathrm{Sq}(I)$-лекссегментным. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1:n]$ называется *M-идеалом*, если $\mathrm{Sq}(I)$ является M-идеалом.

Теорема 2.4.2. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — мономиальный идеал, $R = E[1:n]/I$. Условие* 2) *теоремы* 2.2.1 (*для идеала* $\mathrm{Sq}(I)$) *равносильно следующему*: *для всякого $d \geqslant 0$ и для всяких мономов $e_\sigma \in R_d$, $e_\tau \in R_{d+1}$, удовлетворяющих условиям*

1) $e_\sigma \leqslant_{\mathrm{lex}} e_{\tau \backslash \{\max(\tau)\}}$,
2) *если $i \notin \sigma$ и $e_{\sigma \cup \{i\}} <_{\mathrm{lex}} e_\tau$, то $e_{\sigma \cup \{i\}} \in I$,*

существует такое j, что $e_\tau = e_{\sigma \cup \{j\}}$.

Доказательство. Действительно, пусть выполнено условие 2) теоремы 2.2.1. Рассмотрим два монома $e_\sigma \in R_d$, $e_\tau \in R_{d+1}$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) теоремы 2.4.2. Из этих условий вытекает, что мономы $\mathrm{S}(e_\sigma)$ и $\mathrm{S}(e_\tau)$ удовлетворяют требованиям, налагаемых в условии 2), поэтому $\mathrm{S}(e_\tau) = x_j \mathrm{S}(e_\sigma)$ для некоторого j и, следовательно, $e_\tau = e_{\sigma \cup \{j\}}$. Обратная импликация доказывается аналогично. □

2.5. Поведение при расширении кольца новыми переменными: случай кольца многочленов

В этом разделе доказывается один из основных результатов работы — теорема об устойчивости M-идеалов к расширению кольца с помощью новых переменных.

Теорема 2.5.1. *Пусть $I' \subseteq A[1:(n-1)]$ — M-идеал, $R' = A[1:(n-1)]/I'$. Тогда $I'A[1:n] \subseteq A[1:n]$ тоже M-идеал.*

Докажем предварительно следующее предложение.

Предложение 2.5.2. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — M-идеал, $R = A[1:n]/I$ и $d \geqslant 0$. Тогда идеал $J(d) \subseteq A[2:n]$, порожденный такими мономами u, что $ux_1^d \in I$, является M-идеалом.*

Доказательство. Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R(d)_t)$. Нужно доказать, что

$$|\Delta^{R(d)}(D^{R(d)}M)| \leqslant |\Delta^{R(d)}(M)|.$$

Рассмотрим множество $M' = x_1^d M \cup B \subseteq R_{d+t}$, где $B = \{m \in \mathcal{M}(R_{t+d})\colon m \text{ делится на } x_1^{d+1}\}$. Ясно, что $D^R M' = x_1^d D^{R(d)}M \cup B$, кроме того,

$$\Delta^R(M') = x_1^d \Delta^{R(d)}(M) \sqcup B',$$
$$\Delta^R(D^R M') = x_1^d \Delta^{R(d)}(D^{R(d)}M) \sqcup B',$$

где $B' = \{m \in \mathcal{M}(R_{t+d+1})\colon m \text{ делится на } x_1^{d+1}\}$. Так как I — M-идеал, то

$$|\Delta^R(M')| = |\Delta^{R(d)}(M)| + |B'| \geqslant |\Delta^{R(d)}(D^{R(d)}M)| + |B'| = |\Delta^R(D^R M')|,$$

откуда получаем, что $|\Delta^{R(d)}(M)| \geqslant |\Delta^{R(d)}(D^{R(d)}M)|$. □

Доказательство теоремы 2.5.1. Пусть $I = I'A[1:n] \subseteq A[1:n]$ и $R = A[1:n]/I$.

Проведем индукцию по n. База индукции при $n = 2$ очевидна. Пусть $n > 2$ и для всех идеалов $I' \subseteq A[1:(l-1)]$, где $l < n$, теорема уже доказана.

В силу теоремы 2.3.1, а также следствий 2.3.2 и 2.2.2 для доказательства теоремы достаточно показать, что для всякого множества $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ выполнено неравенство

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|.$$

Так как у идеала I нет порождающих, делящихся на x_n, то множество $\mathcal{M}(R_d)$ можно представить в виде

$$\mathcal{M}(R_d) = \bigcup_{i=0}^{d} R_{d,n=i},$$

где $R_{d,n=i} = x_n^i R'_{d-i}$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, то положим

$$M_{n=i} = M \cap R_{d,n=i}.$$

Далее, обозначим через $C^R_{n=i}M_{n=i}$ множество, состоящее из наименьших $|M_{n=i}|$ мономов в $R_{d,n=i}$, и положим

$$C^R_n M = \bigcup_{i=0}^{d} C^R_{n=i} M_{n=i}.$$

Кроме того, пусть

$$\Gamma^R_i(M) = \{m \in \mathcal{M}(R_{d-1})\colon mx_i \in M\},$$
$$\Gamma^R_{-i}(M) = \{m \in \mathcal{M}(R_{d-1})\colon mx_j \in M \text{ для некоторого } j \neq i\}.$$

Лемма 2.5.3. *Пусть $M \subseteq R_d$. Тогда $|\Gamma^R(C^R_n M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma^R(C_n^R M) = \Gamma^R\Big(\bigcup_{i=0}^{d} C_{n=i}^R M_{n=i}\Big) = \bigcup_{i=0}^{d} \Gamma^R(C_{n=i}^R M_{n=i}) = \bigcup_{i=0}^{d} (\Gamma_n^R(C_{n=i}^R M_{n=i}) \cup \Gamma_{-n}^R(C_{n=i}^R M_{n=i})).$$

Рассматривая множество $M_{n=i}$ как подмножество в $\mathcal{M}(R'_{d-i})$ (т. е. сократив все элементы на x_n^i), получаем, что

$$\Gamma_{-n}^R(C_{n=i}^R M_{n=i}) \subseteq C_{n=i}^R \Gamma_{-n}^R(M_{n=i})$$

($I' - M$-идеал). Кроме того,

$$\Gamma_n^R(C_{n=i}^R M_{n=i}) = C_{n=i-1}^R \Gamma_n^R(M_{n=i}),$$

так как Γ_n^R есть просто деление каждого элемента на x_n. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\Gamma^R(C_n^R M) &\subseteq \Big(\bigcup_{i=1}^{d} C_{n=i-1}^R \Gamma_n^R(M_{n=i})\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=0}^{d} C_{n=i}^R \Gamma_{-n}^R(M_{n=i})\Big) = \\
&= \Big(\bigcup_{i=0}^{d-1} (C_{n=i}^R \Gamma_n^R(M_{n=i+1}) \cup C_{n=i}^R \Gamma_{-n}^R(M_{n=i}))\Big) \cup C_{n=d}^R \Gamma_{-n}^R(M_{n=d}) \subseteq \\
&\subseteq \Big(\bigcup_{i=0}^{d-1} C_{n=i}^R (\Gamma_n^R(M_{n=i+1}) \cup \Gamma_{-n}^R(M_{n=i}))\Big) \cup C_{n=d}^R \Gamma_{-n}^R(M_{n=d}) = C_n^R(\Gamma^R M).
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $|C_n^R(\Gamma^R M)| = |\Gamma^R M|$. □

Пусть $N(m)$ — номер монома m степени d по лексикографическому порядку, если элементы пронумерованы начиная с наименьшего, а $N(M)$, где $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, — сумма номеров элементов, принадлежащих множеству M.

Лемма 2.5.4. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, причем M не является C^R-сжатым и $u = \max M$ делится на x_n. Тогда существует множество $\tilde{M} \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, удовлетворяющее условиям $|M| = |\tilde{M}|$, $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$.*

Доказательство. Пусть $v = \min(\mathcal{M}(R_d) \setminus M)$. Так как M не является C^R-сжатым, то $v <_{\text{lex}} u$. Положим $\tilde{M} = (M \setminus \{u\}) \cup \{v\}$. Ясно, что $|M| = |\tilde{M}|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$. Заметим, далее, что $u/x_n \notin \Gamma^R(M \setminus \{u\})$, следовательно,

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(M \setminus \{u\})| + 1.$$

С другой стороны, $v/x_i \in \Gamma^R(M \setminus \{u\})$ для всякого $i \neq n$. Действительно, $vx_n/x_i \in M \setminus \{u\}$, так как $v = \min(\mathcal{M}(R_d) \setminus M)$, следовательно, $vx_n/x_i \in M$. Поэтому

$$|\Gamma^R(\tilde{M})| \leqslant |\Gamma^R(M \setminus \{u\})| + 1,$$

отсюда и вытекает требуемое неравенство. □

Рассмотрим произвольное множество $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$. Нужно показать, что $|\Gamma^R(C^R M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|$. Проведем индукцию по d. База индукции вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.5.5. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_1)$. Тогда $\Gamma^R(M) = \Gamma^R(C^R M) = \{1\}$.*

Доказательство очевидно.

Замечание 2.5.6. Рассмотрение множеств $M \subseteq \mathcal{M}(R_1)$ формально не требуется для выполнения теоремы Маколея (см. теорему 2.3.1), однако мы вполне можем использовать это в качестве базы индукции.

Предположим, что для степеней вплоть до $d-1$ теорема уже доказана, докажем ее теперь для степени d. Множества, удовлетворяющие условию $M = C_n^R M$, мы будем называть *n-сжатыми*.

Множество $\mathcal{M}(R_d)$ можно представить в виде $\mathcal{M}(R_d) = \mathcal{M}(R'_d) \cup x_n \mathcal{M}(R_{d-1})$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, то положим $M' = M \cap \mathcal{M}(R'_d)$ и $M'' = M \cap x_n \mathcal{M}(R_{d-1})$. Справедливо следующее равенство:

$$\Gamma^R(M) = \Gamma^R_{-n}(M') \cup \Gamma^R_n(M_{n=1}) \cup (x_n \Gamma^R(M''/x_n)), \tag{3}$$

где $M''/x_n \subseteq \mathcal{M}(R_{d-1})$ состоит из элементов M'', поделенных на x_n. Более того, первые два множества, стоящие в правой части равенства (3), не пересекаются с третьим.

Лемма 2.5.7. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — n-сжатое множество, причем $\max M$ не делится на x_n и $M'' \neq x_n C^R(M''/x_n)$. Тогда множество $\tilde{M} = M' \cup x_n C^R(M''/x_n)$ удовлетворяет условиям $|M| = |\tilde{M}|$, $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$.*

Доказательство. Ясно, что $|M| = |\tilde{M}|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$. Для доказательства неравенства $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$ воспользуемся представлением (3). Пусть $u = \max M = \max \tilde{M} = \max M'$, $u_1 = \max M_{n=1}$, $u_2 = \max \tilde{M}_{n=1}$. Так как $u >_{\text{lex}} u_1$, $u >_{\text{lex}} u_2$, то $ux_n/x_{\max(u)} \geqslant_{\text{lex}} u_1$ и $ux_n/x_{\max(u)} \geqslant_{\text{lex}} u_2$. Следовательно, $\Gamma^R_n(M_{n=1}) \subseteq \Gamma^R_{-n}(M')$ и аналогично для $\tilde{M}$.

Заметим, что по предположению индукции $|\Gamma^R(M''/x_n)| \geqslant |\Gamma^R(C^R(M''/x_n))|$. Кроме того, $\tilde{M}' = M'$, поэтому $\Gamma^R_{-n}(M') = \Gamma^R_{-n}(\tilde{M}')$, отсюда и вытекает требуемое неравенство. □

Лемма 2.5.8. *Пусть $J(t) \subseteq A[2:n]$ — идеал, порожденный всеми такими мономами $u \in A[2:n]$, что $ux_1^t \in I$. Тогда $J(t)$ — M-идеал.*

Доказательство. Действительно, так как I' — M-идеал, по предложению 2.5.2 $J'(t)$ тоже M-идеал, где $J'(t) \subseteq A[2:(n-1)]$ — идеал, порожденный всеми такими мономами $u \in A[2:(n-1)]$, что $ux_1^t \in I'$. По предположению индукции идеал $J(t) = J'(t)A[2:n]$ тоже является M-идеалом. □

Лемма 2.5.9. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — n-сжатое, но не C^R-сжатое множество, причем $M'' = x_n C^R(M''/x_n)$ и $u = \max M$ не делится на x_n, но делится на x_1. Если $v = \max M_{n=1} \geqslant_{\text{lex}} \geqslant_{\text{lex}} ux_n/x_1$, то существует множество $\tilde{M} \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, удовлетворяющее условиям $|M| = |\tilde{M}|$, $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$.*

Доказательство. Пусть $u = u'x_1^t$, где u' не делится на x_1. Представим множество $\mathcal{M}(R_d)$ в виде

$$\mathcal{M}(R_d) = R_{<t} \cup R_{=t} \cup R_{>t},$$

где $R_{<t}$ состоит из тех мономов, принадлежащих R_d, которые не делятся на x_1^t, $R_{>t}$ — из тех, которые делятся на x_1^{t+1}, а $R_{=t} = \mathcal{M}(R_d) \setminus (R_{<t} \cup R_{>t})$. Пусть также $M_{<t} = M \cap R_{<t}$ и $M_{=t} = M \cap R_{=t}$ (по построению $M \cap R_{>t} = \varnothing$).

Мы можем рассмотреть множество $M_{=t}/x_1^t$ как подмножество в $R(t)$. Пусть $L = x_1^t C^{R(t)}(M_{=t}/x_1^t) \subseteq R_{=t}$. Положим $\tilde{M} = L \cup M_{<t}$. Очевидно, что $|\tilde{M}| = |M|$. Заметим также, что $L \neq M_{=t}$, так как иначе M C^R-сжато. Следовательно, $N(M) > N(\tilde{M})$.

Осталось доказать, что $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$. Заметим, что

$$|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(M_{<t}) \cup \Gamma^R_1(M_{=t})| + |x_1^t \Gamma^{R(t)}(M_{=t}/x_1^t)|$$

и аналогично для $\tilde{M}$. Пусть $m \in R_{=t}$ — произвольный моном с условием $m \leqslant_{\text{lex}} u$. По условию леммы $ux_n/x_1 \leqslant_{\text{lex}} v$, следовательно, $mx_n/x_1 \leqslant_{\text{lex}} v$. Поэтому $m/x_1 \in \Gamma^R(M_{<t})$. Таким образом,

$$|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(M_{<t})| + |\Gamma^{R(t)}(M_{=t}/x_1^t)|,$$
$$|\Gamma^R(\tilde{M})| = |\Gamma^R(M_{<t})| + |\Gamma^{R(t)}(L/x_1^t)|.$$

По лемме 2.5.8 $J(t)$ является M-идеалом, следовательно,

$$|\Gamma^{R(t)}(M_{=t}/x_1^t)| \geqslant |\Gamma^{R(t)}(L/x_1^t)|,$$

откуда и вытекает искомое неравенство. □

Лемма 2.5.10. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — n-сжатое, но не C^R-сжатое множество, причем $M'' = x_n C^R(M''/x_n)$ и $u = \max M$ не делится на x_n, но делится на x_1. Если $v = \max M_{n=1} <_{\mathrm{lex}} u x_n/x_1$, то существует множество $\tilde{M} \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, удовлетворяющее условиям $|M| = |\tilde{M}|$, $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение f, ставящее в соответствие каждому элементу $u \in M_{n=0}$ минимальный моном $f(u)$ вида $u x_n^t/x_1^t$, не принадлежащий $M \setminus M_{n=0}$. Ясно, что при этом отображении разным мономам соответствуют разные. Пусть

$$\tilde{M} = f(M_{n=0}) \cup (M \setminus M_{n=0}).$$

Очевидно, что $|M| = |\tilde{M}|$. Кроме того, в силу условия $v <_{\mathrm{lex}} u x_n/x_1$ имеем $N(M) > N(\tilde{M})$. Докажем, что $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$. Обозначим

$$\begin{aligned} A &= M \cap \tilde{M}, \qquad & A' &= \Gamma^R(A), \\ B &= M \setminus A, \qquad & B' &= \Gamma^R(B) \setminus A', \\ C &= \tilde{M} \setminus A, \qquad & C' &= \Gamma^R(C) \setminus A'. \end{aligned}$$

Ясно, что $C \subseteq f(M_{n=0})$. Заметим также, что если $w \in C$, то $w/x_1 \in A'$ (по построению отображения f). Пусть $v \in C'$. Поставим ему в соответствие элемент $g(v)$ по следующему правилу: если $v = w/x_n$, где $w \in C$, то положим $g(v) = f^{-1}(w)/x_1$; если $v = w/x_i$, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, то $g(v) = f^{-1}(w)/x_i$.

Проверим корректность этого определения: пусть моном v получается двумя способами $v = w_1/x_i = w_2/x_j$. Если $i < j < n$, то $w_1 = u_1 x_n^t/x_1^t$, $w_2 = u_2 x_n^t/x_1^t$, где $u_1, u_2 \in B$, откуда получаем, что $u_1/x_i = u_2/x_j$, т. е. $g(v)$ корректно определено. Если $i < j = n$, то $w_1 = u_1 x_n^t/x_1^t$, $w_2 = u_2 x_n^{t+1}/x_1^{t+1}$, где $u_1, u_2 \in B$, откуда получаем, что $u_1/x_i = u_2/x_1$, т. е. $g(v)$ корректно определено.

Покажем, что отображение g переводит разные элементы в разные. Пусть $v_1, v_2 \in C'$ и $g(v_1) = g(v_2)$. В этом случае $v_1 = w_1/x_i$, $v_2 = w_2/x_j$, где $w_1, w_2 \in C$. Пусть $w_1 = u_1 x_n^t/x_1^t$ и $w_2 = u_2 x_n^s/x_1^s$, где $u_1, u_2 \in B$. Если $i, j < n$, то $u_1/x_i = u_2/x_j$. При этом если $t \neq s$ (для определенности $t > s$), то $u_2 x_n^t/x_1^t \in A$. Следовательно, $u_2 x_n^t/(x_1^t x_j) = v_1 \in \Gamma^R(A)$ — противоречие. Поэтому $t = s$ и, следовательно, $v_1 = v_2$. Если же $j = n$, то $u_1/x_i = u_2/x_1$. При $t > s$ имеем $u_2 x_n^t/x_1^t \in A$, следовательно, $u_2 x_n^t/x_1^{t+1} = v_1 \in \Gamma^R(A)$ — противоречие. При $t = s$ имеем $u_2 x_n^{t+1}/x_1^{t+1} \in A$, следовательно, $v_1 = u_2 x_n^t/x_1^{t+1} \in \Gamma^R(A)$ — противоречие. Разберем случай $t < s$. Если u_1 делится на x_1^s, то $u_1 x_n^s/x_1^s \in A$ и, следовательно, $u_1 x_n^s/(x_1^s x_i) = v_2 \in \Gamma^R(A)$ — противоречие. Если u_1 не делится на x_1^s, то из равенства $u_1/x_i = u_2/x_1$ следует, что $s = t+1$, т. е. $v_1 = u_1 x_n^t/(x_1^t x_i) = u_2 x_n^t/(x_1^{t+1}) = v_2$.

Покажем теперь, что $g(C') \subseteq B'$. Действительно, пусть $g(v) \in A'$ для некоторого $v \in C'$. Пусть $v = w/x_i$ для некоторого $w \in C$ и $u = f^{-1}(w) = w x_1^t/x_n^t \in B$. Так как $g(v) \in A'$, то $g(v) = \tilde{u}/x_j$, где $\tilde{u} \in A$. Если $1 < i < n$, то $u/x_i = \tilde{u}/x_j$. Следовательно, $\tilde{w} = \tilde{u} x_n^t/x_1^t = w x_j/x_i \in A$, откуда получаем, что $v = \tilde{w}/x_j \in A'$ — противоречие. Если $i = n$, то $u/x_1 = \tilde{u}/x_j$. Следовательно, $\tilde{w} = \tilde{u} x_n^{t-1}/x_1^{t-1} = w x_j/x_n \in A$, откуда получаем, что $v = \tilde{w}/x_j \in A'$ — противоречие.

Таким образом, $|\Gamma^R(M)| = |A'| + |B'| \geqslant |A'| + |C'| = |\Gamma^R(\tilde{M})|$. □

Лемма 2.5.11. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — n-сжатое, но не C^R-сжатое множество, причем $M'' = x_n C^R(M''/x_n)$ и $u = \max M$ не делится на x_n и на x_1. Тогда существует множество $\tilde{M} \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, удовлетворяющее условиям $|M| = |\tilde{M}|$, $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(\tilde{M})|$ и $N(M) > N(\tilde{M})$.*

Доказательство. В этом случае $M = M_{=0}$, $\Gamma^R(M) = \Gamma^{R(0)}(M)$, $C^R(M) = C^{R(0)}(M)$. Следовательно, если взять $\tilde{M} = C^R(M)$, то утверждение леммы вытекает из того, что $J(0)$ — M-идеал (лемма 2.5.8). □

Теперь можно завершить доказательство теоремы 2.5.1. Проведем индукцию по $N(M)$ среди всех множеств $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, имеющих одинаковую мощность. База индукции очевидна: в этом

случае $M = C^R M$. Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — произвольное множество, причем для любого $\tilde{M} \subseteq R_d$, удовлетворяющего условиям $|\tilde{M}| = |M|$ и $N(\tilde{M}) < N(M)$, теорема уже доказана.

Если множество M не является n-сжатым, то, применив лемму 2.5.3 и предположение индукции, мы получим утверждение теоремы. Далее полагаем, что M n-сжато. Если максимальный элемент M делится на x_n, то выполнение теоремы вытекает из леммы 2.5.4 и предположения индукции. Если же максимальный элемент M не делится на x_n, то нужно применить одну из лемм 2.5.7, 2.5.9, 2.5.10 или 2.5.11 и снова использовать предположение индукции. □

Доказанный результат позволяет получить теорему Маколея для кольца многочленов в качестве простого следствия.

Следствие 2.5.12 (Маколей [29]). *Нулевой идеал* $(0) \subseteq A[1:n]$ *является* M*-идеалом.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ теорема очевидна, для доказательства шага индукции достаточно применить теорему 2.5.1. □

2.6. Поведение при расширении кольца новыми переменными: случай внешней алгебры

В этом разделе доказывается аналог теоремы об устойчивости при расширении кольца (теорема 2.5.1) для M-идеалов во внешней алгебре. Идея доказательства сходна с использовавшейся в случае кольца многочленов.

Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — некоторый мономиальный идеал. Обозначим через $J_I(0)$ мономиальный идеал в $E[2:n]$, порожденный такими мономами $e_\sigma \in E[2:n]$, что $e_\sigma \in I$, а через $J_I(1)$ — мономиальный идеал в $E[2:n]$, порожденный такими мономами $e_\sigma \in E[2:n]$, что $e_{\sigma\cup\{1\}} \in I$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(E[1:n]_d)$ — некоторое множество, то положим

$$e_i \wedge M = \{e_{\sigma\cup\{i\}} \colon e_\sigma \in M,\ i \notin \sigma\}.$$

Предложение 2.6.1. *Пусть* $I \subseteq E[1:n]$ — M*-идеал,* $R = E[1:n]/I$*. Тогда идеалы* $J_I(0), J_I(1) \subseteq E[2:n]$ *тоже являются* M*-идеалами.*

Доказательство. Пусть $R(d) = E[2:n]/J_I(d)$ при $d = 0, 1$, пусть также $M \subseteq \mathcal{M}(R(d)_t)$.

Рассмотрим сначала случай $d = 0$. Нужно доказать, что

$$|\Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M)| \leqslant |\Delta^{R(0)}(M)|.$$

Мы можем отождествить M с соответствующим подмножеством в $\mathcal{M}(R_t)$. Рассмотрим $M' = M \cup B \subseteq \mathcal{M}(R_t)$, где

$$B = \{e_\sigma \in \mathcal{M}(R_t) \colon 1 \in \sigma\}.$$

Ясно, что $D^R M' = D^{R(0)}M \cup B$, кроме того,

$$\Delta^R(M') = \Delta^{R(0)}(M) \sqcup B',$$
$$\Delta^R(D^R M') = \Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M) \sqcup B',$$

где

$$B' = \{e_\sigma \in \mathcal{M}(R_{t+1}) \colon 1 \in \sigma\}.$$

Так как в R выполнена теорема Маколея, то

$$|\Delta^R(M')| = |\Delta^{R(0)}(M)| + |B'| \geqslant |\Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M)| + |B'| = |\Delta^R(D^R M')|,$$

откуда получаем, что $|\Delta^{R(0)}(M)| \geqslant |\Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M)|$.

В случае $d = 1$ доказательство аналогично, нужно только в качестве B и B' взять пустые множества. □

Теорема 2.6.2. *Пусть* $I' \subseteq E[1:(n-1)]$ — M*-идеал,* $R' = E[1:(n-1)]/I'$*. Тогда* $I = I'E[1:n]$ *тоже* M*-идеал.*

Доказательство. Пусть $R = E[1:n]/I$. Проведем индукцию по n. База индукции при $n = 2$ очевидна. Пусть $n > 2$ и для всех идеалов $I' \subseteq E[1:(l-1)]$, где $l < n$, теорема уже доказана.

Лемма 2.6.3. *Пусть* $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — C^R*-сжатое множество. Тогда* $\Gamma^R(M)$ *тоже* C^R*-сжатое.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых мономов $e_\sigma \in R_d$, $e_\tau \in R_{d+1}$, удовлетворяющих условиям 1) и 2) теоремы 2.4.2, выполнено равенство $e_\tau = e_{\sigma\cup\{j\}}$ для некоторого j. Действительно, пусть e_σ и e_τ удовлетворяют условиям 1) и 2), но при этом $\sigma \not\subseteq \tau$. Мы можем считать, что $n \in \tau$, в противном случае заменим τ на $(\tau\cup\{n\})\setminus\{\max\tau\}$ — условия 1) и 2) теоремы 2.4.2 будут выполняться. Заметим также, что так как $e_\sigma \leqslant_{\mathrm{lex}} e_{\tau\setminus\{\max\tau\}}$, то $e_\sigma \wedge e_n \in I$, следовательно, $n \in \sigma$ (у I нет порождающих, делящихся на e_n). Рассмотрим множества $\sigma' = \sigma\setminus\{n\}$ и $\tau' = \tau\setminus\{n\}$, а также соответствующие им мономы $e_{\tau'}$ и $e_{\sigma'}$ в R'. Так как $I' - M$-идеал, а $e_{\tau'}$ и $e_{\sigma'}$, как легко видеть, удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 2.4.2 (в R'), то по теореме 2.4.2 имеем, что $\sigma' \subseteq \tau'$, поэтому $\sigma \subseteq \tau$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.6.4. *Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$. Тогда*

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(C_n^R M)|.$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= M_{n=1}, & A_0 &= M_{n=0},\\ B_1 &= (C_n^R M)_{n=1}, & B_0 &= (C_n^R M)_{n=0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A'_{-1} &= \Gamma^R_{-n}(A_1), & A'_1 &= \Gamma^R_n(A_1), & A'_0 &= \Gamma^R(A_0),\\ B'_{-1} &= \Gamma^R_{-n}(B_1), & B'_1 &= \Gamma^R_n(B_1), & B'_0 &= \Gamma^R(B_0). \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M) &= A'_{-1} \sqcup (A'_1 \cup A'_0),\\ \Gamma^R(C_n^R M) &= B'_{-1} \sqcup (B'_1 \cup B'_0). \end{aligned}$$

Рассматривая A_0 и B_0 как подмножества в R'_d, получаем, что

$$|B'_0| \leqslant |A'_0| \tag{4}$$

($I' - M$-идеал). Аналогично, так как у I нет порождающих, делящихся на e_n, мы можем отождествить $\mathcal{M}(R_d)_{n=1}$ с $\mathcal{M}(R'_{d-1})$ (сократив все элементы $\mathcal{M}(R_d)_{n=1}$ на e_n) и заключить, что

$$|B'_{-1}| \leqslant |A'_{-1}|. \tag{5}$$

Заметим, далее, что множества B'_1 и B'_0 являются $C^{R'}$-сжатыми (если рассматривать их как подмножества в $\mathcal{M}(R'_{d-1})$), поэтому либо $B'_1 \subseteq B'_0$, либо $B'_0 \subseteq B'_1$. В частности, $|B'_1 \cup B'_0| = \max(|B'_1|, |B'_0|)$. Так как $|B'_1| = |A'_1|$, то, используя неравенство (4), получаем, что

$$|A'_1 \cup A'_0| \geqslant \max(|A'_1|, |A'_0|) \geqslant \max(|B'_1|, |B'_0|) = |B'_1 \cup B'_0|.$$

Теперь, применяя неравенство (5), получаем, что

$$|\Gamma^R(M)| = |A'_1 \cup A'_0| + |A'_{-1}| \geqslant |B'_1 \cup B'_0| + |B'_{-1}| = |\Gamma^R(C_n^R M)|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.6.5. *Пусть M — n-сжатое, но не обратно I-лекссегментное множество. Если $\max M = \max M_{n=1}$, то*

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(M')|,$$

где

$$M' = [M \setminus \{\max M\}] \cup \{\min[\mathcal{M}(R_d) \setminus M]\}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $e_\sigma = \max M$, $e_\tau = \min(\mathcal{M}(R_d) \setminus M)$. Если $j \in \tau$, то $e_{(\tau\cup\{n\})\setminus\{j\}} \in M \setminus \{e_\sigma\}$, следовательно,

$$|\Gamma^R(M')| = |\Gamma^R(M \setminus \{e_\sigma\})| \leqslant |\Gamma^R(M)|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.6.6. *Идеалы $J_I(0), J_I(1) \subseteq E[2:n]$ являются M-идеалами.*

Доказательство. Так как I' является M-идеалом, то по предложению 2.6.1 $J_{I'}(0), J_{I'}(1) \subseteq \subseteq E[2:(n-1)]$ — M-идеалы. По предположению индукции идеалы $J_{I'}(0)E[2:n], J_{I'}(1)E[2:n] \subseteq \subseteq E[2:n]$ тоже M-идеалы. Остается заметить, что $J_I(0) = J_{I'}(0)E[2:n]$ и $J_I(1) = J_{I'}(1)E[2:n]$. □

Лемма 2.6.7. *Пусть M — n-сжатое, но не C^R-сжатое множество. Если $\max M = \max M_{n=0}$ и $\max M$ не делится на e_1, то*

