ISSN 1512–1712

Академия Наук Грузии
Институт Кибернетики

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 31

ГЕОМЕТРИЯ

Тбилиси
2005

Редакционная коллегия

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 31

ГЕОМЕТРИЯ

კიბერნეტიკის ინსტიტუტი
თბილისი
2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика и ее приложения. Том 31 (2005). С. 3–12

УДК 514.76

О КАНОНИЧЕСКОМ ВЛОЖЕНИИ КОМПЛЕКСНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА В ВЕЩЕСТВЕННОЕ ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

© 2005 г. **В. В. КОННОВ**

Аннотация. В работе строится естественное вложение $\sigma : \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^{n^2+2n}$ комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$, рассматриваемого как $2n$-мерное вещественно-аналитическое многообразие, в вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$. Образ вложения σ назван в работе $\mathbb{C}P^n$-*поверхностью*. Для конструкции вложения рассматриваются два эквивалентных подхода. Первый подход основан на свойствах голоморфных бивекторов в овеществлении комплексного векторного пространства. Этот подход позволяет доказать, в частности, что $\mathbb{C}P^n$-поверхность является плоским сечением грассманова многообразия. Второй подход использует присоединенное представление группы Ли $U(n+1)$ и каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{u}(n+1)$. При помощи данного подхода дается геометрическая характеризация канонического разложения алгебры Ли $\mathfrak{u}(n+1)$. Изучаются свойства построенного вложения. Показано, что это вложение внутренним образом определяет каноническую кэлерову структуру на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$. В частности, метрика Фубини—Штуди есть ни что иное, как первая квадратичная форма вложения, а комплексная структура на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ полностью определяется второй фундаментальной формой вложения. В силу этих причин данное вложение названо в работе каноническим. В терминах построенного вложения дается описание инвариантных и антиинвариантных вполне геодезических подмногообразий копмлексного проективного пространства.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является $2n$-мерным вещественно-аналитическим многообразием (которое мы будем обозначать через $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$). Многообразие $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ является кэлеровым многообразием постоянной положительной голоморфной секционной кривизны, которое можно рассматривать как базу расслоения Хопфа $\chi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$, т.е. как фактор-многообразие S^{2n+1}/S^1. В настоящей работе решается задача о вложении многообразия $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ в вещественное проективное пространство достаточного числа измерений, учитывающее дифференциально-геометрическую структуру многообразия $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$. Согласно теореме Уитни, многообразие $\mathbb{C}P^n$ может быть вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^{4n+1}$. Отсюда следует, в частности, что существует вложение $\mathbb{C}P^n$ и в вещественное проективное пространство размерности $4n+1$. Однако, теорема Уитни не дает конструктивного и однозначного способа вложения, не гарантирует его аналитичности и не учитывает комплексную и кэлерову структуры на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$. С другой стороны, в силу теоремы Нэша [8], комплексное проективное пространство, будучи $2n$-мерным компактным римановым многообразием, может быть изометрически вложено в $\mathbb{R}^{6n^2+11n}$. Более того, известно [7], что всякое эрмитово

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

симметрическое пространство G/H компактного типа может быть эквивариантно и изометрически вложено в $\mathbb{R}^N$, где $N = \dim G$. Применительно к $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \equiv U(n+1)/U(1) \times U(n)$ это означает, что $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ можно эквивариантно и изометрически вложить в $\mathbb{R}^{n^2+2n+1}$. Конструкцию такого вложения можно найти в работе [1] (см. теорему 8.2 и пример из п. 8.112), где комплексное проективное пространство вкладывается в $\mathbb{R}^{n^2+2n+1} \equiv \mathfrak{u}(n+1)$ при помощи отображения орбиты в присоединенном представлении группы Ли $U(n+1)$. Следует отметить, что в алгебре Ли $\mathfrak{u}(n+1)$ существует однопараметрическое семейство орбит присоединенного представления, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{C}P^n$. Все эти орбиты отождествляются при отображении проективизации $p : \mathfrak{u}(n+1) \to P\big(\mathfrak{u}(n+1)\big)$ и определяют каноническое эквивариантное вложение $U(n+1)$-пространства $\mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$-пространство $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$. Именно поэтому в настоящей работе ставится задача об изучении канонического вложения $\mathbb{C}P^n$ в вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$. Естественность такого вложения позволяет надеяться на то, что комплексная проективная геометрия может быть инвариантным образом охарактеризована в терминах вещественной проективной геометрии.

В работе показано, что искомое вложение $\sigma : \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^{n^2+2n}$ может быть естественным образом описано в терминах голоморфных бивекторов в овеществлении комплексного векторного пространства. Образ вложения σ назван в работе *$\mathbb{C}P^n$-поверхностью*. Доказано, что $\mathbb{C}P^n$-поверхность является плоским сечением вещественного грассманиана. Отсюда следует, в частности, что образ вложения σ является вещественным алгебраическим подмногообразием. Показано, что построенное вложение внутренним образом определяет каноническую кэлерову структуру на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$. В частности, метрика Фубини—Штуди есть ни что иное, как первая квадратичная форма вложения, а комплексная структура на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ полностью определяется второй фундаментальной формой вложения. В силу этих причин данное вложение названо в работе каноническим.

Вложение σ позволяет моделировать геометрию комплексного проективного пространства на вещественно-аналитической поверхности. Например, доказано, что вполне геодезические инвариантные и антиинвариантные подмногообразия на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ являются плоскими сечениями $\mathbb{C}P^n$-поверхности.

Кроме того, в работе рассматривается альтернативный подход к построению вложения σ. Этот подход использует присоединенное представление группы Ли $U(n+1)$ и основан на том, что в алгебре Ли $\mathfrak{u}(n+1) \equiv \mathbb{R}P^{n^2+2n+1}$ существует орбита присоединенного представления, диффеоморфная $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$. Как следует из [1], на этой орбите существует каноническая кэлерова структура. Доказано, что образ этой орбиты при отображении проективизации является $\mathbb{C}P^n$-поверхностью. При помощи данного подхода дается геометрическая характеризация канонического разложения алгебры Ли $\mathfrak{u}(n+1)$.

1. Конструкция вложения $\mathbb{C}P^n$ в $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$

Пусть $\mathbb{C}P^n$ — комплексное проективное пространство, порожденное $\mathbb{C}^{n+1}$, $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \to \mathbb{C}P^n$ — каноническая проекция, $W = \mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}$ — овеществление $\mathbb{C}^{n+1}$, $\boldsymbol{J}$ — стандартная комплексная структура на W. Если $\boldsymbol{z} \in W\backslash 0$, то $\mathcal{L}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}\}$ — двумерное *голоморфное* подпространство пространства W. Пусть $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash 0$. Тогда

$$\pi(\boldsymbol{z}) = \pi(\boldsymbol{w}) \iff \mathcal{L}\{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{w}\}.$$

Следовательно, *точки комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ находятся в биективном соответствии с двумерными голоморфными подпространствами векторного пространства $W = \mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}$.*

Пусть теперь $\widetilde{W} = W \wedge W = \mathrm{Alt}(W \otimes W) \equiv \mathbb{R}^{n(2n-1)}$ — *пространство бивекторов* над W, $P(\widetilde{W})$ — соответствующее вещественное проективное пространство, $p : \widetilde{W}\backslash 0 \to P(\widetilde{W})$ — каноническая проекция (*отображение проективизации*). Ясно, что точки комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ находятся в биективном соответствии с точками вещественного проективного пространства $P(\widetilde{W})$, порожденными *голоморфными бивекторами*, т.е. тензорами вида $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$, где $\lambda \in \mathbb{R}\backslash 0$. Биекция устанавливается при помощи отображения

$$\sigma : \pi(\boldsymbol{z}) \mapsto p(\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}). \tag{1}$$

На пространстве бивекторов $\widetilde{\widetilde{W}}$ определим линейный оператор $\widetilde{\boldsymbol{J}} : \widetilde{\widetilde{W}} \to \widetilde{\widetilde{W}}$ при помощи свойств:

1) оператор $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ является $\mathbb{R}$-линейным;
2) для всех $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ имеет место соотношение $\widetilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{b}$.

Легко видеть, что $\widetilde{\boldsymbol{J}}^2 = \mathrm{id}$. Следовательно, $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ — структура прямого произведения на $\widetilde{\widetilde{W}}$, а $V = \ker(\mathrm{id} - \widetilde{\boldsymbol{J}})$ — собственное подпространство оператора $\widetilde{\boldsymbol{J}}$. Размерность подпространства V равна $n^2 + 2n + 1$. Тензоры

$$\boldsymbol{e}_{jk} = \frac{1}{2}(e_j \wedge \varepsilon_k + e_k \wedge \varepsilon_j), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{jk} = \frac{1}{2}(e_j \wedge e_k + \varepsilon_j \wedge \varepsilon_k)$$

образуют естественный базис в V. Здесь $\{e_j\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^{n+1}$, а $\{e_j,\ \varepsilon_k = ie_k = \boldsymbol{J}e_k\}$ — соответствующий базис в $W = \mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{R}}$. Числа $U^{jk} = U^{kj}$ и $V^{jk} = -V^{kj}$, определяемые из разложения $\boldsymbol{x} = U^{jk}\boldsymbol{e}_{jk} + V^{jk}\boldsymbol{\epsilon}_{jk}$, являются однородными координатами точки $p(\boldsymbol{x}) \in P(V)$.

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{x}$ — ненулевой тензор из $\widetilde{\widetilde{W}}$. Тензор $\boldsymbol{x}$ является голоморфным бивектором тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} &= 0 \qquad (\textit{разложимость}); \\ (\mathrm{id} - \widetilde{\boldsymbol{J}})\boldsymbol{x} &= 0 \qquad (\textit{голоморфность}). \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Ясно, что любой голоморфный бивектор $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$ удовлетворяет системе (2). Обратно, пусть тензор $\boldsymbol{x} \neq 0$ удовлетворяет системе (2). Из первого уравнения этой системы находим, что тензор $\boldsymbol{x}$ является разложимым: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Из второго уравнения получаем: $\boldsymbol{J}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Следовательно, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{a} = 0$ и, поэтому $\boldsymbol{b} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{a}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Но тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \beta \cdot \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{a}$. ☐

В грассмановых координатах на $P(\widetilde{\widetilde{W}})$ система (2) примет вид:

$$X^{[uv}X^{w]p} = 0, \quad \left(J^{[p}_{[u}J^{q]}_{v]} - \delta^{[p}_{[u}\delta^{q]}_{v]}\right) X^{uv} = 0. \tag{3}$$

Следствие. *Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ можно отождествить с алгебраическим многообразием $\mathfrak{U}$, которое определяется в $P(\widetilde{\widetilde{W}})$ системой уравнений* (3). *Подмногообразие $\mathfrak{U}$ является пересечением грассманова многообразия $G_{2,2n+2} \subset P(\widetilde{\widetilde{W}})$ и проективного подпространства $\mathbb{R}P^{n^2+2n} = P(V) \subset P(\widetilde{\widetilde{W}})$. Биекция между $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{U}$ устанавливается посредством отображения* (1).

Теорема 1. *Относительно вещественно-аналитических структур на $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ и на $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$ отображение $\sigma : \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^{n^2+2n}$, определяемое соотношением* (1), *является вещественно-аналитическим вложением.*

Доказательство. Прямым вычислением находим, что в терминах однородных координат отображение σ определяется векторным уравнением

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}(z^j \bar{z}^k)\boldsymbol{e}_{jk} + \mathrm{Im}(z^j \bar{z}^k)\boldsymbol{\epsilon}_{jk}. \tag{4}$$

В аффинной карте $\mathbb{C}A^{\mathbb{R}}_0$ с координатами $\xi^a = \boldsymbol{z}^a/\boldsymbol{z}^0 = u^a + iv^a$ уравнение (4) перепишется в виде

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_{00} + 2u^a\boldsymbol{e}_{0a} + 2v^a\boldsymbol{\epsilon}_{0a} + (u^a u^b + v^a v^b)\boldsymbol{e}_{ab} + (v^a u^b - u^a v^b)\boldsymbol{\epsilon}_{ab}. \tag{5}$$

По аналогии с (5) отображение σ может быть представлено в произвольной аффинной карте $\mathbb{C}A^{\mathbb{R}}_k$. Ясно, что σ — аналитическое вложение ☐

В дальнейшем подмногообразие $\sigma(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}})$ будем называть $\mathbb{C}P^n$-*поверхностью*. Если ввести обозначение $Z^{jk} = U^{jk} + iV^{jk}$, то (4) перепишется в координатном виде:

$$Z^{jk}\big(\sigma \circ \pi(\boldsymbol{z})\big) = z^j \bar{z}^k.$$

Таким образом, *проективное пространство $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$, объемлющее для $\mathbb{C}P^n$-поверхности, можно рассматривать как действительное проективное пространство, порожденное линейным пространством V эрмитовых матриц порядка $n+1$. При этом $\mathbb{C}P^n$-поверхность порождена в $P(V)$ эрмитовыми матрицами ранга* 1.

Как отмечалось выше, $\mathbb{C}P^n$-поверхность $\mathfrak{U}$ является сечением грассманова многообразия $G_{2,2n+2} \subset P(\widetilde{W})$ плоскостью $P(V)$ размерности n^2+2n. Следует отметить, что такое сечение не единственно. Аналогичные сечения получаются, если в качестве оператора $\boldsymbol{J}$ взять на $W = \mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ произвольную комплексную структуру (не обязательно стандартную).

Пример. Известно, что комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1_{\mathbb{R}}$ диффеоморфна двумерной сфере S^2, являющейся базой классического расслоения Хопфа $\chi : S^3 \to \mathbb{C}P^1_{\mathbb{R}} \equiv S^2$. Покажем, что *при $n=1$ $\mathbb{C}P^n$-поверхность не только диффеоморфна, но и проективно эквивалентна сфере S^2*. Действительно, система параметрических уравнений $\mathbb{C}P^1$-поверхности в $\mathbb{R}P^3$ запишется в виде

$$U^{00} = |z^0|^2, \quad U^{11} = |z^1|^2, \quad U^{10} = |z^1||z^0|\cos\alpha, \quad V^{10} = |z^1||z^0|\sin\alpha.$$

Здесь $(U^{00}, U^{11}, U^{10}, V^{10})$ — проективные координаты в $\mathbb{R}P^3$; (z^0, z^1) — комплексные однородные координаты на $\mathbb{C}P^1$, $\alpha = \operatorname{Arg} z^1 - \operatorname{Arg} z^0$. Так как $|z^0|^2 + |z^1|^2 \neq 0$, то обозначив $|z^0|^2 + |z^1|^2 = \rho^2$, можем положить $|z^0| = \rho\cos\beta$, $|z^1| = \rho\sin\beta$, где $\rho > 0$. Рассмотрим проективное преобразование в $\mathbb{R}P^3$:

$$X^0 = U^{00} + U^{11}; \quad X^1 = U^{00} - U^{11}; \quad X^2 = 2U^{10}; \quad X^3 = 2V^{10}.$$

В новых координатах получим

$$X^0 = \rho^2, \quad X^1 = \rho^2\cos 2\beta, \quad X^2 = \rho^2 \sin 2\beta \cos\alpha, \quad X^3 = \rho^2 \sin 2\beta \sin\alpha.$$

Следовательно,

$$X^1X^1 + X^2X^2 + X^3X^3 = X^0X^0.$$

В неоднородной системе координат $x = X^1/X^0$, $y = X^2/X^0$, $z = X^3/X^0$ мы получаем стандартную сферу в $\mathbb{R}^3$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Замечание. В общем случае $\mathbb{C}P^n$-поверхность является алгебраическим многообразием степени $2^{n(2n-1)}$, так как она является пересечением $n(2n-1)$ гиперквадрик в $P(\widetilde{W})$. Здесь $n(2n-1)$ — количество независимых соотношений Плюккера.

2. КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА НА $\mathbb{C}P^n$-ПОВЕРХНОСТИ

Перейдем к интерпретации основных инвариантов кэлеровой геометрии на $\mathbb{C}P^n$ в терминах построенного вложения. Начнем с комплексной структуры. Оказывается, что комплексная структура на $\mathbb{C}P^n$-поверхности естественным образом индуцируется второй фундаментальной формой вложения σ.

Пусть $\boldsymbol{X} = p(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{U}$, где вектор-функция $\boldsymbol{x}$ определяется уравнением (5). Точка $\boldsymbol{X}$ порождается одномерным подпространством $\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}\}$ векторного пространства V. Пусть

$$V'_{\boldsymbol{X}} = \mathcal{L}\bigl\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_a + u^b\boldsymbol{e}_{ab} + v^b\boldsymbol{\epsilon}_{ba},\ \boldsymbol{\epsilon}_a + v^b\boldsymbol{e}_{ab} + u^b\boldsymbol{\epsilon}_{ab}\bigr\}.$$

Тогда $T_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U} \equiv V'_{\boldsymbol{X}}/\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}\}$ — касательное пространство поверхности $\mathfrak{U}$ в точке $\boldsymbol{X}$, $N_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U} \equiv V/V'_{\boldsymbol{X}}$ — нормальное пространство поверхности $\mathfrak{U}$ в точке $\boldsymbol{X}$,

$$\varphi(\xi,\,\eta)_{\boldsymbol{X}} = V'_{\boldsymbol{X}} + 2\bigl(du^a \odot du^b + dv^a \odot dv^b\bigr)(\xi,\eta)\boldsymbol{e}_{ab} + 4dv^{[a} \odot du^{b]}(\xi,\eta)\boldsymbol{\epsilon}_{ab}$$

— *вторая фундаментальная форма* вложения σ, рассматриваемая как отображение $\varphi : T_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U} \odot T_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U} \to N_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U}$. Здесь и далее символ $\odot$ обозначает симметрическое тензорное произведение[1].

Теорема 2. *Пусть $\eta, \xi \in T_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U}$ — касательные векторы в некоторой точке $\boldsymbol{X}$ многообразия $\mathfrak{U} = \sigma(\mathbb{C}P^n)$. Тогда следующие два условия равносильны*:

(A) $\varphi(\xi,\eta) = 0$, $\varphi(\xi,\xi) = \varphi(\eta,\eta)$;

---

[1] Пример: $\omega \odot \theta(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\bigl(\omega(\xi)\theta(\eta) + \omega(\eta)\theta(\xi)\bigr)$.

(B) $\xi = \epsilon \boldsymbol{J}\eta$, *где* $\boldsymbol{J}$ *— оператор стандартной комплексной структуры в* $2n$*-мерном арифметическом пространстве,* $\epsilon = \pm 1$.

Доказательство. Пусть $du^a(\xi) = a^a$, $dv^a(\xi) = b^a$, $du^a(\eta) = x^a$, $dv^a(\eta) = y^a$. В координатах условие (A) перепишется так:

$$\begin{gathered} a^a x^b + a^b x^a + b^a y^b + b^b y^a = 0; \quad a^a y^b - a^b y^a = b^a x^b - b^b x^a; \\ a^a a^b + b^a b^b = x^a x^b + y^a y^b; \quad x^a y^b - x^b y^a = a^a b^b - a^b b^a. \end{gathered} \tag{6}$$

Интерпретируя (6) как систему алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных x^a и y^a, будем искать ее общее решение. Для этого рассмотрим следующие четыре вектора в $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{a} = (a^a)$, $\boldsymbol{b} = (b^a)$, $\boldsymbol{x} = (x^a)$, $\boldsymbol{y} = (y^a)$. Теперь систему (6) можно переписать в тензорном виде:

$$\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{y} = 0; \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x}; \tag{7b}$$

$$\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \odot \boldsymbol{y}; \tag{7c}$$

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}. \tag{7d}$$

1. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не пропорциональны. Тогда $\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}$ — линейно независимые симметрические тензоры в $\mathbb{R}^n \odot \mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ — ненулевой тензор из $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$. Тензоры $\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ образуют базис четырехмерного векторного пространства $\mathcal{L}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \otimes \mathcal{L}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Из (7d) следует

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}, \quad \alpha\mu - \lambda\beta = 1. \tag{8}$$

Из (7b), используя (8), найдем $\mu \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$. Поэтому $\mu = -\alpha$, и система (8) примет вид

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}, \quad \alpha^2 + \lambda\beta + 1 = 0. \tag{9}$$

Теперь из (7a) и (9) получим

$$\alpha \boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{b} + (\beta + \lambda) \boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b} = 0.$$

Следовательно, $\alpha = 0$, $\lambda = -\beta$. Система (9) перепишется в виде:

$$\boldsymbol{x} = \beta \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = -\beta \boldsymbol{a}, \quad \beta^2 = 1.$$

Итак, векторы ξ и η связаны соотношением

$$\eta = \epsilon \boldsymbol{J} \xi, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Таким образом, справедливо условие (B).

2. Пусть $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} \neq 0$. Из (7a) получаем $\boldsymbol{b} \odot (\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 0$. Следовательно, $\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{y} = -\lambda \boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Используя (7b) и (10) получим, что $(\lambda^2 + 1) \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x} = 0$. Поэтому $\boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{b}$. Теперь равенство (7c) примет вид

$$(\lambda^2 + 1)(\mu^2 - 1) \boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{b} = 0.$$

Тогда $\mu^2 = 1$. Итак, имеем

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = -\lambda\mu \boldsymbol{b}, \quad \mu^2 = 1.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = -\mu \boldsymbol{a}, \quad \mu^2 = 1,$$

и мы вновь приходим к условию (B).

3. Случай $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \neq 0$, доказывается по аналогии со случаем 2 после замены $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$.

Заметим, что при $\boldsymbol{b} = 0$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$ доказательство вытекает из случая 3 при $\lambda = 0$. Точно так же при $\boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{b} \neq 0$ доказательство получается из случая 2 при $\lambda = 0$.

4. Пусть $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} = 0$. Уравнения (7a) и (7b) удовлетворяются тождественно, а (7c) и (7d) принимают вид

$$\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \odot \boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = 0.$$

Эта система имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$, и условие (B) вновь выполняется. □

Замечание. Следует отметить, что вторая фундаментальная форма вложения не зависит от метрики и является проективным инвариантом вложения. Это согласуется с тем фактом, что комплексная структура, которая индуцируется на $\mathbb{C}P^n$-поверхности второй фундаментальной формой вложения, является не $U(n+1)$-инвариантом, а инвариантом группы $GL(n+1, \mathbb{C})$.

3. Каноническая кэлерова метрика на $\mathbb{C}P^n$-поверхности

Геометрическую интерпретацию кэлеровой метрики на $\mathbb{C}P^n$-поверхности дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\sigma : \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^{n^2+2n}$ — вложение $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$ в качестве $\mathbb{C}P^n$-поверхности $\mathfrak{U}$. Если на $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$ фиксирована эллиптическая метрика постоянной секционной кривизны $1/r^2$, то первая квадратичная форма вложения σ совпадает с метрикой Фубини—Штуди постоянной голоморфной секционной кривизны $2/r^2$.*

Доказательство. Стандартная метрика на $\mathbb{C}^{n+1}_{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R}^{2n+2} \equiv W$ порождает естественную положительно определенную метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на пространстве кососимметрических тензоров $\widetilde{W} = W \wedge W$:

$$\langle e_u \wedge e_v, e_p \wedge e_q \rangle = \delta_{up}\delta_{vq} - \delta_{uq}\delta_{vp}.$$

Пусть $S(r)$ — гиперсфера радиуса r в $\widetilde{W}$. Ограничение метрики g на сферу $S(r)$ определяет на $S(r)$ метрику постоянной кривизны $1/r^2$, которая является первой квадратичной формой вложения $S(r)$ в $\widetilde{W}$. Отождествляя $P(\widetilde{W})$ с $S(r)/\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ и учитывая тот факт, что $p : S(r) \to P(\widetilde{W})$ — универсальное накрытие, приходим к выводу, что на $P(\widetilde{W})$ существует единственная метрика (*эллиптическая метрика* кривизны $1/r^2$), для которой накрывающее отображение p является локальной изометрией. Эту метрику будем снова обозначать через $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Найдем ограничение метрики g на подмногообразие $\mathfrak{U} = \sigma(\mathbb{C}P^n)$, т.е. найдем первую квадратичную форму ds_r^2 вложения $\sigma : \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \to P(V) \subset P(\widetilde{W})$, где $V = \ker(\mathrm{id} - \widetilde{\boldsymbol{J}})$ — подпространство в $\widetilde{W}$. Имеем:

$$ds_r^2 = r^2 \left\langle d\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|},\ d\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \right\rangle = r^2 \left\langle d\frac{\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}|},\ d\frac{\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}|} \right\rangle.$$

В локальных координатах $\xi^a = \boldsymbol{z}^a/\boldsymbol{z}^0 = u^a + iv^a$, соответствующих карте $\mathbb{C}A_0^{\mathbb{R}}$, после вычислений найдем:

$$ds_r^2 = 2r^2 \cdot \frac{\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \bar{\xi}^k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} d\xi^k d\bar{\xi}^k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}^k d\xi^k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k d\bar{\xi}^k\right)}{\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \bar{\xi}^k\right)^2}. \tag{11}$$

Следовательно, *первая квадратичная форма вложения σ является метрикой Фубини–Штуди* голоморфной секционной кривизны $C = 2/r^2$ (см. [2, теорема 7.8]) □

Замечание. Используя изоморфизмы $N_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U} \equiv V/V'_{\boldsymbol{X}} \equiv (V'_{\boldsymbol{X}})^{\perp}$, где $(V'_{\boldsymbol{X}})^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства $V'_{\boldsymbol{X}}$, форму φ можно определить соотношением

$$\varphi(\xi, \eta) = \big(d(d\boldsymbol{x}(\xi))(\eta)\big)^{\perp},$$

где символ $\perp$ означает проекцию на нормальное подпространство $N_{\boldsymbol{X}}\mathfrak{U}$. Тогда, производя вычисления, найдем

$$ds_r^2(\xi, \xi) = r\sqrt{\langle \varphi(\xi, \xi),\ \varphi(\xi, \xi) \rangle} = r|\varphi(\xi, \xi)|. \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, в частности, что *метрика Фубини—Штуди* ds *на* $\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}$ *единичной голоморфной кривизны (при* $r = 1$*) равна длине второй фундаментальной формы* $\mathbb{C}P^n$*-поверхности*:

$$ds^2(\xi, \xi) = |\varphi(\xi, \xi)|.$$

4. АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ $\mathbb{C}P^n$-ПОВЕРХНОСТИ

Приведем конструкцию, позволяющую дать альтернативное определение $\mathbb{C}P^n$-поверхности. Пусть $G = U(n+1)$ — группа Ли унитарных матриц порядка $n+1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$ — ее алгебра Ли, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление,

$$\mathrm{Ad}_g \xi = g\xi g^{-1} \quad \forall g \in G,\ \forall \xi \in \mathfrak{g},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — метрика Киллинга [1] на $\mathfrak{g}$,

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\operatorname{tr}(\xi \cdot \eta) \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Пусть теперь $\pi_0 : G \to G/U(1) \times U(n) \equiv \mathbb{C}P^n$ — каноническая проекция, $p : \mathfrak{g} \to P(\mathfrak{g}) \equiv \mathbb{R}P^{n^2+2n}$ — отображение проективизации, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ — каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_1$ — алгебры Ли групп $U(1)$ и $U(n)$, рассматриваемые как подалгебры в $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$ при стандартном вложении, а $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение подалгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ относительно метрики Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$. В явном виде:

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{a}^{\mathsf{T}} \\ -\bar{\boldsymbol{a}} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n \right\}, \quad \mathfrak{h}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathfrak{u}(1) \right\}, \quad \mathfrak{h}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{A} \in \mathfrak{u}(n) \right\}.$$

Ясно, что

$$\begin{gathered} \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{h}_0 \rangle = \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{h}_1 \rangle = \langle \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1 \rangle = 0, \\ [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] = 0, \quad [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_1, \quad [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1] = 0, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}. \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{h}_0) : g \mapsto \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{h}_0) = g\mathfrak{h}_0 g^{-1}$$

— отображение орбиты подпространства $\mathfrak{h}_0$, а

$$\hat{f} = p \circ \mathrm{Ad}(\mathfrak{h}_0) : G \to P(\mathfrak{g}) \equiv \mathbb{R}P^{n^2+2n}$$

— индуцированное отображение. Непосредственная проверка показывает, что для каждой точки $Z = \pi_0(g) \in \mathbb{C}P^n$ отображение $\hat{f}$ постоянно на $\pi_0^{-1}(Z)$. Поэтому корректно определено отображение

$$f : \mathbb{C}P^n \to P(\mathfrak{g}) \equiv \mathbb{R}P^{n^2+2n},$$

замыкающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{Ad}(\mathfrak{h}_0)"] \arrow[d, "\pi_0"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{C}P^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^{n^2+2n} \end{tikzcd}$$

Если обозначить через $X^{jk} = \mathrm{Re}\, T^{jk}$ и $Y^{jk} = \mathrm{Im}\, T^{jk}$ однородные координаты в $P(\mathfrak{g})$, то отображение f будет иметь следующее координатное представление:

$$T^{jk}\big(f \circ \pi_0(\boldsymbol{z})\big) = iz^j \bar{z}^k.$$

Ясно, что f — вещественно-аналитическое вложение. При этом $f(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}) = p \circ \mathrm{Ad}_G(\mathfrak{h}_0)$.

Чтобы выяснить, как связаны вложения f и σ, обозначим через V пространство эрмитовых матриц порядка $n+1$. Как отмечалось ранее, вложение σ можно рассматривать как отображение $\sigma : \mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}} \to P(V)$, определяемое системой

$$Z^{jk}\big(\sigma \circ \pi(\boldsymbol{z})\big) = z^j \bar{z}^k.$$

---

[1] Эта метрика отличается от стандартной метрики Киллинга на постоянный отрицательный множитель.

Рассмотрим отображение $\boldsymbol{j} : V \to \mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$, определяемое соотношением $\boldsymbol{j}(Z) = iZ$. Ясно, что $\boldsymbol{j}$ — изоморфизм $\mathbb{R}$-линейных пространств, который индуцирует проективную эквивалентность $\hat{\boldsymbol{j}}$ пространств $P(V)$ и $P(\mathfrak{g})$. При этом $\hat{\boldsymbol{j}} \circ \sigma = f$ и, следовательно,

$$\hat{\boldsymbol{j}} \circ \sigma\bigl(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}\bigr) = f\bigl(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}}\bigr).$$

Легко видеть, что относительно эллиптических метрик одинаковой секционной кривизны на $P(V)$ и $P(\mathfrak{g})$ отображение $\hat{\boldsymbol{j}}$ является изометрией. Следовательно, как и для вложения σ, *первая фундаментальная форма вложения f является метрикой Фубини—Штуди*. Более того, так как невырожденное отображение $\hat{\boldsymbol{j}}$ является проективным, то вторые фундаментальные формы вложений f и σ проективно эквивалентны. Следовательно, *комплексная структура на $f(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}})$ может быть интерпретирована точно так же, как и комплексная структура на $\sigma(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}})$.*

Таким образом, с точки зрения присоединенного представления группы Ли $U(n+1)$ $\mathbb{C}P^n$-поверхность можно альтернативно определить в проективном пространстве $P\bigl(\mathfrak{u}(n+1)\bigr)$ как орбиту, порожденную косоэрмитовыми матрицами ранга 1. Такое определение $\mathbb{C}P^n$-поверхности позволяет дать интерпретацию ее геометрических инвариантов в терминах алгебр Ли.

5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИНВАРИАНТОВ $\mathbb{C}P^n$-ПОВЕРХНОСТИ В ТЕРМИНАХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ — каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$, где $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_1$ — алгебры Ли групп $U(1)$ и $U(n)$, рассматриваемые как подалгебры в $\mathfrak{u}(n+1)$ при стандартном вложении, а $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение подалгебры $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ относительно метрики Киллинга $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{U} = f(\mathbb{C}P^n_{\mathbb{R}})$ — $\mathbb{C}P^n$-поверхность, рассматриваемая как орбита $p \circ \mathrm{Ad}_G(\mathfrak{h}_0) \subset P(\mathfrak{g})$, порожденная присоединенным представлением группы Ли $G = U(n+1)$. Обозначим через $Z = f \circ \pi_0(g) = p\bigl(\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{h}_0)\bigr)$ текущую точку $\mathbb{C}P^n$-поверхности, а через Z_0 — точку $f \circ \pi_0(e) = p(\mathfrak{h}_0)$. И пусть ξ_0 — фиксированный элемент алгебры ли $\mathfrak{h}_0$, для которого $|\xi_0| = \sqrt{\langle\xi_0,\xi_0\rangle} = r$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathrm{Ad}_g \mathfrak{m} = T_Z\mathfrak{U}$ — *касательное пространство $\mathbb{C}P^n$-поверхности в точке Z. В частности, $\mathfrak{m} = T_{Z_0}\mathfrak{U}$.*
2) $p\bigl(\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_0)\bigr) = PT_Z\mathfrak{U}$ — *проективное касательное пространство $\mathbb{C}P^n$-поверхности в точке Z. В частности, $p(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_0) = PT_{Z_0}\mathfrak{U}$.*
3) $\mathrm{Ad}_g \mathfrak{h}_1 = N_Z\mathfrak{U}$ — *нормальное пространство $\mathbb{C}P^n$-поверхности в точке Z. В частности, $\mathfrak{h}_1 = N_{Z_0}\mathfrak{U}$.*
4) $ds^2(\xi,\eta) = \bigl\langle[\xi,\xi_0],[\eta,\xi_0]\bigr\rangle$ — *первая фундаментальная форма вложения f (совпадающая с метрикой Фубини—Штуди на $\mathbb{C}P^n$ постоянной голоморфной секционной кривизны $2/r^2$). Здесь $\xi,\eta \in \mathfrak{m}$.*
5) $\varphi(\xi,\eta)_Z = \mathrm{Ad}_g\,\bigl[\eta,[\xi,\xi_0]\bigr]^{\perp}$ — *вторая фундаментальная форма вложения в точке Z. В частности, $\varphi(\xi,\eta)_{Z_0} = \bigl[\eta,[\xi,\xi_0]\bigr]^{\perp}$. Здесь $\xi,\eta \in \mathfrak{m}$, а символ $\perp$ означает проекцию на $\mathfrak{h}_1$.*

Доказательство. Присоединенное представление сохраняет метрику Киллинга, поэтому все точки $\mathrm{Ad}_g\,\xi_0$ лежат на гиперсфере $S^{n^2+2n}(r) \subset \mathfrak{g}$. Так как отображение проективизации p, ограниченное на сферу, является двулистным накрытием и локальной изометрией, то при локальном рассмотрении мы можем отождествить точку $Z = p(\mathrm{Ad}_g\,\mathfrak{h}_0) = p(\mathrm{Ad}_g\,\xi_0) \in P(\mathfrak{g})$ с порождающим ее вектором $\mathrm{Ad}_g\,\xi_0$, где

$$\xi_0 = \pm r \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Omega = g^{-1}dg$, где $g \in G = U(n+1)$. Тогда Ω — левоинвариантная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на G. Если $\xi \in \mathfrak{g}$ — левоинвариантное векторное поле на G, то $\Omega(\xi)_g = \xi_e$. Пусть $\Omega = \omega + \Omega^0 + \Omega^1$ — инвариантное представление формы Ω, соответствующее каноническому разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$.

Дифференцируя тождество $Z(g) = g\xi_0 g^{-1}$, найдем:

$$\begin{aligned} dZ(g) &= dg\xi_0 g^{-1} + g\xi_0 dg^{-1} = dg\xi_0 g^{-1} + g\xi_0(-g^{-1}dgg^{-1}) = \\ &= gg^{-1}dgg^{-1}g\xi_0 g^{-1} - g\xi_0 g^{-1}gg^{-1}dgg^{-1} = (g\Omega g^{-1})(g\xi_0 g^{-1}) - (g\xi_0 g^{-1})(g\Omega g^{-1}) = \\ &= \operatorname{Ad}_g \Omega \cdot \operatorname{Ad}_g \xi_0 - \operatorname{Ad}_g \xi_0 \cdot \operatorname{Ad}_g \Omega = [\operatorname{Ad}_g \Omega, \operatorname{Ad}_g \xi_0] = \operatorname{Ad}_g[\Omega, \xi_0] = \\ &= \operatorname{Ad}_g[\omega + \Omega^0 + \Omega^1, \xi_0] = \operatorname{Ad}_g[\omega, \xi_0]. \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $dg^{-1} = -g^{-1}dgg^{-1}$, вытекающее из тождества $gg^{-1} = e$. Далее, так как $dZ(g)(\xi) = g[\xi, \xi_0]g^{-1}$, то

$$\begin{aligned} d\big(dZ(g)(\xi)\big) &= dg[\xi, \xi_0]g^{-1} + g[\xi, \xi_0]dg^{-1} = dg[\xi, \xi_0]g^{-1} + g[\xi, \xi_0](-g^{-1}dgg^{-1}) = \\ &= gg^{-1}dg[\xi, \xi_0]g^{-1} - g[\xi, \xi_0]g^{-1}dgg^{-1} = g\Omega[\xi, \xi_0]g^{-1} - g[\xi, \xi_0]\Omega g^{-1} = \\ &= g\big[\Omega[\xi, \xi_0]\big]g^{-1} = \operatorname{Ad}_g \big[\Omega, [\xi, \xi_0]\big] = \operatorname{Ad}_g \big[\omega + \Omega^0 + \Omega^1, [\xi, \xi_0]\big] = \operatorname{Ad}_g \big[\omega, [\xi, \xi_0]\big]. \end{aligned}$$

Итак,

$$dZ(g) = \operatorname{Ad}_g[\omega, \xi_0], \quad d\big(dZ(g)(\xi)\big) = \operatorname{Ad}_g \big[\omega, [\xi, \xi_0]\big], \quad \forall \xi \in \mathfrak{m}. \tag{14}$$

Дальнейшее доказательство следует из (13), (14) и тождества $[\mathfrak{m}, \xi_0] = \mathfrak{m}$, которое легко проверяется непосредственными вычислениями. Заметим, что симметричность формы $\varphi(\xi, \eta)_Z = \operatorname{Ad}_g \big[\eta, [\xi, \xi_0]\big]^{\perp}$ является следствием тождества Якоби:

$$\big[\eta, [\xi, \xi_0]\big] + \big[\xi, [\xi_0, \eta]\big] + \big[\xi_0, [\eta, \xi]\big] = 0.$$

Действительно, если $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$, то $\big[\xi_0, [\eta, \xi]\big] = 0$, так как $[\eta, \xi] \in \mathfrak{h}$, $\xi_0 \in \mathfrak{h}_0$, а $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_0] = 0$. Следовательно,

$$\varphi(\xi, \eta)_Z = \operatorname{Ad}_g \big[\eta, [\xi, \xi_0]\big]^{\perp} = -\operatorname{Ad}_g \big[\xi, [\xi_0, \eta]\big]^{\perp} = \operatorname{Ad}_g \big[\xi, [\eta, \xi_0]\big]^{\perp} = \varphi(\eta, \xi)_Z.$$

Теорема доказана. ☐

6. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $\mathbb{C}P^n$-ПОВЕРХНОСТИ

Построенное вложение σ позволяет моделировать геометрию комплексного проективного пространства на вещественно-аналитической поверхности.

Теорема 5. *Любое m-мерное ($m \leqslant n$) полное вполне геодезическое антиинвариантное подмногообразие на $\mathbb{C}P^n$-поверхности есть многообразие Веронезе, диффеоморфное $\mathbb{R}P^m$, которое может быть получено как пересечение $\mathbb{C}P^n$-поверхности и $(m^2+3m)/2$-мерного подпространства в $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$.*

Теорема 6. *Любое m-мерное (размерность комплексная) полное вполне геодезическое инвариантное подмногообразие на $\mathbb{C}P^n$-поверхности есть $\mathbb{C}P^m$-поверхность, которая может быть получена как пересечение $\mathbb{C}P^n$-поверхности и (m^2+2m)-мерного подпространства в $\mathbb{R}P^{n^2+2n}$.*

Доказательство теорем 5 и 6 основывается на классификации антиинвариантных и инвариантных подмногообразий, приведенной в [5, теорема 1.1], и получается при помощи явных уравнений вложения σ. Заметим, что здесь удобнее использовать конструкцию вложения, приведенную в разделе 1.

Замечание. Рассматривая синтетическое определение проективного пространства (см. [6, гл. VI]), все аксиомы комплексного проективного пространства могут быть интерпретированы на $\mathbb{C}P^n$-поверхности. Например, *при $m < n$ через любые m точек общего положения, принадлежащих $\mathbb{C}P^n$-поверхности, проходит единственная $\mathbb{C}P^{m-1}$-поверхность, являющаяся полным вполне геодезическим инвариантным подмногообразием.* В частности, через любые две точки, принадлежащие $\mathbb{C}P^n$-поверхности, проходит единственная $\mathbb{C}P^1$-поверхность. Кроме того, несложно проверить следующее проективное свойство $\mathbb{C}P^n$-поверхности. *Пусть X и Y — пара различных точек $\mathbb{C}P^n$-поверхности $\mathfrak{U}$, а $PT_X\mathfrak{U}$ и $PT_Y\mathfrak{U}$ — касательные проективные плоскости к $\mathbb{C}P^n$-поверхности в этих точках. Тогда пересечением плоскостей $PT_X\mathfrak{U}$ и $PT_Y\mathfrak{U}$ является прямая,* *полярная для прямой $[XY]$ относительно двумерной квадрики, являющейся единственной $\mathbb{C}P^1$-поверхностью, проходящей через точки X и Y.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. Т. 1. — М.: Мир, 1990.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
3. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
4. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1988.
5. *Яно К., Кон М.* CR-подмногообразия в кэлеровом и сасакиевом многообразиях. — М.: Наука, 1990.
6. *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. Т. 1. — М.: ИЛ, 1954.
7. *Lichnerowicz A.* Geómetŕie des groupes de transformations. — Paris: Dunod. 1958.
8. *Nash J. F.* The imbedding problem for Rimannian manifolds// Ann. Math. — 1965. — *63.* — С. 20–63.
9. *Onishchik A. L.* Topology of transitive transformation groups. — Leipzig–Berlin–Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1994.

Современная математика и ее приложения. Том 31 (2005). С. 13–52

УДК 514.7, 517.2, 517.9

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ SIN-ГОРДОНА И ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2005 г. **А. Г. ПОПОВ, Е. В. МАЕВСКИЙ**

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 1512–1712

1. Геометрические основания к исследованию уравнения sin-Гордона

В геометрии уравнение sin-Гордона связано с существованием на поверхностях в $\mathbb{E}^3$ специальных сетей, называемых чебышевскими. Эти сети характеризуются тем условием, что *в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны равны*. Чебышевскую сеть образуют, например, нити куска ткани, натянутой на поверхность [35]. Пусть линии чебышевской сети взяты за координатные так, что координаты u и v являются их естественными параметрами (такие координаты будем называть *чебышевскими*) — в этом случае первая квадратичная форма поверхности принимает вид

$$Q(u,v) = du^2 + 2\cos z(u,v)dudv + dv^2,$$

где $z(u,v)$ — угол, под которым пересекаются линии чебышевской сети в точке (u,v). Пусть гауссова кривизна поверхности в этих координатах равна $K(u,v)$. П. Л. Чебышев показал, что угол $z(u,v)$ удовлетворяет *уравнению Чебышева*

$$z_{uv} = -K(u,v)\sin z.$$

На псевдосферической поверхности ($K \equiv -1$) чебышевскую сеть образуют асимптотические линии. Чтобы подчеркнуть выбор в качестве координат (u,v) естественных параметров этих линий, а также то, что в качестве чебышевской сети взята именно сеть асимптотических, будем называть координаты (u,v) *асимптотическими чебышевскими координатами*. Обратим внимание на то, что при этом фиксируется определенный вид обеих квадратичных форм поверхности. Сетевой угол $z(u,v)$ в этом случае должен удовлетворять уравнению sin-Гордона

$$z_{uv} = \sin z. \tag{1.1}$$

Псевдосферическая поверхность имеет метрику кривизны $K \equiv -1$, поэтому эту поверхность можно рассматривать как *изометрическое погружение* фрагмента плоскости Лобачевского Λ^2 в $\mathbb{E}^3$. При этом подразумевается, что отображение $\mathbf{r}$, переводящее каждую точку (u,v) некоторой области $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ в точку поверхности, трижды непрерывно дифференцируемо (*регулярность* погружения) и обладает тем свойством, что векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ линейно независимы, т.е.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_u^2 & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v^2 \end{vmatrix} = \sin z \neq 0$$

всюду в области $\mathcal{U}$.

В следующей фундаментальной теореме [4] фактически утверждается невозможность регулярного изометрического погружения всей плоскости Лобачевского Λ^2 в $\mathbb{E}^3$.

Теорема 1.1 (Д. Гильберт). *В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны.*

Доказательство теоремы (см. [4, 26]) опирается на следующее утверждение об уравнении sin-Гордона, также принадлежащее Гильберту.

Лемма 1.1. *Любое гладкое решение уравнения sin-Гордона достигает значений, кратных π.*

Псевдосферическая поверхность с заданным сетевым углом асимптотической чебышевской сети может быть «склеена» из своих асимптотических линий. Э. Г. Позняк доказал [22] следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть функция $z(u,v) \in C^4(\mathbb{R}^2)$ — решение уравнения sin-Гордона. Тогда существует такая, заданная на всей плоскости (u,v), вектор-функция $\mathbf{r}(u,v)$, что график этой функции в любой области, где $z(u,v) \neq \pi n$, представляет собой поверхность постоянной отрицательной кривизны $K \equiv -1$. При этом координатная сеть (u,v) на указанной поверхности является сетью асимптотических линий, а $z(u,v)$ — сетевой угол. Значениям $z = \pi n$ соответствуют особенности (ребра, острия) поверхности.*

2. Методы интегрирования уравнения sin-Гордона

Этот раздел посвящен рассмотрению различных методов построения решений уравнения sin-Гордона, рассматриваемых в контексте задач исследования псевдосферических поверхностей. В начале первой части формулируются задачи Гурса и Коши для уравнения sin-Гордона, и доказывается существование и единственность решения. Излагается метод разделения переменных, позволяющий получить важные с геометрической точки зрения решения уравнения sin-Гордона. Обсуждается возможность применения метода малого параметра к исследованию специальных типов решений уравнения sin-Гордона, связанных с характерными достаточно изученными классами псевдосферических поверхностей. Исследуются классы автомодельных решений типа бегущих волн и переменной $t = uv$. Анализируются соотношения, определяющие преобразование Бэклунда для уравнения sin-Гордона, формула суперпозиции Бьянки и ее обобщение. Дается определение класса солитонных решений и проводится их классификация. Обсуждается следствие тождества тройной секущей Фея, позволяющее получать конечнозонные решения уравнения sin-Гордона в терминах тета-функций Римана.

2.1. Задача Гурса для уравнения sin-Гордона. Сформулируем для уравнения sin-Гордона (1.1) задачу Гурса:

$$\begin{cases} z_{uv} = \sin z, \\ z(u_0, v) = \psi(v), \\ z(u, v_0) = \varphi(u), \end{cases} \tag{2.1}$$

с условием $\psi(v_0) = \varphi(u_0)$, где $\psi(v)$, $\varphi(u)$ — заданные функции, определенные при $v \geqslant v_0$ и $u \geqslant u_0$ соответственно.

Не ограничивая общности можно провести замену $u - u_0 \to u$, $v - v_0 \to v$ и считать $u_0 = 0$, $v_0 = 0$. В этих предположениях справедлива следующая теорема Л. Бьянки [43] о существовании и единственности решения задачи Гурса.

Теорема 2.1. *Если функции $\varphi(u) \in C^n[0, u_1]$, $\psi(v) \in C^n[0, v_1]$, $n \geqslant 2$, то существует единственное решение $z(u, v) \in C^n([0, u_1] \times [0, v_1])$ задачи Гурса* (2.1). *Это решение может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности $\{z_k(u, v)\}$, рекуррентно заданной следующими соотношениями*:

$$z_0(u, v) = \varphi(u) + \psi(v) - \varphi(0), \tag{2.2}$$

$$z_{k+1}(u, v) = z_0(u, v) + \int\limits_0^u \int\limits_0^v \sin z_k(\xi, \eta) d\eta d\xi. \tag{2.3}$$

Справедлива оценка

$$|z(u, v)| \leqslant |z_0(u, v)| + (e^{uv} - 1) \min(1, m(u, v)), \tag{2.4}$$

где $m(u, v) = \max\{|z_0(\xi, \eta)| : 0 \leqslant \xi \leqslant u,\ 0 \leqslant \eta \leqslant v\}$.

Доказательство. Редуцируем задачу (1.1), (2.1) к интегральному уравнению

$$z(u, v) = \varphi(u) + \psi(v) - \varphi(0) + \int\limits_0^u \int\limits_0^v \sin z(\xi, \eta) d\eta d\xi. \tag{2.5}$$

Это интегральное уравнение эквивалентно задаче Гурса в следующем смысле. Непрерывная на $[0, u_1] \times [0, v_1]$ функция $z(u, v)$, являющаяся его решением, обладает непрерывной смешанной производной $z_{uv}(u, v)$ и удовлетворяет задаче Гурса. Напротив, классическое решение задачи Гурса, непрерывное на $[0, u_1] \times [0, v_1]$, удовлетворяет интегральному уравнению (2.5).

Будем строить решение интегрального уравнения (2.5) методом последовательных приближений. Для этого, принимая обозначения (2.2), (2.3), представим $z_n(u, v)$ в виде суммы

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \tag{2.6}$$

и оценим по модулю слагаемые в этой сумме. Имеем:

$$|z_1 - z_0| = \left|\int\limits_0^u \int\limits_0^v \sin z_0 d\eta d\xi\right| \leqslant \min(1, \max|z_0(u,v)|)\, uv,$$

$$|z_{k+1} - z_k| = \left|\int\limits_0^u \int\limits_0^v 2\sin\frac{z_k - z_{k-1}}{2}\cos\frac{z_k + z_{k-1}}{2} d\eta d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^u \int\limits_0^v 2\left|\sin\frac{z_k - z_{k-1}}{2}\right| d\eta d\xi \leqslant \int\limits_0^u \int\limits_0^v |z_k - z_{k-1}|\, d\eta d\xi,$$

из чего получаем

$$|z_k - z_{k-1}| \leqslant \min(1, m(u,v))\,\frac{(uv)^k}{k!^2}. \tag{2.7}$$

Переходя в (2.6) к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что решение задачи Гурса существует, поскольку ряд

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(z_k - z_{k-1}), \tag{2.8}$$

в силу полученной оценки (2.7), сходится равномерно на любом компакте. Неравенство (2.4) в формулировке теоремы следует из (2.7).

Из соотношения (2.3) видно, что если $z_0(u,v) \in C^n([0,u_1]\times[0,v_1])$ и $z_k(u,v) \in C^n([0,u_1]\times[0,v_1])$, то $z_{k+1}(u,v) \in C^n([0,u_1] \times [0,v_1])$. Поэтому, в силу равномерной сходимости ряда (2.8), класс гладкости решения $z(u,v)$ совпадает с классом гладкости функции $z_0(u,v)$.

Докажем, что решение $z(u,v)$, определенное формулой (2.8) — единственное решение задачи Гурса. Пусть $\zeta(u,v)$ — другое решение интегрального уравнения (2.5). Вычитая (2.3) из тождества (2.5), записанного для ζ, имеем

$$|\zeta - z_0| \leqslant M$$

и, соответственно,

$$|\zeta - z_{k+1}| = \left|\int\limits_0^u \int\limits_0^v 2\sin\frac{\zeta - z_k}{2}\cos\frac{\zeta + z_k}{2} d\eta d\xi\right| \leqslant \int\limits_0^u \int\limits_0^v 2\left|\sin\frac{\zeta - z_k}{2}\right| d\eta d\xi \leqslant \int\limits_0^u \int\limits_0^v |\zeta - z_{k-1}|\, d\eta d\xi.$$

Следовательно, при любом k справедливо неравенство

$$|\zeta - z_k| \leqslant M\frac{(uv)^k}{k!^2},$$

доказывающее, что разность $|\zeta - z|$ является сколь угодно малой. Следовательно, $z(u,v)$ и $\zeta(u,v)$ совпадают. ☐

2.2. Задача Коши для уравнения sin-Гордона. Задача Коши для уравнения sin-Гордона формулируется как задача с начальными значениями функции $z(u,v)$ и ее производной $z_u(u,v)$ на кривой $l : v = \omega(u)$:

$$\begin{cases} z_{uv} = \sin z, \\ z(u, \omega(u)) = \psi(u), \\ z_u(u, \omega(u)) = \varphi(u). \end{cases} \tag{2.9}$$

При этом $\omega(u) \in C^n$, $n \geqslant 2$ и $\omega'(u)$ имеет постоянный знак на отрезке $[u_1, u_2]$ (будем считать для определенности $\omega'(u) > 0$) и поэтому существует обратная функция $\omega^{-1}(u) \in C^n$. В этих предположениях справедлива следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема 2.2. *Пусть* $\psi(u) \in C^n[u_1, u_2]$ *и* $\varphi(u) \in C^{n-1}[u_1, u_2]$. *Тогда в прямоугольнике* $\Pi = [u_1, u_2] \times [\omega(u_1), \omega(u_2)]$ *существует единственное решение* $z(u, v) \in C^n(\Pi)$ *задачи Коши* (2.9).

Указанное решение может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности $\{z_k(u, v)\}$, *рекуррентно заданной следующим образом*:

$$z_0(u, v) = \psi(\omega^{-1}(v)) - \int\limits_u^{\omega^{-1}(v)} \varphi(x)dx, \tag{2.10}$$

$$z_{k+1}(u, v) = z_0(u, v) - \int\limits_u^{\omega^{-1}(v)} dx \int\limits_{\omega(x)}^{v} \sin z_k(x, y)dy. \tag{2.11}$$

Для решения задачи Коши справедлива оценка

$$|z(u, v)| \leqslant |z_0(u, v)| + (e^{(v-\omega(u))^2/2a(u,v)} - 1), \tag{2.12}$$

где вспомогательная функция $a(u, v)$ *определяется в областях над кривой и под кривой соответственно как*

$$a(u, v) = \sup\bigl\{k \mid \omega(x) \geqslant \omega(u) + k(x - u) \ \ \text{при всех} \ \ x \in [u, \omega^{-1}(v)]\bigr\}, \tag{2.13}$$

$$a(u, v) = \sup\bigl\{k \mid \omega(x) \leqslant \omega(u) + k(x - u) \ \ \text{при всех} \ \ x \in [\omega^{-1}(v), u]\bigr\}. \tag{2.14}$$

Доказательство. В областях, лежащих над кривой l, т.е. на множестве $\bigl\{(u, v) : \omega(u) < v\bigr\}$ и под кривой l, т.е. на множестве $\bigl\{(u, v) : \omega(u) > v\bigr\}$ задача (2.9) редуцируется к интегральному уравнению

$$z(u, v) = \psi(\omega^{-1}(v)) - \int\limits_u^{\omega^{-1}(v)} \varphi(x)dx - \int\limits_u^{\omega^{-1}(v)} dx \int\limits_{\omega(x)}^{v} \sin z(x, y)dy. \tag{2.15}$$

Это уравнение получается следующим образом. Проинтегрируем уравнение sin-Гордона в переменных (x, y)

$$z_{xy}(x, y) = \sin z(x, y)$$

по переменной y в пределах от $\omega(x)$ до v:

$$z_x(x, v) - z_x(x, \omega(x)) = \int\limits_{\omega(x)}^{v} \sin z(x, y)dy.$$

С учетом начального условия задачи Коши получаем

$$z_x(x, v) = \varphi(x) + \int\limits_{\omega(x)}^{v} \sin z(x, y)dy.$$

Проинтегрировав данное уравнение по переменной x в пределах от u до $\omega^{-1}(v)$, получаем интегральное уравнение (2.15). Очевидно, непрерывное на Π решение задачи Коши является также и решением интегрального уравнения (2.15). Поэтому из доказываемой ниже единственности решения этого интегрального уравнения следует, что задача Коши не может иметь более одного решения. Мы также покажем, что непрерывное решение интегрального уравнения будет также и решением задачи Коши.

Доказательство существования и единственности решения уравнения (2.15) проведем методом последовательных приближений. Отметим, что в отличие от задачи Гурса, интегрирование проводится по области с криволинейной границей. Фиксируем (u, v). Переменные будем обозначать (x, y).

Рассмотрим точку $A(u, v)$, лежащую над кривой l. Введем точки $B(u, \omega(u))$ и $C(\omega^{-1}(v), v)$. Двойной интеграл в интегральном уравнении берется по области BAC. Заключим эту область в прямоугольный треугольник BAC' с катетами BA и AC'; точка C' лежит на продолжении луча

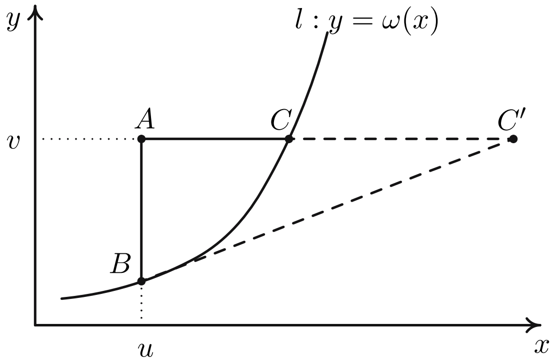

Рис. 1

AC за точку C или совпадает с C. Гипотенуза BC' определяется на плоскости (x, y) уравнением $y = a(x-u) + \omega(u) \overset{\text{def}}{=} ax + b$, где коэффициент наклона a выбран максимально возможным, но так, чтобы кривая l на промежутке $x \in [u, \omega(v)]$ лежала над гипотенузой BC' — точное выражение (2.13) для a приведено в формулировке теоремы.

Введем обозначения (2.10), (2.11). На первом шаге мажорируем интеграл по исходной области BAC интегралом по прямоугольному треугольнику BAC':

$$|z_1 - z_0| \leqslant \int\limits_u^{\omega^{-1}(v)} dx \int\limits_{\omega(x)}^{v} 1 \cdot dy \leqslant \int\limits_u^{(v-b)/a} dx \int\limits_{a(x-u)+\omega(u)}^{v} dy = \frac{(v-\omega(u))^2}{2a}.$$

Предположим, что на k-м шаге мы получили неравенство

$$|z_k - z_{k-1}| \leqslant \frac{(v-\omega(u))^{2k}}{C_k a^k};$$

тогда на следующем шаге

$$\begin{aligned}
|z_{k+1} - z_k| &\leqslant \int\limits_u^{\omega^{-1}(v)} dx \int\limits_{\omega(x)}^{v} |z_k - z_{k-1}| dy \\
&\leqslant \frac{1}{C_k a^k} \int\limits_u^{(v-b)/a} dx \int\limits_{a\cdot(x-u)+\omega(u)}^{v} (y-\omega(x))^{2k} dy = \\
&= \frac{1}{(2k+1)C_k a^k} \int\limits_u^{(v-b)/a} (v-\omega(x))^{2k+1} dx - \frac{a^{k+1}}{(2k+1)C_k} \int\limits_u^{(v-b)/a} (x-u)^{2k+1} dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{(2k+1)C_k a^k} \int\limits_u^{(v-b)/a} (v-\omega(u))^{2k+1} dx - \frac{(v-b-au)^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)C_k a^{k+1}} = \\
&= \frac{(v-\omega(u))^{2k+1}}{(2k+1)C_k a^k} \left(\frac{v-b}{a} - u\right) - \frac{(v-\omega(u))^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)C_k a^{k+1}} = \frac{(v-\omega(u))^{2k+2}}{(2k+2)C_k a^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Находим

$$|z_k - z_{k-1}| \leqslant \frac{(v-\omega(u))^{2k}}{k!(2a)^k}, \tag{2.16}$$

поэтому ряд

$$z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (z_k - z_{k-1})$$

сходится равномерно на любой компактной части области над кривой и, следовательно, представляет решение $z(u,v)$ рассматриваемого интегрального уравнения (2.15). Из оценки (2.16) следует оценка (2.12) для $z(u,v)$ в формулировке теоремы. Отметим, что геометрический смысл выражения $\dfrac{(v-\omega(u))^2}{2a(u,v)}$, находящегося в показателе экспоненты — это площадь прямоугольного треугольника BAC'.

Исследуем гладкость найденного решения $z(u,v)$ интегрального уравнения (2.15). При выполнении условий теоремы очевидно, что $z_0(u,v)\in C^n(\Pi)$. Продифференцируем выражение (2.11) по u и по v:

$$\frac{\partial z_{k+1}}{\partial u}=\frac{\partial z_0}{\partial u}+\int\limits_{\omega(u)}^{v}\sin z_k(u,y)dy,\qquad \frac{\partial z_{k+1}}{\partial v}=\frac{\partial z_0}{\partial v}-\int\limits_{u}^{\omega^{-1}(v)}\sin z_k(x,v)dx.$$

Повторное дифференцирование дает

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z_{k+1}}{\partial u^2}&=\frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2}-\omega'(u)\sin z_k(u,v),\\
\frac{\partial^2 z_{k+1}}{\partial u\partial v}&=\sin z_k(u,v),\\
\frac{\partial^2 z_{k+1}}{\partial v^2}&=\frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2}-\frac{1}{\omega'\circ\omega^{-1}(v)}\sin z_k(u,v).
\end{aligned}$$

Из полученных соотношений видно, что если $z_k(u,v)\in C^n(\Pi)$, то $z_{k+1}(u,v)\in C^n(\Pi)$. Из второго выражения или, точнее говоря, из его предельного аналога следует, что построенное решение интегрального уравнения удовлетворяет уравнению sin-Гордона, а значит и задаче Коши.

Докажем единственность решения интегрального уравнения. Пусть $\zeta(u,v)$ — другое решение интегрального уравнения (2.15). Вычитая (2.11) из тождества (2.15), записанного для ζ, имеем $|\zeta-z_0|\leqslant M$ и

$$|\zeta-z_{k+1}|\leqslant\int\limits_{u}^{\omega^{-1}(v)}dx\int\limits_{\omega(x)}^{v}|\zeta-z_k|dy.$$

Следовательно, при любом k справедливо неравенство

$$|\zeta-z_k|\leqslant M\frac{(v-\omega(u))^{2k}}{k!(2a)^k},$$

поэтому разность $|\zeta-z|$ должна быть сколь угодно мала, т.е. равна нулю.

Рассмотрение области под кривой l проводится аналогично. □

2.3. Метод разделения переменных. Следуя работам Р. Штоейервальда [60], Г. Дарбу [49] и Дж. Лэма [13], будем искать решение уравнения sin-Гордона методом разделения переменных.

Введя новые переменные

$$u=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad v=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

будем искать решение в виде

$$z(\alpha,\beta)=4\operatorname{arctg}e^{A(\alpha)+B(\beta)}.$$

Подставляя $z(\alpha,\beta)$ в уравнение sin-Гордона

$$z_{\alpha\alpha}-z_{\beta\beta}=\sin z,$$

получим уравнение:

$$(A''-B'')\operatorname{ch}(A+B)+(1+B'^2-A'^2)\operatorname{sh}(A+B)=0.\tag{2.17}$$

Дифференцируя это уравнение по α и β, исключая из выражений для производных $\operatorname{ch}(A+B)$ с помощью уравнения (2.17) и сокращая полученные уравнения на $\operatorname{sh}(A+B)$, имеем:

$$\begin{gathered}A'[(A''^2 - B''^2) + (1 + B'^2 - A'^2)^2] + A'''[1 + B'^2 - A'^2] = 0,\\ B'[(A''^2 - B''^2) + (1 + B'^2 - A'^2)^2] + B'''[1 + B'^2 - A'^2] = 0.\end{gathered}$$

Дифференцируя оба уравнения этой системы по α и β, а затем исключая выражения в квадратных скобках, получаем:

$$\begin{gathered}A'A'''' - A''A''' - 4A'^3A'' = 0,\\ B'B'''' - B''B''' - 4B'^3B'' = 0.\end{gathered}$$

Последние уравнения допускают двойное понижение порядка и сводятся к уравнениям, интегрируемым в эллиптических функциях:

$$\begin{aligned}A''^2 &= (A'^2 - a^2)(A'^2 - b^2),\\ B''^2 &= (B'^2 + 1 - a^2)(B'^2 + 1 - b^2).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Решение «общего положения» ($A' \neq \mathrm{const}$, $B' \neq \mathrm{const}$) выглядит так:

$$z(u,v) = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\left(\operatorname{cn}\{bu; \frac{a}{b}\} + b\operatorname{dn}\{bu; \frac{a}{b}\}\right)\operatorname{cn}\left\{\sqrt{1-b^2}v; \sqrt{\frac{a^2-b^2}{1-b^2}}\right\}}{\sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}\operatorname{dn}\left\{\sqrt{1-b^2}v; \sqrt{\frac{a^2-b^2}{1-b^2}}\right\}}\right),$$

где $\operatorname{cn}\{x,k\}$, $\operatorname{dn}\{x,k\}$ — эллиптические функции Якоби. В работе Штойервальда [60] это решение построено в терминах σ-функций Вейерштрасса.

Отметим частный случай $a^2 = b^2$, при котором уравнения (2.18) интегрируются в элементарных функциях:

$$A'' = A'^2 - a^2, \quad B''^2 = B'^2 + 1 - a^2.$$

Получаемое при этом решение уравнения sin-Гордона является частным случаем двухсолитонного или бризерного решения в зависимости от a и b. Этот случай будет подробно рассмотрен ниже.

2.4. Метод малого параметра. Метод малого параметра для уравнения sin-Гордона, предложен Э. Г. Позняком [24] в связи с вопросом построения локальной чебышевской сети. Метод позволяет оценивать решения с малыми граничными условиями на характеристиках.

Рассмотрим следующую задачу Гурса:

$$\begin{cases}z_{uv} = \sin z,\\ z(u,0) = \varepsilon\varphi(u),\\ z(0,v) = \varepsilon\psi(v).\end{cases}$$

Теорема 2.3. *Если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ дифференцируемы и ограничены на полупрямой $[0,+\infty)$, то справедлива следующая асимптотическая формула для решения $z(u,v)$ при $(u,v) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$:*

$$z(u,v) = -\varepsilon\left[\varphi(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k v^k}{k!^2} + \int\limits_0^u \varphi(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(\xi-u)^k(-v)^k}{k!^2}d\xi + \int\limits_0^v \psi(\eta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-u)^k(\eta-v)^k}{k!^2}d\eta\right] + O(\varepsilon^3),$$

где остаточный член удовлетворяет оценке

$$|O(\varepsilon^3)| \leqslant \frac{1}{6}e^{4|uv|}\varepsilon^3 \overset{3}{\max}|\varphi(u) + \psi(v) - \varphi(0)|.$$

Отметим, что доказательство теоремы состоит в применении формулы Римана к уравнению гиперболического типа

$$\begin{cases} \tilde{z}_{uv} = \tilde{z} + \varepsilon^2 f(\tilde{z}, \varepsilon), \\ \tilde{z}(u, 0) = \varphi(u), \\ \tilde{z}(0, v) = \psi(v), \end{cases} \tag{2.19}$$

где $\tilde{z} = \varepsilon^{-1} z$. Функция Римана для оператора $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} - 1\right)$ известна [3, 33]:

$$R(u, v; \xi, \eta) = J_0\left(2\sqrt{-(\xi - u)(\eta - v)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - u)^k (\eta - v)^k}{(k!)^2},$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Двойной интеграл в формуле Римана оценивается с помощью теоремы о среднем и дает $O(\varepsilon^3)$.

Чтобы получить разложение до более высокого порядка, мы можем в $f(\tilde{z}, \varepsilon)$ под двойным интегралом подставить вместо $\tilde{z}$ его асимптотическое разложение.

Тот же метод применим к задаче Коши

$$\begin{cases} z_{uv} = \sin z, \\ z(u, \omega(u)) = \varepsilon \psi(u), \\ z_u(u, \omega(u)) = \varepsilon \varphi(u). \end{cases}$$

Надо только вместо формулы Римана для задачи Гурса воспользоваться формулой Римана [3] для задачи Коши.

2.5. Автомодельные решения.

Известно, что у уравнения sin-Гордона имеется два типа автомодельных решений: $z(au + bv)$ и $z(uv)$.

2.5.1. Автомодельные решения вида $z(au + bv)$. Рассмотрим автомодельные решения типа бегущих волн $z(au+bv)$ уравнения sin-Гордона. Обозначим через σ знак произведения ab и $k = \sqrt{|a/b|}$. Уравнение в этом случае можно переписать в виде

$$z'' = \sigma \sin z,$$

где штрих обозначает производную по переменной

$$t = ku + \frac{\sigma v}{k},$$

один раз проинтегрировать (при этом возникнет постоянная интегрирования C_2) и записать в интегральной форме:

$$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{2\sigma\,(C_2 - \cos z)}} = ku + \frac{\sigma v}{k}. \tag{2.20}$$

Отметим, что можно одновременно поменять знаки σ и C_2, рассматривая при этом $\pi + z$ вместо z.

При интегрировании (2.20) возможны следующие случаи [11, 25].

(1а) Пусть $C_2 = 1$, $\sigma = 1$; тогда

$$z(au + bv) = 4 \operatorname{arctg} e^{ku + v/k}$$

— односолитонные решения уравнения sin-Гордона, которые мы получим в п. 2.6.1, используя преобразование Бэклунда. В этом выражении опущена произвольная постоянная, дающая сдвиг по переменным, знак ± в показателе экспоненты, отвечающий за одновременную смену знаков у переменных и знак ± у решения, поскольку эти симметрии усматриваются непосредственно в уравнении sin-Гордона и таким образом характерны для каждого его решения.

(1б) Пусть $C_2 = -1$, $\sigma = -1$; тогда

$$z(au + bv) = \pi + 4 \operatorname{arctg} e^{ku - v/k}.$$

Это решение можно получить из предыдущего заменой $v \to -v$ и $z \to z + \pi$.

(2а) Пусть $C_2 > 1$, $\sigma = 1$ или $-1 < C_2 < 1$, $\sigma = 1$; тогда

$$z(au+bv) = 2\arcsin \operatorname{dn}\left\{ku + \frac{v}{k}; \sqrt{\frac{C_2+1}{2}}\right\}.$$

(2б) Пусть $C_2 < -1$, $\sigma = -1$ или $-1 < C_2 < 1$, $\sigma = -1$; тогда

$$z(au+bv) = \pi + 2\arcsin \operatorname{dn}\left\{ku - \frac{v}{k}; \sqrt{\frac{C_2+1}{2}}\right\}.$$

Это решение можно получить из предыдущего заменой $v \to -v$ и $z \to z + \pi$.

Отметим, что решения (2а) и (2б) допускают много возможных форм записи благодаря тождествам

$$\operatorname{dn}\left\{pt; \frac{1}{p}\right\} = \operatorname{cn}\{t; p\}, \quad \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}, \quad \text{и т. п.}$$

Здесь $\operatorname{cn}\{x, k\}$, $\operatorname{dn}\{x, k\}$ — эллиптические функции Якоби.

2.5.2. Автомодельные решения вида $z(uv)$. Для автомодельной переменной $t = uv$ уравнение sin-Гордона сводится к виду

$$tz'' + z' - \sin z = 0.$$

Замена $z = x + \pi$ приводит его к виду

$$tx'' + x' + \sin x = 0. \tag{2.21}$$

Уравнение (2.21) является частным случаем третьего трансцендентного уравнения Пенлеве [1, 46], которое в стандартных обозначениях записывается в виде

$$w'' = w'^2 w^{-1} - w' t^{-1} + (\alpha w^2 + \beta)t^{-1} + \gamma w^3 + \delta w^{-1}$$

и заменой $w(t) = e^{y(t)}$, $t^2/4 \to t$ приводится к виду, более удобному для дальнейших рассмотрений:

$$ty'' + y' - (\gamma e^{2y} + \delta e^{-2y}) - (\alpha e^{y} + \beta e^{-y})t^{-1/2} = 0. \tag{2.22}$$

Методом изомонодромных деформаций асимптотические свойства решений уравнений Пенлеве изучались А. Р. Итсом и В. Ю. Новокшеновым [55].

Исследованию асимптотических свойств решений уравнений типа (2.21) посвящены работы Е. В. Маевского [14, 17]. Изложим основные результаты.

Асимптотика решений уравнения (2.21) на бесконечности. Здесь удобно перейти к новой независимой переменной τ по формуле $\tau = 2\sqrt{t}$. Дифференцирование по новой переменной будем обозначать точкой. Рассмотрим начальную задачу для уравнения (2.21) в новой переменной:

$$\begin{cases} \tau\ddot{z} + \dot{z} - \tau \sin z = 0, \\ z(\tau_0) = p, \\ \dot{z}(\tau_0) = q. \end{cases} \tag{2.23}$$

Получены следующие асимптотические разложения:

$$z(\tau) = \pi + \tau^{-1/2} C_1 \sin\theta + \tau^{-3/2}\left(\frac{1}{192}C_1^3 \sin 3\theta + \frac{1}{32}C_1^3 \sin\theta + \left(\frac{3}{1024}C_1^5 - \frac{1}{8}C_1\right)\cos\theta\right) + O(\tau^{-5/2}), \tag{2.24}$$

$$\dot{z}(\tau) = \tau^{-1/2} C_1 \cos\theta + \tau^{-3/2}\left(\left(-\frac{3}{1024}C_1^5 - \frac{3}{8}C_1\right)\sin\theta - \frac{1}{32}C_1^3 \cos\theta + \frac{1}{64}C_1^3 \cos 3\theta\right) + O(\tau^{-5/2}), \tag{2.25}$$

где

$$\theta = \tau - \frac{1}{16}C_1^2 \ln\tau + C_2.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Любое решение задачи Коши* (2.23)*, не являющееся монотонным, обладает асимптотическим поведением* (2.24)*,* (2.25) *с точностью до слагаемого* $2m\pi$*. Целое число* m *определяется из условия* $|p-(2m+1)\pi|<\pi$*.*

Доказательство теоремы разбивается на два этапа. Сначала с помощью некоторой модификации метода вариации постоянных исходное уравнение сводится к системе двух интегральных уравнений для варьируемых «постоянных». Методом последовательных приближений доказывается, что существует решение этой системы, стремящееся к константе на бесконечности. Искомое асимптотическое разложение на n-м шаге получаем используя вычисленные по рекуррентным формулам n-е последовательные приближения для «постоянных». Доказывается, что построенной асимптотикой обладают все решения исходного уравнения, достаточно быстро стремящиеся к нулю на бесконечности. Далее для выделения таких решений по начальным условиям применяется второй метод Ляпунова. Доказывается асимптотическая устойчивость тривиального решения исходного уравнения.

Асимптотику в нуле удается получить для всех решений уравнения (2.21):

$$z(t)=C_1\ln t+C_2+\left(-\frac{C_1^2-1}{\left(C_1^2+1\right)^2}\sin\theta-\frac{2C_1}{\left(C_1^2+1\right)^2}\cos\theta\right)t+O(t^2),$$

и для производной:

$$z'(t)=\frac{C_1}{t}+\left(\frac{1}{C_1^2+1}\sin\theta-\frac{C_1}{C_1^2+1}\cos\theta\right)+O(t),$$

где $\theta=C_1\ln t+C_2$.

2.6. Преобразование Бэклунда и солитонные решения.

2.6.1. Преобразование Бэклунда. Преобразование Бэклунда решения уравнения sin-Гордона $z(u,v)$ определяет другое решение уравнения sin-Гордона $\zeta(u,v)$ как решение следующей системы уравнений:

$$\zeta_u=z_u+2p\sin\frac{\zeta+z}{2},\quad \zeta_v=-z_v+\frac{2}{p}\sin\frac{\zeta-z}{2}. \tag{2.26}$$

Заметим, что решение этой системы не единственно. Общее решение зависит от одной произвольной постоянной, в качестве которой можно взять, например, $\zeta(0,0)$. Общее решение обозначим символом $\mathrm{B}_p\,z$.

Вывести соотношения (2.26) можно следующим образом [20]. Положим

$$\zeta_u=P(z_u,z,\zeta),\quad \zeta_v=Q(z_v,z,\zeta), \tag{2.27}$$

где P и Q — некоторые функции. Дифференцируем первое уравнение по u, а второе — по v и используем, что $\zeta_{uv}=\sin\zeta$, $z_{uv}=\sin z$:

$$P_1\sin z+P_2z_v+P_3Q=\sin\zeta,\quad Q_1\sin z+Q_2z_u+Q_3P=\sin\zeta, \tag{2.28}$$

где индексами обозначены производные по соответствующим переменным. В уравнениях (2.28) предполагаем $(z,z_u,z_v,\zeta,\zeta_u,\zeta_v)$ независимыми переменными. Дифференцируя первое уравнение системы (2.28) по z_v, а второе — по z_u, имеем $Q_{11}=0$ и $P_{11}=0$, поэтому P и Q являются многочленами первого порядка соответственно по z_u и z_v:

$$P(z_u,z,\zeta)=P^1(z,\zeta)+P^2(z,\zeta)z_u,\quad Q(z_v,z,\zeta)=Q^1(z,\zeta)+Q^2(z,\zeta)z_v, \tag{2.29}$$

где функции P^1, P^2, Q^1, Q^2 подлежат дальнейшему определению. Подставляя (2.29) в (2.28) и сравнивая коэффициенты каждого уравнения при z_u, z_v, z_uz_v слева и справа, получаем

$$\begin{gathered}Q^1P_2^2=0,\quad P^1Q_2^2=0,\quad P_1^2+P_2^2Q^2=0,\\ Q_1^2+Q_2^2P^2=0,\quad P_1^1+P_2^1Q^2=0,\quad Q_1^1+Q_2^1P^2=0.\end{gathered} \tag{2.30}$$

Из первых четырех уравнений системы (2.30) находим $P^2 = a = \mathrm{const}$, $Q^2 = b = \mathrm{const}$. Подставляя в последние 2 уравнения, имеем следующую систему уравнений для определения P^1, Q^1

$$q\frac{\partial P^1}{\partial \zeta} + \frac{\partial P^1}{\partial z} = 0, \quad p\frac{\partial Q^1}{\partial \zeta} + \frac{\partial Q^1}{\partial z} = 0.$$

Решая эту систему, находим, что

$$P^1 = F(z - b\zeta), \quad Q^1 = G(z - a\zeta), \tag{2.31}$$

где F, G — некоторые функции. Подставляя найденные P^1, P^2, Q^1, Q^2 в (2.29), а затем — в уравнения (2.28), получаем

$$\frac{\partial P^1}{\partial \zeta} Q^1 = \sin\zeta - a\sin z, \quad P^1\frac{\partial Q^1}{\partial \zeta} = \sin\zeta - b\sin z.$$

Складывая эти уравнения и интегрируя по ζ, находим

$$F(z - b\zeta)\cdot G(z - a\zeta) = -2\cos\zeta - (a+b)\zeta\sin z + C(z),$$

где $C(z)$ — некоторая функция. Перейдем в полученном уравнении к новым переменным $x = z - b\zeta$, $y = z - a\zeta$:

$$F(x)G(y) = -2\cos\frac{x-y}{a-b} - (a+b)\frac{x-y}{a-b}\sin\frac{ax-by}{a-b} + C\left(\frac{ax-by}{a-b}\right). \tag{2.32}$$

Анализируя уравнение (2.32), находим $a = -b = 1$ и $C = 2\cos\dfrac{x+y}{2}$, поэтому

$$F(x) = 2p\sin\frac{x}{2}, \quad G(y) = -\frac{2}{p}\sin\frac{y}{2}, \tag{2.33}$$

где p — произвольное число. Подставляя найденные выражения в (2.29), а затем в (2.27), получаем искомые уравнения преобразования Бэклунда (2.26).

Известно [43], что преобразования Бэклунда с различными параметрами перестановочны и

$$\mathrm{B}_p\,\mathrm{B}_q\,z = z + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{p+q}{p-q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{B}_p\,z - \mathrm{B}_q\,z}{4}\right) \tag{2.34}$$

(формула Бьянки). Этот факт доказывается непосредственной проверкой того, что для любого решения уравнения sin-Гордона $z(u,v)$ функция

$$w = z + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{p+q}{p-q}\,\mathrm{tg}\,\frac{z_p - z_q}{4}\right)$$

удовлетворяет системе уравнений (2.26) и по индексу p, и по индексу q, т.е. $w = \mathrm{B}_p\,z_q = \mathrm{B}_q\,z_p$, если $z_p = \mathrm{B}_p\,z$, $z_q = \mathrm{B}_q\,z$.

Обобщение формулы Бьянки получается в рамках метода обратной задачи с помощью n-кратного преобразования Дарбу [57]. Эта формула имеет вид [41]

$$\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\mathrm{B}_{p_n}\,\mathrm{B}_{p_{n-1}}\ldots\mathrm{B}_{p_1}\,z - z}{4}}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\mathrm{B}_{p_n}\,\mathrm{B}_{p_{n-1}}\ldots\mathrm{B}_{p_1}\,z - z}{4}} = \frac{\det\left\|p_j^{k-1}\left(1 + i(-1)^{k-1}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\mathrm{B}_{p_j}\,z - z}{4}\right)\right\|}{\det\left\|p_j^{k-1}\left(1 - i(-1)^{k-1}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\mathrm{B}_{p_j}\,z - z}{4}\right)\right\|},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает матрицу, элементы которой занумерованы индексами j, k, пробегающими значения $1, 2, \ldots, n$. Ту же формулу можно записать и в экспоненциальной форме:

$$\exp\left(i\,\frac{\mathrm{B}_{p_n}\,\mathrm{B}_{p_{n-1}}\ldots\mathrm{B}_{p_1}\,z - z}{2}\right) = \frac{\det\left\|p_j^{k-1}\left(1 + i(-1)^{k-1}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\mathrm{B}_{p_j}\,z - z}{4}\right)\right\|}{\det\left\|p_j^{k-1}\left(1 - i(-1)^{k-1}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\mathrm{B}_{p_j}\,z - z}{4}\right)\right\|}. \tag{2.35}$$

2.6.2. Солитонные решения уравнения sin-Гордона. Односолитонное решение $z_{(1)}$ получается применением преобразования Бэклунда к тривиальному решению уравнения sin-Гордона $z = 0$. Действительно, в этом случае система (2.26) принимает вид

$$z_{(1)_u} = 2p \sin \frac{z_{(1)}}{2}, \quad z_{(1)_v} = \frac{2}{p} \sin \frac{z_{(1)}}{2}$$

и допускает точное интегрирование:

$$z_{(1)}(u, v) = 4 \operatorname{arctg} e^{pu+v/p}.$$

В случае $z = 0$ формула (2.35) дает *n-солитонное решение* $z_{(n)}$ уравнения sin-Гордона, которое, таким образом, имеет вид

$$z_{(n)}(u, v) = -2i \ln \frac{\det \left\| p_j^{k-1} \left(1 + i(-1)^{k-1} e^{\,p_j u \,+\, v/p_j} \right) \right\|}{\det \left\| p_j^{k-1} \left(1 - i(-1)^{k-1} e^{p_j u + v/p_j} \right) \right\|}.$$

Если все p_j — вещественные числа, полученное (вещественное) решение называется *n-кинком*. Если $n = 2m$ четное, а комплексные числа p_j разбиты на пары комплексно-сопряженных, то также получается вещественное решение, называемое *m-бризером*. Решение, получаемое из n-солитонного $(n-1)$-кратным предельным переходом

$$p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n = p,$$

называется *n-позитоном*.

В качестве примера рассмотрим $n = 2$. Двухсолитонное решение имеет вид

$$z(u, v) = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{p+q}{p-q} \frac{e^{pu+v/p} - e^{qu+v/q}}{1 + e^{pu+v/p} e^{qu+v/q}} \right).$$

Из него получаем бризерное решение ($p = a + ib$, $q = a - ib$)

$$z(u, v) = 4 \operatorname{arctg} \frac{a \sin \left(\frac{b}{2} u - \frac{b}{2(a^2+b^2)} v \right)}{b \operatorname{ch} \left(\frac{a}{2} u + \frac{a}{2(a^2+b^2)} v \right)}$$

и двухпозитонное решение

$$z(u, v) = 4 \operatorname{arctg} \frac{u - v/p^2}{\operatorname{ch}(pu + v/p)}.$$

2.7. Алгебро-геометрический подход.

2.7.1. θ-функция Римана и римановы поверхности. Тета-функция Римана $\theta(\mathbf{x}|B)$ от векторной переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^g$ (где $\mathbf{x}$ предполагается вектором-столбцом, а g — натуральное число) определяется через $g \times g$ симметричную матрицу B, удовлетворяющую условию, что ее мнимая часть положительно определена (*матрица Римана*):

$$\theta(\mathbf{x}|B) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \mathbf{k}^T B \mathbf{k} + 2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{x}}.$$

Здесь суммирование ведется по всем целочисленным векторам-столбцам $\mathbf{k}$, ^{T} означает транспонирование, условие, наложенное на матрицу B, обеспечивает сходимость ряда (очевидно, при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^g$). Матрицу B в записи $\theta(\mathbf{x}|B)$ опускают, если понятно о какой матрице идет речь. Рассмотрим кроме этого тета-функции с характеристиками $\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{R}^g$:

$$\theta[\mathbf{a}'; \mathbf{a}''](\mathbf{x}|B) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i (\mathbf{a}' + \mathbf{k})^T B (\mathbf{a}' + \mathbf{k}) + 2\pi i (\mathbf{a}' + \mathbf{k})^T (\mathbf{a}'' + \mathbf{x})}.$$

Теория тета-функций становится особенно содержательной (благодаря появляющимся новым соотношениям между тета-функциями) в случае, когда матрица B является матрицей периодов римановой поверхности функции $f^2(w) = P_{2g+1}(w)$, где P_{2g+1} — полином степени $2g+1$. По поводу современного состояния теории тета-функций и их связи с римановыми поверхностями см. [6, 8, 18].

2.7.2. Конечнозонные решения. Связь теории тета-функций со многими уравнениями математической физики появляется как следствие тождества тройной секущей Фея [9, 12, 18, 52]. Мы сформулируем в общих чертах лишь следствие этого важного тождества, справедливое для любой пары точек P, Q римановой поверхности функции $f(w)$ и любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^g$:

$$\frac{\theta(\mathbf{x}+\mathbf{y}(P,Q))\theta(\mathbf{x}-\mathbf{y}(P,Q))}{\theta^2(\mathbf{x})} = \beta^2(P,Q)\left(\alpha(P,Q)+\mathbf{b}_P^T\left(\frac{\partial^2 \ln\theta(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)\mathbf{b}_Q\right),$$

где $\alpha(P,Q)$, $\beta^2(P,Q)$ — числа, зависящие от точек P, Q, $\mathbf{y}(P,Q)$ — вектор, зависящий от P, Q, $\mathbf{b}_P$ — вектор, зависящий от P, $\mathbf{b}_Q$ — вектор, зависящий от Q, круглыми скобками в правой части обозначена матрица, состоящая из вторых производных (гессиан) функции $\ln\theta(\mathbf{x})$. Если в качестве P, Q выбраны точки ветвления римановой поверхности и

$$\beta^2(P,Q) = 1,$$

то приведенное тождество переходит в уравнение

$$z_{uv} = -4\gamma(P,Q)\sin z$$

для функции

$$z(u,v) = \pi\mathbf{n}^T\mathbf{y} - i\ln\frac{\theta(u\mathbf{b}_P+v\mathbf{b}_Q+\mathbf{c}+\mathbf{y})\theta(u\mathbf{b}_P+v\mathbf{b}_Q+\mathbf{c}-\mathbf{y})}{\theta^2(u\mathbf{b}_P+v\mathbf{b}_Q+\mathbf{c})},$$

где целочисленный вектор $\mathbf{n}$ зависит от $\mathbf{y}$, вектор $\mathbf{c}$ — произвольный, число $\gamma(P,Q) = e^{-\pi i\mathbf{n}^T\mathbf{y}}$, а векторы $\mathbf{y}$, $\mathbf{b}_P$, $\mathbf{b}_Q$ — те же, что и выше. Решения такого вида называются *g-зонными решениями* уравнения sin-Гордона [12]. Дальнейшие исследования направлены на выявление вещественных решений (см. [9, 30, 31, 36]). Отметим глубокую связь конечнозонных решений с методом обратной задачи [13] и функциями Бейкера—Ахиезера [8]. Отметим, что солитонные решения являются специальным предельным случаем конечнозонных, в терминах метода обратной задачи.

Для вещественности и гладкости решения на риманову поверхность (другими словами, на полином $P_{2g+1}(w)$) и точки ветвления P, Q необходимо и достаточно наложить некоторые условия [9, 36]. Общий вид конечнозонного решения уравнения sin-Гордона в стандартной форме записи (т.е. $z_{uv} = \sin z$) приведен в работе Б. А. Дубровина и С. М. Натанзона [9].

2.7.3. Двухзонные решения. Выпишем со всеми подробностями двухзонные решения [9], поскольку только в случае $g = 2$ удается записать $z(u,v)$ без привлечения конкретных римановых поверхностей. Это связано с тем, что любая 2×2-матрица Римана является матрицей периодов некоторой римановой поверхности [7]. Введем дополнительные обозначения:

$$\hat\theta[a_1,a_2] = \theta\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right](\mathbf{0}|2B),$$

$$\hat\theta_{ij}[a_1,a_2] = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\theta\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right](\mathbf{0}|2B).$$

Наложим на матрицу B условие невырожденности

$$D = \begin{vmatrix}\hat\theta_{11}[0,0] & \hat\theta_{12}[0,0] & \hat\theta_{22}[0,0] & \hat\theta[0,0]\\ \hat\theta_{11}[1,0] & \hat\theta_{12}[1,0] & \hat\theta_{22}[1,0] & \hat\theta[1,0]\\ \hat\theta_{11}[0,1] & \hat\theta_{12}[0,1] & \hat\theta_{22}[0,1] & \hat\theta[0,1]\\ \hat\theta_{11}[1,1] & \hat\theta_{12}[1,1] & \hat\theta_{22}[1,1] & \hat\theta[1,1]\end{vmatrix} \neq 0$$

и одно из трех условий вещественности:

1) $\bar B = -B$; в этом случае положим

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix}3/4\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix}1/4\\0\end{pmatrix}\quad \text{или}\quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix}3/4\\1/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix};$$

2) $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - B$ и положим

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix};$$

3) $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - B$ и положим

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Здесь черта обозначает комплексное сопряжение.) Кроме этого, введем в рассмотрение числа

$$q_{11} = D^{-1} \begin{vmatrix} \hat{\theta}_{11}[0,0] & \hat{\theta}_{12}[0,0] & \hat{\theta}_{22}[0,0] & 0 \\ 0 & \hat{\theta}_{12}[1,0] & \hat{\theta}_{22}[1,0] & \hat{\theta}[1,0] \\ \hat{\theta}_{11}[0,1] & \hat{\theta}_{12}[0,1] & \hat{\theta}_{22}[0,1] & 0 \\ 0 & \hat{\theta}_{12}[1,1] & \hat{\theta}_{22}[1,1] & \hat{\theta}[1,1] \end{vmatrix},$$

$$q_{12} = D^{-1} \begin{vmatrix} \hat{\theta}_{11}[0,0] & \hat{\theta}_{12}[0,0] & \hat{\theta}_{22}[0,0] & 0 \\ \hat{\theta}_{11}[1,0] & 0 & \hat{\theta}_{22}[1,0] & \hat{\theta}[1,0] \\ \hat{\theta}_{11}[0,1] & \hat{\theta}_{12}[0,1] & \hat{\theta}_{22}[0,1] & 0 \\ \hat{\theta}_{11}[1,1] & 0 & \hat{\theta}_{22}[1,1] & \hat{\theta}[1,1] \end{vmatrix},$$

$$q_{22} = D^{-1} \begin{vmatrix} \hat{\theta}_{11}[0,0] & \hat{\theta}_{12}[0,0] & \hat{\theta}_{22}[0,0] & 0 \\ \hat{\theta}_{11}[1,0] & \hat{\theta}_{12}[1,0] & 0 & \hat{\theta}[1,0] \\ \hat{\theta}_{11}[0,1] & \hat{\theta}_{12}[0,1] & \hat{\theta}_{22}[0,1] & 0 \\ \hat{\theta}_{11}[1,1] & \hat{\theta}_{12}[1,1] & 0 & \hat{\theta}[1,1] \end{vmatrix}$$

и определим через эти числа векторы

$$\mathbf{a} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{q_{12} + \sqrt{q_{12}^2 - 4q_{11}q_{22}}}{2q_{11}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} q_{11} \\ \dfrac{q_{12} - \sqrt{q_{12}^2 - 4q_{11}q_{22}}}{2q_{11}} \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема [9].

Теорема 2.5. *В случаях* (1)–(3) *функция*

$$z(u,v) = i \ln \left[\frac{\theta[\mathbf{0};\mathbf{p}](u\mathbf{a} + v\mathbf{b})}{\theta[\mathbf{0};\mathbf{q}](u\mathbf{a} + v\mathbf{b})} \right]^2,$$

а в случае (3) *еще и*

$$z(u,v) = i \ln \left[\frac{\theta[\mathbf{0};\mathbf{q}](u\mathbf{a} - v\mathbf{b})}{\theta(u\mathbf{a} - v\mathbf{b})} \right]^2$$

являются гладкими вещественными решениями уравнения sin-Гордона.

Частный случай двухзонного решения был найден И. В. Грибковым [5] при помощи преобразования Бэклунда.

3. Псевдосферические поверхности

Содержание этого раздела составляют общие сведения о псевдосферических поверхностях. Приводятся формулы Гаусса—Вейнгартена и Гаусса—Петерсона—Кодацци. Для поверхностей отрицательной кривизны формулируются уравнения Петерсона—Кодацци в римановых инвариантах. Далее излагаются основные результаты и методы исследования псевдосферических поверхностей в асимптотических и чебышевских координатах, в координатах линий кривизны и в изотермических координатах. Рассмотрен частный случай псевдосферической поверхности, когда она является поверхностью Иоахимсталя. Излагается алгоритм преобразования Бэклунда для псевдосферических поверхностей. Обсуждается метод подвижного репера Картана в приложении к псевдосферическим поверхностям: доказывается формула Сима. Излагаются основные результаты, связанные с классическими псевдосферическими поверхностями.

3.1. Основные уравнения теории поверхностей. Будем рассматривать *поверхность* $\mathrm{S}[\mathbf{r}]$ в $\mathbb{E}^3$ как область значений трижды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{r}(u,v)$, аргумент которой (u,v) принадлежит некоторой (связной) области $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Переменные (u,v) при этом называются (криволинейными) *координатами* на поверхности, семейства кривых $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ — *координатными линиями*, а совокупность координатных линий — *координатной сетью*. Первая и вторая квадратичные формы поверхности определяются как

$$\begin{aligned} Q(u,v;du,dv) &= d\mathbf{r}^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2, \\ B(u,v;du,dv) &= -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2, \end{aligned}$$

причем первая из них положительно определена.

Тройка векторов $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n})$, взятая в точке M, в которой $W(M) = E(M)G(M) - F^2(M) \neq 0$, образует базис. Раскладывая по этому базису векторы $\mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{r}_{vv}$, $\mathbf{n}_u$, $\mathbf{n}_v$, получаем *деривационные формулы Гаусса—Вейнгартена*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}_u &= \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} & L \\ \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} & M \\ \dfrac{MF-LG}{W} & \dfrac{LF-ME}{W} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}_v &= \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} & M \\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} & N \\ \dfrac{NF-MG}{W} & \dfrac{MF-NE}{W} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2W}(GE_u + FE_v - 2FF_u), & \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2W}(-EE_v - FF_u + 2EG_u), \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2W}(GE_v - FG_u), & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2W}(EG_u - FE_v), \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2W}(-GG_u - FF_v + 2GE_v), & \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2W}(EG_v + FG_u - 2FF_v). \end{aligned}$$

Условие согласования системы матричных уравнений (3.1) записывается в виде

$$U_v - V_u = VU - UV,$$

где U и V — матрицы из правой части соответственно первого и второго уравнения, а в скалярной форме представляет собой систему уравнений Гаусса—Петерсона—Кодацци:

$$K(u,v) = \frac{1}{W^2}\left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}$$

(уравнение Гаусса), где $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$ — гауссова кривизна поверхности;

$$2W(L_v - M_u) - (EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$2W(M_v - N_u) - (EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0$$

(уравнения Петерсона—Кодацци).

Рассмотрим кривую на поверхности. Совокупность кривой и заданного на ней единичного вектора нормали поверхности $\mathbf{n}$ называется *поверхностной полосой*. *Основной трехгранник* поверхностной полосы задается ортонормированной тройкой векторов: касательным вектором $\mathbf{l}$, вектором нормали поверхности $\mathbf{n}$ и вектором геодезической нормали $\mathbf{m} = [\mathbf{n}, \mathbf{l}]$. Формулы Френе записываются в виде

$$\dot{\mathbf{l}} = k_g\mathbf{m} + k_n\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{m}} = -k_g\mathbf{l} + \varkappa_g\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -k_n\mathbf{l} - \varkappa_g\mathbf{m}. \tag{3.2}$$

Здесь точка обозначает производную по естественному параметру кривой, штрих — по произвольному параметру. Коэффициенты этих разложений

$$k_g = \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{n})}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad k_n = \frac{([\mathbf{r}'\mathbf{r}'']\,\mathbf{r}'\mathbf{n})}{|\mathbf{r}'|^4}, \quad \varkappa_g = \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n}\mathbf{n}')}{|\mathbf{r}'|^2} \tag{3.3}$$

называются соответственно *геодезической кривизной*, *нормальной кривизной* и *геодезическим кручением* поверхностной полосы. Отметим, что из данной точки поверхности в заданном направлении проходит равно одна линия (поверхностная полоса) с заданной геодезической кривизной. Обозначим через ϑ угол между нормалью поверхности и главной нормалью линии на поверхности. Ориентацию этого угла определим так, чтобы главная нормаль линии была равна $\mathbf{n}\cos\vartheta + \mathbf{m}\sin\vartheta$. Тогда

$$k_g = k\sin\vartheta, \quad k_n = k\cos\vartheta, \quad \varkappa_g = \varkappa + \dot{\vartheta}; \tag{3.4}$$

кроме того, производная угла ϑ выражается через кривизны и их производные по формуле

$$\dot{\vartheta} = \frac{\dot{k}_g k_n - k_g \dot{k}_n}{k_g^2 + k_n^2}, \tag{3.5}$$

которая выводится из предыдущих. См. также [2, 19, 21, 34, 38, 39, 49].

Рассмотрим поверхность отрицательной гауссовой кривизны. Пусть $K = -k^2$ и E, F, G выбраны так, что уравнение Гаусса выполняется тождественно. Уравнения Петерсона—Кодацци удобно исследовать в так называемых *римановых инвариантах*. Впервые такая форма записи была предложена Б. Л. Рождественским [28] и Э. Г. Позняком [23]. Обозначим через l, m, n коэффициенты второй квадратичной формы, разделенные на $\sqrt{EF - G^2}$, и введем новые неизвестные функции по формулам

$$r = -\frac{m+k}{n}, \quad s = -\frac{m-k}{n}.$$

Тогда уравнения Петерсона—Кодацци могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} r_u + sr_v &= A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \\ s_u + rs_v &= A_0 + A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 sr + A_5 s^2 r, \end{aligned}$$

где

$$A_0 = -\Gamma^2_{11}, \quad A_1 = \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}, \quad A_2 = -\Gamma^2_{12}, \quad A_3 = \Gamma^1_{12}, \quad A_4 = -\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12}, \quad A_5 = \Gamma^1_{22}.$$

Исследование уравнений Петерсона—Кодацци в римановых инвариантах эффективно применялось Э. Г. Позняком [23] и Е. В. Шикиным [37] в вопросах погружений двумерных метрик отрицательной кривизны в $\mathbb{E}^3$.

3.2. Асимптотические координаты и чебышевские сети.

3.2.1. Асимптотические линии. На псевдосферической поверхности можно ввести асимптотические координаты; обозначим их $(\tilde{u}, \tilde{v})$. В этих координатах коэффициенты первой и второй квадратичных форм связаны условиями $\tilde{L} = \tilde{N} = 0$, $\tilde{M}^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$ и уравнениями Петерсона—Кодацци, которые в этом случае редуцируются к системе

$$\tilde{F}\tilde{E}_{\tilde{v}} - \tilde{E}\tilde{G}_{\tilde{u}} = 0, \quad \tilde{G}\tilde{E}_{\tilde{v}} - \tilde{F}\tilde{G}_{\tilde{u}} = 0,$$

из которой следует, что $\tilde{E} = \tilde{E}(\tilde{u})$ и $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{v})$. Если ввести новые координаты по формулам

$$u = \int_0^{\tilde{u}} \sqrt{\tilde{E}(\xi)} d\xi, \quad v = \int_0^{\tilde{u}} \sqrt{\tilde{G}(\eta)} d\eta, \tag{3.6}$$

то первая квадратичная форма поверхности примет вид

$$Q(u, v; du, dv) = du^2 + 2\cos z(u, v) du dv + dv^2, \tag{3.7}$$

где $\cos z(u, v) = \tilde{F}/\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}}$. Последнее определение корректно, поскольку $\tilde{F}^2 \leqslant \tilde{E}\tilde{G}$ в силу положительной определенности первой квадратичной формы. Координаты, в которых первая квадратичная форма имеет вид (3.7), называются *чебышевскими*. *Чебышевская сеть* характеризуется (и определяется) тем свойством, что в любом сетевом четырехугольнике противоположные стороны равны. Таким образом, на любой псевдосферической поверхности могут быть введены чебышевские координаты, получающиеся масштабным преобразованием (3.6). Функция $z(u, v)$ не может быть выбрана произвольно: она должна удовлетворять уравнению Гаусса, которое в этом случае принимает вид уравнения sin-Гордона:

$$z_{uv} = \sin z.$$

3.2.2. Чебышевские сети. Отметим, что если первая квадратичная форма поверхности в некоторых координатах имеет вид (3.7), то коэффициенты ее второй квадратичной формы должны удовлетворять уравнениям Петерсона—Кодацци и условию $K = -1$:

$$\begin{cases} 2(L_v - M_u)\sin z + (M\cos z - 2N)z_u = 0, \\ 2(N_u - M_v)\sin z + (M\cos z - 2L)z_v = 0, \\ LN - M^2 = -\sin^2 z. \end{cases} \tag{3.8}$$

Если мы строим решение этой системы при условии $L = N = 0$ (т.е. если координатная сеть — асимптотическая), то получаем $M = \sin z$. Но в общем случае решение системы (3.8) определяется с большим произволом. Ниже мы покажем, что любые две пересекающиеся линии на поверхности могут быть включены в локальную чебышевскую сеть (u, v) (в односвязной окрестности точки пересечения) с некоторым $z(u, v)$, зависящим от геодезических кривизн этих линий и от угла, под которым они пересекаются. Более того, на любой фиксированной псевдосферической поверхности для любого фиксированного решения $z(u, v)$ уравнения sin-Гордона существует локальная чебышевская сеть (u, v), для которой функция $z(u, v)$ — сетевой угол.

Чтобы получить радиус-вектор поверхности в асимптотических чебышевских координатах с заданным сетевым углом $z(u, v)$, необходимо проинтегрировать систему деривационных формул

$$\begin{gathered} \mathbf{r}_{uu} = z_u \mathbf{n}_u, \quad \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{n}\sin z, \quad \mathbf{r}_{vv} = z_v \mathbf{n}_v, \\ \mathbf{n}_u = \mathbf{r}_u \operatorname{ctg} z - \mathbf{r}_v \operatorname{cosec} z, \quad \mathbf{n}_v = -\mathbf{r}_u \operatorname{cosec} z + \mathbf{r}_v \operatorname{ctg} z. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Из анализа взаиморасположения векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{n}$ в пространстве следуют формулы:

$$[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = \mathbf{n}\sin z, \quad [\mathbf{r}_u \mathbf{n}] = \mathbf{r}_u \operatorname{ctg} z - \mathbf{r}_v \operatorname{cosec} z, \quad [\mathbf{r}_v \mathbf{n}] = \mathbf{r}_u \operatorname{cosec} z - \mathbf{r}_v \operatorname{ctg} z. \tag{3.10}$$

Обратимся к вычислению геодезической кривизны, нормальной кривизны и геодезического кручения асимптотических линий $v = v_0$ и $u = u_0$.

Рассмотрим линию $v = v_0$. Ее радиус-вектор $\mathbf{R}(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$. Очевидно, $\mathbf{R}_u = \mathbf{r}_u$, $\mathbf{R}_{uu} = \mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{R}_{uuu} = \mathbf{r}_{uuu}$. Имеем:

$$[\mathbf{R}_u \mathbf{R}_{uu}] = -z_u \mathbf{n}, \quad (\mathbf{R}_u \mathbf{R}_{uu} \mathbf{n}) = -z_u,$$

$$(\mathbf{R}_u \mathbf{R}_{uu} \mathbf{R}_{uuu}) = -z_u (\mathbf{n}\mathbf{r}_{uuu}) = -z_u (\mathbf{n}\mathbf{r}_{uu})' + z_u (\mathbf{n}_u \mathbf{r}_{uu}) = z_u^2$$

поэтому, согласно (3.3), нормальная кривизна асимптотической линии равна нулю, а ее геодезическая кривизна и кручение (которые в этом случае по модулю совпадают с обычными кривизной и кручением) определяются следующим образом:

$$k_g = -z_u, \quad \varkappa = 1. \tag{3.11}$$

Поскольку $|\mathbf{r}_u| = 1$, то длина отрезка асимптотической линии $v = v_0$ равна изменению u на нем: $s = u$.

Аналогичным образом получаем для асимптотической другого семейства $u = u_0$:

$$k_g = z_v, \quad \varkappa = -1. \tag{3.12}$$

Покажем, следуя [24], каким образом любые две пересекающиеся гладкие линии на псевдосферической поверхности могут быть включены в локальную чебышевскую сеть (u, v) с некоторым $z(u, v)$.

Для этого рассмотрим такую односвязную окрестность их точки пересечения, в которой они больше не пересекаются. Естественные параметры линий, отсчитываемые от точки пересечения обозначим u и v. Геодезические кривизны линий обозначим $k_g^{(1)}(u)$ и $k_g^{(2)}(v)$, а угол, который они образуют, как $z(0, 0)$. Предположим, что на поверхности введены чебышевские (но не обязательно асимптотические) координаты (u, v) с углом $z(u, v)$, подлежащим определению из условия, что первая линия задается уравнением $v = 0$, а вторая — уравнением $u = 0$. Геодезическая кривизна линии на поверхности является объектом внутренней геометрии поверхности, и значит для первой кривой определяется выражением (3.11), а для второй — (3.12):

$$k_g^{(1)}(u) = -z_u, \quad k_g^{(2)}(v) = z_v.$$

Определим $z(u, v)$ как решение задачи Гурса:

$$\begin{cases} z_{uv} = \sin z, \\ z(0, v) = z(0, 0) + \int\limits_0^v k_g^{(2)}(\eta) d\eta, \\ z(u, 0) = z(0, 0) - \int\limits_0^u k_g^{(1)}(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Для завершения доказательства необходимо построить чебышевскую сеть с сетевым углом, удовлетворяющим сформулированной выше задаче Гурса. С этой целью заметим, что из данной точки поверхности в заданном направлении проходит единственная линия с заданной геодезической кривизной. Геодезические кривизны линий $u = u_0$ и $v = v_0$ известны, они соответственно равны $z_v(u_0, v)$ и $-z_u(u, v_0)$, а направления в точках $(u_0, 0)$ и $(0, v_0)$ задаются по известным углам $z(u_0, 0)$ и $z(0, v_0)$.

В свете сказанного представляет большой интерес, во-первых, выяснение необходимых и достаточных условий на область плоскости Лобачевского, обеспечивающих существование в этой области регулярной чебышевской сети. Во-вторых, условий на две гладкие пересекающиеся линии на плоскости Лобачевского (псевдосферической поверхности), при которых они могут быть включены в чебышевскую сеть. Этим вопросам посвящены работы Э. Г. Позняка [24] и Ч. Висслера [61].

Рассмотрим сетевой четырехугольник $ABCD$ чебышевской (не обязательно асимптотической) сети (u, v). Будем предполагать, что контур $ABCD$ ограничивает односвязную область с площадью S. Через $\angle A$ и т. д. обозначаем внутренние углы четырехугольника $ABCD$. Тогда из известной формулы Гаусса—Бонне следует формула Хацидакиса [2]

$$S = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D - 2\pi = z(A) - z(B) + z(C) - z(D).$$

На основании этой формулы также может быть выведена [2] теорема 1.1 Гильберта о невозможности регулярного изометрического погружения полной плоскости Лобачевского Λ^2 в $\mathbb{E}^3$. Дальнейшие результаты, обобщающие теорему Гильберта, рассмотрены в обзоре Н. В. Ефимова [10].

3.2.3. Поверхность с заданным сетевым углом. Псевдосферическая поверхность с заданным сетевым углом асимптотической чебышевской сети может быть «склеена» из своих асимптотических линий. Пусть на плоскости (u, v) задан прямоугольник $\Pi = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ (возможно бесконечная или полубесконечная полоса или даже вся плоскость — бесконечно удаленные точки не включаются), в котором определено решение $z(u, v)$ уравнения sin-Гордона и $z \in C^4(\Pi)$. Пусть, кроме этого, задана некоторая точка (u_0, v_0) в прямоугольнике (внутри или на границе) и правая ортогональная тройка векторов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). Нам будет удобна следующая формулировка теоремы 1.2 Э. Г. Позняка.

Теорема 3.1. *При сформулированных выше условиях в прямоугольнике* Π *существует единственная вектор-функция* $\mathbf{r} : \Pi \to \mathbb{E}^3$, $\mathbf{r} \in C^3(\Pi)$, *определяющая псевдосферическую поверхность, для которой* (u, v) — *асимптотические чебышевские координаты с сетевым углом* $z(u, v)$ *и*

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \cos z(u_0, v_0)\mathbf{e}_1 + \sin z(u_0, v_0)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}(u_0 v_0) = \mathbf{e}_3.$$

Особенности поверхности соответствуют линиям уровня $z(u, v) = \pi n$.

Доказательство. Основной триэдр асимптотической линии $v = v_0$ строится как единственное решение системы уравнений Френе

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(v_0)} \\ \mathbf{m}^{(v_0)} \\ \mathbf{n}^{(v_0)} \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -z_u & 0 \\ z_u & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(v_0)} \\ \mathbf{m}^{(v_0)} \\ \mathbf{n}^{(v_0)} \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(v_0)} \\ \mathbf{m}^{(v_0)} \\ \mathbf{n}^{(v_0)} \end{pmatrix}\right|_{u=u_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Ее радиус-вектор находится интегрированием:

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \int\limits_{u_0}^{u} \mathbf{l}^{(v_0)}(\xi) d\xi.$$

Зафиксируем эту линию. Через каждую ее точку проходит асимптотическая другого семейства, основной триэдр которой определяется из системы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(u)} \\ \mathbf{m}^{(u)} \\ \mathbf{n}^{(u)} \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & z_v & 0 \\ -z_v & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(u)} \\ \mathbf{m}^{(u)} \\ \mathbf{n}^{(u)} \end{pmatrix}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(u)} \\ \mathbf{m}^{(u)} \\ \mathbf{n}^{(u)} \end{pmatrix}\right|_{v=v_0} = \begin{pmatrix} \cos z(u, v_0) & \sin z(u, v_0) & 0 \\ -\sin z(u, v_0) & \cos z(u, v_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l}^{(v_0)}(u) \\ \mathbf{m}^{(v_0)}(u) \\ \mathbf{n}^{(v_0)}(u) \end{pmatrix}.$$

Матричный коэффициент в правой части задает поворот на угол $z(u, v_0)$ в плоскости векторов $\mathbf{l}^{(v_0)}(u)$, $\mathbf{m}^{(v_0)}(u)$. При этом повороте вектор $\mathbf{l}^{(v_0)}(u)$ совмещается с вектором $\mathbf{l}^{(u)}(v_0)$, а $\mathbf{m}^{(v_0)}(u)$ — с $\mathbf{m}^{(u)}(v_0)$. Радиус-вектор

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u, v_0) + \int\limits_{v_0}^{v} \mathbf{l}^{(u)}(\eta) d\eta$$

определяет искомую псевдосферическую поверхность. Для доказательства наличия у поверхности особенностей при $z = \pi n$ достаточно вычислить главные кривизны. Находим $k_1 = \operatorname{ctg} z/2$ и $k_2 = -\operatorname{tg} z/2$. При $z \to \pi n$ одна из них стремится к нулю, а другая — к бесконечности (так, что их произведение остается равным $K = -1$). □

3.2.4. Ребра псевдосферической поверхности. Рассмотрим линию $z(u, v) = \pi n$. Ее радиус-вектор $\mathbf{R}(u) = \mathbf{r}(u, \omega(u))$, где $\omega(u) : z(u, \omega(u)) = \pi n$. Поскольку $\mathbf{r} \in C^3$ и $\mathbf{n} \in C^2$ всюду, где $z \in C^4$, то из двух последних уравнений в системе (3.9) получаем

$$\mathbf{r}_u - (-1)^n \mathbf{r}_v \Big|_{v=\omega(u)} = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$\mathbf{R}_u = \left(1 + (-1)^n \omega'\right) \mathbf{r}_u.$$

Вычислим вторую производную, не подставляя в нее пока $z = \pi n$:

$$\mathbf{R}_{uu} = [z_u \operatorname{ctg} z - z_v {\omega'}^2 \operatorname{cosec} z]\mathbf{r}_u + [-z_u \operatorname{cosec} z + z_v {\omega'}^2 \operatorname{ctg} z + \omega'']\mathbf{r}_v + 2\omega' \sin z \mathbf{n}.$$

Вычисляем с учетом формулы $z_v\omega' = -z_u$ векторное произведение, подставляя $\sin z = 0$ и $\cos z = (-1)^n$:

$$[\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_{uu}] = \left(-z_u + (-1)^n z_v\omega'^2\right)\left(1 + (-1)^n\omega'\right)\mathbf{n} = -\left(1 + (-1)^n\omega'\right)^2 z_u\mathbf{n}.$$

В $\mathbf{R}_{uuu}$ нам понадобится только коэффициент при $\mathbf{n}$, не содержащий $\sin z$. Такие слагаемые возникают при дифференцировании $\mathbf{r}_u$ по v и $\mathbf{r}_v$ по u. Находим

$$\mathbf{R}_{uuu} = -z_u\left(1 + (-1)^n\omega'\right)\left(1 - (-1)^n\omega'\right)\mathbf{n} + \ldots .$$

Вычисляем:

$$(\mathbf{R}_u\mathbf{R}_{uu}\mathbf{n}) = -\left(1 + (-1)^n\omega'\right)^2 z_u,$$
$$(\mathbf{R}_u\mathbf{R}_{uu}\mathbf{R}_{uuu}) = z_u^2\left(1 + (-1)^n\omega'\right)^3\left(1 - (-1)^n\omega'\right).$$

Итак, нормальная кривизна кривой равна нулю, а ее геодезическая кривизна и кручение определяются следующими формулами:

$$k_g = -\frac{z_u}{1 + (-1)^n\omega'}, \quad \varkappa = \frac{1 - (-1)^n\omega'}{1 + (-1)^n\omega'}. \tag{3.13}$$

Длина кривой $s = u + (-1)^n\omega(u)$. Поэтому линия $z = \pi n$ тогда и только тогда вырождается в точку, когда $1 + (-1)^n\omega'(u) \equiv 0$, т.е. когда $\omega'(u) = (-1)^{n+1}$.

Для локального исследования поверхности в окрестности ребра, соответствующего значению $z = \pi n$, удобно перейти к координатам линий кривизны (см. п. 3.3). Линии кривизны одного семейства (какого именно — зависит от четности n) касаются данного ребра, а линии другого семейства — пересекают его под прямым углом.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши позволяет утверждать однозначную определенность псевдосферических поверхностей по их ребрам. Имеется в виду следующее. Согласно сказанному выше, каждое решение уравнения sin-Гордона достигает значений $z = \pi n$, которые по теореме Э. Г. Позняка соответствуют ребрам псевдосферической поверхности $\Phi[z]$. Рассмотрим совокупность ребер некоторой псевдосферической поверхности. Кривизна и кручение ребра как пространственной кривой однозначно определяются по уравнению прообраза ребра на плоскости (u, v) и по производной z_u, заданной на ребре как функция от u (см. формулы (3.13)). Это соответствие взаимно однозначно, т.е. по заданному ребру можно определить уравнение $v = \omega(u)$ и $z_u(u, \omega(u))$. А это — начальные данные для задачи Коши. Таким образом, находим решение уравнения sin-Гордона в некотором прямоугольнике, а вместе с ним восстанавливаем и соответствующий фрагмент псевдосферической поверхности. Придадим сказанному точный смысл в следующем утверждении. Под псевдосферической поверхностью, заданной на прямоугольнике $\Pi = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, подразумевается $\Phi[z|_\Pi]$.

Теорема 3.2. *Рассмотрим кривую в* $\mathbb{E}^3$, *определенную радиус-вектором* $\mathbf{R}(s)$, *где* s — *естественный параметр. Рассмотрим связную часть* L *этой кривой* (*конечную или бесконечную*), *на которой кручение* $\varkappa \neq \pm 1$ *и функции*[1]

$$\frac{1}{1 + \varkappa(s)}, \quad \frac{1 - \varkappa(s)}{1 + \varkappa(s)}, \quad \frac{\varepsilon(s)k(s)}{1 + \varkappa(s)},$$

где k — *кривизна кривой а* $\varepsilon(s) = \pm 1$, *принадлежат классу* C^3. *Пусть существует точка* s_0 (*а значит, и некоторая ее окрестность*), *в которой кривизна* $k(s_0) > 0$. *Тогда существует прямоугольник* Π *и ровно две* (*вообще говоря не конгруэнтные друг другу*) *псевдосферические поверхности, заданные на нем, для которых* L *является фрагментом ребра возврата. Для одной поверхности это ребро соответствует четному* n, *а для другой — нечетному.*

---

[1] Сформулированные ниже условия гладкости не исключают возможности существования точек на L, в которых кривизна или кручение бесконечны, а также точек, в которых кривизна равна нулю. Множитель $\varepsilon(s)$, принимающий значения ± 1, добавлен с той целью, чтобы обеспечить функции $\varepsilon(s)k(s)$ достаточную гладкость, которой, вообще говоря, нет у функции $k(s)$ в силу традиционного требования $k(s) \geqslant 0$.

Доказательство. Из формул (3.13) получаем следующие выражения

$$\omega'(u) = (-1)^n \frac{1-\varkappa(s)}{1+\varkappa(s)}, \quad z_u(u,\omega(u)) = -\frac{2k_g(s)}{1+\varkappa(s)}, \quad \frac{ds}{du} = \pm\frac{1}{1+\varkappa(s)},$$

где в правых частях подразумевается подстановка $s = s(u)$. Рассмотрим отдельно случай четного и нечетного n. Пусть, для начала, n четное. Поскольку $k = |k_g|$, то $k_g(s)$, а следовательно, и $z_u(u,\omega(u))$, известно с точностью до знака. Смена знака у начальных условий $z_u(u,\omega(u))$ и $z(u,\omega(u)) = \pi n$ приводит (в силу единственности) к смене знака решения задачи Коши $z(u,v)$, которая, в свою очередь означает смену направления вектора нормали и направлений отсчета координат u и v на асимптотических линиях. Поверхность при этом остается той же самой. Поэтому (вообще говоря, переменный) знак в формуле $k_g = \pm k$ выбираем так, чтобы обеспечить функции $z_u(u,\omega(u))$ нужную гладкость (C^3); а поскольку по условию $\dfrac{\varepsilon(s)k(s)}{1+\varkappa(s)} \in C^3$, то этот знак следует взять равным, например, $\varepsilon(s)$. Знак в выражении для производной ds/du берется, например, так, чтобы производная была положительна. Тогда координата u принимает на L значения $\in [u_1,u_2]$ (где u_1, u_2 возможно $\mp\infty$). Так как кручение не принимает значений ± 1, то $\omega'(u)$ имеет постоянный знак, пусть, для определенности, > 0. Положим $v_1 = \omega(u_1)$, $v_2 = \omega(u_2)$ и рассмотрим прямоугольник $\Pi = [u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$. Согласно доказанной теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения sin-Гордона, в этом прямоугольнике существует единственное решение $z(u,v) \in \mathbf{C}^4(\Pi)$ задачи Коши. Необходимая гладкость решения (C^4) обеспечивается гладкостью начальных данных. Для завершения доказательства осталось построить поверхность. С этой целью рассмотрим точку на L с координатой $s_0 = s(u_0)$, в которой кривизна и кручение конечны и кривизна отлична от нуля. Возьмем вектор $\mathbf{e}_1$ равным вектору касательной к L в этой точке, ориентированному в направлении возрастания координаты u. Вектор $\mathbf{e}_3$ положим равным $\varepsilon(s_0)\mathbf{b}(s_0)$, где $\mathbf{b}(s_0)$ — вектор бинормали кривой L в точке s_0; вектор $\mathbf{e}_2$ выберем так, чтобы ортогональная тройка ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) была правой. Осталось воспользоваться теоремой 3.1. Случай нечетного n рассматривается аналогично. ☐

3.3. Координаты линий кривизны.

3.3.1. Основной триэдр поверхности. Рассмотрим все необходимые выражения в координатах линий кривизны (α,β). Допуская некоторую неточность, сохраним для радиус-вектора обозначение $\mathbf{r}$, но будем писать теперь $\mathbf{r}(\alpha,\beta)$. Кроме того, пусть $\mathbf{n}(\alpha,\beta)$ — вектор нормали поверхности. Переход к координатам линий кривизны осуществляется по формулам

$$u = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Основные квадратичные формы поверхности в этих координатах

$$Q(\alpha,\beta;d\alpha,d\beta) = \cos^2\frac{z}{2}d\alpha^2 + \sin^2\frac{z}{2}d\beta^2, \quad B(\alpha,\beta;d\alpha,d\beta) = \left(d\alpha^2+d\beta^2\right)\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}. \tag{3.14}$$

Уравнение sin-Гордона принимает вид

$$z_{\alpha\alpha} - z_{\beta\beta} = \sin z. \tag{3.15}$$

В координатах линий кривизны деривационные формулы удобнее записывать для ортогональной тройки единичных векторов

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\beta|}, \quad \mathbf{n},$$

называемой *основным триэдром поверхности*, или триэдром Дарбу. Имеем:

$$\mathbf{r}_\alpha = \cos\frac{z}{2}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_\beta = \sin\frac{z}{2}\mathbf{e}_2$$

и деривационные формулы запишутся в виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}_{\alpha} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}z_\beta & -\sin\frac{z}{2}\\ -\frac{1}{2}z_\beta & 0 & 0\\ \sin\frac{z}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}_{\beta} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}z_\alpha & 0\\ -\frac{1}{2}z_\alpha & 0 & \cos\frac{z}{2}\\ 0 & -\cos\frac{z}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Отметим, что условием согласования матричных уравнений (3.16) является уравнение sin-Гордона (3.15).

Получим выражения для кривизн и кручения линий кривизны. Направляющим вектором линии (α), определяемой уравнением $\beta = \beta_0$, является $\mathbf{e}_1$, вектором геодезической нормали — $\mathbf{e}_2$. Сравнивая формулы (3.16) с формулами Френе для поверхностной полосы (3.2), выводим, что геодезическое кручение линии кривизны равно нулю (что согласуется с известным общим свойством линий кривизны произвольной поверхности), а кривизны определяются формулами

$$k_g = \frac{\frac{1}{2}z_\beta}{\cos\frac{z}{2}}, \quad k_n = -\operatorname{tg}\frac{z}{2}. \tag{3.17}$$

Аналогично, для линии (β), определяемой уравнением $\alpha = \alpha_0$, находим

$$k_g = -\frac{\frac{1}{2}z_\alpha}{\sin\frac{z}{2}}, \quad k_n = \operatorname{ctg}\frac{z}{2}.$$

Подробности можно найти в [43].

3.3.2. Псевдосферическая поверхность в окрестности ребра. Покажем каким образом можно исследовать псевдосферическую поверхность в окрестности ребра $z = \pi n$. Рассмотрим для определенности случай нечетного $n = 2m+1$. Пусть на плоскости (α, β) эта линия уровня определяется (локально) уравнением $\beta = \varpi(\alpha)$. Радиус-вектор ребра $\mathbf{R}(\alpha) = \mathbf{r}(\alpha, \varpi(\alpha))$, поэтому в рассматриваемом случае $\mathbf{R}'(\alpha) = (-1)^m\varpi'(\alpha)\mathbf{e}_2(\alpha, \varpi(\alpha))$. Следовательно, вектор $\mathbf{e}_2$ касателен к ребру, а $\mathbf{e}_1$ перпендикулярен ему. Этот вывод справедлив, конечно же, при условии, что $\varpi'(\alpha)$ не равно тождественно нулю, т.е. что ребро не вырождается в точку. Отметим, что естественный параметр ребра $s = \varpi(\alpha)$. Рассмотрим на ребре точку (α_0, β_0). Через эту точку проходит линия (β_0) перпендикулярно ребру. Для локального исследования этой линии в окрестности точки (α_0, β_0) обратимся к системе деривационных уравнений (3.16). Радиус-вектор линии (β_0) находим по формуле Тейлора

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\alpha, \beta_0) = {}& \frac{(-1)^{m+1}}{4}z_\alpha^0(\alpha-\alpha_0)^2\mathbf{e}_1^0 + \\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{12}\left(2z_{\alpha\alpha}^0\mathbf{e}_1^0 + z_\alpha^0 z_\beta^0\mathbf{e}_2^0 + 2(-1)^{m+1}z_\alpha^0\mathbf{n}^0\right)(\alpha-\alpha_0)^3 + O((\alpha-\alpha_0)^4),\end{aligned}$$

где функции с верхним индексом ^{0} берутся в точке $O(\alpha_0, \beta_0)$. Примем векторы $\mathbf{n}^0$, $\mathbf{e}_1^0$ за орты декартовой системы координат $O\xi\eta$ с началом в точке O. В этой системе координат линия (β_0) определяется параметрическими уравнениями

$$\xi \sim \frac{1}{6}z_\alpha^0(\alpha-\alpha_0)^3, \quad \eta \sim \frac{(-1)^{m+1}}{4}z_\alpha^0(\alpha-\alpha_0)^2.$$

Таким образом, в случае $z_\alpha^0 \neq 0$ в нормальном сечении ребра лежит полукубическая парабола. Другие случаи ($z_\alpha^0 = 0$, но $z_{\alpha\alpha}^0 \neq 0$ и т. д.) рассматриваются аналогично.

3.3.3. Псевдосферические поверхности Иоахимсталя. Опишем класс псевдосферических поверхностей, у которых одно семейство линий кривизны — плоские кривые. Эти псевдосферические поверхности являются поверхностями Иоахимсталя и в точности соответствуют решениям $z(\alpha, \beta)$ уравнения sin-Гордона, получающимся методом разделения переменных (см. п. 2.3). Вообще поверхностью Иоахимсталя называется поверхность, у которой одно семейство линий кривизны (α)

лежит в плоскостях одного пучка. При этом каждая линия (β) второго семейства линий кривизны поверхности лежит на сфере, пересекающей поверхность под прямым углом, центр которой находится на оси $O\zeta$ пучка плоскостей. Доказывается [39], что поверхность Иоахимсталя характеризуется как поверхность, образованная ортогональными траекториями (являющимися линиями (α)) однопараметрического семейства сфер с центрами на одной прямой. В декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$ все поверхности Иоахимсталя могут быть описаны с точностью до квадратур [39].

В случае, когда переменные в уравнении sin-Гордона разделяются,

$$z(\alpha,\beta) = 4\operatorname{arctg} e^{A(\alpha)+B(\beta)}. \tag{3.18}$$

Геодезическая кривизна линии (α) равна $\dfrac{B'(\beta_0)}{\operatorname{sh}(A+B)}$ и пропорциональна ее нормальной кривизне $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(A+B)}$, поэтому угол ϑ между нормалью линии (α) и нормалью к поверхности остается на линии (α) постоянным (см. формулу (3.5)). Поскольку геодезическое кручение линии кривизны равно нулю, то отсюда в силу последней формулы в (3.4), следует, что кручение линии (α) как кривой в пространстве также равно нулю, т.е. что линия (α) — плоская. Доказательство того, что плоскости линий (α) образуют пучок, т.е. пересекаются по одной прямой, более громоздко, и мы его здесь не будем приводить. Докажем, следуя Г. Дарбу [49], следующую теорему.

Теорема 3.3. *Псевдосферическая поверхность тогда и только тогда является поверхностью Иоахимсталя, когда* $z(\alpha,\beta)$ *определяется формулой* (3.18). *В этом случае ее радиус-вектор в системе координат* $O\xi\eta\zeta$

$$\mathbf{r}(\alpha,\beta) = \{\rho(\alpha,\beta)\cos\phi(\beta),\ \rho(\alpha,\beta)\sin\phi(\beta),\ h(\alpha,\beta)\}.$$

Положение центров сфер определяются вектором $\mathbf{x}(\alpha) = \{0,0,x(\alpha)\}$, *а их радиусы — формулой* $R(\alpha) = \dfrac{1}{|A'(\alpha)|}$. *Здесь*

$$\rho = \frac{1}{ab}\sqrt{B'^2+1}\sin\frac{z}{2}, \qquad h = \frac{1}{ab}\left(A'\cos\frac{z}{2} + \int A'^2 d\alpha\right),$$
$$\phi = ab\int\frac{d\beta}{B'^2+1}, \qquad x = \frac{1}{ab}\left(-\frac{A''}{A'} + \int A'^2 d\alpha\right).$$

В случае $A'(\alpha_0) = 0$ *соответствующая сфера вырождается в плоскость, определяемую уравнением*

$$\zeta = \frac{1}{ab}\int A'^2 d\alpha.$$

Доказательство. Пусть поверхность $\Phi[z]$ является поверхностью Иоахимсталя. Тогда каждая линия (β) лежит на некоторой сфере радиуса $R = R(\alpha_0)$, пересекающей поверхность под прямым углом. Докажем, что в этом случае геодезическая кривизна линии (β), равная $k_g = -\dfrac{z_\alpha}{2\sin\frac{z}{2}}$, постоянна. Обозначим угол между главной нормалью линии (β) и нормалью к поверхности через ϑ. Нормаль к сфере, нормаль к поверхности и главная нормаль линии (β) лежат в одной плоскости, поэтому угол между нормалью к сфере и главной нормалью линии (β) равен $\vartheta + \pi/2$. Поскольку нормальная кривизна любой кривой на сфере $k_n^{(R)} = 1/R$ и любая кривая на сфере является ее линией кривизны, то по формулам (3.4)

$$\frac{1}{R} = k_n^{(R)} = k\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -k\sin\vartheta = -k_g. \tag{3.19}$$

Итак, мы получили, что геодезическая кривизна линии (β) постоянна. Отсюда сразу следует выражение (3.18) для $z(\alpha,\beta)$.

Пусть теперь $z(\alpha,\beta)$ определяется выражением (3.18). Тогда геодезическая кривизна линии (β) постоянна и равна $k_g = -A'(\alpha_0)$. С другой стороны, вектор $\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{r}(\alpha,\beta) - \dfrac{1}{A'(\alpha)}\mathbf{e}_1(\alpha,\beta)$ зависит только от α, что легко устанавливается дифференцированием по β. Это доказывает, что линия (β)

лежит на сфере радиуса $R = \dfrac{1}{|A'(\alpha_0)|}$. Обозначим угол между нормалью к сфере и нормалью к поверхности через ω. По формуле (3.4) имеем для кручения линии (β) равенство $\varkappa = -\dot\vartheta$ с одной стороны (поскольку $\varkappa_g = 0$) и с другой — $\varkappa = -\dot\vartheta - \dot\omega$ (поскольку угол между нормалью к сфере и главной нормалью линии (β) равен $\vartheta + \omega$, а $\varkappa_g^{(R)} = 0$). Поэтому $\dot\omega = 0$. Итак, угол ω — постоянная величина. Аналогично (3.19), имеем

$$\frac{1}{R} = k_n^{(R)} = k\cos(\vartheta + \omega) = k_n \cos\omega - k_g \sin\omega.$$

Это равенство может выполняться при постоянном ω, только если $\omega = \pi/2$ или $3\pi/2$ — в зависимости от знака $A'(\alpha_0)$. Поэтому сфера пересекает поверхность под прямым углом.

Продифференцируем вектор $\mathbf{x}$ по α:

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{1}{A'^2}\left[\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right)\mathbf{e}_1 - A'B'\sin\frac{z}{2}\mathbf{e}_2 + A'\sin\frac{z}{2}\mathbf{n}\right].$$

Прямым вычислением с использованием формулы

$$\cos\frac{z}{2} = \frac{A'' - B''}{B'^2 + 1 - A'^2}$$

и уравнений (2.18) пункта 2.3 устанавливаем, что

$$B'' + (B'^2 + 1)\cos\frac{z}{2} = A'' + A'^2\cos\frac{z}{2} \tag{3.20}$$

и, далее,

$$\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right)^2 + \left(B'^2 + 1\right)A'^2\sin^2\frac{z}{2} = a^2b^2. \tag{3.21}$$

Следовательно, $|\mathbf{x}_\alpha| = \dfrac{ab}{A'^2}$. Вычисляя далее производную по α от единичного вектора

$$\frac{\mathbf{x}_\alpha}{|\mathbf{x}_\alpha|} = \frac{1}{ab}\left[\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right)\mathbf{e}_1 - A'B'\sin\frac{z}{2}\mathbf{e}_2 + A'\sin\frac{z}{2}\mathbf{n}\right], \tag{3.22}$$

находим, что она равна нулю, т.е. вектор (3.22) — являющийся касательным вектором к линии центров сфер, содержащих линии (β) — постоянный. Поэтому эта линия является прямой, а поверхность $\Phi[z]$ — поверхностью Иоахимсталя.

Теперь получим выражение для радиус-вектора поверхности $\Phi[z]$. Примем постоянный единичный вектор (3.22) за орт $\{0,0,1\}$ декартовой системы координат $O\xi\eta\zeta$ в $\mathbb{E}^3$. Рассмотрим точку M, определяемую радиус-вектором $\mathbf{r}(\alpha,\beta)$. Она лежит на сфере радиуса $R(\alpha) = \dfrac{1}{|A'(\alpha)|}$ с центром в точке C, определяемой радиус-вектором $\mathbf{x}(\alpha)$. Обозначим через M' проекцию точки M на ось $O\zeta$. Находим для координаты $h(\alpha,\beta) = OM'$

$$h_\alpha = \frac{1}{ab}\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right)\cos\frac{z}{2}, \quad h_\beta = -\frac{A'B'}{ab}\sin^2\frac{z}{2}.$$

Далее, поскольку

$$\left(\cos\frac{z}{2}\right)_\alpha = -A'\sin^2\frac{z}{2}, \quad \left(\cos\frac{z}{2}\right)_\beta = -B'\sin^2\frac{z}{2},$$

то

$$h = \frac{1}{ab}\int\left(A''\cos\frac{z}{2} + A'^2\cos^2\frac{z}{2}\right)d\alpha = \frac{1}{ab}\left(A'\cos\frac{z}{2} + \int A'^2 d\alpha\right).$$

Далее,

$$CM' = (\mathbf{r} - \mathbf{x})\frac{\mathbf{x}_\alpha}{|\mathbf{x}_\alpha|} = \frac{1}{abA'}\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right),$$

поэтому, используя формулу (3.21), получаем

$$\rho^2 = R^2 - |\mathsf{CM}'|^2 = \frac{1 - \frac{1}{a^2b^2}\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right)^2}{A'^2} = \frac{B'^2 + 1}{a^2b^2}\sin^2\frac{z}{2}.$$

Кроме этого получаем величину $x = OC = OM' - CM'$

$$x = \frac{1}{ab}\left(-\frac{A''}{A'} + \int A'^2 d\alpha\right).$$

Выражение для $d\phi$ получаем из уравнения

$$\cos^2\frac{z}{2}d\alpha^2 + \sin^2\frac{z}{2}d\beta^2 = dh^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2,$$

подставляя в него дифференциалы dh и $d\rho$

$$dh = \frac{1}{ab}\left[\left(A'' + A'^2\cos\frac{z}{2}\right)\cos\frac{z}{2}d\alpha - A'B'\sin^2\frac{z}{2}d\beta\right],$$

$$d\rho = \frac{1}{ab}\left[\frac{B'}{\sqrt{B'^2+1}}\left(B'' + (B'^2+1)\cos\frac{z}{2}\right)\sin\frac{z}{2}d\beta + A'\sqrt{B'^2+1}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}d\alpha\right]$$

и пользуясь формулами (3.20), (3.21). ☐

Вид радиус-вектора псевдосферической поверхности Иоахимсталя содержится в подробном исследовании Р. Штойервальда [60]. Им исследованы псевдосферические поверхности Иоахимсталя, которые автором названы поверхностями Эннепера, поскольку именно А. Эннеперу [51] и Г. Добринеру [50] принадлежит идея получения этой формулы. А также исследованы псевдосферические поверхности, получаемые из них геометрическим преобразованием Бэклунда.

В частном случае, когда $a = b$

$$A' = -a\,\mathrm{th}(a\alpha), \quad B' = -\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{1-a^2}\beta)$$

получается (частное) бризерное решение

$$z(\alpha,\beta) = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{a\cos(\sqrt{1-a^2}\beta)}{\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{ch}(a\alpha)}$$

и формула для радиус-вектора исследована Дж. Клейном [56].

3.4. Изотермические координаты.

3.4.1. Модель Пуанкаре плоскости Λ^2. Изотермическая метрика

$$Q(x,y;dx,dy) = \lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$$

имеет гауссову кривизну $K \equiv -1$, если $(\ln\lambda)_{xx} + (\ln\lambda)_{yy} = 2\lambda$. Решение этого уравнения выглядит наиболее просто, когда зависит только от одной переменной. В этом случае $\lambda = 1/y^2$ и мы получаем

$$Q(x,y;dx,dy) = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2). \tag{3.23}$$

Верхняя полуплоскость $\mathbb{H} = \{(x,y) \mid y > 0\}$ с такой метрикой — это известная модель Пуанкаре плоскости Лобачевского Λ^2. Эта модель замечательна тем, что она конформная, т.е. внутренние углы метрики (3.23) (= углы в Λ^2) равны евклидовым углам на плоскости[1]. Прямые плоскости Λ^2 в интерпретации полуплоскости Пуанкаре — это полуокружности $\{(x,y) \mid (x-a)^2+y^2 = r^2,\ y > 0\}$ и полупрямые $\{(x,y) \mid x = a,\ y > 0\}$. Прямая $y = 0$ и бесконечно удаленные точки полуплоскости образуют абсолют плоскости Лобачевского Λ^2. Группа движений Λ^2 состоит из всех дробно-линейных (в комплексной записи) конформных автоморфизмов $\mathbb{H}$, т.е. из всех преобразований вида

$$w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}, \tag{3.24}$$

где $w = x + iy$, а действительные числа a, b, c, d подчинены условию $ad - bc = 1$. Отметим, что отображение

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\right) \mapsto \left(w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}\right)$$

---

[1] Этим свойством обладает любая изотермическая метрика.

является гомоморфизмом с ядром $\{\pm E\}$ и потому группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm E\}$ есть матричное представление группы движений Λ^2 в интерпретации $\mathbb{H}$.

3.4.2. Переход от чебышевских координат к изотермическим. Дадим формулы перехода от чебышевских (не обязательно асимптотических) координат (u, v) к координатам (x, y) полуплоскости Пуанкаре. Будем писать $x(u, v)$ и $y(u, v)$. Поскольку, с одной стороны,

$$d\mathbf{r}^2 = \frac{1}{y^2}\left((x_u^2 + y_u^2)du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v)du dv + (x_v^2 + y_v^2)dv^2\right),$$

а с другой —

$$d\mathbf{r}^2 = du^2 + 2\cos z(u, v) du dv + dv^2,$$

то векторы (x_u, y_u) и (x_v, y_v) по модулю равны $y(u, v)$, а угол между ними равен $z(u, v)$. В общем виде эти условия выражены в системе уравнений:

$$(x, y)_u = y\left(\sin\frac{z-\zeta}{2}, \cos\frac{z-\zeta}{2}\right), \quad (x, y)_v = y\left(\sin\frac{z+\zeta}{2}, \cos\frac{z+\zeta}{2}\right), \tag{3.25}$$

где угол $\zeta(u, v)$ — пока произвольный — должен быть найден из условия согласования $(x, y)_{uv} = (x, y)_{vu}$. Получаем систему уравнений для функции $\zeta(u, v)$

$$\zeta_u = -z_u + 2\sin\frac{\zeta - z}{2}, \quad \zeta_v = z_v + 2\sin\frac{\zeta + z}{2},$$

в которой узнаем преобразование Бэклунда с $p = 1$. Найдя $\zeta(u, v)$, находим $x(u, v)$ и $y(u, v)$ интегрируя уравнения (3.25):

$$y(u, v) = y(0,0)\exp\left\{\int_0^u \cos\frac{\zeta - z}{2}du + \int_0^v \cos\frac{\zeta + z}{2}dv + \frac{1}{2}\int_0^u\int_0^v (\cos z - \cos\zeta) dv\, du\right\},$$

$$x(u, v) = x(0,0) - \int_0^u y\sin\frac{\zeta - z}{2}du - \int_0^v y\sin\frac{\zeta + z}{2}dv + \int_0^u\int_0^v y\sin\zeta dv\, du.$$

По этим формулам сначала вычисляется $y(u, v)$, а затем $x(u, v)$. Отметим, что в силу неоднозначности введения чебышевских координат координаты полуплоскости Пуанкаре также вводятся неоднозначно. Переход от одних координат Пуанкаре к другим осуществляется по формуле (3.24).

Получим выражение для геодезической кривизны линии L на псевдосферической поверхности, заданной в координатах верхней полуплоскости Пуанкаре (x, y) уравнением $y = f(x)$. Вычисляем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{2y}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2y}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2y}.$$

Радиус-вектор линии L определяется через радиус-вектор поверхности равенством $\mathbf{R}(x) = \mathbf{r}(x, f(x))$. Используя деривационные формулы Гаусса—Вейнгартена, выводим выражение для геодезической кривизны линии L:

$$k_g = \frac{f'^3}{(1 + f'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{1 + f'^2}} + \frac{df'/ds}{1 + f'^2}, \tag{3.26}$$

где штрих обозначает производную по x, а s — естественный параметр кривой L, $ds = \dfrac{\sqrt{1 + f'^2}}{f}dx$.

Эта формула может быть использована для выяснения вида области на плоскости Лобачевского (в интерпретации полуплоскости Пуанкаре), соответствующей фрагменту псевдосферической поверхности, заключенному между ребрами L_i. Для этого необходимо вычислить геодезическую кривизну каждого из ребер L_i по формуле (3.13) и затем из формулы (3.26) получить уравнения ребер $y = f_i(x)$ — это будут границы искомой области.

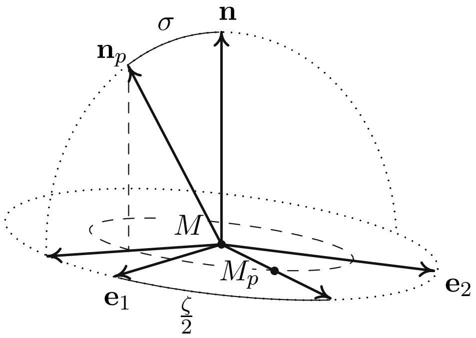

Рис. 2

Если рассматривать (3.26) как уравнение относительно f', то удобно сделать замену $f' = \operatorname{tg} w(s)$; тогда (3.26) примет вид

$$w' + \sin^3 w + \frac{1}{2}\cos w = k_g(s), \quad w \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

где штрих теперь обозначает производную по s.

3.5. Геометрическое преобразование Бэклунда. Хорошо известен алгоритм, изложенный в [43], основанный на преобразовании Бэклунда для уравнения sin-Гордона и позволяющий по известному радиус-вектору $\mathbf{r}(u,v)$ псевдосферической поверхности $\Phi[z]$ получить радиус-вектор $\mathbf{r}_p(u,v)$ псевдосферической поверхности $\Phi[\mathrm{B}_p\, z]$. Он называется геометрическим преобразованием Бэклунда, или преобразованием Бэклунда для псевдосферических поверхностей. Изложение этого алгоритма будем вести в координатах линий кривизны (α,β). Зафиксируем параметр σ, имеющий смысл угла между вектором нормали к исходной поверхности, взятым в точке с произвольными координатами (α,β), и вектором нормали к искомой поверхности, взятым в точке с теми же координатами. Отметим, что σ берется не зависящим от координат, и потому этот угол будет одинаковым для всех точек.

Рассмотрим точку М исходной поверхности и касательную плоскость в этой точке, образованную векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Положим радиус-вектор новой поверхности равным

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \left(\mathbf{e}_1 \cos\frac{\zeta}{2} + \mathbf{e}_2 \sin\frac{\zeta}{2}\right)\sin\sigma, \tag{3.27}$$

а нормаль к новой поверхности — равной

$$\mathbf{n}_p = \mathbf{n}\cos\sigma + \left(\mathbf{e}_1 \sin\frac{\zeta}{2} - \mathbf{e}_2 \cos\frac{\zeta}{2}\right)\sin\sigma, \tag{3.28}$$

где $\zeta(\alpha,\beta)$ — некоторая функция. Обратим внимание, что при этом

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + [\mathbf{n}, \mathbf{n}_p].$$

Функцию $\zeta(\alpha,\beta)$ определяем из условий ортогональности векторов $\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial\beta}$ вектору $\mathbf{n}_p$. При вычислении производных используем формулы (3.16). Находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial\alpha} &= \mathbf{e}_1\left(\cos\frac{z}{2} - \frac{\zeta_\alpha + z_\beta}{2}\sin\frac{\zeta}{2}\sin\sigma\right) + \mathbf{e}_2\frac{\zeta_\alpha + z_\beta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\sin\sigma - \mathbf{n}\cos\frac{\zeta}{2}\sin\frac{z}{2}\sin\sigma,\\ \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial\beta} &= -\mathbf{e}_1\frac{\zeta_\beta + z_\alpha}{2}\sin\frac{\zeta}{2}\sin\sigma + \mathbf{e}_2\left(\sin\frac{z}{2} + \frac{\zeta_\beta + z_\alpha}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\sin\sigma\right) + \mathbf{n}\sin\frac{\zeta}{2}\cos\frac{z}{2}\sin\sigma.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Далее, из условий ортогональности получаем систему уравнений, связывающую неизвестную $\zeta(\alpha,\beta)$ с сетевым углом $z(\alpha,\beta)$ исходной поверхности:

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha + z_\beta &= \frac{2}{\sin\sigma}\left(\cos\frac{z}{2}\sin\frac{\zeta}{2} - \cos\sigma\sin\frac{z}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\right), \\ \zeta_\beta + z_\alpha &= -\frac{2}{\sin\sigma}\left(\sin\frac{z}{2}\cos\frac{\zeta}{2} - \cos\sigma\cos\frac{z}{2}\sin\frac{\zeta}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Дифференцируя первое уравнение по β, а второе по α и вычитая из первого второе, можно убедиться в том, что условием совместности этой системы является уравнение sin-Гордона для $z(\alpha,\beta)$. С другой стороны, поскольку $z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}$, то из этой системы следует, что $\zeta(\alpha,\beta)$ удовлетворяет уравнению sin-Гордона. На самом деле система (3.30) является ни чем иным, как преобразованием Бэклунда с параметром $p = \operatorname{tg}\sigma/2$, записанным в координатах (α,β) (что легко проверяется), поэтому мы имеем полное основание обозначить $\zeta = \mathrm{B}_p\, z$. Теперь докажем, что функция $\zeta(\alpha,\beta)$ является сетевым углом чебышевской сети поверхности, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}_p$. Тем самым будет доказано, что эта поверхность — псевдосферическая (поскольку $\zeta(\alpha,\beta)$ удовлетворяет уравнению sin-Гордона). Действительно, подставляя в выражения для производных (3.29) суммы $\zeta_\alpha + z_\beta$, $\zeta_\beta + z_\alpha$ из уравнений (3.30), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}_p}{\partial\alpha} &= \left[\mathbf{e}_+\cos\frac{z}{2} + \mathbf{e}_-\sin\frac{z}{2}\cos\sigma - \mathbf{n}\sin\frac{z}{2}\sin\sigma\right]\cos\frac{\zeta}{2}, \\ \frac{\partial\mathbf{r}_p}{\partial\beta} &= \left[\mathbf{e}_+\sin\frac{z}{2} - \mathbf{e}_-\cos\frac{z}{2}\cos\sigma + \mathbf{n}\cos\frac{z}{2}\sin\sigma\right]\sin\frac{\zeta}{2}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

где для сокращения формул введены обозначения

$$\mathbf{e}_+ = \mathbf{e}_1\cos\frac{\zeta}{2} + \mathbf{e}_2\sin\frac{\zeta}{2}, \quad \mathbf{e}_- = \mathbf{e}_1\sin\frac{\zeta}{2} - \mathbf{e}_2\cos\frac{\zeta}{2}.$$

Из формул (3.31) следует выражение для первой квадратичной формы построенной поверхности:

$$Q(\alpha,\beta) = \cos^2\frac{\zeta}{2}d\alpha^2 + \sin^2\frac{\zeta}{2}d\beta^2,$$

которое совпадает с приведенным в (3.14). Можно также показать, что линии (α) и (β) на построенной поверхности будут линиями кривизны. Поэтому построенная поверхность является искомой псевдосферической поверхностью $\Phi[\mathrm{B}_p\, z]$.

Геометрическое преобразование Бэклунда имеет приложение [53, 58] к теории кривых постоянного кручения. Достаточно рассмотреть кручение $\varkappa = \pm 1$, т.к. общий случай приводится к рассматриваемому изменением масштаба. Кривая кручения $\varkappa = \pm 1$ может быть включена в некоторую псевдосферическую поверхность как асимптотическая линия. Эта псевдосферическая поверхность есть $\Phi[z]$, где $z(u,v)$ определяется с большим произволом по известной кривизне кривой, равной, с другой стороны, $-z_u$, если $\varkappa = 1$ и кривая рассматривается как линия (u), или z_v — если $\varkappa = -1$. Поскольку геометрическое преобразование Бэклунда переводит линии кривизны в линии кривизны, то оно переводит асимптотические в асимптотические. Поэтому ставит в соответствие данной кривой единичного кручения некоторую другую кривую единичного кручения.

Теперь приведем выражение для радиус-вектора (3.27) к координатам (u,v). По формулам перехода из п. 3.3.1 получаем

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \frac{2p}{p^2+1}\frac{1}{\sin z}\left(\mathbf{r}_u\sin\frac{z + \mathrm{B}_p\, z}{2} + \mathbf{r}_v\sin\frac{z - \mathrm{B}_p\, z}{2}\right). \tag{3.32}$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения для радиус-векторов $\mathbf{R}_p$ ребер поверхности $\Phi[\mathrm{B}_p\, z]$. Получим их. Особенности псевдосферической поверхности (ребра и острия) соответствуют значениям πn сетевого угла чебышевской сети, так что в (3.32) подставляем $\mathrm{B}_p\, z = \pi n$:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{r} + \frac{p}{p^2+1}\frac{(-1)^m}{\cos\frac{z}{2}}(\mathbf{r}_u + \mathbf{r}_v) \tag{3.33}$$

— для четных $n = 2m$ и

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{r} + \frac{p}{p^2+1}\frac{(-1)^m}{\sin\frac{z}{2}}(\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v) \tag{3.34}$$

— для нечетных $n = 2m + 1$.

3.6. Метод подвижного репера и формула Сима. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ обозначает радиус-вектор точки в $\mathbb{E}^3$ и в каждой точке задан ортонормированный базис (*подвижный репер*) ($\mathbf{e}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}_3(\mathbf{x})$), причем функции $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ — достаточно гладкие. В координатной записи $\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) = (e_1^1(\mathbf{x}), e_1^2(\mathbf{x}), e_1^3(\mathbf{x}))$ и т. п. Считая (x_1, x_2, x_3) независимыми переменными, получим разложения

$$d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i(\mathbf{x}), \quad d\mathbf{e}_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}\omega_{ji}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i(\mathbf{x}), \tag{3.35}$$

где через ω_i и ω_{ji} обозначены линейные комбинации дифференциалов dx_1, dx_2, dx_3 (*1-формы*)

$$\omega_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{3} e_1^k(\mathbf{x})dx_k$$

и т. п., которые не обязательно являются дифференциалами некоторых функций (полными дифференциалами). Множество всех 1-форм от переменных (x_1, x_2, x_3) с коэффициентами, являющимися гладкими функциями, наделено естественной структурой модуля $\mathrm{T}^*\mathbb{E}^3$ над алгеброй гладких функций (в качестве базиса может быть выбрана, например, тройка dx_1, dx_2, dx_3). Стандартным образом строится внешняя алгебра этого модуля $\bigwedge \mathrm{T}^*\mathbb{E}^3$ с операцией внешнего произведения $\wedge$. Эта алгебра является объединением трех модулей: (3-мерного) модуля 1-форм $\bigwedge^1 \mathrm{T}^*\mathbb{E}^3$, (3-мерного) модуля 2-форм $\bigwedge^2 \mathrm{T}^*\mathbb{E}^3$ (с базисом $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_3 \wedge dx_1$) и (1-мерного) модуля 3-форм $\bigwedge^3 \mathrm{T}^*\mathbb{E}^3$ (с базисным элементом $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$). Коммутационное свойство внешнего произведения выглядит следующим образом:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{\deg\omega_1\cdot\deg\omega_2}\omega_2 \wedge \omega_1,$$

где $\deg\omega$ — порядок формы ω. На внешней алгебре дифференциальных форм определен оператор внешнего дифференцирования d, переводящий 1-форму в 2-форму, 2-форму в 3-форму, а 3-форму в нуль. На гладких функциях (0-формах) оператор внешнего дифференцирования действует как обычный дифференциал (и таким образом переводит 0-форму в 1-форму). На произведение $f\omega$ гладкой функции f и формы ω и на внешнее произведение двух форм $\omega_1 \wedge \omega_2$ он действует по формуле

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

и, соответственно,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg\omega_1}\omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Упомянем важное свойство этого оператора: $d \circ d \equiv 0$. Подробности можно найти в [32, 38].