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(C^R M)|.$$

Доказательство. В этом случае в M нет мономов, делящихся на e_1, и мы можем отождествить M с подмножеством в $\mathcal{M}(R(0)_d)$. По лемме 2.6.6 $J(0)$ является M-идеалом, следовательно,

$$|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^{R(0)}(M)| \geqslant |\Gamma^{R(0)}(C^{R(0)}M)| = |\Gamma^R(C^R M)|,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 2.6.8. *Пусть M — n-сжатое, но не C^R-сжатое множество. Если $e_\sigma = \max M = \max M_{n=0}$, $1 \in \sigma$ и $e_{(\sigma\cup\{n\})\setminus\{1\}} \in M$, то*

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(M')|,$$

где

$$M' = M_{1=0} \cup (e_1 \wedge C^{R(1)}(M_{1=1}/e_1)).$$

Доказательство. Мы можем отождествить множество $\mathcal{M}(R_d)_{1=1}$ с $\mathcal{M}(R(1)_d)$, сократив все элементы на e_1. Пусть

$$\begin{aligned} &A_1 = M_{1=1}, \qquad A_0 = M_{1=0}, \qquad B_1 = e_1 \wedge C^{R(1)}(\Gamma_1^R(M_{1=1})),\\ &A'_1 = \Gamma_1^R(A_1), \qquad A'_0 = \Gamma^R(A_0), \qquad A'_{-1} = \Gamma_{-1}^R(A_1),\\ &B'_1 = \Gamma_1^R(B_1), \quad B'_{-1} = \Gamma_{-1}^R(B_1). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M) &= A'_{-1} \sqcup (A'_1 \cup A'_0),\\ \Gamma^R(M') &= B'_{-1} \sqcup (B'_1 \cup A'_0), \end{aligned}$$

Так как $J(1)$ — M-идеал (лемма 2.6.6), то

$$|A'_{-1}| \geqslant |B'_{-1}|. \tag{6}$$

Пусть

$$L = \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_d) \colon e_\rho \leqslant_{\text{lex}} e_{(\sigma\cup\{n\})\setminus\{1\}}\}.$$

Ясно, что $L \subseteq A_0$. Пусть $e_\tau \in A_1$ и $j \in \tau$. Так как $e_\tau \leqslant_{\text{lex}} e_\sigma$, то $e_{\tau\setminus\{1\}} \leqslant_{\text{lex}} e_{\sigma\setminus\{1\}}$. Так как множество $L' = \Gamma^R(L)$ C^R-сжато (лемма 2.6.3) и $e_{\sigma\setminus\{1\}} \in L'$, то $e_{\tau\setminus\{1\}} \in L' \subseteq A'_0$. Таким образом, $A'_1 \subseteq A'_0$. Аналогично, $B'_1 \subseteq A'_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M) &= A'_{-1} \sqcup A'_0,\\ \Gamma^R(M') &= B'_{-1} \sqcup A'_0. \end{aligned}$$

Используя неравенство (6), получаем, что

$$|\Gamma^R(M)| = |A'_{-1}| + |A'_0| \geqslant |B'_{-1}| + |A'_0| = |\Gamma^R(M')|.$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим отображение $i\colon M \to \mathcal{M}(R_d)$, действующее по правилу

$$i(e_\sigma) = \begin{cases} e_{(\sigma\cup\{n\})\setminus\{1\}}, & \text{если } 1 \in \sigma,\ n \notin \sigma,\ e_{(\sigma\cup\{n\})\setminus\{1\}} \notin M,\\ e_\sigma & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 2.6.9. *Пусть M — n-сжатое, но не C^R-сжатое множество. Если $e_\sigma = \max M = \max M_{n=0}$, $1 \in \sigma$ и $e_{(\sigma\cup\{n\})\setminus\{1\}} \notin M$, то*

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(i(M))|.$$

Доказательство. Пусть

$$A_1 = M \setminus i(M), \qquad A_0 = M \cap i(M), \qquad B_1 = i(M) \setminus M,$$
$$A_1' = \Gamma^R(M) \setminus \Gamma^R(i(M)), \qquad A_0' = \Gamma^R(M) \cap \Gamma^R(i(M)), \qquad B_1' = \Gamma^R(i(M)) \setminus \Gamma^R(M).$$

Покажем, что $|A_1'| \geqslant |B_1'|$. Предположим, что $e_\tau \in B_1'$, в частности $e_{\tau\cup\{j\}} \in B_1$ для некоторого $j \notin \tau$. Рассмотрим элемент $e_{\tau'} = (e_{(\tau\cup\{j,1\})\setminus\{n\}})$. Ясно, что $e_{\tau'} \in A_1$. Заметим также, что $j < n$ (иначе $e_\tau \in \Gamma^R(M)$) и $1 < j$. Пусть $s(e_\tau) = e_{\tau'\setminus\{j\}} = e_{(\tau\cup 1)\setminus\{n\}}$. Покажем, что $s(e_\tau) \in A_1'$. Действительно, если это не так, то $s(e_\tau) \in A_0' \cup B_1'$. Так как $s(e_\tau)$ делится на e_1, то $s(e_\tau) \notin B_1'$. Следовательно, $e_{\tau\cup\{t\}} \in A_0$ для некоторого $t \notin \tau$, что невозможно. Таким образом, $s(B_1') \subseteq A_1'$. Так как отображение s, очевидно, инъективно, то $|B_1'| \leqslant |A_1'|$. Отсюда следует, что

$$|\Gamma^R(M)| = |A_0'| + |A_1'| \geqslant |A_0'| + |B_1'| = |\Gamma^R(i(M))|.$$

Лемма доказана. □

Завершим теперь доказательство теоремы 2.6.2. Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — произвольное множество. В силу следствия 2.3.2 и леммы 2.6.3 достаточно показать, что

$$|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(C^R M)|.$$

По лемме 2.6.4 можно считать, что множество M n-сжато. Пусть $N(e_\sigma)$ — номер монома степени d по лексикографическому порядку, если мономы пронумерованы начиная с наименьшего, а $N(M)$ — сумма номеров мономов множества M. Проведем индукцию по $N(M)$. База индукции очевидна (минимальное $N(M)$ имеет C^R-сжатое множество). Если же M является n-сжатым, но не C^R-сжатым множеством, то, применяя одну из лемм 2.6.5, 2.6.7, 2.6.8 или 2.6.9, можно перейти к множеству с меньшим $N(M)$, откуда по предположению индукции вытекает утверждение теоремы. □

Из доказанной теоремы сразу вытекает результат Крушкаля—Катоны, описывающий функции Гильберта в фактор-кольце по квадратам всех переменных (или, что равносильно, f-векторы симплициальных комплексов, или функции Гильберта однородных идеалов во внешней алгебре).

Следствие 2.6.10 (Крушкаль [28], Катона [27])**.** *Идеал, порожденный квадратами всех переменных, является M-идеалом.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ теорема очевидна, для доказательства шага индукции достаточно применить теорему 2.6.2. □

2.7. Примеры M-идеалов

Некоторые примеры M-идеалов давно известны:

1) (Маколей) нулевой идеал $(0) \subseteq A[1:n]$ является M-идеалом (см. следствие 2.5.12);
2) (Крушкаль, Катона) идеал, порожденный квадратами всех переменных, является M-идеалом (см. следствие 2.6.10).

Клементс и Линдстрем [12] получили результат, обобщающий два предыдущих случая.

Теорема 2.7.1. *Идеал $(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}) \subseteq A[1:n]$, где $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n \leqslant \infty$, является M-идеалом.*

Ниже приводятся некоторые новые примеры M-идеалов. Самый простой — I-лекссегментные идеалы.

Теорема 2.7.2. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — M-идеал, а $L \subseteq A[1:n]$ — I-лекссегментный идеал. Тогда L тоже M-идеал.*

Доказательство. Действительно, пусть J — произвольный однородный идеал, содержащий L. Так как I — M-идеал и $I \subseteq L \subseteq J$, то существует такой I-лекссегментный идеал $L^I(J)$, что $H_J = H_{L^I(J)}$. Заметим также, что для всякого d выполнено неравенство $H_J(d) \geqslant H_L(d)$, так как $L \subseteq J$. Следовательно, $L \subseteq L^I(J)$. По определению I-лекссегментного идеала $L^I(J) = I + L'$,

где L' — лекссегментный идеал. Поэтому $L^I(J) = L + L'$, т. е. $L^I(J)$ — L-лекссегментный идеал, причем $H_J = H_{L^I(J)}$. Таким образом, L является M-идеалом. □

Из предыдущей теоремы и из следствия 2.5.12 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 2.7.3. *Всякий лекссегментный идеал $L \subseteq A[1:n]$ является M-идеалом.*

Теорема 2.7.2 вместе с необходимым условием теоремы 2.2.4 позволяют показать, что теорема Клементса—Линдстрема (теорема 2.7.1) не выполняется, если нарушается условие $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$.

Пример 2.7.4. Пусть $I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}) \subseteq A[1:n]$ и для некоторого i имеем $d_i > d_{i+1}$. Тогда идеал не является M-идеалом.

Действительно, предположим обратное, т. е. I является M-идеалом. Тогда $J = I + (x_1, \ldots, x_{i-1})$ тоже M-идеал по теореме 2.7.2. Так как $A[1:n]/J = A[i:n]/(x_i^{d_i}, \ldots, x_n^{d_n})$, то $K = (x_i^{d_i}, \ldots, x_n^{d_n}) \subseteq$ $\subseteq A[i:n]$ также является M-идеалом. Однако это невозможно в силу теоремы 2.2.4.

Следующая теорема дает еще один пример M-идеалов.

Теорема 2.7.5. *Пусть идеал $I \subseteq A[1:n]$ порожден мономами $x_1^{d-1}x_{i_1}, x_1^{d-1}x_{i_2}, \ldots, x_1^{d-1}x_{i_s}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$. Тогда I — M-идеал.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.1.7. Достаточно показать, что выполняется условие 2) этой теоремы. Пусть $A = A[1:n]$, $R = A/I$ и

$$\{j_1, \ldots, j_{n-s}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_s\},$$

причем $j_1 < \ldots < j_{n-s}$.

Пусть $M_{d+r} \subseteq \mathcal{M}(R_{d+r})$. Покажем, что

$$|\Delta^A(D^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r}))| = |\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup D^R M_{d+r})|. \tag{7}$$

Если $\min D^R M_{d+r} <_{\text{lex}} x_1^{d-1}x_{i_s}x_n^r = \min \mathcal{M}(I_{d+r})$, то $D^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r}) = \mathcal{M}(I_{d+r}) \cup D^R M_{d+r}$, и выполнение равенства (7) очевидно.

Пусть $m_0 = \min D^R M_{d+r} >_{\text{lex}} x_1^{d-1}x_{i_s}x_n^r$. В этом случае

$$D^R M_{d+r} = \{m = x_1^{d-1}m' \in \mathcal{M}(R_{d+r})\colon m \geqslant_{\text{lex}} m_0,\ m' \text{ не делится на } x_{i_l}\}.$$

Рассмотрим перестановку σ на множестве $\{1, \ldots, n\}$, заданную правилом

$$\sigma(i_l) = l, \quad \sigma(j_l) = s + l.$$

Пусть $\sigma(x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}) = x_{\sigma(1)}^{a_1} \ldots x_{\sigma(n)}^{a_n}$ и если $M \subseteq \mathcal{M}(A)$, то $\sigma(M) = \{\sigma(m)\colon m \in M\}$. Ясно, что если $m_1 \neq m_2$, то $\sigma(m_1) \neq \sigma(m_2)$. Кроме того, $|\Delta^A(M)| = |\Delta^A(\sigma(M))|$ для всякого $M \subseteq \mathcal{M}(A)$.

Пусть

$$C = \{m' \in \mathcal{M}(A_{r+1})\colon x_1^{d-1}m' \in \mathcal{M}(I_{d+r}) \cup D^R M_{d+r}\},$$
$$B = \{x_1^{d-1}\sigma(m') \in \mathcal{M}(A_{d+r})\colon m' \in C\}.$$

Покажем, что $B = D^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r})$. Действительно,

$$|B| = |\mathcal{M}(I_{d+r})| + |D^R M_{d+r}| = |\mathcal{M}(I_{d+r})| + |M_{d+r}| = |D^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r})|.$$

Следовательно, достаточно показать, что B является лекссегментным. Пусть $x_1^{d-1}m >_{\text{lex}} \min B$. Если $m >_{\text{lex}} x_s x_n^r$, то $\sigma^{-1}(m)$ делится на одну из переменных x_{i_l}, следовательно, $x_1^{d-1}m \in B$. Если $m <_{\text{lex}} x_s x_n^r$, то $\sigma^{-1}(m)$ делится только на переменные x_{j_l}. При этом, так как $x_1^{d-1}m >_{\text{lex}} \min B$, $\sigma^{-1}(m) >_{\text{lex}} m_0/x_1^{d-1}$, а поэтому $x_1^{d-1}\sigma^{-1}(m) \in D^R M_{d+r}$. Таким образом, $x_1^{d-1}m \in B$.

Для доказательства равенства (7) остается заметить, что

$$|\Delta^A(B)| = |\Delta^A(\sigma(C))| = |\Delta^A(C)| = |\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup D^R M_{d+r})|.$$

Завершим теперь доказательство теоремы. По следствию 2.5.12

$$|\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r})| \geqslant |\Delta^A(D^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r}))|.$$

Используя равенство (7), получаем, что

$$|\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r})| \geqslant |\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup D^R M_{d+r})|.$$

Так как

$$|\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup M_{d+r})| = |\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r})| + |\Delta^R(M_{d+r})|,$$
$$|\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r}) \cup D^R M_{d+r})| = |\Delta^A(\mathcal{M}(I_{d+r})| + |\Delta^r(D^R M_{d+r})|,$$

имеем

$$|\Delta^R(M_{d+r})| \geqslant |\Delta^R(D^R M_{d+r})|.$$

Теорема доказана. □

Ниже изучаются M-идеалы в классах, близких по своей структуре к лекссегментным.

Определение 2.7.6. Пусть $u, v \in \mathcal{M}(A[1:n]_d)$, $u \geqslant_{\text{lex}} v$. Множество

$$[u, v] = \{w \in \mathcal{M}(A[1:n]_d) \colon u \geqslant_{\text{lex}} w \geqslant_{\text{lex}} v\}$$

называется *отрезком*. Идеал в $A[1:n]$, порожденный некоторым отрезком $[u, v]$, называется *лексическим* и обозначается $L[u, v]$. Лексический идеал L, у которого все множества $\mathcal{M}(L_d)$ являются отрезками, называется *вполне лексическим*.

В [13] было дано следующее описание вполне лексических идеалов.

Теорема 2.7.7. *Пусть $u = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, $v = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$. Идеал $I = L[u, v]$ является вполне лексическим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) $v = x_n^d$, $u \geqslant_{\text{lex}} x_2^d$;
2) $v >_{\text{lex}} x_n^d$, $a_1 > 0$, $a_1 = b_1$, $u = x_1^{a_1} x_2^{d-a_1}$, $v = x_1^{a_1} x_n^{d-a_1}$;
3) $v >_{\text{lex}} x_n^d$, $a_1 > 0$, $a_1 > b_1$ *и для всех* $w <_{\text{lex}} v$, $\deg w = d$, *существует такое* $i > 1$, *что* x_i *делит* w *и* $wx_1/x_i \leqslant_{\text{lex}} u$.

Следующая теорема описывает все M-идеалы в классе вполне лексических идеалов.

Теорема 2.7.8. *Пусть $I = L[u, v] \subseteq A[1:n]$ — вполне лексический идеал. Идеал I является M-идеалом тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) $u = x_1^d$;
2) $u = x_1^{d-1} x_2$ *и* $v >_{\text{lex}} x_1^{d-2} x_2 x_n$.

Доказательство. Пусть $A = A[1:n]$. Если выполняется условие 1), то идеал I является лекссегментным, и по следствию 2.7.3 он является M-идеалом.

Если выполняется условие 2), то в силу теоремы 2.7.7 (I вполне лексический) имеем, что $v \leqslant_{\text{lex}} x_1^{d-1} x_n$.

Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_s)$. Докажем, что

$$|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)|. \tag{8}$$

Пусть $s < d - 1$. Тогда неравенство (8) выполняется в силу теоремы 2.5.12.

Пусть $s = d - 1$. Если $v = x_1^{d-1} x_n$, то $|\Delta^R(D^R M)| = |\Delta^A(D^A M)| - (n-1)$ и $|\Delta^R(M)| \geqslant$ $\geqslant |\Delta^A(M)| - (n-1)$, т. е. $|\Delta^R(M)| \geqslant |\Delta^R(D^R M)|$. Если же $v = x_1^{d-2} x_2 x_l$, где $1 < l < n$, то при $|M| = 1$ имеем, что $|\Delta^R(D^R M)| = 1 \leqslant |\Delta^R(M)|$, а при $|M| \geqslant 2$ получаем $|\Delta^R(D^R M)| =$ $= |\Delta^A(D^R M)| - (n + k - 2) \leqslant |\Delta^R(M)|$.

Пусть $s > d - 1$. Обозначим $T = A/(I, x_1^d)$. Тогда $|\Delta^R(D^R M)| = |\Delta^T(D^R M \setminus x_1^s)| + 1 \leqslant |\Delta^R(M)|$.

Пусть теперь I является M-идеалом, докажем, что выполнено условие 1) или условие 2). В силу теоремы 2.2.4 имеем, что $u \geqslant_{\text{lex}} x_1^{d-1} x_n$.

Если $u = x_1^{d-1} x_k$, $k \geqslant 3$, то $|\Delta^R(x_1^d)| \geqslant k - 1 \geqslant 2$ и, в силу того что I вполне лексический, $|\Delta^R(x_1^{d-1} x_2)| = 1$, т. е. $|\Delta^R(x_1^d)| > |\Delta^R(x_1^{d-1} x_2)|$ — противоречие. Значит, $u \geqslant x_1^{d-1} x_2$. Осталось доказать, что если $u = x_1^{d-1} x_2$, то $v >_{\text{lex}} x_1^{d-2} x_2 x_n$.

Пусть $v \leqslant_{\text{lex}} x_1^{d-2} x_2 x_n$. Тогда $|\Delta^R(x_1^{d-2} x_2)| = 0$, $|\Delta^R(x_1^{d-1})| = 1$ — противоречие. Значит, $v >_{\text{lex}} x_1^{d-2} x_2 x_n$. □

Следующая теорема описывает все M-идеалы в классе лексических идеалов.

Теорема 2.7.9. *Пусть $I = L[u,v] \subseteq A[1:n]$ — лексический идеал. Идеал I является M-идеалом тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) $u = x_1^d$;
2) $u = x_1^{d-1}x_2$ *и* $v >_{\mathrm{lex}} x_1^{d-2}x_2x_n$;
3) $u = x_1^{d-1}x_k$, *где* $k > 2$, *и* $v >_{\mathrm{lex}} x_1^{d-2}x_2^2$.

Доказательство. Если выполняется условие 1), то идеал I является лекссегментным, и по следствию 2.7.3 он является M-идеалом.

Пусть выполняется условие 2). Если $v \leqslant_{\mathrm{lex}} x_1^{d-1}x_n$, то в силу теоремы 2.7.7 I является вполне лексическим, следовательно, по теореме 2.7.8 он является M-идеалом. А если $v >_{\mathrm{lex}} x_1^{d-1}x_n$, то идеал I является M-идеалом по теореме 2.7.5.

Если выполняется условие 3), то I является M-идеалом в силу теоремы 2.7.5.

Пусть теперь I является M-идеалом. По теореме 2.2.4 $u \geqslant_{\mathrm{lex}} x_1^{d-1}x_n$. Если $u = x_1^{d-1}x_2$, но $v \leqslant_{\mathrm{lex}} x_1^{d-2}x_2x_n$, то $|\Delta^R(x_1^{d-1})| = 1 > |\Delta^R(x_1^{d-2}x_2)| = 0$ — противоречие.

Если, наконец, $u = x_1^{d-1}x_k$, $k > 2$, но $v \leqslant_{\mathrm{lex}} x_1^{d-2}x_2^2$, то $|\Delta^R(x_1^d)| = k-1 > |\Delta^R(x_1^{d-1}x_2)| = k-2$ — противоречие. □

2.8. Случай кольца многочленов от двух переменных

В данном разделе дается полное описание M-идеалов в кольце от двух переменных.

Если $I \subset A[1:2]$ — некоторый мономиальный идеал, то $\mathcal{M}(I_v) = \{x_1^{l_1^v}x_2^{m_1^v}, x_1^{l_2^v}x_2^{m_2^v}, \ldots, x_1^{l_s^v}x_2^{m_s^v}\}$, причем $l_1^v > l_2^v > \ldots > l_s^v$. Составим векторы

$$\begin{aligned} l^v &= (l_0^v, l_1^v, \ldots, l_{s+1}^v) = (v+1, l_1^v, l_2^v, \ldots, l_s^v, -1),\\ \Delta l^v &= (\Delta l_0^v, \Delta l_1^v, \ldots, \Delta l_s^v) = (l_0^v - l_1^v - 1, l_1^v - l_2^v - 1, \ldots, l_{s-1}^v - l_s^v - 1, l_s^v - l_{s+1}^v - 1),\\ s^v &= (s_1^v, s_2^v, \ldots, s_r^v), \end{aligned}$$

где вектор s^v получается из Δl^v удалением компонент, равных 0 (s^v может быть пустым).

Теорема 2.8.1. *Пусть $I \subseteq A = A[1:2]$ — некоторый мономиальный идеал, $R = A[1:2]/I$. Идеал I является M-идеалом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *если $m \in \mathcal{M}(R_v)$, но $mx_1 \in I$, $mx_2 \in I$, то для всех таких $m' \in \mathcal{M}(A_{v+1})$, что $m' \geqslant_{\mathrm{lex}} mx_2$, имеем $m' \in I$*;
2) *для всех $v \geqslant 2$ выполнено*
   (a) *если $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v = 0$, то $s_i^v \leqslant s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \ldots, r-1$*;
   (b) *если $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v > 0$, то $s_i^v \leqslant s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \ldots, r-2$*;
   (c) *если $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v = 0$, то $r = 1$, $s_1^v = \Delta l_0^v = 1$*;
   (d) *если $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$, то либо $l^v = (v+1, -1)$, либо $r = 2$, $s^v = (\Delta l_0^v, \Delta l_s^v)$ и $s_1^v = 1$.*

Доказательство. Пусть I является M-идеалом. Выполнение условия 1) вытекает из теорем 2.2.1 и 2.2.3.

Предположим теперь, что условие 2) не выполняется.

(2a) Пусть существует такое $v \geqslant 2$, что $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v = 0$, но при этом существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant r-1$, что $s_j^v > s_{j+1}^v$. Пусть j — максимальное с таким условием, т. е. $s_j^v > s_{j+1}^v \leqslant \leqslant s_{j+2}^v \leqslant \ldots \leqslant s_r^v$. Пусть $s_i^v = l_{j_i}^v - l_{j_i+1}^v - 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Положим

$$B_i = \{w \in \mathcal{M}(R_v) \colon x_1^{l_{j_i}^v}x_2^{m_{j_i}^v} >_{\mathrm{lex}} w >_{\mathrm{lex}} x_1^{l_{j_i+1}^v}x_2^{m_{j_i+1}^v}\}$$

при $i = 1, 2, \ldots, r$. Очевидно, что $|B_i| = s_i^v$, $|\Gamma^R(B_i)| = s_i^v + 1$. Пусть

$$M = B_j \cup \bigcup_{i=j+2}^{r} B_i,$$

тогда

$$C^R M = D_j \cup \bigcup_{i=j+1}^{r} B_i,$$

где $D_j \subset B_j$, $|D_j| = s_j^v - s_{j+1}^v > 0$. Поэтому

$$|\Gamma^R(M)| = s_j^v + 1 + \sum_{i=j+2}^{r} (s_i^v + 1) < (s_j^v + s_{j+1}^v) + 1 + \sum_{i=j+1}^{r} (s_i^v + 1) = |\Gamma^R(C^R M)|.$$

Следовательно, $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ — противоречие.

(2b) Пусть существует такое $v \geqslant 2$, что $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v > 0$, но при этом существует такое j, что $1 \leqslant j \leqslant r-2$ и $s_j^v > s_{j+1}^v$. Будем считать, что $r \geqslant 3$, так как иначе условие очевидно. Пусть j — максимальное с таким условием, т. е. $s_j^v > s_{j+1}^v \leqslant s_{j+2}^v \leqslant \ldots \leqslant s_{r-1}^v$. Используя обозначения, введенные выше, заметим, что $|B_i| = s_i^v$, $|\Gamma^R(B_i)| = s_i^v + 1$ при $i < r$ и $|B_r| = s_r^v$, $|\Gamma^R(B_r)| = s_r^v$. Положим

$$M = B_j \cup \bigcup_{i=j+2}^{r} B_i,$$

тогда

$$C^R M = D_j \cup \bigcup_{i=j+1}^{r} B_i,$$

где $D_j \subset B_j$, $|D_j| = s_j^v - s_{j+1}^v > 0$. Поэтому

$$|\Gamma^R(M)| = s_j^v + \sum_{i=j+2}^{r} (s_i^v + 1) < (s_j^v - s_{j+1}^v) + \sum_{i=j+1}^{r} (s_i^v + 1) = |\Gamma^R(C^R M)|.$$

Следовательно, $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ — противоречие.

(2c) Пусть существует такое $v \geqslant 2$, что $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v = 0$. Неравенство $s_1^v > 1$ невозможно в силу теоремы 2.2.4 ($I_v \neq \varnothing$, так как $x_2^v \in I_v$). Поэтому остается лишь случай, когда $r > 1$. Положим $M = \{x_1^v\}$. Так как $r > 1$, то $C^R M \neq M$, а так как $\Delta l_s^v = 0$, то $|\Gamma^R(C^R M)| = 2$, но $|\Gamma^R(M)| = 1$, следовательно, $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ — противоречие.

(2d) Пусть существует такое $v \geqslant 2$, что $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$, но при этом либо $r = 1$ и $l^v \neq (v+1, -1)$, либо $r = 2$ и $s^v \neq (1, \Delta l_s^v)$, либо $r > 2$.

Если $r = 1$, то из условий $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$ получаем, что $l^v = (v+1, -1)$.

Если $r = 2$, то $I_v \neq \varnothing$, следовательно, в силу теоремы 2.2.4 получаем, что $s_1^v = 1$, т. е. $s^v = (1, \Delta l_s^v)$.

Остается случай $r > 2$. Пусть $M = \{x_1^v\} \cup B_r$. Так как $r > 2$, то $C^R M \cap \{x_1^v\} = \varnothing$, следовательно,

$$|\Gamma^R(M)| = |B_r| + 1, \quad |\Gamma^R(C^R M)| = |B_r| + |\Gamma^R(C^R M \setminus B_r)| = |B_r| + 2.$$

В результате $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ — противоречие.

Таким образом, выполнение условия 2) доказано.

Пусть теперь выполняются условия 1) и 2), докажем теорему Маколея. Покажем сначала, что для всех $v \geqslant 2$ и для всех $M \subseteq \mathcal{M}(R_v)$ выполнено

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|. \tag{9}$$

Для этого воспользуемся условием 2).

(2a) $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v = 0$. Положим $M^i = M \cap B_i$. Представим каждое из множеств M^i в виде объединения отрезков:

$$M^i = \bigcup_{j=1}^{r_i} B_{ij},$$

причем $B_{ij} \cup B_{ik}$ не является отрезком при $j \neq k$.

Положим

$$N(M) = \sum_{i=1}^{r} r_i.$$

Очевидно, что

$$|\Gamma^R(M)| = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r_i}(|B_{ij}|+1) = |M| + N(M).$$

В силу условия 2) имеем $s_i^v \leqslant s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \ldots, r-1$, следовательно, $N(M) \geqslant N(C^R M)$, таким образом,

$$|\Gamma^R(M)| = |M| + N(M) \geqslant |C^R M| + N(C^R M) = |\Gamma^R(C^R M)|.$$

(2b) $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v > 0$. Пусть $M^i, B_{ij}, N(M)$ такие, как и выше. Рассмотрим множества

$$S = M \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{r-1} B_i\Big), \quad S' \subseteq \bigcup_{i=1}^{r-1} B_i,$$

причем S' состоит из меньших элементов в $\bigcup\limits_{i=1}^{r-1} B_i$ и $|S'| = |S|$. Тогда аналогично доказанному в предыдущем пункте получаем, что $|\Gamma^R(S)| \geqslant |\Gamma^R(S')|$ и, следовательно, $|\Gamma^R(M)| \geqslant |\Gamma^R(S' \cup (M \cap B_r))|$. Очевидно, что $N(S') + 1 \geqslant N(C^R M)$, поэтому

$$|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(S)| + |\Gamma^R(M \setminus S)| \geqslant |\Gamma^R(S')| + |M \setminus S| = |S'| + N(S') + |M \setminus S| =$$
$$= |M| + N(S') \geqslant |C^R M| + N(C^R M) - 1 = |\Gamma^R(C^R M)|.$$

(2c) $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v = 0$. Из условия 2) следует, что $|R_v| = 1$ и, очевидно, $|\Gamma^R(C^R M)| = |\Gamma^R(M)|$.

(2d) $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$. Если $r = 1$, то из условия 2) следует, что $l^v = (v+1, -1)$, т. е. в степени v нет мономов, принадлежащих идеалу, следовательно, по теореме 2.5.12 имеем $|\Gamma^R(C^R M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|$.

Если $r = 2$, то из условия 2) следует, что $s^v = (1, \Delta l_s^v)$. Если $M = \mathcal{M}(R_v)$, то неравенство (9) очевидно. Пусть $M \neq \mathcal{M}(R_v)$, тогда $|\Gamma^R(C^R M)| = |C^R M|$ и $|\Gamma^R(M)| \geqslant |M|$, следовательно, $|\Gamma^R(C^R M)| \leqslant |\Gamma^R(M)|$.

Таким образом, неравенство (9) доказано.

Из условия 1) и теоремы 2.2.1 следует, что если множество M C^R-сжато, то $\Gamma^R(M)$ тоже C^R-сжато. Применяя неравенство (9) и пользуясь C^R-сжатостью множеств $C^R(\Gamma^R(M))$ и $\Gamma^R(C^R M)$, получаем $\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M))$. Теорема 2.8.1 доказана полностью. □

Замечание 2.8.2. На самом деле достаточно потребовать выполнение условий теоремы 2.8.1 лишь для конечного числа степеней: условие 1) достаточно проверять для степеней не больше чем $\delta(I) - 1$, а условие 2) — для степеней не более $2\delta(I)$.

Как видно из теоремы 2.8.1, даже в случае кольца многочленов от двух переменных полное описание M-идеалов оказывается достаточно сложным. В следующих двух главах будет дано полное описание M-идеалов в очень интересных классах мономиальных идеалов: сильно устойчивых идеалах в кольце многочленов и во внешней алгебре.