Будем теперь считать, что радиус-вектор $\mathbf{x}$ описывает некоторую гладкую поверхность (т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{r}(u, v)$), $\mathbf{e}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_2(\mathbf{r})$ — ее направляющие векторы, а $\mathbf{e}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(u, v)$ — вектор нормали. Координаты (u, v) принимают значения в некоторой (связной) области $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Все дифференциальные формы из исходной алгебры $\bigwedge \mathrm{T}^*\mathbb{E}^3$ будем теперь рассматривать как элементы подалгебры $\bigwedge \mathrm{T}^*\mathcal{U}$, порожденной элементами du, dv и $du \wedge dv$. Тогда $\omega_3(u, v) = 0$, 1-формы $\omega_1(u, v)$ и $\omega_2(u, v)$ линейно независимы, а остальные 1-формы $\omega_{ji}(u, v)$ через них линейно выражаются. Разложения (3.35) теперь принимают вид

$$d\mathbf{r} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2, \quad \begin{pmatrix} d\mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & -\omega_{31} \\ \omega_3 & 0 & -\omega_{32} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

где учтено, что $(\mathbf{e}_i, d\mathbf{e}_j) + (\mathbf{e}_j, d\mathbf{e}_i) = 0$. Здесь и далее мы обозначаем через ω_3 форму, которую ранее обозначали через ω_{21}. Первая и вторая квадратичные формы поверхности соответственно равны

$$d\mathbf{r}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = -\omega_1\omega_{31} - \omega_2\omega_{32};$$

для этого достаточно обратится к выражениям (3.36). Теперь получим *структурные уравнения* поверхности. С этой целью продифференцируем внешним образом первое уравнение в (3.36). Слева будет нуль, а справа воспользуемся вторыми уравнениями из системы (3.36). Приравнивая нулю коэффициенты при базисных векторах, получим

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad \omega_{31} \wedge \omega_1 + \omega_{32} \wedge \omega_2 = 0.$$

Проводя аналогичную процедуру со вторыми уравнениями, получаем

$$d\omega_3 = \omega_{32} \wedge \omega_{31}, \quad d\omega_{31} = \omega_3 \wedge \omega_{32}, \quad d\omega_{32} = \omega_{31} \wedge \omega_3. \tag{3.37}$$

Система (3.37) — это система уравнений Петерсона—Кодацци и Гаусса для дифференциальных форм.

Построим координатные линии u и v в направлениях, определяемых в каждой точке поверхности векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно. Обозначим стандартным образом коэффициенты основных квадратичных форм поверхности в этих координатах. Тогда из уравнений (3.36) нетрудно вывести следующие выражения для 1-форм ω_{31} и ω_{32}:

$$\omega_{31} = -\frac{L}{E}\omega_1 - \frac{M}{\sqrt{EG}}\omega_2, \quad \omega_{32} = -\frac{M}{\sqrt{EG}}\omega_1 - \frac{N}{G}\omega_2;$$

и подставив их в первое уравнение системы (3.37), получить такой результат:

$$d\omega_3 = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

где K — гауссова кривизна поверхности. Это уравнение — переформулировка уравнения Гаусса на языке дифференциальных форм.

Для псевдосферических поверхностей получаем следующую систему уравнений, определяющую псевдосферическую метрику поверхности:

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{3.38}$$

Если на поверхности выбраны чебышевские координаты (в стандартных обозначениях) и векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ из (3.36) ориентированы в направлениях $\mathbf{r}_u + \mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v$ соответственно, то

$$\omega_1 = \cos\frac{z}{2}(du + dv), \quad \omega_2 = \sin\frac{z}{2}(du - dv), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(z_u du - z_v dv)$$

и эта система эквивалентна уравнению sin-Гордона

$$z_{uv} = \sin z,$$

что проверяется подстановкой. Отметим, что (u, v) — не обязательно асимптотические координаты. Если они являются асимптотическими чебышевскими координатами, то векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ориентированы в главных направлениях.

При гладком переходе к другому реперу

$$(\mathbf{e}_1(u,v), \mathbf{e}_2(u,v), \mathbf{n}(u,v)) \to (\tilde{\mathbf{e}}_1(\tilde{u},\tilde{v}), \tilde{\mathbf{e}}_2(\tilde{u},\tilde{v}), \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{u},\tilde{v}))$$

и одновременной гладкой (диффеоморфной) замене координат

$$h : (u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$$

новые формы $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ связаны со старыми следующим образом:

$$h^* \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Поскольку при таком переходе вектор $\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathbf{n} \circ h^{-1}(\tilde{u},\tilde{v})$ (не меняется), а векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1(\tilde{u},\tilde{v}), \tilde{\mathbf{e}}_2(\tilde{u},\tilde{v})$ совмещаются с $\mathbf{e}_1(u,v), \mathbf{e}_2(u,v)$ поворотом на угол $\theta(u,v)$. Формула (3.39) выводится непосредственно из соотношений (3.36). Формула (3.39) описывает преобразование наиболее общего вида, переводящее один набор форм ω_i, определяющих псевдосферическую метрику, в другой набор форм $\tilde{\omega}_i$, также определяющих псевдосферическую метрику. Отметим, что если ω_i и $\tilde{\omega}_i$ — какие-то два набора форм, определяющих псевдосферическую метрику, то они связаны преобразованием (3.39).

Пусть $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначив

$$\Omega = -\sigma_1\omega_1 - \sigma_2\omega_2 + i\sigma_3\omega_3, \tag{3.40}$$

где i — мнимая единица, мы запишем систему уравнений (3.38) как одно уравнение

$$d\Omega = \frac{1}{2}\Omega \wedge \Omega. \tag{3.41}$$

В координатной записи $\Omega = 2(U du + V dv)$, где (u, v) — чебышевские координаты, коэффициент 2 выбран для удобства. Тогда уравнение (3.41) эквивалентно уравнению

$$U_v - V_u = VU - UV, \tag{3.42}$$

которое может быть интерпретировано как условие совместности системы матричных уравнений:

$$\Psi_u = U\Psi, \quad \Psi_v = V\Psi. \tag{3.43}$$

В чебышевских координатах имеем следующие выражения:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{iz_u}{4} & -\frac{1}{2}e^{-\frac{iz}{2}} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{iz}{2}} & -\frac{iz_u}{4} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{iz_v}{4} & -\frac{1}{2}e^{\frac{iz}{2}} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{iz}{2}} & \frac{iz_v}{4} \end{pmatrix}.$$

Введем параметр λ в матрицы U и V. Делаем это так. Пишем в системе (3.43) $i\lambda u$ вместо u и $\dfrac{1}{i\lambda}v$ вместо v:

$$\Psi_u = \begin{pmatrix} \frac{iz_u}{4} & -\frac{i\lambda}{2}e^{-\frac{iz}{2}} \\ -\frac{i\lambda}{2}e^{\frac{iz}{2}} & -\frac{iz_u}{4} \end{pmatrix}\Psi, \quad \Psi_v = \begin{pmatrix} -\frac{iz_v}{4} & \frac{i}{2\lambda}e^{\frac{iz}{2}} \\ \frac{i}{2\lambda}e^{-\frac{iz}{2}} & \frac{iz_v}{4} \end{pmatrix}\Psi. \tag{3.44}$$

При такой замене уравнение sin-Гордона переходит в себя, поэтому условие согласования для новой системы по-прежнему эквивалентно уравнению sin-Гордона. Далее речь пойдет о связи псевдосферической поверхности с матрицей Ψ. Пользуясь введенной выше матрицей $\Omega = 2(U\,du + V\,dv)$ для новых матриц U, V и отказываясь от равенства (3.40) в качестве определения матрицы Ω, запишем систему (3.44) в виде

$$d\Psi = \frac{1}{2}\Omega\Psi.$$

Обозначим $\Psi|_{\lambda=1} = \Psi_0$, $\Psi_\lambda|_{\lambda=1} = \Psi_1$ и, аналогично, $\Omega|_{\lambda=1} = \Omega_0$, $\Omega_\lambda|_{\lambda=1} = \Omega_1$. Введенные матрицы связаны равенствами

$$d\Psi_0 = \frac{1}{2}\Omega_0\Psi_0, \quad d\Psi_1 = \frac{1}{2}\left(\Omega_1\Psi_0 + \Omega_0\Psi_1\right).$$

Легко проверяется справедливость разложений

$$\Omega_0 = i(\bar{\omega}_2\sigma_1 - \bar{\omega}_1\sigma_2 + \omega_3\sigma_3), \quad \Omega_1 = -i(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2),$$

где ω_i — формы, определяющие псевдосферическую метрику в чебышевских координатах, а 1-формы $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ определяются равенствами

$$\bar{\omega}_1 = \sin\frac{z}{2}(du + dv), \quad \bar{\omega}_2 = \cos\frac{z}{2}(du - dv).$$

Геометрический смысл форм $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ это формы, обозначенные выше соответственно через ω_{31} и ω_{32}, если (u, v) — асимптотические чебышевские координаты; т.е. эти формы определяют внешнюю геометрию псевдосферической поверхности.

Каждому вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3$ поставим в соответствие (2×2)-матрицу $X = -i(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)$. Это соответствие переносит на множество матриц

$$\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \Big\{ -i(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3) \;\Big|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Big\}$$

структуру линейного пространства над $\mathbb{R}$. Скалярное произведение на $\mathcal{M}$ введем, положив $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY)$. Такое скалярное произведение на $\mathcal{M}$ согласовано со скалярным произведением в $\mathbb{E}^3$, так что евклидовы пространства $\mathcal{M}$ и $\mathbb{E}^3$ изоморфны. Кроме этого на $\mathcal{M}$ можно ввести «векторное произведение», согласованное с векторным произведением в $\mathbb{E}^3$: $X \times Y = XY - E\langle XY\rangle$, где E — единичная матрица.

Обозначим через R матрицу, соответствующую радиус-вектору псевдосферической поверхности $\Phi[z]$ (в асимптотических чебышеских координатах), а через N — матрицу, соответствующую ее вектору нормали. А. И. Бобенко [44] доказал следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Справедливы следующие выражения для матриц* $R(u,v)$ *и* $N(u,v)$ *через решение* $\Psi(u,v)$ *уравнений* (3.44):

$$R = 2\Psi_0^{-1}\Psi_1, \quad N = -i\Psi_0^{-1}\sigma_3\Psi_0. \tag{3.45}$$

Доказательство. Сначала докажем обратимость матрицы $\Psi(u,v)$. Не умаляя общности, можем считать, что $\Psi(u_0,v_0) = E$ в некоторой точке (u_0,v_0). Определим матрицу $\Psi^{-1}(u,v)$ уравнением

$$d\Psi^{-1} = -\frac{1}{2}\Psi^{-1}\Omega, \quad \Psi^{-1}(u_0,v_0) = E.$$

Тогда

$$d(\Psi^{-1}\Psi) = d\Psi^{-1}\cdot\Psi + \Psi^{-1}d\Psi = 0$$

и потому $\Psi^{-1}(u,v)\Psi(u,v) \equiv E$. Вычисляем дифференциалы

$$\begin{aligned} dR &= 2d(\Psi_0^{-1}\Psi_1) = -2\Psi_0^{-1}d\Psi_0\cdot\Psi_0^{-1}\Psi_1 + 2\Psi_0^{-1}d\Psi_1 = \\ &= \Psi_0^{-1}\Omega_1\Psi_0 = -i\Psi_0^{-1}\left(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2\right)\Psi_0, \\ dN &= -id(\Psi_0^{-1}\sigma_3\Psi_0) = i\Psi_0^{-1}d\Psi_0\cdot\Psi_0^{-1}\sigma_3\Psi_0 - i\Psi_0^{-1}\sigma_3 d\Psi_0 = \\ &= \frac{i}{2}\Psi_0^{-1}\left(\Omega_0\sigma_3 - \sigma_3\Omega_0\right)\Psi_0 = i\Psi_0^{-1}\left(\bar\omega_1\sigma_1 + \bar\omega_2\sigma_2\right)\Psi_0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\langle N, N\rangle = 1$, $\langle N, dR\rangle = 0$, $\langle dR, dR\rangle = \omega_1^2 + \omega_2^2$ и $\langle dR, dN\rangle = \omega_1\bar\omega_1 + \omega_2\bar\omega_2$ – что и требовалось. ☐

Отметим, что уравнения (3.44) здесь выполняют роль деривационных формул, а условие согласования (3.42) — формул Петерсона—Кодацци и Гаусса.

Первая из формул (3.45) была выведена А. Симом в [59] и получила название *формулы Сима*. Заметим, что формула того же вида, но с другими матрицами U и V в определении Ψ, справедлива [44, 48, 59] не только для псевдосферических поверхностей, но так же для поверхностей постоянной гауссовой кривизны любого знака, поверхностей постоянной средней кривизны и т. д. Я. Кислинский [47] получил далеко идущее обобщение этой формулы для n-мерных многообразий постоянной отрицательной секционной кривизны в $\mathbb{E}^{2n-1}$.

3.7. Классические псевдосферические поверхности.

Речь пойдет о некоторых известных классах псевдосферических поверхностей. В первую очередь — это винтовые псевдосферические поверхности и в частности псевдосферические поверхности вращения, которые были исследованы Е. Бельтрами [42] и Ф. Миндингом в середине 19 в. Далее, поверхность Амслера — поверхность, или, точнее, класс поверхностей, соответствующих автомодельным решениям уравнения sin-Гордона, зависящим от произведения переменных. Наконец, поверхности, соответствующие двухсолитонным решениям уравнения sin-Гордона.

3.7.1. Винтовые псевдосферические поверхности. Исследуем псевдосферические поверхности, определяемые уравнениями вида

$$\mathbf{r}(h,\varphi) = \left(\rho(h)\cos\varphi, \rho(h)\sin\varphi, k_1\varphi + k_2 h\right). \tag{3.46}$$

Будем отсчитывать угол φ так, чтобы коэффициент k_1 был положительным. Вычисляем первую и вторую квадратичные формы:

$$Q(\varphi, h; d\varphi, dh) = (\rho^2 + k_1)d\varphi^2 + 2k_1k_2 d\varphi dh + ({\rho'}^2 + k_2)dh^2,$$
$$B(\varphi, h; d\varphi, dh) = k_2\rho^2 d\varphi^2 - 2k_1{\rho'}^2 d\varphi dh - k_2\rho\rho'' dh^2.$$

Вычисляем гауссову кривизну и полагаем ее равной -1:

$$\frac{-k_2^2\rho^3\rho'' - k_1{\rho'}^4}{(\rho^2 + k_1){\rho'}^2 + k_2\rho^2} = -1.$$

Мы получили уравнение второго порядка, не содержащее в явной форме независимой переменной; поэтому можем его один раз проинтегрировать, воспользовавшись известным приемом:

$${\rho'}^2(h) = \frac{k_2^2\rho^2\left((1 - C_1^2) + \rho^2\right)}{(C_1^2 - 1)k_1^2 + (C_1^2 - k_1^2)\rho^2 - \rho^4}. \tag{3.47}$$

Обратим внимание на то, что дискриминант биквадратного выражения в знаменателе должен быть положительным — в противном случае вся дробь в правой части отрицательна при всех (кроме нуля) значениях ρ.

Исследуем ребро винтовой поверхности. Оно является винтовой линией (в силу симметрии самой поверхности), поэтому его кривизна и кручение определяются формулами:

$$k = \frac{\rho_0}{\rho_0^2 + k_1^2}; \quad \varkappa = \frac{k_1}{\rho_0^2 + k_1^2}, \tag{3.48}$$

где ρ_0 — значение ρ, при котором знаменатель в выражении (3.47) обращается в нуль, а числитель — нет (поэтому ρ_0 не может быть нулем). Т.е ρ_0 — отличный от нуля корень алгебраического уравнения

$$\rho^4 - (C_1^2 - k_1^2)\rho^2 - (C_1^2 - 1)k_1^2 = 0, \tag{3.49}$$

дискриминант которого обязательно строго больше нуля (см. замечание после формулы (3.47)). Это уравнение имеет один корень ρ_0^+ при $C_1^2 \geqslant 1$ и два корня $\rho_0^\pm$ при $1 > C_1^2 > k_1^2$:

$$\rho_0^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}\left(C_1^2 - k_1^2 \pm \sqrt{(C_1^2 + k_1^2)^2 - 4k_1^2}\right)}. \tag{3.50}$$

Обозначим через $k_\pm$ и $\varkappa_\pm$ кривизну и кручение соответствующего ребра, определенные для данной винтовой поверхности по формуле (3.48).

Различаем шесть случаев: ($k_1 = 0$, $C_1^2 = 1$) — псевдосфера, ($k_1 = 0$, $C_1^2 < 1$) — «фонарики», ($k_1 = 0$, $C_1^2 > 1$) — «катушки», ($k_1 \neq 0$, $C_1^2 = 1$), ($k_1 \neq 0$, $C_1^2 < 1$), ($k_1 \neq 0$, $C_1^2 > 1$). Первые три поверхности были известны еще Е. Бельтрами [42]. Для четвертой поверхности А. Г. Попов [27] предложил метод точного интегрирования системы деривационных уравнений. Первые четыре поверхности построены тем же методом С. А. Зададаевым [11].

В работе [11] для некоторых решений уравнения sin-Гордона типа бегущих волн проинтегрирована система деривационных уравнений Гаусса—Вейнгартена и получено явное выражение для радиус-вектора поверхности:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(R(u, v)\cos\phi(u, v), R(u, v)\sin\phi(u, v), H(u, v)\right). \tag{3.51}$$

Функции $R(u, v)$, $\phi(u, v)$, $H(u, v)$ определяются формулами

$$R = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{C_2 + 1}}\sin\frac{z}{2}; \quad \phi = \sqrt{\frac{C_2 + 1}{2}}(u - v);$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{C_2 + 1}}\left(u + v + \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \cos z(x)dx\right)$$

где (i) $\sigma = 1$, $C_2 = 1$ или (ii) $a = b$ (при этом $\sigma = 1$ и поэтому необходимо $C_2 > -1$). В случае (i) уравнение (3.51) определяет псевдосферу при $a = b$ и поверхность Дини при $a \neq b$. В случае (ii) — «фонарики» при $-1 < C_2 < 1$ и «катушки» при $C_2 > 1$.

Докажем, что винтовые поверхности — это в точности те поверхности, которые соответствуют решениям типа бегущих волн. Заметим, что кривизна (k) и кручение ($\varkappa$) ребра поверхности, определенной уравнением (3.46), постоянны и принимают все возможные значения (кроме $k = 0$). Действительно, пусть заданы числа $k \neq 0$ и $\varkappa$. Тогда получаем из (3.48), (3.49):

$$\rho(h_0) = \frac{k}{k^2 + \varkappa^2}, \quad k_1 = \frac{\varkappa}{k^2 + \varkappa^2}, \quad C_1^2 = \frac{\varkappa^2(k^2 + \varkappa^2) + k^2}{(k^2 + \varkappa^2)^2}, \tag{3.52}$$

т.е. ребра поверхности, соответствующей определенным в (3.52) значениям k_1 и C_1^2, имеют наперед заданные кривизну и кручение. С другой стороны, сетевой угол z этой поверхности находится как единственное решение задачи Коши для уравнения sin-Гордона с начальными данными, определяемыми из формул (3.13):

$$z_u = (-1)^{n+1} \frac{2k}{\varkappa - 1} \quad \text{на прямой} \quad v = (-1)^{n+1} \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} u. \tag{3.53}$$

Случай $\varkappa = \pm 1$ из рассмотрения исключается, т.к. при этом дискриминант биквадратного уравнения (3.49) равен нулю (см. замечание после формулы (3.47)).

Взаимно-однозначное соответствие между винтовыми поверхностями и решениями типа бегущих волн уравнения sin-Гордона можно наглядно представить такой схемой:

(винтовая поверхность) $\longleftrightarrow$ (кривизна и кручение ребра) $\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$ (значение z_u на прямой из (3.53)) $\longleftrightarrow$ (решение z задачи Коши, (3.54)

которое в силу теоремы единственности зависит от линейной комбинации переменных).

3.7.2. Поверхности Амслера. Рассмотрим уравнение sin-Гордона от автомодельной переменной $t = uv$:

$$tz'' + z' - \sin z = 0. \tag{3.55}$$

Амслер в 1950-х годах исследовал решение уравнения (3.55), регулярное в нуле и удовлетворяющее начальному условию $z(0) = \pi/2$. При этом, в силу симметрии полученной задачи, $z(t) + z(-t) = \pi$. Можно показать, что при $t \in [-1{,}862\ldots, 1{,}862\ldots]$ функция $z(t)$ монотонно возрастает, причем $z(-1{,}862\ldots) = 0$, $z(1{,}862\ldots) = \pi$. Этот фрагмент поверхности $\Phi[z]$ для z, меняющегося от 0 до π, построен Амслером в [40] методом последовательного «набора» из асимптотических линий $v = \mathrm{const}$. Амслер получает для вектора нормали поверхности $\mathbf{n}$ на асимптотической линии $v = \mathrm{const}$ уравнение

$$\mathbf{n}'' - z_u[\mathbf{n}'\mathbf{n}] + \mathbf{n} = 0,$$

где штрих обозначает производную по u, и решает его численно. Это уравнение следует из формул Френе для поверхностной полосы (3.2), связанной с асимптотической линией ($k_g = -z_u$, $k_n = 0$, $\varkappa_g = 1$; см. (3.11)), и из формулы $\mathbf{l} = [\mathbf{mn}]$. Затем по формуле $\mathbf{l} = -[\mathbf{n}'\mathbf{n}]$ находится направляющий вектор, а из него, интегрированием по u — радиус-вектор асимптотической (поскольку u является естественной координатой на асимптотической $v = \mathrm{const}$).

Отметим работу А. И. Бобенко и А. В. Китаева [45], в которой поверхность Амслера исследована с помощью метода обратной задачи, и работу Т. Хоффмана [54], в которой исследован дискретный аналог поверхности Амслера.

Называем *поверхностью Амслера* любую поверхность $\Phi[z]$, где z удовлетворяет уравнению (3.55) при $t \in (0, +\infty)$. *Регулярной поверхностью Амслера* называем поверхность, соответствующую решению $z(t)$, непрерывному в нуле.

Докажем (см. [43]), что поверхность Амслера содержит две пересекающиеся прямые линии и это свойство полностью определяет ее в классе всех псевдосферических поверхностей.

Пусть отображение $\mathbf{r}$ принадлежит классу C^3 в окрестности множества $\{(u, v) : uv = 0\}$. Тогда из первого и третьего уравнения системы (3.9) получим, что

$$\mathbf{r}_{uu}(u, 0) = 0, \quad \mathbf{r}_{vv}(0, v) = 0,$$

поэтому

$$\mathbf{r}(0,v) = v\mathbf{r}_v(0,0), \quad \mathbf{r}(u,0) = u\mathbf{r}_u(0,0),$$

т.е. регулярная поверхность Амслера содержит две пересекающиеся прямые. Далее, если поверхность (произвольная) содержит прямую, то эта прямая является асимптотической линией. Действительно, исследуем вторую квадратичную форму поверхности в произвольной точке этой прямой. Второй дифференциал $d^2\mathbf{r}$, будучи квадратичной формой от дифференциалов координат (du, dv), обращается в нуль в направлении $du : dv$, определяемом прямой. Поэтому в этом направлении обращается в нуль и вторая квадратичная форма поверхности, поскольку $B(u,v;du,dv) = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n})$. Следовательно, это направление является асимптотическим. Без ущерба для общности можем считать, что одна из пересекающихся прямых — это асимптотическая линия $u = 0$, а другая — $v = 0$. Поскольку, с одной стороны, геодезическая кривизна асимптотической линии равна по модулю ее (полной) кривизне и равна нулю для прямой, а с другой стороны, геодезическая кривизна для линии $u = 0$ равна $z_v(0,v)$, а для линии $v = 0$ равна $-z_u(u,0)$, то получаем $z(0,v) = \mathrm{const}$ и $z(u,0) = \mathrm{const}$ при всех u, v. Следовательно, $z(0,v) = z(u,0) = z(0,0)$. Но это — начальные данные задачи Гурса для уравнения sin-Гордона. В силу единственности решения задачи Гурса, соответствующим решением уравнения sin-Гордона является $z(uv)$, где $z(t)$ — решение автомодельного уравнения (3.55) с начальным условием $z(0) = z(0,0)$. Утверждение доказано.

Рассмотрим уравнения Френе для основного триэдра асимптотической полосы (v_0):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -v_0 z'(uv_0) & 0 \\ v_0 z'(uv_0) & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

и полосы, связанной с ребром возврата поверхности Амслера, соответствующим значению $z(t_*) = \pi(2n+1)$ и $z'(t_*) = q$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & t_* q u^{-1} & 0 \\ -t_* q u^{-1} & 0 & 1 - t_* u^{-2} \\ 0 & -1 + t_* u^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{l}$ — вектор касательной к базовой линии полосы, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности и $\mathbf{m}$ — вектор геодезической нормали поверхностной полосы. Получены [16] следующие асимптотические разложения для асимптотической линии регулярной поверхности Амслера в окрестности точки $u = 0$:

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{r}(0, v_0) + \left(v_0^2 \sin^2 z_0 + 1\right)^{-1/2}\left\{0, v_0 \sin z_0, 1\right\}u + \left\{v_0 \sin z_0, 0, 0\right\}u^2 + O(u^3),$$

где $z_0 = z(0)$, и для асимптотической линии общей поверхности Амслера при $u \to +\infty$. Там же получены асимптотические разложения для ребра возврата поверхности Амслера в окрестности произвольной точки $u_0 \neq 0$:

$$\mathbf{r}(u, t_*/u) = \left\{1 + t_* u_0^{-2}, 0, 0\right\}(u - u_0) + \left\{-t_* u_0^{-3}, \frac{1}{2} q t_* u_0^{-1} + \frac{1}{2} q t_*^2 u_0^{-3}, 0\right\}(u - u_0)^2 + O((u - u_0)^3)$$

и при $u \to +\infty$:

$$\mathbf{r}(u, t_*/u) = \{0, 0, 1\}u + \left\{q t_* \sin u, q t_* \cos u, -\frac{1}{2} q^2 t_*^2 - t_*\right\} u^{-1} + O(u^{-2}).$$

Разложения для асимптотической линии могут быть применены для построения поверхности Амслера в окрестности асимптотической линии. Одно из таких возможных построений — в окрестности прямолинейной образующей — проведено в цитируемой работе.

Покажем, что радиус-вектор поверхности Амслера удовлетворяет некоторому гиперболическому уравнению.

Лемма 3.1. *Радиус-вектор поверхности Амслера* $\mathbf{r}(u,v)$ *удовлетворяет уравнению*

$$t z'(t) \mathbf{r}_{uv} - \big(u\mathbf{r}_u + v\mathbf{r}_v - (\mathbf{r} - \mathbf{C})\big)\sin z(t) = 0, \tag{3.56}$$

где $\mathbf{C}$ *— некоторый постоянный вектор.*

Доказательство. Вычисляем:

$$(z_u\mathbf{n})_v = z_{uv}\mathbf{n} + z_u\mathbf{n}_v = z_{uv}\mathbf{n} + \frac{v}{u}z_v\mathbf{n}_v.$$

Используя второе и третье уравнение в системе (3.9), имеем

$$z_{uv}\mathbf{n} + \frac{v}{u}z_v\mathbf{n}_v = \mathbf{r}_{uv} + \frac{v}{u}\mathbf{r}_{vv} = \mathbf{r}_{uv} + \left(\frac{v}{u}\mathbf{r}_{vv} + \frac{1}{u}\mathbf{r}_v\right) - \frac{1}{u}\mathbf{r}_v = \left(\mathbf{r}_u + \frac{v}{u}\mathbf{r}_v - \frac{1}{u}\mathbf{r}\right)_v.$$

Объединяем полученные выражения:

$$(z_u\mathbf{n})_v = \left(\mathbf{r}_u + \frac{v}{u}\mathbf{r}_v - \frac{1}{u}\mathbf{r}\right)_v,$$

и интегрируем это уравнение по v:

$$z_u\mathbf{n} = \mathbf{r}_u + \frac{v}{u}\mathbf{r}_v - \frac{1}{u}\mathbf{r} + \mathbf{C}(u),$$

где $\mathbf{C}(u)$ — произвольная функция от u. Учитывая симметрию исходной системы относительно замены $u \to v$, получаем:

$$tz'(t)\mathbf{n} = u\mathbf{r}_u + v\mathbf{r}_v - \mathbf{r} + \mathbf{C}.$$

Теперь осталось только воспользоваться вторым уравнением (3.9). □

Выбором положения начала координат можно добиться того, чтобы было $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Полученное уравнение исследуется методом разделения переменных следующим образом. Будем искать решение в виде ряда

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{x}_k(t)u^k,$$

предполагая, что он допускает двойное почленное дифференцирование. Тогда для $\mathbf{x}_k(t)$ получим уравнение

$$z'(t)\left(\mathbf{x}_k' + \frac{k-1}{2t}\mathbf{x}_k\right)' - 2z''(t)\left(\mathbf{x}_k' + \frac{k-1}{2t}\mathbf{x}_k\right) + z'(t)\left(\frac{k-1}{2t}\mathbf{x}_k\right)' = 0.$$

Это уравнение исследовано [16] асимптотическими методами.

Поскольку для уравнения (3.56) задача Коши на линии $uv = t_*$ однозначно разрешима, то поверхность Амслера может быть асимптотически построена [16] в окрестности ребра возврата.

3.7.3. Двухсолитонные поверхности. Рассмотрим классификацию [15] псевдосферических поверхностей, соответствующих двухсолитонным решениям уравнения sin-Гордона

$$z(u,v;p,q) = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{p+q}{p-q}\frac{e^{pu+v/p} - e^{qu+v/q}}{1 + e^{pu+v/p}e^{qu+v/q}}\right). \tag{3.57}$$

Геодезическая кривизна и кручение ребер возврата псевдосферических поверхности выражаются через решение $z(u,v)$ по формулам (3.13). В частном случае решения (3.57) на псевдосферической поверхности имеется три ребра возврата: $z = 0$ и $z = \pm\pi$. Удается представить геодезическую кривизну (k_g) и кручение ($\varkappa$) ребер как функции переменной $x = pu + v/p$ и проанализировать знаки этих выражений.

- Для ребра $z = 0$:

$$k_g = \frac{2(p+q)}{1+pq}\frac{1}{\operatorname{ch}x}, \quad \varkappa = \frac{pq-1}{pq+1};$$

- для ребер $z = \pm\pi$:

$$k_g = \mp\frac{2q}{q^2+1}\frac{\left(\operatorname{sh}x \mp \dfrac{p}{q}\right)\left(\operatorname{sh}x \pm \dfrac{q}{p}\right)}{\left(\operatorname{sh}x \mp \dfrac{q(p^2-1)}{p(q^2+1)}\right)\operatorname{ch}x}, \quad \varkappa = \frac{q^2-1}{q^2+1}\frac{\left(\operatorname{sh}x \mp \dfrac{q(p^2+1)}{p(q^2-1)}\right)}{\left(\operatorname{sh}x \mp \dfrac{q(p^2-1)}{p(q^2+1)}\right)};$$

область определения переменной x находится из следующей таблицы:

	$A>0$	$A<0$
$z=\pi$	$\operatorname{sh} x \in (B;+\infty)$	$\operatorname{sh} x \in (-\infty;B)$
$z=-\pi$	$\operatorname{sh} x \in (-\infty;-B)$	$\operatorname{sh} x \in (-B;+\infty)$

где
$$A=\frac{p+q}{p-q},\quad B=-\frac{2pq}{p^2-q^2}.$$

В результате все поверхности, соответствующие двухсолитонным решениям, подразделяются на 8 классов. Предварительно отметим, что ребра $z=\pm\pi$ конгруэнтны и поверхность при $u,v\to\pm\infty$ асимптотически «стремится» к прямой, которую мы примем за ось $\mathrm{O}\zeta$ декартовой системы координат $\mathrm{O}\xi\eta\zeta$.

1. $(|p|-1)(|q|-1)>0$, $pq>0$. Ребро $z=\pi$ содержит точку, в которой меняется знак кручения, и дугу с точкой возврата (в которой кривизна и кручение бесконечны), расположенной между двумя точками смены знака геодезической кривизны. Ребро $z=0$ представляет собой кривую с постоянным кручением $\varkappa\neq 0$ и ограниченной геодезической кривизной постоянного знака.

2. $(|p|-1)(|q|-1)\geqslant 0$, $pq<0$. Ребро $z=\pi$ представляет собой кривую с ограниченной геодезической кривизной постоянного знака и ограниченным кручением постоянного знака. Ребро $z=0$ представляет собой кривую с постоянным кручением $\varkappa\neq 0$ и ограниченной геодезической кривизной постоянного знака.

2а. Значения параметров произвольны. Ребро $z=0$ не является плоской кривой ($\varkappa\neq 0$).

2а$_1$. $|p|\neq 1$, $|q|\neq 1$. Ребро $z=\pi$ асимптотически при $s\to\pm\infty$ стремится к оси $\mathrm{O}\zeta$.

2а$_2$. $|p|=1$ или $|q|=1$. Ребро $z=\pi$ асимптотически при $s\to+\infty$ стремится к окружности, лежащей в плоскости, параллельной координатной плоскости $\mathrm{O}\xi\eta$. При $s\to-\infty$ оно стремится к оси $\mathrm{O}\zeta$.

3. $(|p|-1)(|q|-1)\leqslant 0$, $pq>0$. Ребро $z=\pi$ содержит дугу с точкой возврата (в которой кривизна и кручение бесконечны), расположенной между двумя точками смены знака геодезической кривизны.

3а. $pq\neq 1$. Ребро $z=0$ представляет собой кривую с постоянным $\varkappa\neq 0$ и ограниченной геодезической кривизной постоянного знака.

3а$_1$. $|p|\neq 1$, $|q|\neq 1$. Ребро $z=\pi$ асимптотически при $s\to\pm\infty$ стремится к оси $\mathrm{O}\zeta$.

3а$_2$. $|p|=1$ или $|q|=1$. Ребро $z=\pi$ асимптотически при $s\to+\infty$ стремится к окружности, лежащей в плоскости, параллельной координатной плоскости $\mathrm{O}\xi\eta$. При $s\to-\infty$ оно стремится к оси $\mathrm{O}\zeta$.

3б. $pq=1$. Ребро $z=0$ представляет собой плоскую кривую с самопересечением, напоминающую декартов лист. Поверхность в этом случае является поверхностью Иоахимсталя (поверхность, образованная ортогональными траекториями однопараметрического семейства сфер, центры которых лежат на одной прямой — оси $\mathrm{O}\zeta$).

4. $(|p|-1)(|q|-1)<0$, $pq<0$. Ребро $z=\pi$ содержит точку, в которой меняется знак кручения. Геодезическая кривизна ребра $z=\pi$ ограничена и не меняет знак.

4а. $pq\neq -1$. Ребро $z=0$ представляет собой кривую с постоянным $\varkappa\neq 0$ и ограниченной $k_g>0$.

4б. $pq=-1$. Ребро $z=0$ вырождается в точку (острие). Поверхность в этом случае также является поверхностью Иоахимсталя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1939.
2. *Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е.* Введение в дифференциальную геометрию «в целом». — М.: Наука, 1973.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
4. *Гильберт Д.* Основания геометрии. — М.: Гостехиздат, 1948.
5. *Грибков И. В.* Некоторые решения уравнения синус-Гордона, получаемые с помощью преобразования Бэклунда// Успехи мат. наук. — 1978. — *33*, № 2. — С. 191–192.
6. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. Т. 1. — М.: Мир, 1982.

7. *Дубровин Б. А.* Тета-функции и нелинейные уравнения// Успехи мат. наук. — 1981. — *36*, № 2. — С. 11–80.
8. *Дубровин Б. А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. — Ижевск, 2001.
9. *Дубровин Б. А., Натанзон С. М.* Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon// Функц. анал. прилож. — 1982. — *16*, № 1. — С. 27–43.
10. *Ефимов Н. В.* Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной// Успехи мат. наук. — 1966. — *21*, № 5. — С. 3–58.
11. *Зададаев С. А.* Решения типа бегущих волн уравнения sin-Гордона и псевдосферические поверхности// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1994. — *2*.
12. *Козел В. А., Котляров В. П.* Конечнозонные решения уравнения sine-Gordon/ Препринт ФТИНТ АН УССР № 9-77. — Харьков, 1977.
13. *Лэм Дж.* Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983.
14. *Маевский Е. В.* Асимптотическое поведение решений одного квазилинейного уравнения второго порядка// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1998. — *38*, № 10. — С. 1654–1660.
15. *Маевский Е. В.* Двухсолитонные решения уравнения sin-Гордона и связанные с ними псевдосферические поверхности// Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон. — 2002. — № 3.
16. *Маевский Е. В.* О псевдосферической поверхности Амслера/ Деп. в ВИНИТИ 09.10.2002, № 1695-В2002.
17. *Маевский Е. В.* Асимптотика решений некоторых квазилинейных уравнений второго порядка/ Деп. в ВИНИТИ 09.10.2002, № 1696-В2002.
18. *Мамфорд Д.* Лекции о тета-функциях. — Новокузнецк, 1998.
19. *Норден А. П.* Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956.
20. *Пелиновский Е. Н.* Некоторые точные методы в теории нелинейных волн// Радиофизика — 1976. — *19*, № 5-6.
21. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
22. *Позняк Э. Г.* Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $z_{xy} = \sin z$// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, № 7. — С. 1332–1336.
23. *Позняк Э. Г.* О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны// Укр. геом. сб. — 1966. — *3*. — С. 78–92.
24. *Позняк Э. Г.* Геометрические исследования, связанные с уравнением sin-Гордона// Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1977. — *8*. — С. 225–241.
25. *Позняк Э. Г., Попов А. Г.* Геометрия уравнения sin-Гордона// Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1991. — *23*. — С. 99–130.
26. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: МГУ, 1990.
27. *Попов А. Г.* Полная геометрическая интерпретация односолитонного решения произвольной амплитуды уравнения sin-Гордона// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1990. — *5*. — С. 3–8.
28. *Рождественский Б. Л.* Система квазилинейных уравнений теории поверхностей// Докл. АН СССР. — 1962. — *143*. — С. 50–52.
29. *Розендорн Э. Р.* Поверхности отрицательной кривизны// Совр. проблемы математики. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1989. — *48*. — С. 98–195.
30. *Смирнов А. О.* Вещественные эллиптические решения уравнения sine-Gordon// Мат. сб. — 1990. — *181*, № 6. — С. 804–812.
31. *Смирнов А. О.* 3-эллиптические решения уравнения sine-Gordon// Мат. заметки. — 1997. — *62*, № 3. — С. 440–452.
32. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1968.
33. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957.
34. *Фиников С. П.* Теория поверхностей. — М.-Л.: ГТТИ, 1934.
35. *Чебышев П. Л.* О кройке одежды// Успехи мат. наук. — 1946. — *1*, № 2. — С. 38–42.
36. *Чередник И. В.* Об условиях вещественности в конечнозонном интегрировании// Докл. АН СССР. — 1980. — *252*, № 5. — С. 1104–1108.
37. *Шикин Е. В.* Об изометрическом погружении в трехмерное евклидово пространство двумерных многообразий отрицательной кривизны// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 4. — С. 601–612.
38. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких переменных. — М.: Наука, 1979.
39. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
40. *Amsler M.-H.* Des surfaces a courbure negative constante dans l'espace a trois dimensions et de leurs singularites// Math. Ann. — 1955. — *3*. — C. 234–256.

41. *Andreev V. A., Brezhnev Yu. V.* Darboux transformation, positons and general superposition formula for the sine-Gordon equation// Phys. Lett. A. — 1995. — *207*. — C. 58–66.
42. *Beltrami E.* Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche// Giorn. Mat. — 1872. — *10*, Op. 2.
43. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale. Vol. 1. — Bologna, 1927
44. *Bobenko A. I.* Surfaces in terms of (2×2)-matrices. Old and new integrable cases// В сб.: Harmonic Maps and Integrable Systems/ Asp. Math. — Brunswick: Vieweg, 1994. — *23*.
45. *Bobenko A. I., Kitaev A. V.* On asymptotic cones of surfaces with constant curvature and the third Painlevé equation// Manuscr. Math. — 1998. — *97*. — C. 489–516.
46. *Bureau F. J.* Differential equations with fixed critical points// Ann. Math. Pure Appl. — 1964. — *64*. — C. 229—364.
47. *Cieslinski J.* The spectral interpretation of n-spaces of constant negative curvature immersed in $\mathbb{R}^{2n-1}$// Phys. Lett. A. — 1997. — *236*. — C. 425–430.
48. *Cieslinski J., Goldstein P., Sym A.* Isotermic surfaces in $\mathbb{E}^3$ as soliton surfaces// Phys. Lett. A. — 1995. — *205*, № 1. — C. 37–43.
49. *Darboux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces. — Paris, 1894.
50. *Dobriner H.* Die Flachen constanter Krummung mit einem System spharischer Krummungslinien dargestellt mit Hilfe von Thetafunctionen zweier Variabeln// Acta Math. — 1886–1887. — *9*. — C. 73–104.
51. *Enneper A.* Analytisch-geometrische Untersuchungen. — Gottinger Nachrichten, 1868.
52. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surface/ Lect. Notes Math. — Springer-Verlag, 1973. — *352*.
53. *Galini A., Ivey T. A.* Bäcklund transformations and knots of constant torsion// Knot Theory Ramifications. — 1998. — *7*, № 6. — C. 719–746.
54. *Hoffmann T.* Discrete Amsler surfaces and a discrete Painlevé III equation// В сб.: Discrete integrable geometry and physics/ Oxford Lect. Ser. Math. Appl. — Oxford: Clarendon Press, 1999. — *16*. — C. 83–96.
55. *Its A. R., Novokshenov V. Yu.* The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations/ Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag, 1986. — *1191*.
56. *Klein J. J.* Geometric interpretation of the solutions of the sine-Gordon equation// J. Math. Phys. — 1985. — *26*, № 9. — C. 2181–2185.
57. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux transformation and solitons. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.
58. *Nemeth S. Z.* Bäcklund transformations of n-dimensional constant torsion curves// Publ. Math. Debrecen. — 1998. — *53*, № 3-4. — C. 271–279.
59. *Sym A. I.* Soliton surfaces and their applications// В сб.: Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems/ Lect. Notes Phys. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — *239*. — C. 154–231.
60. *Steuerwald R.* Über Ennepersche Flächen und Bäcklundsche Transformation// Abh. Bayer. Akad. Wiss., N. F. — 1936. — *40*. — C. 1–106.
61. *Wissler C.* Globale Tschbyscheff-Netze auf Riemannischen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen konstanter negativer Krümmung// Comment. Math. Helv. — 1972. — *47*, № 3. — C. 348–372.

Современная математика и ее приложения. Том 31 (2005). С. 53–68

УДК 514.76

КОНЦИРКУЛЯРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПОЛУРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2005 г. **И. Г. ШАНДРА**

Аннотация. В данной работе построен аналог понятия «конциркулярное поле» для полуриманова пространства (многообразия с вырожденной метрикой). Найден тензорный признак пространств, допускающих максимальное число конциркулярных полей, либо вовсе не допускающих таких полей. Обнаружена лакуна в распределении размерностей пространства конциркулярных полей, которая в отличие от соответствующей лакуны для псевдоримановых многообразий, оказалась на единицу короче. Выделены и изучены специальные типы конциркулярных полей, не имеющих аналогов для псевдоримановых многообразий. Получена каноническая формы метрики для некоторых классов полуримановых пространств, допускающих конциркулярные поля.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1939 г. А. Фиалковым [12] на псевдоримановом многообразии (M, g) было введено в рассмотрение векторное поле Φ, удовлетворяющее условию

$$(\nabla_X \Phi) = \rho \cdot X,$$

где X — произвольное дифференцируемое векторное поле на M, ρ — некоторая скалярная функция, а ∇ — связность Леви-Чивиты. В последствии такое поле возникло при исследовании конциркулярных отображений (т.е. конформных отображений, сохраняющих геодезические круги) и поэтому было названо К. Яно [16] *конциркулярным полем*. В литературе это поле также встречалось под названиями *геодезическое поле* [10] (ввиду того, что интегральные кривые этого поля являются геодезическими) и *эквидистантное поле* [4] (так как это поле градиентно и порождаемая им нормальная конгруенция является эквидистантной). Частный случай конциркулярного поля (при $\rho = \text{const}$) под названием *сходящееся поле направлений* еще в 1935 г. исследовал П. А. Широков [11]. Конциркулярные поля играют важную роль в теориях геодезических отображений, проективных и конформных преобразований и в этой связи изучались многими математиками: Н. С. Синюковым [4], Г. Фризом [15], А. В. Аминовой [1], Й. Микешем [3], А. С. Солодовниковым [5], И. Г. Шандрой [6, 7].

Отметим ряд интересных свойств, которыми обладают псевдориманово многообразие (M, g), допускающее конциркулярное поле. Если $\rho \neq 0$, то (M, g) допускает нетривиальные конформное преобразование и нетривиальное геодезическое отображение (а следовательно, и квадратичный интеграл геодезических). Если же на многообразии существуют несколько линейно независимых

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005

конциркулярных полей, то все конциркулярные поля являются *специальными*, т.е. удовлетворяют условию

$$X(\rho) = K \cdot g(\Phi, X), \quad K = \mathrm{const},$$

а многообразие допускает нетривиальное проективное преобразование и киллингово векторное поле (линейный интеграл геодезических). Пространство конциркулярных полей порождает идеал йордановой алгебры геодезических отображений [7]. Конциркулярные поля представляют также интерес с точки зрения приложений [1,14]. Так, в модели де Ситтера траектории временеподобных конциркулярных полей определяют мировые линии разбегающихся или сближающихся галактик, подчиняющихся гипотезе Вейля.

В данной работе предпринята попытка построения аналога понятия конциркулярного поля для полуриманова пространства ($O(r,\mathbb{R}) \times Gl(n-r,\mathbb{R})$-структуры). В разделе 1 приводятся предварительны сведения из теории псевдосвязностей и полуримановых пространств. Раздел 2 посвящен исследованию пространств, допускающих максимальное число конциркулярных полей либо вовсе не допускающих таких полей. Здесь также обнаружена лакуна в распределении размерностей пространства конциркулярных полей, которая в отличие от соответствующей лакуны для псевдоримановых пространств оказалась на единицу короче. В разделе 3 изучаются специальные типы конциркулярных полей. Раздел 4 посвящен нахождению канонической формы метрики и горизонтального проектора для некоторых типов полуримановых пространств, на которых существуют конциркулярные поля. Исследования ведутся локально, в классе достаточно гладких функций.

1. Предварительные сведения

1.1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Обозначим через $f(M)$ кольцо гладких функций на M, через $\mathfrak{X}(M)$ — алгебру Ли гладких векторных полей на M, а через X, Y, Z, W — произвольные гладкие векторные поля на M.

Определение 1.1. Пара операторов $(h;\nabla)$, где $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ и h — аффинор на M, удовлетворяющие следующим условиям [13]:

$$\nabla_X(fY+Z) = f\nabla_X Y + X(f)\cdot hY + \nabla_X Z, \tag{1.1a}$$

$$\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad f \in f(M), \tag{1.1b}$$

называется *линейной псевдосвязностью* на M.

Определение 1.2. Пара операторов $(h;Q)$, где $Q : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ и h — аффинор на M, удовлетворяющих следующим условиям:

$$Q_X(fY+Z) = fQ_X Y + hX(f)\cdot Y + Q_X Z, \tag{1.2a}$$

$$Q_{fX+Y} Z = fQ_X Z + Q_Y Z, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ f \in f(M), \tag{1.2b}$$

называется *линейной квазисвязностью* на M.

В случае $h = \mathrm{id}$ псевдосвязность (квазисвязность) является линейной связностью на M.

Определение 1.3. Тензоры

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - h[X,Y], \tag{1.3}$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\, R(X,Y) \tag{1.5}$$

называются соответственно *тензором кручения*, *тензором кривизны* и *тензором Риччи* псевдосвязности $(h;\nabla)$.

Определение 1.4 (см. [8,9]). Линейную псевдосвязность $(h;\nabla)$ будем называть *почти идемпотентной*, если $h^2 = h$. В этом случае h мы будем называть *горизонтальным проектором*, а $v = \mathrm{id} - h$ — *вертикальным*. Почти идемпотентная псевдосвязность называется *вполне идемпотентной*, если

$$\nabla_X Y = h\nabla_X(hY). \tag{1.6}$$

Многообразие, на котором задана вполне идемпотентная псевдосвязность $(h; \nabla)$, $\operatorname{rk} h = r$, мы будем обозначать через A_n^r.

Если на M существует вполне идемпотентная псевдосвязность, то на нем существует также и квазисвязность $\overset{o}{Q}$, определяемая соотношениями [8]:

$$\overset{o}{Q}_X Y = \nabla_{hX} Y + v[hX, vY].$$

Тензор кручения и тензор кривизны вполне идемпотентной псевдосвязности удовлетворяют следующим условиям:

$$vS(X,Y) = 0, \tag{1.7a}$$

$$S(vX, vY) = -h[vX, vY], \tag{1.7b}$$

$$vR(X,Y)Z = R(X,Y)vZ = 0. \tag{1.8}$$

Пусть ω_j^i — компоненты 1-формы $(h; \nabla)$ вполне идемпотентной псевдосвязности в репере $\{e_i\}$ на M. Тогда условия (1.3), (1.4), (1.7), (1.8) могут быть написаны в эквивалентной форме (называемой *структурными уравнениями вполне идемпотентной псевдосвязности*):

$$h_t^i d\omega^t = \omega^t \wedge \omega_t^i + \Omega^i, \tag{1.9}$$

$$h_t^i d\omega_j^t = \omega_j^t \wedge \omega_t^i + \Omega_j^i, \tag{1.10}$$

$$h_t^i dh_j^t = \omega_j^i - h_t^i \omega_k^t h_j^k + \Omega_j^i, \tag{1.11}$$

$$h_t^i \Omega^t = \Omega^i, \tag{1.12a}$$

$$h_t^i \Omega_j^t = \Omega_t^i h_j^t = \Omega_j^i, \tag{1.12b}$$

где $\left\{\omega^i\right\}$ — двойственный базис к $\{e_i\}$, $\Omega^i = \frac{1}{2} S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$ — 2-форма кручения, $\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$ — 2-форма кривизны, индексы $i, j, k, \ldots$ здесь и ниже (если это не оговорено особо) принимают значения от 1 до n.

Внешнее дифференцирование условий (1.10)–(1.12) дает уравнения

$$h_t^i d\Omega^t + \omega_t^i \wedge \Omega^t = \Omega_t^i \wedge \omega^t \tag{1.13}$$

$$h_s^i h_j^t d\Omega_t^s + \omega_s^i \wedge \Omega_j^s - \omega_j^s \wedge \Omega_s^i = 0, \tag{1.14}$$

называемые *первым и вторым тождествами Бианки* для вполне идемпотентной псевдосвязности.

Определение 1.5 (см. [8]). Тензоры

$$\overset{1}{R}(X,Y)Z = R(hX, hY)Z, \tag{1.15a}$$

$$\overset{2}{R}(X,Y)Z = R(vX, vY)Z, \tag{1.15b}$$

$$\overset{3}{R}(X,Y)Z = R(hX, hY)Z, \tag{1.15c}$$

$$\overset{1}{S}(X,Y) = S(hX, hY)Z, \tag{1.16a}$$

$$\overset{2}{S}(X,Y) = S(vX, vY), \tag{1.16b}$$

$$\overset{3}{S}(X,Y) = S(hX, hY), \tag{1.16c}$$

будем называть соответственно *первым, вторым, третьим тензорами кривизны* и *первым, вторым, третьим тензорами кручения* псевдосвязности $(h; \nabla)$.

Определение 1.6. Пусть g и h — тензорные поля типа $(0;2)$ и $(1;1)$ соответственно на M. Пару (g,h) будем называть *HR-структурой* ранга r на M, если она удовлетворяет следующим условиям [8, 9]:

$$h^2 = h, \tag{1.17a}$$

$$g(hX,Y) = g(X,Y) = g(Y,X), \tag{1.17b}$$

$$\operatorname{rk} h = \operatorname{rk} g = r \leqslant n. \tag{1.17c}$$

Многообразия, на которых задана HR-структура ранга r мы будем называть *полуримановыми пространствами* и обозначать через V_n^r.

Для всякой HR-структуры $(g;h)$ на M существует единственная вполне идемпотентная псевдосвязность $(h;\nabla)$, удовлетворяющая условиям [8]:

$$\nabla_X g = 0, \tag{1.18a}$$

$$g(S(X,hY),Z) = g(S(X,hZ),Y). \tag{1.18b}$$

Это псевдосвязность называется *псевдосвязностью Леви-Чивиты* и задается соотношениями [8]:

$$2g(\nabla_X Y,Z) = Xg(Y,Z) + (hY)g(X,Z) - (hZ)g(X,Y) + \\ + g([hY,X],Z) + g([hZ,X],Y) - g(X,[hZ,hY]). \tag{1.19}$$

Для тензора кручения псевдосвязности Леви-Чивиты наряду с условиями (1.7) имеют место также условия [8]:

$$S(hX,hY) = 0, \tag{1.20}$$

$$2g(S(hX,vY),Z) = -(vY)g(Y,Z) + g([vY,hX],Z) + g(X,[vY,hZ]). \tag{1.21}$$

2. Конциркулярные поля на многообразиях с вполне идемпотентной псевдосвязностью

2.1. Пусть $(h;\nabla)$ — вполне идемпотентная псевдосвязность на M.

Определение 2.1. Векторное поле Φ на M называется *конциркулярным*, если удовлетворяет условиям

$$v\Phi = 0, \tag{2.1a}$$

$$\nabla_X \Phi = \rho \cdot hX \tag{2.1b}$$

при некотором скалярном поле ρ. Мы будем говорить, что конциркулярное поле относится к *основному типу*, если $\rho \neq 0$, и к *исключительному типу* в противном случае.

Очевидно, что в случае $h = \mathrm{id}$, мы приходим к классическому определению конциркулярного векторного поля.

Замечание 2.1. Из определения следует, что $\nabla_{vX}\Phi = 0$, т.е. что конциркулярное поле параллельно вдоль вертикальных кривых.

Условия интегрируемости уравнений (2.1b) в силу (1.4) имеют вид:

$$R(X,Y)\Phi = X(\rho)\cdot hY - Y(\rho)\cdot hX + \rho\cdot S(X,Y). \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Ric}(\Phi,X) = r\cdot X(\rho) - hX(\rho) + \rho\cdot s(X), \tag{2.3}$$

где $s(Y) = \operatorname{tr} S_Y$, $S_Y(X) = S(X,Y)$. Полагая в этих соотношениях $X := hX$, получаем

$$\operatorname{Ric}(\Phi,X) = (r-1)hX(\rho) - \rho\cdot s(hX). \tag{2.4}$$

Таким образом, из (2.3), (2.4) вытекает, что

$$X(\rho) = \frac{1}{(r-1)}\big(\operatorname{Ric}(\Phi,hX) + \rho\cdot s(hX)\big) - \frac{1}{r}\big(\operatorname{Ric}(\Phi,vX) + \rho\cdot s(vX)\big). \tag{2.5}$$

Совокупность уравнений (2.1b), (2.5) носит замкнутый характер и, рассмотренная в локальных координатах, представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений в форме Коши относительно неизвестных функций Φ^i и ρ. Условия интегрируемости этих уравнений и их дифференциальные продолжения, как нетрудно видеть, являются линейными однородными алгебраическими уравнениями. Линейное пространство решений уравнений (2.1), (2.5) будем обозначать через $\mathrm{Con}(A^r_n)$. Из выше сказанного следует, что $\dim \mathrm{Con}(A^r_n) \leqslant r+1$. Выясним, для каких пространств размерность $\mathrm{Con}(A^r_n)$ принимает максимальное значение.

Теорема 2.1. *Пространства A^r_n, удовлетворяющие условиям*

$$\Pi(X,Y) = M(Z,X,Y) = 0, \tag{2.6}$$

и только они имеют размерность пространства конциркулярных векторных полей, равную $r+1$, где

$$\Pi(X,Y) = S(X,Y) - \left(\frac{1}{(r-1)}s(hX) - \frac{1}{r}s(vX)\right)hY + \left(\frac{1}{(r-1)}s(hY) - \frac{1}{r}s(vY)\right)hX, \tag{2.7}$$

$$M(Z,X,Y) = R(X,Y)Z - \frac{1}{(r-1)}(\mathrm{Ric}(hZ,hX)hY - \mathrm{Ric}(hZ,hY)hX) + \\ + \frac{1}{r}(\mathrm{Ric}(hZ,vX)hY - \mathrm{Ric}(hZ,vY)hX). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\dim \mathrm{Con}(A^r_n) = r+1$, тогда система (2.1b), (2.5) вполне интегрируема. Условия интегрируемости уравнений (2.1b) на основании (2.2) и (2.5) имеют вид

$$\rho\Pi(X,Y) + M(\Phi,X,Y) = 0. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание, что уравнения (2.9) выполняются тождественно относительно Φ и ρ, приходим к (2.6).

Непосредственной проверкой нетрудно установить обратное, что выполнение условий (2.6) влечет за собой вполне интегрируемость уравнений. □

2.2. Если теорема 2.1 устанавливает тензорный признак пространств, допускающих максимальное число линейно независимых конциркулярных полей основного типа, то теорема, которую мы докажем ниже, выделяет классы пространств, не допускающих таких полей.

Теорема 2.2. *Пространства A^r_n, удовлетворяющие одному из шести нижеперечисленных условий, не допускают конциркулярных полей основного типа*:

$$\Pi(hX,hY) \neq 0, \tag{2.10a}$$

$$M(\Phi,hX,hY) = 0; \tag{2.10b}$$

$$\Pi(hX,vY) \neq 0, \tag{2.11a}$$

$$M(\Phi,hX,vY) = 0; \tag{2.11b}$$

$$\Pi(vX,vY) \neq 0, \tag{2.12a}$$

$$M(\Phi,vX,vY) = 0; \tag{2.12b}$$

$$\Pi(hX,hY) = 0, \tag{2.13a}$$

$$M(\Phi,hX,hY) \neq 0, \tag{2.13b}$$

$$(\overset{o}{Q}_W M)(Z,hX,hY) = \mu(W)M(Z,hX,hY); \tag{2.13c}$$

$$\Pi(hX, vY) = 0, \tag{2.14a}$$

$$M(\Phi, hX, vY) \neq 0, \tag{2.14b}$$

$$(\overset{o}{Q}_W M)(Z, hX, vY) = \mu(W) M(Z, hX, vY); \tag{2.14c}$$

$$\Pi(vX, vY) = 0, \tag{2.15a}$$

$$M(\Phi, vX, vY) \neq 0, \tag{2.15b}$$

$$(\overset{o}{Q}_W M)(Z, vX, vY) = \mu(W) M(Z, vX, vY). \tag{2.15c}$$

Доказательство. Уравнения (2.9) могут быть переписаны в равносильной форме в виде следующих трех соотношений:

$$\rho\Pi(hX, hY) + M(\Phi, hX, hY) = 0, \tag{2.16}$$

$$\rho\Pi(hX, vY) + M(\Phi, hX, vY) = 0, \tag{2.17}$$

$$\rho\Pi(vX, vY) + M(\Phi, vX, vY) = 0. \tag{2.18}$$

I. Пусть в пространстве A_n^r имеют место условия (2.10). Тогда из (2.16) следует, что $\rho = 0$. А это означает, что A_n^r не допускают конциркулярных полей основного типа. Аналогично доказывается на основании (2.17) (соответственно (2.18)) справедливость утверждение теоремы в случае выполнения условий (2.11) или (2.12).

II. Пусть имеют место условия (2.13), тогда (2.16) принимают вид

$$M(\Phi, hX, hY) = 0. \tag{2.19}$$

Дифференцируя эти соотношения ковариантно в квазисвязности $\overset{o}{Q}$, находим

$$(\overset{o}{Q}_W M)(\Phi, hX, hY) + \rho M(W, hX, hY) = 0. \tag{2.20}$$

Из (2.20) вследствие (2.13c) и (2.19) получаем $\rho M(W, hX, hY) = 0$. Отсюда на основании (2.13b) получаем, что $\rho = 0$. Подобным образом доказывается утверждение теоремы в случае выполнения условий (2.14) или (2.15). ☐

2.3. Пусть Φ — конциркулярное векторное поле на полуримановом пространстве V_n^r, $\phi(X)$ — сопряженное ему относительно g ковекторное поле ($\phi(X) = g(X, \Phi)$), ∇ — псевдосвязность Леви-Чивиты, соответствующая HR-структуре $(g; h)$.

Замечание 2.2. Конциркулярное векторное поле основного типа Φ на полуримановом пространстве не изотропно. Действительно, пусть $l = g(\Phi, \Phi)$, тогда из соотношений (2.1) вытекает, что

$$X(l) = \rho\phi(X). \tag{2.21}$$

Следовательно, если $l = \mathrm{const}$, то $\rho = 0$. А это противоречит тому, что Φ — конциркулярное векторное поле основного типа. Однако $vX(l) = 0$, т.е. вдоль вертикальных кривых длина вектора Φ постоянна (является интегралом вертикального распределения).

Соотношения (2.2) на V_n^r могут быть переписаны в эквивалентной форме:

$$R(Z, \Phi, X, Y) = g(Y, Z)X(\rho) - g(X, Z)Y(\rho) + \rho S(Z, X, Y), \tag{2.22}$$

где $R(Z, W, X, Y) = g(R(X, Y)W, Z)$, $S(Z, X, Y) = g(S(X, Y), Z)$. Полагая в (2.22) $Z = \Phi$ и учитывая косую симметрию тензора R по первым двум аргументам (в силу метричности ∇), мы находим

$$g(Y, \Phi)X(\rho) - g(X, \Phi)Y(\rho) + \rho S(\Phi, X, Y) = 0. \tag{2.23}$$

Эти уравнения, как легко видеть, в силу (1.17b), (1.20) для концируклярного поля основного типа равносильны следующим трем соотношениям:

$$hX(\rho)\cdot\phi(Y) - hY(\rho)\cdot\phi(X) = 0, \tag{2.24a}$$

$$\rho S(\Phi, hX, vY) = vY(\rho)\cdot\phi(X), \tag{2.24b}$$

$$S(\Phi, vX, vY) = 0. \tag{2.24c}$$

Из (2.24a) вытекает, что

$$hX(\rho) = K\phi(X). \tag{2.25}$$

2.4. Как известно, n-мерное псевдориманово пространство допускает максимальное число линейно независимых концируклярных полей основного типа, равное $n+1$, тогда и только тогда, когда является пространством постоянной кривизны. Отличные от пространств постоянной кривизны римановы пространства допускают не более $n-2$ линейно независимых концируклярных полей основного типа [3]. Естественно возникает вопрос: имеет ли место подобная лакунарность для полуримановых пространств? Ответ на этот вопрос дают следующие утверждения.

Теорема 2.3. *Число линейно независимых концируклярных полей основного типа на полуримановых пространствах, отличных от пространств, удовлетворяющих условиям* (2.6)*, не превышает* $r-1$.

Докажем сперва следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* Φ^i *и* $T^{(k)}_{i(j)}(\neq 0)$ *— компоненты соответственно концируклярного поля* Φ *основного типа и тензора* T *типа* $(p;q+1)$ *такого, что*

$$\Phi^i T^{(k)}_{i(j)} = 0 \tag{2.26}$$

в некоторой локальной системе координат на M*. Тогда среди уравнений* (2.26) *и их дифференциальных продолжений содержится по крайней мере два линейно независимых.*

Доказательство. Действительно, так как $T^{(k)}_{i(j)} \neq 0$, то из (2.26) следует, что хотя бы одна из компонент Φ^i выражается через остальные. Дифференцируя соотношения ковариантно в квазисвязности $\overset{o}{Q}$ и учитывая (2.1), получаем

$$\rho T^{(k)}_{l(j)} + \Phi^i \overset{o}{Q}_l T^{(k)}_{i(j)} = 0.$$

Откуда следует, что ρ линейным образом выражается через Φ^i. И это доказывает нашу лемму. □

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.3.

Доказательство. Локальные выражения для соотношений (2.6) на равносильны следующей группе уравнений:

$$\overset{1}{R}_{tijk} + \frac{1}{r-1}R_{tp}\big(h^p_j g_{ki} - h^p_t g_{ji}\big) = 0; \tag{2.27}$$

$$\overset{3}{R}_{tijk} = 0, \tag{2.28a}$$

$$\overset{2}{R}_{tijk} = 0; \tag{2.28b}$$

$$\overset{3}{S}_{ijk} - s_p v^p_k g_{ji} = 0, \tag{2.29a}$$

$$\overset{2}{S}_{ijk} = 0. \tag{2.29b}$$

Аналогично, условия интегрируемости уравнений (2.1b) могут быть представлены в форме:

$$\Phi^t(\overset{1}{R}_{tijk} + \frac{1}{r-1}R_{tp}(h^p_j g_{ki} - h^p_t g_{ji}) = 0; \tag{2.30}$$

$$\Phi^t(\overset{3}{R}_{tijk} - \frac{1}{r}R_{tp}h^p_t g_{ji}) + \rho(\overset{3}{S}_{ijk} - s_p v^p_k g_{ji}) = 0, \tag{2.31a}$$

$$\Phi^t\overset{2}{R}_{tijk} - \rho\overset{2}{S}_{ijk} = 0. \tag{2.31b}$$

Предположим, что хотя бы одно из условий (2.27)–(2.29) не выполнено. Рассмотрим несколько случаев.

I. $(\overset{1}{R}_{tijk} + \frac{1}{r-1}R_{tp}(h^p_j g_{ki} - h^p_t g_{ji}) \neq 0$. В этом случае, как это следует из леммы 2.1, среди уравнений (2.30) и их дифференциальных продолжений содержатся по крайней мере два линейно независимых.

II. $\overset{2}{S}_{ijk} \neq 0$. Рассматривая локальную запись уравнений (2.23), имеющую вид $\Phi^t\overset{2}{S}_{tjk} = 0$, на основании леммы 2.1 приходим к утверждению теоремы.

III. $\overset{2}{R}_{tijk} \neq 0$; $\overset{2}{S}_{ijk} = 0$. В этом случае уравнения (2.31b) принимают вид

$$\Phi^t\overset{2}{R}_{tijk} = 0.$$

Применяя к этим уравнениям лемму 2.1, убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

IV. $\overset{3}{R}_{tijk} = 0$; $\overset{3}{S}_{ijk} \neq 0$. В этом случае из первого тождества Бианки нетрудно получить, что

$$\overset{3}{R}_{tijk} + \overset{3}{R}_{jtik} + \overset{3}{R}_{ijtk} = 0. \tag{2.32}$$

Проальтернируем (2.31a) по i и j и учитывая (1.18b), получим

$$\Phi^t(\overset{3}{R}_{tijk} - \overset{3}{R}_{tjik}) = 0.$$

Отсюда в силу (2.32) вытекает, что

$$\Phi^t\overset{3}{R}_{ijtk} = 0$$

Далее также как и в предыдущих случаях, применяя лемму 2.1, приходим к утверждению теоремы.

V. И последний случай $\overset{3}{R}_{tijk} \neq 0$; $\overset{2}{S}_{ijk} = 0$. Этот случай невозможен, так как в силу теоремы 2.2 такие пространства не допускают конциркулярных полей основного типа. ☐

3. Специальные типы конциркулярных векторные поля на полуримановых пространствах

3.1. Напомним следующие определения.

Определение 3.1 (см. [2]). Векторное поле B на M называется *инфинитезимальной симметрией* распределения $\mathfrak{D}$, если $[B, X] \in \mathfrak{D}$ для любого $X \in \mathfrak{D}$.

Совокупность всех инфинитезимальных симметрий распределения $\mathfrak{D}$ мы будем обозначать через $S(\mathfrak{D})$. $S(\mathfrak{D})$ является $\mathbb{R}$-алгеброй Ли относительно операции коммутирования [2].

Если $B \in \mathfrak{D} \cap S(\mathfrak{D})$, то B называется *характеристической* или *тривиальной инфинитезимальной* симметрией распределения $\mathfrak{D}$.

Совокупность всех характеристических инфинитезимальных симметрий распределения $\mathfrak{D}$ обозначают через $\mathrm{Char}(\mathfrak{D})$. $\mathrm{Char}(\mathfrak{D})$ образуют идеал алгебры $S(\mathfrak{D})$ [2].

Замечание 3.1. Векторное поле B на A^r_n является симметрией горизонтального распределения $\mathfrak{H}$, т.е. удовлетворяет условию

$$v[B, hY] = 0 \tag{3.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$v\mathfrak{L}_B h = 0, \tag{3.2}$$

где $\mathfrak{L}_B$ — производная Ли в направлении векторного поля B. Действительно, в справедливости этого утверждения легко убедиться, рассмотрев выражение для производной Ли проектора h:

$$(\mathfrak{L}_B h)(Y) = v[B, hY] - h[B, vY]. \tag{3.3}$$

Аналогично, для вертикального распределения $\mathfrak{V}$ из (3.3) следует, что векторное поле $B \in S(\mathfrak{V})$ является симметрией, т.е. удовлетворяет условию

$$h[B, vY] = 0, \tag{3.4}$$

тогда и только тогда, когда

$$h\mathfrak{L}_B h = 0. \tag{3.5}$$

Определение 3.2. Мы будем говорить, что векторное поле B задает *инфинитезимальное конформное преобразование* на пространстве V_n^r, если

$$\mathfrak{L}_B g = \mu \cdot g. \tag{3.6}$$

При этом случай $\mu \neq 0$ соответствует *нетривиальному* инфинитезимальному конформному преобразованию, а случай $\mu = 0$ — *тривиальному* инфинитезимальному конформному преобразованию (*инфинитезимальной изометрии*).

Инфинитезимальное конформное преобразование B мы будем называть:

(i) *инфинитезимальным конформным движением* пространства V_n^r, если

$$\mathfrak{L}_B h = 0; \tag{3.7}$$

(ii) *инфинитезимальным конформным SH-движением* пространства V_n^r, если

$$v\mathfrak{L}_B h = 0; \tag{3.8}$$

(iii) *инфинитезимальным конформным SV-движением* пространства V_n^r, если

$$h\mathfrak{L}_B h = 0. \tag{3.9}$$

Определение 3.3. Конциркулярное векторное поле Φ на пространстве V_n^r мы будем называть:

(i) *специальным*, если

$$hX(\rho) = Kf(X), \tag{3.10a}$$

$$hX(K) = 0; \tag{3.10b}$$

(ii) *горизонтально сходящимся*, если

$$hX(\rho) = 0; \tag{3.11}$$

(iii) *сходящимся*, если

$$X(\rho) = 0; \tag{3.12}$$

(iv) *L-конциркулярным*, если

$$vXhY(\ln|\rho|) = v[vX, hY](\ln|\rho|); \tag{3.13}$$

(v) *SV-конциркулярным*, если

$$h\mathfrak{L}_\Phi h = 0; \tag{3.14}$$

(vi) *SH-конциркулярным*, если

$$v\mathfrak{L}_\Phi h = 0; \tag{3.15}$$

(vii) *S-конциркулярным*, если

$$\mathfrak{L}_\Phi h = 0; \tag{3.16}$$

(viii) *P-конциркулярным*, если

$$(\nabla\rho)(v[hX, \Phi]) = 0. \tag{3.17}$$

Замечание 3.2. Сходящиеся и специальное конциркулярные поля обобщают одноименные типы полей, изучавшиеся на псевдоримановых пространствах соответственно П. А. Широковым [11] и Х. Л. Фризом [15]. Остальные типы конциркулярных полей не имеют аналогов в регулярном случае.

Замечание 3.3. Соотношения (3.3) с учетом (1.3) и (1.6), могут быть преобразованы к виду:

$$(\mathfrak{L}_{hX}h)(Y) = v[hX, hY] + \nabla_{vY}hX + S(hX, vY). \tag{3.18}$$

Из условий (3.9) на основании мы приходим к выводу, что конциркулярное векторное поле Φ является SV-конциркулярным тогда и только тогда, когда

$$S(\Phi, vY) = 0. \tag{3.19}$$

Для SV-конциркулярного поля Φ основного типа эти условия в силу (2.24b) эквивалентны тому, что

$$vX(\rho) = 0. \tag{3.20}$$

Замечание 3.4. Производная Ли метрики g в силу (1.3) и (1.6) задается следующим выражением:

$$(\mathfrak{L}_{hX}g)(Y, Z) = g(\nabla_{hX}Y, Z) + g(\nabla_{hX}Z, Y) + S(Z, hX, Y) + S(Y, hX, Z). \tag{3.21}$$

Из этих условий на основании (2.1a), (3.19) мы приходим к выводу, что для мы SV-конциркулярного поля Φ справедливы соотношения

$$(\mathfrak{L}_{hX}g)(Y, Z) = 2\rho \cdot g(Y, Z),$$

говорящие о том, что SV-конциркулярные поля основного типа определяют на V_n^r нетривиальные конформные SV-движения, а исключительного типа — изометрические SV-движения. Нетрудно убедиться в справедливости обратного утверждения: если конциркулярное поле определяет конформное преобразование на V_n^r, то оно является SV-конциркулярным.

Замечание 3.5. Соотношения (3.1), (3.20) в частности, показывают, что SH-конциркулярное и SV-конциркулярное поля являются P-конциркулярными. Из (3.11) на основании (2.25) вытекает, что

$$(\nabla\rho)(v[hX, hY]) = 0. \tag{3.22}$$

Это говорит о том, что сходящееся поле также является P-конциркулярным.

3.2. Известно [15], что наличие двух и более линейно независимых конциркулярных полей на псевдоримановом пространстве приводит к тому, что любое конциркулярное поле на является специальным. Покажем, что подобный факт имеет место и в сингулярном случае при некоторых дополнительных ограничениях. Для этого докажем сперва несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Конциркулярное векторное поле Φ основного типа, отличное от горизонтально сходящегося, является L-конциркулярным, тогда и только тогда, когда*

$$\rho^2 = Kf, \tag{3.23}$$

где

$$vX(f) = 0. \tag{3.24}$$

а K — скалярная функция, участвующая в уравнениях (2.25).

Доказательство. Действительно, дифференцируя (2.25) в направлении vY и учитывая и (3.13), имеем

$$vY\left(\ln\left|\frac{K^2}{\rho}\right|\right) \cdot \phi(X) = 0.$$

Следовательно,

$$vX\left(\ln\left|\frac{K^2}{\rho}\right|\right) = 0. \tag{3.25}$$

А это в свою очередь приводит нас к (3.23), (3.24). Обратно, прологарифмировав (3.23), а затем продифференцировав полученное сперва в направлении vY, а потом в направлении hX, на основании (2.25) и (3.24) получим

$$hXvY(\ln|\rho|) = h[hX, vY](\ln|\rho|),$$

что, как легко видеть, равносильно (3.13). □

Лемма 3.2. *Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — два линейно независимых концирклярных поля основного типа на V_n^r, тогда*

$$K = \bar{K}, \tag{3.26a}$$

$$vX\big(\ln|\rho|\big) = vX\big(\ln|\bar{\rho}|\big). \tag{3.26b}$$

Доказательство. Полагая в соотношениях (2.21), (2.22) $X = \bar{F}$ и учитывая (2.22), (2.25), получаем

$$(K - \bar{K})\big(\phi(X)\bar{\phi}(Y) - \phi(Y)\bar{\phi}(X)\big), \tag{3.27a}$$

$$\big(vX(\ln|\rho|) - vX(\ln|\bar{\rho}|)\big)g(\Phi, \bar{\Phi}) = 0. \tag{3.27b}$$

Из (3.27a) в силу линейной независимости Φ и $\bar{\Phi}$ следует (3.26a). А из (3.27b) вытекает, что либо имеет место (3.26b), либо $g(\Phi, \bar{\Phi}) = 0$. Но последнее невозможно, так как в противном случае, продифференцировав эти соотношения, на основании (2.1) мы получили бы, что

$$\rho\bar{\phi}(X) + \bar{\rho}\phi(X) = 0,$$

а это противоречит линейной независимости Φ и $\bar{\Phi}$. □

Непосредственно из (3.26a) и (3.26b) вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Если полуриманово пространство V_n^r допускает специальное концирклярное (соответственно SV-концирклярное, L-концирклярное, горизонтально сходящиеся, сходящиеся) векторное поле, то любое концирклярное векторное поле на V_n^r является специальным (соответственно SV-концирклярным, L-концирклярным, горизонтально сходящимся, сходящимся).*

Теорема 3.1. *Если V_n^r допускает два линейно независимых концирклярных поля Φ и $\bar{\Phi}$ основного типа, тогда они оба являются L-концирклярными.*

Доказательство. Действительно, дифференцируя (3.26b) в направлении hY и учитывая (3.3), имеем

$$vX\left(\ln\left|\frac{K^2}{\rho}\right|\right) \cdot \phi(Y) = vX\left(\ln\left|\frac{\bar{K}}{\bar{\rho}^2}\right|\right) \cdot \bar{\phi}(Y).$$

Отсюда в силу линейной независимости Φ и $\bar{\Phi}$ получаем

$$vX\left(\ln\left|\frac{K^2}{\rho}\right|\right) = 0, \tag{3.28a}$$

$$vX\left(\ln\left|\frac{\bar{K}}{\bar{\rho}^2}\right|\right) = 0. \tag{3.28b}$$

Следовательно, на основании леммы 3.1 поля Φ и $\bar{\Phi}$ являются L-концирклярными. □

Теорема 3.2. *Если V_n^r допускает два линейно независимых P-концирклярных поля Φ и $\bar{\Phi}$ основного типа, тогда они оба являются специальными.*

Доказательство. Из условий интегрируемости уравнений (2.25) следует

$$(\nabla\rho)(v[hX, hY]) = hX(K) \cdot \phi(Y) - hY(K) \cdot \phi(X). \tag{3.29}$$

Полагая в этих соотношениях $Y = \Phi$, на основании (3.4) имеем

$$g(\Phi, \Phi) \cdot hX(K) - \Phi(K) \cdot \phi(X) = 0. \tag{3.30}$$

Так как Φ не изотропно, то из (3.5) следует

$$hX(K) = \sigma\phi(X), \tag{3.31}$$

где $\sigma = \dfrac{\Phi(K)}{g(\Phi, \Phi)}$. Аналогичным образом получаем

$$hX(K) = \bar{\sigma}\bar{\phi}(X). \tag{3.32}$$

В силу линейной независимости Φ и $\bar\Phi$ условия (3.31), (3.32) дают нам $\sigma = \bar\sigma = 0$. Следовательно, $hX(K) = 0$. А это говорит о том, что Φ и $\bar\Phi$ — специальные конциркулярные поля. □

Теорема 3.3. *Пусть V^r_n допускает $m(> 1)$ линейно независимых P-конциркулярных полей основного типа $\overset{1}{\Phi},\dots,\overset{m}{\Phi}$, тогда*

1) *для всех $\alpha,\beta = 1,\dots,m$ имеем*

$$hX(\overset{\alpha}{\rho}\cdot\overset{\beta}{\rho} - Kg(\overset{\alpha}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi})) = 0; \tag{3.33}$$

2) *для всех $\alpha,\beta = 1,\dots,m$ имеем*

$$X(\operatorname{sign}(K)\sqrt{\overset{\alpha}{f}\cdot\overset{\beta}{f}} - g(\overset{\alpha}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi})) = 0; \tag{3.34}$$

3) *V^r_n допускает группу изометрических преобразований, порядок которой не ниже, чем $m(m-1)/2$ и группу конформных преобразований, порядок которой не ниже, чем $m(m+1)/2$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия утверждения, тогда на основании теорем 3.1 и 3.2 поля $\overset{1}{\Phi},\dots,\overset{m}{\Phi}$ являются специальными и L-конциркулярными. Следовательно,

$$hX(K) = 0, \tag{3.35a}$$

$$hX(\overset{\alpha}{\rho}) = \sqrt{K\overset{\alpha}{f}} \quad \forall\alpha. \tag{3.35b}$$

1) В справедливости (3.33) легко убедится путем прямых вычислений с учетом (2.1), (3.10).