Глава 3

КУСОЧНО ЛЕКССЕГМЕНТНЫЕ ИДЕАЛЫ: СЛУЧАЙ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ

В этой главе изучаются M-идеалы в важном классе сильно устойчивых идеалов. В частности, описываются все M-идеалы в этом классе, а также доказываются обобщения многих интересных

результатов о лекссегментных идеалов: неравенство для градуированных чисел Бетти, теоремы Гоцмана, Грина и др.

3.1. Кусочно лекссегментные идеалы и их строение

В этом разделе приводится определение и основные свойства кусочно лекссегментных идеалов, а также доказывается теорема об их строении.

Определение 3.1.1. Мономиальный идеал $I \subseteq A[1:n]$ называется *кусочно лекссегментным*, если для любого монома $u \in G(I)$ степени d и для любого монома $v \in A[1:n]$ степени d, удовлетворяющего условиям $v >_{\text{lex}} u$ и $\max(v) \leqslant \max(u)$, выполнено $v \in I$.

Пусть $l \leqslant n$, положим $A[1:l] \subseteq A[1:n]$ — подкольцо в $A[1:n]$. Если I — мономиальный идеал в $A[1:n]$, то положим $I(l) = I \cap A[1:l]$.

Следующее предложение показывает, что свойство идеала быть кусочно лекссегментным сохраняется при увеличении и уменьшении числа переменных.

Предложение 3.1.2. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал. Тогда*

1) *идеал $I(l)$ — кусочно лекссегментный в кольце $A[1:l]$;*
2) *идеал $IA[1:r] \subseteq A[1:r]$ — кусочно лекссегментный при $r > n$.*

Доказательство. Оба утверждения следуют непосредственно из определения кусочно лекссегментного идеала. □

Всякий лекссегментный идеал является, очевидно, кусочно лекссегментным. С другой стороны, не все кусочно лекссегментные идеалы являются лекссегментными. Например, идеал в кольце $k[x_1, x_2, x_3]$, порожденный мономами x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, является кусочно лекссегментным, но не является лекссегментным. Следующая теорема уточняет строение кусочно лекссегментных идеалов.

Теорема 3.1.3. *Идеал $I \subseteq A[1:n]$ является кусочно лекссегментным тогда и только тогда, когда существуют такие лекссегментные идеалы $L_i \subseteq A[1:i]$, $i = 1, \ldots, n$, что*

$$I = L_1A[1:n] + L_2A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n].$$

Замечание 3.1.4. Представление кусочно лекссегментного идеала I в виде суммы лекссегментных $I = L_1A[1:n] + L_2A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n]$, вообще говоря, не является единственным. Например, идеал $I = (x_1) \subseteq A = k[x_1, x_2]$ можно представить как $L_1A + L_2A$ с $L_1 = (x_1) \subseteq k[x_1]$, $L_2 = (0) \subseteq A$, а также с $L_1 = (0) \subseteq k[x_1]$ и $L_2 = (x_1) \subseteq A$.

Доказательство теоремы 3.1.3. Проведем индукцию по n — числу переменных в $A[1:n]$. База индукции следует из того, что при $n = 1$ всякий кусочно лекссегментный идеал является лекссегментным. Пусть теперь $n > 1$ и при всех $l < n$ теорема уже доказана.

Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал. Тогда по предложению 3.1.2 идеал $I(n-1)$ является кусочно лекссегментным, следовательно, по предположению индукции $I(n-1) = L_1A[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}A[1:(n-1)]$. Рассмотрим все такие мономы $u \in G(I)$, что $\max(u) = n$. Для каждого такого монома u построим множество мономов $L(u) = \{v \in A[1:n]: \deg v = \deg u,\ v \geqslant_{\text{lex}} u\}$. По определению кусочно лекссегментного идеала $L(u) \subseteq I$. Пусть L_n — идеал в $A[1:n]$, порожденный всеми множествами $L(u)$. Покажем, что $I = L_1A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n]$. Положим $J = L_1A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n]$. Включение $J \subseteq I$ очевидно, так как выше было показано, что $L(u) \subseteq I$. Докажем теперь, что $I \subseteq J$. Так как I мономиальный, то достаточно доказать, что $u \in J$ для всякого монома $u \in I$. Действительно, пусть g — минимальная порождающая идеала I, делящая u. Если $\max(g) < n$, то $g \in L_1A[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}A[1:(n-1)]$, следовательно, $u \in L_1A[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}A[1:(n-1)] \subseteq J$. Если $\max(g) = n$, то $u \in L_n \subseteq J$.

Докажем теперь, что идеал $I = L_1A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n]$ является кусочно лекссегментным. По предположению индукции $J = L_1A[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}A[1:(n-1)]$ является кусочно лекссегментным. Пусть $u \in G(I)$. Если $u \in JA[1:n]$, то $u \in J$ (так как u минимальная порождающая) и, следовательно, $u \in G(J)$. Поэтому для всякого $v \in A[1:n]_{\deg u}$, такого что $\max(v) \leqslant \max(u)$ и $v >_{\text{lex}} u$, выполнено $v \in J \subseteq I$. В случае $u \in L_n$, так как L_n лекссегментный, для всякого

$v \in A[1:n]_{\deg u}$, такого что $v >_{\text{lex}} u$, выполнено $v \in L_n \subseteq I$. Таким образом, I кусочно лекссегментный. □

Следующее полезное следствие показывает, что кусочно лекссегментные идеалы сохраняются при операции взятия частного относительно степени последней переменной.

Следствие 3.1.5. *Если идеал $I \subseteq A[1:n]$ кусочно лекссегментный, то идеал $J = (I : x_n^d)$ кусочно лекссегментный при всех $d \geqslant 0$.*

Доказательство. По теореме 3.1.3 $I = L_1A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n]$, где $L_i \subseteq A[1:i]$ — лекссегментные идеалы. Тогда

$$J = (I : x_n^d) = (L_1A[1:n] : x_n^d) + \ldots + (L_{n-1}A[1:n] : x_n^d) + (L_n : x_n^d)A[1:n] = \\ = L_1A[1:n] + \ldots + L_{n-1}A[1:n] + (L_n : x_n^d)A[1:n],$$

так как идеалы $L_1, \ldots, L_{n-1}$ не имеют порождающих, делящихся на x_n. Идеал $(L_n : x_n^d) \subseteq A[1:n]$ является, очевидно, лекссегментным, следовательно, по теореме 3.1.3 идеал J кусочно лекссегментен. □

3.2. Теорема Маколея для кусочно лекссегментных идеалов

В этом разделе доказывается, что среди всех сильно устойчивых идеалов M-идеалами являются только кусочно лекссегментные идеалы. Первым шагом к этому является теорема о том, что все кусочно лекссегментные идеалы являются M-идеалами.

Теорема 3.2.1. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал. Тогда I является M-идеалом.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n > 1$. По теореме 3.1.3 идеал I можно представить в виде

$$I = L_1A[1:n] + L_2A[1:n] + \ldots + L_nA[1:n],$$

где $L_i \subseteq A[1:i]$ — лекссегментные идеалы. Пусть

$$I' = L_1A[1:(n-1)] + L_2A[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}A[1:(n-1)] \subseteq A[1:(n-1)].$$

Этот идеал является кусочно лекссегментным по предложению 3.1.2. Следовательно, по предположению индукции он является M-идеалом. В силу теоремы 2.5.1 идеал $I'A[1:n]$ является M-идеалом. Замечая, что $I = I'A[1:n] + L_n$, т. е. что I является $I'A[1:n]$-лекссегментным, и применяя теорему 2.7.2, получаем, что I — M-идеал. □

Теорема 3.2.2. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — сильно устойчивый идеал, $R = A[1:n]/I$. Следующие условия равносильны*:

1) *идеал I является кусочно лекссегментным*;
2) *идеал I является M-идеалом.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует непосредственно из теоремы 3.2.1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что для некоторого $u \in G(I)$, $\max(u) = l \leqslant n$, существует моном u' степени $d = \deg u$, $\max(u') \leqslant l$, больший u по лексикографическому порядку, который не принадлежит I. Для определенности считаем, что u' — наименьший моном степени d, больший u, для которого $\max(u') \leqslant l$ и который не принадлежит I. Обозначим $v = u/x_l$.

Покажем, что моном u' делится на x_l, т. е. $\max(u') = l$. Действительно, если u' не делится на x_l, то $u'' = u'x_{\max(u')+1}/x_{\max(u')} \in I$, так как u'' — следующий по порядку за u' моном (и меньший его), откуда по причине сильной устойчивости идеала I получаем, что $u' \in I$ — противоречие.

Покажем, что $vx_n \notin I$. Предположим обратное, тогда из сильной устойчивости идеала I вытекает, что либо $v \in I$, либо $vx_n \in G(I)$. Первое невозможно, так как $u \in G(I)$. Если же выполнено $vx_n \in G(I)$, то $v \notin I$. Используя теоремы 2.2.3, 2.2.1 и сильную устойчивость идеала I, получаем, что в этом случае $u' \in I$ — противоречие.

Пусть j — минимальное число, удовлетворяющее условию $vx_j \notin I$. Так как I сильно устойчивый, то при $t \geqslant j$ имеем $vx_t \notin I$, а при $t < j$ имеем $vx_t \in I$. Рассмотрим множество

$$B = \{w \in \mathcal{M}(R_d)\colon w <_{\mathrm{lex}} vx_n\} \cup \{w \in \mathcal{M}(R_d)\colon u' \geqslant_{\mathrm{lex}} w >_{\mathrm{lex}} vx_j\}.$$

Покажем, что для множества B нарушается теорема Маколея, т. е. $\Gamma^R(C^R B) \nsubseteq C^R\Gamma^R(B)$. Действительно, пусть

$$B' = \{w \in \mathcal{M}(R_{d-1})\colon w \leqslant_{\mathrm{lex}} u'/x_l\}.$$

Тогда $\Gamma^R(B) \subseteq B' \setminus \{v\}$. С другой стороны, так как $j > l$, то $u'x_n/x_l \in C^R(B)$, поэтому $u'/x_l \in \in \Gamma^R(C^R B)$, а так как Γ^R-образ C^R-сжатого множества C^R-сжат (теорема 2.2.3), то $\Gamma^R(C^R B) = = B'$, т. е. $|\Gamma^R(C^R B)| > |\Gamma^R(B)| = |C^R\Gamma^R(B)|$ — противоречие. □

Таким образом, в классе сильно устойчивых идеалов все M-идеалы описаны.

3.3. Неравенство для чисел Бетти над кольцом многочленов

После того как для фактор-колец по кусочно лекссегментным идеалам доказана теорема Маколея, естественно исследовать вопрос о возможности обобщения других результатов, связанных с ней, на случай кусочно лекссегментных идеалов. Одним из самых известных результатов, обобщающих теорему Маколея в кольце многочленов является неравенство для чисел Бетти однородных идеалов, полученное независимо в [11] и [25]. В этом разделе мы докажем следующее обобщение этого неравенства.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$. *Пусть также* $I \subseteq A[1\colon n]$ *— кусочно лекссегментный идеал,* $J \subseteq A[1\colon n]$ *— однородный идеал, содержащий* I, *и* $L^I(J)$ *— соответствующий* I*-лекссегментный идеал. Тогда для всех* i *и* j *выполнено неравенство*

$$\beta_{i,i+j}^{A[1\colon n]}(J) \leqslant \beta_{i,i+j}^{A[1\colon n]}(L^I(J)).$$

Доказательство. Рассмотрим идеал $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$. По теореме 1.4.6 этот идеал сильно устойчив, и функции Гильберта идеалов $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ и J совпадают. Кроме того, идеал $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ содержит I и $L^I(\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)) = L^I(J)$. Также в силу теоремы 1.4.6

$$\beta_{i,i+j}^{A[1\colon n]}(J) \leqslant \beta_{i,i+j}^{A[1\colon n]}(\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\beta_{i,i+j}^{A[1\colon n]}(J) \leqslant \beta_{i,i+j}^{A[1\colon n]}(L^I(J)),$$

только для сильно устойчивых идеалов J, содержащих идеал I.

Лемма 3.3.2. *Пусть* $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ *— обратно сильно устойчивое множество. Тогда* $|\Gamma^R(M)| = m_n(M)$.

Доказательство. Действительно, каждому элементу $u \in M$ с $\max(u) = n$ можно поставить в соответствие $u/x_n \in \Gamma^R(M)$, поэтому $|\Gamma^R(M)| \geqslant m_n(M)$. Пусть теперь $u \in M$ и $i < n$, тогда $u/x_i = u'/x_n$, где $u' = ux_n/x_i \in M$ в силу обратной сильной устойчивости, следовательно, $|\Gamma^R(M)| \leqslant m_n(M)$. □

Лемма 3.3.3. *Пусть* $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ *и* $M \cup \mathcal{M}(I_d)$ *сильно устойчиво. Тогда для всех* i *от* 1 *до* n *выполнено неравенство*

$$M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leqslant M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по n — числу переменных в $A[1\colon n]$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что лемма доказана для $n-1$, докажем ее для n.

Покажем, что $m_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \geqslant m_n(M \cup \mathcal{M}(I_d))$. Действительно, рассмотрим множество $M' = \mathcal{M}(R_d) \setminus M$, это множество обратно сильно устойчиво. Так как I кусочно лекссегментный, то в R выполняется теорема Маколея, поэтому $|\Gamma^R(M')| \geqslant |\Gamma^R(C^R M')|$. По лемме 3.3.2 $|\Gamma^R(M')| = m_n(M')$ и $|\Gamma^R(C^R M')| = m_n(C^R M')$, следовательно, $m_n(M') \geqslant m_n(C^R M')$. Но так как $m_n(M') = m_n(\mathcal{M}(A_d) \setminus (\mathcal{M}(I_d) \cup M))$, то $m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M) = m_n(\mathcal{M}(A_d)) - m_n(M')$. Аналогично, $m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M) = m_n(\mathcal{M}(A_d)) - m_n(C^R M')$, поэтому $m_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \geqslant m_n(M \cup \mathcal{M}(I_d))$.

Рассмотрим идеал $J = I \cap A[1:(n-1)] \subseteq A[1:(n-1)]$, а также множества $S = M \cap A[1:(n-1)]_d$ и $T = D^R M \cap A[1:(n-1)]_d$. Пусть $R' = A[1:(n-1)]/J$. Идеал J является кусочно лекссегментным по предложению 3.1.2, кроме того, множество $S \cup \mathcal{M}(J_d)$ является сильно устойчивым, а T — $D^{R'}$-сжатым. Заметим, что $\mathcal{M}(J_d) = \{u \in \mathcal{M}(I_d)\colon \max(u) < n\}$, поэтому

$$|\mathcal{M}(J_d) \cup S| = |\mathcal{M}(I_d) \cup M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M),$$
$$|\mathcal{M}(J_d) \cup T| = |\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M),$$

а также

$$M_i(S \cup \mathcal{M}(J_d)) = M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d)), \tag{10}$$
$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) = M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \tag{11}$$

при i от 1 до $n-1$. Заметим, что

$$|S| = |\mathcal{M}(J_d) \cup S| - |\mathcal{M}(J_d)| = |\mathcal{M}(I_d) \cup M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M) - |\mathcal{M}(J_d)| \geqslant$$
$$\geqslant |\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M) - |\mathcal{M}(J_d)| = |T|.$$

Пусть S' — такое подмножество в S, что $S' \cup \mathcal{M}(J_d)$ является сильно устойчивым (в $A[1:(n-1)]$) и $|S'| = |T|$, т. е. $T = D^{R'} S'$ (для получения S' можно, например, убрать из S нужное количество младших мономов). По предположению индукции

$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) \leqslant M_i(S' \cup \mathcal{M}(J_d))$$

при i от 1 до $n-1$. А так как $S' \subseteq S$, то

$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) \leqslant M_i(S \cup \mathcal{M}(J_d)).$$

Используя равенства (10) и (11), получим

$$M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leqslant M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d))$$

при i от 1 до $n-1$. Осталось доказать лишь, что

$$M_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leqslant M_n(M \cup \mathcal{M}(I_d)),$$

но это очевидно, так как

$$M_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) = |D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)| = |M \cup \mathcal{M}(I_d)| = M_n(M \cup \mathcal{M}(I_d)).$$

Лемма доказана. □

Преобразуем формулу (1):

$$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(J) = \sum_{l=1}^{n} \binom{l-1}{i} [M_l(J_j) - M_{l-1}(J_j) - M_l(J_{j-1})] =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \binom{l-1}{i} [M_l(J_j) - M_l(J_{j-1})] - \sum_{l=0}^{n-1} \binom{l}{i} M_l(J_j) =$$
$$= \binom{n-1}{i} M_n(J_j) - \sum_{l=1}^{n} \binom{l-1}{i} M_l(J_{j-1}) - \sum_{l=1}^{n-1} \left[\binom{l}{i} - \binom{l-1}{i} \right] M_l(J_j) =$$
$$= \binom{n-1}{i} |\mathcal{M}(J_j)| - \sum_{l=1}^{n} \binom{l-1}{i} M_l(J_{j-1}) - \sum_{l=1}^{n-1} \binom{l-1}{i-1} M_l(J_j).$$

Итак, пусть J — сильно устойчивый идеал, содержащий I. Заметим, что $\mathcal{M}(L^I(J)_j) \cap \mathcal{M}(R_j) = D^R(\mathcal{M}(J_j) \cap \mathcal{M}(R_j))$ и $\mathcal{M}(J_j)$ — сильно устойчивое множество, следовательно, по лемме 3.3.3 $M_s(\mathcal{M}(L^I(J)_j)) \leqslant M_s(\mathcal{M}(J_j))$, причем это неравенство справедливо при всех j и s. Так как идеалы J и $L^I(J)$ являются сильно устойчивыми, то, применяя формулу Эльяу—Кервера (1), получим

$$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(J) = \binom{n-1}{i}|\mathcal{M}(J_j)| - \sum_{l=1}^{n}\binom{l-1}{i}M_l(J_{j-1}) - \sum_{l=1}^{n-1}\binom{l-1}{i-1}M_l(J_j) \leqslant$$

$$\leqslant \binom{n-1}{i}|\mathcal{M}(L^I(J)_j)| - \sum_{l=1}^{n}\binom{l-1}{i}M_l(L^I(J)_{j-1}) - \sum_{l=1}^{n-1}\binom{l-1}{i-1}M_l(L^I(J)_j) = \beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(L^I(J)),$$

так как $|\mathcal{M}(J_j)| = |\mathcal{M}(L^I(J)_j)|$. Теорема 3.3.1 доказана. □

Из теоремы 3.3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, $I \subseteq A[1:n]$ *— кусочно лекссегментный идеал и задана функция* $H\colon \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$. *Пусть* $C_{I,H}$ *— множество всех однородных идеалов в кольце* $A[1:n]$, *которые содержат* I *и функция Гильберта которых совпадает с* H. *Если множество* $C_{I,H}$ *непусто, то в нем найдется такой элемент* L, *что для всякого* $J \in C_{I,H}$ *и для всех* i *и* j *выполнено неравенство*

$$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(J) \leqslant \beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(L).$$

Доказательство. Если множество $C_{I,H}$ непусто, то существует некоторый $J \in C_{I,H}$. Так как I — M-идеал, то $L^I(J) \in C_{I,H}$. По теореме 3.3.1 $L = L^I(J)$ обладает нужным свойством. □

3.4. I-гоцмановы идеалы и их числа Бетти

Особый интерес вызывают свойства множеств, экстремальных в смысле теоремы Маколея, т. е. таких множеств $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, для которых неравенство

$$|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)|$$

превращается в равенство. Если $R = A[1:n]$, т. е. $I = (0)$, то векторное пространство, порожденное мономами экстремального множества $M \subseteq \mathcal{M}(A[1:n]_d)$, называется *гоцмановым*. Оказывается, что многие свойства гоцмановых векторных пространств можно обобщить на случай, когда идеал I является кусочно лекссегментным.

Пусть I — кусочно лекссегментный идеал и $R = A[1:n]/I$.

Если $V \subseteq A[1:n]_d$ — векторное пространство, содержащее I_d, то через $L^I(V)$ обозначим I-лекссегментное векторное пространство, порожденное мономами степени d и имеющее размерность, равную размерности V.

Определение 3.4.1. Векторное пространство $V \subseteq A[1:n]_d$ называется *I-гоцмановым*, если

1) $d \geqslant \delta(I) = \max\{\deg u\colon u \in G(I)\}$;
2) $I_d \subseteq V$;
3) $\dim \mathrm{x}V = \dim \mathrm{x}L^I(V)$.

Будем называть однородный идеал J *I-гоцмановым*, если все пространства J_d I-гоцмановы при $d \geqslant \delta(I)$ и $J_d = I_d$ при $d < \delta(I)$. Иначе говоря, идеалы J и $L^I(J)$ имеют одинаковое количество минимальных порождающих каждой степени и, кроме того, их градуированные компоненты совпадают с соответствующими компонентами идеала I при $d < \delta(I)$.

Следующая теорема обобщает теорему Гоцмана [20].

Теорема 3.4.2. *Пусть* I *— кусочно лекссегментный идеал,* $V \subseteq A[1:n]_d$ *—* I*-гоцманово векторное пространство. Тогда* $\mathrm{x}V$ *тоже* I*-гоцманово.*

Доказательство. Докажем сначала несколько вспомогательных лемм. Доказательство следующей простой леммы можно найти в [11].

Лемма 3.4.3. *Пусть* $V \subseteq A[1:n]_d$ *— сильно устойчивое пространство. Тогда*

1) *для всякого* i *от* 1 *до* n $m_i(\mathrm{x}V) = M_i(V)$;
2) $\dim \mathrm{x}V = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(V)$.

Доказательство теоремы 3.4.2 начнем с рассмотрения случая сильно устойчивого векторного пространства.

Лемма 3.4.4. *Пусть $V \subseteq A[1:n]_d$ — сильно устойчивое I-гоцманово пространство, тогда $V' = \mathrm{x}V$ тоже I-гоцманово.*

Доказательство. Действительно, по утверждению 2) леммы 3.4.3

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(V) = \dim \mathrm{x}V = \dim \mathrm{x}L^I(V) = \sum_{i=1}^{n} M_i(L^I(V))$$

(среднее равенство имеет место в силу I-гоцмановости V), следовательно, по лемме 3.3.3 получаем, что для всякого i от 1 до n выполняются равенства $M_i(V) = M_i(L^I(V))$ и $m_i(V) = m_i(L^I(V))$. Далее, снова по утверждениям 2) и 1) леммы 3.4.3,

$$\dim \mathrm{x}V' = \sum_{i=1}^{n} M_i(V') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} M_j(V) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} M_j(L^I(V)) = \dim \mathrm{x}(\mathrm{x}L^I(V)).$$

Осталось заметить, что $\mathrm{x}L^I(V) = L^I(V')$. □

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть W — идеал, порожденный V. Заметим, что $I \subseteq W$, так как $d \geqslant \delta(I)$. Рассмотрим идеал $J = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(W)$. Этот идеал сильно устойчив, кроме того, $I \subseteq J$. Так как

$$\dim \mathrm{x}W_d = \dim J_{d+1} \geqslant \dim \mathrm{x}J_d \geqslant \dim \mathrm{x}W_d$$

(последнее неравенство имеет место по теореме 3.2.1 и в силу I-гоцмановости W_d), то $J_{d+1} = \mathrm{x}J_d$ и $\dim \mathrm{x}J_d = \dim \mathrm{x}W_d$, т. е. J_d I-гоцманово. По лемме 3.4.4 получаем, что J_{d+1} — I-гоцманово. Если показать, что $J_{d+2} = \mathrm{x}J_{d+1}$, то получим, что $W_{d+1} = \mathrm{x}V$ I-гоцманово. Иными словами, нужно показать, что у идеала J нет минимальных порождающих степени $d+2$.

По определению $J = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(W) = \mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\varphi(W))$, где W — невырожденное линейное преобразование. Очевидно, что у идеала $W' = \varphi(W)$ будут порождающие только степени d (как и у W). Следовательно, достаточно показать, что при переходе от W' к $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ порождающие степени $d+2$ не появятся.

Предположим, что у $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ есть порождающая степени $d+2$, т. е. существуют такие $f_{ij} \in W'_d$ со старшими коэффициентами 1 и $\lambda_{ij} \in k \setminus \{0\}$, что для любых s, t и для любого $f \in W'_d$ выполнено

$$\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}\left[\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}\right] \neq \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_s x_t f].$$

Пусть $m = \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}\left[\sum\limits_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}\right]$, $M = \max\limits_{i,j} \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_i x_j f_{ij}]$. Будем считать, что данное представление m в виде $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}\left[\sum\limits_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}\right]$ имеет минимальное число слагаемых, у которых старший член равен M. Заметим, что $M >_{\mathrm{rlex}} m$, поэтому таких слагаемых по крайней мере два, пусть эти слагаемые есть $\lambda_{ij} x_i x_j f_{ij}$ и $\lambda_{lk} x_l x_k f_{lk}$. Так как равенство $x_i x_j = x_k x_l$ невозможно (иначе число слагаемых можно уменьшить), то считаем, что $i < l$. Пусть $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[f_{ij}] = u$, разберем два случая.

Если x_l делит u, то, так как идеал $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ сильно устойчивый, имеем $x_i u / x_l = \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[f]$ для некоторого $f \in W'_d$ со старшим коэффициентом 1, следовательно, $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_l x_j f] = M$, поэтому

$$m = \lambda_{ij} x_j (x_i f_{ij} - x_l f) + \lambda_{lk} x_l (x_k f_{lk} - x_j f) - (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) x_l x_j f + \text{остальные члены}.$$

Рассмотрим $h = x_i f_{ij} - x_l f$. Заметим, что $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h] <_{\mathrm{rlex}} M/x_j$. Так как $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ не имеет порождающих степени $d+1$, то $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h] = \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_{s_1} f_1]$ для некоторого $f_1 \in W'_d$ со старшим коэффициентом 1. Выберем λ_1 так, чтобы $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h - \lambda_1 x_{s_1} f_1] <_{\mathrm{rlex}} \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h]$. Рассмотрим $h_1 = h - \lambda_1 x_{s_1} f_1$ и найдем $\lambda_2 x_{s_2} f_2$ из условий $f_2 \in W'_d$, $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h_1] = \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_{s_2} f_2]$ и $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h_1 - \lambda_2 x_{s_2} f_2] <_{\mathrm{rlex}} \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h_1]$ и т. д. Так как $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h_i] >_{\mathrm{rlex}} \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[h_{i+1}]$, то процесс на каком-то шаге остановится и мы получим $h = \sum\limits_{p=1}^{s} \lambda_p x_{s_p} f_p$, причем $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_{s_p} f_p] <_{\mathrm{rlex}} M/x_j$. Аналогично, $x_k f_{lk} - x_j f = \sum\limits_{p=1}^{t} \mu_p x_{t_p} g_p$, где

$\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_{t_p}g_p] <_{\mathrm{rlex}} M/x_l$. Таким образом,

$$m = \lambda_{ij}x_j\sum_{p=1}^{s}\lambda_p x_{s_p}f_p + \lambda_{lk}x_l\sum_{p=1}^{t}\lambda_p x_{t_p}g_p - (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})x_lx_jf + \text{остальные члены}.$$

Заметим, что число членов, имеющих старший член M, уменьшилось, что невозможно — противоречие.

Если же x_l не делит u, то $x_l = x_j$, и тогда

$$m = \lambda_{ij}x_l(x_if_{ij} - x_kf_{lk}) + (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})x_lx_kf_{lk} + \text{остальные члены}.$$

Рассуждая как и выше, получим, что $x_if_{ij} - x_kf_{lk} = \sum\limits_{p=1}^{s}\lambda_p x_{s_p}f_p$, причем $\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_{s_p}f_p] <_{\mathrm{rlex}} M/x_l$, поэтому

$$m = \lambda_{ij}x_l\sum_{p=1}^{s}\lambda_p x_{s_p}f_p + (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})x_lx_kf_{lk} + \text{остальные члены}.$$

Снова число членов, имеющих старший член M, уменьшилось — противоречие. Теорема 3.4.2 доказана полностью. □

Следующая теорема, обобщающая результат статьи [23], показывает, что I-гоцманов идеал и соответствующий ему I-лекссегментный идеал имеют сходные гомологические характеристики.

Теорема 3.4.5. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$. *Пусть I — кусочно лекссегментный идеал, J — I-гоцманов идеал. Тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти* (*как модули над* $A[1:n]$).

Доказательство опирается на следующие леммы.

Лемма 3.4.6. *Пусть J — I-гоцманов идеал и* $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ *— его общий идеал старших членов. Тогда J и* $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ *имеют одинаковые градуированные числа Бетти. В частности, общий идеал старших членов I-гоцманова идеала тоже I-гоцманов.*

Доказательство. Пусть J' — идеал, порожденный J_d.

Если $d < \delta(I)$, то $J_d = I_d$, и следовательно, идеал J' сильно устойчив. Из формулы Эльяу—Кервера (1) следует, что идеал J' имеет линейную резольвенту.

Если $d \geqslant \delta(I)$, то по теореме 3.4.2 векторные пространства J'_i I-гоцмановы, т. е. J' — I-гоцманов идеал. Покажем, что $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')$ порождается элементами степени d. Действительно, если у $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')$ есть порождающая степени $d' > d$, то

$$\dim \mathrm{x}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')_{d'-1} < \dim \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')_{d'} = \dim J'_{d'} = \dim \mathrm{x}J'_{d'-1} \leqslant \dim \mathrm{x}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')_{d'-1},$$

что невозможно (первое равенство следует из совпадения функций Гильберта J' и $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')$, второе — из того, что у J' нет порождающих степени d', а последнее неравенство — из теоремы 3.2.1). Таким образом, идеал $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')$ порожден мономами степени d, а так как он сильно устойчивый, то из формулы Эльяу—Кервера (1) опять следует, что его резольвента линейна. Кроме того, так как при переходе от J' к $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J')$ градуированные числа Бетти не убывают (теорема 1.4.6), то и $J' = (J_d)$ имеет линейную резольвенту.

Таким образом, при всех d идеал J' имеет линейную резольвенту. Как было показано в [7], градуированные числа Бетти однородного идеала J и его общего идеала старших членов $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ совпадают тогда и только тогда, когда все идеалы (J_d), порожденные пространствами J_d, имеют линейные резольвенты. □

Лемма 3.4.7. *Пусть J — I-гоцманов сильно устойчивый идеал. Тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти.*

Доказательство. При доказательстве леммы 3.4.4 было показано, что $m_j(J_d) = m_j(L^I(J)_d)$ и $M_j(J_d) = M_j(L^I(J)_d)$ для всех d и j. Из формулы Эльяу—Кервера следует, что $\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(J)$ полностью определяется числами $m_l(J_j)$ и $M_l(J_{j-1})$, $l = 1,\ldots,n$, аналогично, число Бетти

$\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(L^I(J))$ полностью определяется числами $m_l(L^I(J)_j)$ и $M_l(L^I(J)_{j-1})$, $l = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(J) = \beta_{i,i+j}^{A[1:n]}(L^I(J))$. □

Доказательство теоремы 3.4.5. Пусть $J - I$-гоцманов идеал, по лемме 3.4.6 $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ тоже I-гоцманов и имеет такие же градуированные числа Бетти, что и J. Над полем характеристики нуль общий идеал старших членов является сильно устойчивым, поэтому для завершения доказательства достаточно применить лемму 3.4.7. □

3.5. Неравенство для чисел Бетти над фактор-кольцом

При рассмотрении теоремы Маколея для фактор-колец появляется возможность изучать числа Бетти не только над самим кольцом $A[1:n]$, но и над кольцом $R = A[1:n]/I$. Хотя поведение чисел Бетти над R гораздо более сложно, некоторые результаты могут быть получены и здесь.

Введем следующее обозначение: если M — некоторое множество мономов в $A[1:n]$, то положим

$$h_M(s,t) = \sum_{u \in M} t s^{\deg u} (1+st)^{\max(u)-1}.$$

В [26] доказана следующая теорема.

Теорема 3.5.1. *Пусть I и J — сильно устойчивые идеалы в кольце $A[1:n]$, причем $I \subseteq J \cap (x_1, \ldots, x_n)^2$. Тогда ряд Пуанкаре модуля $A[1:n]/J$ над кольцом $A[1:n]/I$ имеет вид*

$$P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]/I}(s,t) = \frac{1 + h_{G(J)}(s,t) - t h_{G(I)\cap G(J)}(s,t)}{1 - t h_{G(I)}(s,t)}.$$

Лемма 3.5.2. *Пусть $J \subseteq A[1:n]$ — сильно устойчивый идеал. Тогда*

$$h_{G(J)}(s,t) = t \sum_{l \geqslant 1} s^l \sum_{i \geqslant 0} \beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(J)(st)^i.$$

Доказательство. Применим теорему 3.5.1 для случая $I = 0$:

$$P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]}(s,t) = \frac{1 + h_{G(J)}(s,t) - t h_{G(I)\cap G(J)}(s,t)}{1 - t h_{G(I)}(s,t)} = 1 + h_{G(J)}(s,t),$$

так как $G(I) = G(I) \cap G(J) = \varnothing$. С другой стороны, по определению ряда Пуанкаре

$$P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]}(s,t) = \sum_{l \geqslant 0} \sum_{i \geqslant 0} \beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(A[1:n]/J) s^{i+l} t^i.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(A[1:n]/J) = \beta_{i-1,i+l}^{A[1:n]}(J)$, а также что $\beta_{0,0}^{A[1:n]}(A[1:n]/J) = 1$ и $\beta_{0,j}^{A[1:n]}(A[1:n]/J) = 0$ при $j > 0$, т. е.

$$P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]}(s,t) = 1 + t \sum_{l \geqslant 1} s^l \sum_{i \geqslant 0} \beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(J)(st)^i,$$

откуда и следует искомое равенство. □

Замечание 3.5.3. Предыдущую лемму можно получить без использования теоремы 3.5.1, напрямую воспользовавшись формулой Эльяу—Кервера (1).

Теорема 3.5.4. *Пусть* $\mathrm{char}\, k = 0$. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал, не имеющий порождающих степени* 1, *J — сильно устойчивый идеал, содержащий I. Если либо*

$$G(J) \cap G(I) = G(L^I(J)) \cap G(I),$$

либо

$$G(L^I(J)) \cap G(I) = \varnothing,$$

то

$$P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]/I}(s,t) \ll P_{A[1:n]/L^I(J)}^{A[1:n]/I}(s,t),$$

где знак $\ll$ означает покоэффициентное неравенство степенных рядов, причем в первом случае (т. е. при $G(J) \cap G(I) = G(L^I(J)) \cap G(I)$) равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$P_J^{A[1:n]}(s,t) = P_{L^I(J)}^{A[1:n]}(s,t).$$

Доказательство. Пусть $L = L^I(J)$. Для доказательства рассмотрим разность

$$D(s,t) = P_{A[1:n]/L^I(J)}^{A[1:n]/I}(s,t) - P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]/I}(s,t) = \\ = \frac{h_{G(L)}(s,t) - h_{G(J)}(s,t) - th_{G(I)\cap G(L)}(s,t) + th_{G(I)\cap G(J)}(s,t)}{1 - th_{G(I)}(s,t)}.$$

Заметим сначала, что ряд

$$\frac{1}{1 - th_{G(I)}(s,t)}$$

есть ряд с неотрицательными коэффициентами, поэтому достаточно доказать, что многочлен

$$h_{G(L)}(s,t) - h_{G(J)}(s,t) - th_{G(I)\cap G(L)}(s,t) + th_{G(I)\cap G(J)}(s,t)$$

имеет неотрицательные коэффициенты. Рассмотрим сначала

$$D_1(s,t) = -th_{G(I)\cap G(L)}(s,t) + th_{G(I)\cap G(J)}(s,t).$$

По условию теоремы либо $G(J) \cap G(I) = G(L) \cap G(I)$ и, следовательно, $D_1(s,t) \equiv 0$, либо $G(L) \cap G(I) = \varnothing$ и тогда $D_1(s,t) = th_{G(I)\cap G(J)}(s,t)$ — в обоих случаях все коэффициенты $D_1(s,t)$ неотрицательны.

Перейдем теперь к

$$D_2(s,t) = h_{G(L)}(s,t) - h_{G(J)}(s,t).$$

Применяя лемму 3.5.2, получаем

$$D_2(s,t) = t\sum_{l\geqslant 1} s^l \sum_{i\geqslant 0} (\beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(L) - \beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(J))(st)^i.$$

Так как по теореме 3.3.1 $\beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(L) \geqslant \beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(J)$, то все коэффициенты многочлена $D_2(s,t)$ неотрицательны, причем $D_2(s,t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(L) = \beta_{i,i+l}^{A[1:n]}(J)$ при всех i и l, т. е. когда

$$P_J^{A[1:n]}(s,t) = P_{L^I(J)}^{A[1:n]}(s,t).$$

Теорема доказана. □

Несмотря на то, что условия теоремы 3.5.4 весьма ограничительны, она позволяет полностью рассмотреть случай сильно устойчивых I-гоцмановых идеалов.

Следствие 3.5.5. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$. *Пусть $I \subseteq A[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал, не имеющий порождающих степени* 1, *J — сильно устойчивый I-гоцманов идеал. Тогда*

$$P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]/I}(s,t) = P_{A[1:n]/L^I(J)}^{A[1:n]/I}(s,t).$$

Доказательство. Пусть $L = L^I(J)$. Заметим, что в этом случае $G(J)\cap G(I) = G(L)\cap G(I) = G(I)$ по определению I-гоцманова идеала, кроме того, по теореме 3.4.5 ряд Пуанкаре I-гоцманова идеала совпадает с рядом Пуанкаре соответствующего I-лекссегментного идеала:

$$P_L^{A[1:n]}(s,t) = P_J^{A[1:n]}(s,t).$$

Поэтому, применяя предыдущую теорему, получаем

$$P_{A[1:n]/L}^{A[1:n]/I}(s,t) = P_{A[1:n]/J}^{A[1:n]/I}(s,t).$$

Следствие доказано. □

3.6. Факторизация по общим однородным формам

В этом разделе мы рассмотрим результаты, связанные с теоремой Грина [21], описывающей поведение однородных векторных пространств при факторизации по общим линейным формам, а также с различными ее обобщениями (см. [16–18, 24]).

Напомним, что однородная форма h называется *общей* для некоторого векторного пространства $V \subseteq A[1:n]_d$, если пространство $V + (h)_d$ имеет наибольшую возможную размерность.

Теорема 3.6.1. *Пусть I — кусочно лекссегментный идеал в $A[1:n]$. Если $V \subseteq A[1:n]_d$ — векторное пространство, содержащее I_d, h_1 — общая однородная форма для V степени $s < d$, а h_2 — общая однородная форма для $L^I(V)$ степени s, то*

$$\dim L^I(V)/h_2 \leqslant \dim V/h_1.$$

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\dim(L^I(V) + (h_2)_d) \leqslant \dim(V + (h_1)_d).$$

Сначала сведем утверждение к случаю сильно устойчивого векторного пространства V.

Лемма 3.6.2. *Пусть $V \subseteq A[1:n]_d$ — векторное пространство, содержащее I_d, h — общая однородная форма для V степени $s < d$. Тогда существует такое сильно устойчивое пространство $W \subseteq A[1:n]_d$, содержащее I_d, что $\dim V = \dim W$ и*

$$\dim(W + (x_n^s)_d) \leqslant \dim(V + (h)_d).$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $W = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_d$, где J — идеал, порожденный V. Пространство W сильно устойчиво, содержит I_d, и $\dim V = \dim W$. Кроме того, $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J) = \mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\varphi(J))$, где φ — некоторое невырожденное линейное преобразование с верхнетреугольной матрицей. Выберем такое $g \in A[1:n]_1$, что $\varphi(g) = x_n$.

Известно (см., например, [14, предложение 15.12]), что $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(T) + (x_n^s) = \mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(T + x_n^s)$ для всякого однородного идеала $T \subseteq A[1:n]$. Поэтому

$$\dim(W + (x_n^s)_d) = \dim(\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_d + (x_n^s)_d) = \dim(\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\varphi(J) + x_n^s)_d) = \dim(\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\varphi(J + (g^s)))_d).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\dim(\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\varphi(J + (g^s)))_d) = \dim(\varphi(J + (g^s))_d) = \dim((J + (g^s))_d) \leqslant \dim(V + (h)_d),$$

где последнее неравенство имеет место, так как h общая для V. □

В [24] доказано, что x_n^s является общей однородной формой степени s для всякого сильно устойчивого векторного пространства, т. е., в частности, для W из предыдущей леммы и для $L^I(V)$.

Лемма 3.6.3. *Пусть $V \subseteq A[1:n]_d$ — сильно устойчивое векторное пространство, содержащее I_d, $L \subseteq A[1:n]_d$ — I-лекссегментное векторное пространство, причем $\dim V \leqslant \dim L$. Тогда $\dim(L : x_n^s) \geqslant \dim(V : x_n^s)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по s. При доказательстве леммы 3.3.3 было показано, что

$$\dim(L^I(V) : x_n) = m_n(L^I(V)) \geqslant m_n(V) = \dim(V : x_n),$$

а так как $L^I(V) \subseteq L$, то $\dim(L : x_n) \geqslant \dim(V : x_n)$ — база индукции доказана.

Пусть лемма доказана для $s-1$ для всех идеалов I и пространств V и L, удовлетворяющих ее условию. Докажем лемму для s. Рассмотрим идеал $J = (I : x_n^{s-1}) \subseteq A[1:n]$. Этот идеал является кусочно лекссегментным по следствию 3.1.5. Рассмотрим пространства $V' = (V : x_n^{s-1})$ и $L' = (L : x_n^{s-1})$. Очевидно, что V' сильно устойчиво и содержит J_{d-s+1}, а L' J-лекссегментно. Кроме того, по предположению индукции $\dim L' \geqslant \dim V'$, поэтому, аналогично базе индукции, $\dim(L' : x_n) \geqslant \dim(V' : x_n)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\dim(L : x_n^s) = \dim(L' : x_n)$ и $\dim(V : x_n^s) = \dim(V' : x_n)$. □

Теперь доказательство теоремы 3.6.1 вытекает непосредственно из предыдущей леммы. □

Особый интерес представляют пространства, экстремальные в смысле теоремы 3.6.1 для однородных форм степени 1.

Определение 3.6.4. Векторное пространство $V \subseteq A[1:n]_d$, содержащее I_d, называется *пространством Грина*, если $\dim V/h = \dim L^I(V)/x_n$ для линейной формы h, общей для V.

Следующая теорема, обобщающая результат Гашарова [16], показывает связь между I-гоцмановыми пространствами и пространствами Грина.

Теорема 3.6.5. *Пусть I — кусочно лекссегментный идеал в $A[1:n]$. Если $V \subseteq A[1:n]_d$ — I-гоцманово векторное пространство, то V — пространство Грина.*

Доказательство. Разберем сначала случай, когда V сильно устойчиво.

Лемма 3.6.6. *Пусть $V \subseteq A[1:n]_d$ — I-гоцманово сильно устойчивое векторное пространство. Тогда V — пространство Грина.*

Доказательство. Как было замечено в доказательстве леммы 3.4.4, для всякого i от 1 до n выполняются равенства $M_i(V) = M_i(L^I(V))$ и $m_i(V) = m_i(L^I(V))$, в частности $m_n(V) = m_n(L^I(V))$. Так как x_n является общей линейной формой для V и $L^I(V)$, то $\dim V/x_n = \dim L^I(V)/x_n$. □

Пусть также L — n-мерное векторное пространство над k, снабженное топологией Зариского. Обозначим базисные векторы в L через $x_1, \ldots, x_n$.

Лемма 3.6.7. *Пусть $B \subseteq \mathrm{GL}(n)$, $C \subseteq L$ — непустые открытые множества. Тогда существуют такие $\psi \in B$ и $l \in C$, что $\psi(l) = x_n$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $B^{-1} = \{\varphi \in \mathrm{GL}(n) \colon \varphi^{-1} \in B\}$. Оно непусто и открыто в $\mathrm{GL}(n)$. Рассмотрим, далее, множество $D = \{\varphi(x_n) \in L \colon \varphi \in B^{-1}\}$. Это множество открыто в L, так как его можно отождествить с множеством последних столбцов матриц из B^{-1}. Так как в топологии Зариского любые два непустых открытых множества пересекаются, то существует элемент $l = \psi^{-1}(x_n) \in L \cap D$, где $\psi \in B$. □

Вернемся теперь к доказательству теоремы 3.6.5. Пусть V — I-гоцманово векторное пространство, J — идеал, порожденный V. Пусть $W = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_d$. По теореме 1.4.1 существует такое открытое множество B в $\mathrm{GL}(n)$, что $K = \mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\varphi(J))$ для всех $\varphi \in B$. Обозначим через $C \subseteq L$ открытое множество линейных форм, общих для V. По предыдущей лемме существуют такие $\psi \in B$ и $l \in L$, что $\psi(l) = x_n$. Так как $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\psi(J)+(x_n)) = \mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(\psi(J))+(x_n)$ (см. [14, предложение 15.12]), то $\dim(V + (l)_d) = \dim(W + (x_n)_d)$, а так как $\dim W = \dim V$, то $\dim V/l = \dim W/x_n$. Для окончания доказательства осталось заметить, что W сильно устойчиво и I-гоцманово (лемма 3.4.6) и применить лемму 3.6.6. □

Глава 4

КУСОЧНО ЛЕКССЕГМЕНТНЫЕ ИДЕАЛЫ: СЛУЧАЙ ВНЕШНЕЙ АЛГЕБРЫ

4.1. Кусочно лекссегментные идеалы во внешней алгебре

Определение 4.1.1. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1:n]$ называется *кусочно лекссегментным*, если для любого монома $e_\sigma \in G(I)$ степени d и для любого монома $e_\tau \in E[1:n]$ степени d, удовлетворяющего условиям $e_\tau >_{\mathrm{lex}} e_\sigma$ и $\max\tau \leqslant \max\sigma$, выполнено $e_\tau \in I$.

Предложение 4.1.2. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал. Тогда*

1) *идеал $I \cap E[1:l]$ кусочно лекссегментный в $E[1:l]$;*
2) *идеал $IE[1:r] \subseteq E[1:r]$ кусочно лекссегментный при $r > n$.*

Доказательство. Оба утверждения следуют непосредственно из определения кусочно лекссегментного идеала. □

Теорема 4.1.3. *Мономиальный идеал $I \subseteq E[1:n]$ является кусочно лекссегментным тогда и только тогда, когда существуют такие лекссегментные идеалы $L_j \subseteq E[1:j]$, $1 \leqslant j \leqslant n$, что*

$$I = L_1E[1:n] + \ldots + L_nE[1:n].$$

Доказательство. Проведем индукцию по n — числу переменных в $E[1:n]$. База индукции следует из того, что при $n = 1$ всякий кусочно лекссегментный идеал является лекссегментным. Пусть теперь $n > 1$ и при всех $l < n$ теорема уже доказана.

Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал. Тогда по предложению 4.1.2 идеал $I' = I \cap E[1:(n-1)]$ является кусочно лекссегментным, следовательно, по предположению индукции $I' = L_1E[1:(n-1)]+\ldots+L_{n-1}E[1:(n-1)]$. Рассмотрим все такие мономы $e_\sigma \in G(I)$, что $\max\sigma = n$. Для каждого такого монома e_σ построим множество мономов

$$L(e_\sigma) = \{e_\tau \in E[1:n]\colon |\tau| = |\sigma|,\ e_\tau \geqslant_{\text{lex}} e_\sigma\},$$

$$L_n = \bigoplus_{\substack{e_\sigma \in G(I)\\ \max\sigma = n}} L(e_\sigma)E[1:n].$$

Очевидно, L_n — лекссегментный идеал, содержащийся в I. Покажем, что $I = L_1E[1:n] + \ldots + L_nE[1:n]$. Положим $J = L_1E[1:n] + \ldots + L_nE[1:n]$. Включение $J \subseteq I$ очевидно, так как $L_n \subseteq I$. Докажем теперь, что $I \subseteq J$. Так как I мономиальный, то достаточно доказать, что $e_\sigma \in J$ для всякого монома $e_\sigma \in I$. Действительно, пусть e_τ — минимальная порождающая идеала I, делящая e_σ. Если $\max\tau < n$, то $e_\tau \in L_1E[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}E[1:(n-1)]$, следовательно, $e_\sigma \in L_1E[1:n] + \ldots + L_{n-1}E[1:n] \subseteq J$. Если $\max\tau = n$, то $e_\sigma \in L_n \subseteq J$.

Докажем теперь, что идеал $I = L_1E[1:n] + \ldots + L_nE[1:n]$ является кусочно лекссегментным. По предположению индукции $J = L_1E[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}E[1:(n-1)])$ является кусочно лекссегментным. Пусть $e_\sigma \in G(I)$. Если $e_\sigma \in JE[1:n]$, то $e_\sigma \in J$ (так как e_σ — минимальная порождающая) и, следовательно, $e_\sigma \in G(J)$. Поэтому для всякого такого $e_\tau \in E[1:n]_{|\sigma|}$, что $\max\tau \leqslant \max\sigma$ и $e_\tau >_{\text{lex}} e_\sigma$, выполнено $e_\tau \in J \subseteq I$. Если же $e_\sigma \in L_n$, то, так как L_n лекссегментный, для всякого такого $e_\tau \in E[1:n]_{|\sigma|}$, что $e_\tau >_{\text{lex}} e_\sigma$, выполнено $e_\tau \in L_n \subseteq I$. Таким образом, I кусочно лекссегментный. □

4.2. Теорема Маколея для кусочно лекссегментных идеалов во внешней алгебре

Теорема 4.2.1. *Всякий кусочно лекссегментный идеал I в $E[1:n]$ является M-идеалом.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. База индукции при $n = 1$ очевидна. Предположим, что при всех $l < n$ теорема уже доказана. Рассмотрим представление идеала I в виде суммы лекссегментных из предыдущей теоремы:

$$I = L_1E[1:n] + \ldots + L_nE[1:n].$$

Пусть

$$I' = L_1E[1:(n-1)] + \ldots + L_{n-1}E[1:(n-1)] \subseteq E[1:(n-1)].$$

Так как I' кусочно лекссегментный, то он является M-идеалом по предположению индукции. Применяя теорему 2.6.2, получаем, что $I'E[1:n]$ тоже является M-идеалом. Так как идеал I равен сумме $I'E[1:n]$ и лекссегментного идеала L_n, то он, в свою очередь, также является M-идеалом (см. теорему 2.7.2). □

Теперь мы докажем одно важное свойство кусочно лекссегментных идеалов: оказывается, что все они являются сильно устойчивыми, т. е. возникают как идеалы старших членов при общей линейной замене переменных.

Предложение 4.2.2. *Всякий кусочно лекссегментный идеал $I \subseteq E[1:n]$ является сильно устойчивым.*

Доказательство. Пусть $e_\sigma \in G(I)$. В этом случае $e_{\sigma\cup\{j\}\setminus\{i\}} \in I$ для всяких $i \in \sigma$, $j \notin \sigma$, $j < i$, по определению кусочно лекссегментного идеала. □

В заключение данного раздела мы докажем, что из всех сильно устойчивых идеалов только кусочно лекссегментные являются M-идеалами.

Предложение 4.2.3. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — сильно устойчивый M-идеал, $R = E[1:n]/I$. Если существует такой моном $e_\tau \in \mathcal{M}(R_d)$, что $\max\tau < n$ и $e_{\tau\cup\{n\}} \in G(I)$, то для всякого $e_\sigma \in \mathcal{M}(E[1:n]_{d+1})$ с условием $e_\sigma >_{\mathrm{lex}} e_{\tau\cup\{n\}}$ имеем $e_\sigma \in I$.*

Доказательство. Действительно, пусть $e_\sigma \in \mathcal{M}(R_{d+1})$ таков, что $e_\sigma >_{\mathrm{lex}} e_{\tau\cup\{n\}}$. Легко видеть, что мономы e_σ и e_τ удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 2.4.2. Кроме того, так как I — M-идеал, то по теоремам 2.2.4, 2.2.1 и 2.4.2 получаем, что $\sigma = \tau \cup \{i\}$. С другой стороны, из сильной устойчивости идеала I вытекает, что $e_\tau \wedge e_i \in I$ для всех i — противоречие. □

Теорема 4.2.4. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — сильно устойчивый идеал. Идеал I является M-идеалом тогда и только тогда, когда I кусочно лекссегментный.*

Доказательство. Если I кусочно лекссегментный, то он является M-идеалом по теореме 4.2.1.

Предположим, что I является M-идеалом, но не является кусочно лекссегментным, т. е. для некоторого $e_\sigma \in G(I)$, $\max\sigma = l \leqslant n$, существует моном e_τ степени $d = \deg e_\sigma$, $\max\tau \leqslant l$, больший e_σ, но не принадлежащий I. Для определенности считаем, что e_τ — наименьший моном степени d, больший e_σ, имеющий $\max\tau \leqslant l$ и не принадлежащий I. Обозначим $\sigma' = \sigma \setminus \{l\}$.

Покажем, что $\max\tau = l$. Действительно, если $\max\tau < l$, то моном $e_{\tau'}$, где $\tau' = (\tau \cup \{1 + \max\tau\}) \setminus \{\max\tau\}$, принадлежит I, так как $e_{\tau'}$ — следующий по порядку за e_τ моном (и меньший его), откуда по причине сильной устойчивости идеала I получаем, что $e_\tau \in I$ — противоречие.

Покажем, что $e_{\sigma'} \wedge e_n \notin I$. Предположим противное, тогда из сильной устойчивости идеала I вытекает, что либо $e_{\sigma'} \in I$, либо $e_{\sigma'} \wedge e_n \in G(I)$. Первое невозможно, так как $e_\sigma \in G(I)$. Если же $e_{\sigma'} \wedge e_n \in G(I)$, то из предложения 4.2.3 следует, что $e_\tau \in I$ — противоречие.

Пусть j — минимальное число, не принадлежащее σ', удовлетворяющее условию $e_{\sigma'\cup\{j\}} \notin I$. Так как I сильно устойчивый, то при $t \geqslant j$, $t \notin \sigma'$ имеем $e_{\sigma'\cup\{t\}} \notin I$, а при $t < j$ имеем $e_{\sigma'\cup\{t\}} \in I$. Рассмотрим множество

$$B = \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_d)\colon e_\rho <_{\mathrm{lex}} e_{\sigma'\cup\{n\}}\} \cup \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_d)\colon e_\tau \geqslant_{\mathrm{lex}} e_\rho >_{\mathrm{lex}} e_{\sigma'\cup\{j\}}\}.$$

Покажем, что для множества B нарушается теорема Маколея, т. е. $\Gamma^R(C^R B) \nsubseteq C^R\Gamma^R(B)$. Действительно, пусть

$$B' = \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_{d-1})\colon e_\rho \leqslant_{\mathrm{lex}} e_{\tau\setminus\{l\}}\}.$$

Тогда $\Gamma^R(B) \subseteq B' \setminus \{e_{\sigma'}\}$. С другой стороны, так как $j > l$, то $e_{(\tau\cup\{n\})\setminus\{l\}} \in C^R(B)$, поэтому $e_{\tau\setminus\{l\}} \in \Gamma^R(C^R B)$, а так как Γ^R-образ C^R-сжатого множества C^R-сжат (теорема 2.2.3), то $\Gamma^R(C^R B) = B'$, т. е. $|\Gamma^R(C^R B)| > |\Gamma^R(B)| = |C^R\Gamma^R(B)|$ — противоречие. □

4.3. Неравенство для чисел Бетти над кольцом многочленов и над внешней алгеброй

Лекссегментные идеалы во внешней алгебре, так же как и в кольце многочленов, обладают интересными экстремальными свойствами, например, они имеют максимальные числа Бетти среди всех идеалов с фиксированной функцией Гильберта. В этом разделе мы обобщим это свойство на случай I-лекссегментных идеалов для кусочно лекссегментного идеала I.

Лемма 4.3.1. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал, $R = E[1:n]/I$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ — обратно сильно устойчивое множество, то $m_n(M) \geqslant m_n(C^R M)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $M' = C_n^R M$. Оно обратно сильно устойчиво. Действительно, пусть $e_\sigma \in M'$, $i \in \sigma$, $j \notin \sigma$, $i < j$. Если $j < n$, то $e_{(\sigma\cup\{j\})\setminus\{i\}} \in M'$, так как M' n-сжато.

Пусть $j = n$. Так как идеал $I' = I \cap E[1:(n-1)]$ является кусочно лекссегментным (предложение 4.1.2) и, следовательно, M-идеалом (теорема 4.2.1), то

$$|\Gamma^R(M_{n=0})| \geqslant |\Gamma^R(M'_{n=0})|.$$

Так как M обратно сильно устойчиво, то

$$\Gamma^R(M_{n=0}) \subseteq \Gamma^R_n(M_{n=1}),$$

откуда следует, что

$$|\Gamma^R(M'_{n=0})| \leqslant |\Gamma^R_n(M_{n=1})| = |M_{n=1}| = |M'_{n=1}|.$$

Множество $\Gamma^R(M'_{n=0}) \wedge e_n$ n-сжато, следовательно, $\Gamma^R(M'_{n=0}) \wedge e_n \subseteq M'_{n=1}$. Отсюда получаем, что $e_{(\sigma\cup\{n\})\setminus\{i\}} \in M'_{n=1}$.

Заметим, что $m_n(M') \geqslant m_n(C^R M)$. Действительно, так как оба множества M' и $C^R M$ обратно сильно устойчивые, то

$$\Gamma^R(M') = \Gamma^R(M'_{n=1}) \geqslant \Gamma^R((C^R M)_{n=1}) = \Gamma^R(C^R M),$$

откуда следует, что

$$m_n(M') = |M'_{n=1}| \geqslant |(C^R M)_{n=1}| = m_n(C^R M).$$

Поскольку $m_n(M) = m_n(M')$, окончательно получаем $m_n(M) \geqslant m_n(C^R M)$. □

Лемма 4.3.2. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал, $R = E[1:n]/I$. Если $M \cup \mathcal{M}(I_d)$ сильно устойчиво, то для всех i от 1 до n выполнено неравенство*

$$M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leqslant M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по n — числу переменных в $E[1:n]$. При $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что лемма доказана для $n-1$, докажем ее для n.

Покажем, что $m_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \geqslant m_n(M \cup \mathcal{M}(I_d))$. Действительно, рассмотрим множество $M' = \mathcal{M}(R_d) \setminus M$, это множество обратно сильно устойчиво. По лемме 4.3.1 $m_n(M') \geqslant$ $\geqslant m_n(C^R M')$. Но так как $m_n(M') = m_n(\mathcal{M}(E[1:n])_d \setminus (\mathcal{M}(I_d) \cup M))$, то $m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M) =$ $= m_n(\mathcal{M}(E[1:n])_d) - m_n(M')$. Аналогично, $m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M) = m_n(\mathcal{M}(E[1:n])_d) - m_n(C^R M')$, поэтому $m_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \geqslant m_n(M \cup \mathcal{M}(I_d))$.

Рассмотрим идеал $J = I \cap E[1:(n-1)] \subseteq E[1:(n-1)]$, а также множества $S = M \cap E[1:(n-1)]_d$ и $T = D^R M \cap E[1:(n-1)]_d$. Пусть $R' = E[1:(n-1)]/J$. Идеал J является кусочно лекссегментным по предложению 4.1.2, кроме того, множество $S \cup J_d$ является сильно устойчивым, а T — J-лекссегментным. Заметим, что $\mathcal{M}(J_d) = \{e_\sigma \in \mathcal{M}(I_d) \colon \max\sigma < n\}$, поэтому

$$|\mathcal{M}(J_d) \cup S| = |\mathcal{M}(I_d) \cup M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M),$$
$$|\mathcal{M}(J_d) \cup T| = |\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M),$$

а также

$$M_i(S \cup J_d) = M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d)), \tag{12}$$
$$M_i(T \cup J_d) = M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \tag{13}$$

при i от 1 до $n-1$. Заметим, что

$$|S| = |\mathcal{M}(J_d) \cup S| - |\mathcal{M}(J_d)| = |\mathcal{M}(I_d) \cup M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M) - |\mathcal{M}(J_d)| \geqslant$$
$$\geqslant |\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M| - m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M) - |\mathcal{M}(J_d)| = |T|.$$

Пусть S' — такое подмножество в S, что $S' \cup \mathcal{M}(J_d)$ является сильно устойчивым (в $E[1:(n-1)]$) и $|S'| = |T|$, т. е. $T = D^{R'} S'$ (для получения S' можно, например, убрать из S нужное количество младших мономов). По предположению индукции

$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) \leqslant M_i(S' \cup \mathcal{M}(J_d))$$

при i от 1 до $n-1$. А так как $S' \subseteq S$, то

$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) \leqslant M_i(S \cup \mathcal{M}(J_d)).$$

Используя равенства (12) и (13), получим

$$M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leqslant M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d))$$

при i от 1 до $n-1$. Осталось доказать лишь, что

$$M_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leqslant M_n(M \cup \mathcal{M}(I_d)),$$

но это очевидно, так как

$$M_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) = |D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)| = |M \cup \mathcal{M}(I_d)| = M_n(M \cup \mathcal{M}(I_d)).$$

Лемма доказана. □

Следующая теорема является обобщением результата [4], где был рассмотрен случай $I = 0$.