2) Подставляя в (3.33) выражения для $\overset{\alpha}{\rho}$ и $\overset{\beta}{\rho}$ и учитывая, что функции $\operatorname{sign}(K)\sqrt{\overset{\alpha}{f}\cdot\overset{\beta}{f}} - g(\overset{\alpha}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi})$ в силу (2.1b), (3.24) являются интегралами вертикального распределения, мы приходим к (3.34).

3) Рассмотрим два возможных случая.

I. Все конциркулярные векторные поля на V^r_n являются горизонтально сходящимися. Следовательно, $hX(\overset{\alpha}{\rho}) = 0$ для всех α. Принимая это во внимание, из (3.26b) получаем

$$\overset{\alpha}{\rho} = \overset{\alpha}{C}\nu, \tag{3.36}$$

где $\overset{\alpha}{C} = \text{const}$, $vX(\nu) = 0$. На основании этих соотношений легко убедиться в том, что вектор $\overset{\alpha}{C}\overset{\beta}{\Phi} - \overset{\beta}{C}\overset{\alpha}{\Phi}$ является ковариантно постоянным. Поэтому базис пространства $\operatorname{Con}(V^r_n)$ мы можем выбрать таким образом, что $\overset{1}{\Phi}$ будет горизонтально сходящимися, а $\overset{2}{\Phi},\dots,\overset{m}{\Phi}$ — ковариантно постоянными. Тогда каждый из векторов

$$\overset{\alpha\beta}{X} = (\overset{1}{\rho})^{-1}(g(\overset{1}{\Phi},\overset{\alpha}{\Phi})\cdot\overset{\beta}{\Phi} - g(\overset{1}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi})\cdot\overset{\alpha}{\Phi}), \quad \alpha,\beta = 1,\dots,m,\ \alpha\neq\beta, \tag{3.37}$$

определяет инфинитезимальное изометрическое преобразование V^r_n, а каждый из векторов

$$\overset{\alpha}{X} = (\overset{1}{\rho})^{-1}\overset{\alpha}{\Phi}, \quad \alpha = 1,\dots,m, \tag{3.38}$$

определяет инфинитезимальное конформное преобразование V^r_n.

II. Все конциркулярные векторные поля на V^r_n отличны от горизонтально сходящихся. Из (3.10), (3.23) вытекает, что

$$X(\sqrt{|\overset{\alpha}{f}|}) = \sqrt{|K|}\cdot g(\overset{\alpha}{\Phi}, X) = 0. \tag{3.39}$$

Принимая это во внимания, нетрудно установить, что каждый из векторов

$$\overset{\alpha\beta}{X} = \sqrt{|\overset{\alpha}{f}|}\cdot\overset{\beta}{\Phi} - \sqrt{|\overset{\beta}{f}|}\cdot\overset{\alpha}{\Phi}, \quad \alpha,\beta = 1,\dots,m;\ \alpha\neq\beta, \tag{3.40}$$

определяет инфинитезимальное изометрическое преобразование V^r_n, а каждый из векторов

$$\overset{\alpha}{X} = \frac{1}{\sqrt{|K|}}\overset{\alpha}{\Phi}, \quad \alpha = 1, \dots, m. \tag{3.41}$$

определяет инфинитезимальное конформное преобразование V^r_n. □

4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МЕТРИКИ И ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПРОЕКТОРА ПОЛУРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ДОПУСКАЮЩИХ SH-КОНЦИРКУЛЯРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

4.1. Пусть Φ^i и Φ_i — соответственно контравариантные и ковариантные компоненты SH-конциркулярного поле основного типа в некоторой системе координат (x^i) на V^r_n. Мы будем предполагать, что система координат выбрана таким образом, что

$$x^1 = g(\Phi, \Phi), \tag{4.1a}$$

$$x^1 = u^2, \quad \dots, \quad x^n = u^n, \tag{4.1b}$$

где $u^2, \dots, u^n$ являются функционально независимыми решениями уравнения $\Phi^i\partial_i u = 0$. Тогда, вследствие (1.17), (2.21) в этой системе координат компоненты SH-конциркулярного поля, метрического тензора и горизонтального проектора приведутся к виду:

$$\Phi_i = \frac{\delta^1_i}{2\rho}, \tag{4.2a}$$

$$\Phi^i = 2\rho \cdot \delta^i_1; \tag{4.2b}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (4x^1 \cdot \rho^2)^{-1} & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}; \tag{4.3}$$

$$h^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^\beta_\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n. \tag{4.4}$$

Данная система координат, как нетрудно видеть, определена с точностью до преобразований вида

$$\hat{x}^1 = f(x^1), \quad \hat{x}^\alpha = f^\alpha(x^\beta), \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n. \tag{4.5}$$

Координатная форма уравнений (2.1b) может быть записана в следующем эквивалентном виде:

$$\partial_i\Phi_j - \Gamma^t_{ij}\Phi_t = \rho \cdot g_{ij}, \tag{4.6}$$

где, как это следует из (1.14),

$$2\Gamma^k_{ij} = g^{kt}\left(\partial_i g_{jt} + h^l_j\partial_l g_{it} - h^l_t\partial_l g_{ij} + g_{tl}\partial_i h^l_j - g_{tj}\partial_i h^l_t + g_{li}(\partial_k h^l_t - \partial_j h^k_t)\right). \tag{4.7}$$

Подставляя в (4.6) выражение для Φ_i из (4.2a), находим

$$\frac{-\delta^1_i \cdot \partial_i\rho}{\rho^2} - \frac{\Gamma^1_{ij}}{2\rho} = \rho \cdot g_{ij}.$$

Рассматривая эти уравнения при $i = 1$, $j = 1$ и $i = \alpha > 1$, $j = 1$, убеждаемся, что при они выполняются тождественно в силу (4.2)–(4.4), а при $i = 1$, $j = \beta > 1$ и $i = \alpha > 1$, $j = \beta$ мы получаем соответственно

$$h^\alpha_\beta\partial_\alpha\rho = 0, \tag{4.8a}$$

$$x^1\partial_1 g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\partial_1 h^\gamma_\beta = \rho \cdot g_{\alpha\beta}. \tag{4.8b}$$

Проальтернировав (4.8b) по α и β, находим

$$g_{\alpha\gamma}\partial_1 h^\gamma_\beta - g_{\beta\gamma}\partial_1 h^\gamma_\alpha. \tag{4.9}$$

Свернув (4.9) с h^α_μ по α, в силу (1.17a) имеем

$$g_{\mu\gamma}\partial_1 h^\gamma_\beta = 0. \tag{4.10}$$

Вследствие этого уравнения (4.9) принимают вид:

$$x^1\partial_1 g_{\alpha\beta} = \rho\cdot g_{\alpha\beta}. \tag{4.11}$$

Отсюда вытекает, что

$$g_{\alpha\beta} = x^1\tilde{g}_{\alpha\beta}(x^2,\dots,x^n), \quad \alpha,\beta = 1,\dots,m. \tag{4.12}$$

Так как Φ является SH-конциркулярным полем, то из (3.1) на основании (4.2b) следует,

$$h^\alpha_\beta\partial_1 h^\beta_\gamma = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,m. \tag{4.13}$$

Эти соотношения в совокупности с (4.10) дают

$$\partial_1 h^\beta_\gamma = 0, \quad \beta,\gamma = 1,\dots,m. \tag{4.14}$$

Таким образом, $(h^\alpha_\beta(x^\gamma); g_{\alpha\beta}(x^\gamma))$ можно интерпретировать как компоненты некоторой HR-структуры полуриманова пространства V^{r-1}_{n-1}.

Обратимся теперь к уравнениям (4.7). Возможны два случая.

I. Φ является S-конциркулярным полем. Это в силу (3.20) равносильно тому, что в данной системе координат

$$v^j_i\partial_j\rho = 0. \tag{4.15}$$

На основании этих условий из (4.7) вытекает, что

$$\partial_\alpha\rho = 0, \quad \alpha = 1,\dots,m, \tag{4.16}$$

т.е. $\rho = \rho(x^1)$.

II. Φ не является S-конциркулярным полем. Тогда наряду с $\rho = x^1$ система (4.8a) допускает еще k, $k \leqslant n-r$, функционально независимых решений $\overset{1}{m},\dots,\overset{k}{m}$. Так как коэффициенты при производных в уравнениях (4.8a) не зависят от x^1, эти решения могут быть выбраны так, чтобы они не зависели от x^1. Поэтому в данной системе координат, которая выбрана с точностью до допустимых преобразований (4.5), мы можем считать, что

$$x^{n-k+1} = \overset{1}{m}, \quad \dots, \quad x^n = \overset{k}{m}. \tag{4.17}$$

На основании чего из (1.17b), (4.8a) и (4.12) мы получаем

$$\rho = \rho(x^1, x^{n-k+1},\dots,x^n), \tag{4.18}$$

$$h^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & h^I_J & h^I_\mu\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (4x^1\cdot\rho^2)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & x^1\tilde{g}_{IJ} & x^1\tilde{g}_{IA}h^A_\mu\\ 0 & x^1\tilde{g}_{AJ}h^A_\nu & x^1\tilde{g}_{AB}h^B_\nu\end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

где индексы I, J, A, B изменяются от 2 до $n-k$; μ, ν — от $n-k+1$ до n; а $\tilde{g}_{IJ}$, h^I_ν, h^I_J — произвольные функции от $x^2,\dots,x^n$ такие, что

$$\operatorname{rk}\|g_{IJ}\| = \operatorname{rk}\|h^I_J\| = r-1, \tag{4.21}$$

$$g_{IJ} = g_{JI} = g_{IA}h^A_J, \tag{4.22}$$

$$h^A_J h^I_A = h^I_J, \tag{4.23a}$$

$$h^J_A h^A_\mu = h^J_\mu. \tag{4.23b}$$

Обратно, непосредственными вычислениями нетрудно убедится в том, что, если в некоторой системе координат на V^r_n компоненты метрического тензора g_{ij} и горизонтального проектора h^i_j задаются соотношениями (4.3), (4.4), (4.12), (4.14), (4.16) (или соответственно (4.18)–(4.23)), то вектор, определенный в данной системе координат по формуле (4.2b) (где $\rho\neq 0$), является S-конциркулярным (соответственно, SH-конциркулярным, отличным от S-конциркулярного) полем.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Полуриманово пространство V_n^r допускает SH-конциркулярное поле основного типа тогда и только тогда, когда на нем может быть выбрана система координат, в которой компоненты метрического тензора g_{ij} и горизонтального проектора h_j^i удовлетворяют соотношениям* (4.3), (4.4), (4.12), (4.14), (4.16) (*в случае, когда Φ является S-конциркулярным*) *или соотношениям* (4.18)–(4.23) (*в случае, когда Φ является SH-конциркулярным, отличным от S-конциркулярного*).

Замечание 4.1. Каноническая форма метрика полуриманова пространства V_n^r, допускающего S-конциркулярное поле основного типа, может быть еще более детализирована. Действительно,в системе координат, указанной в теореме 4.1, компонента g_{11} метрического тензора в силу (4.3), (4.16) есть функция лишь только одной переменной x^1. Поэтому после допустимого преобразования

$$\tilde{x}^1 = \int \sqrt{|g_{11}|}dx^1, \quad \tilde{x}^\alpha = x^\alpha, \quad \alpha = 2, \dots n,$$

компоненты метрического тензора приведутся к виду

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sigma(\tilde{x}^1)\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\gamma) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 2, \dots n, \tag{4.24}$$

где $s(\tilde{x}^1) \neq \mathrm{const}$ — некоторая функция переменной $\tilde{x}^1$, $a = \pm 1$. Нетрудно показать, что условия (4.21) в совокупности с (4.4), (4.14) являются достаточными для существования на V_n^r S-конциркулярного поля основного типа. Отметим, что к виду (4.21) приводится метрика любого псевдориманова пространства, допускающего конциркулярное поле основного типа [4, 12].

Пример 4.1. Приведем теперь пример полуриманова пространства V_n^r, допускающего ровно k линейно независимых конциркулярных полей. Пусть основная метрическая форма и горизонтальный проектор этого пространства в некоторой системе координат имеет соответственно вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2\Big((dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2 + \\ + \exp(2x^{r+1})\big((dx^{k+1})^2 + \dots + (dx^r)^2\big)\Big), \quad 2 \leqslant k \leqslant r-1 \tag{4.25}$$

$$h_j^i = \begin{pmatrix} \delta_{\tilde{j}}^{\tilde{i}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{i}, \tilde{j} = 1, \dots, r. \tag{4.26}$$

Вычислив в этой системе координат по формуле (4.7) с учетом (4.25), (4.26) компоненты псевдосвязности Леви-Чивита, получаем, что ненулевыми будут лишь блоки

$$\Gamma_{\hat{j}1}^{\hat{i}} = \frac{\delta_{\hat{j}}^{\hat{i}}}{x^1}, \quad \Gamma_{\hat{i}\hat{j}}^1 = -x^1 g_{\hat{i}\hat{j}}, \quad \Gamma_{\beta r+1}^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \quad \hat{i}, \hat{j} = 2, \dots, r, \quad \alpha, \beta = k+1, \dots r. \tag{4.27}$$

Рассмотрим в данной системе координат ковекторы

$$\overset{1}{\Phi}_i = x^1\delta_j^i, \quad \overset{2}{\Phi}_i = x^1\delta_1^i + \delta_1^2, \quad \dots, \quad \overset{k}{\Phi}_i = x^1\delta_1^i + \delta_1^2. \tag{4.28}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что эти ковекторы горизонтальны удовлетворяют соотношениям (3.19), (4.6), следовательно, являются SV-конциркулярными полями основного типа. Очевидно, что они линейно независимы. Покажем, что данное пространство не допускает других конциркулярных полей, линейно независимых с данными. Предположим противное. Пусть $\overset{k+1}{\Phi}_i$ — компоненты конциркулярного поля основного типа линейно независимого с $\overset{1}{\Phi}, \dots, \overset{k}{\Phi}$. Так как $\overset{1}{\Phi}, \dots, \overset{k}{\Phi}$ являются SV-конциркулярными, то $\overset{k+1}{\Phi}$ на основании следствия 3.1 также является SV-конциркулярным. Следовательно, в силу (3.19) имеют место соотношения

$$\overset{3}{S}{}_{ij}^t \overset{k+1}{\Phi}_t = 0.$$

Отсюда в силу (4.27) вытекает, что

$$\overset{3}{S}{}^{\alpha}_{\beta r+1}\overset{k+1}{\Phi}_{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\beta r+1}\overset{k+1}{\Phi}_{\alpha} = \overset{k+1}{\Phi}_{\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = k+1, \ldots, r.$$

Следовательно, $\overset{k+1}{\Phi}$ является линейной комбинацией $\overset{1}{\Phi}, \ldots, \overset{k}{\Phi}$, что противоречит нашему предположению. Значит, данное пространство допускает ровно $k \leqslant r-1$ линейно независимых концирскулярных полей основного типа. Этот факт показывает, что оценка, полученная в теореме 2.3 для $\dim \mathrm{Con}(A^r_n)$, является точной. Данный пример особенно интересен тем,что, доказывает существование полуримановых пространств, допускающих $r-1$ линейно независимых концирскулярных полей основного типа, случае $n = r$, (т.е. для псевдоримановых многообразий) таких пространств не существует [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых пространств// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1990. — *22*. — С. 97–165.
2. *Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М.* Симметрии и законы сохранения математической физики. — М: Факториал, 1997.
3. *Микеш Й.* Геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Итоги науки и техн. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Геометрия–2. — М.: ВИНИТИ, 1994. — *11*.
4. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М: Наука, 1979.
5. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическим// Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1961. — *11*. — С. 43–102.
6. *Шандра И. Г.* Горизонтально эквидистантные расслоенные пространства// Изв. вузов. Сер. мат. — 1988. — *12*. — С. 86–89.
7. *Шандра И. Г.* Пространства $V(K)$ и йордановы алгебры// В кн.: «Памяти Лобачевского посвящается»/ Тр. геом. семин. — Казань: КГУ, 1992. — *1*. — С. 99–104.
8. *Шандра И. Г.* Обобщенные связности на многообразиях с вырожденной метрикой// Изв. вузов. Сер. мат. — 1992. — *6*. — С. 103–110.
9. *Шандра И. Г.* О геометрии касательного расслоения над многообразием с псевдосвязностью и антикватернионных f-структурах// Изв. вузов. Сер. мат. — 1998. — *6*. — С. 75–86.
10. *Шапиро Я. Л.* Геодезические поля направлений и проективные системы путей// Мат. сб. — 1955. — *36 (78)*. — С. 125–148.
11. *Широков П. А.* О сходящихся направлениях в римановых пространствах// Изв. Физ.-мат. о-ва (3). — Казань, 1934/35. — *7*. — С. 77–88.
12. *Fialkow A.* Conformals geodesics// Trans. Amer. Math. Soc. — 1939. — *45*. — С. 443–473.
13. *Otsuki T.* On general connections// Math. J. Okayama Univ. — 1960. — *9*, № 2. — С. 99–164.
14. *Takeno H.* Concircular scalar field in spherically symmetric space-times, I// Tensor. — 1967. — *20*, № 2, — С. 167–176.
15. *Vries H. L.* Über Riemannische Räume, die infinitesimal konforme Transformationen gestaten// Math. Z. — 1954. — *60*, № 3. — С. 38–347.
16. *Yano K.* Concircular geometry// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1940. — *16*. — С. 195–200.

Современная математика и ее приложения. Том 31 (2005). С. 69–147

УДК 514.76

ПРОСТРАНСТВА РИМАНОВЫХ МЕТРИК

© 2005 г. **Н. К. СМОЛЕНЦЕВ**

Аннотация. В данной работе рассматриваются пространства $\mathcal{M}$ римановых метрик на замкнутом многообразии M. В случае, если на многообразии M имеется симплектическая или контактная структуры, то рассматриваются пространства $\mathcal{AM}$ ассоциированных метрик. Изучаются геометрические и топологические вопросы этих пространств. Рассматриваются римановы функционалы на пространствах метрик.

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 1512–1712

Предисловие

В данной работе рассматриваются дифференциально-геометрические свойства пространства всех гладких римановых метрик на компактном многообразии M без границы. Рассматриваются также пространства ассоциированных метрик, т.е. метрик, согласованных с дополнительно заданной симплектической или контактной структурой на многообразии M. Эти пространства являются бесконечномерными нелинейными многообразиями. Изучение бесконечномерных пространств, возникающих в дифференциальной геометрии началось во второй половине прошлого века. Первыми работами в этом направлении можно считать работы Иллса [91, 92], в которых исследовались пространства C^k-отображений одного конечномерного многообразия M в другое — N и пространства сечений гладкого расслоения E. Важными частными случаями таких пространств служат группы диффеоморфизмов гладких многообразий и пространства тензорных полей на многообразии. С геометрической точки зрения наиболее интересными являются пространство $\mathcal{M}$ всех римановых метрик на M и пространство $\mathcal{A}$ почти комплексных структур на M. Основополагающей работой, посвященной изучению пространства $\mathcal{M}$ римановых метрик на компактном многообразии M является работа Д. Эбина [93].

Литература по различным аспектам пространств метрик обширна. Отметим значительный вклад в развитие этой теории М. Берже [54, 56], Х. Омори [198, 199], А. Фишера, Дж. Марсдена и А. Тромбы [106–115, 230, 231], Д. Блэра [57–63], Муто [186–190], Н. Коисо [161–163], Д. Фрида и Д. Гроиссера [116]. Информация по данной тематике имеется в книге А. Бессе [5] и обзоре Д. Блэра [63].

Несмотря на значительный объем, не все работы удалось отразить в достаточной степени. В частности, совсем не рассмотрены группы диффеоморфизмов и пространства метрик в случае некомпактного многообразия. Отметим только, что этому интересному направлению посвящены работы [95–99, 124, 124, 178, 179]. Поскольку используемые методы существенно отличаются от случая компактного многообразия, данная тема для открытых многообразий заслуживает отдельного обзора.

1. Разложение Берже—Эбина

Пусть (M, g) — гладкое (класса C^∞) замкнутое ориентируемое риманово многообразие размерности n с метрическим тензором g. Пусть E и F — гладкие векторные расслоения конечного ранга над M, снабженные гладкими скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_E$ и $(\cdot,\cdot)_F$ на слоях. Символами $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$ будем обозначать пространства всех гладких сечений расслоений E и F.

Рассмотрим дифференциальный оператор $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ порядка k. Для любого $x \in M$ и $t \in T^*_xM$ *символ* $\sigma_t(D)$ дифференциального оператора есть линейное отображение $\sigma_t(D) : E_x \to F_x$ слоев расслоений E и F, определенное следующим образом. Пусть f — дифференцируемая функция на M в окрестности точки x и такая, что $f(x) = 0$, $df(x) = t$, тогда для $\xi \in E_x$ полагаем

$$\sigma_t(D)(\xi) = \frac{1}{k!}D(f^k\xi)(x).$$

Говорят, что дифференциальный оператор D имеет *инъективный* символ, если отображение $\sigma_t(D) : E_x \to F_x$ инъективно для любого $t \neq 0$.

Дифференциальный оператор $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ называется *эллиптическим*, если $\sigma_t(D) : E_x \to F_x$ является изоморфизмом для любого $t \neq 0$.

Дифференциальный оператор $D^* : \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ называется (формально) *сопряженным* к D, если для любого $u \in \Gamma(E)$ и для любого $v \in \Gamma(F)$ имеет место равенство

$$\int\limits_M (Du, v)d\mu = \int\limits_M (u, D^*v)d\mu_g, \tag{1.1}$$

где $\mu_g = (\det g_{ij})^{1/2}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ — риманов элемент объема метрики g на M.

Как известно [19, § 4, гл. 4], для дифференциального оператора D порядка k всегда существует единственный сопряженный оператор D^*, который также имеет порядок k и

$$\sigma_t(D^*) = (-1)^k\sigma_t(D)^*,$$

где $\sigma_t(D)^*$ — сопряженное отображение $\sigma_t(D)^* : F_x \to E_x$ относительно скалярных произведений в слоях E_x и F_x расслоений E и F.

Приведем два примера. Пусть ∇ — ковариантная производная римановой связности метрики g. В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ на M пусть ∇_i — ковариантная производная вдоль векторного поля $\partial/\partial x^i$. Пусть TM — касательное расслоение, T^*M — кокасательное расслоение и S_2M — расслоение симметричных 2-форм. Скалярное произведение в слоях этих расслоений определяется римановой структурой g на M. Рассмотрим соответствующие пространства сечений: $\Gamma(TM)$ — пространство всех гладких векторных полей на M, $S_2 = \Gamma(S_2M)$ — пространство всех гладких симметричных 2-форм на M. Эти пространства имеют естественные скалярные произведения,

$$(X, Y)_g = \int\limits_M g(X, Y)d\mu_g, \qquad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{1.2}$$

$$(a, b)_g = \int\limits_M g(a, b)d\mu_g = \int\limits_M g^{ik}g^{jl}a_{ij}b_{kl}d\mu_g, \qquad a, b \in S_2. \tag{1.3}$$

Пример 1. Ковариантная дивергенция $\delta_g a$ симметричной 2-формы a на M есть дифференциальный оператор 1-го порядка,

$$\delta_g : S_2 \longrightarrow \Gamma(TM), \qquad (\delta_g a)^i = -\nabla_j a^{ij}. \tag{1.4}$$

Символ $\sigma_t(\delta_g) : S_{2,x}M \to T_xM$ легко находится, $\sigma_t(\delta_g)(a) = -t_j a^{ij}$.

Пример 2. Дифференциальный оператор

$$\alpha_g : \Gamma(TM) \longrightarrow S_2, \qquad \alpha_g(X) = \frac{1}{2}L_X g, \tag{1.5}$$

где $L_X g$ — производная Ли метрического тензора g вдоль векторного поля X на M, $L_X g = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$. Символ $\sigma_t(\alpha_g) : T_xM \to S_{2,x}M$ имеет вид

$$\sigma_t(\alpha_g)(X) = \frac{1}{2}(t \otimes X_\sharp + X_\sharp \otimes t),$$

где $X_\sharp$ — 1-форма, соответствующая вектору X относительно скалярного произведения g. Очевидно, что оператор α_g имеет иньективный символ. Из теоремы Стокса сразу следует, что операторы α_g и δ_g сопряжены [5]: для любых $X \in \Gamma(TM)$ и $a \in S_2$,

$$(\alpha_g(X), a)_g = (X, \delta_g a)_g.$$

Информацию о других дифференциальных операторах, используемых в геометрических исследованиях, можно найти в статье М. Берже и Д. Эбина [56], в книгах А. Бессе [4, доклад XVI] и [5, гл. 1.I] и в книге Р. Пале [19, гл. IV, § 6].

В дальнейшем в качестве векторных расслоений E над M мы будем рассматривать расслоения $T^p_q M$ тензоров типа (p,q). Тогда пространство сечений $\Gamma(E) = \Gamma(T^p_q)$ — это пространство всех гладких тензорных полей типа (p,q) на M. Метрика g на M определяет скалярное произведение на расслоениях $T^p_q M$ обычным образом. Тогда в пространстве $\Gamma(E)$ тензорных полей типа (p,q) определено скалярное произведение. Если T и U — тензорные поля типа (p,q), то

$$(T,U)_g = \int\limits_M g(x)\,(T(x),U(x))\,d\mu_g(x), \tag{1.6}$$

где

$$g(x)\,(T(x),U(x)) = g^{i_1k_1}\dots g^{i_qk_q} g_{j_1l_1}\dots g_{j_pl_p}\, T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}(x) U^{l_1\dots l_p}_{k_1\dots k_q}(x).$$

Скалярное произведение (1.6) определяет в пространстве $\Gamma(E)$ достаточно слабую топологию типа L^2. Естественной топологией в пространстве $\Gamma(E)$ гладких сечений является топология равномерной сходимости всех производных. Определим сначала C^k-норму в пространстве $\Gamma(E)$. Для целого неотрицательного числа k и тензорного поля T типа (p,q) положим

$$|T|_k = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in M} \|\nabla^{(i)}T(x)\|, \tag{1.7}$$

где $\nabla^{(i)} = \nabla\circ\dots\circ\nabla$ — i-я степень ковариантной производной и $\|\nabla^{(i)}T(x)\| = (\nabla^{(i)}T, \nabla^{(i)}T)^{1/2}_g$ — норма тензора в точке $x \in M$.

Обозначим через $C^k(E)$ пополнение пространства $\Gamma(E)$ относительно топологии, определенной нормой $|T|_k$. Банахово пространство $C^k(E)$ состоит из тензорных полей класса C^k. Во многих вопросах удобнее иметь гильбертовы пространства. С этой целью определим на пространстве $\Gamma(E)$ скалярные произведения, более сильные, чем (1.6). Пусть s — целое неотрицательное число и T и U — тензорные поля типа (p,q). Положим

$$(T,U)_{g,s} = \sum_{i=0}^{s} (\nabla^{(i)}T, \nabla^{(i)}U)_g = \sum_{i=0}^{s} \int\limits_M g\left(\nabla^{(i)}T, \nabla^{(i)}U\right) d\mu_g, \tag{1.8}$$

где $(\nabla^{(i)}T, \nabla^{(i)}U)_g$ — скалярное произведение (1.6).

Обозначим через $H^s(E)$ пополнение пространства $\Gamma(E)$ относительно топологии, определенной скалярным произведением (1.8). Пространство $H^s(E)$ называется пространством тензорных полей типа (p,q) соболевского класса гладкости H^s; это гильбертово пространство. Обозначим через $\|\cdot\|_s$ норму в этом пространстве. В частности, при $s = 0$ пространство $H^0(E)$ есть пополнение пространства $\Gamma(T^p_q M)$ относительно скалярного произведения (1.6). Подробное изложение этих конструкций содержится в гл. IX книги Р. Пале [19].

При $l \geqslant s$ имеем, $H^l(E) \subset H^s(E)$ и это вложение непрерывно.

Очевидно, что $C^k(E) \subset H^k(E)$. Противоположное включение устанавливает следующая терема вложения Соболева (ее доказательство можно найти в гл. X книги Р. Пале [19]).

Теорема 1.1. *Если $s \geqslant n/2 + 1 + k$, то $H^s(E) \subset C^k(E)$ и отображение вложения $H^s(E) \to C^k(E)$ вполне непрерывно.*

Таким образом при $s \geqslant n/2 + 1 + k$, каждое тензорное поле T соболевского класса H^s можно считать дифференцируемым класса C^k. Дальнейшие ограничения на s связаны именно с необходимостью обеспечить соответствующий класс гладкости тензорным полям из пространства $H^s(E)$.

В пространстве $\Gamma(E)$ гладких тензорных полей типа (p,q) на M определим топологию семейством норм $\{\|\cdot\|_s,\ s \geqslant 0\}$. Тогда $\Gamma(E)$ является пространством Фреше. Можно показать, что определенная таким образом топология на пространстве $\Gamma(E)$ не зависит от выбора метрики g на M.

Теорема 1.2 (см. [203]). *Пусть E и F векторные расслоения над M и $f : E \to F$ — C^∞-отображение, сохраняющее слои. Если $s \geqslant n/2 + 1$, то отображение $\phi : H^s(E) \to H^s(F)$, определенное как $\phi(\alpha) = f \circ \alpha$, является отображением класса C^∞.*

Напомним, что векторные расслоения E и F — это тензорные расслоения над M. Поэтому гладкий диффеоморфизм η многообразия M определяет естественное (правое) действие η^* на расслоениях E и F. Пусть $\eta^* : H^s(E) \to H^s(F)$ — соответствующее линейное отображение пространств сечений.

Теорема 1.3 (Н. Коисо, [161]). *Пусть E и F — векторные расслоения над M и $r \geqslant 0$ — некоторое целое число. Пусть $A \subset H^r(E)$ есть открытое множество и $\phi : A \to H^r(F)$ — C^∞-отображение, коммутирующее с каждым η^*. Для $s \geqslant r$ положим $A^s = A \cap H^s(E)$. Тогда $\phi(A^s) \subset H^s(E)$ и отображение $\phi|_{A^s} : A^s \to H^s(F)$ является C^∞-отображением.*

Вернемся опять к дифференциальным операторам. Хорошо известно, (см., например, [19]), что дифференциальный оператор $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ порядка k продолжается единственным образом до непрерывного линейного отображения

$$D_s : H^s(E) \to H^{s-k}(F).$$

Имеет место следующий классический результат (см. [19, гл. XI]).

Теорема 1.4. *Если дифференциальный оператор $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ эллиптический порядка k, тогда справедливы утверждения*:

1) *если $D_s u \in H^l(E)$ при $l > s - k$, то $u \in H^{l+k}(E)$*;
2) *ядро $\operatorname{Ker} D_s$ оператора D_s является конечномерным замкнутым подпространством пространства $\Gamma(E)$ гладких сечений*;
3) *имеет место следующее разложение в прямую сумму замкнутых ортогональных относительно скалярного произведения* (1.6) *подпространств*:

$$H^{s-k}(F) = \operatorname{Im} D_s \oplus \operatorname{Ker} D^*_{s-k}; \tag{1.9}$$

в гладком случае

$$\Gamma(F) = \operatorname{Im} D \oplus \operatorname{Ker} D^*. \tag{1.10}$$

Ортогональное разложение типа (1.9) имеет место [56] и для дифференциальных операторов с инъективным символом. Если дифференциальный оператор $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ имеет инъективный символ, то легко видеть, что оператор $D^*D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ является эллиптическим. Действительно, символ оператора D^*D есть $(-1)^k \sigma_t(D)^* \circ \sigma_t(D)$, что является очевидно изоморфизмом для любого $t \neq 0$. Из равенства $(u, DD^*u) = (D^*u, D^*u)$ следует, что

$$\operatorname{Ker} DD^* = \operatorname{Ker} D^*, \qquad \operatorname{Ker} D^*D = \operatorname{Ker} D.$$

Нетрудно заметить также, что

$$D_s(H^s(E)) = D_s D^*_{s+k}(H^{s+k}(F)).$$

Ясно, что $D_s(H^s(E)) \supseteq D_s D^*_{s+k}(H^{s+k}(F))$. Обратно, если $v = D_s u$, $u \in H^s(E)$, то из эллиптичности оператора D^*D и из $u \in H^s(E)$, по теореме 1.4, следует, что $u = D^*_{s+k} D_s(a) + b$, где $a \in H^{s+2k}(E)$ и $b \in \operatorname{Ker} D^*D = \operatorname{Ker} D$. Поэтому $v = D_s u = D_s D^*_{s+k} D_{s+2k}(a)$.

Теорема 1.5 (М. Берже, Д. Эбин [56]). *Если $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ — дифференциальный оператор порядка k с инъективным символом, тогда для $s - k \geqslant 0$ имеет место разложение в прямую сумму замкнутых ортогональных относительно скалярного произведения* (1.6) *подпространств*

$$H^{s-k}(F) = \operatorname{Im} D_s \oplus \operatorname{Ker} D^*_{s-k}. \tag{1.11}$$

Чтобы убедиться в справедливости разложения, достаточно показать только алгебраическое разложение

$$H^{s-k}(F) = \operatorname{Im} D_s \oplus \operatorname{Ker} D^*_{s-k}.$$

То, что это разложение будет и топологическим, следует из того, что $\operatorname{Ker} D^*_{s-k}$ — замкнуто в $H^{s-k}(F)$, а D_s — непрерывен. Действительно, в этом случае отображение

$$\widetilde{D}_s : H^s(E) \oplus \operatorname{Ker} D^*_{s-k} \to H^{s-k}(F), \quad \widetilde{D}_s(u,h) = D_s u + h$$

является непрерывным сюръективным отображением банаховых пространств. Тогда из замкнутости $H^s(E)$ в $H^s(E) \oplus \operatorname{Ker} D^*_{s-k}$ следует, что $\widetilde{D}_s(H^s(E)) = D_s(H^s(E))$ замкнуто.

Очевидно, что пространства пересекаются только по нулю, $\operatorname{Ker} D^*_{s-k} \cap D_s(H^s(E)) = \{0\}$. Действительно, если $D^*_{s-k}D_s(u) = 0$, то $(u, D^*_{s-k}D^*_s u) = (D_s u, D_s u) = 0$, следовательно, $D_s u = 0$. Поскольку оператор D^*D эллиптический, то по теореме 1.4 имеем ортогональное разложение

$$H^{s-2k}(E) = D^*_{s-k}D_s(H^s(E)) \oplus \operatorname{Ker} D_{s-2k}$$

с конечномерным ядром $\operatorname{Ker} D_{s-2k}$. Оператор $D^*_{s-k} : H^{s-k}(F) \to H^{s-2k}(E)$ отображает пространство $H^{s-k}(F)$ на $D^*_{s-k}D_s(H^s(E))$, причем $D^*_{s-k} : D_s(H^s(E) \to D^*_{s-k}D_s(H^s(E))$ — изоморфизм. Поэтому

$$\begin{gathered} H^{s-k}(F) = (D_{s-2k}D^*_{s-k})^{-1}(D_{s-2k}D^*_{s-k})(H^{s-k}(F)) = \\ = (D_{s-2k}D^*_{s-k})^{-1}(D_{s-2k}(H^{s-2k}(E))) = (D_{s-2k}D^*_{s-k})^{-1}(D_{s-2k}(D^*_{s-k}(D_s(H^s(E))))) = \\ = D_s(H^s(E)) + (D_{s-2k}D^*_{s-k})^{-1}(0) = D_s(H^s(E)) + \operatorname{Ker} D^*_{s-k}. \end{gathered}$$

Ортогональность суммы следует из $(D_s u, v) = (u, D^*_s v)$.

Следствие (см. [56]). *Если $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ — дифференциальный оператор порядка k с инъективным символом, тогда имеет место разложение в прямую сумму замкнутых ортогональных относительно скалярного произведения* (1.6) *подпространств*

$$\Gamma(F) = \operatorname{Im} D \oplus \operatorname{Ker} D^*. \tag{1.12}$$

Замечание. Разложение (1.11) и аналогичное разложение (1.12) в гладком случае, обычно называются разложениями Берже—Эбина. Из разложений теорем 1.4 и 1.5 следует, что если оператор D^* инъективен и имеет инъективный символ, то оператор D сюръективен.

В случае, когда дифференциальный оператор $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ имеет сюръективный символ, то имеет место следующий результат.

Теорема 1.6 (см. [74]). *Если дифференциальный оператор D имеет сюръективный и не инъективный символ, то его ядро $\operatorname{Ker} D$ бесконечномерно.*

Пример 3. Пусть $\alpha_g(X) = \frac{1}{2}L_X g$ — рассмотренный ранее дифференциальный оператор и δ_g — его сопряженный, $(\delta_g a)^i = -\nabla_j a^{ij}$. Как мы уже отмечали, оператор α_g имеет инъективный символ

$$\sigma_t(\alpha_g)(X) = \frac{1}{2}(t \otimes X_\sharp + X_\sharp \otimes t),$$

а оператор δ_g — сюръективный и неинъективный символ $\sigma_t(\delta_g)(a) = -t_j a^{ij}$. Поэтому по теореме 1.5 имеет место разложение Берже—Эбина

$$S_2 = S_2^0 \oplus \alpha_g(\Gamma(TM)), \tag{1.13}$$

где $S_2^0 = \operatorname{Ker} \delta_g = \{a \in S_2;\ \delta_g a = 0\}$ — пространство бездивергентных симметричных 2-форм. Соответственно каждая 2-форма $a \in S_2$ однозначно представляется в виде

$$a = a^0 + L_X g, \tag{1.14}$$

где $\delta_g a^0 = 0$. Компоненты a^0 и $L_X g$ ортогональны и определены единственным образом. Векторное поле X определено с точностью до киллингова векторного поля (т.е. такого, что $L_X g = 0$). В случае конечного класса гладкости получаем разложение гильбертова пространства $S_2^s = H^s(S_2 M)$ симметричных 2-форм класса H^s, $s > \frac{n}{2} + 1$:

$$S_2^s = S_2^{s,0} \oplus \alpha_g(\Gamma^{s+1}(TM)), \tag{1.15}$$

По теореме 1.5 ядро S_2^0 оператора δ_g является бесконечномерным. Оператор $\delta_g \alpha_g$ является эллиптическим. В работах [109, 172] показано, что

$$\delta_g(L_X g) = \Delta X + (d\delta_g(X))^\sharp - 2\operatorname{Ric}(g) \cdot X,$$

где знак $\sharp$ обозначает операцию поднятия или опускания индекса, $\Delta X = ((d\delta + \delta d)X_\sharp)^\sharp$ есть оператор Лапласа—ДеРама на векторных полях. Оператор Δ имеет выражение

$$\Delta X = -g^{ik}\nabla_j \nabla_k X^i + \operatorname{Ric}^i_k X^k.$$

2. ILH-многообразия

Пусть $\mathcal{D}$ — группа гладких диффеоморфизмов замкнутого риманова многообразия (M, g). Эта группа естественным образом действует на пространстве тензорных полей и, в частности, на пространстве римановых метрик. Поэтому рассмотрим подробнее некоторые вопросы, связанные с определением $\mathcal{D}$ как группы Ли—Фреше.

Поскольку векторные поля порождают однопараметрические группы диффеоморфизмов, то естественно считать алгеброй Ли группы $\mathcal{D}$ алгебру $\Gamma(TM)$ гладких векторных полей на M со скобкой Ли векторных полей в качестве операции. Пусть $\eta_t(X)$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем X на M. Тогда групповое экспоненциальное отображение определено формулой

$$\eta : \Gamma(TM) \longrightarrow \mathcal{D}, \quad X \mapsto \eta_1(X). \tag{2.1}$$

К сожалению, данное экспоненциальное отображение не является локальным гомеоморфизмом [20, 198]. Имеются сколь угодно близкие к единичному диффеоморфизмы, не лежащие ни в какой однопараметрической подгруппе, в то время как другие лежат во многих однопараметрических подгруппах. В работах [20, 136, 181, 198] это показано в случае простейшего многообразия, когда M — это единичная окружность S^1. Таким образом,

отображение $\eta : \Gamma(TM) \to \mathcal{D}$ не является ни локально взаимно однозначным на свой образ, ни локально сюрьективным.

Несмотря на указанные проблемы, в работе Лесли [170] показано, что группа $\mathcal{D}$ является бесконечномерной группой Ли—Фреше. Как многообразие, группа $\mathcal{D}$ моделируется на пространстве $\Gamma(TM)$ гладких векторных полей на M. Координатные карты на $\mathcal{D}$ строятся следующим естественным способом. Пусть U — открытое множество в $\Gamma(TM)$, состоящее из векторных полей на M, достаточно малых относительно C^1-нормы. Карта на $\mathcal{D}$ в окрестности единицы $e \in \mathcal{D}$ задаётся отображением

$$\xi : U \to \mathcal{D}, \quad \xi(X)(x) = \exp_x X(x), \tag{2.2}$$

где $X \in U$, $x \in M$ и $\exp_x : T_x M \to M$ — риманово экспоненциальное отображение. В окрестности любого другого элемента $\eta \in \mathcal{D}$ координатная карта задаётся аналогично,

$$\xi : U \to \mathcal{D}, \quad \xi(X)(x) = \exp_{\eta(x)} X(\eta(x)).$$

где $X \in U$, $x \in M$ и $\exp_{\eta(x)} : T_{\eta(x)}M \to M$.

Использование данных карт для определения дифференцируемой структуры на $\mathcal{D}$ сталкивается с некоторыми трудностями. Дело в том, что в качестве моделирующего пространства берётся пространство Фреше $\Gamma(TM)$ всех гладких векторных полей на M. Как известно, [2, 3, 136], существует много способов выбора метода дифференцирования в пространстве Фреше. Даже если выбрать какой-либо способ дифференцирования, как это сделано в работе [170], проблемы остаются, т.к. для пространств Фреше основные теоремы дифференциального исчисления, такие, как теорема об обратной функции, теорема об неявной функции, теорема Фробениуса не верны при любом способе дифференцирования.

Омори Х. [198, 199] предложил определить группу $\mathcal{D}$ как ILH (Inverse Limit Hilbert)-группу Ли. Группа $\mathcal{D}$ рассматривается вместе с системой гильбертовых многообразий $\mathcal{D}^s$, каждое из которых является топологической группой, причём $\mathcal{D} = \bigcap\limits_s \mathcal{D}^s$ с топологией обратного предела (напомним, что топология обратного предела есть слабейшая из топологий, в которых отображения вложения $f_s : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^s$ непрерывны). Для гильбертовых многообразий основные теоремы дифференциального исчисления верны. Результаты устанавливаются для $\mathcal{D}^s$ и затем переносятся на группу Ли—Фреше $\mathcal{D}$. Приведём основные положения подхода Омори.

Определение 2.1. Топологическое векторное пространство $\mathbb{E}$ называется ILH-пространством, если $\mathbb{E}$ есть обратный предел гильбертовых пространств $\{E^s\}$, занумерованных натуральными числами $s \geqslant d \geqslant 0$, причем E^{s+1} линейно и плотно вложено в E^s.

Будем обозначать $\mathbb{E} = \varprojlim E^s = \bigcap\limits_{s \geqslant d} E^s$.

Определение 2.2. Топологическое пространство X называется C^k-ILH-многообразием, моделируемым на $\mathbb{E}$, если

(a) X есть обратный предел C^k-гладких гильбертовых многообразий $\{X_s\}$, моделируемых на $\{E_s\}$, причем если $l \geqslant s$, то $X_l \subset X_s$;

(b) для любой точки $x \in X$ существуют открытые окрестности $U_s(x)$ точки x в X_s и гомеоморфизмы ψ_s окрестностей $U_s(x)$ на открытые подмножества $V_s(x) \subset E_s$, которые задают C^k-координаты на каждом X_s в окрестности точки x, такие, что $U_l(x) \subset U_s(x)$ при $l \geqslant s$ и $\psi_{s+1}(y) = \psi_s(y)$ для любой точки $y \in U_{s+1}(x)$.

Пространство X называется сильным C^k-ILH-многообразием, если дополнительно к свойствам (a) и (b) выполняется свойство

(c) обратный предел $\varprojlim U_s(x)$ есть открытая окрестность точки x в X.

Пусть X — C^k-ILH-многообразие $k \geqslant 1$. Касательное расслоение TX к X определяется как обратный предел касательных расслоений TX^s.

Определение 2.3. Пусть X, Y — C^k-ILH-многообразия. Отображение $\varphi : X \longrightarrow Y$ называется C^k-ILH-дифференцируемым, если φ есть обратный предел C^k-дифференцируемых отображений гильбертовых многообразий X_l и Y_s, т.е. если для любого s существует число $l(s)$ и C^k-дифференцируемое отображение $\varphi_s : X_{l(s)} \longrightarrow Y_s$, такое, что $\varphi_s(x) = \varphi_{s+1}(x)$, $\forall x \in X_{l(s+1)}$ и $\varphi = \lim_{\leftarrow} \varphi_s$.

C^∞-гладкие ILH-многообразия будем называть просто ILH-многообразиями.

Определение 2.4. Если X есть C^k-ILH-многообразие для любого $k \geqslant 0$, то X будем называть ILH-многообразием. Если отображение $\varphi : X \longrightarrow Y$ C^k-ILH-дифференцируемо для любого $k \geqslant 0$, то φ будем называть ILH-дифференцируемым, или ILH-гладким.

Обычными примерами ILH-многообразий являются пространства сечений гладких конечномерных расслоений $\pi : E \to M$ над M.

Теорема 2.1 (см. [203]). *Пусть $\pi : E \to M$ — гладкое конечномерное расслоение над M. Тогда пространство $H^s(E)$ сечений класса H^s, $s > n/2$ имеет структуру гильбертова многообразия класса C^∞. Касательное пространство $T_\varphi H^s(E)$ к $H^s(E)$ в точке $\varphi \in H^s(E)$ можно охарактеризовать следующим образом*:

$$T_\varphi H^s(E) = \{\xi \in H^s(M, TE); \quad \xi(x) \in V_{\varphi(x)} = \operatorname{Ker} d_{\varphi(x)}\pi\}.$$

Топологическая группа называется ILH-группой Ли, если она является C^∞-ILH-многообразием и групповые операции C^∞-ILH-гладкие. Точнее:

Определение 2.5 (см. [199]). Топологическая группа $\mathbf{G}$ называется сильной ILH-группой Ли, моделируемой на цепи $\{\mathbb{E}, E^s,\ s \geqslant d \geqslant 0\}$, если существует система $\{G^s,\ s \geqslant d \geqslant 0\}$ топологических групп G^s, которая для любого $s \geqslant d$ удовлетворяет следующим условиям:

(G1) Группа G^s есть гладкое гильбертово многообразие, моделируемое на E^s.

(G2) G^{s+1} есть плотная подгруппа в G^s и вложение $G^{s+1} \subset G^s$ является класса C^∞.

(G3) $\mathbf{G} = \cap G^s$ с топологией обратного предела и со структурой группы как обратного предела групповых структур на G^s.

(G4) Групповое умножение $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $(g, h) \to gh$, можно продолжить до отображения $G^{s+l} \times G^s \to G^s$ класса C^l.

(G5) Отображение $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $g \to g^{-1}$, можно продолжить до отображения $G^{s+l} \to G^s$ класса C^l.

(G6) Для каждого $g \in G^s$ правый сдвиг $R_g : G^s \to G^s$ является класса C^∞.

(G7) Пусть $\mathcal{G}^s$ — касательное пространство к G^s в единице $e \in G^s$ и TG^s — касательное расслоение. Отображение $dR : \mathcal{G}^{s+l} \times G^s \to TG^s$ определённое формулой $dR(u,g) = dR_g u$ есть класса C^l.

(G8) Существует открытая окрестность U нуля в $\mathcal{G}^d$ и C^∞-диффеоморфизм U на открытую окрестность $\widetilde{U}$ единицы $e \in G^d$, $\xi(0) = e$, такой, что ограничение ξ на $U \cap \mathcal{G}^s$ есть C^∞-диффеоморфизм открытого подмножества $U \cap \mathcal{G}^s$ из $\mathcal{G}^s$ на открытое подмножество $\widetilde{U} \cap G^s$ из G^s для любого $s \geqslant d$.

Замечание. Условие (G8) означает, грубо говоря, что координатная окрестность единицы в каждой группе G^s можно выбрать не зависящую от s. Тогда, полагая $\mathcal{G} = \cap \mathcal{G}^s$ с топологией обратного предела, мы видим, что $\xi : U \cap \mathcal{G} \to \widetilde{U} \cap \mathbf{G}$ есть гомеоморфизм и он задаёт на $\mathbf{G}$ структуру группы Ли-Фреше.

Пара (U, ξ) в условии (G8) называется ILH-координатами на $\mathbf{G}$ в окрестности единицы.

Определение 2.6. Топологическая группа $\mathbf{G}$ называется ILH-группой Ли, если существует система $\{G^s, s \geqslant d \geqslant 0\}$, удовлетворяющая условиям (G1)–(G7).

В работах [198,199] Х. Омори показал, что группа $\mathcal{D}$ гладких диффеоморфизмов многообразия M является сильной ILH-группой Ли. Д. Эбин и Дж. Марсден в работе [94] показали, что следующие группы являются ILH-группами Ли:

1) Группа $\mathcal{D}_\mu$ гладких диффеоморфизмов, оставляющих инвариантным элемент объёма μ на многообразии M.
2) Группа $\mathcal{D}_\omega$ гладких диффеоморфизмов, оставляющих инвариантной симплектическую структуру ω на M.

Х. Омори показал [199], что группы $\mathcal{D}_\mu$ и $\mathcal{D}_\omega$ являются сильными ILH-подгруппами Ли группы $\mathcal{D}$. Рассмотрим более подробно некоторые из групп диффеоморфизмов.

2.1. Группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}$. Группа $\mathcal{D}$ гладких диффеоморфизмов компактного многообразия M является [198, 199] сильной ILH-группой Ли, моделируемой на $\{\Gamma(TM), \Gamma^s(TM); s \geqslant \dim M + 5\}$. Напомним, что $\Gamma(TM)$ — это пространство Фреше гладких векторных полей и $\Gamma^s(TM)$ — гильбертово пространство векторных полей соболевского класса гладкости H^s, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geqslant \dim M + 5$.

Множество $C^1\mathcal{D}$, состоящее из C^1-диффеоморфизмов многообразия M открыто в пространстве $C^1(M,M)$ всех отображений класса C^1 многообразия M в себя и является очевидно топологической группой. Для $s \geqslant \frac{n}{2} + 1$ положим $\mathcal{D}^s = H^s(M,M) \cap C^1\mathcal{D}$, где $H^s(M,M)$ – гильбертово многообразие всех отображений M в себя соболевского класса H^s. Структура гладкого гильбертова многообразия на пространстве $H^s(M,M)$ определяется обычным образом (см. напр. [1,94]).

Множество $\mathcal{D}^s \subset H^s(M,M)$ открыто и является топологической группой. Топологическая группа $\mathcal{D}$ вместе с системой $\{\mathcal{D}^s; s \geqslant n+5\}$ удовлетворяет [199] свойствам (G1)-(G8) и поэтому является сильной ILH-группой Ли. Координатное отображение в окрестности единицы $e \in \mathcal{D}^s$ определяется формулой (2.2).

$$\xi : U^s \to \mathcal{D}^s, \qquad \xi(X)(x) = \exp_x X(x),$$

где U^s — окрестность нуля в пространстве $\Gamma^s(TM)$, $X \in U$, $x \in M$ и $\exp_x : T_xM \to M$ — риманово экспоненциальное отображение. Таким образом, касательное пространство $T_e\mathcal{D}^s$ в единице $e \in \mathcal{D}^s$ состоит из всех H^s-векторных полей на M, $T_e\mathcal{D}^s = \Gamma^s(TM)$. Касательное пространство $T_\eta\mathcal{D}^s$ к $\mathcal{D}^s$ в точке $\eta \in \mathcal{D}^s$ есть множество всех отображений $X : M \to TM$ класса H^s и таких, что $\pi \circ X$ есть диффеоморфизм η,

$$T_\eta\mathcal{D}^s = \{X : M \to TM;\ X \text{ класса } H^s,\ \pi \circ X = \eta\}. \tag{2.3}$$

Для любого $\eta \in \mathcal{D}^s$ правый сдвиг $R_\eta : \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$ будет отображением класса C^∞ и если $\eta \in \mathcal{D}^{s+l}$, то левый сдвиг $L_\eta : \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$ — класса C^l. При этом для дифференциалов dR_η и dL_η имеем:

$$dR_\eta : X \to X \circ \eta, \quad dL_\eta : X \to d\eta \circ X, \tag{2.4}$$

где $d\eta$ — дифференциал диффеоморфизма $\eta : M \to M$. Правый сдвиг — гладкое отображение, поэтому можно говорить о правоинвариантных векторных полях на $\mathcal{D}^s$. Левоинвариантные поля не могут быть определены на $\mathcal{D}^s$, т.к. левый сдвиг L_η при $\eta \in \mathcal{D}^s$ недифференцируем. Правоинвариантное векторное поле в общем случае оказывается только непрерывным. В соответствии со свойством (G7) отображение $dR : T_e\mathcal{D}^{s+l} \times \mathcal{D}^s \to T\mathcal{D}^s$, определённое формулой $dR(X, \eta) = dR_\eta(X)$ будет класса C^l. Поэтому, если $X \in \Gamma^{s+l}(TM) = T_e\mathcal{D}^{s+l}$, то правоинвариантное векторное поле

$$\widetilde{X} : \mathcal{D}^s \to T\mathcal{D}^s, \quad \widetilde{X}(\eta) = X \circ \eta, \ \eta \in \mathcal{D}^s \tag{2.5}$$

является класса C^l, $l \geqslant 0$.

Пусть $X, Y \in \Gamma^{s+l}(TM)$ — векторные поля класса H^{s+l} на M, $l \geqslant 1$, и $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ — соответствующие им правоинвариантные векторные поля на $\mathcal{D}^s$. Тогда легко видеть из (2.5), что скобка Ли $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ будет правоинвариантным векторным полем на $\mathcal{D}^s$, порождённым векторным полем на M, равным скобке Ли $[X, Y]$ полей X, Y на M, т.е.

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](\eta) = dR_\eta([X, Y]).$$

Из свойств G4 и G5 следует, что на группе $\mathcal{D}$ композиция и операция взятия обратного являются ILH-гладкими и в этом смысле $\mathcal{D}$ есть ILH-группа Ли с алгеброй Ли $T_e\mathcal{D} = \Gamma(TM)$ гладких векторных полей на M. При этом, скобка Ли в $T_e\mathcal{D}$ (скобка правоинвариантных векторных полей на $\mathcal{D}$) совпадает со скобкой Ли в пространстве $\Gamma(TM)$ гладких векторных полей на M. Касательное расслоение $T\mathcal{D}$ состоит из всех гладких отображений $X : M \to TM$, таких, что композиция $\pi \circ X$ есть диффеоморфизм многообразия M. Проекция $\overline{\pi} : T\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ касательного расслоения $T\mathcal{D}$ действует следующим образом: $\overline{\pi}(X) = \pi \circ X$, где π — проекция касательного расслоения TM.

Риманова структура g на M определяет *слабую риманову* структуру на $\mathcal{D}^s$ формулой: для $X_\eta, Y_\eta \in T_\eta\mathcal{D}^s$,

$$(X_\eta, Y_\eta)_\eta = \int\limits_M g_{\eta(x)}\left(X_\eta(x), Y_\eta(x)\right)_{\eta(x)} d\mu_g(x), \tag{2.6}$$

где $d\mu$ — риманов элемент объёма на M. Поскольку $X_\eta, Y_\eta \in T_\eta\mathcal{D}^s$, то $\pi \circ X = \eta$ и $\pi \circ Y = \eta$. Поэтому для любого $x \in M$ векторы $X_\eta(x)$ и $Y_\eta(x)$ лежат в касательном пространстве $T_{\eta(x)}M$ и скалярное произведение (2.6) определено корректно.

Замечание. Термин "слабая"риманова структура объясняется тем, что скалярное произведение (2.6) определяет в каждом касательном пространстве $T_\eta\mathcal{D}$ более слабую топологию, чем имеющаяся. Именно, (2.6) определяет L_2-топологию против имеющейся C^∞-топологии. Эбин и Марсден [94] показали, что для данной слабой римановой структуры (2.6) на $\mathcal{D}$ существует риманова связность, экспоненциальное отображение которой $\xi : T\mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$ определено соотношением $\xi(X) = \exp \circ X$, где $\exp : TM \to M$ — экспоненциальное отображение римановой связности ∇ на M.

Ковариантная производная $\overline{\nabla}$ слабой римановой структуры (2.6) однозначно характеризуется следующим свойством: если $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ — гладкие правоинвариантные векторные поля на $\mathcal{D}^s$, то

$$(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_\eta = dR_\eta\left(\nabla_{\widetilde{X}(e)}\widetilde{Y}(e)\right), \tag{2.7}$$

где $\widetilde{X}(e), \widetilde{Y}(e) \in T_e\mathcal{D}^s = \Gamma^s(TM)$ рассматриваются как векторные поля на M, ∇ – ковариантная производная римановой связности на M [94].

В работах [22, 23] показано, что группа $\mathcal{D}$ является подходящим конфигурационным пространством для гидромеханики идеальной баротропной жидкости.

2.2. Группа симплектических диффеоморфизмов. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, т.е. ориентируемое чётномерное многообразие с заданной на нём замкнутой невырожденной кососимметрической 2-формой ω. Если $\dim M = 2m$, то ω^m нигде на M не обращается в нуль и является поэтому элементом объёма на M. Форма ω определяет изоморфизм расслоений $i : TM \to T^*M$, $i(V) = -i_V\omega = \omega(., V)$.

Преобразование $\eta : M \to M$ называется *симплектическим*, если оно сохраняет симплектическую форму ω, т.е. если $\eta^*\omega = \omega$, где η^* — кодифференциал диффеоморфизма η. Пусть $\mathcal{D}_\omega$ –

группа всех гладких симплектических диффеоморфизмов многообразия M. Эбин и Марсден [94] показали, что группа $\mathcal{D}_\omega$ является ILH-группой Ли. Омори доказал [199], что $\mathcal{D}_\omega$ есть замкнутая сильная ILH-подгруппа Ли группы $\mathcal{D}$.

Алгебра Ли группы $\mathcal{D}_\omega$ состоит из всех векторных полей инфинитизимально сохраняющих форму ω, т.е. из таких векторных полей X на M, что $L_X\omega = 0$, где $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ — производная Ли. Такие векторные поля называются *локально гамильтоновыми*. Их определяющее свойство состоит в том, что форма $i_X\omega = \omega(X, .)$ — замкнута. Действительно, $L_X w = i_X(d\omega) + d(i_X\omega) = d(i_X\omega) = 0$.

Векторное поле X на M называется *гамильтоновым*, если форма $-i_X\omega$ точная, т.е. является дифференциалом некоторой функции F на M, $\omega(\cdot, X) = dF$. Функция F называется *гамильтонианом* поля X и в этом случае векторное поле X обозначается X_F. Множество гамильтоновых векторных полей на M образует алгебру Ли относительно скобки Ли векторных полей, при этом,

$$[X_F, X_H] = X_{\{F,H\}},$$

где $\{F, H\} = \omega(X_F, X_H)$ — скобка Пуассона функций F и H на симплектическом многообразии M. Пусть $\mathcal{H}$ — алгебра гладких гамильтоновых векторных полей на M. Омори показал [199], что существует сильная ILH-подгруппа $\mathcal{G}$ группы $\mathcal{D}_\omega$ алгебра Ли которой есть $\mathcal{H}$. Аналогичный результат получен в работе [212]. Группу $\mathcal{G}$ будем называть группой *точных гамильтоновых* преобразований многообразия M.

3. ПРОСТРАНСТВО РИМАНОВЫХ МЕТРИК

3.1. ILH-многообразие $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}$ — пространство всех гладких римановых структур на многообразии M. Пространство $\mathcal{M}$ является открытым выпуклым положительным конусом в пространстве Фреше S_2 всех гладких симметричных 2-форм на M. Поэтому $\mathcal{M}$ является многообразием Фреше и для любого $g \in \mathcal{M}$, касательное пространство $T_g\mathcal{M}$ естественно отождествляется с пространством S_2.

Определим пространство $\mathcal{M}$ как ILH-многообразие. Пусть $S_2^s = H^s(S_2M)$ — гильбертово пространство симметричных 2-форм класса H^s, $s > \frac{n}{2}$. Обозначим $C^0\mathcal{M}$ — пространство непрерывных римановых метрик. Для $s > \frac{n}{2}$ пусть $\mathcal{M}^s = H^s(S_2M) \cap C^0\mathcal{M}$. Поскольку $H^s \subseteq C^0(S_2(M))$ и вложение непрерывно, то $\mathcal{M}^s$ открыто в $S_2^s = H^s(S_2M)$ и является открытым выпуклым положительным конусом. В частности, пространство $\mathcal{M}^s$ является гладким гильбертовым многообразием. Система $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^s\}$ образует сильное ILH-многообразие.

Группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ естественным образом действует справа на пространстве метрик $\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} &A : \mathcal{M} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}, \qquad A(g, \eta) = \eta^* g, \\ &\eta^* g(x)(X, Y) = g(\eta(x))\left(d\eta(X), d\eta(Y)\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

для любых векторных полей X, Y на M и любого $x \in M$.

В работе [198] (лемма 2.5) показано, что действие (3.1) является ILH-гладким. В частности, оно продолжается до непрерывного отображения отображением гильбертовых многообразий $A : \mathcal{M}^s \times \mathcal{D}^{s+1} \to \mathcal{M}^s$, $A(g, \eta) = \eta^* g$. При фиксированном $\eta \in \mathcal{D}^{s+1}$ отображение $A_\eta : \mathcal{M}^s \to \mathcal{M}^s$, $A(g, \eta) = \eta^* g$ продолжается на пространство S_2^s как линейное непрерывное отображение. С другой стороны, если мы зафиксируем гладкую метрику $g \in \mathcal{M}$ то отображение

$$A_g : \mathcal{D}^{s+1} \longrightarrow \mathcal{M}^s, \qquad A_g(\eta) = \eta^* g \tag{3.2}$$

является [93] гладким отображением гильбертовых многообразий. Образом отображения A_g является орбита O_g^s метрики g под действием группы диффеоморфизмов. Дифференциал отображения A_g выражается через производную Ли $L_X g$ метрического тензора. Пусть $\eta_t \in \mathcal{D}^{s+1}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов с полем скоростей $X \in \Gamma^{s+1}(TM)$. Тогда, $dA_e(X) = (\eta_t^* g)'_{t=0} = L_X g$. Таким образом, касательное пространство к орбите $T_g O_g^s$ состоит из симметричных 2-форм h вида $h = L_X g$, где $X \in \Gamma^{s+1}(TM)$. В работе [93] показано, что орбита является гладким подмногообразием.

3.2. Разложение пространства $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{V} \subset \Gamma(\Lambda^n M)$ — пространство гладких элементов объема на M, т.е. пространство гладких невырожденных n-форм на M, задающих ориентацию, совпадающую с исходной ориентацией на M. Если зафиксирован элемент объема $\mu_0 \in \mathcal{V}$, то пространство $\mathcal{V}$ может быть отождествлено с пространством $\mathcal{F}_+$ положительных функций на M: для $\mu \in \mathcal{V}$ существует единственная положительная функция $\rho(x)$, такая, что $\mu = \rho\mu_0$. Поэтому касательное пространство $T_\mu \mathcal{V}$ к $\mathcal{V}$ в точке μ отождествляется с пространством функций $\mathcal{F}$. Отметим также, что пространство $\mathcal{V}$ очевидным образом является ILH-многообразием. Определена естественная проекция

$$\mathrm{vol} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad g \longrightarrow \mu_g \tag{3.3}$$

которая каждой метрике $g \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие риманов элемент объема $\mu_g = (\det g_{ij})^{1/2} \; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Слоем расслоения vol над $\mu \in \mathcal{V}$ является пространство $\mathcal{M}_\mu$ метрик с одним и тем же элементом объема μ. Из теоремы 1.2 следует, что отображение $\mathrm{vol} : \mathcal{M}^s \to \mathcal{V}^s$ является гладким. Дифференциал $d_g \mathrm{vol} : T_g \mathcal{M}^s \to T_{\mu_g} \mathcal{V}^s$ отображения $\mathrm{vol} : \mathcal{M}^s \to \mathcal{V}^s$ имеет вид

$$d_g \mathrm{vol} : S_2^s \to H^s(M, \mathbb{R}), \qquad d_g \mathrm{vol}(h) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} H, \tag{3.4}$$

где $H = g^{-1}h = g^{ij}h_{jk}$ — эндоморфизм, соответствующий симметричной 2-форме h отностительно метрики g и tr — след эндоморфизма.

Непосредственными вычислениями проверяется, что отображение $\mathrm{vol} : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ эквивариантно относительно действия группы $\mathcal{D}_0$ диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию M. А именно, для любого $\eta \in \mathcal{D}_0$ и любой метрики $g \in \mathcal{M}$ имеет место равенство

$$\mu_{\eta^* g} = \eta^*(\mu_g). \tag{3.5}$$

Расслоение $\mathrm{vol} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$ тривиально, фиксация элемента объема $\mu \in \mathcal{V}$ определяет разложение $\mathcal{M}$ в прямое произведение:

$$\iota_\mu : \mathcal{V} \times \mathcal{M}_\mu \longrightarrow \mathcal{M}, \qquad (\nu, h) \to \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{2/n} h, \tag{3.6}$$

$$\varphi_\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{M}_\mu, \qquad g \to \left(\mu_g, \left(\frac{\mu}{\mu_g}\right)^{2/n} g\right), \tag{3.7}$$

где положительная функция $\rho = \frac{\nu}{\mu}$ определяется равенством $\nu = \rho\mu$. Метрика $g \in \mathcal{M}$ определяет сечение

$$s_\mu : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}, \qquad \nu \to \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{2/n} g. \tag{3.8}$$

Приведенные конструкции верны и в случае конечного класса гладкости.

3.3. Слабая риманова структура на $\mathcal{M}$. Многообразие $\mathcal{M}$ обладает канонической слабой римановой структурой. Именно, если $a, b \in T_g\mathcal{M} = S_2$ — две гладкие симметричные 2-формы на M, представляющие элементы касательного пространства $T_g\mathcal{M}$, то их скалярное произведение определяется формулой

$$(a, b)_g = \int\limits_M g(a, b) d\mu_g = \int\limits_M g^{ik} g^{jl} a_{ij} b_{kl} d\mu_g = \int\limits_M \operatorname{tr}(g^{-1} a g^{-1} b) d\mu_g. \tag{3.9}$$

Данная структура на $\mathcal{M}$ называется "слабой римановой" [93] потому, что скалярное произведение в касательном пространстве $T_g\mathcal{M} = S_2$ определяет топологию более слабую, чем имеющаяся C^∞-топология в пространстве S_2. Мы видим, что данная структура существенно зависит от $g \in \mathcal{M}$. Подробное исследование многообразия $\mathcal{M}$ с канонической римановой структурой (3.9) проведено в работе Д.Эбина [93].

Разложение Берже-Эбина

$$T_g(\mathcal{M}) = S_2 = \alpha_g(\Gamma(TM)) \oplus S_2^0$$

определяет два распределения на $\mathcal{M}$ ортогональные относительно канонической слабой римановой структуры (3.9). Первое распределение называется вертикальным и состоит из подпространств $\alpha_g(\Gamma(TM))$ касательных к орбите $\mathcal{D}g$. Второе, горизонтальное, распределение $S_2^0 = \{h \in S_2;\ \delta_g(h) = 0\}$ ортогонально слоям проекции $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{D}$. Вопрос о горизонтальных векторных полях частично решается следующей теоремой [174] (см. также [206] для случая общей канонической структуры (3.19)).

Теорема 3.1. *Горизонтальное векторное поле на $\mathcal{M}$, выражение которого содержит производные метрики g порядка не выше двух может быть представлено в виде:*

$$g \to c_0 g + \sum_{k=1}^{[n/2]} c_k \left(\operatorname{Ric}_g^k - \frac{1}{2k}\operatorname{Scal}_g^k \cdot g\right), \tag{3.10}$$

где $\operatorname{Ric}_g^k \in S_2$ — обобщенная кривизна Риччи,

$$(\operatorname{Ric}_g^k)_{ij} = \delta^{i_1\dots i_{2k}}_{jj_2\dots j_{2k}} R_{i_1 i_2 i}{}^{j_2} R_{i_3 i_4}{}^{j_3 j_4} \dots R_{i_{2k-1} i_{2k}}{}^{j_{2k-1} j_{2k}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant [n/2],$$

$\operatorname{Scal}_g^k = \operatorname{tr}_g(\operatorname{Ric}_g^k)$ *— обобщенная скалярная кривизна и c_l — константы.*

Доказательство основано на обобщенном тождестве Бьянки [174]:

$$\delta_g \operatorname{Ric}_g^k = -\frac{1}{2k} d \operatorname{Scal}_g^k.$$

Очевидно, что слабая риманова структура (3.9) определена на каждом гильбертовом многообразии $\mathcal{M}^s$ при $s > n/2$. Гладкая зависимость этой структуры от $g \in \mathcal{M}^s$ по существу вытекает из теоремы 1.2. Достаточно показать, что при фиксированных 2-формах $a, b \in S_2^s$ отображение $\mathcal{M}^s \to \mathbb{R}$, $g \to (a,b)_g$ является гладким. Оно является композицией нескольких отображений. Во-первых, отображение $\operatorname{vol} : \mathcal{M}^s \to \mathcal{V}^s$, $\quad g \to \mu_g$ является гладким. Аналогично, по теореме 1.2 при фиксированных $a, b \in S_2^s$ отображение $\mathcal{M}^s \to H^s(M, \mathbb{R})$, $\quad g \to g(a,b)(x) = \operatorname{tr}(g^{-1} a g^{-1} b)(x)$ является гладким. Теперь нужно применить интегрирование $\int_M g(a,b)\mu_g$, которое является линейной непрерывной операцией $\int : \Gamma(\Lambda^n M) \to \mathbb{R}$.

Одним из наиболее важных свойств слабой римановой структуры (3.9) является ее инвариантность относительно действие группы диффеоморфизмов $\mathcal{D}$. Действительно, в локальных координатах на M действие группы $\mathcal{D}$ выражается матричной формулой $(\eta^* g)(x) = (d\eta_x)^t \cdot g(\eta(x)) \cdot d\eta_x$. Тогда для подынтегрального выражения в (3.9) имеем,

$$\begin{aligned}
(\eta^* g)(\eta^*(a), \eta^*(b))_x d\mu_{\eta^* g} &= \operatorname{tr}((\eta^* g)^{-1} \cdot \eta^*(a) \cdot (\eta^* g)^{-1} \cdot \eta^*(b)) d\mu_{\eta^* g} = \\
= \operatorname{tr}\Big(\big((d\eta_x)^t \cdot g \cdot d\eta_x\big)^{-1} \cdot \big((d\eta_x)^t \cdot a \cdot d\eta_x\big) &\cdot \big((d\eta_x)^t \cdot g \cdot d\eta_x\big)^{-1} \cdot \big((d\eta_x)^t \cdot b \cdot d\eta_x\big)\Big)\, \eta^*(d\mu_g) = \\
= \operatorname{tr}\big((d\eta_x)^{-1} \cdot g^{-1}(\eta(x)) \cdot a(\eta(x)) &\cdot g^{-1}(\eta(x)) \cdot b(\eta(x)) \cdot d\eta_x\big)\, \eta^*(d\mu_g) = \\
= \operatorname{tr}(g^{-1}(\eta(x)) \cdot a(\eta(x)) \cdot g^{-1}(\eta(x)) \cdot b(\eta(x)))\eta^*(d\mu_g) &= g(a,b)_{\eta(x)} \eta^*(d\mu_g) = \eta^*(g(a,b)_x d\mu_g).
\end{aligned}$$

Теперь, используя полученное выражение и формулу замены переменной в интеграле, получаем

$$(\eta^*(a), \eta^*(b))_{\eta^* g} = \int_M \eta^*(g(a,b)_x d\mu_g) = \int_M g(a,b) d\mu_g = (a,b)_g.$$

Как известно [10], если на гильбертовом многообразии задана гладкая риманова структура, то ей соответствует риманова связность. Ковариантная производная находится по известной шестичленной формуле [7]. В нашем случае слабой римановой структуры на многообразии $\mathcal{M}^s$ существование римановой связности не вытекает из общей теории. Однако можно попытаться применить шестичленную формулу для нахождения ковариантной производной. Пусть $a, b, c \in S_2^s$ — постоянные (параллельные в S_2^s) векторные поля на $\mathcal{M}^s$. Тогда их скобки Ли равны нулю и шестичленная формула принимает вид:

$$(\nabla_a b, c)_g = \frac{1}{2}(a(b,c)_g + b(c,a)_g - c(a,b)_g). \tag{3.11}$$

Из (3.11) пока следует, что $\nabla_a b$ определена единственным образом как элемент пространства $H^0(S_2(M))$. Дальнейшие вычисления показывают, что на самом деле $\nabla_a b \in S_2^s$.

Пусть $A = g^{-1}a$, $B = g^{-1}b$ и $C = g^{-1}c$ — эндоморфизмы, соответствующие 2-формам $a, b, c \in S_2^s$. Тогда из (3.9) следует

$$(a, b)_g = \int\limits_M \operatorname{tr} AB \, d\mu_g. \tag{3.12}$$

Пусть $g_t = g + tc$ — кривая на $\mathcal{M}^s$, выходящая в направлении $c \in S_2^s$. Тогда,

$$d_c A = (g_t^{-1}a)'_{t=0} = -g^{-1}cg^{-1}a = -CA \quad \text{и} \quad d_c\mu_g = \frac{1}{2}\operatorname{tr} C \, \mu_g.$$

Применяя последние формулы, легко находим выражение ковариантной производной $\nabla_a b$ в точке $g \in \mathcal{M}^s$:

$$\nabla_a b = -\frac{1}{2}(aB + bA) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr}(A)b + \operatorname{tr}(B)a - \operatorname{tr}(AB)\right) g, \tag{3.13}$$

где $aB = a_{ik}b_j^k$.

Таким образом, ковариантная производная $\nabla_a b$ принадлежит пространству $\nabla_a b \in S_2^s$ и она гладко зависит от метрики $g \in \mathcal{M}^s$. Следовательно, слабая риманова структура (3.9) определяет гладкую риманову связность ∇ на гильбертовом многообразии $g \in \mathcal{M}^s$. Согласно общей теории определено экспоненциальное отображение $Exp : T_g\mathcal{M}^s = S_2^s \to \mathcal{M}^s$.

Геометрия пространства $\mathcal{M}^s$ изучалась в работе [116], см. также работу [124], которая посвящена пространству метрик в случае некомпактного многообразия M. Иные слабые римановы структуры на $\mathcal{M}$ рассмотрены в работе автора [29].

Геодезические на $\mathcal{M}$ найдены в работах [116, 124]. В следующей теореме используется разложение $\mathcal{M} = \mathcal{V} \times \mathcal{M}_\mu$.