Теорема 4.3.3. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, $I \subseteq E[1:n]$ *— кусочно лекссегментный идеал, а* $J \subseteq E[1:n]$ *— произвольный однородный идеал, содержащий* I. *Тогда для всех* i *и* j *выполнено неравенство*

$$\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/J) \leqslant \beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/L^I(J)).$$

Доказательство. Рассмотрим идеал $\operatorname{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J) \subseteq E[1:n]$. По теореме 1.4.7 этот идеал имеет такую же, как у J, функцию Гильберта, сильно устойчив, а также для всех i и j выполнено неравенство

$$\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/J) \leqslant \beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/\operatorname{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)).$$

Кроме того, так как идеал I является сильно устойчивым, $I \subseteq \operatorname{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ и $L^I(J) = L^I(\operatorname{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J))$. Таким образом, можно считать, что идеал J сильно устойчивый. Используя лемму 4.3.2 и дословно повторяя рассуждения [4, доказательство теоремы 4.4], получаем требуемое. □

Следующая теорема является обобщением результата [8], где был рассмотрен случай $I = 0$.

Теорема 4.3.4. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, $I \subseteq E[1:n]$ *— кусочно лекссегментный идеал, а* $J \subseteq E[1:n]$ *— произвольный однородный идеал, содержащий* I. *Тогда для всех* i *и* j *выполнено неравенство*

$$\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/\operatorname{S}(J)) \leqslant \beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/\operatorname{S}(L^I(J))).$$

Доказательство. В [8] показано, что для всякого однородного идеала $J \subseteq E[1:n]$, содержащего сильно устойчивый идеал I, существует сильно устойчивый идеал $J' \subseteq E[1:n]$ с такой же функцией Гильберта, причем

$$\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/\operatorname{S}(J)) \leqslant \beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/\operatorname{S}(J'))$$

для всех i и j. Кроме того, $I \subseteq J'$. Таким образом, можно считать, что идеал J сильно устойчивый. Используя лемму 4.3.2 и дословно повторяя рассуждения [6, доказательство теоремы 4.4], получаем требуемое. □

4.4. I-гоцмановы идеалы во внешней алгебре и их числа Бетти

В данном разделе мы рассмотрим множества, экстремальные в смысле теоремы Маколея, т. е. такие множества $M \subseteq R_d$, для которых неравенство

$$|\Delta^R(D^R M)| \leqslant |\Delta^R(M)|$$

превращается в равенство. Если $R = E[1:n]$, т. е. $I = (0)$, то векторное пространство, порожденное мономами экстремального множества $M \subseteq E[1:n]_d$, называется *гоцмановым*. Известно, что в случае $I = (0)$ гоцмановы пространства обладают свойством устойчивости, т. е. если V гоцманово, то $\mathrm{e}V$ тоже (см. [4]). Здесь мы обобщаем этот результат на случай, когда I кусочно лекссегментный.

Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал, $R = E[1:n]/I$. Если $V \subseteq R_d$ — некоторое векторное пространство, то через $D^R V$ обозначим I-лекссегментное векторное пространство, имеющее размерность, равную размерности V. Кроме того, если $W \subseteq E[1:n]_d$ — векторное пространство и $I_d \subseteq W$, то положим $L^I(W) = I_d + D^R(W \cap R_d)$.

Определение 4.4.1. Векторное пространство $V \subseteq E[1:n]_d$ называется *I-гоцмановым*, если выполнены следующие условия:

1) $d \geqslant \delta(I) = \max\{\deg u \colon u \in G(I)\}$;

2) $I_d \subseteq V$;
3) $\dim \mathrm{e}V = \dim \mathrm{e}L^I(V)$.

Будем называть однородный идеал J *I-гоцмановым*, если все пространства J_d являются I-гоцмановыми при $d \geqslant \delta(I)$ и $J_d = I_d$ при $d < \delta(I)$.

Следующая теорема обобщает теорему Гоцмана для внешних алгебр [4].

Теорема 4.4.2. *Пусть $I \subseteq E[1:n]$ — кусочно лекссегментный идеал, $V \subseteq E_d$ — I-гоцманово векторное пространство. Тогда $\mathrm{e}V$ тоже I-гоцманово.*

Доказательство. Очевидно, что $I_{d+1} \subseteq \mathrm{e}V$. Поэтому достаточно показать, что пространство $\mathrm{e}(\mathrm{e}V)$ имеет нужную размерность.

Доказательство следующей простой леммы можно найти в [6].

Лемма 4.4.3. *Пусть $V \subseteq E[1:n]_d$ — сильно устойчивое пространство. Тогда*

1) *для всякого i от 1 до n $m_i(\mathrm{e}V) = M_{i-1}(V)$;*
2) $\dim \mathrm{e}V = \sum\limits_{i=1}^{n-1} M_i(V)$.

Доказательство теоремы 4.4.2 начнем с рассмотрения случая сильно устойчивого векторного пространства.

Лемма 4.4.4. *Пусть $V \subseteq E[1:n]_d$ — сильно устойчивое I-гоцманово пространство. Тогда $V' = \mathrm{e}V$ тоже I-гоцманово.*

Доказательство. Действительно, по утверждению 2) леммы 4.4.3

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_i(V) = \dim \mathrm{e}V = \dim \mathrm{e}L^I(V) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(L^I(V))$$

(среднее равенство имеет место в силу I-гоцмановости V), следовательно, по лемме 4.3.2 получаем, что для всякого i от 1 до n выполняются равенства $M_i(V) = M_i(L^I(V))$ и $m_i(V) = m_i(L^I(V))$. Далее, по утверждениям 2) и 1) леммы 4.4.3

$$\dim \mathrm{e}V' = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(V') = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1} M_j(V) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1} M_j(L^I(V)) = \dim \mathrm{e}(\mathrm{e}L^I(V)).$$

Осталось заметить, что $\mathrm{e}L^I(V) = L^I(V')$. □

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть W — идеал, порожденный V. Рассмотрим идеал $J = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(W)$. Этот идеал сильно устойчив, кроме того, $I_t \subseteq J$ при $t \geqslant d$ (I сильно устойчивый). Так как

$$\dim \mathrm{e}W_d = \dim J_{d+1} \geqslant \dim \mathrm{e}J_d \geqslant \dim \mathrm{e}W_d$$

(последнее неравенство имеет место по теореме 4.2.1 и в силу I-гоцмановости W_d), то $J_{d+1} = \mathrm{e}J_d$ и $\dim \mathrm{e}J_d = \dim \mathrm{e}W_d$, т. е. J_d I-гоцманово. По лемме 4.4.4 получаем, что J_{d+1} I-гоцманово. Если показать, что $J_{d+2} = \mathrm{e}J_{d+1}$, то получим, что $W_{d+1} = \mathrm{e}V$ I-гоцманово. Иными словами, нужно показать, что у идеала J нет минимальных порождающих степени $d+2$.

Переход от идеала W к $J = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(W)$ можно осуществить в два этапа. Сначала при помощи общей линейной замены переменных перейти к идеалу W'. Очевидно, что у идеала W' будут порождающие только степени d (как и у W). Затем нужно взять идеал старших членов $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ идеала W' относительно обратного лексикографического порядка, тогда $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W') = \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(W)$. Таким образом, достаточно показать, что при переходе от W' к $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ порождающие степени $d+2$ не появятся.

Предположим, что у $\mathrm{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ есть порождающая степени $d+2$, т. е. существуют такие $f_{ij} \in W'_d$ со старшими коэффициентами 1 и $\lambda_{ij} \in k \setminus \{0\}$, что для любых k, l и для любого $f \in W'_d$ выполнено

$$\mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}\left[\sum_{i<j} (-1)^{\mu(i,j,f_{ij})}\lambda_{ij} e_i \wedge e_j \wedge f_{ij}\right] \neq \mathrm{Lm}_{\mathrm{rlex}}[(-1)^{\mu(k,l,f)} e_k \wedge e_l \wedge f].$$

Здесь $\mu(s,t,f)$ выбирается так, чтобы многочлен

$$(-1)^{\mu(s,t,f)}e_s \wedge e_t \wedge f$$

имел старший коэффициент 1. Пусть

$$f_0 = \sum_{i<j} \lambda_{ij}(-1)^{\mu(i,j,f_{ij})}e_i \wedge e_j \wedge f_{ij},$$

$m = \operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[f_0]$, $M = \max\limits_{i<j} \operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[e_i \wedge e_j \wedge f_{ij}]$. Будем считать, что данное представление f_0 в виде

$$\sum_{i<j} \lambda_{ij}(-1)^{\mu(i,j,f_{ij})}e_i \wedge e_j \wedge f_{ij}$$

имеет минимальное число слагаемых, у которых старший член равен M. Заметим, что $M >_{\mathrm{rlex}} m$, поэтому таких слагаемых по крайней мере два, пусть эти слагаемые есть $\lambda_{ij}(-1)^{\mu(i,j,f_{ij})}e_i \wedge e_j \wedge f_{ij}$ и $\lambda_{lk}(-1)^{\mu(k,l,f_{kl})}e_k \wedge e_l \wedge f_{lk}$ ($i<j$, $k<l$). Так как равенство $e_i \wedge e_j = e_k \wedge e_l$ невозможно (иначе число слагаемых можно уменьшить), то считаем, что $i<l$. Пусть $\operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[f_{ij}] = e_\sigma$, разберем два случая.

Если $l \in \sigma$, то, так как идеал $\operatorname{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ сильно устойчивый, имеем $e_{(\sigma\cup\{i\})\setminus\{l\}} = \operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[f]$ для некоторого $f \in W'_d$ со старшим коэффициентом 1. Следовательно, $\operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[e_j \wedge e_l \wedge f] = M$, поэтому

$$f_0 = \lambda_{ij}e_j \wedge h_1 + \lambda_{lk}e_l \wedge h_2 + (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})(-1)^{\mu(j,l,f)}e_j \wedge e_l \wedge f + \text{остальные члены},$$

где

$$h_1 = (-1)^{\mu(j,i,f_{ij})}e_i \wedge f_{ij} - (-1)^{\mu(j,l,f)}e_l \wedge f,$$
$$h_2 = (-1)^{\mu(l,k,f_{kl})}e_k \wedge f_{lk} - (-1)^{\mu(l,j,f)}e_j \wedge f.$$

Рассмотрим многочлен h_1. Так как $\operatorname{In}_{\mathrm{rlex}}(W')$ не имеет порождающих степени $d+1$, то из теории базисов Гребнера следует, что $h_1 = \sum\limits_{p=1}^{s} \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p$, где $f_p \in W'_d$, причем $\operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[e_{s_p} \wedge f_p] \leqslant_{\mathrm{rlex}} \leqslant_{\mathrm{rlex}} \operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[f_1] <_{\mathrm{rlex}} M/e_j$. Аналогично, $h_2 = \sum\limits_{p=1}^{t} \mu_p e_{t_p} \wedge g_p$, где $\operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[e_{t_p} \wedge g_p] <_{\mathrm{rlex}} M/e_l$. Таким образом,

$$f_0 = \lambda_{ij}e_j \wedge \left[\sum_{p=1}^{s} \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p\right] + \lambda_{lk}e_l \wedge \left[\sum_{p=1}^{t} \lambda_p e_{t_p} \wedge g_p\right] +$$
$$+ (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})(-1)^{\mu(j,l,f)}e_j \wedge e_l \wedge f + \text{остальные члены}.$$

Заметим, что число членов, имеющих старший член M, уменьшилось, что невозможно — противоречие.

Если же $l \notin \sigma$, то $l = j$, и тогда

$$f_0 = \lambda_{ij}e_l \wedge h + (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})(-1)^{\mu(l,k,f_{lk})}e_l \wedge e_k \wedge f_{lk} + \text{остальные члены},$$

где

$$h = (-1)^{\mu(l,i,f_{li})}e_i \wedge f_{ij} - (-1)^{\mu(l,k,f_{lk})}e_k \wedge f_{lk}).$$

Рассуждая как и выше, получим, что $h = \sum\limits_{p=1}^{s} \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p$, причем $\operatorname{Lm}_{\mathrm{rlex}}[x_{s_p}f_p] <_{\mathrm{rlex}} M/e_l$, поэтому

$$f_0 = \lambda_{ij}e_l \wedge \left[\sum_{p=1}^{s} \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p\right] + (\lambda_{ij}+\lambda_{lk})(-1)^{\mu(l,k,f_{lk})}e_l \wedge e_k \wedge f_{lk} + \text{остальные члены}.$$

Снова число членов, имеющих старший член M, уменьшилось — противоречие. Теорема 4.4.2 доказана полностью. □

Следующая теорема показывает, что I-гоцманов идеал и соответствующий ему I-лекссегментный идеал имеют сходные гомологические характеристики.

Теорема 4.4.5. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, *$I$ — кусочно лекссегментный идеал, J — I-гоцманов идеал. Тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти* (*как модули над* $E[1:n]$).

Для доказательства нам потребуется следующее определение.

Определение 4.4.6. Однородный идеал $J \subseteq E[1:n]$ называется *покомпонентно линейным*, если для всякого d идеал $J_{(d)}$, порожденный пространством J_d, имеет линейную резольвенту.

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 4.4.7. *Пусть идеал $K \subseteq E[1:n]$ имеет d-линейную резольвенту. Тогда идеал $\mathrm{e}K$ имеет $(d+1)$-линейную резольвенту.*

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность $E[1:n]$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{e}K \longrightarrow K \longrightarrow K/\mathrm{e}K \longrightarrow 0.$$

Ей соответствует длинная точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{T}_{i+1,i+j}(K/\mathrm{e}K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(\mathrm{e}K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(K/\mathrm{e}K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i-1,i+j}(\mathrm{e}K) \longrightarrow \ldots,$$

где $\mathrm{T}_{i,i+j}(\bullet) = \operatorname{Tor}^{E[1:n]}_{i,i+j}(\bullet, k)$. По условию идеал K имеет d-линейную резольвенту, следовательно, $\mathrm{T}_{i,i+j}(K) = 0$ при $j \neq d$. Кроме того, $K/\mathrm{e}K$ есть векторное пространство с базисом из элементов степени d, следовательно, $\mathrm{T}_{i,i+j}(K/\mathrm{e}K) = 0$ при $j \neq d$. Поэтому, используя длинную точную последовательность, получаем, что $\mathrm{T}_{i,i+j}(\mathrm{e}K) = 0$ при $j > d+1$. Заметим также, что так как $\mathrm{e}K$ порожден элементами степени $d+1$, то $\mathrm{T}_{i,i+j}(\mathrm{e}K) = 0$ при $j < d+1$. Таким образом, $\mathrm{e}K$ имеет $(d+1)$-линейную резольвенту, предложение доказано. □

Предложение 4.4.8. *Пусть $K \subseteq E[1:n]$ — покомпонентно линейный идеал. Тогда*

$$\beta^{E[1:n]}_{i,i+d}(K) = \beta^{E[1:n]}_{i}(K_{(d)}) - \beta^{E[1:n]}_{i}(\mathrm{e}K_{(d-1)}).$$

Доказательство. По условию идеал $K_{(d)}$ имеет d-линейную резольвенту. Кроме того, по предложению 4.4.7 идеал $\mathrm{e}K_{(d-1)}$ имеет d-линейную резольвенту.

Пусть $\gamma(K) = \min\{\deg u \colon u \in G(K)\}$. Проведем индукцию по $l = \delta(K) - \gamma(K)$. База индукции при $l = 0$ очевидна. Пусть $l > 0$.

Рассмотрим идеал K', порожденный всеми элементами идеала K, имеющими степень меньше $\delta(K)$. Из предложения 4.4.7 следует, что этот идеал является покомпонентно линейным. По предположению индукции

$$\beta^{E[1:n]}_{i,i+d}(K') = \beta^{E[1:n]}_{i}(K'_{(d)}) - \beta^{E[1:n]}_{i}(\mathrm{e}K'_{(d-1)}).$$

Так как градуированные компоненты идеалов K' и K совпадают до степени $\delta(K)-1$ включительно, то

$$\beta^{E[1:n]}_{i,i+d}(K') = \beta^{E[1:n]}_{i,i+d}(K)$$

при $d < \delta(K)$. Кроме того, $K'_{(d)} = K_{(d)}$ и $\mathrm{e}K'_{(d)} = \mathrm{e}K_{(d)}$ при $d < \delta(K)$. Следовательно,

$$\beta^{E[1:n]}_{i,i+d}(K) = \beta^{E[1:n]}_{i}(K_{(d)}) - \beta^{E[1:n]}_{i}(\mathrm{e}K_{(d-1)})$$

при $d < \delta(K)$. Рассмотрим далее короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K' \oplus M \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

где $N = \mathrm{e}K_{(\delta(K)-1)}$ и $M = K_{(\delta(K))}$. Ей соответствует длинная точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{T}_{i+1,i+j}(K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(N) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(K') \oplus \mathrm{T}_{i,i+j}(M) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i-1,i+j}(N) \longrightarrow \ldots.$$

Модули M и N имеют $\delta(K)$-линейные резольвенты. Кроме того, из предположения индукции вытекает, что $\mathrm{T}_{i,i+d}(K') = 0$ при $d \geqslant \delta(K)$. Поэтому из длинной точной последовательности вытекает, что

$$\beta^{E[1:n]}_{i,i+d}(K) = 0 = \beta^{E[1:n]}_{i}(K_{(d)}) - \beta^{E[1:n]}_{i}(\mathrm{e}K_{(d-1)})$$

при $d > \delta(K)$. Кроме того, имеем следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}_{i+1,i+\delta(K)}(K') \longrightarrow \mathrm{T}_{i+1,i+\delta(K)}(K) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+\delta(K)}(N) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+\delta(K)}(M) \longrightarrow \mathrm{T}_{i,i+j}(K) \longrightarrow 0.$$

Так как выше было показано, что $\mathrm{T}_{i+1,i+\delta(K)}(K') \cong \mathrm{T}_{i+1,i+\delta(K)}(K)$, то

$$\beta_{i,i+\delta(K)}^{E[1:n]}(K) = \beta_{i,i+\delta(K)}^{E[1:n]}(M) - \beta_{i,i+\delta(K)}^{E[1:n]}(N) = \beta_i^{E[1:n]}(K_{(\delta(K))}) - \beta_i^{E[1:n]}(\mathrm{e}K_{(\delta(K)-1)}),$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 4.4.9. *Пусть $V \subseteq E[1:n]_d$ — I-гоцманово пространство и J — идеал, порожденный V. Тогда идеал $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ порожден I-гоцмановым пространством $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_d$.*

Доказательство. По теореме 4.4.2 все пространства J_t при $t \geqslant d$ будут I-гоцмановыми, следовательно,

$$\dim \mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_t \leqslant \dim \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{t+1} = \dim J_{t+1} = \dim \mathrm{e}J_t \leqslant \dim \mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_t$$

(последнее неравенство имеет место в силу I-гоцмановости пространства J_t). Следовательно, $\dim \mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_t = \dim \mathrm{e}J_t$, т. е. $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_t$ I-гоцманово при всех $t \geqslant d$. Кроме того, $\dim \mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_t = \dim \mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{t+1}$, т. е. у $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ нет порождающих степеней больше d. □

Предложение 4.4.10. *Всякий I-гоцманов идеал J является покомпонентно линейным.*

Доказательство. Рассмотрим идеал $J_{(d)}$, порожденный пространством J_d. Если $d < \delta(I)$, то $J_d = I_d$, т. е. $J_{(d)}$ — сильно устойчивый идеал. Из формулы (2) следует, что сильно устойчивые идеалы, порожденные в одной степени, имеют линейные резольвенты.

Пусть $d \geqslant \delta(I)$. По предложению 4.4.9 идеал $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J_{(d)})$ порожден в одной степени, кроме того, он сильно устойчив, следовательно, он имеет линейную резольвенту. Так как при переходе от $J_{(d)}$ к $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J_{(d)})$ градуированные числа Бетти не убывают (теорема 1.4.7), то и $J_{(d)}$ имеет линейную резольвенту. □

Лемма 4.4.11. *Пусть J — I-гоцманов сильно устойчивый идеал. Тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти.*

Доказательство. При доказательстве леммы 4.4.4 было показано, что $m_j(J_d) = m_j(L^I(J)_d)$ и $M_j(J_d) = M_j(L^I(J)_d)$ для всех d и j. Из формулы (2) следует, что $\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(J)$ полностью определяется числами $m_l(J_j)$ и $M_l(J_{j-1})$, $l = 1, \ldots, n$. Аналогично, число Бетти $\beta_{i,i+j}(L^I(J))$ полностью определяется числами $m_l(L^I(J)_j)$ и $M_l(L^I(J)_{j-1})$, $l = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(J) = \beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(L^I(J))$. □

Лемма 4.4.12. *Пусть $J \subseteq E[1:n]$ — I-гоцманов идеал. Тогда $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ тоже I-гоцманов и имеет такие же градуированные числа Бетти.*

Доказательство. То, что идеал $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ будет I-гоцмановым, следует из сильной устойчивости идеала I и предложения 4.4.9. Таким образом, оба идеала J и $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ являются покомпонентно линейными (предложение 4.4.10) и их числа Бетти определяются числами Бетти идеалов $J_{(d)}$, $\mathrm{e}J_{(d)}$ и $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{(d)}$, $\mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{(d)}$ соответственно (предложение 4.4.8). Поэтому достаточно показать, что

$$\beta_i^{E[1:n]}(J_{(d)}) = \beta_i^{E[1:n]}(\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{(d)})$$

и

$$\beta_i^{E[1:n]}(\mathrm{e}J_{(d)}) = \beta_i^{E[1:n]}(\mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{(d)}).$$

Рассмотрим $J_{(d)}$ и $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{(d)}$. Эти идеалы имеют линейные резольвенты и одинаковые функции Гильберта, следовательно, их числа Бетти совпадают. Аналогичное рассуждение проходит для $\mathrm{e}J_{(d)}$ и $\mathrm{e}\,\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)_{(d)}$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4.4.5. Пусть J — I-гоцманов идеал. По лемме 4.4.12 $\mathrm{Gin}_{\mathrm{rlex}}(J)$ тоже I-гоцманов и имеет такие же градуированные числа Бетти, как и J. Над полем характеристики нуль общий идеал старших членов является сильно устойчивым (теорема 1.4.7), поэтому для завершения доказательства достаточно применить лемму 4.4.11. □

В случае, когда идеал J мономиальный, аналог теоремы 4.4.5 справедлив и для чисел Бетти над кольцом многочленов.

Теорема 4.4.13. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, $I \subseteq E[1:n]$ *— кусочно лекссегментный идеал,* J *— мономиальный* I*-гоцманов идеал. Тогда* $\operatorname{S}(J)$ *и* $\operatorname{S}(L^I(J))$ *имеют одинаковые градуированные числа Бетти* (*как модули над* $A[1:n]$).

Доказательство. Действительно, в [2] показано, что справедливо равенство формальных степенных рядов

$$\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{n}\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/J)t^i s^j = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{n}\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/\operatorname{S}(J))\frac{t^i s^j}{(1-ts)^j}.$$

Отсюда следует, что числа Бетти $\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/J)$ полностью определяют числа Бетти $\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/\operatorname{S}(J))$. Теперь для доказательства достаточно применить теорему 4.4.5. □

Глава 5

I-УСТОЙЧИВЫЕ ИДЕАЛЫ

Для упрощения обозначений будем писать A вместо $A[1:n]$.

Вместо рассматривавшихся ранее мономиальных порядков lex и rlex мы будем использовать следующие:

1) $x^a >_{\mathrm{lr}} x^b$, если последняя ненулевая компонента вектора $a-b$ положительна (лексикографический порядок с $x_n > \ldots > x_1$);
2) $x^a >_{\mathrm{hlr}} x^b$, если либо $\deg x^a > \deg x^b$, либо $\deg x^a = \deg x^b$ и $x^a >_{\mathrm{lr}} x^b$ (степенной лексикографический порядок с $x_n > \ldots > x_1$).

Если $u \subseteq \mathcal{M}(A)$, положим $u' = u/x_{\max(u)}$.

Везде далее предполагается, что зафиксирован некоторой мономиальный идеал $I \subseteq A$.

5.1. Свойства I-устойчивых идеалов

Определение 5.1.1. Мономиальный идеал $J \subseteq A$ называется *I-устойчивым*, если выполняются следующие два условия:

1) $G(J) \cap I = \varnothing$;
2) для всех $u \in G(J)$ и для всех $j < \max(u)$ существует такое $i > j$, что x_i делит u и $ux_j/x_i \in J + I$.

Определение 5.1.2. Мономиальный идеал $J \subseteq A$ называется *слабо I-устойчивым*, если выполняются следующие два условия:

1) $G(J) \cap I = \varnothing$;
2) для всех $u \in G(J)$ и для всех $j < \max(u')$ существует такое $i > j$, что x_i делит u и $ux_j/x_i \in J + I$.

Определение 5.1.3. Мономиальный идеал $J \subseteq A$ называется *сильно I-устойчивым*, если выполняются следующие два условия:

1) $G(J) \cap I = \varnothing$;
2) для всех $u \in G(J)$, для всякого такого i, что x_i делит u, и для всякого $j < i$ выполнено $ux_j/x_i \in I + J$.

Замечание 5.1.4. Очевидно, что всякий сильно I-устойчивый идеал является I-устойчивым и всякий I-устойчивый идеал является слабо I-устойчивым.

Однако, как показывают следующие примеры, классы I-устойчивых, сильно I-устойчивых и слабо I-устойчивых идеалов различны.

Пример 5.1.5. Пусть $A = k[x_1, x_2, x_3]$, $I = (x_1^2)$, $J = (x_1x_3)$. Тогда J слабо I-устойчив, но не I-устойчив.

Пример 5.1.6. Пусть $A = k[x_1, x_2, x_3]$, $I = (x_1^3, x_2^2)$, $J = (x_1^2 x_2, x_1 x_2 x_3)$. Тогда J I-устойчив, но не сильно I-устойчив.

Лемма 5.1.7. *Если J I-устойчивый (слабо I-устойчивый, сильно I-устойчивый), то условие* 2) *определения* 5.1.1 (*соответственно* 5.1.2, 5.1.3) *выполняется для всех мономов $u \in J \setminus I$.*

Доказательство. Докажем утверждение для случая I-устойчивого идеала J, в остальных случаях доказательство аналогично.

Пусть $w \in J \setminus I$, тогда существует такой $u \in G(J)$, что $w = uz$ для некоторого $z \in \mathcal{M}(A)$. Заметим, что $\max(u) \leqslant \max(w)$. Пусть $j < \max(w)$.

Если $j < \max(u)$, то, так как $J - I$-устойчивый, существует такое $i > j$, что x_i делит u и $ux_j/x_i \in I + J$, следовательно, $wx_j/x_i = zux_j/x_i \in I + J$.

Если $j \geqslant \max(u)$, то $wx_j/x_{\max(w)} = uzx_j/x_{\max(w)} \in J$. □

Предложение 5.1.8. *Пусть $J - I$-устойчивый идеал. Тогда всякий моном $u \in J \setminus I$ единственным образом разлагается в произведение $u = g(u)v$, где $g(u) \in G(J)$, $v \in \mathcal{M}(A)$ и $\max(g(u)) \leqslant \min(v)$.*

Доказательство. Пусть u_0 — минимальная из порождающих идеала J, тогда $u_0 = u_0 \cdot 1$. Пусть $u \in J \setminus I$ и для всех $v \in J \setminus I$, удовлетворяющих условию $v <_{\mathrm{lr}} u$, существование разложения доказано. Так как $u \in J$, то существует такой $w \in G(J)$, что $u = wz$, $z \in \mathcal{M}(A)$. Пусть $\min(z) < \max(w)$, тогда $u = w_1 z_1$, $w_1 = wx_{\min(z)}/x_i$, $z_1 = zx_i/x_{\min(z)}$, $i > \min(z)$, причем $w_1 \in J \setminus I$, $w_1 <_{\mathrm{lr}} w$, $z_1 >_{\mathrm{lr}} z$. Продолжая этот процесс, на s-м шаге получим $u = w_s z_s$, $\min(z_s) \geqslant \max(w_s)$, $w_s \in J \setminus I$. Так как $w_s <_{\mathrm{lr}} u$, то по предположению индукции $w_s = g(w_s)t$, $\max(g(w_s)) \leqslant \min(t)$ и $u = g(w_s)tz_s$, $\max(g(w_s)) < \min(tz_s)$.

Единственность очевидна. □

Докажем несколько технических лемм, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 5.1.9. *Пусть $J - I$-устойчивый идеал, $u \in G(J)$, $ux_i \notin I$, $i < \max(u)$. Тогда $g(x_i u) <_{\mathrm{lr}} u$.*

Доказательство. Пусть $u = x^a$, $v = g(ux_i) = x^b$. Если $i < \max(u)$, то $\max(v) \leqslant \max(x_i u) = \max(u)$ и, так как $x_{\max(u)}$ делит $x_i u/v$, $b_{\max(u)} < a_{\max(u)}$, следовательно, $v <_{\mathrm{lr}} u$. □

Лемма 5.1.10. *Пусть $J - I$-устойчивый идеал, $w \in J \setminus I$, $y \in \mathcal{M}$, причем $yw \notin I$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $g(wy) = g(w)$;
2) $\max(g(w)) \leqslant \min(y)$.

Доказательство. Пусть $g(wy) = g(w)$, тогда $wy = g(wy)z = g(w)z$, следовательно, $\max(g(w)) = \max(g(wy)) \leqslant \min(z)$. Так как $g(w)$ делит w, то y делит z, следовательно, $\min(y) \geqslant \min(z)$, откуда $\max(g(w)) \leqslant \min(y)$.

Пусть $\max(g(w)) \leqslant \min(y)$. Так как $w = g(w)z_1$, $\max(g(w)) \leqslant \min(z_1)$, то $wy = g(w)z_1 y$, $\max(g(w)) \leqslant \min(z_1 y)$, т. е. $g(w) = g(wy)$. □

Лемма 5.1.11. *Пусть $J - I$-устойчивый идеал, $w \in J \setminus I$, $y \in \mathcal{M}$, причем $yw \notin I$. Тогда $g(yg(w)) = g(yw)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по степени y.