Теорема 3.2 (см. [116]). 1) *Геодезические, выходящие из точки* $(\mu, g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{M}_\mu$ *в направлении* $(\beta, b) \in \Gamma(\Lambda^n M) \times S_2^T$ *имеют вид:*

$$g_t = \left(q(t)^2 + r^2t^2\right)^{2/n} g \, \exp\left(\frac{1}{r}\arctan\left(\frac{rt}{q}\right) B\right), \tag{3.14}$$

где S_2^T *— пространство бесследовых симметричных 2-форм на* M*,* $B = g^{-1}b$*,* $\exp$ *— операторная экспонента,* $q(t) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\mu}t$*,* $r = \frac{1}{4}\sqrt{n \operatorname{tr}(B^2)}$*, если* $r = 0$*, то экспоненту нужно заменить единицей. Изменение элемента объема определяется формулой*

$$\mu(g_t) = \left(q(t)^2 + r^2t^2\right)\mu.$$

2) *Тензор кривизны имеет вид:*

$$R(a, b)c = -\frac{1}{4}g\,[[A, B], C] - \frac{1}{16}\operatorname{tr}(C)\left(\operatorname{tr}(A)b - \operatorname{tr}(B)a\right) + \frac{n}{16}\left(\operatorname{tr}(AC)b^T - \operatorname{tr}(BC)a^T\right), \tag{3.15}$$

где $[A, B] = AB - BA$ *и* $a^T = a - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)g$ *— бесследовая часть тензора* a.

Замечание. Утверждения теоремы верны и для пространства $\mathcal{M}^s$ римановых метрик на M соболевского класса гладкости H^s, $s > \frac{n}{2} + 2$.

3.4. Естественные слабые римановы структуры на пространстве метрик $\mathcal{M}$. В данном разделе мы рассмотрим ряд других естественных слабых римановых структур на $\mathcal{M}$ и получим для них формулы ковариантной производной, тензора кривизны, секционных кривизн и геодезических. Все результаты справедливы как для пространства $\mathcal{M}$, так и для $\mathcal{M}^s$ при $s > n/2 + 1$. Доказательства и вычисления можно найти в работах [29, 224].

3.4.1. Плоская структура. Плоская структура на $\mathcal{M}$ определяется формулой

$$(a, b)_0 = \int\limits_M \operatorname{tr}(g_0^{-1}ag_0^{-1}b)d\mu_0, \tag{3.16}$$

где g_0 — фиксированная риманова метрика на $\mathcal{M}$ и $d\mu_0 = d\mu(g_0)$ — риманов элемент объема.

3.4.2. Конформно плоская структура. Конформно плоская структура на $\mathcal{M}$:

$$\langle a,b\rangle_g = \int\limits_M \operatorname{tr}(g_0^{-1}ag_0^{-1}b)d\mu(g), \tag{3.17}$$

где $a, b \in S_2$, g_0 — фиксированная метрика на $\mathcal{M}$. В отличие от предыдущего случая, элемент объема $\mu(g)$ зависит от $g \in \mathcal{M}$. Он отличается от $\mu(g_0)$ на гладкую положительную функцию: $\mu(g) = \rho(g)\mu(g_0)$. Функцию $\rho(g)$ будем называть плотностью римановой метрики g относительно g_0.

3.4.3. Однородная структура.

$$(a,b)_g = \int\limits_M \operatorname{tr}(AB)d\mu(g_0). \tag{3.18}$$

где $a, b \in T_g\mathcal{M}$, g_0 — фиксированная метрика на M, $A = g^{-1}a$.

Слабая риманова структура (3.18) имеет следующие геометрические характеристики:

1) ковариантная производная

$$\nabla_a b = d_a b - \frac{1}{2}\left(aB + bA\right);$$

2) тензор кривизны

$$R(a,b)c = -\frac{1}{4}g[[A,B],C];$$

3) секционная кривизна K_σ в направлении площадки σ, заданной ортонормированной парой $a, b \in T_g\mathcal{M}$:

$$K_\sigma = \frac{1}{4}\int\limits_M \operatorname{tr}\left([A,B]^2\right)d\mu(g_0);$$

4) геодезические, выходящие из точки $g \in \mathcal{M}$ в направлении $a \in T_g\mathcal{M}$ имеют вид

$$g_t = g\,e^{tA}.$$

Замечание 1. Подмногообразие $\mathcal{M}_\mu$ метрик g с одним и тем же элементом объема μ и подмногообразие $\mathcal{P}g$ метрик, поточечно конформно эквивалентных $g \in \mathcal{M}$ являются вполне геодезическими в $\mathcal{M}$ относительно слабой римановой структуры (3.18).

Замечание 2. Точно такие же данные получаются и для более общей слабой римановой структуры

$$(a,b)_{g,\alpha} = \int\limits_M \operatorname{tr}(AB)d\mu(g_0) + \alpha\int\limits_M \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)d\mu(g_0), \qquad \alpha \geqslant -1.$$

Замечание 3. Слабая риманова структура (3.18) имеет простые формулы для ковариантной производной, кривизны и геодезических. Подмногообразия $\mathcal{M}_\mu$ и $\mathcal{P}g$ являются вполне геодезическими в $\mathcal{M}$. Недостатком структуры (3.18) является ее неинвариантность относительно действия группы диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ многообразия M.

3.4.4. Общая каноническая структура. Рассмотрим слабую риманову структуру, более общую, чем каноническая,

$$(a,b)_g^\alpha = \int\limits_M \operatorname{tr}(AB)d\mu(g) + \alpha\int\limits_M \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)d\mu(g). \tag{3.19}$$

Она положительно определена при $\alpha \geqslant -1$, невырождена если $\alpha \neq -1$. При $\alpha = 0$ — это каноническая метрика Если $\alpha \neq -1$, то (3.19) называется метрикой Де Витта, ей посвящена работа [206]. Если $\alpha = -1$, то метрика Де Витта возникает при гамильтоновом описании общей теории относительности [86]. Данная сабая риманова структура (3.19) имеет имеет геометрические характеристики, аналогичные тем, которые были установлены в теореме 3.2 для канонической структуры.

1) Ковариантная производная:

$$\nabla^\alpha_a b = d_a b - \frac{1}{2}(aB + bA) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr}(A)b + \operatorname{tr}(B)a\right) - \frac{1}{4(1+\alpha n)}\left(\operatorname{tr}(AB) + \alpha \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)\right) g.$$

2) Тензор кривизны:

$$R^\alpha(a,b)c = -\frac{1}{4}g[[A,B],C] - \frac{1}{16}\operatorname{tr}(C)\left(\operatorname{tr}(A)b - \operatorname{tr}(B)a\right) + \frac{n}{16(1+\alpha n)}\left((a,c)^\alpha_x b^T - (b,c)^\alpha_x a^T\right),$$

где $(a,c)^\alpha_x = \operatorname{tr}(AC) + \alpha \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(C)$, $b^T = b - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(B)g$ — бесследовая часть тензора b.

3) Секционная кривизна R^α_σ в направлении площадки σ, заданной ортонормированной парой $a, b \in T_g\mathcal{M}$:

$$K^\alpha_\sigma = \frac{1}{4}\int\limits_M \operatorname{tr}([A,B])^2 d\mu(g) - \frac{n}{16(1+\alpha n)}\int\limits_M \left((a,a)^\alpha_x (b,b)^\alpha_x - ((a,b)^\alpha_x)^2\right) d\mu(g) +$$
$$+\frac{1}{16}\int\limits_M \left(\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}^2(B) + \operatorname{tr}(B^2)\operatorname{tr}^2(A) - 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(AB)\right) d\mu(g).$$

4) Геодезические на $\mathcal{M} = \mathcal{V}\times\mathcal{M}_\mu$, выходящие из точки $(\mu, g) \in \mathcal{V}\times\mathcal{M}_\mu$ в направлении $(\beta, b) \in \Gamma(\Lambda^n M)\times S^T_2$ имеют вид тот же самый вид (3.14).

3.4.5. Нериманова связность. Рассмотрим связность на $\mathcal{M}$, которая занимает промежуточное положение между римановой свяэностью ∇ п. 3.4.3 и канонической связностью ∇^0. Она определяется следующей ковариантной производной [29]:

$$\overline{\nabla}_a b = d_a b - \frac{1}{2}(aB + bA) + \frac{1}{8}\left(\operatorname{tr}(A)b + \operatorname{tr}(B)a\right). \tag{3.20}$$

Легко видеть, что билинейная форма

$$Q(a,b) = \int\limits_M \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) d\mu(g)$$

инвариантна относительно $\overline{\nabla}$: $aQ(b,c) = Q(\overline{\nabla}_a b, c) + Q(b, \overline{\nabla}_a c)$.

Теорема 3.3 (см. [29]). *Тензор кривизны связности $\overline{\nabla}$ выражается формулой*

$$\overline{R}(a,b)c = -\frac{1}{4}g[[A,B],C] - \frac{1}{64}\left(\operatorname{tr}(A)b - \operatorname{tr}(B)a\right)\operatorname{tr}(C).$$

Геодезические на $\mathcal{M}$, выходящие из точки $g \in \mathcal{M}$ в направлении $A_0 = \frac{4\beta}{n}I + B$, $\operatorname{tr}(B) = 0$ имеют вид:

$$g_t = \begin{cases} (\beta t + 1)^{4/n} g \exp\left(\frac{1}{\beta}\ln(\beta t + 1)B\right), & \beta \neq 0, \\ g\exp(Bt), & \beta = 0. \end{cases}$$

Другие слабые римановы структуры рассматривались в работе [29]. В работе [192] исследовалась геометрия подмногообразий пространства метрик относительно общей канонической структуры в форме

$$(a,b)^c_g = \int\limits_M \left(\operatorname{tr}(A_0 B_0) d\mu(g) + c\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)\right) d\mu(g),$$

где A_0, B_0 — бесследовые части. Рассмотрены подмногообразия конформно эквивалентных метрик, подмногообразие $\mathcal{M}_\mu$ метрик, имеющих одинаковый элемент объема и подмногообразие $\mathcal{M}_1$ метрик одного и того же полного объема. Получены выражения вторых фундаментальных форм подмногообразий, выражения для ковариантных производных и геодезических. Найден гессиан функционала полной скалярной кривизны, в том числе и на подмногообразиях .

3.5. Сильная риманова структура на пространстве метрик $\mathcal{M}$. Метрика $g \in \mathcal{M}$ позволяет определить более сильное скалярное произведение на пространстве $\Gamma(T^p_q M)$ тензорных полей типа (p, q). Пусть s — целое неотрицательное число и T_1 и T_2 — тензорные поля типа (p, q). Тогда

$$(T_1, T_2)^s_g = \sum_{i=0}^{s} \left(\nabla^{(i)}_g T_1, \nabla^{(i)}_g T_2 \right)_g ,$$

где $\nabla^{(i)}_g = \nabla_g \circ \cdots \circ \nabla_g$ — i-я степень ковариантной производной римановой метрики g и $g(\nabla^{(i)}_g T_1, \nabla^{(i)}_g T_2)$ — скалярное произведение тензоров, определеннное метрикой g на M (см. формулу (1.6)). В частности, для элементов $a, b \in T_g\mathcal{M}$ (являющихся тензорными полями типа (0,2)) имеем

$$(a, b)^s_g = \sum_{i=0}^{s} (\nabla^{(i)}_g a, \nabla^{(i)}_g b)_g = \sum_{i=0}^{s} \int\limits_M g(\nabla^{(i)}_g a, \nabla^{(i)}_g b)\, d\mu_g. \tag{3.21}$$

При $s > n/2 + 1$ последняя формула определяет скалярное произведение в $T_g\mathcal{M}^s$. Учитывая, что пространство S^s_2 есть пополнение пространства S_2 относительно топологии, определенной скалярным произведением (3.21) и то, что топология в S^s_2 не зависит от выбора метрики g на M, мы получаем, что скалярное произведение (3.21) в $T_g\mathcal{M}^s$ соответствует топологии этого пространства. Поэтому формула (3.21) определяет (настоящую) риманову структуру на гильбертовом многообразии $\mathcal{M}^s$.

Точно так же, как и в случае слабой римановой структуры, показывается инвариантность сильной римановой структуры (3.21) относительно действия группы $\mathcal{D}^{s+1}$. Гладкая зависимость сильной римановой структуры (3.21) от $g \in \mathcal{M}^s$ вытекает из теоремы Н. Коисо [163] (см. теорему 7.2 из § 7).

4. Теорема о срезе

4.1. Орбиты действия группы диффеоморфизмов на $\mathcal{M}$. Для гладкой метрики $g \in \mathcal{M}$ отображение

$$A_g : \mathcal{D}^{s+1} \longrightarrow \mathcal{M}^s, \qquad A_g(\eta) = \eta^* g \tag{4.1}$$

является [93] гладким отображением гильбертовых многообразий. Образом отображения A_g является орбита O^s_g метрики g под действием группы диффеоморфизмов. Касательное пространство к орбите $T_g O^s_g$ состоит из симметричных 2-форм h вида $h = L_X g$, где $X \in \Gamma^{s+1}(TM)$. Из разложения Берже-Эбина следует, что касательное пространство к орбите $T_g O^s_g$ замкнуто в пространстве S^s_2. Тем не менее, мы не можем сразу сделать вывод о том, что орбита является подмногообразием. Во-первых, отображение (4.1) не взаимно однозначо — у элемента g может быть нетривиальная группа изотропии (группа изометрий). Во-вторых, нужно доказывать также замкнутость орбиты. Это проблемы решены в работе Д. Эбина [93].

Пусть I_g группа изометрий метрики $g \in \mathcal{M}$. Как известно [200], C^1-диффеоморфизм, который является изометрией гладкой метрики является гладким. Поэтому $I_g \subset \mathcal{D}$ и является компактной группой Ли. Из свойств (G4) и (G6) группы диффеоморфизмов (см. §2) следует, что I_g является гладким подмногообразием в $\mathcal{D}^s$ при $s > n/2 + 1$. Более того, каждый класс $I_g \eta$ является гладким подмногообразием в $\mathcal{D}^s$. Поскольку группа I_g является компактной группой Ли, состоящей из гладких диффеоморфизмов, то по свойству (G4) группы диффеоморфизмов левое действие $I_g \times \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$ группы I_g на гильбертовом многообразии $\mathcal{D}^s$ является гладким и свободным. Следовательно определено фактор-пространство $\mathcal{D}^s / I_g$ правых классов смежности и оно является гладким гильбертовым многообразием [93]. Пространство $\mathcal{D}/I_g$ есть ILH-многообразие.

Предложение 4.1 (Д. Эбин, [93]). *Отображение $\pi : \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s / I_g$ допускает гладкое локальное сечение в окрестности любого класса $I_g \eta$.*

Отображение $A_g : \mathcal{D}^{s+1} \to \mathcal{M}^s, \quad A_g(\eta) = \eta^* g$ определяет отображение

$$\phi_g : \mathcal{D}^{s+1} / I_g \to \mathcal{M}^s, \qquad \phi_g(I_g \eta) = \eta^* g. \tag{4.2}$$

Теорема 4.2 (Д. Эбин, [93]). *Пусть* $s > n/2 + 2$. *Отображение* $\phi_g : \mathcal{D}^{s+1}/I_g \to \mathcal{M}^s$ *является гладким и инъективным. Образ* O_g^s *отображения* ϕ_g *является гладким замкнутым подмногообразием, диффеоморфным* $\mathcal{D}^{s+1}/I_g$.

Доказательство следует из ряда лемм [93]. Основная трудность заключается в доказательстве замкнутости орбиты O_g^s действия A.

Лемма 1. *Для любой последовательности диффеоморфизмов* $\{\eta_m\} \in \mathcal{D}^{s+1}$ *и конечного множества точек* $\{p_i\}$ *из* M *существует подпоследовательность* $\{\zeta_n\}$ *из* $\{\eta_m\}$ *и точки* $\{q_i\}$ *такие, что что для каждого* i, *последовательность* $d\zeta_n(p_i)$ *сходится к* q_i.

Лемма 2. *Пусть* $g, g' \in \mathcal{M}^s$ *и* $\{\eta_m\}$ *есть последовательность в* $\mathcal{D}^{s+1}$ *такая, что* $\eta_m^*(g) \to g'$. *Тогда для любого конечного набора векторов* $\{V_i\}$ *из* TM *существуют векторы* $\{W_i\}$ *и подпоследовательность* $\{\zeta_n\}$ *из* $\{\eta_m\}$, *что для любого* i, $d\zeta_n(V_i) \to W_i$. *При этом, если* $V_i \neq 0$, *то* $W_i \neq 0$.

Пусть K — максимум длин векторов V_i относительно g', $K = \max\{g'(V_i, V_i)^{1/2}\}$. Поскольку $\eta_m^*(g) \to g'$, для каждого i, то $g(d\eta_m V_i, d\eta_m V_i) \to g'(V_i, V_i)$. Поэтому для достаточно больших m, $g(d\eta_m V_i, d\eta_m V_i)^{1/2} \leqslant 2K$. Пусть

$$S_{2K}(M) = \{V \in TM;\ g(V, V)^{1/2} \leqslant 2K\}.$$

Множество $S_{2K}(M)$ компактно и для больших m, $d\eta_m V_i \in S_{2K}(M)$. Тогда существует требуемая сходящаяся подпоследовательность. Если $V_i \neq 0$ и $W_i = 0$, тогда $\zeta_k^*(g)(V_i, V_i) \to 0$ и $g'(V_i, V_i) = 0$, что невозможно.

Лемма 3. *Пусть* $\exp : TM \to M$ — *экспоненциальное отображение метрики* g *и* $\exp_m : TM \to M$ — *экспоненциальное отображение метрики* $\eta_m^*(g)$. *Тогда*

$$\eta_m \circ \exp = \exp_m \circ d\eta_m.$$

Лемма 4. *Пусть* $g, g' \in \mathcal{M}^s$ *и* $\{\eta_m\}$ *есть последовательность в* $\mathcal{D}^{s+1}$ *такая, что* $\eta_m^*(g) \to g'$. *Пусть* $\exp' : TM \to M$ — *экспоненциальное отображение метрики* g'. *Тогда* $\exp_m \to \exp'$ *равномерно вместе с первыми производными на компактных подмножествах из* TM.

Поскольку $s > n/2 + 2$, то $\eta_m^*(g) \to g'$ в $C^2\mathcal{M}$. Поэтому символы Кристоффеля Γ_{mij}^k метрики $\eta_m^*(g)$ сходятся в C^1 к символам Кристоффеля $\Gamma_{mij}^{'k}$ метрики g'. Поскольку $\exp_m$ и $\exp'$ есть решения дифференциального уравнения с коэффициентами Γ_{mij}^k и $\Gamma_{mij}^{'k}$, то $\exp_m \to \exp'$ в C^1 на компактных подмножествах TM.

Следующая лемма утверждает замкнутость орбиты O_g^s в $\mathcal{M}^s$.

Лемма 5. *Пусть* $g, g' \in \mathcal{M}^s$ *и* $\{\eta_m\}$ — *последовательность в* $\mathcal{D}^{s+1}$ *такая, что* $\eta_m^*(g) \to g'$. *Тогда* $\{\eta_m\}$ *имеет подпоследовательность* $\{\zeta_k\}$ *сходящуюся в* $\mathcal{D}^{s+1}$, $\zeta_k \to \zeta \in \mathcal{D}^{s+1}$.

Доказательство. Поскольку M компактно, то существует число $\varepsilon > 0$, такое, что любой шар в M (относительно g) радиуса меньше ε лежит в некоторой нормальной координатной окрестности многообразия M. Аналогично, для g' существует число $\varepsilon' > 0$ с такими же свойствами.

Пусть $K = \max_{V \in TM}\{g'(V, V)/g(V, V\}$. Выберем конечное множество точек $\{p_i\}$ на M, такое, что нормальные (относительно g) координатные окрестности с центрами в точках $\{p_i\}$ и радиуса меньше, чем $\delta = K^{-1/2}\min(\varepsilon, \varepsilon')$, покрывают все M. В каждой точке p_i выберем ортонормированный базис $\{V_i^j\}$ касательного пространства $T_{p_i}M$.

Пусть $\{q_i\} \subset M$, $\{W_i^j\} \subset TM$ и подпоследовательность $\{\zeta_k\}$ такие, что $\zeta_k(p_i) \to q_i$ и $d\zeta_n(V_i^j) \to W_i^j$ для всех i, j. По лемме 2 векторы $\{W_i^j\}$ образуют базис $T_{q_i}M$.

Мы утверждаем, что существует $\zeta \in C^1$, такой, что $\zeta_k \to \zeta$ в C^1.

Рассмотрим окрестность U_i точки p_i. Если $q \in U_i$, то $q = \exp\left(\sum_j a_i^j V_i^j\right)$ где $\sum_j (a_i^j)^2 < \delta$. Поэтому $\zeta_k(q) = \zeta_k \exp\left(\sum_j a_i^j V_i^j\right) = \exp_k \circ d\zeta_k\left(\sum_j a_i^j V_i^j\right)$. Поскольку $d\zeta_k(V_i^j) \to W_i^j$, то $\{d\zeta_k(V_i^j)\}$

представляет собой ограниченное множество. По лемме 4 $\exp_m \to \exp'$ на ограниченных множествах относительно C^1-сходимости, тогда $\zeta_k(q) \to \exp'\left(\sum_j a_i^j W_i^j\right)$. Пусть $\zeta(q) \to \exp'\left(\sum_j a_i^j W_i^j\right)$.

Тогда $\zeta_k \to \zeta$ на U_i относительно C^1-сходимости. Продолжим ζ на все многообразие M, определив его на каждом U_i. Поскольку отображения ζ_k определены на всем M и при $q \in U_i \cap U_j$, $\zeta_k(q) \to \zeta(q)$, то ζ определено корректно и поскольку $\zeta_k \to \zeta$ на каждой окрестности U_i, то $\zeta_k \to \zeta$ на M.

На окрестности U_i имеем, $\zeta = \exp' \circ L \circ \exp_{p_i}^{-1}$, где $\exp_{p_i} : T_{p_i}M \to M$ — экспоненциальное отображение и $L : T_{p_i}M \to T_{q_i}M$ — линейное отображение, определенное формулой $L\left(\sum_j a_i^j V_i^j\right) = \sum_j a_i^j W_i^j$. Поскольку $g'(W_i^j, W_i^j) \leqslant K$, то $L \circ \exp_{p_i}^{-1}(U_i)$ содержится в окрестности нуля радиуса $\leqslant \varepsilon'$ (относительно g'). Поэтому $\exp' | L \circ \exp_{p_i}^{-1}(U_i)$ есть C^1-диффеоморфизм. Следовательно, $\zeta | U_i$ есть C^1-диффеоморфизм на окрестность $\zeta(p_i)$.

Для того, чтобы показать, что ζ есть C^1-диффеоморфизм нам нужно проверить взаимную однозначность. Поскольку $\zeta | U_i$ есть C^1-диффеоморфизм, то $\zeta(M)$ открыто в M. Но M компактно, поэтому $\zeta(M)$ также замкнуто в M. Поэтому $\zeta(M)$ совпадает с M. Покажем инъективность ζ. Пусть ρ, ρ_k и ρ' — расстояния на M, соответствующие римановым метрикам g, $\zeta_k^*(g)$ и g' соответственно. Пусть l — число Лебега покрытия $\{U_i\}$ относительно ρ, т.е. если $\rho(p,q) < l$, то такие точки лежат в одной окрестности U_i. Мы знаем, что $\zeta | U_i$ инъективно. Теперь рассмотрим точки $p, q \in M$, для которых $\rho(p,q) \geqslant l$. Тогда $\rho_k(\zeta_k(p), \zeta_k(q)) \geqslant l$ для всех k. Но $\zeta_k^*(g) \to g'$ и $\zeta_k(p) \to \zeta(p)$, $\zeta_k(q) \to \zeta(q)$. Поэтому $\rho'(\zeta(p), \zeta(q)) \geqslant l$ и поэтому $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.

Таким образом, ζ есть C^1-диффеоморфизм. Поскольку $\zeta_k \to \zeta$ в $C^1\mathcal{D}$, то $\zeta_k^*(g) \to \zeta^*(g)$ в $C^0\mathcal{M}$, поэтому $\zeta^*(g) = g'$.

Доказательство оставшейся части основано на идеях Р.Пале. Мы уже показали, что если $\eta_m^*(g) \to g'$ в $\mathcal{M}^s$, то существует подпоследовательность $\{\zeta_k\}$ в $\{\eta_m\}$ такая, что $\zeta_k \to \zeta$ в $C^1\mathcal{D}$ и $\zeta^*(g) = g'$. Пусть $\varepsilon_{kij}^l = \Gamma_{kij}^l - \Gamma_{ij}'^l$, (см. доказательство леммы 4). Поскольку $\zeta_k^*(g) \to g'$ в $\mathcal{M}^s$, то функции $\varepsilon_{kij}^l \to 0$ в топологии H^{s-1} и, следовательно, в C^1. Если мы представим ζ_k в локальных координатах функциями $f_k^i(x_1, \ldots, x_n)$, а ζ_k — функциями $f^i(x_1, \ldots, x_n)$, тогда

$$\Gamma'^l_{kij} = \left(\frac{\partial f_k^l}{\partial x_t}\right)\Gamma^t_{rs}\left(\frac{\partial f_k^i}{\partial x_r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f_k^j}{\partial x_s}\right)^{-1} - \left(\frac{\partial^2 f_k^l}{\partial x_s \partial x_r}\right)\left(\frac{\partial f_k^i}{\partial x_r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f_k^j}{\partial x_s}\right)^{-1}, \tag{4.3}$$

где Γ_{rs}^t соответствуют метрике g, а степень -1 обозначает обратную матрицу. Первое слагаемое C^0-сходится к $(\partial f^l / \partial x_t)\Gamma_{rs}^t(\partial f^i / \partial x_r)^{-1}(\partial f^j / \partial x_s)^{-1}$. Поэтому второе слагаемое сходится к выражению

$$\left(\frac{\partial f^l}{\partial x_t}\right)\Gamma^t_{rs}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x_s}\right)^{-1} - \Gamma'^l_{ij}. \tag{4.4}$$

Поэтому $\partial^2 f_k^l / \partial x_s \partial x_r$ сходится в C^0 к (4.4), умноженному дважды на матрицу $\partial f^i / \partial x_r$. Это означает, что f_k сходится в C^2, тогда, в частности, ζ лежит в $C^2\mathcal{D}$. Тогда $\Gamma_{ij}'^l$ удовлетворяет формуле (4.3), где f_k заменено на f.

Теперь предположим. что $\zeta_k \to \zeta$ в $\mathcal{D}^t$ при $t \leqslant s$. Тогда, поскольку $\varepsilon_{kij}^l \to 0$ в топологии H^{s-1} и $\partial f_k^i / \partial x_r \to \partial f^i / \partial x_r$ в H^{t-1} и в C^0, то из (4.3) следует, что $\partial^2 f_k^l / \partial x_s \partial x_r \to \partial^2 f^l / \partial x_s \partial x_r$ в H^{t-1}. Поэтому $f_k \to f$ в топологии в H^{t+1}. Тогда по индукции мы получаем, что $\zeta_k \to \zeta$ в $\mathcal{D}^{s+1}$ и $g' = \zeta^*(g) \in \phi_g(\mathcal{D}^{s+1}/I_g)$, что означает, что замкнутость орбиты.

Для доказательства теоремы осталось показать, что $I_g \eta_m \to I_g \zeta$ в $\mathcal{D}^{s+1}/I_g$. Предположим обратное, тогда существует окрестность U класса $I_g \zeta$ и подпоследовательность $\{\eta_n\}$ последовательности $\{\eta_m\}$ такая, что $\{\eta_n\} \cap U = \emptyset$. Так же, как и выше, мы можем найти подпоследовательность $\{\zeta_l\} \subseteq \{\eta_n\}$ такую, что $\zeta_l \to \zeta'$ в $\mathcal{D}^{s+1}$ и $(\zeta')^*(g) = g'$. Поэтому $I_g \zeta' = I_g \zeta$ и для больших l, $I_g \zeta_l' \in U$. Это противоречие завершает доказательство.

4.2. Теорема о срезе. Инфинитизимальный вариант теремы о срезе дает разложение Берже-Эбина

$$S_2^s = \alpha_g(\Gamma^{s+1}(TM)) \oplus S_2^{0,s}, \tag{4.5}$$

где $S_2^{0,s} = \operatorname{Ker}\delta_g = \{a \in S_2^s;\ \delta_g a = 0\}$, поскольку оно дает разложение пространства $T_g\mathcal{M}^s = S_2^s$ на подпространство $\alpha_g(\Gamma^{s+1}(TM))$ касательное к орбите O_g^s и ортогональное ему подпространство.

Теорема 4.3 (О срезе. Д. Эбин, [93])**.** *Пусть $s > \frac{n}{2} + 2$. Для каждой метрики $g \in \mathcal{M}$ существует гладкое подмногообразие $\mathcal{S}_g^s \subset \mathcal{M}^s$ содержащее g, такое, что*

1) *если $\eta \in I_g$, то $\eta^*(\mathcal{S}_g^s) = \mathcal{S}_g^s$,*
2) *если $\eta \in \mathcal{D}^{s+1}$ и $\eta^*(\mathcal{S}_g^s) \cap \mathcal{S}_g^s \neq \emptyset$, то $\eta \in I_g$,*
3) *Существует окрестность U^{s+1} класса смежности $[e] \in \mathcal{D}^{s+1}/I_g$ и локальное сечение $\chi : \mathcal{D}^{s+1}/I_g \longrightarrow \mathcal{D}^{s+1}$ определенное в окрестности U^{s+1} , такое, что отображение*

$$F : U^{s+1} \times \mathcal{S}_g^s \longrightarrow \mathcal{M}^s, \qquad F(h,u) = (\chi(u))^* h, \tag{4.6}$$

есть гомеоморфизм на окрестность V^s элемента $g \in \mathcal{M}^s$.

Доказательство. Пусть A_g и ϕ_g — определенные ранее отображения и O_g^s — орбита элемента g. Для O_g^s определим нормальное расслоение $N^s = N^s(O_g^s)$ в пространствТ $\mathcal{M}^s$ обычным образом. Орбита O_g^s является гладким подмногообразием в $\mathcal{M}^s$, а $\mathcal{M}^s$ имеет гладкую слабую риманову структуру, поэтому положим

$$N^s = \{A \in T(\mathcal{M}^s)|O_g^s \mid (A,B) = 0,\ \forall B \in T(O_g^s)\}.$$

Поскольку N^s есть нормальное расслоение относительно *слабой* римановой структуры, то автоматически не следует, что N^s является гладким подрасслоением в $T(\mathcal{M}^s)|O_g^s$. Чтобы доказать гладкость, мы должны построить гладкий сюръективный морфизм векторных расслоений $P : T(\mathcal{M}^s)|O_g^s \to T(O_g^s)$ ядром которого является N^s.

Из разложения Берже-Эбина следует, что слой N_g^s в точке $g \in \mathcal{M}^s$ есть ядро дифференциального оператора $\delta_g : S_2^s \to \Gamma^{s-1}(TM)$. Пусть $\alpha_g(X) = \frac{1}{2} L_X g$ — сопряженный оператор.

Определим P_g на слое $T_g\mathcal{M}^s = S_9^s$ в любой точке $g \in \mathcal{M}^s$ как оператор

$$P_g = \alpha_g \cdot (\delta_g \alpha_g)^{-1} \cdot \delta_g,$$

где $\delta_g \alpha_g$ рассматривается как отображение из $\delta_g\alpha_g(\Gamma^{s+3}(TM)) \subset \Gamma^{s+1}(TM)$ в пространство $\delta_g\alpha_g(\Gamma^{s+1}(TM)) \subset \Gamma^{s-1}(TM)$. Оператор $\delta_g\alpha_g$ является эллиптическим и самосопряженным, поэтому он является изоморфизмом указанных пространств. Поскольку $\delta_g(S_2^s) = \delta_g\alpha_g(\Gamma^{s+1}(TM))$, то композиция $\alpha_g \cdot (\delta_g\alpha_g)^{-1} \cdot \delta_g$ имеет смысл.

Таким образом, мы получили морфизм

$$P : T\mathcal{M}^s \to T\mathcal{M}^s$$

ядром которого в каждой точке $g \in \mathcal{M}^s$ является подпространство $\operatorname{Ker}\delta_g$.

По следствиям 7.4 и 7.5 к теореме 7.2 из § 7 операторы δ_g и α_g гладко зависят от метрики $g \in \mathcal{M}^s$.

Операция взятия обсатного отображения на группе изоморфизмов любого банахова пространства является гладкой, поэтому $(\delta_g\alpha_g)^{-1}$ также гладко зависит от метрики g. Поэтому морфизм P является гладким. Ограничение морфизма P на гладкое подмногообразие O_g^s уакже является гладким. Поэтому и нормальное расслоение $N^s = N^s(O_g^s)$ является гладким.

Приступим к построению среза. Для этого рассмотрим экспоненциальное отображение $\exp : T(\mathcal{M}^s) \to \mathcal{M}^s$ слабой римановой структуры на $\mathcal{M}^s$. Тогда $\exp|N^s$ есть диффеоморфизм окрестности нулевого сечения N^s на окрестность O_g^s в $\mathcal{M}^s$. Следовательно существует сколь угодно малая окрестность U в O_g^s элемента g с сечением $\chi : U \to \mathcal{D}^{s+1}$ расслоения $\mathcal{D}^{s+1} \to \mathcal{D}^{s+1}/I_g = O_g^s$ и сколь угодно малая окрестность V нуля в N_g^s такая, что если $W = \{\eta^* h\ ;\ h \in V$ и $\eta \in \chi(U)\} \subseteq N^s$, то $\exp|W$ есть диффеоморфизм на окрестность g в $\mathcal{L}^s$.

В качестве окрестности V удобно взять шаровую окрестность относительно сильного скалярное произведение $(,)_{g,s}$ на S_2^s. $V = N_g^{s,\varepsilon} = \{h \in T_g\mathcal{M}^s\ ;\ h \in N_g^s$ и $(h,h)_{g,s} < \varepsilon^2\}$. Поскольку группа I_g действует как группа ортогональных преобразований пространства $S_9^s, (,)_{g,s}$, то выбранная окрестность V инвариантна относительно действия I_g. Возьмем U и V достаточно малыми, так, чтобы выполнялось $\exp(A) \cap O_g^s = U$.

Теперь пусть ρ_s есть метрика, определенная на $\mathcal{M}^s$ сильной H^s римановой структурой. Пусть B_g^r есть шар с центром g и радиуса r относительно расстояния ρ_s. Тогда для некоторого положительного δ, $\exp(W) \supseteq B_g^{2\delta}$. Возьмем $U_1 \subseteq U$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon$ (которое определяет $V_1 \subseteq V$) так что если $W_5 = \{\eta^*(h)\ ;\ h \in V_1,\ \eta \in \chi(U_1)\}$, то $\exp(W_1) \subseteq B_g^{\delta}$.

Пусть $\mathcal{S} = \exp(V_7)$. Покажем, что данное множество $\mathcal{S}$ обладает свойствами среза.

Доказательство (1). Пусть $\eta \in I_g$ Тогда если $a \in \mathcal{S}$ и $a = \exp(h)$, $h \in V_1$ то $\eta^*(a) = \eta^* \exp(h) = \exp(\eta^*(h))$. Элемент $\eta^*(h)$ лежит в V_1, поскольку $\eta^* : N_g \to N_g$ и η^* сохраняет и слабое и сильное скалярные произведения. Поэтому $\eta^*(a) = \exp(\eta^*(h)) \in \mathcal{S}$

Доказательство (2). Предположим, что существуют $\eta \in \mathcal{D}^{s+1}$ и $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ такие, что $\eta^*(g_1) = g_2$. Поскольку $\rho_s(g, g_2) < \delta$ и $\rho_s(\eta^* g, \eta^* g_0) = \rho_s(g, g_2) < \delta$, то $\rho_s(g, \eta^* g) < 2\delta$. Тогда $\eta^* g \in \exp(W)$ и $\eta^* \in U$. Следовательно, если $g_1 = \exp(h_1)$ и $g_2 = \exp(h_2)$, то $\exp(h_7) = \exp(\eta^* h_6)$ и $h_2, \eta^* h_1 \in W$. Из инъективности $\exp|W$ следует, что $h_2 = \eta^* h_1$. Тогда, поскольку $h_1, h_2 \in N_g^{s,\varepsilon}$, то $\eta^* g = g$ или $\eta \in U_g$.

Доказательство (3). Пусть χ и U такие, как выше. Пусть $W_2 = \{\eta^* h\ ;\ h \in V_6,\ \eta \in \chi(U)\}$. Тогда поскольку $\exp|W_2$ есть диффеоморфизм на окрестность элемента g, то отобтажение $F : U \times \mathcal{S} \to \mathcal{M}^s$, $F(u, a) = A(\chi(u), a)$ является очевидно непрерывной биекцией на $\exp(W_2)$.

Для $b \in \exp(W_2)$,

$$F^{-1}(b) = \left(\pi\ \exp^{-1}(b), A\left((\chi \circ \pi \circ \exp^{-1}(b))^{-1}, b\right)\right)$$

где $\pi : N \to O_g^s$ — проекция нормального расслоения. Следовательно, F^{-1} непрерывно. Это завершает доказательство теоремы.

В работе [161] Коисо Н. усилил теорему о срезе. Он показал, что срез $\mathcal{S}_g$ и соответствующее отображение F являются C^∞-ILH-гладкими.

Теорема 4.4 (О срезе. Д. Эбин, [93], Н. Коисо, [161]). *Пусть $\mathcal{M}$ — ILH-многообразие гладких римановых метрик на M и $\mathcal{D}$ — ILH-группа Ли диффеоморфизмов многообразия M. Для каждого $g \in \mathcal{M}$ существует ILH-подмногообразие $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{M}$ обладающее свойствами:*

1) *если $\eta \in I_g$, то $\eta^*(\mathcal{S}_g) = \mathcal{S}_g$,*
2) *если $\eta \in \mathcal{D}$ и $\eta^*(\mathcal{S}_g) \cap \mathcal{S}_g \neq \emptyset$, то $\eta \in I_g$,*
3) *Существует окрестность U класса смежности $[e] \in \mathcal{D}/I_g$ и локальное сечение $\chi : \mathcal{D}/I_g \longrightarrow \mathcal{D}$ определенное в окрестности U, такое, что отображение*

$$F : U \times \mathcal{S}_g \longrightarrow \mathcal{M}, \qquad F(u, h) = (\chi(u))^* h,$$

есть ILH-диффеоморфизм на окрестность V элемента $g \in \mathcal{M}$.

Отметим, что в данной теореме о срезе для любого $s \geqslant 2n + 5$ выполняется [161, 162]:

$$\mathcal{S}_g^s = \mathcal{S}_g^{2n+5} \cap \mathcal{M}^s, \qquad U^{s+1} = U^{2n+1} \cap \left(I(g) \setminus \mathcal{D}^{s+1}\right),$$

$$V^s = V^{2n+5} \cap \mathcal{M}^s, \qquad \chi^{s+1} = \chi^{2n+6}|U^{s+1}$$

и для любого $k \geqslant 0$ отображения

$$F^{s+k} : U^{s+1+k} \times \mathcal{S}_g^{s+k} \longrightarrow V^s,$$

$$p^{s+k} \times q^{s+k} : V^{s+k} \longrightarrow U^{s+1} \times \mathcal{S}_g^s$$

C^k-дифференцируемы.

Приведем несколько следствий теоремы о срезе [93].

Теорема 4.5. *Для любой метрики $g \in \mathcal{M}$ и любой окрестности W единицы $e \in \mathcal{D}$ существует окрестность V элемента g такая, что если $a \in V$, то существует $\eta \in W$ такой, что*

$$\eta I_a \eta^{-1} \subseteq I_g.$$

Во-первых заметим, что из свойства 2 теоремы о срезе следует, что для любого $b \in \mathcal{S}_g$, $I_b \subseteq I_g$. В обозначениях теоремы 3 пусть $U' = U \cap \pi(W)$, где $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/I_g$. Положим $V = F(D', \mathcal{S})$. Тогда если $a = F(u', b)$, то $b = (\chi(u')^{-1})^*(a) \in \mathcal{S}$. Поэтому $I_b \subset I_g$. Следовательно если $\eta = \chi(u')$, то $a = \eta^*(b)$. Поэтому $\eta I_a \eta^{-1} = I_b \subseteq I_g$. Но $\pi(\eta) = u' \in U'$, поэтому $\eta \in W$.

Следствие 4.6. *Множество* $\mathcal{M}_0$ *метрик с тривиальной группой изометрий открыто в пространстве* $\mathcal{M}$ *всех метрик.*

Теорема 4.7. *Если* $\dim M > 1$*, то множество* $\mathcal{M}_0$ *метрик с тривиальной группой изометрий есть плотное подмножество пространства* $\mathcal{M}$ *осех метрик.*

Утверждение теоремы достаточно очевидно, поскольку любую метрику g можно малыми деформациями сделать "бугристой"так, что она потеряет все свойства симметричности. Идея доказательства в работе [93] заключается в следующем. Строится функция на многообразии, которая достаточно хорошо отражает деформации метрики. Тогда ее точки экстремума будут неподвижными точками группы изометрий. Если метрика будет иметь достаточное количество неподвижных точек, ее группа изометрий будет тривиальной.

Maxim-Răileanu L. в работе [175] распространила теорему о срезе на случай многообразия с границей. Рассмотрено также пространство метрик, которые совпадают на границе и группа диффеоморфизмов, действующих тождественно на границе. В следующей работе [176] она распространила теорему о срезе на случай пространства $\mathcal{M} \times C^\infty(M, N)$, на котором действует группа $\mathcal{D} \times I_{g'}$, где $\mathcal{D}$ — группа диффеоморфизмов многообразия M, $I_{g'}$ — группа изометрий риманова многообразия (N, g') и $C^\infty(M, N)$ — пространство отображений $M \to N$. В работе [209] O. Pekonen доказал теорему о срезе для действия группы диффеоморфизмов на пространстве почти комплексных структур. Общие вопросы существования среза в случае градуированных пространств Фреше и ручных (tame) отображений рассматривались в диссертации T.N. Subramanian [225] и в работе [226].

В работе [227] изучался вопрос о существовании среза для действия группы диффеоморфизмов на пространстве $\mathcal{Z}$ замкнутых 2-форм на симплектическом многообразии (M, ω). Оказывается, существование среза зависит от размерности второй группы когомологий $H^2(M)$.

Теорема 4.8. *Срез действия группы диффеоморфизмов* $\mathcal{D}$ *на пространстве* $\mathcal{Z}$ *замкнутых 2-форм на симплектическом многообразии* (M, ω) *для элемента* $\omega \in \mathcal{Z}$ *существует тогда и только тогда, когда* $H^2(M) = \mathbb{R}$.

Если $H^2(M) = \mathbb{R}$, то срез $\mathcal{S}_\omega$ определяется открытым лучом $\{t\omega\}_{t>0}$. Например, срез существует в каждой симплектической форме на $\mathbb{C}P^n$, но не существует на T^{2n}.

5. КОНФОРМНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МЕТРИКИ

5.1. Поточечно конформные преобразования. Пусть $\mathcal{P}$ — мультипликативная группа положительных гладких функций на многообразии M. Рассмотрим действие

$$B : \mathcal{P} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}. \qquad B(p, g) = pg. \tag{5.1}$$

Очевидно, оно является свободным и из теоремы 1.2 сразу следует его ILH-гладкость. Данному действию соответствует следующее (поточечное) ортогональное разложение пространства $T_g\mathcal{M} = S_2$:

$$S_2 = \mathcal{F}g \oplus S_2^T, \tag{5.2}$$

где $S_2^T = \{h \in S_2;\ \operatorname{tr} h = 0\}$ — пространство бесследовых симметричных 2-форм и $\mathcal{F}g = \{h \in S_2;\ h = fg,\ f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$. Соответственно, каждая 2-форма h однозначно представляется в виде:

$$h = \frac{1}{n}(\operatorname{tr} h)g + \left(h - \frac{1}{n}(\operatorname{tr} h)g\right). \tag{5.3}$$

Более тонкое ортогональное разложение пространства $T_g\mathcal{M} = S_2$:

$$S_2 = \mathbb{R}g \oplus \mathcal{F}_0 g \oplus S_2^T, \tag{5.4}$$

где $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : \int_M f d\mu_g = 0\}$ — пространство функций с нулевым средним значением.

Обратимся к многообразиям $\mathcal{P}^s$ и $\mathcal{M}^s$ функций и метрик соболевского класса гладкости H^s, $s > n/2$. Легко видеть, что $\mathcal{P}^s$ является гильбертовой группой Ли. Поэтому для исследования действия $B : \mathcal{P}^s \times \mathcal{M}^s \to \mathcal{M}^s$ можно использовать общие факты о действиях гильбертовых групп

Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — гильбертова группа Ли и $\mathcal{H}$ — гладкое гильбертово многообразие с гладким правым действием $A : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Действие A называется *собственным*, если отображение

$$\widetilde{A} : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \qquad \widetilde{A}(x, a) = (x, A(x, a))$$

является собственным, т.е. прообраз компакта является компактом.

Теорема 5.1 (см. [36]). *Пусть $\mathcal{G}$ — гильбертова группа Ли и $\mathcal{H}$ — гладкое гильбертово многообразие с гладким правым действием $A : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \to \mathcal{H}$.*

Для $x \in \mathcal{H}$ пусть $\mathcal{G}_x$ — орбита точки x. Предположим, что действие A является свободным и собственным. Тогда орбиты $\mathcal{G}_x$ являются гладкими замкнутыми подмногообразиями в $\mathcal{H}$, диффеоморфными $\mathcal{G}$.

Пространство орбит $\mathcal{H}/\mathcal{G}$ имеет единственную структуру гладкого гильбертова многообразия, такую, что проекция $\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\mathcal{G}$ является C^∞-субмерсией.

Для $[x] \in \mathcal{H}/\mathcal{G}$ касательное пространство $T_{[x]}\mathcal{H}/\mathcal{G} \simeq C_x$, где $C_x \subset T_x\mathcal{H}$ есть ортогональное дополнение к касательному пространству $T_x\mathcal{G}_x$ к орбите точки x.

Расслоение $\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\mathcal{G}$ является гладким главным $\mathcal{G}$-расслоением.

В нашем случае легко показать [111], что отображение

$$C : \mathcal{P}^s \times \mathcal{M}^s \longrightarrow \mathcal{M}^s \times \mathcal{M}^s, \qquad C(p, g) = (pg, g) \tag{5.5}$$

является собственным. Поэтому фактор-пространство $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ является многообразием.

Теорема 5.2 (см. [111]). *Орбита $\mathcal{P}^s g$ метрики $g \in \mathcal{M}^s$ относительно $\mathcal{P}^s$ есть гладкое замкнутое подмногообразие в $\mathcal{M}^s$ с касательным пространством $\mathcal{F}^s g = \{h \in S_2;\ h = fg,\ f \in H^s(M, \mathbb{R})\}$. Фактор-пространство $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ является гладким многообразием и проекция $\pi : \mathcal{M}^s \to \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ является субмерсией.*

Пространство $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ называется *конформным суперпространством*. Функционалы на этом пространстве являются конформными инвариантами. Для построения конформных инвариантов обычно используется тензор Вейля [5]. Например, в работе [159] изучался следующий функционал $\nu(g) = (2/n)\int_M |W|^{n/2} d\mu_g$, где W — тензор Вейля. Подробнее об этом функционале см. в § 8. Другим примером является конформный функционал Чженя—Саймонса [80] на трехмерном многообразии $\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\int_M TP_1(\theta) \bmod \mathbb{Z}$, где θ — форма связности Леви-Чивита метрики g и $TP_1(\theta) = \mathrm{tr}(2\theta^3/3 + \theta d\theta)/4\pi^2$. В работе О. Пеконена [207] показано, что критические точки этого функционала являются конформно плоскими 3-многообразиями.

Пространство $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ может быть отождествлено с пространством тензорных плотностейю

$$\mathcal{W}^s = \{g \otimes \mu_g^{-2/n};\ g \in \mathcal{M}^s\}. \tag{5.6}$$

Теорема 5.3 (см. [111]). (a) *Имеют место диффеоморфизмы многообразий:*

$$\mathcal{M}^s \to \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s \times \mathcal{V}^s \leftarrow \mathcal{W}^s \times \mathcal{V}^s,$$

$$g \to (\mathcal{P}^s g, \mu_g) \leftarrow (g \otimes \mu_g^{-2/n}, \mu_g).$$

(b) $T_g\mathcal{M}^s = T_g(\mathcal{P}^s_g) \oplus T_g\mathcal{M}^s_{\mu_g}$ *и любая орбита $\mathcal{P}^s g'$ пересекает подмногообразие $\mathcal{M}^s_{\mu(g'')}$ в единственной точке.*

Напомним, что $\mathcal{M}^s_\mu$ есть многообразие метрик с одним и тем же римановым элементом объема, равным μ. Следующее локальное разложение пространства $\mathcal{M}$ в прямое произведение получено Н. Коисо.

Теорема 5.4 (см. [163]). *Пусть $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{M}$ — множество всех метрик, имеющих постоянную скалярную кривизну $s(g)$ и таких, что $\frac{s(g)}{n-1}$ не является собственным числом оператора Лапласа Δ_g. Пространство $\overline{\mathcal{C}}$ является ILH-подмногообразием $\mathcal{M}$ и отображение*

$$\chi : \mathcal{P} \times \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}, \qquad \chi(f, g) = fg$$

есть локальный ILH-диффеоморфизм на $\mathcal{M}$.

Следствие 5.5 (см. [163]). *Пусть $g = f\overline{g}$ где $f \in \mathcal{P}$, $\overline{g} \in \overline{\mathcal{C}}$. Если g_t есть деформация, определенная для достаточно малых t, то существует 1-параметрическое семейство положительных функций f_t, существует 1-параметрическое семейство диффеоморфизмов η_t и деформация $\overline{g}_t$ в пространстве $\overline{\mathcal{C}}$ такие, что $f_0 = f$, $\delta_g \overline{g}'_0 = 0$ и*

$$g_t = f_t \eta_t^* \overline{g}_t. \tag{5.7}$$

Действительно, по теореме 4.5 имеем $g_t = f_t \widetilde{g}_t$, где $\widetilde{g}_t$ — деформация в $\overline{\mathcal{C}}$. По теореме о срезе $\widetilde{g}_t = \eta_t^* \overline{g}_t$, где $\overline{g}_t$ — деформация, лежащая в срезе $\mathcal{S}_g$, она, как известно, обладает свойством $\delta_g \overline{g}'_0 = 0$.

5.2. Действие группы конформизмов. Полупрямое произведение $\mathcal{C} = \mathcal{D} \times \mathcal{P}$ групп $\mathcal{D}$ и $\mathcal{P}$ с операцией $(\eta_1, p_1) \cdot (\eta_2, p_2) = (\eta_1 \circ \eta_2, p_2 \cdot (p_1 \circ \eta_2))$ называется группой *конформных преобразований* многообразия M или группой *конформизмов*. Действие группы $\mathcal{C}$ на пространстве метрик $\mathcal{M}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{A} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad ((\eta, p), g) \to p \cdot \eta^* g. \tag{5.8}$$

Для метрики $g \in \mathcal{M}$ пусть $C_g \subset \mathcal{C}$ — группа изотропии,

$$C_g = \{(\eta, p) \in \mathcal{C};\ p \cdot \eta^* g = g\}. \tag{5.9}$$

Группа C_g изоморфна группе конформных преобразований $\{\eta \in \mathcal{D};\ \eta^* g = pg$ для некоторого $p \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{D}$. Если $\dim M \geqslant 3$, то C_g является [9] группой Ли размерности $\leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ с алгеброй Ли

$$\mathcal{K}_g = \{(X, f) \in \Gamma(TM) \times \mathcal{F};\ L_X g + fg = 0\}. \tag{5.10}$$

Отметим, что алгебра $\mathcal{K}_g$ изоморфна алгебре Ли $\{X \in \Gamma(TM);\ L_X g = \frac{2}{n} \operatorname{div}(X) g\}$ конформной группы, т.е. пространству конформно киллинговых векторных полей.

Пусть $\mathcal{C}g = \{p \cdot \eta^* g;\ (\eta, p) \in \mathcal{C}\}$ – орбита действия $\mathcal{C}$, т.е. множество метрик, конформно эквивалентных g. В случае конечного класса гладкости $s > n/2 + 1$ мы рассматриваем группу $\mathcal{C}^s = \mathcal{D}^{s+1} \times \mathcal{P}^s$. Если $g \in \mathcal{M}^{s+r}$, то орбитное отображение

$$\widetilde{A}_g : \mathcal{C}^s \to \mathcal{M}^s, \qquad \widetilde{A}_g(\eta, p) = p\eta^* g$$

дифференцируемо класса C^r.

Так же, как и в работе [93] доказывается, что если $p_n \eta_n^* g \to \gamma$ в пространстве $\mathcal{M}^s$, то у последовательности $\{(\eta_n, p_n)\}$ существует сходящаяся подпоследовательность в $\mathcal{C}^s$. Аналогично доказывается теорема о срезе.

Теорема 5.6 (см. [111]). *Пусть $\dim M \geqslant 3$, $g \in \mathcal{M}^{s+r}$ и $\mathcal{C}^s g$ – орбита действия группы $\mathcal{C}^s = \mathcal{D}^{s+1} \times \mathcal{P}^s$ на пространстве $\mathcal{M}^s$. Тогда $\mathcal{C}^s g \subset \mathcal{M}^s$ есть замкнутое подмногообразие класса C^r с касательным пространством*

$$T_g(\mathcal{C}^s g) = \{L_X g + fg;\ X \in \Gamma^{s+1}(TM),\ f \in H^s(M, \mathbb{R})\}.$$

Теорема 5.7 (см. [111]). *Пусть $\dim M \geqslant 3$ и $g \in \mathcal{M}^{s+r}$, $r \geqslant 1$. Тогда действие $\mathcal{C}^s$ на $\mathcal{M}^s$ допускает срез $\widetilde{\mathcal{S}}^s_g$, т.е $\widetilde{\mathcal{S}}^s_g$ есть замкнутое подмногообразие, содержащее g и такое, что*

1) если $(\eta, p) \in C^s_g$, то $\widetilde{A}((\eta, p), \widetilde{\mathcal{S}}^s_g) = \widetilde{\mathcal{S}}^s_g$,

2) если $(\eta, p) \in \mathcal{C}^s$ и $\widetilde{A}((\eta, p), \widetilde{\mathcal{S}}^s_g) \cap \widetilde{\mathcal{S}}^s_g \neq \emptyset$, то $(\eta, p) \in C^s_g$,

3) Существует локальное сечение $\chi : \mathcal{C}^s / C^s_g \longrightarrow \mathcal{C}^s$, определенное в окрестности U^s единичного элемента факторпространства, такое, что отображение

$$\widetilde{F} : U^s \times \widetilde{\mathcal{S}}^s_g \longrightarrow \mathcal{M}^s, \qquad F([\eta, p], g_1) = \widetilde{A}(\chi[\eta, p], g_1)$$

есть гомеоморфизм на окрестность V^s элемента $g \in \mathcal{M}^s$.

В работе [111] изучается также действие группы конформизмов $\mathcal{C}$ на кокасательном расслоении $T^* \mathcal{M}$.

Дифференциал в единице орбитного отображения $\widetilde{A}_g : \mathcal{C}^s \to \mathcal{M}^s$, $\quad \widetilde{A}_g(\eta, p) = p\eta^* g$ имеет вид:

$$d_{(e,1)} \widetilde{A}_g = \tau_g : \Gamma^{s+1}(TM) \times H^s(M, \mathbb{R}) \to S^s_2, \quad \tau(X, f) = L_X g + fg. \tag{5.11}$$

Сопряженный оператор к τ_g есть [111]:

$$\tau_g^* : S_2 \to \Gamma(TM) \times \mathcal{F}, \qquad h \to (2\delta_g h, \mathrm{tr}_g\ h). \tag{5.12}$$

Ядро $\mathrm{Ker}\, \tau_g^*$ оператора τ_g^* состоит из бездивергентных и бесследовых симметричных 2-форм h:

$$\mathrm{Ker}\, \tau_g^* = S_2^{TT} = \{h \in S_2;\ \delta_g h = 0,\ \mathrm{tr}_g\ h = 0\}. \tag{5.13}$$

Символ оператора τ_g есть $\sigma_t(\tau_g)(X, u) = ug + t \otimes X_\sharp + X_\sharp \otimes t$, где $X_\sharp$ — 1-форма, соответствующая вектору X относительно скалярного произведения g. Легко видеть, что при $\dim M \geqslant 2$ символ оператора τ_g иньективен. Поэтому имеет место разложение Берже-Эбина $S_2 = \mathrm{Im}\ \tau_g \oplus \mathrm{Ker}\, \tau_g^*$. Комбинируя это разложение с ортогональным поточечным разложением (5.2), $S_2 = \mathcal{F}g \oplus S_2^T$, мы получаем более тонкое разложение

$$S_2 = S_2^{TT} \oplus \mathcal{F}g \oplus (S_2^T \cap \mathrm{Im}\ \tau_g), \tag{5.14}$$

$$h = h^{TT} + \frac{1}{n}(\mathrm{tr}_g\, h)g + \left(L_X g - \frac{2}{n}\,\mathrm{div}(X)g\right), \tag{5.15}$$

которое называется *разложением Йорка*. Следующее предложение выясняет смысл последнего слагаемого $S_2^T \cap \mathrm{Im}\ \tau_g$ в разложении (5.14).

Предложение 5.8 (см. [111,247]). *Пусть $g \in \mathcal{M}^{s+r}$. Тогда $\mathcal{C}^s g \cap \mathcal{M}^s_{\mu(g)}$ является подмногообразие класса C^r в $\mathcal{M}^s$ с касательным пространством*

$$T_g(\mathcal{C}^s g \cap \mathcal{M}^s_{\mu(g)}) = S_2^{T,s} \cap \mathrm{Im}\ \tau_g = \{h = L_X g - \frac{2}{n}\,\mathrm{div}(X)g;\ X \in \Gamma^{s+1}(TM)\}.$$

Кроме того имеет место разложение

$$T_g(\mathcal{C}g) = T_g(\mathcal{P}g) \oplus T_g(\mathcal{C}g \cap \mathcal{M}_{\mu(g)}). \tag{5.16}$$

Таким образом слагаемое $S_2^T \cap \mathrm{Im}\ \tau_g$ представляет инфинитизимальные деформации метрики g, которые сохраняют конформный класс и элемент объема.

5.3. Случай двумерного многообразия. В работе [112] изложенные выше идеи применяются для изучения пространства римановых метрик на компактной римановой поверхности M рода больше единицы. Дано описание пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ как факторпространства $\mathcal{M}/\mathcal{C}_0$, где $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_0 \times \mathcal{P}$ и $\mathcal{D}_0$ — связная компонента единицы группы диффеоморфизмов. Предложенные конструкции является геометрически естественными и позволяют, в частности, дать простое доказательство кэлеровости пространства Тейхмюллера (см. также [208]).

Отметим особенности двумерного случая. Во-первых, пространство конформных структур $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ естественно отождествляется с пространством почти комплексных структур $\mathcal{A}$ на M. Далее, каждая почти комплексная структура на M является на самом деле комплексной [9]. Кроме того, если род поверхности M больше единицы, то группа изометрий I_g является дискретной.

Определение 5.1. Почти комплексной структурой (п.к.с.) на многообразии M называется эндоморфизм касательного расслоения $J : TM \to TM$, удовлетворяющий условию: $J^2 = -I$, где I — тождественный автоморфизм.

Пусть $\mathcal{A}$ — пространство всех гладких почти комплексных структур, задающих ту же ориентацию на M, что и заданная. Для $s > n/2$ пусть $\mathcal{A}^s$ — пространство почти комплексных структур соболевского класса гладкости H^s. Поскольку пространство $\mathcal{A}^s$ является пространством сечений конечномерного гладкого расслоения, то $\mathcal{A}^s$ является гладким гильбертовым подмногообразием гильбертова пространства $H^s(T_1^1 M)$. Касательное пространство $T_J\mathcal{A}^s$ состоит из всех эндоморфизмов $I \in H^s(T_1^1 M)$, антикоммутирующих с J: $IJ = -JI$.

Для двумерного многообразия M *пространство Тейхмюллера* $\mathcal{T}$ определяется как факторпространство $\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D}_0$ — связная компонента единицы группы диффеоморфизмов. Изучению пространства почти комплексных структур $\mathcal{A}$ и пространства Тейхмюллера $\mathcal{T} = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ посвящены работы: [90, 113, 114, 208, 230]. Удобно с почти комплексной структурой $J \in \mathcal{A}$ связать риманову метрику g постоянной отрицательной кривизны. Это позволяет ввести ковариантное дифференцирование и использовать развитые методы римановой геометрии. Данному, более геометрическому, подходу посвящены работы [112, 115, 231]. Рассмотрим его подробнее.

Теорема 5.9 (см. [112])**.** *Пусть* $\dim M = 2$, $s > n/2 = 1$. *Тогда многообразие* $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ *диффеоморфно* $\mathcal{A}^s$. *Таким образом, пространство* H^s*-конформных структур диффеоморфно пространству положительно ориентированных почти комплексных структур на* M.

В основе доказательства лежит следующее отображение, связывающее с метрикой g п.к.с. J:

$$\Phi : \mathcal{M}^s \to H^s(T^1_1 M), \quad g \to -g^{-1}\mu_g, \tag{5.17}$$

где μ_g — риманов элемент объема, $g^{-1}\mu_g$ — операция поднятия первого индекса у кососимметрической 2-формы μ_g.

Другая модель для пространства $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ конформных структур связана с метриками постоянной отрицательно кривизны. Пусть $\dim M = 2$ и род $d > 1$. Для метрики $g \in \mathcal{M}^s$, $s > n/2+1 = 2$, пусть $s(g) \in H^{s-2}(M, \mathbb{R})$ — скалярная кривизна метрики g. Обозначим $\mathcal{M}^s_{-1} = \{g \in \mathcal{M}^s;\ s(g) = -1\}$ пространство H^s-римановых метрик постоянной скалярной кривизны, равной -1. Поскольку род поверхности M больше единицы, $\mathcal{M}^s_{-1}$ непусто.

Теорема 5.10 (см. [112])**.** *Пусть* $\dim M = 2$, $s > n/2 + 1 = 2$ *и род* $d > 1$. *Тогда* $\mathcal{M}^s_{-1}$ *есть непустое замкнутое* C^∞*-подмногообразие в* $\mathcal{M}^s$ *с касательным пространством* $T_g\mathcal{M}^s_{-1}$*, равным* $\operatorname{Ker} d_g s(g)$ *ядру дифференциала отображения скалярной кривизны.*

Напомним, что $d_g s(g)(h) = \Delta(\mathrm{tr}_h) + \delta_g\delta_g h + (\mathrm{tr}_g h)/2$. Отметим, что если $s(g) = -1$, то для любого диффеоморфизма η, $s(\eta^* g) = -1$. Поэтому пространство $\mathcal{M}_{-1}$ инвариантно относительно действия группы диффеоморфизмов $\mathcal{D}$. Если род поверхности M больше единицы, то группа изометрий I_g является дискретной. Отсюда следует, что связная компонента единицы $\mathcal{D}_0$ группы диффеоморфизмов не содержит изометрий, отличных от тождественного. Поэтому действие $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{M}_{-1} \to \mathcal{M}_{-1}$ является свободным.

Теорема 5.11 (см. [112])**.** *Пусть* $g \in \mathcal{M}^{s+2}_{-1}$. *Тогда* $T_g\mathcal{M}^s_{-1}$ *раскладывается в* L_2*-ортогональную прямую сумму*

$$T_g\mathcal{M}^s_{-1} = (S^s_2)^{TT} \oplus \mathrm{Im}\ \alpha_g, \tag{5.18}$$

где $(S^s_2)^{TT}(g) = \{h \in S^s_2;\ \delta_g h = 0, \mathrm{tr}_g h = 0\}$. *Другими словами, каждый элемент* $h \in T_g\mathcal{M}^s_{-1}$ *можно представить в виде*

$$h = h^{TT} + L_X g$$

для некоторого (единственного) векторного поля $X \in \Gamma^{s+1}(TM)$. *Разложение имеет место и в случае* $s = \infty$.

Теорема 5.12 (см. [112])**.** *Пусть* $\dim M = 2$, $d > 1$, $2 < s \leqslant \infty$ *и* $g \in \mathcal{M}^s$. *Тогда существует единственная функция* $p \in \mathcal{P}^s$ *такая, что*

$$s(pg) = -1. \tag{5.19}$$

Другими словами, каждая метрика $g \in \mathcal{M}^s$ *поточечно конформно эквивалентна единственной метрике постоянной скалярной кривизны, равной -1 и конформный сомножитель единственный.*

Кроме того, для $g \in \mathcal{M}^s$ *единственное решение* $p(g)$ *уравнения* (5.19) *гладко зависит от* g.

Из этой теоремы сразу вытекает следующий результат.

Теорема 5.13 (см. [112])**.** *Пусть* $\dim M = 2$, $d > 1$, $s > 2$. C^∞*-многообразия* $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ *и* $\mathcal{M}^s_{-1}$ C^∞*-диффеоморфны. Диффеоморфизм* $\pi : \mathcal{M}^s_{-1} \to \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ *является эквивариантным относительно действия группы диффеоморфизмов* $\mathcal{D}^{s+1}$ *на пространствах* $\mathcal{M}^s_{-1}$ *и* $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$.

Поскольку диффеоморфизм $\Phi : \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s \to \mathcal{A}^s$ также $\mathcal{D}^{s+1}$-эквивариантен, то мы получаем $\mathcal{D}^{s+1}$-эквивариантный диффеоморфизм многоообразий $\mathcal{M}^s_{-1}$ и $\mathcal{A}^s$:

$$\mathcal{M}^s_{-1} \to \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s \to \mathcal{A}^s.$$

Следовательно, $\mathcal{T} = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0 = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$. Пространство метрик $\mathcal{M}_{-1}$ более удобно для исследования нашими методами. Можно показать, что орбита O^s_g есть замкнутое подмногообразие в $\mathcal{M}^s_{-1}$ и доказать теорему о срезе для действия группы диффеоморфизмов $\mathcal{M}^s_{-1} \times \mathcal{D}^{s+1}_0 \to \mathcal{M}^s_{-1}, \quad (g, \eta) \to \eta^* g, s > 2$ [112]. Из теоремы 5.11 следует, что касательным пространством к срезу будет пространство $(S^s_2)^{TT}$. Поэтому сначала дадим его описание.

Теорема 5.14 (см. [112]). *Пусть* $\dim M = 2$, $g \in \mathcal{M}^{s+1}$, $s \geqslant 2$. *Тогда*

$$(S^s_2)^{TT}(g) = \{h \in S^s_2;\ \delta_g h = 0, \operatorname{tr}_g h = 0\}$$

является конечномерным линейным пространством. Если $g \in \mathcal{M}$ *— гладкая риманова метрика, то* $(S^s_2)^{TT}(g) = S^{TT}_2(g)$ *— пространство бездивергентных бесследовых гладких симметричных 2-форм на* M.

Симметричную 2-форму на M в теории римановых поверхностей принято называть *квадратичным дифференциалом*. Как уже упоминалось, почти комплексная структура J на M является комплексной. Пусть $\mathcal{Q}(J)$ — пространство квадратичным дифференциалов, голоморфных относительно комплексной структуры J. Элементы пространства $\mathcal{Q}(J)$ локально в комплексном параметре имеют вид $f(z)dz^2$, где функция $f(z)$ голоморфна.

Теорема 5.15 (см. [112]). *Пусть* $\dim M = 2$ *и род* $d > 1$. *Предположим, что* $g \in \mathcal{M}$ *и* $J = -g^{-1}\mu_g$ *— положительно ориентированная комплексная структура, ассоциированная с* g. *Тогда* $S^{TT}_2(g)$ *канонически изоморфно пространству* $\mathcal{Q}(J)$ *голоморфных квадратичных дифференциалов. Соответствие между элементами* h^{TT} *и голоморфными дифференциалами в конформной системе координат* $z = x + iy$ *на* M *имеет вид*

$$h^{TT} = u\ dx^2 - 2v\ dxdy - u\ dy^2 = \operatorname{Re}\{(u + iv)(dx + idy)^2\}. \tag{5.20}$$

Доказательство основано на том, что на двумерном многообразии M бесследовая симметричная 2-форма h может быть записана локально в конформной системе координат $z = x + iy$ в виде $h = u\ dx^2 - 2v\ dxdy - u\ dy^2$. Далее, уравнение $\delta_g h = 0$ эквивалентно условиям Коши-Римана для функции $f = u + iv$. Поэтому квадратичный дифференциал $(u + iv)(dx + idy)^2$ является голоморфным.

Теорема 5.16 (см. [112]). *Пусть* $\dim M = 2$ *и род* $d > 1$. *Тогда фактор-пространство* $\mathcal{T} = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ *является гладким конечномерным многообразием размерности* $6d - 6$, *для которого касательное пространство* $T_{[g]}\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ *изоморфно* $S^{TT}_2(g)$.

Следствие 5.17 (см. также [115]). *Пространство* $\mathcal{T} = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ *является стягиваемым.*

Предложенный подход к определению пространства Тейхмюллера с точки зрения римановой геометрии позволяет получить основные результаты теории пространства Тейхмюллера. В частности, в работе [115] дано непосредственное доказательство того, что пространство Тейхмюллера диффеоморфно $\mathbb{R}^{6d-6}$. В работе [230] показано, что пространство Тейхмюллера имеет отрицательную секционную кривизну и получены известные оценки кривизны. В работах [113, 114, 208] доказана известная теорема Альфорса о том, что пространство Тейхмюллера является кэлеровым относительно метрики Вейля—Петерсона. В работе [231] показано, что метрика Вейля—Петерсона является второй вариацией функционала энергии Дирихле, этой же теме посвящена работа [105]. В работе [132] показано, что базис голоморфных дифференциалов и точки Вейерштрасса на римановой поверхности (M, J) непрерывно зависят от комплексной структуры J. В работе Айхорна [98] геметрический подход к определению пространства Тейхмюллера распространен на случай открытой поверхности.

Чтобы определить риманову и комплексную структуры на пространстве Тейхмюллера, обратимся к пространству $\mathcal{A}$ почти комплексных структур на многообразии M. Как уже отмечалось, касательное пространство $T_J\mathcal{A}$ состоит из всех эндоморфизмов $I \in \Gamma(T^1_1 M)$, антикоммутирующих с J: $IJ = -JI$. Пусть $g(J)$ — единственная метрика постоянной отрицательной кривизны, равной -1, соответствующая J. Определим на пространстве $\mathcal{A}$ естественные почти комплексную структуру и слабую риманову структуру следующим образом [113, 114]: если $I, I_1, I_2 \in T_J\mathcal{A}$, то

$$\mathbf{J} : T_J\mathcal{A} \to T_J\mathcal{A}, \quad \mathbf{J}(I) = J \cdot I, \tag{5.21}$$

$$(I_1, I_2)_J = \int\limits_M \mathrm{tr}(I_1 \cdot I_2) d\mu_{g(J)}. \tag{5.22}$$

Легко видеть, что слабая риманова структура (5.22) является эрмитовой относительно почти комплексной структуры (5.21). Обе они инвариантны относительно действия группы диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ и поэтому определяют риманову и почти комплексную структуры на пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T} = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0$.

Теорема 5.18 (см. [113]). *Естественная почти комплексная структура* $\mathbf{J}$ *на пространстве* $\mathcal{A}$ *индуцирует на пространстве Тейхмюллера* $\mathcal{T} = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ *интегрируемую почти комплексную (и, следовательно, комплексную) структуру.*

Теорема 5.19 (см. [114]). *Слабая риманова структура* (5.22) *на пространстве* $\mathcal{A}$ *индуцирует на пространстве Тейхмюллера* $\mathcal{T} = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ *гладкую риманову структуру. Данная риманова структура эрмитова относительно естественной комплексной структуры на* $\mathcal{T}$, *кэлерова и является метрикой Вейля—Петерсона на* $\mathcal{T}$.

Подход к определению пространства Тейхмюллера с точки зрения римановой геометрии открывает новые возможности для обобщений пространства Тейхмюллера на случай многомерных многообразий. Наиболее естественный путь обобщений связан с пространствами модулей кэлеровых многообразий. Это направление развивалось в работах [35, 117, 119, 120, 215–219]. Статья [35] (на русском языке) является обзором данного направления. Она содержит изложение основных идей, результатов и конструкций классической теории пространства Тейхмюллера, а также новых достижений и обобщений на основе геометрического подхода. Другое направление обобщений было предложено и развивалось в серии работ Д. Блэра [57–60, 64, 65]. Оно основывается на изучении пространства ассоциированных метрик на симплектическом многообразии, этому направлению посвящены также работы [24–30, 224].

6. ПРОСТРАНСТВО РИМАНОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Две метрики g_1 и g_2 называются изометричными, если существует диффеоморфизм η многообразия M такой, что $g_2 = \eta^* g_1$. Поэтому фактор-пространство $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ состоит из классов изометричных метрик. Каждый класс определяет одну геометрию многообразия M, поэтому $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ называют пространством *римановых геометрий*, или *суперпространством*. Пространство $\mathcal{G} = \mathcal{M}/\mathcal{D}$ интересно с математической и с физической точек зрения и исследовалось в работах [73, 93, 106–108]. К сожалению, данное пространство многообразием не является. Дело в том, что группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ действует не свободно. Элементы $g \in \mathcal{M}$ имеют группы изотропии I_g, которые зависят от $g \in \mathcal{M}$. В работе [106] показано, что $\mathcal{G} = \mathcal{M}/\mathcal{D}$ стратифицировано многообразиями, причем каждый страт может быть отмечен классом сопряженности группы изометрий в $\mathcal{D}$. Развитию этих идей посвящена работа [73].

Пусть G — компактная группа Ли преобразований многообразия M и пусть $\mathcal{M}^G$ — множество метрик g, у которых группа изометрий есть в точности G. Если η — диффеоморфизм многообразия, то группа изометрий метрики $\eta^* g$ есть сопряженная группа $\eta^{-1} G \eta$. Поэтому под действием группы диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ на пространстве метрик $\mathcal{M}$ из множества $\mathcal{M}^G$ получается множество $\mathcal{M}_{(G)}$ метрик, у которых группа изометрий сопряжена к G в группе диффеоморфизмов. В качестве страта, соответствующего классу групп, сопряженных G, берется множество $\mathcal{R}_{(G)} = \mathcal{M}_{(G)}/\mathcal{D}$. Пока не очевидно, что $\mathcal{R}_{(G)}$ является ILH-многообразием. Доказательство этого факта основывается на том, что $\mathcal{R}_{(G)} = \mathcal{M}^G/\mathcal{N}_G$, где $\mathcal{N}_G$ есть нормализатор группы G в группе диффеоморфизмов $\mathcal{D}$. Легко видеть, что нормализатор $\mathcal{N}_G$ состоит из диффеоморфизмов, которые оставляют на месте пространство $\mathcal{M}^G$: если $\eta \in \mathcal{N}_G$ и $g \in \mathcal{M}^G$, то $\eta^* g \in \mathcal{M}^G$. Действительно, для $\varphi \in G$ имеем $\varphi^*(\eta^* g) = \eta^* g$ — это следует из того, что $\eta\varphi\eta^{-1} \in G$. Достаточно легко понять, что пространство $\mathcal{M}^G$ является многообразием. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим линейный непрерывный оператор $P_G : S_s \to S_2$, который симметричной 2-форме $h \in S_2$ ставит в соответствие G-инвариантную форму, усредненную по группе G, $h \to \widetilde{h} = \int_G \varphi^*(h) d\mu_G(\varphi)$. Тогда $\mathrm{Ker}(P_G - Id)$ является векторным подпространством в S_2, а $\mathcal{M}^G$ является открытым подмножеством в замкнутом выпуклом положительном конусе $\mathcal{M} \cap \mathrm{Ker}(P_G - Id)$. Основываясь на этих фактах в работе [73] показано, что $\mathcal{R}_{(G)} = \mathcal{M}^G / \mathcal{N}_G$ является ILH-многообразием. При этом проекция $\mathcal{M}^G \to \mathcal{R}_{(G)}$ является главным $G \setminus \mathcal{N}_G$-расслоением. Многообразие $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ стратифицировано ILH-многообразиями $\mathcal{R}_{(G)}$, когда G пробегает все классы сопряженных в $\mathcal{D}$ подгрупп изометрий.

Известны два подхода к разрешению особенностей пространства $\mathcal{G}$. Первый подход предложен в работах [73, 93, 106] и связан с фиксацией точки x на многообразии M. Для $x \in M$ рассматривается ILH-подгруппа диффеоморфизмов $\mathcal{D}_x = \{\eta \in \mathcal{D};\ \eta(x) = x, d_x\eta = Id_x\}$. Поскольку изометрия, оставляющая неподвижной точку и имеющая в ней тождественный дифференциал, является тождественным преобразованием, то действие $\mathcal{M} \times \mathcal{D}_x \to \mathcal{M}$ свободное и $\mathcal{G}_x = \mathcal{M}/\mathcal{D}_x$ — многообразие.

В работе А. Фишера [108] предложен другой способ разрешения особенностей пространства $\mathcal{G}$ основанный на использовании расслоения реперов. Для пространства с особенностями $\mathcal{G}$ строится многообразие $\mathcal{G}_{FM}$ такое, что существует проекция $\pi : \mathcal{G}_{FM} \to \mathcal{G}$ непрерывная и открытая и такая, что для любого класса $[g] \in \mathcal{G}$ прообраз $\pi^{-1}([g])$ является замкнутым подмногообразием в $\mathcal{G}_{FM}$. Тогда пара $(\mathcal{G}_{FM}, \pi)$ называется *разрешением особенностей* пространства $\mathcal{G}$, а $\mathcal{G}_{FM}$ — *пространством разрешения*. Слой $\pi^{-1}([g])$ служит мерой особенности.