Пусть $\deg y = 1$, т. е. $y = x_i$. Если $i \geqslant \max(w)$, то в силу леммы 5.1.10 $g(w) = g(yw)$ и $g(yg(w)) = g(w) = g(yw)$. Если $i < \max(w)$, то $w = g(w)z$, $\min(z) \geqslant \max(g(w))$. Так как $g(yg(w))$ делит $yg(w)$, то $\max(g(yg(w))) \leqslant \max(yg(w)) = \max(g(w)) \leqslant \min(z)$, следовательно, по лемме 5.1.10 $g(yg(w)) = g(yzg(w)) = g(yw)$.

Пусть $\deg y > 1$, $y = x_i y_i$. По предположению индукции имеем $g(yw) = g(y_i x_i w) = g(y_i g(x_i w)) = g(y_i g(x_i g(w))) = g(y_i x_i g(w)) = g(yg(w))$. □

Лемма 5.1.12. *Пусть идеал I порожден мономами вида $x_i^{d_i}$, $J - I$-устойчивый идеал. Тогда для всех мономов $u \in J \setminus I$ и для всех $i < \max(u)$ выполняется условие $x_i u/x_{\max(u)} \in I + J$.*

Доказательство. Пусть $u \in J \setminus I$. В силу леммы 5.1.7 получаем, что для всех $i < \max(u)$ существует такое $j > i$, что x_j делит u и $x_i u/x_j \in I + J$. Если $x_i u/x_j \in I$, то $x_i u/x_{\max(u)} \in I$ и лемма доказана. Если же $x_i u/x_j \in J \setminus I$, то снова существует такое $l > j$, что $x_i u x_j / x_j x_l = x_i u/x_l \in J + I$. Продолжая этот процесс, получим, что $x_i u/x_{\max(u)} \in J + I$. □

5.2. Минимальные свободные резольвенты для I-устойчивых идеалов

Пусть I — идеал, порожденный мономами вида $x_i^{d_i}$, $d_i \geqslant 1$ (везде далее в будем предполагать, что I имеет такой вид), кроме того, для удобства полагаем, что $d_i = +\infty$, если для всех a выполнено $x_i^a \notin I$. Пусть J — произвольный I-устойчивый идеал.

Для всякого множества $\sigma = \{i_1, \ldots, i_q\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ обозначим $x_\sigma = x_{i_1} \ldots x_{i_q}$, кроме того, для всякого $\tau \subseteq \sigma$ положим $\sigma_\tau = \sigma \setminus \tau$, в частности $\sigma_s = \sigma \setminus \{s\}$ и $\sigma_{st} = \sigma \setminus \{s, t\}$.

Рассмотрим множество символов $e(\sigma; u)$, где $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $u \in \mathcal{M}(A)$, будем писать $e(u)$ вместо $e(\varnothing; u)$.

Определение 5.2.1. Символ $e(\sigma; u)$ будем называть *допустимым*, если

1) $u \in G(J)$;
2) $u x_\sigma \notin I$;
3) $\max(x_\sigma) < \max(u)$.

Если $e(\sigma; u)$ удовлетворяет первым двум условиям определения 5.2.1, то при $s \in \sigma$ обозначим $u_s = g(u x_s)$, $y_s = x_s u/u_s$, $S(\sigma; u) = \{s \in \sigma \colon e(\sigma_s; u_s)$ допустимый$\}$.

Пусть F_q — свободный A-модуль, свободными образующими которого являются допустимые символы $e(\sigma; u)$, $|\sigma| = q$. Определим отображения $d_q \colon F_q \to F_{q-1}$ при $q > 0$ на образующих,

$$d_q(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in S(\sigma; u)} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s) - \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u),$$

отображение $d_0 \colon L_0 \to J$,

$$d_0(e(u)) = u,$$

и продолжим их до гомоморфизмов A-модулей.

Рассмотрим на A-модулях F_q $\mathbb{Z}^n$-градуировку: для любого допустимого символа $e(\sigma; u)$ и для любого $y \in \mathcal{M}(A)$ положим $\deg_n y e(\sigma; u) = \deg_n y u x_\sigma$.

Замечание 5.2.2. Очевидно, что гомоморфизмы d_q сохраняют $\mathbb{Z}^n$-градуировку.

Теорема 5.2.3. *Последовательность модулей F_q и гомоморфизмов d_q является минимальной свободной градуированной резольвентой для J над A.*

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Пусть C_q — свободные A-модули с образующими $e(\sigma, u)$, удовлетворяющими только первым двум условиям определения 5.2.1. Определим при $q > 0$ отображения $D_q \colon C_q \to C_{q-1}$ на образующих,

$$D_q(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s) - \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u),$$

отображение $D_0 \colon C_0 \to J$,

$$D_0(e(u)) = u,$$

и продолжим их до гомоморфизмов A-модулей.

Лемма 5.2.4. $\operatorname{Im} D_{q+1} \subseteq \operatorname{Ker} D_q$, *т. е.* $C_* = (C_q, D_q)$ — *комплекс.*

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_1(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} x_s e(\sigma_s; u),$$

$$\Delta_2(e(\sigma; u)) = \sum_{s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma, s)} y_s e(\sigma_s; u_s).$$

Тогда $D_q = \Delta_2 - \Delta_1$, и достаточно доказать, что $\Delta_1^2 = 0$, $\Delta = \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2 \Delta_1 = 0$, $\Delta_2^2 = 0$.

Действительно,

$$\Delta(e(\sigma;u)) = \Delta_1\Big[\sum_{s\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma,s)}y_s e(\sigma_s;u_s)\Big] + \Delta_2\Big[\sum_{t\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma,t)}x_t e(\sigma_t;u)\Big] =$$
$$= \sum_{s\in\sigma}\sum_{t\in\sigma_s}(-1)^{\alpha(\sigma,s)+\alpha(\sigma_s,t)}y_s x_t e(\sigma_{st};u_s) + \sum_{t\in\sigma}\sum_{s\in\sigma_t}(-1)^{\alpha(\sigma,t)+\alpha(\sigma_t,s)}y_s x_t e(\sigma_{st};u_s) = 0,$$

так как

$$(-1)^{\alpha(\sigma,s)+\alpha(\sigma_s,t)} = -(-1)^{\alpha(\sigma,t)+\alpha(\sigma_t,s)}$$

при $s \neq t$.

Далее, обозначая $u_{st} = g(x_t u_s)$, $y_{st} = x_t u_s/u_{st}$, имеем

$$\Delta_2^2(e(\sigma;u)) = \Delta_2\Big[\sum_{s\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma,s)}y_s e(\sigma_s;u_s)\Big] = \sum_{s\in\sigma}\sum_{t\in\sigma_s}(-1)^{\alpha(\sigma,s)+\alpha(\sigma_s,t)}y_s y_{st} e(\sigma_{st};u_{st}) =$$
$$= \sum_{\substack{s,t\in\sigma\\ s<t}}(-1)^{\alpha(\sigma,s)+\alpha(\sigma_s,t)}(y_s y_{st}e(\sigma_{st};u_{st}) - y_t y_{ts}e(\sigma_{st};u_{ts})) = 0,$$

так как по лемме 5.1.11 имеем $u_{ts} = g(x_s g(x_t u)) = g(x_t x_s u) = g(x_t g(x_s u)) = u_{st}$ и, кроме того, $y_s y_{st} = x_s x_t u/u_{st} = x_s x_t u/u_{ts} = y_t y_{ts}$.

Наконец,

$$\Delta_1^2(e(\sigma;u)) = \Delta_1\Big[\sum_{s\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma,s)}x_s e(\sigma_s;u)\Big] = \sum_{s\in\sigma}\sum_{t\in\sigma_s}(-1)^{\alpha(\sigma,s)+\alpha(\sigma_s,t)}x_s x_t e(\sigma_{st};u) =$$
$$= \sum_{\substack{s,t\in\sigma\\ s<t}}(-1)^{\alpha(\sigma,s)+\alpha(\sigma_s,t)}(x_s x_t e(\sigma_{st};u) - x_t x_s e(\sigma_{st};u)) = 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.2.5. *$F_* = (F_q, d_q)$ — комплекс.*

Доказательство. Пусть $B_q \subseteq C_q$ — свободные A-подмодули с образующими $e(\sigma,u)$, удовлетворяющими только первым двум условиям определения 5.2.1 и условию $\max(u) \leqslant \max(x_\sigma)$ (в частности, $B_0 = 0$). Докажем, что B_* — подкомплекс в C_*. Действительно, пусть $e(\sigma;u) \in B_q$, $q \geqslant 1$. Обозначим $M = \max(x_\sigma)$. Если $s \in \sigma_M$, то элементы $e(\sigma_s;u), e(\sigma_s;u_s) \in B_{q-1}$. В силу леммы 5.1.10 ($M \geqslant \max(u)$) имеем $u_M = u$, следовательно, $y_M e(\sigma_M;u_M) = x_M e(\sigma_M;u)$, поэтому

$$D_q(e(\sigma;u)) = \sum_{s\in\sigma_M}(-1)^{\alpha(\sigma,s)}(y_s e(\sigma_s;u_s) - x_s e(\sigma_s;u)) \in B_{q-1}.$$

Таким образом, $B_* = (B_q, D_q)$ — подкомплекс в C_*, и следовательно, F_* — комплекс, так как $F_* \cong C_*/B_*$. □

Определение 5.2.6. Элемент $ye(\sigma;u) \in F_q$, где $y \in \mathcal{M}$, называется *термом*.

Рассмотрим на термах в F_q следующий порядок: $ye(\sigma;u) < ze(\tau;v)$, если либо $u <_{\mathrm{lr}} v$, либо $u = v$ и $x_\sigma <_{\mathrm{lr}} x_\tau$, либо $u = v$, $x_\sigma = x_\tau$ и $y <_{\mathrm{lr}} z$.

Лемма 5.2.7. *Пусть $e(\sigma;u) \in F_q$, $s = \min(x_\sigma)$. Терм $c = x_s e(\sigma_s;u)$ старше всех термов в $d_q(e(\sigma;u))$, отличных от него.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma_s} >_{\mathrm{lr}} x_{\sigma_t}$ при $t \in \sigma$, $t \neq s$, то $c > x_t e(\sigma_t;u)$ и, так как по лемме 5.1.9 $u_t <_{\mathrm{lr}} u$, $c > y_t e(\sigma_t;u_t)$ при $t \in S(\sigma;u)$. □

Лемма 5.2.8. *Пусть a, b — термы в F_q, $b > a$ и старший терм $d_q(b)$ встречается среди термов $d_q(a)$. Тогда существует такой $c \in F_q$, что $b - c \in \operatorname{Im} d_{q+1}$ и старший терм c строго меньше b.*

Доказательство. Если $q = 0$, то $b = ye(u)$, $a = ze(v)$, $yu = zv$. Так как $b > a$, то $u = x^a >_{\mathrm{lr}} v = x^b$ и, следовательно, $a_{\max(u)} \geqslant b_{\max(u)}$. Но так как $u, v \in G(J)$, то существует такое $l < \max(u)$, что $a_l < b_l$. Тогда символ $e(l; u)$ допустимый. Положим $c = b + d_1(y/x_l e(l; u))$. По лемме 5.2.7 старший терм c строго меньше b.

Если $q > 0$, то $b = ye(\sigma; u)$, $a = ze(\tau; v)$. Обозначим $s = \min(x_\sigma)$, $p = \min(x_\tau)$, $z_r = vx_r/v_r$. По лемме 5.2.7 $t = yx_s e(\sigma_s; u)$ — старший терм в $d_q(b)$.

Если $t = zx_r e(\tau_r; v)$, то $u = v$ и при $r > p$ имеем $b < a$ — противоречие, а при $r = p$ имеем $zx_p = yx_s$. Кроме того, так как $b > a$, то $p < s$, следовательно, $e(p \cup \sigma; u)$ допустимый. Положим $c = b + d_{q+1}(y/x_p e(p \cup \sigma; u))$. По лемме 5.2.7 старший терм c строго меньше b.

Если $t = zz_r e(\tau_r; v_r)$, то $u = v_r = g(vx_r)$. По лемме 5.1.9 $g(vx_r) <_{\mathrm{lr}} v$, т. е. $u <_{\mathrm{lr}} v$ — противоречие. □

Замечание 5.2.9. Лемма 5.2.8 — единственное место в доказательстве теоремы 5.2.3, где используется конкретный вид идеала I.

Определение 5.2.10. Терм $b \in F_q$ называется *окончательным*, если для любого $a \in F_q$, такого что $a < b$, старший терм $d_q(b)$ не встречается среди $d_q(a)$.

Лемма 5.2.11. *Любой элемент из F_q представляется по модулю $\operatorname{Im} d_{q+1}$ в виде линейной комбинации окончательных термов с коэффициентами из поля k.*

Доказательство. Утверждение — простое следствие леммы 5.2.8. □

Лемма 5.2.12. *Пусть $f \in F_q$ — ненулевая линейная комбинация окончательных термов с коэффициентами из k, тогда $d_q(f) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что $d_q(f) = 0$. Пусть b — старший терм f. Так как $d_q(f) = 0$, то старший терм $d_q(b)$ встречается среди $d_q(b')$, где b' — термы f, отличные от b. Но это противоречит окончательности b. □

Лемма 5.2.13. *F_* — резольвента для J над A.*

Доказательство. По лемме 5.2.5 F_* — комплекс, следовательно, достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} d_q \subseteq \operatorname{Im} d_{q+1}$. Пусть $f \in \operatorname{Ker} d_q$, тогда по лемме 5.2.11 $f = f' + d_{q+1}(h)$, где $h \in F_{q+1}$, f' — сумма окончательных термов с коэффициентами из поля k. Так как $d_q(f) = 0$, то $d_q(f') = 0$, следовательно, в силу леммы 5.2.12 $f' = 0$, т. е. $f \in \operatorname{Im} d_{q+1}$. □

Доказательство теоремы 5.2.3. По лемме 5.2.13 F_* является свободной резольвентой для J над A.

Для доказательства минимальности F_* достаточно показать, что $d_q(F_q) \subseteq (x_1, \ldots, x_n)F_{q-1}$. Это сразу вытекает из определения d_q, так как $x_s u \notin G(J)$ и, следовательно, $\deg y_s \geqslant 1$. □

Замечание 5.2.14. Минимальная свободная градуированная резольвента для A/J над A имеет вид

$$F_* \xrightarrow{d_0} A \xrightarrow{\alpha} A/J \longrightarrow 0,$$

где α — естественный гомоморфизм.

Знание явного вида резольвенты позволяет вычислить некоторые важные характеристики идеала J: градуированные числа Бетти, ряды Гильберта и Пуанкаре. Для всякого $u \in G(J)$ обозначим $r(u) = |\{i \colon i < \max(u),\ ux_i \in I\}|$.

Следствие 5.2.15. *Ряд Гильберта I-устойчивого идеала J имеет вид*

$$F_J(t) = \frac{\sum\limits_{u \in G(J)} t^{\deg u}(1-t)^{\max(u) - r(u) - 1}}{(1-t)^n}.$$

Минимальная свободная градуированная резольвента для A/J над A может быть представлена в виде

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \geqslant h} A(-j)^{\beta_{h,j}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bigoplus_{j \geqslant 1} A(-j)^{\beta_{1,j}} \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0,$$

где $A(-j)$ — кольцо A как A-модуль со сдвигом градуировки на $-j$, а $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}^A(A/J)$ — градуированные числа Бетти модуля A/J.

Следствие 5.2.16. *Если J — I-устойчивый идеал, то для всех $i \geqslant 1$ имеем*

$$\beta_{i,i+j}^A(A/J) = \sum_{\substack{u \in G(J) \\ \deg u = j+1}} \binom{\max(u) - r(u) - 1}{i-1}.$$

В частности, числа Бетти $\beta_{i,i+j}^A(A/J)$ не зависят от характеристики поля k (если $a > b$ или $a < 0$, то полагаем $\binom{b}{a} = 0$).

Если существует такое d, что $\beta_{i,i+j}^A(A/J) = 0$ при $j \neq d-1$, $i \geqslant 1$, то говорят, что модуль A/J имеет d-линейную резольвенту.

Следствие 5.2.17. *Если J — I-устойчивый идеал, порожденный в степени d, то модуль A/J имеет d-линейную резольвенту.*

Напомним, что *рядом Пуанкаре* $P_M^R(t)$ модуля M над кольцом R называется выражение

$$P_M^R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^R(M) t^i,$$

а рядом Пуанкаре $P^R(t)$ кольца R называется ряд Пуанкаре его поля вычетов (здесь $\beta_i^R(M) = \sum\limits_j \beta_{i,j}^R(M)$ — числа Бетти модуля M).

Следствие 5.2.18. *Ряд Пуанкаре I-устойчивого идеала J над кольцом A имеет вид*

$$P_J^A(t) = \sum_{u \in G(J)} (1+t)^{\max(u) - r(u) - 1}.$$

5.3. Базис в $\operatorname{Tor}_q^A(A/J, k)$

Пусть J — I-устойчивый идеал. В силу замечания 5.2.14 имеем

$$\operatorname{Tor}_q^A(A/J, k) \cong H_{q-1}(F_* \otimes_A k) = F_{q-1} \otimes_A k,$$

следовательно, элементы $e(\sigma; u) \otimes 1$, $|\sigma| = q-1$, составляют базис векторного пространства $\operatorname{Tor}_q^A(A/J, k)$ (везде далее знак тензорного умножения без указания кольца обозначает тензорное умножение над A). Однако иногда удобнее описывать модули $\operatorname{Tor}_q^A(A/J, k)$ через комплекс Козюля $K = K(A)$ кольца A:

$$\operatorname{Tor}_q^A(A/J, k) \cong H_q(A/J).$$

Минимальную свободную резольвенту

$$F_* \longrightarrow A \longrightarrow A/J$$

для A/J будем обозначать через (T, d). Рассмотрим тензорное произведение комплексов $T_* \otimes_A K_*$, положим $G_{i,j} = T_j \otimes_A K_i$. Напомним, как строится естественный изоморфизм $\varphi\colon H_i(A/J \otimes_A K_*) \to H_i(k \otimes_A T_*)$. Пусть $[z] \in H_i(A/J \otimes_A K_*)$ и элементы a_j, $j = 0, \ldots, i$, удовлетворяют условиям

1) $a_j \in G_{i-j,j}$;
2) $\partial_{i-j} a_j = (-1)^{j+1} d_{j+1} a_{j+1}$ при $j = 0, \ldots, i-1$;
3) $d_0 a_0 = z$.

Положим $\varphi([z]) = [\partial_0(a_i)]$. При построении изоморфизма φ удобно пользоваться следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & a_i \in G_{0,i} \\
 & & & & \downarrow d_i \\
 & & & a_{i-1} \in G_{1,i-1} & \xrightarrow{\partial_1} \quad G_{0,i-1} \\
 & & & \downarrow d_{i-1} & \\
 & & a_1 \in G_{i-1,1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} \quad \dots & \\
 & & \downarrow d_1 & & \\
 & a_0 \in G_{i,0} & \xrightarrow{\partial_i} \quad G_{i-1,0} & & \\
 & \downarrow d_0 & & & \\
z \in K_i(A/J) & & & &
\end{array}$$

Для всякого множества $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ и всякого $\tau \subseteq \sigma$ положим $\gamma(\tau) = \sum\limits_{t \in \sigma_\tau} \alpha(\sigma, t)$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.3.1. *Пусть $\tau \subseteq \sigma$. Тогда*

1) *для всех $t \in \tau$ выполнено $\gamma(\tau_t) = \gamma(\tau) + \alpha(\sigma, t)$;*
2) *для всех $t \in \sigma$ выполнено $\alpha(\sigma, t) = \alpha(\sigma_\tau, t) + \alpha(\tau, t)$;*
3) *для всех $r, t \in \tau$, $r \neq t$, выполнено $(-1)^{\alpha(\tau,t)+\alpha(\tau_t,r)+1} = (-1)^{\alpha(\tau,r)+\alpha(\tau_r,t)}$.*

Пусть $e(\sigma, u)$ — допустимый символ, $|\sigma| = i-1$. Определим элементы $f_j \in G_{i-j,j}$ при $j = 1, \dots, i$ по формуле

$$f_j = (-1)^{i-j} \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j-1}} (-1)^{\gamma(\tau)} e(\tau; u) \otimes e_{\sigma_\tau} + \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j}} (-1)^{\gamma(\tau)} s_\tau \otimes e_{\sigma_\tau} \wedge e_{\max(u)},$$

$$s_\tau = \sum_{r \in S(\tau;u)} (-1)^{\alpha(\tau,r)} \frac{y_r}{x_{\max(u)}} e(\tau_r; u_r)$$

(здесь, как и в разделе 5.2, $u_r = g(x_r u)$, $y_r = x_r u / u_r$, $u' = u / x_{\max(u)}$). Кроме того, положим

$$f_0 = (-1)^{(i-2)(i-1)/2} u' \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)} \in G_{i,0}.$$

Предложение 5.3.2. *$\partial_{i-j} f_j = d_{j+1} f_{j+1}$ при $j = 0, \dots, i-1$.*

Доказательство. Обозначим $M = \max(u)$. Пусть $j > 0$, тогда $\partial_{i-j} f_j = A + B$, где

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j-1}} \left[\sum_{s \in \sigma_\tau} (-1)^{i-j+\gamma(\tau)+\alpha(\sigma_\tau,s)} x_s e(\tau; u) \otimes e_{\sigma_{(\tau \cup s)}} \right] + \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j}} (-1)^{\gamma(\tau)+|\sigma_\tau|} x_M s_\tau \otimes e_{\sigma_\tau} = \\
&= (-1)^{i-j} \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j}} \left[\sum_{t \in \tau} (-1)^{\gamma(\tau_t)+\alpha(\sigma_\tau,t)} x_t e(\tau_t; u) \otimes e_{\sigma_\tau} \right] + (-1)^{i-j-1} \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j}} (-1)^{\gamma(\tau)} x_M s_\tau \otimes e_{\sigma_\tau} = \\
&= d_{j+1} \left[(-1)^{i-(j+1)} \sum_{\substack{\tau \subseteq \sigma \\ |\tau| = j}} (-1)^{\gamma(\tau)} e(\tau; u) \otimes e_{\sigma_\tau} \right],
\end{aligned}$$

$$B = \sum_{\substack{\tau\subseteq\sigma\\|\tau|=j}} \left[\sum_{s\in\sigma_\tau} (-1)^{\gamma(\tau)+\alpha(\sigma_\tau,s)} x_s s_\tau \otimes e_{\sigma_{(\tau\cup s)}} \wedge e_M \right] =$$

$$= \sum_{\substack{\rho\subseteq\sigma\\|\rho|=j+1}} \left[\sum_{t\in\rho} (-1)^{\gamma(\rho_t)+\alpha(\sigma_{\rho_t},t)} x_t s_{\rho_t} \otimes e_{\sigma_\rho} \wedge e_M \right] = \sum_{\substack{\rho\subseteq\sigma\\|\rho|=j+1}} (-1)^{\gamma(\rho)} b_\rho \otimes e_{\sigma_\rho} \wedge e_M,$$

$$b_\rho = \sum_{t\in\rho} (-1)^{\alpha(\rho,t)} x_t s_{\rho_t}$$

(при преобразованиях следует использовать лемму 5.3.1).

Таким образом, достаточно показать, что для всех $\rho \subseteq \sigma$, $|\rho| = j+1$, выполнено $b_\rho = d_{j+1}s_\rho$. Действительно, $d_{j+1}s_\rho = C_1 + C_2$, где

$$C_1 = -\sum_{r\in S(\rho;u)} \sum_{t\in\rho_r} (-1)^{\alpha(\rho,r)+\alpha(\rho_r,t)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r) = \sum_{t\in\rho} \sum_{\substack{r\in S(\rho;u)\\r\neq t}} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r),$$

$$C_2 = \sum_{t\in S(\rho;u)} \sum_{r\in S(\rho_t;u_t)} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}).$$

Обозначим множество упорядоченных пар (r,t), по которому ведется суммирование в выражении для C_2, символом U, т. е.

$$U = \{(r,t)\colon r,t\in\rho,\ r\neq t,\ \max\rho_t < \max(u_t),\ \max\rho_{rt} < \max(u_{tr})\}.$$

Кроме того, положим

$$V = \{(r,t)\in U\colon \max\rho_r < \max(u_r)\},$$
$$W = U\setminus V = \{(r,t)\in U\colon \max\rho_r \geqslant \max(u_r)\}.$$

Заметим, что

$$\sum_{(r,t)\in V} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}) = \sum_{\substack{(r,t)\in V\\r<t}} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \left[\frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}) - \frac{y_r y_{rt}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{rt}) \right] = 0,$$

так как в силу леммы 5.1.11 имеем $u_{tr} = u_{rt}$ и, следовательно, $y_t y_{tr} = y_r y_{rt}$. Таким образом, получаем

$$C_2 = \sum_{(r,t)\in W} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{y_t y_{tr}}{x_M} e(\rho_{tr}; u_{tr}).$$

С другой стороны,

$$b_\rho = \sum_{t\in\rho} \sum_{r\in S(\rho_t;u)} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r) = C_1 + C_3,$$

$$C_3 = \sum_{t\in\rho} \sum_{\substack{r\in S(\rho_t;u)\\r\notin S(\rho;u)}} (-1)^{\alpha(\rho,t)+\alpha(\rho_t,r)} \frac{x_t y_r}{x_M} e(\rho_{tr}; u_r).$$

Обозначим множество упорядоченных пар (r,t), по которому ведется суммирование в выражении для C_3, символом X, т. е.

$$X = \{(r,t)\colon r,t\in\rho,\ r\neq t,\ \max\rho_{rt} < \max(u_r) \leqslant \max\rho_r\}.$$

Покажем, что $W = X$. Пусть $(r,t)\in X$. Достаточно показать, что $\max\rho_t < \max(u_t)$, $\max\rho_{rt} < \max(u_{tr})$. Заметим, что $t = \max\rho_r \geqslant \max(u_r) \geqslant r$, но так как $r\neq t$, то $t > r$ и $t = \max\rho$, следовательно, $\max\rho_t < t \leqslant \max(u_t)$. Кроме того, так как $t \geqslant \max(u_r)$, то по леммам 5.1.10, 5.1.11 имеем $u_r = u_{rt} = u_{tr}$, следовательно, $\max\rho_{rt} < \max(u_r) = \max(u_{tr})$, т. е. $(r,t)\in W$.

Обратно, пусть $(r,t) \in W$. Достаточно показать, что $\max \rho_{rt} < \max(u_r)$. Так как $\max \rho_r \geqslant \geqslant \max(u_r) \geqslant \max(u_{rt}) > \max \rho_{rt}$, то $t = \max \rho_r$, следовательно, по леммам 5.1.10, 5.1.11 имеем $u_r = u_{rt} = u_{tr}$, откуда $\max \rho_{rt} < \max(u_{tr}) = \max(u_r)$, т. е. $(r,t) \in X$.

В процессе доказательства равенства $W = X$ было замечено, что если $(r,t) \in X$, то $u_r = u_{rt}$, следовательно, $y_t y_{tr} = x_t u x_r / u_r = x_t y_r$, поэтому $C_2 = C_3$.

Таким образом, для всех $\rho \subseteq \sigma$, $|\rho| = j+1$, выполнено $b_\rho = d_{j+1} s_\rho$ и, следовательно, $\partial_{i-j} f_j = d_{j+1} f_{j+1}$ при $j = 1, \ldots, i-1$.

Осталось рассмотреть случай $q = 0$. Обозначив $a = (i-2)(i-1)/2$, имеем

$$d_1(f_1) = d_1\left[\sum_{s\in\sigma} (-1)^{a-\alpha(\sigma,s)} \frac{y_s}{x_M} e(u_s) \otimes e_{\sigma_s} \wedge e_M + (-1)^{i-1+a} e(u) \otimes e_\sigma\right] =$$

$$= (-1)^a \left[\sum_{s\in\sigma} (-1)^{\alpha(\sigma,s)} u' x_s \otimes e_{\sigma_s} \wedge e_M + (-1)^{i-1} u \otimes e_\sigma\right] = \partial_i(f_0).$$

Предложение доказано. □

Определение 5.3.3. Элемент вида $u' \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)} \in K(A/J)$, где $e(\sigma;u)$ — допустимый символ, будем называть *классическим*.

Замечание 5.3.4. Из предложения 5.3.2 следует, что классические элементы являются циклами комплекса $K(A/J)$.

Теорема 5.3.5. *Классы гомологий классических циклов $u' \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)}$ с $|\sigma| = q$ составляют базис векторного пространства $H_{q+1}(A/J)$, причем $\varphi([u' \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)}]) = \pm[e(\sigma;u)]$.*

Доказательство. Действительно, в силу предложения 5.3.2 имеем

$$\varphi([u' \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)}]) = \pm[e(\sigma;u) \otimes 1].$$

Так как классы элементов $e(\sigma;u) \otimes 1$ с $|\sigma| = q$ формируют базис $\operatorname{Tor}^A_{q+1}(A/J, k)$, а φ — изоморфизм, то классы гомологий классических циклов являются базисом в $H_{q+1}(A/J)$. □

Везде далее в этом разделе будем предполагать, что J порожден в степенях не ниже 2. Рассмотрим множество наборов $(m_1, \ldots, m_s)$, где $m_i \in G(J)$.

Определение 5.3.6. Набор мономов $(m_1, \ldots, m_s)$ будем называть *критическим*, если все m_i попарно различны и $\prod\limits_{i=1}^{s} m_i' \notin J$.

Очевидно, что набор, состоящий из одного монома, является критическим. Кроме того, любое подмножество критического набора тоже является критическим набором.

Лемма 5.3.7. *Пусть (m_1, m_2) — критический набор. Тогда*

1) *для всех $j < \min\{\max(m_1), \max(m_2)\}$ имеем, что либо x_j не делит m_1 и x_j не делит m_2, либо $x_j^{d_j-1}$ делит m_1 и $x_j^{d_j-1}$ делит m_2;*
2) *существует такое $j < \min\{\max(m_1), \max(m_2)\}$, что x_j делит m_1 и x_j делит m_2.*

Доказательство. Положим $M = \min\{\max(m_1), \max(m_2)\}$.

Докажем сначала первое утверждение. Пусть $j < M$. Не ограничивая общности, можно считать, что x_j делит m_1, следовательно, $d_j \geqslant 2$. Покажем, что $x_j^{d_j-1}$ делит m_2. Действительно, если $x_j^{d_j-1}$ не делит m_2, то $x_j m_2' \in J$, т. е. $m_1' m_2' \in J$ — противоречие. Далее, если $x_j^{d_j-1}$ не делит m_1, то, аналогично, $m_1' m_2' \in J$ — противоречие. Таким образом, если x_j делит m_1 или x_j делит m_2, то $x_j^{d_j-1}$ делит m_1 и $x_j^{d_j-1}$ делит m_2.