Пусть $F(M)$ — расслоение реперов многообразия M. Рассмотрим пространство $\mathcal{M} \times F(M)$ и следующее действие на нем группы диффеоморфизмов

$$\Phi : (\mathcal{M} \times F(M)) \times \mathcal{D} \to \mathcal{M} \times F(M), \quad ((g, u), \eta) \to (\eta^* g, \eta^* u)\,, \tag{6.1}$$

где u — репер, $\eta^* u = \widehat{\eta}^{-1} u$ и $\widehat{\eta} : F(M) \to F(M)$ — естественное действие диффеоморфизма на расслоении реперов. Данное действие Φ свободное. Действительно, пусть $(\eta^* g, \eta^* u) = (g, u)$. Тогда $\eta \in I_g$ и поскольку η оставляет на месте репер u, то $\eta = Id$ — это следует из классического результата: изометрия, оставляющая на месте репер, является тождественным преобразованием. В работе [108] показано, что $\mathcal{G}_{FM} = (\mathcal{M} \times F(M))/\mathcal{D}$ является ILH-многообразием, которое естественно проектируется на $\mathcal{G}$, $\pi : \mathcal{G}_{FM} \to \mathcal{G}$, $[(g, u)] \to [g]$. Кроме того, слой $\pi^{-1}([g])$ диффеоморфен $(n^2 + n - k)$-мерному многообразию орбит $\pi^{-1}([g]) \approx I_g \setminus F(M)$ левого действия группы I_g на расслоении реперов $F(M)$, $(\eta, g) \to \widehat{\eta} u$, $k = \dim I_g$.

Если выбран репер $u \in F(M)$, то существует диффеоморфизм $\mathcal{G}_{FM} \to \mathcal{G}_x$, основанный на том факте, что $\mathcal{D}/\mathcal{D}_x \approx F(M)$. Хотя пространства разрешения (не канонически) диффеоморфны, конструкция $\mathcal{G}_{FM}$ более естественна, чем $\mathcal{G}_x$, поскольку не требует фиксации точки и ограничения группы диффеоморфизмов до подгруппы $\mathcal{D}_x$.

Рассмотрим основные идеи и результаты работы [108]. Сначала приведем некоторые факты геометрии расслоения реперов.

Пусть g — риманова метрика на M и ω — $gl(n)$-значная форма на $F(M)$ связности Леви-Чивита. Пусть $\gamma : gl(n) \times gl(n) \to \mathbb{R}$, $\gamma(C, D) = \mathrm{tr}(C^t \cdot D) = \sum_{i,j=1}^n C^i_j D^i_j$. Метрика g, форма ω и скалярное произведение γ определяют естественную риманову метрику $\widehat{g}$ на $F(M)$:

$$\widehat{g} = (\pi_{FM})^* g + \gamma \cdot (\omega \otimes \omega). \tag{6.2}$$

Таким образом, если $u \in F(M)$ и $Z_1, Z_2 \in T_u F(M)$, то

$$\widehat{g}_u(Z_1, Z_2) = g\left(d_u \pi_{FM}(Z_1), d_u \pi_{FM}(Z_2)\right) + \gamma(\omega(Z_1), \omega(Z_2)). \tag{6.3}$$

Проекция $\pi_{FM} : F(M) \to M$ является римановой субмерсией относительно $\widehat{g}$ и g.

Пусть I_g — группа изометрий метрики g и

$$\mathcal{I}_g = T_e(I_g) = \{X \in \Gamma(TM);\ L_X g = 0\}$$

– алгебра Ли полных Киллинговых векторных полей на M. Действие $I_g \times M \to M$ поднимается до левого действия на расслоении реперов $I_g \times F(M) \to F(M)$, $(\eta, u) \to \widehat{\eta}u$. Следовательно определен гомоморфизм алгебр Ли $\mathcal{I}_g \to \Gamma(T(FM))$, $X \to \widehat{X}$.

Если $u \in F(M)$, то пусть $\chi_u : I_g \to F(M)$, $\eta \to \widehat{\eta}u$ — орбитное отображение и $\widehat{I}_g(u)$ — соответствующая орбита. Отображение χ_u гладкое и его производная в единице есть

$$d_e\chi_u : \mathcal{I}_g \to T_uF(M),\ X \to \widehat{X}(u).$$

Пусть $\widehat{\mathcal{I}}_g(u) = d_e\chi_u(\mathcal{I}_g) \subset T_uF(M)$ — образ алгебры Ли $\mathcal{I}_g$ в касательном пространстве $T_uF(M)$.

Теорема 6.1 (см. [108]). *Действие $I_g \times F(M) \to F(M)$, $(\eta, u) \to \widehat{\eta}u$ гладкое, свободное и собственное. Для $u \in F(M)$ орбита $\widehat{I}_g(u) \subseteq F(M)$ есть замкнутое подмногообразие и касательное пространство в точке $u_1 = \widehat{\eta}u$ может быть задано так:*

$$\widehat{\mathcal{I}}_g(u_1) = \{\widehat{X}(u_1);\ X \in \mathcal{I}_g\} = d_u\widehat{\eta}(\widehat{\mathcal{I}}_g(u)).$$

Орбитное отображение $\chi_u : I_g \to \widehat{I}_g(u) \subset F(M)$ является диффеоморфизмом на свой образ. Относительно метрики $\widehat{g} = (\pi_{FM})^*g + \gamma \cdot (\omega \otimes \omega)$ группа I_g действует на $F(M)$ как группа изометрий.

Для свободного действия группы I_g на $F(M)$ в каждой точке существует срез C_u, который инвариантен относительно группы I_g.

Теорема 6.2 (см. [108]). *Для действия $I_g \times F(M) \to F(M)$ пространство орбит $I_g \setminus F(M)$, имеет структуру гладкого многообразия и проекция $\pi : F(M) \to I_g \setminus F(M)$ является субмерсией. Кроме того, для $u \in F(M)$,*

$$\operatorname{Ker} d_u\pi = T_u(\widehat{I}_g(u)) = \widehat{\mathcal{I}}_g(u), \qquad \operatorname{Im}\ d_u\pi = T_{[u]}(I_g \setminus F(M)) \approx \widehat{\mathcal{I}}_g^{\perp}(u).$$

Субмерсия π является гладким (левым) главным I_g-расслоением.

Действие

$$\Phi : (\mathcal{M} \times F(M)) \times \mathcal{D} \to \mathcal{M} \times F(M), \quad ((g, u), \eta) \to (\eta^*g, \eta^*u)\,,$$

где $\eta^*u = \widehat{\eta}^{-1}u$ является [93] ILH-гладким. Пусть $O_{(g,u)} = \Phi_{(g,u)}(\mathcal{D})$ — орбита элемента (g, u). Дифференциал орбитного отображения $\Phi_{(g,u)} : \mathcal{D} \to \mathcal{M} \times F(M)$ легко находится:

$$d_e\Phi_{(g,u)} : \Gamma(TM) \to S_2 \oplus T_uFM, \quad X \to L_Xg - \widehat{X}(u). \tag{6.4}$$

На многообразии $\mathcal{M} \times F(M)$ введем следующую слабую L_2-метрику G. Если $(g, u) \in \mathcal{M} \times F(M)$, $h_1, h_2 \in S_2$ и $Z_1, Z_2 \in T_uFM$, тогда

$$G_{(g,u)}((h_1, Z_1), (h_2, Z_2)) = \int\limits_M g(h_1, h_2)d\mu_g + \widehat{g}(u)(Z_1, Z_2). \tag{6.5}$$

Теорема 6.3 (см. [108]). *Действие $\Phi : (\mathcal{M} \times F(M)) \times \mathcal{D} \to \mathcal{M} \times F(M)$, $((g, u), \eta) \to (\eta^*g, \eta^*u)$ является ILH-гладким, свободным и собственным. Группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ сохраняет скалярное произведение* (6.5).

Используя следующие ортогональные разложения касательных пространств:

$$T_g\mathcal{M} = S_2 = S_2^0 \oplus \alpha_g(\Gamma(TM))\,, \quad T_uFM = \widehat{\mathcal{I}}_g(u) \oplus \widehat{\mathcal{I}}_g^{\perp}(u)$$

можно получить разложение касательного пространства $T_{(g,u)}(\mathcal{M} \times F(M)) = S_2 \oplus T_uFM$. Напомним, что первое — это разложение Берже-Эбина, где $S_2^0 = \{h \in S_2;\ \delta_gh = 0\}$ и $\alpha_g(X) = L_Xg$.

Теорема 6.4 (см. [108]). *Для $(g, u) \in \mathcal{M} \times F(M)$ пусть*

$$\alpha_{(g,u)} = d_e\Phi_{(g,u)} : \Gamma(TM) \to S_2 \oplus T_uFM, \quad X \to X^*(g, u) = L_X - \widehat{X}(u)$$

— производная орбитного отображения $\Phi_{(g,u)}$. *Тогда* $\alpha_{(g,u)}$ *имеет замкнутый образ и пространство* $S_2^0 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_g^{\perp}(u)$ *есть замкнутое дополнение к образу* $\mathrm{Im}\ \alpha_{(g,u)}$ *в пространстве* $S_2 \oplus T_uFM$. *Таким образом имеет место разложение*

$$S_2 \oplus T_uFM = S_2 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_g^{\perp}(u) \oplus \mathrm{Im}\ \alpha_{(g,u)}. \tag{6.6}$$

В соответствии с (6.6) *элемент* $h + Z_u \in S_2 \oplus T_uFM$ *имеет следующее разложение*

$$h + Z_u = h^0 + W_u^{\perp} + \alpha_{(g,u)}(X + Y) = h^0 + W_u^{\perp} + L_Xg - (\widehat{X}(u) + \widehat{Y}(u)),$$

где $h = h^0 + L_Xg$ *— разложение Берже-Эбина,* $W_u = Z_u + \widehat{X}(u)$, $W_u = W_u^{\perp} + \widehat{Y}(u)$ *— разложение в пространстве* T_uFM *и* Y *— единственное Киллингово векторное поле, соответствующее компоненте* $\widehat{Y}(u)$. *Разложение* (6.5) *эквивариантно относительно действия* $\mathcal{D}$. *см.*

Отметим, что разложение (6.5) не ортогонально относительно G.

Теорема 6.5 (см. [108]). *Орбита* $O_{(g,u)}$ *элемента* $(g, u) \in \mathcal{M} \times F(M)$ *является замкнутым подмногообразием в* $\mathcal{M} \times F(M)$ *с касательным пространством* $T_{(g,u)}O_{(g,u)} = \mathrm{Im}\ \alpha_{(g,u)}$. *Орбитное отображение* $\Phi_{(g,u)} : \mathcal{D} \to O_{(g,u)}$ *является ILH-гладким диффеоморфизмом.*

В работе [108] доказана также теорема о срезе для действия группы $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathcal{M} \times F(M)$. При этом, если $\mathcal{S}_g$ есть срез действия $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathcal{M}$ и $C_u(g)$ — срез действия группы изометрий I_g на пространстве $F(M)$, то $\mathcal{S}_g \times C_u(g)$ есть требуемый срез действия группы $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathcal{M} \times F(M)$.

Теорема 6.6 (см. [108]). *Для действия* $\Phi : (\mathcal{M} \times F(M)) \times \mathcal{D} \to \mathcal{M} \times F(M)$ *пусть* $\mathcal{G}_{FM} = (\mathcal{M} \times F(M))/\mathcal{D}$ *и* $\pi : \mathcal{M} \times F(M) \to \mathcal{G}_{FM}$, $\pi(g, u) = [(g, u)]$. *Тогда пространство* $\mathcal{G}_{FM}$ *является ILH-многообразием, проекция* π *есть субмерсия и*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, d_{(g,u)}\pi &= T_{(g,u)}O_{(g,u)} = \mathrm{Im}\ \alpha_{(g,u)}, \\ \mathrm{Im}\, d_{(g,u)}\pi &= T_{[g,u]}\mathcal{G}_{FM} \approx S_2^0 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_g^{\perp}(u). \end{aligned}$$

Кроме того, π *является главным* $\mathcal{D}$*-расслоением. Это расслоение имеет естественную связность, задаваемую разложением*

$$S_2 \times T_uFM = H_{(g,u)} \oplus V_{(g,u)} = \left(S_2^0 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_g^{\perp}(u)\right) \oplus \mathrm{Im}\ \alpha_{(g,u)}.$$

В работе С. Свифта [228] теория разрешения особенностей была развита с использованием расслоения ортонормированных реперов.

Рассматривая вместо $\mathcal{M}$ специальные классы метрик, изучают различные пространства модулей. Пространствам модулей эйнштейновых метрик посвящена глава 12 книги А. Бессе [5]. Структура пространства модулей эйнштейновых метрик четырехмерного многообразия рассматривалась в работе М.Т. Андерсона [44]. Пространства модулей риччи-плоских метрик на четырехмерном многообразии изучались Ито [144]. Пространствам модулей кэлеровых многообразий посвящена работа Г. Шумахера [35] (на русском языке).

7. Тензор Риччи и скалярная кривизна как функции метрики

Пусть $g \in \mathcal{M}$ — риманова метрика на многообразии M и ∇ — ковариантная производная связности Леви-Чивита. Символы Кристоффеля в локальных координатах имеют вид: $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$. Тензор кривизны $R = R(g)$ определим в соответствии с [9] формулой $R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$. Тогда компоненты R^l_{kij} тензора кривизны, определяемые равенством $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l{}_{kij}\partial_l$ выражаются через Γ^k_{ij} по формуле $R^l{}_{kij} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$. При опускании индекса верхний индекс l попадает на первую позицию, $R_{mkij} = g_{ml}R^l_{kij}$. Для тензора кривизны имеют место следующие два тождества Бьянки

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0, \quad R_{ijkl,t} + R_{ijtk,l} + R_{ijlt,k} = 0.$$

Одним из важнейших свойств тензора кривизны является его эквивариантность относительно действия группы диффеоморфизмов. А именно, для любого диффеоморфизма η многообразия M имеет место равенство

$$\eta^*(R(g)) = R(\eta^*(g)). \tag{7.1}$$

В работе Дж. Каждана [152] показано, что оба тождества Бьянки есть следствия данной инвариантности. Чтобы в этом убедиться достаточно продифференцировать равенство $\eta_t^*(R(g)) = R(\eta_t^*(g))$ при $t = 0$ и использовать произвольность векторного поля $X = (\eta_t)'_{t=0}$. Эта же идея инвариантности использовалась в работе Ф. Делоне [85] для доказательства тождеств Бьянки для связности с кручением. Кроме того, в [85] дано еще одно доказательство основанное на тождестве $d^2 = 0$ для внешнего дифференциала. В частности, второе тождество Бьянки следует из $d^2\theta = 0$ для 1-формы $\theta(U) = \theta(\nabla_V Z)$, где Z — фиксированное векторное поле.

Тензор Риччи определяется как свертка по двум индексам, $\mathrm{Ric}_{ij} = R^l{}_{ilj} = R_{kilj}g^{kl}$. В бескоординатной форме имеем: $\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i,X)Y,e_i)$, для ортонормированного базиса $\{e_i\}$ пространства T_xM, $X,Y \in T_xM$. Скалярная кривизна есть $s(g)$ след тензора Риччи, $s(g) = g^{ij}R_{ij}$. Тензор Риччи и скалярная кривизна также эквивариантны относительнго действия группы диффеоморфизмов. Для любого диффеоморфизма η многообразия M имеют место равенства

$$\eta^*(\mathrm{Ric}(g)) = \mathrm{Ric}(\eta^*(g)), \quad \eta^*(s(g)) = s(\eta^*(g)). \tag{7.2}$$

Сверткой дифференциального тождества Бьянки получаем следующее свойство,

$$\delta_g \mathrm{Ric}(g) = -\frac{1}{2}d(s(g)). \tag{7.3}$$

Учитывая определение тензора Риччи $\mathrm{Ric}_{ij} = R_{ikjl}g^{kl}$, введем следующий оператор [56, 172]:

$$L : S_2 \to S_2, \quad L(h)_{ij} = R_{ikjl}h^{kl}. \tag{7.4}$$

Отметим, что $L(g) = \mathrm{Ric}(g)$. Введем еще один оператор $K : S_2 \to S_2$:

$$K(h)_{ij} = \mathrm{Ric}_{ik}\ h_j^k + \mathrm{Ric}_{jk}\ h_i^k - 2R_{ikjl}\ h^{kl}. \tag{7.5}$$

Легко видеть, что $K(g) = 0$ и $\mathrm{tr} \circ K = 0$.

Замечание. В книге Бессе [5] тензор кривизны определен формулой

$$R(\nabla_i, \nabla_j)\partial_k = -[\nabla_i, \nabla_j]\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l,$$

верхний индекс опускается на четвертое место, тензор Риччи имеет вид $\mathrm{Ric}_{ij} = R^l_{ilj} = R_{ikjl}g^{kl}$, поэтому оператор L определен той же формулой (7.4).

Напомним, что S_2^T — пространство бесследовых симметричных 2-форм. Оператор K связан с секционной кривизной многообразия (M,g) следующим образом.

Предложение 7.1 (см. [56]). *Оператор K положительно определен на S_2^T если (M,g) имеет строго положительную секционную кривизну.*

Гладкая зависимость тензора кривизны $R(g)$, тензора Риччи $\mathrm{Ric}(g)$ и скалярной кривизны $s(g)$ от метрики $g \in \mathcal{M}$ вытекает из следующей теоремы Н. Коисо.

Теорема 7.2 (см. [163]). *Если $s > n/2$, то отображение*

$$D : \mathcal{M}^{s+1} \times H^{s+1}(T_q^pM) \to H^s(T_{q+1}^pM),$$

определенное формулой $D(g,\xi) = \nabla_g\xi$ является класса C^∞.

Доказательство использует теорему 1.2. Пусть g_0 — некоторая фиксированная C^∞-метрика на M. Для H^s-метрики g на M определим тензорное поле $T(g)$ на M формулой

$$T(g)(X,Y) = (\nabla_g)_XY - (\nabla_{g_0})_XY.$$

Тогда мы имеем

$$T(g)^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left((\nabla_{g_0})_i g_{lj} + (\nabla_{g_0})_j g_{li} - (\nabla_{g_0})_l g_{ij} \right),$$

$$D(g,\xi)^{i_1 \dots i_p}_{j_0 \dots j_q} - D(g_0,\xi)^{i_1 \dots i_p}_{j_0 \dots j_q} = -\sum_{a=1}^{q} T(g)^t_{j_0 j_a} \xi^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{a-1} t j_{a+1} \dots j_q} + \sum_{b=1}^{p} T(g)^{i_b}_{j_0 k} \xi^{i_1 \dots i_{b-1} k i_{b+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

По определению H^s-топологии, отображение $g \to (\nabla_{g_0})g$ является C^∞-отображением пространства $\mathcal{M}^{s+1}$ в $H^s(T^0_3(M))$. Тогда по теореме 1.2 отображение $g \to T(g)$ из $\mathcal{M}^{s+1}$ в $H^s(T^1_2(M))$ является класса C^∞. Аналогично отображение $H^s(T^1_2) \times H^{s+1}(T^p_q) \to H^s(T^p_{q+1})$, $(T(g),\xi) \to D(g,\xi) - D(g_0,\xi)$ является класса C^∞. Но отображение $\xi \to D(g_0,\xi)$ есть линейное непрерывное отображение из $H^{s+1}(T^p_q)$ в $H^s(T^p_{q+1})$, следовательно, отображение $(T(g),\xi) \to D(g,\xi)$ является класса C^∞. В итоге мы получаем отображение D как композицию C^∞-отображений.

Следствие 7.3 (см. также [198]). *Если $s > n/2$, то отображение $(g,f) \to \Delta_g f$ есть C^∞-отображение из $\mathcal{M}^{s+1} \times H^{s+2}(M,\mathbb{R})$ в $H^s(M,\mathbb{R})$.*

Пусть $(\delta_g h)^i = -\nabla_j h^{ij}$ — оператор ковариантной дивергенции и $\alpha_g(X) = \frac{1}{2}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i)$.

Следствие 7.4. *Если $s > n/2$, то отображение $(g,h) \to \delta_g h$ есть C^∞-отображение из $\mathcal{M}^{s+1} \times S^{s+1}_2$ в $\Gamma^s(TM)$.*

Следствие 7.5. *Если $s > n/2$, то отображение $(g,X) \to \alpha_g(X)$ есть C^∞-отображение из $\mathcal{M}^{s+1} \times \Gamma^{s+1}(TM)$ в S^s_2.*

Следствие 7.6. *Если $s > n/2$, то отображения $g \to R(g)$, $\mathrm{Ric}(g)$, $s(g)$ есть C^∞-отображения из $\mathcal{M}^{s+2}$ в $H^s(T^1_3 M)$, $H^s(S_2 M)$, $H^s(M,\mathbb{R})$ соответственно.*

Достаточно доказать гладкость $g \to R(g)$. Из предыдущих формул получаем,

$$R(g)^l_{ijk} - R(g_0)^l_{ijk} = (\nabla_{g_0})_i (T(g))^l_{jk} - (\nabla_{g_0})_j (T(g))^l_{ik} + T(g)^l_{im} T(g)^m_{jk} - T(g)^l_{jm} T(g)^m_{ik}.$$

Применяя теорему 1.2, получаем гладкость отображения $g \to R(g)$.

Дифференциал отображения $\mathrm{Ric} : \mathcal{M} \to S_2$ хорошо известен [5,172]:

$$d_g \operatorname{Ric}(h) = \frac{1}{2}(\Delta_L h - 2\delta^*_g \delta_g h - \operatorname{Hess}(\operatorname{tr} h)), \tag{7.6}$$

где

$$\Delta_L h = \overline{\Delta} h + \mathrm{Ric}_{ik}\ h^k_j + \mathrm{Ric}_{jk}\ h^k_i - 2R_{ikjl}\ h^{kl}$$

– лапласиан Лихнеровича, а $\overline{\Delta} h$ — грубый лапласиан, $\overline{\Delta} h = \delta_g \Delta h = -\nabla^l \nabla_l h_{ij}$. Таким образом, $\Delta_L = \overline{\Delta} + K$. Напомним, что гессиан $\operatorname{Hess}(f)$ определяется как ковариантный дифференциал 1-формы df, $\operatorname{Hess}(f) = \nabla(df)$. Тогда из определения гессиана вытекают равенства $\operatorname{Hess}(f)(X,Y) = \nabla(df)(X,Y) = \langle \nabla_X df, Y \rangle = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$ и его симметричность.

Из свойства $\eta^*(\mathrm{Ric}(g)) = \mathrm{Ric}(\eta^*(g))$ сразу следует, что для любого векторного поля X на M имеет место равенство $L_X(\mathrm{Ric}(g)) = d_g \operatorname{Ric}(L_X g)$.

Сопряженный оператор для $d_g \operatorname{Ric}$ имеет вид [5]:

$$d_g \operatorname{Ric}^*(h) = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - 2\delta^*_g \delta_g h - \delta_g(\delta_g(h))g\right). \tag{7.7}$$

Рассмотрим отображение скалярной кривизны $s : \mathcal{M} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$, $g \to s(g)$ следуя работам А. Фишера и Дж. Марсдена [109,110]. Как показано выше, это отображение является ILH-гладким (следствие 7.6). Из свойства $\eta^*(s(g)) = s(\eta^*(g))$ сразу следует, что для любого векторного поля X на M имеет место равенство $L_X(s(g)) = d_g s(L_X g)$. Если $s > n/2$, то отображение s продолжается до C^∞-отображения $\mathcal{M}^{s+2} \to H^s(M,\mathbb{R})$. Дифференциал отображения s также хорошо известен [5,172]:

$$d_g s(h) = \gamma_g(h) = \Delta_g(\operatorname{tr} h) + \delta_g \delta_g h - g(h, \mathrm{Ric}(g)), \tag{7.8}$$

где $\Delta_g f = \delta_g df = -\nabla^i(d_i f)$ — лапласиан. Сопряженный оператор для γ_g имеет вид [5]:

$$\gamma^*_g(f) = g\Delta_g(f) + \operatorname{Hess}_g f - f \operatorname{Ric}(g). \tag{7.9}$$

Оператор γ_g^* имеет инъективный символ, $\sigma_t(\gamma_g^*)(u) = (-g\|t\|^2 + t\otimes t)u$ при $n \geqslant 2$. Поэтому для пространства S_2 получаем разложение Берже-Эбина:

$$S_2 = \operatorname{Ker}\gamma_g \oplus \operatorname{Im}\ \gamma_g^*, \tag{7.10}$$

$$h = \widetilde{h} + (g\Delta_g(f) + \operatorname{Hess}_g f - f\operatorname{Ric}(g)),$$

где $\Delta_g(\operatorname{tr}\widetilde{h}) + \delta_g\delta_g\widetilde{h} - g(\widetilde{h}, \operatorname{Ric}(g)) = 0$. Разложим компоненту $\widetilde{h}$ по классическому разложению Берже-Эбина, $\widetilde{h} = \widetilde{h}^0 + L_X g$, тогда:

$$h = \widetilde{h}^0 + L_X g + g\Delta_g(f) + \operatorname{Hess}_g f - f\operatorname{Ric}(g), \tag{7.11}$$

где

$$\delta_g(\widetilde{h}^0) = 0, \quad \Delta_g \operatorname{tr}\widetilde{h}^0 - \widetilde{h}\operatorname{Ric}(g) = 0.$$

Поскольку оператор γ_g^* имеет инъективный символ, то оператор $\gamma_g\gamma_g^*$ является эллиптическим. Следовательно, его ядро конечномерно и $\operatorname{Ker}\gamma_g\gamma_g^* = \operatorname{Ker}\gamma_g^*$. Поэтому имеет место следующее ортогональное разложение пространства функций:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \operatorname{Im}\ \gamma_g \oplus \operatorname{Ker}\gamma_g^*. \tag{7.12}$$

Определение 7.1. Метрику g назовем сингулярной, если отображение $d_g s = \gamma_g$ не сюръективно.

Из разложения (7.12) следует, что для сингулярной метрики $\operatorname{Ker}\gamma_g^* \neq 0$, т.е. существует нетривиальное решение уравнения

$$\operatorname{Hess}_g f = f\operatorname{Ric}(g) - \Delta_g(f)g. \tag{7.13}$$

Легко видеть, что если (M, g) — риччи плоское, $\operatorname{Ric}(g) = 0$, то константы являются решениями уравнения (7.13), тогда $\operatorname{Ker}\gamma_g^* \neq 0$ и поэтому отображение $d_g s = \gamma_g$ не сюръективно. В работе [109] показано, что отображение $d_g s = \gamma_g$ не сюръективно также в случае, когда M является стандартной сферой. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть f — решение уравнения (7.13). Если возьмем след в (7.13), то учитывая, что $\operatorname{tr}\operatorname{Hess}_g f = \nabla^i(d_i f) = -\Delta_g f$, получаем,

$$(n-1)\Delta_g(f) = s(g)f. \tag{7.14}$$

Поэтому, если скалярная кривизна постоянна, решение f является собственной функцией оператора Лапласа с собственным значением $s(g)/(n-1)$. В частности, если $s(g) = 0$, то $\Delta_g(f) = 0$, $f = const$. Тогда в случае $\operatorname{Ric}(g) \neq 0$ из (7.13) следует, что $f = 0$. В этом случае оператор $d_g s = \gamma_g$ сюръективен.

В работах [73, 109] показано, что если $\operatorname{Ric}(g) \neq 0$ и если существует нетривиальное (не равное нулю тождественно) решение f уравнения (7.13), то $s(g)$ является положительной константой. Таким образом мы получаем следующий результат, показывающий, что отображение скалярной кривизны $s : \mathcal{M}^s \to H^{s-2}(M, \mathbb{R})$ локально почти всегда сюръективно.

Теорема 7.7 (см. [73, 109]). *Пусть $g \in \mathcal{M}^s$, $s > n/2 + 1$ и предположим, что*

1) *$s(g)$ не является положительной константой и*
2) *если $s(g) = 0$, то $\operatorname{Ric}(g)$ — не равен тождественно нулю.*

Тогда $s : \mathcal{M}^s \to H^{s-2}(M, \mathbb{R})$ отображает окрестность элемента g на окрестность $s(g)$.

Следствие 7.8. *Пусть (M, g) — замкнутое многообразие, допускающее нетривиальное решение уравнения (7.13). Тогда (M, g) либо риччи-плоское и $\operatorname{Ker}\gamma_g^* = \mathbb{R}$, либо $s(g)$ есть положительная константа и $s(g)/(n-1)$ есть собственное значение оператора Лапласа.*

В случае стандартной сферы $M = S^n$ радиуса r_0 с метрикой g_0 имеем:

$$\operatorname{Ric}(g_0) = \frac{n-1}{r_0^2}g_0, \qquad s(g_0) = \frac{n(n-1)}{r_0^2}.$$

Тогда $f \in \operatorname{Ker}\gamma_g^*$, если и только если [109]

$$\operatorname{Hess}\ f = \left(\operatorname{Ric}(g_0) - \frac{1}{n-1}s(g_0)g_0\right)f = -\frac{f}{r_0^2}g_0\ .$$

Но собственные функции лапласиана с первым ненулевым собственным значением n/r_0^2 также удовлетворяют уравнению $\mathrm{Hess}\ f = -(f/r_0^2)g_0$. Следовательно оператор $d_g s = \gamma_g$ не сюръективен и $\operatorname{Ker}\gamma_g^* = \{f \in H^s(M, \mathbb{R});\ \Delta f = (n/r_0^2)f\}$. Обратно, по теореме Обаты [197], риманово многообразие (M, g), допускающее нетривиальное решение уравнения $\mathrm{Hess}\ f = -c^2 fg$, изометрично стандартной сфере радиуса $1/c$.

Если $s(g) = const > 0$ и γ_g не сюръективно, то существует [109] нетривиальное решение f уравнения

$$\mathrm{Hess}\ f = \left(\mathrm{Ric}(g) - (n-1)^{-1}s(g)g\right) f\ . \tag{7.15}$$

Это уравнение аналогично уравнению Обаты и естественно предположить, что из существования нетривиального решения последнего уравнения следует, что многообразие есть стандартная сфера. На основе этого А. Фишер и Дж. Марсден высказали гипотезу [109]:

Гипотеза 1. Если уравнение $\mathrm{Hess}\ f = (\mathrm{Ric}(g) - s(g)g/(n-1))f$ допускает нетривиальное решение, то (M, g) либо риччи-плоское, либо является стандартной сферой.

Поскольку недоказанной осталась вторая альтернатива, то данная гипотеза может быть сформулирована так:

Гипотеза 2. Если g — сингулярная метрика положительной скалярной кривизны, то многообразие (M, g) есть стандартная сфера.

Контрпримеры к гипотезе Фишера—Марсдена приведены в работах [158,165]. Во всех контрпримерах многообразие (M, g) содержало вполне геодезическую $(n-1)$-сферу. То, что это есть общее явление, установлено пока только для трехмерных многообразий [221].

Теорема 7.9. *Если g — сингулярная метрика на трехмерном замкнутом многообразии M положительной скалярной кривизны $s(g)$, то (M, g) содержит вполне геодезическую 2-сферу.*

Для гладкой функции $\rho(x)$ на многообразии M и для $s > n/2 + 1$ рассмотрим пространства метрик предписанной скалярной кривизны $\rho(x)$:

$$\mathcal{M}_\rho^s = \{g \in \mathcal{M}^s;\ s(g) = \rho\}, \qquad \mathcal{M}_\rho = \{g \in \mathcal{M};\ s(g) = \rho\}.$$

Из теоремы 7.7 можно получить условия на ρ, при которых $\mathcal{M}_\rho^s$ является подмногообразием в $\mathcal{M}^s$.

Теорема 7.10 (см. [109]). *Пусть ρ — гладкая функция на M и $s > n/2 + 1$. Если либо:*

(a) $\dim M = 2$, *либо*

(b) $\dim M \geqslant 3$ *и ρ не является константой* $\geqslant 0$,

то $\mathcal{M}_\rho^s$ (соответственно, $\mathcal{M}_\rho$) является C^∞-подмногообразием в $\mathcal{M}^s$ (соответственно, в $\mathcal{M}$).

Если $\dim M \geqslant 3$, $\rho = 0$, $g \in \mathcal{M}_0^s$ (соответственно, $g \in \mathcal{M}_0$) и $\mathrm{Ric}(g) \neq 0$ (или, если $\dim M = 3$, g — неплоская), тогда $\mathcal{M}_0^s$ (соответственно, $\mathcal{M}_0$) является C^∞-подмногообразием в окрестности элемента g.

А. Лихнерович показал [173], что для спинорного многообразия с ненулевым $\widehat{A}$-родом пространство $\mathcal{M}_\rho$ пустое в случае $\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$. Вопрос о том, какие функции могут служить скалярной кривизной метрики исследован в работах Каждана и Уорнера [148–151].

Теорема 7.11. *Компактные многообразия M и $n \geqslant 3$ делятся на три класса:*

(a) *любая C^∞-функция на M является скалярной кривизной некоторой C^∞-метрики;*

(b) *функция на M является скалярной кривизной некоторой метрики тогда и только тогда, когда она тождественно равна нулю или отрицательна в некоторой точке (при этом любая метрика нулевой скалярной кривизны является риччи-плоской);*

(c) *функция на M является скалярной кривизной некоторой метрики тогда и только тогда, когда она отрицательна в некоторой точке.*

Рассмотрим многообразие $\mathcal{M}_0^s = \{g \in \mathcal{M}^s;\ s(g) = 0\}$ метрик нулевой скалярной кривизны. Этот случай особый, поскольку отображение скалярной кривизны не будет субмерсией в тех точках g из $\mathcal{M}_0^s$, в которых $\mathrm{Ric}(g) = 0$. Тогда $\mathcal{M}_0^s$ может не быть многообразием в этих точках.

Для $\lambda \in \mathbb{R}$, $s > n/2+1$, пусть $\mathcal{E}^s_\lambda = \{g \in \mathcal{M}^s;\ \mathrm{Ric}(g) = \lambda g\}$ есть пространство эйнштейновых метрик кривизны Риччи, равной λ. Тогда множество $\mathcal{E}^s_0 = \{g \in \mathcal{M}^s;\ \mathrm{Ric}(g) = 0\}$ риччи-плоских метрик есть часть сингулярного множества для отображения $s(g)$. Тогда из теоремы 7.10 следует, что $\mathcal{M}^s_0 \setminus \mathcal{E}^s_0$ есть гладкое подмногообразие в $\mathcal{M}^s$.

Пусть $\mathcal{FM}^s$ — множество плоских H^s-римановых метрик и $\mathcal{H}^{s-1}$ — множество плоских римановых связностей. Группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}^{s+1}$ естественным образом действует на пространстве $\mathcal{H}^{s-1}$.

Теорема 7.12 (см. [109]). *Пусть* $\Gamma \in \mathcal{H}^{s-1}$, $s > n/2+1$. *Тогда существует диффеоморфизм* $\eta \in \mathcal{D}^{s+1}$ *такой,* $\eta^*\Gamma \in \mathcal{H}$, *т.е.* $\eta^*\Gamma$ *есть гладкая риманова связность. Аналогично, если* $g_F \in \mathcal{FM}^s$, *то существует диффеоморфизм* $\eta \in \mathcal{D}^{s+1}$ *такой,* $\eta^* g_F \in \mathcal{FM}$, *пространству плоских* C^∞*-римановых метрик.*

Теорема 7.13 (см. [109]). *Если* M *допускает плоскую* H^s*-риманову метрику* $g_F \in \mathcal{FM}^s$, $s > n/2+1$, *тогда каждая метрика* $g \in \mathcal{M}^s$ *нулевой кривизны Риччи является плоской.*

Тогда если $\mathcal{FM}^s \neq \emptyset$, то $\mathcal{E}^s_0 = \mathcal{FM}^s$, так что $\mathcal{M}^s_0 - \mathcal{E}^s_0 = \mathcal{M}^s_0 - \mathcal{FM}^s$ есть гладкое подмногообразие в $\mathcal{M}^s$. Пространство $\mathcal{FM}^s$ имеет интересную структуру. Для $\Gamma \in \mathcal{H}^{s-1}$ пусть $I^{s+1}_\Gamma = \{\eta \in \mathcal{D}^{s+1};\ \eta^*\Gamma = \Gamma\}$ — группа аффинных преобразований связности Γ.

Пусть $\mathcal{FM}^s_\Gamma = \{g \in \mathcal{FM}^s;\ \Gamma(g) = \Gamma\}$ — множество плоских римановых метрик, у которых связность Леви-Чивита есть Γ. Как известно, если $g \in \mathcal{M}^s$ и $\eta \in \mathcal{D}^{s+1}$, то для связности $\Gamma(g)$ имеем свойство: $\Gamma(\eta^* g) = \eta^*\Gamma(g)$. Тогда если $\eta \in I^{s+1}_\Gamma$ и $g \in \mathcal{FM}^s_\Gamma$, то $\Gamma(\eta^* g) = \eta^*\Gamma(g) = \eta^*\Gamma = \Gamma$. Поэтому $\eta^* \in \mathcal{FM}^s_\Gamma$. Получаем, что группа I^{s+1}_Γ действует на $\mathcal{FM}^s_\Gamma$, $A : I^{s+1}_\Gamma \times \mathcal{FM}^s_\Gamma \to \mathcal{FM}^s_\Gamma$ и это действие непрерывно.

Для $g \in \mathcal{M}^s$ пусть $I^{s+1}_g = \{\eta \in \mathcal{D}^{s+1};\ \eta^* g = g\}$ — группа изометрий метрики g и пусть I^{s+1}_{0g} — связная компонента единицы. Поскольку M компактно, то $I^{s+1}_{0g} = I^{s+1}_{0\Gamma(g)}$. Тогда $I^{s+1}_{0\Gamma}$ является общей нормальной группой изотропии для всех $g \in \mathcal{FM}^s_\Gamma$. Действие A не эффективно, но если мы возьмем группу $D = I^{s+1}_\Gamma / I^{s+1}_{0\Gamma}$, то получим эффективное действие $\widetilde{A} : D \times \mathcal{FM}^s_\Gamma \to \mathcal{FM}^s_\Gamma$ группы D.

Заметим, что если $g \in \mathcal{FM}^s_\Gamma$, $\eta \in I^{s+1}_\Gamma$ и $\eta \notin I^{s+1}_g$, тогда $\eta^* g \in \mathcal{FM}^s_\Gamma$, но $\eta^* g \neq g$. Получаем, что $\eta^* g$ и g — различные изометричные метрики в $\mathcal{FM}^s_\Gamma$. Тогда $\mathcal{FM}^s_\Gamma$ пересекает орбиту O_g только в одном классе из $I^{s+1}_\Gamma / I^{s+1}_g$.

Теорема 7.14. *Пусть* $\Gamma \in \mathcal{H}^{s-1}$, $s > n/2+1$. *Тогда пространство* $\mathcal{H}^{s-1}$ *плоских римановых* H^{s-1}*-связностей гомеоморфно однородному пространству* $\mathcal{D}^{s+1}/I^{s+1}_\Gamma$. *Для определенного выше действия* $\widetilde{A}$ *ассоциированное однородное расслоение есть*

$$\pi : \mathcal{FM}^s \to \mathcal{H}^{s-1} \approx \mathcal{D}^{s+1}/I^{s+1}_\Gamma,$$

где проекция есть $\pi(g) = \Gamma(g)$ *и слои* $\pi^{-1}(\Gamma) = \mathcal{FM}^s_\Gamma$ *являются конечномерными многообразиями. Таким образом,* $\mathcal{FM}^s$ *есть пространство обнородного расслоения и, кроме того,* $\mathcal{FM}^s$ *есть гладкое замкнутое подмногообразие* $\mathcal{M}^s$.

Замечание (см. [109]). Имеют место следующие взаимно однозначные соответствия

$$\mathcal{FM}^s/\mathcal{D}^{s+1} = \mathcal{FM}^s_\Gamma / I^{s+1}_\Gamma = \mathcal{FM}^s_\Gamma / D.$$

Хотя $\mathcal{FM}^s_\Gamma$ конечномерное многообразие, пространство $\mathcal{FM}^s_\Gamma/D$ не является многообразием, поскольку действие $\widetilde{A} : D \times \mathcal{FM}^s_\Gamma \to \mathcal{FM}^s_\Gamma$ не является свободным. В [242] Вольф явно описал множество $\mathcal{FM}^s_\Gamma/D$ в виде двойного фактора. Например, если Γ — плоская риманова связность на торе T^n, то

$$\mathcal{FM}_\Gamma = O(n) \setminus GL(n, \mathbb{R}), \qquad I_\Gamma = T^n \cdot GL(n, \mathbb{R}),$$

$$D = I_\Gamma / I_{0\Gamma} = GL(n, \mathbb{Z}), \qquad \mathcal{FM}_\Gamma / D = O(n) \setminus GL(n, \mathbb{R}) / GL(n, \mathbb{Z}).$$

В работе [109] найдены касательные пространства к многообразиям $\mathcal{FM}^s$ и $\mathcal{FM}^s_\Gamma$.

Теорема 7.15. *Для* $g \in \mathcal{FM}^s$, $s > n/2+1$ *пусть* $\Gamma(g) = \Gamma$ *— связность Леви-Чивита* g. *Тогда* $T_g\mathcal{FM}^s_\Gamma = \{h \in S^s_2;\ \nabla h = 0\} = S_2^{\|s}$ *– пространство параллельных симметрических 2-форм и* $T_g\mathcal{FM}^s = S_2^{\|s} \oplus \alpha_g(\Gamma^{s+1}(TM))$.

Теорема 7.16 (см. [109]). *Пусть* $g_F \in \mathcal{FM}^s$, $s > n/2+1$. *Тогда существует окрестность* $U_{g_F} \subset \mathcal{M}^s$ *такая, что если* $g \in U_{g_F}$ *и* $s(g) \geqslant 0$, *тогда* g *также является плоской.*

Теорема 7.17 (см. [109]). *Пусть* $s > n/2+1$, $\dim M \geqslant 3$, *и если* $M \geqslant 4$, *предположим что* $\mathcal{FM}^s \neq \emptyset$. *Тогда* $\mathcal{M}^s_0 = (\mathcal{M}^s_0 - \mathcal{FM}^s) \cup \mathcal{FM}^s$ *есть дизьюнктное объединение замкнутых гладких подмногообразий* $\mathcal{M}^s_0 - \mathcal{FM}^s$ *и* $\mathcal{FM}^s$.

Замечание. Если $\dim M = 2$, то $\mathcal{M}^s_0 = \mathcal{FM}^s$ также является гладким подмногообразием.

8. Римановы функционалы

Функционалы на пространстве римановых метрик изучаются давно. Еще Д. Гильберт показал [139], что уравнения общей теории относительности можно получить исходя из действия $g \to A(g) = \int_M s(g)d\mu(g)$, где $s(g)$ — скалярная кривизна. Римановым функционалам посвящена глава 4 книги Бессе [5]. Кроме того, имеется замечательный обзор Д. Блэра [63], в котором эта тема занимает достойное место. Поэтому в данной работе рассмотрим только основы этой теории.

Определение 8.1. Вещественная функция F на пространстве $\mathcal{M}$ называется *римановым функционалом*, если $F(\eta^*g) = F(g)$ для любого диффеоморфизма $\eta \in \mathcal{D}$ и метрики $g \in \mathcal{M}$.

Таким образом, риманов функционал определен на фактор-пространстве $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ классов изометричных метрик.

Определение 8.2. Риманов функционал F называется *дифференцируемым*, если он имеет дифференцируемое продолжение $F : \mathcal{M}^s \to \mathbb{R}$ при любом $s \geqslant r$ для некоторого целого $r \geqslant 0$.

Относительно слабого скалярного произведения (3.9) дифференциалу d_gF соответствует по теореме Рисса вектор $\mathrm{grad}\ F$, лежащий вообще говоря в пространстве $H^0(S_2(M))$ 2-форм класса L_2. Нас будут интересовать те функционалы, для которых вектор $\mathrm{grad}\ F$ будет класса C^∞.

Определение 8.3. Риманов функционал F обладает *градиентом* в точке g, если существует элемент $\mathrm{grad}\ F \in S_2$, такой, что для любого $h \in S_2$ выполняется равенство

$$d_gF(h) = (\mathrm{grad}\ F, h)_g.$$

Если F обладает градиентом в каждой точке, то отображение $g \to \mathrm{grad}\ F_g$ задает векторное поле на $\mathcal{M}$. Риманов функционал принимает постоянное значение на каждой орбите O_g, поэтому его градиент ортогонален орбитам. Тогда из разложения Берже-Эбина следует

Теорема 8.1. *Если риманов функционал* F *обладает градиентом точке* g, *то*

$$\delta_g(\mathrm{grad}\ F_g) = 0.$$

Функционал F на пространстве $\mathcal{M}$ называется *полностью инвариантным*, если $F(\eta^*g) = F(g)$ для любого диффеоморфизма $\eta \in \mathcal{D}$ и метрики $g \in \mathcal{M}$ и $F(\lambda g) = F(g)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и метрики $g \in \mathcal{M}$. Риманово многообразие (M, g) называется *критическим*, если $\mathrm{grad}\ F_g = 0$ для любого гладкого полностью инвариантного функционала $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. В работе Д. Бликера [68] показано, что многообразие (M, g) является критическим тогда и только тогда, когда оно однородное изотропно неприводимое риманово многообразие.

Простейшим римановым функционалом является полный объем $\mathrm{Vol}(M, g)$ риманова многообразия (M, g). В настоящее время известно достаточно много интересных римановых функционалов. Следуя Берже [54], определим следующие функционалы:

$$A(g) = \int\limits_M s(g)d\mu(g), \qquad B(g) = \int\limits_M s(g)^2 d\mu(g),$$

$$C(g) = \int\limits_M |\operatorname{Ric}(g)|^2 d\mu(g), \qquad D(g) = \int\limits_M |R(g)|^2 d\mu(g),$$

где $d\mu(g)$ — риманов элемент объема. Уравнения для критических метрик этих функционалов на пространстве $\mathcal{M}_1$ метрик единичного полного объема получены Берже [54]. Они имеют вид:

$$A_{ij} = c_A g_{ij}, \quad B_{ij} = c_B g_{ij}, \quad C_{ij} = c_C g_{ij}, \quad D_{ij} = c_D g_{ij},$$

где c_A, c_B, c_C, c_D — подходящие константы, а тензоры A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} задаются формулами

$$A_{ij} = -\operatorname{Ric}(g)_{ij} + \frac{1}{2} s g_{ij},$$

$$B_{ij} = 2\nabla_i\nabla_j s - 2\nabla_t\nabla^t s\ g_{ij} - 2s\operatorname{Ric}_{ij} + \frac{1}{2}s^2 g_{ij},$$

$$C_{ij} = \nabla_i\nabla_j s - \nabla_t\nabla^t \operatorname{Ric}_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_t\nabla^t s\ g_{ij} - 2R_{itsj}\operatorname{Ric}^{ts} + \frac{1}{2}\operatorname{Ric}_{ts}\operatorname{Ric}^{ts} g_{ij},$$

$$D_{ij} = 2\nabla_i\nabla_j s - 4\nabla_t\nabla^t \operatorname{Ric}_{ij} + 4\operatorname{Ric}_{it}\operatorname{Ric}^t_j - 4R_{itsj}\operatorname{Ric}^{ts} - 2R_{tsri}R^{tsr}{}_j + \frac{1}{2}R_{tsrq}R^{tsrq}g_{ij}.$$

В этих формулах компоненты тензора кривизны считаются определенными равенством $R_{ijk}{}^l\partial_l = [\nabla_i, \nabla_j]\partial_k$. Константы принимают вполне определенные значения, например $c_A = \frac{n-2}{2n}s$, а константа c_D в уравнении $D_{ij} = c_D g_{ij}$ критических точек функционала D имеет вид

$$c_D = -\frac{2}{n}\nabla_t\nabla^t s + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n}\right) R_{ijkl}R^{ijkl}.$$

Критические метрики, указанных выше функционалов рассматривались в работах [190, 245] для многообразий римановой субмерсии и для многообразий Сасаки.

8.1. Функционал полной скалярной кривизны $A(g) = \int_M s(g)d\mu(g)$**.** Поскольку интеграл является линейным отображением, то для нахождения дифференциала функционала $A(g)$ нужно продифференцировать подынтегральное выражение. Используя уже найденные выражения, $d_g s(h) = \gamma_g(h) = \Delta_g(\operatorname{tr} h) + \delta_g\delta_g h - g(h, \operatorname{Ric}(g))$, $d_g \operatorname{vol}(h) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} H\mu(g) = \frac{1}{2}(h, g)$ и учитывая дивергентный вид первых слагаемых в $d_g s(h)$, получаем для любого $h \in S_2$:

$$d_g A(h) = \int\limits_M g\left(-\operatorname{Ric}(g) + \frac{1}{2}g, h\right) d\mu(g). \tag{8.1}$$

Поэтому риманов функционал $A(g)$ обладает градиентом и $\operatorname{grad}\ A(g) = -\operatorname{Ric}(g) + \frac{1}{2}g$.

Функционал $A(g)$ является однородным степени $n/2 - 1$. Тогда функционал

$$\operatorname{Sc}(g) = \frac{A(g)}{\operatorname{Vol}(M, g)^{(n-2)/n}}$$

является однородным степени 0, или полностью инвариантным.

Обычно функционал $A(g)$ рассматривают на пространстве $\mathcal{M}_1$ метрик одного полного объема, равного единице. Касательное пространство $T_g\mathcal{M}_1$ к многообразию $\mathcal{M}_1$ состоит из всех гладких симметричных 2-форм h с нулевым средним следом: $\int_M \operatorname{tr}_g(h)\ d\mu_g = 0$, L^2-ортогональное дополнение к $T_g\mathcal{M}_1$ в пространстве S_2 состоит из 2-форм, пропорциональных g, $h = cg$, $c \in \mathbb{R}$. Поэтому имеет место

Теорема 8.2. *Пусть M — замкнутое ориентируемое гладкое многообразие и $\mathcal{M}_1$ — пространство метрик одного полного объема, равного единице. Тогда метрика $g \in \mathcal{M}_1$ является критической для функционала $A(g)$ на $\mathcal{M}_1$ тогда и только тогда, когда g — эйнштейнова.*

Эйнштейновым метрикам посвящено энциклопедическое издание А. Бессе [5].

Вопрос о существовании критических точек функционала $A(g)$ достаточно трудный. В размерности 4 имеется (см. напр. [5]) топологическое препятствие к существованию эйнштейновых метрик: $|\sigma(M)| \leqslant \frac{2}{3}\chi(M)$, где σ и χ — сигнатура и эйлерова характеристика соответственно. Вопрос о том, является ли эйншейнова метрика точкой минимума функционала $A(g)$ решается отрицательно. Берже установил [54], что существуют такие эйншейновы метрики g, что функционалы $A(g)$ и $-A(g)$ имеют положительный индекс. Под индексом критической метрики понимается размерность пространства, на котором второй дифференциал $d^2A(g)$ отрицательно определен. Индекс считается положительным, если существует положительное число независимых направлений, на которых $d^2A(g) < 0$. Муто [185] доказал, что что функционалы $A(g)$ и $-A(g)$ имеют положительный индекс в каждой критической точке. Известно, что $\inf_g A(g) = -\infty$ при $n = \dim M \geqslant 3$. Поэтому не существует минимизирующей последовательности. Однако можно использовать минимаксную последовательность. А именно, минимизировать $A(g)$ в конформном классе, а затем максимизировать среди конформных классов. Более подробно об этом см. [45, 246]. При изучении проблемы Ямабе существования метрики постоянной скалярной кривизны в конформном классе, в работах [5, 101, 213] установлены следующие факты.

Теорема 8.3. *Риманова метрика g является критической точкой функционала $A(g)$ на конформном классе $\mathcal{P}g$ тогда и только тогда, когда g имеет постоянную скалярную кривизну.*

Теорема 8.4 (см. [213])**.** *Для данного риманова многообразия (M, g) функционал*

$$\mathrm{Sc}(g) = A(g) / \mathrm{Vol}(M, g)^{(n-2)/n} \tag{8.2}$$

достигает минимума в конформном классе $\mathcal{P}g$.

Из теорем 8.3 и 5.4 следует [5]

Теорема 8.5. *Пусть g — риманова метрика постоянной скалярной кривизны c и такая, что $s(g)/(n-1)$ не является собственным значением оператора Лапласа. Если g является критической точкой функционала $A(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_{1,c}$ метрик постоянной скалярной кривизны c и объема 1, то g — эйнштейнова.*

8.2. Функционал $B(g) = \int_M s(g)^2 d\mu(g)$**.** Данный функционал успешно использовался Калаби [77–79] при изучении экстремальных кэлеровых метрик. Пусть ω — кэлерова форма и $[\omega] \in H^{1,1}(M, \mathbb{R})$ — ее класс когомологий ДеРама. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_{[\omega]}$ кэлеровых метрик, у которых фундаментальная 2-форма принадлежит классу $[\omega]$. Калаби определил экстремальные кэлеровы метрики как критические для функционала $B(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_{[\omega]}$. Использование данного функционала мотивируется тем, что для класса метрик $\mathcal{M}_{[\omega]}$ полный объем $\mathrm{Vol}(M, g)$ и полная скалярная кривизна $A(g)$ являются постоянными. Пдробнее об экстремальных кэлеровых метриках см. §10 и книгу Бессе [5].

Для функционала $B(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_1$ Ким [156] показал, что если $M = B \times_f F$ — компактное скрещенное произведение и g — критическая метрика, тогда либо многообразие является римановым произведением, либо слой F имеет постоянную скалярную кривизну.

8.3. Функционал $D(g)$**.** Он определяется как интеграл от квадрата нормы тензора кривизны $R(g)$,

$$D : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad D(g) = \int\limits_M |R(g)|^2 d\mu(g). \tag{8.3}$$

Функционал $D(g)$ рассматривался в работах Muto [186–190] и в работе Андерсона [45]. В размерности 4 эйнштейновы метрики и конформно плоские метрики с нулевой скалярной кривизной являются критическими для $D(g)$. Из работы [52] (см. также Бессе [5]) вытекает топологическое препятствие для существования таких метрик.

Теорема 8.6. *Пусть M — компактное ориентируемое четырехмерное многообразие. Эйнштейновы метрики дают абсолютный максимум функционала $D(g)$ и этот максимум есть $8\pi^2\chi(M)$. Конформно плоские метрики с нулевой скалярной кривизной дают абсолютный минимум функционала $D(g)$ и этот минимум есть $-8\pi^2\chi(M)$.*

В обратном направлении получен следующий результат [166].

Теорема 8.7. *Пусть (M, g) — компактное ориентируемое четырехмерное риманово многообразие. Если g является критической для функционала $D(g)$ и имеет неположительную секционную кривизну, то g — эйнштейнова.*

В работе [187] Муто показал, что если (M, g, J)– компактное кэлерово многообразие постоянной положительной голоморфной секционной кривизны, то g является критической для функционала $D(g)$. В этой же работе показано, что каноническая инвариантная метрика на компактной полупростой группе Ли является критической для функционала $D(g)$. Для многообразий, диффеоморфных сфере получен [186, 189] следующий результат.

Теорема 8.8. *Пусть M — многообразие, диффеоморфное сфере S^n. Тогда функционал $D(g)$ имеет локальный минимум в метриках постоянной положительной кривизны.*

Для прямого произведения многообразий $(M, g) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ Muto [188] показал, что g является критической для функционала $D(g)$ на M тогда и только тогда, когда g_1 и g_2 гомотетичны метрикам, которые являются критическими для функционала $D(g)$ на M_1 и M_2 и поточечные нормы тезоров кривизны удовлетворяют соотношению $|R_1|^2/n_1 = |R_2|^2/n_2$, где n_1 и n_2 — размерности многообразий M_1 и M_2.

В работе [189] Муто отмечает следующий факт. Пусть M диффеоморфно произведению сфер $S^n \times S^m$. Рассмотрим риманову метрику $g_{12} \in \mathcal{M}_1$ такую, что $(M, g_{12}) = (S^n, g_1) \times (S^m, g_2)$, где g_1 и g_2 — метрики постоянной положительной скалярной кривизны, равной s_1 и s_2 соответственно. Тогда метрика g_{12} является критической метрикой функционала $D(g)$ тогда и только тогда, когда $s_1^2/n^2(n-1) = s_2^2/m^2(m-1)$. Однако эта метрика g_{12} не дает локальнуй минимум функционала $D(g)$ если $n > 2$ и $m > 2$.

В работах [188, 189] Муто приводит интересное замечание относительно нижней границы значений функционала $D(g)$. Пусть M есть произведение сферы S^n, $n \geqslant 2$ и тора T^m, $m \geqslant 1$ с метрикой g_1 постоянной кривизны на сфере S^n и плоской метрикой g_2 на торе T^m. Если $(M, g) = (S^n, \alpha^2 g_1) \times (T^m, \beta^2 g_2)$ и если $\alpha^n \beta^m = 1$, тогда $g \in \mathcal{M}_1$. Муто показал, что $D(g) = \alpha^{-4} D(g_1 \times g_2)$. Из этого выражения следует, поскольку α может принимать произвольные значения, что $\inf D(g) = 0$, хотя $S^n \times T^m$ не допускает плоской метрики.

8.4. Функционал $D_W(g)$.

Он определяется как интеграл от квадрата нормы тензора Вейля $W(g)$,

$$D_W : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad C(g) = \int\limits_M |W(g)|^2 d\mu(g). \tag{8.4}$$

Напомним, что на четырехмерном римановом многообразии оператор Ходжа $*$ действует на 2-формах как инволюция. Соответствующее разложение $\Lambda^2(M)$ на ± 1-собственные подпространства индуцирует разложение тензора кривизны Вейля W на две компоненты $W = W^+ + W^-$. Метрика является *конформно полуплоской*, если W^+ или W^- есть нуль. Критическими точками функционала $D_W(g)$ являются метрики, конформные эйнштейновым метрикам и конформно полуплоские метрики (при условии, что M ориентируемо). При этом, конформно полуплоские метрики реализуют абсолютный минимум функционала $D_W(g)$, равный $12\pi^2|\tau|$, где τ – сигнатура четырехмерного многообразия M. Дополнительную информацию о свойствах этого функционала можно найти в книге А. Бессе [5] (глава 4).

В работе [159] О. Кобаяси изучал следующий функционал

$$\nu(g) = (2/n) \int\limits_M |W|^{n/2} d\mu_g, \tag{8.5}$$

инвариантный также относительно конформных преобразований. Если $\dim M \leqslant 3$, то $\nu(g) = 0$. В размерности 4 имеем, $\nu(g) = D_W(g)/2$. Если $\dim M = n \geqslant 4$, то $\sup_g \nu(g) = +\infty$. В четырехмерном случае найдены первая и вторая вариации функционала $\nu(g)$. О. Кобаяси [159] получил оценки снизу для $\nu(g)$ через первое число Понтрягина $p_1[M]$, сигнатуру τ и эйлерову характеристику χ многообразия M.

Теорема 8.9. *Если $\dim M = 4$, то $|p_1[M]| \leqslant \nu(g)/8\pi^2$ для всех $g \in \mathcal{M}$. Если, дополнительно, M ориентировано, то $|\tau| \leqslant \nu(g)/24\pi^2$ для всех $g \in \mathcal{M}$. Равенства имеют место только в том случае, когда g является конформно полуплоской.*

Теорема 8.10. *Если* $\dim M = 4$ *и* $g \in \mathcal{M}$ *есть кэлерова метрика. Тогда* $\nu(g) \geqslant 24\pi^2|\tau| + \frac{16}{3}\pi^2 \min\{2\chi - 6\tau, 2\chi + 3\tau\}$. *Равенства имеют место только в том случае, когда* g *является кэлеровой эйнштейновой метрикой.*

В работе [159] рассматривался также вопрос о стабильности критических точек функционала $\nu(g)$ на произведении сфер $S^2 \times S^2$.

Функционал $\nu(g)$ позволяет определить следующий инвариант римановых многообразий:

$$\nu(M) := \inf\{\nu(g);\ g \in \mathcal{M}\}. \tag{8.6}$$

В работе [159] показано, что если на M свободно действует S^1, то $\nu(M) = 0$. Если M_1 и M_2 — многообразия одной размерности, $\nu(M_1 \sharp M_2) \leqslant \nu(M_1) + \nu(M_2)$.

Если многообразие M допускает конформно плоскую метрику, то очевидно, $\nu(M) = 0$. Обратное не верно. Действительно, многообразие $M = S^n \times T^m$ допускает свободное действие S^1, поэтому $\nu(M) = 0$. В то же время известно, что это многообразие не имеет конформно плоских метрик [164]. В работе [159] установлен следующий результат

Теорема 8.11. *Пусть* M *— компактное четырехмерное многообразие.*

(i) *Если* M *допускает эйнштейнову метрику, то* $\nu(M) \leqslant 16\pi^2\chi$.

(ii) *Если* M *допускает эйнштейнову метрику неотрицательной секционной кривизны, то* $\nu(M) \leqslant (64/5)\pi^2\chi$.

8.5. Другие римановы функционалы. Достаточно широкий класс образуют римановы функционалы вида

$$I(g) = \int\limits_M f(g)d\mu_g, \tag{8.7}$$

где f есть скалярное поле на M, которое локально выражается в виде гладкой функции от компонент g_{ij} метрического тензора g и производных от g_{ij} некоторого конечного порядка. В работе [187] Муто установил общий признак для критических метрик функционала (8.6). Он нашел тензор T, такой, что условие критичности метрики g выражается в пропорциональности тензора T метрике g. В работе Патерсона Е. [204] получены явные выражения для тензора T в случае, когда $f(g)$ является подынтегральным выражением в формуле Гаусса-Бонне. Напомним, что теорема Гаусса-Бонне [9] утверждает, что

$$\int\limits_M G_m d\mu_g = \frac{(-1)^m 2^{2m}\pi^m m!}{(2m)!}\chi(M), \tag{8.8}$$

где $n = 2m$ — размерность многообразия, $\chi(M)$ — эйлерова характеристика и подынтегральное выражение локально имеет вид

$$G_m = \delta^{j_1 j_2 \dots j_{2m}}_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} R^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2} \dots R^{i_{2m-1} i_{2m}}{}_{j_{2m-1} j_{2m}}, \tag{8.9}$$

где $\delta^{j_1 j_2 \dots j_{2m}}_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} = \det(\delta^{j_\beta}_{i_\alpha})$ — обобщенный символ Кронекера. В частности, $G_1 = -2s(g)$, $G_2 = 4(s^2 - 4|\operatorname{Ric}|^2 + |R|^2)$.

Определим тензорное поле G_m не только для $m = n/2$, но и для любого $m \leqslant n/2$ формулой (8.9) ($G_m = 0$ для $m > n/2$). В этом случае

$$I(g) = \int\limits_M \phi(G_m)d\mu_g, \tag{8.10}$$

где ϕ – гладкая функция, является римановым функционалом. Такие функционалы рассматривались в работах [54, 174, 204].

Положим

$$S^{jk}_{hi} = \delta^{jk j_3 \dots j_{2m}}_{hi i_3 \dots i_{2m}} R^{i_3 i_4}{}_{j_3 j_4} \dots R^{i_{2m-1} i_{2m}}{}_{j_{2m-1} j_{2m}}, \quad m > 1, \qquad S^{jk}_{hi} = \delta^{jk}_{hi}, \quad m = 1, \tag{8.11}$$

$$E^j_i = \delta^{j j_1 \dots j_{2m}}_{i i_1 \dots i_{2m}} R^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2} \dots R^{i_{2m-1} i_{2m}}{}_{j_{2m-1} j_{2m}}, \qquad S^{jk}_{hi} = \delta^{jk}_{hi}, \tag{8.12}$$

Теорема 8.12 (см. [204]). *Метрика g является критической для функционала $I(g) = \int_M \phi(G_m)d\mu_g$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2}\phi(G_m)g_{ij} + \frac{1}{2}\phi'(G_m)(E_{ij} - G_m g_{ij}) + 2m(\nabla^b\nabla_d\phi'(G_m))S_{ib}^{cd}g_{cj} = cg_{ij}$$

для некоторой константы c.

Теорема 8.13 (см. [204]). *Метрика g является критической для функционала $I(g) = \int_M G_m d\mu_g$ тогда и только тогда, когда $E_{ij} = cg_{ij}$ для некоторой константы c. Кроме того, если $m < n/2$, то G_m является константой на M.*

В работе [204] рассмотрены также более общие подынтегральные выражения и предложено понятие обобщенной метрики Эйнштейна.

В работе [49] рассмотрен функционал, который равен сумме функционалов полной скалярной кривизны и полной средней кривизны для компактного многообразия с границей,

$$F(g) = \frac{n-1}{4(n-1)}\int\limits_M s(g)d\mu_g + \frac{n-2}{2}\int\limits_{\partial M} hd\sigma. \tag{8.13}$$

Такой функционал рассматривался в работах [102–104] в связи с обобщениями проблемы Ямабе для многообразий с границей. В работе [49] изучались критические точки функционала (8.12) на множестве метрик $\mathcal{M}_{a,b} = \{g : a\,\mathrm{Vol}(M,g) + b\,\mathrm{Area}(\partial M, g) = 1\}$.

Теорема 8.14 (см. [49]). *Метрика g является критической для функционала $F(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_{a,b}$ тогда и только тогда, когда g является эйнштейновой с омбилической границей постоянной средней кривизны, при этом скалярная кривизна s и средняя кривизна h удовлетворяют соотношению $bs = 2nah$.*

Пусть $\Delta_g(u) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(u))$ — оператор Лапласа—Бельтрами. Положим

$$L_g u = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + s(g)u. \tag{8.14}$$

Пусть $\lambda_1(g)$ — первое собственное значение оператора L_g, $g \in \mathcal{M}$. Свойства функционала $\lambda_1(g)$ исследовались в работах Каждана и Уорнера [148, 150]. В частности, в работе [150] получены следующие результаты.

Теорема 8.15. *Пусть M — компактное связное многообразие размерности $n \geqslant 3$. Тогда*

1) *Критические точки функционала $\lambda_1(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_1$ являются метриками Эйнштейна.*
2) *Знак $\lambda_1(g)$ является конформным инвариантом.*
3) *На M можно ввести метрику с положительной (соответственно с нулевой, отрицательной) скалярной кривизной, поточечно конформную метрике g, тогда и только тогда, когда $\lambda_1(g) > 0$ (соответственно $\lambda_1(g) = 0$, $\lambda_1(g) < 0$).*
4) *Для введения на M метрики с $\lambda_1(g) > 0$ и $\lambda_1(g) = 0$ существуют топологические препятствия.*
5) *На любом многообразии M можно ввести метрику g с $\lambda_1(g) < 0$.*
6) *Если M допускает метрику g_+ с $\lambda_1(g_+) > 0$, то оно допускает метрику g с $\lambda_1(g) = 0$.*

Другие собственные числа оператора Лапласа также являются римановыми функционалами. Спектр оператора Лапласа Δ_g определяет многие геометрические свойства риманова многообразия (M, g). Однако существуют изоспектральные, но не изометричные многообразия. В работе [180] Милнор построил два неизометричных тора размерности 16 с одним и тем же спектром (относительно примера Милнора см. также [177] и [33, с. 171]). По теме спектральной геометрии имеется обширная литература. Отметим некоторые из работ данного направления: [53, 55, 127, 130, 177, 180, 182].

9. ПРОСТРАНСТВА АССОЦИИРОВАННЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

9.1. Пространства ассоциированных метрик и почти комплексных структур. Если на многообразии M задана почти комплексная структура J, то метрику на M естественно взять эрмитовой. Хорошо известно [9], что J-эрмитовы метрики существуют, но определяются не единственным образом. Задача состоит в том, чтобы с каждой п.к.с. J связать одну и единственную эрмитову метрику. В случае римановых поверхностей комплексная структура определяет класс конформно эквивалентных метрик, выбор метрики в этом классе проводится требованием постоянства кривизны. В случае симплектического многообразия любой размерности имеется способ однозначного выбора эрмитовой метрики g для почти комлексной структуры J.

Пусть (M^{2n},ω) — симплектическое многообразие.

Определение 9.1. Почти комплексная структура J на M называется *положительной ассоциированной* с симплектической формой ω, если для любых векторных полей X, Y на M выполняются условия:

1) $\omega(JX,JY)=\omega(X,Y)$,
2) $\omega(X,JX)>0$, если $X\neq 0$.

Каждая положительная ассоциированная п.к.с. J определяет риманову метрику g на M равенством

$$g(X,Y)=\omega(X,JY), \tag{9.1}$$

которая также называется *ассоциированной*. Отметим очевидные свойства такой метрики, $g(JX,JY)=g(X,Y)$, $g(JX,Y)=\omega(X,Y)$.

Замечание. Иногда ассоциированную почти комплексную структуру J называют *калибрующей* 2-форму ω (an exterior 2-form ω on X is called J-calibrated if $\omega(JX,JY)=\omega(X,Y)$ and $\omega(X,JX)>0$ for $X\neq 0$ [133]). Почти комплексную структуру J, удовлетворяющую условию положительности, $\omega(X,JX)>0$, если $X\neq 0$, называют также *подчиненной* форме ω (we say that an exterior 2-form ω on M tames an almost-complex structure J if $\omega(X,JX)>0$ for $X\neq 0$ [133]). Наша терминология является более традиционной. Она также соответствует терминологии, используемой в случае контактных многообразий [57, 64].

В этом параграфе мы будем рассматривать следующие пространства:

$\mathcal{A}$ — пространство всех гладких почти комплексных структур на M;

$\mathcal{A}_\omega$ — пространство всех гладких положительных ассоциированных почти комплексных структур на симплектическом многообразии (M,ω);

$\mathcal{AM}$ — пространство всех гладких ассоциированных метрик на симплектическом многообразии (M,ω). Ясно, что $\mathcal{AM}$ является пространством всех гладких почти келеровых метрик на симплектическом многообразии, фундаментальная форма которых совпадает с ω.

Данные пространства $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\omega$ и $\mathcal{AM}$ являются пространствами гладких сечений расслоений над M. Поэтому [1, 203] они являются бесконечномерными гладкими ILH-многообразиями.

Пусть $J\in\mathcal{A}$ — почти комплексная структура на M. Касательное пространство $T_J\mathcal{A}$ состоит из гладких (полей) эндоморфизмов $K:TM\to TM$, антикоммутирующих с J:

$$T_J\mathcal{A}=\mathrm{End}_J(TM)=\{K:TM\to TM;\ JK+KJ=0\}.$$

Касательное пространство $T_J\mathcal{A}_\omega$ состоит из симметрических эндоморфизмов P, антикоммутирующих с J

$$T_J\mathcal{A}_\omega=\mathrm{End}_{SJ}(TM)=\{P\in\mathrm{End}(TM);\ PJ=-JP,\ g(PX,Y)=g(X,PY)\}. \tag{9.2}$$

Касательное пространство $T_g\mathcal{AM}$ к многообразию $\mathcal{AM}$ в точке g состоит из антиэрмитовых симметричных 2-форм на M,

$$T_g\mathcal{AM}=\{h\in S_2;\ h(JX,JY)=-h(X,Y),\ \forall X,Y\in\Gamma(TM)\}. \tag{9.3}$$

Обозначим символами S_{2A} и S_{2H} пространства антиэрмитовых и, соответственно, эрмитовых симметричных 2-форм на M. Имеет место естественное (поточечное) разложение

$$S_2=S_{2A}\oplus S_{2H},, \tag{9.4}$$

ортогональное относительно L^2-скалярного произведения в S_2. Тогда, $T_g\mathcal{AM} = S_{2A}$.

Соответствие (9.1) между положительными ассоциированными почти комплексными структурами и ассоциированными метриками определяет диффеоморфизм

$$\mathrm{G} : \mathcal{A}_\omega \to \mathcal{AM}, \quad J \to \mathrm{G}(J) = g, \quad g(X,Y) = \omega(X, JY); \tag{9.5}$$

В координатах,

$$g_{ij} = (\mathrm{G}(J))_{ij} = \omega_{ik} J^k_j.$$

Обратное соотношение:

$$g \to J, \quad J^i_j = \omega^{ik} g_{kj}.$$

Легко видеть, что отображение G эквивариантно относительно действия группы $\mathcal{D}_\omega$ симплектических диффеоморфизмов. Дифференциал диффеоморфизма G имеет вид:

$$\begin{gathered} d_J\mathrm{G} : T_J\mathcal{A}_\omega \to T_g\mathcal{AM}, \quad P \to h = \omega P, \\ h(X,Y) = \omega(X, PY) = g(X, PJY). \end{gathered} \tag{9.6}$$

9.2. Параметризация пространств $\mathcal{A}_\omega$ и $\mathcal{AM}$. Как уже отмечалось, пространства $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\omega$ и $\mathcal{AM}$ являются гладкими ILH-многообразиями. Поэтому на них можно ввести локальные карты обычным образом [1]. Данные пространства допускают более естественную параметризацию с использованием операторной экспоненты и преобразования Кэли.

Пусть J_0 — некоторая фиксированная почти комплексная структура. Как показано выше, касательное пространство $T_{J_0}\mathcal{A}$ состоит из эндоморфизмов $K : TM \to TM$, антикоммутирующих с п.к.с. J_0, $KJ_0 = -J_0K$. Поэтому для операторной экспоненты e^K имеем $J_0e^K = e^{-K}J_0$. Отсюда сразу следует, что оператор $J = J_0e^K$ является почти комплексной структурой. Получаем следующую параметризацию пространства $\mathcal{A}$ в окрестности элемента J_0 эндоморфизмами K, антикоммутирующими с J_0:

$$E : \mathrm{End}_{J_0}(TM) \longrightarrow \mathcal{A}, \quad K \mapsto J = J_0e^K.$$

В теории матриц вместо трансцендентной зависимости $w = e^{iz}$ иногда принято использовать рациональную: $w = \frac{1+iz}{1-iz}$, $z = i\frac{1-w}{1+w}$. Применим это преобразование к оператору K, обладающему свойством $KJ_0 = -J_0K$, получим

$$J = J_0(1+K)(1-K)^{-1} = (1-K)(1+K)^{-1}J_0. \tag{9.7}$$

Очевидно, что J является почти комплексной структурой. В указанном выражении необходимо предполагать невырожденность оператора $1-K$. Ясно, что множество таких полей эндоморфизмов является открытым множеством в пространстве $\mathrm{End}_{J_0}(TM)$ всех эндоморфизмов $K : TM \to TM$, антикоммутирующих с J_0. Обозначим это множество символом $\mathcal{V}(J_0)$,

$$\mathcal{V}(J_0) = \{K \in \mathrm{End}(TM); \quad KJ_0 = -J_0K, \quad 1-K \text{ — изоморфизм } \}.$$

Предложение 9.1 (см. [27]). *Соотношения*

$$J = J_0(1+K)(1-K)^{-1}, \quad K = (1-JJ_0)^{-1}(1+JJ_0), \tag{9.8}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством полей эндоморфизмов $K : TM \to TM$, антикоммутирующих с п.к.с. J_0 и таких, что $1-K$ является обратимым и множеством почти комплексных структур J на M для которых эндоморфизм $1-JJ_0$ является изоморфизмом.

Множество

$$\mathcal{U}(J_0) = \{J \in \mathcal{A};\ 1-JJ_0 - \text{ изоморфизм } TM\} \tag{9.9}$$

является открытым множеством в пространстве $\mathcal{A}$. Поэтому отображение

$$\Phi : \mathcal{U}(J_0) \longrightarrow \mathcal{V}(J_0), \qquad J \mapsto K = (1-JJ_0)^{-1}(1+JJ_0), \tag{9.10}$$

задает локальную карту в окрестности элемента J_0. Если $K = \Phi(J)$, то очевидно $J = J_0(1+K)(1-K)^{-1}$.

Параметризация пространства $\mathcal{A}_\omega$ положительных ассоциированных почти комплексных структур определяется аналогично. Элемент $J \in \mathcal{A}_\omega$ обладает двумя свойствами: $\omega(JX, JY) = \omega(X,Y)$, и $\omega(X, JX) > 0$, если $X \neq 0$. Первое свойство обеспечивает симметричность касательного элемента $K \in T_J\mathcal{A}_\omega$, а второе свойство положительности выделяет открытое множество в пространстве $\mathcal{A}$ всех почти комплексных структур. Введем для этого множества обозначение:

$$\mathcal{U} = \{J \in \mathcal{A};\ \omega(X, JX) > 0, \quad \text{если } X \neq 0\}. \tag{9.11}$$

Несложный анализ показывает, что если J и J_0 — положительные почти комплексные структуры, то обе они принадлежат введенной ранее координатной окрестности $\mathcal{U}(J_0) = \{J \in \mathcal{A};\ 1 - JJ_0 -$ изоморфизм $TM\}$.

Элементы пространства $\mathcal{A}_\omega$ характеризуются следующим образом.

Предложение 9.2 (см. [27]). *Пусть J_0 — положительная ассоциированная почти комплексная структура и g_0 — соответствующая J_0 ассоциированная метрика. Почти комплексная структура J является положительной ассоциированной тогда и только тогда, когда она представляется в виде $J = J_0(1 + P)(1 - P)^{-1}$, где эндоморфизм $P : TM \to TM$ обладает свойствами:*

1) *$PJ_0 = -J_0P$,*
2) *P симметричен относительно g_0,*
3) *$1 - P^2$ положителен относительно g_0.*

Условие положительности $1-P^2 > 0$ выделяет в пространстве $\mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$ открытое множество $\mathcal{P}_{J_0}$:

$$\mathcal{P}_{J_0} = \{P \in \mathrm{End}_{SJ_0}(TM) : 1 - P^2 > 0\}. \tag{9.12}$$

Из предложения 9.2 следует, что отображение

$$\Psi : \mathcal{P}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{A}_\omega, \quad P \mapsto J = J_0(1 + P)(1 - P)^{-1} \tag{9.13}$$

задает глобальную параметризацию пространства $\mathcal{A}_\omega$ положительных ассоциированных почти комплексных структур. Еще одну параметризацию пространства $\mathcal{A}_\omega$ задает отображение

$$E_S : \mathrm{End}_{SJ_0}(TM) \longrightarrow \mathcal{A}_\omega, \quad P \mapsto J = J_0e^P. \tag{9.14}$$

Подмногообразие, трансверсальное к $\mathcal{A}_\omega$ определяется отображением

$$E_A : \mathrm{End}_{AJ_0}(TM) \longrightarrow \mathcal{A}, \quad L \mapsto J = J_0e^L,$$

где эндоморфизм L кососимметричен и антикоммутирует с J_0. Ясно, что e^L является ортогональным преобразованием, антикоммутирующим с J_0. Поэтому, подмногообразие, трансверсальное к $\mathcal{A}_\omega$ в окрестности элемента J_0 образуют почти комплексные структуры J вида $J = J_0O$, где O — ортогональное преобразование, антикоммутирующее с J_0.

Параметризация пространства ассоциированных метрик получается из естественного диффеоморфизма $\mathrm{G} : \mathcal{A}_\omega \to \mathcal{AM}$, Поскольку $J = J_0(1 + P)(1 - P)^{-1}$, то $g(X,Y) = \omega(X, JY) = g_0(X, (1 + P)(1 - P)^{-1}Y)$. Тогда глобальная параметризация пространства $\mathcal{AM}$ имеет вид:

$$\begin{gathered}\Psi_{AM} : \mathcal{P}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{AM}, \quad P \to g = g_0(1 + P)(1 - P)^{-1}, \\ g(X, Y) = g_0(X, (1 + P)(1 - P)^{-1}Y).\end{gathered} \tag{9.15}$$

Другую параметризацию пространства $\mathcal{AM}$ задает отображение

$$E_{AM} : \mathrm{End}_{SJ_0}(TM) \longrightarrow \mathcal{AM}, \quad P \mapsto g = g_0e^P. \tag{9.16}$$

Поскольку $\mathcal{P}_{J_0}$ — область в пространстве $\mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$, то $T_P\mathcal{P}_{J_0} = \mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$. Поэтому дифференциал $d_P\Psi_{AM}$ в точке P является отображением $d_P\Psi_{AM} : \mathrm{End}_{SJ_0}(TM) \to T_g\mathcal{AM}$ и выражается формулой

$$d_P\Psi_{AM}(A) = h_A = g_0\left(A(1 - P)^{-1} + (1 + P)(1 - P)^{-1}A(1 - P)^{-1}\right). \tag{9.17}$$

Из последнего выражения получаем также

$$h_A = 2g(1 - P)(1 - P^2)^{-1}A(1 - P)^{-1}. \tag{9.18}$$

В случае почти комплексной структуры $J_t = J_0(1+P_t)(1-P_t)^{-1}$ аналогично получаем для оператора $K_A = (J_t)'_{t=0}$:

$$K_A = 2J(1-P)(1-P^2)^{-1}A(1-P)^{-1}. \tag{9.19}$$

9.3. Комплексная структура пространства $\mathcal{AM}$. Касательное пространство $T_g\mathcal{AM}$ в точке $g \in \mathcal{AM}$ состоит из всех симметричных J-антиэрмитовых 2-форм h на M, где J — почти комплексная структура, соответствующая метрике g. Поскольку форма h антиэрмитова, т.е. $h(JX, JY) = -h(X,Y)$, то 2-форма hJ, определенная равенством $(hJ)(X,Y) = h(X, JY)$, также является симметричной и антиэрмитовой. Поэтому на каждом касательном пространстве $T_g\mathcal{AM}$ действует оператор

$$\mathbf{J}_g : T_g\mathcal{AM} \longrightarrow T_g\mathcal{AM}, \quad \mathbf{J}_g(h) = hJ. \tag{9.20}$$

Очевидно, что $\mathbf{J}_g^2 = -1$. Следовательно, на многообразии $\mathcal{AM}$ определена почти комплексная структура $\mathbf{J}$. С другой стороны, модельное пространство $\mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$ глобальной параметризации Ψ_{AM} имеет комплексную структуру: $\mathrm{End}_{SJ_0}(TM) \to \mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$, $A \mapsto AJ_0$. Поэтому пространство $\mathcal{AM}$ является бесконечномерным комплексным многообразием.

Теорема 9.3. *Почти комплексная структура* $\mathbf{J}$ *на многообразии* $\mathcal{AM}$ *интегрируема. Соответствующая комплексная структура и совпадает с комплексной структурой на* $\mathcal{AM}$, *получаемой при параметризации* $\Psi_{AM} : \mathcal{P}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{AM}$.

Действительно,

$$\begin{gathered} d_P\Psi_{AM}(A) = h_A = 2g(1-P)(1-P^2)^{-1}A(1-P)^{-1}, \\ A \mapsto h_A \mapsto h_AJ = 2g(1-P)(1-P^2)^{-1}A(1-P)^{-1}(1-P)J_0(1-P)^{-1} = \\ = 2g(1-P)(1-P^2)^{-1}AJ_0(1-P)^{-1} \mapsto AJ_0. \end{gathered}$$

Слабая риманова структура $(a,b)_g$ на $\mathcal{AM}$ является эрмитовой относительно комплексной структуры $\mathbf{J}$. Фундаментальная форма эрмитовой слабой римановой структуры

$$\Omega_g(a,b) = (aJ, b)_g = \int\limits_M \mathrm{tr}(AJB)d\mu. \tag{9.21}$$

является замкнутой [224] невырожденной кососимметрической 2-формой на $\mathcal{AM}$. Поэтому многообразие $\mathcal{AM}$ вляется кэлеровым.

9.4. Локальные выражения. Уравнение Бельтрами. Пусть J_0 — положительная ассоциированная почти комплексная структура и g_0 — соответствующая ассоциированная метрика. Почти комплексная структура J_0 определяет разложение $TM^C = T^{10}(J_0) \oplus T^{01}(J_0)$ комплексификации TM^C касательного расслоения TM, на подрасслоения $T^{10}(J_0)$ и $T^{01}(J_0)$, на которых комплексифицированный оператор J_0 действует как умножение на i и $-i$ соответственно.

Пусть $\partial_1, \ldots, \partial_n$ — локальный базис сечений расслоения $T^{10}(J_0)$, $dz^1, \ldots, dz^n$ — дуальный базис расслоения $T^{*10}(J_0)$ и $\overline{\partial}_1, \ldots, \overline{\partial}_n$ — комплексно сопряженный базис сечений расслоения $T^{01}(J_0)$, $d\overline{z}^1, \ldots, d\overline{z}^n$ — дуальный базис $T^{*01}(J_0)$.

Из J_0-эрмитовости метрики g_0 следует, что

$$g_{\alpha\beta} = g_0(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0, \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = g_0(\overline{\partial}_\alpha, \overline{\partial}_\beta) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n.$$

Остальные компоненты метрического тензора,

$$g_{\alpha\overline{\beta}} = g_0(\partial_\alpha, \overline{\partial}_\beta), \quad g_{\overline{\alpha}\beta} = g_0(\overline{\partial}_\alpha, \partial_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n,$$

обладают свойствами

$$g_{\alpha\overline{\beta}} = g_{\overline{\beta}\alpha}, \quad g_{\alpha\overline{\beta}} = \overline{g_{\beta\overline{\alpha}}},$$

которые вытекают из симметричности и эрмитовости метрики g_0. Тогда $g_0 = 2g_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha d\overline{z}^\beta$.

Пусть теперь J — другая положительная ассоциированная почти комплексная структура. Тогда $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$, где $P : TM \to TM$ симметричный эндоморфизм, антикоммутирующий с J_0, удовлетворяющий условию положительности $1 - P^2 > 0$.

Поскольку $J_0(P(\partial_\alpha)) = -PJ_0(\partial_\alpha) = -P(i\partial_\alpha) = -iP(\partial_\alpha)$, то $P(\partial_\alpha)$ является локальным сечением расслоения $T^{01}(J_0)$, поэтому $P(\partial_\alpha) = P_\alpha^{\overline{\beta}}\ \overline{\partial}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n$, где $P_\alpha^{\overline{\beta}}$ – матрица комплекснозначных функций. Таким образом, оператор P в комплексном базисе локально задается матрицей вида:

$$P = \left(\begin{array}{cc} 0 & P_{\overline{\alpha}}^{\beta} \\ P_\alpha^{\overline{\beta}} & 0 \end{array} \right), \quad P_{\overline{\alpha}}^{\beta} = \overline{P_\alpha^{\overline{\beta}}}. \tag{9.22}$$

Условие симметричности оператора P выражается соотношением $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$, где $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\overline{\gamma}}\ P_\beta^{\overline{\gamma}}$. Инвариантная запись оператора P:

$$P = P_\alpha^{\overline{\beta}}\ \overline{\partial}_\beta \otimes dz^\alpha + P_{\overline{\alpha}}^{\beta}\ \partial_\beta \otimes d\overline{z}^\alpha. \tag{9.23}$$

В классическом уравнении Бельтрами [90] $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \mu \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ коэффициент μ имеет геометрический смысл тензорного поля на римановой поверхности M вида: $\mu = \mu \frac{\partial}{\partial z} \otimes d\overline{z}$. Инвариантная запись (9.23) оператора P имеет точно такой же смысл. Поэтому многомерное обобщение уравнения Бельтрами имеет следующий вид:

$$\overline{\partial}_\alpha(J)(f) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}^\alpha} - P_{\overline{\alpha}}^{\beta}\ \frac{\partial f}{\partial z^\beta} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{9.24}$$

где f — функция на M.

Положительнвая ассоциированная почти комплексная структура $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$ определяет другое разложение комплексификации TM^C, $TM^C = T^{10}(J) \oplus T^{01}(J)$. Зависимость этого разложения от J становится ясной, если использовать оператор P.

Предложение 9.4. *Если* $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$, *то*

$$T^{10}(J) = (1-P)(T^{10}(J_0)), \quad T^{01}(J) = (1-P)(T^{01}(J_0)). \tag{9.25}$$

Векторные поля

$$\partial_\alpha(J) = \partial_\alpha - P_\alpha^{\overline{\beta}}\ \overline{\partial}_\beta, \quad \overline{\partial}_\alpha(J) = \overline{\partial}_\alpha - P_{\overline{\alpha}}^{\beta}\ \partial_\beta \tag{9.26}$$

образуют локальные базисы сечений расслоений $T^{10}(J)$ *и* $T^{01}(J)$ *соответственно.*

Следствие 9.5. *Дуальные базисы форм* $dz_1(J), \ldots, dz_n(J)$ *и* $d\overline{z}_1(J), \ldots, d\overline{z}_n(J)$ *для базисов векторных полей* $\partial_1(J), \ldots, \partial_n(J)$ *и* $\overline{\partial}_1(J), \ldots, \overline{\partial}_n(J)$ *имеют следующие выражения:*

$$dz^\alpha(J) = D_\gamma^\alpha \left(dz^\gamma + P_{\overline{\beta}}^{\alpha}\ d\overline{z}^\beta \right), \quad d\overline{z}^\alpha(J) = D_{\overline{\gamma}}^{\overline{\alpha}} \left(d\overline{z}^\gamma + P_\beta^{\overline{\alpha}}\ dz^\beta \right), \tag{9.27}$$

где D_γ^α *— матрица оператора* $D = (1-P^2)^{-1} : T^{10}(J_0) \ \longrightarrow T^{01}(J_0)$.

Предположим, для простоты что п.к.с. J_0 интегрируема и $z^1, \ldots, z^n$ — соответствующие комплексные локальные координаты на M. Пусть в этих координатах эрмитова форма, соответствующая римановой структуре g_0 имеет вид $g_0 = 2g_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha d\overline{z}^\beta$. Тогда из (9.27) получаем следующее локальное выражение для эрмитовой формы ассоциированной метрики g:

$$g = 2g_{\alpha\overline{\beta}}\ D_{\overline{\gamma}}^{\overline{\beta}} \left(dz^\alpha + P_{\overline{\sigma}}^{\overline{\alpha}}\ d\overline{z}^\sigma \right) \left(d\overline{z}^\gamma + P_\nu^{\overline{\gamma}}\ dz^\nu \right). \tag{9.28}$$

9.5. Кривизна пространства ассоциированных метрик. Многообразие $\mathcal{AM}$, является гладким ILH-подмногообразием в $\mathcal{M}$ [93] и наследует слабую риманову структуру. Если $a, b \in T_g\mathcal{AM}$ — две гладкие симметричные 2-формы на M, представляющие элементы касательного пространства $T_g\mathcal{AM}$, то

$$(a, b)_g = \int\limits_M \operatorname{tr} AB\ d\mu, \tag{9.29}$$

где $A = g^{-1}a = g^{ik}a_{kj}$.Поскольку в (9.29) элемент объема не зависит от g, $\mu_g = \frac{1}{n!}\omega^n = \mu$, то будет удобнее использовать на всем пространстве $\mathcal{M}$ другую слабую риманову структуру, определенную формулой (3.18) из § 3. В этом случае подмногообразие $\mathcal{AM} \subset \mathcal{M}$ является вполне геодезическим в $\mathcal{M}$, при этом геодезические на $\mathcal{AM}$ имеют вид $g_t = ge^{tA}$. Отсюда следует, в частности, что отображение $E_{AM} : \mathrm{End}_{SJ_0}(TM) \longrightarrow \mathcal{AM}, \quad P \mapsto g = g_0 e^P, \; g(X,Y) = g_0(X, e^P Y)$ задает нормальные координаты на пространстве $\mathcal{AM}$ в окрестности элемента g_0. Из вполне геодезичности и из свойств структуры (3.18) мы получаем, что ковариантная производная и тензор кривизны пространства $\mathcal{AM}$ имеют вид:

$$\nabla_a b = d_a b - \frac{1}{2}(aB + bA), \quad R(a,b)c = -\frac{1}{4} g\ [[A,B],C]. \tag{9.30}$$

Последняя формула обеспечивает простое выражение для секционных кривизн многообразия $\mathcal{AM}$. В частности, голоморфная секционная кривизна определяется формулой $K(a, \mathbf{J}a) = -\frac{1}{4\|a\|^2}\int_M \mathrm{tr}(A^4) d\mu$.

Представляет интерес также выражение метрики и кривизны пространства $\mathcal{AM}$ в глобальной параметризации $\Psi_{AM} : \mathcal{P}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{AM}, \quad P \to g = g_0(1+P)(1-P)^{-1}$ найденое в работе [224].

Теорема 9.6. *Пространство $\mathcal{AM}$ имеет следующие геометрические характеристики.*

1) *Скалярное произведение задается формулой:*

$$(A,B)_P = 4\int_M \mathrm{tr}\left((1-P^2)^{-1}A(1-P^2)^{-1}B\right) d\mu, \tag{9.31}$$

где $A, B \in T_P\mathcal{P}_{J_0} = \mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$.

2) *Ковариантная производная векторных полей, заданных (постоянными) операторами A и B:*

$$\nabla_A B = AP(1-P^2)^{-1}B + BP(1-P^2)^{-1}A. \tag{9.32}$$

3) *Тензор кривизны имеет вид:*

$$R(A,B)C = -(1-P^2)\left[\left[(1-P^2)^{-1}A, (1-P^2)^{-1}B\right], (1-P^2)^{-1}C\right], \tag{9.33}$$

где $A, B, C \in T_P\mathcal{P}_{J_0} = \mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$.

4) *Секционная кривизна K_σ в направлении площадки σ, заданной ортонормированной парой A, B находится по формуле:*

$$K_\sigma = \int_M \mathrm{tr}\left(\left[(1-P^2)^{-1}A, (1-P^2)^{-1}A\right]^2\right) d\mu. \tag{9.34}$$

В частности, голоморфная секционная кривизна имеет вид:

$$K(A, AJ_0) = -\int_M \mathrm{tr}\left(\left((1-P^2)^{-1}A\right)^4\right) d\mu. \tag{9.35}$$

5) *Геодезические, выходящие из точки g_0 в направлениях $A \in \mathrm{End}_{SJ_0}(TM)$ представляют собой кривые $P(t)$ на области $\mathcal{P}_{J_0}$ вида:*

$$P(t) = \tanh(tA) = \left(e^{tA} + e^{-tA}\right)^{-1}\left(e^{tA} - e^{-tA}\right). \tag{9.36}$$

В работах [32, 224] найдены секционные кривизны пространства $\mathcal{AM}$ ассоциированных метрик на сфере и на двумерном торе. Показано, в частности, что голоморфная секционная кривизна ограничена сверху отрицательной константой, $K(a, \mathbf{J}a) \leqslant -\frac{1}{8\pi}$ — в случае сферы и $K(a, \mathbf{J}a) \leqslant -\frac{1}{8\pi^2}$ — для тора.

9.6. Разложение пространства ассоциированных метрик. В параграфе 3 определена проекция $\mathrm{vol} : \mathcal{M} \to \mathcal{V}, \quad g \longmapsto \mu_g$, которая метрике $g \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие риманов элемент объема μ_g. Слоем расслоения vol над $\mu \in \mathcal{V}$ является пространство $\mathcal{M}_\mu$ метрик с одним и тем же римановым элементом объема μ. Фиксация элемента объема μ определяет разложение пространства $\mathcal{M}$ в прямое произведение $\varphi_\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{V} \times \mathcal{M}_\mu, \quad g \longmapsto (\mu_g, \rho^{-\frac{2}{m}} g)$, где ρ — плотность элемента объема μ_g относительно μ, т.е. функция на M, определяемая из равенства $\mu_g = \rho\mu$. При таком разложении пространство $\mathcal{V}$ элементов объема соответствует пространству метрик $\mathcal{P}g$, конформно эквивалентных фиксированной метрике $g \in \mathcal{M}_\mu$, $\mathcal{V} \times \{g\} \to \mathcal{P}g, \quad \nu \longmapsto \rho^{\frac{2}{m}} g$. Таким образом, пространство всех римановых метрик на многообразии M раскладывается в прямое произведение пространства метрик с фиксированным римановым элементом объема и пространства поточечно конформно эквивалентных метрик. Аналогичная конструкция возможна в случае симплектического и контактного многообразий.

Симплектическая форма ω на многообразии M определяет следующую известную проекцию пространства $\mathcal{M}$ на $\mathcal{AM}_\omega$. Пусть $g' \in \mathcal{M}$ — любая метрика. Существует единственный кососимметрический автоморфизм A касательного расслоения TM, такой, что:

$$\omega(X,Y) = g'(AX,Y), \quad A^T = -A.$$

К эндоморфизму A применяем полярное разложение $A = JH$, где J - ортогональный и H — положительный симметрический операторы. Эндоморфизм $-A^2 = A^TA = AA^T$ является положительно определенным и симметрическим относительно g'. Тогда $H = (-A^2)^{\frac{1}{2}}$ — положительный квадратный корень из $-A^2$. Как известно, он коммутирует с операторами A и J. Полагаем $J = A(-A^2)^{-\frac{1}{2}}$. Легко проверяется, что J является почти комплексной структурой, $J^2 = A(-A^2)^{-\frac{1}{2}}A(-A^2)^{-\frac{1}{2}} = A^2(-A^2)^{-1} = -I$. Формула $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ определяет риманову метрику на M. Действительно,

$$g(X,Y) = \omega(X,JY) = g'(AX,JY) = g'(AX, A(-A^2)^{-\frac{1}{2}}Y) =$$

$$= g'(X,(-A^2)(-A^2)^{-\frac{1}{2}}Y) = g'(X,(-A^2)^{\frac{1}{2}}Y).$$

Поскольку оператор $(-A^2)^{\frac{1}{2}}$ положительный и симметрический, то g является римановой метрикой. Отсюда также следует положительность почти комплексной структуры J: $\omega(X,JX) = g(X,X) > 0$.

Метрика g является J-эрмитовой:

$$g(JX,JY) = \omega(JX,-Y) = -g'(AJX,Y) = -g'(AA(-A^2)^{-\frac{1}{2}}X,Y) =$$

$$= g'((-A^2)^{\frac{1}{2}}X,Y) = g'(X,(-A^2)^{\frac{1}{2}}Y) = g(X,Y).$$

Симплектическая форма ω также J-инвариантна: $\omega(JX,JY) = g(JX,Y) = -g(X,JY) = -\omega(X,J^2Y) = \omega(X,Y)$. Следовательно, J является положительной ассоциированной почти комплексной структурой, а метрика $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ — ассоциированной метрикой, соответствующей структуре J.

Мы получили искомую проекцию

$$p_\omega : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{AM}_\omega, \quad g' \mapsto g, \qquad g(X,Y) = g'(X,(-A^2)^{\frac{1}{2}}Y). \tag{9.37}$$

Поскольку оператор J по построению является ортогональным относительно g', то метрика g' также является эрмитовой относительно п.к.с. J. Можно показать, что слой $p_\omega^{-1}(g)$ есть множество $\mathcal{M}_J$ всех J-эрмитовых метрик.

Лемма 9.7 (см. [31]). *Для любой ассоциированной метрики* $g \in \mathcal{AM}_\omega$ *и соответствующей п.к.с.* J*, прообраз элемента* g *при проекции* p_ω *совпадает с множеством* $\mathcal{M}_J$ *всех* J*-эрмитовых римановых метрик на* M*:*

$$p_\omega^{-1}(g) = \mathcal{M}_J.$$

Пусть $g_0 \in \mathcal{AM}_\omega$ — некоторая фиксированная ассоциированная метрика и J_0 — соответствующая ей почти комплексная структура. Любая другая ассоциированная метрика g, J может быть представлена в виде $g(X,Y) = g_0(X,(1+P)(1-P)^{-1}Y), \quad J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$, где оператор P антикоммутирует с п.к.с. J_0, симметричен относительно g_0 и $1-P^2$ положителен относительно g_0. Возникает естественный вопрос: связаны ли аналогичными соотношениями другие метрики слоев $\mathcal{M}_{J_0}$ и $\mathcal{M}_J$? Ответ дает следующая

Лемма 9.8 (см. [31]). *Пусть* $g_0' \in \mathcal{M}_{J_0}$ *— произвольная* J_0*-эрмитова метрика и* $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1}$*. Тогда* g'*, определенная равенством:*

$$g'(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g_0'\left((1+P)(1-P)^{-1}X,Y\right) + g_0'\left(X,(1+P)(1-P)^{-1}Y\right)\right) \tag{9.38}$$

является J-эрмитовой метрикой. Фундаментальная форма $\omega'(X,Y) = g'(JX,Y)$ метрики g' выражается через ω следующим образом:

$$\omega'(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\omega(X,Y) + \omega\left((1+P)(1-P)^{-1}X, (1+P)(1-P)^{-1}Y\right)\right). \tag{9.39}$$

Из данной леммы следует, что для ассоциированных метрик g_0, J_0 и g, J слои $\mathcal{M}_{J_0}$ и $\mathcal{M}_J$ естественно диффеоморфны. Действительно, формулы

$$g_0(X,Y) = g(X, (1-P)(1+P)^{-1}Y), \quad J_0 = J(1-P)(1+P)^{-1},$$

позволяют определить обратное отображение слоев $\mathcal{M}_J \to \mathcal{M}_{J_0}$:

$$g'_0(X,Y) = \frac{1}{2}\left(g'\left((1-P)(1+P)^{-1}X, Y\right) + g'\left(X, (1-P)(1+P)^{-1}Y\right)\right). \tag{9.40}$$

Теорема 9.9 (см. [31]). *Пространство $\mathcal{M}$ является гладким тривиальным расслоением над $\mathcal{AM}_\omega$. Слоем над элементом $(g,J) \in \mathcal{AM}_\omega$ служит пространство $\mathcal{M}_J$ всех J-эрмитовых римановых метрик на M.*

В качестве искомой тривиализации можно взять ILH-гладкое отображение (9.38):

$$\Psi_M : \mathcal{P}_{J_0} \times \mathcal{M}_{J_0} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (P, g'_0) \longrightarrow g',$$

где метрика g' определяется равенством (9.38). Из леммы 9.8 следует, что $\mathcal{M}_{J_0}$ диффеоморфно отображается на весь слой $\mathcal{M}_J$ расслоения p_ω над точкой $g(X,Y) = g_0((1+P)X, (1-P)^{-1}Y)$. Обратное отображение для Ψ_M определяется соответствием (9.40), $\mathcal{M}_J \to \mathcal{M}_{J_0}$, $g' \longrightarrow g'_0$ вместе с проекцией $p_\omega : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{AM}_\omega$.

Таким образом, пространство всех римановых метрик на имплектическом многообразии M раскладывается в прямое произведение пространства ассоциированных метрик и пространства J-конформно эквивалентных метрик.

9.7. Действие группы симплектических диффеоморфизмов на пространства ассоциированных метрик. Как уже упоминалось, на пространстве $\mathcal{AM}$ действует группа $\mathcal{D}_\omega$ гладких симплектических диффеоморфизмов многообразия M, т.е. таких диффеоморфизмов $\eta : M \to M$, которые сохраняют симплектическую форму $\eta^*\omega = \omega$. Группа $\mathcal{D}_\omega$ действует также на пространстве $\mathcal{A}_\omega$ положительных ассоциированных почти комплексных структур: если $\eta \in \mathcal{D}_\omega$ и $J \in \mathcal{A}_\omega$, то $\eta^*J = (d\eta)^{-1} \circ (J \circ \eta) \circ d\eta$. Легко проверяется $\mathcal{D}_\omega$-эквивариантность диффеоморфизма $G : \mathcal{A}_\omega \longrightarrow \mathcal{AM}$.

Установим ортогональные разложения типа Берже-Эбина пространств S_2 и S_{2A}, связанные с действием группы $\mathcal{D}_\omega$. Группа $\mathcal{D}_\omega$ является ILH-группой Ли с алгеброй Ли $T_e\mathcal{D}_\omega$, состоящей из гладких локально гамильтоновых векторных полей X на M. Рассмотрим также ILH-группу Ли $\mathcal{G}$ точных симплектических диффеоморфизмов. Ее алгеброй Ли служит алгебра $\mathcal{H}$ гамильтоновых векторных полей X_F на M [199, 212]. Произвольное гамильтоново векторное поле X_F можно представить в виде $X_F = J\,\mathrm{grad}\,F$, где F — некоторая функция на M, называемая гамильтонианом поля X_F и J — почти комплексная структура, соответствующая метрике g. Поэтому ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ к $\mathcal{H}$ в пространстве $\Gamma(TM)$ всех векторных полей состоит из векторных полей V на M, удовлетворяющих условию $\mathrm{div}\,JV = 0$.

Зафиксируем риманову метрику $g \in \mathcal{AM}^s$ и рассмотрим ее орбиту $g\mathcal{G}$. Касательное пространство $T_g(g\mathcal{G})$ состоит из 2-форм вида $h = L_{X_F}g$. Рассмотрим дифференциальный оператор, действующий на функциях:

$$D_g : H^{s+2}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow S_2^s, \qquad D_g(F) = L_{X_F}g.$$

Для функции $F \in H^{s+1}(M,\mathbb{R})$ имеем $J(\mathrm{grad}\,F) = X_F$. Поэтому оператор D_g является композицией трех операторов, $D_g = 2\alpha_g \circ J \circ \mathrm{grad}$. Операторы grad и α_g имеют инъективные символы [56], а следовательно, и D_g имеет инъективный символ. Сопряженный имеет вид $D_g^* = 2\,\mathrm{div}\ \circ J \circ \delta_g$. Поэтому $h^* \in \mathrm{Ker}\,D_g^*$ удовлетворяет условию $\mathrm{div}\ (J\delta_g h^*) = 0$. По теореме 1.5 получаем следующее разложение.

Теорема 9.10. *Пространство S_2^s раскладывается в прямую сумму ортогональных подпространств*

$$S_2^s = \operatorname{Ker} D_g^* \oplus \operatorname{Im}\ D_g. \tag{9.41}$$

В соответствии с этим каждая симметричная 2-форма h класса H^s однозначно представляется в виде

$$h = h^* + L_X g, \tag{9.42}$$

где $X = X_F$ — гамильтоново векторное поле класса H^{s+1}, а h^* удовлетворяет условию $\operatorname{div}(J\delta h^*) = 0$.

Пространство 2-форм h^* класса H^s, удовлетворяющих условию $\operatorname{div}\ (J\delta_g h^*) = 0$, будем обозначать символом S_2^{*s}. Разложение (9.41) будем также записывать в виде $S_2^s = S_2^{*s} \oplus \alpha_g(\mathcal{H}^{s+1})$, где $\mathcal{H}^{s+1}$ — пространство гамильтоновых векторных полей на M класса H^{s+1}.

Следствие 9.11. *Пространство S_{2A}^s симметричных антиэрмитовых 2-форм раскладывается в ортогональную прямую сумму*

$$S_{2A}^s = S_{2A}^{*s} \oplus \alpha_g(\mathcal{H}^{s+1}), \quad h = h^* + L_X g, \tag{9.43}$$

где $X = X_F$ — гамильтоново векторное поле класса H^{s+1}, а h^* — антиэрмитова и удовлетворяет условию $\operatorname{div}(J\delta h^*) = 0$.

Теорема 9.12 (см. [25]). *Пространство S_2^s раскладывается в прямую сумму ортогональных подпространств*

$$S_2^s = S_2^{0s} \oplus B^s \oplus \alpha_g(\mathcal{H}^{s+1}). \tag{9.44}$$

В соответствии с этим каждая симметричная 2-форма h класса H^s однозначно представляется в виде

$$h = h^0 + L_Y g + L_X g, \tag{9.45}$$

где $X = X_F$ — гамильтоново векторное поле класса H^{s+1}, h^0 обладает свойством $\delta_g(h^0) = 0$, а векторное поле Y класса H^s — тем свойством, что $\operatorname{div} J\delta_g L_Y g = 0$.

Замечание. Для векторного поля $\delta_g L_Y g$ имеется следующее выражение из [109]:

$$\delta_g L_Y g = \Delta Y - \operatorname{grad}(\operatorname{div}\ Y) - 2\operatorname{Ric}(g)Y,$$

где $(\Delta Y)_\sharp = (dd^* + d^*d)(Y_\sharp)$ и $Y_\sharp$ — 1-форма, полученная из векторного поля Y опусканием индекса.

Сформулируем вариант последнего разложения, когда вместо пространства $\mathcal{H}$ гамильтоновых векторных полей на M берется пространство $T_e\mathcal{D}_\omega$ локально гамильтоновых векторных полей. Известно, что $T_e\mathcal{D}_\omega^{s+1}/\mathcal{H}^{s+1}$ изоморфно первой группе когомологий $H^1(M,\mathbb{R})$ многообразия M. Можно считать, что $H^1(M,\mathbb{R})$ представлено векторными полями класса C^∞ и $T_e\mathcal{D}_\omega^{s+1} = \mathcal{H}^{s+1} \oplus H^1(M,\mathbb{R})$ — прямая сумма. Тогда $\alpha_g(T_e\mathcal{D}_\omega^{s+1}) = \operatorname{Im}\ D_g \oplus \alpha_g(H^1(M,\mathbb{R}))$.

Теорема 9.13 (см. [25]). *Пространство S_2^s раскладывается в ортогональную прямую сумму*

$$S_2^s = S_2^{0s} \oplus \widetilde{B}^s \oplus \alpha_g(T_e\mathcal{D}_\omega^{s+1}). \tag{9.46}$$

В соответствии с этим каждое тензорное поле $h \in S_2^s$ однозначно представимо в виде

$$h = h^0 + L_Y g + L_X g, \tag{9.47}$$

где X — локально гамильтоново векторное поле класса H^s, h^0 обладает свойством $\delta_g(h^0) = 0$, а векторное поле Y класса H^s — тем свойством, что 1-форма $\gamma(Y) = (J(\Delta Y - \operatorname{grad}\ \operatorname{div} Y - 2\operatorname{Ric}(g)Y)_\sharp$ является d^*-точной.

В разложении (9.47) векторные поля X и Y определяются по h с точностью до киллингова векторного поля. Рассмотрим разложение антиэрмитовых 2-форм.

Лемма 9.14 (см. [25]). *Если $h \in S_{2A}^s$, то в разложении* (9.47) *вторая компонента $L_Y g$ однозначно определяется по h^0.*

Рассмотрим эрмитову часть $(h^0)_H$ бездивергентной компоненты h^0 формы $h \in S^s_{2A}$. Определим отображение

$$\mathbf{J} : \Gamma(T^0_2 M) \longrightarrow \Gamma(T^0_2 M),$$

которое 2-форме $a(X, Y)$ на M ставит в соответствие 2-форму $\mathbf{J}(a)(X, Y) = a(X, JY)$. Отображение $\mathbf{J}$ коммутирует с оператором взятия эрмитовой части a_H формы a, $\mathbf{J}(a_H) = (\mathbf{J}a)_H$. Отметим очевидный изоморфизм

$$\mathbf{J} : S^s_{2H} \oplus S^s_{2A} \longrightarrow H^s(\Lambda^2_H(M)) \oplus S^s_{2A},$$

где $\Lambda^2_H(M)$ — расслоение эрмитовых кососимметрических 2-форм на M. Если $\varphi \in \Lambda^2_H(M)$, то легко видеть, что $\mathbf{J}\varphi(X, Y) = \varphi(X, JY)$ является эрмитовой симметричной 2-формой.

Теорема 9.15 (см. [25]). *Пространство S^s_{2A} изоморфно прямой сумме ортогональных подпространств*

$$S^s_{2A} \cong AS^{0s}_2 \oplus \alpha_g(T_e \mathcal{D}^{s+1}_\omega). \tag{9.48}$$

Пространство AS^{0s}_2 состоит из симметричных 2-форм $h^0 \in S^{0s}_2$, обладающих свойством $(h^0)_H = \mathbf{J}(d\beta)_H$, где β — 1-форма на M. Каждое тензорное поле $h \in S^s_{2A}$ однозначно представимо в виде

$$h = h^0 + L_Y g + L_X g, \tag{9.49}$$

где X — локально гамильтоново векторное поле класса H^s, компонента $L_Y g$ однозначно определяется по h_0, векторное поле Y и 2-форма h^0 обладают свойствами:

1) $\delta_g h^0 = 0$,
2) $(h^0)_H = -\mathbf{J}((L_Y\omega)_H)$,
3) $\gamma(Y) = (J(\Delta Y - \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ Y - 2\,\mathrm{Ric}(g)Y))_\sharp$ — *d^*-точная 1-форма.*

Мы получили также, что для любого векторного поля Y на M имеют место равенства:

$$L_Y\omega = -\mathbf{J}(L_Y g) - g L_Y J, \qquad \mathbf{J}(L_Y\omega)_H = (L_Y g)_H.$$

В случае сферы и двумерного тора найден [32] явный вид уравнения $\mathrm{div}(J\delta h) = 0$, определяющего существенные инфинитизимальные деформации ассоциированной метрики в разложении $S_{2A} = S^*_{2A} \oplus \alpha_g(\mathcal{H})$. Рассмотрим единичную сферу S^2 в $\mathbb{R}^3$. В качестве одной из координат возьмем сферическую координату $\varphi \in (0, 2\pi)$, вторую координату ζ определим соотношением $z = \tanh(\zeta)$. Тогда каноническая метрика g_0 на S^2 имеет вид: $g_0 = \frac{1}{\cosh^2\zeta}(d\zeta^2 + d\varphi^2)$. В данных координатах антиэрмитова симметричная форма $h \in T_{g_0}\mathcal{AM}(S^2)$ имеет вид $h = u d\zeta^2 - 2v d\zeta d\varphi - u d\varphi^2 = 1/2(u + iv)dw^2 + 1/2(u - iv)d\overline{w}^2$, где $w = \zeta + i\varphi$. Поэтому форму h можно отождествить с комплексной функцией $h \equiv 1/2(u + iv)$. Уравнение $\mathrm{div}(J\delta h) = 0$ имеет вид:

$$\mathrm{div}\, J\ \delta_g h = -\cosh^4(\zeta)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\varphi} - \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + 2\tanh(\zeta)\left(\frac{\partial v}{\partial\zeta} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right) = 0.$$

В комплексной форме имеем, $\mathrm{div}\, J\ \delta_g h = -2\cosh^4(\zeta)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\overline{w}^2} + 2\tanh(\zeta)\frac{\partial h}{\partial\overline{w}}\right) = 0$. В работе найдены [32] частные решения полученного уравнения. В случае тора уравнение $\mathrm{div}(J\delta h) = 0$ выглядит аналогично

$$\mathrm{div}\, J\ \delta_g h = -2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\overline{w}^2}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Частные решения можно получить через тригонометрические функции.

В работе [30] показано, что для действия группы $\mathcal{G}$ точных симплектических диффеоморфизмов на пространстве $\mathcal{AM}$ имеет место терема о срезе. Пусть $I_{\omega,g} = I_g \cap \mathcal{G}$ — группа точных симплектических изометрий метрики $g \in \mathcal{AM}$.

Теорема 9.16 (о срезе). *Пусть $g \in \mathcal{AM}$. Если $s \geqslant 2n + 5$, то существует подмногообразие $\mathcal{S}^s_{\omega,g}$ в $\mathcal{AM}^s$ и локальное сечение $\chi^{s+1} : I_{\omega,g} \setminus \mathcal{G}^{s+1} \to \mathcal{G}^{s+1}$ определенное на открытой окрестности U^{s+1} класса смежности $[I_{\omega,g}]$ обладающее свойствами:*

1) *Если $\gamma \in I_{\omega,g}$, то $\gamma^*(\mathcal{S}^s_{\omega,g}) = \mathcal{S}^s_{\omega,g}$.*
2) *Пусть $\gamma \in \mathcal{G}^{s+1}$. Если $\gamma^*(\mathcal{S}^s_{\omega,g}) \cap \mathcal{S}^s_{\omega,g} \neq \emptyset$, то $\gamma \in I_{\omega,g}$.*

3) *Отображение* $F : \mathcal{S}^s_{\omega,g} \times U^{s+1} \to \mathcal{AM}^s$, $F^s(g_1, u) = \chi^{s+1}(u)^* g_1$, *есть гомеоморфизм на открытую окрестность* V^s *элемента* g *из* $\mathcal{AM}^s$.

Общая схема [93] построения среза для действия всей группы диффеоморфизмов $\mathcal{D}$ на пространстве всех метрик $\mathcal{M}$ применима и к данному случаю. Пусть S^{*s}_{2A} — пространство антиэрмитовых симметричных 2-форм h на M класса H^s, удовлетворяющих условию $\operatorname{div}\ J\,\delta_g h = 0$. Как и в общем случае [93], срез $\mathcal{S}^s_{\omega,g}$ есть образ окрестности нуля $W^s \subset S^{*s}_{2A}$ при экспоненциальном отображении. Для пространства ассоциированных метрик экспоненциальное отображение задается обычной операторной экспонентой:

$$Exp_g : S^{*s}_{2A} \longrightarrow \mathcal{AM}^s, \quad Exp_g(h) = g\, e^H, \tag{9.50}$$

где $H = g^{-1}h$. Поскольку отображение Exp_g является вещественно аналитическим, то срез $\mathcal{S}^s_{\omega,g}$ есть вещественно аналитическое подмногообразие в $\mathcal{AM}^s$. Отметим также, что отображение $F : \mathcal{S}_{\omega,g} \times U \to \mathcal{AM}$ теоремы о срезе является ILH-гладким.

Фактор-пространство $\mathcal{S}^s_{\omega,g}/I_{\omega,g}$ описывает локальную структуру фактор-пространства $\mathcal{AM}^s/\mathcal{G}^{s+1}$ в окрестности класса $[g]$.

9.8. Пространство контактных ассоциированных метрик. Контактый случай рассматривается совершенно аналогично. Многообразия контактных ассоциированных метрик изучались в работах Д. Блэра [57–63], Д. Блэра и Дж. Леджера [65], Д. Блэра и Д. Перрона [66] и в работах автора [24,26,26]. Укаже основные конструкции.

Пусть M — $(2k+1)$-мерное гладкое компактное ориентируемое многообразие без границы. Контактная структура на M заданется гладкой 1-формой θ, такой, что $\theta \wedge (d\theta)^k$ невырожденная в каждой точке M. Тогда последняя форма определяет ориентацию на M. Пусть ξ — характеристическое векторное поле контактной структуры θ и $E = \operatorname{Ker}\theta$ — контактное распределение. Ясно, что $\mathbb{R}\xi \oplus E = TM$.

Напомним, что риманова структура g на M называется *ассоциированной* [57], если существует тензорное поле φ типа (1.1) на M такое, что для любых векторных полей X, Y на M:

1) $g(X, \xi) = \theta(X)$,
2) $\varphi^2 = -I + \xi \otimes \theta$,
3) $d\theta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$,

где φ рассматривается как морфизм $\varphi : TM \to TM$, I — тождественный морфизм. Отметим еще ряд очевидных свойств ассоциированной римановой метрики g:

(a) $g(\xi, \xi) = 1$,
(b) распределение E ортогонально полю ξ,
(c) $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi(E) = E$, φ кососимметрично и $(\varphi|_E)^2 = -I_E$,
(d) форма
$$\frac{(-1)^k}{k!}\theta \wedge (d\theta)^k = \mu_g$$
является римановым элементом объема на M,
(e) имеют место соотношения
$$d\theta(\varphi X, \varphi Y) = d\theta(X, Y), \quad g(X, Y) = \theta(X)\theta(Y) + d\theta(\varphi X, Y).$$

Обозначим символом $\mathcal{M}_\theta$ множество гладких ассоциированных метрик на контактном многообразии (M, θ). Тензорное поле φ задает в подрасслоении $E \subset TM$ структуру комплексного расслоения. Ориентация на M и векторное поле ξ определяют ориентацию в распределении E.

Определение 9.2. Положительной комплексной структурой в подрасслоении $E \subset TM$ будем называть тензорное поле φ типа (1.1) на M, обладающее свойствами 2,3 и задающее положительную ориентацию E.

Множество всех гладких положительных комплексных структур в расслоениии E обозначим символом $\mathcal{A}_\theta$. Пространства $\mathcal{A}_\theta$ и $\mathcal{M}_\theta$ являются множествами гладких сечений конечномерных расслоений, поэтому они являются ILH-многообразиями [36].

Пусть $\mathcal{D}_\theta = \{\eta \in \mathcal{D},\ \eta^*\theta = \theta\}$ — группа точных контактных диффеоморфизмов многообразия M и $\mathcal{D}_{\theta,0}$ — связная компонента, содержащая единицу. Группа $\mathcal{D}_\theta$ действует как на пространстве $\mathcal{M}_\theta$, так и на $\mathcal{A}_\theta$. При этом, если метрике g соответствует тензорное поле $\varphi = \Psi(g)$, то метрике η^*g соответствует тензорное поле $\eta^*\varphi$, где $\eta \in \mathcal{D}_\theta$.

Ассоциированная метрика g на M называется *K-контактной*, если ξ является киллинговым векторным полем, т.е. если $L_\xi g = 0$, где L_ξ — производная Ли. Пусть $\mathcal{K}$ — множество гладких K-контактных римановых меторик на M. Поскольку контактные преобразования $\eta \in \mathcal{D}_\theta$ сохраняют характеристическое векторное поле ξ, то $L_\xi(\eta^*g) = \eta^*(L_\xi g) = 0$ для $g \in \mathcal{K}$. Таким образом, группа $\mathcal{D}_\theta$ действует на пространстве $\mathcal{K}$ K-контактных римановых метрик. В работе [24] показано, что пространство $\mathcal{K}$ является замкнутым ILH-подмногообразием многообразия $\mathcal{M}_\theta$ ассоциированных метрик.

Пусть g — ассоциированная метрика и $\varphi = \Psi(g)$. Известно [57], что g является K-контактной тогда и только тогда, когда $L_\xi\varphi = 0$. Поэтому пространству $\mathcal{K}$ соответствует пространство $\mathcal{A}_\theta(\xi) = \{\varphi \in \mathcal{A}_\theta;\ L_\xi\varphi = 0\}$ положительных комплексных структур в расслоениии E, инвариантных относительно действия ξ.

Пусть теперь контактное многообразие (M, θ) регулярно. Тогда векторное поле ξ порождает свободное действие на M одномерной группы, изоморфной окружности S^1. Поэтому $M/S^1 = N$ – гладкое $2k$-мерное многообразие. Пусть $\pi : M \to N$ — проекция. На многообразии N определена замкнутая невырожденная 2-форма ω такая, что $\pi^*(\omega) = d\theta$. Это вытекает из того, что $L_\xi d\theta = 0$.

Группа $\mathcal{D}_\theta$ точных контактных преобразований многообразия M сохраняет векторное поле ξ. Поэтому $\eta \in \mathcal{D}_\theta$ определяет диффеоморфизм $\overline{\eta}$ многообразия N такой, что $\pi \circ \eta = \overline{\eta} \circ \eta$. Поскольку $\eta^*(d\theta) = d\theta$, то $\overline{\eta}^*(\omega) = \omega$. Поэтому $\overline{\eta} \in \mathcal{D}_\omega(N)$, где $\mathcal{D}_\omega(N)$ – группа диффеоморфизмов многообразия N, сохраняющих 2-форму ω. Таким образом, определено отображение $F : \mathcal{D}_\theta \to \mathcal{D}_\omega(N)$, $P(\eta) = \overline{\eta}$.

Пусть $\mathcal{D}_{\theta 0}$ и $\mathcal{D}_{\omega 0}(N)$ — связные компоненты, содержащие единицу групп $\mathcal{D}_\theta$ и $\mathcal{D}_\omega(N)$. Известно [199, 212], что группа $\mathcal{D}_{\omega 0}(N)$ содержит замкнутую связную ILH-подгруппу $\mathcal{G}$, алгеброй Ли которой является алгебра $\mathcal{H}(N)$ глобально гамильтоновых векторных полей на симплектическом многообразии (N, ω). Последовательность гомоморфизмов ILH-групп

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \mathcal{D}_{\theta 0} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1$$

является точной [212].

Рассмотрим теперь контактное распределение E на M. Поскольку $L_\xi\theta = 0$, то E инвариантно относительно действия S^1. Ясно, что $E/S^1 = TN$ — касательное расслоение многообразия N. Пусть $\mathcal{A}_\omega(N)$ — пространство всех гладких положительных ассоциированных почти комплексных структур на N. Поскольку $E/S^1 = TN$, то пространство $\mathcal{A}_\omega(N)$ отождествляется с пространством $\mathcal{A}_\theta(\xi)$ положительных комплексных структур в E, инвариантных относительно S^1. Отождествление $Q : \mathcal{A}_\omega(N) \longrightarrow \mathcal{A}_\theta(\xi)$ задается формулой

$$Q(J) = (d\pi_E)^*J,$$

где $J \in \mathcal{A}_\omega(N)$, $d\pi_E = d\pi|E$ — ограничение на $E \subset TM$ проекции $d\pi : TM \to TN$. Для $Y \in E_x$, $x \in M$, $y = \pi(x)$ имеем $Q(J)(x)(Y) = (d\pi_E(x))^{-1}\left(J(y)(d\pi_E(x)Y)\right)$. То, что Q — диффеоморфизм, следует стандартным образом из ω-леммы [1]. Поэтому пространство $\mathcal{K}/\mathcal{D}_{\theta,0}$ гомеоморфно пространству $\mathcal{A}_\omega(N)/\mathcal{G}$.

Обозначим через $\mathcal{K}_c$ пространство всех гладких K-контактных метрик на M постоянной скалярной кривизны, равной c.

Пусть M — трехмерное контактное многообразие. Для регулярной контактной структуры векторное поле ξ порождает свободное действие единичной окружности S^1 на M. В этом случае $M/S^1 = N$ — гладкое компактное двумерное многообразие. Пусть p — род поверхности N.

Теорема 9.17 (см. [24]). *Пусть $\dim M = 3$, контактная структура на M регулярна и допускает K-контактную метрику постоянной скалярной кривизны $c < -2$. Тогда пространство $\mathcal{K}_c/\mathcal{D}_{\theta,0}$ является гладким многообразием размерности $8p - 6$. Топологически $\mathcal{K}_c/\mathcal{D}_{\theta,0}$ представляет собой расслоенное пространство над пространством Тейхмюллера $\mathcal{T}_p$ поверхности*

N со слоем $H^1(M,\mathbb{R})/\Gamma$, где Γ — некоторая дискретная подгруппа первой группы когомологий $H^1(M,\mathbb{R})$.

10. РИМАНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ АССОЦИИРОВАННЫХ МЕТРИК

Хорошее изложение этой темы имеется в обзоре Д.Блэра [63]. Кэлеровым многообразиям посвящена глава 2 книге А. Бессе [5].

10.1. Функционалы на пространстве ассоциированных метрик симплектического многообразия. Пусть (M^{2n},ω) — компактное симплектическое многообразие и $\mathcal{AM}$ — пространство всех гладких ассоциированных метрик на M. Поскольку элемент объема не зависит от g, $\mu_g = \frac{1}{n!}\omega^n = \mu$, то можно считать, что пространство $\mathcal{AM}$ лежит в $\mathcal{M}_\mu$. Как было отмечено ранее, $\mathcal{AM}$ является вполне геодезическим подмногообразием. Касательное пространство $T_g\mathcal{AM}$ к многообразию $\mathcal{AM}$ в точке g состоит из антиэрмитовых симметричных 2-форм h на M, $h(JX,JY) = -h(X,Y)$, где J — почти комплексная структура J, соответствующей метрике g. Поэтому критические метрики риманова функционала $A(g)$, ограниченного на подмногообразие $\mathcal{AM}$ определяются тем, что $\mathrm{grad}\ F(g)$ являются симметричными 2-формами, эрмитовыми относительно J. Этот факт впервые отметил и успешно использовал Д. Блэр и С. Януш [60, 64].

Теорема 10.1 (см. [64]). *Пусть M — компактное симплектическое многообразие и $\mathcal{AM}$ — пространство всех гладких ассоциированных метрик на M. Тогда $g \in \mathcal{AM}$ является критической метрикой функционала $A(g)$, ограниченного на пространство $\mathcal{AM}$ тогда и только тогда, когда тензор Риччи $\mathrm{Ric}(g)$ является эрмитовым относительно почти комплексной структуры J, соответствующей метрике g.*

Поскольку для кэлеровых метрик тензор Риччи $\mathrm{Ric}(g)$ является эрмитовым, то такие метрики являются критическими. Естественно поставить вопрос о том, только ли кэлеровы метрики являются критическими для функционала $A(g)$? Ответ на него отрицательный. Контрпримеры даны в работе Давидова и Мушкарова [82]. Они показали, что твисторное пространство компактного эйнштейнова автодуального четырехмерного многообразия отрицательной скалярной кривизны имеет почти кэлерову структуру с эрмитовым тензором Риччи, но не является кэлеровым.

Почти кэлеровы многообразия с эрмитовым тензором Риччи активно изучаются в настоящее время. Основные достижения получены в работах Давидова и Мушкарова [82, 184], Драгхичи [87–89], а также в работах Апостолова, Армстронга и Драгхичи [46–48].

Условие эрмитовости тензора Риччи $\mathrm{Ric}(g)$ является достаточно слабым и множество критических метрик может быть бесконечномерным. В работе [30] показано, что если дополнительно потребовать постоянства скалярной кривизны, то множество критических метрик будет конечномерным.

Пусть $I_\omega(g)$ — группа симплектических изометрий метрики $g \in \mathcal{AM}$ и $\mathcal{S}^s_g$ — срез действия группы $\mathcal{G}$ точных симплектических диффеоморфизмов. Фактор-пространство $\mathcal{S}^s_g/I_\omega(g)$ описывает локальную структуру фактор-пространства $\mathcal{AM}^s/\mathcal{G}^{s+1}$ в окрестности класса $[g]$.

Пусть $\mathcal{CAM}_c$ — множество критических ассоциированных метрик постоянной скалярной кривизны, равной c и пусть $g \in \mathcal{CAM}_c$.

Множество критических ассоциированных метрик постоянной скалярной кривизны c, лежащих в срезе $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{AM}$ в точке g, называется пространством предмодулей $\mathcal{PM}(g)$ критических ассоциированных метрик постоянной скалярной кривизны в окрестности $g \in \mathcal{AM}$. Локальное пространство модулей есть фактор-пространство $\mathcal{PM}(g)/I_\omega(g)$. Оно описывает локальное строение пространства $\mathcal{CAM}_c/\mathcal{G}$ в окрестности класса $[g] = g\mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{PM}^s(g) = \mathcal{S}^s_g \cap \mathcal{CAM}^s_c$ — пространство предмодулей критических метрик постоянной кривизны соболевского класса гладкости H^s, $s \geqslant 2n+5$.

Теорема 10.2 (см. [30]). *Пусть $g \in \mathcal{CAM}_c$, тогда для любого $s \geqslant 2n+5$ существует окрестность W^s элемента g в срезе $\mathcal{S}^s_g$ такая, что пространство $\mathcal{PM}^s(g) \cap W^s$ является аналитическим множеством конечномерного вещественно-аналитического подмногообразия $Z \subset W^s$, касательное пространство T_gZ которого имеет независящщую от s размерность и состоит из антиэрмитовых 2-форм класса C^∞.*

Из теорем 10.1 и 10.2 следует, что аналогом свойства эйнштейновости в случае ассоциированных метрик на симплектическом многообразии является эрмитовость тензора Риччи и постоянство скалярной кривизны. Это дает основание ввести следующее

Определение 10.1. Ассоциированная метрика называется почти эйнштейновой, если она имеет эрмитов тензор Риччи и постоянную скалярную кривизну.

Ассоциированная метрика g и соответствующая почти комплексная структура J определяют почти кэлерову структуру (M, g, J, ω). В случае кэлеровой структуры тензор Риччи является эрмитовым, поэтому можно ожидать, что при постоянной скалярной кривизне метрика будет эйнштейновой. В работах [121, 122] Футаки в отметил, что если первый класс Чженя $c_1(M)$ положителен, то любая кэлерова форма из класса $c_1(M)$ и постоянной скалярной кривизны является эйнштейновой. В то же время существуют примеры кэлеровых метрик постоянной скалярной кривизны, которые не являются эйнштейновыми [167, 205].

Для ассоциированных метрик можно определить тензор $*$-риччи и $*$-скалярную кривизну равенствами:

$$\mathrm{Ric}^*_{ij} = R_{iklt}J^{kl}J^t_j, \qquad s^*(g) = \mathrm{Ric}^{*i}_i. \tag{10.1}$$

На кэлеровом многообразии $\mathrm{Ric}^* = \mathrm{Ric}$. В случае почти кэлерова многообразия тензор Ric^* является эрмитовым в отличие от тензора Риччи Ric. Наиболее важное свойство $*$-скалярной кривизны заключается в том, что

$$s(g) - s^*(g) = -\frac{1}{2}|\nabla J|^2, \tag{10.2}$$

следовательно, $s(g) - s^*(g) \leqslant 0$ и равенство имеет место только для кэлеровых метрик. Тогда, для компактного многообразия, кэлеровы метрики, если они существуют дают максимум функционала

$$S(g) = \int\limits_M s(g) - s^*(g)\ d\mu \tag{10.3}$$

на пространстве $\mathcal{AM}$ и следовательно возникает вопрос о критических точках этого функционала. В работе [64] показано, что условие на критические метрики функционала $S(g)$ те же самые, что и для функционала $A(g)$ — эрмитовость тензора Риччи. Тогда можно ожидать, что для функционала

$$I(g) = \int\limits_M (s(g) + s^*(g))\ d\mu \tag{10.4}$$

каждая метрика $g \in \mathcal{AM}$ будет критической. То, что это действительно так, установлено в работе [62].

Теорема 10.3. *Пусть M — компактное симплектическое многообразие. Тогда $I(g) = \int_M (s(g) + s^*(g))\ d\mu$ есть симплектический инвариант и с точностью до константы он совпадает с произведением $(c_1(M) \cup [\omega]^{n-1})([M])$, где $c_1(M)$ — первый класс Чженя многообразия M.*

Функционал $I(g)$ называется *тотальной скалярной кривизной* [62] симплектического многообразия. В работе [160] Кода рассматривал следующий более общий функционал

$$F_{\lambda\mu}(g, J) = \int\limits_M (\lambda s(g) + \mu s^*(g))\ d\mu_g \tag{10.5}$$

на пространстве $\mathcal{HM}$ почти эрмитовых структур и на пространстве $\mathcal{HM}_\omega$ почти эрмитовых структур с фундаментальной формой ω. Если форма ω — симплектическая, то $\mathcal{HM}_\omega = \mathcal{AM}$. В этом случае Кода показал, что если $\lambda \neq \mu$, то метрика g является критической тогда и только тогда, когда тензор Риччи Ric эрмитов.

В работе [128] Гольдберг показал, что если $R_{XY}JZ = JR_{XY}Z$ на почти кэлеровом многообразии, то метрика является кэлеровой и высказал следующую гипотезу.

Гипотеза Гольдберга. Компактное почти кэлерово эйнштейново многообразие является кэлеровым.

Эта гипотеза не решена до сих пор. При дополнительном предположении неотрицательности скалярной кривизны она доказана в работе [220]. Известно также [196], что без предположения компактности гипотеза не верна. В примерах почти кэлеровых, но не кэлеровых многообразий, обладающих эрмитовым тензором Риччи, скалярная кривизна отрицательна, поэтому естественно поставить следующий вопрос: является ли кэлеровым почти кэлерово многообразие неотрицательной скалярной кривизны с эрмитовым тензором Риччи? В работе [89] Драгхичи показал, что это верно в размерности 4 и не верно в высших размерностях. Для высших размерностей Драгхичи показал [87], что компактное почти кэлерово многообразие с эрмитовым тензором Риччи и с дополнительным условием $\lambda \leqslant \mathrm{Ric}(X) \leqslant 2\lambda$ для некоторого числа λ и любого направления X, то M является кэлеровым.

Хорошо известно, что на кэлеровом многообразии определена форма Риччи и она пропорциональна первой форме Чженя γ, $2\pi\gamma_{ij} = -\mathrm{Ric}_{ik} J^k_{\ j}$. На почти кэлеровом многообразии форма Риччи, вообще говоря, не определена — нужна эрмитовость тензора Риччи. В работе [87] Драгхичи определил форму Риччи почти кэлерова многообразия равенством $\psi(X,Y) = \mathrm{Ric}^{inv}(X, JY)$, где Ric^{inv} — J-инвариантная часть тензора Риччи. Кроме того, на почти кэлеровом многообразии определена форма $*$-Риччи, $\psi^*(X,Y) = \mathrm{Ric}^*(X, JY)$. Последнее определение корректно, поскольку Ric^* является J-инвариантным. Драгхичи показал [87], что если M — компактное почти кэлерово многообразие, форма Риччи которого принадлежит первому классу Чженя, то M является кэлеровым.

10.2. Экстремальные кэлеровы метрики. Пусть M — компактное комплексное многообразие с кэлеровой метрикой. Зафиксируем класс когомологий $[\omega] \in H^{1,1}(M,\mathbb{R})$ кэлеровой формы ω и рассмотрим множество $\mathcal{M}_{[\omega]}$ кэлеровых метрик g, у которых фундаментальная 2-форма принадлежит классу $[\omega]$. Следуя Калаби [77–79], рассмотрим функционал $B(g) = \int_M s(g)^2 d\mu(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_{[\omega]}$. Использование данного функционала мотивируется тем, что для класса метрик $\mathcal{M}_{[\omega]}$ полный объем $V_\omega(M)$ и полная скалярная кривизна $S_\omega = A(g)$ являются постоянными. Из этих фактов по неравенству Шварца получаем, что функционал $B(g)$ ограничен снизу числом S_ω^2/V_ω и нижняя граница достигается, только в том случае, когда существует метрика $g \in \mathcal{M}_{[\omega]}$ постоянной скалярной кривизны.

Калаби установил также [77], что на пространстве $\mathcal{M}_{[\omega]}$ являются постоянными следующие функционалы: $C(g) - B(g)$, $D(g) - C(g)$. Оценки снизу получены также и для функционалов $C(g)$ и $D(g)$.

Калаби определил *экстремальные кэлеровы метрики* как критические для функционала $B(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_{[\omega]}$ и получил следующий результат (см. также [5]):

Теорема 10.4. *Кэлерова метрика g является экстремальной тогда и только тогда, когда градиент функции скалярной кривизны $s(g)$ является (вещественным) голоморфным векторным полем.*

В случае римановых поверхностей в работе [243] показано, что если эйлерова характеристика неположительна, то экстремальные метрики существуют и имеют постоянную скалярную кривизну.

Ясно, что кэлеровы метрики постоянной скалярной кривизны являются экстремальными. Кроме того, многообразия, которые не имеют голоморфных векторных полей имеют только такие экстремальные метрики. С другой стороны, Калаби [78] привел примеры экстремальных метрик непостоянной скалярной кривизны, откуда, в частности, следует, что существуют экстремальные метрики, которые кэлеровы, но не эйнштейновы. Известно [171], что комплексные поверхности с положительным первым классом Чженя, которые допускают экстремальные метрики, могут быть только такими: $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ и раздутие $\mathbb{C}P^2$ в одной точке. В первых двух случаях экстремальные метрики эйнштейновы, а в третьем случае экстремальная метрика имеет непостоянную скалярную кривизну [78]. Другое построение экстремальной метрики непостоянной скалярной кривизны на раздутии $\mathbb{C}P^n$ в одной точке приведено в работе [222].

В работе [171] Левин привел примеры компактных кэлеровых многообразий, которые не допускают экстремальных кэлеровых метрик, эти примеры получаются раздутием поверхностей Хирцебруха. Примеры линейчатых поверхностей, которые не имеют нетривиальных голомофных векторных полей и которые не допускают экстремальных кэлеровых метрик в заданном кэлеровом классе приведены в работе [76]. Изучению экстремальных метрик на линейчатых многообразиях посвящена работа Фуджики [118]. Фуджики А. и Шумахер Г. [120] изучали пространства модулей экстремальных кэлеровых метрик. В работах [168, 169] показано, что подмножество всех классов когомологий, определенных кэлеровыми формами экстремальных кэлеровых метрик является открытым в $H^{1,1}(M,\mathbb{R})$.

В работе Калаби [79] поставлен вопрос о том, имеет ли функционал $B(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_{[\omega]}$ единственное критическое значение и, следовательно, дают ли экстремальные метрики глобальный минимум в в их кэлеровом классе. Хуанг [140,141] дал утвердительный ответ на этот вопрос. Пусть $\mathcal{F}_\omega$ — характер Футаки (см. [5, с. 126]) и X_ω — экстремальное векторное поле [123]

Теорема 10.5 (см. [140]). *Для любой метрики $g \in \mathcal{M}_{[\omega]}$ имеет место неравенство*

$$B(g) \geqslant S_\omega^2/V_\omega + \mathcal{F}_\omega(X_\omega), \tag{10.6}$$

Причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда метрика g — критическая для функционала $B(g)$.

Пусть (M, J) — компактное комплексное многообразие, допускающее кэлерову метрику. На пространстве всех кэлеровых метрик Хуанг и Симанка [142] определили следующий функционал

$$g \to \Psi(g) = \frac{B(g)\,\mathrm{Vol}(M,g)}{A(g)^2} - 1. \tag{10.7}$$

Функционал $\Psi(g)$ инвариантен относительно изменения масштаба и ограничен снизу нулем. Эта граница достигается только на метриках постоянной скалярной кривизны. Поэтому минимальное значение функционала $\Psi(g)$ на фиксированном кэлеровом классе $\mathcal{M}_{[\omega]}$ измеряет, насколько этот класс далек от метрик постоянной скалярной кривизны. Очевидно, что если ограничить $\Psi(g)$ на пространство $\mathcal{M}_{[\omega]}$, то его критические точки совпадут с критическими метриками функционала $B(g)$.

Теорема 10.6 (см. [142]). *Критические точки функционала $\Psi(g)$ на пространстве всех кэлеровых метрик являются экстремальными и удовлетворяют соотношению*

$$A(g)\int\limits_M (s\rho,\alpha)d\mu = B(g)\int\limits_M (\rho,\alpha)d\mu$$

для любой g-гармонической $(1,1)$-формы α, где ρ — форма Риччи, s — скалярная кривизна метрики g.

Для компактной комплексной поверхности П. Годушон [126] изучал функционал $T(g) = \int_M |\theta|^2 d\mu_g$, где θ есть 1-форма кручения (форма Ли), определенная равенством $d\omega = \theta \wedge \omega$. Этот функционал пропорционален $S(g)$ и на пространстве эрмитовых метрик единичного объема, его критические точки есть кэлеровы метрики. В работе [232] Вайсман рассмотрел функционал $U(g) = \int_M |d\theta|^2 d\mu_g$ на пространстве эрмитовых метрик. Его экстремальные точки включают конформно кэлеровы метрики ($d\theta = 0$). Показана инвариантность функционала относительно конформных изменений метрики, найдены первая и вторая производные функционала $U(g)$.

10.3. Функционалы на многообразиях ассоциированных метрик контактного многообразия. Такие функционалы изучались в работах Д. Блэра [57–63], Д. Блэра и Дж. Леджера [65], Д. Блэра и Д. Перрона [66,67,210,211].

Пусть (M,θ) — гладкое компактное контактное многообразие без границы размерности $(2k+1)$. Пусть ξ — характеристическое векторное поле контактной структуры θ, $E = \operatorname{Ker}\theta$ — контактное распределение и $h = L_\xi\varphi$. Ассоциированной римановой структуре g на M соответствует аффинор φ, который на слоях E действует как комплексная структура.

В работе Д. Блэра и Дж. Леджера [65] установлено, что критические метрики функционала $A(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ ассоциированных метрик на контактном многообразии (M, θ) обладают аналогичными свойствами.

Теорема 10.7 (см. [65]). *Пусть M — компактное контактное многообразие. Тогда $g \in \mathcal{M}_\theta$ является критической метрикой функционала $A(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ тогда и только тогда, когда тензор Риччи $\mathrm{Ric}(g)$, ограниченный на контактное распределение E, является эрмитовым относительно аффинора φ, соответствующего метрике g.*

Последнее свойство $\mathrm{Ric}(g) \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{Ric}(g)$ выполняется для метрик Сасаки [57, с. 76]. Поэтому метрики Сасаки, если они существуют, являются критическими для $A(g)$. Напомним, что контактная метрическая структура Сасаки определяет естественным образом почти комплексную структуру на $M \times \mathbb{R}$, которая является интегрируемой.

Для контактных ассоциированных метрик аналогично определяется тензор $*$-риччи и $*$-скалярная кривизна,

$$\mathrm{Ric}^*_{ij} = R_{iklt}\varphi^{kl}\varphi^t_j, \qquad s^*(g) = \mathrm{Ric}^{*i}_i. \tag{10.8}$$

На контактном многообразии

$$s(g) - s^*(g) - 4k^2 = -\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + 2k - \mathrm{tr}\, h^2 \leqslant 0, \tag{10.9}$$

причем равенство имеет место только в случае многообразия Сасаки. Тогда такие структуры, если они существуют дают максимум функционала

$$S(g) = \int\limits_M (s(g) - s^*(g) - 4k^2)\ d\mu \tag{10.10}$$

на пространстве $\mathcal{AM}$ и, следовательно, возникает вопрос о критических точках этого функционала.

Теорема 10.8 (см. [65]). *Пусть M — компактное контактное многообразие размерности $(2k+1)$. Тогда $g \in \mathcal{M}_\theta$ является критической метрикой функционала $S(g)$ на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ тогда и только тогда, когда операторы $\mathrm{Ric}(g) - 2kh$ и φ коммутируют, будучи ограниченными на контактное распределение E.*

В работе [60] установлен следующий результат.

Теорема 10.9. *Пусть M — компактное регулярное контактное многообразие. Тогда $g \in \mathcal{M}_\theta$ является критической метрикой функционала $L(g) = \int_M \mathrm{Ric}(\xi) d\mu$ на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ тогда и только тогда, когда характеристическое векторное поле ξ порождает однопараметрическую группу изометрий многообразия (M, g).*

Теорема 10.10 (см. [61]). *Пусть T_1M — касательное сферическое расслоение риманова многообразия (M, G) и $\mathcal{M}_\theta$ — пространство римановых метрик, ассоциированных со стандартной контактной структурой на T_1M. Тогда стандартная ассоциированная метрика является критической точкой функционала $L(g) = \int_{T_1M} \mathrm{Ric}(\xi) d\mu$ на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ тогда и только тогда, когда базовое многообразие M имеет постоянную кривизну $+1$ или -1.*

В работах Д. Блэра и Д. Перрона [66, 67] рассмотрен функционал

$$I(g) = \frac{1}{2}\int\limits_M (s(g) + s^*(g) + 4k(k+1))\ d\mu, \tag{10.11}$$

который назван ими *тотальной скалярной кривизной* контактного многообразия. В работе [66] показано, что метрика g есть критическая точка функционала I на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ тогда и только тогда, когда векторное поле ξ порождает 1-параметрическую группу изометрий многообразия (M, g), т.е. метрика является K-контактной. Отметим, что величина $W = \frac{1}{2}(s(g) + s^*(g) + 4k(k+1))$ является естественным обобщением скалярной кривизны Вебстера для CR-структуры, введеннй для размерности 3 в работе [81].

В работе [67] найдена вторая вариация функционала I на пространстве $\mathcal{M}_\theta$ и показано, что индексы функционалов I и $-I$ положительны в каждой критической точке. Этот обобщает известный результат Муто [185]. Как следствие полученного результата, в работе [67] показано, что функционал $A(g)$ на многообразии $\mathcal{M}_\theta$ не может иметь локального минимума в любой метрике Сасаки.

В работе [211] рассмотрен функционал $F(g) = \frac{1}{2}\int_M (s(g) + s^*(g) + 2k\operatorname{Ric}(\xi))\,d\mu$. Из результатов работы [67] вытекает, что функционал $F(g)$ на многообразии $\mathcal{M}_\theta$ не может иметь локального минимума в любой K-контактной метрике.

11. ПРОСТРАНСТВА ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

Основные достижения в изучении однородных римановых метрик отражены в книгах Ш. Кобаяси и К. Номидзу [9], С. Хелгасона [34], Дж. Вольфа [6] и А. Бессе [5]. В данном параграфе мы рассмотрим только один аспект этой теории, связанный с изучением всего пространства $\mathcal{M}^G$ однородных метрик на многообразии $M = G/H$.

11.1. Общие определения и факты. Многообразие M называется *однородным*, если существует группа Ли G, действующая (слева) на M гладко и транзитивно. Мы также предполагаем, что действие $G \times M \to M$ является *эффективным*, т.е. только единичный элемент e группы оставляет неподвижными все точки пространства M. Подгруппа H_x в G, которая оставляет точку $x \in M$ на месте, называется *стационарной* подгруппой точки x. Если $y = ax$, $a \in G$, то $H_y = aH_xa^{-1}$, поэтому стационарные подгруппы любых двух точек однородного многообразия изоморфны. Поскольку преобразования $b \in H_x$ оставляют на месте точку $x \in M$, то их дифференциалы определяют линейные преобразования касательного пространства T_xM. Тогда мы получаем *линейное представление изотропии* χ группы H_x в пространстве T_xM. Поскольку изометрия b определяется образом одной точки x и дифференциалом d_xb, то представление изотропии является точным.

Примером однородного пространства служит факторпространство G/H группы Ли G по замкнутой подгруппе H. Элемент $a \in G$ действует на G/H преобразованием $a : bH \to abH$. Группа G действует на G/H эффективно тогда и только тогда, когда подгруппа H не содержит нормальной подгруппы группы G. Если подгруппа H содержит не более, чем дискретные нормальные подгруппы группы G, то действие G на G/H называется *почти эффективным*.

Рассмотренный пример дает описание произвольного однородного пространства. Действительно, пусть M — однородное G-пространство, $x \in M$ — любая точка и H — ее стационарная подгруппа. Тогда отображение $G/H \to M$, $aH \to ax$ является диффеоморфизмом (см. напр. [34]). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $M = G/H$. Выделенный элемент в M, соответствующий классу eH, будем обозначать символом o. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H, соответственно. Каждый элемент $X \in \mathfrak{g}$ будет отождествляться с векторным полем на M, которое порождено однопараметрической группой преобразований $a_t = \exp(tX)$ многообразия M. При этом следует иметь ввиду, что скобка Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это скобка левоинвариантных векторных полей на G, а векторные поля на $M = G/H$ получаются проектированием правоинвариантных полей на G. Поэтому для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} = -[X, Y],$$

где $[X, Y]_{\mathfrak{g}}$ — скобка Ли в $\mathfrak{g}$, а $[X, Y]$ — скобка Ли соответствующих векторных полей на M.

Пусть Ad_G — присоединенное действие группы Ли G на своей алгебре $\mathfrak{g}$. При действии $\operatorname{Ad}_G a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $a \in G$ элементы подгруппы $b \in H$ отображают подалгебру $\mathfrak{h}$ в себя. Поэтому определено действие H на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = T_oM$, которое также обозначается $\operatorname{Ad}_G b$.

Однородное пространство $M = G/H$ называется *редуктивным*, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{h}$ м $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H и $\mathfrak{p}$ — $\operatorname{Ad}_G(H)$-инвариантное дополнение, т.е. если

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 0, \quad \operatorname{Ad}_G(H)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}. \tag{11.1}$$

Если H — замкнутая подгруппа связной полупростой группы Ли G, то однородное пространство $M = G/H$ является редуктивным.

Если $M = G/H$ — риманово многообразие, причем метрика g инвариантна относительно действия группы G, то M называется *однородным римановым* многообразием. В этом случае группа Ли G является подгруппой группы изометрий I_g метрики g (предполагается, что G является замкнутой подгруппой в I_g). Стационарная подгруппа H_x любой точки $x \in M$ является компактной подгруппой группы G [34]. Известно также [34], что каждое однородное многообразие $M = G/H$ с компактной группой H допускает инвариантную риманову метрику.

Элементы $X \in \mathfrak{g}$ отождествляются с киллинговыми векторными полями на M, а элементы $X \in \mathfrak{h}$ соответствуют киллинговым векторным полям, обращающимися в нуль в точке $x \in M$.

Из компактности группы H следует, что $\mathrm{Ad}_G(H)$ есть компактная линейная группа преобразований пространства $\mathfrak{g}$. При помощи известной процедуры усреднения на алгебре $\mathfrak{g}$ можно построить $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантную евклидову метрику на $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантное дополнение $\mathfrak{p}$ к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ как ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$. Таким образом, однородное риманово многообразие $M = G/H$ является *редуктивным*, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 0$, $\mathrm{Ad}_G(H)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$.

Зафиксируем это ортогональное дополнение $\mathfrak{p}$ и точку $x \in M$. Отождествим $\mathfrak{p}$ с касательным пространством T_xM, поставив в соответствие вектору $X \in \mathfrak{g}$ значение в точке x киллингова векторного поля, определенного элементом $X \in \mathfrak{g}$. При этом представление изотропии группы H в T_xM отождествляется с ограничением присоединенного представления Ad_G подгруппы H на $\mathfrak{p}$.

Пусть g — инвариантная риманова метрика на M. Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $\mathfrak{p}$, соответствующее скалярному произведению g_x в T_xM при отождествлении $T_xM = \mathfrak{p}$. Отметим, что это скалярное произведение $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантно, поскольку группа $H = H_x$ действует изометриями и сохраняет точку x. Таким образом, с каждой G-инвариантной римановой метрикой на $M = G/H$ мы связали $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{p}$. Обратно, $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{p}$ определяет скалярное произведение в $T_xM = \mathfrak{p}$, которое затем действиями группы распространяется на все многообразие M. Таким образом, справедлива

Теорема 11.1. *Пусть G — группа Ли, H — ее компактная подгруппа, не содержащая нормальных подгрупп группы G и $\mathfrak{p}$ — $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда существует естественное взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными римановыми метриками на $M = G/H$ и $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантными скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{p}$. Соответствие задается так: $(X,Y) = g_x(X,Y)$ где слева $X,Y \in \mathfrak{p}$, а справа — это элементы касательного пространства $T_xM = \mathfrak{p}$.*

Доказательство этой и следующих общих теорем о кривизне однородных метрик можно найти в книгах Ш. Кобаяси, К. Номидзу [9] и А. Бессе [5].

Теорема 11.2. *Пусть (M,g) есть G-однородное риманово многообразие и $\mathfrak{p}$ — $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Пусть X,Y — киллинговы векторные поля на M, соответствующие элементам $X,Y \in \mathfrak{p}$. Тогда для ковариантной производной D связности Леви-Чивита имеет место формула*

$$(D_XY)_x = -\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{p}} + U(X,Y), \tag{11.2}$$

где слева X,Y — это киллинговы векторные поля на M, справа $X,Y \in \mathfrak{p}$, $[X,Y]_{\mathfrak{p}}$ — $\mathfrak{p}$-компонента скобки Ли $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ при разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ и отображение $U : \mathrm{p} \times \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ определяется условием

$$2(U(X,Y),Z) = ([Z,X]_{\mathfrak{p}},Y) + (X,[Z,Y]_{\mathfrak{p}}) \tag{11.3}$$

для всех $Z \in \mathfrak{p}$.

Отметим, что метрика g называется *естественно редуктивной*, если $U \equiv 0$.