Докажем теперь второе утверждение. Из 1) следует, что при всех $j < M$ показатели при x_j в m_1 и m_2 совпадают. Пусть для всех $j < M$ имеем, что x_j не делит m_1. Не ограничивая общности, можно считать, что $\max(m_1) = M$. Следовательно, $m_1 = x_M^a$, причем $a \geqslant 2$ (J порожден в степенях не ниже 2), поэтому $d_M > 2$. Рассмотрим произведение $m_1' m_2'$. По условию $m_1' m_2' \notin J$, но так как

J I-устойчивый, получаем, что $x_M m_2' \in I$, откуда следует, что $x_M^{d_M-1}$ делит m_2, т. е. m_1 делит m_2 — противоречие. □

Лемма 5.3.8. *Пусть $(m_1,\dots,m_s)$ — критический набор, причем $s \geqslant 2$. Тогда существует такое $j < \min\{\max(m_i)\colon 1 \leqslant i \leqslant s\}$, что $d_j > 1$ и $x_j^{d_j-1}$ делит m_i при всех i.*

Доказательство. Утверждение — простое следствие леммы 5.3.7. □

Определение 5.3.9. *Минимальным числом* критического набора $(m_1,\dots,m_s)$ при $s \geqslant 2$ будем называть число

$$\lambda(m_1,\dots,m_s) = \min\bigl\{j\colon d_j > 1 \text{ и для всех } i,\ 1 \leqslant i \leqslant s, \text{ имеем, что } x_j^{d_j-1} \text{ делит } m_i\bigr\},$$

если же $s = 1$, то положим

$$\lambda(m_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } \bigl\{j\colon j < \max(m_1),\ d_j > 1 \text{ и } x_j^{d_j-1} \text{ делит } m_1\bigr\} = \varnothing, \\ \min\bigl\{j\colon j < \max(m_1),\ d_j > 1 \text{ и } x_j^{d_j-1} \text{ делит } m_1\bigr\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 5.3.10. Из леммы 5.3.8 следует, что минимальное число критического набора $(m_1,\dots,m_s)$ всегда существует и строго меньше, чем $\min\{\max(m_i)\colon 1 \leqslant i \leqslant s\}$. Кроме того, в силу леммы 5.3.7 любое подмножество критического набора имеет то же минимальное число, что и сам набор.

Лемма 5.3.11. *Пусть $m_1,\dots,m_s$, $s \geqslant 2$, — различные мономы в $G(J)$, причем набор $(m_1,\dots,m_s)$ не является критическим, но при некотором t, $1 \leqslant t < s$, наборы $(m_1,\dots,m_t)$ и $(m_{t+1},\dots,m_s)$ критические. Тогда*

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{s} m_i'}{x_{\lambda(m_1,\dots,m_t)}^{t-1} x_{\lambda(m_{t+1},\dots,m_s)}^{s-t-1}} \in J$$

(*здесь* $x_0 = 1$).

Доказательство. Положим $p = \lambda(m_1,\dots,m_t)$, $q = \lambda(m_{t+1},\dots,m_s)$,

$$u = \frac{\prod\limits_{i=1}^{t} m_i'}{x_p^{t-1}}, \quad v = \frac{\prod\limits_{i=t+1}^{s} m_i'}{x_q^{s-t-1}}, \quad w = \prod_{i=1}^{s} m_i'.$$

Так как набор $(m_1,\dots,m_s)$ не является критическим, то $w \in J$. Следовательно, существует такой $g \in G(J)$, что g делит w. В силу определения минимального числа имеем, что $x_p^{d_p-1}$ делит u, $x_q^{d_q-1}$ делит v, поэтому g делит uv. □

Лемма 5.3.12. *Пусть $z_1 = m_1' \otimes e_{\sigma^1}$ и $z_2 = m_2' \otimes e_{\sigma^2}$ — классические циклы, причем $\sigma^1 \cap \sigma^2 = \varnothing$ и (m_1, m_2) — критический набор с минимальным числом $\lambda(m_1, m_2) = l$. Тогда*

$$\partial\left(\frac{m_1' m_2'}{x_l} \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \{l\}}\right) = (-1)^{\alpha(\sigma^1\cup\sigma^2, l)} m_1' m_2' \otimes e_{\sigma^1\cup\sigma^2}.$$

Доказательство. Так как $m_1 x_l, m_2 x_l \in I$, то $l \notin \sigma^1 \cup \sigma^2$. Кроме того, если $j \in \sigma^i$, то $x_j m_i' \in J$, отсюда и вытекает утверждение леммы. □

Рассмотрим алгебру гомологий $H(A/J) = \bigoplus\limits_i H_i(R/J)$ комплекса Козюля $K(A/J)$ с внешним умножением $\wedge$:

$$[r_1 \otimes e_\sigma] \wedge [r_2 \otimes e_\tau] = (-1)^{\sum\limits_{s\in\sigma} \alpha(\tau, s)} [r_1 r_2 \otimes e_{\sigma\cup\tau}],$$

если $\sigma \cap \tau = \varnothing$, и

$$[r_1 \otimes e_\sigma] \wedge [r_2 \otimes e_\tau] = 0,$$

если $\sigma \cap \tau \neq \varnothing$.

Из теоремы 5.3.5 следует, что в алгебре гомологий $H(A/J)$ существует k-базис, состоящий из классов гомологий циклов вида $(-1)^{\alpha(\sigma,\lambda(m))} m' \otimes e_\sigma$, где $m' \otimes e_\sigma$ — классический цикл. Множество всех таких классов обозначим через B.

Определение 5.3.13. Отображение

$$\mu\colon \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B^i \to K(A/J)$$

называется *тривиальной операцией Масси* на комплексе Козюля $K(A/J)$, если выполнены следующие условия:

1) $\mu([z])$ — цикл в $K(A/J)$, причем $[\mu([z])] = [z] \in H(A/J)$;
2) $\partial(\mu([z_1],\dots,[z_s])) = \sum\limits_{i=1}^{s-1} \overline{\mu([z_1],\dots,[z_i])} \wedge \mu([z_{i+1}],\dots,[z_s])$, где $\bar{a} = (-1)^{|a|+1}a$ и $|a| = i$, если $a \in K_i(A/J)$.

Определим отображение $\mu\colon \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B^i \to K(A/J)$ следующим образом: пусть $z_i = m_i' \otimes e_{\sigma^i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, — классические циклы, тогда

- при $s = 1$:
$$\mu([z_1]) = z_1,$$
- при $s = 2$:
$$\mu([z_1],[z_2]) = (-1)^{|\sigma^1|+1+\sum\limits_{s\in\sigma^1}\alpha(\sigma^2,s)} \frac{m_1'm_2'}{x_{\lambda(m_1,m_2)}} \otimes e_{\sigma^1\cup\sigma^2\cup\{\lambda(m_1,m_2)\}},$$
если набор (m_1, m_2) критический,
$$\mu([z_1],[z_2]) = 0,$$
если набор (m_1, m_2) некритический,
- при $s > 2$:
$$\mu([z_1],\dots,[z_s]) = 0.$$

Предложение 5.3.14. *Отображение μ является тривиальной операцией Масси на комплексе Козюля $K(A/J)$.*

Доказательство. Выполнение условия 1) определения 5.3.13 очевидно, докажем выполнение условия 2).

Пусть $z_i = m_i' \otimes e_{\sigma^i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, — классические циклы. Если хотя бы два из множеств σ^i пересекаются, то обе части равенства в условии 2) определения 5.3.13 обращаются в нуль, поэтому предполагаем, что множества σ^i попарно не пересекаются, в частности все m_i различны (так как $\max(m_i) \in \sigma^i$).

Рассмотрим случай $s = 2$. Если (m_1, m_2) — некритический набор, то $\mu([z_1],[z_2]) = 0$. С другой стороны, $\mu([z_1]) \wedge \mu([z_1]) = 0$, так как $m_1 \neq m_2$, и следовательно, $m_1'm_2' \in J$. Таким образом,

$$\partial(\mu([z_1],[z_2])) = 0 = \overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2]).$$

Если же (m_1, m_2) — критический набор, то по лемме 5.3.12 имеем

$$\partial(\mu([z_1],[z_2])) = (-1)^{\alpha(\sigma^1\cup\sigma^2,l)+|\sigma^1|+1+\sum\limits_{s\in\sigma^1}\alpha(\sigma^2,s)} m_1'm_2' \otimes e_{\sigma^1\cup\sigma^2}$$

(здесь $l = \lambda(m_1, m_2)$). С другой стороны,

$$\mu([z_1]) \wedge \mu([z_1]) = (-1)^{\alpha(\sigma^1,l)+\alpha(\sigma^2,l)+\sum\limits_{s\in\sigma^1}\alpha(\sigma^2,s)} m_1'm_2' \otimes e_{\sigma^1\cup\sigma^2},$$

т. е. снова

$$\partial(\mu([z_1],[z_2])) = \overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2]).$$

Рассмотрим случай $s = 3$. Достаточно показать, что

$$\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2],[z_3]) = -\overline{\mu([z_1],[z_2])} \wedge \mu([z_3]).$$

Если (m_1, m_2, m_3) — некритический набор, то в случае, когда (m_2, m_3) критический, по лемме 5.3.11 имеем

$$m_1'm_2'm_3'/x_{\lambda(m_2,m_3)} \in J,$$

т. е. $\mu([z_1]) \wedge \mu([z_2],[z_3]) = 0$. Если (m_2, m_3) некритический, то $\mu([z_2],[z_3]) = 0$. Таким образом, $\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2],[z_3]) = 0$, аналогично, $\overline{\mu([z_1],[z_2])} \wedge \mu([z_3]) = 0$.

Пусть теперь набор (m_1, m_2, m_3) критический. В этом случае

$$\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2],[z_3]) = (-1)^a m_1' m_2' m_3' / x_l \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \{l\}},$$
$$-\overline{\mu([z_1],[z_2])} \wedge \mu([z_3]) = (-1)^b m_1' m_2' m_3' / x_l \otimes e_{\sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \{l\}},$$

где $l = \lambda(m_1, m_2, m_3)$,

$$a = |\sigma^1| + 1 + \alpha(\sigma^1, l) + \sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2 \cup \sigma^3 \cup \{l\}, s) + |\sigma^2| + 1 + \sum_{s \in \sigma^2} \alpha(\sigma^3, s),$$
$$b = 2|\sigma^1| + |\sigma^2| + 4 + \alpha(\sigma^3, l) + \sum_{s \in \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \{l\}} \alpha(\sigma^3, s) + \sum_{s \in \sigma^1} \alpha(\sigma^2, s).$$

Заметим, что $l \notin \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3$, поэтому после несложных вычислений получаем, что $a = b \mod 2$, следовательно,

$$\overline{\mu([z_1])} \wedge \mu([z_2],[z_3]) = -\overline{\mu([z_1],[z_2])} \wedge \mu([z_3]).$$

Рассмотрим случай $s = 4$. Достаточно показать, что

$$\mu([z_1],[z_2]) \wedge \mu([z_3],[z_4]) = 0.$$

Если хотя бы один из наборов (m_1, m_2), (m_3, m_4) некритический, то равенство очевидно. Если (m_1, m_2), (m_3, m_4) критические, но (m_1, m_2, m_3, m_4) нет, то по лемме 5.3.11 имеем

$$m_1' m_2' m_3' m_4' / x_{\lambda(m_1,m_2)} x_{\lambda(m_3,m_4)} \in J,$$

т. е. $\mu([z_1],[z_2]) \wedge \mu([z_3],[z_4]) = 0$. Наконец, если (m_1, m_2, m_3, m_4) критический, то $\mu([z_1],[z_2])$ и $\mu([z_3],[z_4])$ содержат $e_{\lambda(m_1,m_2,m_3,m_4)}$, следовательно, $\mu([z_1],[z_2]) \wedge \mu([z_3],[z_4]) = 0$.

Если $s > 4$, то все слагаемые вида $\overline{\mu([z_1],\dots,[z_i])} \wedge \mu([z_{i+1}],\dots,[z_s])$ равны 0, так как хотя бы один из сомножителей в каждом из них имеет не менее трех аргументов. □

Следствие 5.3.15. *Если J — I-устойчивый идеал, порожденный в степенях не ниже 2, то умножение на алгебре гомологий $H(A/J)$ нулевое.*

Доказательство. В силу теоремы 5.3.5 достаточно доказать, что произведение двух классов гомологий классических циклов равно 0. Из предложения 5.3.14 следует, что произведение двух классических циклов есть граница, т. е. произведение соответствующих классов гомологий равно 0. □

Следующая теорема была впервые доказана Е. С. Голодом [1]. В виде, приведенном ниже, она сформулирована в [9].

Теорема 5.3.16 (Голод)**.** *Если на комплексе Козюля $K(A/J)$ существует тривиальная операция Масси, то кольцо A/J является кольцом Голода.*

Следствие 5.3.17. *Если J — I-устойчивый идеал, порожденный в степенях не ниже 2, то фактор-кольцо A/J является кольцом Голода, кроме того,*

$$P^{A/J}(t) = \frac{(1+t)^n}{1 - t^2 \sum\limits_{u \in G(J)} (1+t)^{\max(u) - r(u) - 1}}.$$

Доказательство. В силу предложения 5.3.14 и теоремы 5.3.16 A/J является кольцом Голода, т. е. его ряд Пуанкаре имеет вид

$$P^{A/J}(t) = \frac{(1+t)^n}{1 - t^2 P_J^A(t)}.$$

По следствию 5.2.18 имеем

$$P_J^A(t) = \sum_{u \in G(J)} (1+t)^{\max(u) - r(u) - 1},$$

поэтому

$$P^{A/J}(t) = \frac{(1+t)^n}{1 - t^2 \sum\limits_{u \in G(J)} (1+t)^{\max(u) - r(u) - 1}}.$$

Следствие доказано. □

5.4. Коэн-маколеевость и горенштейновость I-устойчивых идеалов

В этом разделе рассматриваются условия, при которых фактор-кольцо по I-устойчивому идеалу является горенштейновым или коэн-маколеевым. Определение и основные свойства горенштейновых колец изложены в [10]. При формулировке условий горенштейновости будем считать, что I-устойчивый идеал J не имеет порождающих степени 1. Наложение этого условия не ограничивает общности, так как если $x_i \in J$, то $A/J \cong A'/J'$ (здесь $A' = k[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$, $J' = J/x_i \subseteq A'$).

Теорема 5.4.1. *Пусть J — I-устойчивый идеал, порожденный в степенях не ниже 2. Кольцо A/J горенштейново тогда и только тогда, когда идеал J главный, причем его порождающая имеет вид $x_t^a \prod\limits_{i=1}^{t-1} x_i^{d_i - 1}$, $t \geqslant 1$, $0 < a < d_t$.*

Доказательство. Если J главный, то кольцо A/J, очевидно, горенштейново.

Пусть теперь кольцо A/J горенштейново. Рассмотрим минимальную свободную резольвенту для A/J над A, построенную в замечании 5.2.14:

$$0 \longrightarrow A^{\beta_h} \longrightarrow A^{\beta_{h-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A^{\beta_1} \longrightarrow A^1 \longrightarrow A/J \longrightarrow 0.$$

В силу горенштейновости кольца A/J имеем $\beta_h = 1$, кроме того, матрица отображения $d_h\colon A^{\beta_h} \to A^{\beta_{h-1}}$ совпадает с транспонированной матрицей отображения $d_1\colon A^{\beta_1} \to A^1$ с точностью до линейной замены системы свободных порождающих в членах резольвенты. В частности, эти матрицы содержат одинаковое число элементов каждой степени. Если $h = 1$, то идеал J главный, причем в силу I-устойчивости его порождающая имеет вид, описанный в условии теоремы.

Покажем, что неравенство $h > 1$ невозможно. Действительно, пусть $h > 1$. Так как $\beta_h = 1$, то существует лишь один допустимый символ $e(i_1, \ldots, i_{h-1}; u)$. Следовательно, матрица отображения d_h имеет вид (с точностью до знаков элементов)

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{h-1}}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_s}),$$

где $\{j_1, \ldots, j_s\} = S(i_1, \ldots, i_{h-1}; u)$, $y_i = ux_i/g(ux_i)$, следовательно, в ней есть хотя бы один элемент степени 1. С другой стороны, транспонированная матрица отображения d_1 состоит из элементов $G(J)$:

$$(g_1, \ldots, g_t), \quad t = |G(J)|.$$

Таким образом, хотя бы один из g_i имеет степень 1 — противоречие. □

Перейдем теперь к вопросу о коэн-маколеевости фактор-кольца A/J по I-устойчивому идеалу J. Напомним, что кольцо R называется кольцом Коэна—Маколея, если $\dim R = \operatorname{depth} R$. Если J — I-устойчивый идеал, то положим $\max(J) = \max\{\max(u) - r(u)\colon u \in G(J)\}$ — номер последней ненулевой гомологии комплекса $K(A/J)$, следовательно, $\operatorname{depth} A/J = n - \max(J)$. С другой стороны, размерность Крулля $\dim A/J$ кольца A/J можно вычислять как порядок полюса ряда Гильберта $F_{A/J}(t)$ в точке $t = 1$ или как максимальную степень бесквадратного монома, не принадлежащего радикалу идеала J. Оба подхода будут использованы для получения условий коэн-маколеевости кольца A/J (см. теорему 5.4.2 и лемму 5.4.5).

Положим $a_i = |\{u \in G(J)\colon \max(u) - r(u) - 1 = i\}|$. Будем считать, что $\binom{n}{k} = 0$ при $k > n$ или $k < 0$.

Теорема 5.4.2. *Пусть J — I-устойчивый идеал, порожденный в степени d, $J \neq 0$. Кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда $a_i = \binom{d+i-1}{i}$ при $0 \leqslant i < \max(J)$.*

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 5.4.3. *Для всех $d \geqslant 1$ и для всех $j \geqslant 1$ выполняется равенство*

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{d+i-1}{i}\binom{d}{j-i} = 0.$$

Доказательство. Левая часть равенства в условии леммы представляет собой, с точностью до знака, коэффициент при t^j в произведении рядов $f(t)\cdot h(t)$, где

$$f(t) = (1-t)^{-d} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{d+i-1}{i}t^i, \quad h(t) = (1-t)^d = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{d}{i}t^i.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5.4.2. Применяя следствие 5.2.15, получаем, что

$$F_{A/J}(t) = \frac{1 - \sum\limits_{u\in G(J)} t^d(1-t)^{\max(u)-r(u)-1}}{(1-t)^n} = \frac{1-\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i t^d(1-t)^i}{(1-t)^n}.$$

Как отмечалось выше, размерность кольца A/J равна порядку полюса функции $F_{A/J}(t)$ в точке $t=1$. Положим $f(t) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i t^d(1-t)^i$, p — порядок нуля функции $f(t)$ в точке $t=1$. Тогда $\dim A/J = n-p$. С другой стороны, $\operatorname{depth} A/J = n - \max(J)$, следовательно, кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда $\max(J) = p$, т. е. тогда и только тогда, когда коэффициенты при $(t-1)^j$ в разложении $f(t)$ по степеням $t-1$,

$$f(t) = 1 - \sum_{i=0}^{\max(J)-1} a_i t^d(1-t)^i = 1 + \sum_{i=0}^{\max(J)-1}\sum_{l=0}^{d}(-1)^{1+i}a_i\binom{d}{l}(t-1)^{i+l},$$

равны 0 при $0 \leqslant j < \max(J)$. Получаем систему линейных уравнений на a_i, $0 \leqslant i < \max(J)$:

$$\begin{cases} -a_0 = -1, \\ \sum\limits_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{d}{j-i}a_i = 0 \quad \text{при } 0 < j < \max(J). \end{cases}$$

Эта система треугольная (с ненулевыми элементами на диагонали) и, следовательно, имеет единственное решение, которое в силу леммы 5.4.3 представляется в виде $a_i = \binom{d+i-1}{i}$, $0 \leqslant i < \max(J)$.

Таким образом, кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда набор $(a_0, \ldots, a_{\max(J)-1})$ является решением приведенной выше системы уравнений, т. е. тогда и только тогда, когда $a_i = \binom{d+i-1}{i}$ при $0 \leqslant i < \max(J)$. □

Следствие 5.4.4. *Пусть $I = 0$ и заданы целые числа d и M с условием $d \geqslant 1$ и $n \geqslant M > 0$. Тогда существует единственный I-устойчивый идеал J, порожденный в степени d, такой что A/J — кольцо Коэна—Маколея и* $\operatorname{depth} A/J = n - M$.

Доказательство. Действительно, если $I = 0$, то $r(u) = 0$ для всех u, следовательно, в степени d существует ровно $\binom{d+i-1}{i}$ мономов, для которых $\max(u) - r(u) - 1 = i$. Положим

$$G(J) = \{u\colon \deg u = d,\ \max(u) - r(u) - 1 < M\}.$$

Идеал J, очевидно, является I-устойчивым. Кроме того, $\operatorname{depth} A/J = n - M$, и в силу теоремы 5.4.2 A/J — кольцо Коэна—Маколея. □

Если J — I-устойчивый идеал, то положим

$$F(J) = \{u \in G(J)\colon \max(u) - r(u) = \max(J)\}.$$

Лемма 5.4.5. *Пусть J — сильно I-устойчивый идеал и все d_i равны 2. Кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда множество $F(J)$ содержит моном вида $\prod_{i=s}^{t} x_i$.*

Доказательство. Обозначим через S_i множество всех бесквадратных мономов степени i. Заметим, что $r(u) = \deg u - 1$ и размерность A/J равна максимальной степени бесквадратного монома, не принадлежащего J, т. е. $\dim A/J = \min\{i\colon S_i \subseteq J_i\} - 1$. В силу сильной I-устойчивости идеала J J_i содержит все бесквадратные мономы тогда и только тогда, когда $\prod_{j=n-i+1}^{n} x_j \in J_i$.

Пусть A/J — кольцо Коэна—Маколея, т. е. $\dim A/J = \operatorname{depth} A/J = n - \max(J)$, следовательно, $w = \prod_{j=\max(J)}^{n} x_j \in J$, $\prod_{j=\max(J)+1}^{n} x_j \notin J$. Так как $w \in J$, то существует такой $u \in G(J)$, что u делит w. Заметим, что

$$\max(u) - \deg u \geqslant \max(w) - \deg w = n - (n - \max(J) + 1) = \max(J) - 1,$$

если $\max(u) - \deg u > \max(J) - 1$, то $\max(u) - \deg u + 1 > \max(J)$ — противоречие с максимальностью $\max(J)$. Значит, $\max(u) - \deg u = \max(w) - \deg w = \max(J) - 1$, т. е. $u \in F(J)$. Кроме того $u = \prod_{j=\max(J)}^{\deg u + \max(J) - 1} x_j$.

Пусть теперь множество $F(J)$ содержит моном $u = \prod_{i=s}^{t} x_i$. Тогда $\operatorname{depth} A/J = n - (t - \deg u + 1)$. Кроме того, $u \prod_{i=t+1}^{n} \in J$, т. е. $\dim A/J \leqslant \deg u + n - t - 1$, следовательно, $\dim A/J \leqslant \operatorname{depth} A/J$. Но так как всегда $\dim A/J \geqslant \operatorname{depth} A/J$, то $\dim A/J = \operatorname{depth} A/J$, т. е. A/J — кольцо Коэна—Маколея. □

Положим $I' = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)A$, $\mathfrak{r}(J)$ — радикал идеала J. Поставим в соответствие каждому моному m моном $\operatorname{sq}(m) = \prod_{i\colon x_i | m} x_i$. В этом случае $G(\mathfrak{r}(J)) = \{\operatorname{sq}(u)\colon u \in G(J)\}$, в частности, $\mathfrak{r}(J)$ порожден мономами, не принадлежащими I'. Заметим также, что $\dim A/J = \dim A/\mathfrak{r}(J)$.

Теорема 5.4.6. *Пусть J — I-устойчивый идеал, $\mathfrak{r}(J)$ — I'-устойчивый идеал и кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея. Тогда $A/\mathfrak{r}(J)$ — кольцо Коэна—Маколея.*

Доказательство. Если $u \in G(J)$, то $r(u) \leqslant \deg \operatorname{sq}(u) - 1$, следовательно, $\operatorname{depth} A/J \leqslant \operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J)$. Таким образом, $\operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) \geqslant \dim A/\mathfrak{r}(J)$. Но так как всегда $\operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) \leqslant \dim A/\mathfrak{r}(J)$, то $\operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) = \dim A/\mathfrak{r}(J)$, т. е. $A/\mathfrak{r}(J)$ — кольцо Коэна—Маколея. □

Теорема 5.4.7. *Пусть J — сильно I-устойчивый идеал, $\mathfrak{r}(J)$ — сильно I'-устойчивый идеал. Кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда множество $F(J)$ содержит моном вида $x_t^{a_t} \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{d_i - 1}$, где $d_t > a_t > 0$.*

Доказательство. Пусть A/J — кольцо Коэна—Маколея. В силу теоремы 5.4.6 $A/\mathfrak{r}(J)$ — кольцо Коэна—Маколея, более того, $\operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) = \operatorname{depth} A/J$. Применяя лемму 5.4.5, получаем, что моном $v = \prod_{i=s}^{t-1} x_i$ принадлежит $F(\mathfrak{r}(J))$, следовательно, $u = \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{a_i} \in G(J)$, где $0 < a_i < d_i$. Заметим, что

$$n - \operatorname{depth} A/J \geqslant \max(u) - r(u) \geqslant \max(v) - \deg v + 1 = n - \operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) = n - \operatorname{depth} A/J,$$

т. е. $u \in F(J)$. Кроме того, $r(u) = \deg v - 1$, т. е. $a_i = d_i - 1$ при $s \leqslant i < t$.

Пусть теперь $u = x_t^{a_t} \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{d_i - 1} \in F(J)$. Если $u' \in G(J)$, то

$$\max(\operatorname{sq}(u')) - \deg \operatorname{sq}(u') + 1 \leqslant \max(u') - r(u') \leqslant \max(u) - r(u) = \max(\operatorname{sq}(u)) - \deg \operatorname{sq}(u) + 1,$$

т. е. $\operatorname{sq}(u') \in F(\mathfrak{r}(J))$. Более того, $\operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) = \operatorname{depth} A/J$. В силу леммы 5.4.5 ($\operatorname{sq}(u) = \prod_{i=s}^{t} x_i$), $A/\mathfrak{r}(J)$ — кольцо Коэна—Маколея, а так как $\operatorname{depth} A/\mathfrak{r}(J) = \operatorname{depth} A/J$, $\dim A/\mathfrak{r}(J) = \dim A/J$, то A/J — кольцо Коэна—Маколея. □

Следующая лемма описывает широкий класс идеалов с I'-устойчивыми радикалами.

Лемма 5.4.8. *Пусть $d_i \geqslant d_j$ при $i < j$. Тогда радикал $\mathfrak{r}(J)$ I-устойчивого (сильно I-устойчивого) идеала J является I'-устойчивым (сильно I'-устойчивым).*

Доказательство. Докажем утверждение для случая сильно I-устойчивого идеала J. В случае I-устойчивого идеала доказательство аналогично.

Достаточно показать, что для всех $u \in G(J)$ и для всех таких i, j, что $j < i \leqslant \max(\operatorname{sq}(u))$, x_i делит $\operatorname{sq}(u)$, x_j не делит $\operatorname{sq}(u)$, имеем $x_j \operatorname{sq}(u)/x_i \in \mathfrak{r}(J)$. Действительно, пусть $u = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$. Тогда $x_j^{a_i} u / x_i^{a_i} \in J$ (так как $d_j \geqslant d_i$), следовательно, $x_j \operatorname{sq}(u)/x_i = \operatorname{sq}(x_j^{a_i} u / x_i^{a_i}) \in \mathfrak{r}(J)$. □

Следствие 5.4.9. *Пусть $d_i \geqslant d_j$ при $i < j$, J — I-устойчивый идеал и кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея. Тогда $A/\mathfrak{r}(J)$ — кольцо Коэна—Маколея.*

Следствие 5.4.10. *Пусть $d_i \geqslant d_j$ при $i < j$, J — сильно I-устойчивый идеал. Кольцо A/J является кольцом Коэна—Маколея тогда и только тогда, когда множество $F(J)$ содержит моном вида $x_t^{a_t} \prod_{i=s}^{t-1} x_i^{d_i - 1}$, где $d_t > a_t > 0$.*

5.5. Сильно I-устойчивые идеалы

Пусть J — сильно I-устойчивый идеал. Обозначим $J_j = J + (x_1^{d_1}, \dots, x_j^{d_j})A$ и $R_j = A/J_j$ при $0 \leqslant j \leqslant n$. Кроме того, пусть $K(R_j)$ — комплекс Козюля A-модуля R_j и $H_q(R_j) \cong \operatorname{Tor}_q^A(R_j, k)$ — его гомологии. Обозначим $\Psi = \{i \colon d_i < +\infty\}$. Для каждого $i \in \Psi$ положим $w_i = x_i^{d_j - 1}$ и для каждого $\tau \subseteq \Psi$ положим $w_\tau = \prod_{t \in \tau} w_t$ ($w_\varnothing = 1$). Кроме того, обозначим $\Omega = \{w_\sigma \colon \sigma \subseteq \Psi,\ w_\sigma \notin J\}$. Заметим, что $w_\tau \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $(J : w_\tau) \neq A$.

Лемма 5.5.1. *Пусть $w_j \in \Omega$. Тогда идеал*

$$J' = ((J : w_j) + (x_j)A)/(x_j)A$$

в кольце $A' = k[x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n]$ является сильно I'-устойчивым для

$$I' = (x_1^{d_1}, \dots, x_{j-1}^{d_{j-1}}, x_{j+1}^{d_{j+1}}, \dots, x_n^{d_n})A' \subseteq A'.$$

Доказательство. Пусть $y \in J' \setminus I'$. Тогда $yw_j \in J \setminus I$. Следовательно, в силу сильной I-устойчивости идеала J для любых s, t, таких что $s < t \leqslant \max(yw_j)$, $s, t \neq j$, имеем $x_s y w_j / x_t \in I + J$. Поэтому $x_s y / x_t \in J' + I'$. □

Теорема 5.5.2. *Базис векторного пространства $H_q(R_j)$ состоит из классов гомологий циклов вида*

$$u' w_\tau \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)} \wedge e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $\max(x_\sigma) < \max(u)$, $u \in G(J : w_\tau)$, $ux_\sigma \notin I$, $|\sigma| + |\tau| = q - 1$, $\max(w_\tau) \leqslant j$, а также вида

$$w_\tau \otimes e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega, |\tau| = q$, $\max(w_\tau) \leqslant j$.