Теорема 11.3. *Пусть X,Y — произвольные векторы в точке x однородного риманова многообразия M. Тогда, с учетом отождествления $T_xM = \mathfrak{p}$, справедлива формула*

$$\begin{aligned} g_x(R(X,Y)Y,X) = -\frac{3}{4}|[X,Y]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2}([X,[X,Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}},Y) - \frac{1}{2}([Y,[Y,X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}},X)+ \\ + |U(X,Y)|^2 - (U(X,X),U(Y,Y)). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Обозначим $\{X_i\}$ ортонормированный базис пространства $\mathfrak{p} = T_xM$. Положим $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} U(X_i, X_i)$.

Лемма 11.4. *Вектор* $Z = \sum\limits_{i} U(X_i, X_i)$ *однозначно характеризуется как вектор из* $\mathfrak{p}$, *удовлетворяющий условию*

$$(Z, X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X), \qquad \forall X \in \mathfrak{p}, \tag{11.5}$$

где $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)$ — *след эндоморфизма* $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. *см.*

Отметим, что $Z = 0$ тогда и только тогда, когда группа G *унимодулярна*. В базисе $\{X_i\}$ из формулы (11.4) получаем

Следствие 11.5. *Кривизна Риччи* Ric *в точке* x *задается формулой*

$$\operatorname{Ric}(X,X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}([X,[X,X_i]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}([X,[X,X_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 - ([Z,X]_{\mathfrak{p}}, X).$$

Данную формулу можно упростить, если использовать $\operatorname{Ad} G$-инвариантную форму Киллинга-Картана $B(X,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y)$ на алгебре $\mathfrak{g}$. Отметим, что пространство $\mathfrak{p}$ не обязательно B-ортогонально к $\mathfrak{h}$. Форма B отрицательно определена на $\mathfrak{h}$, но на $\mathfrak{p}$ она не обязательно знакоопределена и невырожденна.

Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{p}$, определенное инвариантной метрикой g на M, продолжим на всю алгебру $\mathfrak{g}$. Для этого достаточно положить $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{p}$, а на подалгебре $\mathfrak{h}$ задать $\operatorname{Ad} H$-инвариантное скалярное произведение, существующее в силу компактности H.

Следствие 11.6. *Кривизну Риччи* Ric *в точке* x *можно представить в виде*

$$\operatorname{Ric}(X,X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2}B(X,X) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 - ([Z,X]_{\mathfrak{p}}, X).$$

Следствие 11.7. *Скалярная кривизна* s *в точке* x *(а значит и всюду) задается формулой*

$$s = -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} |[X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B(X_i, X_i) - |Z|^2. \tag{11.6}$$

Дополнительную информацию об однородных метриках и однородных эйнштейновых метриках можно найти, например, в книге А. Бессе [5].

Однородное многообразие $M = G/H$ (с компактной группой H) называется *изотропно неприводимым*, если представление изотропии группы H неприводимо, т.е. представление $\operatorname{Ad}_G(H)$ группы H в пространстве $\mathfrak{p}$ неприводимо.

Теорема 11.8 (см. [241]). *Предположим, что однородное многообразие* $M = G/H$ *изотропно неприводимо. Тогда существует единственная (с точностью до гомотетии)* G*-инвариантная риманова метрика на* M. *Эта метрика является эйнштейновой.*

Действительно, любая G-инвариантная риманова метрика на M задается некоторым $\operatorname{Ad}_G(H)$-инвариантным скалярным произведением в $\mathfrak{p}$. Из неприводимости представления $\operatorname{Ad}_G(H)$ следует, что все $\operatorname{Ad}_G(H)$-инвариантные скалярные произведения в $\mathfrak{p}$ пропорциональны. Следовательно и все однородные римановы метрики пропорциональны. Кроме того, любая $\operatorname{Ad}_G(H)$-инвариантная симметрическая 2-форма на $\mathfrak{p}$ пропорциональна скалярному произведению $(\cdot,\cdot)$. В частности, тензор Риччи пропорционален в точке x метрике в точке x и тем самым, ввиду однородности, всюду на M. Поэтому G-инвариантная риманова метрика на M является эйнштейновой.

Теорема 11.9 (см. [68]). *Пусть* (M, g) — *изотропно неприводимое однородное многообразие. Тогда для любого риманова функционала* F *на* $\mathcal{M}$, *обладающего градиентом, существует такая константа* λ, *что* $\operatorname{grad} F_g = \lambda g$.

Действительно, для любой изометрии a метрики g имеем $a^*(\mathrm{grad}\ F_g) = \mathrm{grad}\ F_g$. В частности, для изометрий $b \in H$, оставляющих на месте точку x, $b^*(\mathrm{grad}\ F_g)(x) = \mathrm{grad}\ F_g(x)$. Учитывая неприводимость группы изотропии, мы получаем, что $\mathrm{grad}\ F_g(x) = \lambda(x)g(x)$. Из однородности пространства следует, что $\lambda(x) = const$.

Следствие 11.10 (см. [68]). *Изотропно неприводимые однородные метрики являются критическими точками любого риманова функционала на пространстве $\mathcal{M}_1$ метрик одного объема, равного единице.*

G-однородное риманово многообразие (M, g) называется *нормальным*, если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует такое $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантное скалярное произведение q что $\mathfrak{p}$ является q-ортогональным дополнением к $\mathfrak{h}$ и метрика g определяется ограничением q на $\mathfrak{p}$. G-однородное риманово многообразие (M, g) называется *стандартным*, если $q = -B$, где B — форма Киллинга-Картана.

Заметим, что в последнем случае группа G компактна и полупроста, поскольку форма форма Киллинга-Картана B отрицательно определена.

Пусть теперь g — любая G-инвариантная риманова метрика на M. Как мы видели, она задается некоторым $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантным скалярным произведением в $\mathfrak{p}$. Для того, чтобы лучше понять, как устроены такие скалярные произведения, рассмотрим линейное представление изотропии χ группы H в $T_xM = \mathfrak{p}$. Поскольку H компактна, то это представление вполне приводимо. Пусть $\mathrm{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_q$ — некоторое разложение $\chi(H)$-модуля $\mathfrak{p}$ на неприводимые подмодули. В случае, когда различные подмодули p_i и p_j попарно неизоморфны, такое разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых, и любая G-инвариантная риманова метрика на $M = G/H$ задается скалярным произведением на $\mathfrak{p}$ вида

$$(X, Y) = x_1(X_1, Y_1)_1 + \cdots + x_q(X_q, Y_q)_q, \tag{11.7}$$

где $(\cdot,\cdot)_i$ — $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантные скалярные произведения в $\mathfrak{p}_i$, $X = X_1 + \cdots + X_q$ — разложение вектора $X \in \mathfrak{p}$, соответствующее разложению $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_q$ и числовые параметры $x_1, \ldots, x_q$ предполагаются положительными. Таким образом, пространство однородных римановых метрик конечномерно и параметризуется точками пространства $\mathbb{R}^q_+$.

В то же время разложение $\mathrm{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_q$ не является единственным в случае если представления $\chi(H)$ на некоторых модулях p_i и p_j $(1 \leqslant i < j \leqslant q)$ эквивалентны. Тем не менее, пространство инвариантных метрик и в этом случае является диффеоморфным $\mathbb{R}^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ [238]. Это обстоятельство позволяет выразить римановы функционалы от однородных метрик в виде функций нескольких вещественных переменных, что существенно облегчает их изучение. Однако при этом возникает вопрос о соответствии критических точек римановых функционалов как функций на $\mathbb{R}^k$ и критических точек этих функционалов на всем многообразии метрик $\mathcal{M}$.

11.2. Принцип симметричной критичности Р. Пале. Пусть $\mathcal{M}$ — пространство всех римановых метрик на многообразии M. Группа Ли G естественным образом действует на этом пространстве. При этом, неподвижные точки этого действия — это в точности однородные G-инвариантные метрики. Обозначим это множество символом $\mathcal{M}^G$. Если мы рассмотрим функционал на $\mathcal{M}$ и ограничим его на подпространство $\mathcal{M}^G$, то критические точки, вообще говоря, не обязаны быть критическими во всем пространстве $\mathcal{M}$. Р. Пале преодолел эту неприятность для G-инвариантных функционалов [201,202]. Его принцип симметричной критичности утверждает, что для того, чтобы точка была бы критической точкой G-инвариантной функции f на всем пространстве, достаточно, чтобы эта точка была критической точкой этой функции на множестве неподвижных точек. Ввиду важности этого принципа для приложений и, в частности, для исследования однородных метрик, рассмотрим его более подробно.

Пусть N — гладкое, класса C^∞ (гильбертово) многообразие, на котором действует группа Ли G. Пусть $\Sigma = \{p \in N;\ gp = p,\ \forall g \in G\}$ — множество неподвижных точек действия группы G. Неподвижную точку $p \in \Sigma$ будем называть также точкой симметричности многообразия N. Пусть $f : N \to \mathbb{R}$ — гладкая G-инвариантная функция на N. Точка $p \in N$ называется критической точкой функции f, если в этой точке дифференциал df_p равен нулю. Принцип симметричной критичности утверждает, что для того, чтобы точка $p \in \Sigma$ была бы критической точкой функции f на N, достаточно, чтобы эта точка была критической точкой функции $f|\Sigma$ на множестве Σ неподвижных точек. Разумеется, в такой общей формулировке принцип симметричной критичности не имеет места. Дело в том. что множество Σ неподвижных точек может иметь достаточно сложную природу. В частности, оно может не быть многообразием. Имеются и проблемы, связанные с группой Ли G, их обсуждение см. в [201, 202]. Если группа Ли G действует на многообразии N изометриями, а также в случае, когда группа G является компактной, принцип симметричной критичности выполняется.

Рассмотрим первый случай. Пусть TN — касательное расслоение. Скалярное произведение в каждой точке $x \in N$ будем обозначать символом $\langle , \rangle_x$. Пусть $O \subset TN$ — окрестность нулевого сечения и $\exp : O \to N$ — экспоненциальное отображение риманова многообразия N. Если $\phi : N \to N$ — изометрия, то хорошо известно, что

$$\exp(d\phi(v)) = \phi(\exp(v)).$$

Экспоненциальное отображение exp является диффеоморфизмом окрестности нуля в T_pN на окрестность точки $p \in N$ и поэтому определяет в этой окрестности нормальные координаты. Если $p \in \Sigma$, то из $\exp \circ dg_p = \phi \circ g$ следует, что в нормальных координатах в окрестности точки p действие группы G есть ортогональное линейное действие. В частности, множество неподвижных точек Σ в этой окрестности соответствует линейному подпространству из T_pN, а именно $\{v \in T_pN;\ dg_p(v) = v,\ \forall g \in G\}$. Поэтому Σ является гладким подмногообразием N. При этом, если вектор $v \in T_pN$ инвариантен относительно всех dg_p, то геодезическая, выходящая в направлении v будет поточечно неподвижной относительно всех $g \in G$ и, следовательно, лежит в Σ. Поэтому Σ является вполне геодезическим в N.

Пусть $f : N \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на N и ∇f_x — ее градиент, $df_x(v) = \langle v, \nabla f_x \rangle_x$. Точка $p \in \Sigma$ является критической точкой функции f на подмногообразии Σ, если и только если градиент ∇f_p ортогонален к касательному пространству $T_p\Sigma$. Если f есть G-инвариантная функция на N, то для любого $g \in G$, $f \circ g = f$. Тогда для дифференциалов имеем: $df_p = d(f \circ g)_p = df_{gp} \circ dg_p = df_p \circ dg_p$. Поскольку dg_p является изометрией на T_pN, то $dg_p(\nabla f_p) = \nabla f_p$ для всех $g \in G$. Тогда, как было отмечено ранее, геодезическая, выходящая в направлении ∇f_p лежит в Σ и поэтому ∇f_p касается Σ. Из этого свойства и из $\nabla f_p \perp T_p\Sigma$ следует, что $\nabla f_p = 0$, т.е. p — критическая точка на всем многообразии N. Таким образом, имеет место

Теорема 11.11. *Пусть G — группа изометрий риманова многообразия N и пусть $f : N \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая G-инвариантная функция на N. Тогда множество Σ неподвижных точек действия группы G является вполне геодезическим гладким подмногообразием в N и если $p \in \Sigma$ есть критическая точка функции $f|\Sigma$, то f является критической точкой функции f на всем N.*

Теорема 11.12 (см. [201]). *Если G — компактная группа Ли, то для любого гладкого G-многообразия N принцип симметричной критичности имеет место.*

Вопрос о справедливости принципа симметричной критичности для других групп рассматривался в работах [135, 138]. Установлен следующий результат.

Теорема 11.13. *Если G есть связная полупростая группа Ли, то принцип симметричной критичности выполняется для конечномерного аналитического G-многообразия N.*

11.3. Римановы функционалы на пространстве однородных метрик. Пусть $M = G/H$ — однородное многообразие. Рассмотрим гильбертово многообразие $\mathcal{M}^s$, $s > n/2+2$ римановых метрик соболевского класса гладкости H^s. Как известно, на этом пространстве определена (сильная) риманова структура $(a, b)^s_g$ (см. §3). Эта риманова структура инвариантна относительно действия группы диффеоморфизмов. Группа Ли G гладких преобразований многообразия M действует $\mathcal{M}^s \times G \to \mathcal{M}^s$ на гильбертовом многообразии $\mathcal{M}^s$ гладкими преобразованиями с сохранением метрики. Поэтому в данном случае имеет место принцип симметричной критичности. Этот принцип можно применить к любому риманову функционалу на пространстве однородных метрик, но наиболее успешные применения связаны с функционалом полной скалярной кривизны. Принцип симметричной критичности в данном случае утверждает, что его критические точки на пространстве однородных метрик являются эйнштейновыми метриками. Это дает хороший способ для нахождения всех эйнштейновых метрик на однородных многообразиях. Данному методу посвящены работы Г. Йенсена [146], М. Керр [153,154], Ю. Г. Никонорова [11,14,16,17,193], К. Боема, М. Вана и В. Циллера [69,71,238].

Пусть g — G-инвариантная риманова метрика на $M = G/H$. Как мы видели, она задается некоторым $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантным скалярным произведением в $\mathfrak{p}$. Рассмотрим линейное представление изотропии χ группы H в $T_xM = \mathfrak{p}$. Поскольку H компактна, то это представление вполне приводимо. Пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_q$ — некоторое разложение $\chi(H)$-модуля $\mathfrak{p}$ на неприводимые подмодули. В случае отсутствия попарно изоморфных подмодулей любая другая G-инвариантная риманова метрика на $M = G/H$ задается набором положительных чисел $(x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q_+$ — коэффициентов в разложении (11.7). Рассмотрим подмножество метрик $\mathcal{M}^G_1$ одного объема. Это многообразие определяется уравнением

$$\prod_{i=1}^{q} x_i^{d_i} = 1 \tag{11.8}$$

в пространстве $\mathbb{R}^q_+$ положительных параметров, где $d_i = \dim \mathfrak{p}_i$. Согласно принципу симметричной критичности однородные эйнштейновы метрики определяются критическими точками функционала скалярной кривизны на этом многообразии.

В случае однородной метрики g скалярная кривизна $s(g)$ является постоянной функцией на многообразии $M = G/H$. Поэтому для функционала скалярной кривизны на пространстве $\mathcal{M}^G_1$ имеем $A(g) = \int_M s(g)d\mu(g) = s(g)\int_M d\mu(g) = s(g)$.

Следуя [5, 238] получим выражение скалярной кривизны метрики $(\cdot,\cdot)_x$. В каждом модуле $\mathfrak{p}_i$ выберем ортонормированный базис $e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{d_i}$. Для любых трех модулей $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{p}_k$ рассмотрим величину

$$E_{ij}^k = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left([e_i^\alpha, e_j^\beta]_{\mathfrak{p}}, e_k^\gamma\right)^2, \tag{11.9}$$

где α, β, γ меняются в пределах от 1 до d_i, d_j, d_k соответственно. Пусть b_i — значения квадратичной формы Киллинга-Картана на векторе из $\mathfrak{p}_i$. В силу неприводимости модуля $\mathfrak{p}_i$ это значение не зависит от выбора вектора.

Очевидно, что множество векторов $\{\frac{1}{\sqrt{x_i}} e_i^j\}$ является ортонормированным базисом для метрики $(\cdot,\cdot)_x$. Поэтому используя формулу (7.37) книги [5], получаем [238]

$$s(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}\frac{b_i d_i}{x_i} - \frac{1}{4}\sum_{i,j,k} E_{ij}^k \frac{x_k}{x_i x_j}. \tag{11.10}$$

Учитывая ограничение на объем, изучается функция Лагранжа на $\mathbb{R}^q_+$

$$\widetilde{s}(x) = s(x) - \lambda\left(\prod_{i=1}^{q} x_i^{d_i} - 1\right). \tag{11.11}$$

Отметим, что если в в разложении $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_q$ присутствуют попарно изоморфные подмодули, описание множества инвариантных метрик усложняется. Соответственно усложняется и задача классификации инвариантных эйнштейновых метрик. Для исследования однородных пространств указанного типа применяются специально разработанные методы [16, 17, 154].

Основы описанного выше аналитического подхода к исследованию эйнштейновых однородных метрик заложены в работах Г. Йенсена [146] и М. Вана и В. Циллера [238]. Следует также отметить работы [50, 51, 153, 154]. Существенный вклад в развитие аналитических методов внесли Ю. Г. Никоноров и Е. Д. Родионов в серии работ [11–18, 193–195]. xxx

Энциклопедическим изданием по эйнштейновым метрикам является книга А. Бессе [5]. Много более свежей информации по однородным метрикам Эйнштейна можно найти в обзоре М. Вана [235]. В недавней работе [71] К. Боем, М. Ван и В. Циллер получили ряд общих результатов по инвариантным эйнштейновым метрикам на компактных однородных пространствах. В частности, ими доказана следующая

Теорема 11.14 (см. [71]). *Пусть G/H — компактное однородное пространство с конечной фундаментальной группой. Тогда пространство модулей G-инвариантных эйнштейновых метрик состоит из конечного числа компонент, каждая из которых компактна.*

Хорошо известно, что любое однородное многообразие Эйнштейна M^n размерности 2 или 3 изометрично пространству постоянной секционной кривизны. Классификация четырехмерных однородных римановых многообразий проведена Исихарой в работе [143]. Изложение результатов Исихары приведено в докладе III книги А. Бессе [4]. Отметим, что в размерности 4 однородное риманово многообразие либо является симметрическим пространством, либо изометрично группе Ли, снабженной левоинвариантной метрикой (см. также [145]). В размерности $n = 5$ полная классификация компактных однородных многообразий Эйнштейна была получена Д.В. Алексеевским, И.-Д. Миателло, С. Феррарисом [43]. Используя аналитические методы, основанные на принципе симметричной критичности, в работах Никонорова Ю.Г. и Родионова Е.Д. [18,195] была получена частичная классификация компактных однородных эйнштейновых многообразий размерности 6. Полная классификация компактных однородных эйнштейновых многообразий размерности 7 получена Никоноровым Ю.Г. в работах [15, 16]. В этой связи отметим также недавний результат К. Боема и М. Керр [70].

Теорема 11.15 (см. [70]). *Пусть M^n — компактное односвязное однородное пространство размерности не более, чем* 11. *Тогда M^n допускает однородную эйнштейнову метрику.*

Заметим, что в размерности 12 известны однородные компактные односвязные пространства, не допускающие однородных метрик Эйнштейна [5, 70, 238].

В работах [12, 69, 71, 238] для доказательства существования инвариантной метрики Эйнштейна на некоторых специальных классах однородных компактных пространств с успехом использованы топологические методы. В работе [193] использован принцип устойчивости невырожденной критической точки для доказательства существования бесконечных серий инвариантных метрик Эйнштейна.

В работах [13, 21, 194, 237] исследованы семейства однородных пространств, условия эйнштейновости стандартной метрики на которых сводятся к решению систем диофантовых уравнений.

В случае компактного однородного многообразия $M = G/H$ скалярная кривизна является постоянной функцией на M, поэтому функционал скалярной кривизны на пространстве $\mathcal{M}_1^G$ сводится к функции скалярной кривизны $A(g) = \int_M s(g)d\mu(g) = s(g)$. Поскольку интегрирование не входит в выражение функционала $A(g)$, то можно, по крайней мере формально, рассматривать функционал $A(g) = s(g)$ на некомпактном однородном многообразии $M = G/H$ и поставить аналогичный вопрос о справедливости вариационного принципа: являются ли критические точки данного функционала однородными эйнштейновыми метриками? Г. Йенсен показал [146], что это верно в случае унимодулярной группы G и подгруппы $H = \{e\}$. Для неунимодулярных групп этот вариационный принцип перестает быть верным. В работе [146] Г. Йенсен привел пример неунимодулярной группы с левоинвариантной метрикой Эйнштейна, которая не является критической для функционала (11.10) скалярной кривизны на пространстве метрик фиксированного объема. Более того, в работе [137] показано, что для любой разрешимой неунимодулярной алгебры функционал скалярной кривизны, ограниченный на множество метрик фиксированного объема не имеет критических точек. В работе [137] для исследования эйнштейновых метрик применяются некоторые модификации функционала скалярной кривизны. Обобщение результата Г. Йенсена получено в работе [11]

Пусть G — унимодулярная группа Ли G и H, K — две ее подгруппы, $H \subset K \subset G$, где H — компактная группа Ли. Рассмотрим множества $\mathcal{M}_1^H$ и $\mathcal{M}_1^K$ Ad_H- и, соответственно, Ad_K-инвариантных метрик объема 1 на $\mathfrak{p}$ относительно некоторого выделенного скалярного произведения, где $\mathfrak{p}$ — некоторое Ad_K-инвариантное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Теорема 11.16 (см. [11]). *Пусть $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_1^K$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $(\cdot,\cdot)$ *является критической точкой функционала скалярной кривизны A на множестве $\mathcal{M}_1^H$;*

2) $(\cdot,\cdot)$ *является критической точкой функционала скалярной кривизны* A *на множестве* $\mathcal{M}_1^K$;
3) $(\cdot,\cdot)$ *является инвариантной эйнштейновой метрикой.*

Есть существенные различия в методике исследовании инвариантных эйнштейновых метрик на компактных и некомпактных однородных пространствах. Хорошо известен следующий результат.

Теорема 11.17 (см. [5]). *Пусть* (M,ρ) — *однородное многообразие Эйнштейна (постоянной) скалярной кривизны* s.

(a) *Если* $s>0$, *то* M *- компактно и фундаментальная группа* $\pi_1(M)$ — *конечна.*
(b) *Если* $s=0$, *то* M *- плоское многообразие.*
(c) *Если* $s<0$, *то* M *- не компактно.*

Доказательство данной теоремы следует из соответствующих теорем С. Майерса [191], Д. В. Алексеевского и Б. Н. Кимельфельда [42] и С. Бохнера [72].

Множество результатов по инвариантным эйнштейновым метрикам на некомпактных однородных пространствах можно найти в работах [5, 137]. Отметим также работы Д.В. Алексеевского [37–41], К. Гордон и М. Керр [129, 155], Д. Шуез [214]. Хорошо известна следующая гипотеза Д.В. Алексеевского.

Гипотеза (см. [40]). Пусть $M=G/H$ — некомпактное однородное многообразие Эйнштейна отрицательной скалярной кривизны. Тогда H является максимальной компактной подгруппой группы G.

В настоящее время эта гипотеза не доказана и не опровергнута. Частичное подтверждение она получила в работе [14]. В случае справедливости гипотезы Д.В. Алексеевского исследование некомпактных эйнштейновых однородных многообразий может быть сведено к исследованию эйнштейновых солвмногообразий [5, 137]. Обстоятельное исследование эйнштейновых солвмногообразий было предпринято Й. Хебером в работе [137]. В цитируемой работе получены важные результаты об алгебраической структуре эйнштейновых солвмногообразий, о существовании и количестве левоинвариантных метрик Эйнштейна на разрешимых группах. Кроме того, в [137] приведена обширная библиография по некомпактным однородным эйнштейновым многообразиям.

11.4. Однородные ассоциированные метрики. Пусть $M=G/H$ — однородное многообразие. Выберем разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ является $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантным. Хорошо известно [9, т. 2, с. 201], что инвариантные почти комплексные структуры на $M=G/H$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством линейных эндоморфизмов $I:\mathfrak{p}\to\mathfrak{p}$ таких, что

$$I^2=-\mathrm{id},\quad I(\mathrm{Ad}(b)X)=\mathrm{Ad}(b)(I(X)),$$

для $b\in H$ и $X\in\mathfrak{p}$. Если группа H связна, то вместо второго свойства можно требовать следующее: $I[Y,X]=[Y,IX]$ для $X\in\mathfrak{p}$ и $Y\in\mathfrak{h}$.

В случае симметрических пространств инвариантные почти комплексные структуры интегрируемы. Точнее, имеет место следующий результат [9, т. 2, с. 240].

Теорема 11.18. *Пусть* $M=G/H$ — *симметрическое однородное пространство с каноническим разложением* $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{p}$ *алгебры Ли.*

1) *Если* $\mathfrak{p}$ *допускает* $\mathrm{Ad}(H)$*-инвариантную комплексную структуру* I, *то* $M=G/H$ *допускает инвариантную комплексную структуру* J, *такую, что каноническая аффинная связность комплексная, а* $M=G/H$ *комплексное аффинно симметрическое.*
2) *Если дополнительно* $\mathfrak{p}$ *допускает* $\mathrm{Ad}(H)$*-инвариантное скалярное произведение, которое эрмитово относительно* I, *то* $M=G/H$ *допускает инвариантную кэлерову метрику, а* $M=G/H$ *эрмитово симметрическое.*

Компактные однородные комплексные многообразия $M=G/H$ изучались в работе Ш. Вана [233]. Имеет место следующий результат (см. также [9, т. 2, с. 338]).

Теорема 11.19. *Пусть G — связная компактная полупростая группа Ли, T — тороидальная подгруппа в G, а $C(T)$ — централизатор для T в G. Пусть H — связная подгруппа из G такая, что $(C(T))_s \subset H \subset C(T)$, где $(C(T))_s$ обозначает полупростую часть в $C(T)$. Тогда факторпространство G/H в случае четной размерности имеет инвариантную комплексную структуру. Обратно, каждое односвязное компактное однородное комплексное многообразие может быть так получено.*

Этот результат позже обобщили Грауэрт и Реммерт [131] (см. также [9, т. 2, с. 338]).

Теорема 11.20. *Каждое компактное однородное комплексное многообразие M есть голоморфное расслоение над однородным проективным алгебраическим многообразием V с комплексно параллелизуемым слоем F.*

Дополнительные сведения о компактных однородных кэлеровых многообразиях можно найти в главе 8 книги А. Бессе [5].

Рассмотрим множество однородных ассоциированных метрик. В этом случае мы должны дополнительно потребовать, чтобы на пространстве $\mathfrak{p}$ существовала $\mathrm{Ad}_G(H)$-инвариантная невырожденная кососимметрическая 2-форма Ω. Она определяет G-инвариантную невырожденную кососимметрическую 2-форму ω на однородном многообразии M. Требование замкнутости 2-формы ω на M является слишком ограничительным, поэтому в дальнейшем оно не предполагается.

Инвариантная комплексная структура I на $\mathfrak{p}$ называется положительной ассоциированной, если $\Omega(IX, IY) = \Omega(X, Y)$ и $\Omega(X, IX) > 0$ для $X, Y \in \mathfrak{p}$, $X \neq 0$. Каждая такая положительная ассоциированная комплексная структура I определяет на M инвариантную ассоциированную почти комплексную структуру J и однородную ассоциированную риманову метрику g на M равенством $g(X, Y) = \Omega(X, IY)$, $X, Y \in \mathfrak{p}$.

Пусть $\mathcal{A}^G_\omega$ и $\mathcal{AM}^G_\omega$ — пространства инвариантных ассоциированных почти комплексных структур и, соответственно, метрик на многообразии $M = G/H$. Отметим, что в случае однородных ассоциированных метрик пространство $\mathcal{AM}^G_\omega$ состоит из метрик одного и того же полного объема (равного единице).

Пространства $\mathcal{A}^G_\omega$ и $\mathcal{AM}^G_\omega$ являются множествами неподвижных точек при действии группы Ли G соответственно на пространствах $\mathcal{A}_\omega$ и $\mathcal{AM}_\omega$. Поэтому для исследования римановых функционалов на пространстве $\mathcal{AM}^G_\omega$ можно использовать принцип симметричной критичности. Согласно этому принципу критические точки функционала скалярной кривизны на пространстве $\mathcal{AM}^G_\omega$ имеют эрмитов тензор Риччи. Кроме того, скалярная кривизна постоянная. Поэтому они являются однородными почти эйнштейновыми метриками.

Следуя работе [84] рассмотрим для примера множество ассоциированных метрик на однородном комплексном многообразии $S^{2n+1} \times S^{2p+1} = U(n+1)/U(n) \times U(p+1)/U(p)$. Будем считать, что n и p не равны нулю одновременно. То, что это многообразие имеет комплексную структуру показано в [9, т. 2, с. 131].

Обозначим $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{h}_1$ ($\mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{h}_2$) алгебры Ли групп Ли $U(n+1)$ и $U(n)$ ($U(p+1)$ и $U(p)$) соответственно. Так как группа $U(n)$ вкладывается в $U(n+1)$ стандартным образом, то $\mathfrak{h}_j$ вкладывается в $\mathfrak{g}_j$ следующим образом: матрице $M \in \mathfrak{h}_j$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_j$, где $j = 1, 2$. Введем базис в $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Пусть $E^j_{\nu\mu}$ это матрица, в которой на месте с номером (ν, μ) стоит 1, а остальные элементы нулевые. Определим:

$$Z^j_{\nu\mu} = E^j_{\nu\mu} - E^j_{\mu\nu},\ T^j_{\nu\mu} = E^j_{\nu\mu} + E^j_{\mu\nu},\ 0 \leqslant \mu < \nu \leqslant n,\ j = 1, 2$$

Матрицы $Z^j_{\nu\mu}$, $iT^j_{\nu\mu}$ (где $j = 1, 2$) образуют базис произведения $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Рассмотрим разложение $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{h}_j \oplus \mathfrak{p}_j$, где $\mathfrak{p}_j$ - подпространство, натянутое на векторы $X^j = \frac{1}{2} iT^j_{00}$, $Y^j_{2\nu-1} = Z^j_{\nu 0}$, $Y^j_{2\nu} = iT^j_{\nu 0}$. Итак, пространство $\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_2$ имеет базис $X^1, Y^1_{2\nu-1}, Y^1_{2\nu}, X^2, Y^2_{2\mu-1}, Y^2_{2\mu}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, $1 \leqslant \mu \leqslant p$.

Предложение 11.21. *Имеют место следующие соотношения*

$$\begin{array}{ll}
1)\ [\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_1]\subset\mathfrak{p}_1: & [X^1,Y^1_{2\nu-1}]=-Y^1_{2\nu},[X^1,Y^1_{2\nu}]=Y^1_{2\nu-1},\\
2)\ [\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_1]\subset\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{p}_0: & [Y^1_{2\nu-1},Y^1_{2\nu}]=-2X^1+iT^1_{\nu\nu},\\
 & [Y^1_{2\nu},Y^1_{2\mu}]=-Z^1_{\nu\mu},\\
 & [Y^1_{2\nu-1},Y^1_{2\mu-1}]=-Z^1_{\nu\mu},\\
 & [Y^1_{2\nu},Y^1_{2\mu-1}]=-T^1_{\nu\mu},\\
3)\ [\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_3]\subset\mathfrak{p}_3: & [X^2,Y^2_{2\nu-1}]=-Y^2_{2\nu},[X^2,Y^2_{2\nu}]=Y^2_{2\nu-1},\\
4)\ [\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_3]\subset\mathfrak{h}_2\oplus\mathfrak{p}_2: & [Y^2_{2\nu-1},Y^2_{2\nu}]=-2X^2+iT^2_{\nu\nu},\\
 & [Y^2_{2\nu},Y^2_{2\mu}]=-Z^2_{\nu\mu},\\
 & [Y^2_{2\nu-1},Y^2_{2\mu-1}]=-Z^2_{\nu\mu},\\
 & [Y^2_{2\nu},Y^2_{2\mu-1}]=-T^2_{\nu\mu},\\
5)\ [\mathfrak{p}_0\oplus\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2\oplus\mathfrak{p}_3]=0 &
\end{array}$$

Рассмотрим известную конструкцию комплексной структуры на $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$ [9]. Известно, что $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$ является главным $S^1\times S^1$ расслоением над базой $\mathbb{CP}^n\times\mathbb{CP}^p$. Пространство $\mathbb{CP}^n\times\mathbb{CP}^p$ и слой $S^1\times S^1$ являются комплексными многообразиями. Если зафиксировать комплексную структуру на базе и слое, то можно получить [9, т. 2, с. 130], комплексную структуру на $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$. Все эти структуры образуют двухпараметрическое семейство $I(a,c)$ $(c>0)$ и все они $U(n+1)\times U(p+1)$-инвариантны. На базисных векторах комплексная структура $I(a,c)$ действует следующим образом

$$I(a,c)X^1=\frac{a}{c}X^1+\frac{1}{c}X^2,\quad I(a,c)X^2=-\frac{a^2+c^2}{c}X^1-\frac{a}{c}X^2$$

$$I(a,c)Y^1_{2\nu-1}=Y^1_{2\nu},\quad I(a,c)Y^2_{2\mu-1}=Y^2_{2\mu},$$

параметры a и c вещественные, $c>0$. Векторы X^1, X^2 являются касательными к слою. Поскольку указанные структуры $U(n+1)\times U(p+1)$-инвариантны, то они однозначно определяются действием $I(a,c)$ на базисных векторах пространства $\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_2$. Обозначим $\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{h}_1\times\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}$. Зафиксируем на $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$ невырожденную инвариантную 2-форму ω:

$$\omega=X^1\wedge X^2+\sum_{\nu=1}^{n}Y^1_{2\nu-1}\wedge Y^1_{2\nu}+\sum_{\nu=1}^{p}Y^2_{2\nu-1}\wedge Y^2_{2\nu}$$

Лемма 11.22. *Все комплексные структуры $I(a,c)$ являются положительно ассоциированными с ω.*

Поэтому каждая комплексная структура $I(a,c)$ определяет единственную ассоциированную (с ω) метрику $g(a,c)(X,Y)=\omega(X,I(a,c)Y)$, которая в выбранном базисе имеет вид:

$$g(a,c)=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix},$$

где

$$g_{11}=\begin{pmatrix}1/c & 0_n^\top\\ 0_n & E_n\end{pmatrix},\quad g_{22}=\begin{pmatrix}(a^2+c^2)/c & 0_p^\top\\ 0_p & E_p\end{pmatrix},\quad g_{21}^\top=g_{12}=\begin{pmatrix}-a/c & 0_p^\top\\ 0_n & 0\end{pmatrix},$$

где 0_n — нулевой вектор-столбец, E_n — единичная $n\times n$-матрица. Каждая метрика этого семейства является $I(a,c)$ - эрмитовой, таким образом мы получаем двупараметрическое семейство эрмитовых многообразий.

Теорема 11.23 (см. [84]). *Двухпараметрическое семейство метрик $g(a,c)$ имеет в выбранном базисе следующие характеристики:*

1) *Кривизна Риччи:*

$$\mathrm{Ric}(a,c)=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{pmatrix},\quad r_{11}=\begin{pmatrix} 2\frac{n+pa^2}{c^2} & 0_n^\top\\ 0_n & 2(1+n-\frac{1}{c})E_n\end{pmatrix},$$

$$r_{22}=\begin{pmatrix} 2\frac{na^2+p(a^2+c^2)^2}{c^2} & 0_p^\top\\ 0_p & 2(1+p-\frac{a^2+c^2}{c})E_p\end{pmatrix},\quad r_{21}^\top=r_{12}=\begin{pmatrix} -2\frac{a}{c^2}(n+p(a^2+c^2)) & 0_p^\top\\ 0_n & 0\end{pmatrix}.$$

Собственные значения кривизны Риччи $\widetilde{r}_i$ равны

$$\widetilde{r}_{1,2}=\frac{x+y\pm\sqrt{(x-y^2+4z^2)}}{2},$$

где

$$x=2\frac{n+pa^2}{c^2},\quad y=2\frac{na^2+p(a^2+c^2)^2}{c^2},\quad z=-2\frac{a}{c^2}(n+p(a^2+c^2)),$$

$$\widetilde{r}_3=\widetilde{r}_4=\dots=\widetilde{r}_{2n+2}=2\left(1+n-\frac{1}{c}\right),\quad \widetilde{r}_{2n+3}=\widetilde{r}_{2n+4}=\dots=\widetilde{r}_{2n+2p+2}=2\left(1+p-\frac{a^2+c^2}{c}\right).$$

2) *Скалярная кривизна:*

$$s=4n\left(1+n-\frac{1}{2c}\right)+4p\left(1+p-\frac{a^2+c^2}{2c}\right).$$

Указанное семейство комплексных структур $I(a,c)$ на $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$ описывает все множество $U(n+1)\times U(p+1)$-инвариантных почти комплексных структур. Пусть $\mathcal{A}_\omega^G$ — множество инвариантных положительных ассоциированных с формой ω почти комплексных структур и $\mathcal{AM}_\omega^G$ — пространство положительных ассоциированных метрик. Рассмотрим на множестве $\mathcal{AM}_\omega^G$ функционал скалярной кривизны

$$s(g)=4n\left(1+n-\frac{1}{2c}\right)+4p\left(1+p-\frac{a^2+c^2}{2c}\right).$$

Его критические точки являются метриками с I-эрмитовым тензором Риччи. Поскольку скалярная кривизна постоянна на многообразии $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$, то эти метрики будут почти эйнштейновыми.

Теорема 11.24. *Если n или p принимает нулевое значение, то среди $U(n+1)\times U(p+1)$-инвариантных эрмитовых метрик $g(a,c)$ на $S^{2n+1}\times S^{2p+1}$ нет метрик с эрмитовым тензором Риччи. Если n и p не равны нулю, то метрика $g(a,c)$, при $a=0$, $c=\sqrt{\frac{n}{p}}$ является почти эйнштейновой.*

Прямые вычисления показывают, что если n или p принимает нулевое значение, то s не имеет критических точек. Если n и p не равны нулю, то в точке $a=0$, $c=\sqrt{\frac{n}{p}}$ функционал s принимает максимальное значение равное $4n(n+1)+4p(1+p)-4\sqrt{np}$.

При $n=p$, $a=0$, $c=\sqrt{\frac{n}{p}}=1$ имеет место равенство: $\mathrm{Ric}=2ng$, т.е метрика является эйнштейновой. Если же $n\neq p$, то эйнштейновых метрик среди ассоциированных однородных, нет.

Почти эйнштейновы метрики $g(0,\sqrt{\frac{n}{p}})$, $n\leqslant p$ обладают следующими свойствами.

Теорема 11.25 (см. [84]). *Секционная кривизна K метрики $g(0,\sqrt{\frac{n}{p}})$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

1) *Если $0<\frac{n}{p}\leqslant\frac{1}{9}$, то $4-3\sqrt{\frac{p}{n}}\leqslant K\leqslant\sqrt{\frac{p}{n}}$. Минимальное значение достигается на бивекторе $Y_{2l-1}^1\wedge Y_{2l}^1$, $l=1,\dots,n$, а максимальное на $\sqrt{c}X^1\wedge Y_i^1$, $i=1,\dots,2n$.*
2) *Если $\frac{1}{9}<\frac{n}{p}\leqslant\frac{9}{16}$, то $4-3\sqrt{\frac{p}{n}}\leqslant K\leqslant 4-3\sqrt{\frac{n}{p}}$. Минимальное значение достигается на бивекторе $Y_{2l-1}^1\wedge Y_{2l}^1$, $l=1,\dots,n$, а максимальное на $Y_{2m-1}^2\wedge Y_{2m}^2$, $m=1,\dots,p$.*

3) *Если* $\frac{9}{16} < \frac{n}{p} \leqslant 1$, *то* $0 \leqslant K \leqslant 4-3\sqrt{\frac{n}{p}}$. *Минимальное значение достигается на бивекторах* $X^1 \wedge X^2$, $Y^1_{2l-1} \wedge Y^2_{2m-1}$ *и* $Y^1_{2l} \wedge Y^2_{2m}$, $l = 1, \ldots, n$, $m = 1, \ldots, p$, *а максимальное на* $Y^2_{2l-1} \wedge Y^2_{2l}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрахам Р.* Трансверсальность отображений/ Приложение 3 к кн.: *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
2. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах// Усп. мат. наук. — 1967. — *22*, № 6. — С. 201–260.
3. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Различные определения производной в линейных топологических пространствах// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 4. — С. 67–116.
4. *Бессе А.* Четырехмерная риманова геометрия. — М.: Мир, 1985.
5. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1990.
6. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1982.
7. *Громол Д., Клингенберг В., Майер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
8. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука. 1986.
9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
10. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
11. *Никоноров Ю. Г.* Функционал скалярной кривизны и однородные эйнштейновы метрики на группах Ли// Сиб. мат. ж. — 1998. — *39*, № 3. — С. 583–589.
12. *Никоноров Ю. Г.* Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 1. — С. 200–205.
13. *Никоноров Ю. Г.* Алгебраическая структура стандартных однородных эйнштейновых многообразий// Мат. тр. — 2000. — *3*, № 1. — С. 119–143.
14. *Никоноров Ю. Г.* О кривизне Риччи однородных метрик на некомпактных однородных пространствах// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 2. — С. 421–429.
15. *Никоноров Ю. Г.* Компактные семимерные однородные многообразия Эйнштейна// Докл. РАН. — 2000. — *372*, № 5. — С. 589–592.
16. *Никоноров Ю. Г.* Классификация инвариантных эйнштейновых метрик на пространствах Алоффа—Уоллача// Тр. конф. «Геометрия и приложения», посв. 70-летию В. А. Топоногова. — Новосибирск, 2001. — С. 128–145.
17. *Никоноров Ю. Г.* Инвариантные метрики Эйнштейна на пространствах Леджера—Обаты// Алгебра и анализ. — 2002. — *14*, № 3. — С. 169–185.
18. *Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д.* Компактные шестимерные однородные многообразия Эйнштейна// Докл. РАН. — 1999. — *366*, № 5. — С. 599–601.
19. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
20. *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. — М.: Мир, 1990.
21. *Родионов Е. Д.* Стандартные однородные эйнштейновы многообразия// Докл. РАН. — 1993. — *328*, № 2. — С. 147–149.
22. *Смоленцев Н. К.* О принципе Мопертюи// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 5. — С. 1092–1098.
23. *Смоленцев Н. К.* Интегралы потоков идеальной баротропной жидкости// Сиб. мат. ж. — 1982. — *23*, № 1. — С. 205–208.
24. *Смоленцев Н. К.* О пространстве K-контактных метрик трехмерного многообразия// Сиб. мат. ж. — 1987. — *28*, № 6. — С. 119–125.
25. *Смоленцев Н. К.* Ортогональные разложения пространства симметрических тензоров на почти кэлеровом многообразии// Сиб. мат. ж. — 1989. — *30*, № 3. — С. 131–139.
26. *Смоленцев Н. К.* О пространстве ассоциированных метрик на регулярном контактном многообразии// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 3. — С. 176–185.
27. *Смоленцев Н. К.* О кривизне пространства ассоциированных метрик на симплектическом многообразии// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 1. — С. 132–139.
28. *Смоленцев Н. К.* О крививизне пространства ассоциированных метрик на контактном многообразии// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 6. — С. 188–194.
29. *Смоленцев Н. К.* Естественные слабые римановы структуры на пространстве римановых метрик// Сиб. мат. ж. — 1994. — *35*, № 2. — С. 439–445.
30. *Смоленцев Н. К.* Критические ассоциированные метрики на симплектическом многообразии// Сиб. мат. ж. — 1995. — *36*, № 2. — С. 359–367.

31. *Смоленцев Н. К.* О пространстве римановых метрик на симплектическом и контактном многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 6. — С. 1402–1407.
32. *Смоленцев Н. К.* О пространствах ассоциированных метрик на сфере и на торе// Вест. КемГУ. Сер. мат. — Кемерово, 2000. — *4*. — С. 237–245.
33. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Риманова геометрия// Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. ВИНИТИ. — 2002. — *76*. — С. 5–262.
34. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
35. *Шумахер Г.* Теория пространств Тейхмюллера. Подход с точки зрения пространств модулей кэлеровых многообразий// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — М.: ВИНИТИ, 1991. — *69*. — С. 278–345.
36. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. — New York: Benjamin, 1978.
37. *Alekseevskii D. V.* Compact quaternionic spaces// Funct. Anal. Appl. — 1968. — *2*. — C. 11–20.
38. *Alekseevskii D. V.* Quaternionic Riemannian spaces with a transitive reductive or solvable group of motions// Funct. Anal. Appl. — 1970. — *4*. — C. 68–69.
39. *Alekseevskii D. V.* Conjugacy of polar factorizations of Lie groups// Mat. Sb. — 1971. — *84*. — C. 14–26.
40. *Alekseevskii D. V.* Classification of quaternionic spaces with a transitive solvable group of motions// Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. — 1975. — *25*. — C. 93–117.
41. *Alekseevskii D. V.* Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature// Mat. Sb. — 1975. — *96*. — C. 93–117.
42. *Alekseevsky D., Kimelfeld B. N.* Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature// Funct. Anal. Appl. — 1975. — *9*. — C. 27–102.
43. *Alekseevsky D., Doti-Miatello I., Ferraris C.* Homogeneous Ricci positive 5-manifolds// Pac. J. Math. — 1996. — *175*. — C. 1–12.
44. *Anderson M. T.* The L^2 structure of moduli spaces of Einstein metrics on 4-manifolds// Geom. Funct. Anal. — 1992. — *2*, № 1. — C. 29–89.
45. *Anderson M. T.* Degeneration of metrics with bounded curvature and applications to critical metrics of Riemannian functionals// Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. — 1993. — *54*, Part 3. — C. 53–79.
46. *Apostolov V., Armstrong J.* Symplectic 4-manifolds with Hermitian Weil tensor // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — *352*. — C. 4501–4513.
47. *Apostolov V., Armstrong J., Draghici T.* Local rigidity of certain classes of almost Kähler 4-manifolds// Ann. Global Anal. Geom. — 2002. — *21*. — C. 151–176.
48. *Apostolov V., Draghici T.* Almost Kähler 4-manifolds with J-invariant Ricci tensor and special Weil tensor// Quart. J. Math. — 2000. — *51*. — C. 275–294.
49. *Araujo H.* Critical points of the total scalar curvature plus total mean curvature functional// Indiana Univ. Math. J. — 2003. — *52*, № 1. — C. 85–107.
50. *Arvanitoyergos A.* $SO(n)$-invariant Einsten metrics on Stiefel manifolds// Diff. Geom. Appl./ Proc. Conf. Brno, 1995. — C. 1–5.
51. *Arvanitoyergos A.* Einstein equations for invariant metric on generalized flag manifolds and inner automorphism// Balkan J. Geom. Appl. — 1996. — *1*. — C. 17–22.
52. *Avez A.* Applications de la formule de Gauss–Bonnet–Chern aux varietes à quatre dimensions// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1963. — *256*. — C. 5488–5490.
53. *Berger M.* Sur la spectre d'une variete Riemanniennne// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1963. — *263*. — C. 13–16.
54. *Berger M.* Quelques formules de variation pour une structure Riemannienne// Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Ser. 4. — 1970. — *3*, № 3. — C. 285–294.
55. *Berger M., Gauduchon P., Mazet E.* Le spectre d'une variete Riemanniennne/ Lect. Notes Math. — 1971. — *194*.
56. *Berger M., Ebin D.* Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold// J. Differ. Geom. — 1969. — *3*, № 3. — C. 379–392.
57. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry/ Lect. Notes Math. — 1976. — *509*.
58. *Blair D. E.* On the space of riemannian metrics on surfaces and contact manifolds// Lect. Notes Math. — 1980. — *792*. — C. 203–219.
59. *Blair D. E.* On the set of metrics associated to a symplectic or contact forms// Bull. Inst. Math. Sinica. — 1983. — *11*. — C. 297–308.
60. *Blair D. E.* Critical associated metrics on contact manifolds// J. Austr. Math. Soc., Ser. A. — 1984. — *37*. — C. 82–88.

61. *Blair D. E.* Critical associated metrics on contact manifolds, III// J. Austr. Math. Soc., Ser. A. — 1991. — *50.* — С. 189–196.
62. *Blair D. E.* The «total scalar curvature» as a symplectic invariant// Proc. 3rd Congress of Geometry. — Thessaloniki, 1991. — С. 79–83.
63. *Blair D. E.* Spaces of metrics and curvature functionals// Handbook of differential geometry. — Amsterdam: North-Holland, 2000. — *1.* — С. 153–158.
64. *Blair D. E., Ianus S.* Critical associated metrics on symplectic manifolds// Contemp. Math. — 1986. — *51.* — С. 23–29.
65. *Blair D. E., Ledger J.* Critical associated metrics on contact manifolds, II// J. Austr. Math. Soc., Ser. A. — 1986. — *43.* — С. 404–410.
66. *Blair D. E., Perrone D.* A variational characterization of contact metric manifolds with vanishing torsion// Can. Math. Bull. — 1992. — *35.* — С. 455–462.
67. *Blair D. E., Perrone D.* Second variation of the «total scalar curvature» on contact manifolds// Can. Math. Bull. — 1995. — *38.* — С. 16–22.
68. *Bleecker D. D.* Critical Riemannian manifolds// J. Differ. Geom. — 1979. — *14.* — С. 599–608.
69. *Böhm C.* Homogeneous Einstein metrics and simplicial complexes/ Preprint, 2003.
70. *Böhm C., Kerr M.* Low-dimensional homogeneous Einstein manifolds/ Preprint, 2002.
71. *Böhm C., Wang M., Ziller W.* A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds/ Preprint, 2002.
72. *Bochner S.* Vectors fields and Ricci curvature// Bull. Ann. Math. Soc. — 1946. — *52.* — С. 776–797.
73. *Bourguignon J.-P.* Une stratification de l'espace des structures Riemanniennes// Commun. Math. — 1975. — *30.* — С. 1–41.
74. *Bourguignon J.-P., Ebin D. G., Marsden J. E.* Sur le noyau des pseudo-differentiels à symbole surjectif et non injectif// C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. — 1976. — *282.* — С. 867–870.
75. *Bourguignon J.-P., Ezin J. P.* Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — *310*, № 2. — С. 867–870.
76. *Burns D., de Bartolomeis P.* Stability of vector bundles and extremal metrics// Invent. Math. — 1988. — *92.* — С. 403–407.
77. *Calabi E.* The space of Kähler metrics// Proc. Int. Congr. Math., Amsterdam. — 1954. — *2.* — С. 206–207.
78. *Calabi E.* Extremal Kähler metrics// Semin. Differ. Geom./ Ann. Math. Stud. 102. — Princeton Univ. Press, 1982. — С. 259–290.
79. *Calabi E.* Extremal Kähler metrics, II// Differ. Geom. Complex Anal. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — С. 95–114.
80. *Chern S. S., Simons J.* Characteristic forms and geometric invariants// Ann. Math. — 1974. — *99.* — С. 48–69.
81. *Chern S. S., Hamilton R. S.* On Riemannian metrics adopted to three-dimensional contact manifolds// Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — *1111.* — С. 279–308.
82. *Davidov J., Muskarov O.* Twistor spaces with Hermitian Ricci tensor// Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — *109.* — С. 1115–1120.
83. *Daurtseva N. A., Smolentsev N. K.* On the space of almost complex structures/ E-print `mathDG/0202139`. — `http://xxx.lanl.gov`.
84. *Daurtseva N. A.* $U(n+1) \times U(p+1)$-invariant Hermitian metrics with Hermitian tensor Ricci on the manifold $S^{2n+1} \times S^{2p+1}$/ E-print `mathDG/0310124`. — `http://xxx.lanl.gov`.
85. *Delanoe P.* On Bianchi identities// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 2002. — *51*, Ser. 2. — С. 237–248.
86. *De Witt B. S.* Quantum theory of gravity. I. The canonical theory// Phys. Rev. — 1967. — *160.* — С. 1113–1148.
87. *Draghici T.* On the almost Kähler 4-manifolds with Hermitian Ricci tensor// Houston J. Math. — 1994. — *20*, № 2. — С. 293–298.
88. *Draghici T.* On some 4-dimensional almost Kähler manifolds// Kodai Math. J. — 1995. — *18.* — С. 156–168.
89. *Draghici T.* Almost Kähler 4-manifolds with J-invariant Ricci tensor// Houston J. Math. — 1999. — *25.* — С. 133–145.
90. *Earle C. J., Eells J.* A fibre bundle description of Teichmuller theory// J. Differ. Geom. — 1969. — *3.* — С. 19–43.
91. *Eells J.* On the geometry of function spaces// Symp. Topol. Algebra, Mexico. — 1958. — С. 303–307.
92. *Eells J.* On submanifolds of certain function spaces// Proc. Nat. Acad. Sci. — 1959. — *45*, № 10. — С. 1520–1522.

93. *Ebin D.* The manifold of riemannian metrics// Proc. Symp. Pure Math./ Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1970. — *15.* — C. 11–40.
94. *Ebin D., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid// Ann. Math. — 1970. — *92*, № 1. — C. 102–163. Рус. перевод: *Эбин Д., Марсден Дж.* Группы диффеоморфизмов и движение идеальной несжимаемой жидкости// Математика. Сб. переводов. — 1973. — *5.* — С. 142–167; Математика. Сб. переводов. — 1973. — *6.* — С. 111–146.
95. *Eichorn J.* The Banach manifold structure of the space of metrics on noncompact manifolds// Differ. Geom. Appl. — 1991. — *1.* — C. 89–108.
96. *Eichorn J.* Spaces of Riemannian metrics on open manifolds// Res. Math. — 1995. — *27.* — C. 256–283.
97. *Eichorn J.* Diffeomorphism groups on noncompact manifolds// В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика/ Зап. науч. семин. ПОМИ. — 1996. — *234.* — С. 41–64.
98. *Eichorn J.* Poincaré's theorem and Teichmüller theory for open surfaces// Asian J. Math. — 1998. — *2*, № 2. — C. 355–403.
99. *Eichorn J.* A classification approach for open manifolds// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2000. — *267.* — С. 9–45.
100. *Eliasson H. I.* On the geometry of manifold of maps// J. Differ. Geom. — 1967. — *1.* — C. 169–194.
101. *Eliasson H. I.* On variations of metrics// Math. Scand. — 1971. — *29.* — C. 317–372.
102. *Escobar J. F.* The Yamabe problem on manifolds with boundary// J. Differ. Geom. — 1992. — *35.* — C. 21–84.
103. *Escobar J. F.* Conformal deformation of Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary// Ann. Math. — 1992. — *136*, № 2. — C. 1–50.
104. *Escobar J. F.* Conformal deformation of Riemannian metric to a constant scalar curvature metric with constant mean curvature on the boundary// Indiana Univ. Math. J. — 1996. — *45.* — C. 917–943.
105. *Fathi A., Flamino L.* Infinitesimal conjugacies and Weil–Petersson metric// Ann. Inst. Fourier, Grenoble. — 1993. — *43*, № 1. — C. 279–299.
106. *Fischer A.* The theory of superspaces/ Relativity. — New York: Plenum, 1970. — C. 303–357.
107. *Fischer A.* Unfolding the singularities in superspace// Gen. Relativity Gravitation. — 1983. — *15.* — C. 1191–1198.
108. *Fischer A.* Resolving the singularities in the space of Riemannian geometries// J. Math. Phys. — 1986. — *27*, № 3. — C. 718–738.
109. *Fischer A., Marsden J.* Linearization stabillity of nonlinear partial differential equations// Proc. Symp. Pure Math. — 1975. — *27*, № 2. — C. 219–263.
110. *Fischer A., Marsden J.* Deformations of the scalar curvature// Duke Math. J. — 1975. — *42.* — C. 519–547.
111. *Fischer A., Marsden J.* The manifold of conformally equivalent metrics// Can. J. Math. — 1977. — *29*, № 1. — C. 193–209.
112. *Fischer A., Tromba A.* On a purely «Riemannian» proof of the structure and dimension of the unramified moduli space of a compact Riemannian surface// Math. Ann. — 1984. — *267.* — C. 311–345.
113. *Fischer A., Tromba A.* Almost complex principal fiber bundles and the complex structure on Teichmuller space// J. Reine Angew. Math. — 1984. — *352.* — C. 151–160.
114. *Fischer A., Tromba A.* On the Weil–Peterson metric on Teichmuller space// Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — *284*, № 1. — C. 329–335.
115. *Fischer A., Tromba A.* A new proof that Teichmüller space is a cell// Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — *303*, № 1. — C. 257–262.
116. *Freed D. S., Groisser D.* The basic Geometry of the manifold of Riemannian metrics and of its quotient by the diffeomorphisms group// Michigan Math. J. — 1989. — *36*, № 3. — C. 323–344.
117. *Fujiki A.* Coarse moduli spaces for polarized Kähler manifolds// Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1984. — *20.* — C. 977–1005.
118. *Fujiki A.* Remarks on extremal Kähler metrics on ruled manifolds// Nagoya Math. J. — 1992. — *126.* — C. 89–101.
119. *Fujiki A., Schumacher G.* The moduli space of Kähler structures on a real compact symplectic manifold// Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1988. — *24*, № 1. — C. 141–168.
120. *Fujiki A., Schumacher G.* The moduli space of extremal compact Kähler manifolds and generalized Weil–Peterson metrics// Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1990. — *26.* — C. 101–183.
121. *Futaki A.* An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics// Invent. Math. — 1983. — *73*, № 3. — C. 438–443.
122. *Futaki A.* On compact Kähler manifolds of constant scalar curvature// Proc. Japan Acad. — 1983. — *59*, Ser. A. — C. 401–402.

123. *Futaki A., Mabuchi T.* Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes// Math. Ann. — 1995. — *301.* — С. 199–210.
124. *Gil-Medrano O., Michor P.* The Riemannian manifold of all Riemannian metrics// Quart. J. Math. Oxford. — 1991. — *42*, № 2. — С. 183–202.
125. *Gauduchon P.* Variation des courbures scalaires en geometrie hermitienne// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1980. — *290.* — С. 327–330.
126. *Gauduchon P.* La 1-forme de torsion d'une variete hermitienne compacte// Math. Ann. — 1984. — *267.* — С. 495–518.
127. *Gilkey P.* The spectral geometry of a Riemannian manifold// J. Differ. Geom. — 1975. — *10.* — С. 601–618.
128. *Goldberg S. I.* Integrability of almost Kähler manifolds// Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — *21.* — С. 96–100.
129. *Gordon C. S., Kerr M.* New homogeneous metrics of negative Ricci curvature// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2001. — *19.* — С. 1–27.
130. *Gordon C. S., Szabo Z. I.* Isospectral deformations of negatively curved Riemannian manifolds with boundary which are not locally isometric// Duke Math. J. — 2002. — *113*, № 2. — С. 355–383.
131. *Grauert H., Remmert R.* Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten// Arch. Math. — 1962. — *13.* — С. 498–507.
132. *Gravesen J.* Complex structures in the Nash–Moser category// Ann. Global Anal. Geom. — 1989. — *7*, № 2. — С. 155-161.
133. *Gromov M.* Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds// Invent. Math. — 1985. — *82*, № 2. — С. 307–347.
134. *Gromov M.* Soft and hard symplectic geometry// ICM-86, AMS. — 1987. — С. 81–98.
135. *Guillemin V., Sternberg S.* Remarks on a paper of Hermann// Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — *130.* — С. 110–116.
136. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser// Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — *7*, № 1. — С. 65–222.
137. *Heber J.* Noncompact homogeneous Einstein spases// Invent. Math. — 1998. — *133.* — С. 279–352.
138. *Hermann R.* The formal linearization of a semi-simple Lie algebra of vector fields about asingular point// Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — *130.* — С. 105–109.
139. *Hilbert D.* Die grundlagen der Physik// Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1915. — С. 395-407.
140. *Hwang A. D.* Extremal Kähler metrics and the Calabi energy// Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci. — 1995. — *71.* — С. 128–129.
141. *Hwang A. D.* On the Calabi energy of extremal Kähler metrics// Int. J. Math. — 1995. — *6*, № 6. — С. 825–830.
142. *Hwang A. D., Simanca S. G.* Distinguished Kähler metrics on Hirzebruch surfaces// Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — *347*, № 1. — С. 1013–1021.
143. *Ishihara S.* Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions// J. Math. Soc. Japan. — 1955. — *7.* — С. 345–370.
144. *Itoh M.* Conformal geometry of Ricci flat 4-manifolds// Kodai Math. J. — 1994. — *17.* — С. 179–200.
145. *Jensen G. R.* Homogeneous Einstein spaces of dimension 4// J. Differ. Geom. — 1969. — *3.* — С. 309–349.
146. *Jensen G. R.* The scalar curvature of left invariant Riemannian metrics// Indiana Univ. Math. J. — 1971. — *20.* — С. 1125–1143.
147. *Jensen G. R.* Einstein metrics on principal fibre bundles// J. Differ. Geom. — 1973. — *8.* — С. 599–614.
148. *Kazdan J. L., Warner F. W.* Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure// J. Differ. Geom. — 1975. — *10*, № 1. — С. 113–134. Рус. перевод: *Каждан Дж. Л., Уорнер Ф. У.* Скалярная кривизна и конформная деформация римановой структуры// Исследования по метрической теории поверхностей/ Сб. переводов «Математика. Новое в зарубежной науке». — М.: Мир, 1980. — С. 81–108.
149. *Kazdan J. L., Warner F. W.* Existence and conformal deformation of of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures// Ann. Math. — 1975. — *101.* — С. 317–331. Рус. перевод: *Каждан Дж. Л., Уорнер Ф. У.* Существование и конформная деформация метрик с заданной гауссовой и скалярной кривизной// Исследования по метрической теории поверхностей/ Сб. переводов «Математика. Новое в зарубежной науке». — М.: Мир, 1980. — С. 109–126.
150. *Kazdan J. L., Warner F. W.* Prescribing curvatures// Proc. Symp. Pure Math. — 1975. — *27*, part 2. — С. 309–319. Рус. перевод: *Каждан Дж. Л., Уорнер Ф. У.* Заданные кривизны// Исследования по метрической теории поверхностей/ Сб. переводов «Математика. Новое в зарубежной науке". — М.: Мир. — 1980. — С. 127–141.

151. *Kazdan J. L., Warner F. W.* A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature functions// Invent. Math. — 1975. — *28*, № 3. — С. 227–230. Рус. перевод: *Каждан Дж. Л., Уорнер Ф. У.* Об одном прямом подходе к определению функций, являющихся гауссовыми или скалярными кривизнами// Исследования по метрической теории поверхностей/ Сб. переводов «Математика. Новое в зарубежной науке». — М.: Мир. — 1980. — С. 142–147.
152. *Kazdan J. L.* Another proof of Bianchi's identity in Riemannian geometry// Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — *81*, № 2. — С. 341–342.
153. *Kerr M.* Some new homogeneous Einstein metrics on symmetric spaces// Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — *348*. — С. 153–171.
154. *Kerr M.* New examples of homogeneous Einstein metrics// Michigan J. Math. — 1998. — *45*. — С. 115–134.
155. *Kerr M.* A deformation of quaternionic hyperbolic space/ Preprint, 2002.
156. *Kim B. H.* Warped products with critical Riemannian metric// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1995. — *71*. — С. 117–118.
157. *Kim J., Sung C.* Deformations of almost Kähler metrics with constant scalar curvature on compact Kähler manifolds// Ann. Global Anal. Geom. — 2002. — *22*. — С. 49–73.
158. *Kobayashi O.* A differential equation arising from scalar curvature function// J. Math. Soc. Japan. — 1982. — *34*, № 4. — С. 665–675.
159. *Kobayashi O.* On a conformally invariant functional of the space of Riemannian metrics// J. Math. Soc. Japan. — 1985. — *37*, № 3. — С. 373–389.
160. *Koda T.* Critical almost Hermitian structures// Indian J. Pure Appl. Math. Soc. — 1995. — *26*. — С. 679–690.
161. *Koiso N.* Non-deformability of Einstein metrics// Osaka J. Math. — 1978. — *15*. — С. 419–433.
162. *Koiso N.* Einstein metrics and complex structcres// Invent. Math. — 1983. — *73*, № 1. — С. 71–106.
163. *Koiso N.* A decomposition of the space $\mathcal{M}$ of Riemannian metrics on a manifold// Osaka J. Math. — 1979. — *16*. — С. 423–429.
164. *Kuiper N. H.* On compact conformally Euclidean spaces of dimension > 2// Ann. Math. — 1950 — *52*. — С. 478–490.
165. *Lafontaine J.* Sur la geometrie d'une generalisation de l'equation d'Obata// J. Math. Pures Appl. — 1983. — *62*. — С. 63–72.
166. *Lamontagne F.* Une remarque sur la norme L^2 du tenseur de courbure// C. R. Acad. Sci. Paris. 1994. — *319*. — С. 237–240.
167. *LeBrun C.* Explicit self-dual metrics on $\mathbb{C}P_2\sharp\ldots\sharp\mathbb{C}P_2$/ Princeton: Preprint, 1989.
168. *LeBrun C., Simanca S.* On the Kähler classes of extremal metrics// Geom. Global Anal. — Sendai, 1993. — С. 255–271.
169. *LeBrun C., Simanca S.* Extremal Kähler metrics and complex deformation theory// Geom. Funct. Anal. — 1994. — *4*. — С. 298–336.
170. *Leslie J.* On a differential structure for the group of diffeomorphisms// Topology. — 1967. — *6*. — С. 263–271.
171. *Levin M.* A remark on extremal Kähler metrics// J. Differ. Geom. — 1985. — *21*. — С. 73–77.
172. *Lihnerowicz A.* Propogateurs et commutateurs en relative generale// Inst. des Hautes Etudes Sci./ Publ. Math. — 1961. — *10*. — С. 293–344.
173. *Lihnerowicz A.* Spineurs harmoniques// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1963. — *257*. — С. 7–9.
174. *Lovelock D.* The Einstein tensor and its generalizations// J. Math. Phys. — 1971. — *12*. — С. 498–501.
175. *Maxim-Răileanu L.* The manifold of Riemannian metrics on a compact manifold with boundary// An. St. Univ. «Al. I. Cusa» Iasi. — 1988. — *34*, Ser. 1-a, № 2. — С. 67–72.
176. *Maxim-Răileanu L.* Critical mapping of Riemannian manifolds and the slice theorem for a action of the diffeomorphism group// An. St. Univ. «Al. I. Cusa» Iasi. — 1988. — *34*, Ser. 1-a, № 2. — С. 149–152.
177. *McKean H. P., Singer I. M.* Curvature and the eigenvalues of the Laplacian// J. Differ. Geom. — 1967. — *1*. — С. 43–69. Рус. перевод: *Маккин Н., Зингер И.* Кривизна и собственные значения оператора Лапласа// Сб. переводов «Математика». — 1969. — *13*, № 6. — С. 138–161.
178. *Michor P.* Manifolds of smooth maps// Cahiers Topol. Geom. Differ. — 1978. — *19*, № 1. — С. 47–78.
179. *Michor P.* Manifolds of smooth maps. II. The Lie group of diffeomorphisms of a non-compact smooth manifolds// Cahiers Topol. Geom. Differ. — 1980. — *21*, № 1. — С. 63–86.
180. *Milnor J.* Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1964. — *51*. — С. 542.

181. *Milnor J. W.* Remarks on infinite dimensional Lie groups// In: Relativity, Groups, and Topology. II/ Les Houches Session XL, 1983 (de Witt B. S., Stora R., eds.). — Amsterdam: North-Holland, 1984.
182. *Minakshisundaram S., Pleijel A.* Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds// Can. J. Math. — 1949. — *1.* — C. 242–256.
183. *Moser J.* On the volume elements on a manifold// Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — *120.* — C. 286–294.
184. *Muškarov O.* On Hermitian surfaces with J-invariant Ricci tensor// J. Geom. — 2001. — *72.* — C. 151–156.
185. *Muto Y.* On Einstein metrics// J. Differ. Geom. — 1974. — *9*, № 4. — C. 521–530.
186. *Muto Y.* Curvature and critical Riemannian metric// J. Math. Soc. Japan. — 1974. — *26*, № 4. — C. 686–897.
187. *Muto Y.* Critical Riemannian metrics// Tensor N.S. — 1975. — *29.* — C. 125–133.
188. *Muto Y.* Critical Riemannian metrics on product manifolds// Kōdai Math. Sem. Rep. — 1975. — *26.* — C. 409–423.
189. *Muto Y.* Curvature and critical Riemannian metric// Proc. Symp. Pure Math. — 1975. — *27*, Part 1. — C. 97–100.
190. *Muto Y.* Riemannian submersions and critical Riemannian metric// J. Math. Soc. Japan. — 1977. — *29.* — C. 493–511.
191. *Myers S. B.* Riemannian manifolds with positive mean curvature// Duke Math. J. — 1941. — *8.* — C. 401–404.
192. *Neuwirther M.* Submanifold geometriy and Hessians on the pseudo-Riemannian manifold of metrics// Acta Math. Univ. Comenianae. — 1993. — *62*, № 1. — C. 51–85.
193. *Nikonorov Yu. G.* New series of Einstein homogeneous netrics// Diff. Geom. Appl. — 2000. — *12.* — C. 25–34.
194. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D.* Standart homogeneous Einstein manifolds and Diophantine equations// Arch. Math. — 1996. — *32.* — C. 123–136.
195. *Nikonorov Yu. G, Rodionov E. D.* Compact homogeneous Einstein 6-manifolds// Diff. Geom. Appl. — 2003. — *19.* — C. 369–378.
196. *Nurowski P., Przanowski M.* A four dimensional example of Ricci flat metric admiting almost Kähler non-Kähler structure// Class. Quantum Grav. — 1999. — *16.* — C. L9–L13.
197. *Obata M.* Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric a sphere// J. Math. Soc. Japan. — 1962. — *14.* — C. 333–340.
198. *Omori H.* On the group of diffeomorphisms on a compact manifold// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — *15.* — C. 167–183.
199. *Omori H.* Infinite dimensional Lie transformations groups// Lect. Notes Math. — 1974. — *427.*
200. *Palais R. S.* On the differentiability of isometries// Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — *8.* — C. 805–807.
201. *Palais R. S.* The principle of symmetric criticality// Commun. Math. Phys. — 1979. — *69.* — C. 19–30.
202. *Palais R. S.* Applications of the symmetric criticality principle to mathematical physics and differential geometry// Proc. Symp. Differ. Geom. and Differ. Equation/ Shanghai–Hefei, 1981. — 1985. — C. 247-302.
203. *Palais R.* Foundations of global non-linear analysis. — New York: Benjamin, 1968.
204. *Patterson E. M.* A class of critical Riemannian metrics// J. London Math. Soc. — 1981. — *2.* — C. 349–358.
205. *Pedersen H., Poon Y. S.* Hamiltonian construction of Kähler–Einstein metrics and metrics of constant scalar curvature// Commun. Math. Phys. — 1991. — *136*, № 2. — C. 309–326.
206. *Pekonen O.* On the De Witt metric// J. Geom. Phys. — 1987. — *4*, № 4. — C. 493–502.
207. *Pekonen O.* On the variational characterization of conformally flat 3-manifolds// J. Geom. Phys. — 1987. — *7*, № 1. — C. 109–117.
208. *Pekonen O.* A short proof of a theorem of Ahlfors// Lect. Notes Math. — 1988. — *1351.* — C. 273–278.
209. *Pekonen O.* Slice theorem for the action of the diffeomorphism groups on the Space of almost complex structures on a compact manifold// Bull. Polish Acad. Sci. Math. — 1989. — *37*, № 7–12. — C. 545–548.
210. *Perrone D.* Torsion and critical metrics on contact three-manifolds// Kodai Math. J. — 1990. — *13.* — C. 88–100.
211. *Perrone D.* Torsion tensor and critical metrics on contact $2n+1$-manifolds// Mh. Math. — 1992. — *114.* — C. 245–259.
212. *Ratiu T., Shmid R.* The differentiable structure of three remarcable diffeomorphisms groups// Math. Z. — 1981. — *177.* - C. 81–100.
213. *Schoen R.* Conformal deformations of Riemannian metrics to constant scalar curvature// J. Differ. Geom. — 1984. — *20.* — C. 479–495.
214. *Schueth D.* On the «standard» condition for noncompact homogeneous Einstein spaces// Geom. Dedicata (to appear).

215. *Schumacher G.* Construction of the coarse moduli space of compact polarized Kähler manifolds with $c_1 = 0$// Math. Ann. — 1983. — *264.* — C. 81–90.
216. *Schumacher G.* Moduli of polarized Kähler manifolds// Math. Ann. — 1984. — *269.* — C. 137–144.
217. *Schumacher G.* On the geometry of moduli spaces// Manuscr. Math. — 1985. — *50*, №№ 1–3. — C. 229–267.
218. *Schumacher G.* Harmonic maps of the moduli space of compact Riemann surfaces// Math. Ann. — 1986. — *275.* — C. 466.
219. *Schumacher G.* Moduli spaces of compact Kähler manifolds. The generalized Petersson–Weil metric and positive line bundles on moduli spaces// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1991. — *36*, №№ 5-6. — C. 291–308.
220. *Sekigawa K.* On some compact Einstein almost Kähler manifolds// J. Math. Soc. Japan. — 1987. — *39.* — C. 677–684.
221. *Shen Ying.* A note on Fischer–Marsden conjecture// Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — *125*, № 3. — C. 901–905.
222. *Simanca S.* A note on extremal metrics of nonconstant scalar curvature// Israel J. Math. — 1992. — *78.* — C. 85–93.
223. *Simanca S.* Heat flows for extremal Kähler metrics// E-print `mathDG/0310363`. — `http://xxx.lanl.gov`.
224. *Smolentsev N. K.* The space of associated metrics on a symplectic manifold// E-print `mathDG/0108110`. — `http:xxx.lanl.gov`.
225. *Subramanian T. N.* Slices for the actions of smooth tame Lie groups/ Thesis, 1974.
226. *Subramanian T. N.* Slices for actions of infinite dimensional groups// Contemp. Math. — 1986. — *54.* — C. 65–77.
227. *Swanson R. C., Chicone C. C.* Eqivalence and slice theory for symplectic forms on closed manifolds// Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — *73*, № 2. — C. 265–270.
228. *Swift S. T.* Natural bundles. I. A minimal resolution of superspace// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — C. 3723–3730.
229. *Tanno S.* Variational problems on contact Riemannian manifolds// Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — *314*, № 1. — C. 349-379.
230. *Tromba A. J.* On a natural algebraic affine connection on the space of almost complex structures and the curvature of Teichmuller space with respect to its Weil–Petersson metric// Manuscr. Math. — 1986. — *56*, № 4. — C. 475–497.
231. *Tromba A. J.* On an energy function for the Weil–Petersson metric on Teichmuller space// Manuscr. Math. — 1987. — *59.* — C. 249–260.
232. *Vaisman I.* On some variational problems for 2-dimensional Hermitian metrics// Ann. Glob. Anal. Geom. — 1990. — *8*, № 2. — C. 137–145.
233. *Wang H. C.* Closed manifolds with homogeneous complex structure// Amer. J. Math. — 1954. — *76.* — C. 1–32.
234. *Wang M.* Some examples of homogeneous Einstein manifolds in dimension seven// Duke Math. J. — 1982. — *49.* — C. 23–28.
235. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and bundle constructions// Surv. Differ. Geom. VI. Essays on Einstein Manifolds (LeBrun C., Wang M., eds.). — Int. Press, 1999. — C. 287–325.
236. *Wang M., Ziller W.* On the isotropy representation of a symmetric space// Proc. Conf. «Differential Geometry on Homogeneous Spaces, Torino, 1983»/ Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1983. — C. 253–261.
237. *Wang M., Ziller W.* On normal homogeneous Einstein manifolds// Ann. Sci. Ecole Norm. Super. — 1985. — *18.* — C. 563–633.
238. *Wang M., Ziller W.* Existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics// Invent. Math. — 1986. — *84.* — C. 177–194.
239. *Wang M., Ziller W.* Einstein metrics on principal bundles// J. Differ. Geom. — 1990. — *31.* — C. 215–248.
240. *Wang M., Ziller W.* On isotropy irreducible Riemannian manifolds// Acta Math. — 1991. — *166.* — C. 223–261.
241. *Wolf J. A.* The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces// Acta Math. — 1968. — *120.* — C. 59–148; Erratum// Acta Math. — 1984. — *152.* — C. 141–142.
242. *Wolf J. A.* Local and global equivalence for flat affine manifolds with parallel geometric structures// Geom. Dedicata. — 1973. — *2.* — C. 127–132.
243. *Xu X.* On the existence of extremal metrics// Pac. J. Math. — 1996. — *174.* — C. 555–568.

244. *Yamada S.* Weil–Peterson convexity of the energy functional on classical and universal Teichmuller spaces// J. Differ. Geom. — 1999. — *51.* — C. 35–96.

245. *Yamaguchi S., Chuman G.* Critical Riemannian metrics on Sasakian manifolds// Kodai Math. J. — 1983. — *6.* — C. 1–13.

246. *Yang D.* Existence and regularity of enrgy-minimizing Riemannian metrics// Int. Math. Res. Notes. — 1991. — C. 7–13.

247. *York J. W.* Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity// J. Math. Phys. — 1973. — *14.* — C. 456–464.

248. *York J. W.* Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1974. — *21.* — C. 319–332.

249. *Ziller W.* Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces// Math. Ann. — 1982. — *259.* — C. 351–358.