Доказательство. Проведем индукцию по j равномерно по всем n, I, J. База индукции при $j = 0$ следует из теоремы 5.3.5. Предположим, что для всех $l < j$ теорема доказана, докажем для j. Обозначим через B_l множество циклов в $H_q(R_l)$, описанных в формулировке теоремы. По предположению индукции классы гомологий циклов, принадлежащих B_{j-1}, составляют базис в $H_q(R_{j-1})$. Мы будем отождествлять B_{j-1} с множеством тех элементов в B_j, у которых $\max(w_\tau) \leqslant j$.

Если $d_j = +\infty$, то $R_{j-1} = R_j$ и циклов с $\max(w_\tau) = j$ в B_j нет, следовательно, $B_j = B_{j-1}$.

Пусть теперь $d_j < +\infty$. Заметим, что $(J : w_j) = (J : x_j^{d_j})$. Действительно, если $y \in G(J : x_j^{d_j})$, то $yx_j^{d_j} = uz$, где $z \in \mathcal{M}$, $u \in G(J)$. Кроме того, НОД$(y, z) = 1$ и $x_j^{d_j}$ не делит u, поэтому x_j делит z, следовательно, $yx_j^{d_j-1} \in J$. Таким образом, $(J : x_j^{d_j}) \subseteq (J : w_j)$, обратное включение очевидно.

Обозначим $R' = A/(J_{j-1} : x_j^{d_j})$. Так как $(J : w_j) = (J : x_j^{d_j})$, то $R' = A/((J : w_j), x_1^{d_1}, \ldots, x_{j-1}^{d_{j-1}})$. С другой стороны, $R'(-d_j\varepsilon_j) \cong (x_j^{d_j})R_j$.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow R'(-d_j\varepsilon_j) \longrightarrow R_{j-1} \longrightarrow R_j \longrightarrow 0$$

и соответствующую ей длинную точную последовательность для гомологий комплекса Козюля

$$\ldots \longrightarrow H_q(R'(-d_j\varepsilon_j)) \longrightarrow H_q(R_{j-1}) \longrightarrow H_q(R_j) \longrightarrow \ldots.$$

Докажем, что отображение $\theta\colon H_q(R'(-d_j\varepsilon_j)) \to H_q(R_{j-1})$ нулевое при $q \geqslant 0$. Так как все отображения в длинной точной последовательности градуированные, то достаточно доказать, что для всех $a \in \mathbb{Z}^n$ отображение $\theta_a\colon H_q(R')_{a-d_j\varepsilon_j} \to H_q(R_{j-1})_a$ нулевое. Можно считать, что $H_q(R_{j-1})_a \neq 0$. По предположению индукции классы гомологий циклов, принадлежащих B_{j-1}, составляют базис в $H_q(R_{j-1})$. Заметим, что если $b \in B_{j-1}$, $\deg_n b = a = (a_1, \ldots, a_n)$, то $a_j < d_j$. Действительно, если $b = w_\tau \otimes e_\tau$, то $\max(w_\tau) \leqslant j-1$, т. е. $a_j = 0 < d_j$. А если $b = u'w_\tau \otimes e_\sigma \wedge e_{\max(u)} \wedge e_\tau$, то $\max(w_\tau) \leqslant j-1$ и $ux_\sigma \notin I$, следовательно, $a_j < d_j$. Таким образом, $H_q(R_{j-1})_a \neq 0$ только при $a_j < d_j$, но при таких a $H_q(R')_{a-d_j\varepsilon_j} = 0$. Следовательно, отображение θ нулевое, и длинная точная последовательность расщепляется на короткие:

$$0 \longrightarrow H_q(R_{j-1}) \longrightarrow H_q(R_j) \longrightarrow H_{q-1}(R'(-d_j\varepsilon_j)) \longrightarrow 0.$$

Вложение $H_q(R_{j-1}) \to H_q(R_j)$ индуцируется отображением $R_{j-1} \to R_j$ в короткой точной последовательности, поэтому классы гомологий элементов B_{j-1} отображаются в классы гомологий соответствующих им элементов B_j. Таким образом, достаточно показать, что $B_j = B_{j-1} \cup B'$, где B' — элементы $K_q(R_j)$, классы гомологий которых являются прообразами некоторого базиса в $H_{q-1}(R'(-d_j\varepsilon_j))$.

Если $(J : w_j) = A$, то $R' = 0$, $B' = \varnothing$ и теорема доказана, так как базисных циклов с $\max(w_\tau) = j$ не существует.

Пусть $(J : w_j) \neq A$, следовательно, $w_j \in \Omega$. Так как элемент $x_j \in A$ регулярный относительно A и R', то $H_{q-1}(R') \cong H'_{q-1}(R'/x_j)$, где через $H'_{q-1}(R'/x_j)$ обозначены гомологии комплекса Козюля A/x_j-модуля R'/x_j (над кольцом A/x_j). По лемме 5.5.1 идеал $J' = ((J : w_j) + (x_j)A)/(x_j)A$ в кольце $A' = k[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n]$ является сильно I'-устойчивым для $I' = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{j-1}^{d_{j-1}}, x_{j-1}^{d_{j-1}}, \ldots, x_n^{d_n})A' \subseteq A'$, следовательно, по предположению индукции базис в $H'_{q-1}(R'/x_j)$ состоит из классов гомологий циклов вида

$$u'w_\tau \otimes_{A/x_j} e_\sigma \wedge e_{\max(u)} \wedge e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $\max(x_\sigma) < \max(u)$, $u \in G(J' : w_\tau)$, $ux_\sigma \notin I'$, $|\sigma| + |\tau| = q-2$, $\max(w_\tau) \leqslant j-1$, $x_j \nmid u$, $j \notin \sigma$, а также вида

$$w_\tau \otimes_{A/x_j} e_\tau,$$

где $w_\tau \in \Omega$, $|\tau| = q-1$, $\max(w_\tau) \leqslant j-1$. Обозначим множество этих циклов через B. Напомним, как найти образ класса гомологий $[z] \in H_{q-1}(R')$ при изоморфизме $H_{q-1}(R') \cong H'_{q-1}(R'/x_j)$. Пусть $z = \sum\limits_\sigma r_\sigma \otimes e_\sigma \in K_{q-1}(R')$ — цикл, представляющий класс $[z]$. Так как R' — фактор-кольцо кольца многочленов по мономиальному идеалу, то z можно представить в виде

$$z = \sum_{\sigma,\, j\notin\sigma} \sum_s \alpha_{\sigma,s} a_{\sigma,s} \otimes e_\sigma + \sum_\sigma \sum_s \gamma_{\sigma,s} c_{\sigma,s} \otimes e_\sigma,$$

где $a_{\sigma,s}$ — образы мономов из A, не делящихся на x_j, $c_{\sigma,s}$ — образы мономов из A, делящихся на x_j, а $\alpha_{\sigma,s}, \gamma_{\sigma,s} \in k$. Тогда $\sum\limits_{\sigma}\sum\limits_{s}\gamma_{\sigma,s}b_{\sigma,s}\otimes e_\sigma$ — граница, поэтому

$$\left[\sum_{\sigma,\, j\notin\sigma}\sum_{s}\alpha_{\sigma,s}a_{\sigma,s}\otimes e_\sigma\right] = [z].$$

По определению класс $[z]$ при изоморфизме $H_{q-1}(R') \cong H'_{q-1}(R'/x_j)$ переходит в класс

$$\left[\sum_{\sigma,\, j\notin\sigma}\sum_{s}\alpha_{\sigma,s}a_{\sigma,s}\otimes_{A/x_j} e_\sigma\right] \in H'_{q-1}(R'/x_j),$$

где $a_{\sigma,s}$ рассматриваются как элементы R'/x_j.

Таким образом, классу каждого цикла $z = r\otimes_{A/x_j} e_\rho \in B$ при этом изоморфизме соответствует класс в $H_{q-1}(R')$, который имеет представителя $z' = r'\otimes e_\rho$, где r' — прообраз r при гомоморфизме $R' \to R'/x_j$. Цикл z', соответствующий z, будем обозначать $c(z)$.

Пусть $z \in B$. Тогда $w_j c(z)\wedge e_j$ — цикл в $H_q(R_j)$, класс гомологий которого отображается в класс $\pm[z] \in H_{q-1}(R'(-d_j\varepsilon_j))$ при связывающем гомоморфизме. Это и доказывает теорему, так как $B_j = $ $= B_{j-1}\cup\{w_j z\wedge e_j\colon z\in B\}$. □

Обозначим $\Omega_{s,r} = \{w_\tau\in\Omega\colon \deg w_\tau = s,\ |\tau| = r\}$, $|\tau|_u = |\{i\in\tau\colon i < \max(u)\}|$.

Следствие 5.5.3. *Если J — сильно I-устойчивый идеал, то для всех $i\geqslant 1$ имеем*

$$\beta^A_{i,i+j}(A/(J+I)) = \sum_{w_\tau\in\Omega}\left[\sum_{\substack{u\in G(J:w_\tau)\\ \deg u = j+1-\deg w_\tau}}\binom{\max(u)-r(u)-1-|\tau|_u}{i-1-|\tau|}\right] + |\Omega_{j,i}|.$$

В частности, числа Бетти $\beta^A_{i,i+j}(A/(J+I))$ не зависят от характеристики поля k (если $a>b$ или $a<0$, то полагаем $\binom{b}{a}=0$).

5.6. Слабо I-устойчивые идеалы

Пусть J — слабо I-устойчивый идеал, $G(J) = \{u_1,\dots,u_m\}$, причем $u_1 <_{\text{hlr}} u_2 <_{\text{hlr}} \dots <_{\text{hlr}} u_m$.

Лемма 5.6.1. *Пусть $u_{m+1},\dots,u_s$ — мономы в $A\setminus I+J$, $u_{m+1} <_{\text{hlr}} \dots <_{\text{hlr}} u_s$. Если идеал $J' = (J, u_{m+1},\dots,u_s)A$ слабо I-устойчивый, то идеалы $(J,u_{m+1},\dots,u_r)A$ слабо I-устойчивые при $r = m+1,\dots,s$.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия 2) определения 5.1.2 для всех u_l при $m < l \leqslant r$. Действительно, так как J' слабо I-устойчивый, то для всех $j < \max(u'_l)$ существует такое $i > j$, что x_i делит u_l и $x_j u_l/x_i \in J' + I$. Если $x_j u_l/x_i \in J'\setminus I$, то $x_j u_l/x_i = u_t w$ при некотором $t\leqslant s$. Следовательно, $u_t \leqslant_{\text{hlr}} x_j u_l/x_i <_{\text{hlr}} u_l$, т. е. $t < l \leqslant r$, поэтому $x_j u_l/x_i \in$ $\in (J,u_{m+1},\dots,u_r)A$. □

Лемма 5.6.2. *Пусть моном $v\in A\setminus I+J$ имеет степень $\deg v = a$ и идеал $J' = (J,v)A$ слабо I-устойчивый. Если для всех l имеем, что $\deg u_l \leqslant a$, то $J'/J \cong A/L(-a)$, где L — идеал, порожденный всеми переменными x_t, удовлетворяющими условию $vx_t\in J\setminus I$.*

Доказательство. Обозначим $\tau = \{t\colon x_t v\in J\setminus I\}$. Так как $J'/J\cong A/(J:v)(-a)$, то достаточно показать, что $(J:v) = L$.

Действительно, пусть $i\in\tau$, тогда $vx_i\in J$, т. е. $L\subseteq (J:v)$.

Пусть $y\in G(J:v)$, тогда $yv = u_l w$, где $w\in\mathcal{M}$. Так как y — порождающая $(J:v)$, то НОД$(y,w) = 1$, следовательно, y делит u_l, w делит v. Кроме того, если $yv\in I$, то существуют такие p, q, что x_p^q делит w и $x_p^q u_l\in I$. Но так как НОД$(y,w)=1$, то x_p не делит y и, следовательно, $v\in I$ — противоречие. Значит, $yv\notin I$.

Если $\deg y = 0$, то $v\in J$, что противоречит условию.

Если $\deg y = 1$, то $y = x_s$, причем $x_s v\in J\setminus I$, т. е. $s\in\tau$.

Если $\deg y \geqslant 2$, то $\deg u_l \geqslant 2$, следовательно, $\deg v \geqslant 2$ и $\deg w \geqslant 2$. Пусть u_l — минимальная из порождающих $u_j \in J$, для которых $yv = u_j z$ для некоторого $z \in A$. Так как y делит u_l, w делит v, то $\max(y') \leqslant \max(u'_l)$, $\max(w') \leqslant \max(v')$.

Пусть $\max(y') < \max(v')$, тогда существует такое $i > \max(y')$, что $vx_{\max(y')}/x_i \in J' + I$, следовательно, $vx_{\max(y')}/x_i \in J + I$, т. е. $vx_{\max(y')} \in J + I$. Но так как $vy \notin I$, то $vx_{\max(y')} \in J \setminus I$, поэтому $x_{\max(y')} \in G(J : v)$ — противоречие.

Пусть $\max(y') = \max(v')$, тогда $\max(w') \neq \max(v')$, следовательно, $\max(w') < \max(v') = \max(y') \leqslant \max(u'_l)$.

Пусть $\max(y') > \max(v')$, тогда $\max(w') \leqslant \max(v') < \max(y') \leqslant \max(u'_l)$.

Таким образом, во всех случаях $\max(w') < \max(u'_l)$. Поэтому существует такое $i > \max(w')$, что $u_l x_{\max(w')}/x_i \in J + I$. Но так как $u_l w \notin I$, то $u_l x_{\max(w')}/x_i \in J \setminus I$. Кроме того, $u_l x_{\max(w')}/x_i <_{\mathrm{hlr}} u_l$, поэтому существует такое $s < l$, что $u_l x_{\max(w')}/x_i = u_s z$, $z \in \mathcal{M}(A)$, — противоречие с минимальностью u_l, так как $u_l x_{\max(w')}$ делит $u_l w = yv$.

Таким образом, все мономы из $G(J : v)$ имеют степень 1 и принадлежат L. □

Обозначим $J_l = (u_1, \ldots, u_l)A$. В силу леммы 5.6.1 идеалы J_l слабо I-устойчивые. Положим $\tau(u_l) = \{i\colon u_l x_i \in J_{l-1} \setminus I\}$, $\deg u_l = a_l$, $R_l = (A/(x_i,\ i \in \tau(u_l))A)(-a_l)$ при $l \geqslant 2$ и $R_1 = A$. Заметим, что $\beta^A_{i,j}(R_l) = 0$ при $j \neq i + a_l$ и $\beta^A_{i,i+a_l}(R_l) = \binom{|\tau(u_l)|}{i}$ при $l \geqslant 2$.

Теорема 5.6.3. $\beta^A_{i,j}(J_l) = \sum\limits_{s=1}^{l} \beta^A_{i,j}(R_s)$. *В частности,* $\beta^A_{i,j}(J_l)$ *не зависят от характеристики поля* k.

Доказательство. Проведем индукцию по l. База индукции при $l = 1$ очевидна. Пусть для всех $s < l$ теорема доказана, докажем для l.

По лемме 5.6.2 последовательность

$$0 \longrightarrow J_{l-1} \longrightarrow J_l \longrightarrow R_l \longrightarrow 0$$

является точной последовательностью градуированных A-модулей. Поэтому мы имеем длинную точную последовательность производных функторов

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_{i+1}(R_l, k) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_i(J_{l-1}, k) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_i(J_l, k) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_i(R_l, k) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_{i-1}(J_{l-1}, k) \longrightarrow \ldots.$$

Обозначим $D_{l,i} = \{a_1 + i, \ldots, a_l + i\}$. По предположению индукции $\beta^A_{i,j}(J_{l-1}) = \sum\limits_{s=1}^{l-1} \beta^A_{i,j}(R_s)$. Следовательно, если $j \notin D_{l,i}$, то $\beta^A_{i,j}(J_{l-1}) = \beta^A_{i,j}(R_l) = 0$, поэтому $\beta^A_{i,j}(J_l) = 0$ и теорема верна. Если $j \in D_{l,i}$, то $j < a_l + 1 + i$, следовательно, $\beta^A_{i+1,j}(R_l) = 0$. Кроме того, если $j = a_l + i$, то $\beta^A_{i-1,j}(J_{l-1}) = 0$, а если $j < a_l + i$, то $\beta_{i,j}(R_l) = 0$. Поэтому для всех $j \in D_{l,i}$ последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_i(J_{l-1}, k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_i(J_l, k)_j \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_i(R_l, k)_j \longrightarrow 0$$

точна. Следовательно, $\beta^A_{i,j}(J_l) = \beta^A_{i,j}(J_{l-1}) + \beta^A_{i,j}(R_l)$. □

Следствие 5.6.4. *Если* J *— слабо* I*-устойчивый идеал, порожденный в степени* d*, то модуль* A/J *имеет* d*-линейную резольвенту.*

Если J — слабо I-устойчивый идеал, порожденный в степени d, то обозначим J^{st} минимальный I-устойчивый идеал, содержащий J. Очевидно, что J тоже порожден в степени d. Пусть $G(J^{\mathrm{st}}) \setminus G(J) = \{u_{m+1}, \ldots, u_s\}$, $u_{m+1} <_{\mathrm{hlr}} u_{m+2} <_{\mathrm{hlr}} \ldots <_{\mathrm{hlr}} u_s$. Кроме того, при $l > m$ положим $J_l = (J, u_{m+1}, \ldots, u_l)$, $\tau(u_l) = \{i\colon u_l x_i \in J_{l-1} \setminus I\}$, $R_l = (A/(x_i, i \in \tau(u_l))A)(-d)$.

Теорема 5.6.5. *Пусть* J *— слабо* I*-устойчивый идеал, порожденный в степени* d*. Тогда*

1) *для всех* $i \geqslant 1$ *имеем* $\beta^A_i(A/J) = \beta^A_i(A/J^{\mathrm{st}}) - \sum\limits_{l=m+1}^{s} \binom{|\tau(u_l)|}{i-1}$;

2) *для всех* $i \geqslant 1$ *последовательность векторных пространств*

$$0 \longrightarrow H_i(A/J) \longrightarrow H_i(A/J^{\mathrm{st}}) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{l=m+1}^{s} H_{i-1}(R_l) \longrightarrow 0$$

точна, кроме того, отображение ψ на базисе пространства $H_i(A/J^{\mathrm{st}})$, состоящего из классических циклов (*см. теорему* 5.3.5)*, имеет вид*

$$\psi([u'\otimes e_\tau]) = \sum_{t\in\rho(\tau,u)} (-1)^{\alpha(\tau,t)}[1\otimes e_{\tau_t}],$$

где $\rho(\tau,u) = \{t\in\tau\colon$ *существует такое* $l,\ m+1\leqslant l\leqslant s,$ *что* $x_tu' = u_l,\ \tau_t\subseteq\tau(u_l)\}$.

Доказательство. В силу леммы 5.6.1 идеалы J_l слабо I-устойчивые при $l\geqslant m+1$. Применяя лемму 5.6.2, получаем точную последовательность

$$0\longrightarrow J_{l-1}\longrightarrow J_l\longrightarrow R_l\longrightarrow 0.$$

Снова рассмотрим длинную точную последовательность

$$\ldots\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_{i+1}(R_l,k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(J_{l-1},k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(J_l,k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(R_l,k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_{i-1}(J_{l-1},k)\longrightarrow\ldots.$$

По следствию 5.6.4 модули J_{l-1}, J_l имеют линейные резольвенты, а так как R_l тоже имеет линейную резольвенту, то длинная точная последовательность расщепляется на короткие:

$$0\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(J_{l-1},k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(J_l,k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(R_l,k)\longrightarrow 0.$$

Так как $\operatorname{Tor}^A_i(J_l,k)\cong\operatorname{Tor}^A_{i+1}(A/J_l,k)$, то последовательность

$$0\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(A/J_{l-1},k)\longrightarrow \operatorname{Tor}^A_i(A/J_l,k)\xrightarrow{\delta_l} \operatorname{Tor}^A_{i-1}(R_l,k)\longrightarrow 0 \tag{14}$$

точна, что и доказывает первую часть теоремы.

Представим отображение ψ в виде $\psi=\sum\limits_{l=m+1}^{s}\psi_l$, где $\psi_l\colon H_i(A/J^{\mathrm{st}})\to H_{i-1}(R_l)$ определено следующим образом:

$$\psi_l([u'\otimes e_\tau]) = \begin{cases}(-1)^{\alpha(\tau,t)}[1\otimes e_{\tau_t}], & \text{если найдётся такое } t\in\tau,\ \text{что } x_tu'=u_l,\ \tau_t\subseteq\tau(u_l),\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Покажем, что $\operatorname{Ker}\psi_l = H_i(A/J_{l-1})$. Из последовательности (14) следует, что $H_i(A/J_{l-1})\subseteq$ $\subseteq H_i(A/J_l)$ и, следовательно, $H_i(A/J_{l-1})\subseteq H_i(A/J^{\mathrm{st}})$ при $l\geqslant m+1$. Поэтому достаточно доказать, что ограничение отображения ψ_l на подпространство $H_i(A/J_l)\subseteq H_i(A/J^{\mathrm{st}})$ совпадает с δ_l. Действительно, пусть $z=\sum c_{\tau,u}u'\otimes e_\tau$, $c_{\tau,u}\in k$, — цикл в $K_i(A/J_l)$, разложенный по базису из классических циклов (считаем, что $c_{\tau,u}=0$, если $u'\otimes e_\tau$ неклассический). Имеем

$$\psi_l([z]) = \sum c_{\tau,u}\psi_l([u'\otimes e_\tau]) = \sum_{\substack{\rho\subseteq\tau(u_l)\\ |\rho|=i-1}}\left(\sum_{t\notin\rho}\sum_{\substack{u\in G(J^{\mathrm{st}})\\ x_tu'=u_l}}(-1)^{\alpha(\rho,t)}c_{\rho\cup t,u}\right)[1\otimes e_\rho].$$

С другой стороны, при изоморфизме $\operatorname{Tor}^A_i(A/J_l,k)\to\operatorname{Tor}^A_{i-1}(J_l,k)$ класс $[z]$ переходит в класс

$$[\partial_i(z)] = \left[\sum_{|\rho|=i-1}\left(\sum_{t\notin\rho}\sum_{u\in G(J^{\mathrm{st}})}(-1)^{\alpha(\rho,t)}c_{\rho\cup t,u}x_tu'\right)\otimes e_\rho\right].$$

Следовательно, по модулю $H_i(A/J_{l-1})$ справедливо равенство

$$[\partial_i(z)] = \left[\sum_{\substack{\rho\subseteq\tau(u_l)\\ |\rho|=i-1}}\left(\sum_{t\notin\rho}\sum_{\substack{u\in G(J^{\mathrm{st}})\\ x_tu'=u_l}}(-1)^{\alpha(\rho,t)}c_{\rho\cup t,u}u_l\right)\otimes e_\rho\right].$$

Поэтому

$$\delta_l([z]) = \sum_{\substack{\rho\subseteq\tau(u_l)\\ |\rho|=i-1}}\left(\sum_{t\notin\rho}\sum_{\substack{u\in G(J^{\mathrm{st}})\\ x_tu'=u_l}}(-1)^{\alpha(\rho,t)}c_{\rho\cup t,u}\right)[1\otimes e_\rho],$$

что совпадает с выражением для $\psi_l([z])$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\psi_l = H_i(A/J_{l-1})$. Более того, так как отображения δ_l сюръективны, то ψ_l и ψ тоже сюръективны.

Так как $\operatorname{Ker}\psi_l = H_i(A/J_{l-1})$, то

$$\operatorname{Ker}\psi = \bigcap_{l=m+1}^{s} \operatorname{Ker}\psi_l = \bigcap_{l=m+1}^{s} H_i(A/J_{l-1}) = H_i(A/J),$$

что и требовалось. □

Замечание 5.6.6. Стоит отметить, что если J не порожден в одной степени, то можно привести пример, когда $H_i(A/J)$ не является подпространством в $H_i(A/J^{\mathrm{st}})$ (см. [5, пример 2.6]).

В [3] доказано, что если A-модуль M имеет линейную резольвенту, то дифференциал его резольвенты, представленной в виде $A \otimes_k H(M)$, можно построить следующим образом. Каждый элемент $a \in K_i(M)$ можно единственным образом представить в виде $a = a_j - e_j \wedge \pi_j(a)$, где $a_j, \pi_j(a) \in K(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n; M)$. Тогда дифференциал элемента $1 \otimes_k [a] \in A \otimes_k H(M)$ определяется как $D(1 \otimes_k [a]) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes_k [\pi_j(a)]$.

Теорема 5.6.7. *Пусть J — слабо I-устойчивый идеал, порожденный в степени d. Тогда минимальная свободная резольвента $A \otimes_k H(A/J)$ модуля A/J над A является подкомплексом в резольвенте $A \otimes_k H(A/J^{\mathrm{st}})$ для A/J^{st}.*

Доказательство. В силу теоремы 5.6.5 пространства $H_i(A/J)$ являются подпространствами в $H_i(A/J^{\mathrm{st}})$, поэтому остается доказать, что дифференциал в резольвенте для A/J являются ограничением дифференциала резольвенты для A/J^{st}. По следствию 5.6.4 модули A/J и A/J^{st} имеют линейные резольвенты. Пусть D — дифференциал резольвенты для A/J и D_{st} — для A/J^{st}, построенные описанным выше образом.

Пусть $[z] = \sum c_{\tau,u}[u' \otimes e_\tau]$ — цикл в $K_i(A/J)$. Так как все π_j линейны, то

$$D([z]) = \sum c_{\tau,u} \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes_k [\pi(u' \otimes e_\tau)] = \sum c_{\tau,u} D_{\mathrm{st}}([u' \otimes e_\tau]) = D_{\mathrm{st}}([z]).$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голод Е. С.* О гомологиях некоторых локальных колец // ДАН СССР. — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 479—482.
2. *Aramova A., Avramov L. L., Herzog J.* Resolutions of monomial ideals and cohomology over exterior algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — *352*, N 2. — P. 579—594.
3. *Aramova A., Herzog J.* Free resolutions and Koszul homology // J. Pure Appl. Algebra. — 1995. — *105*, N 1. — P. 1—16.
4. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Gotzmann theorems for exterior algebras and combinatorics // J. Algebra. — 1997. — *191*, N 1. — P. 174—211.
5. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Weakly stable ideals // Osaka J. Math. — 1997. — *34*, N 4. — P. 745—755.
6. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Squarefree lexsegment ideals // Math. Z. — 1998. — *228*, N 2. — P. 353—378.
7. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Ideals with stable Betti numbers // Adv. Math. — 2000. — *152*, N 1. — P. 72—77.
8. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Shifting operations and graded Betti numbers // J. Algebraic Combin. — 2000. — *12*, N 3. — P. 207—222.
9. *Avramov L. L.* Infinite free resolutions // Six lectures on commutative algebra. Lectures presented at the summer school, Bellaterra, Spain, July 16—26, 1996 / eds. J. Elias, G. M. Giral, R. M. Miro-Roig, H. Bass, J. Oesterle, A. Weinstein. — Prog. Math. Vol. 166. — Birkhäuser, 1998. — P. 1—118.
10. *Bass H.* On the ubiquity of Gorenstein rings // Z. Math. — 1963. — *82*, N 1. — P. 8—28.
11. *Bigatti A. M.* Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function // Commun. Algebra. — 1993. — *21*, N 7. — P. 2317—2334.
12. *Clements G. F., Lindström B.* A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Combin. Theory. — 1969. — *7*. — P. 230—238.

13. *De Negri E., Herzog J.* Completely lexsegment ideals // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — *126*, N 12. — P. 3467—3473.
14. *Eisenbud D.* Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry. — Graduate Texts in Mathematics. Vol. 150. — Berlin: Springer, 1995.
15. *Eliahou S., Kervaire M.* Minimal resolutions of some monomial ideals // J. Algebra. — 1990. — *129*, N 1. — P. 1—25.
16. *Gasharov V.* Extremal properties of Hilbert functions // Illinois J. Math. — 1997. — *41*, N 4. — P. 612—629.
17. *Gasharov V.* Green and Gotzmann theorems for polynomial rings with restricted powers of the variables // J. Pure Appl. Algebra. — 1998. — *130*, N 2. — P. 113—118.
18. *Gasharov V.* Hilbert functions and homogeneous generic forms. II // Compositio Math. — 1999. — *116*, N 2. — P. 167—172.
19. *Gasharov V., Hibi T., Peeva I.* Resolutions of **a**-stable ideals // J. Algebra. — 2002. — *254*, N 2. — P. 375—394.
20. *Gotzmann G.* Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes // Math. Z. — 1978. — *158*. — S. 61—70.
21. *Green M. L.* Restrictions of linear series to hyperplanes, and some results of Macaulay and Gotzmann // Algebraic curves and projective geometry. Proc. Conf. Trento/Italy 1988 / eds. E. Ballico, C. Ciliberto. — Lect. Notes Math. Vol. 1389. — Springer, 1989. — P. 76—86.
22. *Herzog J.* Generic initial ideals and graded Betti numbers // Computational commutative algebra and combinatorics / ed. T. Hibi. — Advanced Studies in Pure Mathematics. Vol. 33. — Mathematical Society of Japan, 2002. — P. 75—120.
23. *Herzog J., Hibi T.* Componentwise linear ideals // Nagoya Math. J. — 1999. — *153*. — P. 141—153.
24. *Herzog J., Popescu D.* Hilbert functions and generic forms // Compositio Math. — 1998. — *113*, N 1. — P. 1—22.
25. *Hulett H. A.* Maximum Betti numbers of homogeneous ideals with a given Hilbert function // Comm. Algebra. — 1993. — *21*, N 7. — P. 2335—2350.
26. *Iyengar S., Pardue K.* Maximal minimal resolutions // J. Reine Angew. Math. — 1999. — *512*. — P. 27—48.
27. *Katona G.* A theorem for finite sets // Theory of Graphs / eds. P. Erdös, G. Katona. — Academic Press, 1968. — P. 187—207.
28. *Kruskal J.* The number of simplices in a complex // Mathematical optimization techniques / ed. R. Bellman. — University of California Press, 1963. — P. 251—278.
29. *Macaulay F. S.* Some properties of enumeration in the theory of modular systems // Proc. London Math. Soc. — 1927. — *26*, N 2. — P. 531—555.
30. *Pardue K.* Deformation of classes of graded modules and maximal Betti numbers // Illinois J. Math. — 1996. — *40*, N 4. — P. 564—585.
31. *Stanley R. P.* Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math. — 1978. — *28*. — P. 57—83.